ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2003. Т. 34. ВЫП. 1

УДК 539.165

СИММЕТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА И ПОЗИТРОНА*

Э. Майорана

Показана возможность провести полную формальную симметризацию квантовой теории электрона и позитрона, используя новую процедуру квантования. Смысл уравнений Дирака в ней изменяется, и более нет необходимости ни говорить о состояниях с отрицательной энергией, ни предполагать для каждой частицы, в особенности нейтральной, существование «античастицы», соответствующей «дырке» с отрицательной энергией.

The possibility to carry out completely the formal symmetrization of the quantum theory for an electron and a positron using a new procedure of quantization is shown. The understanding of the Dirac equation is changed and there is no necessity for the states with negative energy, as well as to assume for each particle, especially for neutral one, the existence of «antiparticle», which corresponds to «hole» with negative energy.

Интерпретация так называемых «состояний с отрицательной энергией», предложенная Дираком [1], приводит, как известно, к симметричному описанию электронов и позитронов. Важная сторона симметрии формализма состоит как раз в том, что до тех пор, пока можно применять теорию, обходя трудности со сходимостью, он дает действительно совершенно симметричные результаты. В то же время искусственные приемы, предлагаемые для придания теории симметричной формы, которые согласовались бы с ее содержанием, не вполне удовлетворительны потому, что либо исходная формулировка не является симметричной, либо симметризация получается в результате таких процедур, как, например, сокращение бесконечных констант, которых, по возможности, следовало бы избегать. Поэтому мы попытались пойти новым путем, непосредственно ведущим к цели. Что касается электронов и позитронов, то на этом пути можно ожидать только формального упрощения, однако для аналогичных расширений теории на другие случаи нам представляется важным, чтобы было устранено само понятие состояний с отрицательной энергией. Ниже мы фактически увидим, что таким образом можно самым естественным образом построить теорию нейтральных элементарных частиц, не содержащую состояний с отрицательной энергией.

---

*Напечатано в журнале «Nuovo Cimento» (1937. V. 14. P. 171–184). Перевод с итальянского В. С. Замиралова, редакция текста перевода В. С. Замиралова, Ю. В. Гапонова и В. В. Хрущева.

1. Как известно, квантовую электродинамику можно получить с помощью процедуры квантования системы уравнений, включающей в себя, с одной стороны, волновые уравнения электрона Дирака, а с другой — уравнения Максвелла, в которых плотность заряда и тока представлены некоторыми выражениями, образованными с помощью электронной волновой функции. Форма, которая придается этим выражениям, в действительности добавляет нечто новое к уравнениям Дирака, и только с ее помощью может быть получена асимметрия по отношению к заряду, которая в самих уравнениях Дирака отсутствует. Однако, поскольку эти выражения возникают автоматически при применении вариационного принципа, из которого они выводятся вместе с уравнениями Максвелла и Дирака, нашей задачей будет изучить основание этого принципа и возможность его замены другим, более подходящим.

Величины, явно фигурирующие в уравнениях Максвелла–Дирака, относятся к двум типам: с одной стороны, имеются электромагнитные потенциалы, которые вводятся в согласии с принципом соответствия с использованием классической интерпретации, с другой стороны — волны материи, которые описывают частицы, подчиняющиеся статистике Ферми, и имеют смысл только в качестве квантовых величин. Однако такая ситуация, при которой уравнения и вся процедура квантования оказываются зависящими от вариационного принципа, имеющего только классическую интерпретацию, вряд ли может считаться удовлетворительной. Более естественно искать в этом случае такое обобщение вариационных методов, чтобы переменные, фигурирующие в функции Лагранжа, с самого начала имели свое конечное смысловое значение и представляли бы собой, таким образом, величины, не обязательно коммутирующие друг с другом. Именно этим путем мы и будем следовать. Он важен, прежде всего, для полей, удовлетворяющих статистике Ферми. Что же касается электромагнитного поля, то соображения простоты позволяют предположить, что здесь ничего не надо добавлять к старым методам. При этом мы не будем предпринимать каких-либо попыток систематического изучения логических возможностей, открываемых предлагаемой новой точкой зрения, а ограничимся использованием процедуры квантования волн материи, что одно, как мне представляется, имеет прикладную ценность в настоящее время. Эта процедура представляет собой естественное обобщение метода Йордана–Вигнера [2] и позволяет не только придать симметричную форму электрон-позитронной теории, но и построить существенно новую теорию для частиц, не имеющих электрического заряда, таких, как, например, нейтроны и гипотетические нейтрино. Поскольку, по-видимому, пока невозможно требовать от эксперимента аргументов в пользу этой новой теории, как, впрочем, и той, которая возникает при простом обобщении уравнений Дирака на нейтральные частицы, то следует отметить только, что новая теория вводит в этой, пока мало изученной области меньшее число гипотетических величин.

Оставляя читателю самому провести очевидное обобщение последующих формул на непрерывные системы, которыми мы в дальнейшем и будем заниматься, изложим для наглядности используемую методику квантования для случая дискретных систем. Итак, пусть имеется физическая система, описываемая *действительными* величинами (симметричными эрмитовыми матрицами) $q_1, q_2, ..., q_n$. Определим функцию Лагранжа

$$L = i \sum_{r,s} (A_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s + B_{rs}q_r q_s) \tag{1}$$

и положим

$$\delta \int L dt = 0, \tag{2}$$

подразумевая, что в этих формулах A_{rs} и B_{rs} являются обычными действительными числами (первые — константами, вторые могут зависеть от времени), удовлетворяющими соотношениям

$$A_{rs} = A_{sr}, \quad B_{rs} = -B_{sr}, \tag{3}$$

и, кроме того, $\det \|A_{rs}\| \neq 0$.

Если бы q были коммутирующими величинами, то вариационный принцип (2) не имел бы смысла, поскольку удовлетворялся бы тождественно. Однако для некоммутирующих величин условие (2) в каждый момент времени заставляет обращаться в нуль эрмитову матрицу

$$i \sum_r \left[\delta q_r (\sum_s A_{rs}\dot{q}_s + B_{rs}q_s) - \sum_s (A_{rs}\dot{q}_s + B_{rs}q_s)\delta q_r \right] = 0,$$

как бы ни были выбраны δq_r. Это возможно, если выражения $\sum_s (A_{rs}\dot{q}_s + B_{rs}q_s)$ пропорциональны единичной матрице таким образом, что с помощью какой-то подходящей модификации вариационного принципа (2) (например, через требование обращения в нуль суммы диагональных членов*) следующие выражения можно было бы рассматривать как уравнения движения:

$$\sum_s (A_{rs}\dot{q}_s + B_{rs}q_s) = 0, \quad r = 1, 2, ..., n. \tag{4}$$

*Физическое приложение, приведенное далее, предполагает более строгое ограничение, а именно: для произвольной линейной комбинации q_r и $\dot{q}_r$ с каким-либо собственным значением должно существовать другое, равное по величине и обратное по знаку.

Мы хотим показать, что эти уравнения могут быть представлены так, что они обычным образом

$$\dot{q}_r = -\frac{2\pi i}{h}(q_r H - H q_r)$$

зависят от гамильтониана

$$H = -i \sum_{r,s} B_{rs} q_r q_s, \tag{5}$$

строгая форма которого будет уточнена ниже, если между q_r задать соответствующие соотношения *антикоммутации*. Подставляя в (4) последующие уравнения, получаем

$$\sum_s B_{rs} q_s = \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} (q_s q_l q_m - q_l q_m q_s) =$$

$$= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} [(q_s q_l + q_l q_s) q_m - q_l (q_s q_m + q_m q_s)] =$$

$$= \frac{2\pi}{h} \sum_{l,m} B_{lm} \left\{ q_m \left[\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) \right] + \left[\sum_s A_{rs} [(q_s q_l + q_l q_s)] q_m \right] \right\}.$$

Тогда достаточно положить

$$\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) = \frac{h}{4\pi} \delta_{rl}, \tag{6}$$

чтобы (4) были удовлетворены. Обозначая через $\|A_{rs}^{-1}\|$ матрицу, обратную к $\|A_{rs}\|$, можно записать (6) в виде

$$q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi} A_{rs}^{-1}. \tag{6$'$}$$

В особом случае, когда A имеет диагональную форму

$$A_{rs} = a_r \delta_{rs}$$

получим, соответственно,

$$q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi a_r} \delta_{rs}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь приложение этой схемы к уравнениям Дирака.

2. Как известно, из уравнений Дирака без внешнего поля

$$\left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) + \beta mc\right]\psi = 0 \tag{8}$$

можно исключить мнимую единицу (причем релятивистски-инвариантным образом), выбирая соответствующим образом операторы α и β. Мы зададим такое представление, в котором уравнения (8) действительны, четко оговорив, что формулы, которые мы будем рассматривать, несправедливы в общем случае без дополнительных преобразований. Обозначая, как обычно, через $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и ρ_1, ρ_2, ρ_3 два независимых базиса матриц Паули, положим

$$\alpha_x = \rho_1\sigma_x, \quad \alpha_y = \rho_3, \quad \alpha_z = \rho_1\sigma_z, \quad \beta = -\rho_1\sigma_y. \tag{9}$$

С помощью этих величин, разделив (8) на $ih/(2\pi)$ и положив $\beta^{'} = -i\beta, \mu = 2\pi mc/h$, получаем действительные уравнения

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \mathrm{grad}) + \beta'\mu\right]\psi = 0. \tag{8$'$}$$

Как следствие, уравнения (8) распадаются на две раздельные группы, в которых одна действует на реальную, а другая — на мнимую часть ψ. Положим $\psi = U + iV$ и рассмотрим действительные уравнения (8$^{'}$), действующие на U:

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \mathrm{grad}) + \beta'\mu\right]U = 0. \tag{10}$$

Эти уравнения *сами по себе**, то есть без рассмотрения идентичных уравнений, связывающих V, могут быть выведены из вариационного принципа, изложенного ранее, и подвергнуты описанной выше процедуре квантования, в то время как элементарными методами ничего подобного сделать было бы нельзя.

В качестве вариационного принципа, из которого можно вывести (10), примем следующий:

$$\delta\int i\frac{hc}{2\pi}U^*\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \mathrm{grad}) + \beta'\mu\right]U dq dt = 0. \tag{11}$$

*Поведение U в какой-либо точке пространства по отношению к отражению можно определить удобным образом, принимая во внимание, что уже по другим мотивам одновременное изменение знака у всех U_r не меняет физический смысл. В нашей схеме $U^{'}(q) = RU(-q)$, где $R = i\rho_1\sigma_y$, значит, $R^2 = -1$. Аналогично, если обратить ось времени, $U^{'}(q,t) = i\rho_2 U(q, -t)$.

Легко видеть, что условия (3) в их естественном обобщении на непрерывные системы выполняются. Учитывая (7), получаем следующие соотношения антикоммутации:

$$U_i(q)U_k(q^{'}) + U_k(q^{'})U_i(q) = \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta(q-q^{'}), \tag{12}$$

в то время как энергия (5) принимает вид

$$H = \int U^*[-c(\alpha, p) - \beta mc^2]U dq. \tag{13}$$

Релятивистская инвариантность (12) и (13) не требует специальной демонстрации, поскольку, дополняя эти уравнения аналогичными, относящимися к V, а также антикоммутационными соотношениями между U и V: $U_r(q)V_s(q^{'}) + V_s(q^{'})U_r(q) = 0$, мы вновь получаем не что иное, как обычную схему Йордана–Вигнера для уравнений Дирака в отсутствие поля.

Однако существенно то, что определенная часть этих формальных выражений, относящаяся к U (или к V), может *сама по себе* рассматриваться как теоретическое описание некоторой материальной системы, в соответствии с общими принципами квантовой механики. Тот факт, что такой редуцированный формализм не подходит для описания положительных и отрицательных электронов, может быть связан с наличием у них электрического заряда и не препятствует утверждению, что при нынешнем статусе наших знаний (12) и (13) дают самое простое теоретическое описание системы нейтральных частиц. Преимуществом такого описания по сравнению с элементарной интерпретацией уравнений Дирака является, как мы увидим вскоре, то, что в нем нет никаких оснований предполагать существование антинейтронов или антинейтрино. Такие частицы действительно используются в теории эмиссии положительных β-частиц [3], но эта теория может быть очевидным образом модифицирована так, что эмиссия как положительных, так и отрицательных β-частиц будет сопровождаться испусканием только нейтрино.

Ввиду интереса, который представляет собой вышеозначенная гипотеза для уравнений (12) и (13), полезно изучить их более подробно. Для этого разложим U внутри куба со стороной L по набору периодических функций

$$f_\gamma(q) = \frac{1}{L^{3/2}}\,\mathrm{e}^{2\pi i(\gamma, q)}, \tag{14}$$

$$\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z), \quad \gamma_x = \frac{n_1}{L}, \quad \gamma_y = \frac{n_2}{L}, \quad \gamma_z = \frac{n_3}{L},$$

$$n_1, \quad n_2, \quad n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

полагая

$$U_r(q) = \sum_\gamma a_r(\gamma) f_\gamma(q). \tag{15}$$

Как следствие действительности U, получим

$$a_r(\gamma) = \bar{a}_r(-\gamma). \tag{16}$$

Если считать, что в общем случае $\gamma \neq 0$, из (12) следует

$$\begin{aligned} &a_r(\gamma)\bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma)a_r(\gamma) = \frac{1}{2}\delta_{rs}, \\ &a_r(\gamma)a_s(\gamma) + a_s(\gamma)a_r(\gamma) = 0, \\ &\bar{a}_r(\gamma)\bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma)\bar{a}_r(\gamma) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Все эти величины, кроме того, антикоммутируют с $a(\gamma^{'})$ и $\bar{a}(\gamma^{'})$ для $\gamma^{'}$, отличных как от γ, так и от $-\gamma$.

Соотношение (13) для энергии записывается теперь в виде

$$H = \sum_{\gamma} \sum_{r,s=1}^{4} [-hc(\gamma, \alpha^{rs}) - mc^2\beta^{rs}]\bar{a}_r(\gamma)a_s(\gamma). \tag{18}$$

Импульс вдоль оси x соответствует, как всегда, с точностью до фактора $ih/(2\pi)$ унитарному сдвигу в этом направлении

$$M_x = \int U^* p_x U dq = \sum_{\gamma} \sum_{r=1} h\gamma_x \bar{a}_r(\gamma)a_r(\gamma), \tag{19}$$

и аналогично для M_y и M_z.

Для каждого значения γ в (18) фигурирует эрмитова форма, которая имеет явным образом два положительных и два отрицательных собственных значения, все равные по абсолютной величине значению $c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2}$.

Мы можем поэтому взять вместо (18)

$$\begin{aligned} H = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2}[\bar{b}_1(\gamma)b_1(\gamma) + \bar{b}_2(\gamma)b_2(\gamma) - \\ - \bar{b}_3(\gamma)b_3(\gamma) - \bar{b}_4(\gamma)b_4(\gamma)], \end{aligned} \tag{18$'$}$$

где b_r представляют собой подходящие линейные комбинации a_r, полученные унитарным преобразованием. Из (16) также следует, что $b_r(\gamma)$ линейно выражаются через $\bar{b}_r(-\gamma)$.

Из того, что эрмитова форма, которая фигурирует в (18) для данного значения γ, остается неизменной, ввиду равенств (16) и (17), при замене γ на $-\gamma$, следует, с учетом (17), что можно положить

$$b_3(\gamma) = \bar{b}_1(-\gamma), \quad b_4(\gamma) = \bar{b}_2(-\gamma). \tag{20}$$

Вводя для простоты новые переменные

$$B_1(\gamma) = \sqrt{2}b_1(\gamma), \quad B_2(\gamma) = \sqrt{2}b_2(\gamma), \tag{21}$$

получаем, таким образом,

$$H = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^{2} \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right], \tag{22}$$

$$M_x = \sum_{\gamma} h\gamma_x \sum_{r=1}^{2} \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right]. \tag{23}$$

При этом предполагается, что $n_r(\gamma) = \overline{B}_r(\gamma)B_r(\gamma)$ равно нулю или единице, и, кроме того, учитывается, что

$$\begin{aligned} B_r(\gamma)\overline{B}_s(\gamma') + \overline{B}_s(\gamma')B_r(\gamma) &= \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{rs}, \\ B_r(\gamma)B_s(\gamma') + B_s(\gamma')B_r(\gamma) &= 0, \\ \overline{B}_r(\gamma)\overline{B}_s(\gamma') + \overline{B}_s(\gamma')\overline{B}_r(\gamma) &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Формально тот же результат получился бы по схеме Йордана–Вигнера для коэффициентов разложения волны материи *с двумя компонентами.*

Эти формулы совершенно аналогичны, за исключением другого типа статистики, тем, которые получаются при квантовании уравнений Максвелла. Однако вместо нематериальных квантов здесь появляются частицы с конечной массой покоя, имеющие две возможные поляризации. Здесь, *так же, как и в случае излучения*, присутствуют половинки квантов покоя энергии и количества движения, хотя, в отличие от излучения, их знак противоположен соответствующему знаку при другой статистике. Это обстоятельство не приводит к особым трудностям, и при нынешнем состоянии теории эти величины должны рассматриваться как простые аддитивные константы, не имеющие непосредственного физического смысла.

Описание этих частиц с помощью собственных функций, так же, как и в случае квантов света, не удается осуществить в удобной форме, но в нашем случае наличие массы покоя позволяет рассмотреть *нерелятивистское приближение*, в котором, естественно, справедливы все положения элементарной квантовой механики. Это приближение может иметь практический интерес, прежде всего, для тяжелых частиц (таких как нейтроны).

Самый простой способ перехода в конфигурационное пространство состоит в сопоставлении с осциллятором плоской волны

$$\frac{1}{L^{3/2}}\, e^{2\pi i(\gamma,q)}\delta_{\sigma\sigma_r} \quad (r = 1, 2),$$

отвечающей тому же значению количества движения и имеющей два возможных значения поляризации, учитывающих количество осцилляторов. Можно пойти дальше и в согласии с методом Йордана–Вигнера представить с помощью комплексной собственной функции с двумя значениями $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ уже не одну частицу, а физическую систему, содержащую неопределенное число таких частиц. Для этого достаточно положить

$$\begin{aligned} \Phi_1(q) &= \sum_\gamma \frac{1}{L^{3/2}}\, e^{2\pi i(\gamma,q)} B_1(\gamma), \\ \Phi_2(q) &= \sum_\gamma \frac{1}{L^{3/2}}\, e^{2\pi i(\gamma,q)} B_2(\gamma). \end{aligned} \tag{25}$$

В нерелятивистском приближении $(|\gamma| \ll mc/h)$ константы $b_r(\gamma)$, которые фигурируют в $(18')$, являются линейными комбинациями $a_r(\gamma)$ *с не зависящими от* γ *коэффициентами.*

Эти коэффициенты зависят только от матрицы β, поэтому, ввиду (9), можно предположить соотношения

$$\begin{aligned} b_1(\gamma) &= \frac{a_3(\gamma) - ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}, \quad b_3(\gamma) = \frac{a_3(\gamma) + ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}, \\ b_2(\gamma) &= \frac{a_4(\gamma) + ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}, \quad b_4(\gamma) = \frac{a_4(\gamma) - ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

с учетом которых, а также (16), удовлетворяются выражения (20). Из (15) и (25) следует, таким образом, что в нерелятивистском приближении

$$\Phi_1(q) = U_3(q) - iU_2(q), \quad \Phi_2(q) = U_4(q) + iU_1(q). \tag{26}$$

Отметим обстоятельство чисто формального толка, что $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ совпадает с точностью до фактора $\sqrt{2}$ с парой *больших* компонент решений уравнения (10), которые интерпретируются обычным образом, т. е. без ограничения для них принимать только действительные значения. Чтобы это показать, достаточно проверить, что преобразование $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\rho_2\sigma_2)U$ позволяет перейти от схемы (9) к обычной дираковской $(\alpha = \rho_1\sigma; \beta = \rho_3)$ и что при этом получается

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_1, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_2.$$

Известно, что в такой схеме ψ_3 и ψ_4 действительно являются большими компонентами. Это сходство, хотя и поясняет закон преобразования Φ по отношению к пространственным вращениям, не имеет, естественно, места по отношению к общим преобразованиям Лоренца.

Существование простых формул типа (26) могло бы заставить думать, что, по крайней мере вплоть до некоторого приближения, можно обойтись без перехода к плоским волнам. В действительности такой переход концептуально всегда необходим, чтобы получить сокращение «*половинок квантов покоя*». После такого сокращения выражение для энергии имеет в первом приближении очевидную форму

$$H = \int \tilde{\Phi} \left(mc^2 + \frac{1}{2m} p^2 \right) \Phi dq \tag{27}$$

и отличается, следовательно, существенным образом от (13).

3. Как мы уже отмечали, схемы (12) недостаточно для описания заряженных частиц, однако добавление второй четверки реальных величин V_r, аналогичных U_r, позволяет снова получить обычную электродинамику в симметричной форме относительно электрона и позитрона. Итак, рассмотрим два типа действительных величин, представляющих, соответственно, материальные частицы и электромагнитное поле. Величины первого типа будут интерпретироваться по схеме, изложенной в п. 1, тогда как величины другого типа, то есть электромагнитные потенциалы φ и $A = (A_x, A_y, A_z)$, можно понимать как классические величины, подвергнутые квантованию по правилу Гейзенберга с привлечением принципа соответствия. Совокупность уравнений Максвелла и Дирака можно получить (с учетом отмеченных особенностей для последних) из вариационного принципа

$$\delta \int L dq dt = 0,$$

где L есть сумма трех слагаемых:

$$L = L^{'} + L^{''} + L^{'''}.$$

В этой сумме первый член относится к волне материи

$$L^{'} = i \frac{hc}{2\pi} \left\{ U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \mathrm{grad}) + \beta^{'} \mu \right] U + \right. \\ \left. + V^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \mathrm{grad}) + \beta^{'} \mu \right] V \right\}, \tag{28}$$

а второй — к полю излучения, относительно которого предполагается, что оно подвергнуто квантованию по методу Ферми [4]:

$$L^{''} = \frac{1}{8\pi}(E^2 - H^2) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{c} \dot{\varphi} + \mathrm{div}\, \mathbf{A} \right)^2. \tag{29}$$

При этом необходимо учитывать дополнительное условие

$$\frac{1}{c}\dot{\varphi} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{30}$$

В действительности равенство (29) отличается от того, которое было первоначально использовано Ферми, однако только на величину, представляющую собой полный интеграл. Оно ведет к такому определению количества движения P_0, сопряженного φ, которое немедленно приводит к уничтожению одной из двух продольных волн без перехода к разложению по плоским волнам. По этой причине второй член в выражении (29) для $L^{''}$ умножается на произвольную постоянную, отличную от нуля, что не имеет существенного значения.

Что касается члена $L^{'''}$, то он выбирается так, чтобы $\psi = U + iV$ удовлетворяла уравнениям Дирака (8) во внешнем поле

$$\left[\frac{W}{c} + \frac{e}{c}\varphi + \left(\alpha, p + \frac{e}{c}A\right) + \beta mc\right]\psi = 0.$$

Это практически однозначно заставляет предположить, что

$$L^{'''} = ieU^*[\varphi + (\alpha, \mathbf{A})]V - ieV^*[\varphi + (\alpha, \mathbf{A})]U. \tag{31}$$

Тогда из вариации электромагнитных потенциалов возникают следующие выражения для плотностей заряда и тока:

$$\begin{aligned} \rho &= -ie(U^*V - V^*U) = -e\frac{\tilde{\psi}\psi - \psi^*\bar{\psi}}{2}, \\ I &= ie(U^*\alpha V - V^*\alpha U) = e\frac{\tilde{\psi}\alpha\psi - \psi^*\alpha\bar{\psi}}{2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Полученные выражения отличаются от обычных только на *бесконечные постоянные*. Сокращение таких бесконечных постоянных — следствие симметризации теории, что неявно уже включено в выбранную форму вариационного принципа. Действительно, замена местами U_r и V_r, которые симметрично входят в $L^{'}$, эквивалентна замене знака электрического заряда.

Величины U и V подчиняются следующим антикоммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered} U_r(q)U_s(q^{'}) + U_s(q^{'})U_r(q) = \frac{1}{2}\delta(q - q^{'})\delta_{rs}, \\ V_r(q)V_s(q^{'}) + V_s(q^{'})V_r(q) = \frac{1}{2}\delta(q - q^{'})\delta_{rs}, \\ U_r(q)V_s(q^{'}) + V_s(q^{'})U_r(q) = 0, \end{gathered}$$

что эквивалентно обычной схеме Йордана–Вигнера, если положить $\psi = U + iV$. Электромагнитные потенциалы φ, A_x, A_y, A_z и сопряженные им импульсы поля, напротив, удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям, например $P_0(q)\varphi(q^{'}) - \varphi(q^{'})P_0(q) = \dfrac{h}{2\pi i}\delta(q - q^{'})$, причем

$$P_0 = -\frac{1}{4\pi c}\left(\frac{1}{c}\dot{\varphi} + \operatorname{div}\mathbf{A}\right),$$
$$P_x = -\frac{1}{4\pi c}E_x, \quad P_y = -\frac{1}{4\pi c}E_y, \quad P_z = -\frac{1}{4\pi c}E_z. \tag{33}$$

Энергия состоит из трех частей: $H = H^{'} + H^{''} + H^{'''}$. Первый член $H^{'}$ выводится из $L^{'}$ по уже изложенным правилам. Второй получается по классическим правилам $H^{''} = \int [P_0\dot{\varphi} + (P, \dot{\mathbf{A}}) - L^{''}]dq$, если положить $P = (P_x, P_y, P_z)$. Что касается члена $H^{'''}$, то его можно получить из $L^{'''}$, следуя без разницы тому или другому методу (в нашем случае $H^{'''} = -\int L^{'''}dq$), и, таким образом, должно быть задано, что $L^{'''}$ является функцией как величин поля материи, так и электромагнитного поля. Этот факт еще раз доказывает необходимость соотношения (5). Уравнение непрерывности (30) справедливо всегда, поскольку с самого начала удовлетворялось вместе с уравнением для дивергенции $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$. Из (33) следует, что кинематика, определенная этими соотношениями, может быть упрощена с помощью уравнений

$$P_0(q) = 0,$$
$$\operatorname{div} P + \frac{1}{c}\rho = 0, \tag{34}$$

т. е. при фиксации двух полевых величин и, следовательно, неопределенности значений величин, им сопряженных. *Первое условие* в (34) приводит к исключению P_0 и φ из выражения для H. Эта операция легко проводится с использованием (33) и приводит к формуле

$$H = \int \left\{\tilde{\psi}[-c(\alpha, p) - \beta mc^2]\psi - (\mathbf{A}, \mathbf{I}) + 2\pi c P^2 + \frac{1}{8\pi}|\operatorname{rot}\mathbf{A}|^2\right\} dq. \tag{35}$$

Что касается вопроса о релятивистской инвариантности, то мы видим, что $\psi = U + iV$ удовлетворяют уравнениям Дирака, причем уравнения Максвелла с выражениями для плотностей заряда и тока, удовлетворяющими правилам релятивистских преобразований, также продолжают выполняться. Эти два обстоятельства обеспечивают инвариантность теории, что уже неявно содержится в результатах Гейзенберга и Паули [5].

Перейдем теперь к интерпретации полученного формализма.

4. Раскладывая U и аналогично V по уже рассмотренному набору периодических функций, находим в качестве очевидного обобщения (22) после сокращения вклада *«половинок квантов покоя»*

$$H' = \sum_\gamma c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^{2} [\bar{B}_r(\gamma)B_r(\gamma) + \bar{B}'_r(\gamma)B'_r(\gamma)], \tag{36}$$

где B_r и B'_r относятся, соответственно, к разложениям для U и V, причем B_r и B'_r и им сопряженные величины подчиняются обычным антикоммутационным соотношениям. Вводя для каждого значения γ четыре удобные спиновые комплексные функции $\xi_s(\gamma)$ $(s = 1, 2, 3, 4)$, которые образуют полную систему, можно положить

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\gamma \{B_1(\gamma)\xi_1(\gamma) + B_2(\gamma)\xi_2(\gamma) + \\ &\qquad + \bar{B}_1(-\gamma)\xi_3(\gamma) + \bar{B}_2(-\gamma)\xi_4(\gamma)\} f_\gamma(q), \\ V &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\gamma \{B'_1(\gamma)\xi_1(\gamma) + B'_2(\gamma)\xi_2(\gamma) + \\ &\qquad + \bar{B}'_1(-\gamma)\xi_3(\gamma) + \bar{B}'_2(-\gamma)\xi_4(\gamma)\} f_\gamma(q), \end{aligned} \tag{37}$$

с учетом того, что выполняются соотношения

$$\xi_3(\gamma) = \bar{\xi}_1(-\gamma), \quad \xi_4(\gamma) = \bar{\xi}_2(-\gamma). \tag{38}$$

Из выражения для плотности полного электрического заряда (32) следует

$$\begin{aligned} Q = -\frac{ie}{2}\int [U^*(q)V(q) - V^*(q)U(q)]dq = -\frac{ie}{2}\sum_\gamma \times \\ \times \sum_{r=1}^{2} [B_r(\gamma)\bar{B}'_r(\gamma) + \bar{B}_r(\gamma)B'_r(\gamma) - \bar{B}'_r(\gamma)B_r(\gamma) - B'_r(\gamma)\bar{B}_r(\gamma)]. \end{aligned} \tag{39}$$

Если теперь положить

$$C_r^{\mathrm{el}} = \frac{B_r + iB'_r}{\sqrt{2}}, \quad C_r^{\mathrm{pos}} = \frac{B_r - iB'_r}{\sqrt{2}}, \tag{40}$$

то выражения (36) и (39) для энергии и заряда можно привести к виду

$$H^{'} = \sum_{\gamma} c\sqrt{m^2c^2 + h^2\gamma^2} \sum_{r=1}^{2} (\bar{C}_r^{\text{el}} C_r^{\text{el}} + \bar{C}_r^{\text{pos}} C_r^{\text{pos}}), \tag{41}$$

$$Q = e\sum_{\gamma}\sum_{r=1}^{2}\left[-\left(\bar{C}_r^{\text{el}}C_r^{\text{el}} - \frac{1}{2}\right) + \bar{C}_r^{\text{pos}}C_r^{\text{pos}} - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= e\sum_{\gamma}\sum_{r=1}^{2}(-\bar{C}_r^{\text{el}}C_r^{\text{el}} + \bar{C}_r^{\text{pos}}C_r^{\text{pos}}). \tag{42}$$

Уничтожение вклада *«половинок квантов покоя»* происходит, таким образом, автоматически, поскольку очевидно, что сначала производится внутреннее суммирование. Совокупность выражений (41) и (42) представляет собой систему осцилляторов, эквивалентную двойной системе частиц, подчиняющихся статистике Ферми, с массой покоя m и зарядом $\pm e$; переменные C^{pos} относятся к позитронам, C^{el} — к электронам.

Устранение продольного электрического поля с помощью второго выражения из (34) встречает в симметричной теории трудности из-за невозможности представить ρ, входящее в (32), в диагональной форме. Результат, однако, хорошо известен (хотя частично и иллюзорен из-за трудностей со сходимостью) в обычной электродинамике, в которой ρ выбирается в форме $\rho = -e\tilde{\psi}\psi$. То же самое получится, если исходить из выражения $\rho = e\psi^*\bar{\psi}$, потому что оно полностью эквивалентно предыдущему при перемене местами электрона и позитрона. Это соответствует тому, что позитрон рассматривается как реальная частица, а электрон — в качестве позитронной «дырки». Представляется естественным, что матричные элементы, которые имеют один и тот же вид в этих дополнительных схемах, должны были бы сохраниться и в симметричной теории. Мы предполагаем также, что выполнена процедура удаления вкладов в A и P, которые инвариантны к преобразованиям вращения.

Выражение (35) для H модифицируется двумя способами: во-первых, подразумевается, что A и P в этом выражении есть только часть этих векторов без отброшенных членов; во-вторых, добавляется слагаемое, которое представляет собой электростатическую энергию. Это слагаемое имеет разную форму в обычной схеме (электрон и электронная дырка) и в дополнительной (т. е. позитрон и позитронная дырка — *ред.*). В первом случае сохраняется взаимодействие, описывающее самодействие каждой частицы:

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2}\int\int \frac{1}{|q - q^{'}|}\tilde{\psi}(q)\psi(q)\tilde{\psi}(q^{'})\psi(q^{'})dqdq^{'},$$

во втором случае, соответственно,

$$H_{\rm els} = \frac{e^2}{2} \int \int \frac{1}{|q-q'|} \psi^*(q)\bar{\psi}(q)\psi^*(q^{'})\bar{\psi}(q^{'}) dq dq^{'}.$$

С помощью (37) и (40) можно выразить электростатическую энергию как функцию C. Эти электростатические члены, имеющие физический смысл, идентичны в обоих схемах; в частности, те из них, которые с корпускулярной точки зрения должны интерпретироваться как отталкивание и притяжение между частицами одного или разных типов.

Наконец, что касается взаимодействия с полем излучения: единственное различие между симметричной теорией и обычной связано с сокращением в выражении для плотности тока возникающих неопределенных констант, которые относятся к отдельным осцилляторам; при этом остаются неизменными все соотношения, имеющие практический смысл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dirac P. A. M.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1934. V. 30. P. 150; см. также: *Heisenberg W.* // Zs. f. Phys. 1934. V. 90. P. 209.
2. *Jordan P., Wigner E.* // Zs. f. Phys. 1928. V. 47. P. 631.
3. *Wick G.* // Rend. Accad. Lincei. 1935. V. 21. P. 170.
4. *Fermi E.* // Rend. Accad. Lincei. 1929. V. 9. P. 881.
5. *Heisenberg W., Pauli W.* // Zs. f. Phys. 1929. V. 56. P. 1; 1930. V. 59. P. 168.