«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2000, ТОМ 31, ВЫП. 1

УДК 539.12.01

# ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЩИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

*А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили*

Институт физики высоких энергий, 142284, г. Протвино Московской обл.

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2000, ТОМ 31, ВЫП. 1

УДК 539.12.01

# ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЩИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

*А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили*

Институт физики высоких энергий, 142284, г. Протвино Московской обл.

*К столетию со дня рождения академика*
*Владимира Александровича Фока*

Подробно обсуждаются фундаментальные работы В.А.Фока по теории тяготения. Показано, что его основные физические представления находят отражение в релятивистской теории гравитации, в которой гравитационное поле, как и все другие поля, рассматривается в пространстве Минковского.

The fundamental works by V.A.Fock on gravitation theory are discussed in detail. It is also shown that his basic physical ideas are represented in the relativistic theory of gravitation where the gravitational field is treated in Minkowski space as any other fields.

В настоящем обзоре мы хотели бы отдать дань глубокого уважения крупнейшему ученому — академику В.А.Фоку, внесшему выдающийся вклад в теоретическую и математическую физику. Мы остановимся только на работах В.А.Фока по теории тяготения и точно воспроизведем его основные положения и выводы по наиболее принципиальным проблемам теории тяготения, в создание которой он внес неоценимый вклад. В.А.Фок стремился раскрыть физические представления о тяготении, скрытые под покровом формально-абстрактного аппарата общей теории относительности (ОТО). Это ему в значительной степени удалось, однако при этом он вышел за пределы эйнштейновской общей теории относительности. В.А.Фок считал необходимым (для островных систем) к системе уравнений Гильберта—Эйнштейна добавить еще гармонические условия в декартовых (галилеевых) координатах. Введение декартовых координат фактически означало введение в теорию тяготения инерциальных систем координат, что и обеспечивало абсолютный характер ускорения. Строго говоря, ОТО Эйнштейна и теория тяготения В.А.Фока — различные теории. Это обстоятельство особо отмечал Л.Инфельд, который писал: «Тем самым для Фока выбор гармонического координатного условия становится некоторым фундаментальным законом природы, изменяющим сам характер эйнштейновской общей теории относительности и превращающим ее в теорию гравитационного поля, справедливую только в инерциальных системах координат». Однако на самом деле введение инерциальных систем координат в теорию тяготения с необходимостью требует коренного отхода от всей концепции общей теории относительности. Но на этом мы остановимся позднее. Обратимся теперь непосредственно к работам [1] и [2]. Прежде всего остановимся на принципе относительности, без понимания сути которого невозможно осмыслить, что таится за словами «общая относительность». В.А.Фок дал предельно ясную формулировку принципа относительности. Так, он писал ([1], с. 242): *«Установим теперь, что понимается в формулировке принципа относительности под равноправием систем отсчета. Две системы отсчета* $(x)$ *и* $(x')$ *можно назвать физически равноправными, если в них явления протекают одинаковым образом. Последнее означает, что если возможен процесс, описываемый в координатах* $x$ *функциями*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_n(x), \tag{49.*03}$$

*то возможен и другой процесс, который описывается в координатах* $(x')$ *теми же самыми функциями*

$$\varphi_1(x'), \varphi_2(x') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_n(x'), \tag{49.*04}$$

*и обратно, всякому процессу вида* $(49.^*04)$ *во второй системе соответствует возможный процесс вида* $(49.^*03)$ *в первой системе».* И далее он подчеркнул: *«Таким образом, принцип относительности есть утверждение о существовании соответственных процессов в системах отсчета определенного класса, каковые системы признаются в этом случае равноправными. Из этого определения ясно, что как самый принцип относительности, так и равноправие двух систем отсчета, представляют понятия физические, и утверждение, что то и другое имеет место, заключает в себе определенную физическую гипотезу, а не является просто условным».*

На языке теории поля **принцип относительности можно сформулировать так: уравнения поля, описывающие физические процессы, должны быть форминвариантны относительно преобразований Лоренца от одной галилеевой системы координат** $x$ **к другой системе** $x'$.

Именно такое ясное понимание физической сути принципа относительности и явилось для В.А.Фока исходным положением для критического анализа понятия «общей относительности». В этой связи он писал ([1], с. 17): *«Термин «общая теория относительности» или «общий принцип относительности» употребляется (прежде всего самим Эйнштейном) еще и в смысле условного наименования для теории тяготения. Уже основная работа Эйнштейна по теории тяготения (1916 г.) озаглавлена «Основы общей теории относительности». Это еще больше запутывает дело, так как словам «общий» и «относительный» придается здесь несвойственный им смысл. Так, поскольку в теории тяготения пространство предполагается* *неоднородным, а относительность связана с однородностью, то выходит, что в общей теории относительности нет, вообще говоря, никакой относительности».*

И далее он отмечал ([1], с. 244): *«Поскольку наибольшая возможная однородность выражается преобразованиями Лоренца, более общего принципа относительности, чем тот, который рассматривается в обычной теории относительности, быть не может. Тем более не может быть общего принципа относительности, как физического принципа, который имел бы место по отношению к произвольным системам отсчета. Чтобы уяснить себе этот факт, необходимо четко различать между физическим принципом, утверждающим существование соответственных явлений в разных системах отсчета, и простым требованием ковариантности уравнений при переходе от одной системы отсчета к другой. Ясно, что из принципа относительности вытекает ковариантность уравнений, но обратное не имеет места: ковариантность дифференциальных уравнений возможна и тогда, когда принцип относительности не выполняется».* Глубокое понимание основ физической теории позволило В.А.Фоку сделать однозначный вывод: **«Общий принцип относительности, как физический принцип, который имел бы место по отношению к произвольным системам отсчета, невозможен».**

Другим фундаментальным вопросом в теории тяготения был вопрос о существовании привилегированных систем координат. По этому поводу В.А.Фок писал ([1], с. 473): *«По Эйнштейну, никаких привилегированных систем координат не существует, и система координат остается неопределенной до конца. Сторонники этой точки зрения возводят эту неопределенность в достоинство и усматривают в ней глубокий смысл, а именно выражение некоего «общего принципа относительности», в силу чего и вся теория Эйнштейна названа им «общей теорией относительности». С такой точкой зрения мы согласиться никак не можем».*

Далее он отмечает ([1], с. 475): *«Мы неоднократно подчеркивали принципиальное значение существования привилегированной координатной системы, определяемой с точностью до преобразования Лоренца. Оно проявляется и в следующем. Только признав его, можно говорить о правильности гелиоцентрической системы Коперника, в том же смысле, в каком это было возможно в механике Ньютона. Непризнание же привилегированных координатных систем ведет к той точке зрения, согласно которой гелиоцентрическая система Коперника и геоцентрическая система Птолемея будто бы равноправны. Такая точка зрения противоречит данному в §49 определению равноправия систем отсчета и представляется нам неправильной»* (см. формулы $(49.{*}03)$ и $(49.{*}04)$ — авторы). Выдвигая идею о существовании привилегированных систем координат, В.А.Фок руководствовался глубокой физической интуицией, поскольку он ясно понимал, что только в этом случае можно говорить об «абсолютности ускорения». Так, он писал ([1], с. 499): *«Предельные или иные условия, характеризующие пространство в целом, совершенно необходимы, а поэтому и понятие «ускорение по отношению к пространству» сохраняет в той или иной форме свой смысл. Что касается парадокса Маха, то он основан, как известно, на рассмотрении вращающегося жидкого тела, имеющего форму эллипсоида, и невращающегося, имеющего форму шара. Парадокс возникает здесь только в том случае, если считать лишенным смысла понятие «вращения по отношению к пространству», тогда действительно оба тела (вращающееся и невращающееся) представляются равноправными, и становится непонятным, почему одно из них шаровидно, а другое — нет. Но парадокс исчезает, коль скоро мы признаем законность понятия «ускорения по отношению к пространству».*

Как же В.А.Фок выбирает привилегированные системы координат? Детализируя выражение для тензора $R^{\mu\nu}$ ([1], доп. Г-35), он находит

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \cdot \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \; . \tag{1}$$

Здесь

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left( g^{\mu\alpha}\frac{\partial \Gamma^\nu}{\partial x^\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\Gamma^\alpha \right) \; , \quad \Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\sqrt{-g} g^{\nu\sigma}) \; , \tag{2}$$

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda}(\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}) \; , \quad \Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \; . \tag{3}$$

Все эти выражения записаны в произвольных координатах. Если имеет место условие гармоничности

$$\Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{-g} g^{\nu\sigma}\right) = 0 \; , \tag{4}$$

то $\Gamma^{\mu\nu} = 0$, а следовательно, выражение для $R^{\mu\nu}$ существенно упрощается:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \cdot \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \; . \tag{5}$$

Этим самым достигается, как писал В.А.Фок ([2], с. 382): *«...то огромное преимущество, которое имеет гармоническая система координат перед всеми другими. Действительно, в гармонической системе координат в каждое из десяти уравнений тяготения входят (как мы уже неоднократно отмечали) вторые производные только от одной компоненты фундаментального тензора, причем эти вторые производные группируются в виде оператора Даламбера».* И далее он отмечает ([2], с. 382): *«При помощи гармонической системы координат в уравнениях тяготения достигается «разделение переменных» в отношении высших (т.е. вторых) производных. Оно* *представляет аналогию с тем, которое достигается в задачах электродинамики путем введения декартовых компонент векторного потенциала. В декартовых координатах известные уравнения для потенциалов имеют вид*

$$\Delta A_k - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = -4\pi\frac{j_k}{c}\ , \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho\ , \tag{6}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^i} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\ . \tag{7}$$

*Таким образом, каждое из этих уравнений содержит только одну компоненту для потенциала. Но если перейти от декартовых к произвольным криволинейным координатам, то каждое из уравнений, связывающее потенциалы с током, будет уже содержать, вообще говоря, не одну, а несколько криволинейных компонент векторного потенциала. Разделение переменных в уравнениях можно, следовательно, рассматривать как одно из свойств декартовой координатной системы».* Условие гармоничности (4) имеет место для *любых координатных систем*, и упрощение тензора $R^{\mu\nu}$ достигается в любых произвольных координатах. Поэтому проводить параллель между условием гармоничности и выбором декартовых координат в электродинамике не совсем правомерно. Но В.А.Фок делает следующий важный шаг: он фактически записывает условия гармоничности в декартовых (галилеевых) координатах, несмотря на то, что в римановом пространстве таких координат нет. Так, например, он особо отмечает ([1], с. 296): *«...сделаем одно замечание по вопросу об определении прямой линии в теории тяготения. Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты $x_1$, $x_2$, $x_3$? Нам представляется единственно правильным второе определение».* Так в теории В.А.Фока возникают декартовы координаты. Фактически, неявно Фок имел дело с пространством Минковского в галилеевых координатах, именно по этой причине у него и появились привилегированные системы координат. Суть дела, таким образом, не только в гармонических условиях, но и в том, что эти условия записываются в декартовых (галилеевых) координатах:

$$\frac{\partial\tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \tag{8}$$

$x^\mu$ — декартовы координаты пространства Минковского. В такой форме эти условия нельзя применять в случае криволинейных координат, например сферических. С точки зрения риманова пространства гармонические условия не общековариантны. В.А.Фок по этому поводу пишет: *«Упомянутые дополнительные уравнения* (имеются в виду гармонические условия — авторы) *не являются очевидно общековариантными».* Но, так как В.А.Фок фактически, хотя и неявно, имел дело с пространством Минковского в декартовых (галилеевых) координатах, ситуация изменяется, и гармонические условия (8) могут быть представлены в общековариантной форме. Действительно, если от декартовых координат пространства Минковского перейти к произвольным криволинейным координатам $y$, то уравнение (8) принимает (см. доп. $A$.10) общековариантный вид:

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(y) + \gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = 0 \; . \tag{9}$$

Здесь $\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля пространства Минковского в координатах $y$. Уравнение (9) можно записать (см. доп. $Б$.14) и в форме

$$\Box\, y^\lambda = -\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(y) g^{\alpha\beta}(y) \; , \tag{10}$$

где через $\Box$ обозначен оператор

$$\Box\; = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}} \cdot \frac{\partial}{\partial z^\nu}\left(\tilde{g}^{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial z^\sigma}\right) \; . \tag{11}$$

Таким образом, запись гармонического условия (8) в декартовых (галилеевых) координатах пространства Минковского автоматически приводит к общековариантным уравнениям в пространстве Минковского в форме (9) или (10). Отсюда следует, что уравнения (9) являются не координатными условиями, а полевыми уравнениями.

В.А.Фок выбирает координаты $y^\lambda$, удовлетворяющие уравнению

$$\Box\, y^\lambda = 0, \tag{10$a$}$$

и требует, чтобы решение этого уравнения удовлетворяло евклидовости на бесконечности и некоторым дополнительным условиям. Этим путем он фактически находит декартовы координаты, для которых символы Кристоффеля $\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ всегда равны нулю, поэтому уравнение (10) сводится к уравнению (10$a$). Но такие координаты возможны в пространстве Минковского, а не в римановом пространстве. Именно здесь В.А.Фок неявно использовал пространство Минковского и вышел за рамки эйнштейновской общей теории относительности.

В случае криволинейных координат символы Кристоффеля $\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(y)$ отличны от нуля, поэтому условие гармоничности уже нельзя записать в форме (8), а необходимо записывать в форме (9). В.А.Фок не получал уравнений ни в форме (9), ни в форме (10), поэтому само пространство Минковского присутствовало в его рассуждениях и расчетах неявно. Он шел к декартовым координатам через решения уравнения (10$a$), удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Он стремился ввести привилегированные системы координат, подобные тем, какие имеют место в классической механике и специальной теории относительности. Именно только при наличии таких систем координат и можно говорить об абсолютности ускорения. Совершенно очевидно, что, оставаясь в рамках общей теории относительности, таких систем ввести нельзя. В общей теории относительности ускорение, как и скорость, относительны, поскольку отсутствует понятие силы тяготения. Именно все это В.А.Фок как физик и не хотел принять. Отсюда, в принципе, можно было прийти к рассмотрению гравитационного поля как физического поля типа Фарадея—Максвелла в пространстве Минковского. На этом же пути можно было в теории тяготения сохранить фундаментальные законы материи — законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Пытался ли В.А.Фок рассматривать гравитационное поле в пространстве Минковского? Нет, такую мысль он не разделял. Он писал об этом ([2], с. 409): *«Мы упоминаем здесь о ней только в связи с наблюдаемым иногда стремлением (которого мы отнюдь не разделяем) уложить теорию тяготения в рамки евклидового пространства».*

В работе ([2], с. 409) он отмечал: *«При решении уравнений Эйнштейна мы пользовались координатной системой, которую мы называли гармонической, но которая заслуживает названия инерциальной».* И далее он пишет ([2], с. 409): *«Нам кажется, что возможность введения в общей теории относительности однозначным образом определенной инерциальной координатной системы заслуживает быть отмеченной».* Но, как мы уже отмечали, суть дела не столько в условиях гармоничности, а прежде всего в том, что эти условия записываются в декартовых (галилеевых) координатах, что, по-существу, и означает использование инерциальной системы координат в пространстве Минковского, поскольку в римановом пространстве инерциальной системы координат в принципе не может быть. В произвольных координатах пространства Минковского возникают силы инерции, обязанные появлению символов Кристоффеля $\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(y)$. В галилеевых координатах символы Кристоффеля обращаются в нуль и силы инерции отсутствуют, а уравнение (9) сводится к условию гармоничности (8) в декартовых координатах. Именно на этом основании и можно частично согласиться с В.А.Фоком ([1], с. 306): *«Произвольные преобразования координат, посредством которых вводятся фиктивные поля тяготения, нарушают условия гармоничности и предельные условия. Поэтому можно считать, что введение гармонических координат исключает все фиктивные поля тяготения».*

Во-первых, произвольные преобразования, как мы показали (см. доп. $A$), превращают гармонические условия в декартовых координатах (8) в общековариантные уравнения (9). Во-вторых, выбор декартовых координат действительно превращает уравнение (9) в (8), поскольку символы Кристоффеля $\gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ в декартовых координатах равны нулю. Обращение в нуль символов Кристоффеля в пространстве Минковского действительно устраняет силы инерции, т.е. исключает все фиктивные поля тяготения. Далее В.А.Фок пишет ([1], с. 475): **«Таким образом, принцип относительности, выражаемый пре-**

**образованиями Лоренца, возможен и в неоднородном пространстве, общий же принцип относительности невозможен».** Если оставаться в римановом пространстве, а в общей теории относительности (ОТО) другого пространства и нет, то первая часть утверждения противоречит правильному выводу В.А.Фока, что *«в общей теории относительности нет, вообще говоря, никакой относительности».* Но если принять во внимание, что В.А.Фок фактически имел дело с декартовыми (галилеевыми) координатами пространства Минковского, то это утверждение правильно, поскольку переход от одной инерциальной системы к другой осуществляется с помощью преобразования Лоренца. Но это означает, что Фок в поисках физической истины вышел за пределы ОТО. Все это особо ясно видно в релятивистской теории гравитации [3]. Мы далее покажем на примере получения строгого решения уравнений тяготения для одной сосредоточенной массы сам факт использования символов Кристоффеля в пространстве Минковского при написании гармонических условий в сферических координатах.

Интервал в римановом пространстве ([1], с. 279) имеет вид

$$ds^2 = c^2 V^2 dt^2 - \frac{1}{V^2} d\sigma^2, \tag{12}$$

где

$$d\sigma^2 = F^2 d \overset{*}{r}{}^2 + \rho^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2). \tag{13}$$

Интервал в пространстве Минковского в сферических координатах будет равен

$$d\Sigma^2 = c^2 dt^2 - d \overset{*}{r}{}^2 - \overset{*}{r}{}^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2). \tag{14}$$

Отсюда непосредственно следует

$$\gamma_{00} = 1, \;\; \gamma_{11} = -1, \;\; \gamma_{22} = -\overset{*}{r}{}^2, \;\; \gamma_{33} = -\overset{*}{r}{}^2 \sin^2\Theta \, . \tag{15}$$

Используя выражение для символа Кристоффеля в пространстве Минковского

$$\gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\sigma}(\partial_\mu \gamma_{\nu\sigma} + \partial_\nu \gamma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu}) \, , \tag{16}$$

находим

$$\gamma^1_{22} = -\overset{*}{r}, \; \gamma^1_{33} = -\overset{*}{r} \sin^2\Theta, \; \gamma^2_{12} = \gamma^3_{13} = \frac{1}{\overset{*}{r}},$$
$$\gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta, \; \gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\Theta \, , \tag{17}$$

все остальные символы Кристоффеля равны нулю.

На основании (17) уравнение (9) для $\nu = 1$ принимает вид

$$\frac{d}{d\overset{*}{r}}\left(\frac{\rho^2}{F}\right) = 2\overset{*}{r} F \, , \tag{18}$$

при этом мы явно использовали символы Кристоффеля $\gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Введя новую переменную

$$dr = Fd\overset{*}{r}\,, \tag{19}$$

уравнение (18) можно записать в форме

$$\frac{d}{dr}\left(\rho^2\frac{d\overset{*}{r}}{dr}\right) = 2\overset{*}{r}, \tag{20}$$

но это как раз и совпадает с уравнениями (57.14) работы В.А.Фока ([1], с. 280). Таким образом, Фок фактически использует пространство Минковского в сферических координатах (14), а гармоническое условие (8) — в декартовых (галилеевых) координатах пространства Минковского.

Мы получили уравнение (20) на основе уравнения в форме (9), когда пришлось явно использовать символы Кристоффеля пространства Минковского в сферических координатах. Тот же результат можно получить, если использовать уравнение в форме (10). Действительно, для декартовых (галилеевых) координат «$y$» символы Кристоффеля $\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(y)$ все равны нулю, и уравнение (10) принимает вид

$$\Box\, y^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\left(\tilde{g}^{\nu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right) = 0\,. \tag{21}$$

Именно такое уравнение использует В.А.Фок. Следует особо подчеркнуть, что оно возникает только в том случае, когда все $\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(y)$ равны нулю. Это обстоятельство Фоком не было отмечено. Принимая во внимание выражения (12) и (13), находим

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} &= \frac{F\rho^2}{V^2}\sin\Theta\,,\ \ \tilde{g}^{00} = \frac{F\rho^2}{V^4}\sin\Theta\,,\ \ \tilde{g}^{11} = -\frac{\rho^2\sin\Theta}{F},\\ \tilde{g}^{22} &= -F\sin\Theta,\ \ \tilde{g}^{33} = -\frac{F}{\sin\Theta}\,.\end{aligned} \tag{22}$$

В качестве $z^{\nu}$ выберем переменные $z^0 = y^0 = ct,\ \ \overset{*}{r}, \Theta, \Phi$. На основании (22), а также принимая во внимание то обстоятельство, что функции $V$, $F$ и $\rho$ зависят только от $\overset{*}{r}$, уравнение (21) принимает форму

$$\frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial\overset{*}{r}}\left(\frac{\rho^2}{F}\frac{\partial y^i}{\partial\overset{*}{r}}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial y^i}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\frac{\partial^2 y^i}{\partial\Phi^2} = 0\,. \tag{23}$$

Введем новую переменную $r$:

$$Fd\overset{*}{r} = dr\,,$$

тогда уравнение (23) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho^2 \frac{\partial y^i}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial y^i}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta}\cdot\frac{\partial^2 y^i}{\partial\Phi^2} = 0\,. \tag{24}$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что следующие функции:

$$\begin{aligned} y^1(\overset{*}{r},\Theta,\Phi) &= \overset{*}{r}(r)\sin\Theta\cos\Phi\,, \\ y^2(\overset{*}{r},\Theta,\Phi) &= \overset{*}{r}(r)\sin\Theta\sin\Phi\,, \\ y^3(\overset{*}{r},\Theta,\Phi) &= \overset{*}{r}(r)\cos\Theta\,, \end{aligned} \tag{25}$$

удовлетворяют (24), если только $\overset{*}{r}(r)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(\rho^2\frac{d\overset{*}{r}}{dr}\right) = 2\,\overset{*}{r},$$

т.е. для $\overset{*}{r}$ мы опять пришли к уравнению (20). Если при получении уравнения (20) из уравнений (9) приходится прямо использовать символы Кристоффеля пространства Минковского, то при нахождении этих уравнений из уравнений (10) этот факт несколько скрыт и проявляется только на стадии вывода уравнений (21).

Идеи В.А.Фока о существовании инерциальных систем координат, об абсолютности ускорения «относительно пространства», о необходимости построения полной системы уравнений теории тяготения, о форминвариантности уравнений теории тяготения относительно преобразований Лоренца точно реализуются в релятивистской теории гравитации (РТГ) [3]. При построении РТГ как классической теории гравитационного поля мы исходили из следующих общих физических представлений, восходящих к точке зрения Пуанкаре. Пространство-время открывается путем изучения свойств и законов развития материального мира. Пространство-время, как неотъемлемая сущность материи, отражает общие свойства, присущие любому виду материи. Такими общими свойствами материи являются интегральные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Именно они и предопределили псевдоевклидову структуру пространства-времени как универсальную. Хотя псевдоевклидова структура пространства-времени и открылась путем изучения движения материи (особенно электромагнетизма), но в силу универсальности и независимости ее от форм материи она может рассматриваться абстрактно, в отрыве от материи, как своеобразная арена, на фоне которой протекают все физические явления природы. При таком представлении псевдоевклидова структура пространства-времени как бы мысленно имеет место и в отсутствие всей материи. Таким путем достигается отделение общих свойств материи, нашедших отражение в структуре пространства-времени, от других свойств, присущих данному конкретному виду материи.

Универсально взаимодействующие поля (такие, например, как тяготение), имеющиеся в природе, всегда могут найти отражение в структуре пространства-времени, но уже в виде эффективного пространства-времени, обязанного наличию данного универсального поля.

Именно в РТГ эффективное риманово пространство создается благодаря существованию универсального гравитационного поля в пространстве Минковского.

**Если предположить, что пространство-время искривлено и в отсутствие всех форм материи, то, в принципе, невозможно с точки зрения физики найти причину этой искривленности, поскольку без материи нет и физики.**

В основу РТГ положено предположение, что источником гравитационного поля является сохраняющийся тензор энергии-импульса всей материи, включая и гравитационное поле. Гравитационное поле, как и все другие поля материи, развивается в пространстве Минковского. Гравитационное поле обладает спинами 2 и 0, и, что особенно существенно, оно имеет массу покоя $m_g$. Риманово пространство возникает как эффективное пространство из-за действия гравитационного поля. Силы инерции и гравитации разделены: они имеют разную природу. Полная система уравнений РТГ общековариантна относительно произвольных координатных преобразований и форминвариантна относительно преобразований Лоренца. В эту систему уравнений непосредственно входит метрический тензор пространства Минковского. Уравнения (9) являются следствиями уравнений гравитационного поля и уравнений движения вещества. В РТГ реализуется принцип Маха — инерциальная система координат определяется распределением вещества и гравитационного поля. В РТГ ускорение имеет абсолютный смысл. При вычислении эффектов гравитации в Солнечной системе в уравнениях РТГ (в галилеевых координатах инерциальной системы) можно пренебречь влиянием массы гравитона, и тогда приближенная система уравнений совпадает с системой уравнений, которую изучал В.А.Фок.

Решая эту систему уравнений, Фок разработал изящный и эффективный метод нахождения постньютоновского приближения. Это стало возможным благодаря удачному выбору в качестве независимой переменной плотности тензора $\tilde{g}^{\mu\nu}$, а также использованию гармонических условий в декартовых координатах. Именно в силу этих обстоятельств чрезвычайно упростился весь вычислительный процесс, поскольку уже во втором приближении из всех десяти компонент $\tilde{g}^{\mu\nu}$ осталась только одна компонента $\tilde{g}^{00}$ [3]. Такое найденное техническое упрощение, оказывается, как это видно из РТГ, имеет под собой физическую основу: во-первых, переменная $\tilde{g}^{\mu\nu}$ естественно возникает при построении РТГ, во-вторых, в первом приближении по $G$ все компоненты $g_{\mu\nu}$, соответствующие сферически-симметричному статическому полю, создаваемому телом массы $M$, определяются только единственной компонентой тензора вещества $T^{00}$ [3], и интервал эффективного риманова пространства имеет вид

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2MG}{c^2 r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \, .$$

Влияние массы гравитона существенно, когда радиус тела приближается к радиусу Шварцшильда. В неинерциальной системе координат пренебрегать массой гравитона также нельзя. Заметим, что даже если формально опустить массу гравитона, то система уравнений РТГ совпадает с системой уравнений, которую изучал В.А.Фок, только в галилеевых координатах инерциальной системы, в любой другой системе, например неинерциальной, они уже существенно отличаются. Это происходит потому, что система уравнений Фока не общековариантна, тогда как система уравнений РТГ общековариантна. РТГ изменяет представления об эволюции Вселенной и коллапсе. Введение массы гравитона имеет принципиальное значение для данной теории, поскольку только с ее введением возможно построение теории, в которой гравитационное поле рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского. Полевые представления с необходимостью требуют введения массы гравитона и, как следствие, в уравнениях РТГ появляется и метрический тензор пространства Минковского. Именно это обстоятельство позволяет фиксировать инерциальную систему и тем самым установить связь инерциальной системы с распределением вещества и гравитационного поля, т.е. реализовать принцип Маха: инерциальная система определяется распределением материи. Без вещества не может существовать гравитационное поле. Наличие в уравнениях РТГ метрического тензора пространства Минковского позволяет однозначным образом вычислить гравитационный эффект. Согласно РТГ инерциальные системы так же, как в специальной теории относительности, имеют абсолютный смысл.

РТГ возвращает в физику инерциальные системы координат, которые были отвергнуты ОТО, так как в этой теории они не существуют. Эйнштейн в 1955 г. писал: *«Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить «инерциальную систему» (или «инерциальные системы»)»*. Инерциальные системы в РТГ возникают из-за рассмотрения гравитационного поля как физического поля, развивающегося, как и все другие поля материи, в пространстве Минковского. Благодаря этому полю и создается эффективное риманово пространство полевого происхождения. При таком подходе полностью сохраняется десятипараметрическая группа движения пространства-времени — группа Пуанкаре. Именно поэтому в теории имеют место законы сохранения энергии-импульса, момента количества движения вещества и гравитационного поля вместе взятых. Специальная теория относительности точно выполняется для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Поэтому слово «специальная» можно было бы опустить и писать просто — теория относительности, понимая под этим форминвариантность уравнений относительно преобразований Лоренца. Более общего принципа относительности, чем этот, быть не может. Перейдем теперь к изучению эволюции Вселенной и коллапса.

Согласно РТГ однородная и изотропная Вселенная является «плоской» и развивается циклически от некоторой максимальной плотности до минимальной и т.д. Для однородной изотропной Вселенной уравнения РТГ в галилеевых координатах инерциальной системы принимают вид

$$\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(\tau) - \frac{\omega}{R^6}\left(1 - \frac{3R^4}{R^4_{\max}} + 2R^6\right) , \tag{26}$$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) - 2\omega\left(1 - \frac{1}{R^6}\right) . \tag{27}$$

Здесь $G$ — гравитационная постоянная, $R$ — масштабный фактор,

$$\omega = \frac{1}{12}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2 . \tag{28}$$

Из уравнения (26) видно, что при уменьшении $R$ отрицательный член $\frac{\omega}{R^6}$ в правой части уравнения растет по абсолютной величине быстрее, чем плотность вещества для радиационно-доминантной стадии. Но, так как левая часть уравнения (26) положительна, сжатие должно остановиться при некотором минимальном значении $R_{\min}$, отвечающем значению $\frac{dR}{d\tau} = 0$. При увеличении $R$ отрицательный член $\omega$ в правой части уравнения становится больше, чем плотность вещества на стадии доминантности нерелятивистской материи, поэтому в силу положительной левой части уравнения (26) произойдет остановка расширения при значении $R_{\max}$, отвечающем значению $\frac{dR}{d\tau} = 0$. Таким образом, однородная и изотропная Вселенная развивается циклически от некоторой максимальной плотности вещества до минимальной $\rho_{\min}$, равной

$$\rho_{\min} = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2 , \tag{29}$$

$m_g$ — масса гравитона, затем опять до максимальной и т.д. Отсюда следует, что никакого **Большого взрыва**, в принципе, не могло быть. Из уравнения (26) при $R >> 1$ следует, что плотность вещества во Вселенной равна

$$\rho(\tau) = \rho_c(\tau) + \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2 . \tag{30}$$

Здесь $\rho_c(\tau)$ — критическая плотность, определяемая «постоянной» Хаббла $H$:

$$\rho_c(\tau) = \frac{3H^2(\tau)}{8\pi G}, \quad H(\tau) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{d\tau} \,. \tag{31}$$

Входящая в уравнение (26) величина $R_{\max}$ может быть выражена через максимальную плотность вещества во Вселенной:

$$R^4_{\max} = \frac{1}{8E} \left( \frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^2 , \tag{32}$$

где $E$ равно

$$E = 7,4 \cdot 10^4 \cdot \left[ \frac{\left( \frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^{10}}{(16\pi G)^2 \rho_{\max}} \right]^{1/3} , \tag{33}$$

$\rho_{\max}$ — фактически является интегралом движения. Из уравнений (26) и (27) можно получить выражение для параметра замедления Вселенной $q(\tau)$. На современной стадии доминантности нерелятивистской материи (давление $p$ равно нулю)

$$q(\tau) = -\frac{1}{H^2} \cdot \frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4H^2} \left( \frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^2 . \tag{34}$$

Соотношение (34) дает возможность определить массу гравитона $m_g$ по двум наблюдаемым величинам $H$ и $q$. Она оказывается ограничена следующим неравенством [4]:

$$m_g \leq 4,5 \cdot 10^{-66} \text{г} \,. \tag{35}$$

На основании (30) и (35) видно, что современная плотность $\rho(\tau)$ близка к критической плотности $\rho_c$, определяемой «постоянной» Хаббла. Отсюда с необходимостью следует существование во Вселенной большой скрытой массы «темной материи», что согласуется с современными наблюдательными данными. Время расширения Вселенной от максимальной плотности $\rho_{\max}$ до минимальной $\rho_{\min}$ определяется в основном стадией доминантности нерелятивистской материи и равно [5]

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\pi\hbar}{m_g c^2} \,. \tag{36}$$

С точки зрения РТГ красное смещение происходит не из-за эффекта Доплера, а вследствие изменения гравитационного поля во времени, поскольку вещество Вселенной покоится в инерциальной системе координат. Инерциальная система выделена самой Природой. Следует также отметить, что, в отличие от ОТО, согласно РТГ гравитационное поле не может существовать без порождающего его вещества. Под веществом имеется в виду вся материя, за исключением гравитационного поля.

Перейдем к рассмотрению коллапса. Согласно РТГ коллапс невозможен, а поэтому не могут существовать и «черные дыры». Ситуация здесь кардинально отличается от ОТО, поскольку из-за наличия массы гравитона решение уравнений РТГ в области, близкой к сфере Шварцшильда, существенно отличается от решения Шварцшильда. Для сферически-симметричного статического тела интервал в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$ds^2 = U(z)dt^2 - V(z)dz^2 - z^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2). \tag{37}$$

Если перейти в синхронную систему свободно падающих пробных частиц, имеющих на бесконечности нулевую скорость, с помощью преобразований

$$\tau = t + \int dz \left[\frac{V(1-U)}{U}\right]^{1/2}, \quad R = t + \int dz \left[\frac{V}{U(1-U)}\right]^{1/2}, \tag{38}$$

то получим следующее выражение для интервала:

$$ds^2 = d\tau^2 - (1-U)dR^2 - z^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2)\ . \tag{39}$$

Радиальная скорость частицы, падающей вдоль радиуса, равна

$$\frac{dz}{d\tau} = -\sqrt{\frac{1-U}{UV}}\ . \tag{40}$$

Для сферически-симметричного статического тела метрические коэффициенты риманова пространства имеют в области, близкой к сфере Шварцшильда, следующий вид [6]:

$$U(z) = \frac{z - z_g}{z} + qm_g^2M^2, \quad V(z) = \frac{z}{z - z_g}\ . \tag{41}$$

Здесь $q$ — некоторая положительная постоянная. Подставляя (41) в (40), получаем

$$\frac{dz}{d\tau} \simeq -\frac{1}{\sqrt{q}m_gM}\sqrt{\frac{z - z_g}{z}}\ . \tag{42}$$

Отсюда очевидно, что наличие массы гравитона $m_g$ приводит к явлению отталкивания частиц вещества от сферы, близкой к сфере Шварцшильда. Точка $z = z_g$ является точкой поворота. Сфера радиуса $z = z_g$ становится сингулярной, причем эту особенность нельзя устранить выбором системы координат. Поскольку внешнее решение необходимо сшить с внутренним решением, то это означает, что сфера с радиусом $z = z_g$ не может находиться вне вещества. В противном случае невозможно было бы осуществить сшивание решений.

С точки зрения ОТО объекты больших масс $(M > 3M_{\odot})$, если при эволюции они не потеряли значительную часть массы, обязательно должны стать «черными дырами». При сферически-симметричной аккреции вещества на «черную дыру» лишь небольшая часть массы покоя падающего вещества может идти на излучение, поскольку каждая частица вещества, падая, уносит всю энергию в «черную дыру». С точки зрения РТГ «черные дыры», в принципе, невозможны, а поэтому объекты больших масс, встречающиеся в природе и находящиеся на заключительной стадии эволюции, не являются «черными дырами». Выделение энергии при аккреции вещества на такие объекты связано с падением вещества на поверхность объекта, т.е. в этом случае действует тот же механизм выделения энергии, что и при аккреции вещества на нейтронную звезду. Это означает, что и при сферически-симметричной аккреции должно быть значительное выделение энергии. При этом, конечно, необходимо учитывать уменьшение уносимой энергии из-за красного смещения.

Следует отметить, что поскольку эффективное риманово пространство в РТГ возникает на основе физического гравитационного поля, которое описывается в пространстве Минковского, то отсюда следует, что оно имеет простую топологию и определяется в одной карте. В теории тяготения В.А.Фока, даже для островных систем, фундаментальная роль условия гармоничности в декартовых координатах скорее была интуитивно угадана, чем доказана.

Во-первых, условие гармоничности возникло как техническое средство, упрощающее уравнения Гильберта—Эйнштейна. Но это упрощение достигается в любых криволинейных координатах риманова пространства. Почему их необходимо записывать в декартовых (галилеевых) координатах? Ведь таких координат в римановом пространстве нет. Здесь проявилась глубокая физическая интуиция В.А.Фока, основанная на ясном понимании, что ускорение абсолютно, оно не может быть относительным. Именно поэтому в теории тяготения Фока, по крайней мере для островных систем, возникли привилегированные системы координат, подобные тем, какие имеют место в специальной теории относительности. Фактически В.А.Фок имел дело с пространством Минковского в галилеевых координатах.

Во-вторых, почему нельзя было бы взять вместо условий гармоничности какие-либо другие условия и записать их также в декартовых координатах? Почему именно условия гармоничности в декартовых координатах приобретают в теории тяготения В.А.Фока фундаментальную роль? Они ведь не являются следствиями принципа наименьшего действия, они привносятся со стороны. Именно поэтому Фок не считал гармонические условия универсальными. Он особо отмечал, что *«гармонические координаты существуют не для любых распределений масс»*. Все это проясняется в РТГ, где общековариантные уравнения (9) точно следуют из принципа наименьшего действия как полевые уравнения. Они универсальны и справедливы для любого распределения вещества. В этом их отличие от гармонических условий, которые В.А.Фок применял только для островных систем. Уравнения (9) исключают из тензорного гравитационного поля представления со спинами 1 и $0'$ и оставляют представления со спинами 2 и 0. В РТГ силы инерции и гравитации разделены, они совершенно разной природы. Силы инерции можно уничтожить выбором инерциальной системы координат, тогда как гравитационное поле как физическую реальность никогда нельзя уничтожить выбором системы координат. Известное равенство инертной и гравитационной масс является прямым следствием предположения, что источником гравитационного поля является сохраняющийся тензор энергии-импульса всей материи, включая и гравитационное поле. Именно поэтому равенство инертной и тяжелой масс не может являться аргументом в пользу общего принципа относительности, поскольку причина равенства масс совершенно другая. Работы В.А.Фока чрезвычайно содержательны, и именно его физические положения, которые он закладывал в основу теории тяготения, нашли полное отражение в РТГ. Однако при этом пришлось полностью отказаться от концепции ОТО и ввести представление о гравитационном поле как физическом поле типа Фарадея — Максвелла в пространстве Минковского. Поскольку В.А.Фок при развитии теории тяготения совершил ряд принципиальных шагов, которые выходили за рамки эйнштейновской общей теории относительности и углубляли физическую суть теории, мы сочли необходимым неоднократно, в каждом случае особо подчеркнуть эти обстоятельства.

Авторы выражают благодарность С.С.Герштейну и В.А.Петрову за ценные обсуждения.

**Дополнение A**

Запишем гармоническое условие в декартовых (галилеевых) координатах:

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}(x) \; . \qquad (A.1)$$

Здесь $x^\mu$ — декартовы координаты. В декартовых (галилеевых) координатах пространства Минковского

$$\gamma(x) = \det\gamma_{\mu\nu} = -1 \; . \qquad (A.2)$$

Согласно тензорному закону преобразования имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \cdot \frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)}{\sqrt{-\gamma(y)}} \; , \qquad (A.3)$$

$y$ — произвольные координаты.

Запишем уравнение ($A.1$) в форме

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}(x)}{\partial y^\tau} \ . \qquad (A.4)$$

Для дальнейших вычислений приведем формулы

$$\gamma^\nu_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \cdot \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial y^\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}}\gamma^\lambda_{\tau\lambda}(y) \ . \qquad (A.5)$$

Подставляя ($A.3$) в правую часть ($A.4$), получаем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial y^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}}\tilde{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = 0 \ . \qquad (A.6)$$

Множитель второго члена запишем в форме

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\tau} \cdot \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\gamma^\sigma_{\alpha\beta}(y) \ . \qquad (A.7)$$

Подставляя это выражение в ($A.6$), получаем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\left(\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial y^\alpha} + \gamma^\sigma_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}\right) = 0 \ , \qquad (A.8)$$

т.е. имеем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} D_\alpha \tilde{g}^{\alpha\sigma}(y) = 0 \ . \qquad (A.9)$$

Здесь $D_\alpha$ — ковариантная производная в пространстве Минковского. Итак, нами установлено, что плотность тензора $\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)$ в произвольных координатах $y$ удовлетворяет общековариантному уравнению

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = \partial_\nu \tilde{g}^{\nu\mu}(y) + \gamma^\mu_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = 0 \ , \qquad (A.10)$$

если исходное гармоническое условие ($A.1$) записано в декартовых (галилеевых) координатах $x$.

**Дополнение Б**

Запишем уравнение ($A.10$) в несколько другой форме. Для этой цели, использовав определение для символа Кристоффеля:

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(y) = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}) \ , \qquad (\text{\textit{Б}}.1)$$

найдем

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = \sqrt{-g}\left(g^{\nu\sigma}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right) . \qquad (Б.2)$$

Принимая во внимание равенства

$$\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\sqrt{-g}, \quad \partial_\alpha g^{\alpha\nu} = -g^{\nu\sigma}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha g_{\sigma\beta} , \qquad (Б.3)$$

переписываем ($Б$.2) в виде

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = -\sqrt{-g}\partial_\sigma g^{\sigma\nu} - g^{\nu\sigma}\partial_\sigma\sqrt{-g} = -\frac{\partial\tilde{g}^{\sigma\nu}}{\partial y^\sigma} . \qquad (Б.4)$$

С учетом этого равенства уравнение ($A$.10) принимает вид

$$(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(y) - \gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(y))g^{\alpha\beta} = 0 . \qquad (Б.5)$$

Если от координат $y$ перейти к другим криволинейным координатам $z$, то символы Кристоффеля принимают вид

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y) = \frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}\cdot\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\mu}\cdot\frac{\partial z^\beta}{\partial y^\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(z) + \frac{\partial^2 z^\sigma}{\partial y^\mu\partial y^\nu}\cdot\frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma} . \qquad (Б.6)$$

Используя это выражение, находим

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = \frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}\left[\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(z)g^{\alpha\beta}(z) + \frac{\partial^2 z^\sigma}{\partial y^\mu\partial y^\nu}\frac{\partial y^\mu}{\partial z^\alpha}\cdot\frac{\partial y^\nu}{\partial z^\beta}g^{\alpha\beta}(z)\right] . \qquad (Б.7)$$

На основании ($Б$.4) выражение ($Б$.7) запишем в форме

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial z^\mu}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}\right) +$$

$$+g^{\mu\sigma}\frac{\partial^2 y^\lambda}{\partial z^\mu\partial z^\sigma} + \frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}\cdot\frac{\partial^2 z^\sigma}{\partial y^\mu\partial y^\nu}\frac{\partial y^\mu}{\partial z^\alpha}\cdot\frac{\partial y^\nu}{\partial z^\beta}g^{\alpha\beta}(z) . \qquad (Б.8)$$

Продифференцировав равенство

$$\frac{\partial z^\sigma}{\partial y^\mu}\cdot\frac{\partial y^\mu}{\partial z^\alpha} = \delta^\sigma_\alpha \qquad (Б.9)$$

по $z^\beta$, получим

$$\frac{\partial^2 z^\sigma}{\partial y^\mu\partial y^\nu}\frac{\partial y^\mu}{\partial z^\alpha}\cdot\frac{\partial y^\nu}{\partial z^\beta} = -\frac{\partial z^\sigma}{\partial y^\mu}\cdot\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial z^\alpha\partial z^\beta} . \qquad (Б.10)$$

Учитывая это равенство, в третьем члене (*Б*.8) находим

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = -\frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right) . \qquad (Б.11)$$

Подставляя это выражение в (*Б*.5), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right) = -\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(y)g^{\alpha\beta}(y) . \qquad (Б.12)$$

Вводя обозначение

$$\Box\, y^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right) , \qquad (Б.13)$$

мы можем записать уравнение (*Б*.12) в форме

$$\Box\, y^{\lambda} = -\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(y)g^{\alpha\beta}(y) . \qquad (Б.14)$$

Таким образом, вместо уравнения (*A*.10) нами получено то же уравнение в форме (*Б*.14). Согласно (*Б*.14) уравнение гармоничности Фока

$$\Box\, y^{\lambda} = 0 \qquad (Б.15)$$

имеет место, если символы Кристоффеля $\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ всюду равны нулю. Это возможно, если интервал $d\sigma$ в пространстве Минковского имеет вид

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} ,$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — произвольные постоянные числа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Фок В.А.** — Теория пространства, времени и тяготения. Государственное изд-во физ.-мат. литературы, М., 1961.
2. **Фок В.А.** — ЖЭТФ, 1939, т.9, №4, с.375.
3. **Логунов А.А.** — ЭЧАЯ, 1998, т.29, вып.1, с.5.
   **Логунов А.А., Мествиришвили М.А.** — Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
4. **Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.** — ДАН, 1998, т.360, №3, с.332.
5. **Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.** — ЯФ, 1998, т.61, №8, с.1526.
6. **Лоскутов Ю.М.** — ТМФ, 1990, т.82, №2, с.304.
   **Власов А.А., Логунов А.А.** — ТМФ, 1989, т.78, №3, с.323.