

УДК 539.17

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ
В НЕТРАДИЦИОННЫХ ПОСТАНОВКАХ**

М.Н.Попушой, И.В.Поплавский

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

ВВЕДЕНИЕ	964
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ КУЛОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ	966
Случай регулярного и одного из йостовских решений сво- бодного УШ, выбранных в качестве базисных для модель- ного потенциала	967
Случай йостовских решений свободного УШ, выбранных в качестве базисных для модельного потенциала	972
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ЭНЕРГИИ, КВАДРАТА ОРБИТАЛЬНОГО МОМЕНТА И КУ- ЛОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ	973
Случай регулярного и одного из йостовских решений сво- бодного УШ, выбранных в качестве базисных для модель- ного потенциала	974
Случай йостовских решений свободного УШ, выбранных в качестве базисных для модельного потенциала	981
Влияние знака потенциала на расположение полюсов S - матрицы и поведение фазы рассеяния	982
СВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ	986
Связь между задачами для переменных k и λ	987
Связь между задачами для переменных k и a	988
Связь между задачами для переменных λ и a	989
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	992
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	993

УДК 539.17

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В НЕТРАДИЦИОННЫХ ПОСТАНОВКАХ

М.Н.Попушой, И.В.Поплавский

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

В обзоре последовательно изложен алгебраический метод решения обратной задачи в нетрадиционных постановках, в рамках которого затем исследованы некоторые проблемы квантовой теории рассеяния заряженных частиц.

The algebraic method of the scattering inverse problem solution under untraditional statements is proposed consistently in this review, in the framework of which some quantum theory of scattering charged particles problems were researched afterwards.

ВВЕДЕНИЕ

Решение обратной задачи квантовой теории рассеяния заключается в восстановлении потенциала взаимодействия по экспериментальным данным, включающим в различных вариантах фазовые сдвиги, S -матрицу, энергии и нормировочные константы связанных состояний, амплитуду рассеяния. Обратные задачи изучаются уже на протяжении более семидесяти лет, в течение которых опубликовано очень большое количество работ. При этом наиболее важные и фундаментальные результаты по обратным задачам в основном изложены в монографиях [1–10].

До последнего времени были известны две традиционные постановки, в соответствии с которыми обратная задача имеет решение, если известны сдвиги фаз: 1) для одного значения углового момента при всех значениях энергии, энергии связанных состояний и нормировочные константы; 2) для всех значений угловых моментов при одной фиксированной энергии, то есть известна амплитуда рассеяния.

При решении обратной задачи для различных типов уравнений, как правило, используют модификации или аналоги методов Гельфанда–Левитана или Марченко. При этом сложилась такая ситуация, что техника метода Крейна не нашла достаточного применения в исследованиях по обратным задачам для более сложных типов уравнений.

Все эти методы являются интегральными в том смысле, что ключевым в них является использование интегральных уравнений типа Гельфанда–Левитана, Марченко или Крейна. Однако существует также другой (алгебраический) подход к решению обратной задачи, в котором не использованы указанные выше интегральные уравнения. К этому подходу приводит задание функции Йоста или матрицы рассеяния в виде рациональной функции параметров уравнения Шредингера (УШ). Впервые алгебраический метод решения обратной задачи при фиксированном орбитальном моменте был установлен Тейсом в 1956 г. [11]. Затем в работе [12] этим же методом была решена обратная задача при фиксированном значении энергии. Заметим, что алгебраический метод решения обратной задачи оказался гораздо менее известным, чем упомянутые выше интегральные методы, а также метод Ньютона–Сабатье [2, 6]. Поэтому данный обзор восполняет образовавшийся пробел в информации о результатах, полученных по обратной задаче квантовой теории рассеяния в этом направлении.

В последние годы были продолжены интенсивные исследования по обратным задачам в различных направлениях. Если ранее основные результаты были получены для одномерных и одноканальных задач, то для последних лет характерен переход к изучению более сложных систем — многоканальных, многомерных, многочастичных и с нелокальным взаимодействием [9].

Как отмечено выше, в традиционных подходах потенциал восстанавливают по экспериментальным данным при фиксированных значениях либо энергии, либо орбитального момента. В [13] рассмотрен более общий подход к решению обратной задачи, когда энергия и квадрат орбитального момента в исходных данных рассеяния связаны линейной зависимостью.

В традиционных постановках обратной задачи предполагается, что значение кулоновской константы связи фиксировано, то есть речь идет о восстановлении потенциала взаимодействия между двумя фиксированными частицами x и y . Однако, если отказаться от этого предположения и считать значения кулоновской константы связи переменными, то можно сформулировать обратную задачу квантовой теории рассеяния в новой (нетрадиционной) постановке, суть которой заключается в определении потенциала взаимодействия по фазовым сдвигам, взятым при фиксированных значениях энергии (импульса) и орбитального момента, но при различных значениях кулоновской константы связи. В этом случае *один и тот же потенциал* должен описывать взаимодействие уже между двумя группами заряженных частиц X и Y , имеющих *примерно одинаковую приведенную массу*. В соответствии с принципом изотопической инвариантности ядерных сил такие группы частиц X и Y представляют собой изобарические мультиплеты (или ядра-изобары) [14]. Таким образом, в предложенном здесь новом (нетрадиционном) подходе к обратной задаче в принципе можно по экспериментальным данным восстановить потенциал взаимодействия между двумя изобарическими мультипле-

тами (или между заряженным кластером и изобарическим мультиплетом). Для решения обратной задачи в такой нетрадиционной постановке необходимы результаты фазового анализа, учитывающего кулоновское или зарядовое расщепление фазовых сдвигов. Примеры такого рода фазового анализа для pN -взаимодействия в состоянии 1S_0 и для $\pi^\pm p$ -взаимодействия в состояниях S_{31} , P_{33} приведены в [15, 16].

Цель данного обзора заключается в изложении алгебраического метода решения обратной задачи в нетрадиционных постановках и в использовании его для исследования некоторых проблем квантовой теории рассеяния заряженных частиц.

В разд. 1 рассмотрена обратная задача теории рассеяния заряженных частиц в комплексной плоскости кулоновской константы связи. В разд. 2 установлена процедура восстановления потенциала взаимодействия для случая, когда в исходных данных рассеяния энергия, квадрат орбитального момента и кулоновская константа связи линейно зависимы. Здесь же изучено влияние знака потенциала на расположение полюсов матрицы рассеяния и поведение фазовых сдвигов. В разд. 3 исследована связь между однопараметрическими задачами потенциального рассеяния заряженных частиц.

1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ КУЛОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ

В основу работы положено парциальное УШ

$$y''_{k,l}(r) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{a}{r} - V(r) \right] y_{k,l}(r) = 0, \quad (1)$$

где $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ — импульс, l — орбитальный момент, $a = \frac{2mzZe^2}{\hbar^2}$ — кулоновская константа связи, m — приведенная масса системы, E — энергия, z и Z — заряды взаимодействующих частиц, $U(r) = \frac{\hbar^2}{2m}V(r)$ — короткодействующий потенциал (например, эффективный потенциал ядерного взаимодействия), удовлетворяющий условию

$$\int_0^\infty r|V(r)| \exp(\alpha r) dr < \infty, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Физическим значениям (ФЗ) кулоновской константы связи a_ϕ соответствуют целые значения z и Z .

В [14] исследованы аналитические свойства S -матрицы в области комплексных значений кулоновской константы связи. В частности, там установлено, что при условии (2) матрица рассеяния для ФЗ l мероморфна в прямом произведении a -плоскости и полосы $|\text{Im } k| < \alpha/2$ (исключая существенно особую точку при $k = 0$) с разрезом вдоль мнимой оси k от $k = -i\alpha/2$ до $k = i\alpha/2$.

Полюсы S -матрицы в комплексной плоскости кулоновской константы связи допускают физическую интерпретацию. При изменении вещественных значений E полюс в a -плоскости описывает траекторию, которая ведет себя следующим образом. Для притягивающего в целом потенциала полюс, лежащий при $E < 0$ на вещественной положительной a -полуоси, с увеличением E движется вправо, образуя связанные состояния с орбитальным моментом l в системе $X + Y$ при каждом прохождении через ФЗ кулоновской константы связи. Если $E > 0$, то полюс оставляет вещественную a -ось и переходит в первый квадрант a -плоскости. Полюс, вещественная часть которого равна ФЗ a_ϕ , а величина мнимой части мала, соответствует резонансу с орбитальным моментом l члена системы $X + Y$ с кулоновской константой связи a_ϕ .

В данном разделе рассмотрен алгебраический вариант построения потенциала взаимодействия заряженных частиц в нетрадиционной постановке обратной задачи — по известным при фиксированных ФЗ энергии E , приведенной массы m и орбитального момента l фазовым сдвигом $\delta_{k,l}(a)$ для различных ФЗ кулоновской константы связи a . В соответствии с указанным ранее в этом случае можно определить потенциал взаимодействия между двумя изобарическими мультиплетами или потенциал взаимодействия между заряженным кластером и изобарическим мультиплетом.

1.1. Случай регулярного и одного из йостовских решений свободного УШ, выбранных в качестве базисных для модельного потенциала. Предположим, что матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S_{k,l}(a) = S_{k,l}^0(a) \exp [2i\delta_{k,l}(a)],$$

$$\exp [2i\delta_{k,l}(a)] = R_{k,l}(a)/R_{-k,l}(a), \quad (3)$$

$$R_{k,l}(a) = \prod_1^n [a - \alpha_\mu(k, l)] / \prod_1^n [a - \beta_\nu(k, l)],$$

где $S_{k,l}^0(a)$ — матрица рассеяния, соответствующая центробежному и кулоновскому потенциалам; $\delta_{k,l}(a)$ — фазовый сдвиг, обусловленный действием потенциала $V(r)$; $\alpha_\mu(k, l)$ и $\beta_\nu(k, l)$ — комплексные постоянные (различные для всех μ, ν), расположение которых на комплексной a -плоскости зависит от налагаемых на $V(r)$ ограничений [14].

Далее приведен вывод формул для потенциала и решения УШ (1), соответствующих матрице рассеяния, заданной соотношениями (3) [17]. Пусть $\varphi_{k,l}(a, r)$ и $f_{\pm k,l}(a, r)$ — регулярное и йостовские решения уравнения (1) с $V = 0$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_{k,l}(a, r) r^{-l-1} = 1, \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_{\pm k,l}(a, r) \exp \left[\pm i \left(kr - \frac{a}{2k} \ln 2kr \right) \right] = 1. \quad (5)$$

Используя обозначение $[\varphi(r); f(r)] = \varphi(r) f'(r) - \varphi'(r) f(r)$, введем функции Йоста

$$f_{\pm k,l}(a) = [f_{\pm k,l}(a, r); \varphi_{k,l}(a, r)].$$

Если учесть, что $[f_{k,l}(a, r); f_{-k,l}(a, r)] = 2ik$, то нетрудно установить соотношение

$$\varphi_{k,l}(a, r) = \frac{1}{2ik} [f_{k,l}(a) f_{-k,l}(a, r) - f_{-k,l}(a) f_{k,l}(a, r)]. \quad (6)$$

Регулярное решение (6) имеет при $r \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\varphi_{k,l}(a, r) \approx \exp [i\eta_{k,l}(a)] \frac{f_{-k,l}(a)}{k} \sin \left[kr - \frac{a}{2k} \ln 2kr + \eta_{k,l}(a) \right],$$

где

$$S_{k,l}^0(a) \equiv \exp [2i\eta_{k,l}(a)] = \frac{f_{k,l}(a)}{f_{-k,l}(a)}$$

есть матрица рассеяния для центробежного и кулоновского потенциалов.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_{k,l}(a, r), & \beta_\nu &= \beta_\nu(k, l), & \varphi_\nu &= \varphi_{k,l}(\beta_\nu, r), \\ f_a &= f_{-k,l}(a, r), & \alpha_\mu &= \alpha_\mu(k, l), & f_\mu &= f_{-k,l}(\alpha_\mu, r), \end{aligned} \quad (7)$$

$$x_{\nu a} = \frac{[\varphi_\nu; f_a]}{\beta_\nu - a}, \quad x_{\nu \mu} = \frac{[\varphi_\nu; f_\mu]}{\beta_\nu - \alpha_\mu}. \quad (8)$$

На основании (8) и соотношения

$$\varphi_\nu f_a'' - \varphi_\nu'' f_a = \frac{a - \beta_\nu}{r} \varphi_\nu f_a,$$

вытекающего из (1) с $V = 0$, получим

$$x'_{\nu a} = -\frac{\varphi_\nu f_a}{r}. \quad (9)$$

Покажем, что матрицу рассеяния (3) можно получить, если в (1) выбрать в качестве потенциала функцию

$$V(r) = - \left[\frac{2}{r} (K_\nu \varphi_\nu)' - \frac{K_\nu \varphi_\nu}{r^2} \right], \quad (10)$$

где K_ν должны удовлетворять системе уравнений

$$K_\nu x_{\nu\mu} = -f_\mu \quad (11)$$

(по дважды повторяющимся индексам ν, μ выполняется суммирование).

Докажем, что выражение

$$y_a = f_a + K_\nu x_{\nu a} \quad (12)$$

является решением уравнения (1). Для этого подставим (12) в (1). С учетом того, что f_a является решением УШ (1) с $V = 0$, найдем

$$\left\{ K_\nu'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{a}{r} - V(r) \right] K_\nu \right\} x_{\nu a} = V(r) f_a - 2K_\nu' x_{\nu a}' - K_\nu x_{\nu a}''. \quad (13)$$

Выражение (13) в соответствии с (8) и (9) можно представить в виде

$$c_\nu x_{\nu a} = \left[V(r) + \frac{2}{r} (K_\nu \varphi_\nu)' - \frac{K_\nu \varphi_\nu}{r^2} \right] f_a, \quad (14)$$

где

$$c_\nu = K_\nu'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\beta_\nu}{r} - V(r) \right] K_\nu.$$

Если в уравнении (1) выбрать в качестве потенциала функцию (10), то правая часть равенства (14) обратится в нуль, то есть

$$c_\nu x_{\nu a} = 0, \quad (15)$$

где

$$c_\nu = K_\nu'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\beta_\nu}{r} + \frac{2(K_\nu \varphi_\nu)'}{r} - \frac{K_\nu \varphi_\nu}{r^2} \right] K_\nu.$$

При $a = \alpha_\mu$, согласно (11) и (12), $y_\mu = 0$. В этом случае полученная в (15) система однородных уравнений $c_\nu x_{\nu\mu} = 0$ относительно c_ν содержит только тривиальное решение $c_\nu = 0$, поскольку $|x_{\nu\mu}| \neq 0$, если α_μ, β_ν различные. Следовательно, K_ν — решение уравнения (1), поэтому y_a — также решение этого уравнения.

Чтобы построить решения Йоста УШ (1) с потенциалом (10), исследуем асимптотику решения (12) при $r \rightarrow \infty$. Для этого найдем K_ν из (11):

$$K_\nu = -\frac{f_\mu \tilde{x}_{\nu\mu}}{|x_{\nu\mu}|}, \quad (16)$$

где $\tilde{x}_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение $x_{\nu\mu}$. После подстановки (16) в (12) получим

$$y_a = \frac{f_a}{|x_{\nu\mu}|} \left| x_{\nu\mu} - \frac{f_\mu x_{\nu a}}{f_a} \right|.$$

Рассмотрим элемент

$$x_{\nu\mu} - \frac{f_\mu x_{\nu a}}{f_a} = x_{\nu\mu} \left\{ 1 - \frac{f_\mu [\varphi_\nu; f_a] (\beta_\nu - \alpha_\mu)}{f_a [\varphi_\nu; f_\mu] (\beta_\nu - a)} \right\}.$$

Используя циклическую перестановку

$$f_\mu [\varphi_\nu; f_a] + \varphi_\nu [f_a; f_\mu] + f_a [f_\mu; \varphi_\nu] = 0,$$

получим

$$\frac{f_\mu [\varphi_\nu; f_a]}{f_a [\varphi_\nu; f_\mu]} = 1 - \frac{\varphi_\nu [f_a; f_\mu]}{f_a [\varphi_\nu; f_\mu]} = 1 - \frac{[\ln (f_\mu / f_a)]'}{[\ln (f_\mu / \varphi_\nu)]'}.$$

На основании (5) и (6)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{f_\mu}{f_a} \right)' = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{f_\mu}{\varphi_\nu} \right)' \neq 0.$$

Поэтому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f_\mu [\varphi_\nu; f_a]}{f_a [\varphi_\nu; f_\mu]} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(x_{\nu\mu} - \frac{f_\mu x_{\nu a}}{f_a} \right) = \frac{a - \alpha_\mu}{a - \beta_\nu} \lim_{r \rightarrow \infty} x_{\nu\mu},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} y_a = \frac{\prod_1^n (a - \alpha_\mu)}{\prod_1^n (a - \beta_\nu)} \lim_{r \rightarrow \infty} f_a,$$

а функция

$$F_a = y_a \frac{\prod_1^n (a - \beta_\nu)}{\prod_1^n (a - \alpha_\mu)}$$

является таким решением уравнения (1), которое имеет при $r \rightarrow \infty$ асимптотику (5), то есть F_a — решение Йоста. Согласно (3) и (7) F_a можно представить в виде

$$F_{-k,l}(a, r) = \frac{y_{-k,l}(a, r)}{R_{k,l}(a)}. \quad (17)$$

Покажем, что решение Φ_a уравнения (1), построенное по аналогии с (6) в виде

$$\Phi_a = \frac{1}{2ik} [f_{k,l}(a) y_{-k,l}(a, r) - f_{-k,l}(a) y_{k,l}(a, r)], \quad (18)$$

является регулярным решением. Для этого определим асимптотику (18) при $r \rightarrow 0$. В результате подстановки (12) в (18) найдем

$$\Phi_a = \varphi_a + K_\nu B_{\nu a} = \frac{\varphi_a}{|x_{\nu\mu}|} \left| x_{\nu\mu} - \frac{f_\mu B_{\nu a}}{\varphi_a} \right|,$$

где

$$B_{\nu a} = \frac{[\varphi_\nu; \varphi_a]}{\beta_\nu - a}.$$

Рассмотрим элемент

$$x_{\nu\mu} - \frac{f_\mu B_{\nu a}}{\varphi_a} = x_{\nu\mu} \left\{ 1 - \frac{f_\mu [\varphi_\nu; \varphi_a] (\beta_\nu - \alpha_\mu)}{\varphi_a [\varphi_\nu; f_\mu] (\beta_\nu - a)} \right\}.$$

На основании (4) выражение

$$\frac{f_\mu [\varphi_\nu; \varphi_a]}{\varphi_a [\varphi_\nu; f_\mu]} = \frac{[\ln(\varphi_a/\varphi_\nu)]'}{[\ln(f_\mu/\varphi_\nu)]'} \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow 0$, если $f_{-k,l}(\alpha_\mu) \neq 0$. Для отталкивающего кулоновского потенциала связанные состояния отсутствуют, поэтому $f_{-k,l}(\alpha_\mu) \neq 0$. Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(x_{\nu\mu} - \frac{f_\mu B_{\nu a}}{\varphi_a} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} x_{\nu\mu}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \Phi_a = \lim_{r \rightarrow 0} \varphi_a,$$

то есть Φ_a — регулярное решение УШ (1).

После подстановки (17) в (18) с последующим устремлением $r \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}(a, r) &\approx \exp \{i[\eta_{k,l}(a) + \delta_{k,l}(a)]\} \frac{f_{-k,l}(a) R_{-k,l}(a)}{k} \times \\ &\times \sin \left[kr - \frac{a}{2k} \ln 2kr + \eta_{k,l}(a) + \delta_{k,l}(a) \right], \end{aligned}$$

где

$$\frac{f_{k,l}(a) R_{k,l}(a)}{f_{-k,l}(a) R_{-k,l}(a)} = S_{k,l}^0(a) \exp [2i\delta_{k,l}(a)]$$

есть матрица рассеяния (3). В соответствии с (9), (10) и (16) потенциал

$$\begin{aligned} V(r) &= - \left[\frac{2}{r} \left(- \frac{f_{\mu} \tilde{x}_{\nu\mu} \varphi_{\nu}}{|x_{\nu\mu}|} \right)' - \frac{f_{\mu} \tilde{x}_{\nu\mu} \varphi_{\nu}}{r^2 |x_{\nu\mu}|} \right] = - \left[\frac{2}{r} \left(\frac{r x'_{\nu\mu} \tilde{x}_{\nu\mu}}{|x_{\nu\mu}|} \right)' - \frac{x'_{\nu\mu} \tilde{x}_{\nu\mu}}{r |x_{\nu\mu}|} \right] = \\ &= - \left[\frac{2}{r} \left(\frac{|x_{\nu\mu}|'}{|x_{\nu\mu}|} \right)' - \frac{|x_{\nu\mu}|'}{r |x_{\nu\mu}|} \right] = - \frac{2}{\sqrt{r}} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} \frac{d}{dr} \ln |x_{\nu\mu}| \right). \quad (19) \end{aligned}$$

Если потенциал $V(r)$ веществен при $r > 0$, то из (1) и (5) следуют условия сопряжения $f_{-k,l}(a) = f_{k,l}^*(a^*)$, $R_{-k,l}(a) = R_{k,l}^*(a^*)$, а также условие унитарности S -матрицы $S_{k,l}^{-1}(a) = S_{k,l}^*(a^*)$.

Итак, выше установлена следующая процедура решения обратной задачи. Если матрица рассеяния на основе экспериментальных данных допускает представление в виде выражений (3), то соответствующие ей решение и потенциал УШ (1) можно вычислить по формулам (12) и (19).

1.2. Случай йостовских решений свободного УШ, выбранных в качестве базисных для модельного потенциала. Другой алгебраический вариант построения взаимодействия по фазовым сдвигам при различных ФЗ кулоновской константы связи рассмотрен в [18], где в качестве свободных решений УШ, с помощью которых восстанавливается $V(r)$, выбраны йостовские решения $f_{\pm k,l}(a, r)$. В этом случае потенциал строится не по функции $R_{k,l}(a)$, а непосредственно по матрице рассеяния $S_{k,l}(a)$. Приведем полученные в [18] результаты в готовом виде.

Пусть матрица рассеяния представима в виде

$$S_{k,l}(a) = S_{k,l}^0(a) \left\{ \frac{\prod_1^n [a - \alpha_{\mu}(k, l)]}{\prod_1^n [a - \beta_{\nu}(k, l)]} \right\}^2,$$

где α_{μ} и β_{ν} — нули и полюсы S -матрицы, расположение которых зависит от налагаемых на потенциал условий. Тогда потенциал УШ (1) равен

$$V(r) = - \frac{2}{\sqrt{r}} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} \frac{d}{dr} \ln |y_{\nu\mu}(r)| \right),$$

где $|y_{\nu\mu}(r)|$ — определитель с элементами

$$y_{\nu\mu}(r) = \frac{[f_{k,l}(\beta_{\nu}, r); f_{-k,l}(\alpha_{\mu}, r)]}{\beta_{\nu} - \alpha_{\mu}}.$$

Как отмечено в [9], решение обратной задачи с помощью точно решаемых моделей баргмановского типа оправданно, как правило, лишь при использовании приближений высокого порядка (большого числа полюсов матрицы рассеяния). Для решения обратной задачи в нетрадиционной постановке необходим фазовый анализ, учитывающий зарядовое расщепление фазовых сдвигов. К сожалению, фазовый анализ обычно проводят без учета кулоновского расщепления фазовых сдвигов и, следовательно, в настоящее время возможности конкретных численных расчетов с помощью предложенного метода весьма ограничены. Экспериментальные данные по фазовому анализу позволяют восстанавливать потенциал только в однополюсном приближении. Такого рода расчеты были сделаны в [19] по восстановлению квазипотенциала $\pi^\pm p$ -взаимодействия в состоянии S_{31} при энергиях 263,7 и 310 МэВ в л.с. интегральным методом Гельфанда–Левитана и в [20] по определению pN -потенциала в состоянии 1S_0 при фиксированных значениях энергии от 10 до 100 МэВ в с.д.м. с помощью алгебраического метода. Так как исходные данные расчетов неполны, то полученные в работах [19, 20] результаты можно рассматривать только как иллюстрацию применения методов решения обратной задачи в нетрадиционной постановке.

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ЭНЕРГИИ, КВАДРАТА ОРБИТАЛЬНОГО МОМЕНТА И КУЛОНОВСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ В ИСХОДНЫХ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ

До последнего времени обратная задача квантовой теории рассеяния была рассмотрена в частных постановках, когда потенциал восстанавливается по спектральным характеристикам: 1) при $l = \text{const}$ и $a = \text{const}$, 2) при $E = \text{const}$ и $a = \text{const}$, 3) при $E = \text{const}$ и $l = \text{const}$. Во всех случаях частной постановки обратной задачи восстанавливаемый потенциал оказывается зависящим от ФЗ фиксированных параметров. Эта зависимость естественна, поскольку в качестве промежуточного источника информации при решении обратной задачи служат полюсы S -матрицы в комплексной плоскости переменного параметра, траектории которых являются функциями ФЗ остальных спектральных параметров. Как отмечено в [6], условия совместности, которые следует наложить на различные данные рассеяния, чтобы получить один и тот же потенциал, оказываются неизвестными в рамках частных постановок обратной задачи.

Впервые вариант обратной задачи, в котором энергия и квадрат орбитального момента в исходных данных линейно зависимы, был предложен для классической [21] и квазиклассической [22] теории рассеяния. Затем в [13] были получены обобщенные интегральные уравнения Гельфанда–Левитана для квантовой обратной задачи при $AE + Bl(l + 1) = \text{const}$ и $a = 0$. В этом

случае удается построить E - и l -независимые потенциалы, которые, однако, зависят от физических значений кулоновской константы связи рассматриваемой системы.

Существенную роль в математическом аппарате обратной задачи играют преобразования Дарбу–Крама–Крейна [9], позволяющие непосредственно преобразовать известное решение УШ с модельным потенциалом так, чтобы получить решения, соответствующие другим потенциалам. Эти преобразования не зависят от существования уравнений Гельфанда–Левитана или Марченко. Поэтому они используются как вспомогательное средство при доказательствах в теории обратной задачи. Вариант преобразований Дарбу–Крама–Крейна, когда УШ содержит суперпозицию центробежно-кулоновского и ядерного потенциалов, рассмотрен в [23].

Обобщенный вариант обратной задачи имеет тесную связь с суперсимметричной квантовой механикой, которая выражается в схожести формул, связывающих между собой соответствующие гамильтонианы и волновые функции [24, 25]. При этом в подходе суперсимметричной квантовой механики возможно установление группы преобразований суперпотенциала, при которых гамильтонианы с преобразованным и исходным (модельным) потенциалами связаны друг с другом при помощи преобразования Дарбу–Крама–Крейна.

В данном разделе изложен обобщенный алгебраический метод обратной задачи теории потенциального рассеяния заряженных частиц для случая, когда в УШ энергия, квадрат орбитального момента и кулоновская константа связи, при которых известны исходные данные рассеяния, линейно зависимы. В результате получены формулы для восстановления k -, l - и a -независимого потенциала как по функции Йоста, так и непосредственно по матрице рассеяния. В качестве примера использования результатов обобщенного варианта обратной задачи рассмотрены также вопросы о связи знаков центрального потенциала и обусловленной его действием фазы рассеяния по переменным k , l и a . Изложенные здесь результаты приведены в работах [26–29].

2.1. Случай регулярного и одного из йостовских решений свободного УШ, выбранных в качестве базисных для модельного потенциала. Рассмотрим УШ (1), где $l = \lambda - 1/2$. Здесь и далее вместо $\varphi_{k,l}(a, r)$, $f_{\pm k,l}(a, r)$, $f_{\pm k,l}(a)$, $\delta_{k,l}(a)$, $S_{k,l}(a)$ использованы следующие обозначения: $\varphi(\lambda, k, a, r)$, $f(\lambda, \pm k, a, r)$, $f(\lambda, \pm k, a)$, $\delta(\lambda, k, a)$, $S(\lambda, k, a)$. В дальнейшем также считаем, что параметры УШ принимают физические значения, то есть $\lambda = 1/2, 3/2, \dots$; $0 \leq k < \infty$ и $a = \frac{2mzZe^2}{\hbar^2}$, $z, Z = 0, 1, \dots$. Пусть квантовому состоянию системы соответствует в линейном векторном пространстве $\mathbf{L}(\lambda^2, k^2, a)$ некоторая точка $M(\lambda^2, k^2, a)$, координаты которой характеризуют ФЗ параметров системы. Тогда изменение состояния системы связано с «движением» точки M в пространстве \mathbf{L} . Ограничимся рассмотрением простейшего

«движения» — прямолинейного. В этом случае координаты точки M связаны линейной зависимостью:

$$\frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{-A} = \frac{k^2 - k_0^2}{B} = \frac{a - a_0}{-C} = t, \quad (20)$$

где $-A, B, -C$ — проекции направляющего вектора прямой, t — параметр «движения». Координаты точки $M_0(\lambda_0^2, k_0^2, a_0)$ характеризуют ФЗ параметров исходного состояния системы ($t = 0$).

Воспользуемся принципом суперпозиции при рассмотрении «движения» точки $M(\lambda^2, k^2, a)$ вдоль прямой (20), в соответствии с которым результирующее «перемещение» этой точки представляет собой сумму «перемещений» ее вдоль направлений, параллельных координатным осям. В этом случае точка M является точкой пересечения прямых:

$$\begin{cases} \lambda^2 = \lambda_0^2 - At, \\ k^2 = k_0^2 \quad (B = 0), \\ a = a_0 \quad (C = 0), \end{cases} \quad \begin{cases} k^2 = k_0^2 + Bt, \\ \lambda^2 = \lambda_0^2 \quad (A = 0), \\ a = a_0 \quad (C = 0), \end{cases} \quad \begin{cases} a = a_0 - Ct, \\ \lambda^2 = \lambda_0^2 \quad (A = 0), \\ k^2 = k_0^2 \quad (B = 0), \end{cases} \quad (21)$$

данные рассеяния вдоль которых соответствуют обратным задачам по переменным λ, k и a . Таким образом, координаты точки M характеризуют состояние системы, одинаковое для указанных частных постановок обратной задачи при $t \neq 0$.

Введем стандартным образом матрицу рассеяния

$$S(\lambda, k, a) = \exp \{2i[\eta(\lambda, k, a) + \delta(\lambda, k, a)]\}, \quad (22)$$

$$\eta(\lambda, k, a) = \frac{1}{2i} \ln \frac{f(\lambda, k, a)}{f(\lambda, -k, a)}, \quad \delta(\lambda, k, a) = \frac{1}{2i} \ln \frac{R(\lambda, k, a)}{R(\lambda, -k, a)},$$

где $\eta(\lambda, k, a)$ — фаза рассеяния для центробежного и кулоновского потенциалов; $\delta(\lambda, k, a)$ — добавочный фазовый сдвиг, обусловленный действием потенциала $V(r)$; $f(\lambda, \pm k, a)$ — функции Йоста свободного УШ (1); $R(\lambda, \pm k, a)$ — «ядерные» функции Йоста.

Известно, что полюс S -матрицы в комплексной плоскости параметра УШ соответствует резонансу системы, если его мнимая часть мала, а вещественная часть равна ФЗ этого параметра. При исследовании аналитических свойств матрицы рассеяния по комплексным переменным λ и k установлено, в частности, что полюсу S -матрицы на комплексной λ -плоскости при физическом $k > 0$ ($a = 0$) можно сопоставить полюс на комплексной k -плоскости при ФЗ λ [4]. Аналогично в [14] показано, что полюсу S -матрицы на комплексной a -плоскости при ФЗ k и λ можно сопоставить

полос на комплексной k -плоскости при ФЗ a и λ . Поэтому в общем случае матрицы рассеяния $S(\lambda, k, a)$ получаем, что полюсу S -матрицы на комплексной плоскости какого-либо параметра при физических значениях остальных двух параметров можно сопоставить полюс на комплексной плоскости любого другого параметра при ФЗ оставшихся параметров. Таким образом, если $\lambda_\nu(k, a)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) — «ядерные» полюсы S -матрицы на комплексной λ -плоскости при физических значениях k и a , то им можно сопоставить полюсы $k_\nu(\lambda, a)$ на комплексной k -плоскости при ФЗ λ и a , а тем — полюсы $a_\nu(\lambda, k)$ на a -плоскости при ФЗ λ и k . Следовательно, комплексные постоянные $\lambda_\nu(k, a)$, $k_\nu(\lambda, a)$ и $a_\nu(\lambda, k)$ соответствуют одним и тем же состояниям системы и определяют одни и те же полюсы S -матрицы на комплексных λ -, k - и a -плоскостях.

Ниже показано, как на основе исходных данных рассеяния при линейной взаимозависимости между λ^2, k^2 и a можно восстановить потенциал $V(r)$ по известным значениям полюсов $\lambda_\nu(k, a)$, $k_\nu(\lambda, a)$, $a_\nu(\lambda, k)$ и нулей $\lambda_\mu(k, a)$, $k_\mu(\lambda, a)$, $a_\mu(\lambda, k)$, $\mu = n+1, n+2, \dots, 2n$, «ядерной» функции Йоста $R(\lambda, k, a)$. С помощью обозначений

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \varphi(\lambda, k, a, r), \lambda_\nu = \lambda_\nu(k, a), k_\nu = k_\nu(\lambda, a), a_\nu = a_\nu(\lambda, k), \\ \varphi_\nu(r) &= \varphi(\lambda_\nu, k_\nu, a_\nu, r), \\ f(r) &= f(\lambda, -k, a, r), \lambda_\mu = \lambda_\mu(k, a), k_\mu = k_\mu(\lambda, a), a_\mu = a_\mu(\lambda, k), \\ f_\mu(r) &= f(\lambda_\mu, -k_\mu, a_\mu, r)\end{aligned}\quad (23)$$

введем следующие функции:

$$X_\nu(r) = \frac{[\varphi_\nu(r); f(r)]}{t_\nu}; \quad X_{\nu\mu}(r) = \frac{[\varphi_\nu(r); f_\mu(r)]}{t_{\nu\mu}}, \quad (24)$$

где в соответствии с (20)

$$\begin{aligned}t_\nu &= \frac{\lambda^2 - \lambda_\nu^2}{-A} = \frac{k^2 - k_\nu^2}{B} = \frac{a - a_\nu}{-C}, \\ t_{\nu\mu} &= \frac{\lambda_\mu^2 - \lambda_\nu^2}{-A} = \frac{k_\mu^2 - k_\nu^2}{B} = \frac{a_\mu - a_\nu}{-C},\end{aligned}\quad (25)$$

то есть полюсы «ядерной» S -матрицы суть координаты точек на прямой в \mathbf{L} -пространстве.

На основании (23)–(25) и соотношений

$$\varphi_\nu(r)f''(r) - f(r)\varphi_\nu''(r) = \left(k_\nu^2 - k^2 - \frac{\lambda_\nu^2 - \lambda^2}{r^2} - \frac{a_\nu - a}{r}\right)\varphi_\nu(r)f(r),$$

следующих из (1) при $V(r) = 0$, получим

$$\frac{dX_\nu(r)}{dr} = -h(r)\varphi_\nu(r)f(r), \quad h(r) = (A/r^2) + B + (C/r). \quad (26)$$

Найдем потенциал $V(r)$, при котором решение $y(r)$ УШ (1) можно представить в виде

$$y(r) = f(r) + \sum_{\nu} K_{\nu}(r)X_{\nu}(r), \quad (27)$$

где $K_{\nu}(r)$ — некоторые, пока неизвестные функции. Для этого подставим (27) в (1). Если учесть, что $f(r)$ — решение уравнения (1) при $V(r) = 0$, то на основании (24)–(26) получаем

$$\sum_{\nu} C_{\nu}(r)X_{\nu}(r) = \left[V(r) + 2\sqrt{h(r)} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{h(r)} \sum_{\nu} K_{\nu}(r)\varphi_{\nu}(r) \right) f(r) \right], \quad (28)$$

где

$$C_{\nu}(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + k_{\nu}^2 - \frac{\lambda_{\nu}^2 - 1/4}{r^2} - \frac{a_{\nu}}{r} - V(r) \right) K_{\nu}(r). \quad (29)$$

Правая часть равенства (28) обращается в нуль, если в УШ (1) выбрать потенциал $V(r)$ в виде

$$V(r) = -2\sqrt{h(r)} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{h(r)} \sum_{\nu} K_{\nu}(r)\varphi_{\nu}(r) \right). \quad (30)$$

Функции $K_{\nu}(r)$ могут быть определены из того, что при $k = k_{\mu}$, $\lambda = \lambda_{\mu}$ и $a = a_{\mu}$ решение (27) обращается в нуль, то есть $y_{\mu}(r) = 0$. Тогда $K_{\nu}(r)$ — решение системы уравнений

$$\sum_{\nu} K_{\nu}(r)X_{\nu\mu}(r) = -f_{\mu}(r). \quad (31)$$

Действительно, полученная в этом случае из левой части равенства (28) система однородных уравнений

$$\sum_{\nu} X_{\nu\mu}(r)C_{\nu}(r) = 0$$

относительно $C_{\nu}(r)$ имеет только тривиальное решение $C_{\nu}(r) = 0$, так как $|X_{\nu\mu}(r)| \neq 0$, если «ядерная» функция Йоста $R(\lambda, k, a)$ не содержит кратных нулей и полюсов. Поэтому, согласно (29), $K_{\nu}(r)$ — решение уравнения (1) с потенциалом (30). Следовательно, $y(r)$ — также решение этого уравнения с указанным потенциалом. Если из (31) найти $K_{\nu}(r)$ и подставить в (30), то на основании (26) потенциал

$$V(r) = -2\sqrt{h(r)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{h(r)}} \frac{d}{dr} \ln |X_{\nu\mu}(r)| \right). \quad (32)$$

Чтобы построить решение Йоста УШ (1) с потенциалом (32), найдем асимптотику решения (27) при $r \rightarrow \infty$. Для этого представим (27) с помощью (31) в виде

$$y(r) = \frac{f(r)}{|X_{\nu\mu}(r)|} \left| X_{\nu\mu}(r) - \frac{f_{\mu}(r)X_{\nu}(r)}{f(r)} \right|. \quad (33)$$

На основании (21) и (25) из элементов $t_{\nu\mu}^{-1}$ можно составить диагональную блочную матрицу

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} -A \\ \lambda_{\mu}^2 - \lambda_{\nu}^2 \end{array} \right] & [0] & [0] \\ [0] & \left[\begin{array}{c} B \\ k_{\mu}^2 - k_{\nu}^2 \end{array} \right] & [0] \\ [0] & [0] & \left[\begin{array}{c} -C \\ a_{\mu} - a_{\nu} \end{array} \right] \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Выражение (34) отражает то обстоятельство, что полюсы «ядерной» S -матрицы на комплексных λ -, k - и a -плоскостях характеризуют состояния системы, одинаковые для частных постановок обратной задачи при $t_{\nu\mu} \neq 0$. Тогда в соответствии с (24) и (34) $X_{\nu\mu}(r)$ — элемент блочной матрицы $X(r)$, равной прямой сумме

$$X(r) = \frac{1}{3} (X(k, a, r) \oplus X(\lambda, a, r) \oplus X(\lambda, k, r))$$

квадратных подматриц, идущих вдоль ее диагонали и составленных из элементов

$$\begin{aligned} X_{\nu\mu}(k, a, r) &= \frac{A[\varphi(\lambda_{\nu}, k, a, r); f(\lambda_{\mu}, -k, a, r)]}{\lambda_{\nu}^2 - \lambda_{\mu}^2}, \\ X_{\nu\mu}(\lambda, a, r) &= \frac{B[\varphi(\lambda, k_{\nu}, a, r); f(\lambda, -k_{\mu}, a, r)]}{k_{\mu}^2 - k_{\nu}^2}, \\ X_{\nu\mu}(\lambda, k, r) &= \frac{C[\varphi(\lambda, k, a_{\nu}, r); f(\lambda, -k, a_{\mu}, r)]}{a_{\nu} - a_{\mu}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Следовательно,

$$|X_{\nu\mu}(r)| = (1/3)^{3n} |X_{\nu\mu}(k, a, r)| |X_{\nu\mu}(\lambda, a, r)| |X_{\nu\mu}(\lambda, k, r)|. \quad (36)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 & \left| X_{\nu\mu}(r) - \frac{f_{\mu}(r) X_{\nu}(r)}{f(r)} \right| = (1/3)^{3n} \times \\
 & \times \left| X_{\nu\mu}(k, a, r) - \frac{A f(\lambda_{\mu}, -k, a, r) [\varphi(\lambda_{\nu}, k, a, r); f(r)]}{f(r) (\lambda_{\nu}^2 - \lambda^2)} \right| \times \\
 & \times \left| X_{\nu\mu}(\lambda, a, r) - \frac{B f(\lambda, -k_{\mu}, a, r) [\varphi(\lambda, k_{\nu}, a, r); f(r)]}{f(r) (k^2 - k_{\nu}^2)} \right| \times \\
 & \times \left| X_{\nu\mu}(\lambda, k, r) - \frac{C f(\lambda, -k, a_{\mu}, r) [\varphi(\lambda, k, a_{\nu}, r); f(r)]}{f(r) (a_{\nu} - a)} \right|.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Если учесть соотношение (6), то на основании (35)–(37) и граничных условий (5) выражение (33) примет вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} y(r) = R_{k,a}(\lambda) R_{k,a}(-\lambda) R_{\lambda,a}(k) R_{\lambda,k}(a) \lim_{r \rightarrow \infty} f(r),$$

$$\begin{aligned}
 R_{k,a}(\lambda) &= \frac{\prod[\lambda - \lambda_{\mu}(k, a)]}{\prod_{\nu}^{\mu} [\lambda - \lambda_{\nu}(k, a)]}, \\
 R_{\lambda,a}(k) &= \frac{\prod[k - k_{\mu}(\lambda, a)]}{\prod_{\nu}^{\mu} [k - k_{\nu}(\lambda, a)]}, \\
 R_{\lambda,k}(a) &= \frac{\prod[a - a_{\mu}(\lambda, k)]}{\prod_{\nu}^{\mu} [a - a_{\nu}(\lambda, k)]}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Тогда функция

$$F(r) = \frac{y(r)}{R_{k,a}(\lambda) R_{k,a}(-\lambda) R_{\lambda,a}(k) R_{\lambda,k}(a)} \tag{39}$$

является решением уравнения (1), которое имеет при $r \rightarrow \infty$ асимптотику (5). Таким образом, в соответствии с (23), (28) и (39) функции

$$F(\lambda, \mp k, a, r) = \frac{y(\lambda, \mp k, a, r)}{R_{\pm k,a}(\lambda) R_{\pm k,a}(-\lambda) R_{\lambda,a}(\pm k) R_{\lambda,\pm k}(a)} \tag{40}$$

представляют собой решения Йоста УШ (1) с потенциалом (32).

Построим решение $\tilde{\Phi}(r)$ уравнения (1) по аналогии с (6) в виде

$$\tilde{\Phi}(r) = \frac{1}{2ik} [f(\lambda, k, a) y(\lambda, -k, a, r) - f(\lambda, -k, a) y(\lambda, k, a, r)] \quad (41)$$

и определим асимптотику при $r \rightarrow 0$. Для этого подставим (27) в (41). С учетом (24), (31) и (6) получим

$$\tilde{\Phi}(r) = \frac{\varphi(r)}{|X_{\nu\mu}(r)|} \left| X_{\nu\mu}(r) - \frac{f_{\mu}(r) b_{\nu}(r)}{\varphi(r)} \right|, \quad b_{\nu}(r) = \frac{[\varphi_{\nu}(r); \varphi(r)]}{t_{\nu}}. \quad (42)$$

Если учесть, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(\lambda, -k, a, r) \cdot r^{\lambda-1/2} = \frac{f(\lambda, -k, a)}{2\lambda},$$

то на основании (36), (42) и граничного условия (4) найдем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{\Phi}(r) = R_{k,a}(-\lambda) \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r), \quad (43)$$

где $R_{k,a}(-\lambda)$ определено выражением (38) для $R_{k,a}(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow -\lambda$. В соответствии с (43) и обозначениями (23) функция

$$\Phi(\lambda, k, a, r) = \frac{\tilde{\Phi}(\lambda, k, a, r)}{R_{k,a}(-\lambda)} \quad (44)$$

является регулярным решением УШ (1) с потенциалом (32).

Подставим (40) и (44) в (41). Тогда, согласно (5), при $r \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, k, a, r) \approx \exp \{i[\eta(\lambda, k, a) + \delta(\lambda, k, a)]\} \frac{f(\lambda, -k, a) R(\lambda, -k, a)}{k} \times \\ \times \sin \left[kr - \frac{a}{2k} \ln 2kr + \eta(\lambda, k, a) + \delta(\lambda, k, a) \right]; \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$\frac{f(\lambda, k, a) R(\lambda, k, a)}{f(\lambda, -k, a) R(\lambda, -k, a)} = \exp \{2i[\eta(\lambda, k, a) + \delta(\lambda, k, a)]\}$$

есть матрица рассеяния (22), а «ядерная» функция Йоста

$$R(\lambda, k, a) = R_{k,a}(\lambda) R_{\lambda,a}(k) R_{\lambda,k}(a) \quad (46)$$

на основании (38) является рациональной функцией параметров λ , k и a .

В зависимости от ориентации направляющего вектора прямой (20) возможны частные случаи задания исходных данных рассеяния при фиксированных значениях одного либо двух спектральных параметров. Если данные

рассеяния заданы вдоль прямых (21), то формулы (32), (45) и (46) переходят в соответствующие формулы для потенциала и функции Йоста обратной задачи по переменным k [11], λ [12] и a [17]. Вариант обратной задачи для случая $C = 0$ ($Ak^2 + B\lambda^2 = \text{const}$, $a = \text{const}$) при $a = 0$ с помощью метода Гельфанда–Левитана решен в работе [13].

2.2. Случай йостовских решений свободного УШ, выбранных в качестве базисных для модельного потенциала. Другой эквивалентный обобщенный алгебраический вариант восстановления потенциала баргмановского класса по фазовым сдвигам при различных значениях параметров λ , k и a , удовлетворяющих уравнению (20), предложен в работе [27]. В этом варианте в качестве свободных решений УШ, с помощью которых построен потенциал взаимодействия, использованы йостовские решения $f(\lambda, \pm k, a, r)$. В этом случае потенциал строится непосредственно по матрице рассеяния. Полученные в [27] результаты заключаются в следующем.

Пусть матрица рассеяния представима в виде

$$S(\lambda, k, a) = S^0(\lambda, k, a) \exp[2i\delta(\lambda, k, a)],$$

где

$$\delta(\lambda, k, a) = -i \ln \left\{ \left[\frac{\prod_{\mu} (\lambda^2 - \lambda_{\mu}^2)}{\prod_{\nu} (\lambda^2 - \lambda_{\nu}^2)} \right]^{1/2} \frac{\prod_{\mu} (k - k_{\mu}) \prod_{\mu} (a - a_{\mu})}{\prod_{\nu} (k - k_{\nu}) \prod_{\nu} (a - a_{\nu})} \right\} \quad (47)$$

есть добавочный фазовый сдвиг, обусловленный действием потенциала $V(r)$; λ_{ν} , k_{ν} , a_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots, n$), а также λ_{μ} , k_{μ} , a_{μ} ($\mu = n + 1, n + 2, \dots, 2n$) — комплексные постоянные, расположение которых на λ -, k -, a -плоскостях зависит от налагаемых на потенциал $V(r)$ ограничений.

Тогда искомый потенциал можно вычислить по формуле

$$V(r) = -2\sqrt{h(r)} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{h(r)}} \frac{d}{dr} \ln |Y_{\nu\mu}(r)| \right), \quad (48)$$

где определитель $|Y_{\nu\mu}|$ равен

$$\begin{aligned} |Y_{\nu\mu}(r)| &= (1/3)^{3n} |Y_{\nu\mu}(k, a, r)| |Y_{\nu\mu}(\lambda, a, r)| |Y_{\nu\mu}(\lambda, k, r)|, \\ Y_{\nu\mu}(k, a, r) &= \frac{A[f(\lambda_{\nu}, k, a, r); f(\lambda_{\mu}, -k, a, r)]}{\lambda_{\nu}^2 - \lambda_{\mu}^2}, \\ Y_{\nu\mu}(\lambda, a, r) &= \frac{B[f(\lambda, k_{\nu}, a, r); f(\lambda, -k_{\mu}, a, r)]}{k_{\mu}^2 - k_{\nu}^2}, \\ Y_{\nu\mu}(\lambda, k, r) &= \frac{C[f(\lambda, k, a_{\nu}, r); f(\lambda, -k, a_{\mu}, r)]}{a_{\nu} - a_{\mu}}; \end{aligned} \quad (49)$$

функция $h(r)$ определена соотношением (26); A, B, C — параметры уравнения прямой (20).

Резюмируя изложенное, можно сделать следующий вывод: если фаза рассеяния $\delta(\lambda, k, a)$, обусловленная действием потенциала $V(r)$ УШ (1), представлена рациональной функцией (47), нули и полюсы которой расположены на прямой (20), то с помощью (48) можно построить λ -, k - и a -независимый потенциал $V(r)$. Функции $Y_{\nu\mu}(r)$ могут быть определены по йостовским решениям $f(\lambda, \pm k, a, r) = W_{\pm \frac{ia}{2k}, \lambda}(\pm 2ikr)$, где $W_{\pm \frac{ia}{2k}, \lambda}$ — функции Уиттекера, являющиеся решениями уравнения (1) при $V(r) = 0$.

2.3. Влияние знака потенциала на расположение полюсов S -матрицы и поведение фазы рассеяния. Установим связь между знаками потенциала $V(r)$ и фазы рассеяния $\delta(\lambda, k, a)$ на основе частных случаев обобщенного варианта обратной задачи [27–29]. Ранее было показано, что в зависимости от ориентации направляющего вектора прямой (20) в пространстве $\mathbf{L}(\lambda^2, k^2, a)$ среди прочих возможны следующие частные случаи задания исходных данных рассеяния: 1) $A \neq 0, B = C = 0$; 2) $B \neq 0, A = C = 0$; 3) $C \neq 0, A = B = 0$. Далее рассмотрены вопросы о связи знаков потенциала и фаз рассеяния $\delta_{k,a}(\lambda)$, $\delta_{\lambda,a}(k)$ и $\delta_{\lambda,k}(a)$, обусловленных его действием для случаев 1–3.

1) Для вещественного потенциала из (47) следует, что «ядерная» матрица рассеяния, удовлетворяющая условию унитарности, имеет вид

$$\exp [2i\delta_{k,a}(\lambda)] = \prod_{\nu} \frac{\lambda^2 - \lambda_{\nu}^{*2}}{\lambda^2 - \lambda_{\nu}^2}. \quad (50)$$

Для выяснения характера влияния положения полюсов $\lambda_{\nu} = \text{Re } \lambda_{\nu} + i \text{Im } \lambda_{\nu}$ S -матрицы (50) на поведение $\delta_{k,a}(\lambda)$ найдем фазу и ее производную по λ :

$$\delta_{k,a}(\lambda) = \sum_{\nu} \arctg \frac{2\text{Re } \lambda_{\nu} \text{Im } \lambda_{\nu}}{\lambda^2 - \text{Re}^2 \lambda_{\nu} + \text{Im}^2 \lambda_{\nu}}, \quad (51)$$

$$\frac{d\delta_{k,a}(\lambda)}{d\lambda} = -4\lambda \sum_{\nu} \frac{\text{Re } \lambda_{\nu} \text{Im } \lambda_{\nu}}{(\lambda^2 - \text{Re}^2 \lambda_{\nu} + \text{Im}^2 \lambda_{\nu})^2 + (2 \text{Re } \lambda_{\nu} \text{Im } \lambda_{\nu})^2}.$$

Видно, что $\delta_{k,a}(\lambda)$ монотонно убывает с ростом λ , если $\text{Re } \lambda_{\nu} \text{Im } \lambda_{\nu} > 0$ для всех ν . Поскольку $\text{Re } \lambda_{\nu} > 0$ (для резонансных полюсов $\text{Re } \lambda_{\nu}$ близки к ФЗ λ), то монотонно убывающей фазе $\delta_{k,a}(\lambda)$ соответствуют полюсы «ядерной» S -матрицы (50), расположенные в верхней λ -полуплоскости.

На основании (48)–(50)

$$V(r) = \sum_{\nu} V_{\nu}(r), \quad V_{\nu}(r) = -\frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \ln Y_{\nu\nu^*}(k, a, r) \right). \quad (52)$$

Функции $Y_{\nu\nu^*}(k, a, r)$ удовлетворяют, согласно (5), условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Y_{\nu\nu^*}(k, a, r) = \frac{kA}{2 \operatorname{Re} \lambda_\nu \operatorname{Im} \lambda_\nu}. \quad (53)$$

Аналогично в соответствии с (5) и (26) найдем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{dY_{\nu\nu^*}(k, a, r)}{dr} = -A. \quad (54)$$

Тогда из (52)–(54) следует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r)r^3 = -\frac{4}{k} \sum_{\nu} \operatorname{Re} \lambda_\nu \operatorname{Im} \lambda_\nu. \quad (55)$$

Выражение (55) указывает на то, что притягивающему при больших r потенциалу соответствуют полюсы S -матрицы, расположенные в верхней λ -полуплоскости, которые, согласно (51), способствуют возрастанию фазы $\delta_{k,a}(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 1/2(l \rightarrow 0)$. При этом формулы (51) и (52) позволяют производить оценку парциального вклада полюсов S -матрицы в поведение $\delta_{k,a}(\lambda)$ и $V(r)$.

2) Установим связь знаков потенциала $V(r)$ и фазы $\delta_{\lambda,a}(k)$. В этом случае для вещественного потенциала матрица рассеяния, удовлетворяющая условию унитарности, имеет вид [30]:

$$\exp [2i\delta_{\lambda,a}(k)] = \prod_{\nu} \frac{(k - k_\nu^*)(k + k_\nu)}{(k - k_\nu)(k + k_\nu^*)}. \quad (56)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda,a}(k) &= \sum_{\nu} \operatorname{arctg} \frac{2k \operatorname{Im} k_\nu}{k^2 - |k_\nu|^2}, \\ \frac{d\delta_{\lambda,a}(k)}{dk} &= -2 \sum_{\nu} \frac{(k^2 - |k_\nu|^2) \operatorname{Im} k_\nu}{(k^2 - |k_\nu|^2)^2 + (2k \operatorname{Im} k_\nu)^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

В соответствии с (49) и (56) потенциал (48) равен

$$V(r) = \sum_{\nu} V_\nu(r), \quad V_\nu(r) = -2 \frac{d^2}{dr^2} \ln Y_{\nu\nu^*}(\lambda, a, r). \quad (58)$$

Функции $Y_{\nu\nu^*}(\lambda, a, r)$, согласно (5) и (49), удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} Y_{\nu\nu^*}(\lambda, a, r) \exp \left[-2(\operatorname{Im} k_\nu)r - \frac{a}{|k_\nu|^2} \left(\operatorname{Im} k_\nu \cdot \ln 2|k_\nu|r + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{Re} k_\nu \cdot \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} k_\nu}{\operatorname{Re} k_\nu} \right) \right] = -\frac{B}{2 \operatorname{Im} k_\nu}. \end{aligned} \quad (59)$$

Тогда из (58) и (59) следует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r)r^2 = 2a \sum_{\nu} \frac{\operatorname{Im} k_{\nu}}{|k_{\nu}|^2}. \quad (60)$$

Видно, что притягивающему при больших значениях r потенциалу $V(r)$ соответствуют расположенные в нижней части k -полуплоскости полюсы S -матрицы, которые описывают на основе (57) убывание фазы $\delta_{\lambda,a}(k)$ при $k \rightarrow 0$. Следовательно, знаки $\delta_{\lambda,a}(k)$ ($k \rightarrow 0$) и $V(r)$ ($r \rightarrow \infty$) противоположны. Противоположность знаков фазы и потенциала при $a = 0$ была отмечена еще в [31]. Таким образом, наличие отталкивающего кулоновского потенциала не влияет на связь знаков $\delta_{\lambda,a}(k)$ и $V(r)$ в случае, когда потенциал $V(r)$ оказывает слабое действие на рассеиваемую волну. Соотношения (57) и (58) позволяют также оценить парциальный вклад полюсов S -матрицы в поведение $\delta_{\lambda,a}(k)$ и $V(r)$.

3) Установим теперь связь между знаками вещественного потенциала $V(r)$ и фазы $\delta_{\lambda,k}(a)$. В этом случае на основании (47)

$$\delta_{\lambda,k}(a) = -i \ln \prod_{\nu} \frac{a - a_{\nu}^*}{a - a_{\nu}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_{\lambda,k}(a) &= 2 \sum_{\nu} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} a_{\nu}}{a - \operatorname{Re} a_{\nu}}, \\ \frac{d\delta_{\lambda,k}(a)}{da} &= -2 \sum_{\nu} \frac{\operatorname{Im} a_{\nu}}{(a - \operatorname{Re} a_{\nu})^2 + \operatorname{Im}^2 a_{\nu}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Из (48), (49) и (56) следует

$$V(r) = \sum_{\nu} V_{\nu}(r), \quad V_{\nu}(r) = -\frac{2}{\sqrt{r}} \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r} \frac{d}{dr} \ln Y_{\nu\nu^*}(\lambda, k, r) \right). \quad (62)$$

Функции $Y_{\nu\nu^*}(\lambda, k, r)$, согласно (5) и (49), удовлетворяют условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Y_{\nu\nu^*}(\lambda, k, r) \exp \left(\frac{\operatorname{Im} a_{\nu}}{k} \ln 2kr \right) = \frac{kC}{\operatorname{Im} a_{\nu}}. \quad (63)$$

Поэтому, в соответствии с (62) и (63),

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r)r^2 = -\frac{\sum_{\nu} \operatorname{Im} a_{\nu}}{k}. \quad (64)$$

Полученное выражение указывает на то, что притягивающему при больших значениях r потенциалу соответствуют полюсы S -матрицы, расположенные в верхней a -полуплоскости, которые на основании (61) описывают возрастание фазы при $a \rightarrow 0$. При этом формулы (61) и (62) позволяют оценить парциальный вклад полюсов S -матрицы в поведение $\delta_{\lambda,k}(a)$ и $V(r)$.

Итак, на основании полученных результатов можно сделать следующие выводы. Во-первых, знак потенциала при $r \rightarrow \infty$ (когда $V(r)$ оказывает слабое действие на рассеиваемую частицу) совпадает со знаками $\frac{d\delta_{k,a}(\lambda)}{d\lambda}$, $\frac{d\delta_{\lambda,k}(a)}{da}$ и противоположен знаку $\frac{d\delta_{\lambda,a}(k)}{dk}$. Во-вторых, если S -матрица содержит резонансный полюс на комплексной плоскости переменного параметра (вещественная часть полюса близка к резонансному физическому значению параметра, а его мнимая часть мала), то последний оказывает существенное влияние на поведение фазы рассеяния и потенциала. Действительно, в случае резонансного полюса при $\nu = r$ из (51), (57) и (61) следует

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\delta_{k,a}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda \approx \text{Re } \lambda_r} &\approx -\frac{1}{\text{Im } \lambda_r}, \quad \text{Im } \lambda_r \geq 0, \\ \left. \frac{d\delta_{\lambda,a}(k)}{dk} \right|_{k \approx \text{Re } k_r} &\approx -\frac{1}{\text{Im } k_r}, \quad \text{Im } k_r \leq 0, \\ \left. \frac{d\delta_{\lambda,k}(a)}{da} \right|_{a \approx \text{Re } a_r} &\approx -\frac{2}{\text{Im } a_r}, \quad \text{Im } a_r \geq 0, \end{aligned}$$

то есть полюс обуславливает более резкое изменение фазы вблизи резонансного физического значения переменного параметра. Формулы (55), (60) и (64) указывают на то, что резонансный полюс приводит также к более быстрому «затуханию» потенциала $V(r)$ при $r \rightarrow \infty$.

Изложенные выводы находят свое подтверждение в расчетах, проведенных на конкретных ядерных моделях при решении обратной задачи в комплексных λ -, k - и a -плоскостях [32–35]. Таким образом, по поведению известных из фазового анализа «ядерных» фазовых сдвигов при малых значениях переменного спектрального параметра λ , k или a можно, не решая непосредственно однопараметрическую обратную задачу, сделать определенные выводы о знаке потенциала $V(r)$ и характере его убывания при больших значениях r .

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В случае взаимодействия незаряженных частиц связь между задачей при $k = \text{const}$ и задачей при $\lambda = 1/2$ (s -рассеяние) рассмотрена в [4] с целью исследования аналитических свойств матрицы рассеяния в комплексной λ -плоскости. В дальнейшем под однопараметрической обратной задачей квантовой теории рассеяния будем понимать задачу, в которой исходные данные рассеяния определены для всех физических значений одного из спектральных параметров УШ при фиксированных значениях остальных параметров. Как отмечено ранее, полюсу S -матрицы на комплексной плоскости какого-либо параметра (λ , k или a) при физических значениях остальных двух параметров можно сопоставить полюс на комплексной плоскости любого другого параметра при физических значениях оставшихся параметров. Следовательно, квантовое состояние системы (например, резонанс) оказывается инвариантным по отношению к способу его описания с помощью полюса S -матрицы на комплексной λ -, k - или a -плоскости. Поэтому в результате преобразования спектральных параметров, аргумента и граничных условий решений УШ можно установить связь между однопараметрическими задачами теории потенциального рассеяния заряженных частиц.

В данном разделе ставится цель найти с помощью преобразований аналогии между однопараметрическими задачами, которая может быть использована, например, при установлении аналитических свойств S -матрицы по любому спектральному параметру λ , k или a при известных ее свойствах для одного из этих параметров, а также при решении однопараметрической обратной задачи рассеяния. Изложенные в этом разделе результаты опубликованы в работах [36–38].

Обозначим в УШ аргумент по переменным k , λ и a , соответственно, через x , r и ρ . Тогда однопараметрическое УШ можно представить в виде

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} - \frac{a}{x} - V_{\lambda,a}(x) \right) y(\lambda, k, a, x) = -k^2 y(\lambda, k, a, x), \quad (65)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{a}{r} - V_{k,a}(r) \right) u(\lambda, k, a, r) = \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} u(\lambda, k, a, r), \quad (66)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{\rho^2} - V_{k,\lambda}(\rho) \right) \psi(\lambda, k, a, \rho) = \frac{a}{\rho} \psi(\lambda, k, a, \rho), \quad (67)$$

где функции $y(\lambda, k, a, x)$, $u(\lambda, k, a, r)$ и $\psi(\lambda, k, a, \rho)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(\lambda, k, a, z) z^{-\lambda-1/z} = 1 \quad (\varphi = y, u, \psi \text{ от } z = x, r, \rho). \quad (68)$$

Нижние индексы потенциала $V(z)$, удовлетворяющего условию

$$\int_0^{\infty} z|V(z)| \exp(\alpha z) dz < \infty, \quad \alpha > 0,$$

указывают на его зависимость от физических значений фиксированных параметров.

3.1. Связь между задачами для переменных k и λ . Найдем связь между уравнениями (65) и (66). Для этого произведем в (66) замену переменных

$$r = \exp x, \quad u(\lambda, k, a, r) = \exp(x/2)U(\lambda, k, a, x). \quad (69)$$

На основании (66), (68) и (69) получим

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \exp(2x)[k^2 - a \exp(-x) - V_{k,a}(\exp x)] \right\} U(\lambda, k, a, x) = \\ = \lambda^2 U(\lambda, k, a, x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} U(\lambda, k, a, x) \exp(-\lambda x) = 1. \quad (70)$$

Если в уравнении (70) положить $k = 0$ и осуществить замену переменного спектрального параметра λ^2 на $-k^2$, то (70) станет аналогом уравнения (65) для случая s -рассеяния ($\lambda = 1/2$). Следовательно, задача при $k = 0$ и $a = \text{const}$ аналогична задаче при $\lambda = 1/2$ и $a = \text{const}$ с переменной $i\lambda$ вместо k и аргументом $\ln r$. Соответственно граничное условие (68) при $r \rightarrow 0$ переходит в граничное условие (70) при $x \rightarrow -\infty$. Указанная аналогия задач для переменных k и λ при $a = 0$ рассмотрена в [4, 6].

Связь между однопараметрическими уравнениями (65) и (66) можно установить также с помощью метода обратной задачи. Для этого воспользуемся, например, обобщенным алгебраическим вариантом обратной задачи с линейной взаимозависимостью спектральных параметров k^2 , λ^2 и a в исходных данных рассеяния [26]. На основании (32) и (35) соответствующие потенциалы для уравнений (65)–(67) имеют вид

$$V_{\lambda,a}(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln |X_{\nu\mu}(\lambda, a, x)|, \quad (71)$$

$$V_{k,a}(r) = -\frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \ln |X_{\nu\mu}(k, a, r)| \right), \quad (72)$$

$$V_{k,\lambda}(\rho) = -\frac{2}{\sqrt{\rho}} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{\rho} \frac{d}{d\rho} \ln |X_{\nu\mu}(\lambda, k, \rho)| \right), \quad (73)$$

где функции $X_{\nu\mu}(\lambda, a, x)$, $X_{\nu\mu}(k, a, r)$ и $X_{\nu\mu}(\lambda, k, \rho)$ выражаются через свободные регулярное и йостовское решения уравнений (65)–(67).

Если в (72) произвести замены аргумента $r = \exp x$ и спектрального параметра k на $i\lambda$, то получим

$$\exp(2x) V_{i\lambda,a}(\exp x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln |X_{\nu\mu}(i\lambda, a, \exp x)|. \quad (74)$$

Видно, что потенциал (74) аналогичен потенциалу (71). Это естественно, так как потенциал (74) соответствует решению обратной задачи для уравнения (70), аналогичного уравнению (65) для случая $\lambda = 1/2$. Таким образом, обратная задача в комплексной k -плоскости для случая s -рассеяния заряженных частиц аналогична обратной задаче в комплексной λ -плоскости с аргументом $\exp x$ и переменной $-k^2$.

Если в (65) осуществить преобразование

$$x = \ln r, \quad y(1/2, k, a, x) = \exp(-\ln r/2) Y(1/2, k, a, r) \quad (75)$$

и замену параметра k^2 на $-\lambda^2$, то получим уравнение

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \left[\frac{a}{\ln r} + V_a(\ln r) \right] \right\} Y(1/2, i\lambda, a, r) = \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} Y(1/2, i\lambda, a, r)$$

с граничным условием

$$\lim_{r \rightarrow 1} Y(1/2, i\lambda, a, r) (\ln r)^{-1} \exp(-\ln r/2) = 1,$$

которое аналогично уравнению (66) при $k = 0$. Эта аналогия обусловлена тем, что преобразование (75) является обратным по отношению к преобразованию (69).

3.2. Связь между задачами для переменных k и a . Установим связь между уравнениями (65) и (67). Для этого произведем в (67) замену переменных:

$$\rho = x^2, \quad \psi(\lambda, k, a, \rho) = \sqrt{x} \Psi(\lambda, k, a, x). \quad (76)$$

Согласно (67), (68) и (76) найдем

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + 4x^2 \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^4} - V_{k,\lambda}(x^2) \right] \right\} \Psi(\lambda, k, a, x) = 4a \Psi(\lambda, k, a, x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Psi(\lambda, k, a, x) x^{-2(\lambda+1/4)} = 1. \quad (77)$$

Если в (77) положить $k = 0$ и заменить параметр a на $-k^2/4$, то уравнение (77) будет аналогично уравнению (65) для случая рассеяния незаряженных частиц ($a = 0$). Следовательно, задача при $\lambda = \text{const}$ и $a = 0$ аналогична задаче при $k = 0$ и $\lambda = \text{const}$ с переменной $-k^2/4$ вместо a и аргументом x^2 вместо ρ . При этом граничное условие (68) при $\rho \rightarrow 0$ переходит в граничное условие (77) при $x \rightarrow 0$.

Связь между уравнениями (65) и (67) можно установить также на основе метода обратной задачи. Действительно, если в (73) осуществить замену (76) для аргумента ρ , а также замену спектрального параметра k на $2i\sqrt{a}$, то получим

$$4x^2 V_{2i\sqrt{a}, \lambda}(x^2) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln |X_{\nu\mu}(\lambda, 2i\sqrt{a}, x^2)|. \quad (78)$$

Видно, что потенциал (78), являющийся решением обратной задачи для уравнения (77), аналогичен потенциалу (71). Таким образом, обратная задача в комплексной k -плоскости для случая рассеяния парциальной волны без учета кулоновского поля ($a = 0$) аналогична обратной задаче в комплексной a -плоскости с аргументом x^2 и переменной $-k^2$.

Если в уравнении (65) осуществить замену переменных

$$x = \pm\sqrt{\rho}, \quad y(\lambda, k, 0, x) = \rho^{-1/4} Y(\lambda, k, 0, \rho) \quad (79)$$

и параметра k^2 на $-4a$, то получим уравнение

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{4\rho} \left[\frac{1 - \lambda^2}{\rho} - V_\lambda(\pm\sqrt{\rho}) \right] \right\} Y(\lambda, 2i\sqrt{a}, 0, \rho) = \frac{a}{\rho} Y(\lambda, 2i\sqrt{a}, 0, \rho)$$

с граничным условием

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} Y(\lambda, 2i\sqrt{a}, 0, \rho) \rho^{-(\lambda+1)/2} = 1,$$

которое аналогично уравнению (67) при $k = 0$. Такая аналогия связана с тем, что преобразование (79) является обратным по отношению к преобразованию (76).

3.3. Связь между задачами для переменных λ и a . Установим связь между уравнениями (66) и (67). Для этого произведем в (66) замену переменных

$$r = \exp(\sqrt{-\rho}), \quad u(\lambda, k, a, r) = \rho^{-1/4} \exp(\sqrt{\rho}/2) U(\lambda, k, a, \rho). \quad (80)$$

На основании (66), (68) и (80) найдем

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{3}{16\rho^2} + \frac{\exp(-2\sqrt{\rho})}{4\rho} \left[k^2 - a \exp(\sqrt{\rho}) - \right. \right. \\ \left. \left. - V_{k,a}(\exp(-\sqrt{\rho})) \right] \right\} U(\lambda, k, a, \rho) = \frac{\lambda^2}{4\rho} U(\lambda, k, a, \rho), \quad (81)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} U(\lambda, k, a, \rho) \rho^{1/4} \exp(\lambda\sqrt{\rho}) = 1.$$

Если в уравнении (81) положить $a = 0$ и осуществить замену переменного параметра λ^2 на $4a$, то (81) станет аналогичным уравнению (67) для случая s -рассеяния. Следовательно, задача при $k = \text{const}$ и $\lambda = 1/2$ аналогична задаче при $k = \text{const}$ и $a = 0$ с переменной $4a$ вместо λ^2 и аргументом $\exp(-\sqrt{\rho})$ вместо r . При этом граничное условие (68) при $r \rightarrow 0$ переходит в граничное условие (81) при $\rho \rightarrow \infty$.

Преобразование уравнения (67) с помощью формул

$$\rho = \ln^2 r, \quad \psi(1/2, k, a, \rho) = \sqrt{\ln r} \exp(-\ln r/2) \Psi(1/2, k, a, r) \quad (82)$$

(обратное преобразованию (80)) с последующей заменой параметра a на $\lambda^2/4$ приводит к уравнению

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{4 \ln^2 r}{r^2} \left[k^2 - \frac{3}{16 \ln^4 r} - V_k(\ln^2 r) \right] \right\} \times \\ \times \Psi(1/2, k, \lambda^2/4, r) = \frac{\lambda^2 - 1/4}{r^2} \Psi(1/2, k, \lambda^2/4, r), \\ \lim_{r \rightarrow 1} \Psi(1/2, k, \lambda^2/4) (\ln r)^{-3/2} \exp(-\ln r/2) = 1,$$

аналогичному уравнению (66) при $a = 0$.

С помощью преобразования (80) и замены переменного параметра λ^2 на $4a$ потенциал (72) можно представить в виде

$$\frac{\exp(-2\sqrt{\rho})}{4\rho} V_{k,\lambda^2/4}(\exp(-\sqrt{\rho})) = \\ = -\frac{2}{\sqrt{\rho}} \frac{d}{d\rho} \left(\sqrt{\rho} \frac{d}{d\rho} \ln |X_{\nu\mu}(k, \lambda^2/4, \exp(-\sqrt{\rho}))| \right). \quad (83)$$

Выражение (83) для потенциала, являющегося решением уравнения (81), аналогично выражению (73) для потенциала, являющегося решением уравнения (67) для случая s -рассеяния ($\lambda = 1/2$).

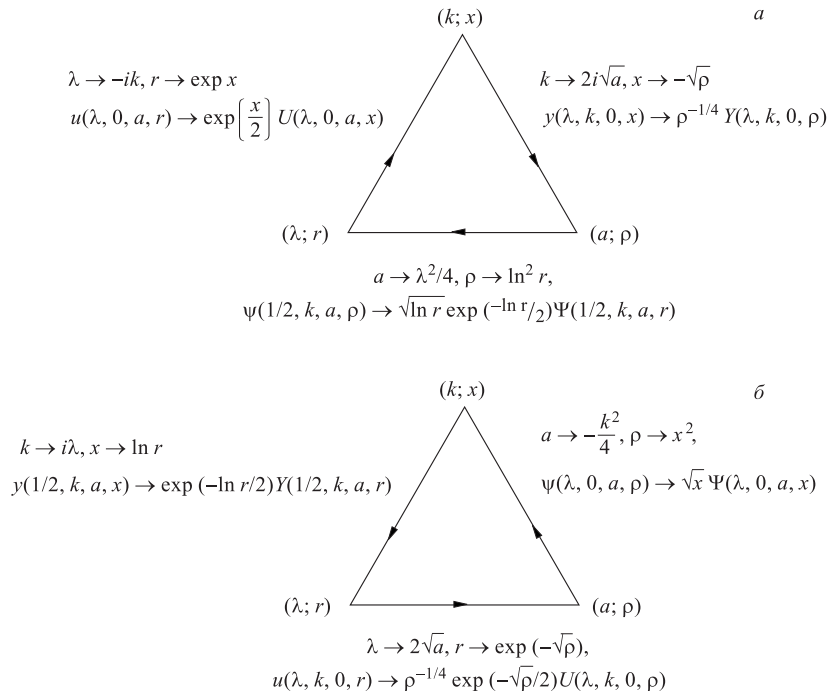


Рис. 1. Прямые (а) и обратные (б) преобразования, устанавливающие связь между однопараметрическими задачами

На рисунке представлена схема прямых (а) и обратных (б) преобразований однопараметрических задач. В вершинах отмечены переменные спектральные параметры и аргументы УШ (65)–(67). Стрелки указывают направление преобразований спектральных параметров и соответствующих решений при переходе от одной задачи к другой. Отметим, что значение параметра λ , k или a , в сторону которого осуществляется преобразование однопараметрического УШ, не обязательно следует полагать равным нулю (см. рисунок), если под потенциалом преобразованного УШ понимать соответствующий потенциал плюс слагаемое, содержащее данный спектральный параметр.

Найденная связь между однопараметрическими задачами может быть использована: а) при установлении аналитических свойств матрицы рассеяния по любому спектральному параметру λ , k или a , если известны ее свойства для одного из этих параметров; б) при решении однопараметрической обратной задачи. В такой задаче при отсутствии состояний описываемой квантовой системы источником информации служит определяемый с помощью фазового

анализа «ядерный» фазовый сдвиг при различных значениях переменного параметра. Пусть, например, известны фазы $\delta_{\lambda,k}(a_j)$ рассеяния заряженной частицы на изобарическом мультиплете. В этом случае приведенная масса системы примерно постоянна, потенциал $V_{\lambda,k}(\rho)$ уравнения (67) в соответствии с принципом изотопической инвариантности ядерных сил одинаков. Если решить такую обратную задачу, то путем преобразований параметра a , аргумента ρ и соответствующих решений (76) и (82) можно установить потенциал и данные рассеяния (фазовые сдвиги) для остальных двух способов реализации квантовых состояний системы с тем же значением приведенной массы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В традиционных постановках обратной задачи квантовой теории рассеяния обычно по экспериментальным данным при фиксированных физических значениях орбитального момента или энергии восстанавливают потенциал взаимодействия между двумя фиксированными нейтральными или заряженными частицами. В обзоре сформулированы нетрадиционные постановки обратной задачи, в результате решения которых получен потенциал взаимодействия между заряженной частицей и группой заряженных частиц или между двумя группами заряженных частиц с примерно одинаковой приведенной массой. Именно в этом заключается новизна представленных в работе результатов. Как показано выше, обратные задачи в нетрадиционных постановках имеют ясный физический смысл. В этом случае речь идет о построении потенциала взаимодействия между реальными физическими объектами: между заряженным кластером и изобарическим мультиплетом или между двумя изобарическими мультиплетами. Поэтому сделанные в работе выводы значительно расширяют совокупность объектов, потенциал взаимодействия между которыми может быть определен методом обратной задачи.

В обзоре реализована оригинальная идея обобщенного подхода к решению обратной задачи с линейной взаимозависимостью переменных параметров УШ в исходных данных рассеяния. На основе выражений для матрицы рассеяния и восстановленного потенциала исследовано влияние знака потенциала на расположение полюсов S -матрицы в комплексной плоскости переменного параметра и поведение фазы рассеяния, а также установлена связь между однопараметрическими прямыми и обратными задачами. Все это приводит к выводу о том, что полученные здесь результаты представляют собой существенный вклад в развитие квантовой теории рассеяния заряженных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович З.С., Марченко В.А.* Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд-во ХГУ, 1960.
2. *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
3. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев: Наукова думка, 1972.
4. *Ситенко А.Г.* Теория рассеяния. Киев: Вища школа, 1975.
5. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
6. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980.
7. *Ментковский Ю.Л.* Частица в ядерно-кулоновском поле. М.: Энергоатомиздат, 1982.
8. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
9. *Захарев Б.Н., Сузько А.А.* Потенциалы и квантовое рассеяние. М.: Энергоатомиздат, 1985.
10. *Захарев Б.Н.* Уроки квантовой интуиции. Дубна: ОИЯИ, 1996.
11. *Theis R.V.* // *Z. für Naturforsch.* 1956. Bd. 11. № 11. S. 889.
12. *Маляров В.В., Поплавский И.В., Попушой М.Н.* // *ЖЭТФ.* 1975. Т. 68. Вып. 2. С. 432.
13. *Захарев Б.Н., Рудяк Б.В.* Препринт ОИЯИ Р4-84-759. Дубна, 1984.
14. *Поплавский И.В.* // *ЭЧАЯ.* 1996. Т. 27. Вып. 4. С. 1099.
15. *Carter J.R. et al.* // *Nucl. Phys. B.* 1973. V. 58. No. 2. P. 378.
16. *MacGregor M.H. et al.* // *Phys. Rev.* 1969. V. 182. No.5. P. 1714.
17. *Попушой М.Н.* // *Укр. физ. журн.* 1984. Т. 29. № 1. С. 24.
18. *Попушой М.Н.* // *ТМФ.* 1985. Т. 63. № 3. С. 340.
19. *Поплавский И.В., Шиян А.А.* // *ЯФ.* 1986. Т. 44. Вып.4. С. 952.
20. *Попушой М.Н.* // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1991. Т. 55. № 1. С. 109.
21. *Богданов И.В., Демков Ю.Н.* // *ЖЭТФ.* 1982. Т. 82. Вып. 6. С. 1798.
22. *Абрамов Д.И.* // *ТМФ.* 1984. Т. 58. № 2. С. 244.
23. *Поплавский И.В.* // *ТМФ.* 1986. Т. 69. № 3. С. 475.
24. *Березовой В.П., Пашнев А.И.* // *ТМФ.* 1987. Т. 70. № 1. С. 146.
25. *Березовой В.П., Пашнев А.И.* // *ТМФ.* 1988. Т. 74. № 3. С. 392.
26. *Попушой М.Н.* // *ТМФ.* 1986. Т. 69. № 3. С. 466.
27. *Попушой М.Н.* // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1988. Т. 52. № 1. С. 150.
28. *Попушой М.Н.* // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1988. Т. 52. № 1. С. 157.
29. *Попушой М.Н.* // *Укр. физ. журн.* 1988. Т. 33. № 9. С. 1304.
30. *Маляров В.В., Попушой М.Н.* // *ЯФ.* 1973. Т. 18. Вып. 5. С. 1140.
31. *Маляров В.В.* Основы теории атомного ядра. М.: Наука, 1967.
32. *Маляров В.В., Поплавский И.В., Попушой М.Н.* // *ЯФ.* 1975. Т. 21. Вып. 5. С. 987.
33. *Маляров В.В., Поплавский И.В., Попушой М.Н.* // *ЯФ.* 1977. Т. 25. Вып. 1. С.72.
34. *Lipperhaide R., Fiedelday H.* // *Z. für Phys. A.* 1978. V. 287. No. 1. P. 4.
35. *Lipperhaide R., Fiedelday H.* // *Z. für Phys. A.* 1981. V. 301. No. 1. P. 8.
36. *Попушой М.Н.* // *Изв. вузов. Физика.* 1989. Т. 32. № 10. С. 5.
37. *Попушой М.Н.* // *Укр. физ. журн.* 1989. Т. 34. № 6. С. 823.
38. *Попушой М.Н.* // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1989. Т. 53. № 5. С. 976.