

## СТРУКТУРА ПИОНА В МОДЕЛИ ИНСТАНТОННОЙ ЖИДКОСТИ

*И.В.Аникин, А.Е.Дорохов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*Л.Томио*

Instituto de Física Teórica, UNESP,

Rua Pamplona, 145, 01405-900, São Paulo, Brazil

1. ВВЕДЕНИЕ	1024
2. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННАЯ МОДЕЛЬ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТОКИ	1026
Эффективное калибровочно-инвариантное четырехфер- мионное действие	1026
Эффективный пропагатор кварка	1029
Сохраняющиеся токи, индуцированные нелокальным дей- ствием	1032
Пропагатор пиона и кварк-пионная вершина	1036
Эффективный киральный лагранжиан. Бозенизация мо- дели	1037
Физические токи	1039
Величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операто- ров	1040
Низкоэнергетические наблюдаемые пиона	1043
3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВАЛЕНТНЫХ КВАРКОВ В ПИОНЕ В ИНСТАНТОННОЙ МОДЕЛИ	1044
Амплитуда распределения кварков в пионе	1044
Пионная амплитуда распределения на низ- коэнергетическом масштабе	1046
Результаты для пионной амплитуды рас- пределения	1047
Переходный формфактор пиона для процессов $\pi\gamma^*\gamma^*$	1050
Пионный переходный формфактор в эф- фективной кварк-пионной модели	1052

Переходный формфактор пиона $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$ при умеренно высоких $Q^2$	1055
Дискуссия по пионному переходному формфактору $\pi\gamma^*\gamma^*$	1061
Партонные распределения валентных кварков в пионе	1062
Моменты функции распределения кварков в пионе в ковариантной нелокальной мо- дели	1063
Функция распределения кварков в пионе в нелокальной ковариантной модели и ее КХД-эволюция	1067
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1072
Приложение А	1073
Приложение Б	1074
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1076

## СТРУКТУРА ПИОНА В МОДЕЛИ ИНСТАНТОННОЙ ЖИДКОСТИ

*И.В.Аникин, А.Е.Дорохов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*Л.Томио*

Instituto de Física Teórica, UNESP,

Rua Pamplona, 145, 01405-900, São Paulo, Brazil

Дан обзор ковариантной кварковой модели пиона, основанной на эффективном нелокальном кварк-адронном лагранжиане с нелокальностью, индуцированной инстантонными флуктуациями вакуума КХД. Явно калибровочно-инвариантный формализм позволяет построить сохраняющиеся векторный и аксиальный токи и продемонстрировать их согласие с различными тождествами Уорда — Такахаши и низкоэнергетическими теоремами. В результате спонтанного нарушения киральной симметрии возникают зависящие от импульса динамическая масса кварка и вершина кварк-пионного взаимодействия. Параметры инстантонного вакуума — средний размер инстантона и эффективная масса кварка — выражены через величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операторов наименьшей размерности и низкоэнергетических наблюдаемых пиона.

Подробно рассмотрен переходный формфактор пиона для процессов  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$  и  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$ . Кинематическая зависимость переходного формфактора при высоких импульсах передачи позволяет получить соотношение между амплитудой распределения кварков в пионе на световом конусе и кварк-пионной вершинной функцией. Его динамическая зависимость указывает на то, что переходный формфактор  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$  при высоких импульсах передачи очень чувствителен к размеру нелокальности непертурбативных флуктуаций в КХД-вакууме. В рамках модели в лидирующем твите вычислены амплитуда распределения и функция распределения валентных кварков в пионе в низкой точке нормировки порядка обратного среднего размера инстантона  $\rho_c$ . Результаты КХД проэволюционированы к более высоким импульсам передачи и находятся в разумном согласии с доступными экспериментальными данными о структуре пиона.

The covariant quark model of the pion based on the effective nonlocal quark-hadron lagrangian with nonlocality induced by instanton fluctuations of the QCD vacuum is reviewed. In the explicitly gauge invariant framework the conserved vector and axial-vector currents are constructed and the consistence with the Ward–Takahashi identities and low-energy theorems is demonstrated. The spontaneous violation of the chiral symmetry result in the momentum dependent dynamical quark mass and quark-pion vertex. The instanton vacuum parameters, the average size of an instanton and the effective quark mass, are expressed in terms of the vacuum expectation values of the lowest dimension quark-gluon operators and the low-energy pion observables.

The pion form factor for the transition processes  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$  and  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$  is considered in detail. The kinematic dependence of the transition form factor at high momentum transfers allows us to obtain the relation between the pion light-cone distribution amplitude and the quark-pion vertex function. Its dynamic dependence indicates that the transition form factor  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$

at high momentum transfers is very sensitive to the nonlocality size of nonperturbative fluctuations in the QCD vacuum. In the framework of the model the distribution amplitude as well as distribution function valence-quark in the pion are calculated in the leading twist at a low normalization scale of an order of the inverse average size of an instanton  $\rho_c$ . The results are QCD evolved to higher momentum-transfer values and reasonable agreement with available data on the pion structure is found.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Непертурбативный вакуум КХД плотно заселен длинноволновыми флуктуациями глюонного и кваркового полей. Параметры порядка этого сложного состояния характеризуются с помощью вакуумных матричных элементов различных синглетных комбинаций кварковых и глюонных полей, конденсатов:  $\langle : \bar{q}q : \rangle$ ,  $\langle : F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a : \rangle$ ,  $\langle : \bar{q}(\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2})q : \rangle$  и т.д. Ненулевой кварковый конденсат  $\langle : \bar{q}q : \rangle$  отвечает за спонтанное нарушение киральной симметрии. Его величина была оценена много лет назад в подходе алгебры токов. Ненулевой глюонный конденсат  $\langle : F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a : \rangle$  через аномалию в следе тензора энергии-импульса задает масштаб масс для адронов, и его величина была оценена в КХД-правилах сумм (ПС). Важность свойств КХД-вакуума для феноменологии адронов была отмечена в [1], где было использовано операторное разложение (ОР) для того, чтобы связать поведение корреляторов адронных токов на малых расстояниях с небольшим набором конденсатов. Значения конденсатов низшей размерности были получены феноменологически из анализа КХД ПС в различных адронных каналах.

Позже возникла концепция нелокальных вакуумных конденсатов или вакуумных корреляторов [2, 3]. Эти величины описывают распределение кварков и глюонов в непертурбативном вакууме. Физически это означает, что флуктуации кварков и глюонов в вакууме имеют ненулевой среднеквадратичный импульс. С этой точки зрения стандартные величины вакуумных ожиданий (ВВО), такие, как  $\langle : \bar{q}q : \rangle$ ,  $\langle : \bar{q}D^2q : \rangle$ ,  $\langle : g^2 F^2 : \rangle, \dots$ , появляются как коэффициенты разложения корреляторов полей кварков  $\langle : \bar{q}(0)\hat{E}(0,x)q(x) : \rangle$  и глюонов  $\langle : F_{\mu\nu}^a(0)\hat{E}(0,x)F_{\mu\nu}^a(x)\hat{E}(x,0) : \rangle$  в ряды Тейлора по переменной  $x^2/4$ , где  $\hat{E}(x,y) = P \exp(i \int_x^y A_\mu(z) dz^\mu)$  — упорядоченный по пути фазовый фактор Швингера, необходимый для калибровочной инвариантности корреляторов.

В то же время в КХД хорошо известны инстантоны [4], нетривиальные нелокальные вакуумные решения классических уравнений Янга — Миллса в пространстве Евклида, обладающие конечным действием и размером  $\rho$ . Важность инстантонов для КХД связана с надеждой, что ансамбль взаимодействующих инстантонов и антиинстантонов приведет к реалистической ми-

кроскопической картине КХД-вакуума в форме инстантонной жидкости [5,6] (см., например, обзор [7]). Из феноменологических соображений было аргументировано, что распределение инстантонов по их размерам является функцией с резким максимумом при некотором конечном среднем размере  $\rho_c$  и может быть аппроксимировано  $n(\rho) \approx n_c \delta(\rho - \rho_c)$ . Кроме того, расстояние между инстантонами гораздо больше, чем средний размер инстантона, так что жидкость является разреженной, и эффективная плотность инстантонов в вакууме  $n_c$  является малым параметром. Из свойств КХД-вакуума и спектроскопии адронов найдены оценки  $n_c \sim 1 \text{ фм}^{-4}$  и  $\rho_c \sim 1,7 \text{ ГэВ}^{-1}$ . Разреженность инстантонной жидкости удобно характеризовать безразмерным параметром  $\eta = (\rho_c M_q)^2$ .

Ниже мы покажем, что инстантонная модель КХД-вакуума дает динамический механизм нарушения киральной симметрии и лежит в основе описания свойств пиона [6,8–10]. Более того, взаимодействие кварков, индуцированное инстантонным обменом, естественным образом приводит к решению  $U_A(1)$ -проблемы [11, 12] и отвечает за сильные, зависящие от спина связи в адронных мультиплетах [13]. В [14, 15] было показано, что инстантонная модель КХД-вакуума дает способ для построения нелокальных вакуумных конденсатов. В модели динамически генерируются зависящие от импульса эффективная масса кварка  $M_q$  и вершина кварк-пионного взаимодействия  $g_{\pi qq}$ . Параметры модели имеют наглядный физический смысл и естественным образом связаны с основными величинами низкоэнергетической физики. Так, зависящие от импульса эффективная масса кварка и кварк-пионная вершина выражены через нелокальный конденсат кварков. Далее, обратный эффективный размер инстантона  $\rho_c^{-1}$  непосредственно измеряет среднюю виртуальность кварков в вакууме  $\langle k_q^2 \rangle \equiv \lambda_q^2 \approx 2\rho_c^{-2}$  [14]  $\approx 0,5 \text{ ГэВ}^2$  [16]. Эффективная масса кварка  $M_q$  определена через соотношение Голдбергера — Треймана  $M_q = g_{\pi qq} f_\pi$ , причем кварк-пионная константа связи  $g_{\pi qq}$  однозначно фиксируется с помощью условия связности пиона. Наконец, эффективная плотность инстантонов  $n_c$  непосредственно определяется из уравнения шели. Модель инстантонного вакуума содержит все привлекательные черты модели Намбу — Иона-Лазинио (НИЛ) (см., например, обзор [17]), а указанные выше особенности представляют собой важные преимущества по сравнению с различными версиями модели НИЛ. Более того, в инстантонной модели обратный эффективный размер инстантона  $\rho_c$  является естественным параметром ультрафиолетового обрезания в кварковых петлевых интегралах, и, таким образом, она свободна от произвола в этой процедуре, присущего модели НИЛ.

Важным аспектом рассматриваемой нелокальной модели является привлечение калибровочно-инвариантного формализма. Одним из преимуществ такого подхода является то, что параметры модели приобретают смысл наблюдаемых, а все другие физические величины, выраженные через эти параметры, становятся автоматически калибровочно-инвариантными. Более того,

их можно сравнить с теми, которые вычисляются в других подходах, основанных на КХД, таких, как решеточная КХД (рКХД), КХД ПС и т.д. Наоборот, когда имеем дело с калибровочно-неинвариантными объектами, то можно выбрать любую удобную калибровку. Так, при построении эффективного действия для ансамбля инстантонов наиболее правильным выбором является инстантонное решение в сингулярной калибровке [6]. Инстантоны в этой калибровке в координатном пространстве достаточно быстро убывают на бесконечности, что приводит к малому перекрытию соседних псевдочастиц, и квазиклассическое рассмотрение становится оправданным. Однако результирующее эффективное действие должно быть независимым от выбора калибровки полей, иначе форма действия и других наблюдаемых выглядит не вполне удовлетворительно. Калибровочная инвариантность подхода достигается явным учетом упорядоченных по путям швингеровских  $P_{\text{exр}}$ -факторов в определениях нелокальных величин [14, 18] и приведения нелокального кварк-пионного взаимодействия к инвариантному виду [19, 20].

Обзор построен следующим образом. Во втором разделе рассматривается модель инстантонной жидкости и на ее основе — кварк-пионная динамика. В третьем разделе подробно обсуждается вычисление амплитуды распределения и функции распределения валентных кварков в пионе. Первые являются основными объектами при описании жестких эксклюзивных процессов с участием пиона, а вторые — при описании глубоконеупругих процессов. Оба распределения несут существенно непертурбативную информацию о структуре пиона, и мы покажем, что инстантонная модель является наиболее адекватной по сравнению с другими подходами.

## 2. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННАЯ МОДЕЛЬ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ТОКИ

**Эффективное калибровочно-инвариантное четырехфермионное действие.** В локальных теориях калибровочный принцип минимального действия однозначно определяет взаимодействие полей материи с калибровочными полями. Однако в нелокальных теориях, как будет видно ниже, такое взаимодействие может быть введено различными способами. Для того чтобы сделать нелокальное действие калибровочно-инвариантным по отношению к внешним полям, удобно с самого начала определить поле кварка с калибровочным фазовым фактором Швингера:

$$Q(x, y) \equiv P \exp \left\{ -i \int_x^y dz^\mu \Lambda_\mu^a(z) T^a \right\} q(y), \quad \Lambda_\mu^a(z) = V_\mu^a(z) + A_\mu^a(z) \gamma_5, \quad (1)$$

где  $V_\mu^a(z)$  и  $A_\mu^a(z)$  — калибровочные векторное и аксиально-векторное поля соответственно,  $T^a$  — генераторы группы ароматов и  $P$  обозначает оператор упорядочения вдоль пути (контур), который в каждом члене разложения экспоненты по своему показателю расставляет матрицы слева направо в порядке движения точки  $z$  по траектории от  $x$  к  $y$ . Неоднозначность во введении калибровочно-инвариантного взаимодействия в нелокальном подходе прослеживается в появлении зависимости от пути в определении (1). В частности, как мы увидим ниже, сохраняющиеся токи в нелокальных моделях, вообще говоря, состоят из двух частей: независимая от пути продольная компонента и зависящая от пути поперечная компонента. Независимость от пути продольной компоненты есть следствие требования непрерывности дивергенции тока. Чувствительность к выбору пути поперечной части тока является особенностью любого метода, используемого для построения (частично) сохраняющегося тока, соответствующего нелокальному действию, и требует дальнейшего доопределения. Далее мы используем формализм, который основан на независимом от пути определении производной от интеграла по линейному контуру [21]:

$$\frac{\partial}{\partial y^\mu} \int_x^y dz^\nu \Lambda_\nu(z) = \Lambda_\mu(y), \quad \delta^{(4)}(x-y) \int_x^y dz^\nu \Lambda_\nu(z) = 0. \quad (2)$$

Такое определение означает, что члены с неминимальной связью, индуцированные кинетическим членом нелокального действия, отбрасываются. Вообще говоря, внешние поля, входящие в (1), являются вспомогательными полями, но некоторые из них могут быть отождествлены с теми, которые переносят электромагнитное, сильное или слабое взаимодействия. В случае электромагнитного взаимодействия этот фактор учитывает эффекты излучения фотонного поля, когда два кварка удаляются друг от друга. Этот формализм был использован в [19] (см. также [22, 23]) для придания нелокальному взаимодействию калибровочно-инвариантной формы. Как будет показано в дальнейшем, такая формулировка модели крайне важна для самосогласованного описания адронных характеристик, тестируемых внешними источниками, таких, как адронные формфакторы [20] и партонные функции распределения [24].

В общей форме нелокальное кирально-инвариантное (с точностью до малых токовых масс кварков) действие может быть переписано через полевые переменные (1) как

$$S = S_0 + S_{4q} \quad (3)$$

с

$$S_0 = \int d^4x d^4y \delta(x-y) \bar{Q}(x, X) (i\hat{\partial}_y - m_c) Q(X, y), \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
S_{4q} &= \frac{1}{2} G_I \int d^4 X \int \prod_{n=1}^4 d^4 x_n K_I(x_1, x_2, x_3, x_4) \times \\
&\times \left\{ \sum_i [\bar{Q}_R(X - x_1, X) \Gamma_i Q_L(X, X + x_3)] \times \right. \\
&\times \left. [\bar{Q}_R(X - x_2, X) \Gamma_i Q_L(X, X + x_4)] + (R \leftrightarrow L) \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

где  $Q_{R(L)}(x, y) = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} Q(x, y)$  — кварковое поле (1) с определенной киральностью. Дираковское сопряжение для кваркового поля определяется как  $\bar{Q}(x, y) = Q(x, y)^\dagger \gamma_0$ . В (5) матричные комбинации  $\Gamma_i \otimes \Gamma_i$  имеют вид

$$1 \otimes 1 - \tau^a \otimes \tau^a, \quad \frac{1}{2(2N_c - 1)} (\sigma_{\mu\nu} \otimes \sigma_{\mu\nu} - \tau^a \sigma_{\mu\nu} \otimes \tau^a \sigma_{\mu\nu}), \quad (6)$$

где  $\tau^a$  — матрицы Паули для пространства ароматов,  $N_c=3$  — число цветов. Спин-ароматовая структура действия в (5) инвариантна при глобальных аксиальных  $q(x) \rightarrow \exp(i\gamma_5 \tau \theta) q(x)$  и векторных преобразованиях  $q(x) \rightarrow \exp(i\tau \theta) q(x)$  и аномально нарушает  $U_A(1)$ -симметрию:  $q(x) \rightarrow \exp(i\gamma_5 \theta) q(x)$ . Токовая масса кварка  $m_c$  параметризует малый эффект явного нарушения киральной симметрии. Далее мы ограничим себя только сектором теории с нестранными кварками.

Ядро четырехкваркового взаимодействия в традиционной НИЛ-модели задается  $K(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{const} \prod_{n=1}^4 d^4 x_n \delta(x_n - X)$ , и импульсное обрезание вводится при  $\Lambda_{NJL} \sim 1$  ГэВ в расходящихся петлевых интегралах, обусловленных контактным взаимодействием. Другие варианты выбора ядра могут быть найдены в литературе. В рассматриваемой модели форма четырехкваркового взаимодействия в (5) мотивирована моделью инстантонного вакуума, и в локальном пределе она сводится к эффективной вершине 'т Хофта. Ядро описывает взаимодействие между кварками, индуцированное инстантонным обменом, и является нелокальным обобщением НИЛ-модели.

Выберем нелокальное ядро  $K_I(x_1, x_2, x_3, x_4)$  в *сепарабельном приближении*:

$$K_I(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1) f(x_2) f(x_3) f(x_4), \quad (7)$$

где функция  $f(x)$  связана с профильной функцией кварковой нулевой модой в инстантонном поле (см. ниже). Преимуществом сепарабельного взаимодействия является то, что оно позволяет разрешить интегральные уравнения аналитически и все физические величины свести к квадратурам. В импульсном пространстве сепарабельное ядро имеет вид

$$\tilde{K}_I(k_1, k_2, k_3, k_4) = \tilde{f}(k_1) \tilde{f}(k_2) \tilde{f}(k_3) \tilde{f}(k_4),$$



где  $k_i$  являются входящими (выходящими) в вершину импульсами кварков, а  $\tilde{f}(k)$  — фурье-образ от  $f(x)$ .

**Эффективный пропагатор кварка.** В качестве первого шага построим эффективный пропагатор кварка с помощью уравнения Швингера — Дайсона (ШДУ) для собственной энергии кварка. Мы будем рассматривать это уравнение в лестничном приближении, которое эквивалентно учету лидирующего порядка в  $1/N_c$ -разложении. Эффективный пропагатор кварка определяется как

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= i \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{\psi}(x) \delta \psi(y)} \Big|_{\Phi=0} = S_0^{-1}(p) - iM_q(p), \\ S_0^{-1}(p) &= \hat{p} - im_c, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $M_q(p)$  — зависящая от импульса масса кварка, возникающая динамически за счет эффекта спонтанного нарушения киральной симметрии в инстантонном вакууме. Уравнение щели (или уравнение самосогласованности) для зависящей от импульса массы кварка принимает вид \* [6, 25]

$$M_q(p) = m_c + 4N_c G_I \tilde{f}^2(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{f}^2(k) \frac{M_q(k)}{k^2 + M_q^2(k)} \quad (9)$$

и имеет решение

$$M_q(p) = m_c + (M_q - m_c) \tilde{f}^2(p). \quad (10)$$

Мы должны подчеркнуть, что в рассматриваемом приближении зависимость массы кварка от импульса возникает только благодаря непертурбативному взаимодействию с вакуумом и не содержит пертурбативных поправок по сильной константе связи.

С другой стороны, непертурбативная часть пропагатора кварка (8) может быть вычислена в модели КХД-вакуума. В эффективном одноинстантонном приближении [14, 18] имеем

$$M_q(p) = M_q \tilde{Q}(p), \quad (11)$$

где

$$M_q = \frac{N_Q \rho_c^2 n_c}{m^*} \quad (12)$$

---

\*Здесь и далее все диаграммы Фейнмана, подобные тем, что в (9), вычисляются в пространстве Евклида ( $k^2 \rightarrow -k_E^2$ ,  $d^4 k \rightarrow i d^4 k_E$ ), где индуцированные инстантоном формфакторы определены и быстро спадают, так что ультрафиолетовых расходимостей не возникает. Физические результаты получаются аналитическим продолжением обратно в пространство Минковского.

и

$$\tilde{Q}(p) = \frac{N_Q p^2}{2 \rho_c^2} \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} \exp(-ip \cdot x) Q(x^2), \quad \tilde{Q}(0) = 1; \quad (p = |p|), \quad (13)$$

$$Q(x^2) = \langle : \bar{q}(0) E_g(0, x) q(x) : \rangle / \langle : \bar{q}(0) q(0) : \rangle, \quad Q(0) = 1, \quad (14)$$

где фактор Швингера  $E_g(0, x) = P \exp(-ig \frac{\lambda^a}{2} \int_0^x A_\mu^a(z) dz^\mu)$ , определенный через вакуумное глюонное поле  $A_\mu(z)$ , гарантирует калибровочную инвариантность и  $N_Q$  дает нормировку. В приведенном уравнении  $Q(x^2)$  является нормированной индуцированной инстантонным взаимодействием непертурбативной частью калибровочно-инвариантного пропагатора кварка в конфигурационном пространстве, которая описывает нелокальные свойства конденсата кварков [3, 5]. Заметим также, что пропагатор кварка (14) имеет непосредственную физическую интерпретацию в эффективной теории тяжелых кварков, так как он описывает распространение легкого кварка в цветном поле бесконечно тяжелого кварка [5]. В (12) параметр  $m^*$  определяется соотношением

$$m^* = m_c + i \langle \Psi_I | S_0^{-1} (S - S_0) S_0^{-1} | \Psi_I \rangle, \quad (15)$$

где  $\langle \Psi_I | \dots | \Psi_I \rangle$  означает независимое усреднение по инстантонным вакуумным конфигурациям. Подставляя выражение для пропагатора кварка (8) и (11) в (15), получим уравнение щели (в киральном пределе)

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{M_q^2(k)}{k^2 + M_q^2(k)} = \frac{n_c}{4N_c}, \quad (16)$$

которое эквивалентно условию самосогласованности, данному в [6]. Сравнивая (9) и (16), находим, что

$$\tilde{f}(p) = \sqrt{\tilde{Q}(p)} \quad \text{и} \quad G_I = \frac{M_q^2}{N_f n_c}. \quad (17)$$

Выражение для четырехфермионной константы связи  $G_I$  совпадает с результатом, полученным в [6]. Таким образом, в сепарабельном приближении для четырехкваркового ядра форма взаимодействия полностью фиксируется эффективным поведением кварка в непертурбативном вакууме.

Нелокальный конденсат  $Q(x)$  и формфактор  $\tilde{f}(k)$  естественно образом определены в евклидовой области, где они быстро спадают. В явной форме скалярная часть пропагатора кварка в приближении, ограничиваемом только учетом нулевых мод кварка в пропагаторе кварка, имеет

вид [14, 18]:

$$Q_I(x) = \frac{8\rho_c^2}{\pi} \int_0^\infty dr r^2 \int_{-\infty}^\infty dt \frac{\cos \left[ \frac{r}{R} \left( \arctan\left(\frac{t+|x|}{R}\right) - \arctan\left(\frac{t}{R}\right) \right) \right]}{[R^2 + t^2]^{3/2} [R^2 + (t + |x|)^2]^{3/2}}, \quad (18)$$

где  $R^2 = \rho_c^2 + r^2$ , и  $\cos[\dots]$  — фактор, возникающий из экспоненты Швингера, эффективно суммирует бесконечный набор элементарных актов взаимодействия кварка с инстантонами. Нормировочный коэффициент в (13) равен  $N_Q = 4\pi^2$ . Для того чтобы получить уравнение (18), следует воспользоваться явными выражениями для инстантонного поля и нулевой моды кварка. Скалярный пропагатор кварка в конфигурационном и импульсном представлениях изображен на рис. 1 и 2 (см. также приложение А).

Следует заметить, что в [26], используя стандартное ОР, были получены пертурбативные и непертурбативные вклады в пропагатор кварка. Непертурбативная часть, пропорциональная конденсату кварков  $\langle \bar{q}q \rangle$ , имеет лидирующий член с импульсным распределением в форме  $\delta(p)$  и поправку  $\alpha_s \sim p^{-4}$ . Первый член является калибровочно-инвариантным, а второй нет. Вклад, рассмотренный в (11), соответствует первому калибровочно-инвариантному лидирующему по  $\alpha_s$  члену, который (благодаря нелокальным свойствам инстантонного вакуума) размывает импульсную  $\delta$ -функцию в глад-

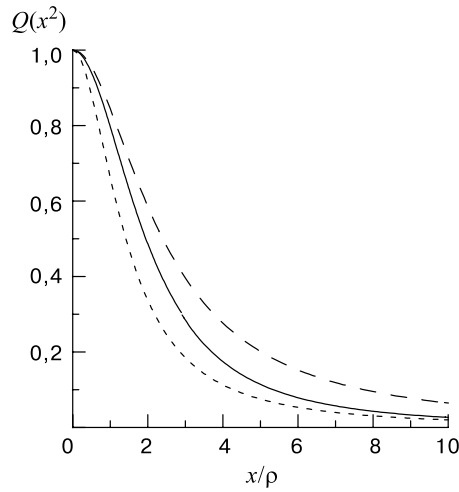


Рис. 1. Скалярная часть нормированного калибровочно-инвариантного непертурбативного пропагатора кварка в инстантонном вакууме в евклидовском конфигурационном пространстве (18) (сплошная линия) и пропагаторы, полученные без учета  $P_{\text{exр}}$ -фактора, соответственно, в сингулярной (пунктирная) и регулярированной (штриховая) калибровках

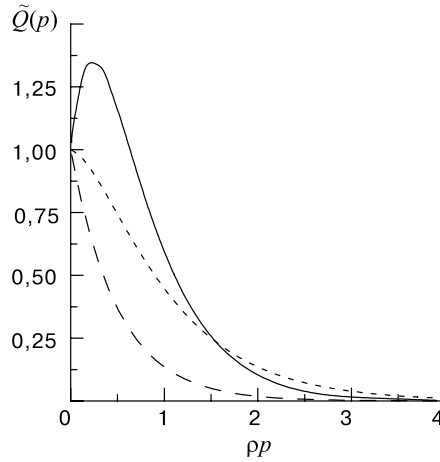


Рис. 2. Тот же пропагатор, что и на рис. 1, но в импульсном представлении (13) (сплошная линия), (108) (штриховая) и (109) (пунктирная)

кий формфактор  $\tilde{Q}(p)$ . Это означает, что кварки имеют в вакууме ненулевую виртуальность (ср. с  $\delta(p=0)$  в ОР). Формально это сводится к суммированию бесконечного подмножества членов в ОР. Таким образом, в лидирующем по  $\alpha_s$  порядке непертурбативная масса не зависит от калибровки. В следующем за лидирующим порядке калибровочная зависимость возникает, как и в [26], но эти члены подавлены малой константой связи. (В эффективном действии мягкая часть глюонного поля проинтегрирована). Отметим, что в [6] используется пропагатор кварка в калибровочно-неинвариантной форме  $Q(x^2) = \langle : \bar{q}(0)q(x) : \rangle / \langle : \bar{q}(0)q(0) : \rangle$ .

Таким образом, рассматриваемая модель основана на калибровочно-инвариантном выражении для эффективного пропагатора кварка в инстантонном вакууме, в котором эффект перерасеяния на инстантоне учитывается  $P_{\text{exr}}$ -фактором. Такой выбор мотивирован тем, что физические величины, такие, как конденсат кварков или виртуальность кварка (см. ниже), определены через калибровочно-инвариантные объекты. Другим элементом модели является ядро четырехкваркового взаимодействия. В сепарабельном приближении его форма (7) полностью фиксируется формой эффективного пропагатора кварка с помощью уравнения щели. Благодаря инвариантности формализма фактические вычисления, в которых доминирует вклад нулевых мод кварков в поле инстантона, могут быть выполнены в любой калибровке для инстантонного поля, включая сингулярную.

**Сохраняющиеся токи, индуцированные нелокальным действием.** Сохраняющиеся токи и соответствующие вершины получаются как производные

действия по внешним полям при нулевых значениях полей. В присутствии нелокального взаимодействия сохраняющиеся токи состоят из локальной и нелокальной частей \*:

$$\begin{aligned} \Phi \Gamma_{4q}^{\mu a}(k_1, k_2, k_3, k_4, q) = & \Phi \Gamma_{4q}^{\mu a} + G_I \tilde{K}_I(k_1, k_2, k_3, k_4) \times \\ & \times \sum_{j=I}^{III} \sum_i [(\Gamma_i^\alpha)_{13} (\Omega_{i\alpha})_{24}]_j^a H_j^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q), \end{aligned}$$

где  $k_i$  — входящие (выходящие) импульсы кварков и  $q$  — импульс, соответствующий току.

Выведем в древесном приближении некоторые из вершин для внешнего поля, взаимодействующего с кварками и пионами, которые будут использованы в диаграммном разложении физических величин. Для этого необходимо построить кварк-кварковые вершины, включающие один или два внешних тока, который может быть векторным или аксиально-векторным, и (или) пионы. Для того чтобы разложить упорядоченную по пути экспоненту по внешним полям, используем технику, описанную в [19] (см. также [27]). Этот метод, во-первых, состоит в нахождении фурье-образа и разложении в ряд Тейлора нелокальных функций  $K_I(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и  $F_I(x_1, x_2)$ ; затем необходимо превратить степени импульса в производные, действующие на упорядоченную по пути экспоненту и кварковые поля, сделать обратное преобразование Фурье и опять просуммировать. Свойствами контурного интеграла, которые следует интенсивно использовать в этой процедуре, являются соотношение (2) и его фурье-образ:

$$\begin{aligned} & \int d^4x f(x^2) e^{-ipx} \int_y^{\lambda x+a} dz^\mu e^{-iqz} = \\ & = i\lambda (2p + q\lambda)^\mu \frac{f(p + \lambda q) - f(p)}{(p + \lambda q)^2 - p^2} e^{-iqa} + f(p^2) \int_y^a dz^\mu e^{-iqz}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ниже приведены несколько примеров вершин, найденных таким образом.

---

\*Здесь мы следуем спин-изоспиновой классификации токов, данной в [20]. Отличие нашего определения от используемого в указанной работе состоит в определении интеграла по контуру. Это различие проявляется в форме (импульсной) пространственной зависимости нелокального формфактора  $F_\mu(k', k)$  в (21) и сказывается на выражениях для поперечных компонент токов. В то же время продольные компоненты токов одинаковы в обоих подходах, как это и должно быть.

Используя определения (1), (2), видим, что наличие упорядоченной по пути экспоненты в кинетическом члене (4) эквивалентно действию ковариантной производной

$$\int d^4x d^4y \delta(x-y) \overline{Q}(x, X) i\widehat{\partial}_y Q(X, y) \rightarrow \int d^4x d^4y \delta(x-y) \overline{\psi}(x) i\widehat{D}_y \psi(y),$$

$$i\widehat{D}_y \rightarrow i\widehat{\partial}_y + \widehat{V}(y) + \widehat{A}(y)\gamma_5,$$

что приводит к стандартной локальной части токов. Таким образом, минимальное взаимодействие восстанавливается и при введении зависящего от пути фактора в (1). *Локальные вклады* в вершины, возникающие из взаимодействия кварков с токами (4), задаются как

$$\Phi_{\text{loc}}(x, y, z) = i \frac{\delta^3 S_0}{\delta\Phi(z) \delta\overline{\psi}(x) \delta\psi(y)} \Big|_{\Phi=0},$$

где  $\Phi(z)$  обозначает внешние поля  $V_\mu(z)$ ,  $A_\mu^\alpha(z)$ . Переходя к фурье-образу с помощью  $\exp[i(k'x - ky - qz)]$  и опуская  $(2\pi)^4 \delta(k' - k - q)$ , находим

$$V_{\text{loc}}^{\mu\alpha}(k, q, k' = k + q) = \gamma^\mu T^a, \quad A_{\text{loc}}^{\mu\alpha}(k, q, k' = k + q) = \gamma^\mu \gamma_5 T^a,$$

где  $T_a = \tau_a/2$ ,  $k(k' = k + q)$  является входящим (выходящим) импульсом кварка и  $q$  — импульс, который протекает через ток.

*Нелокальный четырехкварковый вклад* в вершины, построенный из взаимодействия кварков с токами (5), имеет вид

$$\Phi_{\text{nl}}(x_1, x_2, x_3, x_4, z) = i \frac{\delta^5 S_{q\pi}}{\delta\Phi(z) \delta\overline{\psi}(x_1) \delta\psi(x_3) \delta\overline{\psi}(x_2) \delta\psi(x_4)} \Big|_{\Phi=0}$$

и задается выражениями, представленными ниже. Мы не выписываем явно фактор  $\delta^{(4)}(k_1 + k_2 + q - k_3 - k_4)$ , соответствующий закону сохранения энергии-импульса. Всего возникает три типа нелокальных вершин  $H_j^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q)$ , построенных из (5). Тип I задается как

$$H_I^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q) = F^\mu(k_1 + q, k_1) + F^\mu(k_3 - q, k_3), \quad (20)$$

где

$$F^\mu(k \pm q, k) = (2k \pm q)^\mu \frac{f(k \pm q)/f(k) - 1}{(k \pm q)^2 - k^2}, \quad (21)$$

с соответствующими комбинациями матриц  $[(\Gamma_i^\alpha)_{13} (\Omega_{i\alpha})_{24}]_I^\alpha$  для изоскалярного векторного тока I:

$$(1 \otimes 1 + i\gamma_5 \tau^a \otimes i\gamma_5 \tau^a), \quad -(\tau^a \otimes \tau^a + i\gamma_5 \otimes i\gamma_5), \quad (22)$$

изовекторного векторного тока I:

$$(\tau^a \otimes 1 + i\gamma_5 \otimes i\gamma_5 \tau^a), \quad -(1 \otimes \tau^a + i\gamma_5 \tau^a \otimes i\gamma_5), \quad (23)$$

изовекторного аксиального тока I:

$$\epsilon^{abc}(\tau^c \otimes i\gamma_5 \tau^b), \quad -\epsilon^{abc}(i\gamma_5 \tau^b \otimes \tau^c). \quad (24)$$

Нелокальная структура типа II также возникает в изовекторном векторном токе

$$H_{II}^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q) = F^\mu(k_2 + q, k_2) + F^\mu(k_3 - q, k_3), \quad (25)$$

а спин-изоспиновые матрицы появляются в комбинациях: (изовекторный векторный ток II)

$$i\epsilon^{abc}(i\gamma_5 \tau^b \otimes i\gamma_5 \tau^c), \quad -i\epsilon^{abc}(\tau^b \otimes \tau^c). \quad (26)$$

В изовекторном аксиальном токе не возникает структура типа II, но появляется нелокальная структура третьего рода:

$$H_{III}^\mu(k_1, k_2, k_3, k_4, q) = F^\mu(k_2 + q, k_2) + F^\mu(k_3 - q, k_3) - F^\mu(k_1 + q, k_1) - F^\mu(k_4 - q, k_4) \quad (27)$$

с матричными комбинациями (изовекторный аксиальный ток III)

$$(i\gamma_5 \tau^a \otimes 1), \quad -(i\gamma_5 \otimes \tau^a). \quad (28)$$

Выписанным выражениям для вершин могут быть сопоставлены соответствующие токи. Например, полный аксиальный векторный ток принимает вид

$$j_5^{\mu a}(x) = j_{5(\text{loc})}^{\mu a}(x) + j_{5(\text{nl})}^{\mu a}(x), \quad (29)$$

$$j_{5(\text{loc})}^{\mu a}(x) = \frac{1}{2} \bar{q}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \tau^a q(x),$$

$$j_{5(\text{nl})}^{\mu a}(x) = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 K(x_1, x_2, x_3, x_4) \times \left\{ \left[ \int_{x_1}^{x_4} dz_\mu \delta(z-x) - \int_{x_2}^{x_3} dz_\mu \delta(z-x) \right] \times \bar{q}(x_1) i\gamma_5 \tau^a q(x_3) \bar{q}(x_2) q(x_4) + \int_{x_1}^{x_3} dz_\mu \delta(z-x) i\epsilon^{abc} \bar{q}(x_1) \tau^b q(x_3) \bar{q}(x_2) i\gamma_5 \tau^c q(x_4) \right\}. \quad (30)$$

Ниже мы увидим, что нелокальные четырехкварковые токи индуцируют вклады в полную вершину  $Jqq$ , когда одна кварковая линия замкнута в петлю.

**Пропагатор пиона и кварк-пионная вершина.** Взаимодействие кварков, индуцированное инстантонным обменом, ответственно за сильные, зависящие от спина связи в адронных мультиплеттах [13]. В частности, это взаимодействие является притягивающим для мезонных состояний псевдоскалярного октета, отталкивающим для изосинглета  $\eta'$ , и отсутствует (в приближении нулевых мод) в векторных мезонах  $\rho, \omega$  и т.д. Если притяжение является достаточно большим, то оно может перестроить вакуум и связать кварк и антикварк в форме легкого (голдстоуновского) мезона.

Масса пиона\* и вершинная функция находятся с помощью уравнения Бете — Солпитера (БСУ). Для согласия с ШДУ (9), БСУ рассматривается в лестничном приближении. В этом приближении сепарабельное взаимодействие позволяет записать  $\bar{q}q$ -матрицу рассеяния  $T$  в форме

$$T(p_1, p_2, p_3, p_4) = \prod_n \tilde{f}(p_n) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \hat{T}(q), \quad (31)$$

где полный импульс  $\bar{q}q$  пары обозначен  $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ . БСУ может быть представлено через  $\hat{T}$  как

$$\hat{T}(q) = G_I + G_I \Pi_{PP}(q) \hat{T}(q), \quad (32)$$

где  $\Pi_{PP}(q)$  является поляризационным оператором пионного поля и задается петлевым интегралом

$$\Pi_{PP}(q) = i2N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{F}^2(k_+, k_-) \text{Tr}[i\gamma_5 S_F(k_-) i\gamma_5 S_F(k_+)], \quad (33)$$

где  $k_{\pm} = k \pm \frac{1}{2}q$ ,

$$\tilde{F}(k, k') = \tilde{f}(k) \tilde{f}(k'), \quad (34)$$

и  $S_F(k)$  — эффективный пропагатор кварка (8), полученный как решение ШДУ в лестничном приближении. Решение уравнения (32) имеет вид

$$\hat{T}(q) = \frac{1}{1 - G_I \Pi_{PP}(q)} G_I. \quad (35)$$

Связанное состояние пиона дается полюсом  $\hat{T}$  и может быть определено из уравнения

$$\det(1 - G_I \Pi_{PP}(q))|_{q^2=m_\pi^2} = 0. \quad (36)$$

---

\*В киральном пределе, который в основном мы используем в работе, масса пиона является нулевой в согласии с теоремой Голдстоуна, и при конечных токовых массах кварков она получается из соотношения Гелл-Манна — Окса — Реннера. Можно показать, что численная зависимость результатов от массы пиона и токовой массы кварка пренебрежимо мала.



В окрестности пионного полюса матрица  $\hat{T}$  может быть представлена как

$$-D_\pi(q^2) g_{\pi qq}^2 \bar{V}(q) \otimes V(q), \quad (37)$$

где

$$D_\pi(q^2) = \frac{1}{q^2 - m_\pi^2}$$

есть пропагатор мезона и  $V(q)$  обозначает соответствующую вершинную функцию. Вершинные функции для конечного и начального состояний связаны соотношением  $\bar{V} = \gamma^0 V^\dagger \gamma^0$ . Для пиона имеем

$$V_\pi(q) = i\gamma_5 \tau^a, \quad (38)$$

и кварк-пионная вершина в окрестности полюса задается

$$\Gamma_{\pi q}^a(k, p) = g_{\pi qq} \tilde{F}(p - k, k) i\gamma_5 T^a. \quad (39)$$

Кварк-пионная константа определяется условием связности [28]:

$$\frac{1}{g_{\pi qq}^2} = \left. \frac{d\Pi_{PP}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=m_\pi^2} = \left[ \frac{2\pi^2}{N_c I_{g\pi}(-m_\pi^2)} \right]^{-1}, \quad (40)$$

где, в случае безмассового пиона, интеграл  $I_{g\pi}$  сводится к

$$I_{g\pi}(0) = \int_0^\infty \frac{dk k^3 \tilde{Q}(k)^2}{D^2(k)} \left[ 1 - \frac{k \tilde{Q}'(k)}{2 \tilde{Q}(k)} + \left( \frac{k \tilde{Q}'(k)}{2 \tilde{Q}(k)} \right)^2 \right] \quad (41)$$

с

$$\tilde{Q}'(k) = \frac{d}{dk} \tilde{Q}(k), \quad D(k) = M_q^2 \tilde{Q}^2(k) + k^2. \quad (42)$$

Как мы увидим ниже, условие (40), дополненное калибровочной инвариантностью эффективного действия, приводит к выполнению партонных ПС для изоспина и импульса. Отметим, что выражение для  $g_{\pi q\bar{q}}$ , данное в (40) и (41), согласуется с тем, которое получено в [9].

**Эффективный киральный лагранжиан. Бозенизация модели.** Результаты предыдущего раздела могут быть переформулированы в эквивалентной форме, но для эффективного кварк-мезонного взаимодействия, с помощью процедуры бозенизации полей. Для этого удобно переписать сепарабельный

четырёхфермионный член в действии (5), линеаризуя биллокальные комбинации  $\bar{q}(x)q(y)$  и  $\bar{q}(x)\gamma_5\vec{\tau}q(y)$  с помощью введения вспомогательных составных мезонных полей  $M(x)$  [29] (приближение среднего поля). Тогда приходим к следующей форме эффективного нелокального действия, соответствующего (5):

$$S = S_0 + S_{\text{int}}, \quad (43)$$

где  $S_0$  является свободным действием для полей кварков и мезонов:

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \bar{q}(x) i\hat{D}q(x) + \frac{1}{2} [\sigma(x)(\Delta - m_\sigma^2)\sigma(x)] + \frac{1}{2} [\vec{\pi}(x)(\Delta - m_\pi^2)\vec{\pi}(x)] \right\}, \quad (44)$$

и  $S_{\text{int}}$  есть кварк-пионное взаимодействие

$$S_{\text{int}} = -M_q \int d^4X d^4x_1 d^4x_2 f(x_1)f(x_2)\bar{Q}(X - x_1; X)U_\pi(X) Q(X; X + x_2), \quad (45)$$

где

$$U_\pi(X) = \exp\left(-\frac{g_{\pi\bar{q}q}}{M_q} i\gamma_5\tau^a\pi^a(X)\right) = \left[1 - \frac{g_{\pi\bar{q}q}}{M_q} (i\gamma_5\tau^a)\pi^a(X) - \frac{1}{2} \left(\frac{g_{\pi\bar{q}q}}{M_q}\right)^2 \pi^a(X)^2 + O(M_q^{-3})\right]. \quad (46)$$

В (44), (45) пренебрегаем членами, индуцированными тензорным взаимодействием в (5), так как они не дают вклада в скалярном канале. Фурье-образ от калибровочно-инвариантной нелокальной вершины  $\tilde{F}(k_1, k_2)$  описывает амплитуду мягкого перехода пиона с импульсом  $p$  в кварк и антикварк с импульсами  $k_1 = p + k/2$  и  $k_2 = p - k/2$  соответственно. Эта функция представляет полную вершину взаимодействия со всеми кварк-глюонными возбуждениями жестче, чем масштаб  $\mu_0 \sim 1/\rho_c$ , сильно (экспоненциально) подавленной. Важно подчеркнуть, что пионное поле, входящее в действие (43), является перенормированным, а константа перенормировки поля составного мезона выбирается равной нулю:

$$Z_\pi = 1 - g_{\pi\bar{q}q}^2 \left. \frac{\partial \Pi_\pi(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 = -m_\pi^2} = 0. \quad (47)$$

Это условие связности [28], фиксирующее константу взаимодействия пионного поля с кварками  $g_{\pi\bar{q}q}$ , эквивалентно условию (40).

**Физические токи.** Вершины, данные в предыдущей части, являются «голыми». Теперь необходимо «одеть» модель с помощью учета процессов перераспределения. Эффективные векторные и аксиально-векторные полные вершины необходимы при вычислении многих физических процессов и будут описаны более детально ниже. Важные ограничения на структуру этих вершин накладывают векторное (УТТ) и аксиальное тождество Уорда — Такахаша (АУТТ):

$$q^\mu \Gamma_\mu(k, q) = S_F^{-1}(k') - S_F^{-1}(k), \quad (48)$$

$$q^\mu \Gamma_\mu^A(k, q) = S_F^{-1}(k')\gamma_5 - \gamma_5 S_F^{-1}(k), \quad (49)$$

где  $q$  является фотонным импульсом и  $k$  — импульсом кварка, проходящими через вершину. (Изоспиновая структура здесь не выписана явно.) Полная вершина представляется суммой локальной и нелокальной частей. Нелокальные двухкварковые эффективные вершины  $\Gamma_{2q}$  индуцируются четырехкварковыми вершинами  $\Gamma_{4q}$ , в которых одна кварковая линия замкнута в петлю.

В электромагнитном случае полная амплитуда для фотонной связи с кварком задается

$$V_{\text{vertex}}^{\mu a}(k, q, k' = k + q) = \left[ \gamma^\mu - M_q \frac{\tilde{f}^2(k') - \tilde{f}^2(k)}{k'^2 - k^2} (k + k')^\mu \right] T^a \quad (50)$$

и удовлетворяет УТТ:

$$q^\mu V_{\text{vertex}}^{\mu a}(k, q, k' = k + q) = \left[ \hat{q} - \left( M_q \tilde{f}^2(k') - M_q \tilde{f}^2(k) \right) \right].$$

Чтобы получить второй член в (50), индуцированный  $V_{\Gamma_{4q}}$  (22), (26), диаграмму, где замкнутая петля имеет скалярную вставку, упрощают при использовании ШДУ (9).

Продольная часть эффективной двухкварковой аксиально-векторной вершины, получающейся из (28), имеет вид [20]:

$$A_{\Gamma_{2q}}^{\mu a}(k, q) = \gamma^\mu \gamma_5 T^a - \gamma_5 \frac{q^\mu}{q^2} T^a \{ [M(k+q) + M(k)] - \quad (51)$$

$$- i4N_c N_f G_I f(k+q) f(k) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{M(l^2)}{l^2 - M(l^2)} f(l) [f(l-q) + f(l+q)] \},$$

где, для того чтобы получить первый член внутри фигурных скобок, было использовано уравнение шели (9). Эта вершина является голой, и, в частности, она свободна от сингулярностей. Для того чтобы получить полную

аксиально-векторную вершину, нам необходимо принять во внимание переход тока в конститuentные кварки через их перерасcеяние в канале с пионными квантовыми числами. В приложении Б мы покажем явно, что полный аксиально-векторный ток принимает вид

$${}^A\Gamma_{\text{vertex}}^{\mu a}(k, q) = \left[ \gamma^\mu - \frac{M(k+q) + M(k)}{q^2} q^\mu \right] \gamma_5 T^a. \quad (52)$$

Этот ток имеет физическую сингулярность, соответствующую пиону, и, очевидно, удовлетворяет АУТГ:  $q^\mu {}^A\Gamma_\mu(k, q) = S_F^{-1}(k+q)\gamma_5 + \gamma_5 S_F^{-1}(k)$ . УТГ и требование, что вершины не содержат нефизических сингулярностей, однозначно определяют продольную часть векторной и аксиально-векторной вершин. Поперечная часть при этом является модельно-зависимой и, в частности, в настоящем подходе зависит от определения контурного интеграла.

**Величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операторов.** Важными характеристиками являются величины кваркового конденсата и средней виртуальности кварков в вакууме. Первая играет роль параметра порядка нарушения киральной симметрии, а вторая определяет среднее значение квадрата импульса виртуального кварка. При заданной динамической массе (11) имеем для кваркового конденсата

$$\langle \bar{q}q \rangle = -4N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{M_q(k)}{k^2 + M_q^2(k)} \quad (53)$$

и средней виртуальности кварков [3]:

$$\lambda_q^2 \equiv \frac{\langle : \bar{q} D^2 q : \rangle}{\langle \bar{q}q \rangle} = -\frac{4N_c}{\langle \bar{q}q \rangle} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k^2 \frac{M_q(k)}{k^2 + M_q^2(k)}. \quad (54)$$

Средняя виртуальность кварков определяет производную от конденсата кварков и, таким образом, его нелокальные свойства. Одним из главных предположений метода КХД ПС [1] было то, что локальные кварковый и глюонный конденсаты доминируют в физике легких адронов, а введение поправок более высокой размерности или даже нелокальных конденсатов [3] не изменяет сильно стандартных результатов. Таким образом, по крайней мере, для согласования локальных и нелокальных КХД ПС значение производной (виртуальности) должно быть относительно малым. Феноменологически имеется достаточно точная оценка этой величины:  $\lambda_q^2 \approx (0, 4 \pm 0, 2) \text{ ГэВ}^2$ , основанная на рассмотрении КХД ПС для легких адронов [16] и мезонов, составленных из тяжелых и легких кварков [30]. Вычисления в рКХД дают  $\lambda_q^2 = (0, 55 \pm 0, 05) \text{ ГэВ}^2$  [31]. Конечно, имеются поправки за счет прямых инстантонов к результату в КХД ПС, но они вряд ли поменяют результат существенно. Было бы очень интересно, если бы оценка в рКХД могла быть подтверждена новыми вычислениями.

Чтобы иметь качественное представление о соотношении параметров модели с физическими наблюдаемыми, полезно рассмотреть уравнение щели (9) и вакуумные ожидания (53), (54), пренебрегая членом  $M_q^2(k)$ , по сравнению с  $k^2$  в знаменателях подынтегральных функций. Это приближение оправданно в режиме достаточно разреженной инстантонной среды (жидкости), когда  $\langle k^2 \rangle = \lambda_q^2 \gg M_q^2(\lambda_q)$ . Можно показать, что точность такой процедуры лучше, чем 20–30%, если параметр разреженности мал:  $\eta < 1$ . Тогда, с учетом (53) и (54) и используя явные выражения эффективной массы, заданные в (18), (13), (10), получим для значений кваркового конденсата и кварковой виртуальности, соответственно,

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{N_c M_q}{2\pi^2 \rho_c^2}, \quad \lambda_q^2 = \frac{2}{\rho_c^2}. \quad (55)$$

Первое соотношение, представленное в форме  $M_q = -(2\pi^2/N_c)\rho_c^2\langle \bar{q}q \rangle$ , совпадает с результатом, полученным в работе [32], где эффективная масса кварка была определена в системе инстантонов с малыми размерами, взаимодействующих с длинноволновым вакуумным полем. Коэффициент  $(2\pi)^2$  в этом соотношении равен нормировке пропагатора кварка в импульсном представлении. Оказывается, что этот фактор является одинаковым как для калибровочно-инвариантного пропагатора (13), так и для пропагатора, вычисленного в сингулярной калибровке (без *P*ехр-фактора). Кроме того, это соотношение является аналогом известного результата НИЛ-модели [17]  $\langle \bar{q}q \rangle \approx \approx -N_c M_q \Lambda_{NJL}^2 / (4\pi^2)$ , где  $\Lambda_{NJL}$  — параметр обрезания по импульсам в ковариантной схеме регуляризации в модели с двумя ароматами. Так как инстантоны создают нелокальность и приводят к регуляризации интегралов также ковариантным способом, мы можем дать оценку на параметр обрезания  $\Lambda_{NJL}^2 \approx \lambda_q^2$ .

Второе соотношение в (55) было недавно получено в [14], где *нелокальные* свойства конденсата кварков изучались в инстантонной модели. Этот же результат был получен в [33] прямым вычислением локального смешанного кварк-глюонного конденсата:

$$\frac{\lambda_q^2}{2} = \frac{\langle : \bar{q}(ig\sigma_{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^a}{2})q : \rangle}{\langle : \bar{q}q : \rangle}. \quad (56)$$

Из выражения для средней виртуальности кварков очевидно, что область кварк-антикваркового взаимодействия характеризуется эффективным размером  $\rho_c$  инстантонных флуктуаций в КХД-вакууме.

Обращая равенства (55), выразим параметры инстантонной модели вакуума в терминах фундаментальных параметров вакуума КХД  $\rho_c^2 = 2/\lambda_q^2$ ,  $M_q = -(4\pi^2/N_c)(\langle \bar{q}q \rangle/\lambda_q^2)$ . Если для численной оценки подставить «стан-

дартное» значение для конденсата кварков  $\langle \bar{q}q \rangle \approx -(230 \text{ МэВ})^3$  (см., например, [7]) и для средней виртуальности кварков взять  $\lambda_q^2 \approx 0,6 \text{ ГэВ}^2$  [16,31], то получим  $\rho_c^{-1} \approx 0,55 \text{ ГэВ}$  и  $M_q \approx 0,27 \text{ ГэВ}$ . Совместный анализ вакуумных и низкоэнергетических пионных свойств (см. табл. 1), проведенный в [24], подтверждает эти оценки. Выразим параметр разреженности вакуума через физические параметры

$$\eta^{1/2} = \frac{4\sqrt{2}\pi^2}{N_c} \left( \frac{|\langle \bar{q}q \rangle|^{1/3}}{\lambda_q} \right)^3.$$

Это выражение пропорционально малому фактору  $1/N_c$  и отношению величины конденсата кварков к размеру его нелокальности в импульсном пространстве. Однако малость  $1/N_c$  компенсируется большим численным коэффициентом. Таким образом, разреженность инстантонного вакуума обусловлена вторым фактором и означает, что кварки протекают через вакуум с достаточно большим средним импульсом  $\lambda_q \approx \sqrt{\langle k^2 \rangle}$  по сравнению с линейным масштабом, характерным для конденсата кварков  $|\langle \bar{q}q \rangle|^{1/3}$ . Формально предел разреженной жидкости соответствует пределу малого среднего размера инстантона. Подставив реальные числа, мы получим оценку  $\eta \approx 0,24$ .

В приближении разреженной жидкости из уравнения массовой щели (9) можно найти плотность инстантонной среды в виде

$$n_c = \frac{N_c M_q^2 \lambda_q^2}{4\pi^2} I_n, \quad I_n = \int_0^\infty duu \tilde{Q}^2(u/\rho_c) \approx 0,61, \quad (57)$$

где константа  $I_n$  не зависит от  $\rho_c$ . Существуют и другие полезные соотношения, связывающие параметры вакуума друг с другом. Например,

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{1}{I_n} \frac{n_c}{M_q} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{I_n}} \sqrt{N_c n_c \lambda_q^2}. \quad (58)$$

Эти соотношения имеют ту же самую параметрическую зависимость, что и оценки, полученные в [5,7], но с другими коэффициентами. Первое из них выражает конденсат кварков через эффективный вклад отдельного инстантона, умноженный на плотность инстантонов. Коэффициенты отличаются по той причине, что в [5], где это равенство записано как  $\langle \bar{q}q \rangle = -n_c/M_q$ , выражения были получены из инстантонных формул в газовом приближении механической заменой токовой массы кварка на эффективную. Напротив, при выводе равенства (58) такая процедура замены фиксирована уравнением щели (9), а коэффициенты главным образом определяются из наклона формфактора  $M_q(k)$  в нуле.

Второе соотношение в (58) представляет собой самосогласованную оценку конденсата кварков в инстантонном вакууме (см., например, [7]). Далее, по-

скольку инстантонный вклад в величину глюонного конденсата дается соотношением  $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle|_{\text{inst}} = 8n_c$ , то глюонный конденсат может быть выражен через кварковый конденсат и среднюю виртуальность кварков:

$$\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle|_{\text{inst}} = \frac{2^5 \pi^2 I_n \langle \bar{q}q \rangle^2}{N_c \lambda_q^2} \lesssim 0,019 \text{ ГэВ}^4. \quad (59)$$

«Стандартной» оценкой кваркового конденсата, полученной в оригинальной работе [1], является  $\langle 0|(1/4\pi^2)G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a|0 \rangle \simeq 0,012 \text{ ГэВ}^4$ . Последующий анализ [34], выполненный методом ПС КХД для тяжелых и легких мезонов, а также недавние решеточные вычисления [35] дают величины, которые в два и более раз превосходят «стандартные».

**Низкоэнергетические наблюдаемые пиона.** Для того чтобы зафиксировать параметры инстантонной модели, мы также рассмотрим низкоэнергетические константы пиона. Как было отмечено выше, нелокальный аксиальный ток содержит неоднозначность, связанную с определением контурного интеграла. К счастью, продольная компонента тока не содержит зависимости от выбора пути и однозначно фиксируется с помощью УТТ. Таким образом, константы распадов, рассмотренные ниже, являются хорошо определенными. В результате низкоэнергетические теоремы, которые следуют из (частичного) сохранения тока, выполняются. В частности, соотношение Голдбергера — Треймана для кварк-пионной константы связи имеет привычную форму

$$g_{\pi qq} = \frac{M_q}{f_\pi}, \quad (60)$$

и константа распада пиона на два фотона  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

$$g_{\pi\gamma\gamma} = \frac{1}{4\pi^2 f_\pi} \quad (61)$$

согласована с требованиями аксиальной аномалии.

Зафиксируем модельные параметры так, чтобы константа слабого распада пиона  $f_\pi$  имела точность не хуже, чем 1%. В табл. 1 приведены результаты для двух модельных параметров  $M_q$  и  $\rho_c$  и предсказания для кварк-пионной константы  $g_{\pi qq}$ , конденсата кварков  $\langle \bar{q}q \rangle$ , средней вакуумной виртуальности кварков  $\lambda_q^2$  и плотности инстантонов  $n_c$ .

Из табл. 1 ясно, что с ростом массы кварка величины конденсатов кварков и глюонов падают. Этот эффект является следствием подавления конденсатов массой фермиона. Значения параметров  $M_q$  и  $\rho_c$ , которые воспроизводят вакуумные ожидания наиминимизированной размерности с точностью порядка 30 %, находятся в интервале  $M_q = 220 \div 260 \text{ МэВ}$ ,  $\rho_c = 1,5 \div 2,0 \text{ ГэВ}^{-1}$ . В дальнейшем мы используем типичный набор параметров

$$M_q = 230 \text{ МэВ}, \quad \rho_c = 1,7 \text{ ГэВ}^{-1}. \quad (62)$$

**Таблица 1. Значения низкоэнергетических вакуумных и пионных наблюдаемых**

$M_q,$ ГэВ	$\rho_c,$ ГэВ <sup>-1</sup>	$f_\pi,$ МэВ	$g_{\pi qq}$	$ \langle \bar{q}q \rangle ^{1/3},$ МэВ	$\lambda_q^2,$ ГэВ <sup>2</sup>	$n_c,$ фм <sup>-4</sup>
0,16	1,0	93	1,7	283	2,2	1,36
0,21	1,5	92	2,3	230	1,0	0,87
0,23	1,7	91	2,5	215	0,83	0,75
0,28	2,0	92	3,1	201	0,61	0,68

Отметим, что условие разреженности  $\eta \ll 1$  выполняется во всем допустимом интервале.

Параметры модели и предсказания для вакуумных и пионных наблюдаемых получены при некоторых приближениях. Во-первых, мы работаем в киральном пределе нулевой токовой массы кварка. Далее, в приближении нулевых мод мы пренебрегли малыми вкладами от векторных мезонов. Кроме того, учтено только наинизшее двухкварковое фоксовское промежуточное состояние в пионе, что соответствует приближению заморозки. Мы считаем, что все эти факторы могут слегка изменить числа в табл. 1, но при этом найденные качественные результаты останутся справедливыми.

### 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВАЛЕНТНЫХ КВАРКОВ В ПИОНЕ В ИНСТАНТНОЙ МОДЕЛИ

**Амплитуда распределения кварков в пионе.** При больших импульсах передачи амплитуды эксклюзивных адронных процессов вследствие факторизации динамики на больших и малых расстояниях [36–38] выражаются в лидирующем логарифмическом приближении как конволюция амплитуд жесткого и мягкого подпроцессов. Амплитуда жесткого подпроцесса вычисляется в пертурбативной КХД, и основной вклад в данную амплитуду дают диаграммы с жестким одноглюонным обменом. Амплитуда мягкого подпроцесса описывает переход начального и конечного адронного состояний в кварки и определяется через адронные амплитуды распределений (АР) [36]. Эти феноменологические функции имеют значение амплитуд распада адрона (в системе с бесконечным импульсом,  $p_h \rightarrow \infty$ ) в кварк-антикварковую пару (в случае мезонов), с долями импульса адрона, переносимого кварком  $x p_h$  и  $\bar{x} p_h$  ( $\bar{x} = 1 - x$ ) и виртуальностью  $\mu^2$ . Так как АР зависит от динамики на больших расстояниях, распределения могут быть вычислены только с помощью непертурбативных методов.

Первая попытка вычислить адронную АР была выполнена в [39] и привела к двугорбой форме для пионной АР. Однако некоторое время назад



применимость этой формы  $AP$  к эксклюзивным процессам при высоких импульсах передачи была поставлена под вопрос [40]. Показано, что в коллинеарном приближении при импульсах передачи, далеких от асимптотической области, доминируют вклады с *мягким* одноглюонным обменом, который соответствует большой величине сильной константы связи. Более того, предсказание, основанное на этой  $AP$ , дает превышение над экспериментальными данными по пионному переходному формфактору при больших  $Q^2$ , опубликованными недавно коллаборацией CLEO [41] (для дискуссий см., например, работу [42]).

Позднее в работе [43] с использованием более тонкого метода извлечения адронной  $AP$ , основанного на КХД ПС с нелокальными конденсатами [3], было показано, что  $AP$  пиона на низкоэнергетическом масштабе более близка по форме к асимптотической  $AP$ . Также было найдено, что форма адронной  $AP$  очень чувствительна к структуре непертурбативного вакуума, параметризованного через нелокальные конденсаты. Недавно в [14] и [24] нелокальные конденсаты были смоделированы в инстантонной модели.

В этом разделе мы используем кварк-пионную динамику в рамках модели инстантонного вакуума для того, чтобы вычислить в лидирующем твисте  $AP$  пиона в низкой точке нормировки порядка обратного эффективного размера инстантона  $\rho_c$  [44]. Более ранние попытки [45] (см. также [46]) вычислить  $AP$  пиона были сделаны в рамках модели [6], которая имела дальнейшее развитие. Эффективное действие, предложенное в [6], справедливо только в киральном пределе и модифицировано более последовательно в [25]. Выше было показано, что ядро эффективного индуцированного инстантонами четырехкваркового взаимодействия должно быть выражено через калибровочно-инвариантную величину, нелокальный конденсат кварков, эффективно суммирующий непертурбативные эффекты инстантонного поля [24]. В контексте настоящих вычислений важным является то, что, как это было уже отмечено выше, в нелокальной модели форма сохраняющихся токов отличается от обычных локальных токов (см., например, [20]). Эти находки приводят к заключению, что подход [6] не полон и не согласован с низкоэнергетическими теоремами. С учетом этих фактов некоторые из предыдущих вычислений также требуют пересмотра. В частности, подход [6] не способен удовлетворить аксиальным тождествам Уорда — Такахаша (АУТТ). Как показано в [20], локальная часть аксиального тока модифицируется нелокальным членом. Физически это означает, что обычные локальные токи определены через (свободные) токовые кварки, а модификация нелокальными членами происходит благодаря переходу от описания через токовые кварки к описанию в терминах конститuentных кварков в эффективной модели. Эти добавочные члены не подавлены параметром малой плотности инстантонов и ведут к поправке порядка 30% к величине константы распада пиона  $F_\pi$ . Так как константа распада пиона является интегральной мерой пионной  $AP$ , основ-

ная задача настоящего раздела состоит в том, чтобы оценить эффект таких членов при вычислении АР.

*Пионная амплитуда распределения на низкоэнергетическом масштабе.* Аксиальная проекция пионной АР на световом конусе  $\varphi_\pi^A(x)$  определяет лидирующее асимптотическое поведение электромагнитного формфактора пиона. Она параметризует структуру матричного элемента

$$\langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | \pi^+(p) \rangle = i p_\mu F_\pi \int_0^1 dx e^{i(2x-1)p \cdot z} \varphi_\pi^A(x) \quad (63)$$

от билокального оператора

$$J_\mu^A(z, -z) = \bar{d}(z) \gamma_\mu \gamma_5 P \exp \left( i \int_{-z}^z A_\mu(z) dz^\mu \right) u(-z), \quad (64)$$

где рассматривается предел на световом конусе,  $z^\mu = \lambda n^\mu$ ,  $n^\mu$  является светоподобным вектором:  $n^2 = 0$ , нормированным условием  $p \cdot n = 1$ ,  $F_\pi = 130$  МэВ — константа слабого распада пиона, и пионная АР на световом конусе лидирующего твиста нормирована:

$$\int_0^1 dx \varphi_\pi^A(x) = 1. \quad (65)$$

Упорядоченный по пути швингеровский фазовый фактор требуется для калибровочной инвариантности, и интегрирование выполняется вдоль светоподобного направления  $z$ . Далее мы будем пренебрегать этим фактором, так как возможный вклад от классического поля (инстантона) дает поправки к АР более высокого твиста, а вклад от квантового поля приводит к поправкам по малому параметру плотности инстантонов.

Билокальный ток в (64) определен через токовые кварки, а эффективная низкоэнергетическая модель, которую мы собираемся использовать, сформулирована в терминах конститuentных кварков  $U$  и  $D$ . Таким образом, чтобы получить матричный элемент (63), мы должны рассмотреть вершину  $\langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | U(k) \bar{D}(k) \rangle$ , которая после извлечения пионного полюса становится

$$\langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | U(k) \bar{D}(p-k) \rangle = \langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | \pi^+(p) \rangle \frac{1}{m_\pi^2 - p^2} \Gamma_{\pi q}^a(k, p), \quad (66)$$

где  $\Gamma_{\pi q}^a(k, p) = \langle \pi^+(p) | U(k) \bar{D}(p-k) \rangle$ . Тогда, выражая матричный элемент  $\langle 0 | J_\mu^A(z, -z) | U(k) \bar{D}(p-k) \rangle$  через петлевой интеграл, принимая во внимание перерасcеяние конститuentных кварков, извлекая полюс пиона, выраже-

ние для AP сводится к

$$p^\mu F_\pi \varphi_\pi^A(x) = 2N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(x - k \cdot n) \times \\ \times \text{tr}\{\Gamma_{\pi q}^a(k, p) S(k) {}^A\Gamma^{\mu a}(k, p) S(k-p)\}, \quad (67)$$

где  $x$  является долей пионного импульса  $p$ , переносимой кварком\*. Дельта-функция в (67) аккумулирует информацию о всех моментах AP и связана с ними с помощью преобразования Меллина.

В указанном выражении  $S(k)$ ,  ${}^A\Gamma^{\mu a}(k, p)$  и  $\Gamma_{\pi q}^a(k, p)$  являются эффективным пропагатором кварка, кварк-аксиальным током и кварк-пионной вершиной соответственно. Основной задачей здесь является нахождение этих функций. Для этого мы будем использовать ковариантную эффективную низкоэнергетическую модель с сепарабельным нелокальным четырехкварковым взаимодействием. Более того, фактические вычисления будут сделаны в модели с межкварковым взаимодействием, индуцированным инстантонным обменом. Можно показать, что численно зависимость результатов от массы пиона и токового кварка пренебрежимо мала и может быть проигнорирована при дальнейшем рассмотрении:  $m_\pi = 0$ . Однако взаимосвязь эффективной массы кварка  $M_q$  и масштаба нелокальности вакуумного поля  $\lambda_q^2$  имеет большое влияние на форму AP.

*Результаты для пионной амплитуды распределения.* Амплитуда распределения пиона вычисляется из (67) с использованием эффективного пропагатора кварка (8), кварк-пионной вершины (39) и аксиально-векторной вершины (51). Импульсная зависимость одетых взаимодействием величин определяется нелокальностью конденсата кварков (13), который в настоящем подходе задан с помощью инстантонной модели (18). В фактических вычислениях будем использовать значения параметров (табл. 1):  $\rho_c = 1,7 \text{ ГэВ}^{-1}$ ,  $M_q = 230 \text{ МэВ}$ ,  $n_c = 0,7 \text{ фм}^{-4}$ , которые согласованы с низкоэнергетическими наблюдаемыми пиона. Интеграл в (67) вычисляется с помощью преобразования Лапласа методом, описанным в [24].

Из графика на рис. 3 видно, что форма  $\varphi_\pi^A(x)$  близка к асимптотической AP  $\varphi_\pi^{A, \text{asympt}}(x) = 6x\bar{x}$ . Основной вклад идет из локальной части вершины, а вклад нелокальной части является подавленным по величине и пологим по форме. Заметим, что пологая форма нелокального вклада есть результат суммы различных нелокальных вкладов, которые имеют более сложную форму.

---

\*Формула (67) обобщает выражение, которое было найдено ранее в [45] (а также в [46]). В этих работах вместо полной вершины  $\Gamma^\mu(k, q)$  была использована вершина, соответствующая только локальному аксиальному току  $\gamma_\mu \gamma_5$ . Как будет видно, это приближение не согласовано с аксиальным УТТ.

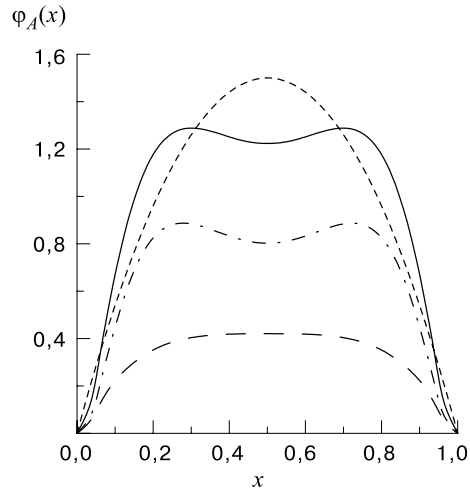


Рис. 3. Аксиальная проекция пионной амплитуды распределения (сплошная линия) при низкоэнергетическом масштабе  $\mu_0^2 = 0,5 \text{ ГэВ}^2$ . Вклад локальной части вершины показан штрихпунктирной линией, нелокальной — пунктирной линией. Асимптотическая амплитуда распределения показана штриховой линией

Найденная АР пиона определена на низкоэнергетическом масштабе  $\mu_0 \sim \rho_c^{-1}$ , где ожидается, что применение инстантонной модели оправданно. Она служит в качестве начальных данных для КХД-эволюции к более высоким импульсам передачи  $Q^2$ . Для того чтобы получить эту связь, удобно разложить АР по полиномам Гегенбауэра  $C_n^{3/2}(x)$ , которые являются собственными функциями ядра уравнения КХД-эволюции:

$$\varphi_\pi^A(x, \mu_F) = \varphi_\pi^{A, \text{asympt}}(x) \left[ 1 + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} B_n(\mu_0) \left( \frac{\alpha_s(\mu_F)}{\alpha_s(\mu_0)} \right)^{\gamma_n} C_n^{3/2}(2x-1) \right], \quad (68)$$

где  $\gamma_n$  — аномальные размерности, вычисленные в лидирующем порядке по константе связи  $\alpha_s(\mu)$ ;  $B_n(\mu_0)$  — коэффициенты разложения по полиномам Гегенбауэра. Модельная АР хорошо воспроизводится с помощью этого разложения, если удержать только несколько первых ненулевых коэффициентов:

$$B_2(\mu_0) = 0,069, \quad B_4(\mu_0) = -0,061, \quad B_6(\mu_0) = -0,017, \quad B_{n \geq 8}(\mu_0) = 0.$$

Полученное распределение экстраполируется к более высоким экспериментально достижимым импульсам с помощью пертурбативной КХД, так что

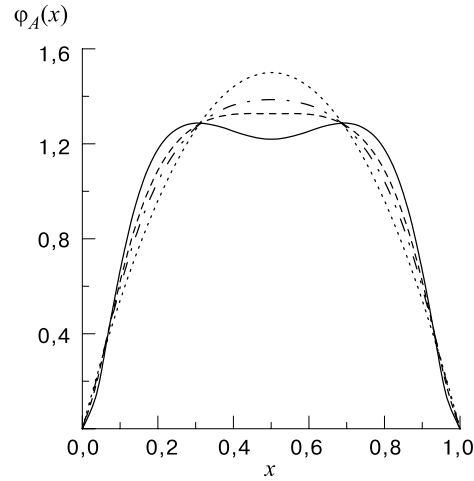


Рис. 4. Аксиальная проекция пионной амплитуды распределения (сплошная линия) при низкоэнергетическом масштабе  $\mu_0^2 = 0,5 \text{ ГэВ}^2$  и ее эволюция к более высоким импульсам передач в квадрате:  $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  (пунктирная линия),  $Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$  (штрихпунктирная линия). Асимптотическая амплитуда распределения показана точечной линией

сравнение с экспериментальными данными может быть выполнено. Мы выбираем КХД-масштабный параметр  $\Lambda_{\overline{MS}}^{(3)} = 250 \text{ МэВ}$ . На рис. 4 показана АР пиона с эволюцией к масштабам 1 и 10  $\text{ГэВ}^2$  в сравнении с начальным распределением на масштабе  $\mu_0^2 = \lambda_q^2 = 0,5 \text{ ГэВ}^2$ .

В итоге мы представили здесь некоторые теоретические предсказания для пионной амплитуды распределения в рамках непертурбативного формализма, основанного на инстантонной модели КХД-вакуума. Показано, что правильная нормировка АР получается только при использовании условия связности и прямого применения ЧСАТ, что улучшает некоторые предыдущие вычисления, выполненные в [45] и [46].

Отметим, что в расширенной нелокальной модели, где во взаимодействии возможны другие спин-ароматные члены, в АР пиона могут давать вклад и вершины с векторной вставкой  $\rho$ -мезона. Известно, что этот вклад в  $F_\pi$  мал и оценивается как  $-10\%$  [20]. Однако было бы интересно рассмотреть его влияние на форму АР.

Извлеченная АР пиона соответствует низкой точке нормировки, где эффективный инстантонный подход оправдан. Мы получили АР пиона при более высоких импульсах, достижимых в эксперименте, с помощью стандартной пертурбативной эволюции. Найдено разумное согласие с данными CLEO по переходному пионному формфактору при высоких импульсах передачи.

**Переходный формфактор пиона для процессов  $\pi\gamma^*\gamma^*$ .** Недавно вновь возрос интерес к формфактору  $T_{\pi^0}(q_1^2, q_2^2)$  для переходных процессов  $\gamma^*(q_1)\gamma(q_2) \rightarrow \pi^0(p)$  и  $\gamma^*(q_1)\gamma^*(q_2) \rightarrow \pi^0(p)$ , где  $q_1$  и  $q_2$  — фотонные импульсы. Экспериментальные данные по формфактору  $T_{\pi^0}$  для малой виртуальности одного из фотонов,  $q_2^2 \approx 0$ , с виртуальностью другого фотона, просканированной до 8 ГэВ<sup>2</sup>, известны из результатов коллабораций CELLO [47] и CLEO [41]. Теоретически при нулевых виртуальностях обоих фотонов формфактор  $T_{\pi^0}(0, 0)$  связан с аксиальной аномалией. При асимптотически большой фотонной виртуальности поведение формфактора предсказывается с помощью пертурбативной КХД (пКХД) [38, 48, 49] (см. [50] для недавних дискуссий) и зависит критически от внутренней пионной динамики, которая параметризуется с помощью непертурбативной пионной АР  $\varphi_\pi^A(x)$ . Более того, знание структуры формфактора вне массовой поверхности позволяет значительно уменьшить неопределенность в вычислении адронного вклада в амплитуду рассеяния света на свете в мюонную  $g-2$  [51], которая измеряется в настоящее время в эксперименте E821 в BNL [52].

Далее, удобно параметризовать фотонные виртуальности как  $q_1^2 = -(1 + \omega)Q^2/2$ ,  $q_2^2 = -(1 - \omega)Q^2/2$ , где  $Q^2$  и  $\omega$ , соответственно, полная виртуальность фотонов и асимметрия в их распределении:

$$Q^2 = -(q_1^2 + q_2^2) \geq 0 \quad \text{и} \quad \omega = (q_1^2 - q_2^2)/(q_1^2 + q_2^2). \quad (69)$$

Экспериментальные данные CLEO [41] для процесса  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$  ( $|\omega| = 1$ ) могут быть фитированы с помощью монополярного формфактора:

$$T_{\pi^0}(q_1^2 = -Q^2, q_2^2 = 0)|_{\text{fit}} = \frac{g_{\pi\gamma\gamma}}{1 + Q^2/\Lambda_\pi^2}, \quad \Lambda_\pi \simeq 0,77 \text{ ГэВ}, \quad (70)$$

где  $g_{\pi\gamma\gamma}$  — двухфотонная константа распада пиона. В наинизшем порядке пКХД, с использованием ОР на световом конусе поведение формфактора при высоких  $Q^2$  предсказывается [38, 48] как

$$T_{\pi^0}(q_1^2, q_2^2)|_{Q^2 \rightarrow \infty} = J(\omega) \frac{f_\pi}{Q^2} + O\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right) + O\left(\frac{1}{Q^4}\right) \quad (71)$$

с асимптотическим коэффициентом

$$J(\omega) = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1 - \omega^2(2x - 1)^2} \varphi_\pi^A(x), \quad (72)$$

где  $f_\pi = 93$  МэВ — константа слабого распада пиона. Так как АР пиона отражает внутреннюю непертурбативную динамику пиона, предсказание величины  $J(\omega)$  является достаточно нетривиальной задачей, и его точное измерение дало бы достаточно важную информацию.

Важно заметить, что для рассматриваемого переходного процесса лидирующий асимптотический член пКХД-разложения (71) не подавлен сильной константой связи  $\alpha_s$ . Следовательно, предсказание пКХД (71) может быть разумным\* уже при наиболее высоких из достижимых в настоящее время импульсов  $Q^2 \sim 10 \text{ ГэВ}^2$ . При асимптотически высоких  $Q^2$  АР эволюционирует к  $\varphi_\pi^{A, \text{asympt}}(x) = 6x(1-x)$  и  $J_{\text{asympt}}(|\omega| = 1) = 2$ . При максимально высоких, доступных в настоящее время виртуальностях  $Q^2 \approx 10 \text{ ГэВ}^2$  это предсказание редуцируется за счет радиационных поправок наименьшего порядка по КХД [49] к  $J_{\text{asympt}}(10 \text{ ГэВ}^2) = 1,6$  и хорошо фитирует данные CLEO. Это указывает на то, что уже при достаточно высоких импульсах эта величина не слишком далека от своего асимптотического предела.

Однако, так как пКХД-эволюция АР достигает асимптотического режима очень медленно, точная форма АР при умеренно высоких  $Q^2$  может не совпадать с  $\varphi_\pi^{A, \text{asympt}}(x)$ . При более низких  $Q^2$  становятся важными степенные поправки к формфактору. Таким образом, изучение поведения переходного формфактора при экспериментально достижимых  $Q^2$  есть предмет непертурбативной динамики, где тот же тип лидирующего при высоких  $Q^2$  поведения, как и в (71), получается с помощью различных методов. Таким образом, теоретическое определение переходного формфактора является нетривиальным, и желательно получить  $T_{\pi^0}(q_1^2, q_2^2)$  путем прямых вычислений, без каких-либо *a priori* предположений о форме АР пиона.

Переходный формфактор в симметричной кинематике  $q_1^2 = q_2^2$  при высокой виртуальности рассматривался в [54], где было использовано локальное ОР и получен результат  $J_{\text{ORE}}(\omega = 0) = 4/3$  для асимптотического коэффициента, который находится в согласии с предсказанием (72) при  $\omega = 0$ . В локальном ОР можно представить  $J_{\text{ORE}}(\omega)$  как разложение по степеням  $\omega^2$  с коэффициентами разложения, задаваемыми моментами АР пиона:  $\int_0^1 dx (2x-1)^{2n} \varphi_\pi^A(x)$ . В [55] (см. также [56]) было показано, что локальное ОР хорошо сходится в кинематической области, когда виртуальности фотонов близки:  $|\omega| \lesssim 1/2$ . В этой кинематике результат для асимптотического коэффициента близок к 4/3. Однако в этих работах было указано, что для  $|\omega| \gtrsim 1/2$  при любом конечном  $Q^2$  возникают потенциально большие поправки к первому члену локального операторного разложения [55, 56], а также к предсказанию пКХД на световом конусе [38]. С увеличением  $|\omega|$  число членов ОР с коэффициентами, зависящими от вакуумных ожиданий более высокой размерности, быстро растет. В такой ситуации практически безнадежно найти более чем несколько членов локального разложения. По-

---

\*Эта ситуация не возникает в случае электромагнитных формфакторов и в процессе комптоновского рассеяния на большие углы (например, см. [53]), где мягкие вклады при умеренно высоких  $Q^2$  еще важны.

этому, чтобы контролировать ОР, необходимо иметь гораздо более детальную информацию о непертурбативном КХД-вакууме.

В работе [57] был достигнут некоторый прогресс с помощью использования более тонкого метода, основанного на ОР с нелокальными конденсатами [3], что эквивалентно частичному суммированию бесконечного ряда степенных поправок. С помощью КХД-правил сумм с нелокальными конденсатами было показано, что этот подход работает почти во всей кинематической области  $|\omega| \lesssim 1$  и что для больших значений параметра асимметрии  $|\omega| \gtrsim 0,8$  переходный формфактор пиона очень чувствителен к нелокальной структуре КХД-вакуума. Последний характеризуется средней виртуальностью кварков в вакууме [3]  $\lambda_q^2$ , и в инстантонной модели [7] может быть выражен через средний размер инстантона  $\rho_c$  как  $\lambda_q^2 \approx 2\rho_c^{-2}$  [14,24]. В [58] формфактор  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$  был непосредственно вычислен из КХД ПС для трехточечной функции, что привело к оценке  $J_{sr}(\omega = 1) \approx 1,6 \pm 0,3$ .

Ковариантная нелокальная низкоэнергетическая модель (см., например, [59, 60]), основанная на подходе Швингера — Дайсона (ШД) к динамике кварков и глюонов, имеет много притягательных особенностей, так как подход согласован с низкоэнергетическими теоремами. В частности, в этом подходе стандартный результат для абелевой аксиальной аномалии  $T_{\pi^0}(0, 0) \equiv g_{\pi^0\gamma\gamma} = (4\pi^2 f_\pi)^{-1}$  воспроизводится точно. В такой непертурбативной модели кварк-пионного взаимодействия имеют реалистическое описание как малая масса пиона, так и его составная структура. Более того, внутренняя нелокальная структура модели может быть мотивирована с помощью фундаментальных КХД-процессов инстантонного и глюонного обменов. В [60, 62] переходный формфактор  $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$  рассмотрен при низких  $Q^2$  и получено согласие с данными. Там же было показано, что результаты очень чувствительны к величине конституентной массы кварка.

*Пионный переходный формфактор в эффективной кварк-пионной модели.* Здесь в рамках ковариантной нелокальной низкоэнергетической модели кварк-пионного взаимодействия изучим поведение пионного переходного формфактора  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$  при высоких  $Q^2$  при произвольной асимметрии виртуальности фотонов [61]. Покажем, что асимптотический коэффициент  $J(\omega)$ , как это было продемонстрировано в КХД ПС [57, 58], зависит от кинематики переходного процесса и от внутренней пионной динамики, индуцированной нелокальной структурой КХД-вакуума. Динамическая зависимость  $J$  управляется параметром разреженности  $M_q/\lambda_q$ , где  $M_q$  является конституентной массой кварка. Если принять во внимание модельную зависимость асимптотического коэффициента  $J$ , то экспериментальные данные могут быть очень полезными для того, чтобы дискриминировать различные предположения, которые делаются о непертурбативной динамике КХД-вакуума. В нелокальной кварк-пионной модели выражение для асимптотического коэф-



фициента  $J$  будет найдено во всей кинематической области  $\omega$ . Более того, из этой зависимости реконструируется АР пиона через кварк-пионную вершинную функцию.

Для настоящих целей эффективная кварк-пионная динамика может быть представлена ковариантным нелокальным действием, заданным

$$S_{\text{int}} = - \int d^4x d^4y F [x + y/2, x - y/2; \Lambda^{-2}] \times \\ \times \bar{q}(x + y/2) [M_q + g_{\pi\bar{q}q} i \gamma_5 \tau^a \pi^a(x)] q(x - y/2), \quad (73)$$

где динамическая вершина  $F [x + y/2, x - y/2; \Lambda^{-2}]$  с размером нелокальности  $\Lambda^{-1}$  зависит от координат кварка и антикварка;  $q(x)$  и  $\pi(x)$  — соответственно, поля кварка и пиона. Нелокальная вершина характеризует координатную зависимость параметра порядка для спонтанного нарушения киральной симметрии и может быть выражена через нелокальный конденсат кварков.

В вычислениях этого раздела ограничимся приближением (см., например, [60, 62]):

$$F [x + y/2, x - y/2; \Lambda^{-2}] \rightarrow F(y^2, \Lambda^{-2}), \quad (74)$$

когда динамическая кварк-пионная вершина зависит только от относительной координаты кварка и антикварка в квадрате  $y^2$ , пренебрегая зависимостью вершины от угловой переменной  $(yx)$ . Фурье-образ вершины в пространстве Минковского определяется как  $\tilde{F}(k^2; \Lambda^2) = \int d^4x F(x^2; \Lambda^{-2}) \exp(-ikx)$  с нормировкой  $\tilde{F}(0; \Lambda^2) = 1$ ; примем, что вершинная функция быстро спадает в евклидовой области импульсов ( $k^2 = -k_E^2 \equiv -u$ ).

В дальнейшем аппроксимируем также собственную энергию кварка, зависящую от импульса, в пропагаторе кварка с помощью постоянной массы [60, 62]:  $S^{-1}(k) = \hat{k} - m_q$ . Действительно, импульсная зависимость вершины в числителях подынтегральных функций (которые определяют физические величины) важна потому, что она приводит к ультрафиолетовой регуляризации интегралов. Кроме того, благодаря импульсной зависимости вершин, мера в интегралах имеет вид произведения некоторой степени  $k^2$  и функции  $\tilde{Q}(k)$ . Эта мера имеет максимум при  $k^2$  порядка  $1/\rho_c^2$ , и при малых импульсах зависящая от импульса масса кварка может быть заменена в знаменателях эффективной постоянной массой  $m_q \approx M_q(k \sim \rho_c^{-1})$ . С формой импульсного распределения, показанного на рис. 2, этот массовый параметр приблизительно равен массе в нуле  $M_q(0)$ . Этот параметр  $m_q$  может быть отождествлен со стандартной конститuentной массой кварка. В соответствии с этой подстановкой переопределим функцию  $D(k)$ , заданную в (42), как  $D(k) = m_q^2 + k^2$ , и выберем массовый параметр

$$m_q = 230 \text{ МэВ}. \quad (75)$$

Такой выбор численно хорошо воспроизводит значения интегралов, определяющих вакуумные ожидания (9), (54). Приближение постоянной массы часто используется на практике с массами кварка в области  $250 \div 350$  МэВ (см., например, [62–64]).

Заметим, что используемые приближения не вполне согласованы. В частности, благодаря пренебрежению импульсной зависимостью массы кварка, некоторые низкоэнергетические теоремы нарушаются. Кроме того, как будет показано ниже, выбор модели для кварк-пионной вершины (74), зависящей только от относительной координаты, приводит к некоторому артефакту в  $x$ -зависимости АР. Однако эти недостатки выбранного приближения не ведут к существенным численным ошибкам, но вместе с тем существенно улучшают анализ структуры пиона, выполненный в более ранних работах.

В приближении постоянной массы кварка константа кварк-пионного взаимодействия задается с помощью условия связности [60, 62]:

$$g_{\pi qq}^{-2} = \frac{N_c}{8\pi^2} \int_0^\infty du u \tilde{F}^2(-u; \chi^{-2}) \frac{3 + 2u}{(1 + u)^3}; \quad (76)$$

и константа слабого распада пиона имеет вид

$$f_\pi = \frac{N_c g_{\pi \bar{q} q}}{4\pi^2} M_q \int_0^\infty du u \tilde{F}(-u; \chi^{-2}) \frac{1}{(1 + u)^2}. \quad (77)$$

Переменная интегрирования перемасштабирована квадратом массы кварка, и введен параметр  $\chi = M_q/\Lambda \approx \eta$ , характеризующий разреженность КХД-вакуума. В модели инстантонного вакуума размер нелокальности непертурбативного глюонного поля  $\rho_c \sim \Lambda^{-1}$  гораздо меньше, чем комптоновская длина кварка  $M_q^{-1}$ , и, таким образом,  $\chi$  — малый параметр [7].

Рассмотрим вклад в инвариантную амплитуду процесса  $\gamma^* \gamma^* \pi^0$ , который возникает из вычисления соответствующих треугольных диаграмм:

$$M(\gamma^*(q_1, e_1) \gamma^*(q_2, e_2) \rightarrow \pi^0(p)) = m_{\pi\gamma\gamma}(q_1, e_1; q_2, e_2) + m_{\pi\gamma\gamma}(q_2, e_2; q_1, e_1),$$

где  $e_i (i = 1, 2)$  — векторы поляризации фотонов и

$$m_{\pi\gamma\gamma}(q_1, e_1; q_2, e_2) = -\frac{N_c}{3} g_{\pi qq} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{F}(k^2; \Lambda^2) \times \\ \times \text{tr}\{i\gamma_5 S(k - p/2) \hat{e}_2 S[k - (q_1 - q_2)/2] \hat{e}_1 S(k + p/2)\}. \quad (78)$$

Если из этой амплитуды отфакторизовать тензор  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e_1^\mu e_2^\nu q_1^\rho q_2^\sigma$ , то формфактор может быть представлен как

$$T_{\pi^0}(q_1^2, q_2^2) = \frac{g_{\pi qq}}{2\pi^2} M_q I_{\pi\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2, p^2), \quad (79)$$

где интеграл Фейнмана  $I_{\pi\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2, p^2)$  задан выражением

$$I_{\pi\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2, p^2) = \int \frac{d^4 k}{i\pi^2} \times \\ \times \frac{\tilde{F}(k^2; \Lambda^2)}{[M_q^2 - (k+p/2)^2 - i\varepsilon][M_q^2 - (k-p/2)^2 - i\varepsilon][M_q^2 - (k - (q_1 - q_2)/2)^2 - i\varepsilon]}. \quad (80)$$

В приближении постоянной массы низкоэнергетическое соотношение, следующее из аксиальной аномалии Адлера — Белла — Джайва (АБД) ( $f_\pi g_{\pi\gamma\gamma} = 1/(4\pi^2)$ ), хорошо воспроизводится численно с относительной погрешностью меньше 10% [60, 62]. В формальном пределе очень разреженной вакуумной среды  $\chi \ll 1$  результаты полностью согласованы с АБД-аномалией и соотношением Голдбергера — Треймана.

Заметим, что интеграл (80) по структуре является подобным интегралу, возникающему в наинишем порядке пКХД, рассматривающем кварк-фотонное взаимодействие пертурбативно. В последнем случае его асимптотическое поведение обусловлено подпроцессом  $\gamma^*(q_1) + \gamma^*(q_2) \rightarrow \bar{q}(\bar{x}p) + q(xp)$  с  $x$  ( $\bar{x}$ ), равной доле пионного импульса  $p$ , переносимой кварком, рожденным в фотонной вершине  $q_1$  ( $q_2$ ). Соответствующая диаграмма подобна «*handbag*»-диаграмме для жесткого эксклюзивного процесса, причем основное отличие состоит в том, что следует использовать в качестве непертурбативной входной информации кварк-пионную вершину вместо АР пиона. Как мы увидим ниже, это подобие позволяет преобразовать форму модельной кварк-пионной вершины в специфичную форму АР пиона.

*Переходный формфактор пиона  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$  при умеренно высоких  $Q^2$ .* Оценим асимптотику переходного формфактора. С этой целью переписем выражение для интеграла (80) в форме, которая получается после перехода к пространству Евклида ( $k^2 \rightarrow -u$ ,  $-id^4 k \rightarrow \pi^2 u du$ ,  $\tilde{F}(k^2; \Lambda^2) \rightarrow \tilde{F}(-u; \Lambda^2)$ ), использования фейнмановской  $\alpha$ -параметризации для знаменателей и интегрирования по угловым переменным. Тогда соответствующий интеграл  $I_{\pi\gamma\gamma}$  принимает вид

$$I_{\pi\gamma\gamma}(q_1^2, q_2^2, p^2) = \int_0^\infty \frac{duu\tilde{F}(-u; \Lambda^2)}{M_q^2 + u - \frac{p^2}{4}} \times \\ \times \int_0^1 d\alpha \left[ \frac{1}{\sqrt{b^4 - a_+^4} (b^2 + \sqrt{b^4 - a_+^4})} + \frac{1}{\sqrt{b^4 - a_-^4} (b^2 + \sqrt{b^4 - a_-^4})} \right], \quad (81)$$

где

$$b^2 = M_q^2 + u + \frac{1}{2}\alpha Q^2 - \frac{1}{4}(1 - 2\alpha)p^2,$$

$$a_{\pm}^4 = 2u\alpha Q^2(\alpha \pm \omega(1 - \alpha)) - (1 - 2\alpha)up^2. \quad (82)$$

Выражение (81) может быть проанализировано в асимптотическом пределе большой полной виртуальности фотонов  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Более того, интеграл по  $\alpha$  может быть взят аналитически, что приводит в киральном пределе к асимптотическому выражению (71) с коэффициентом

$$J(\omega) \equiv J_{np}(\omega) = \frac{2N_{\pi}}{3\omega} \left\{ \int_0^{\infty} du \frac{\tilde{F}(-u; \chi^{-2})}{1+u} \ln \left[ \frac{1+u(1+\omega)}{1+u(1-\omega)} \right] \right\},$$

$$N_{\pi} = \left[ \int_0^{\infty} duu \frac{\tilde{F}(-u; \chi^{-2})}{(1+u)^2} \right]^{-1}. \quad (83)$$

Подынтегральная функция в числителе (83) отличается от подынтегральной функции, определяющей константу распада  $f_{\pi}$  (77). Из (83) ясно, что предсказание непerturbативного подхода об асимптотическом коэффициенте достаточно чувствительно к произведению  $\chi$ , величины конституентной массы  $M_q$  и размера нелокальности  $\Lambda^{-1}$  вершины  $F(x^2; \Lambda^{-2})$  и к относительному распределению полной виртуальности между фотонами  $\omega$ . В частности, для виртуального процесса  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \pi^0$  в симметричной кинематике  $q_1^2 = q_2^2 \rightarrow -\infty$  ( $\omega \rightarrow 0$ ) получим из (83)  $J(|\omega| = 0) = 4/3$ , что находится в согласии с предсказанием ОР [54].

Заметим, что используется приближение постоянной массы кварка для всех трех кварковых линий в диаграмме процесса. Однако асимптотический результат (83) не зависит от величины массы в пропагаторе кварка, по которому протекает жесткий импульс, как это и должно быть. Остальные две кварковые линии остаются мягкими в течение процесса. Таким образом, масса  $M_q$  может быть рассмотрена как заданная на некотором характерном мягком масштабе в зависящем от импульса случае  $M_q(\lambda_q^2)$ . Это означает, что динамическая и кинематическая зависимости  $J_{np}(\omega)$ , найденные в (83), останутся неизменными, даже если учтена импульсная зависимость массы кварка и рассмотрена эффективная кварк-фотонная вершина, которая сводится к затравочной  $\gamma^{\mu}$ , когда виртуальность одного из фотонов становится бесконечной.

Оба выражения для  $J$ , полученные в нелокальной кварк-пионной модели (83) и из операторного разложения на световом конусе (72), могут быть приведены к общей форме

$$J(\omega) = \frac{2}{3\omega} \int_0^1 d\xi R(\xi) \ln \left[ \frac{1+\xi\omega}{1-\xi\omega} \right] \quad (84)$$

с

$$R(\xi) = -\frac{d}{d\xi}\varphi_\pi^A\left(\frac{1+\xi}{2}\right) \text{ и } R_{np}(\xi) = N_\pi \tilde{F}\left(\frac{-\xi}{1-\xi}; \chi^{-2}\right) \frac{1}{1-\xi},$$

где  $0 \leq \xi \equiv (2x-1) \leq 1$ ,

(85)

и подобному выражению в интервале  $-1 \leq \xi \leq 0$ . Приравнявая оба вклада, мы найдем АР пиона через вершинную функцию на некотором низкоэнергетическом масштабе  $\mu_0^2 \sim \Lambda^2$  [61]:

$$\varphi_\pi^A(x) = N_\pi \int_{|2x-1|}^1 \frac{dy}{1-y} \tilde{F}\left(\frac{-y}{1-y}; \chi^{-2}\right). \quad (86)$$

Таким образом, показано, что формула (83), полученная в нелокальной кварк-пионной модели, эквивалентна стандартному результату ПКХД в низшем порядке по константе связи (72), с единственным отличием в том, что непертурбативная информация, аккумулированная в АР пиона  $\varphi_\pi^A(x)$ , выражена через кварк-пионную вершинную функцию  $\tilde{F}(-u; \chi^{-2})$ .

Следует заметить, что явная форма асимптотического коэффициента (83) и соотношение между АР и вершинной функцией зависят от конкретной модели кварк-пионного взаимодействия (73). В частности, выражение (86) получается в приближении (74), когда кварк-пионная вершина зависит только от относительной координаты. Это приближение приводит к искусственной зависимости АР от модуля  $|x|$  и ведет к негладкому поведению распределения при  $x = 1/2$  (см. рис. 5). Однако эти особенности исчезают, если угловая зависимость вершины, мотивированная, например, инстантонной моделью, восстановлена (см. предыдущий раздел).

Оценим реалистическое значение для параметра разреженности  $\chi$  и проверим, насколько рассматриваемая модель согласована с данными CLEO. Вершинная функция  $\tilde{F}(k^2; \Lambda^2)$  феноменологически описывает нелокальную структуру непертурбативного КХД-вакуума и может быть смоделирована в модели инстантонного вакуума [24]. Для этой цели вершинная функция может быть хорошо аппроксимирована с помощью гауссовской формы  $\tilde{F}(k^2; \Lambda^2) = \exp(k^2/\Lambda^2)$ . Обратный размер нелокальности вершины  $\Lambda$  естественным образом связан со средней виртуальностью кварков, которые распространяются в вакууме [3, 14, 24]:

$$\lambda_q^2 \equiv \frac{\langle : \bar{q} D^2 q : \rangle}{\langle : \bar{q} q : \rangle} = -\frac{N_c M_q^5}{4\pi^2 \langle \bar{q} q \rangle} \int_0^\infty du u^2 \frac{\tilde{F}(-u; \chi^{-2})}{u+1}, \quad (87)$$

где  $D_\mu$  — ковариантная производная по отношению к сильному калибровочному полю, а конденсат кварков выражается как

$$\langle \bar{q} q \rangle = -\frac{N_c M_q^3}{4\pi^2} \int_0^\infty du u \frac{\tilde{F}(-u; \chi^{-2})}{u+1}. \quad (88)$$

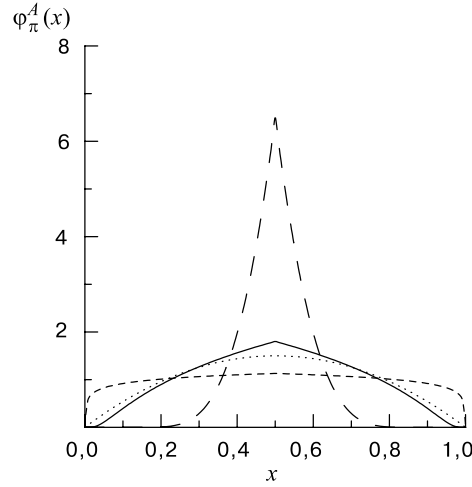


Рис. 5. Амплитуда распределения пиона как функция переменной  $x$  (86) при различных значениях параметра разреженности:  $\chi^2 = 0,15$  (сплошная линия),  $\chi^2 = 0,0001$  (короткие штрихи),  $\chi^2 = 4$  (длинные штрихи). Асимптотическая амплитуда распределения показана точечной линией

Значение  $\lambda_q^2$  известно из анализа КХД ПС,  $\lambda_q^2 \approx (0,5 \pm 0,1) \text{ ГэВ}^2$  [16]. Для гауссовской вершины имеем  $\Lambda^2 \approx \lambda_q^2$ , если  $\Lambda^2/M_q^2 > 1$ . Масса кварка  $M_q$  задается соотношением Голдбергера — Треймана  $M_q = g_{\pi qq} f_\pi$  с кварк-пионной константой, зафиксированной с помощью условия связности (76), и ее величина согласована с  $M_q = 250 \sim 300 \text{ МэВ}$ . Меняя модельные параметры в интервале  $\Lambda^2 = (0,55 \pm 0,05) \text{ ГэВ}^2$  и  $M_q = (275 \pm 25) \text{ МэВ}$ , имеем  $\lambda_q^2 = (0,65 \pm 0,05) \text{ ГэВ}^2$ ,  $\langle \bar{q}q \rangle = -(205 \pm 15) \text{ МэВ}^3$  и  $J_{np}(\omega = 1) = 1,80 \pm 0,05$ . Если учесть ошибку в экспериментальном фите, то эта оценка находится в согласии с данными CLEO. Она также согласуется с новой оценкой  $J_{sr}(\omega = 1) \approx 1,83 \pm 0,05$ , сделанной в [68] с помощью КХД ПС с нелокальными конденсатами.

Показательно рассмотреть некоторые экстремальные случаи, в зависимости от конкретных физических предположений. Если бы КХД-вакуум был очень разреженным,  $M_q \ll \Lambda$ , то вершинная функция  $\tilde{F}(-u, \chi^{-2})$  была бы очень медленно спадающей функцией. Это соответствует локальной кварк-пионной вершине. В этом случае коэффициент  $J_{\text{dilute}}^{np}(|\omega| = 1)$  стремится логарифмически к бесконечности, и АР также становится полой,  $\varphi_\pi^A(x) \approx 1$ . Последнее может быть замечено из (85), где производная от АР по  $x$  является очень малой, так как в этом пределе нормировочный фактор  $N_\pi$  становится малым. Из (86) ясно, что область интегрирования эффективно ограничена сверху пределом  $y_1 = \chi^{-2}/(1 + \chi^{-2})$ , а снизу  $y_0 = |1 - 2x|$ . Эти пределы хорошо разделены в области  $x_0 \lesssim x \lesssim 1 - x_0$ , где  $x_0 \approx 1/2(1 + \chi^{-2})$ . Это озна-

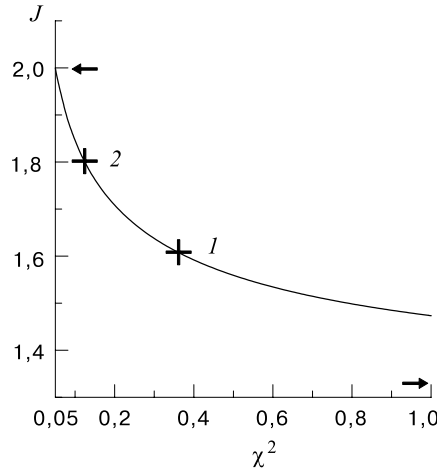


Рис. 6. Асимптотический коэффициент  $J_{np}$  как функция квадрата параметра разреженности  $\chi^2$  для процесса  $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$  ( $\omega = 1$ ). Указаны значения  $J_{np}$ , полученные из фита данных CLEO (пКХД [38]), и предсказания, полученные из непертурбативной ковариантной модели ( $\chi^2 = 0,15$ ); стрелка справа указывает на предельное значение  $J = 4/3$  при  $\chi^2 \rightarrow \infty$ , стрелка слева — пКХД [38]

чает что АР подавлена на краю кинематического интервала  $1 - |1 - 2x| < 2x_0$ , где кварки являются мягкими. В противоположном экстремальном случае очень плотной среды (предел тяжелого кварка  $M_q \gg \Lambda$ ),  $J_{\text{dense}}^{np} (|\omega| = 1) = 4/3$ , как это и предсказывается с помощью первого члена в операторном разложении [55]. В этом случае предел  $y_1$  мал, и подынтегральная функция в (86) сконцентрирована в окрестности  $x = 1/2$ . Таким образом, как и ожидается, АР становится  $\varphi_\pi^A(x) \propto \delta(x - 1/2)$ . Как показано выше, реалистическая ситуация находится между этими двумя экстремалиями.

Указанные различные ситуации проиллюстрированы на рис. 5 для АР пиона (86). Как ясно из рисунка, модельная АР пиона при реалистическом выборе параметров  $\chi \approx 0,4$  близка к асимптотической АР. Как отмечено во введении, при фактически достижимых экспериментальных данных непертурбативная динамика может доминировать. Поэтому данные оказываются достаточно ограничительными и однозначно указывают, что в КХД-вакууме реализуется режим разреженной среды. На рис. 6 для процесса  $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$  ( $\omega = 1$ ) изображен асимптотический коэффициент  $J_{np}(\omega = 1)$  как функция квадрата динамического параметра разреженности  $\chi^2$ . На этом рисунке указаны значения  $J_{np}(\omega = 1)$ , полученные из данных CLEO, и модельные предсказания. На рис. 7 асимптотический коэффициент  $J_{np}(\omega)$  изображен как функция кинематического параметра асимметрии  $\omega$  при  $\chi^2 = 0,15$  и  $\chi^2 = 0,35$ . Первое значение  $\chi$  соответствует модельной оценке, второе — центральной точке фита данных CLEO.

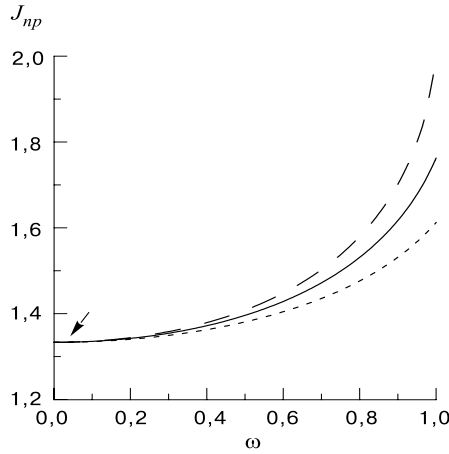


Рис. 7. Асимптотический коэффициент  $J_{np}$  как функция кинематического параметра  $\omega$ . Сплошная кривая соответствует  $\chi^2 = 0,15$  с  $J_{np}(\omega = 1) = 1,8$ ; пунктирная —  $\chi^2 = 0,35$  с  $J_{np}(\omega = 1) = 1,6$ ; штриховая — асимптотическое предсказание (72) с  $J_{\text{asympt}}(\omega = 1) = 2$ . Стрелкой указано  $J_{np}$  для симметричной кинематики  $q_1^2 = q_2^2$

Для того чтобы получить дальнейшую интерпретацию (86), выразим AP через интеграл по поперечному импульсу от пионной волновой функции на световом конусе [38]:

$$\varphi_{\pi}^A(x) = \int_0^{\infty} d\vec{k}_{\perp}^2 \Psi_{\pi}^A(x, \vec{k}_{\perp}^2). \quad (89)$$

Переписывая правую часть (86) через исходную переменную  $u = y/(1-y)$  и затем подставляя  $u$  через комбинацию  $\vec{k}_{\perp}^2/(x\bar{x})$ , которая является инвариантной массой  $q\bar{q}$ -пары в квадрате, отождествим с пионной волновой функцией выражение

$$\Psi_{\pi}^A(x, \vec{k}_{\perp}^2) = \frac{N_{\pi} \tilde{F}(-\vec{k}_{\perp}^2/(x\bar{x}); \Lambda^2)}{x\bar{x}M_q^2 + \vec{k}_{\perp}^2} \theta\left(\vec{k}_{\perp}^2 \geq \frac{|1-2x|x\bar{x}|M_q^2}{1-|1-2x|}\right). \quad (90)$$

Вершинная функция  $\tilde{F}$  в нашей модели пионной волновой функции играет такую же роль, как и  $\theta$ -функция в волновой функции, построенной по модели «локальной дуальности» [50],  $\Psi_{\pi}^{A,LD}(x, \vec{k}_{\perp}^2) \sim \theta(\vec{k}_{\perp}^2 \leq x\bar{x}s_0)$ , где  $s_0 = 8\pi^2 f_{\pi}^2$  — интервал дуальности. Заметим, что численно  $s_0 \approx 0,67 \text{ ГэВ}^2$  близко к значению параметра нелокальности  $\lambda_q^2$ . Как и в случае выражения (86), пионная волновая функция на световом конусе (89) проявляет неаналитическую зависимость от  $x$ , которая исчезает при более реалистическом выборе кварк-пионной вершины. Как было указано ранее, внесение непер-



турбативных эффектов приводит к внутренней поперечной структуре адронной волновой функции [65,66], и так же, как и судаковский пертурбативный фактор [67], модифицирует картину жесткого рассеяния в эксклюзивных реакциях и существенно улучшает ее. В результате область справедливости пертурбативных КХД-вычислений адронных формфакторов распространяется из кинематической области асимптотических значений  $Q$  в область, начинающуюся с  $Q \sim O(1 \text{ ГэВ})$ .

*Дискуссия по пионному переходному формфактору  $\pi\gamma^*\gamma^*$ .* Недавно в [69] было заявлено, что в подходе Швингера — Дайсона предсказывается одинаковый асимптотический коэффициент  $J(\omega) = 4/3$  для *всех* нелокальных кварк-фотонных вершин  $\Gamma^\mu[q(k)q(k')\gamma(q)]$ , которые переходят в затравочные  $\gamma^\mu$  по мере того, как виртуальность одного из фотонов ( $k^2$  или  $k'^2$ ) становится бесконечной (как для вершины в форме Куртиса — Пенningтона [70]). В [69] пропагатор кварка, который зависит от виртуальности фотона, был аппроксимирован при большом  $Q^2$  асимптотической формой  $[M_q^2 - (k - (q_1 - q_2)/2)^2]^{-1} \rightarrow 2/Q^2$ . После этой замены интеграл (80) приобретает ту же форму, что и интеграл в (77), определяющий  $f_\pi$ . Принимая во внимание коэффициенты перед интегралами в уравнениях (77) и (76), немедленно приходим к заключению авторов [69] (см. также [71]) об асимптотическом коэффициенте ( $J = 4/3$ ). Однако, как показано выше, такая быстрая асимптотическая оценка является достаточно наивной, не ведет к точному результату и оправдана только в формальном пределе  $M_q \gg \Lambda$ .

Наш анализ основан на рассмотрении треугольной диаграммы, в которой пропагатор кварка и кварк-пионная вершина определены непертурбативно. В этом отношении наш подход близок к более ранней работе [72]. Однако в [72] при вычислении треугольной диаграммы были использованы приближения, которые упростили динамику процесса. Оказывается, что эти приближения оправданы в кинематической области больших  $|\omega|$ . В результате полученное в [72] выражение для асимптотического коэффициента не зависит от внутренней нелокальной структуры пиона, что противоречит результатам ПС КХД и нашим результатам.

В заключение этого раздела в ковариантной нелокальной модели, описывающей кварк-пионную динамику, получен  $\pi\gamma^*\gamma^*$ - переходный формфактор при достаточно больших виртуальностях, где пертурбативная КХД-эволюция еще не достигала асимптотического режима. Из модельных вычислений можно найти абсолютную нормировку асимптотического  $Q^{-2}$ -члена. Асимптотический нормировочный коэффициент  $J(\omega)$ , данный в (83), зависит от отношения конститuentной кварковой массы на некотором мягком масштабе к характерному размеру КХД-вакуумных флуктуаций, а также от кинематики процесса. Этот результат не подтверждает положения об универсальности асимптотического коэффициента, сделанного в [69, 71, 72]. Если рассмотреть зависимость асимптотического коэффициента от внутренней динамики,

то данные CLEO свидетельствуют о малом значении параметра разреженности, что подтверждает гипотезу о малой плотности инстантонной жидкости в вакууме [7]. Из сравнения кинематической зависимости асимптотического коэффициента переходного формфактора пиона, данной в пКХД и непертурбативной модели, получено новое соотношение (86) между пионной амплитудой распределения и динамической кварк-пионной вершинной функцией. В частном случае симметричной кинематики наш результат согласуется с тем, который получен с помощью ОР [54]. Настоящие результаты также находятся в согласии с заключениями, сделанными в [57, 58, 68] в ПС КХД.

**Партоновые распределения валентных кварков в пионе.** Адронные структурные функции играют важную роль в КХД при описании инклюзивных процессов. Они выражаются через партоновые распределения кварков и глюонов по доле  $x$  импульса  $p$  начального адрона, переносимой активным партоном. Хотя эволюция партоновых распределений при достаточно большой виртуальности  $Q^2$  контролируется зависимостью перенормировки масштаба операторов кварков и глюонов твиста-2 по КХД-теории возмущений, вывод из первых принципов самих партоновых распределений при некотором начальном  $Q^2$  отсутствует. Следовательно, центральным пунктом, неизвестным в КХД, являются партоновые распределения при относительно низких виртуальностях, которые должны определяться по непертурбативной схеме.

Недавно возник некоторый прогресс в вычислении моментов партоновых распределений для пиона и  $\rho$ -мезона [73] в рКХД, где используются фермионы Вильсона в приближении заморозки, когда пренебрегают внутренними кварковыми петлями. Эти рКХД-предсказания для моментов пионной функции распределения подтверждают результаты предыдущего анализа [74], а также находятся в качественном согласии с распределениями, извлеченными феноменологически [75, 76] из эксперимента [77]. Однако вычисленные моменты имеют относительно низкую точность, и, кроме того, доступны для вычислений только нескольких первых моментов, хотя для реконструкции  $x$ -зависимых распределений нужно, в принципе, знать все моменты. Более того, вычисления партоновых распределений в пионе с помощью КХД ПС достаточно успешны [78] лишь в ограниченной области скейлинговой переменной  $x$ . Функция распределения кварков в пионе в наинишем фоковском состоянии кварка-антикварка недавно [79] получена в подходе жесткого рассеяния, когда включены эффекты поперечного импульса и судаковских поправок. Такая функция насыщает феноменологическое кварковое распределение при больших  $x$ .

Кварковая функция распределения в пионе была рассмотрена в [80] в рамках НИЛ-модели [17]. Эти и подобные исследования основаны на предположении, что вычисление матричных элементов твиста-2 в эффективных подходах, основанных на КХД, дает распределения на низком энергетическом масштабе  $\mu_0 \lesssim 1$  ГэВ, где использование такой эффективной теории

имеет смысл. Полученные распределения затем экстраполируются к более высоким экспериментально достижимым масштабам импульсов с помощью пертурбативной КХД так, что может быть проведено сравнение с экспериментальными данными. Однако проблема НИЛ-модели состоит в том, что она неперенормируема, и, таким образом, чтобы избежать этого дефекта, вводятся различные *ad hoc* предположения об импульсном обрезании.

Первая попытка вычисления пионной структурной функции в инстантонной модели была сделана в [81]. Сравнительно недавно важный прогресс был достигнут в [63, 82] при вычислении кварковых распределений в нуклоне в инстантонном подходе. В настоящем разделе, основываясь на кварк-пионной динамике в модели инстантонной жидкости, мы вычислим распределение валентных кварков в пионе в лидирующем твисте в низкой точке нормировки порядка обратного среднего размера инстантона  $\rho_c$ . Найдем кварковое распределение в пионе и все его моменты для общей формы эффективной кварк-пионной вершинной функции. Справедливость партонных правил сумм для изоспина и полного импульса обеспечивается с помощью условия связности пиона [28] и калибровочной инвариантностью подхода. Так как эффективная инстантонная модель справедлива для значений относительных импульсов кварка до  $p \sim \rho_c^{-1} \approx 0,5 - 1$  ГэВ, партонные распределения, вычисленные здесь, определены при этой (низкой) точке нормировки  $\mu_0 \sim \rho_c^{-1}$ . Полученные результаты затем КХД проэволюционированы к более высоким импульсам передачи, и найдено разумное согласие с функциями распределения пиона, извлеченными из феноменологического анализа экспериментальных данных.

*Моменты функции распределения кварков в пионе в ковариантной нелокальной модели.* Стандартный КХД-анализ основан на ОР, которое связывает моменты партонных распределений при данном масштабе с адронными матричными элементами локальных операторов твиста-2. Этот формализм применяется для того, чтобы разделить жесткую и мягкую части амплитуды рассеяния вперед. В ОР жесткая часть вычисляется по теории возмущений в форме коэффициентов Вильсона. Мягкая часть представляется набором матричных элементов от локальных операторов, классифицированных по твисту. Эти матричные элементы аккумулируют информацию о непертурбативной структуре адронного состояния.

Калибровочно-инвариантный несинглетный локальный оператор твиста-2 с ароматом кварка  $j$  определен следующим образом:

$$O_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N}^j = i^N \bar{q}_j \{ \gamma_{\mu_1} D_{\mu_2} \dots D_{\mu_N} \} s q_j, \quad (91)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \tau_a$  — ковариантная производная \* и символ  $\{\dots\}_S$  означает бесследовую симметричную часть тензора. Матричные элементы  $A_N^j$  локальных операторов  $O_N^j$  в обкладках пионного состояния  $|\pi(p)\rangle$  с импульсом  $p$

$$A_N^j(\mu^2) = \frac{i^N}{2} \langle \pi(p) | \bar{q}_j \hat{n}(n_\nu D^\nu)^{N-1} q_j | \pi(p) \rangle |_\mu, \quad (92)$$

где  $\mu$  — точка нормировки,  $n_\nu$  — светоподобный вектор с  $n^2 = 0$  и  $(np) = 1$ , введенный для отбора симметричной бесследовой части оператора  $O_N^j$  (91). Запишем распределение кварков для  $j$ -го аромата через моменты

$$A_N^j(\mu^2) = \int_0^1 dx x^{N-1} q_j(x, \mu^2). \quad (93)$$

Зависимость момента  $A_N^j$  от точки нормировки  $\mu^2$  известна точно из решения уравнения эволюции в пертурбативной КХД, в то время как непертурбативная динамическая модель задает начальные данные для этой эволюции. Вычислим начальные значения моментов на масштабе  $\mu_0^2 \propto 1/\rho_c^2$  в инстантонной модели.

Вклад наименьшего фоковского кварк-антикваркового валентного состояния в  $N$ -й момент  $A_N^{q\bar{q}}(\mu_0^2)$  в инстантонную модель задается выражением (см. графическое представление на рис. 8):

$$\begin{aligned} A_N^{q\bar{q}}(\mu_0^2) p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots p_{\mu_N} &= 2N_c g_{\pi q\bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \\ &\times \left\{ \tilde{F}^2(k, k+p; \mu_0^2) \text{tr}[\gamma_5 S(k+p) \{ \gamma_{\mu_1}(k+p)_{\mu_2} \dots (k+p)_{\mu_N} \}_S S(k+p) \gamma_5 S(k)] - \right. \\ &\left. - 2 \frac{\partial \tilde{F}^2(k, k+p; \mu_0^2)}{\partial (k+p)^2} \text{tr}[\gamma_5 S(k+p) \{ (k+p)_{\mu_1} (k+p)_{\mu_2} \dots (k+p)_{\mu_N} \}_S \gamma_5 S(k)] \right\}. \end{aligned} \quad (94)$$

Вообще говоря, моменты определены в пространстве Минковского и могут быть разложены по вектору  $p_\mu$  и тензору  $g_{\mu\nu}$ . Члены, пропорциональные  $g_{\mu\nu}$ , приводят к вкладам более высокого твиста, которые подавлены лишней степенью  $1/Q^2$  и должны быть отброшены. Для того чтобы выделить вклад лидирующего твиста, нужно свернуть матричные элементы со светоподобным вектором  $n_\mu$ . Остающиеся петлевые интегралы нужно аналитически продолжить в пространство Евклида [11], где вершины, индуцированные инстантонами, хорошо определены.

---

\*Как и в работе [63], мы пренебрегаем глюонными операторами в ковариантных производных, что вызвано малостью параметра разреженности  $\eta$ .

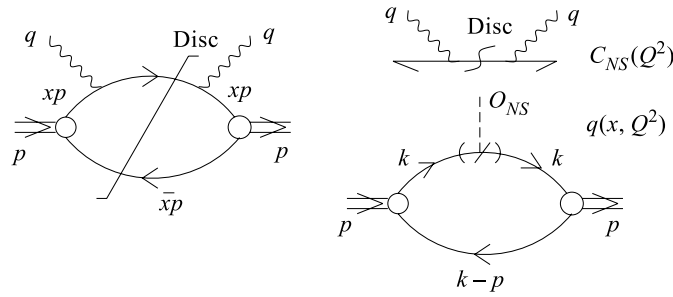


Рис. 8. Графическое представление операторного разложения. Левая часть диаграммы представляет скачок (Disc) амплитуды рассеяния вперед. В рамках операторного разложения скачок представляется как конволюция коэффициентной функции Вильсона  $C_{NS}(Q^2)$  жесткого подпроцесса (верхний блок правой диаграммы) и мягкой партонной функции распределения  $q(x, Q^2)$  (нижний блок). Конституентный кварк и пион обозначены непрерывной и двойной линиями соответственно. Волнистые линии обозначают фотоны.  $O_{NS}$  — локальный оператор, штрих на кварковой линии соответствует  $\delta(x - (kn))$

Чтобы получить уравнение (94), необходимо рассмотреть амплитуду комптоновского рассеяния в глубоконеупругой кинематике в лидирующем порядке пертурбативной КХД и взять мнимую часть от нее. В комптоновском процессе налетающий и рассеянный виртуальные фотоны имеют импульсы  $q$ ,  $q^2 \equiv -Q^2$ , а начальный и конечный пионы имеют импульсы  $p$ ,  $p^2 \approx 0$ . Предел Бьеркена соответствует большим  $Q^2$  при фиксированном  $x = Q^2/2(pq)$ . Калибровочно-инвариантный набор диаграмм, индуцированный с помощью нелокального действия (43) и (45), включает, в дополнение к однопетлевой «*box*»-диаграмме, подпроцессы  $\pi\gamma \rightarrow \pi \rightarrow \pi\gamma$ ,  $\pi\gamma\gamma \rightarrow \pi$ . Можно показать (см. [83]), что только второй тип процесса выживает в пределе Бьеркена для соответствующих амплитуд и приводит к поправке (член с производной от вершины) в (94).

Член с производной, который возникает из  $P$ exp-фактора, позволяет удовлетворить партонные правила сумм, соответствующие сохранению изоспина и импульса. Действительно, из (94) для первых двух моментов получим

$$A_1^{q\bar{q}}(\mu_0^2) \equiv \int_0^1 dx q_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2) = g_{\pi q\bar{q}}^2 \left. \frac{\partial \Pi_\pi(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0},$$

$$A_2^{q\bar{q}}(\mu_0^2) \equiv \int_0^1 dx x q_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2) = \frac{g_{\pi q\bar{q}}^2}{2} \left. \frac{\partial \Pi_\pi(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}. \quad (95)$$

Из этого выражения с учетом условия связности (47) устанавливается справедливость (нормировочного) изоспинового и импульсного правил сумм для

валентных кварковых функций распределения

$$A_1^{q\bar{q}}(\mu_0^2) = 1 \quad \text{и} \quad A_2^{q\bar{q}}(\mu_0^2) + \bar{A}_2^{q\bar{q}}(\mu_0^2) = 1, \quad (96)$$

где  $\bar{A}_2$  — вклад валентных антикварков в пионный импульс. Тот факт, что на низком масштабе импульса  $\mu_0$  весь импульс в пионе переносится валентными кварками, является следствием того, что включены только валентные кварк-антикварковые промежуточные состояния, при этом пренебрегается всеми внутренними кварк-глюонными морскими состояниями (так называемое приближение заморозки).

Таким образом, в приближении заморозки динамическая информация, содержащаяся в первых двух моментах, полностью задается симметриями и кинематикой и, как результат, является модельно-независимой. Нетривиальная динамика содержится в моментах с  $N > 2$ . Общая структура моментов партонных распределений может быть представлена в форме

$$A_N^{SF}(\mu_0^2) = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{i=0}^{[\frac{N-1}{2}]} \frac{1}{2i+1} \binom{N-1}{2i} J_i^{SF}(\mu_0^2), \quad N = 1, 2, \dots \quad (97)$$

с коэффициентами

$$J_i^{SF}(\mu_0^2) = \frac{1}{I_{g\pi}(0)} \left\{ \int_0^\infty \frac{dk k^{4i+3} \tilde{Q}(k)^2}{(k^2 + m_q^2)^{2i+3}} [2k^2 + (2i+3)m_q^2] + \dots \right\}, \quad (98)$$

где члены с производными от вершины, подобные тем, которые появляются в (41) для  $I_{g\pi}(0)$ , обозначены точками. В (97) квадратные скобки [...] обозначают целую часть числа, а  $\binom{a}{b}$  являются биномиальными коэффициентами.

Как и в предыдущем разделе, показательно рассмотрим два экстремальных случая, зависящих от физических предположений. Если бы КХД-вакуум был очень плотной средой,  $\eta \gg 1$ , то  $J_i^{SF} = 0$  для всех  $i$ , кроме  $i = 0$ . Из этого следует, что моменты  $A_N = 1/2^{(N-1)}$  для всех  $n$ , а распределение кварков имеет форму дельта-функции:  $q(x) = \delta(x - 1/2)$ . Этот экстремальный случай соответствует пределу тяжелого кварка, а коэффициенты  $J_i^{SF}$  представляют последовательные поправки по обратным степеням массы тяжелого кварка:  $\sim (\langle k^2 \rangle / m_q^2)^i$ . В противоположном экстремальном случае очень разреженного вакуума  $\eta \ll 1$  получим  $J_i^{SF} = 1$  для всех  $i$  и  $A_N = 1/N$  для моментов. Этот экстремальный случай соответствует независимой от импульса вершине и приводит к плоскому распределению кварков  $q(x) = 1$ . Более того, первый член в (98) доминирует по отношению к членам, указанным с помощью точек, так как последние являются малыми порядка

$O(\rho_c m_q)$ . Реалистическая ситуация оказывается где-то между этими двумя экстремалами. Заметим, что роль массы пиона пренебрежимо мала, но соотношение эффективной массы кварка и наклона нелокальности в  $\tilde{Q}(k)$  имеет важный эффект.

*Функция распределения кварков в пионе в нелокальной ковариантной модели и ее КХД-эволюция.* Обратимся теперь к распределению кварков. Это распределение для пиона с 4-импульсом  $p$  задается с помощью выражения (см. графическое представление на рис. 8):

$$q_{q\bar{q}}(x; \mu_0^2) p^\mu = 2N_c g_{\pi q\bar{q}}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta[x - 1 - (k \cdot n)] \times \\ \times \text{tr} \left\{ \gamma_5 S(k+p) \left[ \tilde{F}^2(k, k+p; \mu_0^2) \gamma_\mu S(k+p) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left( \frac{\partial \tilde{F}^2(k, k+p; \mu_0^2)}{\partial (k+p)^2} \right) (k+p)_\mu \right] \gamma_5 S(k) \right\}, \quad (99)$$

где  $q_{q\bar{q}}(x) = \bar{u}(x)_{\text{val}} = d(x)_{\text{val}}$  для  $\pi^-$ . Индекс  $q\bar{q}$  означает, что учтена только наименьшая кварк-антикварковая компонента пионной волновой функции. Выражение (99) для распределения кварков  $\delta[x - 1 - (k \cdot n)]$  определено так же, как в [84, 85]. Функция, появляющаяся в (99), представляет собой эффективную вершину, связанную с составными операторами  $O_N^j$  (91). Моменты функции распределения (94) воспроизводятся с помощью преобразования Меллина от (99). Светоподобный вектор  $n$  выделяет в (94) и (99) симметричные бесследовые части тензоров. Легко показать, что первые моменты  $q_{q\bar{q}}(x)$  воспроизводят партонные правила сумм (95).

Для того чтобы вычислить интеграл по 4-импульсу в (99), используем  $\alpha$ -представление для пропагаторов\*

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha \exp[-\alpha(k^2 + m^2)], \quad (100)$$

а для вершинной  $\delta$ -функции ее фурье-представление

$$\delta[x - (k \cdot n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\alpha \exp[i\alpha(x - k \cdot n)]. \quad (101)$$

\*Детали см. в работе [85].

Тогда прямое вычисление из (99) приводит к результату для распределения кварков, которое в безмассовом случае ( $m_\pi^2 = -p^2 = 0$ ) сводится к

$$q_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2) = \frac{N_c g_{\pi q\bar{q}}^2}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\nu_1 d\nu_2 F(\nu_1) F(\nu_2) \exp\left(\frac{m_q^2}{\nu_1} + \frac{m_q^2}{\nu_2}\right) \times \\ \times \left\{ \left[ E_1\left(\frac{m_q^2}{x\nu_1}\right) + \bar{x} \exp\left(-\frac{m_q^2}{x\nu_1}\right) \right] \theta(\bar{x}\nu_2 \geq x\nu_1) + (x \leftrightarrow \bar{x}) \right\}. \quad (102)$$

В этом уравнении  $\bar{x} = 1 - x$ ,  $E_1(z)$  — интегральная экспонента, а  $F(\nu)$  — корреляционная функция, связанная с вершинной функцией  $\tilde{Q}(k)$  с помощью преобразования Лапласа. Вершина  $\tilde{Q}(p)$  в существенной области импульсов  $p$  ( $0 \leq p \leq 4/\rho_c$ ) может быть аппроксимирована функцией

$$\tilde{Q}(p) = 4,5 \exp(-1, 9\rho_c p) - 3,5 \exp(-3, 6\rho_c p), \quad (103)$$

которая после применения преобразования Лапласа принимает вид

$$F(\nu) = \frac{\rho_c}{\sqrt{\pi}\sqrt{\nu}} [8,55 \exp(-0, 9\rho_c^2 \nu) - 12,6 \exp(-3, 24\rho_c^2 \nu)]. \quad (104)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (97) для моментов и (102) для распределения валентных кварков в пионе являются универсальными и справедливыми для любой формы функций  $\tilde{Q}(k)$  и  $F(\nu)$ , которые, в свою очередь, определяются с помощью конкретной модели кварк-пионной динамики.

Распределение кварков  $q_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2)$  и импульсное распределение  $xq_{q\bar{q}}(x, \mu_0^2)$  показаны на рис. 9. Следует заметить, что форма распределения является достаточно стабильной по отношению к вариациям параметров инстантонной модели, если они фиксированы так, чтобы воспроизвести низкоэнергетические свойства пиона. Кроме того, необходимо упомянуть о том, что эффекты, которыми мы пренебрегли (импульсная зависимость массы кварка в знаменателях и глюонное поле в ковариантных производных), имеют порядок малости  $O(\eta)$  и не меняют качественно результатов. Основной эффект, рассмотренный нами при вычислении распределения кварков в пионе, связан с нелокальностью кварк-пионной вершины, индуцированной инстантонным взаимодействием. Роль этого эффекта состоит в том, что результат партонной модели в лидирующем твисте  $q(x) = 1$  модифицируется, приводя к гладкому распределению с нулями на краях кинематической области. Напомним, что мы вычисляем только распределение лидирующего твиста в низкой точке нормировки  $\mu_0 \sim \rho_c^{-1}$ , а не полные структурные функции, которые содержат также поправки более высоких твистов. Последние могут быть большими при



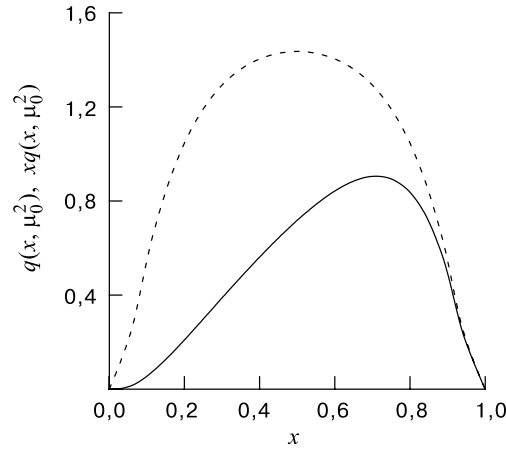


Рис. 9. Функция распределения валентных кварков  $q(x; \mu_0^2)$  (пунктирная линия) и импульсное распределение кварков  $xq(x; \mu_0^2)$  (сплошная линия) в пионе как функция доли продольного импульса  $x$  в низкой точке нормировки  $\mu_0^2 = 0,3 \text{ ГэВ}^2$  при  $\rho_c m_q = 0,39$

низких  $q^2$ , но быстро (степенным образом) вымирают с ростом  $q^2$ . Следует также заметить, что наши результаты сильно отличаются от результатов, полученных ранее в НИЛ-модели [80], где внутренняя динамика пиона сильно упрощена, и в результате найденные распределения согласованы со строгим киральным пределом  $q(x, \mu_0^2) \approx 1$ .

Вычисленные распределения используются как начальные условия для пертурбативной эволюции к более высоким значениям  $Q^2$ , где, как ожидается, степенные поправки подавлены, и можно провести сравнение с доступными экспериментальными данными. Фактически мы сравниваем наши теоретические предсказания с феноменологическим анализом, выполненным в [75], данных экспериментов по процессам Дрелла — Яна и по быстрым фотонам, выполненных группами NA10 (CERN) и E615 (FNAL) [77]. Следует также отметить некоторые пределы применимости указанного феноменологического анализа данных. Так, реальные данные охватывают только кинематическую область по  $x \geq 0,2$ , и, кроме того, в анализе была использована экстраполяция протонных структурных функций при  $x \geq 0,75$  в качестве входной информации. Далее, в таком феноменологическом анализе данных не принимаются во внимание неопределенности, индуцированные теоретическими предположениями, лежащими в основе анализа (например,  $K$ -фактор).

Форма проэволюционированного распределения  $q_{q\bar{q}}(x, Q_0^2)$  на масштабе импульса  $Q_0^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$  реконструируется по его моментам, проэволюционированным к этому масштабу в лидирующем порядке (ЛП) и следующем за

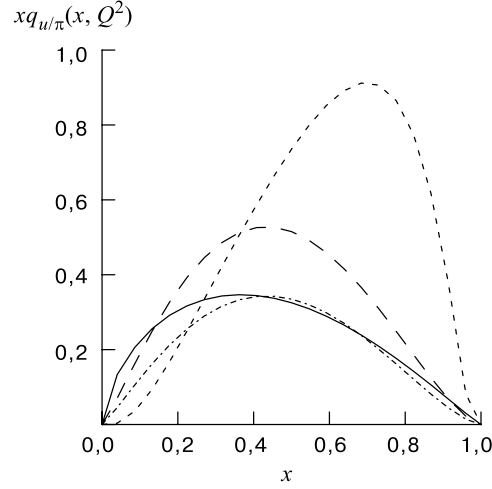


Рис. 10. Импульсное распределение валентных кварков в пионе  $xq(x; Q_0^2)$  (штриховая линия) как функция доли продольного импульса  $x$ , проэволюционированная к  $Q_0^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$  (ЛП-приближение), при  $\rho_{cm_q} = 0,39$ . Сплошная линия означает феноменологическую кривую [72] на том же масштабе  $Q_0^2$ , извлеченную из данных. Также изображены распределение в низкой точке нормировки  $\mu_0^2 = 0,3 \text{ ГэВ}^2$  (пунктирная линия); распределение, умноженное на фактор 0,65, соответствующее вероятности найти низшее фоковское состояние в волновой функции пиона (штрихпунктирная)

лидирующим порядке (СЛП) пертурбативной КХД в  $\overline{MS}$ -схеме, с использованием первых шести полиномов Якоби. Для этой цели мы используем хорошо известные выражения [86] пертурбативных вычислений для коэффициентной функции  $C_i^N = C_{0i}^N + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} C_{1i}^N$  и аномальной размерности  $\gamma_{(n)}$ , вычисленные в ЛП и СЛП. Таким образом, конечный результат для моментов, полученный с помощью процедуры факторизации, имеет вид

$$A_N(Q^2) = \sum_i C_i^N(Q^2, \mu^2) O_i^N(\mu^2) = \int_0^1 dx x^N q(x, Q^2). \quad (105)$$

Для анализа эволюции мы выбираем низкий масштаб импульса  $\mu_0^2 = (0,3 \pm 0,03) \text{ ГэВ}^2$  и КХД-константу  $\Lambda^{(3)} = 0,3 \text{ ГэВ}$ . Результирующее распределение  $q_{q\bar{q}}(x, Q_0^2)$  показано на рис. 10 наряду с феноменологическими кривыми, полученными из данных [75].

Значения первых моментов пионного распределения кварков при  $Q_0^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$ , вычисленных в ЛП и СЛП, показаны в табл.2. Эти величины следует сравнить с теми, которые получаются из феноменологического

Таблица 2. Значения первых моментов при  $Q_0^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$ 

Моменты	ЛП	СЛП	рКХД [73]	Эксп. фит [75]	Эксп. фит [76]
$A_2(Q_0^2)$	$0,318 \pm 0,01$	$0,275 \pm 0,017$	$0,279 \pm 0,083$	$0,230 \pm 0,01$	$0,193 \pm 0,01$
$A_3(Q_0^2)$	$0,147 \pm 0,008$	$0,120 \pm 0,012$	$0,107 \pm 0,035$	$0,101 \pm 0,005$	$0,083 \pm 0,005$
$A_4(Q_0^2)$	$0,081 \pm 0,006$	$0,064 \pm 0,008$	$0,048 \pm 0,020$	$0,057 \pm 0,005$	$0,046 \pm 0,005$

анализа [75] и из рКХД-вычислений [73]. В табл. 2 также включены моменты распределения кварков в пионе, полученные из параметризации [76].

Обсудим неопределенности КХД-эволюции, начинающейся с низкого масштаба  $\mu_0$ . Как мы видим из табл. 2, различие результатов ЛП и СЛП находится в пределах 30%. Оказывается, что использование большего начального масштаба эволюции, скажем,  $\mu_0^2 \geq 0,3 \text{ ГэВ}^2$ , приводит к достаточно хорошей сходимости с отклонениями меньшими, чем 10%, в то время как в противоположном случае, т.е. для масштабов меньших, чем  $0,1 \text{ ГэВ}^2$ , отклонения растут, и пертурбативная эволюция теряет всякий смысл. Такое поведение также было отмечено в анализе в НИЛ-модели [80]. Пределы ошибок, приведенные в табл. 2 для модельных вычислений, задаются принятой неопределенностью в выборе начального масштаба эволюции  $\mu_0$ .

Сравнение показывает, что наши вычисления, в частности в СЛП, согласованы с феноменологическим анализом [75] и достаточно близки рКХД-результатам. Оба теоретических подхода (рКХД и инстантонная модель) предсказывают величины моментов систематически большие, чем феноменологические. Одна из причин для этого разногласия может быть связана с приближением заморозки, которое не принимает во внимание вкладов морских кварк-глюонных и более высоких фоковских состояний на начальном масштабе эволюции, приписывая весь пионный импульс валентным кварк-антикварковым парам. Действительно, происхождение момента  $A_2$  на начальном масштабе (в приближении заморозки) и его последующая эволюция являются чисто кинематическими и не зависят от деталей модели. В принципе, можно было бы зафиксировать долю валентного импульса, получаемую в нашем вычислении, по доле, определенной в [75], с помощью сдвига начальной величины  $\mu_0^2$  вниз к  $0,01 \text{ ГэВ}^2$  (см., например, [80]). Однако начало пертурбативной эволюции со столь низкого масштаба является формально неправильным и технически сводится к достаточно нестабильной процедуре.

По нашему мнению, более реалистично ожидать, что, включив в наш анализ вклады кварк-глюонного моря и более высоких фоковских состояний, можно значительно улучшить согласие между теоретическим предсказанием и феноменологическим анализом. Вклад моря уменьшает долю импульса, пе-

реносимую валентными кварками, задаваемую моментом  $A_2$ . Более высокие фоковские состояния дают вклад в оба момента —  $A_1$  и  $A_2$ . Это означает, что полная нормировка функции распределения и доля импульса, переносимая валентной кварк-антикварковой компонентой волновой функции, должна быть уменьшена на фактор, который представляет вероятность отсутствия таких конфигураций в пионной волновой функции. На рис. 10 мы также приводим результат нашего ЛП-вычисления, умноженный на фактор 0,65, соответствующий грубой оценке вероятности 35% для более высоких фоковских валентных состояний (пренебрегая вкладом моря). Эта оценка найдена с помощью неравенства

$$q(x, Q_0^2) \geq q_{q\bar{q}}(x, Q_0^2) \quad (106)$$

и насыщения его при  $x \rightarrow 1$ . Это неравенство, рассмотренное в [79] (и ссылки там), справедливо для любого частичного вклада в функцию распределения. При таком предположении, как можно увидеть из рис. 10, вклад от наинизших кварк-антикварковых валентных конфигураций в функцию распределения насыщает найденное феноменологически распределение в области  $x \geq 0,4$ . Различие в распределениях при более низких значениях  $x$  может быть приписано вкладу более высоких фоковских состояний, которые начинают доминировать при  $x \rightarrow 0$ . Такая картина находится также в согласии с заключениями, сделанными в [79]. В дополнение к другим источникам, которые могут изменить нормировку нашего результата, отметим эффект непертурбативной эволюции [87] из начального масштаба  $\mu_0^2$  к  $Q^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели теоретические предсказания для амплитуды распределения и функции распределения валентных кварков в пионе (102) и ее моментов (97). Вычисления основаны на инстантонной модели КХД-вакуума, которая может претендовать на реалистическую трактовку непертурбативной динамики. В таком подходе существует надежда выразить наблюдаемые свойства адронов через фундаментальные характеристики вакуумного состояния. Мы нашли, что инстантонная модель хорошо описывает величины вакуумных ожиданий кварк-глюонных операторов наинизшей размерности и низкоэнергетических наблюдаемых пиона. Для того чтобы получить эти результаты, мы использовали калибровочно-инвариантную форму для динамической массы кварка и кварк-пионной вершины с упорядоченным по пути  $P_{\text{exр}}$ -фактором Швингера. Такие факторы входят в определение нелокальных величин (подобно нелокальному кварковому конденсату), которые эффективно учитывают радиационные эффекты глюонного и фотонного поля, когда два кварка

удаляются друг от друга. В результате пионные функции распределения кварков выражены через эффективный размер инстантона  $\rho_c$  и параметр массы кварка  $m_q$ .

Пионная амплитуда распределения и функция распределения кварков извлечены в низкой точке нормировки, где эффективный инстантонный подход оправдан. Показано, что справедливость партонных ПС для изоспина и полного импульса есть следствие условия связности и непосредственного применения калибровочной инвариантности. Для вывода этих результатов применяется техника, которая может рассматриваться как независимый подход, наряду с решеточными вычислениями и феноменологическим фитом экспериментальных данных. Используя вычисленную функцию распределения в качестве начальных данных, с помощью стандартной пертурбативной эволюции мы получили распределение кварков в пионе при более высоких импульсах передачи, достижимых в эксперименте. Найдено разумное согласие с данными. Фактические вычисления выполнены в приближении заморозки, когда эффектами внутреннего кварк-глюонного моря можно пренебречь. Ожидается, что эффекты внутреннего кварк-глюонного моря пионной волновой функции и непertурбативная эволюция при промежуточной энергии дадут лучшее согласие между теоретическими предсказаниями и феноменологическим анализом.

Авторы благодарят С.Б. Герасимова, Н.И. Кочелева, С.В. Михайлова, М.К. Волкова за плодотворное обсуждение результатов. Работа А.Е.Д. частично поддержана грантом С.-Петербургского центра фундаментальных исследований № 97-0-6.2-28. Л.Т. благодарит Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) и Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) за частичную поддержку.

### Приложение А

Калибровочно-инвариантная скалярная часть пропагатора кварка (18) имеет следующие разложения на малых и больших евклидовских расстояниях:

$$Q(x^2) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4} \frac{x^2}{\rho_c^2} + \dots & \text{при } x^2 \rightarrow 0; \\ 2 \frac{\rho_c^2}{x^2} + \dots & \text{при } x^2 \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Скалярный пропагатор кварка в конфигурационном и импульсном представлениях изображен на рис. 1 и 2 соответственно наряду с пропагаторами, полученными при пренебрежении  $P_{\text{exр}}$ -фактором в (14) с помощью выражений для кварковой нулевой моды в сингулярной и регулярной калибровках.

В регулярной калибровке имеем аналитическое выражение

$$Q_{\text{reg}}(x^2) = \frac{2}{y^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right) \Big|_{y = \frac{x}{2\rho_c}}. \quad (107)$$

В импульсном представлении нормированный пропагатор кварка (без  $P_{\text{exр}}$ -фактора) пропорционален квадрату кварковой нулевой моды, соответственно, в регулярной и сингулярной калибровках:

$$\tilde{Q}_{\text{reg}}(p) = \exp(-2\rho_c p), \quad (108)$$

$$\tilde{Q}_{\text{sing}}(p) = \left\{ z \frac{d}{dz} [I_1(z)K_1(z) - I_0(z)K_0(z)] \Big|_{z = \frac{\rho_c p}{2}} \right\}^2. \quad (109)$$

Из рис. 2 видно, что в импульсном представлении форма пропагатора очень чувствительна к  $P_{\text{exр}}$ -фактору\*.

Естественное калибровочно-инвариантное определение для средней виртуальности кварков (54) (а также в (53) для кваркового конденсата) с  $M_q(k)$ , определенной в (13) и (10), справедливо, если решение в (18) записано калибровочно-инвариантным образом. Если заменить выражением в сингулярной калибровке (пренебрегая  $P_{\text{exр}}$ -фактором) в (54), то получим  $\lambda_q^2 = 9/(2\rho_c^2)$  с коэффициентом, далеким от правильного. Причиной для такого несогласия при вычислении *нелокальной* величины является то, что ковариантность производной в матричном элементе (54) утеряна. Это приводит к тому, что для восстановления правильного результата необходимо учесть добавочные члены в (54), которые учитывали бы эффекты глюонного поля. Однако с использованием настоящего инвариантного подхода (14) такие эффекты автоматически учитываются с помощью  $P_{\text{exр}}$ -фактора.

## Приложение Б

Для полноты приведем явный вывод полной аксиально-векторной вершины и продемонстрируем выполнение аксиального УТГ. После учета перерасеяния конститuentного кварка в канале с пионными квантовыми числами найдем полную вершину:

$${}^A \Gamma_{\text{vertex}}^{\mu a}(k, p) = {}^A \Gamma^{\mu a}(k, p) + {}^A \Gamma_{\text{rescat}}^{\mu a}(k, p), \quad (110)$$

---

\*Чтобы избежать противоречия с калибровочной инвариантностью, нельзя пользоваться трактовкой пропагатора кварка в  $p$ -представлении в факторизованной форме, как это было сделано в работе [18].

где  ${}^A\Gamma^{\mu a}(k, p)$  является заправочной вершиной, заданной в (51), и

$${}^A\Gamma_{\text{rescat}}^{\mu a}(k, p) = \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} J_{PA}^\nu(p) \frac{G_I}{1 - G_I \Pi_{PP}(p)} \frac{1}{g_{\pi q}^2} \Gamma_{\pi q}^a(k, p) \quad (111)$$

с  $\Gamma_{\pi q}^a(k, p)$ ,  $\Pi_{PP}(p)$ , определенными с помощью (39), (33) соответственно, и

$$J_{PA}^\mu(p) = i2N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k) f(k') \times \\ \times \text{tr} \left\{ {}^A\Gamma^{\mu a}(k, p) [\hat{k} + M(k)]^{-1} i\gamma_5 [\hat{k}' + M(k')]^{-1} \right\} \quad (112)$$

с  $k' = k + p$ . Благодаря уравнению щели (9) вершина (111) содержит полюс при  $p^2 = m_\pi^2$ . Сравнив вычеты в полюсе в (52) и (66) при  $z = 0$ , получим выражение для константы распада пиона. Интеграл в (112) сводится к интегралу, определяющему  $g_{\pi q}^{-2}$  в (40) на массовой поверхности пиона, и (112) может быть записана как  $J_{PA}^\mu(p) = 2i \frac{M_q}{g_{\pi q}} p^\mu$ . С другой стороны, этот матричный элемент определяет константу распада  $J_{PA}^\mu(p) = 2F_\pi i p^\mu$ . Таким образом, константа распада пиона  $F_\pi$  воспроизводится в том виде, как она задана соотношением Голдбергера — Треймана [20]  $F_\pi = \sqrt{2} M_q / g_{\pi q}$ . Подобным образом, если подставить в интеграл (112) фактор  $\exp[-i(p - 2k) \cdot z]$ , проецирующий кварк с импульсом  $k$  на светоподобное направление  $z$ , получим (67).

Полная вершина может быть переписана в форме, явно удовлетворяющей УТТ. Первые два члена в правой части (51), очевидно, удовлетворяют УТТ. Для того чтобы компенсировать третий член этого уравнения, член перерасеяния  ${}^A\Gamma_{\text{rescat}}^{\mu a}(k, p)$  (с помощью (51)) записываем как

$$-i \frac{p^\mu}{p^2} \frac{G_I N_c N_f}{1 - G_I \Pi_{PP}(p)} \tilde{f}(k') \tilde{f}(k) \times \\ \times \left[ G_I \Pi_{PP}(p) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{M(l^2)}{l^2 - M^2(l^2)} \tilde{f}(l) [\tilde{f}(l + p) + \tilde{f}(l - p)] - \right. \\ \left. - \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr} \{ [\hat{p} - M(l^2) - M(l'^2)] [\hat{l}' + M(l'^2)] \gamma_5 [\hat{l} + M(l^2)] \gamma_5 \}}{(l'^2 - M^2(l'^2))(l^2 - M^2(l^2))} \tilde{f}(l') \tilde{f}(l) \right], \quad (113)$$

где  $l' = l + p$ . С помощью сокращения одного из факторов  $l^2 - M^2(l^2)$  в знаменателе интеграла с членом из дираковского следа в числителе и, соответственно, сдвигая переменные интегрирования, первый член внутри квадратных скобок (111) можно переписать в той же форме, как и второй. Это демонстрирует требуемое сокращение, а полная вершина задается с помощью (52).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.** — Nucl.Phys., 1979, v.147B, p.385.
2. **Gromes D.** — Phys. Lett., 1982, v.115B, p.482;  
**Campostrini M., Di Giacomo A., Olejnik Z.** — Phys. Rev., 1986, v.31C, p.577.
3. **Mikhailov S.V., Radyushkin A.V.** — ЖЭТФ Lett., 1986, v.43, p.712; Sov. J. Nucl. Phys., 1989, v.49, p.494; Phys. Rev., 1992, v.45D, p.1754.
4. **Polyakov A.M.** — Phys. Lett., 1975, v.59B, p.82;  
**Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.A., Tyupkin Yu.S.** — Phys. Lett., 1975, v.59B, p.85.
5. **Shuryak E.V.** — Nucl. Phys., 1982, v.203B, p.93.
6. **Dyakonov D.I., Petrov V.Yu.** — Nucl. Phys., 1984, v.245B, p.259.
7. **Schäfer T., Shuryak E.V.** — Rev. of Mod. Phys., 1998, v.70(2), p.323 (and refs. cited here).
8. **Carlitz R.D., Creamer D.B.** — Ann. Phys. (NY), 1979, v.118, p.429.
9. **Дьяконов Д.И., Петров В.Ю.** — ЖЭТФ, 1985, т.89, с.751 [Sov. Phys. JETP, 1985, v.62, p.431];  
**Dyakonov D.I., Petrov V.Yu.** — Nucl. Phys., 1986, v.272B, p.457.
10. **Есаибегян С.В., Тамарян С.Н.** — Ядерная физика, 1989, т.49, с.815;  
**Esaibegyan S.V., Tamaryan S.N.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1989, v.49, p.507.
11. **'t Hooft G.** — Phys. Rev., 1976, v.14D, p.3432; Phys. Rev. Lett., 1976, v.37, p.8.
12. **Callan C.G., Dashen R., Gross D.G.** — Phys. Rev., 1978, v.17D, p.2717.
13. **Дорохов А.Е., Кочелев Н.И., Zubov Ю.А.** — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.1192;  
**Dorokhov A.E., Kochelev N.I., Zubov Yu.A.** — Sov. J.Part. Nucl. Phys., 1992, v.23, p.522.
14. **Dorokhov A.E., Esaibegyan S.V., Mikhailov S.V.** — Phys. Rev., 1997, v.56D, p.4062;
15. **Dorokhov A.E., Esaibegyan S.V., Maximov A.E., Mikhailov S.V.** — Eur. Phys. J., 2000, v.13C, p.331.
16. **Беляев В.М., Иоффе Б.Л.** — ЖЭТФ, 1992, т.83, с.876.  
**Belyaev V.M., Ioffe B.L.** — Sov. Phys. JETP, 1982, v.56, p.493 ;  
**Овчинников А.А., Пивоваров А.А.** — Ядерная физика, 1988, т.48, с.1135.  
**Ovchinnikov A.A., Pivovarov A.A.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1988, v.48, p.721.
17. **Hatsuda T., Kunihiro T.** — Phys. Rep., 1994, v.247, p.221;  
**Ebert D., Reinhardt H., Volkov M.K.** — Progr. Part. Nucl. Phys., 1994, v.35, p.1.
18. **Hutter M.** — München preprint LMU- 95-03 (1995); e-print hep-ph/9502361.
19. **Terning J.** — Phys. Rev., 1991, v.44D, p.887.
20. **Bowler R.D., Birse M.C.** — Nucl. Phys., 1995, v.582A, p.655;  
**Plant R.S., Birse M.C.** — Nucl. Phys., 1998, v.628A, p.607.
21. **Mandelstam S.** — Ann. Phys., 1962, v.19, p.1.
22. **Holdom B.** — Phys. Rev., 1992, v.45D, p.2543;  
**Holdom B., Lewis R.** — Phys. Rev., 1994, v.51D, p.6318.
23. **Bos J.W., Koch J.H., Naus H.W.L.** — Phys. Rev., 1991, v.44C, p.485.
24. **Dorokhov A.E., Tomio L.** — Phys. Rev., 2000, v.62D, p.014016.
25. **Musakhanov M.** — Eur. Phys. J., 1999, v.9C, p.235.



26. **Politzer H.D.** — Nucl. Phys., 1976, v.117B, p.397;  
**Pascual P., de Rafael E.** — Z. Phys., 1982, v.12C, p.127.
27. **Ivanov M.A., Locher M.P., Lyubovitskij V.E.** — Few-Body Syst., 1996, v.21, p.131.
28. **Jouvet B.** — Nouvo Cim., 1957, v.5, p.1;  
**Vaughn M.T., Aaron R., Amado R.D.** — Phys. Rev., 1961, v.124, p.1258;  
**Salam A.** — Nouvo Cim., 1962, v.25, p.224;  
**Weinberg S.** — Phys. Rev., 1963, v.130, p.776.
29. **Kleinert H.** — Phys. Lett., 1976, v.62B, p.429;  
**Kugo T.** — Phys. Lett., 1978, v.76B, p.625;  
**Volkov M.K.** — Ann. Phys. (NY), 1984, v.157, p.282; Sov. J. Part. Nucl. Phys., 1986, v.17, p.186.
30. **Radyushkin A.V.** — Phys. Lett., 1991, v.271B, p.218.
31. **Kremer M., Schierholz G.** — Phys. Lett., 1987, v.194B, p.283.
32. **Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.** — Nucl. Phys., 1980, v.163B, p.46.
33. **Polyakov M.V., Weiss C.** — Phys. Lett., 1996, v.387B, p.841.
34. **Broadhurst D.J. et al.** — Phys. Lett., 1994, v.329B, p.103;  
**Geshkenbein B.V.** — Phys. Atom. Nucl., 1995, v.58, p.1171;  
**Narison S.** — Phys. Lett., 1996, v.387B, p.162.
35. **D'Elia M., Di Giacomo A., Meggiolaro E.** — Phys. Lett., 1997, v.408B, p.315.
36. **Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R.** — JETP Lett., 1977, v.25, p.510.
37. **Radyushkin A.V.** — JINR preprint P2-10717, Dubna 1977;  
**Efremov A.V., Radyushkin A.V.** — Math. Phys., 1980, v.42, p.97; Phys. Lett., 1980, v.94B, p.45.
38. **Brodsky S.J., Lepage G.P.** — Phys. Lett., 1979, v.87B, p.359; Phys. Rev., 1980, v.22D, p.2157.
39. **Chernyak V.L., Zhitnitsky A.R.** — Phys. Rep., 1984, v.112, p.173; Nucl. Phys., 1982, v.201B, p.492.
40. **Isgur N., Llewellyn Smith C.H.** — Nucl. Phys., 1989, v.317B, p.526; Phys. Rev. Lett., 1984, v.52, p.1080;  
**Radyushkin A.V.** — Nucl. Phys, 1991, v.532A, p.141.
41. CLEO Collaboration (**Gronberg J. et al.**) — Phys. Rev., 1998, v.57D, p.33.
42. **Kroll P., Raulfs M.** — Phys. Lett., 1996, v.387B, p.848.
43. **Bakulev A.P., Mikhailov S.V.** — Z. Phys., 1995, v.68C, p.451.
44. **Anikin I.V., Dorokhov A.E., Tomio L.** — Preprint IFT-P.066/99, 1999, Sao Paulo, Preprint JINR E2-99-339, Dubna, 1999.
45. **Esaibegyan S.V., Tamarian S.N.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1990, v.51, p.310.
46. **Petrov V.Yu., Polyakov M.V., Ruskov R., Weiss C., Goeke K.** — Phys. Rev, 1999, v.59D, p.114018.
47. CELLO Collaboration (**Behrend H.-J. et. al.**) — Z. Phys., 1991, v.49C, p.401.
48. **Chase M.K.** — Nucl.Phys, 1980, v.167B, p.125.
49. **Del Aguila F., Chase M.K.** — Nucl.Phys., 1981, v.193B, p.517;  
**Braaten E.** — Phys. Rev., 1983, v.28D, p.524;  
**Kadantseva E.P., Mikhailov S.V., Radyushkin A.V.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1986, v.44, p.326;  
**Gosdzinsky P., Kivel N.** — Nucl.Phys., 1998, v.521B, p.274.

50. **Musatov I.V., Radyushkin A.V.** — Phys. Rev., 1997, v.56D, p.2713 (and refs. cited here).
51. **Hayakawa M., Kinoshita T.** — Phys. Rev., 1998, v.57D, p.465.
52. **Carey R.M. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1999, v.82, p.253.
53. **Isgur N., Llewellyn Smith C.H.** — Nucl. Phys., 1989, v.317B, p.526; Phys. Rev. Lett, 1984, v.52, p.1080;  
**Radyushkin A.V.** — Nucl. Phys., 1991, v.532A, p.141;  
**Nesterenko V.A., Radyushkin A.V.** — Phys.Lett., 1982, v.115B, p.410;  
**Diehl M., Feldmann T., Jacob R., Kroll P.** — Eur. Phys. J., 1999, v.8C, p.409.
54. **Novikov V.A. et.al.** — Nucl. Phys., 1984, v.237B, p.525.
55. **Manohar A.** — Phys. Lett., 1990, v.244B, p.101.
56. **Gorsky A.S.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1987, v.46, p.537.
57. **Mikhailov S.V., Radyushkin A.V.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1990, v.52, p.697.
58. **Radyushkin A.V., Ruskov R.T.** — Nucl. Phys., 1996, v.481B, p.625; e-print hep-ph/9706518.
59. **Holdom B., Terning J., Verbeek K.** — Phys. Lett., 1989, v.232B, p.351; Phys. Lett., 1989, v.245B, p.612.
60. **Ito H., Buck W.W., Gross F.** — Phys. Rev., 1992, v.45C, p.1918; Phys. Lett., 1992, v.287B, p.23.
61. **Anikin I.V., Dorokhov A.E., Tomio L.** — Phys.Lett., 2000, v.475B, p.361.
62. **Anikin I. et. al.** — Phys. Atom. Nucl., 1994, v.57, p.1021.
63. **Diakonov D.I. et. al.** — Nucl. Phys., 1996, v.480B, p.341.
64. **Ito H., Buck W.W., Gross F.** — Phys. Rev., 1992, v.43C, p.2483.
65. **Jakob R., Kroll P.** — Phys. Lett., 1993, v.315B, p.463.
66. **Dorokhov A.E.** — Nuovo Cim., 1996, v.109A, p.391.
67. **Li H.-N., Sterman G.** — Nucl. Phys., 1992, v.381B, p.129.
68. **Bakulev A.P., Mikhailov S.V.** — Phys. Lett., 1998, v.436B, p.351.
69. **Kekez D., Klabucar D.** — Phys. Lett., 1999, v.457B, p.359.
70. **Curtis D.C., Pennington M.R.** — Phys. Rev., 1990, v.42D, p.4165.
71. **Klabucar D., Kekez D.** — Fizika B (Zagreb), 1999, v.8, p.303;  
**Tandy P.** — Fizika B (Zagreb), 1999, v.8, p.295;  
**Roberts C.D.** — Fizika B (Zagreb), 1999, v.8, p.285.
72. **Anselm A., Johansen A., Leader E., Lukaszuk L.** — Z. Phys., 1997, v.359A, p.457.
73. **Best C. et al.** — Phys. Rev., 1997, v.56D, p.2743.
74. **Martinelli G., Sachrajda C.T.** — Nucl. Phys., 1988, v.306B, p.865.
75. **Sutton P.J., Martin A.D., Roberts R.G., Stirling W.J.** — Phys. Rev., 1992, v.45D, p.2349.
76. **Glück M., Reya E., Vogt A.** — Z. Phys., 1992, v.53C, p.651;  
**Glück M., Reya E., Schienbein I.** — Eur. Phys. J., 1999, v.10C, p.313.
77. NA3 Coll., **Badier J. et al.** — Z. Phys., 1983, v.18C, p.28;  
NA10 Coll., **Betev B. et al.** — Z. Phys., 1985, v.28C, p.15;  
E537 Coll., **Anassontzis E. et al.** — Phys. Rev., 1988, v.38D, p.1377;  
E615 Coll., **Bordalo P. et al.** — Phys. Lett., 1987, v.193B, p.368;  
WA70 Coll., **Bonesini M. et al.** — Z. Phys., 1988, v.37C, p.535.
78. **Belitsky A.V.** — Phys. Lett., 1996, v.386B, p.359.

79. **Jakob R., Kroll P., Raulfs M.** — J. Phys., 1996, v.22G, p.45.
80. **Davidson R.M., Ruiz Arriola E.** — Phys. Lett., 1995, v.348B, p.163;  
**Suzuki K.** — Phys. Lett., 1996, v.368B, p.1.
81. **Rosenhaus V.B., Ryskin M.G.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1986, v.44, p.829.
82. **Dorokhov A.E., Kochelev N.I.** — Phys. Lett., 1993, v.304B, p.167.
83. **Аникин И.В., Дорохов А.Е., Максимов А.Е., Томно Л.** — Ядерная физика, 2000, т.63, с.489.
84. **Baulieu L., Floratos E.G., Kounnas C.** — Nucl. Phys., 1980, v.166B, p.321.
85. **Mikhailov S.V., Radyushkin A.V.** — Nucl. Phys., 1985, v.254B, p.89.
86. **Индурайн Ф.** — Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
87. **Genovese M.** — Nuovo Cim., 1996, v.109A, p.177.