«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1999, ТОМ 30, ВЫП. 1

УДК 539.12.01

РЕДУКЦИЯ В СИСТЕМАХ С ЛОКАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

С.А.Гогилидзе

ИФВЭ Тбилисского государственного университета, 380086, Тбилиси, Грузия

В.Н.Первушин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

А.М.Хведелидзе

Тбилисский математический институт, 380086, Тбилиси, Грузия

¶ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА¶
1999, ТОМ 30, ВЫП. 1

УДК 539.12.01

РЕДУКЦИЯ В СИСТЕМАХ С ЛОКАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

С.А.Гогилидзе

ИФВЭ Тбилисского государственного университета, 380086, Тбилиси, Грузия

В.Н.Первушин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

А.М.Хведелидзе

Тбилисский математический институт, 380086, Тбилиси, Грузия

Обзор посвящен проблематике, связанной с изучением динамических систем с конечным числом степеней свободы, обладающих локальной симметрией. В рамках классической лагранжевой и гамильтоновой теории обсуждается процедура редукции системы динамических уравнений к так называемому нормальному виду, когда задача Коши имеет единственное решение. Основное внимание уделено изложению геометрической схемы редукции, которая позволяет выделить физическое подпространство в фазовом пространстве вырожденной динамической системы и найти в явном виде соответствующие канонические переменные без введения в теорию дополнительных калибровочных условий, калибровок. На основе сравнения двух методов редукции — геометрического и с помощью фиксации калибровки — обсуждается вопрос об условиях на калибровки, гарантирующих корректность процедуры редукции.

The review is devoted to the discussion of problems connected with the description of dynamical systems with finite a number of degrees of freedom, which possesses local symmetry. In the framework of the classical Lagrangian and Hamiltonian theory the geometric scheme of reduction of degenerate dynamical equations to the normal form, which admits the correct Cauchy problem with a unique solution is described. The main task of the review is to state geometrical problems of constructing physical subspace in degenerate Hamiltonian systems in an explicit form without introducing additional gauge fixing conditions into the theory. Two approaches to the reduction procedure, the geometrical and gauge fixing methods, are compared with the aim to get requirements to the gauge fixing conditions, which guarantee the correctness of gauge fixing reduction.

1. ВВЕДЕНИЕ

Лагранжевы системы с функционалом действия, инвариантным относительно локальных преобразований обобщенных координат, т.е. преобразований с параметрами, которые являются произвольными функциями от пространственно-временных переменных, принадлежат к классу так называемых вырожденных лагранжевых систем. История исследования *вырожден-*

ных лагранжевых систем, несмотря на почтенный возраст самой классической механики,* насчитывает не более полувека. Начало их систематическому анализу, инициированное потребностью гамильтоновой формулировки задач электродинамики и теории гравитации, было положено в конце 40-х годов нашего столетия в работах Дирака [2] и Бергмана [3]. В них были сформулированы принципы новой теории, получившей название обобщенной гамильтоновой динамики или формализма Дирака — Бергмана. Как показало дальнейшее развитие науки, этот формализм стал неотъемлемой частью квантово-полевого описания всех фундаментальных взаимодействий. Теория гравитации, единая теория электрослабых и сильных взаимодействий, модели большого объединения — все это теоретико-полевые модели с обобщенной гамильтоновой динамикой, вырожденность которой связана с той или иной локальной инвариантностью — *репараметрической* или *калибровочной*.

В современной литературе, посвященной различным аспектам обобщенной гамильтоновой теории, существует большое количество очень хороших книг и обзоров [4]**, после ознакомления с которыми возникает ощущение ее "освежающей непохожести" на теорию невырожденных динамических систем. Наиболее важным и ярким проявлением подобного своеобразия является так называемая процедура *редукции* вырожденной теории, состоящая в регулярном способе построения невырожденной теории, "эквивалентной" исходной вырожденной за счет исключения части "несущественных" переменных. Редукция в вырожденных теориях, несмотря на все ее особенности, представляет собой определенное обобщение хорошо известной с конца прошлого века операции исключения *циклических*, или, по-другому, *игнорируемых* координат, которая имеет место в системах, обладающих непрерывной симметрией, связанной с действием группы Ли. Как и в случае редукции числа степеней свободы в классической механике, редукция в вырожденных динамических системах также обязана чисто геометрическим, симметрийным принципам, лежащим в основе теории. Обсуждение этих геометрических аспектов операции редукции и демонстрация ее исключительной важности в вопросе определения физического содержания калибровочных и репараметрически-инвариантных теории и составляет предмет настоящего обзора.

Геометризация динамики и наблюдаемые. Первый шаг в геометризации всех видов взаимодействия после эйнштейновской формулировки общей теории относительности был сделан в 1918 г. Вейлем [5], когда при разработке единой теории электромагнетизма и гравитации он сформули-

---

*"Аналитическая механика" Лагранжа [1], в которой уже были представлены практически все основные принципы аналитической динамики, вышла в 1788 г.

**Безусловно, перечень [4] не претендует на какую-либо полноту, а всего лишь отражает вкусы и пристрастия авторов.

ровал принцип локальной масштабной инвариантности теории как некий геометрический принцип, объясняющий существование электромагнитного поля. Однако решающей идеей, давшей начало современной геометрической трактовке взаимодействия в терминах связностей в главном расслоенном пространстве*, стала идея заменить группу масштабных преобразований в гравитации на группу локальных фазовых преобразований в зарядовом пространстве электродинамики. А ее обобщение, после формулировки Янгом и Миллсом в 1954 году классической теории неабелевых полей [8], окончательно превратило принцип локальной калибровочной инвариантности в геометрическую основу конструирования квантово-полевых моделей фундаментальных взаимодействий. Подобная формулировка динамики фундаментальных полей исключительно в геометрических терминах приводит с необходимостью к вырожденной теории и наряду с математическим изяществом и прозрачностью основных положений требует решения сложной проблемы, не имеющей аналога в невырожденном случае. Принцип локальной инвариантности, с одной стороны, приписывает физический смысл лишь инвариантным величинам, и с другой — требует присутствия в теории "лишних" степеней свободы, не проявляющихся в наблюдаемых эффектах**. Последнее требование означает, что корректная постановка физической задачи подразумевает возможность построения на базе исходных геометрических переменных новых, но уже наблюдаемых (физических) переменных, в терминах которых физическая реальность будет описываться однозначно, без "лишних" элементов. Однако ясно, что без однозначной и эффективной схемы подобной идентификации наблюдаемых физических величин с исходными фундаментальными геометрическими переменными теория не является полной и конструктивной. Процедура редукции призвана осуществлять такого рода идентификацию физических величин с затравочными геометрическими, выделяя в теории с локальной симметрией так называемые физический и нефизический секторы. В настоящем обзоре будут изложены две схемы редукции. После краткого описания стандартного подхода, основанного на методе *"фиксации калибровки"* мы подробно проанализируем альтернативный *"геометрический"* или *"бескалибровочный"* метод. При этом преследуются две цели: изложить саму схему геометрической редукции и проанализировать те ограничения, которые сле-

---

*С основами теории расслоенных пространств можно ознакомиться по классической книге А.Лихнеровича [6] и учебнику [7], а анализ геометрических аспектов формулировки теорий поля с локальной симметрией можно найти в монографии Н.П.Коноплевой и В.Н.Попова [4].

**Интересно, что формулировка физических теорий на основе принципа локальной симметрии оказалась в определенном смысле реализацией гипотезы Герца о бессиловом характере взаимодействий. Стремление изъять понятие силы из механики и заменить ее действие эффектами скрытых ненаблюдаемых связей было главным побудительным мотивом новой формулировки механики, изложенной в его знаменитой книге "Принципы механики" [9].

дуют из нее, на традиционный метод фиксации калибровки в обобщенной гамильтоновой динамике.

Редукция в методе фиксации калибровки. Исторически первый опыт обращения с нефизическими степенями свободы возник в рамках классической электродинамики после того, как в начале XX века в связи с желанием вывести уравнения Максвелла из вариационного принципа было введено понятие вектор-потенциала электромагнитного поля*. Расплатой оказалось отсутствие взаимооднозначной связи между напряженностями электрического и магнитного полей и вектор-потенциалом, приведшее к тому, что в теории возникли переменные, не поддающиеся наблюдению. В рамках классической электродинамики подобный функциональный произвол, привнесенный введением в теорию ненаблюдаемых степеней свободы, не доставил особых трудностей, поскольку была известна простая связь между вектор-потенциалом электромагнитного поля и наблюдаемыми величинами — напряженностями электрического и магнитного полей. Добавив к уравнениям движения какое-либо дополнительное условие, например, условия Кулона, нефизические компоненты вектор-потенциала удается исключить полностью. В результате чего в теории возникает взаимооднозначное соответствие между наблюдаемыми и исходными фундаментальными переменными. Потребность в обобщении этой простой конструкции, применяемой в электродинамике, на случай канонической формулировки гравитации привела Дирака к развитию общей схемы редукции фазового пространства вырожденных систем, получившей название метода фиксации калибровки [11]**. Этот способ идентификации физических степеней свободы, основанный на введении в теорию дополнительных условий, калибровок, устраняющих нефизические степени свободы, стал традиционным методом, применяемым как в классической, так и в квантовой теории вырожденных систем с локальными симметриями.

Представление для матрицы рассеяния неабелевых полей в виде континуального интеграла [12], полученное с использованием метода фиксации калибровок, с успехом было применено в решении целого ряда пертурбативных задач теорий электрослабых и сильных взаимодействий. В дальнейшем, однако, оказалось, что вне рамок теории возмущений в методе фиксации калибровки возникает трудность принципиального характера, так называемая проблема неоднозначностей Грибова [13]. Грибовский анализ дополнительного условия Кулона и дальнейший топологический запрет Зингера на глобальную калибровку в неабелевой теории [14, 15] указали на необходимость

*Историю решения этой задачи в работах Лармора, Лоренца, Шварцшильда и Пуанкаре можно проследить по книге [10].

**Полученное Дираком решение задачи редукции замечательным образом выражается в эффективном сокращении числа степеней свободы за счет замены скобок Пуассона на скобки Дирака [2].

строгого определения класса допустимых калибровок. Хотя на сегодняшний день хорошо известно необходимое условие принадлежности калибровочных функций к классу допустимых — отличие от нуля детерминанта Фаддеева — Попова, вопрос о достаточных условиях на калибровки, гарантирующих корректность выделения физического пространства, остается открытым. Ясно, что решение задачи определения допустимых калибровок в обобщенной гамильтоновой динамике невозможно без детального знания самой структуры физического и нефизического секторов теории. Поэтому приобретает особую значимость альтернативная схема редукции, основанная на явном разделении этих секторов, без введения каких-либо дополнительных калибровочных условий. Такую схему мы будем называть *геометрической*, отдавая дань геометрическому подходу в групповом анализе дифференциальных уравнений, или *бескалибровочной*, тем самым подчеркивая ее альтернативность традиционному методу.

Редукция в геометрических терминах. Изложенная в обзоре схема описания редукции без привлечения калибровочных условий имеет своими корнями хорошо известную операцию редукции, или понижения порядка дифференциальных уравнений, допускающих симметрию относительно действия группы Ли [16—19] . Операция редукции за счет соответствующих интегралов движения применялась, начиная с работ Якоби, Ли и Пуанкаре, либо с целью упрощения исходной системы уравнений, либо для доказательства их интегрируемости в квадратурах. Введение понятия о некоммутативно интегрируемых системах [20] привело к обобщению метода понижения порядка уравнений с помощью инволютивных интегралов движения на случай интегралов, образующих некую алгебру Ли. Метод геометрической редукции являет собой обобщение этих идей на случай симметрии гамильтоновых систем, связанных с действием бесконечномерных групп Ли и псевдогрупп Ли [21]. Проблема редукции вырожденных лагранжевых систем соответствует задаче, поставленной еще Ли: "Для данного уравнения и допускаемой им группы симметрии найти уравнения орбит любых его решений и уравнения, решения которых определяют совокупность всех орбит" [18]. Такое расщепление уравнений на *разрешающую* систему, определяющую семейство неэквивалентных решений, и *автоморфную систему*, которая задает для каждого решения разрешающей системы множество ей эквивалентных, получило название группового разложения системы дифференциальных уравнений или расслоения Ли — Вессио [18, 19]. В терминах, применяемых в физических приложениях, данное расщепление означает разделение уравнений движения на калибровочно-инвариантный и чисто калибровочный секторы. С подобной точки зрения задача Коши в вырожденных лагранжевых и гамильтоновых системах наиболее четко была сформулирована в работе [22], где был применен метод Леви-Чивита решения задачи редукции системы дифференциальных уравнений с инволютивными инвариантными соотношениями [23].

Обобщение данного метода на случай неинволютивных инвариантных соотношений, образующих псевдоалгебру Ли, невозможно без разработки эффективного метода перехода к эквивалентному набору инволютивных связей или *абелизации связей* в физической терминологии*. В настоящем обзоре будут рассмотрены два способа абелизации связей. Первый основан на процедуре разрешения связей ([4], Henneaux M. Teitelboim C.), конструктивность и безболезненность которой ничем не гарантирована, второй метод [26, 27] связан с применением допустимых в вырожденных системах обобщенных канонических преобразований.

План изложения. Для последовательного изложения всей геометрической схемы редукции, включая и процедуру абелизации связей, нам потребуются некоторые сведения из теории вырожденных динамических систем. Стараясь не дублировать изложение хорошо известных фактов, мы конспективно изложим основные определения и прямо начнем с вопроса о постановке задачи Коши в лагранжевом и гамильтоновом подходах для вырожденных динамических систем. Далее основное внимание сосредоточим на изложении метода бескалибровочной редукции в фазовом пространстве и перейдем к вопросу о допустимых калибровочных условиях. Все изложение будет вестись в рамках механических систем с конечным числом степеней свободы и без обсуждения возможных топологических препятствий. В данном обзоре мы ограничимся координатным описанием процедуры редукции. С геометрическим, бескоординатным описанием невырожденных механических систем можно ознакомиться по книгам [28—31], а с соответствующими аспектами вырожденных теорий — по статьям [32—36] .

2. ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

Начнем с конспективного изложения тех положений лагранжевой формулировки теории вырожденных систем, которые особенно важны с точки зрения проблемы редукции и постановки задачи Коши.

Обобщенные лагранжевы координаты и эволюция. Конфигурация классической лагранжевой системы с N степенями свободы в некий момент времени $t = T$ задается набором чисел $q_i(T)$, $(i = 1, \ldots, N)$. Множество всевозможных конфигураций M принято называть конфигурационным пространством, величины q_i — обобщенными лагранжевыми координатами, а эволюция системы есть изменение конфигурации системы с течением времени, при котором точка q_i описывает на многообразии M некую кривую — классиче-

*Корни этой операции можно найти в известной теореме Ли — Картана из теории функциональных групп [24, 25].

скую траекторию системы. Задачей классической механики является описание эволюции системы, то есть определение ее классической траектории.

Принцип классического детерминизма. Классическая траектория в конфигурационном пространстве определяется как решение дифференциальных уравнений движения. Основное требование, предъявляемое к динамическим уравнениям, заключается в выполнении принципа "классического детерминизма" Ньютона – Лапласа, математическая формулировка которого состоит в возможности однозначного определения конфигурации системы в произвольный момент времени t на основе знания значений обобщенных координат $q_i(t)$, вместе с производными по времени до некоторого порядка (скоростей, ускорений) в любой фиксированный момент времени $t = T$. Иными словами, дифференциальные уравнения движения должны допускать корректную постановку задачи Коши.

Принцип наименьшего действия и уравнения движения. Важнейшее открытие классической механики состоит в возможности вывода подобных дифференциальных уравнений движения из той или иной вариационной задачи. Известно большое разнообразие вариационных принципов, история и анализ формулировок которых систематически изложен в замечательных книгах $[23, 37]$. В современных теоретико-полевых формулировках обычно исходят из принципа наименьшего действия Гамильтона — Остроградского, согласно которому уравнения движения для классической траектории — уравнения Эйлера — Лагранжа — следуют из условия существования экстремума, так называемого функционала действия*. Если точнее, то предполагается существование интеграла

$$\mathcal{S}\,[q] = \int dt \mathcal{L}\left(q, \frac{dq}{dt}, \frac{d^2q}{dt^2}, \dots, \frac{d^kq}{dt^k}, t\right), \tag{2.1}$$

задаваемого посредством лагранжиана системы $\mathcal{L}$ — функции от обобщенных лагранжевых координат и их производных по времени вплоть до некого k-ого порядка. Лагранжиан определяет динамику системы из условия того, что классическая траектория является экстремалью фукционала действия $\mathcal{S}$ при определенных граничных условиях на вариации. Большой класс динамических систем, встречающихся в природе, описывается уравнениями второго порядка, поэтому обычно ограничиваются рассмотрением лагранжианов, которые являются функциями от координат и их первых производных по

*Вопросы о границах применимости вариационных принципов — отдельная очень интересная задача, в связи с ней заметим, например, что интегральный принцип Гамильтона — Остроградского в стандартной формулировке верен лишь для голономных систем, в то время как другой, хорошо известный принцип Гаусса — Герца [23] применим и к неголономным системам [37].

времени*. В этом случае необходимым условием экстремума действия

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \tag{2.2}$$

с граничными условиями на вариации $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ является выполнение уравнений Эйлера — Лагранжа** для функций $q_i(t)$:

$$L_i[q] := \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{2.3}$$

которые можно переписать в форме

$$W_{ij}\ddot{q}_j - l_i = 0, \tag{2.4}$$

если ввести следующие обозначения:

$$W_{ij}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \tag{2.5}$$

$$l_i(q, \dot{q}, t) = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}\dot{q}_j - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\,. \tag{2.6}$$

Матрица W_{ij} носит название матрицы Гесса для системы уравнений движения (2.3). Ее детерминант, гессиан, является одной из основных характеристик механической системы. В зависимости от того, вырождена ли матрица Гесса, т.е. $\det\|W_{ij}\| = 0$, либо гесссиан отличен от нуля $\det\|W_{ij}\| \neq 0$, принято делить механические системы на *вырожденные* и *невырожденные* соответственно***. Иногда предпочитают пользоваться терминами *сингулярные* и *несингулярные*. Введение подобной градации полностью оправданно, поскольку два данных типа теорий обладают принципиально разными свойствами, начиная уже с постановки эволюционных задач.

Задача Коши в невырожденных теориях. Если теория не является вырожденной,

$$\det\|W_{ij}\| \neq 0, \tag{2.7}$$

*Интересно, что, как правило, лагранжевы теории с высшими производными координат по времени описывают объекты, обладающие некой внутренней структурой.

**Вопросы о существовании экстремума и о достаточных условиях, как правило, обходятся в физических задачах некими эвристическими соображениями. С анализом данных проблем можно ознакомиться в книге [38].

***Зануление гессиана не зависит от выбора координат, оно является инвариантной характеристикой системы с точки зрения допустимых в лагранжевом подходе несингулярных преобразований обобщенных координат.

то, считая q_i и $\dot{q}_i$ независимыми величинами, можно рассмотреть уравнения Эйлера — Лагранжа (2.3) как алгебраическую систему относительно неизвестных ускорений $\ddot{q}_i$ и разрешить их относительно вторых производных по времени

$$\ddot{q}_i = W_{ij}^{-1} l_j, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{2.8}$$

Подобная запись уравнений движения, в так называемой нормальной форме представления дифференциальных уравнений, означает выполнимость "локального" принципа "классического детерминизма" . Действительно, для уравнений Эйлера — Лагранжа, представленных в форме (2.8), всегда существует единственное решение в окрестности произвольных начальных данных, заданных в форме набора начальных координат и скоростей, поскольку для системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старшей производной, имеет место теорема Коши — Ковалевской о существовании и единственности решений.

Резюме. В случае невырожденных систем для уравнений движения Эйлера — Лагранжа (2.3) задача Коши имеет единственное решение в окрестности произвольных начальных значениий координат и скоростей.

Задача Коши в вырожденных теориях. В теориях с вырожденным лагранжианом ситуация принципиально иная. В этом случае из-за отсутствия обратной матрицы Гесса приведение к нормальной форме уравнений движения невозможно, что влечет за собой невозможность постановки классической задачи Коши. Однако при этом не исключается ее определенная модификация, которая в явной или неявной форме применяется во всех динамических задачах, связанных с вырожденными системами, пример тому — проблема Коши в гравитации и задача определения оператора эволюции в теории неабелевых калибровочных полей.

Корректная постановка задачи Коши подразумевает выполненение следующих пунктов:

а) существование решения,

б) единственность решения,

в) произвольность начальных данных.

Возможная модификация, очевидно, состоит лишь в отказе от соблюдения пунктов (а) и (в). Поэтому всюду в дальнейшем предполагается, что вырожденная теория непротиворечива в смысле существования решения, и возможна лишь (либо) его неоднозначность и (либо) существование лишь для некоторых начальных данных. Помимо этого, с точки зрения физических приложений наиболее важным представляется такая обобщенная формулировка задачи, когда в исходной вырожденной теории можно выбрать такой набор обобщенных лагранжевых координат, что для описания эволюции определенной части этих переменных задача Коши оказывается корректной в классическом смысле. Построение такого набора переменных и составляет сущность процедуры *лагранжевой редукции* вырожденных систем. Проблема лагранжевой редукции, требующая отдельного и тщательного рассмотрения, не составляет цели данного обзора, поэтому мы лишь зафиксируем ее некоторые аспекты в связи с постановкой задачи Коши.

В силу вырожденности теории ранг матрицы Гесса меньше*, чем число степеней свободы N:

$$\operatorname{rank} \parallel W_{ij}(q,\dot{q},t) \parallel = R < N. \tag{2.9}$$

В отличие от невырожденного случая теперь уравнения Эйлера — Лагранжа (2.3), рассматриваемые как система из N линейных алгебраических неоднородных уравнений с неизвестными $\ddot{q}_j$, $j = 1,\ldots,N$, разрешаются лишь относительно ускорений R, поскольку ранг основной матрицы системы равен R:

$$\ddot{q}_\alpha = Q_\alpha\left(q_1,\ldots,q_N,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_N,\ddot{q}_{R+1},...,\ddot{q}_N\right), \quad \alpha = 1,\ldots,R. \tag{2.10}$$

Действительно, из (2.9) следует существование у матрицы $\parallel W_{ij}(q,\dot{q},t) \parallel$ R линейно независимых векторов $\mu_i^a(q,\dot{q},t)$ с ненулевыми собственными значениями $\xi^a(q,\dot{q})$:

$$W_{ij}(q,\dot{q},t)\mu_i^a(q,\dot{q},t) = \xi^a(q,\dot{q},t)\mu_j^a(q,\dot{q},t) \tag{2.11}$$

и $N-R$ линейно независимых нуль-векторов $\mu^a(q,\dot{q},t)$ с нулевыми собственными значениями

$$W_{ij}(q,\dot{q},t)\mu_i^a(q,\dot{q},t) = 0, \quad i,j = 1,\ldots,N, \;\; a = 1,\ldots,N-R. \tag{2.12}$$

Свертывая собственные векторы с ненулевыми собственными значениями с уравнениями (2.3), мы получим уравнения (2.10), в то время как свертка нуль-векторов с (2.3) дает систему $N-R$ уравнений, не содержащих ускорений:

$$\chi_a(q,\dot{q},t) = l_i(q,\dot{q},t)\mu_i^a(q,\dot{q},t) = 0. \tag{2.13}$$

При анализе уравнений (2.10) и (2.13) возможны следующие варианты:

(i) уравнения несамосогласованны (противоречивы);

(ii) уравнения (2.13) выполняются тождественно;

(iii) из $N-R$ уравнений (2.13) r (r_1) уравнений являются функционально независимыми (зависимыми), а r_2 уравнений выполняются тождественно.

Вариант (i) означает отсутствие у функционала действия точек экстремума и поэтому исключается из дальнейшего анализа как случай, не представляющий физического интереса. Если имеет место (ii), т.е. все $N-R$ соотношений (2.13) выполняются тождественно, то уравнения (2.10) представляют

*В дальнейшем ранг гессиана будем считать постоянным во всей области изменения переменных $(q,\dot{q})$.

собой систему дифференциальных уравнений для R координат $(q_1, ..., q_R)$ в нормальной форме, правая часть которых зависит от неких произвольных функций $(q_{R+1}, \ldots, q_N)$. Поэтому здесь мы имеем ситуацию, когда задача Коши не имеет единственного решения; после фиксации начальных условий для координат $(q_1, \ldots, q_R)$ и соответствующих скоростей $(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_R)$ решение уравнения (2.10) содержит $N-R$ произвольных функций.

> **Резюме.** Если все $N-R$ соотношений (2.13) выполняются тождественно, то решение задачи Коши для уравнений Эйлера — Лагранжа (2.3) после фиксации начальных условий для R координат и соответствующих скоростей содержит $N-R$ произвольных функций.

Наиболее сложным для анализа оказывается третий вариант (iii), когда, вообще говоря, не все соотношения (2.13) выполняются тождественно. В этом случае $N-R$ функционально независимых соотношений дают ограничения на возможные значения обобщенных координат и скоростей — так называемые *лагранжевы связи**. Возникновение лагранжевых связей немедленно ставит вопрос о самосогласованности всей схемы, поскольку исходная вариационная задача подразумевала независимость вариаций всех координат. Для дальнейшего анализа без потери общности можно положить, что

$$\mathrm{rank} \parallel \frac{\partial \chi_a(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i}, \frac{\partial \chi_a(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \parallel = r_1 + r_2,\ r_1 + r_2 \leq N - R, \quad (2.14)$$

$$\mathrm{rank} \parallel \frac{\partial \chi_a(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \parallel = r_2. \quad (2.15)$$

Тогда соотношения (2.13) можно заменить эквивалентными $r_1 + r_2$ соотношениями вида

$$\chi_a^1(q, t) = 0, \qquad a = 1, ..., r_1, \quad (2.16)$$

$$\chi_a^2(q, \dot{q}, t) = 0, \quad a = 1, ..., r_2. \quad (2.17)$$

За функциями χ_a^1 и χ_a^2 закрепилось по традиции название *лагранжевых связей* типа A и типа B соответственно (Sudarshan E.C.G., Mukunda N. [4]). Таким образом, в сингулярном случае исходная система уравнений движения (2.3) редуцировалась в систему уравнений (2.10), (2.16) и (2.17), которую надо исследовать на непротиворечивость. Ясно, что полученная система будет непротиворечива, если связи χ_a^1 и χ_a^2 сохраняются во времени, т.е. если

*Начиная с работ Дирака, в литературе одним и тем же термином “связь” принято называть как саму функцию, так и условие ее обращения в нуль, считая, что это не вызовет недоразумения.

их полная производная по времени будет равна нулю. Анализ условий непротиворечивости начнем со связей типа A:

$$\frac{d\chi_a^1(q,t)}{dt} = \frac{\partial\chi_a^1(q,t)}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\chi_a^1(q,t)}{\partial t} = 0. \tag{2.18}$$

Если эти равенства тождественно не выполняются при учете лагранжевых связей A и B, то тогда, вообще говоря, из (2.18) возникают новые лагранжевы связи обоих типов, которые в принципе могут понизить ранг матрицы Гесса, что, в свою очередь, приведет к уменьшению числа уравнений второго порядка (2.10). Полученная таким образом система уравнений, с учетом новых лагранжевых связей типа A, заново должна быть проверена на непротиворечивость и т.д. Для непротиворечивых теорий после конечного числа шагов процесс возникновения новых связей типа A прекратится, при этом общее число связей будет меньше числа степеней свободы N. После этого необходимо провести аналогичную процедуру для связей типа B, что приводит к уравнениям

$$\frac{d\chi_a^2(q,\dot{q},t)}{dt} = \frac{\partial\chi_a^2(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial\chi_a^2(q,\dot{q},t)}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\chi_a^2(q,\dot{q},t)}{\partial t} = 0. \tag{2.19}$$

Если данные равенства не выполняются тождественно при учете всех имеющихся на данном этапе уравнений движения и лагранжевых связях типа A и B, то из (2.19) следуют новые лагранжевы связи обоих типов, которые вновь могут понизить ранг матрицы Гесса и тем самым уменьшить число независимых уравнений второго порядка по времени. Для непротиворечивых теорий повторение вышеописанной процедуры в конечном итоге приведет к полной системе следующего вида:

$$\ddot{q}_\alpha = Q_\alpha(q_1,...,q_N,\dot{q}_1,...,\dot{q}_N,\ddot{q}_{r'+1},...,\ddot{q}_N), \quad \alpha = 1,...,r,' \tag{2.20}$$
$$\chi^1_{a'}(q,t) = 0, \qquad a' = 1,...,r_1', \tag{2.21}$$
$$\chi^2_{a''}(q,\dot{q},t) = 0, \qquad a'' = 1,\ldots,r_2'', \tag{2.22}$$

при этом $r_1 + r_2 < r_1' + r_2'' < N, \quad r' < R, \quad r_1' + r_2'' + r' < N$, а условие полноты системы связей означает, что в процессе эволюции не возникнет новых связей, т.е. равенства

$$\frac{d\chi^1_{a'}(q,t)}{dt} = 0, \qquad a' = 1,\ldots,r_1', \tag{2.23}$$
$$\frac{d\chi^2_{a''}(q,\dot{q},t)}{dt} = 0, \qquad a'' = 1,\ldots,r_2'' \tag{2.24}$$

выполняются тождественно при учете всех уравнений (2.20)—(2.22).

Резюме. Для систем с вырожденными лагранжианами окончательная система уравнений дается уравнениями (2.20)—(2.22), среди которых только часть уравнений, содержащая вторые производные по времени, являются истинными уравнениями движения, а оставшаяся часть представляет собой ограничения на начальные условия для координат и скоростей, лагранжевы связи.

Общая задача исследования интегрируемости вырожденных лагранжевых уравнений движения и установления характера общих решений в смысле определения степени их неоднозначности представляет собой сложную проблему. Ее анализ требует привлечения методов современной геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений [21], базирующейся на идеях формального разложения решений в ряд Тейлора и продолжения системы дифференциальных уравнений до интегрируемой системы. Не углубляясь в данную проблему, отметим лишь некоторые принципиальные особенности задачи Коши для лагранжевых уравнений движения в вырожденных теориях.

— Если произвол в общем решении уравнений движения, следующих из невырожденных лагранжианов, сводится к существованию $2N$ произвольных постоянных, значения которых однозначно определяются начальными данными для обобщенных координат и скоростей, то для вырожденного случая это не так. Границы для степени и характера данного произвола можно установить, рассматривая два предельных случая:

  Максимальный произвол имеет место, когда все лагранжевы связи выполняются тождественно. В этом случае общее решение уравнений движения зависит от $N - R$ произвольных функций времени и от $2R$ произвольных постоянных.

  Минимальный произвол осуществляется, когда все лагранжевы связи являются связями типа A, тогда общее решение зависит от $2(N - R)$ произвольных постоянных.

— В отличие от невырожденного случая начальные значения обобщенных координат и скоростей не могут быть выбраны произвольно, они должны удовлетворять лагранжевым связям (2.22), (2.22).

Тождества Нетер и задача Коши. Отмеченное при получении системы уравнений (2.20)—(2.22) условие полноты связано с непротиворечивостью постановки задачи Коши, когда лагранжевы связи (2.22),(2.22) рассматриваются как некие условия на начальные данные для системы второго порядка в нормальной форме (2.20). Для исключительно важных сингулярных теорий, вырожденность которых связана с инвариантностью действия по отношению к преобразованиям, содержащим в качестве групповых параметров произвольные функции времени, интегрируемость или, иначе, непротиворечивость задачи Коши гарантируется известными тождествами Нетер [39, 40], которые обеспечивают выполнимость условий связей в любой момент времени, если они имели место в некий момент времени (В.В.Нестеренко, А.М.Червяков [4]). Помимо этого, тождества Нетер, определяют и функциональный произвол общих решений уравнений движения, связанный с рангом группы симметрии функционала действия.

3. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Аналогия между механическими и оптическими явлениями, открытая Гамильтоном и изложенная в докладе, представленном им в 1824 г. Ирландской академии наук, положила начало новым формулировкам динамических принципов движения. Как показала история науки, спустя столетие именно эта аналогия и гамильтонова форма уравнений движения сыграли исключительно важную роль при создании и становлении квантовой теории.

Гамильтонова механика, берущая начало в исследованиях Пуассона, Гамильтона, Остроградского и Лиувилля, первоначально опиралась исключительно на канонические координаты симплектической структуры в евклидовом пространстве*. Более общее рассмотрение, основанное на пуассоновой структуре, впервые появляется в связи с теорией функциональных групп и теорией интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в трудах Ли [25]. Однако подход Ли был забыт как математиками, так и физиками, а возрождению общего взгляда на пуассоновскую структуру механики Гамильтона мы обязаны Дираку ([2], 1950 г.), который, по-видимому, впервые ввел общую симплектическую структуру многообразия, определив скобку Пуассона чисто аксиоматически**.

Форма Гамильтона невырожденных лагранжевых систем. Систему лагранжевых уравнениий (2.8) из N дифференциальных уравнений второго порядка в нормальной форме можно заменить (бесконечным множеством способов) эквивалентной ей системой первого порядка, также в нормальной форме с $2N$ неизвестными, если за новые неизвестные функции принять, наряду с $q_i(t)$, и N первых производных $v_i(t) = \dot{q}_i(t)$, или вообще N независимых

*За историческими деталями становления теории Гамильтона в прошлом столетии отсылаем к классическому учебнику Е.Т.Уиттекера [37], с.294, и монографии [10].

**Отдавая дань огромному вкладу Софуса Ли, в важном примере пуассоновской структуры, связанной с алгебрами Ли, соответствующую скобку на пространстве, дуальном к алгебре, назвали скобкой Ли — Пуассона.

между собой функций $v_i(t) = v_i\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)$. Для получения уравнений первого порядка Гамильтон воспользовался одним замечательным выбором таких функций. Эти дополнительные к координатам переменные — обобщенные или канонические импульсы — связаны со скоростями преобразованием Лежандра, причем порождающей функцией прямого преобразования являлся сам лагранжиан системы $\mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right)$:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{3.1}$$

а порождающей функцией обратного преобразования

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{3.2}$$

функция Гамильтона или гамильтониан $H(p, q, t)$, который связан с лагранжианом формулой

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{N} \left(p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\right)\Big|_{\dot{q} \to q, p, t}, \tag{3.3}$$

где предполагается, что все скорости выражены через импульсы на основе прямого преобразования (3.1). Преобразование Лежандра переводит уравнения движения Эйлера — Лагранжа (2.8) в канонические уравнения Гамильтона*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}, \tag{3.4}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i}. \tag{3.5}$$

Пространство канонических переменных p, q, следуя Дж.В.Гиббсу, принято называть $2N$-мерным фазовым пространством Γ. После введения скобки Пуассона двух функций $A(q, p, t)$ и $B(q, p, t)$, определенных на Γ,

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \tag{3.6}$$

уравнения движения (3.4) приобретают симметричную форму

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \tag{3.7}$$

---

*Функции Лагранжа $\mathcal{L}$ и Гамильтона H, следуя классической терминологии, иногда называют характеристическими функциями, тем самым подчеркивая, что в них содержится вся информация, характеризующая систему.

Эквивалентность полученных канонических уравнений уравнениям Эйлера — Лагранжа может быть также установлена с использованием вариационной задачи на условный экстремум в фазовом пространстве

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,[p_i \dot{q}_i - H(q,p,t)] \tag{3.8}$$

с граничными условиями

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \tag{3.9}$$

При этом невырожденность матрицы Гесса $\det \|W_{ij}\| \neq 0$ является необходимым условием подобной эквивалентности.

Резюме. Классическая теорема об эквивалентности описания эволюции невырожденных систем в терминах переменных, определенных на фазовом пространстве, и в терминах конфигурационного пространства гласит: если функции $q_i(t), \dot{q}_i(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа, то функции $q_i(t), p_i(t)$, связанные с ними прямым преобразованием Лежандра, с порождающей функцией Лагранжа, удовлетворяют уравнениям Гамильтона, и наоборот, всякое решение канонических уравнений переходит в решение лагранжевых уравнений с помощью обратного преобразования Лежандра.

Гамильтонова динамика в вырожденных системах. Перейдем к рассмотрению гамильтоновой динамики для систем с вырожденными лагранжианами. Пусть ранг матрицы Гесса не максимален:

$$\operatorname{rank} \parallel W_{ij}(q,\dot{q},t) \parallel = R < N. \tag{3.10}$$

Тогда, согласно определению канонических импульсов (3.1), из N канонических импульсов p_i только R являются независимыми функциями скоростей. Иными словами, имеют место соотношения вида

$$\varphi_\alpha(q,p) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, N-R, \tag{3.11}$$

связывающие канонические переменные фазового пространства, которые Бергман назвал *первичными связями*. Отметим, что среди $N-R$ первичных связей (3.11) нет функционально зависимых

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \varphi_\alpha(q,p)}{\partial p_i}, \frac{\partial \varphi_\alpha(q,p)}{\partial q_i} \right\| = N-R, \tag{3.12}$$

и их можно разрешить относительно $N-R$ импульсов*

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\varphi_\alpha(q,p)}{\partial p_i}\right\| = N-R. \tag{3.13}$$

Таким образом, в отличие от невырожденных систем, где преобразование Лежандра определяет взаимно однозначное соотношение между пространством состояний M' и фазовым пространством Γ, для вырожденных систем имеет место лишь проецирование.

> **Резюме.** В случае систем с вырожденными лагранжианами преобразование Лежандра отображает все пространство состояний M' на так называемую $2N-R$-мерную поверхность первичных связей Γ_1.

Этот факт приводит к тому, что канонический гамильтониан как порождающая функция обратного преобразования Лежандра**

$$\begin{aligned} &H_c(q_i, p_a, \dot q_{R+\alpha}) = p_i\dot q_i - \mathcal{L}(q,\dot q)\Big|_{\dot q_a = f_a} \\ &i=1,\dots,n, \quad a=1,\dots,R, \quad \alpha=1,\dots,N-R. \end{aligned} \tag{3.14}$$

для вырожденной системы определен на поверхности первичных связей $\Gamma_1 \subset \Gamma$, а не во всем фазовом пространстве. А это означает, что теперь вместо $2N$ уравнений на Γ имеют место лишь $2N-R$ гамильтоновых уравнений движения, определенных на Γ_1. Чтобы иметь полную систему из $2N$ гамильтоновых уравнений, Дирак сделал принципиально новый шаг — ввел понятия *слабого* и *сильного* равенств, которые устанавливают отношение эквивалентности на множестве функций, определенных во всем фазовом пространстве системы. Не углубляясь в анализ этих понятий, будем считать две функции $f(q,p)$ и $g(q,p)$ равными в слабом смысле*** $f(q,p) \simeq g(q,p)$ если они совпадают друг с другом на поверхности связей. В соответствии с этим отношением эквивалентности можно показать, что существует бесконечное количество функций $H_c(q,p)$, определенных во всем фазовом пространстве, отличающихся друг от друга линейной комбинацией первичных связей, и эквивалентных $H_c(q_i,p_a)$

---

*Последнее равенство означает, что первичные связи с необходимостью зависят от импульсных переменных, в то время как зависимость от координат может и отсутствовать.

**Заметим, что в действительности канонический гамильтониан не зависит от неразрешенных скоростей $\dot q_{R+\alpha}$, в силу замечательного свойства самого преобразования Лежандра; $H_c(q_i,p_a,\dot q_{R+\alpha}) = H_c(q_i,p_a)$.

***Следуя Дираку, слабое равенство принято обозначать символом " $\simeq$ ", оставив обычный знак " $=$ " для сильных равенств.

в том смысле, что

$$
\begin{aligned}
\{q_i, H_c(q_i, p_a)\} &\simeq \{q_i, H_c(q,p)\} \\
\{p_i, H_c(q_i, p_a)\} &\simeq \{p_i, H_c(q,p)\}.
\end{aligned}
$$

Чтобы охватить весь класс эквивалентных $H_c(q_i, p_a)$ гамильтонианов, Дирак определил *полный* гамильтониан

$$
H_T = H_c(q,p) + u_\alpha(t)\varphi_\alpha(q,p), \quad \alpha = 1, \dots, N - R, \tag{3.15}
$$

введя $N - R$ произвольных функций $u_\alpha(t)$ и зафиксировав одну функцию $H_c(q,p)$, определенную во всем фазовом пространстве, удовлетворяющую условию $H_c(q,p) \simeq H_c(q_i, p_a)$. Именно с помощью полного гамильтониана H_T для систем с вырожденными лагранжианами можно записать уравнения движения в форме Гамильтона — Дирака

$$
\dot{q}_i \simeq \{q_i, H_T(q,p)\}, \tag{3.16}
$$

$$
\dot{p}_i \simeq \{p_i, H_T(q,p)\}, \qquad i = 1, \dots, N, \tag{3.17}
$$

$$
\varphi_\alpha(q,p) \simeq 0, \qquad \alpha = 1, \dots, N - R, \tag{3.18}
$$

которая эквивалентна системе уравнений Эйлера — Лагранжа (2.20)—(2.22). Здесь эквивалентность, как и в невырожденном случае, понимается в том смысле, что если функции $q_i(t),\ i = 1, \dots, N$ являются решениями уравнений Эйлера — Лагранжа, то функции $q_i(t)$ и $p_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}(q(t), \dot{q}_i(t))}{\partial \dot{q}_i(t)}$ будут решениями уравнений Гамильтона (3.16)—(3.18)) при некотором выборе функций $u_\alpha(t),\ \alpha = 1, \dots, N - R$. И наоборот, если при некотором выборе функций $u_\alpha(t)$ функции $q_i(t),\ p_i(t)$ являются решениями уравнений Гамильтона — Дирака, то функции $q_i(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа. В силу такой эквивалентности анализ непротиворечивости лагранжевых уравнений движения, описанный в предыдущем разделе, переносится и на систему уравнений Гамильтона — Дирака. Подобно тому, как при анализе лагранжевых уравнений движения непротиворечивость теории проверялась согласованностью динамики с наличием лагранжевых связей (2.13), в данном случае требуется проверить стационарность первичных связей (3.11) во времени

$$
\begin{aligned}
0 \equiv \frac{d\varphi_\alpha(q,p)}{dt} &:= \{\varphi_\alpha(q,p), H_T(q,p)\} = \\
&= \{\varphi_\alpha(q,p), H_c(q,p)\} + u_\beta(t)\{\varphi_\alpha(q,p), \varphi_\beta(q,p)\} \simeq 0.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

При анализе уравнений (3.16)-(3.18) и (3.19) возможны следующие варианты:

(i) уравнения несамосогласованны (противоречивы);

(ii) уравнения (3.19) выполняются тождественно;

(iii) часть из $N-R$ уравнений (3.19) представляет систему функционально независимых уравнений, с помощью которых определяются некоторые $u_\alpha, \alpha = 1, \ldots, \alpha_0$.

Вариант (i) означает отсутствие точек экстремума у функционала действия, когда никаким выбором u_α нельзя удовлетворить (3.19), и тем самым исключается из рассмотрения как случай, не представляющий физического интереса. Случай (ii) не требует комментариев, теория непротиворечива. В третьем варианте принято выделять особый случай, когда система связей замкнута относительно операции взятия скобок Пуассона:

$$\{\varphi_\alpha(q,p), \varphi_\beta(q,p)\} = f_{\alpha\beta\gamma}(q,p)\varphi_\gamma(q,p), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, N-R. \tag{3.20}$$

В связи с этим заметим, что набор связей и скобка Пуассона устанавливают отношение эквивалентности среди динамических величин. Из-за важности этого свойства Дирак ввел соответствующую терминологию; любую функцию $A(q,p)$, скобки Пуассона которой со всеми связями, имеющимися в теории, слабо равны нулю

$$\{A(q,p), \varphi_\alpha(q,p)\} \simeq 0,$$

он назвал динамической величиной *первого рода*, а все величины, не относящиеся к первому роду, — величинами *второго рода*. В соответствии с этой терминологией классифицируются и сами связи.

Из условий стационарности (3.19) после учета первичных связей выпадает зависимость от всех u_α, и (3.19) представляет собой дополнительное ограничение на обобщенные координаты и импульсы

$$\chi(p,q) = 0, \tag{3.21}$$

которые Дирак назвал *вторичными*, подчеркивая тем самым, что они обязаны своим происхождением динамическим уравнениям движения, а не только преобразованиям Лежандра, как это имеет место для первичных связей. Очевидно, что при наличии вторичных связей анализ непротиворечивости теории следует продолжить таким же образом, как и в случае первичных связей. При этом исследование непротиворечивости заканчивается, если на очередном этапе процесс появления новых связей обрывается. Для анализа общего случая (iii), когда не все скобки Пуассона $\{\varphi_\alpha(q,p), \varphi_\beta(q,p)\}$ равны нулю с учетом всех связей предшествующих этапов, удобно ввести единое обозначение для всех связей второго, третьего и т.д. этапов через $\varphi_j,\ j = N-R+1, \ldots, J$. Поскольку в этом случае условия непротиворечивости не дают новых связей, то их можно рассматривать как систему неоднородных линейных уравнений относительно u_α:

$$\{\varphi_j(q,p), H_c(q,p)\} + u_\alpha(t)\{\varphi_j(q,p), \varphi_\alpha(q,p)\} \simeq 0, \qquad \alpha = 1, \dots, N-R \tag{3.22}$$

и зафиксировать коэффициенты $u(t)$ как функции от (q,p) — $u_\alpha(t) := U(q,p)$. При этом, если $\operatorname{rank}\|\{\varphi_i(q,p), \varphi_\alpha(q,p)\}\| = A$, то общее решение для $u_\alpha(t)$ содержит слагаемое в виде линейной комбинации A произвольных функций $v_a(t)$ с решениями сответствующей однородной системы $V_{a\alpha}$:

$$u_\alpha(t)\{\varphi_i(q,p), \varphi_\alpha(q,p)\} \simeq 0, \tag{3.23}$$

$$u_\alpha(t) = U_\alpha(p,q) + v_a(t)V_{a\alpha}, \qquad a = 1, \dots, A. \tag{3.24}$$

В соответствии с этим выделяются две структуры полного гамильтониана

$$H_T = H'_c(p,q) + v_a(t)\phi_a(p,q), \tag{3.25}$$

где

$$\begin{aligned} &H'_c(p,q) := H_c(p,q) + U_\alpha(p,q)\varphi_\alpha(p,q), \\ &\phi_a(p,q) = V_{a\alpha}(p,q)\varphi_\alpha(p,q). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Резюме. Обобщенная гамильтонова динамика в теории с вырожденным лагранжианом определяется полным гамильтонианом системы H_T, который равен сумме двух величин первого рода H' и $v_a(t)\phi_a(p,q)$ с произвольными функциями времени $v_a(t)$, в количестве, равном числу первичных связей первого рода. Наличие произвольных функций в уравнениях Гамильтона — Дирака означает невозможность однозначного определения динамики обобщенных координат и импульсов, по заданным начальным данным удовлетворяющим полному набору связей системы.

Эта неоднозначность находится в полном согласии с описанием эволюции в лагранжевом подходе и имеет одну и ту же причину — инвариантность уравнений движения относительно группы локальных калибровочных преобразований, ранг которой определяется числом первичных связей первого рода. Оставляя в стороне обсуждение известной гипотезы Дирака о структуре производящих функций локальных калибровочных преобразований симметрии и о роли связей первого рода (см. [4, 44, 45]), далее сосредоточимся на основной задаче, проистекающей из этой особенности динамики вырожденных систем с локальными симметриями. Речь идет о задаче редукции, то есть об определении невырожденной гамильтоновой системы, которая была бы “эквивалентна” исходной. Раскрытие смысла слова “эквивалентность” и составляет предмет дальнейшего изложения.

4. РЕДУКЦИЯ В СИСТЕМАХ СО СВЯЗЯМИ ПЕРВОГО РОДА

При изложении вопросов редукции мы ограничимся случаем, когда в теории присутствуют лишь связи первого рода и начнем с ответа на вопрос, в каком смысле исходной вырожденной теории с локальной симметрией можно сопоставить эквивалентную ей невырожденную теорию.

Определение редуцированного фазового пространства. Для уточнения всех понятий зафиксируем механическую систему, определенную в $2n$-мерном евклидовом фазовом пространстве Γ с каноническими координатами q_i, сопряженными с ними импульсами p_i и наделенным канонической симплектической структурой $\{q_i, p^j\} = \delta_i^j$. Согласно обобщенной гамильтоновой формулировке систем с локальной симметрией динамика разворачивается на $(2n-m)$ -мерном подмногообразии Γ_c фазового пространства, заданном посредством полного набора m функционально независимых соотношений

$$\varphi_\alpha(p,q) = 0 \ , \tag{4.1}$$

которые образуют замкнутую систему относительно операции взятия скобок Пуассона

$$\{\varphi_\alpha(p,q), \varphi_\beta(p,q)\} = f_{\alpha\beta\gamma}(p,q)\varphi_\gamma(p,q), \tag{4.2}$$

т.е. являются связями первого рода. Полнота понимается в смысле выполнения соотношений

$$\{\varphi_\alpha(p,q), H_C(p,q)\} = g_{\alpha\gamma}\varphi_\gamma(p,q) \ , \tag{4.3}$$

с каноническим гамильтонианом системы $H_C(p,q)$. Благодаря присутствию связей динамика системы описывается обобщенной формой Пуанкаре — Картана

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H_E(p,q)dt \tag{4.4}$$

с *обобщенным гамильтонианом* $H_E(p,q)$, который отличается от канонического $H_C(p,q)$ добавлением линейной комбинации всех связей первого рода с неопределенными коэфициентами $u_\alpha(t)$:

$$H_E(p,q) = H_C(p,q) + u_\alpha(t)\varphi_\alpha(p,q) \ . \tag{4.5}$$

Из условия полноты (4.3) с заменой H_C на H_E следует, что при наличии только связей первого рода функции $u_\alpha(t)$ не могут быть определены во внутренних терминах теории. Этот факт есть проявление локальной симметрии, присущей системе, и она приводит к тому, что динамика части координат оказывается неопределенной. Существование произвольных функций $u_\alpha(t)$ указывает на отсутствие взаимно однозначного соответствия между пространством физических состояний системы и подпространством Γ_c. Иными словами, на Γ_c есть точки, которым соответствует одно и то же физическое состояние, в то время как каждому физическому состоянию соответствует лишь одна точка подпространства Γ_c. *Подпространство полного фазового пространства* Γ, *точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с физическими состояниями системы, принято называть редуцированным фазовым пространством вырожденной теории и обозначать через* Γ^*. Ясно, что $\Gamma^* \subset \Gamma_c$, в силу того, что траектория системы, начавшаяся с точки фазового пространства, принадлежащей поверхности связей Γ_c, остается на ней и во все последующие моменты времени в силу условия стационарности связей. Для того чтобы убедиться в том, что такое подпространство Γ^* действительно существует и его размерность равна $2n - 2m$, где n — число степеней свободы системы, а m — количество всех связей первого рода, следует уточнить определение физического состояния классической системы с локальной симметрией. Предположим, что пространство физических состояний системы задается посредством конечного набора *физических переменных* O^A, каждая из которых в теории со связями первого рода определена, согласно Дираку, как динамическая величина, удовлетворяющая соотношениям*:

$$\{O^A(p,q), \varphi_\alpha(p,q)\} = d^A_{\alpha\gamma}(p,q)\varphi_\gamma(p,q) \ . \tag{4.6}$$

Тогда редуцированное пространство определяется следующим образом. Рассмотрим (4.6) как систему из m линейных дифференциальных уравнений первого порядка на O^A, тогда благодаря условиям интегрируемости (4.2) каждая из функций может быть определена полностью и однозначно по ее начальным значениям на $2(n-m)$-мерном подмногообразии полного фазового пространства Γ [32]. Именно это подпространство поверхности связей определяет искомое *редуцированное фазовое пространство* Γ^*.

> **Резюме.** Физическое состояние системы, описываемой вырожденной $2n$-мерной гамильтоновой системой с m связями первого рода, определяется посредством набора $2(n - m)$ инвариантных дираковских наблюдаемых (4.6), определенных на редуцированном фазовом пространстве Γ^*.

Таким образом, проясняется смысл операции редукции системы со связями первого рода как задачи построения невырожденной гамильтоновой системы, эквивалентной исходной. Слово "эквивалентность" здесь означает,

*Из данного определения следует, что эволюция физической переменной, согласно динамике, задаваемой обобщенным гамильтонианом, будет однозначной, не зависящей от произвольных множителей Лагранжа.

что, во-первых, невырожденная система должна иметь $2(n-m)$-мерное фазовое пространство, **изоморфное** редуцированному пространству вырожденной теории, во-вторых, ее гамильтонова динамика должна быть **канонически эквивалентна** динамике дираковских наблюдаемых в вырожденном случае. Для решения этой задачи решающим является нахождение набора из $2(n-m)$ "физических координат" Q_i^*, P_i^*, задающих редуцированное фазовое пространство и выбор дополнительных m пар координат, определяющих калибровочные степени свободы системы.

Известны различные подходы к решениям задачи редукции в системах со связями первого рода. Ниже коротко будут описаны альтернативные методы построения физических и калибровочных степеней свободы: стандартный подход с введением дополнительных калибровочных условий, калибровок, и чисто геометрический метод гамильтоновой редукции без использования каких-либо калибровок. В связи с последним методом отметим только, что идея проводить редукцию исключительно во внутренних терминах теории связана прежде всего с желанием полностью сохранить глобальные свойства исходной теории с "лишними" степенями свободы.

Метод Дирака фиксации калибровки. Общие принципы введения калибровочных условий в гамильтоновом подходе как дополнительных ограничений, накладываемых на канонические переменные, были предложены Дираком в связи с построением канонического формализма теории гравитации [11]. Согласно идее Дирака для задания $2(n-m)$-мерного редуцированного пространства Γ^* как поверхности в полном фазовом пространстве Γ наряду с m уравнениями связей можно ввести в теорию m дополнительных ограничений на координаты — *калибровки*

$$\chi_\alpha(p,q) = 0. \tag{4.7}$$

При этом предполагается, что калибровочные условия удовлетворяют следующим требованиям:

1) с их помощью неопределенные множители Лагранжа должны фиксироваться однозначно как функции обобщенных координат и импульсов;

2) совместно со связями калибровочные условия должны определить $2(n-m)$-мерное пространство Σ;

3) поверхность Σ должна быть "канонически эквивалентна" поверхности Γ^*.

Заметим сразу, что основная проблема состоит в строгой формулировке и удовлетворении последнего пункта условий на калибровки. Требованиям (1) и (2) можно удовлетворить, если выполняется условие

$$\det \left\| \{\chi_\alpha(p,q), \varphi_\beta(p,q)\} \right\| \Big|_\Sigma \neq 0. \tag{4.8}$$

Выполнимость условия (2) непосредственно следует из теоремы о неявной функции. Покажем, что условие (4.8) дает возможность найти неизвестные множители Лагранжа $u_\alpha(t)$ из условия стационарности калибровок (4.7) во времени

$$\dot{\chi}_\alpha = \{\chi_\alpha, H_C\} + \sum_\beta \{\chi_\alpha, \varphi_\beta\} u_\beta = 0 \tag{4.9}$$

и тем самым зафиксировать динамику системы однозначным образом. Действительно, уравнения (4.9) образуют совместную систему неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных $u_\beta(t)$, причем условием совместности служит именно соотношение (4.8). После определения множителей Лагранжа как функций от координат и импульсов, имеем следующую картину: динамика системы задается в виде $2n$ гамильтоновых уравнений движения

$$\dot{q}_i \simeq \{q_i, H_E^*\}, \tag{4.10}$$

$$\dot{p}_i \simeq \{p_i, H_E^*\} \tag{4.11}$$

и $2m$ уравнений связей

$$\varphi_\alpha(q,p) \simeq 0, \tag{4.12}$$

$$\chi_\alpha(q,p) \simeq 0, \tag{4.13}$$

которые в действительности представляют собой дополнительные условия на начальные данные в задаче Коши для системы уравнений Гамильтона — Дирака (4.10), (4.11). В формулах (4.10), (4.11) знак “ $\simeq''$ означает слабое равенство с учетом всех связей и калибровок, а через H_E^* обозначен обобщенный гамильтониан H_E, в котором множители Лагранжа зафиксированы с помощью уравнений (4.9). Таким образом, уравнения Гамильтона — Дирака (4.10), (4.11) представляют собой систему слабых уравнений, т.е. в них связи и калибровки следует принимать во внимание лишь после взятия всех скобок Пуассона. Однако оказывается, что с помощью модификации скобки Пуассона, точнее говоря, в результате замены скобок Пуассона на так называемые скобки Дирака можно избавиться от присутствия в теории слабых равенств. Скобки Дирака определяются с помощью операции взятия скобок Пуассона и системы связей первого рода, дополненной калибровками:

$$\{F, G\}_D := \{F, G\} - \{F, \xi_s\} C^{-1}_{ss'} \{\xi_{s'}, G\} \ , \tag{4.14}$$

где ξ обозначает набор всех связей и калибровок, а C^{-1} — матрицу, обратную к $C_{\alpha\beta} := \{\xi_\alpha, \xi_\beta\}$. Замечательный результат Дирака состоит в наблюдении, что уравнения движения можно записать с заменой скобок Пуассона на новые (4.14):

$$\dot{q}_i \simeq \{q_i, H_c\}_D, \tag{4.15}$$

$$\dot{p}_i \simeq \{p_i, H_c\}_D, \tag{4.16}$$

причем все связи можно положить равными нулю до взятия скобок Дирака. Этот факт обязан следующему примечательному свойству скобки Дирака:

$$\{F, \xi_s\}_D = 0, \tag{4.17}$$

где $F(q,p)$ — произвольная функция. Тем самым в теории останутся только сильные равенства, и задача редукции фазового пространства решена, правда, в неявной форме, поскольку количество гамильтоновых уравнений движения осталось прежним, хотя наличие связей и калибровок говорит об их зависимости.

Резюме. Корректное добавление калибровок к набору связей первого рода позволяет учесть факт зависимости исходных канонических координат заменой исходной канонической симплектической структуры на новую, определяемую скобками Дирака, и эффективно редуцировать число степеней свободы от $2n$ до $2(n-m)$

$$\sum_{i=1}^{n}\{q_i, p_i,\}_{P.B.} = n\ , \qquad \sum_{i=1}^{n}\{q_i, p_i,\}_{D.B.} = n - m\ .$$

Новая симплектическая структура, зависящая от выбора калибровочных условий, в общем случае является сложной, и как следствие, приводит к серьезным трудностям при квантовании. Однако существует специальный случай, когда скобка Дирака совпадает с канонической скобкой Пуассона для регулярной системы, определенной на Γ^*:

$$\{F, G\}_D\Big|_{\varphi=0,\ \chi=0} = \sum_{i=1}^{n-m}\left\{\frac{\partial\overline{F}}{\partial Q_i^*}\frac{\partial\overline{G}}{P_i^*} - \frac{\partial\overline{F}}{\partial P_i^*}\frac{\partial\overline{G}}{Q_i^*}\right\}. \tag{4.18}$$

Из этого представления скобок Дирака следует, что в терминах сопряженных координат Q_i^*, P_i^* $(i = 1, \ldots, n-m)$ редуцированное фазовое пространство параметризовано таким образом, что связи тождественно обращаются в ноль, и произвольная функция $F(p,q)$, заданная на редуцированном фазовом пространстве, представима в виде

$$F(p,q)\Big|_{\varphi=0,\ \chi=0} = \overline{F}(P^*, Q^*)\ .$$

Таким образом, если в методе Дирака фиксации калибровки выполнен пункт (3) требований на калибровки, т.е. если поверхность Σ канонически эквивалентна поверхности Γ^*, и выбор калибровок сделан “удачно” в том смысле, что имеет место равенство (4.18), то задача определения “истинных динамических степеней” свободы тем самым решена в явной форме.

Метод Фаддеева фиксации калибровки. Иной метод редукции с фиксацией калибровки был предложен в хорошо известной работе Л.Д.Фаддеева [32], посвященной квантованию систем со связями в методе функционального интегрирования. Основная идея метода Фаддеева, в противоположность методу Дирака, состоит во введении явной параметризации редуцированного фазового пространства. Как и в методе Дирака, вводятся калибровочные условия $\chi_\alpha(p,q) = 0$, которые помимо условия (4.8) подчинены еще дополнительному требованию "абелевости"

$$\{\chi_\alpha(p,q), \chi_\beta(p,q)\} = 0 \,. \tag{4.19}$$

Абелев характер калибровочных условий (4.19) позволяет перейти с помощью канонического преобразования

$$\begin{array}{rcl} q_i & \mapsto & Q_i = Q_i\,(q,p) \\ p_i & \mapsto & P_i = P_i\,(q,p) \end{array} \tag{4.20}$$

к таким новым переменным координатам, что их первые m импульсов совпадают с калибровочными условиями χ_α:

$$P_\alpha = \chi_\alpha\,(q,p)\,. \tag{4.21}$$

Условие (4.8) позволяет разрешить связи (4.1) относительно координат Q_α, выражая их как функции от $(n-m)$ пар канонически сопряженных координат и импульсов (Q_i^*, P_i^*), которые представляют собой внутренние координаты $2(n-m)$-мерной поверхности Σ, определяемой соотношениями

$$\begin{array}{rcl} P_\alpha & = & 0\,, \\ Q_\alpha & = & Q_\alpha\,(Q^*, P^*)\,\,. \end{array} \tag{4.22}$$

Этим редукция фазового пространства, в смысле выделения $2(n-m)$ независимых переменных, которые эволюционируют согласно обычным гамильтоновым уравнениям с гамильтонианом

$$H^*(Q^*,P^*) := H_E(q,p)\Big|_{\bar{Q}_\alpha=\bar{Q}_\alpha(P^*,Q^*),\,\bar{P}_\alpha=0}, \tag{4.23}$$

завершена.

> **Резюме.** Переменные (Q_i^*, P_i^*) в методе Фаддеева действительно представляют собой набор физических степеней свободы, если возможен такой выбор дополнительных калибровочных условий χ_α, что поверхность Σ канонически эквивалентна редуцированному фазовому пространству Γ^* системы.

Таким образом, как и в методе Дирака, в данном подходе вопрос об определении допустимых калибровочных условий также требует своего решения.

Бескалибровочный метод гамильтоновой редукции. Инвариантность теории относительно локальных калибровочных преобразований вызвана наличием в теории нефизических степеней свободы, что в гамильтоновом подходе отражается в существовании множителей Лагранжа, не поддающихся определению во внутренних терминах теории. Метод редукции фазового пространства с помощью введения калибровок позволяет устранить этот произвол, зафиксировав множители Лагранжа как функции обобщенных координат и импульсов, за счет введения дополнительных калибровочных условий, оставляя открытым вопрос о разделении исходных степеней свободы на физические и нефизические. В противоположность этому метод бескалибровочной редукции, к изложению которого мы переходим, основан на идее явного разделения набора обобщенных координат фазового пространства на физические (калибровочно-инвариантные) и нефизические (калибровочно-неинвариантные). Изложение начнем с рассмотрения теорий частного вида, а именно с теорий, где есть лишь абелевы связи.

Пусть имеем вырожденную теорию с полным набором абелевых связей $\varphi_\alpha(q,p)=0(\quad \alpha=1,\ldots,m<n)$:

$$\{\varphi_\alpha(q,p),\varphi_\beta(q,p)\}=0, \quad \alpha,\beta=1,\ldots,m. \tag{4.24}$$

В этом случае явную параметризацию редуцированного фазового пространства можно задать следующим образом. Согласно хорошо известной теореме (см., например, [37,50]), всегда можно построить каноническое преобразование к новым переменным

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto Q_i = Q_i\,(q,p)\,, \\ p_i &\mapsto P_i = P_i\,(q,p)\,, \end{aligned} \tag{4.25}$$

таким, что m новых импульсов $(\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_m)$ становятся равными абелевым связям φ_α:

$$\overline{P}_\alpha = \varphi_\alpha(q,p)\ , \tag{4.26}$$

при этом оставшиеся $(n-m)$ пар новых канонических переменных $(Q_1^*,P_1^*\ldots,Q_{n-m}^*,P_{n-m}^*)$ будут представлять собой именно базис для калибровочно-инвариантных наблюдаемых O. Чтобы убедиться в этом выясним структуру канонического гамильтониана в этих переменных. В силу условия полноты системы связей имеем соотношение

$$\{\varphi_\alpha(q,p),H_c(q,p)\}=g_{\alpha\beta}(q,p)\varphi_\beta(q,p) \tag{4.27}$$

с некоторыми фиксированными функциями $g_{\alpha\beta}$. Из уравнения (4.27) в новых координатах P, Q

$$\frac{\partial \overline{H}_C(P,Q)}{\partial \overline{Q}_\alpha} = \overline{g}_{\alpha\beta}(P,Q)\overline{P}_\beta, \tag{4.28}$$

$$\overline{H}_C(P,Q) = H_C(p(P,Q), q(P,Q))$$

следует, что канонический гамильтониан представим в виде

$$\overline{H}_C(P,Q) = \overline{H}_0(Q^*, P^*, \overline{P}) + \overline{\Psi}_\alpha(Q,P)\overline{P}_\alpha \tag{4.29}$$

с некой функцией $H_0(Q^*, P^*, \overline{P})$, не зависящей от координаты $\overline{Q}$:

$$\{\overline{P}_\alpha, \overline{H}_0(P,Q)\} = 0 \tag{4.30}$$

и определяющей калибровочно-инвариантную часть канонического гамильтониана *. Что касается функции $\overline{\Psi}_\alpha(Q,P)$, то она определяется через структурные функции $\overline{g}_{\alpha\beta}(P,Q)$ посредством уравнения

$$\frac{\partial \overline{\Psi}_\gamma(P,Q)}{\partial \overline{Q}_\alpha} = \overline{g}_{\alpha\gamma}(P,Q). \tag{4.31}$$

Это означает, что в терминах исходных переменных p, q канонический гамильтониан имеет вид

$$H_C(p,q) = H_0(q,p) + \Psi_\alpha(p,q)\varphi_\alpha(p,q), \tag{4.32}$$

где $H_0(p,q)$ есть калибровочно-инвариантная функция

$$\{H_0(p,q), \varphi_\alpha(p,q)\} = 0, \tag{4.33}$$

а $\Psi_\alpha(p,q)$ связана с $\overline{\Psi}_\alpha(Q,P)$ соотношением

$$\Psi_\alpha(p,q) = \overline{\Psi}_\alpha(P(p,q), Q(p,q)). \tag{4.34}$$

При этом уравнения (4.31) можно переписать в канонически- инвариантной форме посредством скобок Пуассона

$$\{\varphi_\alpha(p,q), \Psi_\gamma(p,q)\} = g_{\alpha\gamma}(p,q). \tag{4.35}$$

---

*В теории невырожденных систем за координатами, от которых гамильтониан не зависит, закрепилось название *циклических* или *игнорируемых*. Этим же термином в теории вырожденных динамических систем принято называть чисто калибровочные степени свободы, несмотря на принципиальное отличие; динамика “классических циклических” координат однозначно определяется, в то время как эволюция циклических координат в вырожденной теории содержит функциональный произвол.

Однако отметим основное преимущество адаптированных координат (P, Q). В этих координатах инвариантная часть гамильтониана определяется простым разложением

$$H_0(P,Q) = \overline{H}_C(P,Q) - \frac{\partial \overline{H}_C}{\partial \overline{P}_\alpha}\overline{P}_\alpha, \tag{4.36}$$

в то время как в исходных p и q ее можно представить лишь посредством вариационной производной

$$H_0(p,q) = \left[H_C(p,q) - \frac{\delta H_C}{\delta \varphi_\alpha}\varphi_\alpha\right]. \tag{4.37}$$

С учетом представления (4.29) для канонического гамильтониана обобщенные уравнения Гамильтона — Дирака (в качестве генератора применим полный гамильтониан)

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H_T\}, \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H_T\} \end{aligned} \tag{4.38}$$

в новых координатах (Q, P) имеют вид

$$\dot{\bar{Q}}_A \simeq \{\bar{Q}_A, \bar{H}_E\} = \left[\frac{\partial \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})}{\partial \bar{P}_A} + \psi_A(Q,P) + u_\alpha(t)\delta_{\alpha A}\right]\Bigg|_{\bar{P}_A=0}, \tag{4.39}$$

$$\dot{\bar{P}}_A \simeq 0, \quad A = 1, \ldots, m, \tag{4.40}$$

$$\dot{Q}^*_a \simeq \{Q^*_a, \bar{H}_E\} = \frac{\partial \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})}{\partial P^*_a}\Bigg|_{\bar{P}_A=0} = \frac{\partial \bar{H}^*(Q^*, P^*)}{\partial P^*_a}, \tag{4.41}$$

$$\dot{P}^*_a \simeq \{P^*_a, \bar{H}_E\} = -\frac{\partial \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})}{\partial Q^*_a}\Bigg|_{\bar{P}_A=0} = -\frac{\partial \bar{H}^*(Q^*, P^*)}{\partial Q^*_a}, \tag{4.42}$$

$$\bar{P}_A \simeq 0, \tag{4.43}$$

с физическим гамильтонианом

$$H^*(P^*, Q^*) \equiv H_C(P,Q)\Big|_{\overline{P}_A=0}. \tag{4.44}$$

Резюме. В специальных канонических координатах $(\overline{Q}, \overline{P})$ и (Q^*, P^*) канонические уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{Q}^* &= \{Q^*, H^*\}, & \dot{\overline{Q}} &= u(t), \\ \dot{P}^* &= \{P^*, H^*\}, & \dot{\overline{P}} &= 0, \end{aligned} \tag{4.45}$$

H^* зависит только от $(n-m)$ пар новых калибровочно-инвариантных канонических переменных $(Q^*,\ P^*)$, и форма канонических уравнений (4.45) показывает явную факторизацию переменных

$$2n \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_n \end{pmatrix} \right. \quad \mapsto \quad \begin{array}{rl} 2(n-m) \left\{ \begin{pmatrix} Q^* \\ P^* \end{pmatrix} \right. & \text{физические переменные} \\ \\ 2m \left\{ \begin{pmatrix} \overline{Q} \\ \overline{P} \end{pmatrix} \right. & \text{нефизические переменные} \end{array} \tag{4.46}$$

Принципиально важным при этом является то, что произвольные функции $u(t)$ присутствуют лишь в той части системы уравнений, которые содержат скорости игнорируемых координат $\overline{Q}_\alpha$, а уравнения движения для координат (Q^*, P^*) выделились в виде отдельной замкнутой системы, не содержащей переменных $(\bar{Q}, \bar{P})$. Поскольку в этих уравнениях нет никакого произвола, то именно они и являются истинными уравнениями движения, а координаты (Q^*, P^*) — истинными динамическими величинами, поскольку удовлетворяют требованиям, предъявляемым к физическим величинам*: они калибровочно-инвариантны и их эволюция определяется системой из $2(n-m)$ гамильтоновых уравнений движения без каких либо ограничений на начальные данные. Соответствующие решения уравнений заполняют все многообразие размерности $2(n-m)$, точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с точками пространства физических состояний системы. Тем самым без введения дополнительных калибровочных условий в теории, содержащей лишь абелевы связи, возможно осуществить искомую редукцию лишь за счет выбора специальных переменных, причем последние связаны с исходным каноническим преобразованием, гарантирующим требуемую нами "эквивалентность" невырожденной редуцированной системы, первоначально сингулярной.

Прямое обобщение этого метода редукции на неабелев случай невозможно, поскольку идентификация импульсов со связями запрещена именно

---

*Заметим, что выбор специальных адаптированных координат P^*, Q^* и $\overline{Q}$ не единственный. Например, можно было использовать в качестве таковых канонические координаты

$$\begin{aligned} \overline{P'}_A &= \overline{P}_A, \\ \overline{Q'}_A &= \overline{Q}_A + f_A(Q^*), \\ {P'}^*_i &= P^*_i + \overline{P}_A \frac{\partial f_A(Q^*)}{\partial Q^*_i}, \\ {Q'}^*_i &= Q^*_i. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Однако в любом случае переход от одних координат к другим будет являться каноническим преобразованием в секторе калибровочно-инвариантных переменных (Q^*, P^*).

их неабелевостью. Однако существует важное наблюдение, позволяющее фактически свести анализ процесса редукции системы с произвольными связями первого рода к рассмотренному случаю абелевых связей. Причина кроется в том, что в системах со связями существует большая свобода в описании*; помимо произвола в выборе канонических переменных, существует дополнительная свобода, связанная с описанием поверхности связей Γ_c. В связи с такой неоднозначностью описания возникает вопрос о возможности представления данной поверхности связей с помощью других функций, находящихся в инволюции. Ответ на этот вопрос положителен**.

Резюме. Утверждение об *абелизации* связей состоит в возможности замены связи φ_α эквивалентным набором связей Φ_α:

$$\Phi_\alpha = D_{\alpha\beta}\varphi_\beta\,, \qquad \det\|D\|\Big|_{\varphi=0} \neq 0\ , \tag{4.48}$$

которые задают ту же поверхность Γ_c, но формируют абелеву алгебру.

Доказательство этого утверждения коротко обсуждается в приложении А. Здесь отметим лишь, что оно основано либо на явном разрешении связей (см. [4], Sundermeyer; Гитман, Тютин; Henneaux, Teitelboim), либо используются условия, фиксирующие калибровку [43], или же применяется прямой метод построения матрицы абелизации как решения определенной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (см. [26, 27] и приложение А).

С учетом последнего факта окончательно сформулируем общую схему бескалибровочной редукции вырожденных теорий с алгеброй связей первого рода общего вида. Пусть имеем вырожденную систему с каноническим гамильтонианом $H_c(q,p)$ и полным неприводимым набором связей первого рода $\varphi_A(q,p)$:

$$\{\varphi_A(q,p), \varphi_B(q,p)\} = f_{ABC}(q,p)\varphi_C(q,p). \tag{4.49}$$

С помощью процедуры локальной абелизации заменяем неабелевы связи эквивалентным набором абелевых связей $\Phi_A(q,p) = D_{AB}(q,p)\varphi_A(q,p)$ и переходим к специальным адаптированным переменным

$$\begin{aligned} q_i &\mapsto Q_i = Q_i\,(q,p)\,, \\ p_i &\mapsto P_i = P_i\,(q,p)\,, \end{aligned} \tag{4.50}$$

*Полную группу преобразований, сохраняющих как вид гамильтоновых уравнений движения, так и поверхность связей, Бергман назвал *"обобщенной группой канонических преобразований"* [3].

**Поскольку канонические преобразования оставляют неизменным значение скобок Пуассона, то преобразование абелизации не может быть каноническим, но, безусловно, должно принадлежать к классу обобщенных канонических преобразований.

таким, что m новых импульсов $(\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_m)$ становятся равными новым абелевым связям Φ_A:

$$\overline{P}_A = \Phi_A(q,p)\ . \tag{4.51}$$

Обобщенный гамильтониан в новых переменных и в терминах абелизованных связей имеет следующий вид:

$$\bar{H}_E(Q,P) = \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P}) + \bar{\psi}_B(Q,P)\bar{P}_B + u_A(t)\bar{D}^{-1}_{AB}(Q,P)\bar{P}_B, \tag{4.52}$$

что демонстрирует существование игнорируемых координат $\overline{Q}_A$ и канонических переменных (Q^*, P^*), эволюция которых однозначно определяется из гамильтоновых уравнений движения с редуцированным гамильтонианом

$$\bar{H}^*(Q^*, P^*) = \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})\Big|_{\bar{P}=0}\ . \tag{4.53}$$

Резюме. В вырожденных теориях с неабелевыми связями первого рода, используя лишь обобщенные канонические преобразования, можно провести процедуру редукции фазового пространства без привлечения дополнительных калибровочных условий.

Для проведения такой схемы редукции требуется знание явного вида как матрицы абелизации, так и канонических преобразований (4.50), что, в свою очередь, связано с решением полных систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Тем самым в этом пункте схема бескалибровочной редукции может натолкнуться на трудности технического характера, уровень сложности которых определяется функциональным видом лагранжиана системы. Несмотря на это, сам факт существования схемы бескалибровочной редукции имеет принципиальное значение, поскольку данная схема редукции основана на допустимом с точки зрения обобщенной гамильтоновой динамики применении обобщенных канонических преобразований к "специальным" координатам, что является гарантией ее корректности. Это обстоятельство может послужить отправным пунктом для анализа упомянутых проблем определения класса допустимых калибровок как в методе Дирака, так и в методе Фаддеева.

Анализ допустимых калибровок. В настоящем пункте, сравнивая две процедуры редукции: в методе фиксации калибровки и бескалибровочном, будут изложены некоторые простые условия на калибровки, гарантирующие корректность самого метода фиксации калибровки*.

*Обсуждению ряда важных моментов процедуры фиксации калибровок в вырожденных теориях посвящен обзор [46].

Поскольку все формы представления вырожденных теорий с необходимостью должны быть связаны друг с другом посредством обобщенных канонических преобразований, то за определение допустимых калибровок можно принять следующее. *Калибровка является допустимой, если и только если существует каноническое преобразование, связывающее уравнения Гамильтона — Дирака (4.39) для канонических переменных Q^*, P^* с уравнениями движения, полученными с ее использованием в методе фиксации калибровки (4.15).*

В "специальных" координатах калибровочные условия общего вида имеют следующий вид:

$$\bar{\chi}_A(\bar{Q}, \bar{P}, Q^*, P^*) = 0. \tag{4.54}$$

Как это следует из определения, калибровочные условия (4.54) принадлежат к классу допустимых, если они не накладывают никаких ограничений на динамические переменные (Q^*, P^*) и приводят к физическому гамильтониану (4.53). Требование невырожденности детерминанта Фаддеева — Попова (4.8) в координатах (Q, P)

$$\det \left\| \{\bar{\chi}_A(Q, P), \bar{\Phi}_B(Q, P)\} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \bar{\chi}_A(Q, P)}{\partial \bar{Q}_B} \right\| \Big|_{\Gamma^*} \neq 0 \tag{4.55}$$

является условием разрешимости связей и калибровок относительно пар канонически сопряженных переменных в виде

$$\begin{aligned} \bar{P}_A &= 0, \\ \bar{Q}_A &= f_A(Q^*, P^*). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Покажем, что если функции $f_A(Q^*, P^*)$ определены для произвольных значений (Q^*, P^*) из области их определения, то калибровки

$$\bar{\chi}' = \bar{Q}_A - f_A(Q^*, P^*) = 0 \tag{4.57}$$

принадлежат к классу допустимых. Для этого достаточно доказать, что редуцированный гамильтониан, соответствующий калибровкам (4.57), совпадает с физическим гамильтонианом (4.53). Определяя множители Лагранжа из условий стационарности калибровочных условий (4.57)

$$\dot{\bar{\chi}}_A = \{\bar{\chi}_A, \bar{H}_E\} = 0, \tag{4.58}$$

получим следующее представление для обобщенного гамильтониана $\bar{H}_E$:

$$\bar{H}_E = \bar{H}_0 + \Big[-\frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{P}_B} - \frac{\partial \bar{\psi}_C}{\partial \bar{P}_B} \bar{P}_C + \{\bar{f}_B, \bar{H}_c\} \Big] \bar{P}_B. \tag{4.59}$$

Применяя для функции $\bar{H}_0$ формулу Тейлора с остаточным членом

$$\bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P}) = \bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})\Big|_{\bar{P}=0} + \big(\bar{P}_A \frac{\partial}{\partial \bar{P}_A}\big)\bar{H}_0(Q^*, P^*, \bar{P})\Big|_{\bar{P}=0} + \\ + \frac{1}{2}\big(\bar{P}_A \frac{\partial}{\partial \bar{P}_A}\big)^2 \bar{H}_0(Q^*, P^*, \Theta\bar{P}), \tag{4.60}$$

где $0 \leq \Theta_A \leq 1$, обобщенный гамильтониан записывается в виде

$$\bar{H}_E = \bar{H}^* + \bar{F}_B(Q^*, P^*, \bar{P})\bar{P}_B, \tag{4.61}$$

где $\bar{H}^*$ совпадает с редуцированным гамильтонианом (4.53) в бескалибровочной схеме, а

$$\bar{F}_B(Q^*, P^*, \bar{P}) = \Big[\frac{1}{2}\big(\bar{P}_A \frac{\partial}{\partial \bar{P}_A}\frac{\partial}{\partial \bar{P}_B}\big)\bar{H}_0(Q^*, P^*, \Theta\bar{P}) - \frac{\partial \bar{\psi}_A}{\partial \bar{P}_B}\bar{P}_A + \{\bar{f}_B, \bar{H}_c\}\Big].$$

Данное представление показывает, что калибровка действительно является допустимой, так как гамильтоновы уравнения движения, полученные с помощью $\bar{H}_E$, совпадают с уравнениями движения для Q^*, P^* в бескалибровочной схеме редукции.

Особое место среди допустимых калибровок занимают калибровочные условия, зависящие лишь от игнорируемых координат

$$\bar{\chi}_A(\bar{Q}) = 0, \\ \det \Big\| \frac{\partial \bar{\chi}_A(\bar{Q})}{\partial \bar{Q}_B} \Big\|\Big|_\Sigma \neq 0, \tag{4.62}$$

или в разрешенном виде

$$\bar{\chi}_A = \bar{Q}_A - C_A = 0, \tag{4.63}$$

где C_A — произвольные константы. Такой тип калибровок (4.62), которые будем называть *каноническими*, представляется наиболее естественным с точки зрения бескалибровочной редукции. Множители Лагранжа, определяемые из условий стационарности канонической калибровки

$$\bar{u}_A = -\frac{\partial \bar{H}_c}{\partial \bar{P}_A} - \bar{\psi}_A, \tag{4.64}$$

приводят к обобщенному гамильтониану

$$\bar{H}_E = \bar{H}_c - \frac{\partial \bar{H}_c}{\partial \bar{P}_A}\bar{P}_A = \bar{H}^* - \bar{F}_{AB}\bar{P}_A\bar{P}_B, \tag{4.65}$$

совпадающему с соответствующим выражением, полученным с помощью бескалибровочной схемы редукции. В связи с тем, что данное определение канонической калибровки является конструктивным лишь в специальных координатах (Q, P), возникает задача сформулировать некое условие на канонические калибровки, позволяющее инвариантным образом, независимо от выбора координат, проверять каноничность калибровки. Ниже будет изложен подобный критерий принадлежности к классу канонических калибровок. Для его получения заметим, что, согласно определению редуцированного гамильтониана (4.53), требование независимости калибровки от физических переменных (Q^*, P^*) может быть выражено в следующей канонически инвариантной форме*:

$$\{\chi_\beta(p,q), H^*(p,q)\}\Big|_{\Gamma^*} = 0. \tag{4.66}$$

В такой форме этот критерий также далек от практического использования, однако, используя определения скобок Дирака, можно переписать его в удобном виде. Действительно, в специальных координатах (Q, P) имеет место следующее представление для канонического гамильтониана:

$$\begin{aligned} \overline{H}_C(P,Q) &= \overline{H}_0(Q^*, P^*, \overline{P}) + \overline{\Psi}_\alpha(Q,P)\overline{P}_\alpha = \\ &= \overline{H}^*(P^*, Q^*) + F_\alpha(Q,P)\overline{P}_\alpha. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Учитывая, что ни сама калибровка, ни матрица $\overline{\Delta}_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \overline{P}_\beta\}$ не зависят от физических переменных, имеем выражения

$$\begin{aligned} \{\overline{\chi}_\alpha(\overline{Q}), \overline{H}_C(P,Q)\} &= \overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q})F_\beta(P,Q) + \{\overline{\chi}_\alpha(\overline{Q}), F_\beta(P,Q)\}\overline{P}_\beta, \quad (4.68) \\ \{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{H}_C(P,Q)\} &= \{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q})F_\gamma(P,Q)\}\overline{P}_\gamma + \{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{P}_\gamma\}F_\gamma(P,Q), \end{aligned}$$

из которых, исключая функции $F_\gamma(P,Q)$**, получаем

$$\{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{H}_C(P,Q)\}\Big|_{\Gamma^*} = \{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{P}_\gamma\}\overline{\Delta}^{-1}_{\gamma\sigma}(\overline{Q})\{\overline{\chi}_\sigma(\overline{Q}), \overline{H}_C(P,Q)\}\Big|_{\Gamma^*}.$$

С учетом определения скобок Дирака это условие принимает более привлекательную форму

$$\{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{H}_C(P,Q)\}_{D(\overline{P},\overline{\chi})}\Big|_{\overline{P}=0,\,\overline{\chi}=0} = 0. \tag{4.69}$$

---

*Безусловно, возможен случай, когда гамильтониан не зависит от некой физической переменной Q^*. Это имеет место для циклических координат, связанных с глобальной симметрией системы. И по этой причине он не является “опасным” для выводимого критерия.

**Мы предполагаем, что $\{\overline{\Delta}_{\alpha\beta}(\overline{Q}), \overline{P}_\gamma\} \neq 0$. Если это условие не выполняется, то калибровка может зависеть от физических координат

$$\overline{\chi}_\alpha = \overline{Q}_\alpha + f_\alpha(Q^*).$$

Однако, как было отмечено при анализе выбора специальных координат, с помощью канонического преобразования в физическом секторе удается исключить эту зависимость.

Однако недостаток данного критерия состоит в том, что он записан в терминах абелизованных связей $\overline{P}$. Для того чтобы иметь критерий каноничности калибровки в терминах неабелевых связей, воспользуемся важным свойством матрицы абелизации

$$\varphi_\alpha = \mathcal{D}_{\alpha\beta}\overline{P}_\beta. \tag{4.70}$$

Прежде всего заметим, что скобка Дирака является инвариантом по отношению к обобщенным каноническим преобразованиям [3]:

$$\{\overline{F}(P,Q), \overline{G}(P,Q)\}_{D(\overline{P},\overline{\chi})} = \{F(p,q), G(p,q)\}_{D(\varphi,\chi)},$$

и поэтому вместо (4.69) имеем

$$\mathcal{D}_{\alpha\gamma}\{\Delta_{\gamma\beta}(p.q), H_C(p,q)\}_{D(\varphi,\chi)} + \Delta_{\gamma\beta}(p.q)\{\mathcal{D}_{\alpha\gamma}, H_C(p,q)\}_{D(\varphi,\chi)}\Big|_{\varphi=0,\chi=0} = 0. \tag{4.71}$$

Теперь для получения искомого результата надо убедиться в том, что матрица абелизации зависит лишь от $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, и как следствие

$$\{\mathcal{D}_{\alpha\gamma}, H_C(p,q)\}_{D(\varphi,\chi)}\Big|_{\varphi=0,\ \chi=0} = 0. \tag{4.72}$$

В этом можно убедиться, рассматривая структуру генератора калибровочных преобразований, который можно представить либо в виде линейной комбинации неабелевых связей первого рода [4], Дирак, [44, 45],

$$G = \varepsilon_\alpha(q,p,t)\varphi_\alpha(q,p),$$

либо в терминах абелевых связей

$$G = \overline{\varepsilon}_\alpha(\overline{Q}, \overline{P}, t)\overline{P}_\alpha. \tag{4.73}$$

При этом в (4.73) функции — параметры калибровочных преобразований $\varepsilon_A(\bar{Q})$ — зависят лишь от игнорируемых координат $(\overline{Q}, \overline{P})$ в силу факторизованной формы уравнений движения. Согласно (4.73) произвольная калибровочно-инвариантная функция I зависит лишь от Q^* и P^*:

$$\{I, G\} = 0, \tag{4.74}$$

поэтому, используя уравнения (4.74) с генератором калибровочных преобразований G, в терминах неабелевых связей и матрицы абелизации (4.70)

$$G = \bar{\varepsilon}_\alpha(\overline{Q}, \overline{P}, t)\mathcal{D}^{-1}_{\alpha\beta}\varphi_\beta$$

получим для $I \equiv Q^*, P^*$

$$\{Q^*_i, G\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}_{\alpha\beta}}{\partial Q^*_i} = 0,$$

$$\{P^*_i, G\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{D}^{-1}_{\alpha\beta}}{\partial P^*_i} = 0, \tag{4.75}$$

с учетом невырожденности матрицы $\mathcal{D}$ и функциональной независимости связей. Этим завершается доказательство независимости матрицы абелизации от переменных P^* и Q^*, и тем самым из (4.71) получаем условие

$$\{\Delta_{\alpha\beta}(p,q), H_C(p,q)\}_D \Big|_{\varphi=0,\,\chi=0} = 0, \tag{4.76}$$

где уже матрица $\Delta_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}$ вычислена посредством неабелевых связей и при произвольном выборе канонических координат.

> **Резюме.** Требование зануления скобки Дирака матрицы $\Delta_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}$ с каноническим гамильтонианом на поверхности связей и калибровок
>
> $$\{\Delta_{\alpha\beta}(p,q), H_C(p,q)\}_D \Big|_{\varphi=0,\,\chi=0} = 0 \tag{4.77}$$
>
> является инвариантным критерием принадлежности калибровки χ_α к классу канонических.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При написании данной статьи мы не ставили цели обсудить все аспекты или хотя бы дать полную библиографию, касающуюся процедуры редукции в вырожденных динамических системах. Круг вопросов, связанных с проблематикой настоящего обзора, крайне обширен, он включает в себя как принципиальные математические проблемы, так и сложные задачи реализации процедуры гамильтоновой редукции в теоретико-полевых моделях, представляющих непосредственный физический интерес.

Среди подобных проблем, не затронутых обсуждением, выделим несколько тем, к изложению которых мы намерены обратиться в дальнейших публикациях:

– развитие метода гамильтоновой редукции для систем, обладающих репараметрической инвариантностью;

– обобщение метода гамильтоновой редукции на теоретико-полевые модели;

– сравнение с ковариантным методом Баталина — Фрадкина — Вилковиского описания вырожденных систем с введением дополнительных духовых переменных;

– исследование вопросов глобальных свойств процедуры гамильтоновой редукции;

Отметим, что операция редукции числа степеней свободы в калибровочных теориях поля в силу бесконечного числа динамических переменных несравненно сложнее, чем в механических системах, и здесь требуется тщательная разработка принципиальных вопросов. Она, в первую очередь, помимо очевидных технических трудностей, связана с проблемой глобального анализа явления редукции. Очевидно, что без первого корректного шага, выяснения локальных свойств теории, получение каких-либо результатов глобального характера не представляется возможным. Хотя и результаты, изложенные в обзоре, основаны на локальном рассмотрении в том смысле, что во всех рассматриваемых многообразиях мы ограничиваем себя областью, которую можно покрыть одной картой. Однако, опираясь на традиционно применяемый принцип, сформулированный Я.В.Татариновым [50] как принцип *"презумпции аналитичности"*: **"соотношения, установленные локально, дают результат правильный и глобально "**, можно попытаться сделать и некие заключения о свойствах системы в целом. При этом, каждый раз обнаруживая, что он нарушается, наверное, следует вспомнить наказ И.Ньютона, засекреченный в анаграмме: *"Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa"*.

Авторы благодарны А.Н.Тавхелидзе за стимулирующий интерес к написанию обзора. Особую благодарность выражаем В.П.Гердту, А.Н.Квинихидзе, В.В.Корняку, Д.М.Младенову, В.Н.Нестеренко, В.П.Павлову, В.А.Рубакову, А.А.Славнову, А.Т.Филиппову, обсуждения с которыми способствовали прояснению многих вопросов и улучшению изложения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грантов №96-01-01223, 98-01-00101.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Алгоритм абелизации связей первого рода

Существенным ингредиентом бескалибровочной редукции вырожденных систем с локальной симметрией является процедура абелизации связей первого рода. Возможность перехода к абелевым связям следует из хорошо известного факта*, что если связи первого рода разрешить относительно канонических импульсов, то они с необходимостью абелевы. Следует отметить

*Заметим, что уже Леви-Чивита в задаче о нахождении частных интегралов дифференциальных уравнений пользовался именно такой процедурой для получения инвариантных соотношений в инволюции [23].

при этом, что хотя из теоремы о неявной функции, применимость которой в данном случае гарантируется условием (3.13), следует возможность подобного разрешения, однако остается открытым вопрос о глобальной эквивалентности исходной поверхности связей той поверхности, которая описывается уже абелевыми связями. Очевидно, что если абелизованные связи $\Phi_\alpha(p,q)$ связаны с исходными неабелевыми связями соотношением

$$\Phi_\alpha(p,q) = \mathcal{D}_{\alpha\gamma}\varphi_\gamma(p,q), \tag{A.1}$$

то условие глобальной эквивалентности означает существование такой невырожденной матрицы $\mathcal{D}(p,q)$ (с $\det||\mathcal{D}_{\alpha\gamma}||\Big|_{\Gamma_c} \neq 0$ на всей поверхности связей), которая является глобальным решением системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\{\mathcal{D}_{\alpha\gamma},\mathcal{D}_{\beta\lambda}\}\varphi_\gamma + \{\mathcal{D}_{\alpha\lambda},\varphi_\gamma\}\mathcal{D}_{\beta\gamma} + \{\varphi_\gamma,\mathcal{D}_{\beta\lambda}\}\mathcal{D}_{\alpha\gamma} + f_{\gamma\sigma\lambda}\mathcal{D}_{\alpha\gamma}\mathcal{D}_{\beta\sigma} = 0. \tag{A.2}$$

Анализ существования такого решения представляет собой крайне сложную проблему. Однако оказывается возможным свести задачу нахождения решений (A.2) к задаче определения частного решения полной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных*. Более точно в этом приложении будет описана рекуррентная процедура абелизации связей, удовлетворяющих алгебре общего вида

$$\{\varphi_\alpha(p,q),\varphi_\beta(p,q)\} = f_{\alpha\beta\gamma}(p,q)\varphi_\gamma(p,q)\,, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,m \tag{A.3}$$

с помощью преобразования эквивалентности Дирака (A.1) к новым абелевым связям $\Phi_\alpha(p,q)$ с матрицей, имеющей следующую структуру:

$$\mathcal{D} := \underbrace{\mathcal{D}^1(p,q)\cdots\mathcal{D}^m(p,q)}_{m}, \tag{A.4}$$

где каждая матрица $\mathcal{D}^k$ является произведением k матриц размерности $m\times m$:

$$\mathcal{D}^k := \mathcal{R}^{a_k+k}(p,g)\prod_{i=k-1}^{0}\mathcal{S}^{a_k+i}(p,g), \qquad a_k := \frac{k(k+1)}{2}, \tag{A.5}$$

---

*Подобный способ доказательства применялся в специальном случае алгебры

$$\{\varphi_\alpha,\varphi_\beta\} = F_{\alpha\beta}(\varphi_1,\ldots,\varphi_m), \quad \alpha,\beta = 1,\ldots,m.$$

Такой набор связей принято называть функциональной группой, следуя терминологии Ли [41,42].

$$
\mathcal{R}^{a_k+k} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{k} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m-k} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} \boxed{\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & \boxed{\mathrm{B}^{a_k+k}} \end{array} \right) \end{array}, \tag{A.6}
$$

$$
\mathcal{S}^{a_k+i} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{m-k} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & \cdots & C_k^{a_k+i} & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & C_{k+1}^{a_k+i} & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \vdots & C_{m-1}^{a_k+i} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & \cdots & C_m^{a_k+i} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array} \right) \\ \begin{array}{l} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{k-i} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \end{array} . \tag{A.7}
$$

Связи, полученные в результате действия k матриц этого типа на исходные связи Φ^0_β — связи (a_k+k)-го этапа процедуры абелизации

$$
\Phi^{a_k+k}_\alpha := \left(\mathcal{D}^k \cdot \mathcal{D}^{k-1} \cdots \mathcal{D}^1\right)_{\alpha\beta} \Phi^0_\beta, \tag{A.8}
$$

образуют набор, в котором k связей имеют нулевые скобки Пуассона с любой связью в силу того, что функции C и B удовлетворяют полной системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$
\{\Phi^{a_k+i-1}_{\overline{\alpha}_k}, C^{a_k+i}_{\alpha_k}\} = 0, \tag{A.9}
$$

$$
\{\Phi^{a_k+i-1}_{k}, C^{a_k+i}_{\alpha_k}\} \quad = \quad f^{a_k+i-1}_{k\alpha_k\gamma_k} C^{a_k+i}_{\gamma_k} - f^{a_k+i-1}_{k\alpha_k i+1}, \tag{A.10}
$$

$$
\{\Phi^{a_k+k-1}_{\overline{\alpha}_k}, B^{a_k+k}_{\alpha_k\beta_k}\} = 0, \tag{A.11}
$$

$$\{\Phi_k^{a_k+k-1}, B_{\alpha_k\beta_k}^{a_k+k}\} = -f_{k\gamma_k\beta_k}^{a_k+k-1} B_{\alpha_k\gamma_k}^{a_k+k}, \qquad (\text{A.12})$$

где $\alpha_k = k+1,\ldots,m$,$\overline{\alpha}_k = 1,2,\ldots,k-1$, и $f_{\alpha\gamma\beta}^{a_k+i}$ являются структурными функциями алгебры связей (a_k+i)-го этапа.

Доказательство справедливости представления (A.4) и полноты систем дифференциальных уравнений для матриц $\mathcal{S}$ $\mathcal{R}$ было проведено в работе [26] методом индукции. С алгебраической точки зрения процедура абелизации является итерационной процедурой построения "эквивалентных" алгебр A^{a_i}, образованных связями $\Phi_\alpha^{a_i}$:

$$\mathcal{A}^0 \underbrace{\stackrel{\mathcal{S}^1}{\to} \mathcal{A}^1 \stackrel{\mathcal{R}^2}{\to}}_{\mathcal{D}^1} \mathcal{A}^2 \underbrace{\stackrel{\mathcal{S}^3}{\to} \mathcal{A}^3 \stackrel{\mathcal{S}^4}{\to} \mathcal{A}^4 \stackrel{\mathcal{R}^5}{\to}}_{\mathcal{D}^2} \mathcal{A}^5 \ldots \underbrace{\stackrel{\mathcal{S}^{a_k}}{\to} \mathcal{A}^{a_k} \ldots \stackrel{\mathcal{R}^{a_k+k}}{\to}}_{\mathcal{D}^k} \mathcal{A}^{a_k+k} \ldots \qquad (\text{A.13})$$

Процедура абелизации состоит из a_m последовательных этапов формирования абелевой алгебры размерности m, эквивалентной исходной неабелевой алгебре, так что на a_k-ом этапе алгебра $\mathcal{A}^{a_k}$ обладает центром из k элементов $\mathcal{Z}_k[A] = (\Phi_1^{a_k}, \Phi_2^{a_k}, \ldots \Phi_k^{a_k})$. Иными словами, матрица $\mathcal{D}^k$ переводит алгебру $\mathcal{A}^k$ в алгебру $\mathcal{A}^{k+1}$, с центром из $k+1$-го элемента.

Б. Абелева модель Христа — Ли — Прохорова

Здесь на примере простейшей механической системы будет изложена процедура бескалибровочной редукции, дано сравнение со схемой фиксации калибровки. Этот пример показывает существование калибровок, которые, несмотря на то, что условие (4.8) выполняется, все же приводят к искажению истинной динамики редуцированной системы.

Формулировка модели и бескалибровочная редукция. Рассмотрим точно решаемую механическую систему, заданную лагранжианом [47, 48]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + y^2(x_1^2+x_2^2)\big) - y(\dot{x}_1 x_2 - x_1\dot{x}_2) - V(x_1^2+x_2^2), \qquad (\text{Б.1})$$

где x_1, x_2, y — независимые переменные. Ранг матрицы Гесса равен двум, поэтому имеется одна первичная связь

$$p_y = 0, \qquad (\text{Б.2})$$

которая непосредственно следует из определения канонического импульса p_y. Применяя стандартную процедуру перехода к гамильтонову формализму, получим полный гамильтониан

$$H_T = \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) - y(x_1p_2 - x_2p_1) + V(x_1^2+x_2^2) + u(t)p_y \qquad (\text{Б.3})$$

и вторичную связь из условия стационарности первичной

$$\varphi := x_1 p_2 - x_2 p_1 = 0. \tag{Б.4}$$

Легко убедиться в том, что в теории нет других связей, а первичные и вторичные связи образуют полную систему связей первого рода

$$\{\varphi, p_y\} = 0.$$

Это означает, что существует группа локальных калибровочных преобразований, относительно которой лагранжиан системы (квази)инвариантен. Производящая функция соответствующих бесконечно малых локальных калибровочных преобразований строится по связям и имеет следующий вид:

$$G = -\dot{\varepsilon}(t) p_y + \varepsilon(t)(x_1 p_2 - x_2 p_1). \tag{Б.5}$$

Преобразования обобщенных координат, генерируемые с помощью G:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \{x_1, G\} = x_1 - \varepsilon(t) x_2, \\ x_2' &= x_2 + \{x_2, G\} = x_2 + \varepsilon(t) x_1, \\ y' &= y + \{y, G\} = y - \dot{\varepsilon}(t) \end{aligned} \tag{Б.6}$$

представляют собой вращения на угол $\varepsilon(t)$ вокруг оси, перпендикулярной к плоскости (x_1, x_2).

Осуществим теперь каноническое преобразование к специальным переменным $(Y, P_Y), (R, P_R), (\overline{\Theta}, \overline{P}_{\overline{\Theta}})$ так, чтобы новый импульс $\overline{P}_{\overline{\Theta}}$ был равен вторичной связи φ:

$$Y = y, \qquad P_y = p_Y, \tag{Б.7}$$

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad P_R = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \tag{Б.8}$$

$$\overline{\Theta} = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \overline{P}_{\overline{\Theta}} = x_1 p_2 - x_2 p_1. \tag{Б.9}$$

Это преобразование каноническое и имеет обратное

$$y = Y, \qquad p_Y = P_y, \tag{Б.10}$$

$$x_1 = R\cos\overline{\Theta}, \;\; p_1 = P_R \cos\overline{\Theta} - \frac{\overline{P}_{\overline{\Theta}}}{R}\sin\overline{\Theta}, \tag{Б.11}$$

$$x_2 = R\sin\overline{\Theta}, \;\; p_2 = P_R \sin\overline{\Theta} + \frac{\overline{P}_{\overline{\Theta}}}{R}\cos\overline{\Theta} \tag{Б.12}$$

всюду, за исключением одной точки $R = 0$, если примем, что $0 < \overline{\Theta} < 2\pi$. В терминах новых переменных полный гамильтониан имеет вид

$$H_T = \frac{1}{2}(P_R^2 + \frac{\overline{P}_{\overline{\Theta}}^2}{R^2}) - Y\overline{P}_{\overline{\Theta}} + V(R^2) + u_Y P_Y. \tag{Б.13}$$

В соответствии с общим представлением уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{R} \ &= P_R\,, \\ \dot{P}_R &= -\frac{\partial V(R^2)}{\partial R}\,, \\ \dot{\overline{P}}_{\overline{\Theta}} &= 0, \quad \dot{\overline{\Theta}}_\alpha = \overline{u}_\Theta(t), \\ \dot{P}_Y &= 0, \quad \dot{Y} = \overline{u}_Y(t) \end{aligned} \tag{Б.14}$$

демонстрируют расщепление координат фазового пространства на две части: (R, P_R), динамика которых не содержит произвола и задается физическим гамильтонианом

$$H_{Ph} = \frac{1}{2}P_R^2 + V(R^2), \tag{Б.15}$$

и (Y, Θ) с полностью произвольной эволюцией. Таким образом, после учета связей P_Y и $\overline{P}_{\overline{\Theta}}$ автоматически происходит редукция к истинным динамическим переменным (R, P_R) без введения каких-либо дополнительных калибровочных условий. В их калибровочной инвариантности легко убедиться с помощью производящей функции бесконечно малых локальных калибровочных преобразований (Б.5) в новых координатах

$$G = -\dot{\varepsilon}(t)P_Y + \varepsilon(t)\overline{P}_{\overline{\Theta}}. \tag{Б.16}$$

Каноническая калибровка. Обратимся теперь к схеме редукции с фиксацией калибровки. Всякая корректная редукция должна приводить к невырожденной теории, которая должна быть канонически эквивалентна теории, полученной бескалибровочным образом. Поэтому прежде всего удостоверимся в существовании канонической калибровки для данной модели. Легко проверить, что выбор калибровок

$$\begin{aligned} \chi_1 \ &=: \ y = 0, \\ \chi_2 \ &=: \ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{Б.17}$$

$$\det \|\{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}\| = 1 \tag{Б.18}$$

позволяет зафиксировать множители Лагранжа u_1, u_2 в обобщенном гамильтониане

$$H_E = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - y(x_1p_2 - x_2p_1) + V(x_1^2 + x_2^2) + u(t)_1 p_y + u_2(x_1p_2 - x_2p_1),$$

$$u_1 = 0,$$
$$u_2 = y - \frac{x_1 p_2 - x_2 p_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

и приводит к редуцированной системе, которая эквивалентна полученной выше (Б.14).

Недопустимая калибровка. Приведем пример калибровки, которая удовлетворяет условию невырожденности матрицы Фаддеева — Попова, однако не является допустимой. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv y = 0, \\ \chi_2 &\equiv \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) = 0, \quad A > 0. \end{aligned} \tag{Б.19}$$

Легко убедиться, что данная калибровка, несмотря на то, что с ее помощью также можно зафиксировать множители Лагранжа, недопустима, поскольку ее следствием является ограничение на значение физической величины. Действительно, в специальных координатах (Б.7) эта калибровка имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv Y = 0, \\ \chi_2 &\equiv \cos 2\overline{\Theta} - \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{R}\right) = 0. \end{aligned} \tag{Б.20}$$

Из (Б.20) следует, что $0 < 2\overline{\Theta} \leq \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \leq 2\overline{\Theta} < 2\pi$, и поэтому на Γ^* выполняется необходимое условие Фаддеева — Попова

$$\det \|\{\chi_\alpha, \varphi_\beta\}\| = -2\sin 2\overline{\Theta}\Big|_{\Gamma^*} \neq 0, \tag{Б.21}$$

однако немедленно следует ограничение на физическую переменную R:

$$R > 2A. \tag{Б.22}$$

Заметим еще, что предложенный критерий допустимых калибровок (4.76) забраковывает данную калибровку (Б.19).

Приведем еще один пример калибровки:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= y = 0, \\ \chi_2 &= x_2 - \sqrt{x_1(\frac{2}{3}x_1^2 - x_1 + 2) + a} = 0, \end{aligned} \tag{Б.23}$$

для которой на поверхности калибровок и связей детерминант Фаддеева — Попова нигде не обращается в ноль, но которая также является недопустимой.

B. $SU(2)$ инвариантная механика Янга — Миллса в $0+1$-мерном пространстве-времени

В качестве примера процедуры абелизации связей и построения редуцированной системы рассмотрим модель [48,49], представляющую собой $SU(2)$ калибровочно-инвариантную теорию полей Янга — Миллса в $(0+1)$-мерном пространстве-времени.

Лагранжиан модели задается выражением

$$L = \frac{1}{2}\ (D_t x)_i (D_t x)_i - \frac{1}{2}\ V(x^2)\ , \tag{B.1}$$

где x_i и y_i — компоненты трехмерных векторов и D_t — ковариантная производная

$$(D_t x)_i := \dot{x}_i + g\epsilon_{ijk} y_j x_k\ . \tag{B.2}$$

Заданная таким образом система соответствует размерной редукции неабелевой $SU(2)$-теории в $(0+1)$-мерии, причем переменные x_i являются реликтом полей "материи". С помощью преобразования Лежандра

$$p_y^i \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y_i}}\ , \tag{B.3}$$

$$p^i \quad = \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x_i}} = \dot{x_i} + g\epsilon^{ijk} y_j x_k \tag{B.4}$$

получаем канонический гамильтониан

$$H_C = \frac{1}{2} p_i p_i - \epsilon_{ijk} x_j p_k y_i + V(x^2) \tag{B.5}$$

и три первичные связи $p_y^i = 0$, приводящие ко вторичным связям

$$\Phi_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k = 0\ , \tag{B.6}$$

образующим $SO(3)$-алгебру:

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} \quad = \quad \epsilon_{ijk}\Phi_j\ . \tag{B.7}$$

Заметим, что вторичные связи зависимы в смысле Дирака: $x_i\Phi_i = 0$. Приступая к процедуре абелизации, выберем в качестве независимых связей следующие:

$$\Phi_1^{(0)} := x_2 p_3 - x_3 p_2\ , \quad \Phi_2^{(0)} := x_3 p_1 - x_1 p_3\ . \tag{B.8}$$

Теперь вместо алгебры (B.7) имеем*

$$\{\Phi_1^{(0)}, \Phi_2^{(0)}\} = -\frac{x_1}{x_3}\,\Phi_1^{(0)} - \frac{x_2}{x_3}\,\Phi_2^{(0)}\ . \tag{B.9}$$

Согласно общей итерационной схеме построения матрицы абелизации (см. [26] или приложение A) в данном случае следует выполнить два этапа преобразований эквивалентности связей. Сначала исключим $\Phi_1^{(0)}$ из правой части равенства (B.9). Это достигается преобразованием

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)} &:= \Phi_1^{(0)}\ , \\ \Phi_2^{(1)} &:= \Phi_2^{(0)} + C\,\Phi_1^{(0)} \end{aligned} \tag{B.10}$$

с функцией C, которая является решением следующего дифференциального уравнения в частных производных:

$$\{\Phi_1^{(0)}, C\} = -\frac{x_2}{x_3}\,C + \frac{x_1}{x_3}\ . \tag{B.11}$$

Используя частное решение этого уравнения

$$C(x) = \frac{x_1 x_2}{x_2^2 + x_3^2}\ , \tag{B.12}$$

для новых связей получаем алгебру вида

$$\{\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}\} = -\frac{x_2}{x_3}\,\Phi_2^{(1)}\ . \tag{B.13}$$

На втором шаге процедуры абелизации сделаем преобразование

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &:= \Phi_1^{(1)}\ , \\ \Phi_2^{(2)} &:= B\,\Phi_2^{(1)} \end{aligned} \tag{B.14}$$

с функцией B, удовлетворяющей уравнению

$$\{\Phi_1^{(2)}, B\} = \frac{x_2}{x_3}\,B\ . \tag{B.15}$$

Воспользовавшись одним из решений этого уравнения $B(x) = \frac{1}{x_3}$, приходим к искомым абелевым связям

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)} &= x_2 p_3 - x_3 p_2\,, \\ \Phi_2^{(2)} &= \frac{1}{x_3}\left[(x_3 p_1 - x_1 p_3) + \frac{x_1 x_2}{x_2^2 + x_3^2}(x_2 p_3 - x_3 p_2)\right]. \end{aligned} \tag{B.16}$$

*В дальнейшем сектор первичных связей не будем выписывать, поскольку они уже принадлежат центру алгебры, а процедура абелизации элементы центра оставляет без изменения.

Теперь опишем каноническое преобразование к специальным переменным, таким, что два новых импульса совпадают с абелизованными связями*:

$$p_\theta := \frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})\,\mathbf{x_1} - \mathbf{x^2}\,\mathbf{p_1}}{\sqrt{{x_2}^2+{x_3}^2}}\ , \quad p_\phi := x_2p_3 - x_3p_2\ . \tag{B.17}$$

Легко проверить, что точечное преобразование от декартовых координат к сферическим

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta, & r &= \sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}, \\ x_2 &= r\sin\phi\sin\theta, & \theta &= \arccos\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}}, \\ x_3 &= r\cos\phi\sin\theta, & \phi &= \arctan\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\ , \end{aligned} \tag{B.18}$$

как раз является преобразованием такого типа. Действительно, используя соответствующую производящую функцию

$$F[\mathbf{x};\ \mathbf{p_r},\mathbf{p_\theta},\mathbf{p_\phi}] =$$
$$= p_r\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2} + p_\theta\arccos\frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}} + p_\phi\arctan\left(\frac{x_2}{x_3}\right), \tag{B.19}$$

получаем

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = p_r\cos\theta - p_\theta\frac{\sin\theta}{r}\ , \tag{B.20}$$
$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = p_r\sin\theta\sin\phi + p_\theta\frac{\sin\phi\cos\theta}{r} + p_\phi\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\ , \tag{B.21}$$
$$p_3 = \frac{\partial F}{\partial x_3} = p_r\sin\theta\cos\phi + p_\theta\frac{\cos\phi\cos\theta}{r} - p_\phi\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\ , \tag{B.22}$$

и убеждаемся, что в новых переменных двумя независимыми связями в самом деле являются $p_\theta = 0$ и $p_\phi = 0$, в соответствии с равенством (B.17). Стоит заметить, что, стартуя с набора приводимых связей (B.6) и выполнив преобразование (B.18), можно получить следующее представление:

$$\Phi_1 = -p_\phi\,, \tag{B.23}$$
$$\Phi_2 = -p_\theta\cos\phi + p_\phi\sin\phi\cot\theta\,, \tag{B.24}$$
$$\Phi_3 = p_\theta\sin\phi + p_\phi\cos\phi\cot\theta\ , \tag{B.25}$$

*Здесь мы вводим компактные обозначения для трехмерных векторов $\mathbf{x},\mathbf{p}$ и умножаем связи $\Phi_2^{(2)}$ на фактор $\sqrt{{x_2}^2+{x_3}^2}$, чтобы связи имели одинаковую размерность. Это умножение сохраняет абелев характер связей, поскольку $\{\Phi_1^{(2)}, \sqrt{{x_2}^2+{x_3}^2}\} = 0$.

которое приспособлено к процедуре абелизации. Матрица абелизации для приводимого набора связей имеет вид

$$D := \frac{1}{d}\begin{pmatrix} -d_2\sin\phi - d_3\cos\phi\,, & d_1\sin\phi\,, & d_1\cos\phi \\ (d_2\cos\phi - d_3\sin\phi)\cot\theta, & -d_3 - d_1\cos\phi\cot\theta, & d_2 + d_1\sin\phi\cot\theta \\ \cot\theta\,, & \sin\phi\,, & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{B.26}$$

с произвольными $\mathbf{d}$ и $d := d_1\cot\theta + d_2\sin\phi + d_3\cos\phi$. Этот пример демонстрирует две характерные черты процедуры абелизации:

i) нет необходимости работать с неприводимым набором связей, т.к. процедура абелизации автоматически приводит к неприводимому набору связей;

ii) в определенных специальных координатах задача решения дифференциальных уравнений переходит в алгебраическую задачу. В новых канонических переменных канонический гамильтониан (B.5) принимает вид

$$H_C = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right) - p_\phi y_\phi - p_\theta y_\theta + V(r)\ , \tag{B.27}$$

с физическим импульсом $p_r = \frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p})}{\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2}}$, и

$$\begin{aligned} y_\phi &:= y_1 + y_2\sin\phi + y_3\cos\phi\cot\theta\,, \\ y_\theta &:= y_2\cos\phi - y_3\sin\phi\,. \end{aligned}$$

В результате все нефизические переменные отделились от физических r и p_r, эволюция во времени которых однозначно определяется физическим гамильтонианом. Последний получается из канонического занулением p_ϕ и p_θ в выражении (B.27):

$$H_{\mathbf{phys}} = \frac{1}{2}p_r^2 + V(r)\ . \tag{B.28}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лагранж Ж.** — Аналитическая механика. М.: Гостехиздат, 1950, т.1,2.
2. **Dirac P. A. M.** — Canad. J. Math., 1950, v.2, p.129; Canad. J. Math., 1951, v.3, p.1; Proc. Roy. Soc., 1958, v.A246, p.326.
3. **Bergmann P.G.** — Phys. Rev., 1949, v.75, p.680; **Anderson J.L., Bergmann P.G.** — Phys. Rev., 1951, v.83, p.1018; **Bergmann P.G., Goldberg J.** — Phys. Rev., 1955, v.98, p.531.
4. **Дирак П. А. М.** — Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
   Коноплева В. П., Попов В. Н. — Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
   Sudarshan E. C. G., Mukunda N. — Classical Dynamics; A Modern Perspective New York: Wiley, 1974.
   Hanson A. J., Regge T., Teitelboim C. — Constrained Hamiltonian Systems. Accademia

Nazionale dei Lincei, 1976.
Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. — Введение в квантовую терию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
Sundermeyer K. — Constrained Dynamics. Lecture Notes in Physics, 1982, v.169. Berlin: Springer-Verlag.
Henneaux M. — Phys. Rep., 1985, v.126, p.1.
Нестеренко В. В., Червяков А. М. — Сингулярные лагранжианы. Лекции для молодых ученых. Дубна, 1986.
Разумов Ф. И., Соловьев Л. Д. — Препринты ИФВЭ-86-212, 86-213, 86-214, 1986.
Гитман Д. М., Тютин И. В. — Каноническое квантование систем со связями. М.: Наука, 1986.
Lusanna L. — Riv. Nuovo Cimento., 1991, v.14, N3, p.1.
Henneaux M., Teitelboim C. — Quantization of Gauge Systems. Princeton University, Princeton, NJ, 1992.
Прохоров Л.В., Шабанов С.В. — Гамильтонова механика калибровочных систем. ОИЯИ, Б1-2-93-312, Дубна, 1993.

5. **Weyl H.** — Z. f. Phys., 1929, v.56, p.330-346.
6. **Лихнерович А.** — Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИЛ, 1960.
7. **Дубровин Б.А. Новиков П.С. Фоменко А.Т.** — Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
8. **Yang C.N., Mills R.L.** — Phys. Rev., 1954, v.96, p.191. 7.
9. **Герц Г.** — Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: ГТТИ, 1959.
10. **Полак Л.С.** — Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960.
11. **Dirac P.A.M.** — Phys. Rev., 1959, v.114, p. 924.
12. **Faddeev L.D., Popov V.N.** — Phys.Lett. B, 1967, v.25, p.30.
13. **Gribov V.N.** — Nucl. Phys. B, 1978, v.139, p.1.
14. **Singer I.M.** — Commun. Math. Phys., 1978, v.60, p.7.
15. **Соловьев М.А.** — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.415; ТМФ, 1989, т.78, с.163.
16. **Арнольд В.И.** — Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
17. **Олвер П.** — Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
18. **Овсянников Л. В.** — Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
19. **Ибрагимов Н. Х.** — Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
20. **Фоменко А.Т.** — Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1988.
21. **Поммаре Ж.** — Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.
22. **Shanmugadhasan S.** — J. Math. Phys., 1973, v.14, p.677.
23. **Леви-Чивита Т., Амальди У.** — Курс теоретической механики. М.: ИЛ, 1951, т.2, ч.2.
24. **Картан Э.** — Интегральные инварианты. М., 1940.
25. **Forsyth A. R.** — The Theory of Differential Equations. Cambridge University Press, Cambridge, 1953, v.5.
26. **Gogilidze S.A., Khvedelidze A.M., Pervushin V.N.** — J. Math. Phys., 1996, v.37, p.1760.
27. **Gogilidze S.A., Khvedelidze A.M., Pervushin V.N.** — Phys. Rev. D, 1996, v.53, p.2160.
28. **Abraham R., Marsden J.E.** — Foundations of Mechanics, Addison-Wesley, 1978.
29. **Thirring W.** — A Course in Mathematical Physics I,II. Springer-Verlag, New-York, 1978.

30. **Годбийон К.** — Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
31. **Marsden J.S, Ratiu T.S** — Introduction to Mechanics and Symmetry. Springer-Verlag, New-York, 1994.
32. **Фаддеев Л. Д.** — ТМФ, 1969, т.1, с.3.
33. **Lichnerowicz A.** — C.R. Acad. Sci., Paris, 1975, v.A 280, p.523.
34. **Gotay M., Nester J., Hinds G.** — J. Math. Phys., 1978 v, 19, p.2388.
35. **Marmo G., Mukunda N., Samuel J.** — Riv. Nuovo Cim., 1983, v.6, p.2.
36. **Павлов В. П.** — ТМФ, 1995, т.104, с.304; т.105, с.429.
37. **Уиттекер Е.Т.** — Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937.
38. **Rund H.** — The Hamilton – Jacobi Theory in Calculus of Variational. D. van. Nostrad Comp., 1966.
39. **Нетер Э.** — В сб.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959, с.611.
40. **Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.** — Непрерывные симметрии в теории поля. Лекции для молодых ученых. Дубна, 1978.
41. **Эйзенхарт Л. П.** — Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ., 1947.
42. **Schouten J. A., v. d. Kulk W.** — Pfaff's Problem and its Generalizations. Oxford: Clarendon Press, 1949.
43. **Batalin I.A., Vilkovisky G.A.** — Nucl. Phys., 1984, v. B234, 106.
44. **Gogilidze S.A., Sanadze V.V., Surovtsev Yu.S., Tkebuchava F.G.** — Int. J. of Mod. Phys., 1989, v.A4, p.4165.
45. **Гогилидзе С.А., Санадзе В.В., Суровцев Ю.С., Ткебучава Ф.Г.** — ТМФ, 1995, т.102, с.56; ТМФ, 1995, т.102, с.66.
46. **Прохоров Л. В.** — ЭЧАЯ, 1996, т.27, 5, с.1399.
47. **Christ N.H., Lee T.L.** — Phys. Rev., 1980, v.D22, p.389.
48. **Прохоров Л.В.** — ЯФ, 1982, т.35, с.229.
49. **Прохоров Л.В. Шабанов С.В.** — УФН, 1991, т.161, с.13.
50. **Татаринов Я.В.** — Лекции по классической динамике. М.: МГУ, 1984.