

ДИАГОНАЛЬНЫЙ СПИНОВЫЙ БАЗИС  
И РАСЧЕТ ПРОЦЕССОВ  
С УЧАСТИЕМ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ

*М.В.Галынский, С.М.Сикач*

Институт физики им. Б.И.Степанова АНБ, Минск, Белоруссия

ВВЕДЕНИЕ	1134
СПИНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ДСБ	1139
ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДСБ	1145
СЕЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ $e^{\pm}e^{-} \rightarrow e^{\pm}e^{-}\gamma$ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОМ БЕЗМАССОВОМ СЛУЧАЕ	1151
ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ТРЕХФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ ОРТОПОЗИТРОНИЯ	1153
РЕАКЦИЯ $ep \rightarrow ep\gamma$ И ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ПРОТОНА	1158
ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ФОТОНА ЭЛЕКТРОНОМ В РЕАКЦИИ $ep \rightarrow ep\gamma$	1166
ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВИРТУАЛЬНОГО ФОТОНА В РЕАКЦИИ $ep \rightarrow ep\gamma$ ( $ep \rightarrow eX$ )	1170
ОБРАТНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ ФОТОНОВ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ НА ПУЧКЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРОДОЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ	1175
РОЖДЕНИЕ $e^{+}e^{-}$ -ПАР ЖЕСТКИМ ФОТОНОМ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ С ФОТОНАМИ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ	1184
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1188
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1191

## ДИАГОНАЛЬНЫЙ СПИНОВЫЙ БАЗИС И РАСЧЕТ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ

*М.В.Галынский, С.М.Сикач*

Институт физики им. Б.И.Степанова АНБ, Минск, Белоруссия

Обзор посвящен изложению развитого авторами за последние годы ковариантного метода вычислений матричных элементов процессов квантовой электродинамики (КЭД) в диагональном спиновом базисе (ДСБ) и его применению для расчета дифференциальных сечений актуальных процессов с участием поляризованных частиц. В ДСБ спиновые 4-векторы частиц до взаимодействия и после взаимодействия выражаются через их 4-импульсы. В нем реализуется малая группа Лоренца, общая для начального и конечного состояний. Это приводит к совпадению спиновых операторов для начальных и конечных частиц, что позволяет в ковариантной форме разделить взаимодействия без изменения и с изменением спиновых состояний частиц, участвующих в реакции и тем самым проследить за динамикой спинового взаимодействия. В отличие от метода группы CALCUL и др. развитый подход справедлив как в массивном, так и в безмассовом случае; в нем не возникает трудностей при расчете амплитуд с переворотом спина; он не требует введения вспомогательных векторов. Для построения математического аппарата, с помощью которого вычисляются матричные элементы в ДСБ, достаточно 4-импульсов частиц, участвующих в рассматриваемой реакции. С помощью развитого метода исследованы следующие процессы КЭД: 1) тормозное меллеровское и баба-рассеяние ( $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^- \gamma$ ) в ультррелятивистском безмассовом пределе для случая, когда начальные частицы, а также фотон спирально поляризованы; 2) обратное комптоновское рассеяние фотонов интенсивной циркулярно поляризованной лазерной волны, сфокусированной на пучке продольно поляризованных ультррелятивистских электронов ( $e + n\gamma_0 \rightarrow e + \gamma$ ); 3) рождение  $e^+e^-$ -пар жестким фотоном при столкновении с несколькими лазерными фотонами одновременно ( $\gamma + n\gamma_0 \rightarrow e^+ + e^-$ ); 4) бете-гайтлеровский процесс в случае излучения линейно поляризованного фотона электроном с учетом отдачи и формфакторов протона; 5) реакция  $ep \rightarrow ep\gamma$  с учетом поляризуемости протона в кинематике, где доминирует протонное излучение; 6) процесс трехфотонной аннигиляции ортопозитрония ( $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ ).

Обзор результатов, полученных с помощью развитого метода, свидетельствует о его эффективности при расчетах многочастичных процессов с участием поляризованных частиц.

The review of recently developed by the authors new techniques for covariant calculation of matrix elements in QED, the so-called "formalism of Diagonal Spin Basis" (DSB), is presented. It is applied to calculating of differential cross sections of processes when polarization of particles is to be taken into account. In DSB spin 4-vectors of *in*- and *out*-fermions are expressed just in terms of their 4-momenta. In this approach the little Lorentz group, common for the initial and final states, is being realized. This brings the spin operators of *in*- and *out*-particles to coincidence, allowing one to separate in a covariant way the spin-flip and nonspin-flip interactions and to follow in detail the whole dynamics of the spin interaction. In contrast to methods of CALCUL-group, etc., the developed approach is valid both for massive fermions and for massless ones. There occur no problems with accounting for spin-flip amplitudes in it. No auxiliary vectors are to be introduced in DSB. Just 4-momenta of particles participating in reaction are required in it to construct the

mathematical apparatus for amplitude calculation. We apply this formalism to the following processes: 1) Möhler's and Bhabha's bremsstrahlung ( $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^- \gamma$ ) in the ultrarelativistic (massless) limit when initial particles and photon are helicity polarized, 2) Compton back-scattering of photons of intensive circularly polarized laser wave focused on a beam of longitudinally polarized ultrarelativistic electrons ( $e + n\gamma_0 \rightarrow e + \gamma$ ); 3)  $e^+e^-$ -pair production by a hard photon in simultaneous collision with several laser beam photons ( $\gamma + n\gamma_0 \rightarrow e^+ + e^-$ ); 4) Bethe-Heitler process in the case of a linearly polarized photon emission by an electron with account for proton recoil and form factors; 5) the reaction  $ep \rightarrow ep\gamma$  with proton polarizability being taken into account in a kinematics when proton bremsstrahlung dominates; 6) orthopositronium 3-photon annihilation ( $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ ). The results obtained with the help of the developed DSB-formalism certify its efficiency for calculating the multiparticle processes when polarization is to be taken into account.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время физика спиновых явлений стала неотъемлемой частью программ многих больших ускорителей нового поколения [1—5]. Это объясняется, во-первых, успехами в развитии поляризационной техники, а именно способов получения поляризованных пучков, достижениями в создании поляризованных мишеней и поляриметров [3]. Во-вторых, в области энергий современных ускорителей важна роль электрослабых взаимодействий, нарушающих как P- и C- [6,7], так и комбинированную CP-инвариантность [8], что приводит к поляризационным спиновым корреляциям, которые зачастую играют роль прецизионных тестов для стандартной модели с точностью, недостижимой в других экспериментах [1,5]. В-третьих, явное несовершенство стандартной модели требует поиска выхода за ее рамки, и на путях этого поиска спиновые эффекты должны сыграть заметную роль [1].

Достижения в ускорительной и поляризационной технике открывают новые возможности для изучения процессов взаимодействия поляризованных частиц. Поэтому в теоретическом плане все более актуальной задачей становится вычисление вероятностей различных процессов взаимодействий элементарных частиц с учетом их поляризаций и внутренней структуры, а также разработка новых методов расчета. При использовании стандартного подхода [9-12] для расчета вероятностей различных процессов (т.е. при вычислении квадратов модулей матричных элементов) учет поляризаций частиц приводит к резкому усложнению как самих вычислений, так и структуры получаемых выражений. При этом нередко утрачивается их ковариантность.

Естественным путем, позволяющим достичь упрощений при расчете реакций с участием поляризованных частиц, является переход от вычислений квадратов модулей матричных элементов к непосредственному вычислению самих матричных элементов, которое может быть сделано различными способами [13]. Одна из таких возможностей реализуется при использовании явного вида основных матриц и функций состояний, записанных в некотором

конкретном базисе пространства представлений группы Лоренца, в котором они определены. Такой нековариантный подход для частиц со спином 1/2 был применен еще в работе Поуэлла [14] (1949 г.). Общее теоретическое развитие этот метод получил в работах Соколова [15]. Этот же метод с успехом применяется и до настоящего времени [16,17], благодаря появлению мощных компьютерных программ для аналитических вычислений.

Однако наиболее широкое распространение для вычисления матричных элементов процессов КЭД получил ковариантный подход, не связанный с использованием явного вида матриц и волновых функций, который был предложен в 1961 г. независимо Белломо [18] и Богушем — Федоровым [19]. В основе этого подхода лежит метод проективных операторов в теории элементарных частиц, разработанный Федоровым [20].

В методе Белломо используется искусственный прием, заключающийся в домножении матричного элемента перехода  $M_{31} = \bar{\Psi}_3 Q \Psi_1$  из начального состояния ( $\Psi_1$ ) в конечное ( $\Psi_3$ ), где  $Q$  – оператор взаимодействия, на величину  $\bar{\Psi}_1 Z \Psi_3 / \bar{\Psi}_1 Z \Psi_3$ , благодаря чему амплитуда  $M_{31}$  может быть сведена к вычислению следа \*:

$$M_{31} = \text{Tr} (P_{31} Q), \quad P_{31} = \Psi_1 \bar{\Psi}_3, \quad (1)$$

$$P_{31} = \tau_1 Z \tau_3 / (|\bar{\Psi}_1 Z \Psi_3| e^{i\phi}), \quad \bar{\Psi}_1 Z \Psi_3 = |\bar{\Psi}_1 Z \Psi_3| e^{i\phi}. \quad (2)$$

Здесь  $\tau_1$  и  $\tau_3$  – проективные матрицы-диады начального и конечного состояний [20]:  $\tau_i = \Psi_i \bar{\Psi}_i$ , ( $i = 1, 3$ ). В выражении (2) оператор  $Z$  может быть произвольным. В работе [18] для него был сделан следующий выбор:  $Z = 1$ . За прошедшие годы наибольший прогресс в развитии метода Белломо (в ультррелятивистском безмассовом случае) был достигнут в работах группы CALCUL [21]. Достижения этой группы являются общепризнанными и широко используются международной научной общественностью. Обобщение метода группы CALCUL для фермионов с ненулевой массой было сделано в работах [22,23], однако оно требует введения дополнительных векторов, не связанных с кинематикой рассматриваемого процесса, и по этой причине неудобно в работе.

В методе, предложенном в работе [19], построение оператора  $P_{31} = \Psi_1 \bar{\Psi}_3$  основано на использовании комплексной векторной параметризации группы Лоренца [24—26] и операторов представлений этой группы  $T_{31}$  в пространстве волновых функций частицы [27,28], играющих роль операторов перехода от начального состояния к конечному:  $\Psi_3 = T_{31} \Psi_1$ ,  $\bar{\Psi}_3 = \bar{\Psi}_1 T_{31}^{-1}$ . При этом оператор  $P_{31} = \Psi_1 \bar{\Psi}_3$  выражается следующим образом [13,19]:

$$P_{31} = \Psi_1 \bar{\Psi}_3 = \tau_1 T_{31}^{-1} = T_{31}^{-1} \tau_3. \quad (3)$$

\*Выбор индексов связан с дальнейшим применением результатов к реакции  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ .

Первоначально этот вариант был разработан для продольно поляризованных дираковских частиц [29]. Дальнейшее развитие он получил в работах Федорова [30—32] и его учеников (см. [13] и приведенную там литературу). Метод, разработанный Федоровым ([13], §36), в принципе позволяет получить аналитические выражения для матричных элементов различных процессов КЭД в случае произвольно поляризованных дираковских частиц, как в массивном, так и в безмассовом случае, что и составляет главное, решающее преимущество по сравнению с подходом группы CALCUL. Однако стремление к общности рассмотрения не всегда способствует росту эффективности используемого подхода.

Для круга задач КЭД возможность развития подхода [13,19] при вычислении матричных элементов в случае многочастичных процессов в значительной степени обусловлена достижениями в развитии ковариантных методов описания спиновых свойств систем, состоящих из двух частиц, основанных на использовании векторной параметризации малых групп Лоренца [13,37].

В настоящее время наиболее популярным в физике высоких энергий является спиральный базис, введенный Джакобом и Виком [33]. Это связано с простотой физической интерпретации понятия спиральности (проекция спина на направление импульса частицы), выделенностью в спиральном базисе системы центра масс и с тем, что спиральные амплитуды допускают простой парциальный анализ на группе  $SO(3)$  [33]. Кроме того, рассмотрение спиральностей движущихся частиц является аналогичным рассмотрению спина покоящихся частиц [13]. Однако существуют несколько существенных обстоятельств, которые лишают спиральность преимущественной роли при описании спиновых свойств частиц. Одно из них заключается в том, что спиральность не является характеристикой частицы, инвариантной по отношению к преобразованиям Лоренца [9,13]. Тем не менее в литературе еще появляются статьи с названием типа "A Covariant Method for Calculating Helicity Amplitudes" [34]. Нередко при интерпретации динамики спинового взаимодействия амплитуды с изменением и без изменения спиральности частицы называют амплитудами с переворотом и без переворота спина. Но поскольку в результате взаимодействия импульс частицы изменяется, то ясно, что такая классификация является весьма условной. И та, и другая амплитуды фактически описывают процесс с некоторым изменением спинового состояния частицы.

Выбор определенным образом спинового базиса реакции позволяет избежать многих перечисленных трудностей. Указанная возможность открывается при использовании диагонального спинового базиса (ДСБ), в котором спиновые 4-векторы частиц  $s_1$  и  $s_3$  с 4-импульсами  $p_1$  и  $p_3$  ( $s_1 p_1 = s_3 p_3 = 0$ ,  $s_1^2 = s_3^2 = -1$ ) принадлежат гиперплоскости, образованной 4-векторами

$p_1$  и  $p_3$  [35,36]:

$$s_1 = -\frac{(v_1 v_3) v_1 - v_3}{\sqrt{(v_1 v_3)^2 - 1}}, \quad s_3 = \frac{(v_1 v_3) v_3 - v_1}{\sqrt{(v_1 v_3)^2 - 1}}, \quad (4)$$

где  $v_1 = p_1/m_1$ ,  $v_3 = p_3/m_3$ . Очевидно, что спиновые векторы (4) не изменяются при преобразованиях малой группы Лоренца, общей для частиц с 4-импульсами  $p_1$  и  $p_3$ :  $L_{p_1, p_3} p_1 = p_1, L_{p_1, p_3} p_3 = p_3$ . Отметим, что эта группа изоморфна однопараметрической подгруппе группы вращений с осью, направление которой определяется вектором [13,37]:

$$\vec{a} = c (\vec{p}_1/p_{10} - \vec{p}_3/p_{30}), \quad (5)$$

где  $c$  – произвольное вещественное число. Направление  $\vec{a}$  (5) обладает также тем свойством, что проекции на него спина для обеих частиц будут иметь определенные значения даже в том случае, когда частицы имеют различные массы. Таким образом, ДСБ естественным образом приводит к возможности описывать спиновые состояния систем из любых двух частиц (в том числе и с различными массами) с помощью проекций спина на одно общее направление\*, задаваемое вектором (5).

Фундаментальный факт реализации в ДСБ малой группы Лоренца, общей для частиц с импульсами  $p_1$  и  $p_3$ , приводит к ряду замечательных особенностей [35—42]. Во-первых, в нем частицы с 4-импульсами  $p_1$  (до взаимодействия) и  $p_3$  (после взаимодействия) имеют общие спиновые операторы [38—40], что позволяет в ковариантной форме разделить взаимодействия с изменением и без изменения спиновых состояний частиц, участвующих в реакции, и тем самым проследить за динамикой спинового взаимодействия.

Во-вторых, в ДСБ (4) математическая структура амплитуд предельно упрощается, благодаря совпадению спиновых операторов частиц, выделению из амплитуд вignerовских вращений [35,36], уменьшению числа независимых скалярных произведений, образованных 4-векторами, характеризующих реакцию. В-третьих, в случае безмассовых частиц ( $p_1^2 = p_3^2 = 0$ ) их спиновые состояния в ДСБ с точностью до знака совпадают со спиральными [40—42].

При обращении к ДСБ не теряется общность рассмотрения, поскольку переход в произвольный спиновый базис выполняется при помощи  $D$ -функций Вигнера [43]. Причем в новых выражениях для амплитуд исходные амплитуды наиболее адекватно отражают динамику спиновых явлений, а  $D$ -функции имеют чисто кинематический характер.

---

\*Геометрический образ разности двух векторов есть диагональ параллелограмма, что и объясняет происхождение названия ДСБ, которое было дано Ф.И.Федоровым.

Таким образом, ДСБ открывает новые возможности для развития методов вычисления матричных элементов и повышения их эффективности при использовании подхода Богуша – Федорова [13,19].

Отметим, что впервые вычисление матричных элементов в ДСБ проведено в работах [35,36] при использовании спинорного формализма, где был дан расчет амплитуд для полного набора из матриц Дирака  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2 \dots 16$ ), по которым раскладывается произвольный оператор  $Q$ , входящий в (1). Отметим также, что между методами, предложенными в работах [18] и [19], существует довольно тесная связь, впервые установленная в [44], где была проведена классификация различных методов вычисления матричных элементов.

### Используемые обозначения и сокращения

$\vec{x} = (x_a)$  – трехмерный вектор;  $x_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) – его компоненты.

$p = (p^k) = (p_0, \vec{p})$  – четырехмерный вектор в мире Минковского.

$\vec{x}\vec{y}' = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$  – скалярное произведение векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}'$ .

$pp' = p_\mu p'^\mu = p_0p'_0 - \vec{p}\vec{p}'$  – скалярное произведение 4-векторов  $p$  и  $p'$ .

$[\vec{x}\vec{y}']$  – векторное произведение трехмерных векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}'$ .

$\varepsilon_{abc}$  – трехмерный символ Леви-Чивита.

$[\vec{x}\vec{y}']_a = \varepsilon_{abc}x_b y'_c$ .

$(\vec{c})_{ab}^\times = \varepsilon_{adb}c_d$ ,  $\vec{c}^\times \vec{x} = [\vec{c}\vec{x}]$ ,  $\vec{x}\vec{c}^\times = [\vec{x}\vec{c}]$ .

$\vec{x} \cdot \vec{y}' = (x_a y'_a)$  – диада, образованная из векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}'$ .

$x \cdot y = (x_\mu y_\nu)$  – диада, образованная из 4- векторов  $x = (x_\mu)$ ,  $y = (y_\nu)$ .

$(\vec{x} \cdot \vec{y}') = \vec{x} \cdot \vec{y}' + \vec{y}' \cdot \vec{x}$ ,  $(x \cdot y) = x \cdot y + y \cdot x$  — симметризованные диады.

$[\vec{x} \cdot \vec{y}'] = \vec{x} \cdot \vec{y}' - \vec{y}' \cdot \vec{x}$ ,  $[x \cdot y] = x \cdot y - y \cdot x$  — альтернированные диады.

$(\alpha^\times)_{\mu\nu} = 1/2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^{\rho\sigma}$ ,  $\alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu}$ ,  $(\tilde{\alpha} = -\alpha)$ .

$([a \cdot b]^\times)_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\rho b^\sigma$ .

$[a, b, c]_\mu = ([a \cdot b]^\times c)_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\nu b^\rho c^\sigma$ .

$g_{\mu\nu}$  – метрический тензор,  $g = (+, -, -, -)$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  – четырехмерный символ Леви-Чивита,  $\varepsilon_{0123} = -1$ .

$\gamma^\mu$  – матрицы Дирака,  $\hat{a} = a_\mu \gamma^\mu = (\gamma a)$ ,

$\gamma^5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ,  $\gamma^{5+} = \gamma^5$ .

Алгебра матриц Дирака:  $\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = 2ab$ .

$\hat{a}\hat{b}\hat{c} = \hat{d} - i\gamma^5 \hat{f}$ ,  $d = (ab + [a \cdot b])c$ ,  $f = ([a \cdot b])^\times c$ .

Для алгебраических операций используются обозначения:

\* – комплексное сопряжение.

+ – эрмитовское сопряжение.

~ – транспонирование.

× – дуальное сопряжение.

· – диадное произведение.

КЭД – квантовая электродинамика.

ДСБ – диагональный спиновый базис.

ОБВ – ортонормированный базис векторов.

РКР – реальное комптоновское рассеяние.

ВКР – виртуальное комптоновское рассеяние.

ЭМВ – электромагнитная волна.

ОКР – обратное комптоновское рассеяние.

Система ЦИ – система центра инерции.

Везде используется система единиц, в которой скорость света  $c$  и постоянная Планка  $\hbar$  равны единице:  $c = \hbar = 1$ .

## 1. СПИНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ДСБ

В описании спиновых свойств частиц мы будем использовать следующие подходы:

а) подход, предложенный Баргманом и Вигнером, в котором операторы проекции спина определяются с помощью генераторов малых групп Лоренца, известных в литературе как операторы Паули — Баргмана — Любанского [43,45].

б) Ковариантная теория спина, развитая Федоровым, на основе использования векторной параметризации малых групп Лоренца и их представлений [13].

По существу эти подходы эквивалентны. Однако векторная параметризация группы Лоренца позволяет не только упростить изложение теории спиновых свойств элементарных частиц, но и устранить (см.[13]) распространенные в литературе неверные утверждения, присущие некоторым подходам [9,10], о том, что "при заданном импульсе проекция спина на произвольную ось не может иметь определенного значения" (см.[9], с.114, а также [10], с. 110).

Будем исходить из того, что в импульсном представлении свободное состояние частицы с 4-импульсом  $p$  и проекцией спина  $\delta$  на ось  $\vec{c}$  описывается вектором состояния  $|p, \delta\rangle$  (индексы, обозначающие спин  $j$ , массу  $m$  и другие характеристики частицы, мы опускаем). Спин частицы  $j$  определяется как величина ее момента количества движения в системе покоя, где орбитальный момент равен нулю. Поэтому удобно определить вектор состояния  $|p, \delta\rangle$  через вектор состояния в системе покоя  $|p^0, \delta\rangle$ , где  $p^0 = (m, 0)$ . При этом будем считать, что вектор, на который проектируется спин (т.е. ось спиновых проекций  $\vec{c}$ ), в системе покоя частицы является пространственной частью спинового 4-вектора  $s^0 = (0, \vec{c})$ , удовлетворяющего условиям:  $s^0 p^0 = 0, s^{02} = -\vec{c}^2 = -1$ . Пусть  $\Lambda_p$  – буст, т.е. преобразование Лоренца,



такое, что  $p = \Lambda_p p^0$ ,  $s = \Lambda_p s^0$ ,  $sp = 0$ ,  $s^2 = -1$ ,  $s = (s_0, \vec{s})$ , где

$$\vec{s} = \left( 1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{m(p_0 + m)} \right) \vec{c}, \quad s_0 = \frac{\vec{p} \vec{c}}{m}. \quad (1.1)$$

Тогда

$$|p, \delta \rangle = T_p |p^0, \delta \rangle, \quad (1.2)$$

где  $T_p = T(\Lambda_p)$  – соответствующий оператор этого преобразования, действующий в пространстве векторов состояний. Вектор состояния  $|p, \delta \rangle$  удовлетворяет следующим уравнениям:

$$P^\mu |p, \delta \rangle = p^\mu |p, \delta \rangle, \quad (1.3)$$

$$\sigma |p, \delta \rangle = \delta |p, \delta \rangle, \quad (1.4)$$

$$w^2 |p, \delta \rangle = -j(j+1) |p, \delta \rangle. \quad (1.5)$$

Здесь  $P^\mu$  и  $\sigma$  – операторы энергии-импульса и проекции спина:

$$\sigma = s^\mu w_\mu, \quad (1.6)$$

где  $w_\mu$  – 4-вектор Паули — Любанского [43]:

$$w_\mu = -\frac{1}{2m} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} M^{\nu\lambda} p^\rho, \quad (1.7)$$

а  $M^{\nu\lambda}$  – операторы углового момента. С помощью формул (4), (1.6), (1.7) находим, что операторы проекций спина для начальной и конечной частиц  $\sigma_1 = w s_1$  и  $\sigma_3 = w s_3$  в ДСБ (4) совпадают и имеют вид [38,39]:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{1}{2\sqrt{(v_1 v_3)^2 - 1}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\mu\nu} v_1^\rho v_3^\sigma. \quad (1.8)$$

Следует отметить, что в любом другом базисе, отличном от диагонального, операторы  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  не совпадают и, следовательно, не коммутируют между собой.

Требование совпадения малых групп Лоренца для частиц с импульсами  $p_1$  и  $p_3$  накладывает жесткие ограничения не только на выбор спиновых векторов частиц  $s_1$  и  $s_3$ , но и осей спиновых проекций  $\vec{c}_1$  и  $\vec{c}_3$  (см. (1.1)). Как показано в работах [35,36],  $\vec{c}_1$  и  $\vec{c}_3$  имеют вид:

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{v}_{31}}{|\vec{v}_{31}|}, \quad \vec{c}_3 = -\frac{\vec{v}_{13}}{|\vec{v}_{13}|}, \quad (1.9)$$

где  $\vec{v}_{13}$  ( $\vec{v}_{31}$ ) – пространственная часть 4-вектора релятивистской разности скоростей первой и третьей (третьей и первой) частиц:  $v_{ij} = v_i \ominus v_j =$

$(v_{ij0}, \vec{v}_{ij})$ , которая определяется как скорость  $i$ -й частицы в системе покоя  $j$ -й частицы [36]:

$$v_{ij} = v_i \ominus v_j = \Lambda_{p_j}^{-1} v_i . \quad (1.10)$$

Здесь  $\Lambda_{p_j}^{-1}$  – преобразование буста,  $\Lambda_{p_j}^{-1} v_j = v_j^0 = (1, 0)$ . При этом  $v_{ij}^2 = v_{ji}^2 = 1$ ,  $v_{ij0} = v_{ji0} = v_i v_j$ ,  $|\vec{v}_{ij}| = |\vec{v}_{ji}| = \sqrt{(v_i v_j)^2 - 1}$ . Векторы  $\vec{v}_{13}$ ,  $\vec{v}_{31}$  имеют вид [36]:

$$\vec{v}_{13} = \vec{v}_1 - \vec{v}_3 \left( v_{10} - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_3}{1 + v_{10}} \right), \quad \vec{v}_{31} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1 \left( v_{30} - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_3}{1 + v_{30}} \right). \quad (1.11)$$

Для иллюстрации свойств ДСБ рассмотрим процесс взаимодействия в системах покоя начальной и конечной частиц. В первом случае ( $p_1 = (m_1, 0)$ ) оси спиновых проекций  $\vec{c}_1$  и  $\vec{c}_3$  параллельны импульсу конечной частицы (это следует из (1.9), (1.11)):

$$\vec{c}_1 = \vec{c}_3 = \vec{v}_3 / |\vec{v}_3| . \quad (1.12)$$

В системе покоя конечной частицы ( $p_3 = (m_3, 0)$ ) оси спиновых проекций антипараллельны импульсу начальной частицы:

$$\vec{c}_1 = \vec{c}_3 = -\vec{v}_1 / |\vec{v}_1| . \quad (1.13)$$

Очевидно, что в этих случаях малая группа Лоренца  $L_{p_1 p_3}$  является подгруппой группы вращений вокруг направления импульса движущейся частицы, которое является осью спиновых проекций для обеих частиц, что представляет собой частный случай формулы (5).

Приведем еще одно эквивалентное представление для оператора проекции спина (1.6), выраженное через антисимметричную матрицу  $\alpha(p) = [v \cdot s]^\times$ , ( $\alpha(p) p = 0$ ) и  $M^{\mu\nu}$ :

$$\sigma = \frac{1}{2} ([v \cdot s]^\times)_{\mu\nu} M^{\mu\nu} . \quad (1.14)$$

В ДСБ альтернанты  $[v_1 \cdot s_1]$  и  $[v_3 \cdot s_3]$  совпадают:

$$[v_1 \cdot s_1] = [v_3 \cdot s_3] = \frac{[v_1 \cdot v_3]}{\sqrt{(v_1 v_3)^2 - 1}},$$

что и обуславливает совпадение спиновых операторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Запишем матрицу  $\alpha(p) = [v \cdot s]^\times$  в развернутом виде:

$$\alpha(p) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 & [\vec{c}\vec{p}] \\ -[\vec{c}\vec{p}] & p_0(1 - \vec{p} \cdot \vec{p} / ((p_0 + m)p_0))\vec{c}^\times \end{pmatrix} . \quad (1.15)$$

Нетрудно убедиться, что она имеет одинаковый вид как в системе покоя ( $\vec{p} = 0$ ), так и при  $\vec{c} \parallel \vec{p}$ :

$$\alpha(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \vec{c} \times \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где  $\vec{c}$  – единичный произвольный вектор в первом случае, либо  $\vec{c} = \vec{p}/|\vec{p}|$  во втором. Следовательно, рассмотрение спиральных состояний движущихся частиц является аналогичным рассмотрению спина покоящихся частиц, что и объясняет одну из причин популярности спирального базиса.

Перейдем к рассмотрению частиц со спином 1/2, состояние которых описывается биспинорами  $u^\delta(p, s)$ , удовлетворяющими уравнению Дирака:

$$(\hat{p} - m)u^\delta(p, s) = 0, \quad \bar{u}^\delta(p, s)(\hat{p} - m) = 0, \quad (1.17)$$

где  $\bar{u} = u^+ \gamma^0$ , при этом  $\bar{u}^\delta(p, s)u^\delta(p, s) = m$ . Для матриц Дирака справедливы перестановочные и рекуррентные соотношения:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho = g^{\mu\nu} \gamma^\rho + g^{\nu\rho} \gamma^\mu - g^{\mu\rho} \gamma^\nu + i\gamma^5 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\sigma, \quad (1.19)$$

$$\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} \gamma^5 - i/2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\rho \gamma_\sigma. \quad (1.20)$$

Представим эти соотношения в форме без индексов [13]:

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = 2ab, \quad \hat{a}\hat{b}\hat{c} = \hat{d} - i\gamma^5 \hat{f}, \quad (1.21)$$

$$\gamma^5 \hat{a}\hat{b} = ab\gamma^5 - i \overline{[a \cdot b]^\times}, \quad (1.22)$$

$$d = (ab + [a \cdot b])c, \quad f = [a \cdot b]^\times c = [a, b, c], \quad f_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\nu b^\rho c^\sigma, \quad (1.23)$$

$$\overline{[a \cdot b]^\times} = 1/2 ([a \cdot b]^\times)_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu. \quad (1.24)$$

Приведем также некоторые формулы, полезные для дальнейшего [13]:

$$\overline{\alpha\hat{a}} - \hat{a}\overline{\alpha} = 2\widehat{\alpha\hat{a}} = 2(\gamma\alpha a), \quad \overline{\alpha^\times\hat{a}} - \hat{a}\overline{\alpha^\times} = 2\widehat{\alpha^\times a} = 2(\gamma\alpha^\times a), \quad (1.25)$$

где  $\overline{\alpha} = 1/2 \alpha_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$ ,  $\alpha$  – произвольная антисимметричная матрица. Первую из этих формул можно получить, умножая (1.19) на  $1/2 \alpha_{\mu\nu} a_\rho$ , затем на  $1/2 a_\mu \alpha_{\nu\rho}$  и вычитая после этого результаты. (Вторая выводится аналогично.)

В биспинорном пространстве генераторы группы Лоренца  $M^{\mu\nu}$  имеют вид [43]:

$$M^{\mu\nu} = i/4 (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (1.26)$$

Тогда оператор проекции спина (1.14) для частицы со спином  $1/2$  с помощью соотношений (1.26), (1.22) может быть представлен в виде [32]:

$$\sigma = \frac{i}{2} \overline{[v \cdot s]^\times} = \frac{1}{2} \gamma^5 \hat{s} \hat{v}, \quad \sigma \hat{p} = \hat{p} \sigma. \quad (1.27)$$

Таким образом, ковариантный оператор проекции спина электрона (1.14), непосредственно связанный с малой группой Лоренца [13], лишь множителем  $\hat{v}$  отличается от широко используемого оператора  $\sigma'$  [9—12]:

$$\sigma' = \frac{1}{2} \gamma^5 \hat{s}, \quad [\sigma' \hat{p}]_- = 0, \quad s^2 = -1, \quad sp = 0. \quad (1.28)$$

При этом условие коммутации операторов  $\sigma$  и  $\hat{p}$  выполняется автоматически, в чем нетрудно убедиться с помощью (1.25) и равенства  $[v \cdot s]^\times p = 0$ . Таким образом, в случае как покоящейся, так и движущейся частицы проекция спина на произвольную ось может иметь определенное значение [13]. Отметим, что действие операторов  $\sigma$  и  $\sigma'$  (1.27) и (1.28) на вектор состояния частицы совпадает в силу справедливости уравнения Дирака.

Рассмотрим бинарную реакцию  $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$ , в которой однопородными являются частицы 1 и 3, а также 2 и 4 (например, электрон-нуклонное рассеяние  $ep \rightarrow ep$  и т.д.). В этом случае спиновая структура матричных элементов процесса такова, что наиболее удобным оказывается ДСБ, в котором у частиц 1 и 3, а также у 2 и 4 общие операторы спиновых проекций. Для того, чтобы построить повышающие и понижающие спиновые операторы частиц, введем ортонормированный базис векторов (ОБВ)  $n_A$ ,  $n_A n_B = g_{AB}$  ( $A, B = 0, 1, 2, 3$ ) [36]:

$$\begin{aligned} n_1 &= [n_0 \cdot n_3]^\times n_2, \quad n_2 = [p_1 \cdot p_3]^\times r / \rho, \\ n_3 &= \frac{(p_3 - p_1)}{\sqrt{-(p_3 - p_1)^2}}, \quad n_0 = \frac{(p_3 + p_1)}{\sqrt{(p_3 + p_1)^2}}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где  $r$  — 4-импульс частицы, участвующей в реакции, отличный от  $p_1$  и  $p_3$ ,  $\rho$  определяется из условий нормировки  $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = -n_0^2 = -1$ . Таким образом, орты  $n_0$  и  $n_3$  принадлежат гиперплоскости, образованной 4-импульсами  $p_1$  и  $p_3$ , а  $n_1$  и  $n_2$  — ортогональны к ней. Для четырех векторов  $n_A$  справедливы соотношения [36]:

$$[n_A \cdot n_B]^\times = 1/2 \varepsilon_{AB}{}^{CD} [n_C \cdot n_D], \quad [n_A, n_B, n_C] = -\varepsilon_{ABC}{}^D n_D. \quad (1.30)$$

Для них также выполняется соотношение полноты:

$$n_0 \cdot n_0 - n_1 \cdot n_1 - n_2 \cdot n_2 - n_3 \cdot n_3 = g, \quad (1.31)$$

с помощью которого произвольный 4-вектор  $p$  может быть представлен в виде

$$p = pn_0 \cdot n_0 - pn_1 \cdot n_1 - pn_2 \cdot n_2 - pn_3 \cdot n_3 .$$

В ДСБ не только операторы проекции спина  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  (1.27), но и повышающие и понижающие операторы  $\sigma_1^{\pm\delta}$  и  $\sigma_3^{\pm\delta}$  для первой и третьей частиц совпадают. В ОБВ (1.29) они имеют вид [39,40]:

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_3 = 1/2\gamma^5 \hat{s}_1 \hat{v}_1 = 1/2\gamma^5 \hat{s}_3 \hat{v}_3 = 1/2\gamma^5 \hat{n}_0 \hat{n}_3 = i/2\hat{n}_1 \hat{n}_2 , \quad (1.32)$$

$$\sigma^{\pm\delta} = \sigma_1^{\pm\delta} = \sigma_3^{\pm\delta} = -1/2\gamma^5 \hat{n}_{\pm\delta} , n_{\pm\delta} = n_1 \pm i\delta n_2 , \delta = \pm 1 , \quad (1.33)$$

$$\sigma u^\delta(p_i) = \delta/2u^\delta(p_i) , \sigma^{\pm\delta} u^\mp(p_i) = u^{\pm\delta}(p_i) , \sigma^{\pm\delta} u^{\pm\delta}(p_i) = 0 , \quad (1.34)$$

$$[\sigma\sigma^{\pm\delta}]_- = \pm\delta\sigma^{\pm\delta} , [\hat{p}_1\sigma^{\pm\delta}]_- = [\hat{p}_3\sigma^{\pm\delta}]_- = 0 , \quad (1.35)$$

где  $u^\delta(p_i) = u^\delta(p_i, s_i)$  – биспиноры 1-й и 3-й частиц.

Рассмотрим проективные операторы  $\tau^\delta = u^\delta(p_i) \bar{u}^\delta(p_i)$  для частиц со спином 1/2 [13,20]:

$$\tau^\delta = 1/4(\hat{p} + m)(1 - \delta\gamma^5 \hat{s}) . \quad (1.36)$$

В ДСБ операторы  $\tau_i^\delta$  (1.36) имеют вид [39,40]:

$$\tau_1^\delta = 1/4 (m + (\xi_+ \hat{n}_0 - \xi_- \hat{n}_3) + \delta\gamma^5 (\xi_- \hat{n}_0 - \xi_+ \hat{n}_3 - m \hat{n}_3 \hat{n}_0)) , \quad (1.37)$$

$$\tau_3^\delta = 1/4 (m + (\xi_+ \hat{n}_0 + \xi_- \hat{n}_3) - \delta\gamma^5 (\xi_- \hat{n}_0 + \xi_+ \hat{n}_3 + m \hat{n}_3 \hat{n}_0)) , \quad (1.38)$$

где  $\xi_\pm = \sqrt{(p_1 p_3 \pm m^2)/2}$ . Спиновая часть проективных операторов для 1-й и 3-й частиц в ДСБ в силу (1.32) может быть сделана одинаковой, в результате будем иметь [46,47]:

$$\tau_i^\delta = -1/8 (\hat{p}_i + m) \hat{n}_\delta \hat{n}_\delta^* , \quad (1.39)$$

где  $n_\delta^* = n_1 - i\delta n_2 = n_{-\delta}$ ,  $n_\delta n_\delta^* = -2$ .

Биспиноры начального и конечного состояний частиц  $u^\delta(p_1)$  и  $u^\delta(p_3)$  могут быть связаны друг с другом при помощи операторов перехода  $T_{31}$  и  $T_{13} = T_{31}^{-1}$  [13,19]:

$$u^\delta(p_3) = T_{31} u^\delta(p_1) , \bar{u}^\delta(p_3) = \bar{u}^\delta(p_1) T_{13} , \quad (1.40)$$

которые в ДСБ имеют вид [39,40]:

$$T_{31} = \frac{1 + \hat{v}_3 \hat{v}_1}{\sqrt{2(v_1 v_3 + 1)}} , T_{13} = \frac{1 + \hat{v}_1 \hat{v}_3}{\sqrt{2(v_1 v_3 + 1)}} . \quad (1.41)$$

Переписывая выражения (1.41) в ОБВ (1.29) и выделяя в них оператор проекции спина  $\sigma$  (1.32), получим [40]:

$$T_{31} = \xi'_+ - 2\xi'_- \gamma^5 \sigma , T_{13} = \xi'_+ + 2\xi'_- \gamma^5 \sigma , \quad (1.42)$$

откуда следует связь между биспинорами  $u^\delta(p_3)$  и  $u^\delta(p_1)$  [41]:

$$u^\delta(p_3) = (\xi'_+ - \delta\gamma^5\xi'_-) u^\delta(p_1), \quad u^\delta(p_1) = (\xi'_+ + \delta\gamma^5\xi'_-) u^\delta(p_3), \quad (1.43)$$

где  $\xi'_\pm = \xi_\pm/m$ . Отметим также, что операторы перехода  $T_{31}$  и  $T_{13}$  (1.41) при помощи уравнения Дирака могут быть приведены к одному и тому же виду [40]:

$$T_{31} = T_{13} = \hat{n}_0. \quad (1.44)$$

В безмассовом случае проективные операторы  $\tau_1^\delta$  и  $\tau_3^\delta$  (1.38), (1.39) принимают вид [40-42]:

$$\tau_1^\delta = \hat{p}_1 (1 - \delta\gamma^5)/4, \quad \tau_3^\delta = \hat{p}_3 (1 + \delta\gamma^5)/4. \quad (1.45)$$

Нетрудно убедиться, что операторы  $\tau_1^\delta$  и  $\tau_3^\delta$  (1.45) удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma^5\tau_1^\delta = \delta\tau_1^\delta, \quad \gamma^5\tau_3^\delta = -\delta\tau_3^\delta, \quad (1.46)$$

$$\tau_1^\delta\gamma^5 = -\delta\tau_1^\delta, \quad \tau_3^\delta\gamma^5 = \delta\tau_3^\delta, \quad (1.47)$$

которые означают, что в безмассовом случае начальное состояние является спиральным, а конечное имеет отрицательную спиральность.

Таким образом, ДСБ обладает рядом замечательных особенностей, которые позволяют значительно упростить ковариантное вычисление матричных элементов процессов КЭД, к рассмотрению которых мы переходим в следующем разделе.

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ДСБ

Изучение многочастичных реакций и исследование поляризационных явлений, возникающих при этом, требуют эффективных методов расчета. Один из таких методов реализуется при использовании ДСБ (4). В нем совпадают спиновые операторы частиц. Это позволяет в ковариантной форме разделить взаимодействия с изменением и без изменения спиновых состояний частиц, участвующих в реакции. В ДСБ происходит выделение из амплитуд вигнеровских вращений [36,38], имеющих чисто кинематический характер. Все это приводит к тому, что математическая структура диагональных амплитуд предельно упрощается, а получаемые при этом выражения наиболее адекватно отражают физическую сущность спиновых явлений.

Перейдем к вычислению матричных элементов процессов КЭД. Они имеют вид:

$$M^{\pm\delta,\delta} = \bar{u}^{\pm\delta}(p_3) Q u^\delta(p_1), \quad (2.1)$$

где  $Q$  – оператор взаимодействия, а  $u^\delta(p_1)$  и  $u^{\pm\delta}(p_3)$  – биспиноры начального и конечного состояний,  $\bar{u}^\delta(p_i) u^\delta(p_i) = m$ ,  $p_i^2 = m^2$ , ( $i = 1, 3$ ).

В ковариантном подходе Богуша — Федорова [13,19] вычисление матричных элементов, имеющих вид (2.1), сводится к операции нахождения шпура:

$$M^{\pm\delta,\delta} = \text{Tr} (P_{31}^{\pm\delta,\delta} Q), \quad P_{31}^{\pm\delta,\delta} = u^\delta(p_1) \bar{u}^{\pm\delta}(p_3), \quad (2.2)$$

$$P_{31}^{\delta,\delta} = u^\delta(p_1) \bar{u}^\delta(p_3) = u^\delta(p_1) \bar{u}^\delta(p_1) T_{13} = \tau_1^\delta T_{13}, \quad (2.3)$$

$$P_{31}^{-\delta,\delta} = u^\delta(p_1) \bar{u}^{-\delta}(p_3) = \sigma^{+\delta} u^{-\delta}(p_1) \bar{u}^{-\delta}(p_3) = \sigma^{+\delta} P_{31}^{-\delta,-\delta}. \quad (2.4)$$

Операторы  $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$  определяют структуру спиновой зависимости матричных элементов (2.1) в случае переходов без переворота  $M^{\delta,\delta}$  и с переворотом спина  $M^{-\delta,\delta}$ . Их явный вид в ДСБ может быть легко получен с помощью (1.37) – (1.41), (1.33), (1.44) [39,40]:

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = (\xi_+ + m \hat{n}_0 - \xi_- \hat{n}_3 \hat{n}_0 + \delta \gamma^5 (\xi_- - m \hat{n}_3 - \xi_+ \hat{n}_3 \hat{n}_0)), \quad (2.5)$$

$$4P_{31}^{-\delta,\delta} = -\delta (\xi_- + m \hat{n}_3 + \xi_+ \delta \gamma^5) \hat{n}_\delta. \quad (2.6)$$

С помощью выражений (2.5), (2.6) могут быть проведены расчеты матричных элементов, как без переворота, так и с переворотом спина в случае произвольных  $Q$ . В частности, если оператор взаимодействия сводится к виду

$$Q = \hat{a} + \gamma^5 \hat{b}, \quad (2.7)$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые 4-векторы, то для матричных элементов (2.1) будем иметь [39,40]:

$$M^{\delta,\delta} = m (a n_0 + \delta b n_3), \quad (2.8)$$

$$M^{-\delta,\delta} = -\delta \xi_- a n_\delta + \xi_+ b n_\delta. \quad (2.9)$$

Выражениям (2.5), (2.6) можно также придать более компактный вид, воспользовавшись операторами (1.39), (1.44), а также следующими соотношениями [39,40]:

$$\hat{n}_3 \hat{n}_0 \hat{n}_\delta = -\delta \gamma^5 \hat{n}_\delta, \quad \gamma^5 \hat{n}_\delta \hat{n}_0 = \delta \hat{n}_3 \hat{n}_\delta, \quad \gamma^5 \hat{n}_\delta \hat{n}_3 = \delta \hat{n}_0 \hat{n}_\delta. \quad (2.10)$$

В результате для операторов  $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$  будем иметь [46,47]:

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = (\hat{p}_1 + m) \hat{n}_\delta \hat{n}_0 \hat{n}_\delta^*/2, \quad (2.11)$$

$$4P_{31}^{-\delta,\delta} = \delta (\hat{p}_1 + m) \hat{n}_\delta \hat{n}_3. \quad (2.12)$$

Приведем еще одно представление для операторов  $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$  (2.3), (2.4) в ДСБ [42]:

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = (\hat{p}_1 + m) \left( \frac{1}{\sqrt{2(p_1 p_3 + m^2)}} - \frac{\delta\gamma^5}{\sqrt{2(p_1 p_3 - m^2)}} \right) (\hat{p}_3 + m), \quad (2.5a)$$

$$4P_{31}^{-\delta,\delta} = - \frac{\delta(\hat{p}_1 + m)}{rn_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2(p_1 p_3 - m^2)}} \left( \hat{r} - m \frac{(p_1 + p_3)r}{p_1 p_3 + m^2} \right) - \frac{\delta\gamma^5}{\sqrt{2(p_1 p_3 + m^2)}} \left( \hat{r} + m \frac{(p_3 - p_1)r}{p_1 p_3 - m^2} \right) \right\} (\hat{p}_3 + m), \quad (2.6a)$$

где  $rn_1$  вычисляется с помощью соотношения полноты (1.31):

$$(rn_1)^2 = (rn_0)^2 - (rn_3)^2 - r^2, \quad rn_2 = 0.$$

Таким образом, представление (2.5a), (2.6a) привлекательно тем, что фактически содержит дираковские операторы лишь от 4-импульсов частиц  $p_1, p_3, r$ , в отличие от (2.5), (2.6), (2.11), (2.12), построенных с помощью  $\hat{n}_\delta, \hat{n}_\delta^*$ . Кроме того, структура операторов  $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$  (2.5a), (2.6a) такова, что для них автоматически выполняются уравнения Дирака:  $(\hat{p}_1 - m)P_{31}^{\pm\delta,\delta} = P_{31}^{\pm\delta,\delta}(\hat{p}_3 - m) = 0$ . Эта идея была положена в основу вывода формул (2.5a), (2.6a) при помощи (2.5), (2.6).

Сделаем некоторые пояснения по поводу выбора 4-вектора  $r$ , через который определяются орты  $n_1, n_2$  (1.29), входящие в (2.5), (2.6). Прежде всего отметим, что он выбирается из 4-импульсов частиц рассматриваемой реакции, в отличие от подхода CALCUL и др., причем этот выбор делается из соображений удобства. Проиллюстрируем сказанное на примере реакции  $e^-(p_1) + \mu^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \mu^-(p_4) + \gamma(k)$ , которой отвечают фейнмановские диаграммы, содержащие две фермионные линии. Для каждой из этих линий необходимо построить соответствующие операторы  $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$  и  $P_{42}^{\pm\delta',\delta'}$  (2.5a), (2.6a), выраженные через  $p_1, p_3, r_1$  и  $p_2, p_4, r_2$ . Для рассматриваемого процесса очень удобно сделать следующий выбор:  $r_1 = r_2 = k$ , так как при этом  $kn_2 = kn'_2 = 0$ ,  $(kn_1)^2 = (kn_0)^2 - (kn_3)^2$ . В качестве векторов  $r_1$  и  $r_2$  можно также выбрать 4-импульсы, принадлежащие другой фермионной линии:  $r_1 = p_2$ ,  $r_2 = p_1$  (при этом мы рассматриваем переходы  $p_1 \rightarrow p_3$ ,  $p_2 \rightarrow p_4$ ). Отметим, что произвол в выборе 4-вектора  $r$  в (1.29), т.е. замена  $r$  на  $r'$  приводит к соотношению [42]:

$$n'_1 + i\delta n'_2 = e^{i\delta\phi} (n_1 + i\delta n_2), \quad e^{i\delta\phi} = \frac{r(n_1 \cdot n_1 + i\delta [n_0 \cdot n_3]^\times)r'}{(rn_1)(r'n'_1)}$$

и сказывается лишь на фазовом множителе матричных элементов  $M^{-\delta,\delta}$ .



Процессам с участием тождественных частиц (например  $ee \rightarrow ee$ ,  $ee \rightarrow ee\gamma$  и т.д.) соответствуют прямые и обменные диаграммы [10]. Им отвечают матричные элементы  $M_1$  и  $M_2$ , имеющие вид

$$M_1 = \bar{u}^{\pm\delta}(p_3)Q_1u^\delta(p_1) \cdot \bar{u}^{\pm\delta'}(p_4)Q_2u^{\delta'}(p_2),$$

$$M_2 = \bar{u}^{\pm\delta}(p_3)Q_3u^{\delta'}(p_2) \cdot \bar{u}^{\pm\delta'}(p_4)Q_4u^\delta(p_1),$$

которые вычисляются следующим образом:

$$M_1 = \text{Tr}(P_{31}^{\pm\delta,\delta}Q_1) \text{Tr}(P_{42}^{\pm\delta',\delta'}Q_2), \quad M_2 = \text{Tr}(P_{31}^{\pm\delta,\delta}Q_3) \text{Tr}(P_{42}^{\pm\delta',\delta'}Q_4).$$

Таким образом, вычисление прямых диаграмм сводится к произведению шпуров, а обменных — к удлинению шпура из-за произведения соответствующих операторов [13].

Приведем ряд полезных соотношений, справедливых в ДСБ [40]:

$$\begin{aligned} \hat{a}u^\delta(p_1) &= (an_0 + an_3\delta\gamma^5)u^\delta(p_3) + an_\delta\gamma^5u^{-\delta}(p_1), \\ \hat{a}u^\delta(p_3) &= (an_0 + an_3\delta\gamma^5)u^\delta(p_1) + an_\delta\gamma^5u^{-\delta}(p_3), \\ \bar{u}^\delta(p_1)\hat{a} &= \bar{u}^\delta(p_3)(an_0 - an_3\delta\gamma^5) - an_\delta^* \bar{u}^{-\delta}(p_1)\gamma^5, \\ \bar{u}^\delta(p_3)\hat{a} &= \bar{u}^\delta(p_1)(an_0 - an_3\delta\gamma^5) - an_\delta^* \bar{u}^{-\delta}(p_3)\gamma^5, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $a$  — произвольный 4-вектор ( $n_\delta^* = n_{-\delta}$ ).

В ДСБ (4) спиновые векторы частиц выражаются через их 4-импульсы, что позволяет уменьшить число независимых скалярных произведений, входящих в конечные выражения для матричных элементов после вычисления шпуров (2.2). По этой же причине вектор круговой поляризации фотона  $e_\lambda$  с 4-импульсом  $k$ , испущенного частицей при переходе  $p_1 \rightarrow p_3$ , удобно определить с помощью 4-векторов  $p_1, p_3, k$  [21,40]:

$$e_\lambda = \frac{[n_0 \cdot n_3]k + i\lambda [n_0 \cdot n_3]^\times k}{\sqrt{2}\rho}, \quad [n_0 \cdot n_3] = \frac{[p_1 \cdot p_3]}{2\xi_+\xi_-}, \quad (2.14)$$

где  $\rho = \sqrt{-([p_1 \cdot p_3]k)^2/2\xi_+\xi_-}$ . Тогда для матрицы диады  $e_\lambda \cdot e_\lambda^*$  нетрудно получить следующее выражение:

$$e_\lambda \cdot e_\lambda^* = \frac{1}{2} \left( -g + \frac{k \cdot n_1 + n_1 \cdot k}{kn_1} + \frac{k \cdot k}{kn_1^2} + i\lambda \frac{[k \cdot n_1]^\times}{kn_1} \right). \quad (2.15)$$

Операторы  $\hat{e}_{\pm\lambda}$  ( $\hat{e}_\lambda^* = \hat{e}_{-\lambda}$ ) с помощью (1.25), (1.22) можно представить в виде [40]:

$$\hat{e}_{\pm\lambda} = N_{13}(\hat{k}\hat{p}_3\hat{p}_1(1 \mp \lambda\gamma^5) - \hat{p}_3\hat{p}_1\hat{k}(1 \pm \lambda\gamma^5) \mp 2p_1p_3\lambda\gamma^5\hat{k}), \quad (2.16)$$

$$N_{13}^{-1} = 2^{1/2}(8p_1p_3 \cdot p_1k \cdot p_3k - m^2((2p_1k)^2 + (2p_3k)^2))^{1/2}.$$

В безмассовом случае ( $p_1^2 = p_3^2 = 0$ ) операторы  $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$  (2.5), (2.6) принимают вид [40]:

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = \xi(1 + \delta\gamma^5)(1 + \hat{n}_0\hat{n}_3), \quad 4P_{31}^{-\delta,\delta} = -\delta\xi(1 + \delta\gamma^5)\hat{n}_\delta, \quad (2.17)$$

где  $\xi = \xi_+ = \xi_- = \sqrt{p_1p_3/2}$ . Аналогично, из (2.5a), (2.6a) имеем

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = \frac{(1 + \delta\gamma^5) \hat{p}_1 \hat{p}_3}{\sqrt{2p_1p_3}}, \quad 4P_{31}^{-\delta,\delta} = -\delta \frac{(1 - \delta\gamma^5) \hat{p}_1 \hat{r} \hat{p}_3}{rn_1\sqrt{2p_1p_3}}. \quad (2.17a)$$

С помощью (1.25) нетрудно убедиться, что представления (2.17) и (2.17a) эквивалентны. Как уже отмечалось выше, при расчете процессов с излучением либо поглощением реального фотона с 4-импульсом  $k$  в качестве 4-вектора  $r$ , входящего в (2.17a), удобен следующий выбор:  $r = k$ . При этом знаменатель оператора  $P_{31}^{-\delta,\delta}$  в (2.17a) принимает вид:  $rn_1\sqrt{2p_1p_3} = \sqrt{2p_1k \cdot 2p_3k}$ , и мы получаем результат, аналогичный [23], с той лишь только разницей, что в наших выражениях фигурирует 4-импульс реального фотона, а не вспомогательного светового 4-вектора  $k$ . Отмеченные здесь моменты являются весьма существенными для излагаемого подхода, в котором используются только 4-импульсы частиц, участвующих в реакции.

С помощью соотношений (1.46), (1.47) выражения (2.13) можно представить в виде [40]:

$$\begin{aligned} \hat{a} u^\delta(p_1) &= (an_0 - an_3) u^\delta(p_3) - \delta an_\delta u^{-\delta}(p_1), \\ \hat{a} u^\delta(p_3) &= (an_0 + an_3) u^\delta(p_1) + \delta an_\delta u^{-\delta}(p_3), \\ \bar{u}^\delta(p_1) \hat{a} &= (an_0 - an_3) \bar{u}^\delta(p_3) - \delta an_\delta^* \bar{u}^{-\delta}(p_1), \\ \bar{u}^\delta(p_3) \hat{a} &= (an_0 + an_3) \bar{u}^\delta(p_1) + \delta an_\delta^* \bar{u}^{-\delta}(p_3). \end{aligned} \quad (2.18)$$

В безмассовом случае связь между биспинорами начального и конечного состояний имеет особенно простой вид (см. (1.44)):

$$u^\delta(p_3) = \frac{\hat{p}_3}{\sqrt{2p_1p_3}} u^\delta(p_1), \quad u^\delta(p_1) = \frac{\hat{p}_1}{\sqrt{2p_1p_3}} u^\delta(p_3). \quad (2.19)$$

В этом же безмассовом пределе члены, содержащие  $\gamma^5 \hat{k}$  в выражении (2.16), в силу калибровочной инвариантности могут быть отброшены; в результате для операторов  $\hat{e}_{\pm\lambda}$  получаем выражения, используемые группой CALCUL [21,48]:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{\pm\lambda} &= N_{13}(\hat{k}\hat{p}_3\hat{p}_1(1 \mp \lambda\gamma^5) - \hat{p}_3\hat{p}_1\hat{k}(1 \pm \lambda\gamma^5)), \\ N_{13}^{-1} &= 4(p_1p_3 \cdot p_1k \cdot p_3k)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

С помощью (2.18)—(2.20) нетрудно убедиться в справедливости соотношений [21,40,48]:

$$\begin{aligned}\hat{e}_\lambda u^\delta(p_1) &= -(1 + \delta\lambda) 2p_1 k N_{13} \hat{p}_3 u^\delta(p_1), \\ \bar{u}^\delta(p_3) \hat{e}_\lambda^* &= (1 - \delta\lambda) 2p_3 k N_{13} \bar{u}^\delta(p_3) \hat{p}_1.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Если излучение фотонов происходит при переходах  $p_A \rightarrow p_B$ , то, производя в (2.20) замены  $(p_1, p_3) \rightarrow (p_A, p_B)$ , получим операторы  $\hat{e}_{\lambda AB}$ , действие которых на биспиноры лишь фазовым множителем отличается от действия  $\hat{e}_\lambda = \hat{e}_{\lambda 13}$  [21,40]:

$$\hat{e}_{\lambda 13} = \hat{e}_{\lambda AB} \exp(i\phi_{AB}), \quad \exp(i\phi_{AB}) = i\lambda 2^{1/2} e_{\lambda 13} n_{2(AB)}, \quad (2.22)$$

где  $n_{2(AB)}$  — единичные векторы

$$n_{2(AB)} = [p_A \cdot p_B]^\times k / \rho_{(AB)}, \quad \rho_{(AB)} = (2p_A p_B \cdot p_A k \cdot p_B k)^{1/2}.$$

До сих пор наше рассмотрение относилось к случаю, когда в начальном и конечном состояниях были только электроны. Если одно состояние является электронным, а второе позитронным, то амплитуда процесса будет иметь вид [9]:

$$M_{31}^{\pm\delta,\delta} = \begin{cases} \bar{u}^{\pm\delta}(-p_3) Q u^\delta(p_1) \\ \bar{u}^{\pm\delta}(p_3) Q u^\delta(-p_1) \end{cases}, \quad (2.23)$$

где  $u^\delta(-p_1)$  и  $\bar{u}^{\pm\delta}(-p_3)$  — биспиноры позитрона в конечном и начальном состояниях,  $\bar{u}^\delta(-p_i) u^\delta(-p_i) = -m$  ( $i = 1, 3$ ). При этом верхняя амплитуда в (2.23) соответствует процессу аннигиляции, а нижняя — образованию пары. Для построения операторов

$$P_{31}^{\pm\delta,\delta} = u^\delta(p_1) \bar{u}^{\pm\delta}(-p_3), \quad P_{31}^{\pm\delta,\delta} = u^\delta(-p_1) \bar{u}^{\pm\delta}(p_3), \quad (2.24)$$

с помощью которых нахождение матричных элементов (2.23) сводится к вычислению следов  $M^{\pm\delta,\delta} = \text{Tr}(P_{31}^{\pm\delta,\delta} Q)$ , необходимо воспользоваться связью между биспинорами позитрона и электрона в ДСБ [36,38]:

$$u^\delta(-p) = -\delta \gamma^5 u^{-\delta}(p), \quad \bar{u}^\delta(-p) = \bar{u}^{-\delta}(p) \delta \gamma^5. \quad (2.25)$$

В результате для операторов  $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$ , с помощью которых вычисляются амплитуды процесса аннигиляции пары, получим следующие выражения:

$$4P_{31}^{\delta,\delta} = \delta (\hat{p}_1 + m) \hat{n}_0 \hat{n}_\delta, \quad 4P_{31}^{-\delta,\delta} = -(\hat{p}_1 + m) \hat{n}_\delta \hat{n}_3 \hat{n}_\delta^* / 2. \quad (2.26)$$

Для операторов  $P_{31}^{\pm\delta,\delta}$  в случае рождения пары могут быть получены аналогичные выражения.

Изложенный формализм вычисления матричных элементов в ДСБ был использован авторами для расчета сечений ряда актуальных процессов КЭД, к рассмотрению которых мы переходим ниже.

### 3. СЕЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^- \gamma$ В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОМ БЕЗМАССОВОМ СЛУЧАЕ

Процессы тормозного меллеровского и баба-рассеяния  $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^- \gamma$  являются фоновыми при изучении адронных состояний. Кроме того, их изучение дает возможность проверки КЭД в высших порядках теории возмущений. Сечения этих процессов представляют собой довольно громоздкие выражения даже в ультрарелятивистском пределе. Лишь сравнительно недавно их удалось записать в компактном виде в случае неполяризованных [49] и поперечно поляризованных начальных частиц [50]. В работе авторов [40] в ультрарелятивистском безмассовом пределе на основе методов, изложенных выше (с помощью формул (2.17)—(2.22)), получены компактные выражения для дифференциальных сечений процессов  $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^- \gamma$  для случая, когда не только начальные частицы, но и фотон являются спирально поляризованными. Как показано в [40], сечения этих процессов представляются в виде произведения двух сомножителей, один из которых универсален и совпадает с полученным ранее [49] для неполяризованных частиц. Рассмотрим процессы тормозного меллеровского и баба-рассеяния:

$$e^-(p_1) + e^\pm(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^\pm(p_4) + \gamma(k), \quad (3.1)$$

считая начальные и конечные  $e^\pm$ -частицы безмассовыми ( $p_i^2 = 0, i = 1, 2, 3, 4$ ). Детали вычисления матричных элементов процесса (3.1), которому отвечают восемь фейнмановских диаграмм [9,10], довольно подробно изложены в [40], поэтому мы не будем здесь на них останавливаться. Введем инвариантные переменные [49,50]:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \\ s' &= (p_3 + p_4)^2, \quad t' = (p_2 - p_4)^2, \quad u' = (p_2 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

а также обозначения  $\delta, \delta'$  и  $\lambda$  для спиральностей начальных частиц и фотона соответственно ( $\delta = \pm 1, \delta' = \pm 1, \lambda = \pm 1$ ). Тогда дифференциальные сечения процессов  $e^- e^\pm \rightarrow e^- e^\pm \gamma$  в случае спирально поляризованных начальных лептонов и фотона имеют следующий вид [40]:

$$d\sigma_M = \frac{\alpha^3}{\pi^2 s} A_M W_M d\Gamma, \quad d\sigma_B = \frac{\alpha^3}{\pi^2 s} A_B W_B d\Gamma, \quad (3.3)$$

$$A_M = A_{MB}/t' u u', \quad A_B = A_{MB}/t' s s', \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} A_{MB} &= 1/2 \{ s s' (s^2 + s'^2) + t t' (t^2 + t'^2) + u u' (u^2 + u'^2) + \\ &+ \delta \delta' (s s' (s^2 + s'^2) - t t' (t^2 + t'^2) - u u' (u^2 + u'^2)) + \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$+ \delta \lambda (-ss'(s^2 - s'^2) - tt'(t^2 - t'^2) - uu'(u^2 - u'^2)) + \\ + \delta' \lambda (-ss'(s^2 - s'^2) + tt'(t^2 - t'^2) + uu'(u^2 - u'^2)) \},$$

$$W_M = - \left( \frac{p_1}{p_1 k} + \frac{p_2}{p_2 k} - \frac{p_3}{p_3 k} - \frac{p_4}{p_4 k} \right)^2, \quad (3.6)$$

$$W_B = - \left( \frac{p_1}{p_1 k} + \frac{p_4}{p_4 k} - \frac{p_3}{p_3 k} - \frac{p_2}{p_2 k} \right)^2, \quad (3.7)$$

$$d\Gamma = \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) \frac{d^3 \vec{p}_3}{2p_{30}} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2p_{40}} \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega},$$

где  $x_A = p_A k$  ( $A = 1, 2, 3, 4$ ),  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры. Отметим, что выражение (3.5) для  $A_{MB}$  является инвариантным по отношению к преобразованиям кроссинга:

$$p_2 \leftrightarrow -p_4, \quad x_2 \leftrightarrow -x_4, \quad s \leftrightarrow u, \quad s' \leftrightarrow u', \quad \delta' \leftrightarrow -\delta'. \quad (3.8)$$

Выражения для  $A_{MB}$ ,  $W_M$  и  $W_B$  можно представить в другом виде [40]:

$$A_{MB} = 1/2 \{ (1 + \delta\delta') ((1 + \delta\lambda)ss's'^2 + (1 - \delta\lambda)ss's^2) + \\ + (1 - \delta\delta') ((1 + \delta'\lambda)(tt't^2 + uu'u^2) + (1 - \delta'\lambda)(tt't'^2 + uu'u'^2)) \}, \quad (3.9)$$

$$-W_M = \frac{s}{x_1 x_2} + \frac{s'}{x_3 x_4} + \frac{t}{x_1 x_3} + \frac{t'}{x_2 x_4} + \frac{u}{x_1 x_4} + \frac{u'}{x_2 x_3}, \quad (3.10)$$

$$W_B = \frac{s}{x_1 x_2} + \frac{s'}{x_3 x_4} - \frac{t}{x_1 x_3} - \frac{t'}{x_2 x_4} + \frac{u}{x_1 x_4} + \frac{u'}{x_2 x_3}. \quad (3.11)$$

В случае излучения мягких фотонов ( $s = s'$ ,  $t = t'$ ,  $u = u'$ ) величины  $A_M$  и  $A_B$  имеют вид [40]:

$$A_M = \frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} + \delta\delta' \left( \frac{s^2 - u^2}{t^2} + \frac{s^2 - t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right), \quad (3.12)$$

$$A_B = \frac{u^2 + s^2}{t^2} + \frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} - \delta\delta' \left( \frac{u^2 - s^2}{t^2} + \frac{u^2 + t^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} \right). \quad (3.13)$$

Они лишь множителями отличаются от сечений упругих процессов  $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^-$  в случае, когда начальные частицы продольно поляризованы (см. [10], с. 373).

Для неполяризованных фотонов из (3.9) имеем

$$A_{MB} = (1 + \delta\delta') ss'(s^2 + s'^2) + (1 - \delta\delta') (tt'(t^2 + t'^2) + uu'(u^2 + u'^2)). \quad (3.14)$$

Следовательно, отношение сечений для частиц с параллельными и антипараллельными спинами для обеих реакций  $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^- \gamma$  имеет одинаковый вид (как и в случае упругих процессов  $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^-$  (см. [10], с. 373)) [40]:

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \frac{tt'(t^2 + t'^2) + uu'(u^2 + u'^2)}{ss'(s^2 + s'^2)}. \quad (3.15)$$

#### 4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ТРЕХФОТОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ ОРТОПОЗИТРОНИЯ

В последние годы процесс трехфотонной аннигиляции ортопозитрония  ${}^3S_1 \rightarrow 3\gamma$  привлек к себе пристальное внимание исследователей, поскольку в опытах по измерению ширины распада ортопозитрония было обнаружено противоречие с теоретическими предсказаниями [51]. Для снятия этого противоречия был предпринят ряд попыток. Так, в работе [52] был проведен учет релятивистских поправок к сечению аннигиляции медленной  $e^+e^-$ -пары в два и три фотона, что, однако, не привело к решению проблемы. Оценка вклада пятифотонной моды распада ортопозитрония, проведенная в [53], показывает, что и этот механизм не может снять противоречия в его ширине. Все эти вопросы требуют дальнейшего анализа и подтверждения, в том числе и результаты работ [51,53]. Работа авторов [54] отнюдь не является одной из попыток решения отмеченной проблемы ортопозитрония. В ней получены почти все известные результаты, относящиеся к поляризационным явлениям в реакции  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ , но на основе вычисления матричных элементов в ДСБ. Целью этой работы была демонстрация эффективности разработанного метода на примере такого процесса, где метод группы CALCUL неприменим. Ключевым моментом их методики является весьма специфический выбор векторов поляризаций фотонов (2.20), справедливый лишь для безмассового случая.

Основным процессом, определяющим время жизни позитрония, является трехфотонная аннигиляция. При этом вероятность распада может быть связана с сечением процесса аннигиляции свободной пары [10]:

$$e^-(p_1) + e^+(p_3) \rightarrow \gamma(k_1) + \gamma(k_2) + \gamma(k_3). \quad (4.1)$$

Поскольку импульсы электрона и позитрона в позитронии малы [10] ( $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3| \sim m\alpha$ , где  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры), то при вычислении сечения аннигиляции их можно считать покоящимися в начале координат (т.е. будем полагать, что  $p_1 = p_3 = p = (m, 0, 0, 0)$ ). В таком случае матричный элемент реакции (4.1) принимает вид

$$M_{31}^{\pm\delta,\delta} = \bar{u}^{\pm\delta}(-p)Qu^\delta(p), \quad (4.2)$$

где  $u^\delta(\pm p)$  – биспиноры электрона и позитрона,  $\bar{u}^\delta(\pm p)u^\delta(\pm p) = \pm m$ ,  $Q$  – оператор взаимодействия, которому отвечает шесть фейнмановских диаграмм [10]. Рассмотрим кинематику процесса  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$  в системе ЦИ  $e^+e^-$ -частиц, в которой импульсы  $p_1$  и  $p_3$  имеют вид:  $p_1 = (p_0, 0, 0, -m\alpha)$ ,  $p_3 = (p_0, 0, 0, m\alpha)$ ,  $p_0 = m\sqrt{1 + \alpha^2}$ . Введем ОБВ  $a_A$ :

$$a_0 = (1, 0, 0, 0), \quad a_1 = (0, 1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 0, 1, 0), \quad a_3 = (0, 0, 0, 1),$$

с помощью которых получим

$$p_1 = -\xi_- a_3 + \xi_+ a_0, \quad p_3 = \xi_- a_3 + \xi_+ a_0, \quad (4.3)$$

$$s_1 = \xi'_+ a_3 - \xi'_- a_0, \quad s_3 = \xi'_+ a_3 + \xi'_- a_0, \quad (4.4)$$

где  $\xi'_\pm = \xi_\pm/m$ ,  $\xi'_+ = \sqrt{1 + \alpha^2}$ ,  $\xi'_- = \alpha$ , при этом  $s_1 p_1 = s_3 p_3 = 0$ ,  $s_1^2 = s_3^2 = -1$ . Следовательно, в предельном случае, когда  $\alpha \rightarrow 0$ , спиновые векторы электрона и позитрона  $s_1$  и  $s_3$  (4.4) в ДСБ (4) совпадают:

$$s_1 = s_3 = a_3, \quad (4.5)$$

т.е. в качестве общей оси спиновых проекций выступает направление движения позитрона. Закон сохранения импульса:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0 \quad (4.6)$$

определяет плоскость аннигиляции, в которой лежат импульсы фотонов. Будем также считать, что векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_3$  принадлежат этой плоскости, а вектор  $\vec{a}_2$  является нормалью к ней, т.е. что  $\vec{a}_2 \vec{n}_i = 0$ ,  $\vec{n}_i = \vec{k}_i/\omega_i$ ,  $\vec{n}_i^2 = 1$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Построим векторы круговой поляризации фотонов  $e_{\lambda_i} = (0, \vec{e}_{\lambda_i})$ :

$$\vec{e}_{\lambda_i} = ([\vec{a}_2 \vec{n}_i] + i\lambda_i \vec{a}_2)/\sqrt{2}, \quad \vec{e}_{\lambda_i} \vec{n}_i = 0, \quad \vec{e}_{\lambda_i} \vec{e}_{\lambda_i}^* = 1, \quad (4.7)$$

где  $\lambda_i$  – спиральности фотонов,  $\lambda_i = \pm 1$ .

В рассматриваемом предельном случае операторы (2.26), с помощью которых вычисляются матричные элементы (4.2), имеют вид:

$$4P_{31}^{\delta, \delta} = \delta (m + \hat{p}) \hat{a}_\delta, \quad 4P_{31}^{-\delta, \delta} = - (m + \hat{p}) \hat{a}_\delta \hat{a}_3 \hat{a}_\delta^*/2, \quad (4.8)$$

где  $a_{\pm\delta} = a_1 \pm i\delta a_2$ ,  $\delta = \pm 1$  ( $a_\delta^* = a_{-\delta}$ ).

Явный вид для матричных элементов  $M^{\pm\delta, \delta}$  процесса (4.1) в случае циркулярно поляризованных фотонов был получен в [54]:

$$2^{3/2} M^{\delta, \delta} = \delta \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\delta \lambda_i + c_i) (n_{jk} - 1)/m, \quad (4.9)$$

$$2^{3/2} M^{-\delta, \delta} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i s_i (n_{jk} - 1)/m, \quad (4.10)$$

где  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) – поляризаационные множители:

$$\alpha_1 = (1 + \lambda_2 \lambda_3)(1 - \lambda_1 \lambda_2), \quad \alpha_2 = (1 + \lambda_1 \lambda_3)(1 - \lambda_2 \lambda_3), \quad (4.11)$$

$$\alpha_3 = (1 + \lambda_1 \lambda_2)(1 - \lambda_1 \lambda_3),$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2 \alpha_3 = 0, \quad \alpha_i^2 = 4 \alpha_i, \quad (4.12)$$

а величины  $c_i$ ,  $s_i$ ,  $n_{jk} = n_{kj}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) равны:  $n_{jk} = \vec{n}_j \vec{n}_k = c_j c_k + s_j s_k$ ,  $c_i = \vec{a}_3 \vec{n}_i$ ,  $s_i = \vec{a}_1 \vec{n}_i$ ,  $s_i^2 + c_i^2 = 1$ , при этом индексы  $i, j, k$  в (4.9), (4.10) образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

Матричные элементы (4.9), (4.10) определяют процесс аннигиляции свободной  $e^+e^-$ -пары в случае параллельных ( $M^{\delta, \delta}$ ) и антипараллельных ( $M^{-\delta, \delta}$ ) спинов у электрона и позитрона. Они вещественны и обращаются в ноль, если спиральности у всех фотонов одинаковы, т.е. когда  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ .

Дифференциальное сечение процесса (4.1) выражается через матричные элементы  $M^{\pm\delta, \delta}$  (4.9), (4.10) следующим образом:

$$d\sigma_{3\gamma} = \frac{\alpha^3 (M^{\pm\delta, \delta})^2}{(2\pi)^2 4m^2 v} \left( \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 \vec{k}_i}{\omega_i} \right) \delta^4(2p - k_1 - k_2 - k_3), \quad (4.13)$$

где  $v$  – относительная скорость  $e^+$ - и  $e^-$ -частиц в системе ЦИ ( $v \sim \alpha$ ). Введем обозначение:  $\sigma_{\delta e^+}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} = 1/2 ((M^{\delta, \delta})^2 + (M^{\delta, -\delta})^2)$ . Тогда для величины  $\sigma_{\delta e^+}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$  будем иметь следующее выражение [54]:

$$\sigma_{\delta e^+}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (1 + \delta \lambda_i c_i) (1 - n_{jk})^2 / 2m^2, \quad (4.14)$$

которое определяет сечение аннигиляции в случае, когда все частицы, за исключением электрона, спирально поляризованы. Для величин

$$\sigma^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} = 1/4 \sum_{\delta} ((M^{\delta, \delta})^2 + (M^{\delta, -\delta})^2),$$

$$\sigma_{\delta e^+}^{\lambda_1} = 1/2 \sum_{\lambda_2, \lambda_3} ((M^{\delta, \delta})^2 + (M^{\delta, -\delta})^2),$$

смысл которых понятен из обозначений, получим

$$\sigma^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} = (\alpha_1 (1 - n_{23})^2 + \alpha_2 (1 - n_{13})^2 + \alpha_3 (1 - n_{12})^2) / 2m^2, \quad (4.15)$$

$$\sigma_{\delta e^+}^{\lambda_1} = 2 ((1 + \delta \lambda_1 c_1)(1 - n_{23})^2 + (1 - \delta \lambda_1 c_2)(1 - n_{13})^2 +$$



$$+(1 - \delta\lambda_1 c_3)(1 - n_{12})^2/m^2 . \quad (4.16)$$

В случае неполяризованных частиц имеем известный результат [10]:

$$\bar{\sigma} = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \sigma^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} = 4 \left( (1 - n_{12})^2 + (1 - n_{13})^2 + (1 - n_{23})^2 \right) / m^2 . \quad (4.17)$$

Проведем расчет вероятности процесса (4.1) когда один из фотонов линейно поляризован в плоскости аннигиляции ( $\sigma_x$ ) либо перпендикулярно к ней ( $\sigma_y$ ) (при этом остальные два неполяризованы), а также степень линейной поляризации:

$$p_l = (\sigma_y - \sigma_x) / (\sigma_y + \sigma_x) . \quad (4.18)$$

Для этого перейдем от спиральных состояний фотона с импульсом  $\vec{k}_1$

$$|+1\rangle = (|x\rangle + i|y\rangle) / \sqrt{2} , \quad |-1\rangle = (|x\rangle - i|y\rangle) / \sqrt{2} ,$$

к состояниям с линейной поляризацией

$$\langle x| = (\langle +1| + \langle -1|) / \sqrt{2} , \quad \langle y| = i(\langle +1| - \langle -1|) / \sqrt{2} .$$

Тогда для амплитуд и вероятностей имеем [54]:

$$\begin{aligned} M_x^\delta &= (M_{\lambda_2, \lambda_3}^{\delta, \delta} + M_{-\lambda_2, \lambda_3}^{\delta, \delta}) / \sqrt{2} , \quad M_x^{-\delta} = (M_{\lambda_2, \lambda_3}^{-\delta, \delta} + M_{-\lambda_2, \lambda_3}^{-\delta, \delta}) / \sqrt{2} , \\ M_y^\delta &= i(M_{\lambda_2, \lambda_3}^{\delta, \delta} - M_{-\lambda_2, \lambda_3}^{\delta, \delta}) / \sqrt{2} , \quad M_y^{-\delta} = i(M_{\lambda_2, \lambda_3}^{-\delta, \delta} - M_{-\lambda_2, \lambda_3}^{-\delta, \delta}) / \sqrt{2} , \\ \sigma_x &= 1/4 \sum_{\delta\lambda_2\lambda_3} (|M_x^\delta|^2 + |M_x^{-\delta}|^2) , \quad \sigma_y = 1/4 \sum_{\delta\lambda_2\lambda_3} (|M_y^\delta|^2 + |M_y^{-\delta}|^2) . \end{aligned}$$

Произведя необходимые вычисления величин  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $p_l$ , найдем [54]:

$$\sigma_x = 2(A - B)/m^2 , \quad \sigma_y = 2(A + B)/m^2 , \quad p_l = B/A , \quad (4.19)$$

$$A = (1 - n_{12})^2 + (1 - n_{13})^2 + (1 - n_{23})^2 , \quad B = (1 - n_{12})(1 - n_{13})(1 - n_{23}) .$$

Выражения (4.19), полученные для  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $p_l$ , также совпадают с результатами работ [55,56].

Построим с помощью (4.9), (4.10) амплитуды аннигиляции ортопозитрония [10]:  $X_{1,1} = M^{++}$ ,  $X_{1,0} = (M^{+-} + M^{-+}) / \sqrt{2}$ ,  $X_{1,-1} = M^{--}$  ( $X_{1,\pm 1} = X_{1,\delta}$ ), отвечающие проекциям полного спина системы на направление  $\vec{a}_3$ , равным +1, 0, -1, а также парапозитрония (с полным спином и проекцией, равными нулю):  $X_{0,0} = (M^{+-} - M^{-+}) / \sqrt{2}$ . В результате будем иметь [54]:

$$X_{1,\delta} = M^{\delta,\delta} , \quad X_{1,0} = \sqrt{2} M^{\delta,-\delta} , \quad X_{0,0} = 0 . \quad (4.20)$$

Просуммируем по поляризациям фотонов  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  величины  $X_{1,\delta}^2$  и  $X_{1,0}^2$ :

$$\sum_{\lambda_2, \lambda_3} X_{1,\delta}^2 = 2 \left( (1 + \delta\lambda_1 c_1)^2 (1 - n_{23})^2 + (1 - \delta\lambda_1 c_2)^2 (1 - n_{13})^2 + \right. \\ \left. + (1 - \delta\lambda_1 c_3)^2 (1 - n_{12})^2 \right) / m^2,$$

$$\sum_{\lambda_2, \lambda_3} X_{1,0}^2 = 4 \left( (1 - c_1^2)(1 - n_{23})^2 + (1 - c_2^2)(1 - n_{13})^2 + (1 - c_3^2)(1 - n_{12})^2 \right) / m^2.$$

Проводя дальнейшие усреднения в квадратах последних амплитуд, опять получим известный результат [10]:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} (X_{1,+1}^2 + X_{1,0}^2 + X_{1,-1}^2) = 4 \bar{\sigma},$$

где  $\bar{\sigma}$  определено выражением (4.17).

В работе [55] было показано, что амплитуды трехфотонной аннигиляции ортопозитрония  $H_{fi}$  ( $X_{1,+1}$ ,  $X_{1,0}$ ,  $X_{1,-1}$ ) можно представить в виде

$$H_{fi} = \vec{t} \vec{u}, \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad (4.21)$$

где вектор  $\vec{u}_1$  является следующей функцией от векторов поляризаций фотонов:

$$\vec{u}_1 = \vec{e}_1 (\vec{e}_2 \vec{e}_3 - \vec{e}_2' \vec{e}_3') + \vec{e}_1' (\vec{e}_2 \vec{e}_3' + \vec{e}_3 \vec{e}_2'), \quad (4.22)$$

$$\vec{e}_i = \vec{e}_{\lambda_i}, \quad \vec{e}_i' = [\vec{e}_i \vec{n}_i] \quad (i = 1, 2, 3),$$

а векторы  $\vec{u}_2$  и  $\vec{u}_3$  получаются из  $\vec{u}_1$  циклической перестановкой индексов. Комплексный вектор  $\vec{t}$  характеризует триплетное состояние ортопозитрония.

Построим тензор  $\Phi = \vec{u} \cdot \vec{u}^*$ , через который выражается вероятность трехфотонной аннигиляции. Согласно нашим расчетам, тензор  $\Phi$  можно представить в виде трех слагаемых [54]:

$$\Phi = a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + a_3 \Phi_3, \quad \Phi_t = a_1 + a_2 + a_3 = m^2 \sigma^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} / 2, \quad (4.23)$$

$$a_1 = \alpha_1 (1 - n_{23})^2, \quad a_2 = \alpha_2 (1 - n_{13})^2, \quad a_3 = \alpha_3 (1 - n_{12})^2, \quad (4.24)$$

где каждый из тензоров  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) есть не что иное, как тензор пучка (трехмерно-ковариантная поляризационная матрица плотности) соответствующего циркулярно поляризованного фотона [57]:

$$\Phi_i = \vec{e}_{\lambda_i} \cdot \vec{e}_{\lambda_i}^* = (1 - \vec{n}_i \cdot \vec{n}_i) / 2 + i / 2 \lambda_i \vec{n}_i^\times, \quad \Phi_i \vec{n}_i = 0, \quad (\Phi_i)_t = 1. \quad (4.25)$$

Поскольку тензор  $\Phi$  соответствует сумме трех волн и его след  $\Phi_t = a_1 + a_2 + a_3$  с точностью до множителя совпадает с вероятностью  $\sigma^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$ , то каждая из величин  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (4.24) определяет вероятность появления отдельного фотона, имеющего вектор поляризации  $\vec{e}_{\lambda_i}$  и направление движения  $\vec{n}_i$ .

### 5. РЕАКЦИЯ $ep \rightarrow ep\gamma$ И ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ПРОТОНА

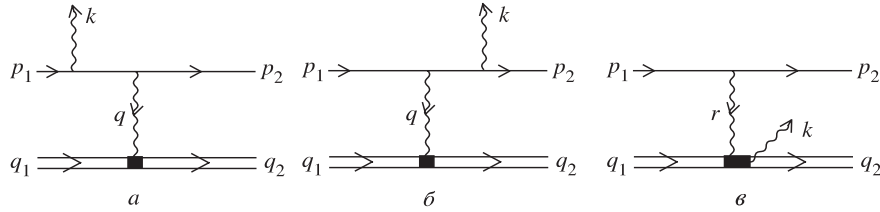
В последнее время значительно вырос интерес к изучению комптоновского рассеяния на нуклоне в области низких и средних энергий. Это обусловлено тем, что в рассматриваемом процессе могут быть определены фундаментальные структурные постоянные нуклонов — электрическая и магнитная поляризуемости. Поляризуемости нуклонов содержат важную информацию о структуре последних на больших и средних расстояниях, в частности, о радиусе кваркового кора, о мезонной шубе и т.д. (соответствующие вопросы подробно обсуждаются в обзорах [58,59]). Знание амплитуд комптоновского рассеяния на нуклонах требуется также для интерпретации данных по рассеянию фотонов на ядрах. Такого рода исследования могут, например, дать ответ на вопрос о том, насколько различаются электромагнитные свойства свободных и связанных нуклонов.

Все экспериментальные результаты для поляризуемостей протона были получены из данных по упругому  $\gamma p$ -рассеянию ниже порога фоторождения пионов. Однако в последнее время появилась весьма перспективная возможность измерять поляризуемости протона на созданном в Новосибирске накопительном кольце с энергией электронного пучка в 200 МэВ с использованием внутренней струйной мишени. Эта возможность может быть реализована с помощью идеи, предложенной в работе [60], использовать реакцию

$$e^-(p_1) + p^+(q_1) \rightarrow e^-(p_2) + p^+(q_2) + \gamma(k) \quad (5.1)$$

в кинематике, соответствующей рассеянию электронов на малые, а фотонов на достаточно большие углы, что соответствует малой передаче 4-импульса от начального электрона к конечным  $\gamma$ - и  $p$ -частицам.

В наименьшем порядке теории возмущений процессу (5.1) соответствуют три диаграммы, представленные на рис.1. Из них первые две (*a* и *b*) отвечают тормозному излучению электронов (бете-гайтлеровские диаграммы), а третья (*в*) — излучению протона (диаграмма с виртуальным комптоновским рассеянием (ВКР) на протоне). Выбор указанной выше кинематики был обусловлен следующими причинами. Во-первых, в ней реализуется подпроцесс реального комптоновского рассеяния (РКР) на протоне, поскольку при малых углах рассеяния электронов виртуальный фотон с 4-импульсом  $r = p_1 - p_2$  (см.рис.1) становится почти реальным. При этом величина  $|r| = \sqrt{-(p_1 - p_2)^2}$  оказывается малой  $|r| \sim m$ , где  $m$  — масса электрона. Во-вторых, при рассеянии электронов на малые, а фотонов на достаточно большие углы, вклад диаграммы, соответствующей протонному излучению, оказывается доминирующим, т.е. он на несколько порядков превышает вклад бете-гайтлеровских диаграмм в сечение реакции (5.1) [61], что представляет собой главное требование, необходимое для выделения подпроцесса комптоновского рассеяния на протоне [60] из реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$ .


 Рис. 1. Диаграммы, соответствующие реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$ 

Оценки, проведенные в [60] с использованием метода эквивалентных фотонов и скалярной модели, показали, что реакция (5.1) дает хорошую возможность для получения высокостатистических данных по сечению комптоновского рассеяния и поляризуемости протона. Отметим, что измерение электрической и магнитной поляризуемостей протона ( $\alpha_p$  и  $\beta_p$ ) с более высокой степенью точности, чем в предыдущих работах, представляет собой одну из наиболее приоритетных задач для экспериментов ближайшего будущего [62,63].

Однако для получения высокостатистических данных по сечению  $\gamma p$ -рассеяния и поляризуемости протона должна быть использована более аккуратная, чем в [60], теоретическая модель, которая должна учитывать как спиновые свойства частиц, так и главные структурные параметры, характеризующие электромагнитную структуру адрона. В основу такой модели могут быть положены результаты работы [64], в которой был проведен общий расчет реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$ . При этом сечение было выражено через двенадцать формфакторов, соответствующих подпроцессу ВКР на протоне (т.е. вкладу диаграммы 1,в), и два формфактора, отвечающих бете-гайтлеровским диаграммам.

В работе [65] проведен расчет дифференциального сечения реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  в указанной выше кинематике. Оно было выражено через шесть инвариантных амплитуд для РКР [58,66], а также электрический и магнитный формфакторы протона [10].

Рассмотрим амплитуды, соответствующие диаграммам, представленным на рис.1. Сумме двух бете-гайтлеровских диаграмм (а и б) отвечает матричный элемент

$$M_1 = \bar{u}(p_2) Q_e^\mu u(p_1) \cdot \bar{u}(q_2) \Gamma_\mu(q^2) u(q_1) \frac{1}{q^2}, \quad (5.2)$$

$$Q_e^\mu = \gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{-2p_1 k} \hat{e} + \hat{e} \frac{\hat{p}_2 + \hat{k} + m}{2p_2 k} \gamma^\mu, \quad (5.3)$$

$$\Gamma_\mu(q^2) = f_1 \gamma_\mu + \frac{\mu_p}{4M} f_2 (\hat{q} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{q}), \quad (5.4)$$

где  $u(p_i)$  и  $u(q_i)$  – биспиноры электронов и протонов с 4-импульсами  $p_i$  и  $q_i$ ,  $p_i^2 = m^2$ ,  $q_i^2 = M^2$ ,  $\bar{u}(p_i) u(p_i) = 2m$ ,  $\bar{u}(q_i) u(q_i) = 2M$ , ( $i = 1, 2$ ),  $\mu_p$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  – соответственно аномальный магнитный момент, дираковский и паулиевский формфакторы протона [10],  $q = q_2 - q_1$  – переданный импульс,  $e$  – 4-вектор поляризации фотона с импульсом  $k$ ,  $ek = k^2 = 0$ ,  $M$  – масса протона.

В рассматриваемом предельном случае, когда  $|r| \sim m$ , матричный элемент, соответствующий диаграмме рис.1,б, выражается через шесть инвариантных амплитуд  $T_i$  ( $i = 1, 2 \dots 6$ ) для РКР, полученных из теории дисперсионных соотношений и данных о фоторождении  $\pi$ -мезонов на нуклонах [66]. Он имеет вид [64]:

$$M_2 = \bar{u}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \cdot \bar{u}(q_2)M_{\mu\nu}e^\nu u(q_1) \frac{1}{r^2}, \quad (5.5)$$

$$M_{\mu\nu} = \frac{C_\mu C_\nu}{C^2} (T_1 + T_2 \hat{K}) + \frac{D_\mu D_\nu}{D^2} (T_3 + T_4 \hat{K}) + \\ + \frac{(C_\mu D_\nu - C_\nu D_\mu)}{D^2} \gamma^5 T_5 + \frac{(C_\mu D_\nu + C_\nu D_\mu)}{D^2} T_6 \hat{D}. \quad (5.6)$$

Тензор  $M_{\mu\nu}$  строится с помощью четверки ортогональных между собой 4-векторов  $C$ ,  $D$ ,  $B$ ,  $K$ :

$$K = 1/2 (r + k), \quad Q = 1/2(r - k), \quad R = 1/2(q_1 + q_2), \\ C = R - \frac{(RK)}{K^2} K - \frac{(RB)}{B^2} B, \quad B = Q - \frac{(QK)}{K^2} K, \quad (5.7) \\ D_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K^\nu B^\rho C^\sigma.$$

Он удовлетворяет требованиям сохранения четности и условию калибровочной инвариантности:

$$M_{\mu\nu} k^\nu = r^\mu M_{\mu\nu} = 0. \quad (5.8)$$

Для вычисления матричных элементов (5.2), (5.5) в ДСБ построим два ОБВ  $a_A$  и  $b_A$  ( $A = 0, 1, 2, 3$ ) с помощью 4-импульсов  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $k$  и  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $k$ :

$$a_0 = p_+/\sqrt{p_+^2}, \quad a_3 = p_-/\sqrt{-p_-^2}, \quad a_2 = [a_0 \cdot a_3]^\times k/\rho, \quad a_1 = [a_0 \cdot a_3]^\times a_2, \quad (5.9)$$

$$p_\pm = p_2 \pm p_1, \quad a_{\pm\delta} = a_1 \pm i\delta a_2, \quad \delta = \pm 1,$$

$$a_2 k = 0, \quad a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = -a_0^2 = -1,$$

$$b_0 = q_+/\sqrt{q_+^2}, \quad b_3 = q_-/\sqrt{-q_-^2}, \quad b_2 = [b_0 \cdot b_3]^\times k/\rho', \quad b_1 = [b_0 \cdot b_3]^\times b_2, \quad (5.10)$$

$$q_{\pm} = q_2 \pm q_1, \quad b_{\pm\delta'} = b_1 \pm i\delta' b_2, \quad \delta' = \pm 1,$$

$$b_2 k = 0, \quad b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = -b_0^2 = -1,$$

где  $\rho$  и  $\rho'$  определяются из условий нормировки. Тогда электронные и протонные операторы  $P_{21}^{\pm\delta,\delta}$  и  $Q_{21}^{\pm\delta',\delta'}$  (см. (2.11), (2.12)) имеют вид

$$P_{21}^{\delta,\delta} = 1/4 (m + \hat{p}_1) \hat{a}_{\delta} \hat{a}_0 \hat{a}_{\delta}^*, \quad P_{21}^{-\delta,\delta} = \delta/2 (m + \hat{p}_1) \hat{a}_{\delta} \hat{a}_3, \quad (5.11)$$

$$Q_{21}^{\delta',\delta'} = 1/4 (M + \hat{q}_1) \hat{b}_{\delta'} \hat{b}_0 \hat{b}_{\delta'}^*, \quad Q_{21}^{-\delta',\delta'} = \delta'/2 (M + \hat{q}_1) \hat{b}_{\delta'} \hat{b}_3, \quad (5.12)$$

а матричные элементы (5.2), (5.5) в случае различных комбинаций спиновых состояний электронов и протонов сводятся к произведению шпуров:

$$M_1 = \frac{1}{q^2} \text{Tr} ( P_{21}^{\pm\delta,\delta} Q_e^{\mu} ) \text{Tr} ( Q_{21}^{\pm\delta',\delta'} \Gamma_{\mu}(q^2) ), \quad (5.13)$$

$$M_2 = \frac{1}{r^2} \text{Tr} ( P_{21}^{\pm\delta,\delta} \gamma^{\mu} ) \text{Tr} ( Q_{21}^{\pm\delta',\delta'} M_{\mu\nu} e^{\nu} ). \quad (5.14)$$

В неполяризованном случае наиболее эффективным оказывается использование метода вычисления матричных элементов в ДСБ в сочетании с применением стандартного подхода [10]. Расчеты, проведенные как первым (т.е. по формулам (5.13), (5.14)), так и вторым способом дают одинаковые результаты. Тем не менее второй способ, который также будет изложен ниже, более предпочтителен, поскольку он значительно быстрее приводит к цели. При этом для нахождения вероятности процесса (5.1) достаточно вычислить лишь матричные элементы электронного и протонного токов:

$$(J_e^{\pm\delta,\delta})_{\mu} = \bar{u}^{\pm\delta}(p_2) \gamma_{\mu} u(p_1)^{\delta} = \text{Tr} ( P_{21}^{\pm\delta,\delta} \gamma_{\mu} ), \quad (5.15)$$

$$(J_p^{\pm\delta',\delta'})_{\mu} = \bar{u}^{\pm\delta'}(q_2) \Gamma_{\mu}(q^2) u^{\delta'}(q_1) = \text{Tr} ( Q_{21}^{\pm\delta',\delta'} \Gamma_{\mu}(q^2) ), \quad (5.16)$$

а также величину

$$X_{\mu}^{\pm\delta',\delta'} = \bar{u}^{\pm\delta'}(q_2) M_{\mu\nu} e^{\nu} u^{\delta'}(q_1) = \text{Tr} ( Q_{21}^{\pm\delta',\delta'} M_{\mu\nu} e^{\nu} ). \quad (5.17)$$

Вычисления дают [11,36,47]:

$$(J_e^{\delta,\delta})_{\mu} = 2m(a_0)_{\mu}, \quad (J_e^{-\delta,\delta})_{\mu} = -2\delta y_{-}(a_{\delta})_{\mu}, \quad (5.18)$$

$$(J_p^{\delta',\delta'})_{\mu} = 2g_e M(b_0)_{\mu}, \quad (J_p^{-\delta',\delta'})_{\mu} = -2\delta' y'_{-} g_m (b_{\delta'})_{\mu}, \quad (5.19)$$

где  $y_{-} = \sqrt{-p_-^2}/2$ ,  $y'_{-} = \sqrt{-q_-^2}/2$ , а величины  $g_e$  и  $g_m$  есть не что иное, как электрический и магнитный формфакторы протона [10]:

$$g_e = f_1 + \mu_p \frac{q^2}{4M^2} f_2, \quad g_m = f_1 + \mu_p f_2. \quad (5.20)$$

Таким образом, в ДСБ матричные элементы протонного тока, соответствующие переходам без переверота спина, выражаются через электрический формфактор  $g_e$ , а взаимодействие с переверотом спина выражается через магнитный формфактор  $g_m$ .

После определения матричных элементов протонного тока (5.16) расчет вклада двух бете-гайтлеровских диаграмм сводится к вычислению процесса ВКР на электроны [47,65]:

$$|M_1^{\pm\delta',\delta'}|^2 = \frac{1}{q^4} |\bar{u}(p_2) \left( \hat{j}_p^{\pm\delta',\delta'} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{-2p_1 k} \hat{e} + \hat{e} \frac{\hat{p}_2 + \hat{k} + m}{2p_2 k} \hat{j}_p^{\pm\delta',\delta'} \right) u(p_1)|^2. \quad (5.21)$$

Обозначая результат усреднения и суммирования выражения  $|M_1^{\pm\delta',\delta'}|^2$  по поляризациям начальных и конечных частиц через  $Y_{ee}$ , получим [47,65]:

$$Y_{ee} = 1/4 \sum_{\delta'e} \text{Tr} \{ (\hat{p}_2 + m) \hat{Q}_e^{\pm\delta',\delta'} (\hat{p}_1 + m) \hat{Q}_e^{\pm\delta',\delta'} \} / q^4, \quad (5.22)$$

где  $\hat{Q}_e^{\pm\delta',\delta'} = (Q_e^\mu) (J_p^{\pm\delta',\delta'})_\mu$  – оператор, стоящий в круглых скобках между биспинорами электронов  $\bar{u}(p_2)$  и  $u(p_1)$  в выражении (5.21),  $\hat{Q}_e^{\pm\delta',\delta'} = \gamma_0 (\hat{Q}_e^{\pm\delta',\delta'})^+ \gamma_0$ . Отметим, что, благодаря факторизации электрического и магнитного формфакторов  $g_e$  и  $g_m$  в выражениях (5.19), бете-гайтлеровский член в сечении реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$   $Y_{ee}$  (5.22) будет содержать только квадраты формфакторов Сакса (см. [36,47,65,67,68]).

Аналогичным образом расчет вклада диаграммы рис.1,в сводится к вычислению квазиреального комптоновского рассеяния на протоне. С помощью выражений для электронного тока (5.18), имеем:

$$|M_2^{\pm\delta,\delta}|^2 = \frac{1}{r^4} |\bar{u}(q_2) \hat{Q}_p^{\pm\delta,\delta} u(q_1)|^2, \quad (5.23)$$

где  $\hat{Q}_p^{\pm\delta,\delta} = (J_e^{\pm\delta,\delta})^\mu M_{\mu\nu} e^\nu$ . Обозначая результат усреднения и суммирования выражения (5.23) по поляризациям начальных и конечных частиц через  $Y_{pp}$ , получим [65]:

$$Y_{pp} = 1/4 \sum_{\delta e} \text{Tr} \{ (\hat{q}_2 + M) \hat{Q}_p^{\pm\delta,\delta} (\hat{q}_1 + M) \hat{Q}_p^{\pm\delta,\delta} \} / r^4, \quad (5.24)$$

где  $\hat{Q}_p^{\pm\delta,\delta} = \gamma^0 (\hat{Q}_p^{\pm\delta,\delta})^+ \gamma^0$ . Наконец, для вычисления интерференционного члена в случае неполяризованных частиц

$$Y_{ep} = 1/4 \sum_{\delta,\delta',e} 2\text{Re} M_1 M_2^* \quad (5.25)$$

используем матричные элементы протонного тока (5.19), а также 4-векторы  $X_\mu^{\pm\delta',\delta'}$  (5.17), которые имеют вид [65]:

$$\begin{aligned} X_\mu^{-\delta',\delta'} &= -2\delta' y'_- b_1 k \left( \frac{C_\mu C_\nu}{C^2} T_2 + \frac{D_\mu D_\nu}{D^2} T_4 + \right. \\ &\quad \left. + i\delta' y'_+ y'_- \frac{(C_\mu D_\nu + C_\nu D_\mu)}{D^2} T_6 \right) e^\nu, \\ X_\mu^{\delta',\delta'} &= 2 \left( y'_+ \left( \frac{C_\mu C_\nu}{C^2} \left( T_1 + \frac{\nu_1 M}{1-\tau} T_2 \right) + \frac{D_\mu D_\nu}{D^2} \left( T_3 + \frac{\nu_1 M}{1-\tau} T_4 \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta' y'_- \frac{(C_\mu D_\nu - C_\nu D_\mu)}{D^2} T_5 \right) e^\nu, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где  $y'_\pm = \sqrt{q_\pm^2}/2 = M\sqrt{1-\tau}$ ,  $\tau = q^2/4M^2$ ,  $\nu_1 = kq_+/2M^2$ . В результате для матричного элемента  $M_2$  (5.5) имеем

$$M_2 = \bar{u}(p_2) \hat{X}^{\pm\delta',\delta'} u(p_1) / r^2, \quad (5.27)$$

а выражение (5.25) сводится к вычислению шпура [65]:

$$Y_{ep} = 1/4 \sum_{\delta,\delta',e} 2\text{Re} \{ \text{Tr} ((\hat{p}_2 + m) \hat{Q}_e^{\pm\delta',\delta'} (\hat{p}_1 + m) \hat{X}^{\pm\delta',\delta'}) \} / q^2 / r^2, \quad (5.28)$$

где  $\hat{X}^{\pm\delta',\delta'} = \gamma^\mu X_\mu^{\pm\delta',\delta'}$ ,  $\hat{X}^{\pm\delta',\delta'} = (X_\mu^{\pm\delta',\delta'})^* \gamma^\mu$ . Отметим, что интерференционный член  $Y_{ep}$  (5.28) представляет собой линейную комбинацию электрического и магнитного формфакторов протона, поскольку операторы  $\hat{Q}_e^{\pm\delta',\delta'}$  линейным образом выражаются через матричные элементы протонного тока:  $\hat{Q}_e^{\pm\delta',\delta'} = (Q_e)^\mu (J_p^{\pm\delta',\delta'})_\mu$ , (см. (5.3), (5.19)).

Таким образом, нахождение вероятности реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  в используемом подходе свелось к вычислению шпуров (5.22), (5.24), (5.28), расчет которых был проведен с помощью программы REDUCE. В результате для дифференциального сечения получено следующее выражение [65]:

$$d\sigma = \frac{\alpha^3 |T|^2 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2 - k)}{2\pi^2 \sqrt{(p_1 q_1)^2 - m^2 M^2}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2p_{20}} \frac{d^3 \vec{q}_2}{2q_{20}} \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega}, \quad (5.29)$$

$$|T|^2 = 1/4 \sum_{pol} |M_{fi}|^2 = Y_{ee} + Y_{ep} + Y_{pp}, \quad (5.30)$$

$$Y_{ee} = \frac{8M^2}{q^4} (g_e^2 Y_I + \tau g_m^2 Y_{II}), \quad (5.31)$$



$$Y_I = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{m^2 q^2}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{r^2 q^2}{2\lambda_1 \lambda_2} - \frac{m^2}{2M^2(1-\tau)} \left( \frac{p_1 q_+}{\lambda_2} - \frac{p_2 q_+}{\lambda_1} \right)^2 - \frac{\tau}{(1-\tau)} \frac{((p_1 q_+)^2 + (p_2 q_+)^2)}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (5.32)$$

$$Y_{II} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{m^2 q^2}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{r^2 q^2}{2\lambda_1 \lambda_2} + \frac{m^2}{2M^2(1-\tau)} \left( \frac{p_1 q_+}{\lambda_2} - \frac{p_2 q_+}{\lambda_1} \right)^2 + \frac{\tau}{(1-\tau)} \frac{((p_1 q_+)^2 + (p_2 q_+)^2)}{\lambda_1 \lambda_2} - 2 \left( \frac{m^2}{\lambda_1} - \frac{m^2}{\lambda_2} \right)^2 + 4 m^2 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right), \quad (5.33)$$

$$Y_{ep} = -\frac{32M^3}{r^2 q^2 (4\nu_4^2 - \nu_2^2)} \left\{ g_e \operatorname{Re} \left[ y_1 \left( T_1 + \frac{\nu_1 M}{1-\tau} T_2 \right) + y_2 \left( T_3 + \frac{\nu_1 M}{1-\tau} T_4 \right) \right] + \tau g_m \left[ -\frac{\nu_1 M}{1-\tau} \operatorname{Re}(y_1 T_2 + y_2 T_4) + 4M \operatorname{Re}(z_1 T_2 + z_2 T_4 + z_3 T_6) \right] \right\}, \quad (5.34)$$

$$Y_{pp} = - \left\{ (\alpha_1^2 \alpha_3 + \nu_3) [(1-\tau)|T_1|^2 + 2\nu_1 M \operatorname{Re}(T_1 T_2^*) + M^2(\nu_1^2 - \nu_2^2)|T_2|^2] + (\alpha_2 + \nu_3) [(1-\tau)|T_3|^2 + 2\nu_1 M \operatorname{Re}(T_3 T_4^*) + M^2(\nu_1^2 - \nu_2^2)|T_4|^2] + (\alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_2 + 2\nu_3) \tau \left( -\frac{|T_5|^2}{M^4 \nu_2^2} + \frac{M^2}{\alpha_3} |T_6|^2 \right) \right\} \frac{16M^4}{r^4}. \quad (5.35)$$

Для инвариантных переменных, через которые определяются бете-гайтлеровский ( $Y_{ee}$ ), интерференционный ( $Y_{ep}$ ) и член, соответствующий протонному излучению ( $Y_{pp}$ ), в выражениях (5.30)—(5.35) используются обозначения, принятые в [64]:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\alpha_1 [\alpha_1 \alpha_3 (\nu_2 \nu_5 - \nu_1 \nu_4) + 2\nu_4^2 + \nu_2 \nu_3], \quad \nu_1 = kq_+ / 2M^2, \quad \nu_2 = -kq_- / 2M^2, \\ y_2 &= 2\alpha_2 (\nu_2 \nu_5 - \nu_1 \nu_4) - \alpha_1 \nu_2^2, \quad \nu_3 = r^2 / 4M^2, \quad \nu_4 = kq_+ / 4M^2, \quad \nu_5 = p_+ q_+ / 4M^2, \\ y_3 &= -(4\nu_3 / \nu_2^2) [\alpha_1 \alpha_3 (\nu_1 \nu_2 (\nu_2 + \nu_3) - 2\nu_4 (\nu_1 \nu_4 - \nu_2 \nu_5)) + \nu_4 (4\nu_4^2 - \nu_2^2)], \\ \alpha_1 &= \nu_5 + \nu_1 \nu_4 (2\nu_3 + \nu_2) / \nu_2^2, \quad \alpha_3 = \nu_2^2 / (\nu_2^2 + (\nu_2 + \nu_3)(\nu_1^2 - \nu_2^2)), \\ \alpha_2 &= m^2 / M^2 - \nu_3 + M^6 / D^2 [-(\nu_1 \nu_4 + \nu_2 \nu_5)^2 + 4\nu_3 (\nu_4^2 - \nu_1 \nu_4 \nu_5) - 4\nu_3 \nu_4^2 (\nu_2 + \nu_3)], \\ D^2 &= M^6 (\nu_2^2 + (\nu_2 + \nu_3)(\nu_1^2 - \nu_2^2)) = M^6 \nu_2^2 / \alpha_3, \quad \lambda_1 = p_1 k, \quad \lambda_2 = p_2 k, \end{aligned}$$

$$z_1 = \nu_1 \nu_4 \alpha_1^2 \alpha_3, \quad z_2 = \nu_2 \nu_4 \alpha_2, \quad z_3 = 1/4 \alpha_1 (2\nu_2(2\alpha_2 + \nu_2 + \nu_3) + 4\nu_4^2 - \nu_2^2).$$

Отметим, что полученные выражения для дифференциального сечения (5.29) с точностью до определения исходных величин (тензора  $M_{\mu\nu}$ ) совпадают с результатом, полученным в [64], если в последнем выразить  $f_1$  и  $f_2$  через  $g_e$  и  $g_m$ . Тем не менее бете-гайтлеровский  $Y_{ee}$  и интерференционный  $Y_{ep}$  члены имеют более компактный вид, благодаря факторизации электрического и магнитного формфакторов. Что касается области применимости формул (5.29)—(5.35), то она ограничена требованием квазиреальности виртуального фотона с 4-импульсом  $r$ , что реализуется при рассеянии электронов на малые углы вперед.

Рассмотрим эффекты, обусловленные вкладом всех трех диаграмм в сечение реакции (5.1) в выбранной кинематике в случае, когда начальный протон покоится ( $q_1 = (M, 0)$ ), а энергия электронного пучка  $E_e = 200$  МэВ. Производя необходимые интегрирования по фазовому объему в системе покоя начального протона, получаем [65]:

$$d\sigma = \frac{\alpha^3 \omega^2 |\vec{q}_2| T^2}{16\pi^2 M |\vec{p}_1| (p_2 k)} dE_{pk} d\Omega_{q_2} d\Omega_\gamma, \quad (5.36)$$

где  $d\Omega_\gamma$  и  $d\Omega_{q_2}$  — элементы телесных углов фотона и протона,  $E_{pk}$  — кинетическая энергия протона отдачи.

Проведем численный расчет дифференциального сечения (5.36) в области  $5 \leq E_{pk} \leq 35$  МэВ для значений суммы и разности электрической ( $\alpha_p$ ) и магнитной ( $\beta_p$ ) поляризуемостей, равных:  $\alpha_p + \beta_p = 14$ ,  $\alpha_p - \beta_p = 10$  [58—60] (в единицах  $10^{-4}$  фм<sup>3</sup>). При этом будем считать кинематику реакции плоской, а углы вылета фотона  $\vartheta_\gamma$  и протона  $\vartheta_p$  выберем равными:  $\vartheta_\gamma = 135^\circ$ ,  $\vartheta_p = -20,5^\circ$ . (Отсчет углов всех частиц ведется от направления движения начального пучка электронов.) Как показывают расчеты [65], во всей рассматриваемой области кинетической энергии протона  $5 \leq E_{pk} \leq 35$  МэВ для выбранных углов  $\vartheta_\gamma = 135^\circ$  и  $\vartheta_p = -20,5^\circ$  угол рассеяния электрона  $\vartheta_e$  и величина переданного 4-импульса  $|r| = \sqrt{-(p_2 - p_1)^2}$  не превышают следующих значений:  $|\vartheta_e| \leq 6,4^\circ$ ,  $|r| \leq 7,3$  МэВ, причем минимальное значение  $|r|$  соответствует рассеянию электрона вперед.

Результаты численных расчетов дифференциального сечения (5.36)  $d\sigma/dE_{pk}/d\Omega_{q_2}/d\Omega_\gamma$  в описанной выше кинематике представлены графиком на рис.2. Как видно из этого рисунка, в рассматриваемой области углов сечение реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  имеет острый пик, состоящий из двух максимумов. Происхождение этого пика обусловлено множителем  $1/r^4$  в выражении (5.35) для  $Y_{pp}$ . Что касается двух максимумов, то они имеют кинематическое происхождение и получаются в результате интерференции двух полюсных диаграмм, отвечающих квазиреальному комптоновскому рассеянию. Сечение (5.36) имеет сильную угловую зависимость, которая приводит, в частности, к

тому, что при изменении угла вылета протона (или фотона) всего на полградуса (т.е. при  $\vartheta_p = -20^0$ ) оба максимума исчезают, и мы имеем обычный пик при  $E_{pk} = 15$  МэВ (на рисунке мы его не приводим).

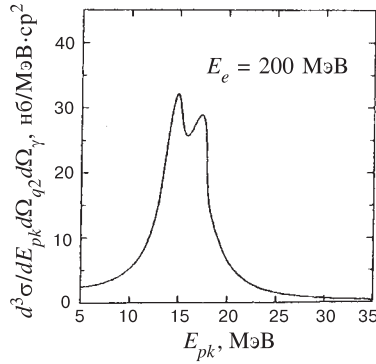


Рис. 2. Дифференциальное сечение реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  в кинематике, соответствующей рассеянию электронов на малые, а фотонов на достаточно большие углы, где доминирует протонное излучение

тем самым выполняется главное требование (см. [60]), необходимое для выделения фона, в качестве которого выступает электронное излучение.

С целью выяснения чувствительности реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  к поляризуемости протона проводились численные расчеты сечений (5.36) для одного и того же набора углов ( $\vartheta_\gamma = 135^0, \vartheta_p = -20^0$ ) при неизменной сумме электрической и магнитной поляризуемостей  $\alpha_p + \beta_p = 14$ , но неодинаковых значениях их разностей: а)  $\alpha_p - \beta_p = 10$  и б)  $\alpha_p - \beta_p = 6$ . Оказалось, что с уменьшением разности поляризуемостей сечение (5.36) увеличивается примерно на 8%. Таким образом, в рассматриваемой кинематике сечение реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  обладает заметной чувствительностью к поляризуемости протона [65].

## 6. ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ФОТОНА ЭЛЕКТРОНОМ В РЕАКЦИИ $ep \rightarrow ep\gamma$

Рассмотрим процесс излучения линейно поляризованного фотона электроном в реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  с учетом отдачи и формфакторов протона. В этой

Полное сечение (5.36), приведенное на рис.2, представляет собой сумму бете-гайтлеровского ( $\sigma_{ee}$ ), интерференционного ( $\sigma_{ep}$ ) и протонного ( $\sigma_{pp}$ ) членов (см. (5.30)), где символ ( $\sigma$ ) обозначает сечение вида (5.36), в котором вместо  $|T|^2$  стоят, соответственно,  $Y_{ee}$ ,  $Y_{ep}$  и  $Y_{pp}$ . Численные расчеты показывают, что во всей рассматриваемой области кинетической энергии протона  $5 \leq E_{pk} \leq 35$  МэВ отношения бете-гайтлеровского  $\sigma_{ee}$  и интерференционного  $\sigma_{ep}$  к члену, соответствующему протонному излучению  $\sigma_{pp}$ , не превышают следующих значений:  $\sigma_{ee}/\sigma_{pp} < 0,02, |\sigma_{ep}|/\sigma_{pp} < 0,05$ . Вычисления, проведенные для другого набора углов ( $\vartheta_\gamma = 135^0, \vartheta_p = -20^0$ ), дают результаты, которые меняются незначительно:  $\sigma_{ee}/\sigma_{pp} < 0,05, |\sigma_{ep}|/\sigma_{pp} < 0,075$ . Поскольку эти отношения намного меньше единицы, то

связи наше рассмотрение будет ограничено вкладом двух бете-гайтлеровских диаграмм (*a* и *b*) на рис.1, которым отвечает матричный элемент (5.2). При этом вкладом диаграммы с ВКР на протоне можно пренебречь в случае, когда начальные электроны имеют ультрарелятивистскую энергию, а фотон и конечный электрон рассеиваются на малые углы вперед ( $\vartheta_\gamma \sim m/E_e$ ,  $\vartheta_e \sim m/E_e$ ,  $m/E_e \ll 1$ ).

Наш интерес к рассматриваемым эффектам обусловлен следующими причинами. Во-первых, бете-гайтлеровский процесс, хотя и изучался ранее в случае излучения линейно поляризованных фотонов [69,70], широко используется для их получения на ускорителях [71], тем не менее до настоящего времени точный учет отдачи и формфакторов протона не был произведен (в отличие от неполяризованного случая). Во-вторых, как было показано в [72], их учет в случае неполяризованных фотонов приводит к сильному изменению дифференциального сечения бете-гайтлеровского процесса. Поскольку поляризационные характеристики рассеянного излучения выражаются через дифференциальное сечение процесса излучения неполяризованного фотона (см. ниже), то ясно, что учет отдачи и формфакторов необходим.

Ковариантное выражение для дифференциального сечения бете-гайтлеровского процесса (в борновском приближении) с учетом отдачи и формфакторов протона в случае излучения линейно поляризованного фотона было получено авторами в [73]. Оно имеет вид

$$d\sigma_{BH} = \frac{\alpha^3 |T_e|^2 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2 - k)}{2\pi^2 \sqrt{(p_1 q_1)^2 - m^2 M^2}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2p_{20}} \frac{d^3 \vec{q}_2}{2q_{20}} \frac{d^3 \vec{k}}{2\omega}, \quad (6.1)$$

$$|T_e|^2 = \frac{4M^2}{q^4} (g_e^2 Y_I^e + \tau g_m^2 Y_{II}^e), \quad (6.2)$$

$$Y_I^e = 2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\tau}{1-\tau} \frac{(kq_+)^2}{\lambda_1 \lambda_2} + q^2 (ea)^2 + 4 (eA)^2, \quad (6.3)$$

$$Y_{II}^e = -2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\tau}{1-\tau} \frac{(kq_+)^2}{\lambda_1 \lambda_2} + (q^2 + 4m^2) (ea)^2 - 4 (eA)^2, \quad (6.4)$$

$$a = \frac{p_1}{\lambda_1} - \frac{p_2}{\lambda_2}, \quad A = b_0 + \frac{(b_0 p_2) p_1}{\lambda_1} - \frac{(b_0 p_1) p_2}{\lambda_2}. \quad (6.5)$$

Все величины, входящие в (6.1)—(6.5), определены в предыдущем разделе. Таким образом, дифференциальное сечение бете-гайтлеровского процесса в случае излучения линейно поляризованного фотона  $d\sigma_{BH}$  (6.1) естественным образом распадается на сумму двух слагаемых, содержащих только квадраты формфакторов Сакса и отвечающих за вклад переходов без переворота ( $\sim g_e^2 Y_I^e$ ) и с переворотом спина протона ( $\sim \tau g_m^2 Y_{II}^e$ ).

Отметим свойства, которыми обладают как 4-вектор  $a$ , хорошо известный из теории излучения длинноволновых фотонов [10], так и 4-вектор  $A$ . Оба они удовлетворяют условию, которое является естественным результатом требования калибровочной инвариантности

$$a k = A k = 0 ,$$

и, кроме того, являются пространственноподобными:  $a^2 < 0$ ,  $A^2 < 0$ . В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться законом сохранения 4-импульса и явным видом для  $a^2$  и  $A^2$ :

$$a^2 = m^2 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)^2 + \frac{r^2}{\lambda_1 \lambda_2} , \quad (6.6)$$

$$A^2 = 1 + \frac{m^2}{4M^2(1-\tau)} \left( \frac{q+p_1}{\lambda_2} - \frac{q+p_2}{\lambda_1} \right) + \frac{\tau}{1-\tau} \frac{q+p_1 \cdot q+p_2}{\lambda_1 \lambda_2} . \quad (6.7)$$

Отметим, что 4-вектор  $A$  впервые введен в работе [73].

С помощью 4-импульсов электронов  $p_1, p_2$  и фотона  $k$  построим 4-векторы линейной поляризации фотона  $e_{\parallel}$  и  $e_{\perp}$  ( $e_{\parallel} k = e_{\perp} k = e_{\parallel} e_{\perp} = 0$ ):

$$e_{\parallel} = \frac{(p_2 k) p_1 - (p_1 k) p_2}{\rho'} , \quad e_{\perp} = \frac{[p_1 \cdot p_2] \times k}{\rho'} , \quad (6.8)$$

где  $\rho'$  определяется из условий нормировки:  $e_{\parallel}^2 = e_{\perp}^2 = -1$ . Тогда степень линейной поляризации фотона будет определяться следующими выражениями [73]:

$$P_{\gamma} = \frac{|T_{\perp}|^2 - |T_{\parallel}|^2}{|T_{\perp}|^2 + |T_{\parallel}|^2} = \frac{A_1}{A_2} , \quad (6.9)$$

где

$$A_1 = \frac{16 M^2}{q^4} (g_e^2 A_{11} + \tau g_m^2 A_{12}) , \quad (6.10)$$

$$A_2 = \frac{8 M^2}{q^4} (g_e^2 Y_1 + \tau g_m^2 Y_2) , \quad (6.11)$$

$$A_{11} = A^2 + \tau M^2 a^2 + 2(e_{\perp} b_0)^2 , \quad (6.12)$$

$$A_{12} = -A^2 + \tau M^2 a^2 - 2(e_{\perp} b_0)^2 + m^2 a^2 , \quad (6.13)$$

$$(e_{\perp} b_0)^2 = - \frac{4(SD)^2}{M^2(1-\tau)a^2\lambda_1^2\lambda_2^2} , \quad (6.14)$$

$$SD = 1/2 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (p_1)^{\mu} (p_2)^{\nu} (q_1)^{\rho} (q_2)^{\sigma} , \quad (6.15)$$

$$Y_1 = 2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\tau}{1-\tau} \frac{(kq_+)^2}{\lambda_1 \lambda_2} - 2 \tau M^2 a^2 - 2 A^2, \quad (6.16)$$

$$Y_2 = -2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\tau}{1-\tau} \frac{(kq_+)^2}{\lambda_1 \lambda_2} - 2 \tau M^2 a^2 + 2 A^2 - 2m^2 a^2. \quad (6.17)$$

Нетрудно убедиться, что величина  $A_2$  (6.11) совпадает с выражением для  $Y_{ee}$  (5.31), определяющим бете-гайтлеровское сечение в случае неполяризованных частиц:  $A_2 = Y_{ee}$ , а также  $Y_1 = Y_I$ ,  $Y_2 = Y_{II}$  (см. (5.32), (5.33)).

Таким образом, благодаря факторизации квадратов формфакторов  $g_e$  и  $g_m$ , а также использованию 4-векторов  $a$  и  $A$  (6.5), дифференциальное сечение бете-гайтлеровского процесса, как в случае линейно поляризованного (6.2), так и неполяризованного фотона (6.11), (5.31), можно представить в довольно компактном виде.

Проведем интегрирование выражения (6.1) по  $d^3 \vec{q}_2$  и  $dp_{20}$  в системе покоя начального протона  $q_1 = (M, 0)$ . В результате имеем

$$\frac{d\sigma_{BH}}{d\omega d\Omega_\gamma d\Omega_e} = \frac{\alpha^3 \omega}{(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}_2|}{|\vec{p}_1|} \frac{|T|^2}{q^4}, \quad (6.18)$$

$$|T|^2 = g_e^2 Y_I^e + \tau g_m^2 Y_{II}^e. \quad (6.19)$$

Рассмотрим предельный переход в сечении (6.18) для случая, когда протон является точечной (бесструктурной) частицей с бесконечной массой, т.е. будем считать, что  $g_e = g_m = 1$ ,  $q_2 = (M, \vec{q}) \simeq (M, 0)$ , где  $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{k}$  — импульс, передаваемый протону. В этом пределе ( $M \rightarrow \infty$ )  $E_{kp} = \vec{q}^2/2M \rightarrow 0$ ,  $\vec{q}/2M \rightarrow 0$ ,  $b_0 = (1, \vec{q}/2M) \simeq (1, 0)$ . Для векторов поляризаций фотонов выберем кулоновскую калибровку:  $e = (0, \vec{e})$ , в результате имеем

$$eb_0 = 0, \quad ea = \frac{p_1 e}{\lambda_1} - \frac{p_2 e}{\lambda_2}, \quad eA = p_{20} \frac{p_1 e}{\lambda_1} - p_{10} \frac{p_2 e}{\lambda_2}, \quad \tau(q+k)^2 = \omega^2 q^2.$$

Делая с помощью этих соотношений аккуратный предельный переход в (6.19), получаем

$$|T|^2 = 2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\omega^2 q^2}{\lambda_1 \lambda_2} + q^2 (ea)^2 + 4 (eA)^2, \quad (6.20)$$

или же в развернутом виде:

$$\begin{aligned} |T|^2 = & 2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\omega^2 q^2}{\lambda_1 \lambda_2} + (4p_{20}^2 + q^2) \left( \frac{p_1 e}{\lambda_1} \right)^2 + \\ & + (4p_{10}^2 + q^2) \left( \frac{p_2 e}{\lambda_2} \right)^2 - 2 (4p_{10} p_{20} + q^2) \frac{p_1 e \cdot p_2 e}{\lambda_1 \lambda_2}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Полученные выражения (6.18), (6.21) для дифференциального сечения бете-гайтлеровского процесса  $d\sigma_{BH}/d\omega/d\Omega_\gamma/d\Omega_e$  в пределе, когда протон является бесконечно тяжелой бесструктурной частицей, совпадают с аналогичными выражениями работы [69].

## 7. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВИРТУАЛЬНОГО ФОТОНА В РЕАКЦИИ

$$ep \rightarrow ep\gamma \quad (ep \rightarrow eX)$$

В последнее время значительно вырос интерес к изучению реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  и к процессу ВКР на протоне в области не только низких и средних [60], но и больших энергий электронов и 4-импульсах, передаваемых протону [63,74—77]. Процесс ВКР дает гораздо больше возможностей для исследования структуры адрона, чем процесс РКР, поскольку в нем энергия и трехмерный импульс, передаваемые мишени, могут варьироваться независимо. Эти привлекательные свойства ВКР позволили сделать предположение об его использовании для экспериментального изучения структуры нуклона [74,75] и обусловили всестороннее теоретическое исследование реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  (в том числе и с помощью нековариантного метода вычисления спиральных амплитуд (см.[63,76,77] и приведенную там литературу). Для расчета процесса ВКР на протоне необходимо знать адронный ( $W_{\mu\nu}$ ) и лептонный ( $L_{\mu\nu}$ ) тензоры [63,78]:

$$L_{\mu\nu} = J_\mu J_\nu^*, \quad J_\mu = \bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1), \quad (7.1)$$

где  $u(p_i)$  – биспиноры электронов,  $\bar{u}(p_i)u(p_i) = 2m$ ,  $m$  – масса электрона, ( $i = 1, 2$ ). При этом интерпретация результатов значительно упрощается, если выразить тензор  $L_{\mu\nu}$  через векторы продольной и поперечной поляризации виртуального фотона. Соответствующие выражения имеются в [63,78]. Следует, однако, отметить два недостатка таких выражений: 1) в них пренебрегают массой электрона, что, конечно, оправданно в случае ультрарелятивистских энергий электронов и при больших квадратах 4-импульса виртуального фотона; 2) они имеют нековариантный вид. В работе [79] был построен лептонный тензор, свободный от указанных недостатков.

Рассмотрим вопрос о состоянии поляризации виртуального  $\gamma$ -кванта с 4-импульсом  $r = p_1 - p_2$ , которым обмениваются между собой электрон и протон в реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  (см. рис.1,б). С помощью векторов ортонормированного базиса  $a_A$  (5.9) ( $A = (0, 1, 2, 3)$ ):

$$a_0 = p_+/\sqrt{p_+^2}, \quad a_3 = p_-/\sqrt{-p_-^2}, \quad a_2 = [a_0 \cdot a_3]^\times q_1/\rho, \quad a_1 = [a_0 \cdot a_3]^\times a_2, \quad (7.2)$$

$$p_\pm = p_2 \pm p_1, \quad a_2 q_1 = 0, \quad a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = -a_0^2 = -1, \quad (7.3)$$

для которых справедливо соотношение полноты:

$$a_0 \cdot a_0 - a_1 \cdot a_1 - a_2 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_3 = g, \quad (7.4)$$

построим 4-векторы поперечной ( $e_1, e_2$ ) и продольной ( $e_3$ ) поляризации виртуального фотона с 4-импульсом  $r$  [79]:

$$e_1 = \frac{[a_0 \cdot a_1]q_1}{\sqrt{(a_3 q_1)^2 + q_1^2}}, \quad e_2 = a_2 = \frac{[a_0 \cdot a_3]^\times q_1}{\rho}, \quad e_3 = \frac{(1 + a_3 \cdot a_3)q_1}{\sqrt{(a_3 q_1)^2 + q_1^2}}, \quad (7.5)$$

где

$$\rho^2 = (a_1 q_1)^2 = \frac{2(p_1 p_2)(p_1 q_1)(p_2 q_1) - M^2((p_1 p_2)^2 - m^4) - m^2((p_1 q_1)^2 + (p_2 q_1)^2)}{(p_1 p_2)^2 - m^4}.$$

Нетрудно убедиться в том, что 4-векторы  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ортогональны между собой ( $e_i e_j = 0$ ,  $i \neq j$ ), а также  $e_i r = e_i a_3 = 0$ ,  $e_1^2 = e_2^2 = -e_3^2 = -1$ . Отметим, что 4-векторы  $e_i$  (7.5) не изменяются при замене вспомогательного 4-вектора  $q_1$  на  $q_1 + p_1 - p_2 = q_2 + k$  (поскольку  $p_1 - p_2 = r = -2y a_3$ , где  $y = \sqrt{-r^2}/2$ , и в силу ортогональности векторов  $a_A$  (7.2)). По этой причине рассмотрение векторов поляризации виртуального фотона  $e_i$  (7.5) в системе покоя начального протона, либо в системе ЦИ конечного протона и фотона, является эквивалентным и приводит к традиционным представлениям. Ниже мы ограничим свое рассмотрение в системе покоя начального протона ( $q_1 = (M, 0, 0, 0)$ ), где 4-векторы  $e_i$  имеют вид

$$e_1 = (0, 1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1, 0), e_3 = \frac{1}{\sqrt{-r^2}}(|\vec{r}|, r_0 \vec{n}_3). \quad (7.6)$$

Здесь  $\vec{n}_3$  – единичный вектор, направленный вдоль  $\vec{r}$  ( $\vec{n}_3^2 = 1$ ),  $r_0$  – временная компонента 4-вектора  $r = (r_0, \vec{r})$ .

Для четверки ортогональных между собой векторов  $e_1, e_2, e_3, a_3$  также справедливо соотношение полноты:

$$e_3 \cdot e_3 - e_1 \cdot e_1 - e_2 \cdot e_2 - a_3 \cdot a_3 = g, \quad (7.7)$$

которое позволяет выразить  $a_0$  и  $a_1$  через  $e_1$  и  $e_3$ :

$$a_1 = \alpha e_3 - \beta e_1, a_0 = \beta e_3 - \alpha e_1, \beta^2 = 1 + \alpha^2, \quad (7.8)$$

$$\alpha = e_3 a_1 = a_0 e_1 = \frac{a_1 q_1}{\sqrt{(a_3 q_1)^2 + q_1^2}}, \beta = e_1 a_1 = e_3 a_0 = \frac{a_0 q_1}{\sqrt{(a_3 q_1)^2 + q_1^2}}. \quad (7.9)$$

В ДСБ (4) матричные элементы электронного тока имеют вид (5.18):

$$(J_e^{\delta, \delta})_\mu = 2m(a_0)_\mu, (J_e^{-\delta, \delta})_\mu = -2\delta y (a_\delta)_\mu, \quad (7.10)$$

где  $a_{\pm\delta} = a_1 \pm i\delta a_2$ ,  $\delta = \pm 1$ . Выразим их через 4-векторы  $e_i$  (7.5) [79]:

$$(J_e^{\delta, \delta})_\mu = 2m(\beta e_3 - \alpha e_1)_\mu, (J_e^{-\delta, \delta})_\mu = -2\delta y(\alpha e_3 - \beta e_1 + i\delta e_2)_\mu. \quad (7.11)$$

Таким образом, вектор поляризации виртуального фотона в случае перехода без переворота спина электрона ( $J_e^{\delta, \delta}$ ) представляет собой суперпозицию векторов продольной ( $\beta e_3$ ) и поперечной линейной ( $-\alpha e_1$ ) поляризаций, а в случае переходов с переворотом спина ( $J_e^{-\delta, \delta}$ ), соответственно, суперпозицию



продольной ( $\alpha e_3$ ) и поперечной эллиптической ( $e_\delta = (0, \vec{e}_\delta) = -\beta e_1 + i\delta e_2$ ) поляризаций. При этом состояние фотона с вектором эллиптической поляризации  $e_\delta = (0, \vec{e}_\delta)$  будет иметь степень линейной поляризации (равной отношению разности квадратов полуосей к их сумме [57]) [79]:

$$\kappa_\gamma = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha^2}{\beta^2 + 1}. \quad (7.12)$$

Обращая эту связь, получим

$$\beta^2 = \frac{1 + \kappa_\gamma}{1 - \kappa_\gamma}, \quad \alpha^2 = \frac{2\kappa_\gamma}{1 - \kappa_\gamma}. \quad (7.13)$$

Найдем квадраты модулей векторов  $\vec{e}_\delta$  и  $\vec{a}_\delta$ :

$$|\vec{e}_\delta|^2 = 1 + \beta^2 = \frac{2}{1 - \kappa_\gamma}, \quad |\vec{a}_\delta|^2 = (1 + \beta^2)(1 + \kappa_L), \quad (7.14)$$

$$\kappa_L = \kappa_\gamma \vec{e}_3^2 = \kappa_\gamma \frac{r_0^2}{(-r^2)}, \quad \vec{e}_3^2 = \frac{r_0^2}{(-r^2)}. \quad (7.15)$$

Введем нормированные векторы  $\vec{e}_\delta'$  и  $\vec{a}_\delta'$ :

$$\vec{e}_\delta' = \frac{\vec{e}_\delta}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 - \kappa_\gamma}{2}} \vec{e}_\delta, \quad |\vec{e}_\delta'|^2 = 1. \quad (7.16)$$

$$\vec{a}_\delta' = \frac{\vec{a}_\delta}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 - \kappa_\gamma}{2}} \vec{a}_\delta, \quad |\vec{a}_\delta'|^2 = 1 + \kappa_\gamma \vec{e}_3^2 = 1 + \kappa_L. \quad (7.17)$$

Следовательно, вектор эллиптической поляризации виртуального фотона  $\vec{e}_\delta$  может быть нормирован на единицу ( $|\vec{e}_\delta'|^2 = 1$ ), а наличие продольной поляризации делает эту нормировку одновременно невозможной для полного вектора  $\vec{a}_\delta'$ . Величина  $\kappa_L$  (7.15), отвечающая за неравенство  $|\vec{a}_\delta'|^2 = 1 + \kappa_L \neq 1$ , имеет смысл степени продольной поляризации виртуального фотона, испущенного при переходе с переворотом спина электрона. В ультрарелятивистском пределе, когда массой электрона можно пренебречь, величины  $\kappa_\gamma$  и  $\kappa_L$  будут иметь смысл полных величин степени линейной и продольной поляризации виртуального фотона. В рассматриваемом (безмассовом) случае

$$(a_3 q_1)^2 + q_1^2 = -M^2 \frac{\vec{r}^2}{r^2}, \quad (a_1 q_1)^2 = M^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta / 2, \quad (7.18)$$

$$\kappa_\gamma^{-1} = 1 - 2 \frac{\vec{r}^2}{r^2} \operatorname{tg}^2 \vartheta / 2, \quad (7.19)$$

где  $\vartheta$  – угол между векторами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ . Выражение (7.19) для  $\kappa_\gamma$  совпадает с результатом, приведенным в [78].

Вектор  $\vec{a}_\delta'$  (7.17) можно также представить в другом виде:

$$\vec{a}_\delta' = \sqrt{\kappa_L} \vec{n}_3 - \sqrt{\frac{1+\kappa_\gamma}{2}} \vec{e}_1 + i\delta \sqrt{\frac{1-\kappa_\gamma}{2}} \vec{e}_2, \quad (7.20)$$

с помощью которого легко построить поляризационную матрицу плотности для виртуального фотона в безмассовом пределе (как в поляризованном случае, которое для безмассовых частиц является спиральным, так и в неполяризованном, см. [78], с. 261).

Чтобы получить полные выражения для  $\kappa_\gamma$  и  $\kappa_L$ , обусловленные вкладами матричных элементов, как без переворота, так и с переворотом спина, построим лептонный тензор, усредненный по спиновым состояниям электрона. С помощью матричных элементов (7.10), (7.11) это делается довольно просто [79]:

$$\bar{L}_{\mu\nu} = 4m^2 (a_0)_\mu (a_0)_\nu + 4y^2 ((a_1)_\mu (a_1)_\nu + (a_2)_\mu (a_2)_\nu). \quad (7.21)$$

Пользуясь условиями полноты (7.3) и калибровочной инвариантности, тензор  $\bar{L}_{\mu\nu}$  можно представить в виде

$$\bar{L}_{\mu\nu} = 4x^2 (a_0)_\mu (a_0)_\nu - 4y^2 g_{\mu\nu}, \quad (7.22)$$

где  $x^2 = m^2 + y^2$ . Отметим, что с помощью тензора  $\bar{L}_{\mu\nu}$  (7.22) вычисление вклада диаграммы с ВКР на протоне в сечение реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  может быть сведено к вычислению следа от произведения тензоров:

$$Y_{pp} = \bar{L}_{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad W_{\mu\nu} = V_\mu V_\nu^*, \quad V_\mu = \bar{u}(q_2) M_{\mu\nu} e^\nu u(q_1) \frac{1}{r^2}. \quad (7.23)$$

Выразим тензор  $\bar{L}_{\mu\nu}$  (7.21) через векторы поляризаций виртуального фотона  $e_i$  (7.5). В результате он естественным образом распадется на сумму трех слагаемых, соответствующих вкладу поперечных состояний ( $L_T$ ), продольного ( $L_L$ ) и их интерференции ( $L_{LT}$ ) [79]:

$$\bar{L} = 4y^2 (L_T + L_L + L_{LT}), \quad (7.24)$$

$$L_T = e_1 \cdot e_1 (\beta^2 + \alpha^2 m^2 / y^2) + e_2 \cdot e_2, \quad (7.25)$$

$$L_L = e_3 \cdot e_3 (\alpha^2 + \beta^2 m^2 / y^2), \quad (7.26)$$

$$L_{LT} = - (e_1 \cdot e_3 + e_3 \cdot e_1) \alpha \beta (1 + m^2 / y^2). \quad (7.27)$$

Тогда полная степень линейной поляризации виртуального фотона будет определяться следующими соотношениями:

$$\kappa'_\gamma = \frac{\beta^2 + \alpha^2 m^2 / y^2 - 1}{\beta^2 + \alpha^2 m^2 / y^2 + 1} = \frac{\alpha^2}{\beta^2 + 1 - 2m^2 / x^2}. \quad (7.28)$$

Поскольку в выражениях (7.12), (7.28)  $\alpha$  и  $\beta$  одни и те же (см. (7.9)), то изменение величины  $\kappa_\gamma$ , обусловленное учетом массы электрона в ультра-релятивистском пределе, будет незначительным и произойдет в сторону ее увеличения [79]:

$$\kappa'_\gamma \simeq \kappa_\gamma \left( 1 + \frac{2m^2}{x^2(1+\beta^2)} \right). \quad (7.29)$$

Обращая связь в выражении (7.28), получаем

$$\beta^2 + \alpha^2 m^2 / y^2 = \frac{1 + \kappa'_\gamma}{1 - \kappa'_\gamma}, \quad \alpha^2 + \beta^2 m^2 / y^2 = \frac{2\kappa'_\gamma}{1 - \kappa'_\gamma} + \frac{m^2}{y^2}. \quad (7.30)$$

В поперечном тензоре  $L_T$  (7.25) можно выделить полностью поляризованную и неполяризованную части [79]:

$$\begin{aligned} L_T &= e_1 \cdot e_1 (\beta^2 + \alpha^2 m^2 / y^2 - 1) + e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2 = \\ &= \frac{2}{1 - \kappa'_\gamma} (\kappa'_\gamma e_1 \cdot e_1 + (1 - \kappa'_\gamma) (e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2) / 2). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Следовательно, поляризационная матрица плотности виртуального фотона  $\rho_{ij}$  получается из тензора  $\bar{L}_{ij}$  (7.24) точно так же, как и в безмассовом случае (см. [78]):

$$\rho_{ij} = (1 - \kappa'_\gamma) \bar{L}_{ij} / 8y^2. \quad (7.32)$$

Таким образом, для степени продольной поляризации виртуального фотона имеем следующее выражение:

$$\kappa'_L = \frac{r_0^2}{(-r^2)} \kappa'_\gamma \left( 1 + \frac{m^2}{y^2} \frac{(1 - \kappa'_\gamma)}{2\kappa'_\gamma} \right). \quad (7.33)$$

Очевидно, что выражения (7.28), (7.33) для  $\kappa'_\gamma$  и  $\kappa'_L$  при  $m = 0$  переходят в  $\kappa_\gamma$  и  $\kappa_L$  (7.12), (7.15).

Отметим в заключение, что область применения тензора  $\bar{L}_{\mu\nu}$  (7.24) не ограничивается только процессом ВКР на протоне. Поскольку в экспериментах на фиксированных мишенях сечение рассеяния заряженных лептонов при существующих энергиях определяется, в основном, обменом виртуальными фотонами, то тензор  $\bar{L}_{\mu\nu}$  (7.24) может найти применение и при исследовании глубоконеупругих процессов рассеяния электронов ( $e^\pm p \rightarrow e^\pm X$ ), а также мюонов ( $\mu^\pm p \rightarrow \mu^\pm X$ ), где учет массы более существен.

**8. ОБРАТНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ  
ФОТОНОВ ЦИРКУЛЯРНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ  
НА ПУЧКЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРОДОЛЬНО  
ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ**

В работах [80,81] было показано, что на базе действующих (SLC) и проектируемых (ВЛЭПП) ускорителей со встречными  $e^+e^-$ -пучками можно реализовать встречные  $\gamma e^-$  и  $\gamma\gamma$ -пучки примерно с теми же энергиями и светимостями, что и для исходных  $e^+e^-$ -пучков. Необходимые для этого интенсивные пучки жестких  $\gamma$ -квантов предложено получать при обратном комптоновском рассеянии (ОКР) мощной лазерной вспышки, сфокусированной на электронном пучке [82]. При достаточной мощности вспышки в области конверсии [81] становятся существенными процессы, идущие за счет одновременного поглощения из волны нескольких лазерных фотонов:

$$e^- + n \gamma_0 \rightarrow e^- + \gamma, \quad n \geq 1, \quad (8.1)$$

$$\gamma + s \gamma_0 \rightarrow e^+ + e^-, \quad s \geq 1. \quad (8.2)$$

Первый из этих нелинейных процессов приводит к расширению спектра высокоэнергетических фотонов [83], а второй эффективно снижает порог рождения  $e^+e^-$ -пар [84].

Систематическое исследование процессов (8.1), (8.2) дано в [85]. В работе [16] они исследовались с точки зрения источников для получения поляризованных  $\gamma$ - и  $e^+e^-$ -пучков. В работе [86] был проведен анализ явлений, возникающих при столкновении поляризованных электронов с фотонами циркулярно поляризованной ЭМВ; изучались нелинейные эффекты в области значений не только  $\xi^2 < 1$ , но и  $\xi^2 \geq 1$  параметра интенсивности волны

$$\xi^2 = n_\gamma \left( \frac{4\pi\alpha}{m^2\omega} \right), \quad (8.3)$$

где  $n_\gamma$  – плотность фотонов в волне, а  $\omega$  — их энергия. Отметим, что численный расчет спектров излучения при больших интенсивностях ( $\xi^2 \geq 1$ ) был впервые проведен в работе [83], при этом поляризации частиц не учитывались.

В настоящее время в области параметра  $\xi \sim 1$  на ускорителе SLAC [87] закончилась серия экспериментов по проверке нелинейной КЭД, что стало возможным благодаря использованию сверхкоротких и жестко сфокусированных лазерных импульсов. В этой связи область нелинейных эффектов, определяемая условием  $\xi^2 \geq 1$ , является весьма актуальной и представляет наибольший интерес, поскольку в ней становятся существенными процессы излучения, идущие за счет одновременного поглощения из волны большого

количества фотонов, а их вероятности являются существенно нелинейными функциями напряженности поля.

В литературе для описания модели лазерной волны, как правило, используется поле плоской ЭМВ [85,86]. Вопрос о применимости такой модели в сильных полях исследовался в работе [88].

Согласно [10], элемент  $S$ -матрицы для перехода электрона из состояния  $\psi_p = \psi^\delta(p, s)$  в состояние  $\psi_{p'} = \psi^{\pm\delta}(p', s')$ , ( $\delta = \pm 1$ ) с излучением фотона с 4-импульсом  $k' = (\omega', \vec{k}')$  и вектором круговой поляризации  $e_{\lambda'}$  определяется выражением

$$S_{fi} = -i e \int \bar{\psi}_{p'} \hat{e}_{\lambda'}^* \psi_p \exp(ik'x) (2\omega')^{-1/2} d^4x, \quad (8.4)$$

где  $\psi_p$  и  $\bar{\psi}_{p'}$  – точные волновые функции электронов в поле циркулярно поляризованной ЭМВ, которой отвечает векторный потенциал:

$$A = a_1 \cos(kx) + \lambda a_2 \sin(kx), \quad \lambda = \pm 1, \quad (8.5)$$

где  $k$  – волновой вектор,  $k^2 = 0$ ,  $a_1 k = a_2 k = a_1 a_2 = 0$ ,  $a_1^2 = a_2^2 = a^2$ ,  $\lambda, \lambda'$  – спиральности лазерного и конечного фотонов. Явный вид для матричных элементов (8.4) в ДСБ был получен в [38,86]:

$$S_{fi} = - \frac{ie (4\pi)^{1/2}}{(2\omega' 2q_0 2q'_0)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} M_{\pm\delta,\delta}^{(n)} (2\pi)^4 \delta^4(nk + q - q' - k'), \quad (8.6)$$

$$M_{-\delta,\delta}^{(n)} = - \frac{1}{2} \lambda' (-\lambda)^n \xi \left\{ - \frac{2(1-u/u_n)}{\sqrt{vv'-1}} (J_{n-1} + J_{n+1}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(u+1)} \left( \frac{(u+2)^2}{\sqrt{vv'+1}} - \delta\lambda' \frac{u^2}{\sqrt{vv'-1}} \right) J_{n+\lambda\lambda'} \right\}, \quad (8.7)$$

$$M_{\delta,\delta}^{(n)} = - \frac{1}{2} \lambda' (-\lambda)^n \xi \sqrt{\frac{u}{u_n} \left(1 - \frac{u}{u_n}\right)} \left( \frac{u+2}{u} \sqrt{\frac{vv'-1}{vv'+1}} - \delta\lambda' \right) \times \\ \times \left( \sqrt{\frac{vv'-1}{1+\xi^2}} (J_{n-1} + J_{n+1}) - \frac{uu_n \sqrt{1+\xi^2}}{2(u+1)\sqrt{vv'-1}} J_{n+\lambda\lambda'} \right), \quad (8.8)$$

где

$$q = p + \frac{\xi^2 m^2}{2kp} k, \quad q' = p' + \frac{\xi^2 m^2}{2kp'} k, \quad q^2 = q'^2 = m_*^2 = m^2 (1 + \xi^2),$$

$$u = \frac{kk'}{kp'}, \quad u_n = \frac{2nkp}{m_*^2}, \quad 2(vv' - 1) = \frac{uu_n}{u+1} \left( 1 + \xi^2 \left( 1 - \frac{u}{u_n} \right) \right), \quad (8.9)$$

$$J_{n+\lambda\lambda'} = \frac{(1+\lambda\lambda')}{2} J_{n+1} + \frac{(1-\lambda\lambda')}{2} J_{n-1}, \quad nk + q = k' + q',$$

$$z_n = \frac{2n\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_n} \left( 1 - \frac{u}{u_n} \right)}.$$

Здесь  $M_{\delta,\delta}^{(n)}$  и  $M_{-\delta,\delta}^{(n)}$  – амплитуды излучения  $n$ -й гармоники, соответствующие переходам без переворота и с переворотом спина электрона,  $q$  и  $q'$  – 4-векторы квазиимпульсов электронов,  $q = (q_0, \vec{q})$ ,  $q' = (q'_0, \vec{q}')$ ,  $J_n$  – функции Бесселя  $n$ -го порядка от аргумента  $z_n$ . Нетрудно убедиться, что амплитуды  $M_{\pm\delta,\delta}^{(n)}$  имеют следующие кинематические особенности: при  $u = u_n$  и  $n > 1$  они обращаются в ноль: ( $M_{\pm\delta,\delta}^{(n)}(u = u_n) = 0$ ). Причина такого поведения амплитуд будет объяснена ниже. Знание диагональных амплитуд (8.7), (8.8) позволяет перейти к спиральным. В результате для дифференциального сечения процесса излучения фотона электроном в поле циркулярно поляризованной ЭМВ получены следующие выражения [86]:

$$\frac{d\sigma_c}{du} = \frac{\pi\alpha^2}{xm^2\xi^2(u+1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (F_{1n} + \lambda\lambda_e F_{2n} + \lambda\lambda' F_{3n} + \lambda_e\lambda' F_{4n}), \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} F_{1n} &= -4 J_n^2 + \xi^2 \left( 2 + \frac{u^2}{u+1} \right) (J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_n^2), \\ F_{2n} &= \xi^2 \frac{(2+u)u}{u+1} \left( 1 - 2\frac{u}{u_n} \right) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2), \\ F_{3n} &= \xi^2 \left( 2 + \frac{u^2}{u+1} \right) \left( 1 - 2\frac{u}{u_n} \right) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2), \\ F_{4n} &= \frac{u}{u+1} (-4 J_n^2 + \xi^2 (2+u) (J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_n^2)), \end{aligned} \quad (8.11)$$

где  $x = 2kp/m^2$ ,  $\lambda_e = \pm 1$ . Выражение, стоящее под знаком суммы в (8.10), определяет вероятность излучения  $n$ -й гармоники в случае, когда поляризационные состояния лазерного и испущенного фотонов, а также начального электрона являются спиральными. Отметим, что при  $\xi^2 = 0$  формула (8.10) совпадает с результатом, полученным в [89].

С помощью (8.10) степень циркулярной поляризации фотона в конечном состоянии  $\lambda_f$  определяется следующим образом:

$$\lambda_f = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda F_{3n} + \lambda_e F_{4n}) / \sum_{n=1}^{\infty} (F_{1n} + \lambda\lambda_e F_{2n}). \quad (8.12)$$

При  $\xi^2 < 1$  главный вклад в вероятность процесса (8.1) дают несколько первых гармоник. Проведем разложение выражений (8.11) по параметру  $\Delta = \xi^2/(1 + \xi^2)$ , причем выполним разложение только для функций Бесселя, а для величин  $u_n$  будем использовать точные формулы. В результате для первых трех гармоник имеем [86]:

для первой гармоники:

$$\begin{aligned}
 \frac{F_{11}}{\xi^2} &= 2 + \frac{u^2}{1+u} - 4\frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) + \\
 &+ 4\Delta \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \left[1 + \frac{u^2}{1+u} - \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\right] + \\
 &+ \Delta^2 \frac{u^2}{u_1^2} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^2 \left[\frac{7}{2} + \frac{15}{4} \frac{u^2}{1+u} - \frac{5}{3} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\right], \\
 \frac{F_{21}}{\xi^2} &= \frac{u(2+u)}{1+u} \left(1 - 2\frac{u}{u_1}\right) \times \\
 &\times \left[1 - 2\Delta \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) + \frac{5}{4} \Delta^2 \frac{u^2}{u_1^2} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^2\right], \\
 \frac{F_{31}}{\xi^2} &= \left(2 + \frac{u^2}{1+u}\right) \left(1 - 2\frac{u}{u_1}\right) \times \\
 &\times \left[1 - 2\Delta \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) + \frac{5}{4} \Delta^2 \frac{u^2}{u_1^2} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^2\right], \\
 \frac{F_{41}}{\xi^2} &= \frac{u}{1+u} \left\{2 + u - 4\frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) - \right. \\
 &- 4\Delta \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \left[1 + u - \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\right] + \\
 &\left. + \Delta^2 \frac{u^2}{u_1^2} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^2 \left[\frac{7}{2} + \frac{15}{4}u - \frac{5}{3} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\right]\right\},
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

для второй гармоники:

$$\begin{aligned}
 F_{12} &= 4\xi^2 \Delta \frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right) \left\{2 + \frac{u^2}{1+u} - 4\frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right) - \right. \\
 &- 2 \Delta \frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right) \left(4 + \frac{3u^2}{1+u} - \frac{16}{3} \frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)\right)\left.\right\}, \\
 F_{22} &= 4\xi^2 \Delta \frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right) \frac{u(2+u)}{1+u} \left(1 - 2\frac{u}{u_2}\right) \left[1 - 4\Delta \frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)\right], \\
 F_{32} &= 4\xi^2 \Delta \frac{u}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right) \left(2 + \frac{u^2}{1+u}\right) \left(1 - 2\frac{u}{u_2}\right) \times
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ 1 - 4\Delta \frac{u}{u_2} \left( 1 - \frac{u}{u_2} \right) \right], \\
 F_{42} &= 4\xi^2 \Delta \frac{u}{u_2} \left( 1 - \frac{u}{u_2} \right) \frac{u}{1+u} \left\{ 2 + u - 4 \frac{u}{u_2} \left( 1 - \frac{u}{u_2} \right) - \right. \\
 & \left. - 2\Delta \frac{u}{u_2} \left( 1 - \frac{u}{u_2} \right) \left[ 4 + 3u - \frac{16}{3} \frac{u}{u_2} \left( 1 - \frac{u}{u_2} \right) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

для третьей гармоники:

$$\begin{aligned}
 F_{13} &= \frac{81}{4} \xi^2 \Delta^2 \frac{u^2}{u_3^2} \left( 1 - \frac{u}{u_3} \right)^2 \left( 2 + \frac{u^2}{1+u} - 4 \frac{u}{u_3} \left( 1 - \frac{u}{u_3} \right) \right), \\
 F_{23} &= \frac{81}{4} \xi^2 \Delta^2 \frac{u^2}{u_3^2} \left( 1 - \frac{u}{u_3} \right)^2 \frac{u(2+u)}{1+u} \left( 1 - 2 \frac{u}{u_3} \right), \\
 F_{33} &= \frac{81}{4} \xi^2 \Delta^2 \frac{u^2}{u_3^2} \left( 1 - \frac{u}{u_3} \right)^2 \left( 2 + \frac{u^2}{1+u} \right) \left( 1 - 2 \frac{u}{u_3} \right), \quad (8.15) \\
 F_{43} &= \frac{81}{4} \xi^2 \Delta^2 \frac{u^2}{u_3^2} \left( 1 - \frac{u}{u_3} \right)^2 \frac{u}{1+u} \left( 2 + u - 4 \frac{u}{u_3} \left( 1 - \frac{u}{u_3} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Дополнительный учет третьей гармоники, вероятность которой пропорциональна  $\Delta^2$ , приводит к появлению членов, содержащих  $\Delta^2$  в выражениях (8.13), (8.14). Это составляет главные отличия результатов, полученных в [86] для вероятностей излучения первых двух гармоник, от аналогичных выражений, имеющих в [16,85].

Рассмотрим случай лобового столкновения ультрарелятивистских электронов с фотонами лазерной волны. Для получения распределения по энергии образующихся фотонов  $d\sigma_c/dy$ , где  $y = \omega'/E$ ,  $E$  – энергия электронов, в выражении (8.10) необходимо произвести замену:  $u \rightarrow y/(1-y)$  [85]. При этом изменению переменной  $u$  в пределах  $0 \leq u \leq u_n$  соответствуют пределы изменения переменной  $y$ :  $0 \leq y \leq y_n$ , где

$$u_n = \frac{nx}{1+\xi^2}, \quad y_n = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{nx}{nx+1+\xi^2}, \quad x = \frac{2kp}{m^2} = \frac{4\omega E}{m^2}.$$

Сравнивая максимально возможную энергию фотонов, образующихся в обычном комптоновском рассеянии ( $n=1, \xi^2=0$ ), с энергией, которая вычислена с учетом нелинейных эффектов ( $\xi^2 \neq 0$ ), видно, что фотоны первой гармоники ( $n=1$ ) обладают меньшей максимально возможной энергией. Энергия же  $\gamma$ -квантов, испущенных при поглощении нескольких фотонов ( $n > 1 + \xi^2$ ), превышает энергию, достижимую в обычном комптоновском рассеянии. Производя замену:  $u \rightarrow y/(1-y)$  в выражениях (8.10), (8.11)



получим распределение по энергии жестких  $\gamma$ -квантов  $y = \omega'/E$  [86]:

$$\frac{d\sigma_c}{dy} = \frac{\pi\alpha^2}{xm^2\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (F_{1n} + \lambda\lambda_e F_{2n} + \lambda\lambda' F_{3n} + \lambda_e\lambda' F_{4n}), \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} F_{1n} &= -4J_n^2 + \xi^2 \left(1 - y + \frac{1}{1-y}\right) (J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_n^2), \\ F_{2n} &= \xi^2 \left(-1 + y + \frac{1}{1-y}\right) \left(1 - 2\frac{y}{y_n} \frac{(1-y_n)}{(1-y)}\right) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2), \\ F_{3n} &= \xi^2 \left(1 - y + \frac{1}{1-y}\right) \left(1 - 2\frac{y}{y_n} \frac{(1-y_n)}{(1-y)}\right) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2), \\ F_{4n} &= -4yJ_n^2 + \xi^2 \left(-1 + y + \frac{1}{1-y}\right) (J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_n^2), \\ z_n &= \frac{2n\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\alpha_n}, \quad \alpha_n = \frac{y}{y_n} \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) \frac{(1-y_n)}{(1-y)^2}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Перейдем к более детальному анализу влияния нелинейных эффектов в рассматриваемом процессе. Будем исходить из следующих начальных условий: столкновение считаем лобовым, электроны имеют энергию  $E = 50$  и  $300$  ГэВ,  $\omega = 1,17$  эВ (неодимовый лазер). При численных расчетах энергетических спектров  $(1/W) dW/dy$  (где  $W = \sum_{n=1}^{n_{\max}} W_n$  – полная вероятность излучения) и степени циркулярной поляризации испущенного фотона  $\lambda_f$  при  $\xi^2 < 1$  будем использовать разложения (8.13)–(8.15). В то же время при  $\xi^2 \geq 1$  воспользуемся точными выражениями (8.16), (8.17). Отметим, что в этом случае  $n_{\max}$  определяется из условий сходимости ряда (8.16).

Результаты численных расчетов энергетических спектров для различных поляризаций начальных электронов ( $\lambda_e$ ) и фотонов лазерной волны ( $\lambda$ ) представлены графиками на рис. 3, а–в, построенными, соответственно, для значений параметра  $\xi^2$ , равных 0,3, 1 и 3. Как видно из этих рисунков, учет нелинейных эффектов приводит к существенному отличию рассчитанных спектров от спектров обычного комптоновского рассеяния. Во-первых, одновременное поглощение из волны нескольких фотонов приводит к расширению спектра жестких  $\gamma$ -квантов, появлению дополнительных пиков, соответствующих излучению гармоник более высокого порядка. Это уширение для одной и той же энергии электрона тем больше, чем больше интенсивность волны. Так, для  $E = 50$  ГэВ и при  $\xi^2 = 0,3$  спектр ограничен сверху значением  $y \simeq 0,67$ , а при  $\xi^2 = 1$  он практически обращается в ноль при  $y \simeq 0,8$ , хотя незначительная часть фотонов может уносить до 97% энергии электрона. Во-вторых, эффективное утяжеление электрона [85]  $m^2 \rightarrow m_*^2 = m^2(1 + \xi^2)$  приводит к сжатию спектров в сторону меньших значений  $y$ , поскольку для

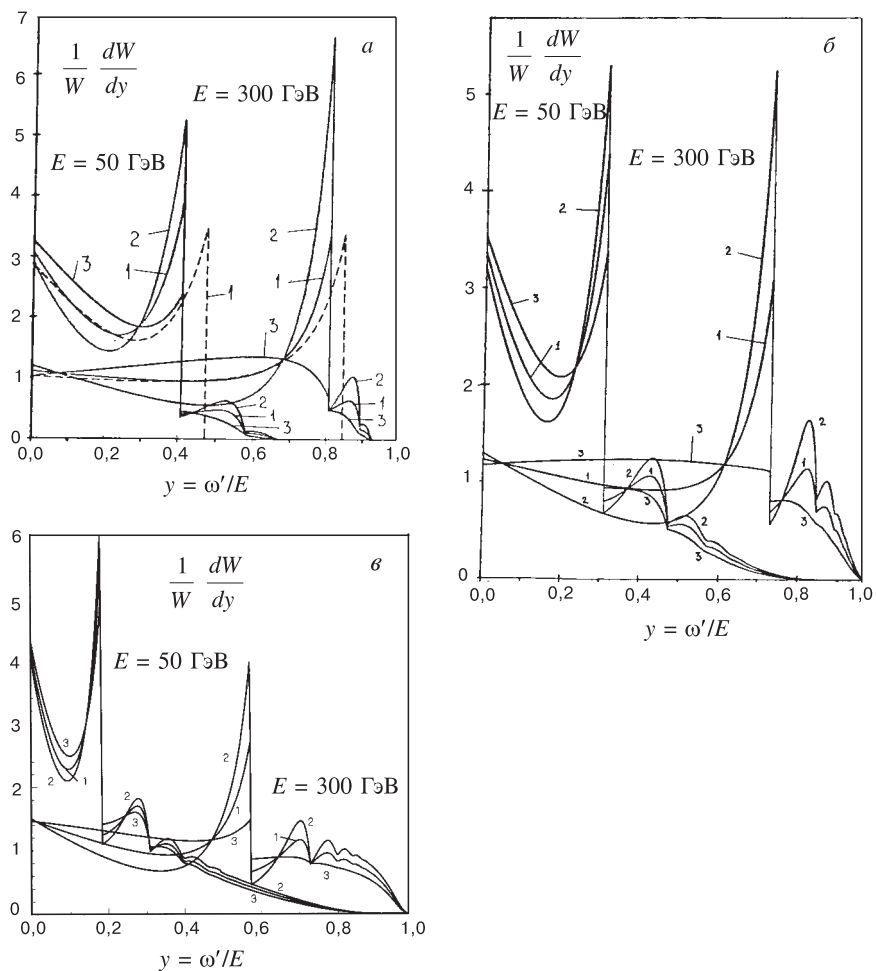


Рис. 3. Спектры ОКР, построенные для следующих значений параметра интенсивности: *a*)  $\xi^2 = 0,3$ , *б*)  $\xi^2 = 1$ , *в*)  $\xi^2 = 3$ . Штриховые линии отвечают обычному комptonовскому рассеянию ( $\xi^2 = 0$ ). Линии 1—3 соответствуют следующему выбору спиральностей электрона и фотона лазерной волны: 1)  $\lambda_e = 0, \lambda = 1$ , 2)  $\lambda_e = 1, \lambda = -1$ , 3)  $\lambda_e = 1, \lambda = 1$

каждого  $n$  спектр ограничен сверху величиной  $y_n = nx/(1 + nx + \xi^2)$ , а не  $nx/(1+nx)$ . Увеличение энергии электрона уменьшает относительное сжатие первой гармоники (см.рис.3,а). При сравнительно небольшой интенсивности лазерной волны ( $\xi^2 = 0,3$ ) основной вклад в излучение дают фотоны первой гармоники, выход фотонов более высоких гармоник незначителен. При средних значениях интенсивности ( $\xi^2 = 1$ ) уширение спектра за счет нелинейных эффектов сопровождается увеличением вероятности, выход более жестких фотонов становится существенным. И, наконец, при больших интенсивностях ( $\xi^2 = 3$ ), как видно из рис.3,б, излучение за счет нелинейных процессов многофотонных поглощений становится сравнимым с однофотонным и даже преобладающим (при  $E = 50$  ГэВ). Таким образом, в спектрах ОКР в поле циркулярно поляризованной ЭМВ при  $\xi^2 = 0,3$  доминирует излучение первой гармоники, а при  $\xi^2 = 3$  излучение в основном идет за счет более высоких гармоник, т.е. процесс излучения жесткого фотона электроном становится существенно нелинейным [86].

С целью изучения поляризационных эффектов при каждом значении энергии  $E$  построены энергетические спектры для следующих состояний поляризации электрона и лазерного фотона:

$$1 \rightarrow \lambda_e = 0, \lambda = 1; 2 \rightarrow \lambda_e = 1, \lambda = -1; 3 \rightarrow \lambda_e = 1, \lambda = 1.$$

На рис.3 им отвечают линии 1, 2 и 3 соответственно. Все сказанное выше о поведении энергетических спектров относилось сразу ко всем трем линиям 1, 2 и 3. Что касается их взаимного расположения, то, как видно из рис.3, наиболее интенсивные спектры соответствуют случаю, когда спины у электрона и лазерного фотона параллельны ( $\lambda\lambda_e = -1$ ), а наименее интенсивные отвечают антипараллельным спинам ( $\lambda\lambda_e = 1$ ), как и в случае обычного комптоновского рассеяния (см. [89]).

Отметим также, что разница между спектрами, построенными для трех рассмотренных случаев поляризации электрона и лазерного фотона, столь существенная при малых значениях параметра интенсивности ( $\xi^2 = 0,3$ ), становится незначительной при  $\xi^2 = 3$  ( $E = 50$  ГэВ). Она вновь возникает лишь в связи с ростом энергии электрона (см.рис.3,б при  $E = 300$  ГэВ).

Рассмотрим энергетическую зависимость степени круговой поляризации жесткого  $\gamma$ -кванта, представленную графиками на рис.4 и 5. Для этого укажем прежде всего на то, что отмеченные выше кинематические особенности поведения амплитуд  $M_{\pm\delta,\delta}^{(n)}$  (8.7), (8.8) имеют спиновое происхождение [86]. Действительно, равенство  $u = u_n$  соответствует излучению фотона в направлении движения начального пучка электронов. В случае поглощения из волны  $n$  фотонов ( $n > 1$ ) и точного рассеяния назад жесткого фотона полная спиральность систем  $e + n\gamma_0$  и  $e + \gamma$  до и после взаимодействия не сохраняется. Именно этим обусловлено обращение в ноль всех амплитуд

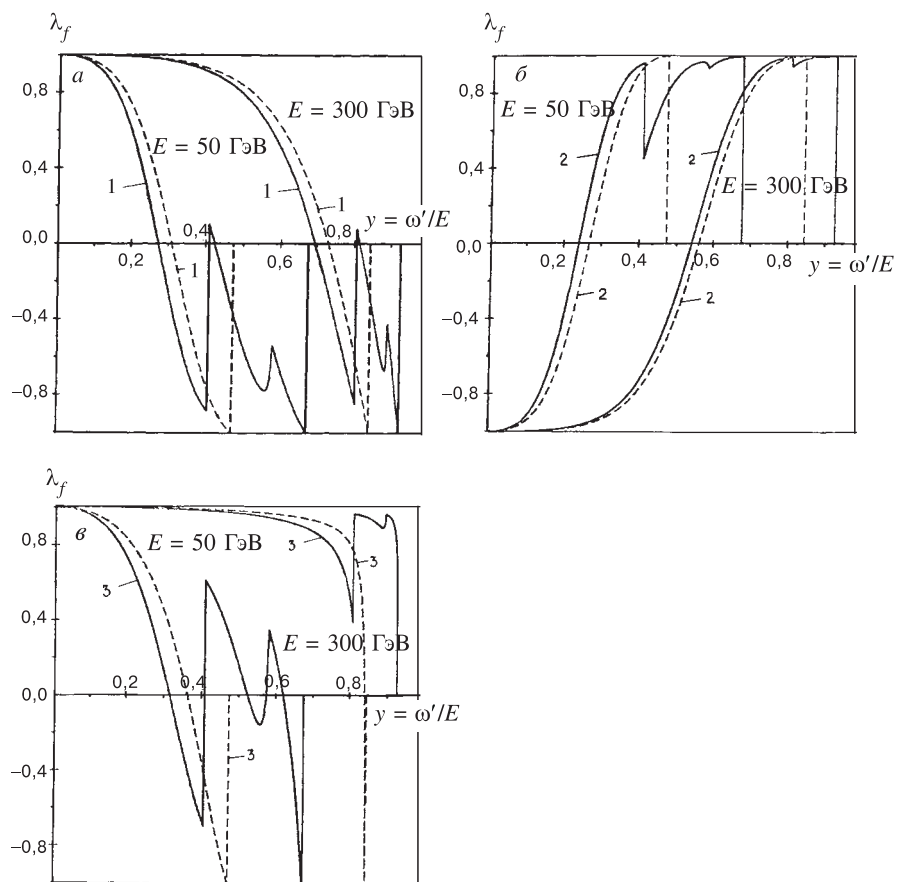


Рис. 4. Зависимости от энергии степени циркулярной поляризации высокоэнергетических фотонов, вычисленные при  $\xi^2 = 0,3$  для следующих поляризационных состояний сталкивающихся частиц: *a*)  $\lambda_e = 0, \lambda = 1$ , *б*)  $\lambda_e = 1, \lambda = -1$ , *в*)  $\lambda_e = 1, \lambda = 1$ . Штриховые линии отвечают обычному комптоновскому рассеянию

$M_{\pm\delta,\delta}^{(n)}(u = u_n)$  при  $n > 1$ , а также  $M_{\delta,\delta}^{(n)}(u = u_1)$ . Требование сохранения спиральности приводит также к тому, что для обычного комптоновского рассеяния на границе спектра имеем:  $\lambda_f = -\lambda$  [86].

Как видно из рис.4, 5, учет нелинейных эффектов ( $\xi^2 \neq 0$ ) уменьшает степень круговой поляризации в первом пике. Вклад более высоких гармоник приводит к появлению дополнительных пиков, причем на границе спектра (при  $n = n_{\max}$ ), как и в случае обычного рассеяния, справедливо соотношение:  $\lambda_f = -\lambda$ . Следует, однако, заметить, что выход таких фотонов незначителен, поскольку спектры практически обрываются при значениях  $y$ , намного меньших, чем  $y_{n_{\max}}$ . Наиболее благоприятной в этом отношении оказывается ситуация с  $\lambda\lambda_e = -1$ , когда велик интервал энергий жестких  $\gamma$ -квантов, в котором степень циркулярной поляризации  $|\lambda_f|$  наиболее близка к единице.

### 9. РОЖДЕНИЕ $e^+e^-$ -ПАР ЖЕСТКИМ ФОТОНОМ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ С ФОТОНАМИ ЛАЗЕРНОЙ ВОЛНЫ

В работе [84] было показано, что жесткий фотон  $\gamma$ , полученный в реакции (8.1), может породить  $e^+e^-$ -пары при столкновении с фотонами того же лазерного пучка. Порог такой реакции (8.2) при  $s = 1$  очень высок. Наименьшее значение энергии комптоновского фотона ( $s = 1$ ) в процессе (8.2) при использовании неодимового лазера с  $\omega_0 = 1,17$  эВ равно  $\omega = m^2/\omega_0 = 223$  ГэВ. На самом деле  $e^+e^-$ -пары будут рождаться в больших количествах и при значительно меньших энергиях за счет соударения жесткого фотона  $\gamma$  с несколькими лазерными фотонами  $\gamma_0$  одновременно [84]. Наблюдение процесса (8.2) представляет несомненный интерес для проверки КЭД в новой области параметров. В то же время он представляет существенный фон для  $\gamma e^-$  и  $\gamma\gamma$ -соударений, возможный способ борьбы с которым описан в работе [84].

Реакция (8.2), так же, как и (8.1), представляет собой нелинейный по интенсивности поля процесс взаимодействия электронов и фотонов с полем ЭМВ. Нетрудно убедиться, что учет влияния нелинейных эффектов в процессе (8.1) на процесс (8.2) также ведет к существенному снижению порога рождения  $e^+e^-$ -пар и к увеличению их числа [90].

Максимальная энергия комптоновского фотона  $\gamma$ , полученного при поглощении электроном с энергией  $E$  из волны  $n$  лазерных фотонов с энергией  $\omega_0$ , равна

$$\omega_n = \frac{nx}{1+nx}E, \quad x = \frac{4\omega_0 E}{m^2}. \quad (9.1)$$

Пороговое значение энергии фотона  $\gamma$  для процесса (8.2) определяется из соотношения

$$(k + sk_0)^2 = 4m^2, \quad (9.2)$$

где  $k$  и  $k_0$  – 4-импульсы фотонов  $\gamma$  и  $\gamma_0$ .

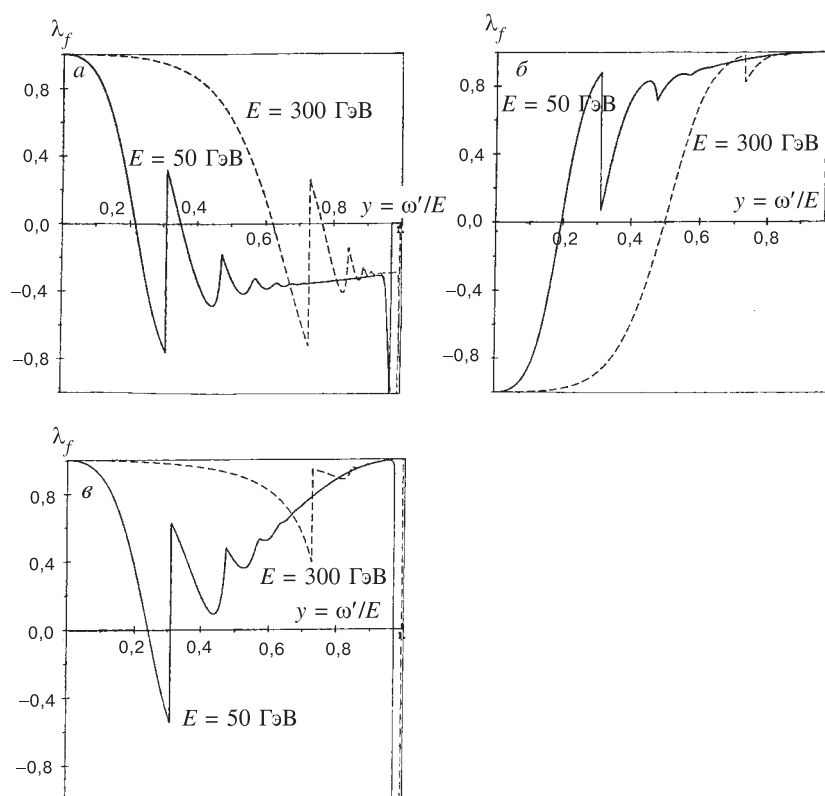


Рис. 5. Зависимости от энергии степени циркулярной поляризации высокоэнергетических фотонов, вычисленные при  $\xi^2 = 1$  для следующих поляризационных состояний сталкивающихся частиц: *a*)  $\lambda_e = 0, \lambda = 1$ , *б*)  $\lambda_e = 1, \lambda = -1$ , *в*)  $\lambda_e = 1, \lambda = 1$ . Сплошные линии отвечают энергии электрона —  $E = 50$  ГэВ, штриховые  $E = 300$  ГэВ

Соответствующие пороговые значения энергии электронов в пучке ускорителя  $E_{ns}$  для рождения  $e^+e^-$ -пар за счет поглощения им из волны  $n$  фотонов и соударения с  $s$  лазерными фотонами определяются с помощью (9.1), (9.2) и равны

$$E_{ns} = \frac{m^2}{2\omega_0 s} (1 + (1 + s/n)^{1/2}). \quad (9.3)$$

При  $n = 1$  мы получаем формулу (7) из работы [84]. С помощью (9.3) произведем расчет значений  $E_{1s}$  и  $E_{2s}$  для  $\omega_0 = 1,17$  эВ при  $1 \leq s \leq 6$ , которые (в единицах ГэВ) приведены в таблице.

**Таблица. Пороговые значения энергии электронов в пучке ускорителя  $E_{ns}$  (в ГэВ) для рождения  $e^+e^-$ -пар при различных  $n$  и  $s$  в случае неодимового лазера**

$s$	1	2	3	4	5	6
$E_{1s}$	269	153	112	90	77	68
$E_{2s}$	248	135	96	76	64	56

Они наглядно свидетельствуют о том, что уширение спектра жестких  $\gamma$ -квантов за счет нелинейных эффектов также приводит к снижению порога рождения  $e^+e^-$ -пар.

Матричные элементы  $M_{\pm\mu\mu}^{(s)} = M_{\pm\mu\mu}^{(s)\lambda\lambda'}$  и дифференциальная вероятность процесса (8.2) в поле циркулярно поляризованной ЭМВ определяется следующими выражениями [90]:

$$dW^{(s)} = \frac{e^2 m^2}{4\pi\omega} |M_{\pm\mu,\mu}^{(s)\lambda\lambda'}|^2 \delta^4(sk_0 + k - q - q') \frac{d^3 q d^3 q'}{q_0 q'_0}, \quad (9.4)$$

$$M_{\mu\mu}^{(s)} = (-\lambda)^s \left\{ -\lambda' \mu n_1 n'_3 J_s + \frac{\xi m s}{m_*^2 u_s} (u k n'_0 - \lambda' \mu \varepsilon \sqrt{u(u-1) k n'_3}) J_{s-\lambda\lambda'} \right\},$$

$$M_{-\mu\mu}^{(s)} = -\lambda' (-\lambda)^s (n_1 n'_1 + \lambda' \mu) \times \\ \times \left\{ \sqrt{(vv' + 1)/2} J_s + \frac{\xi m s u}{m_*^2 u_s} \sqrt{(vv' - 1)/2} k n'_1 J_{s-\lambda\lambda'} \right\},$$

где

$$n_1 n'_3 = -\frac{m_*^2 u_s}{m^2 u \sqrt{2(vv' - 1)}} \frac{z}{s\xi}, \quad k n'_0 = \frac{2m_*^2 u_s}{m s \sqrt{2(vv' + 1)}}, \\ k n'_3 = -\varepsilon \frac{2m_*^2 u_s \sqrt{(u-1)/u}}{m s \sqrt{2(vv' - 1)}}, \quad n_1 n'_1 = \varepsilon \sqrt{\frac{u-1}{u}} \sqrt{\frac{vv' + 1}{vv' - 1}}, \\ k n'_1 = -\frac{m_*^4 u_s^2}{s^2 m^3 u \sqrt{(vv')^2 - 1}} \frac{z}{\xi}, \quad \varepsilon = \text{sign} \sqrt{\frac{u_s(u-1)}{u(u_s-1)}},$$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{(kk_0)^2}{4k_0q \cdot k_0q'}, \quad u_s = \frac{s}{s_0} = \frac{skk_0}{2m_*^2}, \quad z = \frac{2s\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{\frac{u}{u_s} \left(1 - \frac{u}{u_s}\right)}, \\
 q &= p + \frac{\xi^2 m^2}{2k_0 p} k_0, \quad q' = p' + \frac{\xi^2 m^2}{2k_0 p'} k_0, \quad q^2 = (q')^2 = m_*^2 = m^2(1 + \xi^2), \\
 sk_0 + k &= q + q', \quad vv' - 1 = 2(u_s - 1 + \xi^2(u_s - u)).
 \end{aligned}$$

Здесь  $k_0$ ,  $\lambda$  и  $k$ ,  $\lambda'$  есть 4-импульсы и спиральности лазерного и жесткого фотонов,  $\mu$  – проекция спина позитрона на ось (1.9),  $q$  и  $q'$  – квазиимпульсы позитрона и электрона,  $s_0$  – пороговое значение для числа поглощенных квантов,  $J_s = J_s(z)$  – функции Бесселя от аргумента  $z$ ,  $\xi^2$  – параметр интенсивности волны (8.3).

Полная вероятность образования пары фотоном в процессе (8.2), рассчитанная на единицу объема и единицу времени, определяется следующими выражениями [90]:

$$W = \frac{\alpha m^2}{4\omega} \sum_{s>s_0}^{\infty} \int_1^{u_s} (F_{0s} + \lambda\lambda' F_{2s} + \mu\lambda G_{0s} + \mu\lambda' G_{2s}) \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}}, \quad (9.5)$$

$$F_{0s} = J_s^2 + \xi^2 (2u - 1) (-J_s^2 + (J_{s-1}^2 + J_{s+1}^2)/2),$$

$$F_{2s} = \xi^2 (2u - 1)(2u/u_s - 1)(J_{s-1}^2 - J_{s+1}^2)/2,$$

$$G_{0s} = \psi_+ \psi_- \xi^2 u/u_s (u_s - 1) (J_{s-1}^2 - J_{s+1}^2),$$

$$G_{2s} = \psi_+ \psi_- \{u_s J_s^2 + \xi^2 [u_s J_s^2 + u(u-1)(J_{s-1}^2 + J_{s+1}^2)]\},$$

где  $\psi_{\pm} = 1/\sqrt{(vv' \pm 1)/2}$ .

Полное число  $e^+e^-$ -пар, рожденных жестким фотоном, получается суммированием по энергетическому спектру комптоновских фотонов [84]:

$$N_{e^+e^-} = N_{\gamma} \frac{\tau}{4} \sum_{s_0}^{\infty} \int_0^{\omega_n} W^{(s)}(\omega, \omega_0, \xi) \frac{1}{\sigma_c(E)} \frac{d\sigma_c}{d\omega} d\omega,$$

где  $N_{\gamma}$  – полное число жестких фотонов,  $\sigma_c(E)$  и  $d\sigma_c/d\omega$  – полное и дифференциальное сечение ОКР,  $W^{(s)}(\omega, \omega_0, \xi)$  – вероятность рождения пары жестким фотоном за единицу времени в процессе (8.2),  $\tau$  – длительность лазерной вспышки. Результаты численных расчетов величины  $\lg(N_{e^+e^-}/N_e)$  в зависимости от энергии электронов в пучке  $E$  для различных энергий лазерной вспышки  $A$ , поляризаций волны  $\lambda$ , спиральностей начального пучка электронов  $\lambda_e$  и проекций спина  $\mu$  на ось  $\vec{c}_3$  (1.9) для позитронов показаны на рис.6 [90]. Линии 1, 2, 3 соответствуют следующему выбору спиральностей:



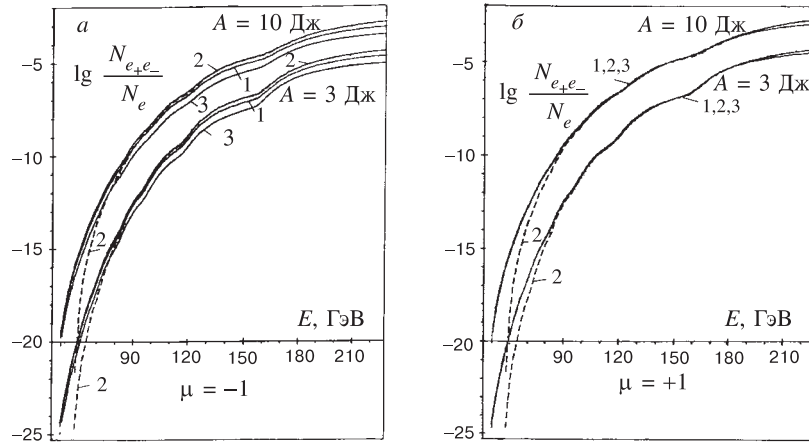


Рис. 6. Зависимость числа рожденных  $e^+e^-$ -пар жестким комptonовским фотоном от энергии электронного пучка для различных энергий лазерной вспышки  $A$  и поляризаций частиц. Линии 1–3 соответствуют следующему выбору спиральностей  $\lambda$  и  $\lambda_e$  начальных частиц в реакции (8.1): 1)  $\lambda\lambda_e = 0$ , 2)  $\lambda\lambda_e = -1$ , 3)  $\lambda\lambda_e = 1$ , сплошные линии отвечают  $n = 2$ , а штриховые –  $n = 1$  в процессе (8.1); а) проекция спина позитрона  $\mu = -1$ , б)  $\mu = 1$

1)  $\lambda\lambda_e = 0$ , 2)  $\lambda\lambda_e = -1$ , 3)  $\lambda\lambda_e = 1$ ; сплошные линии —  $n = 2$ , штриховые —  $n = 1$  в процессе (8.1). Из рис. 6 следует, что нелинейные эффекты в ОКР приводят к существенному увеличению числа  $e^+e^-$ -пар, рожденных жестким фотоном в области энергий современных ускорителей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель настоящего обзора — объяснить, что представляет собой ДСБ, что нового он дает для описания спиновых свойств частиц, а также для развития ковариантного метода вычислений матричных элементов в подходе Богуша — Федорова, и как этот метод соотносится с другими, такими, как метод группы CALCUL и т.д.

Из изложенного выше материала ясно, что ДСБ занимает особое положение среди всех остальных, поскольку в нем реализуется малая группа Лоренца, общая для частиц с 4-импульсами  $p_1$  (до взаимодействия) и  $p_3$  (после взаимодействия). ДСБ дает возможность описывать спиновые состояния систем, состоящих из двух частиц (в том числе и с различными массами) с помощью проекций спина на одно общее направление. Совпадение малых

групп Лоренца приводит к тому, что частицы до и после взаимодействия имеют общий набор спиновых операторов, коммутирующих между собой, что позволяет в ковариантном виде разделить взаимодействия с изменением и без изменения спиновых состояний частиц, участвующих в реакции, и тем самым проследить за динамикой спинового взаимодействия. Благодаря совпадению спиновых операторов, а также выделению вигнеровских вращений, математическая структура диагональных амплитуд предельно упрощается.

Для вычисления матричных элементов в ковариантном подходе Богуша — Федорова необходимо знать проективные операторы состояний частиц, оператор перехода от начального состояния к конечному (и обратный к нему), а также повышающие и понижающие спиновые операторы в случае переходов с переворотом спина. В обзоре дано развитие этого ковариантного подхода за счет использования ДСБ. Построены операторы  $u^\delta(p_1) \bar{u}^{\pm\delta}(p_3)$ , с помощью которых вычисляются диагональные амплитуды в случае переходов без переворота и с переворотом спина. Они справедливы как в массивном, так и в безмассовом случае. Для них получено три эквивалентных представления, имеющих компактный вид. Рассмотрен также переход к безмассовому случаю, в котором ДСБ с точностью до знака совпадает со спиральным.

Отметим, что в методе CALCUL безмассовость фермиона является необходимой. Ключевым моментом их методики является весьма удобный выбор векторов поляризации фотонов, в которых используются импульсы тех фермионов, из которых эти фотоны излучаются. Это обеспечивает калибровочную инвариантность, позволяет упростить структуру амплитуд и в конечном итоге вычислить их. Массу в методе CALCUL удается учесть только в ультрарелятивистском случае и лишь в качестве громоздких массовых поправок. Обобщения этого метода на массивный случай, как правило, требуют введения вспомогательных векторов, не связанных с кинематикой задачи, и потому неудобны в работе. Тем не менее этот метод содержит привлекательную идею строить векторы поляризации фотонов через 4-импульсы частиц, участвующих в реакции. Это позволяет уменьшить число независимых скалярных произведений в конечных выражениях для амплитуд и тем самым упростить расчеты. Таким образом, отказ от общности рассмотрения приводит к росту эффективности решения задачи. Это тем более справедливо по отношению к развитому методу вычисления диагональных амплитуд, поскольку в нем для построения математического аппарата используются только 4-импульсы частиц, участвующих в реакции. В ДСБ их вполне достаточно, благодаря использованию идей ковариантного подхода Богуша — Федорова.

Перечислим кратко основные результаты расчетов ряда конкретных актуальных процессов КЭД, полученных с помощью развитого метода вычисления матричных элементов в ДСБ.

Показано, что в ультрарелятивистском, (безмассовом) пределе дифференциальные сечения процессов тормозного меллеровского и баба-рассеяния

( $e^\pm e^- \rightarrow e^\pm e^- \gamma$ ) в случае, когда не только начальные  $e^\pm, e^-$ -частицы, но и фотон являются спирально поляризованными, могут быть представлены в виде произведения двух сомножителей, один из которых универсален и совпадает с полученным ранее группой CALCUL в случае отсутствия поляризаций.

Вычислены спиральные амплитуды процесса трехфотонной аннигиляции свободной пары  $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$ , а также амплитуды аннигиляции ортопозитрония, отвечающие проекциям полного спина  $0, \pm 1$ . Получены дифференциальные сечения с учетом поляризаций различных частиц. Рассчитана вероятность аннигиляции в случае, когда один из  $\gamma$ -квантов является линейно поляризованным, а остальные два неполяризованы. Полученное выражение для степени линейной поляризации фотона совпадает с результатами других авторов.

Для дифференциального сечения бете-гайтлеровского процесса излучения линейно поляризованного фотона электроном с учетом отдачи и формфакторов протона получено компактное выражение, благодаря факторизации квадратов электрического и магнитного формфакторов протона. В предельном случае, когда протон является точечной частицей с бесконечной массой, полученное выражение переходит в известное.

Проведено исследование реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  с учетом поляризуемости протона в кинематике, соответствующей рассеянию электронов на малые, а фотонов на достаточно большие углы, где доминирует протонное излучение. Результаты численных расчетов, проведенных в системе покоя начального протона при энергии электронного пучка  $E_e = 200$  МэВ в выбранной кинематике, показывают, что условия, необходимые для выделения подпроцесса  $\gamma p \rightarrow \gamma p$  из реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$ , выполняются, поскольку относительный вклад бете-гайтлеровского и интерференционного членов в сечение реакции не превышает 10 %, а сечение реакции  $ep \rightarrow ep\gamma$  обладает заметной чувствительностью к поляризуемости протона.

Построено ковариантное выражение для лептонного тензора, в котором выделен вклад состояний с поперечной и продольной поляризацией виртуального фотона. Показано, что учет массы лептона приводит к увеличению степени линейной поляризации виртуального фотона.

Исследованы нелинейные эффекты при обратном комптоновском рассеянии фотонов интенсивной циркулярно поляризованной лазерной волны, сфокусированной на пучке продольно поляризованных ультрарелятивистских электронов ( $e + n\gamma_0 \rightarrow e + \gamma$ ). Показано, что при больших интенсивностях процесс излучения жесткого фотона является существенно нелинейным, а влияние поляризаций заметно уменьшается.

Показано, что уширение спектра в обратном комптоновском рассеянии за счет нелинейных эффектов приводит к снижению порога рождения  $e^+e^-$ -пар и к увеличению их числа при столкновении жесткого комптоновского фотона с несколькими лазерными фотонами одновременно ( $\gamma + n\gamma_0 \rightarrow e^+ + e^-$ ).

Таким образом, отсутствие трудностей, связанных с учетом массы и расчетом амплитуд с переверотом спина, а также красота и изящество полученных результатов, несомненно, являются свидетельством эффективности развитого метода вычисления матричных элементов.

Авторы благодарны создателям ковариантного подхода: члену.-корр. АНБ А.А.Богушу и академику Ф.И.Федорову. Их благотворные идеи и методы во многом определили направление исследований и характер работы. Авторы признательны В.И.Кувшинову, стимулировавшему написание настоящего обзора, а также И.Ф.Гинзбургу, Э.А.Кураеву, М.И.Левчуку, А.И.Львову и В.А.Петрунькину за постановку задач, полезные обсуждения и интерес к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Polarization at LEP, 1988, v.1, CERN 88-06, **Altarelli G.** — p.13; **Lynn B.W.** — p.24; **Hollik W.** — p.83.
2. **HERMES Collab.** — Technical Design Report, DESY-PRC 93/06, 1993.
3. **Lauber J.A.** — SLAC-Report - 413, February 1993, p.29.
4. **Haber H.** — Proceedings of the XXI SLAC Summer Institute on Particle Physics, 1994.
5. **Nurushev S.B.** — Polarization Experiments (review). Preprint IHEP 91-103, Protvino 1991.
6. **Wu C.S., Ambler E.et al.** — Phys. Rev., 1957, v.105, p.1413.
7. **Lee T.D., Yang C.N.** — Phys. Rev., 1957, v.105, p.1671.
8. **Cristinson I.H. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.138.
9. **Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.** — Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
10. **Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.** — Квантовая электродинамика. М.:Наука, 1989.
11. **Хелзен Ф., Мартин А.** — Кварки и лептоны. М.: Мир, 1987.
12. **Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д.** — Релятивистская квантовая теория. М.: Мир, 1979.
13. **Федоров Ф.И.** — Группа Лоренца. М.: Наука, 1979.
14. **Powell J.L.** — Phys. Rev., 1949, v.75, p.32.
15. **Соколов А.А., Тернов И.М.** — Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983.
16. **Tsai Yu. S.** — Phys. Rev., 1993, v.D48, p.96.
17. **Guichon P.A.M., Lui G.Q., Thomas A.W.** — Nucl. Phys. 1995, vol. A591, p.606.
18. **Bellomo E.** — Nuovo Cim., 1961, v.21, p.730.
19. **Богуш А.А., Федоров Ф.И.** — Весті АН БССР, сер. ф.т.н., 1962, No. 2, с.26.
20. **Федоров Ф.И.** — ЖЭТФ, 1958, т.35, с.493.
21. **CALCUL collaboration** — Phys. Lett., 1981, v.105B, p.215; Phys. Lett., 1982, v.114B, p.203; Nucl. Phys. 1982, v.B206, p.53; Nucl. Phys. 1982, v.B206, p.61; Nucl. Phys. 1984, v.B239, p.382; Nucl. Phys. 1984, v.B239, p.395;
22. **Kleiss R., Stirling W.J.** — Nucl. Phys. 1985, v.B262, p.235.

23. **Ballestrero A., Maina E.** — Phys. Lett., 1995, v.B350, p.225.
24. **Федоров Ф.И.** — ДАН БССР, 1958, т.2, с.408.
25. **Федоров Ф.И.** — ДАН БССР, 1961, т.5, с.101.
26. **Федоров Ф.И.** — ДАН СССР, 1962, т.143, с.56.
27. **Богуш А.А., Федоров Ф.И.** — ДАН БССР, 1961, т.5, с.327.
28. **Тхарев Е.Е., Федоров Ф.И.** — ЯФ, 1962, т.5, с.1112.
29. **Богуш А.А.** — Весці АН БССР, сер. ф.т.н., 1964, No.2, с.29.
30. **Федоров Ф.И.** — Весці АН БССР, сер.фіз.-мат.н., 1974, No.2, с.58.
31. **Федоров Ф.И.** — Весці АН БССР, сер.фіз.-мат.н., 1975, No.3, с.51.
32. **Федоров Ф.И.** — Изв. ВУЗов, физика, 1980, No.2, с.32.
33. **Jacob M., Wick G.** — Ann. Phys. 1959, v.7, p.404.
34. **Vega R., Wudka J.** — Phys. Rev., 1996, v.D53, p.5286.
35. **Сикач С.М.** — В сб.: Ковариантные методы в теоретической физике. Минск: ИФ АН БССР, 1981, с.91.
36. **Сикач С.М.** — Весці АН БССР, сер. фіз.-мат.н., 1984, No.2, с.84.
37. **Федоров Ф.И.** — ТМФ, 1970, т.2, No.3, с.343.
38. **Сикач С.М.** — Кандидатская диссертация. Минск, 1987.
39. **Галынский М.В., Сикач С.М.** — В сб.: Ковариантные методы в теоретической физике. Минск: ИФ АН БССР, 1986, с.121.
40. **Галынский М.В., Жирков Л.Ф., Сикач С.М., Федоров Ф.И.** — ЖЭТФ, 1989, т.95, No.6, с.1921.
41. **Богуш А.А., Мороз Л.Г., Сикач С.М., Федоров Ф.И.** — Труды XI семинара "Проблемы физики высоких энергий и теории поля". Протвино, 5-9 июля 1988 г, М.: Наука, 1989, с.308.
42. **Sikach S.M.** — Preprint No 658, Inst. of Phys. BAS, Минск, 1992; Preprint No 659 Inst. of Phys. BAS, Минск, 1992; В сб.: Ковариантные методы в теоретической физике. Минск: ИФ АН БССР, 1997, с.151.
43. **Новожилов Ю.В.** — Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.
44. **Бондарев А.Л.** — ТМФ, 1994, т.101, с.315.
45. **Bargman V., Wigner E.** — Proc. Ac. Nat. Sci. 1948, v.34, p.211.
46. **Галынский М.В., Сикач С.М.** — В сб.: Ковариантные методы в теоретической физике. Минск: ИФ АН БССР, 1991, с.52.
47. **Галынский М.В., Сикач С.М.** — ЯФ, 1991, т.54, No.4(10), с.1026.
48. **Gausmaecker P.D., Gastmans R. et al.** — Phys. Lett., 1981, vol. B105, p.215.
49. **Verends F.A., Gastmans R. et al.** — Nucl. Phys., 1982, v.B206, p.53; p.61.
50. **Кураев Э.А. и др.** — ЯФ, 1980, т.32, No.4(10), с.1059.
51. **Westbrook C.I. et al.** — Phys. Rev., 1989, v.A40, p.5489.
52. **Кураев Э.А. и др.** — ЯФ, 1990, т.51, с.1638.
53. **Lepage G.p. et al.** — Phys. Rev., 1983, v.A28, p.3090.
54. **Галынский М.В., Метелица О.Н., Сикач С.М.** — В сб.: Ковариантные методы в теоретической физике. Минск: ИФ АН БССР, 1991, с.43.

55. Drisco R.M. — Phys. Rev., 1956, v.102, p.1542.
56. Ye J.B., Yang B.Z. et al. — Phys. Lett., 1988, v.A133, p.309.
57. Федоров Ф.И. — Теория гиротропии. Минск: Наука и техника. 1976.
58. Петрунькин В.А. — ЭЧАЯ, 1981, т.12, No.3, с.692.
59. L'vov A.I., Petrun'kin V.A. — Lect. Notes Phys. 1990, V.365, p.123.
60. L'vov A.I., Petrun'kin V.A., Popov S.G. and Wojtsekhowski B.B. — Preprint INP, 1991, No. 91-24.
61. Isaev P.S., Zlatev I.S. — Nucl. Phys. 1960, v.16, p.608.
62. Wojtsekhowski B.B., L'vov A.I., Petrun'kin V.A. et al. — Project: Moscow-Novosibirsk-Gottingen. Preprint Lebedev Physical Institute, Moscow, 1992.
63. Kroll P., Schurmann M., Guichon P.A.M. — Preprint WU B 95-09.
64. Berg R.A., Lindner C.N. — Nucl. Phys. 1961, v.26, p.259.
65. Галынский М.В. — Препринт 695, ИФ АНБ, Минск, 1994.
66. Львов А.И. — ЯФ, 1981, т.34, с.1075.
67. Ахундов А.А., Бардин Д.Ю., Шумейко Н.М. — ЯФ, 1986, т.44, с.1517.
68. Akhundov A.A., Bardin D.Yu. et al. — Z. Phys. C. 1990, v.45, p.645.
69. Gluckstern R.L., Hull M.H., Breit G. — Phys. Rev., 1953, v.90, p.1026.
70. Olsen H., Maximon L.C. — Phys. Rev., 1959, v.114, p.887.
71. Asai J71, Caplan H.S., Maximon L.C. — Can. J. Phys. 1988, v.66, p.1079.
72. Isaev P.S., Zlatev I.S. — Nuovo Cim., 1959, v.13, p.1.
73. Галынский М.В. — ЯФ, 1995, т.58, с.701.
74. Audit C. et. al. — CEBAF proposal PR 93-050, 1993.
75. Van den Brand J.F.J. — CEBAF proposal PR 94-011, 1994.
76. Scherer S., Korchin A.Yu., Koch J.H. — Mainz Report МКРН-Т-96-4.
77. Fearing H.W., Scherer S. — Mainz Report TRI-PP-96-28, МКРН-Т-96-18.
78. Ахизер А.И., Рекало М.П. — Электродинамика адронов. Киев: Наукова думка. 1977.
79. Галынский М.В., Кример Д.О., Левчук М.И. — В сб.: Ковариантные методы в теоретической физике. Минск: ИФ АНБ, 1997, с.56.
80. Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Тельнов В.И. — ЯФ, 1983, т. 38, с.372.
81. Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Тельнов В.И. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т.34, с.514.
82. Арутюнян Ф.Р., Туманян В.А. — ЖЭТФ, 1963, т.44, с.2100.
83. Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Политыко С.И. — ЯФ, 1984, т.40, с.1495.
84. Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Политыко С.И. — ЯФ, 1983, т.37, с.368.
85. Никишев А.И., Ригус В.И. — Труды ФИАН. 1979, т.111.
86. Галынский М.В., Сикач С.М. — ЖЭТФ, 1992, т.101, с.828.
87. Vila C. et al. — E-144 Collaboration, SLAC-PUB-7220, SLAC-PUB-7221, 1996; SLAC-PUB-7564, 1997.
88. Нарожный Н.Б., Фофанов М.С. — ЖЭТФ, 1996, т.110, с.26.
89. Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Панфиль С.Л., Сербо В.Г. — ЯФ, 1983, т.38, с.1021.
90. Galynskii M.V., Sikach S.M. — Proceedings of the V Annual seminar "Nonlinear phenomena in complex system". February 1996, Minsk, Belarus; in: Advances in Synergetics, 1997, v.8, p.60, Edited by V.Kuvshinov, G.Krylov.