ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 7

УДК 530.12: 531.51

ОЧЕРК ТЕНЗОРНО-СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЙОРДАНА–БРАНСА–ДИККЕ

*В. В. Папоян**

Ереванский государственный университет, Армения
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*E-mail: vpap@ysu.am, vpap@thsun1.jinr.ru

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 7

УДК 530.12: 531.51

ОЧЕРК ТЕНЗОРНО-СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЙОРДАНА–БРАНСА–ДИККЕ

В. В. Папоян[*]

Ереванский государственный университет, Армения
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен краткому изложению тензорно-скалярной теории тяготения Йордана–Бранса–Дикке. Обсуждаются ее логико-теоретические основы, и найден ньютоновский предел. Показано, что теория имеет два конформно связанных представления — «собственное» и «эйнштейновское». Последнее после переобозначения константы тяготения превращается в теорию Эйнштейна с дополнительным источником в виде минимально связанного скалярного поля. Конформное соответствие используется для генерации новых точных решений. Попутно получено новое четырехпараметрическое стационарное решение общей теории относительности, которое в различных частных случаях совпадает с известными. Рассматривается эволюционная (временная) задача, и найдено условие ее интегрируемости. Сформулирована и в частных случаях решена космологическая задача с космологическим скаляром, который вводится в теорию аналогично введению космологической постоянной в теорию Эйнштейна.

The Jordan–Brans–Dicke tensor-scalar theory of gravitation is briefly outlined. Its logical and theoretical basic principles are discussed, and the Newton limit is found. The theory is shown to have two conformally connected representations — «proper» and «Einstein» ones. After redefinition of the gravity constant the Einstein representation turns into the Einstein theory with an additional source as a minimally coupled scalar field. The conformal correspondence is used for generation of new exact solutions. A new four-parameter stationary GR solution is obtained which in different particular cases coincides with the known ones. The evolution (time) problem is treated and the condition for its integrability is found. The cosmological problem with the cosmological scalar, which is introduced in the theory by analogy with the cosmological constant in the Einstein theory, is formulated and solved in particular cases.

1. ВВЕДЕНИЕ. ОТ ИДЕЙ КАЛУЦЫ К ТЕНЗОРНО-СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Физическая теория адекватна реальному миру, если в рамках описываемого ею круга явлений нет ни одного экспериментального факта, противоречащего ее выводам. Теория гравитационного поля ввиду чрезвычайно малой интенсивности гравитационного взаимодействия не имеет достаточно надежной экспериментальной базы. Непосредственные измерения выполнены лишь

[*]E-mail: vpap@ysu.am, vpap@thsun1.jinr.ru

для слабых гравитационных полей в пределах Солнечной системы, а воздействие сильной гравитации наблюдают косвенно по явлениям, реализуемым в масштабах Вселенной. Поэтому для теории тяготения существенными становятся ее логическая непротиворечивость и фундаментальные принципы, истинность которых следует из хорошо подтвержденных экспериментально теорий других физических полей.

Если в качестве меры интенсивности гравитационного поля принять безразмерное отношение $r_g/r = 2GM/c^2R$ (M — масса, R — характерный размер источника поля, G — константа ньютоновского тяготения), то для слабых $r_g/r \ll 1$ (в пределах Солнечной системы) и умеренных $r_g/r \leq 1/3$ (в окрестности пульсаров) гравитационных полей теория тяготения Эйнштейна хорошо согласуется с экспериментальными тестами [1]. С другой стороны,

1) основываясь на обобщении большого количества фактов наблюдательной астрофизики, В. А. Амбарцумян сформулировал космогоническую концепцию [2, 3] о существовании статических дозвездных тел с $r_g/r \sim 1$, которая не получила объяснения и, скорее всего, не может быть объяснена в рамках общей теории относительности (ОТО);

2) согласно В. Л. Гинзбургу [4] «...необходимость анализа применимости общей теории относительности в сильных гравитационных полях, особенно вблизи сингулярности, не вызывает сомнений»;

3) изучение динамики черных дыр обнаруживает поведение, не свойственное метрическим теориям (см., например, [5, 6]), иначе говоря, по-видимому, в условиях сильной гравитации ОТО становится внутренне противоречивой.

Перечисленное позволяет полагать, что результаты ОТО можно считать надежными в области слабых и умеренных гравитационных полей, тогда как в сильных полях ее применимость сомнительна. Существенной трудностью ОТО остается также проблема энергии, которая, являясь предметом дискуссии и сегодня [7–11], породила несколько достаточно жизнеспособных неэйнштейновских вариантов теории тяготения [12–21]. Настоящий обзор посвящен в основном тензорно-скалярной теории тяготения (ТСТТ) Йордана–Бранса–Дикке (ЙБД), которая является наиболее разработанной и, на наш взгляд, наиболее близкой модификацией ОТО. Остановимся вкратце на основополагающих идеях этой теории, отсылая читателя за подробностями к работам [15–21].

В современной теоретической физике проблема объединения известных взаимодействий занимает одну из ключевых позиций. На сегодняшний день можно считать обоснованным весьма правдоподобное заключение, согласно которому физические взаимодействия являются проявлением все более высоких размерностей пространства-времени. Первое достижение, иллюстрирующее эту идею, принадлежит Минковскому, который, рассматривая трехмерное пространство и время как 4D псевдоевклидовый комплекс, показал, что при этом 3D-векторы напряженностей электрического и магнитного полей объединяются в тензор электромагнитного поля.

Размышляя над «подпорченным» сходством определений напряженностей электромагнитного

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

и гравитационного

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)$$

полей через потенциалы $A^\mu = \{\varphi, \mathbf{A}\}$ и $g_{\alpha\beta}(x^\alpha)$, Калуца [22] вслед за Минковским предложил способ объединения эйнштейновской теории тяготения и теории электромагнитного поля Максвелла, основанный на введении дополнительной, пространственноподобной координаты

$$x^A = \{x^\alpha, x^5\}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad A = \alpha, 5.$$

Теория Калуцы–Клейна [22–24] сформулирована в духе общей теории относительности и содержит следующие естественные предположения:

1. Метрическая форма

$$d\Sigma^2 = G_{AB}dx^A dx^B$$

должна быть ковариантна относительно преобразований

$$x^\alpha = x^\alpha(\acute{x}^\beta)$$

и преобразований дополнительной координаты

$$x^5 = x^5(\acute{x}^\alpha, \acute{x}^5).$$

Это требование позволяет расщепить 5-мерную метрическую форму так, чтобы

$$d\Sigma^2 = ds^2 - d\lambda^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta - \lambda_A\lambda_B dx^A dx^B,$$

$$g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{G_{5\alpha}G_{5\beta}}{G_{55}}, \quad \lambda_\alpha = -\frac{G_{5\alpha}}{\sqrt{-G_{55}}}, \quad \lambda_5 = \sqrt{-G_{55}}.$$

2. Геометрические величины не должны зависеть от дополнительной, пятой координаты: $\partial/\partial x^5 = 0$. Это требование сужает класс общих преобразований x^5 до

$$\acute{x}^5 = x^5 + f(x^\alpha),$$

что приводит к калибровочным преобразованиям электродинамики

$$\acute{A}_\alpha = A_\alpha - \frac{c^2}{2\sqrt{G}}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \quad \text{где} \quad A_\alpha = \frac{c^2}{2\sqrt{G}}\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_5}.$$

3. Для того чтобы при редукции в четырехмерие получить систему уравнений Максвелла и эйнштейновской теории тяготения, Калуца вынужден был положить $G_{55} = -1$. В этом случае компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ с точностью до постоянной совпадают с компонентами 5-мерного символа Кристоффеля:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{c^2}{\sqrt{G}}\Gamma_{\alpha 5\beta}.$$

Рассматривая свойства симметрии теории Калуцы–Клейна, Йордан [15] пришел к заключению об ограниченности одного из предположений Калуцы, выяснив, что компонента G_{55} не константа, а скаляр. Далее, в реализацию известной гипотезы Дирака [25,26] о «дряхлеющей гравитации», Йордан предположил, что в каждой пространственно-временной точке этот скаляр $y(x^\alpha)$ (его принято называть гравитационным скаляром) заменяет ньютоновскую константу тяготения G, причем $y \sim 1/G$, что позволило ему сформулировать отличную от ОТО теорию тяготения:

$$W = \frac{1}{c}\int \sqrt{-g}\left[-\frac{y}{2\kappa}\left({}^{(4)}R - \zeta\frac{y^\mu y_\mu}{y^2}\right) + L_m\right]d^4x, \quad \kappa = \frac{8\pi}{c^4}, \tag{1.1}$$

где ζ — безразмерная константа связи скалярного поля $y(x^\alpha)$ с веществом и негравитационными полями. В 1961 г. Дикке и Бранс [17,18], используя эвристическую идею Маха о влиянии удаленных масс на происхождение инерции, т. е. используя физические предпосылки, отличные от йордановских, пришли к необходимости формулировки тензорно-скалярной теории тяготения, полевые уравнения которой в точности совпадают с полевыми уравнениями теории Йордана. Ход их рассуждений можно проиллюстрировать простой оценкой: частица падает на тело массой m с ускорением $a \sim Gm/r^2$, с другой стороны, исходя из маховского принципа и из размерных соображений $a \sim c^2/r \sim c^2 mR/rMr$, где M — совокупная масса удаленных объектов, а R — расстояние до их центра масс. Сравнивая эти выражения, получаем известное соотношение Шамы [27]

$$\frac{GM}{c^2 R} \sim 1, \tag{1.2}$$

согласно которому размеры наблюдаемой части Вселенной порядка ее гравитационного радиуса. Исходя из этого можно предположить, что однородная

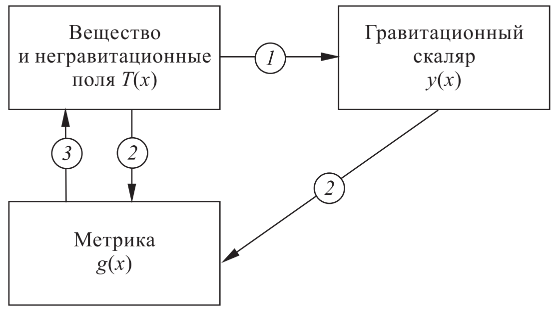

Рис. 1

расширяющаяся Вселенная является гигантской следящей системой с обратной связью, подгоняющей значения фигурирующих в (1.2) величин к предписанным значениям. Это, в частности, означает, что в произвольной точке наблюдения величина G переменна и определяется распределением вещества, что легко обнаружить, переписав (1.2) в виде символического соотношения

$$1/G(r) = \sum m_i/c^2(r - r_i),$$

откуда и следует необходимость замены константы тяготения гравитационным скаляром.

В теории Йордана–Бранса–Дикке гравитационный скаляр порождается веществом и негравитационными полями, а точнее, подчиняется уравнению типа волнового с источником в виде следа тензора энергии-импульса вещества и негравитационных полей (путь *1* на рис. 1):

$$\nabla_\alpha y^\alpha = \frac{\kappa T}{3 + 2\zeta}. \tag{1.3}$$

Здесь ∇_α — ковариантная производная в метрике $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ риманова пространства;

$$y^\alpha = g^{\alpha\beta} y_\beta = g^{\alpha\beta} \frac{\partial y}{\partial x^\beta}.$$

Гравитационный скаляр вместе с веществом и негравитационными полями генерирует метрику $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ (пути *2* на рис. 1) согласно

$$G^\mu_\nu = \frac{\kappa}{y} T^\mu_\nu + \frac{\nabla_\nu y^\mu}{y} + \zeta \frac{y_\nu y^\mu}{y^2} - \delta^\mu_\nu \left(\frac{\nabla_\alpha y^\alpha}{y} + \frac{\zeta}{2} \frac{y_\alpha y^\alpha}{y^2} \right), \tag{1.4}$$

причем влияние скалярного поля на движение частиц проявляется не за счет непосредственного взаимодействия, а благодаря обусловленным этим полем изменениям метрического тензора (путь *3* на рис. 1).

Тензорно-скалярная теория тяготения ЙБД сформулирована так, чтобы сохранить одно из достижений ОТО — из уравнений поля следует обращение в нуль ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса вещества и негравитационных полей:

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0 \implies \nabla_\mu T^\mu_\nu = 0,$$

что обеспечивает согласие с требованием слабого принципа эквивалентности — в отсутствие негравитационных полей метрика предписывает пробным незаряженным бесспиновым частицам и лучам света движение по геодезическим

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0.$$

• ***Замечание 1.*** Вещество и негравитационные поля в теории гравитации представлены тензором энергии-импульса, который определяется варьированием W_m

$$\delta W_m = \delta\int L_m\sqrt{-g}d^4x = \frac{1}{2}\int T_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}d^4x,$$

где L_m — лагранжева плотность материи. В результате для тензора энергии-импульса имеем

$$T_{\alpha\beta} = 2\frac{\delta L_m}{\delta g^{\alpha\beta}} - g_{\alpha\beta}L_m \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

(Несмотря на тождественность определений, второе предпочтительнее, так как сразу выдает симметричный результат.)

В гидродинамическом приближении, т. е. при условии локального термодинамического равновесия в среде, обычно принимают, что вещество — идеальная жидкость с изотропными давлением P и плотностью энергии ε, макроскорость перемещения элемента 4-объема которой есть u^α, причем $u^\alpha u_\alpha = 1$. Если для плотности функции Лагранжа такого вещества формально принять

$$L_m = \frac{1}{2}[P(1 + u_\alpha u_\beta g^{\alpha\beta}) - \varepsilon(1 - u_\alpha u_\beta g^{\alpha\beta})],$$

то

$$\delta L_m = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta}(P + \varepsilon)u_\alpha u_\beta$$

(соотношение $u_\alpha u_\beta g^{\alpha\beta} = 1$ следует учитывать только после варьирования), и для тензора энергии-импульса вещества получим

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon + P)u_\alpha u_\beta - Pg_{\alpha\beta}. \tag{1.5}$$

Тензор энергии-импульса всех известных классических форм материи подчиняется естественным условиям энергодоминантности:

1. С точки зрения любого причинного наблюдателя, мировая линия которого задается вектором t^μ, плотность энергии физической системы должна быть неотрицательна, поэтому

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0.$$

2. Относительно причинного наблюдателя ($t^\mu t_\mu \geq 0$) плотность потока энергии должна описываться не пространственноподобным вектором, что приводит к

$$T^{\mu\nu}T_{\mu\sigma}t_\nu t^\sigma \geq 0.$$

Отметим, что в квантовой теории из-за поляризации вакуума условия энергодоминантности могут быть нарушены.

Условие энергодоминантности накладывает ограничения на фигурирующие в выражении тензора энергии-импульса вещества плотность энергии и давление:

$$\varepsilon \geq 0, \quad -\varepsilon \leq P \leq \varepsilon.$$

Ковариантное постоянство тензора энергии-импульса содержит достаточно богатую информацию о движении материи. Продемонстрируем это на примере тензора энергии-импульса вещества (1.5), подставив его в $\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0$. В результате получим

$$P,_\beta = (P+\varepsilon),_\alpha u^\alpha u_\beta + (P+\varepsilon)(u_\beta \nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta).$$

Спроектировав это выражение на u^β и учитывая

$$u^\alpha u_\alpha = 1 \ \text{ и } \ u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = 0,$$

получим уравнение непрерывности

$$\nabla_\alpha u^\alpha = -\frac{u^\beta \varepsilon_\beta}{P+\varepsilon}. \tag{1.6}$$

Спроектируем теперь то же выражение на гиперповерхность, ортогональную u^β, используя проектор

$$L^\beta_\nu = \delta^\beta_\nu - u^\beta u_\nu, \quad L^\beta_\nu u^\nu = L^\beta_\nu u_\beta = 0.$$

В результате получим уравнение Эйлера

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{P,_\beta - u^\alpha u_\beta P,_\alpha}{P+\varepsilon}. \tag{1.7}$$

Одно из возможных истолкований принципа эквивалентности локально исключает гравитацию как силовое воздействие, трактуя гравитационные силы как инерциальные, исключая тем самым пассивную гравитационную массу, заменяя ее инертной. Альтернативным является маховское представление, согласно которому инерция интерпретируется как гравитационное взаимодействие. Эквивалентность инерции и тяготения, по Маху, означает, что силы инерции сводятся к гравитационным, а инертная масса — к гравитационной и исключается из рассмотрения. Если принцип Маха справедлив, то согласно Эйнштейну [28] «инертность некоторого тела должна возрасти, если поблизости от него сконцентрируются тяжелые массы». В ОТО любое локализованное распределение масс создает гравитационное поле, которому асимптотически соответствует плоское пространство и которое в областях, удаленных от вещества, в противовес принципу Маха, обладает абсолютными инертными свойствами. В теории ЙБД ситуация иная — скалярное поле обусловливает притяжение, примерно соответствующее силам гравитации [29].

Согласно Дикке [30], для того чтобы быть справедливой, теория тяготения должна быть

1) полной; это означает, что анализ результатов любых достоверных экспериментов может быть выполнен на основе «первых принципов»;

2) самосогласованной, иначе говоря, предсказания результатов любого эксперимента, полученных разными способами, должны совпадать;

3) релятивистской, т. е. негравитационные законы физики при выключенной гравитации должны сводиться к закономерностям СТО;

4) справедливой в ньютоновском пределе.

С целью установить ньютоновский предел теории ЙБД рассмотрим случай слабых гравитационных полей $Gm/c^2r \ll 1$ и медленных движений $v^2/c^2 \ll 1$:

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\varphi}{c^2} = 1 - \frac{2Gm}{c^2 r}, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ik} = -\delta_{ik}.$$

Уравнения теории ЙБД, если искать их решения в виде

$$y \approx y_0(1+\sigma), \qquad g_{00} \approx c^2(1+g),$$

дают

$$\triangle\sigma = \frac{4\pi\rho}{c^2}(-y_0(3+2\zeta)), \quad \triangle g = \frac{4\pi\rho}{c^2}\frac{4(2+\zeta)}{y_0(3+2\zeta)}.$$

Поскольку $g = 2\varphi/c^2$, а гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\triangle\varphi = 4\pi G\rho$, то

$$y_0 = \frac{2(2+\zeta)}{G(3+2\zeta)}, \quad \sigma = -\frac{\varphi}{c^2(2+\zeta)} = -\frac{g}{2(2+\zeta)}, \quad g = -\frac{2Gm}{c^2 r}. \tag{1.8}$$

Уравнение

$$\nabla_\alpha y^\alpha = AT, \quad A = \frac{8\pi}{c^4(3+2\zeta)},$$

которому удовлетворяет гравитационный скаляр, позволяет грубо оценить среднее значение y, вычислив центральный потенциал сферы с космологической плотностью $\rho \sim 10^{-29}$ г/см^3 и с радиусом, равным радиусу наблюдаемой части Вселенной $R \sim 10^{28}$ см:

$$\langle y \rangle \sim A\rho R^2 \sim A \cdot 10^{27} \text{ г/см} \sim \frac{4,7 \cdot 10^6}{3+2\zeta} \frac{\text{г} \cdot \text{с}^2}{\text{см}^3}.$$

Допустив теперь, что величина y_0 имеет порядок, сравнимый с $\langle y \rangle$, для безразмерной константы связи получим $\zeta \sim 50$.

Легко заметить, что $\lim_{\zeta\to\infty} y_0 = 1/G$, с другой стороны, ясно, что в пределе $y = y_0$ и $\zeta \to \infty$ действие теории ЙБД (1.1) обращается в действие ОТО, поэтому можно утверждать, что ОТО в некотором смысле является частным случаем теории ЙБД.

Эксперименты в пределах Солнечной системы дают для отношения константы связи вещество — скалярное поле к константе связи вещество–метрика малую величину ($< 10^{-3}$), что практически можно расценить как граничащую с отсутствием малость скалярного поля. С другой стороны, существуют определенные основания для того, чтобы считать роль скалярного поля в ранней Вселенной существенной, а различие между предсказаниями тензорно-скалярной теории тяготения и ОТО заметными, однако в ходе эволюции Вселенной интенсивность скалярного поля уменьшилась до сегодняшнего значения. В настоящее время в доступных наблюдениям слабых гравитационных полях (в постньютоновском приближении) влияние скалярного поля сравнительно мало, но в сильных гравитационных полях (черные дыры, сингулярности, гравитационные волны) оно может оказаться заметным. Отметим, что ТСТТ, в отличие от ОТО, предсказывает гравитационное излучение монопольного (от сферических объектов) и дипольного (в двойных системах) характера, что в связи с проектом по запуску обсерватории на лазерных интерферометрах с целью обнаружения гравитационных волн позволит тестировать ТСТТ и вызвало новую волну исследований нестационарных явлений в неэйнштейновских вариантах гравитационных теорий.

2. КОНФОРМНОЕ СООТВЕТСТВИЕ ТЕОРИЙ ЙБД И ОТО

Роль конформных преобразований в гравитационных теориях обсуждалась Вейлем [31], Паули [32], Петровым [33], Дикке [34] и др. В настоящем и следующем разделах на основании результатов [35, 36] будет показано, что ОТО и ТСТТ находятся в конформном соответствии.

Пусть в одном и том же многообразии заданы два конформно соответствующих пространства V_4 и $\bar{V}_4$, наделенных римановой структурой

$$d\bar{s}^2 = \sigma^2(x)ds^2 = \sigma^2(x)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad \bar{g}_{\mu\nu} = \sigma^2(x)g_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

Помимо известного математического содержания, конформным преобразованиям (2.1) можно придать также и определенный физический смысл, связывая их с масштабными преобразованиями единиц измерения. Идея о связи использования различных систем единиц измерения физических величин с локальными конформными преобразованиями восходит к работам Вейля [31], Эддингтона [37] и Дикке [34]. Естественно предположить, что при конформных преобразованиях неизменными остаются фундаментальные физические константы — скорость света c (для обеспечения локальной лоренц-инвариантности теории), постоянная Планка $\hbar$ и элементарный заряд e. Приняв это, легко установить, как связаны единицы измерения различных физических величин в конформно соответствующих пространствах. В частности,

- для единиц измерения расстояний $\bar{l} = \sigma l$,
- для единиц измерения времени $\bar{t} = \sigma t$,
- для единиц измерения массы $\bar{m} = \sigma^{-1}m$,
- для единиц измерения плотности энергии $\bar{\epsilon} = \sigma^{-4}\epsilon$ и т. п.

Примем также, что преобразования (2.1) не затрагивают 1-форму A_μ — потенциал электромагнитного поля, т. е. $A_\mu = \bar{A}_\mu$ (но $\bar{A}^\mu = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{A}_\nu = (\sigma)^{-2}A^\mu$), в то время как компоненты вектора 4-скорости, например, преобразуются согласно

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{\sigma^{-1}d\bar{s}} = \sigma\bar{u}^\mu, \qquad u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu = \sigma^{-1}\bar{u}_\mu$$

(как и должно было быть в пространстве $\bar{V}_4$, $\bar{u}^\mu\bar{u}_\mu = 1$).

Допустим, что метрический тензор пространства V_4 подчиняется уравнениям тензорно-скалярной теории гравитации, которые получаются варьированием действия

$$W = \int \sqrt{-g}\left[-F(\phi)R + \frac{1}{2}\Phi(\phi)g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu + L_m\right]d^4x. \tag{2.2}$$

Перейдем в конформно соответствующее пространство $\bar{V}_4$ согласно

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{F(\phi)}{F_0}g_{\mu\nu} \quad F_0 = \mathrm{const},$$

тогда

$$\bar{W} = \int \sqrt{-\bar{g}}\left[-F_0\bar{R} + \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\nu}\psi_\mu\psi_\nu + \bar{L}_m\right]d^4x, \tag{2.3}$$

где

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha \sqrt{3F_0 \frac{\acute{F}^2}{F^2} + F_0 \frac{\Phi}{F}}, \quad \acute{F} = \frac{\partial F}{\partial \phi}.$$

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\bar{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2F_0}(\bar{T}^m_{\alpha\beta} + \bar{T}^s_{\alpha\beta}), \quad \bar{g}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha \psi_\beta = 0,$$

$$\bar{T}^s_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \psi_\beta - \frac{1}{2}\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{g}^{\mu\nu}\psi_\mu\psi_\nu.$$

Выберем $F_0 = c^4/16\pi G$, что позволяет сформулировать

• ***Утверждение 1.*** *Тензорно-скалярные теории гравитации (2.2) в конформно соответствующем пространстве с метрическим тензором*

$$\bar{g}_{\mu\nu} = (F(\phi)/F_0)g_{\mu\nu}$$

конформно-эквивалентны ОТО с источником в виде минимально связанного скалярного поля.

Допустим теперь, что метрический тензор $g_{\mu\nu}(x)$ пространства V_4 подчиняется уравнениям теории ЙБД (1.3), (1.4). Соответствующее действие (1.1) есть частный случай (2.2) при $F = y/2\kappa$, $\Phi = \zeta y/8\pi$, $\phi_\mu = y_\mu/y$ и превращается в действие Гильберта–Эйнштейна при $y = y_0$ и $\zeta \to \infty$. В конформно соответствующем пространстве $\tilde{V}_4$ с метрическим тензором

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n g_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

вместо (1.1) имеем

$$\tilde{W} = \int \sqrt{-\tilde{g}}\left[-\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-n}\left(\tilde{R} - \frac{A}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\frac{y_\alpha y_\beta}{y^2}\right) + \tilde{L}_m\right] d^4x, \tag{2.5}$$

где введены обозначения

$$A = (3 + 2\zeta) - 3(1-n)^2, \quad n = 1 - \sqrt{\frac{3 + 2\zeta - A}{3}}. \tag{2.6}$$

Варьируя действие (2.5), получаем

$$\tilde{G}^\alpha_\beta = \kappa\left(\frac{y}{y_0}\right)^{n-1}\tilde{T}^\alpha_\beta + \left(\frac{A}{2} - n(1-n)\right)\frac{y_\beta y^{\tilde{\alpha}}}{y^2} + \delta^\alpha_\beta(n(1-n) -$$

$$- A/4)\frac{y_\mu y^{\tilde{\mu}}}{y^2} + \frac{1-n}{y}[\tilde{\nabla}_\beta y^{\tilde{\alpha}} - \delta^\alpha_\beta \tilde{\nabla}_\mu y^{\tilde{\mu}}]. \tag{2.7}$$

$$(1-n)\tilde{R} - A(1+n)\frac{y_\alpha y^{\tilde{\alpha}}}{2y^2} + A\frac{\tilde{\nabla}_\alpha y^{\tilde{\alpha}}}{y} = 0. \tag{2.8}$$

Комбинируя свертку (2.7)

$$-\tilde{R} = \kappa\left(\frac{y}{y_0}\right)^{n-1}\tilde{T} - \left(\frac{A}{2} - 3n(1-n)\right)\frac{y_\alpha y^{\tilde{\alpha}}}{y^2} - 3(1-n)\frac{\tilde{\nabla}_\alpha y^{\tilde{\alpha}}}{y}$$

с (2.8), получим уравнение, определяющее гравитационный скаляр:

$$\frac{\tilde{\nabla}_\alpha y^{\tilde{\alpha}}}{y} - n\frac{y^{\tilde{\alpha}} y_\alpha}{y^2} = \kappa(1-n)\left(\frac{y}{y_0}\right)^{n-1}\frac{\tilde{T}}{3+2\zeta}. \tag{2.9}$$

Таким образом, в результате конформных преобразований полевые уравнения (1.3) и (1.4) в пространстве $\tilde{V}_4$ превращаются в (2.9) и (2.7).

• ***Замечание 2.*** Переопределим гравитационный скаляр теории ЙБД так, чтобы

$$\frac{\tilde{y}}{y_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-n}, \tag{2.10}$$

и введем новую безразмерную константу связи

$$\tilde{\zeta} = \frac{A}{2(1-n)^2} = -\frac{3}{2} + \frac{3+2\zeta}{2(1-n)^2}. \tag{2.11}$$

В новых обозначениях действие (2.5) принимает вид

$$\tilde{W} = \int\sqrt{-\tilde{g}}\left[-\frac{\tilde{y}}{16\pi}\left(\tilde{R} - \tilde{\zeta}\frac{\tilde{y}^\mu\tilde{y}_\mu}{\tilde{y}^2}\right) + \left(\frac{\tilde{y}}{y_0}\right)^{1-n^2} L_m\right]d^4x.$$

Содержание этого замечания доказывает

• ***Утверждение 2.*** *Уравнения теории ЙБД инвариантны относительно конформных преобразований (2.4) для любых $n \neq 1$, если переопределить гравитационный скаляр и переобозначить константу связи согласно (2.10) и (2.11) (при $n = 2, \tilde{\zeta} = \zeta$).*

3. ЭЙНШТЕЙНОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕОРИИ ЙБД

Рассмотрим частный случай действия (2.5) с показателем степени конформного преобразования (2.4) $n = 1$ ($A = 3 + 2\zeta$). Введем

$$\phi_\alpha = \frac{y_\alpha}{y}\sqrt{\frac{(3+2\zeta)y_0}{16\pi}} \tag{3.1}$$

и перепишем действие (2.5) в виде

$$\tilde{W} = \int \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{\tilde{R}}{2\kappa} + \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \phi_\alpha \phi_\beta + \tilde{L}_m \right] d^4 x. \tag{3.2}$$

Здесь

$$2\kappa = \frac{16\pi}{y_0} = \frac{8\pi G(3+2\zeta)}{2+\zeta}. \tag{3.3}$$

Действию (3.2) соответствуют уравнения

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \kappa(\tilde{T}^m_{\alpha\beta} + \tilde{T}^s_{\alpha\beta}), \quad \tilde{T}^s_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \phi_\beta - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu, \tag{3.4}$$

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \phi_\beta = 0. \tag{3.5}$$

Отметим, что уравнение (3.5) можно получить так же, как следствие ковариантного постоянства $\tilde{G}_{\alpha\beta}$ и физического требования обращения в нуль ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса вещества и негравитационных полей; эйнштейновская константа тяготения перенормирована в соответствии с (3.3).

Таким образом, можно считать доказанным

• ***Утверждение 3.*** *Уравнения теории ЙБД в результате конформного преобразования (2.4) с $n = 1$ превращаются в уравнения ОТО с переобозначенной эйнштейновской константой тяготения и источником в виде суммы тензоров энергии-импульса вещества и негравитационных полей и минимально связанного скалярного поля.*

Иначе говоря, конформные преобразования (2.4) с $n = 1$ переводят теорию ЙБД из *собственного* представления в *эйнштейновское*. Причем *если в собственном представлении пропорционально гравитационному скаляру от точки к точке изменяется константа тяготения G, но остаются неизменными универсальные константы c, $\hbar$ и массы частиц, то в эйнштейновском представлении G, c и $\hbar$ постоянны, но массы частиц в разных пространственно-временных точках различны: $\tilde{m} = (y/y_0)^{-1/2} m$.*

Используя результат Бекенштейна [38], перейдем в другое пространство $\breve{V}_4$ согласно

$$\breve{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} z^{(n+1)/n} [1 + z^{-n}]^2 g_{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

$$\psi = \frac{6}{\tilde{\kappa}} \frac{z^n - 1}{z^n + 1}, \quad n = \sqrt{\frac{3+2\zeta}{3}}, \quad z = (y/y_0)^n. \tag{3.7}$$

В этом случае (1.1) преобразуется в

$$\breve{W} = \int \sqrt{-\breve{g}}\left[-\frac{1}{2\kappa}\breve{R}\left(1 - \frac{1}{6}\kappa\psi^2\right) + \frac{1}{2}\breve{g}^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta + \breve{L}_m\right]d^4x, \tag{3.8}$$

что доказывает

• ***Утверждение 4.*** *Уравнения теории ЙБД преобразованиями (3.6), (3.7) приводятся к уравнениям ОТО с источником в виде негравитационных полей и конформно связанного безмассового скалярного поля ψ, удовлетворяющего уравнению Пенроуза–Черникова–Тагирова [39, 40]*

$$\breve{g}^{\alpha\beta}\breve{\nabla}_\alpha\psi_\beta - \frac{1}{6}\breve{R}\psi = 0. \tag{3.9}$$

• ***Замечание 3***. Отбросим в действии (3.8) слагаемое $(-\breve{R}/2\kappa)$ и добавим хиггсовский потенциал $(\lambda\psi^4/12)$. Полученное в результате выражение

$$\breve{W} = \int \sqrt{-\breve{g}}\left[\frac{1}{12}\breve{R}\psi^2 + \frac{1}{2}\breve{g}^{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta - \frac{1}{12}\lambda\psi^4 + \breve{L}_m\right]d^4x, \tag{3.10}$$

которое по сути определяет действие конформно связанного скалярного поля на фоне искривленного пространства-времени с добавленным хиггсовским потенциалом, преобразуем конформно, подобрав конформный фактор так, чтобы в результате потенциал скалярного поля обратился в константу, а «кинетический» член поглотился добавками, обусловленными конформным фактором. Этим условиям удовлетворяет преобразование

$$\hat{\psi} = \psi/\chi = \epsilon = \mathrm{const}, \quad \psi = \epsilon\chi, \quad \hat{g}_{\alpha\beta} = \chi^2\breve{g}_{\alpha\beta}. \tag{3.11}$$

Введем далее

$$\hat{\kappa} = -\frac{6}{\epsilon^2} \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\lambda\epsilon^2,$$

тогда

$$\hat{W} = \int \sqrt{-\hat{g}}\left[-\frac{1}{2\hat{\kappa}}(\hat{R} + 2\Lambda) + \hat{L}_m\right]d^4x. \tag{3.12}$$

В несколько категоричной форме этот результат можно интерпретировать следующим образом: *вследствие нарушения конформной симметрии конформно связанное скалярное поле индуцирует гравитацию* (см. также [41]).

4. СТАЦИОНАРНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

Современные теории гравитации — это набор математических моделей, которые включают, во-первых, систему дифференциальных уравнений с подобранными адекватно физической задаче граничными и начальными условиями и, во-вторых, алгоритмы перевода математических выводов на язык содержательных высказываний относительно физической картины. Гравитационное взаимодействие универсально, поэтому исследование воздействия гравитации на вещество и другие поля относится к разряду проблем, которые не теряют своей актуальности. Необходимой основой такого изучения является построение разнообразных семейств решений уравнений гравитационных теорий. Особенно важно иметь точные решения, поскольку они позволяют выяснить качественные особенности рассматриваемых задач. Уравнения известных теорий тяготения существенно нелинейны, что, несомненно, затрудняет их точные решения. Тем не менее в настоящее время известно значительное количество точных решений ОТО (см., например, [42]) и сравнительно небольшое число решений теории ЙБД [21]. К сожалению, большая часть этих решений лишена физического смысла и лишь их малая часть сочетается с истинно физическими проблемами. Как правило, наибольший интерес с точки зрения физических и особенно астрофизических приложений представляют задачи, связанные с исследованием гравитационных полей, наделенных определенной симметрией. Чаще всего это поля, соответствующие стационарному или статическому аксиально- или сферически-симметричному пространству-времени.

Уравнения теории ЙБД общековариантны, т. е. гравитационный скаляр и компоненты метрического тензора определяются полевыми уравнениями с точностью до произвольных преобразований координат, иначе говоря, если $y(x)$ и $g_{\mu\nu}(x)$ — решения какой-либо задачи, то решением той же задачи является $\acute{y}(\acute{x})$ и $\acute{g}_{\mu\nu}(\acute{x})$. В общем случае эта неоднозначность устраняется выбором четырех функций, фиксирующих преобразование координат, что обычно именуют выбором координатных условий или, по аналогии с электродинамикой, калибровкой.

• ***Замечание 4.*** Согласно Фоку [43] наиболее подходящими координатными условиями являются условия гармоничности. Удовлетворяющие этим условиям координаты называют гармоническими. В качестве гармонических координат могут служить любые четыре независимые величины, которые удовлетворяют уравнению Д'Аламбера и на больших расстояниях асимптотически совпадают с координатами плоского мира.

Пусть $\{x^\beta\}$ — набор произвольных координат, в которых найдено решение задачи какой-либо метрической теории гравитации. Соответствующие гармонические координаты $\{\bar{x}^\beta\}$ можно найти как решение уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\bar{x}^\gamma}{\partial x^\beta}\right) = 0, \tag{4.1}$$

удовлетворяющее условию асимптотической евклидовости. Из (4.1) следует, что координаты $\{\bar{x}^\alpha\}$ будут гармоническими, если выполнены условия

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}\left(\sqrt{-\bar{g}}\bar{g}^{\alpha\beta}\right) = 0 \quad \text{или равносильное ему} \quad \Gamma^\alpha \equiv \bar{g}^{\beta\gamma}\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = 0, \tag{4.2}$$

которые называют условиями гармоничности.

Гравитационный скаляр $y(x)$ — дополнительная по сравнению с ОТО характеристика гравитационного поля теории ЙБД. Интересно выяснить, можно ли, выразив фактор $\sigma(x)$ конформных преобразований $\bar{g}_{\mu\nu} = \sigma^2 g_{\mu\nu}$ через гравитационный скаляр, подобрать эту связь так, чтобы в одном из конформно соответствующих пространств были удовлетворены уравнения ОТО, а в другом — теории ЙБД. Иначе говоря, существует ли такая связь между $\sigma(x)$ и $y(x)$, которая в результате конформных преобразований превращает уравнения ЙБД в уравнения ОТО. В работах [44, 45] показано, что в стационарном аксиально-симметричном пространстве-времени и в канонических координатах Вейля можно добиться полного совпадения вида части уравнений ОТО и теории ЙБД. В этом случае уравнение, определяющее гравитационный скаляр, интегрируется независимо от остальных, а оставшиеся уравнения при известном $y(x)$ сводятся к квадратурам. Следуя [44, 45], продемонстрируем, как это осуществить.

Стационарные аксиально-симметричные гравитационные поля допускают группу движений с двумя коммутирующими и линейно независимыми векторами Киллинга ξ, η. В соответствии с симметрией задачи выберем координаты так, чтобы

$$x^\mu = (t, x^1, x^2, \varphi), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

где φ — азимутальный угол. Тогда

$$\xi = \xi^\mu \partial/\partial x^\mu, \qquad \xi^\mu = \delta^\mu_0, \quad \eta = \eta^\nu \partial/\partial x^\nu, \quad \eta^\nu = \delta^\nu_3,$$

а метрика стационарного аксиально-симметричного пространства-времени в самом общем виде может быть представлена следующим образом:

$$\begin{gathered}
ds^2 = ds^2_{\mathrm{I}} - ds^2_{\mathrm{II}}, \\
ds^2_{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{2\alpha}\left(dt - q d\varphi\right)^2 - \mathrm{e}^{2\gamma} d\varphi^2, \\
ds^2_{\mathrm{II}} = \mathrm{e}^{2\beta}\left(dx^1 - l dx^2\right)^2 + \mathrm{e}^{2\mu}(dx^2)^2, \\
\sqrt{-g} = \mathrm{e}^{\alpha+\beta+\gamma+\mu}.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Функции α, q, γ, β, l, μ зависят только от «существенных» координат x^1, x^2. Такая метрика инвариантна относительно

1) преобразования

$$x^a = \alpha^a_b \acute{x}^b, \quad \alpha^a_b = \mathrm{const}, \quad a, b, = 0, 3,$$

которое, в частности, включает инверсию $(t, \varphi) \mapsto (-t, -\varphi)$;

2) общих преобразований

$$x^i = x^i(\acute{x}^k), \quad i, k = 1, 2,$$

на двумерной поверхности $x^1 x^2$.

Инвариантность относительно зеркального отражения $(t, \varphi) \mapsto (-t, -\varphi)$ физически означает, что движение источника гравитационного поля является чистым вращением вокруг оси симметрии, т. е. соответствующее этой метрике пространство-время связано с вращающимся телом.

Ортонормированные тетрады общего и координатного базисов метрики (4.3) определяются согласно

$$ds^2 = \eta_{(\alpha)(\beta)} \omega^{(\alpha)} \omega^{(\beta)}, \quad \omega^{(\alpha)} = L^{(\alpha)}_{\beta} dx^{\beta}, \quad dx^{\alpha} = L^{\alpha}_{(\mu)} \omega^{(\mu)},$$

причем

$$\eta_{(\alpha)(\beta)} = \mathrm{diag}\,\{1, -1, -1, -1\}, \quad L^{(\alpha)}_{\beta} L^{\beta}_{(\gamma)} = \delta^{(\alpha)}_{(\gamma)},$$

и имеют вид

$$\begin{gathered} L^{(\mu)}_{\upsilon} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha} & 0 & 0 & -q\,\mathrm{e}^{\alpha} \\ 0 & \mathrm{e}^{\beta} & -l\,\mathrm{e}^{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\gamma} \end{pmatrix}, \\ L^{\upsilon}_{(\mu)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\alpha} & 0 & 0 & q\,\mathrm{e}^{-\gamma} \\ 0 & \mathrm{e}^{-\beta} & l\,\mathrm{e}^{-\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\gamma} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Используя свободу в выборе «существенных» координат x^1, x^2, примем в качестве одного из координатных условий $l = 0$, тогда (4.3) перепишется в виде

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2\alpha} \left(dt - q d\varphi\right)^2 - \mathrm{e}^{2\beta} \left(dx^1\right)^2 + \mathrm{e}^{2\mu} \left(dx^2\right)^2 - \mathrm{e}^{2\gamma} d\varphi^2. \tag{4.5}$$

Преобразуем конформно метрику (4.5) согласно

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{y}{y_0} g_{\mu\nu}$$

и используем оставшуюся калибровочную свободу для того, чтобы окончательно специализировать координаты x^1 и x^2 выбором $\bar{\beta} = \bar{\mu}$. Тогда одна из комбинаций полевых уравнений ЙБД для функции $\bar{D} = y\,\mathrm{e}^{\alpha+\gamma}$ превращается в обычное уравнение Лапласа. Введем, вслед за Вейлем [46], $\acute{x}^2 =$

$\rho(x^1, x^2) = \bar{D}$ и сопряженную ей гармоническую функцию $\acute{x}^1 = z(x^1, x^2)$ в качестве новых координат, назвав их, по аналогии с ОТО, каноническими. В результате вместо (4.5) получим

$$d\bar{s}^2 = \Psi\,(dt - qd\varphi)^2 - \frac{\Phi^2}{\Psi}\left(dz^2 + d\rho^2\right) - \frac{\rho^2}{\Psi}d\varphi^2,$$
$$\Psi = y\,\mathrm{e}^{2\alpha}, \quad \Phi = y\,\mathrm{e}^{\alpha+\beta}. \tag{4.6}$$

В пространстве с метрикой (4.6) электровакуумные уравнения теории ЙБД приобретают достаточно простой вид:

$$\nabla\left(\nabla y/y\right) = 0,$$
$$\frac{2}{\rho}\left(\ln\Phi_y\right)_{,1} = y_{,1}y_{,2}/y^2, \tag{4.7}$$
$$\frac{4}{\rho}\left(\ln\Phi_y\right)_{,2} = (y_{,2}^2 - y_{,1}^2)/y^2;$$

$$\nabla\left(\frac{\nabla\Psi}{\Psi}\right) + \frac{\Psi^2}{\rho^2}\nabla q\nabla q = \frac{2}{\rho}(\nabla A\nabla A - \nabla B\nabla B),$$
$$\nabla\left(\frac{\Psi^2}{\rho^2}\nabla q\right) = \frac{4}{\rho}(A_{,2}B_{,1} - A_{,1}B_{,2}),$$
$$\frac{2}{\rho}\left(\ln\Phi_0\right)_{,1} = \frac{\Psi_{,1}\Psi_{,2}}{\Psi^2} + \frac{\Psi^2}{\rho^2}q_{,1}q_{,2} - \frac{4}{\Psi}(A_{,1}A_{,2} + B_{,1}B_{,2}), \tag{4.8}$$
$$\frac{4}{\rho}\left(\ln\Phi_0\right)_{,2} = \frac{\Psi_{,2}^2 - \Psi_{,1}^2}{\Psi^2} - \frac{\Psi^2}{\rho^2}\left(q_{,2}^2 - q_{,1}^2\right) - \frac{4}{\Psi}(A_{,2}^2 - A_{,1^2} + B_{,2}^2 - B_{,1}^2);$$

$$\nabla\left(\frac{\nabla A}{\Psi}\right) = \frac{1}{\rho}(q_{,1}B_{,2} - q_{,2}B_{,1}),$$
$$\nabla\left(\frac{\nabla B}{\Psi}\right) = \frac{1}{\rho}(q_{,2}A_{,1} - q_{,1}A_{,2}). \tag{4.9}$$

Здесь

$$\nabla = \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}$$

и вместо $\Phi = y\,\mathrm{e}^{\alpha+\beta}$ подставлено

$$\Phi = \Phi_0 \cdot \Phi_y^{(3+2\zeta)}.$$

Итак, система полевых уравнений теории ЙБД для рассматриваемых стационарных аксиально-симметричных гравитационных полей электровакуума распадается на три группы уравнений. Первая группа (4.7) содержит уравнения, определяющие поведение гравитационного скаляра и связанной с ним функции Φ_y, и интегрируется независимо от остальных уравнений системы. Вторая группа (4.8) — это уравнения, определяющие компоненты метрического тензора в (4.6). И, наконец, третья группа (4.9) представляет уравнения Максвелла вне источников с нетрадиционно определенными «потенциалами»

$$\begin{pmatrix} A_{,1} \\ B_{,1} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} F_{(01)} \\ F_{(23)} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A_{,2} \\ B_{,2} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\alpha+\mu} \begin{pmatrix} F_{(02)} \\ F_{(31)} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

которые связаны с обычно вводимым потенциалом $A_\mu = \{A_t, 0, 0, A_\varphi\}$ согласно

$$A_{,1} = -\frac{\partial A_t}{\partial z}, \quad A_{,2} = -\frac{\partial A_t}{\partial \rho},$$
$$B_{,1} = \frac{\Psi}{\rho}\left(\frac{A_\varphi}{\partial \rho} + q\frac{A_t}{\partial \rho}\right), \quad B_{,2} = -\frac{\Psi}{\rho}\left(\frac{A_\varphi}{\partial z} + q\frac{A_t}{\partial z}\right). \tag{4.11}$$

По виду уравнения (4.8) и (4.9) не отличаются от уравнений соответствующей задачи ОТО с той разницей, что в уравнениях ЙБД фигурирует Φ_0 вместо Φ в аналогичных уравнениях ОТО, однако уравнения (4.7) позволяют определить Φ_y и тем самым восстановить $\Phi = \Phi_0 \cdot \Phi_y^{(3+2\zeta)}$. Это наблюдение служит достаточным основанием для того, чтобы высказать

• ***Утверждение 5.*** *Если совокупность y, $\mathrm{e}^{2\alpha}$, $\mathrm{e}^{2\beta}$, q, A, B является решением сформулированной в канонических координатах Вейля стационарной аксиально-симметричной электровакуумной задачи теории ЙБД, то решением аналогичной задачи ОТО будет*

$$\bar{g}_{00} = y\,\mathrm{e}^{2\alpha}, \quad \bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = -y\,\mathrm{e}^{2\beta}/\Phi_y^{3+2\zeta},$$
$$\bar{g}_{33} = -\rho^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha}/y, \quad \bar{g}_{03} = q, \quad \bar{A} = A, \quad \bar{B} = B. \tag{4.12}$$

Верно и обратное утверждение: *в соответствии с (4.12) по известному решению ОТО может быть найдено решение аналогичной задачи теории ЙБД, если предварительно найдены решения уравнений (4.7) — $y(z,\rho)$ и $\Phi_y(z,\rho)$.*

Система (4.7)–(4.9) симметрична относительно одновременной замены $A \leftrightarrow B$ и $q - q$. Это замечание позволяет сформулировать

• ***Утверждение 6.*** *Если найдено электростатическое решение системы уравнений ЙБД ($A \neq 0$, $q = 0$, $B = 0$), то заменой A на B его можно* *переписать для магнитостатического случая ($A = 0$, $q = 0$, $B \neq 0$), и наоборот.*

Соответствующие случаю чистого вращения ($A_t = A_\varphi = 0$) или магнитостатическому случаю ($q = A_t = 0$) (который в соответствии с утверждением 2 эквивалентен электростатическому) уравнения ЙБД приобретают довольно компактный вид. Действительно, введем

$$\mathrm{e}^{\sigma} = \begin{pmatrix} y \\ \sqrt{y} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{\nu} = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{2\alpha} \\ \sqrt{y}\mathrm{e}^{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} q \\ iA_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathrm{e}^{\lambda} = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{\beta} \\ (y\,\mathrm{e}^{\beta})^{1/4} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

и условимся верхнюю строчку столбцов (4.13) относить к стационарной вакуумной задаче, а нижнюю — к магнитостатическому случаю. Нетрудно убедиться, что в этих обозначениях уравнения, определяющие решения обеих задач, записываются единообразно:

$$\begin{gathered}
\triangle\sigma \equiv \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} = 0, \\
\triangle\nu + \frac{\mathrm{e}^{2\nu}}{\rho^2}\nabla\omega\nabla\omega = 0, \\
\nabla\left(\frac{\mathrm{e}^{2\nu}}{\rho^2}\nabla\omega\right) = 0, \qquad (4.14) \\
2\lambda_{,1}/\rho = \nu_{,1}\nu_{,2} - \mathrm{e}^{2\nu}\omega_{,1}\omega_{,2}/\rho^2 + (3+2\zeta)\sigma_{,1}\sigma_{,2}, \\
4\lambda_{,2}/\rho = \left(\nu_{,2}^2 - \nu_{,1}^2\right) - \left(\omega_{,2}^2 - \omega_{,1}^2\right)\mathrm{e}^{2\nu}/\rho^2 + (3+2\zeta)(\sigma_{,2}^2 - \sigma_{,1}^2),
\end{gathered}$$

чем доказывается

• ***Утверждение 7.*** *Если найдено стационарное аксиально-симметричное решение вакуумной задачи теории ЙБД y, $\mathrm{e}^{2\alpha}$, q, $\mathrm{e}^{2\beta}$, то его можно переписать для магнитостатической (электростатической) задачи в виде $\sqrt{y}$, e^{α}, iA_φ, $\mathrm{e}^{\beta/2}$.*

Магнитостатическое (электростатическое) и стационарное вакуумное решение уравнений ЙБД взаимогенерируемы. Утверждение 7 действительно и в ОТО ($\sigma = \mathrm{const}$), в рамках которой сформулировано Боннором [47].

Таким образом, конформные преобразования являются действенным инструментом для взаимной генерации решений как в пределах самой теории ЙБД (см. утверждения 6 и 7), так и между ею и ОТО (см. утверждение 5).

• ***Замечание 5.*** Преобразуем конформно исходную метрику (4.5), переписав ее в канонических координатах Вейля так, чтобы

$$d\tilde{s}^2 = \mathrm{e}^{-p\sigma}[\mathrm{e}^{\nu}\left(dt - qd\varphi\right)^2 - \mathrm{e}^{2\lambda-\nu}\left(dz^2 + d\rho^2\right) - \rho^2\,\mathrm{e}^{-\nu}d\varphi^2], \tag{4.15}$$

где
$$p = \sqrt{3+2\zeta}.$$

Составим из метрических коэффициентов (4.15) матрицу

$$\tilde{g} = \mathrm{e}^{\nu - p\sigma} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ -q & q^2 - \rho^2 \mathrm{e}^{-2\nu} \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

введем также матрицу $\tilde{f}$ согласно

$$\tilde{f}_{,i} = \tilde{g}^{-1} \cdot \tilde{g}_i, \quad i,k = z,\rho. \tag{4.17}$$

Легко проверить, что для стационарных гравитационных полей ($A_\mu = 0$) независимые элементы матричного уравнения

$$\nabla \left(\tilde{g}^{-1} \cdot \nabla \tilde{g}\right) = 0 \tag{4.18}$$

совпадают со вторым и третьим уравнениями системы (4.14), а сумма диагональных элементов (4.18) — с первым уравнением этой системы. Оставшаяся пара уравнений (4.14) переписывается как

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_{ik})_{,z} &= \frac{1}{2}\rho\, \mathrm{Sp}\,(f_{,z} \cdot f_{,\rho}), \\ (\tilde{g}_{ik})_{,\rho} &= -\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{4}\, \mathrm{Sp}\,(f_{,\rho}^2 - f_{,z}^2). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Формально (4.18) и (4.19) имеют вид, совпадающий с соответствующими уравнениями ОТО (для сравнения см. [48–50]). Для электровакуумной задачи при условии $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$ ($F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля) уравнения (4.18) и (4.19) не меняют своей формы, если вместо $\tilde{g}$ ввести расширенную матрицу

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \mathrm{e}^{-p\sigma} A_\mu A_\nu & \mathrm{e}^{-p\sigma} A_\mu \\ \mathrm{e}^{-p\sigma} A_\nu & \mathrm{e}^{-p\sigma} \end{pmatrix}.$$

Матричная форма уравнений теории ЙБД позволяет использовать для их решения, с одной стороны, методы обратной задачи рассеяния, разработанные для аналогичных задач ОТО в [48–51] и усовершенствованные Алексеевым [52, 53], а с другой — использовать преобразования Бэклунда, которые работают подобно нелинейным операторам рождения, генерирующим гравитационные поля на произвольно выбранном (чаше всего плоском) фоне [54, 55].

• ***Замечание 6.*** В канонических координатах z и ρ группа уравнений (4.7) интегрируется независимо. Было показано, что в электровакуумном случае подстановкой $y = \mathrm{e}^{\sigma}$ уравнение, определяющее поведение гравитационного скаляра, сводится к двумерному уравнению Лапласа

$$\triangle\sigma = 0.$$

Нетрудно убедиться, что если известно какое-либо решение σ_0 этого уравнения, то можно найти целый класс новых решений согласно

$$\sigma = \sigma_0 + A_n L_n \sigma_0, \quad L_n = k^2 \frac{\partial^n}{\partial z^n}, \quad k = \mathrm{const}.$$

Действительно, оператор Лапласа коммутирует с оператором L_n, поэтому σ наряду с фоновым σ_0 будет решением уравнения Лапласа. Практически предложенный алгоритм эксплуатирует известное свойство гармонических функций — производная гармонической функции есть гармоническая функция.

Пример. В качестве фонового возьмем

$$\sigma_0 = a_0/\sqrt{z^2+\rho^2}.$$

По индукции легко доказать, что

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = (-1)^n \frac{n!}{(z^2+\rho^2)^{(n+1)/2}} P_n\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right).$$

Теперь ясно, что выражение

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \quad r = \sqrt{z^2+\rho^2},$$

определяет поведение гравитационного скаляра $y = \mathrm{e}^{\sigma}$.

В некоторых случаях интегрирование системы (4.7) облегчается введением комплексной переменной $\xi = z + i\rho$, что вместо (4.7) дает

$$2\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi\partial\xi^*} = \frac{1}{\xi-\xi^*}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma}{\partial\xi^*}\right),$$

$$\frac{4}{\xi-\xi^*}\frac{\partial\ln\Phi_y}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\right)^2,$$

$$\frac{4}{\xi-\xi^*}\frac{\partial\ln\Phi_y}{\partial\xi^*} = -\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi^*}\right)^2.$$

5. СТАТИЧЕСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ

Согласно [57] решение уравнений теории ЙБД для статических сферически-симметричных гравитационных полей можно представить в виде

$$ds^2 = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{1/\eta} dt^2 - \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{(1-a)/\eta} [d\xi^2 + (\xi^2-1)d\Omega^2],$$

$$y = y_0\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{a/2\eta}, \quad |\xi| > 1, \quad a, \eta = \text{const}, \quad y_0 = \frac{2(2+\zeta)}{G(3+2\zeta)}, \tag{5.1}$$

$$\eta^2 = (a-1)^2 + a + \frac{\zeta}{2}a^2.$$

В координатах кривизны $x^\mu = \{t, r, \theta, \varphi\}$

$$r = r_0\sqrt{\xi^2-1}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{(1-a)/2\eta},$$

$$ds^2 = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{1/\eta} dt^2 - \frac{\xi^2-1}{\left(\xi-(1-a)/\eta\right)^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Перепишем последнее в параметрическом виде, известном как решение Гекмана (см. [15]), используя

$$\tau = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{1/2h}, \quad h = \eta/2(1-a).$$

После простых преобразований получим

$$r = \frac{2r_0}{\sqrt{\tau}\,(\tau^{-h}-\tau^{h})}, \quad y = y_0\tau^{-ha/\eta}, \quad \left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{1/\eta} = \tau^{2h/\eta},$$

$$\frac{\xi^2-1}{\left(\xi-(1-a)/\eta\right)^2} = \frac{16h^2}{\left[\tau^h(1+2h)-\tau^{-h}(1-2h)\right]^2}.$$

В однородных координатах $x^\mu = \{t, R, \theta, \varphi\}$

$$\frac{R}{R_0} = \xi + \sqrt{\xi^2-1}, \quad \xi = \frac{1+(R_0/R)^2}{2R_0/R},$$

имеем

$$y = y_0\left(\frac{1+R_0/R}{1-R_0/R}\right)^{a/\eta},$$

$$ds^2 = \left(\frac{1-R_0/R}{1+R_0/R}\right)^{2/\eta} - \left(1+\frac{R_0}{R}\right)^4\left(\frac{1-R_0/R}{1+R_0/R}\right)^{2(a-1+\eta)/\eta}(dR^2+R^2d\Omega^2). \tag{5.2}$$

• ***Замечание 7.*** Для определения констант a и η выпишем уравнения ЙБД внутри статической сферически-симметричной самогравитирующей конфигурации, вещество которой — идеальная жидкость с плотностью энергии ε и давлением P. В однородных координатах

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2\alpha(R)}dt^2 - \mathrm{e}^{2\beta(R)}(dR^2 + R^2 d\Omega^2)$$

полевые уравнения теории ЙБД записываются в виде

$$\frac{\chi_1}{\chi} = \frac{v\chi}{R^2}\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}, \quad \alpha_1 = \frac{m\chi}{R^2}\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}, \quad \beta_1 = -\frac{u\chi}{R^2}\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}, \quad \chi = \frac{8\pi}{y},$$

$$v_1 = R^2\,\mathrm{e}^{\alpha+3\beta}\frac{\varepsilon - 3P}{3+2\zeta}, \quad m_1 = R^2\,\mathrm{e}^{\alpha+3\beta}\frac{\varepsilon(2+\zeta) + 3P(1+\zeta)}{3+2\zeta},$$

$$u_1 = R^2\,\mathrm{e}^{\alpha+3\beta}\frac{\varepsilon(1+\zeta) - \zeta P}{3+2\zeta} + \frac{m-(u+v)}{R}.$$

Интегрируя их вне распределения масс ($\varepsilon = P = 0$) с учетом обозначений

$$v(R) = v_s, \quad m(R) = m_s, \quad R \geq R_s$$

(индексом s снабжены значения величин на границе конфигурации R_s), получим внешнее решение задачи в уже известном виде (5.2), но с определенным значением констант

$$a = \frac{v_s}{m_s} \quad \text{и} \quad R_0 = \frac{\eta m_s}{2}, \quad \eta^2 = (a-1)^2 + a + \frac{\zeta}{2}a^2.$$

Система этих уравнений позволяет найти как массу источника поля

$$M = 4\pi\int_0^{R_s} R^2\,\mathrm{e}^{\alpha+3\beta}\left[\varepsilon + 3P\frac{1+\zeta}{3+2\zeta}\right]dR + \frac{4\pi(3+2\zeta)}{2+\zeta}m(0),$$

где

$$m(0) = \lim_{R\to 0}\alpha_1\frac{R^2}{\chi}\,\mathrm{e}^{\alpha+\beta},$$

так и массу, эквивалентную энергии скалярного поля, определив ее так, чтобы

$$\chi_{R\to\infty} \approx \chi_0\left(1 - \frac{2M_{\text{sc.f}}}{R}\right).$$

Тогда

$$M_{\text{sc.f}} = \frac{4\pi}{2(2+\zeta)}\int_0^{R_s} R^2\,\mathrm{e}^{\alpha+3\beta}\left[\varepsilon - 3P\right]dR + \frac{2\pi(3+2\zeta)}{2+\zeta}v(0),$$

где
$$v(0) = \lim_{R\to 0} \frac{\chi_1}{\chi}\frac{R^2}{\chi}\,\mathrm{e}^{\alpha+\beta}.$$

Нетрудно получить формулу для массы самогравитирующего объекта по распределению давления внутри него. Действительно, из (5.2) и (1.8) следует
$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha+\beta}}{\chi} = -\frac{B}{2R^2} + \frac{1}{\chi_0},$$
где
$$B = \frac{2R_0^2}{\chi_0} = \frac{G\eta^2 M^2(2+\zeta)}{8\pi(3+2\zeta)}, \quad R_0 = \frac{\eta GM}{2c^2}, \quad \chi = \frac{8\pi}{y}.$$
С другой стороны, уравнения внутренней задачи (см. начало этого замечания) дают
$$B \equiv R^3 \frac{d}{dR}\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha+\beta}}{\chi}\right) = 2\int_0^{R_s} PR^3\,\mathrm{e}^{\alpha+3\beta} dR,$$
откуда
$$M^2 = \frac{16\pi(3+2\zeta)}{\eta^2 G(2+\zeta)}\int_0^{R_s} PR^3\,\mathrm{e}^{\alpha+3\beta} dR,$$
что в пределе $\eta\to 1$, $\zeta\to\infty$ совпадает с формулой, полученной для аналогичного случая ОТО [56].

Впервые решение (5.2) было найдено Брансом [18], однако как Бранс, так и Йордан [15] ошибочно предполагали a универсальной константой теории, в то время как она меняется от конфигурации к конфигурации вместе с параметром семейства самогравитирующих тел (чаще всего в качестве такого параметра выбирают центральное значение числа барионов или центральную плотность).

Как было отмечено, ОТО является частным случаем теории ЙБД в пределе $\zeta\to\infty$ и $y = y_0$. Нетрудно заметить, что при $y = y_0$ функция v, а вместе с ней и a становятся равными нулю. Таким образом, можно утверждать, что решение теории ЙБД (5.2) при $a = 0$ и $\eta = 1$ превращается в решение ОТО, иначе говоря, решения ОТО — это частные решения теории ЙБД при $\zeta\to\infty$ и $y = y_0$ или $a = 0$ и $\eta = 1$.

В гармонических координатах $x^\mu = \{t, \bar r, \theta, \varphi\}$ уравнение, определяющее координату $\bar r$ через ξ, после несложных преобразований, использующих часть полевых уравнений теории (см. [57]), приводится к виду
$$(\xi^2-1)\frac{d^2\bar r}{d\xi^2} + (2\xi + a/\eta)\frac{d\bar r}{d\xi} - 2\bar r = 0,$$
частное решение которого есть
$$\bar r = \xi + \frac{a}{2\eta},$$

поэтому общим решением будет (см., например, [58])

$$\bar{r} = \left(\xi + \frac{a}{2\eta}\right)\left[C_1 + C_2 \int \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{a/2\eta} \frac{d\xi}{(\xi^2-1)(\xi+a/2\eta)}\right].$$

В ОТО ($a = 0,\ \eta = 1$)

$$\bar{r} = \xi\left[C_1 + \frac{C_2}{2}\,\ln\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)\right].$$

• ***Замечание 8***. В работе [43] в решении статических уравнений ОТО для сосредоточенной массы содержится неточность — константа C_2 предыдущего соотношения положена равной нулю. Ошибочность этого допущения обсуждалась Асановым [59] и независимо от него Авакяном [60], который показал, что в гармонических координатах внутреннее и внешнее решения сшиваются только при $C_2 \neq 0$.

Однородные координаты $x^\mu = \{t, R, \theta, \varphi\}$, помимо точного решения, описывающего гравитационное поле сосредоточенной нейтральной массы, позволяют найти также точное электровакуумное решение уравнений теории ЙБД для случая, когда источником гравитационного поля является заряженное тело (аналог решения Рейснера–Нордстрема ОТО) [61, 62]. Подставив метрику

$$ds^2 = e^{2\alpha(R)}dt^2 - e^{2\beta(R)}\left[dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

в уравнения ЙБД, получим систему

$$\begin{gathered}
\Phi_1 + \Psi\Phi = 0,\\
\Psi_1 + \Psi^2 - \Psi/R = 0,\\
Z_1 + \Psi\,(Z - 1/R) = 0,\\
Z_1 - \beta_1\Phi + \alpha_1^2 + (Z-\Phi)/R - \zeta\Phi^2/2 = 0,\\
\Phi = \frac{y_1}{y},\quad Z = \alpha_1 + \beta_1 + 2/R,\quad \Psi = Z + \Phi,
\end{gathered} \tag{5.3}$$

с решением

$$y = y_0\left(\frac{R+R_0}{R-R_0}\right)^{a/\eta},$$

$$e^{2\alpha} = \frac{1}{F^2}\left(\frac{R-R_0}{R+R_0}\right)^{1/\eta},$$

$$\mathrm{e}^{2\beta} = F^2 \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right)^2 \left(\frac{R - R_0}{R + R_0}\right)^{2(a-1)/\eta},$$

$$2R_0 = \eta\sqrt{m^2 - Q^2}, \quad q = 1 + \sqrt{1 - \frac{\eta^2 Q^2}{R_0^2(1-a)^2}}, \tag{5.4}$$

$$2F = q + (2 - q)\left(\frac{R - R_0}{R + R_0}\right)^{(2-a)/\eta}.$$

Найдем гармонические координаты $\bar{x}^\mu$, соответствующие метрической форме (4.6) с отброшенным недиагональным слагаемым $(q = 0)$. Подставив метрику (4.6) в уравнение (4.1), получим $\bar{x}^0 = t$, $\bar{x}^3 = \varphi$, а остальные $\bar{x}^i$ $(i = 1, 2)$ подчиняются уравнению

$$\triangle \bar{x}^i = \nabla \bar{x}^i \frac{\nabla y}{y}, \tag{5.5}$$

для решения которого необходимо иметь подходящее y из $\triangle\sigma \equiv \triangle(\ln y) = 0$ (см. замечание 5). В вытянутых сфероидальных координатах

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (r_+ \pm r_-)/2k, \quad r_\pm^2 = (z + k)^2 + \rho^2,$$
$$z = kuv, \quad \rho^2 = k^2(u^2 - 1)(1 - v^2), \quad k = \mathrm{const}, \tag{5.6}$$

регулярное при $v = \pm 1$ решение этого уравнения с граничным условием $\sigma(u \to \infty, v = 0) = 0$ имеет вид

$$\sigma(u, v) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l Q_l(u) P_l(v), \quad |u| < 1, \quad |v| \le 1,$$

P_l и Q_l — полиномы Лежандра 1-го и 2-го рода. Приняв $a_{l\ge 1} = 0$ и подставив

$$y = y_0 \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^{a_0/2}$$

в (5.5), после разделения переменных и в соответствии с определением гармонических координат (см. замечание 3) получим

$$\bar{x}^1 = A\left(u + \frac{a_0}{2}\right), \quad \bar{x}^2 = v = \cos\theta.$$

Константы A и a_0 можно определить, используя (4.1) и решение (5.2) как опорное, что дает

$$\bar{x}^1 \equiv \bar{r} = R\left(1 + \frac{R_0^2}{R^2}\right) + \frac{a}{\eta} R_0 = 2R_0\left(u + \frac{a}{2\eta}\right). \tag{5.7}$$

Вышесказанное позволяет, во-первых, конкретизировать значение константы k сфероидальных координат в (5.6):

$$k = 2R_0$$

и, во-вторых, ввести координату

$$x = \bar{r} + 2R_0 - \frac{aR_0}{\eta},$$

которую будем называть модифицированной координатой кривизны, поскольку при переходе к ОТО ($a = 0,\ \eta = 1$) и равном нулю заряде она превращается в радиальную координату решения Шварцшильда.

Перепишем теперь (5.4) в вытянутых сфероидальных координатах u, v:

$$y = y_0 f^{-a/2\eta},$$

$$ds^2 = \frac{1}{F^2} f^{1/\eta} dt^2 - k^2 F^2 f^{(a-1)/\eta} \left[du^2 + \frac{u^2-1}{1-v^2} dv^2 + (u^2-1)(1-v^2) d\varphi^2 \right], \tag{5.8}$$

$$f = \frac{u-1}{u+1}, \quad k = 2R_0 = \eta\sqrt{m^2 - Q^2}, \quad 2F = q + (2-q) f^{(2-a)/2\eta},$$

$$q = 1 + \sqrt{1 + (2\eta Q/k(2-a))^2}, \quad E = \frac{1}{F^2} \frac{Q}{k^2(u^2-1)} f^{(1-a)/\eta}.$$

Здесь E — единственная неисчезающая компонента напряженности электрического поля, связь координат $u,\ v$ с гармонической координатой $\bar{r}$, модифицированной координатой кривизны x, однородной координатой R и каноническими координатами Вейля z, ρ задается соотношениями

$$ku = \bar{r} - \frac{ak}{2\eta} = x - k = R\left(1 + \frac{R_0^2}{R^2}\right) = \frac{r_+ + r_-}{2}, \quad v = \cos\theta,$$

как и прежде, $r_\pm = (z \pm k)^2 + \rho^2$.

• ***Замечание 9.*** В ОТО решение Рейснера–Нордстрема в координатах кривизны можно переписать также и в виде

$$ds^2 = \frac{(r-m)^2 - 4r_0^2}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{(r-m)^2 - 4r_0^2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

$$E = \frac{Q}{r^2}, \quad 2r_0 = \sqrt{m^2 - Q^2}.$$

Координата кривизны ОТО r и однородная координата R связаны соотношением

$$r = R\left(1 + \frac{Gm}{2R}\right)^2, \quad R = \frac{r - Gm}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{Gm}{r - Gm}\right)^2}\right].$$

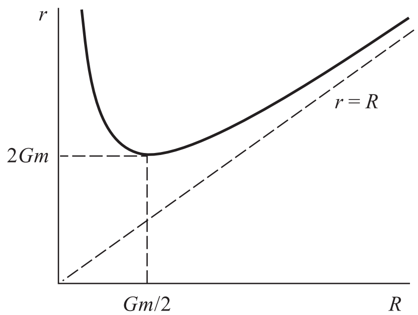

Рис. 2

В точке $R_0 = Gm/2$ функция $r = r(R)$ имеет минимум (точка максимума $R_0 = -Gm/2$ находится в нефизической области), поэтому (см. рис. 2)

$$R = \begin{cases} 0, r & \text{при } r \to \infty, \\ Gm/2 & \text{при } r = 2Gm. \end{cases}$$

Таким образом, область $2Gm \le r < \infty$ в однородных координатах отображается дважды, а область $0 \le r < 2Gm$ не отображается вовсе.

6. ГЕНЕРАЦИЯ НОВЫХ РЕШЕНИЙ

Проиллюстрируем результаты предыдущих разделов примерами генерации новых решений ОТО по известным решениям теории ЙБД.

1. Если действовать согласно содержанию утверждения 3, то конформное преобразование решения (5.8) выдаст новое решение ОТО для гравитационного поля заряженного сферического тела с минимально связанным скалярным полем:

$$d\bar{s}^2 = \frac{f^n}{F^2}dt^2 - k^2F^2f^{-n}(u^2-1)\left[\frac{du^2}{u^2-1} + d\Omega^2\right], \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

где

$$f = \frac{u-1}{u+1}, \quad F = (1+m/k) + (1-m/k)\,f^n, \quad k^2 = m^2 - Q^2.$$

В новых переменных $\tau = kt,\ x = -\ln f/2$, а также с $H = kF$ оно переписывается в виде

$$d\bar{s}^2 = \frac{\mathrm{e}^{-2nx}}{H^2}d\tau^2 - \frac{H^2\,\mathrm{e}^{2nx}}{\mathrm{sh}^2 x}\left[\frac{dx^2}{\mathrm{sh}^2 x} + d\Omega^2\right], \tag{6.1}$$

причем потенциал скалярного поля

$$\Phi = 2x\sqrt{1-n^2}, \quad n \le 1.$$

В частном случае $n = 1$ (6.1) совпадает с решением Рейснера–Нордстрема, а в отсутствие заряда ($H = k$) — с решением Станюковича и Мельникова [63].

2. Другая возможность генерации нового решения ОТО предоставляется содержанием утверждения 5. В качестве известного решения теории ЙБД, как

и в предыдущем пункте, выберем (5.8). Действуя согласно утверждению 5, в первую очередь определим функцию Φ_y, проинтегрировав уравнения (4.7), используя выражение для гравитационного скаляра из (5.8), что дает

$$\Phi_y^{2(3+2\zeta)} = \left(\frac{\bar{R}^2 - k^2}{r_+ - r_-}\right)^{1-n^2},$$

$$\bar{R} = \frac{r_+ + r_-}{2}, \quad r_\pm = (z \pm k)^2 + \rho^2, \quad \bar{k} = \frac{\sqrt{m^2 - Q^2}}{n},$$

после чего предписания утверждения 5 позволяют без всякого труда найти новое электровакуумное решение ОТО [64]:

$$d\bar{s}^2 = \frac{k^2}{F^2} f_{\bar{R}}^n dt^2 - \frac{F^2}{k^2} f_{\bar{R}}^{-n} \left[\left(\frac{\bar{R}^2 - k^2}{r_+ - r_-}\right)^n (dz^2 + d\rho^2) + \rho^2 d\varphi^2\right] \tag{6.2}$$

с напряженностью электрического поля

$$E = \frac{k^2 Q}{F^2(\bar{R}^2 - k^2)} \left(\frac{\bar{R} - k}{\bar{R} + k}\right)^n \left(\frac{\bar{R}^2 - k^2}{r_+ r_-}\right)^{(1-n^2)/2},$$

где

$$f_{\bar{R}} = \frac{\bar{R} - k}{\bar{R} + k}, \quad F = \frac{2r_0 + m}{2n}\left[1 + \frac{2r_0 - m}{2r_0 + m}\left(\frac{\bar{R} - k}{\bar{R} + k}\right)^n\right].$$

Как и должно было быть, при $n = 1$ оно обращается в решение Рейснера–Нордстрема, а в отсутствие заряда $Q = 0$ совпадает с аксиально-симметричным решением Зипоя [65], что служит основанием для того, чтобы считать (6.2) аксиально-симметричным. Это подтверждается наличием квадрупольного момента D в асимптотическом поведении g_{00} на больших расстояниях:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{D}{r^3} P_2(\cos\theta) + \ldots, \quad D = \frac{8r_0^2}{3}\frac{n^2 - 1}{n^2} m.$$

В вытянутых сфероидальных координатах x, y, которые определяются согласно

$$\bar{k}(x^2 - 1)(1 - y^2) = r^2\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\sin^2\theta,$$

$$\bar{k}xy = (r - m)\cos\theta, \quad r = \bar{R} + m,$$

решение (6.2) переписывается в виде

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{F^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n dt^2 - F^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n (x^2 - 1)(1 - y^2) d\varphi^2 -$$

$$- F^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}\right)^{n^2} (x^2 - y^2)\left[\frac{dx^2}{x^2 - 1} + \frac{dy^2}{1 - y^2}\right], \tag{6.3}$$

где

$$F = \frac{2r_0 + m}{2n}\left[1 + \frac{2r_0 - m}{2r_0 + m}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n\right],$$

$$E = \frac{Q}{F^2(x^2-1)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n\left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right)^{(1-n^2)/2}.$$

• ***Замечание 10.*** Решение (6.3) выводится также использованием метода Эрнста [66, 67], что лишний раз подтверждает справедливость утверждения 5. Действительно, согласно Эрнсту решением замкнутой системы уравнений ОТО (уравнения (4.8) при $q = 0$ и $y = y_0$)

$$\psi\triangle\psi = \nabla\psi\nabla\psi + 2\psi\nabla A_t\nabla A_t,$$

$$\psi\nabla A_t = \nabla\psi\nabla A_t$$

является

$$\psi = \frac{\xi^2 - 1}{(\xi + 1/\sqrt{1-B^2})^2}, \quad A_t = \frac{B}{\sqrt{1-B^2}+1},$$

где B — константа, а ξ — решение уравнения Эрнста

$$(\xi^2 - 1)\triangle\xi = 2\xi\nabla\xi\nabla\xi.$$

Легко убедиться, что последнему уравнению удовлетворяет

$$\xi = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{(x+1)^n - (x-1)^n},$$

которое приводит к (6.3). (Уравнению Эрнста удовлетворяет также и $\xi = u$, соответствующее решению Рейснера–Нордстрема.)

7. НОВОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОТО

Отождествление пульсаров с вращающимися сверхплотными звездами считается установленным фактом, поэтому актуальность задачи о гравитационном поле стационарно вращающейся звезды не вызывает сомнений. На сегодняшний день эту задачу нельзя отнести к разряду точно решаемых. Результаты приближенных исследований, рассматривающих вращение как малое возмущение [68–72], вызывают скептическое отношение хотя бы потому, что в нелинейных теориях метод возмущений таит в себе скрытые опасности, в частности, существенный вопрос о сходимости ряда по параметру возмущения остается открытым. Пригодность приближенных методов можно оценить, имея точное решение проблемы, причем, для того чтобы иметь физический смысл, оно должно быть регулярным на оси симметрии и асимптотически-плоским на больших расстояниях от источника, кроме того, внутреннее и соответствующее внешнее решения должны непрерывно сшиваться на границе конфигурации. Ни одно из ограниченного числа известных сегодня решений этими свойствами не обладает. Попытки сшить популярное решение Керра [73] с каким-либо внутренним наталкиваются на существенные трудности [74]. Надо полагать, что решение Керра может быть сшито лишь с внутренним решением для вращающегося шара, т. е. описывает его внешнее гравитационное поле и, следовательно, поле сбросившего «волосы» сколлапсировавшего объекта. Менее известный класс решений Томиматсу–Сато [75] в отсутствие вращения сохраняет аксиальную симметрию, скорее всего связанную с остаточными напряжениями внутри звезды, что не поддается разумной физической интерпретации.

В настоящем разделе на основании результатов [76–78] получено новое решение осесимметричной стационарной задачи ОТО. Характерным здесь является необычный выбор координат и предположение о потенциальности поля вектора угловой скорости конгруэнции мировых линий, образующих сопутствующую систему отсчета.

При решении стационарных осесимметричных задач метрику калибруют, рассчитывая использовать хорошо разработанные методы [42, 48–55, 66, 67], причем традиционно удобным считается выбор канонических координат Вейля. Для внутренних задач, которые обычно решаются численно, вейлевские координаты теряют свою естественность. Одно из немногих точных решений для несжимаемой жидкости с твердотельным вращением найдено Валквистом [79] в обобщенных эллипсоидальных координатах. Бонанос и Склавенитис [80, 81] предложили использовать свободу калибровки так, чтобы часть метрических коэффициентов играла роль координат. Выберем вслед за ними «существенные» координаты так, чтобы

$$x^1 \equiv \rho = g_{33}, \quad x^2 \equiv \Phi = g_{00}, \tag{7.1}$$

и перепишем (4.3) в этих координатах:

$$\begin{gathered} ds^2 = \Phi^2(dt - qd\varphi)^2 - \mathrm{e}^{2\alpha(\rho,\Phi)}(d\rho - ld\Phi)^2 - \mathrm{e}^{2\beta(\rho,\Phi)}d\Phi^2 - \rho^2 d\varphi^2, \\ q = q(\rho,\varphi), \quad l = l(\rho,\varphi). \end{gathered} \tag{7.2}$$

Нетрудно понять, что такой выбор координат достаточно естественен. Действительно, в слабых гравитационных полях $\Phi \approx 1 + 2\psi$ и оказывается пропорциональным ньютоновскому потенциалу ψ, а ρ локально совпадает с цилиндрической координатой плоского мира. Координаты обеспечивают нумерацию различных точек-событий, а выбор той или иной системы координат диктуется соображениями удобства. Компоненты векторных или тензорных величин, которые являются объектами теории, зависят от способа нумерации точки, т. е. от используемой системы координат. Для сопоставления этих компонент с наблюдаемыми величинами необходимо задать систему отсчета. Обычно координатная система данного вида метрики выбором определенной конгруэнции времениподобных линий привязывается к системе отсчета. В сопутствующей системе отсчета (СО) физически измеримые величины (наблюдаемые) не меняются при замене одного набора часов другим, т. е. хронометрически инвариантны, а 4-скорость имеет единственную отличную от нуля компоненту

$$u^\mu = \left\{ \frac{1}{\Phi},\ 0,\ 0,\ 0 \right\},$$

поэтому она оказывается подходящей при решении широкого круга задач.

Рассмотрим конфигурацию, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega = d\varphi/dt$ вокруг оси, совпадающей с осью симметрии. Предположим, что вещество конфигурации – идеальная жидкость с

$$T^\mu_\nu = (\varepsilon + P) u^\mu u_\nu - P \delta^\mu_\nu$$

и однопараметрическим уравнением состояния

$$P = P(\varepsilon).$$

В метрике (7.2) и в сопутствующей СО из условия обращения в нуль ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса следует

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \Phi} = -\frac{\varepsilon + P}{\Phi}, \tag{7.3}$$

откуда получаем, что $P = P(\Phi)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\Phi)$. Иначе говоря, изобарическая ($P = \mathrm{const}$) поверхность совпадает с поверхностью постоянного значения $\Phi = \Phi_0$, что наглядно демонстрирует преимущества используемых координат и сопутствующей СО. Таким образом, изобарическая поверхность есть сфера радиусом Φ_0, а это означает, что абсолютная величина ускорения свободного падения пробного тела (см. [82])

$$a = \sqrt{F_\mu F^\mu} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta}}{\Phi}, \quad F_\mu = 2 u^\alpha u_{[\mu,\alpha]}$$

на поверхности $\Phi = \Phi_0$ также постоянна, поэтому и $\beta = \beta(\Phi)$. Введем новый потенциал $\psi = \psi(\rho, \Phi)$ согласно

$$\begin{gathered} q_{,1} = b\rho(\psi_{,2} + l\psi_{,1})\,\mathrm{e}^{\alpha-\beta}/\Phi^3, \\ q_{,2} + l q_{,1} = b\rho\psi_{,1}\mathrm{e}^{\beta-\alpha}/\Phi^3, \quad b = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{7.4}$$

Тогда для вектора угловой скорости конгруэнции мировых линий, образующих сопутствующую систему отсчета [82]

$$\omega^\alpha \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\bigl(u_{[\beta,\gamma]} + u_{[\beta}F_{\gamma]}\bigr)u_\delta,$$

имеем

$$\omega_i = \frac{b\psi_{,i}}{2\Phi^2}, \quad i = 1, 2 \tag{7.5}$$

(здесь $(\dots)_{,1} = \partial(\dots)/\partial\rho$, $(\dots)_{,2} = \partial(\dots)/\partial\Phi$), что превращает в тождество одно из уравнений Эйнштейна и дает

$$\frac{b\psi_{,1}}{\Phi^3} = \frac{\partial\omega_2}{\partial\rho} - \frac{\partial\omega_1}{\partial\Phi},$$

откуда, основываясь на предположении о потенциальности поля вектора ω, получим

$$\psi_{,1} = 0, \quad \omega = b\mathrm{e}^{-\beta}\psi_{,2}/2\Phi^2, \quad q_{,2} + lq_{,1} = 0. \tag{7.6}$$

Учет предыдущих соотношений и двух следующих физических требований:

1) в малой окрестности оси симметрии пространство-время должно быть псевдоевклидовым (условие регулярности оси):

$$\left.\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha}(\rho - qq_{,1}\Phi^2)^2 + \mathrm{e}^{-2\beta}(l\rho - q^2\Phi)^2}{\rho^2 - q^2\Phi^2}\right|_{\rho\to 0} \longrightarrow 1;$$

2) с точки зрения удаленного покоящегося наблюдателя угловая скорость локально не вращающихся наблюдателей должна быть конечной на оси вращения (условие конечности угловой скорости):

$$\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{q\Phi^2}{\rho^2 - q^2\Phi^2} = \mathrm{const} \Longrightarrow q(\rho \to 0) \sim \rho^2$$

позволяет значительно упростить систему эйнштейновских уравнений задачи и переписать их в виде

$$\beta_{,2} = L(\Phi) + 2\Phi\,\mathrm{e}^{2\beta}[\omega^2 - 2\pi(\varepsilon + 3P)]; \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} L_{,2} - L\bigl\{L/2 + 1/\Phi + 2\Phi\,\mathrm{e}^{2\beta}[\omega^2 - 2\pi(\varepsilon + 3P)]\bigr\} = \\ = 2\,\mathrm{e}^{2\beta}[\omega^2 - 4\pi(\varepsilon + P)], \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\omega_{,2}/\omega + L - 1/\Phi = 0, \tag{7.9}$$

$$q_{,1} = -2\rho e^{\alpha}\omega/\Phi, \quad q_{,2} + lq_{,1} = 0, \tag{7.10}$$

$$\frac{dP}{d\Phi} = -(\varepsilon + P)/\Phi; \tag{7.11}$$

$$\begin{gathered} e^{-2\alpha} = 1 - \rho^2 f(\Phi), \quad l = \frac{1}{2}\rho L(\Phi), \\ f(\Phi) = -8\pi P - \omega^2 + L\, e^{-2\beta}(4 + L\Phi)/4\Phi. \end{gathered} \tag{7.12}$$

Итак, решение стационарной осесимметричной задачи ОТО внутри распределения масс можно найти как результат интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (7.7)–(7.11), учитывая алгебраические соотношения (7.12) и уравнение состояния вещества $P = P(\varepsilon)$.

Найдем вакуумное $(\varepsilon = P = 0)$ решение. Ключевое уравнение (7.8) подстановкой $y = L\sqrt{a^4 - b^2\Phi^4}/\Phi$ сводится к уравнению Риккати

$$y_{,2} = \frac{\Phi(y^2 + 4b^2)}{2\sqrt{a^4 - b^2\Phi^4}},$$

интегрируя которое для $L = L(\Phi)$ найдем

$$L = \frac{2\Phi}{\sqrt{a^4 - b^2\Phi^4}} \frac{a^2(1 - k^2b^2) + (1 + k^2b^2)\sqrt{a^4 - b^2\Phi^4}}{2ka^2 - (1 + k^2b^2)\phi^2}, \tag{7.13}$$

где a и k — новые константы. Используя выражение (7.13) и уравнения (7.7) и (7.10), легко получить

$$\begin{aligned} e^{\beta} = 2Ca^2 \frac{1 + k^2b^2}{\sqrt{a^4 - b^2\Phi^4}} \times \\ \times \frac{(1 - k^2b^2)\sqrt{a^4 - b^2\Phi^4} + a^2(1 + k^2b^2) - 2kb^2\Phi^2}{[2ka^2 - (1 + k^2b^2)\Phi^2]^2}, \end{aligned} \tag{7.14}$$

$$q = \frac{bC(1 + k^2b^2)}{ka^2}(e^{-\alpha} - 1). \tag{7.15}$$

Введем новую переменную R согласно

$$d\rho - ld\Phi = \rho d(\ln R), \tag{7.16}$$

тогда

$$\rho^2 = \frac{R^2 e^{\beta}\sqrt{a^4 - b^2\Phi^4}}{4Ca^2(1 + k^2b^2)}, \tag{7.17}$$

в результате

$$ds^2 = \Phi^2(dt - qd\varphi)^2 - \mathrm{e}^{2\beta}d\Phi^2 - \\ - \frac{\rho^2}{R^2}\left[\left(1 - \frac{kR^2}{2C^2a^2(1+k^2b^2)}\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\varphi^2\right], \quad (7.18)$$

$$q = \frac{bC(1+k^2b^2)}{ka^2}\left(\sqrt{1 - \frac{kR^2}{2C^2a^2(1+k^2b^2)}} - 1\right), \quad (7.19)$$

$$\mathrm{e}^{\beta} = \frac{C(1+k^2b^2)}{2ka^2}\sqrt{a^4 - b^2\Phi^4}\left[\frac{L^2}{4} + \frac{L}{\Phi} - \frac{b^2\Phi^2}{a^4 - b^2\Phi^4}\right]. \quad (7.20)$$

Выражения (7.18)–(7.20) представляют новое решение стационарной аксиально-симметричной вакуумной задачи ОТО.

Статические поля $(b = 0)$

1. Положим $2ka^2 = 1$ и перейдем к координатам r и ϑ, так чтобы

$$\Phi^2 = 1 - \frac{2M}{r}, \quad R = 2M \sin\vartheta, \quad M = Ca^2.$$

Тогда из (7.18)–(7.20) получим известное решение Шварцшильда.

2. Положим $2ka^2 = 0$ и введем $z = 1/\Phi^2$. В этом случае

$$ds^2 = \frac{dt^2}{z} - z^2(dR^2 + R^2d\varphi^2) - 4C^2a^4zdz^2,$$

или, в эквивалентной форме,

$$ds^2 = \mathrm{e}^{u/2Ca^2}dt^2 - \mathrm{e}^{-u/Ca^2}(dx^2 + dy^2) - \mathrm{e}^{-3u/2Ca^2}du^2,$$
$$dx^2 + dy^2 = dR^2 + R^2d\varphi^2, \quad u = 4Ca^2\ln\Phi.$$

Это решение совпадает с решением Тауба [83], описывающего гравитационное поле плоского однородного слоя.

3. Положим $2ka^2 = -1$ и введем

$$z = \frac{2Ca^2}{1+\Phi^2}, \quad R = 2Ca^2\,\mathrm{sh}\,r.$$

В этом случае получим

$$ds^2 = \left(\frac{2Ca^2}{z} - 1\right)dt^2 - \frac{dz^2}{(2Ca^2/z - 1)} - z^2(dr^2 + \mathrm{sh}^2\,r d\varphi^2).$$

4. Несжимаемая жидкость. Положим $p = P/\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$. Интегрируя условие гидростатического равновесия, получим

$$1 + p = \frac{\Phi_s}{\Phi}, \quad p_c = \frac{\Phi_s}{\Phi_c} - 1.$$

Индекс c обозначает величины в центре, а индекс s — на границе распределения масс. Введем

$$x = 3\Phi_s - 2\Phi \quad \text{и} \quad u = \mathrm{e}^{-2\beta},$$

что вместо уравнений (7.7), (7.8) дает

$$uu_{xx} = \frac{3}{4}{u_x}^2 + 4\pi\varepsilon_0 x(u_x + \pi\varepsilon_0 x) - \frac{u(u_x + 4\pi\varepsilon_0\Phi_s)}{3\Phi_s - x}.$$

Частное решение этого уравнения есть

$$u = \frac{2\pi}{3}\varepsilon_0(1 - x^2).$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \mathrm{e}^{2\alpha} = \left[1 - \frac{8\pi\varepsilon_0}{3}\frac{\rho^2}{1 - (3\Phi_s - 2\Phi)^2}\right]^{-1}, \\ \mathrm{e}^{-2\beta} = \frac{2\pi}{3}\varepsilon_0\left[1 - (3\Phi_s - 2\Phi)^2\right], \\ l = \frac{2\rho(3\Phi_s - 2\Phi)}{1 - (3\Phi_s - 2\Phi)^2}. \end{gathered} \tag{7.21}$$

Решение (7.21) можно переписать в координатах кривизны, подставив вместо Φ и ρ координаты r и ϑ согласно

$$3\Phi_s - 2\Phi = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, \quad \rho = r\sin\vartheta$$

и учитывая

$$\Phi_c = \frac{3\Phi_s - 1}{2} = \frac{\Phi_s}{1 + p_c}, \quad M = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_0{r_s}^3.$$

В результате получим внутреннее решение Шварцшильда [84], единственность которого доказана в [85].

Эти частные решения (за исключением последнего) согласно классификации [42] относятся к решениям класса A для статических вырожденных гравитационных полей вне источника.

Модифицированное решение НУТ и решение Керра. Физическая интерпретация одного из известных решений ОТО — решения НУТ [86] — наталкивается на существенные трудности [87, 88], что, на наш взгляд, обусловлено нарушением условий

1) регулярности на оси симметрии,

2) асимптотической псевдоевклидовости.

Вакуумное решение (7.18)–(7.20) в частном случае

$$2ka^2 = 1 + k^2b^2, \quad M^2 = C^2(a^4 - b^2), \quad n = Cb$$

лишено этих недостатков и по сути оказывается модифицированным решением НУТ. Действительно, перейдем к координатам

$$\Phi^2 = \frac{r^2 - 2Mr - n^2}{r^2 + n^2}, \quad \rho^2 = (r^2 + n^2)\sin^2\vartheta,$$

$$r = \frac{M + \sqrt{M^2 + n^2(1 - \Phi^4)}}{1 - \Phi^2},$$

тогда, учитывая вспомогательное соотношение

$$\left(1 - k^2b^2\right)^2 = 4k^2(a^4 - b^2),$$

получим

$$ds^2 = \left(\frac{r^2 - 2Mr - n^2}{r^2 + n^2}\right)(dt + qd\varphi)^2 - \left(\frac{r^2 + n^2}{r^2 - 2Mr - n^2}\right)dr^2 - \\ - (r^2 + n^2)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (7.22)$$

$$q = 2n(1 - |\cos\vartheta|).$$

Внешнее сходство (7.22) с решением НУТ служит основанием для того, чтобы назвать его МНУТ (модифицированным НУТ), но в отличие от НУТ оно неизменно при замене $\vartheta \to \pi - \vartheta$ и регулярно на оси. Нетрудно понять причину такого отличия — при выводе (7.18)–(7.20), частным случаем которого является решение МНУТ, учтено требование локальной псевдоевклидовости на оси симметрии. Таким образом, один из недостатков решения НУТ, скорее всего, обусловлен пренебрежением физически обоснованным условием регулярности. Поэтому попытки физической интерпретации решения НУТ оказываются безуспешными. Что касается отсутствия асимптотической псевдоевклидовости, то этим недостатком обладает также модифицированное решение. На наш взгляд, это связано с упрощающим решение задачи выбором сопутствующей СО, иначе говоря, то обстоятельство, что g_{03} не обращается в нуль на больших расстояниях, можно объяснить локальным эффектом «вращения» используемой СО.

• ***Замечание 11.*** Метрической форме (4.3) в некоторых случаях предпочитают

$$d\bar{s}^2 = d\bar{s}_{\rm I}^2 - d\bar{s}_{\rm II}^2, \quad d\bar{s}_{\rm I}^2 = \mathrm{e}^{2\bar{\alpha}}d\bar{t}^2 - \mathrm{e}^{2\bar{\gamma}}(d\bar{\varphi} - \bar{q}d\bar{t})^2, \quad d\bar{s}_{\rm II}^2 = ds_{\rm II}^2.$$

Отметим, что выражение $d\bar{s}_{\rm I}^2$ получается из (4.3) в результате формальной замены «несущественных» координат:

$$t = i\bar{\varphi}, \quad \varphi = i\bar{t}, \quad \alpha = \bar{\gamma}, \quad q = \bar{q}, \quad \gamma = \bar{\alpha}.$$

Соответствующая $d\bar{s}^2$ тетрада базисных векторов имеет вид

$$\bar{L}_{\upsilon}^{(\mu)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\bar{\alpha}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\beta} & -l\mathrm{e}^{-\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mu} & 0 \\ -\bar{q}\mathrm{e}^{\bar{\gamma}} & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\bar{\gamma}} \end{pmatrix},$$

$$\bar{L}^{\upsilon}_{(\mu)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\beta} & l\mathrm{e}^{-\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\mu} & 0 \\ \bar{q}\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}} & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\bar{\gamma}} \end{pmatrix},$$

а компоненты 4-скорости

— в координатном базисе

$$\bar{u}^0 = \frac{d\bar{t}}{d\bar{s}} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\sqrt{1-\bar{V}^2}}, \quad \bar{u}^i = \bar{v}^i\bar{u}^0, \quad \bar{v}^i = \frac{dx^i}{d\bar{t}}, \quad \bar{u}^3 = \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{s}} = \bar{\Omega}\bar{u}^0,$$

$$\bar{V}^2 = \mathrm{e}^{2\beta-2\bar{\alpha}}(\bar{v}^1 - l\bar{v}^2)^2 + \mathrm{e}^{2\mu-2\bar{\alpha}}(\bar{v}^2)^2 + \mathrm{e}^{2\bar{\gamma}-2\bar{\alpha}}(\bar{\Omega} - \bar{q})^2, \quad \bar{\Omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt};$$

— в тетрадном базисе $\bar{u}^{(\mu)} = \bar{L}_{\nu}^{(\mu)}u^{\nu}$

$$\bar{u}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{V}^2}}, \quad \bar{u}^{(1)} = \mathrm{e}^{\beta-\bar{\alpha}}\frac{(\bar{v}^1 - l\bar{v}^2)}{\sqrt{1-\bar{V}^2}}, \quad \bar{u}^{(2)} = \mathrm{e}^{\mu-\bar{\alpha}}\frac{\bar{V}^2}{\sqrt{1-\bar{V}^2}},$$

$$\bar{u}^{(3)} = \mathrm{e}^{\bar{\gamma}-\bar{\alpha}}(\bar{\Omega} - \bar{q})\bar{u}^{(0)}.$$

Сравнивая эти выражения, заключаем, что

— точка, описывающая круговую орбиту, собственная длина которой $2\pi\mathrm{e}^{\bar{\gamma}}$, в координатном базисе имеет скорость $\bar{\Omega}$, а в локально-инерциальной системе отсчета вращается с угловой скоростью

$$\mathrm{e}^{\bar{\gamma}-\bar{\alpha}}(\bar{\Omega} - \bar{q}),$$

— точка, покоящаяся в локально-инерциальной системе ($\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(2)} = \bar{u}^{(3)} = 0$), в координатном базисе имеет угловую скорость

$$\bar{\Omega} = \bar{q},$$

т. е. локально-инерциальная система отсчета вовлекается во вращение материнского тела (увлечение инерциальной системы отсчета), что составляет содержание явления, известного как эффект Лензе–Тирринга, который не имеет аналога как в ньютоновской теории, так и в специальной теории относительности. Набор координат в метриках с чертой и без черты один и тот же, поэтому

$$\bar{q} = -q\frac{\mathrm{e}^{2\alpha}}{\mathrm{e}^{2\gamma} - q^2\mathrm{e}^{2\alpha}}.$$

Ясно, что обе метрические формы описывают одно и то же пространство-время, но с точки зрения разных СО.

Пусть ω_2 — угловая скорость увлечения локально-инерциальной системы (CO_2) относительно неподвижного наблюдателя (НН), причем если $\omega_2 \sim 2I/R^3$ (I — момент импульса, R — расстояние от источника поля), то соответствующее пространство-время будет асимптотически-плоским [89]. Допустим, что решение МНУТ получено в системе отсчета CO_0, вращающейся относительно НН с угловой скоростью ω_0. Преобразованием

$$d\varphi = d\acute{\varphi} + \omega_1 dt, \quad \omega_1 = \frac{q\Phi^2}{(r^2+n^2)\sin\vartheta^2 - q^2\Phi^2}$$

решение МНУТ можно локально привести к виду с исчезающим метрическим коэффициентом g_{03}. Это означает переход к новой системе отсчета CO_1, которая «вращается» относительно CO_0 с угловой скоростью ω_1. Понятно, что угловые скорости CO_0, CO_1 и CO_2 связаны соотношением $\omega_2 = \omega_0 + \omega_1$, поэтому CO_0, в которой выведено решение МНУТ, в каждой точке $(r,\ \vartheta)$ «вращается» относительно НН с угловой скоростью

$$\omega_0 = \omega_2 - \omega_1.$$

На больших расстояниях $\omega_2 \sim 1/R^3$, а $\omega_1 \sim 1/R^2$, следовательно, линейная скорость $v_0 = \omega_0 R$ движения каждой точки CO_0 относительно НСО стремится к нулю на бесконечности, а это означает, что CO_0 может быть осуществлена реальными телами, т. е. решение МНУТ удовлетворяет физическим требованиям, предъявляемым к стационарным осесимметричным решениям вакуумных уравнений Эйнштейна.

Стационарное вакуумное решение (7.18)–(7.20) допускает еще одно частное решение. Положим $2ka^2 = 1$ и переобозначим константы $Ca^2 = A$, $b/a^2 = B$, тогда вместо (7.18)–(7.20) имеем

$$\mathrm{e}^{2\alpha} = \left[1 - \rho^2 f(\Phi)\right]^{-1},$$

$$f(\Phi) = \left[A\,\mathrm{e}^{\beta}\left(1+\frac{B^2}{4}\right)\sqrt{1-B^2\Phi^4}\right]^{-1},$$

$$q = 2AB\left(1+\frac{B^2}{4}\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right), \quad l = \frac{1}{2}\rho L(\Phi),$$

$$\mathrm{e}^{\beta} = A\left(1+\frac{B^2}{4}\right)\sqrt{1-B^2\Phi^4}\left[\frac{L^2}{4}+\frac{L}{\Phi}-\frac{B^2\Phi^2}{1+B^2\Phi^4}\right],$$

$$L(\Phi) = \frac{2\Phi}{\sqrt{1-B^2\Phi^4}}\frac{\left(1-\frac{B^2}{4}\right)+\left(1+\frac{B^2}{4}\right)\sqrt{1-B^2\Phi^4}}{1-\left(1+\frac{B^2}{4}\right)\Phi^2}.$$

Перепишем блок $(t,\ \varphi)$ исходной метрической формы в эквивалентном виде

$$d\sigma^2 = \frac{\rho^2\Phi^2}{\rho^2-q^2\Phi^2}dt^2-(\rho^2-q^2\Phi^2)(d\varphi+\omega dt)^2,$$

где

$$\omega = \frac{q\Phi^2}{\rho^2-q^2\Phi^2}.$$

Повторяя рассуждения, которые позволили осуществить переброс решения МНУТ в новую СО, преобразуем $d\sigma^2$, используя

$$d\acute{\varphi} = d\varphi+(\omega-\omega_k)dt, \quad \omega_k = \frac{2aMr}{(r^2+a^2)R^2+2Ma^2r\,\sin^2\vartheta},$$

$$R^2 = r^2+a^2\,\cos^2\vartheta.$$

Подставив далее

$$\Phi^2 = 1-\frac{2Mr}{R^2},$$

$$\rho^2 = r^2+a^2\left(1-\frac{2Mr}{R^2-2Mr}+\frac{2Mr\,\sin^2\vartheta}{R^2}\right),$$

получим решение Керра [73].

8. ВРЕМЕННАЯ ЗАДАЧА (ЗАДАЧА ТОЛМЕНА)

ОТО устанавливает ограничение на предельное значение массы белых карликов и нейтронных звезд. Для моделей с различным состоянием вещества критическая масса $M_{\text{кр}} \sim 1,5M_{\odot} \div 3M_{\odot}$ [90]. Принято считать, что если звезда главной последовательности с массой $M > M_{\text{кр}}$ в ходе своей эволюции не сбросит излишек массы $\delta M = M - M_{\text{кр}}$, то после исчерпания источников ядерного горючего начнется ее катастрофическое сжатие, в результате которого образуется черная дыра. Такое завершение гравитационного коллапса обусловлено структурой уравнений ОТО — возникающие в ходе сжатия упругие силы не могут противостоять силам тяготения. (Уместно заметить, что в релятивистской теории гравитации Логунова [13] в области, близкой к горизонту событий, начинает работать антигравитационный механизм, коллапс останавливается и сжатие сменяется расширением.)

Скалярное поле теории ЙБД не может не оказать влияния как на динамику самогравитирующих объектов, так и на устойчивость равновесных моделей. Вопрос об формировании черных дыр в этой теории обсуждался в работах [91–94]). Так, в работе [91] утверждается, что в теории ЙБД, так же как и в ОТО, гравитационный коллапс завершается образованием черной дыры. Это заключение основано на следующих соображениях:

1) решение Шварцшильда есть точное решение теории ЙБД с постоянным скалярным полем,

2) скалярное поле при сферически-симметричном коллапсе стремится к постоянному значению при $t \to \infty$.

С другой стороны, Матсуда [92], основываясь на результатах работы [95], показал, что решение Шварцшильда является точным, но не единственным решением теории ЙБД в пределе постоянного скалярного поля и поэтому сферически-симметричный коллапс в этой теории не обязательно приводит к образованию черной дыры. Дополнительные соображения о возможности формирования черных дыр в теории ЙБД может дать качественный анализ проблемы. Будем следовать рассуждениям аналогичного анализа для случая ОТО, изложенного в [96]. Рассмотрим распространение света и свободное движение «пробных» частиц в радиальном направлении ($\theta, \phi = \text{const}$) в гравитационном поле статического сферически-симметричного тела массой M. Соответствующее выражение интервала в вытянутых сфероидальных координатах имеет вид (5.8)

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 - g_{11} du^2, \quad g_{00} = \tau^{2h/\eta}, \quad g_{11} = k^2 \tau^{2h(a-1)/\eta}.$$

Здесь $k = \eta M$, $h = \eta/2(1-a)$, τ — параметр решения Гекмана (см. [15])

$$\tau = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{1/2h},$$

связь которого с радиальной переменной координат кривизны определяется соотношением

$$r = 2\eta M \frac{\tau^{h-1/2}}{1-\tau^{2h}}.$$

Перейдем к новым координатам T и R, так чтобы

$$cdT = cdt + f\sqrt{g_{11}/g_{00}}du, \quad dR = cdt + \frac{1}{f}\sqrt{g_{11}/g_{00}}du.$$

Ясно, что

$$cdt = \frac{cdT - f^2 dR}{1 - f^2}, \quad du = f\frac{dR - cdT}{1 - f^2}\sqrt{g_{00}/g_{11}}.$$

Выберем $f^2 = 1 - g_{00}$, что позволяет избавиться от особенности и перейти в синхронную систему отсчета, тогда

$$ds^2 = c^2 dT^2 - \left(1 - \tau^{2h/\eta}\right), \quad R - cT = \eta M \int \frac{\tau^{ah/\eta}}{\sqrt{1 - \tau^{2h/\eta}}}du.$$

В новых координатах метрика нестационарна, координата R всюду пространственная, а T — временная. Линии времени, как и во всякой синхронной системе отсчета, являются геодезическими, т. е. покоящиеся в выбранной системе отсчета «пробные» частицы — это частицы, свободно движущиеся в рассматриваемом поле. Фиксированные значения координаты r (или, что то же, параметра τ) параметризуют семейство мировых линий $R - cT = \mathrm{const}$ (это наклонные прямые на диаграмме $\{cT, R\}$, одна из которых, соответствующая $r = 0$, проходит через начало координат). Мировые линии «пробных» частиц, покоящихся в выбранной системе отсчета, на той же диаграмме изображаются вертикалями, параллельными оси cT. Для световых сигналов, распространяющихся в радиальном направлении, уравнение $ds^2 = 0$ дает

$$\frac{cdT}{dR} = \pm\sqrt{1 - \tau^{2h/\tau}}$$

(два знака соответствуют двум границам светового конуса с вершиной в заданной мировой точке).

В предельном случае ОТО ($\eta = 1$, $a = 0$, $h = 1/2$)

$$r = \frac{2M}{1 - \tau},$$

откуда ясно, что интервал $-\infty < \tau \leq 0$ отображается в $r \in \{0, 2M\}$, а $0 \leq \tau < 1$ — в $r \in \{2M, \infty\}$. Поэтому из

$$\frac{cdT}{dR} = \pm\sqrt{1 - \tau},$$

заметив, что интервалу $r \in \{0, 2M\}$ соответствует $|cdT/dR| > 1$, а интервалу $r \in \{2M, \infty\}$ — неравенство $|cdT/dR| < 1$, заключаем: мировая линия покоящейся частицы вне области $r = 2M$ попадает в световой конус, а внутри этой области — нет, иначе говоря, поскольку мировые линии любых причинно-связанных событий не могут находиться вне светового конуса, то в области $r \leq 2M$ не может существовать покоящихся частиц.

Для аналогичного анализа в теории ЙБД необходимы оценочные величины фигурирующих в формулах констант. Согласно данным наблюдений безразмерная константа связи ζ — положительное число, не превышающее 500 [1]. Используя это значение и полученную выше формулу (см. замечание 7), связывающую константы η, a и ζ, заключаем, что $\eta^2 > 1$ для любых $a \neq 0$. Наблюдательные оценки постньютоновского параметра $\gamma = 1 - a$ дают для его величины значение, близкое к единице, но не равное ей. Результаты численного расчета [97] позволяют установить ограничение $|h| > 1/2$. Итак, для отличных от нуля значений a, заключенных в интервале $-1 < a < 1$, имеем

$$h > \frac{1}{2} \text{ при } \eta > 1 \quad \text{и} \quad h < -\frac{1}{2} \text{ при } \eta < -1.$$

В первом случае ($h > 1/2$) вся область $0 \leq r < \infty$ отображается в $0 \leq \tau < 1$, при этом $|cdT/dR| < 1$, т. е. мировые линии покоящихся частиц для всех r находятся внутри светового конуса. В случае $h < -1/2$ интервалу $1 \leq \tau < \infty$ соответствует $0 \leq r < \infty$, а $|cdT/dR| < 1$, как и в предыдущем случае, т. е. не возникает никаких аномалий. Таким образом, качественный анализ позволил выявить отличия в поведении «пробных» частиц в гравитационном поле статического сферически-симметричного тела в ОТО и теории ЙБД, однако это не может служить достаточным основанием для окончательного заключения о предсказаниях теории ЙБД по вопросу о существовании черных дыр. Ответ на этот вопрос можно будет получить только после решения временной задачи, которая, по результатам работ [98, 99], сформулирована в настоящем разделе.

Преобразованием координат наиобщего выражения метрики сферически-симметричного пространства-времени [100] обратим в нуль единственную недиагональную компоненту метрики и перейдем в сопутствующую систему отсчета, что дает

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2\alpha(r,t)}dt^2 - \mathrm{e}^{2\beta(r,t)}dr^2 - R^2(r,t)d\Omega^2,$$

$$u^\mu = \{u^t, 0, 0, 0\}, \quad \dot{\alpha} = -\frac{\dot{u}^t}{u^t}.$$

Подставив это в уравнения (1.3), (1.4), получим систему уравнений временной сферически-симметричной задачи теории ЙБД, которые для краткости будем называть временными уравнениями:

$$\mathrm{e}^{-2\alpha}\left[\frac{\ddot{y}}{y}+\frac{\dot{y}}{y}\left(\dot{\beta}-\dot{\alpha}+\frac{2\dot{R}}{R}\right)\right]-\\ -\mathrm{e}^{-2\beta}\left[\frac{y''}{y}+\frac{y'}{y}\left(\alpha'-\beta'+\frac{2R'}{R}\right)\right]=\frac{8\pi(\varepsilon-3P)}{y(3+2\zeta)},$$

$$\mathrm{e}^{-2\alpha}\left[\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R}+2\dot{\beta}\right)+\frac{\dot{y}}{y}\left(\dot{\beta}+\frac{2\dot{R}}{R}\right)\right]+\frac{1}{R^2}-\frac{\zeta}{2y^2}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha}\dot{y}^2+\mathrm{e}^{-2\beta}y'^2\right)-\\ -\mathrm{e}^{-2\beta}\left[\frac{2R''}{R}+\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R}-2\beta'\right)+\frac{y''}{y}+\frac{y'}{y}\left(\frac{2R'}{R}-\beta'\right)\right]=\frac{8\pi\varepsilon}{y},$$

$$\mathrm{e}^{-2\alpha}\left[\frac{2\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R}-2\dot{\alpha}\right)+\frac{\ddot{y}}{y}+\frac{\dot{y}}{y}\left(\frac{2\dot{R}}{R}-\dot{\alpha}\right)\right]+\frac{1}{R^2}-\\ -\mathrm{e}^{-2\beta}\left[\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R}+2\alpha'\right)+\frac{y'}{y}\left(\alpha'+\frac{2R'}{R}\right)\right]+\\ +\frac{\zeta}{2y^2}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha}\dot{y}^2+\mathrm{e}^{-2\beta}y'^2\right)=-\frac{8\pi P}{y},$$

$$\frac{2\dot{R}'}{R}-\alpha'\left(\frac{2\dot{R}}{R}+\frac{\dot{y}}{y}\right)-\dot{\beta}\left(\frac{2R'}{R}+\frac{y'}{y}\right)+\frac{\dot{y}'}{y}+\zeta\frac{\dot{y}y'}{y^2}=0.$$

При решении внутренних задач удобно использовать также закон сохранения числа барионов $\nabla_\mu(nu^\mu)=0$ (n — плотность числа барионов) и вытекающие из (1.6) и (1.7) уравнения

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon+P}=\frac{\dot{n}}{n}=-\left(\dot{\beta}+\frac{2\dot{R}}{R}\right),\quad \frac{P'}{\varepsilon+P}=-\alpha'. \tag{8.1}$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по времени, а штрих — по координате r.

• ***Замечание 12.*** В ОТО, как следствие теоремы Биркгофа, масса статического тела и такого же тела, осциллирующего радиально, имеет одну и ту же величину. В теории ЙБД аналогичное утверждение не справедливо, поскольку $\dot{y}\neq 0$. Однако весьма правдоподобным представляется предположение о том, что временные изменения скалярного поля происходят за время, сравнимое с космологическим. Исходя из этого при рассмотрении динамики изолированного объекта целесообразно считать $\dot{y} = 0$. Если принять это предположение и использовать высвободившееся координатное условие (вне тела u^0 — единственная неисчезающая компонента 4-скорости) для выбора $R = r$, то из уравнения со смешанными производными временной системы найдем

$$\dot{\beta}\left(\frac{2}{r} + \frac{y'}{y}\right) = 0.$$

Подставив в это соотношение решение уравнения, определяющего поведение гравитационного скаляра вне распределения масс $y' = \mathrm{const}\,\mathrm{e}^{\beta-\alpha}/r^2$ при $\dot{\beta} \neq 0$, получим $y = -\mathrm{const}\,\mathrm{e}^{\beta-\alpha}/2r$ с нефизической асимптотикой. Поэтому необходимо считать $\dot{\beta} = 0$. Тогда из выписанной выше системы уравнений следует, что и $\dot{\alpha} = 0$. Таким образом, если пренебречь временной зависимостью гравитационного скаляра, то вне распределения масс изолированного тела сферической формы гравитационное поле оказывается таким же, как у статического тела, так как в соответствии с уравнениями задачи $y = y(r)$, $\alpha = \alpha(r)$, $\beta = \beta(r)$.

Согласно выводам утверждения 3 конформное преобразование

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{y}{y_0} g_{\mu\nu}$$

переводит уравнения теории ЙБД из собственного представления в эйнштейновское, что позволяет, отбросив тильду, записать их в более компактном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\sigma} R^2 \mathrm{e}^{\beta-\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma' R^2 \mathrm{e}^{\alpha-\beta}\right) = 0, \tag{8.2}$$

$$\mathrm{e}^{-2\alpha}\frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R} + 2\dot{\beta}\right) - \mathrm{e}^{-2\beta}\left[\frac{2R''}{R} + \frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R} - 2\beta'\right)\right] + \\ + \frac{1}{R^2} = \frac{8\pi}{y_0}(\varepsilon + \varepsilon^*), \tag{8.3}$$

$$\mathrm{e}^{-2\alpha}\left[\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}}{R}\left(\frac{\dot{R}}{R} - 2\dot{\alpha}\right)\right] - \mathrm{e}^{-2\beta}\frac{R'}{R}\left(\frac{R'}{R} + 2\dot{\alpha}\right) + \\ + \frac{1}{R^2} = -\frac{8\pi}{y_0}(P + P^*), \tag{8.4}$$

$$\frac{\dot{R}'}{R} - \alpha'\frac{\dot{R}}{R} - \dot{\beta}\frac{R'}{R} = -\dot{\sigma}\sigma'. \tag{8.5}$$

Здесь

$$\varepsilon^* = P^* = \frac{y_0}{8\pi}(\mathrm{e}^{-2\alpha}\dot{\sigma}^2 + \mathrm{e}^{-2\beta}\sigma'^2), \quad y = \mathrm{e}^{\sqrt{2/(3+2\zeta)}\sigma}. \tag{8.6}$$

Система уравнений (8.2)–(8.5) допускает дальнейшее упрощение, если ввести

$$M = \frac{R}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-2\alpha}\dot{R}^2 - \mathrm{e}^{-2\beta}R'^2\right). \tag{8.7}$$

Тогда вместо комбинации уравнений (8.3)–(8.5) получим

$$M' = \frac{4\pi}{y_0}\left(\varepsilon + \varepsilon^*\right) R^2 R' - R^2 \dot{R}\dot{\sigma}\sigma', \tag{8.8}$$

$$\dot{M} = -\frac{4\pi}{y_0}\left(P + P^*\right) R^2 \dot{R} + R^2 R' \dot{\sigma}\sigma'. \tag{8.9}$$

Добавив к (8.7)–(8.9) уравнения (8.2), (8.5), (8.1) и уравнение состояния вещества, получим замкнутую систему для решения временной задачи теории ЙБД.

• ***Замечание 13.*** В частном случае $\sigma = \mathrm{const}$, $\varepsilon = P = 0$ система временных уравнений ЙБД превращается в уравнения ОТО. Займемся обсуждением интегрируемости вакуумных уравнений временной задачи ОТО. Примечательно, что вне распределения масс величина M, определяемая соотношением (8.7), оказывается константой. Действительно, (8.8) и (8.9), полученные как комбинации уравнений временной задачи, в ОТО сводятся к $M' = 0$ и $\dot{M} = 0$, поэтому

$$dM = \dot{M}dt + M'dr = 0 \implies M = \mathrm{const}.$$

Это означает, что система уравнений временной задачи ОТО эквивалентна двум независимым уравнениям — «динамическому» уравнению

$$\frac{\dot{R}'}{R} - \alpha'\frac{\dot{R}}{R} - \dot{\beta}\frac{R'}{R} = 0 \tag{8.10}$$

и уравнению «связи»

$$2M = R\left(1 + \mathrm{e}^{-2\alpha}\dot{R}^2 - \mathrm{e}^{-2\beta}R'^2\right). \tag{8.11}$$

Последнему можно приписать простой геометрический смысл: «фазовое пространство» рассматриваемой динамической системы есть гиперболоид

$$\frac{2M}{R} - \gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \mathrm{e}^{-\alpha}\dot{R}, \quad \delta = \mathrm{e}^{-\beta}R'.$$

Такая интерпретация допускает два варианта параметризации, если вместо трех неизвестных ввести две независимые переменные.

1. Пусть $0 \leq R < 2M$. Введем $v(r,t)$ и $\psi(r,t)$ так, чтобы обратить уравнение связи в тождество:

$$\frac{2M}{R} = \mathrm{ch}^2 v, \quad \gamma = \mathrm{e}^{-\alpha}\dot{R} = \mathrm{sh}\, v\, \mathrm{ch}\, \psi, \quad \delta = \mathrm{e}^{-\beta}R' = \mathrm{sh}\, v\, \mathrm{sh}\, \psi;$$

$$R = \frac{2M}{\mathrm{ch}^2 u}, \quad \mathrm{e}^{\alpha} = \frac{4M}{\mathrm{ch}\, \psi}\frac{\dot{v}}{\mathrm{ch}^3 v}, \quad \mathrm{e}^{\beta} = \frac{4M}{\mathrm{sh}\, \psi}\frac{v'}{\mathrm{ch}^3 v},$$

после чего вместо уравнения (8.10) получаем

$$\dot{v}' - \frac{\mathrm{ch}^2 v - 3\,\mathrm{sh}^2 v}{\cos v \sin v}\dot{v}\cdot v' - (\ln \mathrm{ch}\, \psi)'\dot{v} - (\ln \mathrm{sh}\, \psi)\dot{v}' = 0,$$

которое подстановкой

$$\omega = f(v) = \ln|\mathrm{th}\, v| + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}^2 v = \frac{1}{2}\ln\left|1 - \frac{R}{2M}\right| - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{2M}\right) \tag{8.12}$$

обращается в

$$\dot{\omega}' - (\ln \mathrm{ch}\, \psi)'\dot{\omega} - (\ln \mathrm{sh}\, \psi)\dot{\omega}' = 0. \tag{8.13}$$

Исследуя (8.12), заключаем, что области допустимых значений $\omega < -1/2$ соответствуют два решения

$$R_1(\omega) \geq 2M(1 + 2\omega) \geq R_2(\omega).$$

2. Пусть $R \geq 2M > 0$. Введем $u(r,t)$ и $\psi(r,t)$ так, чтобы обратить уравнение связи в тождество:

$$\frac{2M}{R} = \cos^2 u, \quad \gamma = \mathrm{e}^{-\alpha}\dot{R} = \sin u\, \mathrm{sh}\, \psi, \quad \delta = \mathrm{e}^{-\beta}R' = \sin u\, \mathrm{ch}\, \psi,$$

$$R = \frac{2M}{\cos^2 u}, \quad \mathrm{e}^{\alpha} = \frac{4M}{\mathrm{sh}\, \psi}\frac{\dot{u}}{\cos^3 u}, \quad \mathrm{e}^{\beta} = \frac{4M}{\mathrm{ch}\, \psi}\frac{u'}{\cos^3 u},$$

после чего вместо уравнения (8.10) получаем

$$\dot{u}' - \frac{\cos^2 u - 3\sin^2 u}{\cos u \sin u}\dot{u}\cdot u' - (\ln \mathrm{sh}\, \psi)'\dot{u} - (\ln \mathrm{ch}\, \psi)\dot{u}' = 0,$$

которое подстановкой

$$\omega = f(u) = \ln|\mathrm{tg}\, u| + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 u = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{R}{2M} - 1\right) + \left(\frac{R}{2M} - 1\right)\right] \tag{8.14}$$

приводится к виду

$$\dot{\omega}' - (\ln \operatorname{sh} \psi)' \dot{\omega} - (\ln \operatorname{ch} \psi) \dot{\omega}' = 0. \tag{8.15}$$

Для любого значения ω существует единственный корень $R = R(\omega)$ уравнения (8.14), поэтому каждому решению $u(r, t)$ уравнения (8.15) при любой заданной функции $\psi(r, t)$ соответствует единственное решение временной задачи ОТО $\alpha(r, t)$, $\beta(r, t)$, $R(r, t)$.

В обоих случаях функция $\psi(r, t)$ — произвольная функция, никак не ограниченная уравнениями Эйнштейна.

Таким образом, удалось, во-первых, найти преобразования, линеаризующие уравнения Эйнштейна, после чего они сводятся к линейному уравнению второго порядка (8.13) или (8.15), и, во-вторых, показать, что в рассматриваемом случае решения уравнений Эйнштейна зависят от одной произвольной функции $\psi(r, t)$ и произвольных функций $C_1(t)$ и $C_2(r)$ одного аргумента, которые определяют произвол множества решений линейного уравнения (8.13) или (8.15) при заданных $\psi(r, t)$. Итак, есть все основания для того, чтобы считать обоснованным

• ***Утверждение 8.*** *Решение системы вакуумных уравнений Эйнштейна, которые соответствуют сферически-симметричной метрике наиобщего вида, сводится к решению линейного гиперболического уравнения второго порядка (8.13) или (8.15) с произвольно фиксированной функцией $\psi(r, t)$.*

9. КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Как свидетельствуют астрофизические наблюдения, в масштабах $\sim 10^8$ св. лет и более Вселенная однородна и изотропна. С крупномасштабной точки зрения галактики можно рассматривать как «частички» заполняющей Вселенную однородной, изотропной, непрерывной среды, принятой моделью которой служит идеальная жидкость с тензором энергии-импульса (1.5). Если в некоторый момент времени t_0 на трехмерной пространственной гиперповерхности задана начальная геометрия, т. е. в начальный момент времени в некоторой определенным образом выбранной системе координат известны

$$\gamma_{ik}(x^l) = g_{ik}(t_0, x^l), \quad i, k = 1, 2, 3,$$

то можно показать, что в любой момент времени, как следствие однородности и изотропности среды, пространственные компоненты метрики изменяются в соответствии с

$$g_{ik}(t, x^l) = a^2(t) \gamma_{ik}(x^l).$$

Фактор $a(t)$ характеризует изменение расстояния между двумя мировыми линиями за время $t - t_0$ и называется *космическим масштабным фактором* или *космическим масштабом*. Можно показать, что модели однородной и изотропной Вселенной адекватна геометрия с метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\,\theta d\varphi^2)\right], \quad k = -1,\ 0,\ +1. \quad (9.1)$$

Иногда вместо r вводят χ, так чтобы

$$r = \Sigma(\chi) = \begin{cases} \sin\,\chi & \text{при } k = 1, \\ \chi & \text{при } k = 0, \\ \sinh\,\chi & \text{при } k = -1, \end{cases}$$

тогда $dr^2/(1-kr^2) = d\chi^2$ и

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\,\theta d\varphi^2)]. \quad (9.2)$$

В некоторых случаях удобно использовать конформное время

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)},$$

что дает

$$ds^2 = a^2(t)[d\eta^2 - (d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\,\theta d\varphi^2))]. \quad (9.3)$$

Радиальные координаты метрики ФРУ — r и сферических координат — R связаны соотношением

$$r = \frac{R}{1 + kR^2/4},$$

поэтому в сферических координатах (9.1) приобретает вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\frac{dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\,\theta d\varphi^2)}{(1 + kR^2/4)^2}, \quad (9.4)$$

а в декартовых

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + kR^2/4)^2}. \quad (9.5)$$

Итак, в космологических задачах обычно используют метрический тензор с компонентами

$$g_{00} = 1, \quad g_{ik} = -a^2(t)\gamma_{ik}, \quad g^{00} = 1,$$
$$g^{ik} = -\gamma^{ik}/a^2(t), \quad \sqrt{-g} = a^3(t)\sqrt{\gamma},$$

причем

- в декартовых координатах $\{x, y, z\}$

$$\gamma_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{F^2}, \quad \gamma^{ik} = F^2 \cdot \delta^{ik} F^2,$$

$$F = 1 + \frac{kR^2}{4}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \sqrt{\gamma} = \frac{1}{F^3};$$

- в сферических координатах $\{R, \theta, \varphi\}$

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\gamma^{11}} = \frac{1}{F^2}, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{\gamma^{22}} = \frac{R^2}{F^2},$$

$$\gamma_{33} = \frac{1}{\gamma^{33}} = \frac{R^2 \sin^2\theta}{F^2}, \quad \sqrt{\gamma} = \frac{R^2 \sin\theta}{F^3};$$

- в координатах ФРУ $\{r, \theta, \varphi\}$

$$\gamma_{11} = \frac{1}{\gamma^{11}} = \frac{1}{1 - kr^2}, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{\gamma^{22}} = r^2,$$

$$\gamma_{33} = \frac{1}{\gamma^{33}} = r^2 \sin^2\theta, \quad \sqrt{\gamma} = \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - kr^2}};$$

- символы Кристоффеля

$$\Gamma^0_{ik} = \dot{a} a \gamma_{ik}, \quad \Gamma^i_{0l} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_l, \quad \Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\gamma^{im}\left(\frac{\partial\gamma_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial\gamma_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial\gamma_{kl}}{\partial x^m}\right);$$

- компоненты тензора Римана

$$R^0_{i0k} = \ddot{a} a \gamma_{ik}, \quad R^i_{00k} = \frac{\ddot{a}}{a}\delta^i_k,$$

$$R^i_{klm} = \dot{a}^2(\delta^i_l \gamma_{km} - \delta^i_m \gamma_{kl}) + {}^{(3)}R^i_{klm}, \quad {}^{(3)}R^i_{klm} = k(\delta^i_l \gamma_{km} - \delta^i_m \gamma_{kl});$$

- компоненты тензора Риччи

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{ik} = \gamma_{ik}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + {}^{(3)}R_{ik}, \quad {}^{(3)}R_{ik} = 2k\gamma_{ik},$$

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \quad {}^{(3)}R = 6k,$$

$$R^0_0 = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R^i_k = -\delta^i_k\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right);$$

• компоненты тензора Эйнштейна

$$G_0^0 = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right), \quad G_k^i = \delta_k^i\left(\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right).$$

Недавнее открытие ускоренного расширения Вселенной [101, 102] вынуждает пересмотреть установившиеся представления о ее составе и характере эволюции. При этом по-прежнему популярным остается предположение о необходимости включения космологической постоянной в уравнения гравитационного поля (о проблеме космологической постоянной см. обзор [103]), что, как будет показано ниже, эквивалентно рассмотрению ненулевой энергии вакуума и связанного с ней отрицательного давления [104–106]. Альтернативным объяснением наблюдаемого ускорения является гипотеза о существовании во Вселенной особой субстанции — квинтэссенции [107] с уравнением состояния

$$P_q = -(1-\nu)\varepsilon_q, \quad 0 < \nu < 2/3.$$

В релятивистской теории гравитации Логунова [13] наличие квинтэссенции приводит к интересным последствиям — ускорение Вселенной сменяется замедлением с последующей остановкой, после чего начинается сжатие до некоторого минимального значения масштабного фактора, затем следует новый цикл расширения [108]. Отметим, что идея об осциллирующем характере эволюции Вселенной выдвигалась и ранее, но преимущественно из философских соображений [109, 110], поскольку в закрытой модели Фридмана осциллирующему режиму препятствует рост энтропии от цикла к циклу и переход через космологическую особенность [111, 112].

• ***Замечание 14.*** Введем космологическую постоянную в действие Гильберта–Эйнштейна:

$$W = \int\left[-\frac{1}{2\kappa_0}(R + 2\Lambda) + L_m\right]\sqrt{-g}d^4x, \quad \kappa_0 = 8\pi G.$$

Обратив в нуль его вариацию по $g^{\alpha\beta}$, получим уравнения Эйнштейна

$$G_{\alpha\beta} = \kappa_0\left(T_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{\kappa_0}g_{\alpha\beta}\right), \quad \Lambda \geq 0.$$

В космологических задачах состояние вещества описывают уравнением

$$P = \alpha\varepsilon, \quad \alpha = \begin{cases} -1 & \text{модель вакуума,} \\ 0 & \text{эра преобладания вещества,} \\ 1/3 & \text{доминантность излучения,} \end{cases}$$

а тензор энергии-импульса в сопутствующей системе отсчета $u^1 = u^2 = u^3 = 0,\ u^0 u_0 = 1$ имеет компоненты

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P, \quad T = \varepsilon - 3P.$$

С учетом этого уравнения Эйнштейна в метрике ФРУ приобретают вид

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa_0 \varepsilon + \Lambda}{3}, \tag{9.6}$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\kappa_0 P + \Lambda. \tag{9.7}$$

Для того чтобы физически осмыслить наличие Λ-члена, рассмотрим простую модель. Пусть на поверхности и в центре мысленно выделенного в пространстве шарика малого радиуса r_0 находятся взаимодействующие «пробные» частицы. Как будет меняться расстояние между центром этого шарика и какой-либо точкой его поверхности? Одно из космологических уравнений Эйнштейна с Λ-членом можно переписать в виде

$$\frac{d^2(ar_0)}{dt^2} = \frac{1}{3}\Lambda(ar_0) - \frac{GM}{(ar_0)^2},$$

где a — масштабный фактор; $M = 4\pi(ar_0)^3(\varepsilon + 3P)/3$ — масса шарика. По виду этого уравнения легко заключить, что наличие космологического члена приводит к действию силы

$$F_\Lambda = \frac{1}{3}\Lambda(ar_0),$$

поле которой является глобальным и однородным, причем сила растет с увеличением расстояния между взаимодействующими «пробными» частицами (ситуация напоминает картину взаимодействия кварков!). При $\Lambda > 0$ сила F_Λ соответствует отталкиванию.

В квантовой теории энергия основного состояния вакуума отлична от нуля:

$$T_{\mu\nu}^{\text{вак}} \equiv \langle \text{вак}|T_{\mu\nu}|\rangle = \varepsilon_{\text{вак}} g_{\mu\nu},$$

поэтому Λ/κ_0 можно считать средней плотностью энергии вакуума (это предположение подкрепляется также и тем, что обе величины лоренц-инвариантны). Заметим, что если в выражении тензора энергии-импульса (ТЭИ) идеальной жидкости

$$T_{\mu\nu} = (P + \varepsilon)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$$

положить $P = -\varepsilon$, то выражения для ТЭИ вакуума и ТЭИ идеальной жидкости совпадают, если считать, что $\varepsilon = \Lambda/\kappa_0$, т. е. можно полагать, что ТЭИ идеальной жидкости с уравнением состояния $P = -\varepsilon$ является удовлетворительной моделью ТЭИ вакуума.

Допустим, что уравнение состояния записано в неявной форме

$$P = P(n), \quad \varepsilon = \varepsilon(n),$$

где $n = 1/V$ — плотность числа частиц в единице объема. Поскольку $dE \equiv d(\varepsilon/n) = -PdV$, то

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{(\varepsilon + P)}{n},$$

следовательно,

$$\begin{array}{lll} \varepsilon \sim n^{4/3} & \text{при} & P = \varepsilon/3, \\ \varepsilon \sim n & \text{при} & P = 0, \\ d\varepsilon/dn = 0 & \text{при} & P = -\varepsilon. \end{array}$$

При $P = -\varepsilon$ ни ε, ни P от n не зависят, т. е. не существует параметров, меняя которые можно изменить плотность энергии. Легко видеть, что в таких средах при изменении объема плотность энергии остается постоянной. Действительно, $dE \equiv d(\varepsilon V) = -PdV$, следовательно, $Vd\varepsilon = -(\varepsilon + P)dV$ и при $\varepsilon = -P$ плотность энергии $\varepsilon = \text{const}$, если $dV \neq 0$. Таким образом, есть все основания для утверждения: *при $\varepsilon > 0$ в средах с уравнением состояния $\varepsilon = -P$ может проявиться антигравитационный механизм.*

Следствием гидродинамического соотношения (1.6) в космологической задаче является

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) \tag{9.8}$$

или эквивалентное ему

$$\dot{P}a^3 = -\frac{d}{dt}[a^3(\varepsilon + P)]. \tag{9.9}$$

Поскольку состояние вещества подчиняется уравнению $P = \alpha\varepsilon$, решение (9.8) для разных значений α записывается в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^m, \text{ где } m = 3(1+\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha = -1, \\ 3 & \text{при} \quad \alpha = 0, \\ 4 & \text{при} \quad \alpha = 1/3. \end{cases} \tag{9.10}$$

Индексом 0 снабжены величины в фиксированный момент t_0, который обычно относят к текущему моменту.

Большинство космологов, основываясь на данных современных наблюдений (см. приложение), склоняются к мысли о квазиевклидовом характере гиперповерхности $t = \mathrm{const}$ пространства-времени, связанного с моделью однородной и изотропной Вселенной. Поэтому положим $k = 0$ в (9.6) и (9.7), подставив затем первое во второе, получим

$$\ddot{a} = -\frac{b^2}{a^{m-1}} + \frac{\Lambda}{3}a, \text{ где } b^2 = \frac{\kappa_0}{6}(1+3\alpha)\varepsilon_0 a_0^m, \tag{9.11}$$

решением которого при $\alpha = -1$ будет

$$a = a_0\,\mathrm{e}^{H_0(t-t_0)}, \quad H_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0\varepsilon_0 + \Lambda}{3}} = \frac{\dot{a}}{a}\bigg|_{t=t_0}. \tag{9.12}$$

Для того чтобы найти решения во фридмановскую эпоху, введем $f(a) = \dot{a}$ в (9.11):

$$f = \dot{a} = \sqrt{\frac{(m-2)\Lambda a^m + 6b^2}{3(m-2)a^{m-2}}},$$

обозначив затем $u = a^m$, получим уравнение

$$\dot{u} = m\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\sqrt{u^2 + u\frac{6b^2}{\Lambda(m-2)}}$$

с решением

$$2u\sqrt{1 + \frac{1}{u}\frac{6b^2}{\Lambda(m-2)}}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{u}\frac{6b^2}{\Lambda(m-2)}}\right] = \mathrm{e}^{m\sqrt{\Lambda/3}(t_0-t)}.$$

При $\Lambda = 0$ в радиационно-доминантную эру

$$a(t) = a_0\,(2H_0t)^{1/2},$$

а для пылевидной Вселенной (в эру преобладания вещества)

$$a(t) = a_0\left(\frac{3}{2}H_0t\right)^{2/3},$$

где H_0 — постоянная Хаббла (см. приложение).

Аргументы в пользу введения космологической постоянной в ОТО можно считать достаточно убедительными, поэтому попробуем ввести аналогичную величину в теорию ЙБД. Предположим при этом, что новое поле должно быть скалярным, но не может быть динамическим — его изменения должны управляться гравитационным скаляром $y = y(x^\mu)$. Приняв это, введем в действие теории ЙБД «космологический» скаляр $\phi = \phi(y)$ аналогично тому, как вводится космологическая постоянная в действие ОТО. Функциональную зависимость $\phi(y)$ можно будет установить, исходя из факта существования «собственного» и «эйнштейновского» представлений теории ЙБД в конформно соответствующих пространствах (см. утверждение 3), требуя, чтобы в «эйнштейновском» представлении $\phi(y)$ обращалось в космологическую постоянную. Действуя в таком духе, для теории ЙБД с космологическим скаляром $\phi = \phi(y)$ найдем

$$W = \int \sqrt{-g}\left[-\frac{y}{16\pi}\left(R + 2\phi(y) - \zeta\frac{y^\mu y_\mu}{y^2}\right) + L_m\right]d^4x, \tag{9.13}$$

$$\nabla_\alpha y^\alpha = \frac{8\pi T}{3+2\zeta} + \frac{2y}{3+2\zeta}\left(\phi - y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right), \tag{9.14}$$

$$G^\mu_\nu = \frac{8\pi}{y}\left(T^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu\frac{T}{3+2\zeta}\right) + \frac{\nabla_\nu y^\mu}{y} + \zeta\left(\frac{y_\nu y^\mu}{y^2} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\frac{y_\alpha y^\alpha}{y^2}\right) + \\ + \frac{\delta^\mu_\nu}{3+2\zeta}\left[(1+2\zeta)\,\phi + 2y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]. \tag{9.15}$$

Согласно (9.14) космологический скаляр $\phi = \phi(y)$ является одним из источников, порождающих $y = y(x^\mu)$. В логическом плане это обстоятельство выглядит неубедительно. Естественным представляется или отсутствие слагаемого с $\phi(y)$ в (9.14), что возможно при $\phi = \mathrm{const}\cdot y$, или обращение его в константу при $\phi = \mathrm{const}/y$. Сформулированное выше требование обращения скаляра $\phi(y)$ в космологическую постоянную Λ в «эйнштейновском» представлении теории дает ожидаемый результат

$$\phi(y) = Ay, \quad A = \frac{3+2\zeta}{2(2+\zeta)}\frac{\Lambda}{y_0}. \tag{9.16}$$

В метрике ФРУ (с переобозначенным во избежание путаницы с ОТО масштабным фактором — $R(t)$ вместо $a(t)$) уравнения (9.14) и (9.15) вместе с (9.8) превращаются в систему, определяющую решение космологической задачи теории ЙБД:

$$3\left(\frac{\dot R^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right) = \frac{8\pi}{y}\varepsilon + \frac{\zeta}{2}\frac{\dot y^2}{y^2} - \frac{3\dot R}{R}\frac{\dot y}{y} + \frac{3+2\zeta}{2(2+\zeta)}\frac{\Lambda}{y_0}y, \tag{9.17}$$

$$\frac{1}{R^3}\frac{d(\dot y R^3)}{dt} = \frac{8\pi}{(3+2\zeta)}\varepsilon(1-3\alpha), \tag{9.18}$$

$$\frac{d(\varepsilon R^{3(1+\alpha)})}{dt} = 0. \tag{9.19}$$

Согласно утверждению 3 в «эйнштейновском» представлении после конформных преобразований (9.17)–(9.19) обращаются в уравнения ОТО с минимально связанным скалярным полем и переобозначенной константой тяготения:

$$3\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)=\kappa\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\dot\psi^2\right)+\Lambda,\quad a=\sqrt{\frac{y}{y_0}}R,\quad \kappa=\frac{8\pi}{y_0},\tag{9.20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(a^3\dot\psi\right)=0,\quad \dot\psi=\sqrt{\frac{3+2\zeta}{2\kappa}}\frac{\dot y}{y},\tag{9.21}$$

$$\frac{d(\varepsilon a^{3(1+\alpha)})}{dt}=0\implies \varepsilon=\varepsilon_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\alpha)}.\tag{9.22}$$

Для решения этой системы исключим $\dot\psi$, сложив (9.20) с оставшимся уравнением «эйнштейновского» представления теории

$$\frac{2\ddot a}{a}+\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{k}{a^2}=-\kappa\left(\alpha\varepsilon+\frac{1}{2}\dot\psi^2\right)+\Lambda,$$

что с учетом (9.22) дает

$$a^{3(1+\alpha)}\left[\frac{\ddot a}{a}+2\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)-\Lambda\right]=E_0,\quad E_0=\frac{\kappa}{2}(1-\alpha)\varepsilon_0 a_0^{3(1+\alpha)}.\tag{9.23}$$

После однократного интегрирования имеем

$$\dot a=a\sqrt{\frac{\Lambda}{3}-\frac{k}{a^2}+\frac{2E_0}{3(1-\alpha)}a^{-3(1+\alpha)}}.\tag{9.24}$$

Интегрируя последнее для случая $\alpha=-1$, получаем

$$a+\sqrt{a^2-k/\chi^2}=a_0\left(1+\frac{H}{\chi}\right)\mathrm{e}^{-\chi(t_0-t)},\tag{9.25}$$

где

$$\chi^2=\frac{\kappa\varepsilon_0+\Lambda}{3},\quad \kappa=\frac{4\pi G(3+2\zeta)}{2+\zeta},\quad H^2=\chi^2-\frac{k}{a_0^2}.$$

Для потенциала минимально связанного скалярного поля «эйнштейновского» представления из (9.21) при $k=0$ найдем

$$\psi=\psi_0\,\mathrm{e}^{3\chi(t_0-t)},\tag{9.26}$$

а для гравитационного скаляра

$$y=y_0\,\mathrm{e}^{\eta(\psi-\psi_0)},\quad \eta=\sqrt{\frac{2\kappa}{3+2\zeta}},\tag{9.27}$$

что позволяет определить космологический скаляр (9.16), масштабный фактор в «собственном» представлении теории ЙБД

$$R = \frac{y_0}{y}a = A(t)\,\mathrm{e}^{-\chi(t_0-t)}, \quad A(t) = a_0\,\mathrm{e}^{-\eta(\psi-\psi_0)} \tag{9.28}$$

и тем самым найти аналог решения де Ситтера [115] в теории ЙБД.

Положив в (9.24) $\Lambda = 0$, таким же путем можно получить решения, аналогичные фридмановским.

Система (9.17)–(9.19) состоит из одного уравнения второго порядка и двух уравнений первого порядка, поэтому определение трех неизвестных функций $R(t)$, $y(t)$, $\varepsilon(t)$ требует задания нынешнего значения четырех величин, скажем R_0, $\dot{R}_0$, y_0 и ε_0, в то время как в ОТО достаточно знания двух. Полагая, что все решения имеют сингулярность при $R = 0$ в конечный момент времени ($t = t_0$ или $t = 0$), решение (9.18) можно записать как

$$\dot{y}(t)R^3(t) = \frac{8\pi}{3+2\zeta}\int_t^{t_0} \varepsilon(t')(1-3\alpha)R^3(t')dt' + C.$$

Положив $C = 0$, получим

$$\dot{y}R^3\big|_{R\to 0} \longrightarrow 0,$$

тогда семейство решений системы (9.17)–(9.19) будет трехпараметрическим. При $C \neq 0$ приходится привлекать косвенные соображения, в частности, возможно, полезной окажется заложенная в основу теории идея о замене ньютоновской постоянной тяготения гравитационным скаляром, так чтобы в каждой точке $y \sim 1/G$, положив далее $y(t) = 2(2+\zeta)/(3+2\zeta)G(t)$, можно было выбрать

$$C = -\frac{2(2+\zeta)}{3+2\zeta}\frac{R_0^3}{G_0}k_0, \quad k_0 = \frac{\dot{G}}{G}\bigg|_{t=t_0}.$$

(Уместно отметить, что на сегодняшний день имеются данные о медленных — на уровне 10^{-10} лет$^{-1}$ — вариациях гравитационной константы со временем [113, 114].) Другая возможность состоит в согласующемся с соотношением Шамы (1.2) выборе логарифмических скоростей убывания гравитационного скаляра и расширения Вселенной пропорциональными друг другу [116]:

$$\frac{\dot{y}}{y} \sim -\frac{\dot{R}}{R}.$$

Разумеется, точная связь между этими величинами должна быть подобрана в соответствии с системой уравнений задачи.

Космологические уравнения теории ЙБД обладают довольно тонкими свойствами, и лишь в редких случаях удается решить их аналитически. В частности, попытки найти аналитическое решение системы (9.17)–(9.19) даже в простом случае отсутствия вещества и при $k = 0$ оказываются безрезультатными. Действительно, введем

$$H = \dot{R}/R, \quad \psi = \dot{y}/y,$$

тогда вместо (9.17)–(9.19) получим

$$\dot{\psi} + \psi^2 = -3H\psi, \quad 2\dot{H} + \zeta\psi^2 = 4H\psi.$$

Исключим H и после ряда преобразований найдем

$$\frac{\dot{y}}{y} = \sqrt{y}\left(C_1 y^{\chi} + C_2 y^{-\chi}\right), \quad \chi = \frac{\sqrt{3(3+2\zeta)}}{2}.$$

Теперь ясно, что для определения зависимости $y(t)$ и $R(t)$ необходимо использовать численные методы. Однако если сузить класс решений, наложив на этом этапе требование

$$\dot{y}\big|_{\zeta\to\infty} = 0,$$

то задача упрощается и допускает аналитическое решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обзор планировался как *краткое* описание основных положений и некоторых результатов тензорно-скалярной теории тяготения Йордана–Бранса–Дикке, что адекватно отражено в его названии. Подробное обсуждение изложенных результатов привело бы к значительному увеличению объема работы и не входило в наши планы. Насколько удалось осуществить задуманное — судить читателю.

Приложение

НАБЛЮДАЕМЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

1. *Параметр Хаббла*

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad H(t)\big|_{t=0} = H_0 \text{ — постоянная Хаббла}$$

(индексом 0 снабжены величины в настоящий момент). Современные измерения (эксперимент WMAP [117]) дают

$$H_0 = h(9,7778 \cdot 10^9 \text{ лет})^{-1}, \quad h = 0,71 \pm 0,07,$$

$$H_0 = 65 \pm 7 \text{ км/(с} \cdot \text{Мпк)}, \quad 1 \text{ пк} = 3,0857 \cdot 10^{16} \text{ лет}.$$

Возраст Вселенной, определенный в том же эксперименте WMAP,

$$t_0 = (13,7 \pm 0,2) \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

2. *Параметр замедления*

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad q(t)\,|_{t=0} = q_0.$$

3. *Критическая плотность (не энергии!)*

$$\rho_{\text{кр}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

4. *Современная плотность всех типов материи*

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{k}{a_0^2} + H_0^2\right),$$

$$\frac{k}{a_0^2} = (2q_0 - 1)H_0^2, \quad 2q_0 = \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Эксперимент WMAP дает

$$2q_0 = 1,02 \pm 0,02.$$

5. *Параметр красного смещения*

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1, \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0}.$$

Индекс 0 относится к наблюдаемой в текущий момент величине, а индекс 1 — к той же величине в момент излучения t_1.

6. *Реликтовый фон*

Установлено наличие в высшей степени изотропного электромагнитного фонового излучения с планковской формой спектра

$$70 \text{ см} > \lambda > 1 \text{ мм}, \quad T \sim 3 \text{ K}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике. М.: Энергоатомиздат, 1985.
2. *Амбарцумян В. А.* Нестационарные явления в Галактике. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969.
3. *Амбарцумян В. А.* Нестационарные объекты во Вселенной и их значение для исследования происхождения и эволюции небесных тел // Проблемы современной космогонии: Сб. М., 1972.

4. *Гинзбург В. Л.* // Гравитация. Проблемы и перспективы: Сб. Киев, 1972.
5. *Weeler J. A.* // Relativity, groups and topology. N. Y., 1964.
6. *Меллер К.* // Астрофизика, кванты и теория относительности: Сб. М., 1982.
7. *Papapetrou A.* // Proc. Roy. Irish Acad. A. 1948. V. 52. P. 11.
8. *Меллер К.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975.
9. *Фаддеев Л. Д.* // УФН. 1982. Т. 136. С. 436.
10. *Зельдович Я. Б., Грищук Л. П.* // УФН. 1986. Т. 149. С. 495.
11. *Черников Н. А.* // ЭЧАЯ. 1987. Т. 18, вып. 5. С. 1011.
12. *Rosen N.* // Gen. Rel. Grav. 1973. V. 4. P. 435.
13. *Логунов А. А.* Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2001.
14. *Черников Н. А.* Сообщение ОИЯИ Р2-89-224. Дубна, 1989.
15. *Jordan P.* Schwercraft und Weltall. Braunschwexig, 1955.
16. *Jordan P.* // Z. Physik. 1959. V. 157. P. 112.
17. *Brans C., Dicke R.* // Phys. Rev. 1961. V. 124. P. 925.
18. *Brans C.* // Phys. Rev. 1962. V. 125. P. 2194.
19. *Саакян Г. С.* Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. М.: Наука, 1972.
20. *Саакян Г. С.* // Гравитация. Проблемы и перспективы: Сб. Киев, 1972.
21. *Singh R. H., Ray L. N.* // Gen. Rel. Grav. 1983. V. 15. P. 875.
22. *Калуца Т.* // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. М., 1979.
23. *Klein O.* // Zs. Phys. 1926. V. 37. P. 895.
24. *Einstein A., Bergmann P.* // Ann. Math. 1938. V. 39. P. 683.
25. *Dirac P. A. M.* // Proc. Roy. Soc. A. 1938. V. 165. P. 189.
26. *Dirac P. A. M.* // Proc. Roy. Soc. A. 1974. V. 338. P. 439.
27. *Sciama D. W.* // Mon. Not. Roy. Astronom. Soc. 1953. V. 113. P. 34.
28. *Эйнштейн А.* Сущность теории относительности. М.: Иностр. лит., 1955.
29. *Дикке Р.* Многоликий Мах // Гравитация и относительность: Сб. М., 1965.
30. *Dicke R.* // Relativity, groups and topology. N. Y., 1964.
31. *Weyl H.* Raum, Zeit, Materie. Berlin, 1923.
32. *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1983.
33. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
34. *Dicke R.* // Phys. Rev. 1962. V. 125. P. 2163.
35. *Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Астрофизика. 2001. Т. 44, вып. 3. С. 483.
36. *Haroutyunian G., Papoyan V.* // ЭЧАЯ. 2002. Т. 33, вып. 7. С. 114.
37. *Eddington A.* Fundamental Theory. London: Cambridge Univ. Press, 1948.
38. *Bekenshtein J. D.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1974. V. 82. P. 535.
39. *Penrose R.* // Relativity, groups and topology. N. Y., 1964.
40. *Chernikov N., Tagirov E.* // Ann. Inst. Henri Poincare. 1968. V. 9. P. 109.

41. *Мельников В. Н.* // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц: Сб. М., 1980. Вып. 11. С. 164.
42. *Крамер Д. и др.* Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоатомиздат, 1983.
43. *Фок В. А.* Теория пространства-времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1955.
44. *Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Астрофизика. 1986. Т. 25. С. 217.
45. *Papoyan V.* // Ap. Space Sci. 1986. V. 124. P. 335.
46. *Weyl H.* // Ann. Phys. (Leipzig). 1917. V. 54. P. 117.
47. *Bonnor W. B.* // J. Phys. 1961. V. 161. P. 439.
48. *Белинский В. А., Захаров В. Е.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. С. 1953.
49. *Белинский В. А., Захаров В. Е.* // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. С. 3.
50. *Maison D.* // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 521.
51. *Белинский В. А.* // Письма ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 32.
52. *Алексеев Г. А.* // Докл. АН СССР. 1980. Т. 256. С. 827.
53. *Алексеев Г. А.* // Письма ЖЭТФ. 1980. Т. 32. С. 301.
54. *Harrison B.* // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 1197.
55. *Neugebauer G., Kramer D.* // Gen. Rel. Grav. 1981. V. 13. P. 195.
56. *Авакян Р. М.* // Астрофизика. 1990. Т. 33. С. 429.
57. *Папоян В. В.* Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ереван: Изд-во Ереванск. ун-та, 1990.
58. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
59. *Asanov R.* JINR Preprint E2-87-619. Dubna, 1987.
60. *Авакян Р. М.* // Точные решения уравнений гравитационного поля и их физическая интерпретация: Сб. Тарту, 1988.
61. *Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Астрофизика. 1984. Т. 21, вып. 3. С. 587.
62. *Haroutyunian G., Papoyan V.* // Ap. Space Sci. 1985. V. 117. P. 189.
63. *Станюкович К. П., Мельников В. Н.* Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1983.
64. *Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Астрофизика. 1989. Т. 30. С. 409.
65. *Zipoy D.* // J. Math. Phys. 1966. V. 7. P. 1137.
66. *Ernst F. G.* // Phys. Rev. 1968. V. 167. P. 1175.
67. *Ernst F. G.* // Ibid. V. 168. P. 1415.
68. *Hartle J. B.* // Astrophys. J. 1967. V. 150. P. 1005.
69. *Thorne K. S., Hartle J. B.* // Astrophys. J. 1968. V. 153. P. 807.
70. *Седракян Д. М., Чубарян Э. В.* // Астрофизика. 1968. Т. 4. С. 239.
71. *Тассуль Ж.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982.
72. *Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э.В .* // Астроном. журн. 1971. Т. 48. С. 1195.
73. *Kerr R.* // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 18.
74. *Reina C., Treves A.* // Gen. Rev. Grav. 1976. V. 7. P. 817.
75. *Tomimatsu A., Sato H.* // Progr. Theor. Phys. 1973. V. 50. P. 95.
76. *Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Астрофизика. 1990. Т. 32. С. 453.

77. *Авакян Р. М., Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Там же. С. 465.
78. *Papoyan V., Haroutyunian G.* // Proc. of Intern. Workshop «Finite Dimensional Integrable Systems». Dubna, 1995. P. 153; JINR Preprint E2-95-36. Dubna, 1995.
79. *Wahlquist H. D.* // Phys. Rev. 1968. V. 172. P. 1291.
80. *Bonanos S., Sklavenites D.* // J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 2275.
81. *Sklavenites D.* // Ibid. P. 2279.
82. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1982.
83. *Taub A. U.* // Ann. Math. 1951. V. 53. P. 472.
84. *Schwarzschild K.* // Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. V. 424.
85. *Collinson C.* // Gen. Rel. Grav. 1976. V. 7. P. 419.
86. *Newman E., Tamburino L., Unti T.* // J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 915.
87. *Bonnor W. B.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1969. V. 66. P. 145.
88. *Sackfield A.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1971. V. 70. P. 89.
89. *Чандрасекар С.* Математическая теория черных дыр. М.: Мир, 1986.
90. *Саакян Г. С.* Физика нейтронных звезд. Дубна, 1995.
91. *Thorne K. S., Dykla I. J.* Preprint OAP-237. 1971.
92. *Matsuda T.* // Progr. Theor. Phys. 1972. V. 47(2). P. 738.
93. *Nariai H.* // Ibid. V. 47(3). P. 832.
94. *Scheel M. A., Shapiro S. L., Teukolsky S. A.* // Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 4208; 4236.
95. *Janis A., Newman E., Winicour J.* // Phys. Rev. Lett. 1968. V. 20. P. 878.
96. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
97. *Авакян Р. М., Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Астрофизика. 1990. Т. 33. С. 79.
98. *Арутюнян Г. Г. и др.* // Астрофизика. 1994. Т. 37. С. 527.
99. *Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Астрофизика. 1995. Т. 38. С. 433.
100. *Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж.* Гравитация. М.: Мир, 1977.
101. *Garnvich P. M.* // Astrophys. J. 1998. V. 509. P. 74.
102. *Perlmutter S. et al.* // Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 565.
103. *Weinberg S.* // Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. P. 1.
104. *Guth A. H.* // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 347.
105. *Linde A. D.* // Phys. Lett. B. 1982. V. 108. P. 389.
106. *Starobinski A. A.* // Ibid. V. 117. P. 175.
107. *Caldwell R. R., Steinhardt P. J.* // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 6057.
108. *Герштейн С. С. и др.* Препринт ИФВЭ 2003-13. Протвино, 2003.
109. *Сахаров А. Д.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1253.
110. *Аман Э. Г., Марков М. А.* // ТМФ. 1984. Т. 58. С. 163.
111. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974.
112. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.
113. *Van Flandern T.* // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1975. V. 262. P. 494.
114. *Van Flandern T.* // Abstr. of the 2nd Intern. Conf. on Precission Measurements and Fundamental Constants, Boudler, USA, 1981. P. 220.
115. *de Sitter W.* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1917. V. 78. P. 3.
116. *Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.* // Астрофизика. 1994. Т. 37, вып. 2. С. 339.
117. *Bennet C. et al.* astro-ph/0302207. 2003. V. 2.