«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 7

УДК 517.58

НОВЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ БЕТА-ИНТЕГРАЛЫ

В. П. Спиридонов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

Рассмотрены эллиптические бета-интегралы, обобщающие одномерные интегралы Аски–Вильсона и Нараллаха–Рахмана и многомерные интегралы Сельберга и Густафсона. Кратко обсуждаются специальные функции, построенные из обычных, базисных и модулярных гипергеометрических рядов и связанные с указанными интегралами.

Elliptic beta integrals, generalizing one variable Askey–Wilson and Nassrallah–Rahman integrals and multivariable Selberg and Gustafson integrals, are considered. Special functions, built from ordinary, basic and modular hypergeometric series and connected with these integrals, are briefly reviewed.

Здесь мы дадим сжатое изложение результатов недавних работ [4, 12–15] о новых специальных функциях гипергеометрического типа, построенных из эллиптических функций и модулярных форм.

Бета-функция $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$, $\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta > 0$, и ее различные q-аналоги играют важную роль в теории специальных функций [1]. В [3] построены самые общие «классические» (самодуальные) ортогональные полиномы. Эти полиномы выражаются через q-гипергеометрические ряды ${}_4\Phi_3$. Соответствующее условие нормировки непрерывной весовой функции определяется q-бета-интегралом Аски–Вильсона. В [9, 16] построено семейство самодуальных биортогональных рациональных функций (БРФ), выражающихся через совершенно уравновешенные сбалансированные ${}_{10}\Phi_9$-ряды и содержащих полиномы Аски–Вильсона в качестве частных случаев. Нормировка соответствующей непрерывной весовой функции задается q-бета-интегралом Нараллаха–Рахмана [8, 9], который считался самым общим бета-интегралом, допускающим вычисление в замкнутом виде.

Различные обобщения БРФ Вильсона–Рахмана были построены в [13, 15]. Во-первых, в [15] найдены эллиптические обобщения функций Вильсона с дискретной мерой биортогональности, выражающиеся через специальный обрывающийся ${}_{12}E_{11}$ модулярный гипергеометрический ряд. Ряды такого типа, обладающие модулярной симметрией, были введены Тураевым и Френкелем в [5]. Общая теория эллиптических гипергеометрических рядов сформулирована в [14] (в частности, в этой работе введены используемые здесь обозначения для E-рядов). Уникальность эллиптических БРФ следует из того, что наиболее общие БРФ, допускающие конечно-разностный оператор первого порядка в качестве понижающего оператора, обязаны быть привязанными к эллиптическим сеткам [15]. Во-вторых, эллиптическое обобщение семейства непрерывных БРФ Рахмана [9] построено в [13]. Условие нормировки соответствующей абсолютно непрерывной меры задается эллиптическим бета-интегралом, вычисленным в [12] (см. ниже).

В-третьих, широкий класс БРФ, не являющихся самодуальными и выражающихся через обычные ${}_9F_8$, базисные ${}_{10}\Phi_9$ и эллиптические ${}_{12}E_{11}$ гипергеометрические ряды, построен в [15]. В этом классе уже на уровне ${}_9F_8$-рядов возникает необходимость решения алгебраического уравнения пятой степени для представления БРФ в виде гипергеометрических рядов. Эти функции были получены с помощью некоторого эвристического подхода к специальным функциям, подробно описанного в [11]. В этом подходе специальные функции определяются как функции, ассоциированные с самоподобными редукциями цепочек спектральных преобразований для линейных спектральных задач. В случае БРФ рассматривается некоторое трехчленное рекуррентное соотношение для полиномов с варьируемой мерой ортогональности, содержащее квадратичную зависимость от аргумента полиномов. Затем находится цепочка преобразований, аналогичных преобразованиям Кристоффеля и Геронимуса для обычных ортогональных полиномов, не меняющих формы начального рекуррентного соотношения. Это приводит к нелинейной цепочке уравнений, обобщающей цепочку Тоды с дискретным временем. Анализ инволютивных симметрий этой цепочки позволяет найти самоподобную редукцию, приводящую к некоторому нелинейному функциональному уравнению. Это уравнение имеет эллиптические решения, которые приводят к явному решению начального рекуррентного соотношения в терминах ${}_{12}E_{11}$-рядов.

Оказывается, что помимо модулярных расширений непрерывных БРФ Рахмана существует их обобщение на систему самодуальных мероморфных функций, биортогональных по двум дискретным индексам с весовой функцией, определяющейся тем же эллиптическим бета-интегралом [13]. Возможно, что эти функции представляют собой наиболее общую систему «классических» специальных функций в теории биортогональных функций с тем же статусом, который имеют полиномы Аски–Вильсона в теории ортогональных полиномов. Представим более подробно, в качестве иллюстрации, структуру эллиптического бета-интеграла — наиболее общего известного в настоящее время интеграла такого типа.

Пусть $p, q \in \mathbb{C}$ и $|p|, |q| < 1$. Обозначим $(a;p)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - ap^n)$, $(a;p)_s = (a;p)_\infty/(ap^s;p)_\infty$, $(a_1, \ldots, a_k;p)_\infty = (a_1;p)_\infty \ldots (a_k;p)_\infty$. Определим тэта-функцию Якоби как $\theta(z;p) = (z, pz^{-1}; p)_\infty$. Она обладает свойствами $\theta(pz;p) = \theta(z^{-1};p) = -z^{-1}\theta(z;p)$. Эллиптическая гамма-функция $\Gamma(z;p,q)$ определяется с помощью двойных бесконечных произведений [10]:

$$\Gamma(z;p,q) = \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - z^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1 - zp^jq^k}, \qquad \Gamma(z;0,q) = \frac{1}{(z;q)_\infty} \tag{1}$$

и удовлетворяет уравнениям $\Gamma(qz;p,q) = \theta(z;p)\Gamma(z;p,q)$, $\Gamma(pz;p,q) = \theta(z;q)$ $\Gamma(z;p,q)$, которые в определенных пределах сводятся к уравнению для стандартной гамма-функции. Обозначим также $\theta(a_1,\ldots,a_n;p) = \prod_{i=1}^n \theta(a_i;p)$, $\Gamma(a_1,\ldots,a_n;p,q) = \prod_{i=1}^n \Gamma(a_i;p,q)$.

Теорема 1. *Эллиптическое расширение контурного q-бета-интеграла Нараллаха–Рахмана [8, 9] или эллиптическая бета-функция имеет вид*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \Delta(z)\frac{dz}{z} = \frac{2\prod_{0\le m<s\le 4}\Gamma(t_mt_s;p,q)}{(q;q)_\infty(p;p)_\infty\prod_{m=0}^4\Gamma(At_m^{-1};p,q)}, \tag{2}$$

где $A = \prod_{m=0}^4 t_m$ и

$$\Delta(z) = \frac{\prod_{m=0}^4\Gamma(zt_m, z^{-1}t_m;p,q)}{\Gamma(z^2, z^{-2}, zA, z^{-1}A;p,q)}. \tag{3}$$

Здесь T обозначает положительно ориентированную единичную окружность, а комплексные параметры t_m удовлетворяют ограничениям $|t_m| < 1$, $|pq| < |A|$.

Равенство (2) доказывается методом функциональных уравнений, примененным в [2] для вычисления q-бета-интеграла [8, 9], получающегося из (2) при $p = 0$. Для общего положения параметров p, q и t_m функция $\Delta(z)$ содержит внутри T только простые полюсы, находящиеся в точках $t_mp^jq^k$, $A^{-1}p^{j+1}q^{k+1}$ при $j,k \in \mathbb{N}$. Аналитичность $\Delta(z)$ позволяет заменить T на любой контур C, охватывающий тот же параметрический набор полюсов. При этом значение интеграла не меняется, даже если часть указанных полюсов будет лежать вне T. Пусть $f_{l,r}(t_0,t_1)$ — левая и правая части (2) как функции выделенных параметров t_0, t_1.

Теорема 2. *Функции $f_{l,r}(t_0,t_1)$ удовлетворяют q-разностному уравнению*

$$\begin{aligned} t_1\theta(t_1A, t_1^{-1}A;p)f_{l,r}(qt_0,t_1) - t_0\theta(t_0A, t_0^{-1}A;p)f_{l,r}(t_0,qt_1) = \\ = t_1\theta(t_0t_1^{-1}, t_0t_1;p)f_{l,r}(t_0,t_1) \end{aligned} \tag{4}$$

и уравнению, получающемуся из него перестановкой p и q. При этом параметры t_m ограничены только условием несингулярности функций $f_{l,r}$, входящих в уравнения.

Уравнения для $\Gamma(z;p,q)$ позволяют проверить, что функция $\Delta(z)$ (3) удовлетворяет (4) для произвольных z благодаря известному трехчленному тождеству

$$\theta(xw, x/w, yz, y/z; p) - \theta(xz, x/z, yw, y/w; p) = yw^{-1}\theta(xy, x/y, wz, w/z; p).$$

Поэтому $f_l(t_0, t_1)$ как интеграл от $\Delta(z)$ по z также удовлетворяет (4). Аналогично проверяется, что уравнение для $f_r(t_0, t_1)$ также сводится к указанному тождеству. Таким образом, осталось проверить, что $f_{l,r}$ представляют одно и то же решение (4). Отметим, что перестановочная симметрия позволяет заменить t_0 и t_1 в уравнении (4) на произвольную пару параметров t_m.

Положим $t_2 = q^{1/2}, t_4 = -q^{1/2}$ и $t_1 \to 1, t_3 \to -1$. При этом $A \to qt_0$, $|p| < |t_0| < 1$, и равенство (2) редуцируется к интегралу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\theta(pz^2;p^2)}{\theta(zt_0, z^{-1}t_0;p)}\frac{dz}{z} = \frac{1}{(p;p)_\infty^2\theta(t_0^2;p^2)}. \tag{5}$$

Этот интеграл вычисляется так. Подставим $z = \mathrm{e}^{i\varphi}$ и найдем нулевой коэффициент разложения 2π-периодической функции $\Delta(\mathrm{e}^{i\varphi})$ в ряд Фурье по φ. С помощью суммы Рамануджана для двустороннего q-гипергеометрического ряда ${}_1\Psi_1$ отношение θ-функций под знаком интеграла в (5) разлагается в двойной лорановский ряд по степеням z. После взятия интеграла по φ этот ряд становится однократным и представляет собой частный случай суммируемого ${}_2\Psi_2$-ряда [12].

Используя (4), можно показать (аналогично [2]), что равенство (2) выполняется для произвольного $t_0, |p| < |t_0| < 1$ и $t_1 = q^{k_1}, t_2 = q^{k_2+1/2}, t_3 = -q^{k_3}, t_4 = -q^{k_4+1/2}$ при некоторых положительных целых числах k_i. Разложения в ряды Тейлора по p и аналитические продолжения по k_i показывают, что равенство (2) выполняется для произвольных допустимых значений параметров t_m [12].

В [4] предложены два типа многомерных обобщений эллиптического бета-интеграла (2), определяющих эллиптическое расширение интеграла Сельберга [1]. Эти интегралы обобщают различные тождества Макдональда–Морриса, играющие важную роль в теории ортогональных полиномов многих переменных [7], и многомерные q-бета-интегралы Густафсона [6]. Естественно предположить, что они определяют также меру для некоторого семейства биортогональных функций многих переменных, включающих в себя как функции [13, 15], так и полиномы Макдональда [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andrews G. E., Askey R., Roy R.* Special Functions // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, 1999. V. 71.

2. *Askey R.* Beta Integrals in Ramanujan's Papers, His Unpublished Work and Further Examples // Ramanujan Revisited / Eds. G. E. Andrews et al. Boston, 1988. P. 561–590.
3. *Askey R., Wilson J.* Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials // Mem. Amer. Math. Soc. 1985. V. 319.
4. *van Diejen J. F., Spiridonov V. P.* An Elliptic Macdonald–Morris Conjecture and Multiple Modular Hypergeometric Sums // Math. Res. Lett. V. 7. 2000. P. 729–746; Elliptic Selberg Integrals // Internat. Math. Res. Notices 2001. No. 20. P. 1083–1110; Modular Hypergeometric Residue Sums of Elliptic Selberg Integrals // Lett. Math. Phys. (to appear).
5. *Frenkel I. B., Turaev V. G.* Elliptic Solutions of the Yang–Baxter Equation and Modular Hypergeometric Functions // The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars. Boston, 1997. P. 171–204.
6. *Gustafson R. A.* Some q-Beta Integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that Generalize the Askey–Wilson and Nassrallah-Rahman Integrals // SIAM J. Math. Anal. 1994. V. 25. P. 441–449.
7. *Macdonald I. G.* Constant Term Identities, Orthogonal Polynomials, and Affine Hecke Algebras // Doc. Math. 1998. DMV Extra Volume ICM I. P. 303–317.
8. *Nassrallah B., Rahman M.* Projection Formulas, a Reproducing Kernel and a Generating Function for q-Wilson Polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1985. V. 16. P. 186–197.
9. *Rahman M.* An Integral Representation of a ${}_{10}\phi_9$ and Continuous Bi-Orthogonal ${}_{10}\phi_9$ Rational Functions // Can. J. Math. 1986. V. 38. P. 605–618.
10. *Ruijsenaars S. N. M.* First Order Analytic Difference Equations and Integrable Quantum Systems // J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 1069–1146.
11. *Spiridonov V. P.* The Factorization Method, Self-Similar Potentials and Quantum Algebras // Proc. of the NATO ASI Special Functions-2000. Tempe, USA, May 29 – June 9, 2000 / Eds. J. Bustoz, M. E. H. Ismail, S. K. Suslov. Dordrecht, 2001. P. 335–364.
12. *Spiridonov V. P.* An Elliptic Beta Integral // Proc. of the Fifth Intern. Conf. on Difference Equations and Applications, Temuco, Chile, Jan. 3–7, 2000 / Eds. S. Elaydi, J. Fenner-Lopez, G. Ladas. Gordon and Breach (to appear); *Спиридонов В. П.* Об эллиптической бета-функции // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56(1). С. 181–182.
13. *Spiridonov V. P.* Elliptic Beta Integrals and Special Functions of Hypergeometric Type // Proc. of the NATO ARW Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory, Kiev, Ukraine, Sept. 25–30, 2000 / Eds. G. von Gehlen, S. Pakuliak. Dordrecht, 2001. P. 305–313.
14. *Spiridonov V. P.* Theta Hypergeometric Series // Proc. of the NATO ASI Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics, St. Petersburg, July 9–23, 2001 (to appear).
15. *Spiridonov V. P., Zhedanov A. S.* Spectral Transformation Chains and Some New Biorthogonal Rational Functions // Commun. Math. Phys. 2000. V. 210. P. 49–83; Classical Biorthogonal Rational Functions on Elliptic Grids // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 2000. V. 22(2). P. 70–76; Generalized Eigenvalue Problem and a New Family of Rational Functions Biorthogonal on Elliptic Grids // Proc. of the NATO ASI Special Functions-2000, Tempe, USA, May 29–June 9, 2000. / Eds. J. Bustoz, M. E. H. Ismail, S. K. Suslov. Dordrecht, 2001. P. 365–388; *Спиридонов В. П., Жеданов А. С.* Гипергеометрические биортогональные рациональные функции // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54(2). С. 173–174.
16. *Wilson J. A.* Orthogonal Functions from Gram Determinants // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. P. 1147–1155.