

УДК 567.891.23

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ЗАРЯД

И. А. Шелаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Исходя из расширенного принципа Гюйгенса рассмотрено электромагнитное поле (ЭМП) точечного заряда, совершающего гармонические колебания вдоль оси x . Показано, что в ЭМП заряда, максимальная скорость которого больше скорости света, появляются замкнутые области, соответствующие конусу Маха при прямолинейном движении заряда со сверхсветовой скоростью. Эти области по форме напоминают лунные серпики и разлетаются в разные стороны по оси x со скоростью света.

The electromagnetic field (EMF) of a point charge harmonically oscillating along the x axis is considered using the extended Huygens principle. It is shown that the closed areas corresponding to the Mach cone under rectilinear movement of the charge with superlight velocity are formed in the charge EMF whose maximum velocity is greater than that of the light. The areas are similar to the Moon sickles in shape and are flying in different directions along the x axis with the velocity of light.

ВВЕДЕНИЕ

Теория излучения Вавилова–Черенкова продолжает интересовать физиков [1]. Однако общепринятый подход к этой задаче, основанный на работах Хэвисайда, приводит к рассмотрению скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля точечного заряда, сингулярных на конусе Маха. В то же время конус Маха легко наблюдаем в гидродинамике, но там он лишен сингулярностей, предсказываемых запаздывающими потенциалами.

В волновой теории света Х. Гюйгенс полагал, что свет распространяется сферическими поверхностями или волнами [2], и по этому поводу писал: «Я называю эти поверхности волнами по сходству с волнами, которые можно наблюдать на воде, в которую брошен камень, и которые изображают собой... постепенное распространение кругами, хотя оно и происходит от другой причины и в плоской поверхности».

В работе [1] рассмотрена задача Тамма [3] об ЭМП заряда с конечным ускорением до сверхсветовой скорости и конечным замедлением до полной остановки и дается ответ на вопрос о том, «как возникает черенковская волна при ускорении заряда и что с ней происходит при замедлении?».

В данной работе ответ на этот вопрос дается рассмотрением ЭМП осциллирующего по оси x точечного заряда. Это рассмотрение опирается на принцип Гюйгенса, расширенный определениями потенциалов [4], и позволяет аналитически проследить, как трансформируется конус Маха, когда скорость заряда периодически оказывается выше скорости света. При этом в ЭМП заряда при любой скорости движения сохраняется только одна сингулярность в той точке пространства, в которой в данный момент времени находится точечный заряд. Такая сингулярность, разумеется, является результатом ограничения задачи об ЭМП точечного заряда.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть точечный заряд величиной e движется по траектории

$$\begin{aligned}x_c &= a \sin \omega t, \\y_c &= 0, \\z_c &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где a и ω — постоянные. Координаты (1) задают радиус-вектор $\mathbf{r}_c(t)$ положения заряда в любой момент времени

$$\mathbf{r}_c(t) = \mathbf{i}a \sin \omega t + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0,$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} — единичные орты декартовой системы координат.

Очевидно, скорость заряда равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{i}\omega a \cos \omega t,$$

а ее относительная величина β принимает максимальное значение, когда $|\cos \omega t| = 1$:

$$\beta = \frac{\omega a}{c} = ka, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Согласно расширенному принципу Гюйгенса [4], точечный заряд в каждой точке своей траектории в момент времени t' создает электромагнитное возмущение, которое распространяется в виде сферической волны в окружающее пространство. К моменту времени t

$$t \geq t'\tag{2}$$

заряд создает множество сфер радиуса λ

$$\lambda = c(t - t'),\tag{3}$$

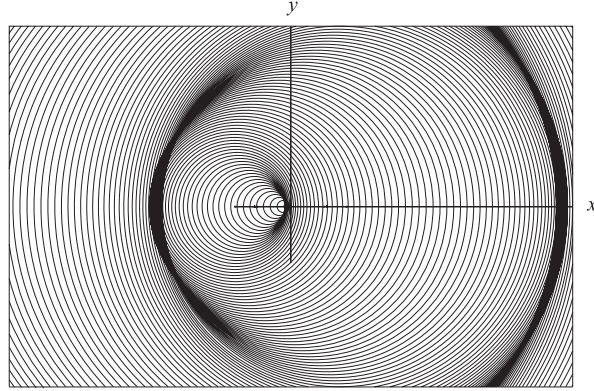
где c — скорость света. Центры λ -сфер находятся в точках $\mathbf{r}_c(t')$, т.е. образуют траекторию заряда, а точки пространства, через которые проходит λ -сфера, определяются уравнением

$$\lambda = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t')|,\tag{4}$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения ЭМП.

Центры всех сфер лежат на прямой, вдоль которой колеблется заряд, поэтому проходящая через нее плоскость пересекает каждую λ -сферу по большому кругу, радиус которого равен радиусу сферы, т.е. λ . На этой плоскости каждая сфера представляется окружностью такого же радиуса, и пример таких окружностей показан на рис. 1 для точечного заряда с амплитудой колебаний $a = 5,0$ см и частотой $f = 1,25$ ГГц; максимальная относительная скорость заряда равна 1,309.

Важно подчеркнуть, что осциллирующий заряд создает электромагнитное возмущение в любой точке пространства и при любой скорости своего движения, чем существенно

Рис. 1. Распределение λ -сфер осциллирующего заряда

отличается от заряда, движущегося равномерно и прямолинейно. Последний при $\beta > 1$ в одной части пространства, находящейся перед зарядом, вообще не создает возмущений, а в другой, сзади заряда, создает в любой точке пространства одновременно два возмущения.

Если $\beta < 1$, то в распределении множества λ -сфер осциллирующего заряда наблюдаются лишь сгущения и разрежения вдоль оси x , и через каждую точку наблюдения ЭМП проходит одна сфера.

При $\beta > 1$ появляются замкнутые области пространства, через каждую точку которых проходит более одной сферы (см. рис. 1). Из приведенных выше определений находим уравнение λ -сферы

$$\lambda^2 = [x - a \sin(\omega t - k\lambda)]^2 + \rho^2 = (x - a \sin \psi)^2 + \rho^2, \quad (5)$$

где

$$\rho^2 = y^2 + z^2, \quad \psi = \omega t' = \omega t - k\lambda.$$

Уравнение (5) определяет множество сфер, каждая из которых отвечает определенному значению параметра λ , и в общем виде его можно представить как $F(x, \rho; \lambda) = 0$. Как известно, огибающая множества находится из этого уравнения и равенства $\partial F / \partial \lambda = 0$ исключением параметра λ .

С этой целью продифференцируем уравнение (5) частным образом по λ :

$$\lambda = \beta \cos(\omega t - k\lambda)[x - a \sin(\omega t - k\lambda)], \quad \beta = ka. \quad (6)$$

2. ОГИБАЮЩИЕ

К сожалению, исключить λ из уравнений (5) и (6) не удастся в силу их трансцендентности. Однако эти уравнения позволяют найти координаты огибающей как функции параметра λ .

Действительно, из (6) находим

$$x = a \sin(\omega t - k\lambda) + \frac{\lambda}{\beta \cos(\omega t - k\lambda)} = x(\lambda, t). \quad (7)$$

Подставляя x из (7) в (5), получаем

$$\rho = \lambda \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 \cos^2(\omega t - k\lambda)}}. \quad (8)$$

Таким образом, равенства (7) и (8) — параметрические задания огибающей в цилиндрических координатах, и параметром задания является положительная величина λ .

Переменная t в этом контексте есть некоторый фиксированный момент времени, в который рассматривается ЭМП данного заряда, и этот момент без потери общности можно положить равным нулю. Тогда равенства (7) и (8) определяют x и ρ как функции λ .

Если по формулам (7) и (8) построить огибающие множества сфер, то, как видно из рис. 2, построенного для заряда с теми же параметрами траектории, что и на рис. 1, соответствующие кривые формируют замкнутые области. Жирная прямая в центре системы координат представляет собой траекторию заряда. По форме эти области напоминают лунные серпики, близкие к сферическим сегментам. Последние образуются теми λ -сферами, для которых скорость заряда равна скорости света. Вдоль оси x в отрицательном направлении мчатся серпики, отвечающие «старшей» Луне, т.к. они похожи на букву «с», а в положительном — «растущей».

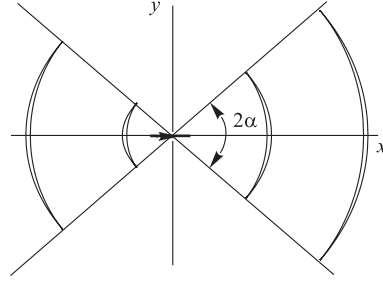


Рис. 2. Серпики осциллирующего заряда

Серпики имеют вращательную симметрию относительно оси x и образуют в пространстве два конуса с общей осью, совпадающей с осью x , и углом полураствора α при вершине, равным примерно

$$\cos \alpha = \frac{1}{\beta}. \quad (9)$$

Это равенство тем точнее выполняется, чем меньше отношение $a/|x|$. Если $\beta > 1$ и $\beta \rightarrow 1$, то серпики заполняют конусы с приближающимся к нулю углом полураствора при вершинах.

Рождение серпика можно проследить по рис. 3, где показано его формирование вблизи центра системы координат в различные моменты времени ωt_i ,

$$\omega t_i = \left(\frac{i}{3} - 1\right) \psi_\beta, \quad \psi_\beta = \arccos \frac{1}{\beta},$$

и i принимает натуральные значения от нуля до 6. Для $i = 0$ огибающая вырождается в точку A , помеченную крестиком на рис. 3, и в этой точке скорость заряда равна скорости света. С ростом i огибающая принимает форму равностороннего треугольника в плоскости x, ρ с основанием в виде дуги окружности. Дополнительным построением можно установить, что в любой последующий момент времени t_i окружность радиуса $\lambda = i\psi_0/k$ и центр в точке A касается основания треугольника.

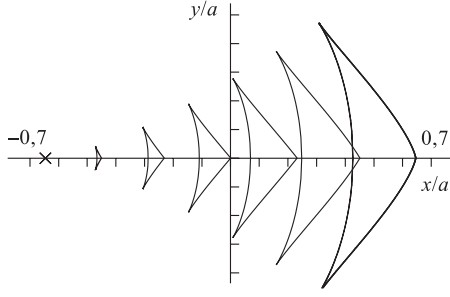


Рис. 3. Рождение нового серпика в различные моменты времени
«взрослый» серпик, если предыдущие фазы рассматривать как развитие молодого серпика.

Как видно из изложенного, серпики образованы сферами с конечными радиусами, поэтому скалярный потенциал на их границах и внутри всегда остается конечным и сингулярностей не содержит.

Рассмотрим пересечения серпиков с осью x , для чего равенство (8) представим в виде

$$\beta^2 \cos^2(\omega t - k\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \rho^2}.$$

В такой форме оно имеет смысл лишь при

$$\beta > 1,$$

т. к. стоящая в нем справа дробь всегда больше единицы.

Теперь в равенстве (8) положим $\rho = 0$, тогда

$$\beta^2 \cos^2(\omega t - k\lambda) = 1, \quad (10)$$

или

$$\cos(\omega t - k\lambda) = \cos \psi = \pm \frac{1}{\beta}.$$

Из (6) следует, что знаку « $-$ » отвечает условие

$$x - a \sin \psi < 0,$$

т. к. по определению $\lambda > 0$. Отсюда находим для «левых» ($x < 0$) точек пересечения огибающих с осью x

$$\begin{aligned} i\psi_{N1} &= +\arccos \frac{1}{\beta} - (2N + 1)\pi, \\ i\psi_{N2} &= -\arccos \frac{1}{\beta} - (2N + 1)\pi \end{aligned} \quad (11)$$

В вершине треугольника находится точечный заряд, скорость которого превышает скорость света, поэтому боковые стороны треугольника формируют поверхность с отрицательной кривизной при $\omega t_i < 0$ и положительной — при $\omega t_i > 0$.

Когда ωt_i достигает значения ψ_0 , скорость заряда вновь сравнивается со скоростью света. Для такой скорости конус Маха при равномерном и прямолинейном движении вырождается в плоскость, ортогональную скорости заряда, поэтому при $i = 6$ вершина треугольника оказывается плоской. В этой точке формируется

и для «правых» ($x > 0$)

$$\begin{aligned} {}_r\psi_{N1} &= +\arccos \frac{1}{\beta} - 2N\pi, \\ {}_r\psi_{N2} &= -\arccos \frac{1}{\beta} - 2N\pi, \end{aligned} \quad (12)$$

т. е. искомые огибающие пересекают ось x в бесконечном, но дискретном числе точек, и λ_N в этих точках имеет величину

$$\lambda_N = ct - \frac{\psi_N}{k}. \quad (13)$$

Дифференцируя последнее равенство по t , найдем

$$\frac{d\lambda_N}{dt} = c.$$

Отсюда заключаем, что точки пересечения огибающих с осью x движутся по оси со скоростью c .

Для данного N всегда имеется две точки пересечения огибающей с осью x и разность значений λ в этих точках

$$\Delta\lambda_N = \lambda_{N2} - \lambda_{N1} = \frac{2}{k} \arccos \frac{1}{\beta}$$

всегда постоянна и определяется максимальной скоростью заряда. Напротив, сумма λ_N

$$\sigma\lambda_N = \lambda_{N1} + \lambda_{N2} = \begin{cases} (2N+1)\frac{c}{f}, \\ 2N\frac{c}{f} \end{cases}$$

не зависит от скорости заряда.

Координаты x_N точек пересечения равны

$$x_{N1,N2} = -\lambda_{N1,N2} + a \sin \psi_{N1,N2},$$

и их разности $\Delta x_N = x_{N2} - x_{N1}$ также постоянны и определяются максимальной скоростью заряда, а суммы $x_{N1,N2}$ также постоянны и не зависят от скорости заряда.

3. МНОГОЗНАЧНОСТЬ ФУНКЦИИ $\lambda(x)$

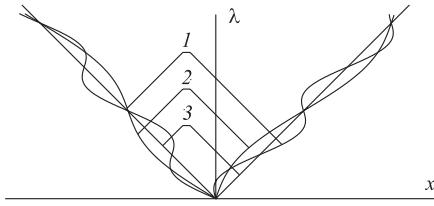
Огибающие возникают потому, что при $\beta > 1$ функция $\lambda(x)$ имеет на некоторых интервалах оси x одновременно три разных значения при одном и том же x . Действительно, положим

$$\rho = 0,$$

тогда из уравнения (5) получаем

$$x = \pm\lambda + a \sin(\omega t - k\lambda).$$

Знак «+» соответствует положительным значениям x , а знак «-» — отрицательным.

Рис. 4. Функция $\lambda(x)$ на оси x

Видно, что области, в которых λ имеет три значения (кривая 1), регулярно появляются слева и справа от точки $x = 0$. Эта многозначность функции $\lambda(x)$ и порождает огибающие.

Для кривой 2 максимальное значение $\beta = 0,654$, поэтому здесь отсутствуют области многозначности функции $\lambda(x)$, и в распределении λ -сфер, если для такого заряда построить рисунок, аналогичный рис. 1, будут наблюдаться периодические сгущения и разрежения, но через любую точку пройдет только одна сфера.

Наконец, прямые 3 соответствуют неподвижному заряду, и в этом случае расстояние между соседними λ -сферами остается постоянным.

4. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

В каждой точке пространства, через которую проходит λ -сфера, точечный заряд создает скалярный потенциал¹ Φ :

$$\Phi = \frac{e}{\lambda}. \quad (14)$$

Можно показать, что при таком определении скалярный потенциал удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных

$$\square\Phi = \frac{\partial\Phi^2}{c\partial t}. \quad (15)$$

Это уравнение нелинейно, т. к. в нем Φ присутствует в первой и во второй степени, и необратимо, т. к. в нем содержится первая частная производная потенциала по времени. Разумеется, уравнение (15) отличается от уравнения

$$\square\Phi = 0, \quad (15a)$$

которое решал Хевисайд и др. Нетрудно убедиться, что последнее уравнение задает потенциал (при равномерном и прямолинейном движении заряда), который вовсе не запаздывает, хотя и называется запаздывающим, и распределение скалярного потенциала на оси x , вдоль которой движется заряд, остается постоянным при любом значении β , если только $\beta < 1$.

¹Определение векторного потенциала A точечного заряда приведено в [4].

Действительно, уравнению (15a) для равномерно и прямолинейно движущегося заряда с $\beta < 1$ удовлетворяет запаздывающий потенциал Φ_{LW} [5]:

$$\Phi_{\text{LW}}(x, y, z) = \frac{e}{\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right)^2 + y^2 + z^2}}.$$

В этой формуле положим $y = z = 0$, что определит запаздывающий потенциал на оси x

$$\Phi_{\text{LW}}(x, 0, 0) = \frac{e}{|x - vt|}.$$

Очевидно, что запаздывающий потенциал в этой форме отличается от потенциала неподвижного заряда

$$\Phi(x, 0, 0) = \frac{e}{|x|}$$

только положением центра координатной системы на оси x .

Возвращаясь к определению (14), заметим, что если через данную точку наблюдения ЭМП проходит две и более λ -сферы в один и тот же момент времени t , то скалярный потенциал в этой точке в силу принципа суперпозиции равен сумме потенциалов вида (14), отвечающих каждому значению λ ,

$$\Phi = e \sum \frac{1}{\lambda_i}. \quad (16)$$

Для построения кривой $\Phi(x)$ необходимо знать все значения λ в одних и тех же точках оси x . Они были получены численно. С этой целью область многозначности функции λ разбивалась на три подобласти, в пределах которых λ оставалась однозначной, и здесь вычислялись значения x_i по формуле (7) при очень мелком шаге по λ . Эти значения x_i затем сравнивались с заданным значением x_j по формуле

$$x_i < x_j < x_{i+1}.$$

В результате в точках x_j находились значения λ_j , хотя и с некоторой ошибкой порядка шага по λ .

Значения x_j и им соответствующие λ_j использовались для нахождения потенциала по формуле (16), а величина λ_j находилась линейной интерполяцией значений λ_i и λ_{i+1} в соседних с x_j точках, что повышало точность вычислений. Результаты представлены на рис. 5, откуда видно, что скалярный потенциал на оси x «модулирован» прямоугольными импульсами с бесконечно короткими фронтами.

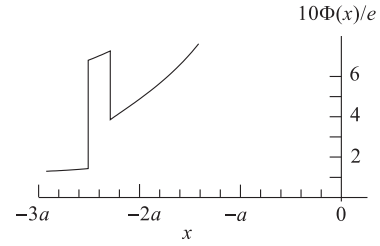


Рис. 5. Распределение скалярного потенциала на оси x

В действительности эти фронты имеют конечную протяженность. Анализ [6] конуса Маха равномерно заряженной по поверхности сферы конечного радиуса a , движущейся равномерно и прямолинейно с $\beta > 1$, показывает, что такой конус имеет внутреннюю микроструктуру. Если ее основной конус на больших расстояниях r от сферы, когда $a/r \ll 1$, совпадает с конусом Маха точечного заряда, то он окружен пограничным конусом, в котором скалярный потенциал «постепенно», как говорил Гюйгенс, увеличивается от нуля на внешней границе пограничного конуса до некоторой конечной величины на границе основного конуса. Протяженность пограничного конуса равна $2\beta a$, что при скорости сферы $v = \beta c$ дает время τ прохождения пограничного конуса мимо неподвижного наблюдателя

$$\tau = \frac{2\beta a}{\beta c} = \frac{2a}{c}.$$

Это время для электрона (классический радиус $a = 2,818 \cdot 10^{-13}$ см) составляет величину $0,939 \cdot 10^{-23}$ с и еще меньше — для протона. Столь малая длительность фронта позволяет считать его бесконечно коротким.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из рассмотрения ЭМП точечного заряда, осциллирующего вдоль оси x , следует, что при любой скорости заряда ЭМП существует в любой точке пространства. При $\beta > 1$ в распределении потенциала появляются замкнутые области пространства, в которых потенциал выше, чем в соседних с этими областями точках. Эти области образуют две группы, движущиеся со скоростью света в разные стороны вдоль оси колебаний заряда. По форме они напоминают серпики «стареющей» или «растущей» Луны и заполняют два конуса с углом полураствора при вершинах (9). Частота следования серпиков в каждой группе равна частоте колебаний заряда.

Причина появления серпиков аналогична причине появления конуса Маха при прямолинейном движении заряда со сверхсветовой скоростью, но серпики заполняют другой конус, угол полураствора при вершине которого дополняет угол полураствора конуса Маха до прямого.

Такой осциллирующий сверхсветовой заряд вызовет в окружающем веществе свечение, наблюдаемое одновременно в двух конусах по прямой, вдоль которой осциллирует заряд.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Afanasiev G. N., Shilov V. M. // *Physica Scripta*. 2000. V. 62. P. 326–330.
2. Гюйгенс Х. Трактат о свете. М.; Л., 1935. С. 11.
3. Тамм И. Е. // *Phys. USSR*. 1939. V. 1. P. 439.
4. Шелаев И. А. Введение в необратимую электродинамику. Дубна, 1999. С. 20.
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сендс М. Фейнмановские лекции по физике. М., 1966. Т. 6. С. 156.
6. *Ibid* [4]. С. 244.

Получено 3 декабря 2001 г.