

УДК 539.16: 539.17

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ПРИВЕДЕННОЙ МАССЫ УРАВНЕНИЯ
ШРЕДИНГЕРА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ
В ФИЗИКЕ ЯДРА

М. Н. Понушой

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

ВВЕДЕНИЕ	1485
АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЙОСТА И S -МАТРИЦЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИВЕДЕННОЙ МАССЫ	1489
ЗАВИСИМОСТЬ ЭНЕРГИИ РАСПАДА (РАЗДЕЛЕНИЯ) ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ИЗОТОПНЫХ ЯДЕР С $J^\pi = \text{const}$ ОТ ЗНАЧЕНИЙ ПРИВЕДЕННОЙ МАССЫ ДОЧЕРНИХ ФРАГМЕНТОВ	1496
ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЮСА S -МАТРИЦЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ КУЛОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ И РАСПАД ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР С $J^\pi = \text{const}$	1507
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ПРИ КОМПЛЕКСНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПРИВЕДЕННОЙ МАССЫ	1514
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1516
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1518

УДК 539.16: 539.17

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРИВЕДЕННОЙ МАССЫ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В ФИЗИКЕ ЯДРА

М. Н. Понушой

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

Представлен обзор результатов исследований двухфрагментной задачи, основанный на идее аналитического продолжения приведенной массы в область комплексных значений. В рамках S -матричного формализма и обратной задачи рассеяния рассмотрены некоторые примеры приложения данного метода в физике ядра.

The review of the results of the two-fragment problem investigation, based on the idea of analytic extension of equivalent mass to the region of complex meanings is proposed. In the frames of S -matrix formalism and the reverse problem of scattering, some examples of this method application in the physics of nuclear are studied.

Посвящается Владимиру Владимировичу Малярову, Игорю Владимировичу Поплавскому

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что уравнение Шредингера для парциальных волн содержит в качестве фундаментальных спектральных параметров энергию E и орбитальный момент l , а также приведенную массу μ и электрические заряды ze и Ze взаимодействующих частиц. Ряд важных результатов, полученных в квантовой теории рассеяния при описании систем, состоящих из двух фиксированных частиц, связан с аналитическим продолжением переменных E и l в область комплексных значений. В частности, установлено, что характер и расположение особенностей S -матрицы на комплексных E - и l -плоскостях дают непосредственные сведения о физических свойствах составной системы. Так, например, Редже для случая рассеяния незаряженных частиц, предположив, что орбитальный момент l может принимать комплексные значения, сопоставил каждому полюсу S -матрицы функцию $l(E)$ [1]. При этом было доказано, что одному и тому же движущемуся в l -плоскости полюсу (траектории Редже) могут соответствовать несколько резонансов и связанных состояний, различающихся значением l . Действие кулоновского притягивающего

потенциала приводит к тому, что на каждой траектории имеется бесконечное число связанных состояний, характеризуемых одинаковым радиальным квантовым числом (числом узлов радиальной волновой функции) и различными значениями l [2].

Аналитические свойства ядерно-кулоновской S -матрицы в комплексной k -плоскости ($k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$) при $l = 0$, $zZe^2 > 0$ и $\mu = \text{const}$ для суперпозиции юкавских потенциалов установлены Корниллем и Мартином [3]. Однако наиболее полно и математически строго этот вопрос при $l \geq 0$, $zZe^2 > 0$ для широкого класса потенциалов исследован Ментковским [4]. При этом оказалось, что состояния составной двухчастичной системы можно также описать с помощью траектории полюса S -матрицы на комплексной k -плоскости при фиксированных вещественных значениях момента l . Так, например, при представлении S -матрицы рациональными функциями в комплексной k -плоскости выявлены по данным фазового анализа ее особенности для систем ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$, позволяющие описать резонансные состояния ${}^8\text{Be}$ ($J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$) [5]. Аналогично в [6, 7] приведено описание квазистационарных состояний ${}^5\text{He}^*$ и ${}^5\text{Li}^*$ ($J^\pi = 3/2^+$) в приближениях, не зависящих от конкретной формы эффективного короткодействующего потенциала систем ${}^2\text{H} + {}^3\text{H}$ и ${}^2\text{H} + {}^3\text{He}$.

В работах [8, 9] Поплавский, следуя идее Редже, предположил, что электрические заряды также могут принимать комплексные значения. При этом показано, что связанные и резонансные состояния в системах, возникающих при рассеянии заряженной частицы ${}_z x$ на изобарных ядрах ${}_Z^A Y$ с $J^\pi = \text{const}$, можно описать с помощью траектории полюса S -матрицы в комплексной плоскости кулоновской константы связи a ($a = zZe^2$, $2\mu = \hbar = c = 1$), обусловленной комплексными значениями заряда Ze . В частном случае α -распада основных состояний составных систем найденная на основе порогового поведения полюса $a(E)$ вблизи $E \gtrsim 0$ связь резонансной энергии E_r и ширины резонанса Γ_r представляет собой закон Гейгера–Нетолла для изобарных ядер с $J^\pi = \text{const}$ [10]. Если заряд ze также принимает комплексные значения, то теория комплексной a -плоскости описывает кулоновские эффекты в системе $X + Y \leftrightarrow Q$, где X , Y и Q — изобарические мультиплеты [11]. На основе эквидистантности энергий распада (разделения) установлены эффективные массовые формулы для членов этих мультиплетов [12].

Введение комплексных зарядов позволяет также сформулировать и решить обратную задачу в новой постановке — восстанавливать потенциал взаимодействия заряженной частицы с членами изобарического мультиплета по известным при $E = \text{const}$ значениям «ядерных» фазовых сдвигов с учетом кулоновского расщепления [13, 14]. Так, восстановлены при фиксированных значениях энергии квазипотенциал $\pi^\pm \rho$ -взаимодействия в состоянии S_{31} [15] и потенциал взаимодействия протона с членами нуклонного изодуплета в состоянии 1S_0 [16]. С помощью метода комплексных зарядов можно пе-

реходить к расширенной постановке обратной задачи — ее обобщенному варианту, когда исходные данные рассеяния берутся при наличии линейной зависимости переменных спектральных параметров E , l^2 и a . В этом случае удастся восстанавливать E -, l - и a -независимый центральный потенциал двухфрагментной системы с $\mu = \text{const}$ [17]. Анализ результатов, связанных с развитием метода комплексных зарядов и его приложениями в физике ядра, приведен в обзорах [18, 19].

Идея аналитического продолжения в область комплексных значений оставшегося фундаментального параметра уравнения Шредингера — приведенной массы μ не является столь прозрачной, как идея метода комплексных значений λ ($\lambda = l + 1/2$) или a ($a = Zze^2$). Это обусловлено установившимся ранее мнением, что основное уравнение квантовой механики неприменимо к описанию систем с *переменным* числом частиц. При этом в целях упрощения записи соответствующих формул для потенциалов, свободных решений, S -матрицы и др. часто принята система единиц, в которой параметр μ явно не фигурирует ($2\mu = \hbar = 1$). Однако, если рассматривать, к примеру, рассеяние заряженной частицы (кластера) на ядрах-изотопах с фиксированными значениями спина и четности, то состояния составных систем могут быть описаны с помощью уравнения Шредингера для суперпозиции кулоновского и μ -зависимых центробежного и короткодействующего потенциалов. Так, при исследовании аналитических свойств S -матрицы в комплексной μ -плоскости для случая кулоновского zZe^2/r ($zZ > 0$) и короткодействующего $U(r) = \hbar^2 V(r)/2\mu$ (μ -зависимого) потенциалов было показано, что связанные и резонансные состояния в системах, возникающих при рассеянии частицы ${}_z x$ на ядрах ${}_Z Y$ с $Z = \text{const}$ и $J^\pi = 0^+$, можно описать единым образом с помощью траектории полюса S -матрицы в комплексной плоскости приведенной массы [20]. При α -распаде составных систем найденная на основе порогового поведения полюса $\mu(E)$ вблизи $E \gtrsim 0$ связь резонансной энергии E_r и ширины резонанса Γ_r представляет собой закон Гейгера–Нетолла для четно-четных изотопов ($J^\pi = 0^+$). В случае суперпозиции центробежного $\hbar l(l+1)/2\mu r^2$ и короткодействующего μ -зависимых потенциалов связь резонансных характеристик составных систем ${}_0 x + {}_Z Y$ с $Z = \text{const}$ и $J^\pi = \text{const}$ отличается от соотношения типа закона Гейгера–Нетолла, а именно $\Gamma_r = \gamma E_r^{l+1/2}$ ($\gamma > 0$) [20]. При $l = 0$ указанное соотношение становится очевидным в предположении, что вероятность испускания W составной системой частицы ${}_0 x$ с малой энергией пропорциональна ее скорости, т. е. $W \sim \sqrt{E}$ (поскольку $W = \Gamma/\hbar$, то $\Gamma \sim \sqrt{E}$).

Метод комплексных значений приведенной массы позволяет также рассматривать однопараметрическую обратную задачу в новой постановке, когда исходные данные рассеяния заданы при $E = \text{const}$, $l = \text{const}$ и $zZ = \text{const}$ для различных значений μ [21]. В этом случае эффективный потенциал вза-

имодействия в системе ${}_z x + \frac{A}{Z} Y$ с $J^\pi = \text{const}$, $Z = \text{const}$ характеризует при $E = \text{const}$ барионное расщепление «ядерной» фазы подобно тому, как потенциал взаимодействия в системе ${}_z x + \frac{A}{Z} Y$ с $J^\pi = \text{const}$, $A = \text{const}$ характеризует при $E = \text{const}$ кулоновское расщепление «ядерной» фазы [15,16]. Так, в [22] восстановлен по значениям фаз $n^1\text{H}$ - и $n^3\text{H}$ -рассеяний при $E = \text{const}$ эффективный потенциал взаимодействия системы $n + {}^A\text{H}$ ($A = 1, 3, 5$) в состоянии с $J^\pi = 1^+$.

Известно, что задача описания состояния атомного ядра является много-нуклонной задачей, в которой парный NN -потенциал, подобранный в определенном классе функций, предполагается заранее заданным. Поэтому, на первый взгляд, может вызвать удивление возможность описания состояний ядер на основе S -матричного формализма двухфрагментной задачи при переменных значениях приведенной массы. Как известно, ранее предполагалось, что уравнение Шредингера пригодно для описания квантовых систем с *фиксированным* числом частиц. В случае взаимодействия заряженных частиц метод комплексных значений электрических зарядов не нарушает вышеуказанное условие, поскольку *один и тот же потенциал* описывает взаимодействие между двумя группами заряженных частиц (изобарическими мультиплетами или ядрами-изобарами), имеющих примерно *одинаковую приведенную массу* [18]. Возникает естественный вопрос о правомочности замены многочастичной задачи с *переменным* числом частиц на двухфрагментную. Ответ, по видимому, заключается в том, что при такой замене нелокальный потенциал, определяемый с учетом NN -сил и принципа Паули, оказывается эквивалентным эффективному локальному μ -зависимому потенциалу двухфрагментной задачи, который зависит также от физических значений фиксированных спектральных параметров уравнения Шредингера. Необходимо отметить, что подход, основанный на использовании эффективного локального потенциала взаимодействия двух *фиксированных* ядерных фрагментов, эквивалентного нелокальному потенциалу, применялся и ранее при описании экспериментальных данных столкновения тяжелых ионов в рамках оптической модели [23].

Таким образом, прямая и обратная задачи рассеяния для различных значений μ , ze и Ze при $l = \text{const}$ и $E = \text{const}$ представляют не только математический интерес. Поэтому является актуальным рассмотрение характера особенностей S -матрицы в комплексных μ -, μZe - и $\mu z Ze^2$ -плоскостях для получения информации о резонансных (связанных) состояниях двухфрагментных систем ${}_z x + \frac{A}{Z} Y$ ($zZ = \text{const}$) [20, 24], ${}_z x + \frac{A}{Z} Y$ ($A - Z = \text{const}$, $z = \text{const}$) [25] и ${}_z x + \frac{A}{Z} Y$ [26, 27] с $J^\pi = \text{const}$. В случае распада составных систем с испусканием фиксированной частицы (кластера) соответствующие энергии распада примерно эквидистантны. Последнее свойство позволяет установить простые соотношения между массами изотопных [28] и изотонных [29] ядер с $J^\pi = \text{const}$.

1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЙОСТА И S-МАТРИЦЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИВЕДЕННОЙ МАССЫ

При установлении аналитических свойств S -матрицы в комплексной μ -плоскости ограничимся для простоты случаем s -рассеяния, то есть будем исходить из уравнения Шредингера

$$\psi''(\mu, E, r) + \left[2\mu E - \frac{\mu}{r} - V(r) \right] \psi(\mu, E, r) = 0, \quad (1)$$

где μ — комплексная величина, $\mu = \mu_\phi = m M_\phi / (m + M_\phi)$ (m и M_ϕ — массы взаимодействующих частиц) — физические значения приведенной массы. Здесь выбрана система единиц, в которой $\hbar = c = 2zZe^2 = 1$ [20].

Член μ/r описывает кулоновское взаимодействие частиц, а $U(r) = V(r)/2\mu_\phi$ — вещественный ядерный потенциал, удовлетворяющий условиям

$$\int_0^\infty r^n |V(r)| \exp(\alpha r) dr < \infty \quad (n = 0, 1; \alpha \geq 0). \quad (2)$$

Рассмотрим решения $\varphi(\mu, E, r)$ и $f^\pm(\mu, E, r)$ уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям

$$\varphi(\mu, E, 0) = 0, \quad \varphi'(\mu, E, 0) = 1, \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f^\pm(\mu, E, r) \exp \left[\pm i \left(\sqrt{2\mu E} r - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \ln 2\sqrt{2\mu E} r \right) \right] = 1. \quad (4)$$

Используя обозначение $[\varphi; f] = \varphi(r)f'(r) - \varphi'(r)f(r)$, введем функции Йоста

$$f^\pm(\mu, E) = [\varphi(\mu, E, r); f^\pm(\mu, E, r)]. \quad (5)$$

Если учесть, что $[f^+(\mu, E, r); f^-(\mu, E, r)] = 2i\sqrt{2\mu E}$, можно выразить регулярное решение $\varphi(\mu, E, r)$ через решения Йоста $f^\pm(\mu, E, r)$:

$$\varphi(\mu, E, r) = \frac{1}{2i\sqrt{2\mu E}} [f^+(\mu, E) f^-(\mu, E, r) - f^-(\mu, E) f^+(\mu, E, r)]. \quad (6)$$

На основании условий (4) получим при $r \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, E, r) \sim \exp [i\delta(\mu, E)] \frac{f^-(\mu, E)}{\sqrt{2\mu E}} \times \\ \times \sin \left[\sqrt{2\mu E} r - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \ln 2\sqrt{2\mu E} r + \delta(\mu, E) \right], \end{aligned}$$

где

$$f^+(\mu, E)/f^-(\mu, E) = \exp[2i\delta(\mu, E)] = S(\mu, E) \quad (7)$$

есть функция рассеяния; $\delta(\mu, E)$ — ядерно-кулоновский фазовый сдвиг.

Для чисто кулоновского поля ($V(r) = 0$) решения уравнения (1), функции Йоста и S -матрица имеют, согласно [30, с. 262; 31, с. 166] и выбранной в настоящей работе системе единиц, вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mu, E, r) &= \frac{1}{2i\sqrt{2\mu E}} M_{i/2\sqrt{\mu/(2E)}, 1/2}(2i\sqrt{2\mu E}r) = \\ &= (2\mu E)^{-1/4} \frac{\sqrt{r} \exp(i\sqrt{2\mu E}r)}{\sqrt{2i} \Gamma(1 + i/2\sqrt{\mu/(2E)})} \int_0^\infty e^{-t} t^{1/2(i\sqrt{\mu/(2E)}-1)} \times \\ &\quad \times J_1[2(2\mu E)^{1/4}\sqrt{2irt}] dt, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\mu}{2E}}\right) > -1; \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^\pm(\mu, E, r) &= \exp\left(\mp\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\mu}{2E}}\right) W_{\pm i/2\sqrt{\mu/(2E)}, 1/2}(\pm 2i\sqrt{2\mu E}r) = \\ &= \frac{\exp[\mp(\pi/4\sqrt{\mu/(2E)} + i\sqrt{2\mu E}r)]}{\Gamma(1 \mp i/2\sqrt{\mu/(2E)})} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{t \pm 2i\sqrt{2\mu E}r}\right)^{\mp i/2\sqrt{\mu/(2E)}} dt, \\ &\quad \operatorname{Re}\left(i/2\sqrt{\mu/(2E)}\right) > -1, \quad |\arg(\pm 2i\sqrt{2\mu E}r)| < \pi; \quad (9) \end{aligned}$$

$$f_0^\pm(\mu, E) = \frac{\exp(\mp\pi/4\sqrt{\mu/(2E)})}{\Gamma(1 \mp i/2\sqrt{\mu/(2E)})}; \quad (10)$$

$$S_0(\mu, E) = \exp[2i\eta(\mu, E)] = \frac{\Gamma(1 + i/2\sqrt{\mu/(2E)})}{\Gamma(1 - i/2\sqrt{\mu/(2E)})}. \quad (11)$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера; J_1 — функция Бесселя первого порядка; M и W — функции Уиттекера; $\eta(\mu, E)$ — кулоновский фазовый сдвиг.

1. Исследуем аналитические свойства решений $\varphi(\mu, E, r)$ и $f^\pm(\mu, E, r)$. При комплексных значениях μ и E выражение в квадратных скобках уравнения (1) является целой функцией указанных параметров. Согласно теореме Пуанкаре, если входящий в дифференциальное уравнение второго порядка коэффициент зависит не только от координаты, а является также целой функцией некоторого параметра, то решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, не зависящим от указанного параметра, оказывается целой функцией параметра при любом значении координаты. Следовательно, решение $\varphi(\mu, E, r)$, удовлетворяющее граничным условиям (3), представляет собой

аналитическую функцию без особенностей в открытых плоскостях комплексных переменных μ и E при любом значении r .

При установлении аналитических свойств решений $f^\pm(\mu, E, r)$ можно использовать для свободных решений Йоста $f_0^\pm(\mu, E, r)$ представление посредством контурного интеграла и преобразовать их методом деформации контура интегрирования [4, с. 61]. При этом выражение (9) сохраняет силу при деформации нижнего предела интегрирования в интервале от нуля до $2\sqrt{2\mu E}r$. Тогда для $E > 0$ и любых μ , где $\text{Re}(i/2\sqrt{\mu/(2E)}) > -1$, следует

$$|f_0^\pm(\mu, E, r)| \leq \frac{\exp(\pi/4 \text{Re} \sqrt{\mu/(2E)})}{|\Gamma(1 \mp i/2\sqrt{\mu/(2E)})|}. \quad (12)$$

Решения $f^\pm(\mu, E, r)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$f^\pm(\mu, E, r) = f_0^\pm(\mu, E, r) \pm \int_r^\infty G^\mp(\mu, E, r, r') f^\pm(\mu, E, r') dr' \quad (13)$$

с ядрами

$$G^\mp(\mu, E, r, r') = V(r') [f_0^\pm(\mu, E, r) \varphi_0(\mu, E, r') - f_0^\pm(\mu, E, r') \varphi_0(\mu, E, r)] / 2i\sqrt{2\mu E}. \quad (14)$$

Следуя аналогичным процедурам установления аналитических свойств ядерно-кулоновских решений в комплексной плоскости заряда [8] либо импульса [4, с. 67], можно показать, что итерационные разложения

$$f^\pm(\mu, E, r) = \sum_{n=0}^\infty f_{(n)}^\pm(\mu, E, r), \quad (15)$$

где

$$f_{(0)}^\pm(\mu, E, r) = f_0^\pm(\mu, E, r),$$

$$f_{(n+1)}^\pm(\mu, E, r) = \int_r^\infty G^\mp(\mu, E, r, r') f_{(n)}^\pm(\mu, E, r') dr', \quad (16)$$

равномерно сходятся в правой μ -полуплоскости при $E > 0$, если потенциал $V(r)$ удовлетворяет условиям (2) с $\alpha = 0$. Поэтому решения Йоста $f^\pm(\mu, E, r)$ и функции Йоста $f^\pm(\mu, E)$ аналитичны, а функция рассеяния $S(\mu, E)$ мероморфна при $E > 0$ в комплексной μ -плоскости ($\text{Re} \mu > 0$).

Отметим, что при более жестких условиях на потенциал можно получить дополнительные ограничения на области сходимости итерационных разложений для решений $f^\pm(\mu, E, r)$.

2. Рассмотрим характер расположения особенностей S -функции (7) некомплексной μ -плоскости при вещественных значениях энергии E .

Если потенциал вещественный, то из (1) и (3), (4) следуют условия сопряжения для решений

$$\varphi(\mu, E, r) = \varphi^*(\mu^*, E, r), \quad f^-(\mu, E, r) = f^{+*}(\mu^*, E, r), \quad (17)$$

функций Йоста и S -матрицы

$$f^-(\mu, E) = f^{+*}(\mu^*, E), \quad S(\mu, E) = S^{-1*}(\mu^*, E). \quad (18)$$

На основании (6) и граничных условий (4) регулярное решение $\varphi(\mu, E, r)$ имеет в точках, в которых $f^-(\mu, E) = 0$ ($\mu = \mu(E)$), асимптотический вид

$$\varphi(\mu, E, r) \sim \frac{f^+(\mu, E)}{2i\sqrt{2\mu E}} \exp \left[i \left(\sqrt{2\mu E} r - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \ln 2\sqrt{2\mu E} r \right) \right], \quad (19)$$

$$r \rightarrow \infty.$$

Умножим уравнение (1) для $\varphi(\mu, E, r)$ на $\varphi^*(\mu^*, E, r)$, затем вычтем из полученного уравнения комплексно-сопряженное уравнение и проинтегрируем результирующее выражение по r от 0 до ∞ . В итоге получим

$$2i \operatorname{Im} \mu(E) \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{r} - 2E \right) |\varphi|^2 dr = \lim_{r \rightarrow \infty} (\varphi' \varphi^* - \varphi \varphi'^*). \quad (20)$$

При $E < 0$ на основании (19) правая часть равенства (20) обращается в нуль. Следовательно, $\operatorname{Im} \mu(E) = 0$, т. е. полюсы S -функции (7) расположены на вещественной μ -оси. Если при $E = E_0 < 0$ величина $\mu(E_0) = \mu_\phi$, то, поскольку волновая функция $\varphi(\mu_\phi, E_0, r)$ квадратично-интегрируема, существует s -волновое связанное состояние системы взаимодействующих частиц с энергией E_0 и приведенной массой μ_ϕ .

Характер движения полюса $\mu(E)$ при $E \rightarrow 0_-$ можно установить, если уравнение (1) для $\varphi(\mu, E, r)$ продифференцировать по E , затем умножить на $\varphi(\mu, E, r)$ и вычесть уравнение (1) для $\varphi(\mu, E, r)$, умноженное на $\partial\varphi(\mu, E, r)/\partial E$. При интегрировании полученного выражения по r от 0 до ∞ с учетом условий (3) и (19) получим

$$\frac{\partial\mu(E)}{\partial E} = \frac{2\mu(E) \int_0^{\infty} \varphi^2 dr}{\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{r} - 2E \right) \varphi^2 dr}. \quad (21)$$

Так как при $E < 0$ функция $\varphi(\mu, E, r)$, согласно (19), вещественна, то из (21) следует, что при $E \rightarrow 0_-$ $\partial\mu(E)/\partial E > 0$, т. е. полюс движется вправо вдоль вещественной μ -оси, не изменяя направление движения.

В случае $E > 0$ функция Йоста $f^-(\mu, E)$ не содержит нулей при вещественных значениях μ , поскольку в противном случае в соответствии с условиями сопряжения (18) $f^+(\mu, E) = 0$. Тогда, согласно (6), $\varphi(\mu, E, r) \equiv 0$, что противоречило бы граничному условию (3) для $\varphi(\mu, E, r)$. Следовательно, полюс сходит с вещественной μ -оси в комплексную μ -плоскость, т. е. $\mu(E) = \text{Re } \mu(E) + i \text{Im } \mu(E)$, $E > 0$.

Для выяснения физического смысла полюса S -функции при $E > 0$ необходимо перейти к комплексной E -плоскости, выбрав комплексное значение $E = E_0 = \text{Re } E_0 + i \text{Im } E_0$ ($|\text{Im } E_0| \ll 1$) таким образом, чтобы $\text{Re } \mu(E_0) = \mu_\phi$, $|\text{Im } \mu(E_0)| \ll 1$. Тогда в окрестности почти вещественной точки E_0 $\mu(E)$ — почти вещественная аналитическая функция, т. е.

$$\text{Re } \mu(E) + i \text{Im } \mu(E) \approx \mu_\phi + \frac{\partial \text{Re } \mu(E)}{\partial E} (E - \text{Re } E_0 - i \text{Im } E_0). \quad (22)$$

Поскольку комплексное значение энергии E_0 , описывающее нестационарное состояние системы, можно представить в виде $E_0 = E_r - i\Gamma_r/2$, то из равенства коэффициентов при вещественной и мнимой частях разложения (22) получим

$$E - E_r = \frac{\text{Re } \mu(E) - \mu_\phi}{\partial \text{Re } \mu(E) / \partial E}, \quad (23)$$

$$\Gamma_r = \frac{2 \text{Im } \mu(E)}{\partial \text{Re } \mu(E) / \partial E}. \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует, что при $E > 0$ полюс $\mu(E)$, вещественная часть которого близка к физическому значению μ_ϕ , а абсолютное значение мнимой части намного меньше единицы, описывает s -волновой резонанс. E_r и Γ_r — соответственно энергия и ширина уровня квазистационарного состояния составной системы.

3. Установим вид траектории полюса $\mu(E)$ при $|E| \rightarrow 0$ ($E = 0$ — существенно особая точка). Для этого представим функцию рассеяния (7) с учетом (11) в виде

$$\begin{aligned} S(\mu, E) &= \exp \{2i [\eta(\mu, E) + \delta_\text{я}(\mu, E)]\} = \\ &= \exp [2i\eta(\mu, E)] \frac{\text{ctg } \delta_\text{я}(\mu, E) + i}{\text{ctg } \delta_\text{я}(\mu, E) - i}, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\delta_\text{я}(\mu, E)$ — добавочный к кулоновскому фазовый сдвиг, обусловленный действием ядерного потенциала $V(r)$.

Если потенциал $V(r)$ удовлетворяет условиям (2), то при малых значениях энергии E выполняется приближение эффективного радиуса [32, с. 39], которое в соответствии с выбранной в настоящей работе системой единиц имеет вид

$$K(\mu, E) \approx -\frac{1}{A} + R\mu E, \quad (26)$$

где

$$K(\mu, E) \equiv \mu \left[\operatorname{Re} \psi \left(\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \right) - \ln \left(\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \right) \right] + \\ + \sqrt{2\mu E} \operatorname{ctg} \delta_{\text{я}}(\mu, E) \exp \left(-\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \right) \left| \Gamma \left(1 + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2E}} \right) \right|^2. \quad (27)$$

Здесь ψ — пси-функция; A и R — соответственно длина рассеяния и эффективный радиус.

Условиями применимости разложения (26), (27) являются $|R/A| \ll 1$ и $|\sqrt{2\mu E} r| < 1$ [33, с. 125]. Здесь R имеет порядок величины радиуса действия ядерных сил. К примеру, для прямоугольной потенциальной ямы, ограниченной кулоновским барьером, величина R характеризует ширину ямы. Поскольку большие значения длины рассеяния A соответствуют сильным потенциалам, то вышеуказанное приближение должно хорошо выполняться для изотопных систем ${}_z x + {}_Z^A Y$ с $J^\pi = 0^+$ при $0 < E < \bar{B}$ ($\bar{B} = zZe^2/R$ — высота кулоновского барьера).

Из правой части приближенного равенства (26) следует, что $K(\mu, E)$ — аналитическая функция переменных μ и E .

Используя асимптотические представления (6.1.45) и (6.3.19) из [34] для функций $|\Gamma(x + iy)|$ и $\operatorname{Re} \Psi(iy)$ при $|y| \rightarrow \infty$, найдем асимптотику функции $K(\mu, E)$ в точке полюса ($\operatorname{ctg} \delta_{\text{я}}(\mu, E) = i$, $\mu = \mu(E)$) при $E \rightarrow 0_+$:

$$K[\mu(E), E] \approx \frac{2}{3}E + \pi\mu(0) \exp \left(-\pi \sqrt{\frac{\mu(0)}{2E}} \right). \quad (28)$$

Видно, что $K[\mu(0), 0] = 0$ ($\mu(0)$ — вещественная величина).

С другой стороны, разлагая $K[\mu(E), E]$ в ряд в окрестности точки $[\mu(0), 0]$ и ограничиваясь линейным членом разложения, получим

$$K[\mu(E), E] \approx A_0[\mu(E) - \mu(0)] + B_0 E, \quad (29)$$

где $A_0 = \frac{\partial K[\mu(0), 0]}{\partial \mu}$, $B_0 = \frac{\partial K[\mu(0), 0]}{\partial E}$ — вещественные параметры.

Тогда из (28) и (29) следует приближенное уравнение траектории полюса

$$A_0[\mu(E) - \mu(0)] + \left(B_0 - \frac{2}{3} \right) E - i\pi\mu(0) \exp \left(-\pi \sqrt{\frac{\mu(0)}{2E}} \right) \approx 0,$$

параметрическая форма которой имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mu(E) &\approx \alpha_1 + \alpha_2 E, \\ \operatorname{Im} \mu(E) &\approx \alpha_3 \exp(-\alpha_4/\sqrt{E}), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\alpha_1 = \mu(0), \quad \alpha_2 = (2/3 - B_0) A_0^{-1}, \quad \alpha_3 = \pi \mu(0) A_0^{-1}, \quad \alpha_4 = \pi \sqrt{\frac{\mu(0)}{2}}.$$

Видно, что $\alpha_1 > 0$, $\alpha_4 > 0$, а у α_2 и α_3 знаки, согласно (24), совпадают, поскольку ширина резонанса $\Gamma_r > 0$.

На основании (24) уравнение (30) можно представить в форме

$$\lg \Gamma_r \approx C - B/\sqrt{E_r}, \quad (31)$$

где $C = \lg \left(\frac{2\alpha_3}{\alpha_2} \right) > 0$, $B = \alpha_4 \lg e$.

Выражение (31) связывает энергию и ширину уровня квазистационарного s -состояния ($J^\pi = 0^+$) системы ${}_Z x + \frac{A}{Z} Y$ с $Z = \text{const}$.

Из асимптотического поведения функции $K(\mu, E)$ в точке полюса при $E \rightarrow 0_-$ и разложения (29) следует

$$\operatorname{Re} \mu(E) \approx \alpha_1 + \alpha_2 E, \quad \operatorname{Im} \mu(E) = 0, \quad (32)$$

т. е. энергии резонансных ($E > 0$) и связанных ($E < 0$) состояний составной системы и физические значения приведенной массы линейно-зависимы.

Формулы (30)–(32) легко обобщить на случай, когда уравнение (1) содержит также центробежный член $l(l+1)/r^2$. Характер поведения траектории полюса $\mu_l(E)$ от энергии при этом такой же, что и для $l = 0$, однако входящие в указанные формулы новые коэффициенты будут зависеть от значений орбитального момента l и порогового значения полюса $\mu_l(0)$ [24].

Если в уравнении (1) кулоновский член μ/r заменить центробежным (рассеяние незаряженной частицы ${}_0 x$ на изотопах (изотонах) $\frac{A}{Z} Y$ с $J^\pi = \text{const}$), то линейная зависимость $\operatorname{Re} \mu_l(E)$ от E ($E \geq 0$) сохраняется, а $\operatorname{Im} \mu_l(E)$ пропорциональна $E^{l+1/2}$ ($E > 0$), что приводит к приближенному соотношению

$$\Gamma_r \approx \gamma E_r^{l+1/2} \quad (\gamma > 0), \quad (33)$$

связывающему ширины Γ_r и энергии E_r низкоэнергетических квазистационарных состояний [20]. Из сравнения формул (31) и (33) при $l = 0$ видно, что действие кулоновского потенциального барьера приводит к сужению ширины резонанса, причем в случае тяжелых ядер сужение ширины Γ_r становится значительным, поскольку в (31) коэффициент $B \sim Z$ (если в (1) пользоваться системой единиц, в которой $\hbar = c = 2ze = 1$).

**2. ЗАВИСИМОСТЬ ЭНЕРГИИ РАСПАДА (РАЗДЕЛЕНИЯ)
ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ИЗОТОПНЫХ ЯДЕР
С $J^\pi = \text{const}$ ОТ ЗНАЧЕНИЙ ПРИВЕДЕННОЙ МАССЫ
ДОЧЕРНИХ ФРАГМЕНТОВ**

1. Применим полученные результаты для описания α -распада основных состояний изотопных ядер с $J^\pi = \text{const}$. Материнские ядра ${}^A_Z Q$ (${}^A_Z Q \leftrightarrow {}^4_2\text{He} + {}^{A-4}_{Z-2} Y$) можно рассматривать как долгоживущие резонансные состояния составных ядер, распадающиеся на дочерние ядра ${}^{A-4}_{Z-2} Y$ и α -частицу. Пусть распад происходит таким образом, что дочерние ядра находятся также в основных состояниях. Тогда резонансная энергия E_r — энергия α -распада E_α — равна

$$E_\alpha = M(Z; A) - M(Z - 2; A - 4) - M(2; 4). \quad (34)$$

Если учесть, что период полураспада $T_\alpha = \ln 2 / \Gamma_r$, то приближенное уравнение (31) можно представить в виде

$$\lg T_\alpha \approx D + B / \sqrt{E_\alpha}, \quad D = \lg \left(\frac{\alpha_2 \ln 2}{2\alpha_3} \right). \quad (35)$$

Соотношения типа (31), (35) впервые были установлены для изотопов эмпирическим путем и получили название «закон Гейгера–Нетолла» [35, с. 449]. Теоретическое объяснение порядка величины входящих в них постоянных было дано Гамовым [36] и рассматривалось в свое время (1928 г.) как большой успех теории ядра.

Поскольку энергии α -распада, как правило, невелики ($E_\alpha \leq 10$ МэВ), то для изотопов с $J^\pi = \text{const}$ (четно-четных, четно-нечетных, нечетно-четных и нечетно-нечетных) наблюдается хорошее согласие этого закона с экспериментом [37]. Таким образом, в рамках S -матричного формализма двухфрагментной задачи закон Гейгера–Нетолла отражает связь энергий и ширин уровней квазистационарных состояний систем, возникающих при рассеянии α -частицы на изотопных ядрах с $J^\pi = \text{const}$. При этом связь Γ_r и E_r интерпретируется как отображение траектории полюса S -матрицы в комплексной μ -плоскости (30) с помощью (24) на плоскость $(\lg \Gamma_r; E_r^{-1/2})$.

По известным значениям энергии α -распада [37] и атомных масс [38] на рис. 1 изображена зависимость энергии α -распада четно-четных изотопов ($J^\pi = 0^+$) от приведенной массы дочернего ядра и α -частицы [20]. Сплошные линии проведены через изотопы. Видно, что точки, соответствующие ядрам, хорошо ложатся на отрезки прямых, т.е. подтверждают линейную зависимость вещественной части траектории полюса $\mu(E)$ от энергии (30). Уменьшение энергии распада с ростом приведенной массы указывает на возрастание устойчивости изотопа относительно α -распада с увеличением числа

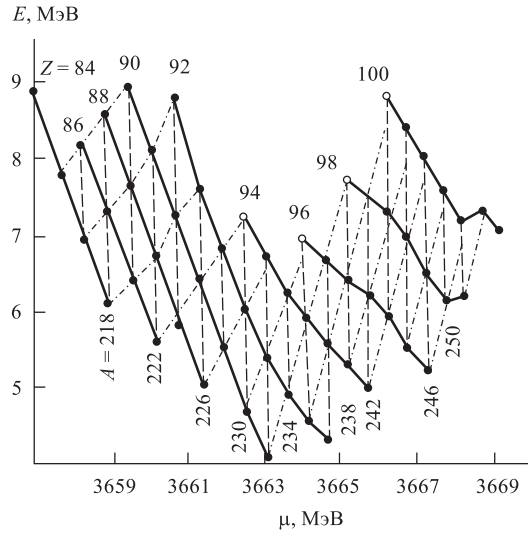


Рис. 1. Зависимость энергии α -распада основных состояний четно-четных изотопов ($J^\pi = 0^+$) от приведенной массы α -частицы и дочерних ядер (сплошные линии). Штриховые линии, соответствующие $\mu = \text{const}$, проходят через изобарные ядра ($A = \text{const}$), штрихпунктирные проведены через изотоны ($A - Z = \text{const}$)

нейтронов. Исключение составляют точки, изображающие изотопы с числом нейтронов, близким к магическим значениям (126, 152), что свидетельствует о влиянии оболочечной структуры ядра на α -распад. Такое отклонение связано с тем, что уравнение траектории полюса S -матрицы в μ -плоскости получено с помощью приближения эффективного радиуса, не зависящего от конкретной формы потенциала, в то время как проявление оболочечных эффектов тесно связано с резким изменением поведения ядерного потенциала.

На рис. 1 приведены также вертикальные штриховые прямые ($\mu = \text{const}$), проходящие через точки, изображающие четно-четные изобарные ядра ($A = \text{const}$). Видно, что эти ядра хорошо ложатся на отрезки прямых, т. е. отображают линейную зависимость энергии α -распада от числа протонов [10].

В [25] показано, что с помощью траектории полюса S -матрицы в комплексной μ -плоскости возможно также описание рассеяния заряженной частицы на изотонных ядрах ${}^A_Z Y (A - Z = \text{const})$ с $J^\pi = \text{const}$. В этом случае изменение барионного (массового) числа системы сопровождается одновременно изменением электрического заряда. Это можно учесть, если в (1) пользоваться системой единиц, в которой кулоновский потенциал зависит от Z . Тогда в уравнении (31) коэффициент $B \sim Z$.

Таблица 1

Z	Нуклид	E_α , МэВ	T_α	$M(Z; A)$, а. е. м.
94	^{230}Pu	7,129 [20]	3,25 мин [20]	230,03943 [20]
		7,215 [10]	1,55 мин [10]	230,03976 [10]
		7,520 [40]		
96	^{236}Cm	6,871 [20]	34,8 мин [20]	236,05115 [20]
		7,164 [10]	25,2 мин [10]	236,05147 [10]
				236,05139 [38]
100	^{244}Fm	8,751 [20]	0,02 с [20]	244,07428 [20]
		8,620 [40]		244,07412 [38]

Необходимо отметить, что закон Гейгера–Нетолла для изотопов сам по себе не позволяет предсказывать характеристики α -распада необнаруженных изотопов с фиксированными значениями J^π . В рамках же предложенной теории μ -плоскости можно по известным значениям E_α , T_α и $M(Z-2; A-4)$ для ядер A_1ZQ и A_2ZQ с $J^\pi = \text{const}$ и формулам (30), (34) и (35) найти E_α , T_α и $M(Z; A)$ ядра A_3ZQ с теми же значениями J^π , если известна масса дочернего ядра $M(Z-2; A_3-4)$.

Таким образом, предсказаны вышеуказанные характеристики для ядер ^{230}Pu , ^{236}Cm и ^{244}Fm (на рис. 1 эти ядра отмечены светлыми кружками) по известным характеристикам изотопных партнеров ^{232}Pu , ^{234}Pu , ^{238}Cm , ^{240}Cm и ^{246}Fm , ^{248}Fm . Найденные значения E_α , T_α и $M(Z; A)$ находятся в хорошем согласии со значениями этих параметров, полученными другими методами (см. табл. 1). Изотоп ^{230}Pu идентифицирован относительно недавно [39]. Отклонение его энергии α -распада, равной 7,050(15) МэВ, от соответствующей энергии, предсказанной в работе [20], составляет 1,1 %.

Значения предсказываемых величин зависят от характеристик выбранных партнеров с $J^\pi = 0^+$, $Z = \text{const}$. К примеру, для ^{236}Cm $E_\alpha = 6,768$ МэВ, если изотопными партнерами являются ядра ^{240}Cm и ^{242}Cm . Расчеты показали, что для приведенных в таблице значений $M(Z; A)$, E_α и T_α возможны отклонения в пределах соответственно $\sim 2 \cdot 10^4$, 4 % и одного порядка.

Отметим, что полученные результаты не противоречат классической теории α -распада, поскольку класс потенциалов (2) охватывает не только случай точечного ядра, но и случай ядра в виде однородно заряженной сферы, когда кулоновско-ядерный потенциал моделируется ямой конечной глубины с кулоновским хвостом, т. е. потенциал не имеет особенности типа r^{-1} в нуле [4, с. 5]. В классической теории α -распада, основанной на представлении о туннельном эффекте, как раз и предполагается такая форма потенциала. Необходимо, однако, подчеркнуть, что конкретный вид потенциала $V(r)$ не

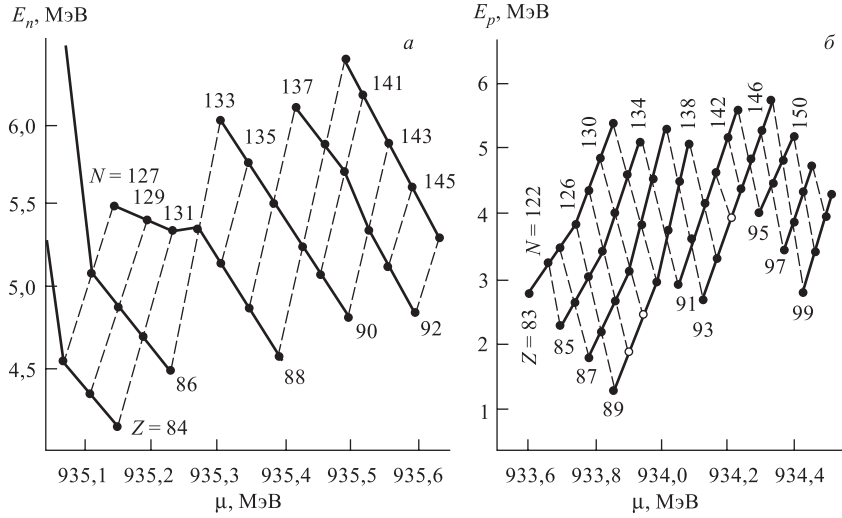


Рис. 2. Зависимость энергии n -отрыва (a) и p -отрыва (b) основных состояний четно-нечетных и нечетно-четных изотопов от значений приведенной массы нуклона и четно-четных «дочерних» ядер (сплошные линии). Штриховые линии проведены через изотонные ядра

игрует существенной роли, поскольку соотношения (31), (35) получены в результате использования приближения эффективного радиуса. Это значит, что при α -распаде основную роль играют свойства не дочерних, а материнских ядер. При этом здесь, как и в классической теории Гамова, предположено, что α -частица существует в материнском ядре в готовом виде и α -радиоактивное распадающееся ядро представляет собой резонансное состояние системы (дочернее ядро + α -частица). Таким образом, рассмотренный новый подход к теории α -распада изотопных ядер с $J^\pi = \text{const}$ не противоречит классической теории.

2. Применим полученные результаты к описанию рассеяния нуклонов на изотопных ядрах ${}^A_Z Y$ с $J^\pi = \text{const}$, находящихся в основных состояниях. Если составные системы также находятся в основных состояниях, то энергии связи нуклонов с изотопами ${}^A_Z Y$ в соответствии с уравнением (32) для случая $E < 0$ линейно зависят от физических значений приведенных масс.

По известным значениям энергий n - и p -отрыва и атомных масс [41] на рис. 2 построена зависимость энергии отрыва E_n и E_p для четно-нечетных и нечетно-четных ядер от значений приведенной массы нуклона и четно-четных «дочерних» ядер-изотопов (сплошные линии) [24]. Видно, что точки,

соответствующие ядрам с $Z = \text{const}$, удовлетворительно ложатся на отрезки прямых, т. е. подтверждают линейную зависимость (32) для $\text{Re } \mu(E)$ ($E < 0$). Уменьшение энергии E_n с ростом приведенной массы свидетельствует о возрастании устойчивости изотопов относительно n -отрыва с увеличением числа нейтронов. Зависимость E_p от μ носит обратный характер. Исключение составляют точки, соответствующие ядрам с числом протонов и нейтронов, близким к магическим значениям, что свидетельствует о влиянии оболочечной структуры ядра на отрыв нуклонов. Штриховые прямые, проведенные через точки, соответствующие изотонным «материнским» ядрам, также указывают на линейную зависимость E_n и E_p от значений приведенной массы нуклона и четно-четных «дочерних» ядер-изотонов.

В рамках теории μ -плоскости по известным значениям E_n и E_p , а также массам «дочерних» изотопов для ядер A_1Y и A_2Y с $J^\pi = \text{const}$ и соотношения (32) можно найти соответствующие энергии отрыва для ядра A_3Y с теми же значениями J^π , если известна масса «дочернего» ядра. Таким образом, предсказаны значения E_p для нечетно-четных ядер ${}^{217}\text{Ac}$, ${}^{219}\text{Ac}$ и ${}^{233}\text{Np}$ (на рис. 2, б эти ядра отмечены светлыми кружками) по характеристикам p -отрыва двух ближайших их изотопических ядер-партнеров. При этом $E_p = 1,87$; $2,42$ и $3,84$ МэВ соответственно. Значение энергии p -отрыва ядра ${}^{233}\text{Np}$, найденное по систематике, составляет $3,9$ МэВ [38].

3. В [42, 43] показано, что результаты S -матричного формализма двухфрагментной задачи при комплексных значениях μ применимы и для случая, когда в системе ${}_z x + {}^A_Z Y$ с $J^\pi = \text{const}$ и $Z = \text{const}$ вместо частицы (кластера) ${}_z x$ выбрать изотопные ядра с $J^\pi = \text{const}$. В этом случае эффективный короткодействующий потенциал взаимодействия в системе ${}^{A'-A}_z X + {}^A_Z Y \leftrightarrow {}^{A'}_{z+Z} Q$ либо ${}^{A'-A}_Z Y + {}^A_Z Y \leftrightarrow {}^{A'}_{2Z} Q$ на основе фиксированных характеристик спина и четности ядер изменяется при переходе от изотопа к изотопу в основном за счет изменения барионного (массового) числа A , т. е. приведенной массы μ . При относительно небольших значениях энергии E кулоновский барьер не позволяет изотопам приближаться на расстояния, где роль ядерных сил становится преобладающей. Однако при некоторых (резонансных) значениях энергии E вероятно проникновение ядер сквозь кулоновский барьер и образование квазистационарных состояний составных систем. При образовании этих состояний резко изменяется характер взаимодействия — кулоновский и μ -зависимый центробежный потенциалы становятся малой добавкой к эффективному ядерному μ -зависимому потенциалу. Следует отметить, что и кулоновский потенциал неявно зависит от μ . Это связано с тем, что кулоновское взаимодействие в составной системе ${}_z + {}^{A'}_Z Q$ либо ${}^{A'}_{2Z} Q$ незначительно меняется с изменением A' за счет перераспределения зарядов $ze + Ze$ либо $2Ze$ в результате добавления нейтронных пар (с антипараллельными спинами) при переходе от изотопа к изотопу. Таким образом, основные состояния состав-

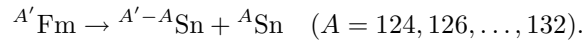
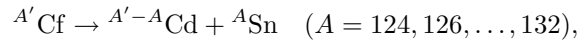
ных систем с $J^\pi = \text{const}$ можно рассматривать как резонансные состояния, распадающиеся на дочерние ядра-изотопы. При этом каждому возможному варианту распада фиксированного изотопа ${}^A Q$ ($A' = \text{const}$) на переменные изотопные фрагменты ${}^{A'-A}_z X$ и ${}^A_Z Y$ либо ${}^{A'-A}_Z Y$ и ${}^A_Z X$ с $J^\pi = \text{const}$ соответствует свое физическое значение приведенной массы фрагментов и энергия распада, равная

$$E = M(z + Z; A') - M(z; A' - A) - M(Z; A), \quad z = \text{const}, \quad Z = \text{const}$$

либо

$$E = M(2Z; A') - M(Z; A' - A) - M(Z; A).$$

На основании известных из эксперимента значений масс ядер ${}^{A'} \text{Cf}$ ($A' = 242, 244, \dots, 248$) и ${}^{A'} \text{Fm}$ ($A' = 246, 248, 250$) [38] были вычислены энергии их распада на дочерние ядра-изотопы по каналам [42]:



Зависимость энергии распада изотопов ${}^{A'} \text{Cf}$ и ${}^{A'} \text{Fm}$ от приведенной массы дочерних ядер изображена на рис. 3. Видно, что при фиксированном значении массы одного из дочерних фрагментов ($A = \text{const}$ либо $A' - A = \text{const}$), точки, соответствующие ядрам, хорошо ложатся на отрезки прямых, т. е. подтверждают линейную зависимость $\text{Re} \mu_l$ от энергии E резонансных состояний [24]. При этом соответствующие энергии распада эквидистантны. На основе прямой пропорциональной зависимости приращения энергии распада от приращения приведенной массы при переходе от изотопа к изотопу предсказаны массы нуклидов ${}^{240} \text{Cf}$ и ${}^{244} \text{Fm}$. На рис. 3, б, в эти ядра изображены светлыми кружками. При этом массы $M(98; 240)$ и $M(100; 244)$, найденные на основе восьми вариантов распада указанных изотопов, составляют 240,062190 (120) и 244,074080 (90) а. е. м. Значения масс этих нуклидов, вычисленные по систематике, соответственно равны 240,062280 (220) и 244,074120 (310) а. е. м. [38].

4. В работе [44] установлена возможность использования результатов S -матричного формализма двухфрагментной задачи при переменных значениях масс изотопных фрагментов с $J^\pi = \text{const}$ на случай распада составной системы по каналам, содержащим более двух дочерних фрагментов. Для этого предположим, что основные состояния системы ${}^A_Z Q$ ($Z = \text{const}$, $J^\pi = \text{const}$) можно рассматривать как долгоживущие резонансные состояния совокупности фрагментов ${}^{A_i}_{z_i} X$ ($i = 1, 2, \dots, n$) с $z_i = \text{const}$ и $J^\pi = \text{const}$.

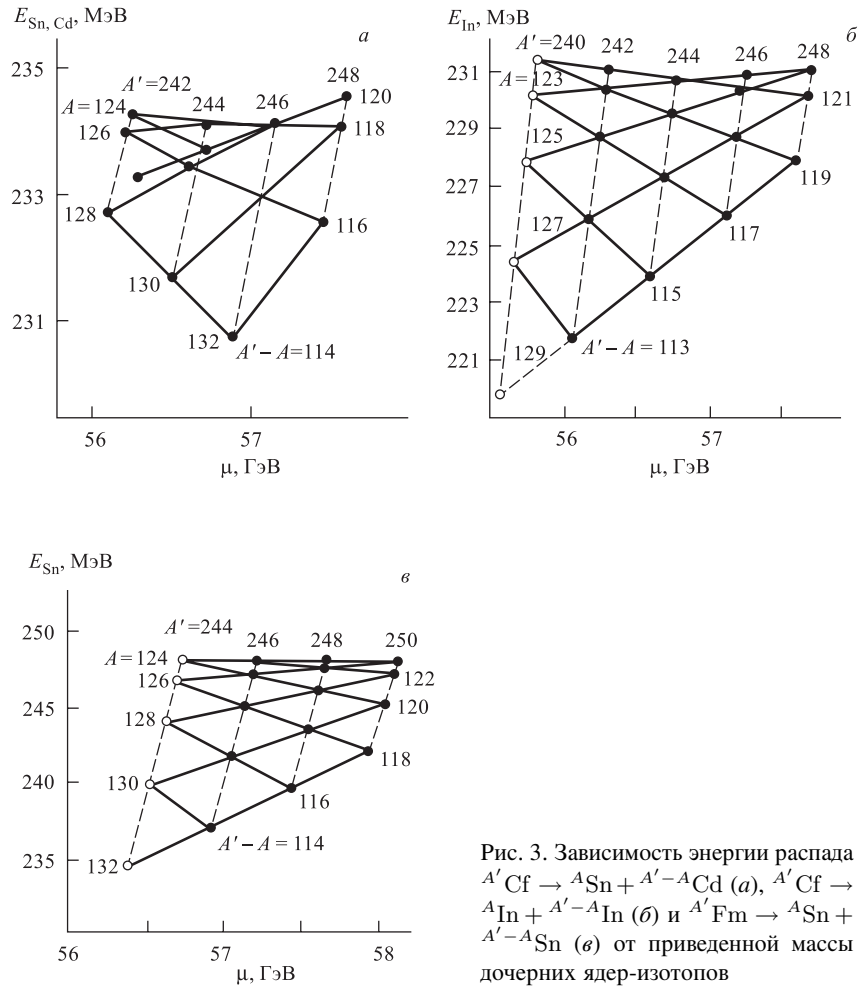


Рис. 3. Зависимость энергии распада $A' Cf \rightarrow A Sn + A'-A Cd$ (а), $A' Cf \rightarrow A In + A'-A In$ (б) и $A' Fm \rightarrow A Sn + A'-A Sn$ (в) от приведенной массы дочерних ядер-изотопов

Тогда на основе теории составного ядра [45] распад основных состояний изотопов ${}^A_Z Q$ по каналам

$${}^A_Z Q \rightarrow \sum_{i=1}^n {}^{A_i}_{z_i} X \left(\sum A_i = A, \sum z_i = Z, 2 < n \leq A \right),$$

где дочерние фрагменты ${}^{A_i}_{z_i} X$ находятся также в основных состояниях, не зависит от способа образования материнских ядер ${}^A_Z Q$.

Введем понятие приведенной (эффективной) массы n -фрагментной системы по аналогии с этим понятием для двухчастичной системы, т. е.

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{M(z_i; A_i)}. \quad (36)$$

Здесь $M(z_i; A_i)$ — масса основного состояния фрагмента ${}_{z_i}^{A_i}X$; μ — приведенная масса дочерних ядер в системе отсчета, в которой суммарный импульс свободных дочерних фрагментов равен нулю, т. е. в системе центра масс. В случае разделения материнских ядер-изотопов на свободные нуклоны

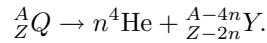
$$\frac{1}{\mu} = \frac{Z}{m_p} + \frac{A-Z}{m_n} \quad (Z = \text{const}), \quad (37)$$

где m_p и m_n — соответственно массы протона и нейтрона.

Энергия n -фрагментного распада основного состояния системы A_ZQ равна

$$E = M(Z; A) - \sum_{i=1}^n M(z_i; A_i). \quad (38)$$

Рассмотрим $n\alpha$ -распад ($n = 2, 3$) основных состояний четно-четных изотопов A_ZQ ($Z = 82, 84, \dots, 90$), т. е.



На основе известных значений масс нуклидов

$${}^A_ZQ = \begin{cases} {}^A\text{Pb} (A = 200, 202, \dots, 208), \\ {}^A\text{Po} (A = 206, 208, \dots, 214), \\ {}^A\text{Rn} (A = 210, 212, \dots, 222), \\ {}^A\text{Ra} (A = 214, 216, \dots, 228), \\ {}^A\text{Th} (A = 222, 224, \dots, 234) \end{cases}$$

и их дочерних изотопных фрагментов ${}^{A-4n}_{Z-2n}Y$ [38] были вычислены согласно (36) и (38) значения μ и E . Зависимость энергии 2α - и 3α -распадов основных состояний четных изотопов Pb, Po, Rn, Ra и Th от значений приведенной массы дочерних фрагментов представлена на рис. 4. Видно, что соответствующие энергии $n\alpha$ -распада ($n = 2, 3$) линейно зависят от μ и являются примерно эквидистантными. Изломы отрезков прямых в точках, где материнские ядра (нижние пики отрезков прямых рис. 4) и дочерние фрагменты (верхние пики отрезков прямых рис. 4) содержат магическое число нейтронов 126, свидетельствуют о влиянии оболочечной структуры ядер на 2α - и 3α -распады.

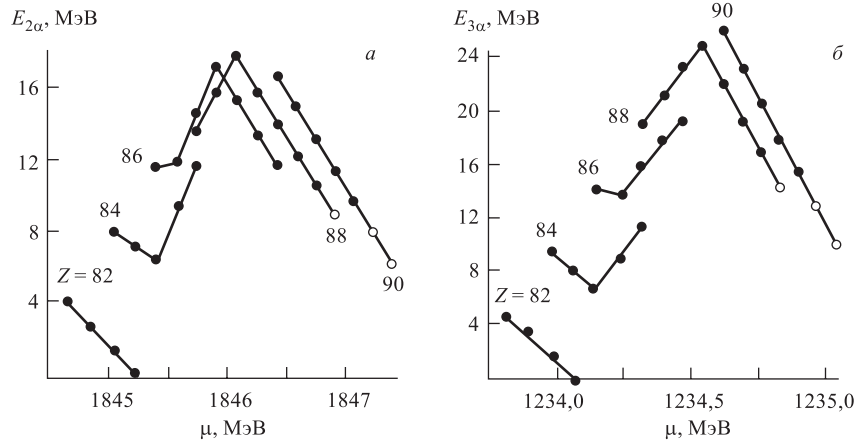


Рис. 4. Зависимость энергии 2α -распада (а) и 3α -распада (б) основных состояний четно-четных изотопов A_ZQ от приведенной массы дочерних фрагментов

По известным значениям масс четных изотопов Po, Ra, Th и их дочерних фрагментов на основе (30) и (36), (38) предсказаны избытки масс ΔM_Y неизвестных нуклидов ${}^{202}\text{Pt}$, ${}^{220}\text{Po}$, ${}^{222}\text{Po}$, ${}^{216}\text{Pb}$, ${}^{224}\text{Rn}$ и ${}^{226}\text{Rn}$ (см. табл. 2). На рис. 4 энергии $n\alpha$ -распада соответствующих материнских ядер обозначены кружками.

В предельном случае разделения основных состояний вышеуказанных материнских ядер-изотопов на свободные нуклоны энергия A -фрагментного «распада» ядра A_ZQ равна

$$E = M(Z; A) - Zm_p - (A - Z)m_n = -E_{\text{св}},$$

где $E_{\text{св}}$ — энергия связи нуклонов. По известным значениям $E_{\text{св}}$ [38] и найденным на основе (37) значениям приведенной массы μ свободных нуклонов

Таблица 2

${}^A Q \rightarrow 2\alpha + {}^{A-8}Y$	ΔM_y , МэВ	${}^A Q \rightarrow 3\alpha + {}^{A-12}Y$	ΔM_y , МэВ
${}^{228}\text{Ra} \rightarrow 2\alpha + {}^{220}\text{Po}$	15,41	${}^{214}\text{Po} \rightarrow 3\alpha + {}^{202}\text{Pt}$	-22,98
${}^{232}\text{Th} \rightarrow 2\alpha + {}^{224}\text{Rn}$	22,71	${}^{228}\text{Ra} \rightarrow 3\alpha + {}^{216}\text{Pb}$	7,69
${}^{234}\text{Th} \rightarrow 2\alpha + {}^{226}\text{Rn}$	29,63	${}^{232}\text{Th} \rightarrow 3\alpha + {}^{220}\text{Po}$	15,60
		${}^{234}\text{Th} \rightarrow 3\alpha + {}^{222}\text{Po}$	23,42

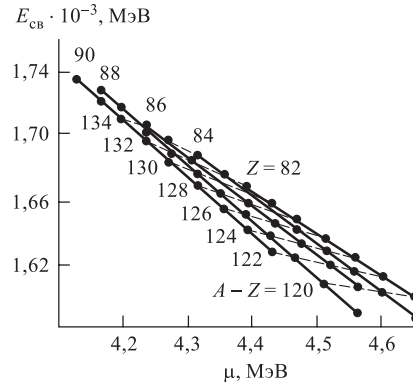


Рис. 5. Зависимость энергии связи четно-четных изотопов ${}^A_Z Q$ от приведенной массы свободных нуклонов (сплошные линии). Штриховые линии проходят через изотонные ядра

на рис. 5 изображена зависимость $E_{св}$ от μ . Видно, что соответствующие значения энергии связи и приведенной массы являются линейно-зависимыми и примерно эквидистантными (сплошные линии). Штриховые линии, проведенные через ядра с $A - Z = \text{const}$, также указывают на линейную зависимость $E_{св}$ от μ для ядер-изотонов с $J^\pi = 0^+$. При этом из эквидистантности энергии связи видно, что для изотопных (изотонных) ядер с $J^\pi = \text{const}$ имеет место приближенное соотношение

$$2E_{св}(Z; A) \approx E_{св}(Z; A - 2) + E_{св}(Z; A + 2) \approx E_{св}(Z - 2; A - 2) + E_{св}(Z + 2; A + 2), \quad (39)$$

позволяющее легко определить значение энергии связи (массы) неизвестных нуклидов по известным значениям энергий связи (масс) двух ближайших изотопных (изотонных) партнеров с теми же значениями J^π .

Следует отметить, что выражение (37) для μ можно, пренебрегая разностью масс нейтрона и протона, представить в виде $\mu = m_n A^{-1}$. Тогда с учетом ранее отмеченного в (31) соотношения $B \sim Z$ получим приближенную линейную зависимость $E_{св}$ от $Z A^{-1}$ для ядер с $J^\pi = \text{const}$, принадлежащих изотопам или изотонам (рис. 6).

Установленные закономерности свидетельствуют о принципиальной возможности использования S -матричного формализма двухфрагментной задачи при комплексных значениях μ для описания распада (разделения) основных состояний составных изотопных систем с $J^\pi = \text{const}$ по каналам, содержащим n ($2 < n \leq A$) фрагментов. По-видимому, введение понятия эффективной массы n -фрагментной задачи по аналогии с двухфрагментной позволяет сводить обе задачи к одной — движению фрагмента переменной массы μ в поле внешних сил, конкретный вид которых для случая S -матричного фор-

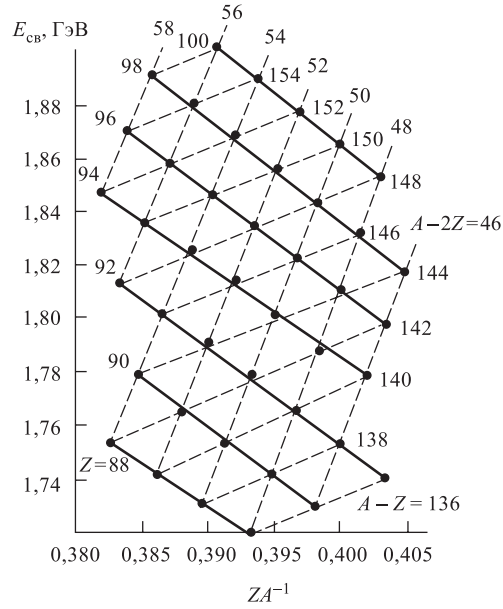


Рис. 6. Зависимость энергии связи четно-четных ядер ${}^A_Z Q$ от $Z A^{-1}$. Сплошные линии проходят через изотопные ядра. Штриховые линии проведены через ядра-изотоны ($A - Z = \text{const}$) и ядра с фиксированным избытком нейтронов ($A - 2Z = \text{const}$)

мализма несуществен. Действительно, в случае системы бесспиновых нерелятивистских частиц с массами m_1, m_2, \dots, m_n и импульсами k_1, k_2, \dots, k_n свободный гамильтониан H_0 имеет в системе центра масс $\left(\sum_{i=1}^n k_i = 0\right)$ вид

$$H_0 = \frac{k^2}{2\mu}, \quad \mu = \left(\sum_i m_i^{-1}\right)^{-1}, \quad k^2 = \sum_i k_i^2 p_i, \quad p_i = \frac{m_i^{-1}}{\sum_i m_i^{-1}}. \quad (40)$$

Здесь μ — приведенная масса системы; p_i — вероятность того, что квадрат импульса частицы с массой μ принимает значение k_i^2 . Таким образом, гамильтониан (40) соответствует свободному движению частицы с эффективной массой μ и импульсом k , представляющим собой среднее квадратичное значение импульсов частиц системы.

При использовании равенства

$$\sum k_i^2 = -2 \sum_i \sum_{j (i>j)} k_i k_j,$$

следующего из условия $\sum k_i = 0$, гамильтониан (40) можно, к примеру, при $n = 3$ представить в виде [2, с. 198]

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2\mu_1} + \frac{k_{23}^2}{2\mu_{23}},$$

где

$$p_1 = \frac{(m_2 + m_3)k_1 - m_1(k_2 + k_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad k_{23} = \frac{m_3k_2 - m_2k_3}{m_2 + m_3},$$

$$\mu_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \mu_{23} = \frac{m_2m_3}{m_2 + m_3}.$$

Это значит, что в системе центра масс внутреннее движение трех свободных частиц можно представить как: 1) сумму свободных движений двух частиц с относительными импульсами p_1 и k_{23} (вместо импульсов p_1 и k_{23} можно выбрать p_2 и k_{31} либо p_3 и k_{12}) и приведенными массами μ_1 и μ_{23} ; 2) свободное движение одной частицы со среднеквадратичным импульсом

$$k = \left(\frac{m_2m_3k_1^2 + m_1m_3k_2^2 + m_1m_2k_3^2}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3} \right)^{1/2}$$

и эффективной массой

$$\mu = \frac{m_1m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3}.$$

3. ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЮСА S -МАТРИЦЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ КУЛОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ И РАСПАД ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР С $J^\pi = \text{const}$

1. Пусть в уравнении (1) кулоновский член имеет вид $2\mu q/r$ (для этого следует выбрать систему единиц, в которой $\hbar = c = ze = 1$, $Ze = q$). Будем предполагать, что электрический заряд q также может принимать комплексные значения. Физические значения заряда равны $q_\phi = Z_\phi e$ ($Z_\phi = 0, 1, 2, \dots$). Тогда при $E > 0$ и сохраняющихся условиях (2) на потенциал

$V(r)$ функция рассеяния $S(\mu, q, E)$ мероморфна в прямом произведении областей $\text{Re } \mu > 0$ и $\text{Re } q > 0$ и может быть представлена (по аналогии с (25)) в виде [25]

$$S(\mu, q, E) = \exp \{2i[\eta(\mu, q, E) + \delta_{\text{я}}(\mu, q, E)]\} = \frac{\Gamma(1 + iq\sqrt{\mu/2E}) \text{ctg } \delta_{\text{я}}(\mu, q, E) + i}{\Gamma(1 - iq\sqrt{\mu/2E}) \text{ctg } \delta_{\text{я}}(\mu, q, E) - i}. \quad (41)$$

Здесь $\eta(\mu, q, E)$ и $\delta_{\text{я}}(\mu, q, E)$ — соответственно фазовые сдвиги, обусловленные действием кулоновского и короткодействующего потенциалов; Γ — гамма-функция Эйлера.

Разложение по эффективному радиусу (аналог формул (26), (27)) для этого случая имеет вид [25]

$$K(\mu, q, E) \approx -\frac{1}{A} + R\mu E, \quad (42)$$

$$K(\mu, q, E) \equiv 2\mu q \left[\text{Re } \psi \left(iq\sqrt{\frac{\mu}{2E}} \right) - \ln \left(q\sqrt{\frac{\mu}{2E}} \right) \right] + 2\sqrt{2\mu E} \text{ctg } \delta_{\text{я}}(\mu, q, E) \exp \left(-\pi q\sqrt{\frac{\mu}{2E}} \right) \left| \Gamma \left(1 + iq\sqrt{\frac{\mu}{2E}} \right) \right|^2, \quad (43)$$

A и R — соответственно длина рассеяния и эффективный радиус; ψ — пси-функция.

Из (41) и (43) следует уравнение

$$K[\mu(E), q(E), E] - 2\mu(E)q(E) \times \left\{ \text{Re } \psi \left[iq(E)\sqrt{\frac{\mu(E)}{2E}} \right] - \ln \left[q(E)\sqrt{\frac{\mu(E)}{2E}} \right] \right\} - 2i\sqrt{2\mu(E)E} \times \exp \left(-\pi q(E)\sqrt{\frac{\mu(E)}{2E}} \right) \left| \Gamma \left(1 + iq(E)\sqrt{\frac{\mu(E)}{2E}} \right) \right|^2 = 0 \quad (44)$$

относительно полюсов $\mu(E)$ и $q(E)$ S -матрицы при $E > 0$.

Если функцию $K[\mu(E), q(E), E]$ разложить в ряд в окрестности точки $[\mu(0), q(0), 0]$, ограничиваясь линейным членом разложения, а также воспользоваться асимптотическими представлениями для $\text{Re } \psi$ и $|\Gamma|$ при $E \rightarrow 0_+$, то

уравнение (44) примет вид

$$A_0[\mu(E) - \mu(0)] + B_0[q(E) - q(0)] + C_0E - \frac{E}{3q(0)} - \\ - 2\pi i\mu(0)q(0) \exp \left[-2\pi q(0)\sqrt{\frac{\mu(0)}{2E}} \right] \cong 0, \quad (45)$$

где $A_0 = \partial K/\partial\mu|_{E=0}$, $B_0 = \partial K/\partial q|_{E=0}$, $C_0 = \partial K/\partial E|_{E=0}$ — вещественные постоянные.

Рассмотрим частные случаи уравнения (45) для функций $\mu(E) = \text{Re } \mu(E) + i\text{Im } \mu(E)$ и $q(E) = \text{Re } q(E) + i\text{Im } q(E)$.

а) Пусть $\mu(E) = \mu(0) = \mu_\phi$. Тогда (45) можно представить в виде

$$\text{Re } q(E) \cong c_1 + c_2E, \quad \text{Im } q(E) \cong c_3 \exp(-c_4/\sqrt{E}), \quad (46)$$

где $c_1 = q(0)$, $c_2 = \left(\frac{1}{3q(0)} - C_0\right)B_0^{-1}$, $c_3 = 2\pi\mu_\phi q(0)B_0^{-1}$, $c_4 = 2\pi q(0)\sqrt{\mu_\phi/2}$.

При $\mu_\phi = \text{const}$ уравнение (46) определяет низкоэнергетический вид траектории полюса S -матрицы на комплексной плоскости заряда (кулоновской константы связи $a = 2\mu_\phi q$) и соответствует случаю рассеяния частицы ${}_z x$ на изобарных ядрах ${}_{Z_\phi}^{A_\phi} Y (A_\phi = \text{const})$ с фиксированными характеристиками J^π [9, 10].

б) Пусть $q(E) = q(0) = q_\phi$. Тогда уравнение (45) примет вид

$$\text{Re } \mu(E) \cong \alpha_1 + \alpha_2E, \quad \text{Im } \mu(E) \cong \alpha_3 \exp(-\alpha_4/\sqrt{E}), \quad (47)$$

где $\alpha_1 = \mu(0)$, $\alpha_2 = \left(\frac{1}{3q_\phi} - C_0\right)A_0^{-1}$, $\alpha_3 = 2\pi q_\phi \mu(0)A_0^{-1}$, $\alpha_4 = 2\pi q_\phi \sqrt{\mu(0)}/2$.

При $q_\phi = \text{const}$ уравнение (47) определяет траекторию полюса S -матрицы при $E \gtrsim 0$ на комплексной плоскости приведенной массы (кулоновской константы связи $a = 2\mu q_\phi$) и соответствует случаю рассеяния частицы ${}_z x$ на изотопных ядрах ${}_{Z_\phi}^{A_\phi} Y (Z_\phi = \text{const})$ с одинаковыми значениями J^π [20].

Уравнения (30) и (47) — суть поведение одной и той же траектории полюса $\mu(E)$, однако в случае (47) из-за иного выбора системы единиц в уравнении (1) видна явная зависимость коэффициентов α_2 , α_3 и α_4 от фиксированных физических значений заряда $Z_\phi e$. Таким образом, параметры, определяющие поведение траектории полюса для случаев а и б, зависят соответственно от фиксированных физических значений μ_ϕ и q_ϕ .

в) Если значения μ_ϕ и q_ϕ не фиксированы, то уравнения (46) и (47) являются эквивалентными формами описания рассеяния частицы ${}_z x$ на изотонных

ядрах ${}_{Z\phi}^{A\phi}Y(A\phi - Z\phi = \text{const})$ с $J^\pi = \text{const}$. На комплексной a -плоскости ($a = 2\mu q$) уравнение траектории полюса $a(E) = \text{Re } a(E) + i\text{Im } a(E)$ для этого случая имеет, согласно (46) и (47), вид

$$\text{Re } a(E) \approx \gamma_1 + \gamma_2 E, \quad \text{Im } a(E) \approx \gamma_3 \exp(-\gamma_4/\sqrt{E}), \quad (48)$$

где

$$\gamma_1 = 2c_1\alpha_1, \quad \gamma_2 = 2(\alpha_1c_2 + \alpha_2c_1), \quad \gamma_3 = 2(c_1\alpha_3 + c_3\alpha_1), \quad \gamma_4 = 2(c_4 + \alpha_4).$$

Если в уравнении (1) кулоновский член выбрать в виде a/r ($a = \mu z Z$, $2e^2 = h = c = 1$) и предположить, что z также может принимать комплексные значения, то уравнение траектории полюса S -матрицы в a -плоскости сохраняет функциональный вид типа (48) и описывает низкоэнергетические состояния систем ${}_{z+Z}^{A'-A}X + {}_Z^AY \leftrightarrow {}_{z+Z}^{A'}Q$ с учетом возможной принадлежности фрагментов X и Y с $J^\pi = \text{const}$ к изотопам ($zZ = \text{const}$), изобарическим мультиплетам ($\mu = \text{const}$) либо изотонам.

2. На основе анализа экспериментальных данных α -распада установлено, что закон Гейгера–Нетолла является универсальным в том смысле, что оказывается справедливым для изотопов [37], изобар [10] и изотонов [46] в состоянии с $J^\pi = \text{const}$. Следует отметить, что состояние квантовой системы инвариантно по отношению к способу описания этого состояния с помощью полюса S -матрицы на комплексной плоскости любого из спектральных параметров (при физических значениях остальных параметров), входящих безмодельным образом в уравнение Шредингера [17]. Поэтому на языке S -матричного формализма двухфрагментной задачи универсальность закона для изотопов, изобар и изотонов с $J^\pi = \text{const}$ означает, что резонансные состояния составных систем описываются одинаковым энергетическим поведением траектории полюса S -матрицы на комплексных μ -, q - и $a = 2\mu q$ -плоскостях (уравнения (46)–(48)). Причем в случае изотонных ядер изменение электрического заряда q обуславливает одновременно и изменение барионного (массового) числа A , т. е. приведенной массы μ , поэтому, как показано в работе [25] на примере α -распада четно-четных изотонов, траектории (46)–(48) представляют собой эквивалентные формы описания состояний ядер-изотонов с $J^\pi = \text{const}$.

Пусть комплексные значения кулоновской константы связи $a = \mu z Z$ обусловлены комплексными значениями μ , z и Z . Тогда на основе линейной зависимости $\text{Re } a(E)$ от энергии E резонансных состояний системы ${}_{z+Z}^{A'-A}X + {}_Z^AY \leftrightarrow {}_{z+Z}^{A'}Q$ с $J^\pi = \text{const}$ следует, что при распаде основного состояния фиксированной системы Q ($A' = \text{const}$, $z + Z = \text{const}$) на переменные дочерние фрагменты X и Y с $J^\pi = \text{const}$ энергии распада

$$E = M(z + Z; A') - M(z; A' - A) - M(Z; A), \quad z \neq \text{const}, \quad Z \neq \text{const} \quad (49)$$

и вещественные значения кулоновской константы связи

$$a = \frac{M(z; A' - A)M(Z; A)}{M(z; A' - A) + M(Z; A)} zZ \quad (50)$$

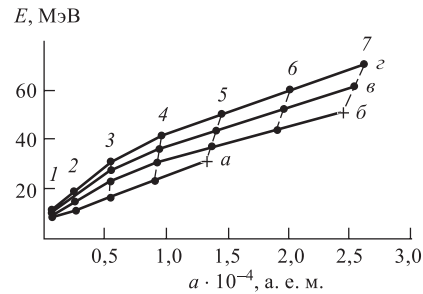
должны быть примерно линейно-зависимыми.

В [26] рассмотрен двухфрагментный распад основных состояний ядер $Q(J^\pi = 0^+)$, где переменный фрагмент X представляет собой основные состояния α -кластерных структур. На основе известных значений масс изотонных ядер ^{212}Po , ^{214}Rn , ^{216}Ra и ^{218}Th [38] были вычислены энергии их двухфрагментного распада по каналам, где

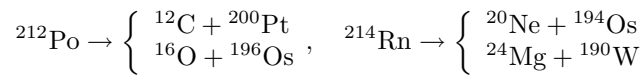
$${}^{A'-A}_{z}X = {}^4\text{He}, {}^8\text{Be}, \dots, {}^{28}\text{Si}.$$

Зависимость энергии распада основных состояний ядер ^{212}Po , ^{214}Rn , ^{216}Ra и ^{218}Th от значений кулоновской константы связи дочерних фрагментов изображена на рис. 7 (сплошные линии). Видно, что соответствующие энергии распада линейно зависят от значений $a = \mu z Z$, т. е. подтверждают линейную зависимость $\text{Re } a(E)$ от энергии E квазистационарных состояний системы ${}^{A'-A}_{z}X + {}^A_ZY$ с $J^\pi = 0^+$. Незначительные изломы отрезков в точках, где дочерние фрагменты содержат магические числа протонов (нейтронов), свидетельствуют о влиянии на α -кластерный распад оболочечной структуры дочерних ядер. Штриховые линии на рис. 7 соответствуют распадам материнских ядер-изотонов с испусканием фиксированных α -кластеров. Видно, что соответствующие энергии распада эквидистантны.

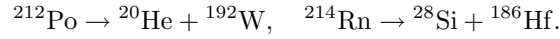
Рис. 7. Зависимость энергии распада основных состояний ядер ^{212}Po , ^{214}Rn , ^{216}Ra и ^{218}Th от значений кулоновской константы связи дочерних фрагментов (сплошные линии $a-z$). Штриховые линии 1-7 соответствуют распадам указанных ядер-изотонов с испусканием фиксированных α -кластеров ${}^4\text{He}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, \dots , ${}^{28}\text{Si}$



По известным значениям масс дочерних фрагментов при распаде ядер ^{212}Po и ^{214}Rn по каналам



с помощью соотношений (49), (50) и линейной зависимости $\text{Re } a(E)$ от E были вычислены массы неизвестных ядер ^{192}W и ^{186}Hf , являющихся дочерними фрагментами для случаев распада



Энергии распада ядер ^{212}Po и ^{214}Rn для этих случаев отмечены на рис. 7 крестиками. Значения масс ядер ^{192}W и ^{186}Hf были найдены также на основе эквидистантности энергии распада изотонных материнских ядер с испусканием фиксированных фрагментов ^{20}Ne и ^{28}Si (штриховые линии 5 и 7 на рис. 7). При этом средние значения масс нуклидов ^{192}W и ^{186}Hf соответственно равны $M(74; 192) = 191,96549$ а. е. м. и $M(72; 186) = 185,96061$ а. е. м.

В [27] рассмотрен распад ядер ^{216}Ra , ^{228}U и ^{240}Cm по каналам, где дочерние фрагменты $^{A'-A}_z X$ представляют собой основные состояния: а) четно-четных ядер α -кластерной структуры; б) нечетно-нечетных ядер с $2z = A' - A$. При этом зависимость E от вещественных значений $a = \mu z Z$ также оказывается приближенно линейной.

3. Выше было установлено, что при распадах (разделениях) изотопных (изотонных) немагических ядер с $J^\pi = \text{const}$, сопровождающихся испусканием фиксированных фрагментов и соответствующих дочерних немагических ядер, энергии распада (разделения) являются эквидистантными (см. рис. 1–7). На основе эквидистантности энергий распада получены массовые формулы для четно-четных изотопов [28]:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} M(Z; A + 2(n-k-1)) - b_n = 0 \quad (51)$$

и изотонов [29]:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} M(Z + 2(n-k-1); A + 2(n-k-1)) - c_n = 0, \quad n \geq 3. \quad (52)$$

Здесь b_n , c_n — постоянные, значения которых можно найти по известным массам.

Поскольку соотношения (51) и (52) справедливы для изотопов и изотонов, не содержащих магические числа протонов и нейтронов, далее ограничимся рассмотрением области тяжелых ядер с $Z > 82$ и $126 < A - Z < 152$, где существует достаточно большое число ядер, удовлетворяющих указанному условию. При вычислении постоянных b_n и c_n использованы данные [38] по массам тяжелых четно-четных ядер.

Для оценки точности выполнения (51) и (52) при найденных b_n и c_n по формуле

$$\sigma = \left[\left(\sum_{i=1}^N \delta_i^2 \right) / N \right]^{1/2},$$

где δ_i — значения левых частей (51) и (52), а N — число случаев, вычислены среднеквадратичные отклонения от нуля левых частей (51) и (52).

Значения постоянных b_n и среднеквадратичные отклонения σ от нуля в левой части (51) составляют при $n = 3; 4$ и $N = 34; 25$ соответственно 0,484 и 0,014 МэВ и 136 и 117 кэВ.

Значения постоянных c_n и среднеквадратичные отклонения σ от нуля в левой части (52) составляют при $n = 3; 4$ и $N = 29; 17$ соответственно 1,830 и 0,052 МэВ и 196 и 253 кэВ.

Таким образом, формулы (51) и (52), где массы M (избытки массы $M - A$) выражены в мегаэлектрон-вольтах, совместно с числовыми значениями b_n и c_n представляют собой соотношения между массами тяжелых четно-четных изотопов и изотонов.

В табл. 3 приведены вычисленные по данным [38] и формулам (51) и (52) при $n = 3; 4$ неизвестные избытки массы $M - A$ тяжелых нуклидов. Видно, что результаты [28, 29] близки к результатам [38, 40], полученным другими методами.

Таблица 3

Нуклид	$M - A, \text{МэВ}$					
	[28]		[29]		[38]	[40]
	$n = 3$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 4$		
^{220}Po	15,43	15,3	15,76	15,82		
^{224}Rn	22,63	22,55	22,41	22,29		
^{224}U	25,62	25,47	25,95	26,05		25,74
^{230}Ra	34,69	34,64	34,58	34,73	34,46 (28)	
^{230}Pu	36,85	36,91	37,07	36,94		37,35
^{236}Th	46,25	46,36	46,32	46,30		46,32
^{236}Cm	47,56	47,85	47,91	48,15	47,87 (20)	47,82
^{240}Cf	57,69	57,69	57,73	57,73	58,02 (20)	58,04
^{242}U	58,60	58,67	58,82	58,75		58,65
^{244}Fm	68,86	68,78	68,79	69,10	69,04 (28)	69,09

Предложенный в [28, 29] метод в известном смысле аналогичен подходам, основанным на рекуррентных формулах. Впервые такого рода соотношения установлены Гарвеем и Келсоном [47–49]. Отличие предложенного в работах [28, 29] от указанных выше методов заключается в том, что соотношения (51) и (52) содержат массы только четно-четных ядер. Преимуществом метода [28, 29] по сравнению с методами Гарвея–Келсона является простота вычислений, поскольку рекуррентные соотношения содержат очень большое число параметров (например, в формулах работы [49] их 477). Это обусловлено тем, что соотношения (51) и (52) описывают гораздо меньшую область нуклидов (ядер), чем формулы Гарвея–Келсона. Недавно на основе следующего из (48) закона Гейгера–Нетолла для изобарных, изотопных и изотонных ядер с $J^\pi = \text{const}$ установлены также соотношения линейного типа между логарифмами периода полураспада α -активных тяжелых четно-четных ядер [50].

4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ПРИ КОМПЛЕКСНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПРИВЕДЕННОЙ МАССЫ

Рассмотрим новую постановку однопараметрической обратной задачи, когда исходные данные рассеяния известны при фиксированных значениях энергии E , орбитального момента l , электрических зарядов Ze и ze для различных значений приведенной массы μ двухфрагментной системы [21, 22]. В этом случае можно говорить о задаче в комплексной k -плоскости ($k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$), обусловленной комплексными значениями μ при $E = \text{const}$. При этом входящий в уравнение Шредингера центробежный $\hbar^2 l(l+1)/2\mu r^2$ и короткодействующий (ядерный) $U(r) = \hbar^2 V(r)/2\mu$ потенциалы различны для различных физических значений приведенной массы μ . Такая постановка обратной задачи, связанная с аналитическим продолжением переменной μ в область комплексных значений, представляет физический интерес, так как она соответствует случаю рассеяния частицы (кластера) ${}_Z x$ на изотопах ${}_Z^A Y$ при $E = \text{const}$ и $J^\pi = \text{const}$, где эффективный потенциал $V(r)$ характеризует взаимодействие системы ${}_Z x + {}_Z^A Y$ при $A \neq \text{const}$, т. е. отражает «расщепление» фазы рассеяния за счет приращения барионного числа A ($A = A_0 + \Delta A$, где $\Delta A = 0, 2, 4, \dots$).

В отсутствие связанных состояний описываемой квантовой системы ${}_Z x + {}_Z^A Y$ ($A \neq \text{const}$) исходным источником информации служат известные из фазового анализа «ядерные» фазовые сдвиги $\delta_{E,l,Zz}(k_j)$ при фиксированных физических значениях спектральных параметров E , l и Z .

В качестве примера рассмотрим случай s -рассеяния нейтрона на изотопах водорода при фиксированном значении энергии системы $n + {}^A\text{H}$

($A = 1, 3, 5, \dots$) в состоянии с $J^\pi = 1^+$. Если воспользоваться процедурой аппроксимации «ядерных» фаз $\delta_{E,0,0}(k_j)$ в комплексной k -плоскости рациональными функциями [5], то с помощью алгебраического варианта обратной задачи для k -плоскости [51] можно восстановить потенциал $V(r)$ системы $n + {}^A\text{H}$ по значениям «ядерных» фаз состояния 3S_1 при $E = \text{const}$.

В работе [52] приведены экспериментальные значения «ядерной» фазы состояния 3S_1 для рассеяния $n - {}^1\text{H}$ в интервале энергии от 1 до 500 МэВ в лаб. сист. К сожалению, насколько нам известно, аналогичных экспериментальных данных для случая рассеяния $n - {}^3\text{H}$ пока нет. В [53] приведено теоретическое значение s -фазы триплетного состояния в интервале энергии от 0 до 30 МэВ в с.ц.м. при описании системы ${}^4\text{H}$ с помощью метода резонирующих групп. Необходимо отметить, что значения указанных экспериментальной и теоретической фазы состояния 3S_1 для случаев рассеяния $n - {}^1\text{H}$ и $n - {}^3\text{H}$ различаются при одной и той же энергии в с.ц.м. незначительно (на $1-8^\circ$). Такая близость в поведении фаз системы $n + {}^A\text{H}$ ($A = 1, 3$) в состоянии с $J^\pi = 1^+$ свидетельствует о том, что при $A = \text{const}$ поведение эффективного потенциала $V(r)$, описывающего энергетическую зависимость фазы рассеяния для случаев $A = 1$ и $A = 3$, также должно быть примерно одинаковым. В случае $E = \text{const}$ и $A = 1, 3, 5, \dots$ потенциал $V(r)$ будет характеризовать барионное «расщепление» s -фазы триплетного состояния. При этом согласно [5] S -матрицу, построенную по двум значениям «ядерных» фаз систем $n + {}^1\text{H}$ и $n + {}^3\text{H}$ в состоянии 3S_1 при $E = \text{const}$, можно представить в однополюсном приближении функции Йоста $R(k)$:

$$\exp[2i\delta_{E,0,0}(k)] = \frac{R(k)}{R(-k)}, \quad R(k) = \frac{k - i\alpha}{k - i\beta}, \quad (53)$$

которое соответствует выражению фазы $\delta_{E,0,0}(k)$ в виде

$$\delta_{E,0,0}(k) = \text{arctg} \frac{k(\beta - \alpha)}{k^2 + \alpha\beta}. \quad (54)$$

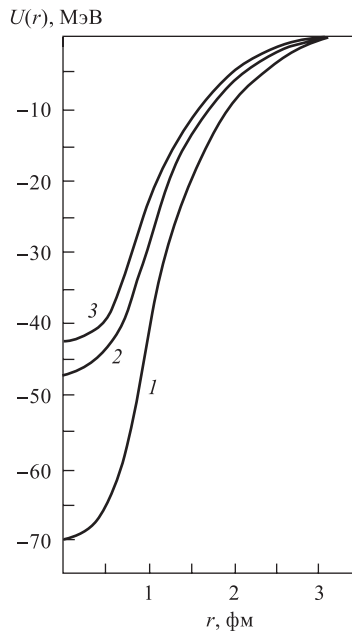


Рис. 8. Потенциал $U(r)$ системы $n + {}^A\text{H}$ в состоянии с $J^\pi = 1^+$ при $E = 25$ МэВ. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $A = 1, 3, 5$

На основании [51] потенциал $V(r)$, восстановленный по S -функции (53), равен

$$V(r) = 8\gamma\beta^2[\gamma \exp(\beta r) - \exp(-\beta r)]^{-2}, \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}. \quad (55)$$

Константы α и β определены с помощью (53) по известным значениям «ядерных» фаз состояния 3S_1 для случаев рассеяния $n - {}^1\text{H}$ и $n - {}^3\text{H}$ при $E = 25$ МэВ. При этом $\delta_{E,0,0}(k_1) = 63,02^\circ$ [52] и $\delta_{E,0,0}(k_2) = 55^\circ$ [53], где $k_1 = 0,7765$ фм $^{-1}$ и $k_2 = 0,9510$ фм $^{-1}$. Значения α и β соответственно равны 0,1730 и 0,9408 фм $^{-1}$.

Ход потенциала $U(r) = \hbar^2 V(r)/2\mu$, где $V(r)$ определено выражением (55), изображен на рис. 8 (кривые 1 и 2).

С помощью (54) по известным значениям α и β легко найти значение «ядерной» фазы состояния 3S_1 для случая рассеяния $n - {}^5\text{H}$ при $E = 25$ МэВ ($k_3 = 1,0025$ фм $^{-1}$), которое равно $\delta_{E,0,0}(k_3) = 53^\circ$. Потенциал $U(r)$ для этого случая также изображен на рис. 8 (кривая 3). Видно, что эффективное взаимодействие системы $n + {}^A\text{H}$ ($A = 1, 3, 5$) в состоянии с $J^\pi = 1^+$ при $E = 25$ МэВ является притягивающим, однако глубина потенциала недостаточна для возникновения связанного состояния.

Необходимо отметить, что при восстановлении потенциала взаимодействия системы ${}_Z x + {}_Z^A Y$ с $Z = \text{const}$, $J^\pi = \text{const}$ и $E = \text{const}$, описывающего «ядерные» фазы $\delta_{E,l,Zz}(k_j)$, соответствующие значениям $A_j = A, A + 2, A + 4, \dots$, может быть использован также метод обратной задачи в комплексной a -плоскости [13], где комплексные значения a обусловлены комплексными значениями μ . Это связано с тем, что обратная задача в комплексной k -плоскости для случая рассеяния парциальной волны без учета кулоновского поля ($a = 0$) аналогична обратной задаче в комплексной a -плоскости с переменной $-k^2$ вместо $4a$ [54].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитическое продолжение приведенной массы μ в область комплексных значений исчерпывает, по существу, число возможных подходов при описании рассеяния с помощью S -матрицы, зависящей от универсальных параметров, входящих безмодельным образом в уравнение Шредингера. Существенно важное значение данного подхода заключается в том, что он позволяет описать состояния систем с *переменным* числом степеней свободы.

На основе порогового поведения полюса S -матрицы в:

- 1) μ -плоскости ($Zze^2 = \text{const}$),
- 2) μZe -плоскости ($ze = \text{const}$),

3) μZze^2 -плоскости при $l = \text{const}$ и $|E| \rightarrow 0$ установлены приближенные соотношения, связывающие основные характеристики соответствующих систем:

а) фиксированная частица (кластер) + изотопные ядра либо изотопные ядра + изотопные ядра,

б) фиксированная частица (кластер) + изотонные ядра,

в) ядра + ядра с фиксированными значениями спина и четности J^π . При этом энергии стационарных (квазистационарных) состояний составных систем с $J^\pi = \text{const}$ и вещественные значения соответствующих спектральных параметров оказываются линейно-зависимыми. Соотношения типа (31), (35), связывающие параметры квазистационарных состояний систем ${}_zX + {}^A_ZY \leftrightarrow {}_{z+Z}^{A'}Q$, являются универсальными в том смысле, что они справедливы не только для изотопных и изотонных ядер A_ZY с $J^\pi = \text{const}$, но также не зависят от природы фиксированного заряженного фрагмента ${}_zx$. Следовательно, закон Гейгера–Нетолла описывает не только α -распад ядер с $J^\pi = \text{const}$, но также и распады, сопровождаемые испусканием других фиксированных кластеров.

На основе эквидистантности энергии распада (разделения) основных состояний составных систем с испусканием фиксированного фрагмента и соответствующих дочерних ядер с $J^\pi = \text{const}$ установлены простые и эффективные формулы для изотопных и изотонных немагических ядер с $J^\pi = \text{const}$.

Таким образом, аналитическое продолжение параметров μ , μZe и μZze^2 в комплексную область позволяет эффективно применить уравнение Шредингера при описании ядерных систем с переменными значениями барионного числа и электрического заряда и фиксированными значениями спина и четности. Необходимо, однако, отметить, что линейный характер поведения вещественной части траектории полюса S -матрицы в комплексной плоскости фундаментальных параметров уравнения Шредингера является следствием приближения эффективного радиуса (см. (42), (43)), т.е. не зависит от конкретной формы потенциала взаимодействия. Это значит, что при распаде (разделении) составной системы основную роль играют свойства не дочерних фрагментов, а материнских ядер. Поэтому в области магических значений числа протонов (нейтронов) составных ядер изменение поведения короткодействующего потенциала приводит к нарушению вышеуказанной линейной зависимости.

При описании системы «частица + изотопные ядра с $J^\pi = \text{const}$ » с помощью метода обратной задачи известная процедура задачи для комплексной k -плоскости ($E = \text{var}$, $\mu = \text{const}$) оказывается пригодной для случая $E = \text{const}$ и $\mu = \text{var}$. При этом восстановленный потенциал отражает барионное расщепление «ядерной» фазы изотопной системы с $J^\pi = \text{const}$ при

$E = \text{const}$. В случае системы «частица + изотонные ядра с $J^\pi = \text{const}$ » при $E = \text{const}$ потенциал взаимодействия, характеризующий барионное и кулоновское расщепления фазы рассеяния, может быть восстановлен с помощью метода обратной задачи в комплексной a -плоскости ($a = 2\mu Zze^2/\hbar^2$, $\mu = \text{var}$, $Ze = \text{var}$, $ze = \text{const}$) [13]. К сожалению, существующий ныне фазовый анализ в физике ядерных взаимодействий [33] соответствует рассеянию фиксированных частиц (ядер) и в этом смысле мало пригоден для новых постановок обратной задачи, где фазы рассеяния систем ${}_Zx + {}^A_ZY$ с $J^\pi = \text{const}$ характеризуют при $E = \text{const}$ барионное ($Zz = \text{const}$, $A = \text{var}$) либо зарядовое и барионное ($Zz = \text{var}$, $A = \text{var}$) расщепления.

В заключение автор выражает глубокую признательность Б. Н. Захарьеву за замечание, которое способствовало более четкому изложению метода обратной задачи при комплексных значениях приведенной массы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Де Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. М.: Мир, 1966.
2. Ситенко А. Г. Теория рассеяния. Киев: Вища шк., 1975.
3. Cornille Н., Martin А. // Nuovo Cim. 1962. V. 26, No. 2. P. 298.
4. Ментковский Ю. Л. Частица в ядерно-кулоновском поле. М.: Энергоатомиздат, 1982.
5. Мальяров В. В., Попушой М. Н. // ЯФ. 1973. Т. 18, вып. 5. С. 1140.
6. Карнаков Б. М. и др. // ЯФ. 1990. Т. 52, вып. 6. С. 1540; 1991. Т. 54, вып. 2. С. 400.
7. Мур В. Д. и др. // ЯФ. 1993. Т. 56, вып. 2. С. 125.
8. Поплавский И. В. // Изв. вузов, сер. «Физика». 1982. Т. 25, № 4. С. 21; Укр. физ. журн. 1983. Т. 28, № 11. С. 1631.
9. Поплавский И. В., Шиян А. А. // Укр. физ. журн. 1984. Т. 29, № 1. С. 5.
10. Поплавский И. В., Попушой М. Н. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1985. Т. 49, № 1. С. 88; 1986. Т. 50, № 1. С. 52; ЯФ. 1985. Т. 42, вып. 6. С. 1363.
11. Поплавский И. В. // ЯФ. 1988. Т. 48, вып. 6. С. 1642; 1989. Т. 49, вып. 2. С. 408.
12. Поплавский И. В. // ЯФ. 1991. Т. 54, вып. 3. С. 669; 1992. Т. 55, вып. 4. С. 938.
13. Попушой М. Н. // Укр. физ. журн. 1984. Т. 29, № 1. С. 24; ТМФ. 1985. Т. 63, № 3. С. 340.
14. Поплавский И. В. // Укр. физ. журн. 1984. Т. 29, № 8. С. 1148.
15. Поплавский И. В., Шиян А. А. // ЯФ. 1986. Т. 44, вып. 4. С. 952.
16. Попушой М. Н. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1991. Т. 55, № 1. С. 109.
17. Попушой М. Н. // ТМФ. 1986. Т. 69, № 3. С. 466; Изв. АН СССР, сер. физ. 1988. Т. 52, № 1. С. 150.
18. Поплавский И. В. // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27, вып. 4. С. 1099.
19. Попушой М. Н., Поплавский И. В. // ЭЧАЯ. 2001. Т. 32, вып. 4. С. 964.
20. Попушой М. Н. // ЯФ. 1991. Т. 54, вып. 5. С. 1262; 1992. Т. 55, вып. 3. С. 645.
21. Попушой М. Н. // Укр. физ. журн. 1989. Т. 34, № 5. С. 649.

22. *Попушой М. Н.* // Изв. АН СССР, сер. физ. 1989. Т. 53, № 12. С. 2460.
23. *Брагин В. Н., Жуков М. В.* // ЭЧАЯ. 1984. Т. 15, вып. 2. С. 725.
24. *Поплавский И. В., Попушой М. Н.* // Укр. физ. журн. 1993. Т. 38, № 9. С. 1289.
25. *Попушой М. Н.* // Изв. РАН, сер. физ. 1993. Т. 57, № 1. С. 166.
26. *Попушой М. Н.* // ЯФ. 1995. Т. 58, № 4. С. 632.
27. *Поплавский И. В., Попушой М. Н.* // Изв. РАН, сер. физ. 1995. Т. 59, № 11. С. 150.
28. *Поплавский И. В., Попушой М. Н.* // ЯФ. 1992. Т. 55, вып. 11. С. 2915.
29. *Поплавский И. В., Попушой М. Н.* // Укр. физ. журн. 1993. Т. 38, № 6. С. 815.
30. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т. 1.
31. *Уиттекер Э. Г., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. Т. 1.
32. *Бэрк Ф. Дж.* Потенциальное рассеяние в атомной физике. М.: Атомиздат, 1980.
33. *Никитиу Ф.* Фазовый анализ в физике ядерных взаимодействий. М.: Мир, 1983.
34. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
35. *Блатт Дж., Вайскопф В.* Теоретическая ядерная физика. М., 1954.
36. *Gatow G.* // Zs. f. Phys. 1928. V. 51. P. 204; V. 52. P. 510.
37. *Roenuari D. N., Ivascu M.* // Rev. Rom. Phys. A. 1983. V. 28. P. 309.
38. *Wapstra A. N., Audi G.* // Nucl. Phys. A. 1985. V. 432, No. 1. P. 1.
39. *Andreyev A. N. et al.* JINR Preprint E7-90-348. Dubna, 1990.
40. *Горбачев В. В. и др.* Основные характеристики изотопов тяжелых элементов. М.: Атомиздат, 1975.
41. *Кравцов В. А.* Массы атомов и энергии связи ядер. М.: Атомиздат, 1974.
42. *Попушой М. Н.* // ЯФ. 1994. Т. 57. С. 398.
43. *Поплавский И. В., Попушой М. Н.* // Укр. физ. журн. 1995. Т. 40, № 10. С. 1053.
44. *Попушой М. Н.* // Изв. вузов, сер. «Физика». 1996. № 7. С. 65; Изв. РАН, сер. физ. 1997. Т. 61, № 4. С. 775.
45. *Ситенко А. Г.* Теория ядерных реакций. М.: Энергоатомиздат, 1983.
46. *Поплавский И. В.* // ЯФ. 1987. Т. 45, вып. 2. С. 383.
47. *Garvey G., Kelson I.* // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. P. 197.
48. *Kelson I., Garvey G.* // Phys. Lett. 1966. V. 23. P. 689.
49. *Garvey G. et al.* // Rev. Mod. Phys. 1969. V. 41. P. 1.
50. *Поплавский И. В.* // Изв. РАН, сер. физ. 2000. Т. 64, № 3. С. 242.
51. *Theis R. W.* // Z. Naturforsch. 1956. V. 11a. P. 889.
52. *Arndt R. A., Hackman R. H., Roper L. D.* // Phys. Rev. 1977. V. 15. P. 1002.
53. *Shen P. N. et al.* Preprint UMSI-85/19. Minnesota, 1985.
54. *Попушой М. Н.* // Изв. АН СССР, сер. физ. 1989. Т. 53, № 5. С. 976.