

УДК 517.958:530.145.86

КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ
В ДИСКРЕТНОМ $2 + 1$ -МЕРНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ:
ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА
НА РЕШЕТКЕ, ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ, ИЗСПЕКТРАЛЬНАЯ
ДЕФОРМАЦИЯ МОДЕЛИ
ЗАМОЛОДЧИКОВА–БАЖАНОВА–БАКСТЕРА

*С. М. Сергеев**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Department of Theoretical Physics, Research School of Physical Sciences
and Engineering, Australian National University, Canberra

ВВЕДЕНИЕ	1056
ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ	1060
КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ НАБЛЮДАЕМЫХ	1070
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ	1083
КВАНТОВАЯ ТРАНСФЕР-МАТРИЦА	1093
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1111
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1113

*E-mail: sergeev@thsun1.jinr.ru; sergey.sergeev@anu.edu.au

УДК 517.958:530.145.86

КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ
В ДИСКРЕТНОМ $2 + 1$ -МЕРНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ:
ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА
НА РЕШЕТКЕ, ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ, ИЗОСПЕКТРАЛЬНАЯ
ДЕФОРМАЦИЯ МОДЕЛИ
ЗАМОЛОДЧИКОВА–БАЖАНОВА–БАКСТЕРА

*С. М. Сергеев**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Department of Theoretical Physics, Research School of Physical Sciences
and Engineering, Australian National University, Canberra

В работе систематически излагается инвариантный подход к квантовым интегрируемым моделям в полностью дискретном $2 + 1$ -мерном пространстве-времени. Формулируется вспомогательная линейная задача на двумерных решетках, обобщающих понятие квантовых цепочек. Излагается метод получения полного набора интегралов движения. Формулируется и решается представление нулевой кривизны для двумерных решеток, позволяющее строить интегрируемые эволюционные отображения. Основной упор делается на конечномерные представления алгебры наблюдаемых, существующие при положении параметра вейлевской алгебры в рациональной точке на единичной окружности, так называемый корень из единицы. Для этого случая выводится универсальное функциональное уравнение на собственные значения интегралов движения. Кроме того, для конечномерных представлений алгебры наблюдаемых строится группоид изоспектральных деформаций. Конечномерность систем в корне из единицы позволяет рассматривать интегрируемые системы как модели статистической физики на трехмерной решетке. Сформулирован способ построения собственных состояний исследуемых моделей на основе изоспектральных деформаций (метод квантового разделения переменных для $2 + 1$ -мерных моделей).

In this paper we expound systematically an invariant approach to quantum integrable models in wholly discrete $2 + 1$ -dimensional space-time. We formulate an auxiliary linear problem on two-dimensional lattice which generalizes the notion of the quantum chains. We give a complete set of integrals of motion derivation method. We formulate and solve a zero curvature representation for two-dimensional lattice, it allows one to construct integrable evolution mappings. As the main example, we investigate finite-dimensional representations of the algebra of observables existing when

*E-mail: sergeev@thsun1.jinr.ru; sergeev@anu.edu.au

Weyl algebra's parameter lies in a rational point on the unit circle, the so-called root of unity. For this case we derive a universal functional equation for eigenvalues of the integrals of motion. Besides, for the finite dimensional representation of the algebra of observables we construct a groupoid of isospectral transformations. The fact that at the root of unity the algebra of observables is finite-dimensional allows one to interpret an integrable system as a model of statistical mechanics. We formulate a method for construction of eigenvectors for investigated models, this method is based on isospectral deformations (the method of quantum separation of variables for $(2 + 1)$ -dimensional models).

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа представляет собой попытку систематизации ряда относительно новых методов и результатов [1–9], относящихся к построению и исследованию квантовых эволюционных моделей, наблюдаемые которых ассоциированы с двумерной решеткой. Двумерная решетка является дискретным вариантом пространственно-подобной поверхности, в то время как итерация элементарных эволюционных отображений наблюдаемых интерпретируется как дискретное время. Согласно общепринятой терминологии такая конструкция относится к классу моделей в $2 + 1$ -мерном полностью дискретном пространстве-времени. Модели, которые мы сформулируем и исследуем в этой работе, допускают описание в терминах квантовых интегрируемых моделей $1 + 1$ -мерного пространства-времени с достаточно высокой группой внутренней симметрии («изотопической симметрии» согласно терминологии первой половины XX в.). Отметим, что пространственноподобная структура $1 + 1$ -мерных моделей является одномерной цепочкой, в отличие от двумерной решетки $2 + 1$ -мерных моделей. Наличие двух формулировок связано с известным явлением «трансмутации ранга изотопической группы в размерность». Методом исследования дискретных $1 + 1$ -мерных квантовых моделей является квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) — новейшая область современной математической физики, с математической точки зрения — теория квантовых групп и их представлений. Удивительно, что в $2 + 1$ -мерном методе построения и исследования интегрируемых моделей, который описывается в этой работе, не будет использоваться техника КМОЗ. С точки зрения упомянутой возможности трансмутации это связано с тем, что $2 + 1$ -мерный метод локален для двумерной решетки, узел же соответствующей цепочки есть целая полоса на двумерной решетке, т. е. нелокальный объект. Технически отсутствие приемов КМОЗ проявится в том, что интегрируемость возникнет без привлечения R -матриц КМОЗ, матриц монодромии и т. п.

Как хорошо известно, зачастую $1 + 1$ -мерные интегрируемые квантовые модели связаны с точно решаемыми моделями статистической механики на двумерной решетке. В той же самой степени одним из приложений $2 + 1$ -мерных квантовых моделей окажутся точно решаемые статистические модели на трехмерных решетках (например, на кубической). С целью исключить

смешивание понятий квантовых эволюционных моделей и моделей статистической механики впредь будем называть пространственноподобную решетку $2 + 1$ -мерных моделей *вспомогательной решеткой*.

Общая терминология. В обзоре используется терминология для дискретных квантовых моделей, которая, возможно, не является широко употребительной. Поэтому представляется полезным определить некоторые понятия на примере стандартной схемы КМОЗ. Заранее оговоримся, что мы будем упоминать не математические аспекты интегрируемости (алгебра Хопфа, коммутационное и т. п.), а физическую интерпретацию.

Формулировка квантового метода начинается обычно с уравнения сплетения

$$R_{v_1, v_2}(x/y) L_{v_1, V}(x) L_{v_2, V}(y) = L_{v_2, V}(y) L_{v_1, V}(x) R_{v_1, v_2}(x/y), \quad (1)$$

где v_1 и v_2 — изоморфные n -мерные векторные пространства (обычно векторное представление простой алгебры Ли), векторное пространство V не обязательно конечномерно, и

$$R_{v_1, v_2} \in \text{End}(v_1 \otimes v_2), \quad L_{v_1, V} \in \text{End}(v_1 \otimes V), \quad L_{v_2, V} \in \text{End}(v_2 \otimes V). \quad (2)$$

Аргументы R -матрицы и L -операторов в (1) называются спектральными параметрами. Таким образом, R является квадратной $n^2 \times n^2$ -матрицей, а L является $n \times n$ -мерной матрицей с операторнозначными матричными элементами — полиномами по спектральному параметру, перестановочные соотношения для матричных элементов L определяются уравнением (1).

Интегрируемая модель возникает при рассмотрении *цепочки* L -операторов: упорядоченное произведение m различных L -операторов

$$T_v(x) = L_{v, V_{m-1}}(x) \cdots L_{v, V_1}(x) L_{v, V_0}(x) \in \text{End}(v \otimes V^{\otimes m}) \quad (3)$$

называется матрицей монодромии цепочки длиной m . Номера пространств V_μ в (3) обозначают номера компонент в прямом произведении $V^{\otimes m}$. Матрицы монодромии удовлетворяют уравнению (1), поскольку в (3) использовано простое матричное умножение в v -пространстве. Трансфер-матрицей называется след матрицы монодромии: $t(x) = \text{Tr}_v T_v(x) \in \text{End}(V^{\otimes m})$. Следствием уравнения (1) является коммутативность трансфер-матриц: $t(x)t(y) = t(y)t(x)$.

Пространства V_μ называются *квантовыми пространствами*, а операторнозначные матричные элементы всех L -операторов образуют *алгебру наблюдаемых* цепочки. Эта алгебра является *локальной*, поскольку в силу структуры прямого произведения элементы различных L коммутируют. Пространство v , исчезающее при построении трансфер-матрицы, называется *вспомогательным пространством*, поэтому трансфер-матрицу $t(x)$ можно назвать *вспомогательной* трансфер-матрицей. Коэффициенты разложения $t(x)$ по спектральному параметру являются *полиномами в алгебре наблюдаемых*, в силу

коммутативности трансфер-матриц они образуют *коммутативный набор* и поэтому называются *интегралами движения**.

Вспомогательная линейная задача в рамках КМОЗ есть набор соотношений вида

$$\Phi_\mu L_{v, V_\mu}(x) = \Phi_{\mu+1}, \quad (4)$$

где $\Phi_\mu \in v \otimes V^{\otimes m}$, $\mu = 0, \dots, m$. Монодромией вектора Φ_0 при обходе вдоль замкнутой цепочки является матрица монодромии $T_v(x)$. Примечательно, что технически линейная задача в квантовых интегрируемых моделях практически не используется.

Наряду с уравнением (1) сплетения L -операторов по вспомогательному пространству предположительно существует альтернативное уравнение сплетения по квантовому пространству:

$$L_{v, V_1}(x) L_{v, V_2}(y) S_{V_1, V_2}(y/x) = S_{V_1, V_2}(y/x) L_{v, V_2}(y) L_{v, V_2}(x), \quad (5)$$

где S_{V_1, V_2} является скаляром в пространстве v . С помощью операторов S также можно построить как оператор монодромии, так и трансфер-матрицу

$$Q(x) = \text{Tr}_V S_{V, V_{m-1}}(x) \cdots S_{V, V_1}(x) S_{V, V_0}(x). \quad (6)$$

В силу уравнения (5) $Q(x)t(y) = t(y)Q(x)$. Поскольку роль вспомогательного пространства при построении Q играет квантовое пространство, $Q(x)$ называется *квантовой* трансфер-матрицей. Заметим, что при построении квантовой трансфер-матрицы используется след по квантовому пространству, а это подразумевает гильбертовость квантового пространства. В таком случае, при дополнительном условии положительной определенности матричных элементов, можно говорить также о статистической механике на двумерной решетке. Статсумма квадратной решетки размером $m \times k$ есть по определению

$$Z(x) = \text{Tr}_{V^{\otimes m}} Q(x)^k. \quad (7)$$

Сильного требования гильбертовости можно избежать, используя вместо квантовой трансфер-матрицы *оператор эволюции*, определяемый следующим образом. Рассмотрим вспомогательные трансфер-матрицы

$$t(x, y) = \text{Tr}_v L_{v, V_{m-1}}(x) L_{v, V_{m-2}}(xy) L_{v, V_{m-3}}(x) \cdots L_{v, V_1}(x) L_{v, V_0}(xy), \quad (8)$$

*Трансфер-матрица не всегда производит полный набор интегралов движения. Точнее, следует, помимо трансфер-матрицы, рассмотреть все квантовые характеры матрицы монодромии, первым из которых является след. Рецепты вычисления квантовых характеров определяются R -матрицей.

где m предполагается четным. Они образуют коммутативное семейство $t(x, y)t(x', y) = t(x', y)t(x, y)$. Определим *оператор эволюции* как

$$U(y) = S_{V_{m-1}, V_{m-2}}(y)S_{V_{m-3}, V_{m-4}}(y) \cdots S_{V_1, V_0}(y)U_0, \tag{9}$$

где оператор специальной перестановки U_0 определен соотношениями

$$e_\mu U_0 = U_0 e_\mu, \text{ если } \mu \text{ нечетный, и } e_\mu U_0 = U_0 e_{\mu+2}, \text{ если } \mu \text{ четный.} \tag{10}$$

Здесь e_μ понимается как произвольный элемент e μ -й компоненты локальной алгебры наблюдаемых:

$$e_\mu = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{e}_{\substack{\mu\text{-е} \\ \text{место}}} \otimes \cdots, \tag{11}$$

причем для цепочки четной длины m $\mu \in \mathbb{Z}_m$. По построению $U(y)$ не требует определения следа, и к тому же вычисление результата *эволюции на один шаг* $e \mapsto e' = U(y)eU(y)^{-1}$ требует не точного определения оператора S , а всего лишь вида канонического преобразования $e \mapsto SeS^{-1}$. В силу же (5) и (10) трансфер-матрица $t(x, y)$ производит при разложении по x набор интегралов движения эволюции $U(y)$:

$$t(x, y) = U(y)t(x, y)U(y)^{-1}. \tag{12}$$

Заметим, что статсумму (7) для решетки $m \times m$ можно определить и в терминах оператора эволюции: $Z(y) = \text{Tr } U(y)^m$.

Задача перехода к 2 + 1-мерным моделям. Задача перехода к интегрируемым моделям большей размерности, в сущности, есть задача обобщения понятия одномерной цепочки на *двумерную вспомогательную решетку*. Метод, предлагаемый в данной работе, основан на вспомогательной линейной задаче специального вида, отличного от (4) и использующего локальную структуру вспомогательной решетки. При этом не используется какой-либо аналог L -оператора и вспомогательного пространства и не возникает необходимости использовать фундамент квантовых групп — фундаментальные R -матрицы и соотношения типа (1). Однако все остальные ингредиенты присутствуют: локальная алгебра наблюдаемых, аналог вспомогательной трансфер-матрицы, получаемый как некий определитель, квантовые сплетатели — аналоги операторов S , удовлетворяющие уравнению тетраэдров, а также операторы эволюции и квантовые трансфер-матрицы, для которых статистическая механика интерпретируется как статмеханика на кубической решетке.

Важно отметить, что для 2 + 1-мерных интегрируемых моделей параметром является не только размер, но и форма вспомогательной решетки. Часто можно устроить обратный переход от локального 2 + 1-мерного формализма

к $1 + 1$ -мерному (трансмутация размерности в ранг), когда один из пространственных размеров решетки n превращается в «размерность группы изотопической симметрии», а другой пространственный размер решетки m — в длину цепочки, то в зависимости от формы вспомогательной решетки можно получать различные $1 + 1$ -мерные модели, например, модели, связанные с $\mathcal{U}_q(\widehat{sl}_n)$, или квантовую релятивистскую цепочку Тоды и множество ее обобщений, или квантовую дискретную модель Лиувилля и ее обобщения.

1. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

1.1. Вспомогательная решетка. Итак, понятие одномерной цепочки заменяется на понятие двумерной вспомогательной решетки.

Определение 1. *Вспомогательной решеткой мы будем называть решетку, образованную ориентированными линиями на торе. Пересекаться линии могут только попарно или не пересекаться вовсе. Потребуем также отсутствия линий тривиального гомотопического класса и отсутствия топологически тривиальных зацеплений. Ключевым же требованием является равенство числа вершин и числа клеток — т. е. решетку нельзя перенести на сферу. Пусть впрямь число вершин, оно же число клеток, равно Δ .*

В предлагаемом построении используются вершины вспомогательной решетки и ее клетки. С каждой вершиной V мы будем ассоциировать пару $\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V$ обратимых генераторов простой алгебры Вейля с одним и тем же параметром q для всей решетки, а также дополнительный \mathbb{C} -числовой параметр κ_V . Алгеброй наблюдаемых является, таким образом, *локальная алгебра Вейля*, определяемая соотношениями

$$\mathbf{u}_V \mathbf{u}_{V'} = \mathbf{u}_{V'} \mathbf{u}_V, \quad \mathbf{w}_V \mathbf{w}_{V'} = \mathbf{w}_{V'} \mathbf{w}_V, \quad \mathbf{u}_V \mathbf{w}_{V'} = q^{\delta_{V,V'}} \mathbf{w}_{V'} \mathbf{u}_V. \quad (13)$$

С каждой клеткой S решетки мы ассоциируем вспомогательный элемент φ_S , принадлежащий формальному левому модулю локальной алгебры Вейля.

Каждая вершина решетки окружена четырьмя клетками, как это показано на рис. 1. Клетки, окружающие вершину V , мы обозначили как a, b, c, d , а вспомогательные линейные элементы — соответственно как $\varphi_a, \dots, \varphi_d$.

Понятие L -оператора мы заменяем на понятие вершинной линейной формы.

Определение 2. *Для каждой вершины V определим вершинную линейную форму ℓ_V как линейную комбинацию клеточных элементов φ с коэффициентами из вершинной алгебры Вейля, как это показано в правой части рис. 1:*

$$\ell_V \stackrel{\text{опр}}{=} \varphi_a + \varphi_b q^{1/2} \mathbf{u}_V + \varphi_c \mathbf{w}_V + \varphi_d \kappa_V \mathbf{u}_V \mathbf{w}_V. \quad (14)$$

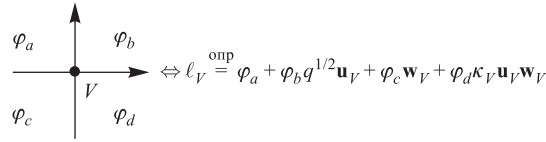


Рис. 1. V -я вершина вспомогательной решетки

Понятие вершинной линейной формы возникло на самом деле из обобщения двумерной вспомогательной линейной задачи (4) в виде $\ell_V = 0$.

Обратим внимание, что в определении ℓ_V по рис.1 участвуют ориентированные линии, и поскольку по определению вспомогательная решетка образована ориентированными линиями, правило рис.1 должно применяться ко всем вершинам решетки. Это подразумевает разворот тора в параллелограмм на плоскости с отождествлением границ параллелограмма. Для некоторой решетки зафиксируем один из возможных разворотов. При этом часть граничных клеток оказываются разрезанными на несколько частей. Эти части, расположенные на противоположных краях параллелограмма, отождествляются. Однако нам необходимо слегка изменить правило ассоциирования вспомогательных переменных φ_S . Пусть S — одна из таких разрезанных клеток, φ_S — вспомогательная переменная, присвоенная одной из этих частей. Тогда вспомогательной переменной, присвоенной части разрезанной клетки, получаемой обходом тора по одному из *двух* циклов тора, пусть является $x\varphi_S$, а вспомогательной переменной, присвоенной части тора, получаемой обходом тора по второму циклу, — $y\varphi_S$. Здесь x и y — комплексные числа. Такие граничные условия называются квазипериодическими, а x и y являются \mathbb{C} -числовыми монодромиями.

Весьма простой пример приведен на рис.2, где рассмотрена решетка, состоящая из двух линий, двух вершин и двух клеток. Первым циклом тора выбрано горизонтальное направление, вторым — вертикальное. Клетка 1 оказалась разрезанной на четыре части, клетка 2 — на три части.

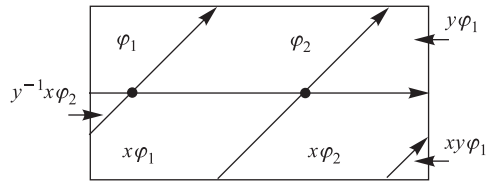


Рис. 2. Пример квазипериодических граничных условий

При переходе с левого края фундаментального прямоугольника тора на правый φ_S получает множитель x , а при переходе с верхнего края на нижний — множитель y , и наоборот. Важно, что таких монодромий ровно две, они соответствуют двум независимым циклам тора.

1.2. Производящий функционал для интегралов движения. В результате описанных правил мы получаем для каждой решетки на торе систему

линейных соотношений

$$\ell_V = \sum_S \varphi_S \mathbf{L}_{S|V}(x, y), \quad (15)$$

где $\mathbf{L}_{S|V}$ — матрица коэффициентов, набираемая линейными уравнениями, приведенными на рис. 1, с учетом квазипериодических условий, описанных выше. В силу локальности алгебры наблюдаемых можно говорить об *операторнозначном определителе* матрицы коэффициентов

$$\mathbf{j}(x, y) = \det \|\mathbf{L}_{S|V}(x, y)\|. \quad (16)$$

Этот объект хорошо определен, поскольку, во-первых, в силу нашего определения вспомогательной решетки, число вершин равно числу клеток, так что $\|\mathbf{L}_{S|V}\|$ — квадратная матрица размером $\Delta \times \Delta$. Во-вторых, в силу главного линейного соотношения, приведенного на рис. 1, мы имеем локальную коммутативность матричных элементов операторнозначной матрицы $\mathbf{L}_{S|V}$:

$$\mathbf{L}_{S|V} \mathbf{L}_{S'|V'} = \mathbf{L}_{S'|V'} \mathbf{L}_{S|V}, \quad \text{если } V \neq V'. \quad (17)$$

Следовательно, при вычислении определителя не возникает проблемы упорядочивания, и работает стандартная формула

$$\det \|\mathbf{L}_{S|V}\| = \sum_{\text{по перестановкам } \sigma} (-)^{\sigma} \prod_{\text{по } V} \mathbf{L}_{S=\sigma(V)|V}. \quad (18)$$

Далее, $\mathbf{j}(x, y)$ является лорановским полиномом по x, y :

$$\mathbf{j}(x, y) = \sum_{\alpha, \beta \in \Sigma} x^{\alpha} y^{\beta} \mathbf{j}'_{\alpha, \beta}. \quad (19)$$

Суммирование в (19) ведется по некоторому двумерному дискретному многообразию Σ , которое называется многоугольником Ньютона полинома $\mathbf{j}(x, y)$ (числа α и β в (19) в любом случае целые). Вид и форма Σ зависят от размера вспомогательной решетки, ее формы и деталей расстановки параметров x и y в определении φ_S .

В любом случае пусть $\mathcal{N} = \mathbf{j}'_{0,0}$ и

$$\mathbf{j}_{\alpha, \beta} = \mathbf{j}'_{\alpha, \beta} \mathcal{N}^{-1}, \quad (20)$$

так что $\mathbf{j}_{0,0} \equiv 1$. Следующее утверждение не является теоремой, поскольку мы имеем доказательство этого утверждения только для отдельных видов регулярных вспомогательных решеток (например, для квадратной решетки, для спиральной решетки), однако аналитически мы проверили это утверждение для большого числа конечных решеток и ни разу в нем не усомнились.

Утверждение 1. Для решетки любой формы и любого размера (в том числе и для не рассматриваемых нами случаев решетки с линиями нулевого гомотопического класса, с зацеплениями и самопересечениями) элементы $\mathbf{j}_{\alpha,\beta}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\mathbf{j}_{\alpha,\beta} \mathbf{j}_{\alpha',\beta'} = q^{\pm(\alpha\beta' - \beta\alpha')} \mathbf{j}_{\alpha',\beta'} \mathbf{j}_{\alpha,\beta}. \quad (21)$$

Соотношение (21) справедливо для любого способа назначения тех частей клеток, которым присваиваются элементы φ_S без множителей x и y . Знак \pm в степени q в (21), общий для всех пар (α, β) и (α', β') , зависит от выбора направлений двух неэквивалентных циклов, соответствующих монодромиям x и y .

Заметим, что содержание второй части утверждения о произвольности выбора циклов есть тривиальное следствие определения детерминанта.

Утверждение 1 является утверждением об интегрируемости. В силу (21) элементы

$$\mathbf{t}_{\alpha,\beta} \stackrel{\text{опр}}{=} \mathbf{j}_{\alpha,\beta} \mathbf{j}_{1,0}^{-\alpha} \mathbf{j}_{0,1}^{-\beta} \quad (22)$$

образуют коммутативное семейство, что есть признак интегрируемости. По построению $\mathbf{t}_{\alpha,\beta}$ — рациональные функции на алгебре наблюдаемых, однако впоследствии мы увидим, что их всегда можно сделать полиномами. Более того, в дополнение к утверждению 1 имеется

Утверждение 2. В рассматриваемых случаях, когда вспомогательная решетка не имеет линий тривиального гомотопического класса и зацеплений, количество (алгебраически) независимых элементов $\mathbf{t}_{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \Sigma$, есть ровно $\Delta - 1$, где Δ — количество вершин (размер) решетки. Δ -м коммутативным элементом является произвольная функция от $\mathbf{j}_{1,0}$ и $\mathbf{j}_{0,1}$.

Схема доказательства утверждения 2 о полноте интегралов движения будет дана ниже.

Приведенный рецепт построения полного набора коммутативных полиномов в алгебре наблюдаемых является основой построения интегрируемой модели, и по смыслу этот рецепт заменяет построение вспомогательных матриц монодромии и вычисление их квантовых характеров. Удивительно, что основа $1+1$ -мерного квантового метода обратной задачи — уравнение сплетения (1) — нам не понадобилось совершенно! Замечательно, однако, что при переформулировании трехмерных моделей в двумерные L -операторы КМОЗ возникнут автоматически.

Кроме того, существенное различие между $t(x)$ и $\mathbf{j}(x, y)$ заключается в том, что \mathbf{j} содержит некоммутативную пару $\mathbf{j}_{1,0}$ и $\mathbf{j}_{0,1}$, имеющую смысл канонической пары «центра инерции».

1.3. Примеры. Приведем примеры вспомогательных решеток и определителей $\mathbf{j}(x, y)$.

1.3.1. Треугольник. Рассмотрим тор с простым треугольником, ориентированным, как это показано на рис. 3. На этом же рисунке показана нумерация вершин и клеток и расстановка спектральных параметров x и y : переход с нижнего края на верхний соответствует умножению на x , переход с левого края на правый соответствует умножению на y . Этот треугольник является так называемой «решеткой кагоме» минимального размера.

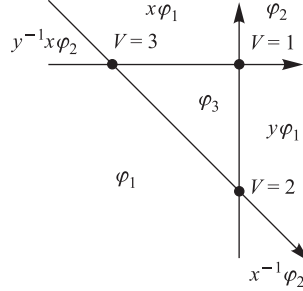


Рис. 3. Ориентированный треугольник на торе

Согласно правилам рис. 1 мы имеем три линейные формы

$$\begin{aligned} \ell_1 &= x\varphi_1 + \varphi_2 q^{1/2} \mathbf{u}_1 + \varphi_3 \mathbf{w}_1 + y\varphi_1 \kappa_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{w}_1, \\ \ell_2 &= \varphi_3 + y\varphi_1 q^{1/2} \mathbf{u}_2 + \varphi_1 \mathbf{w}_2 + x^{-1} \varphi_2 \kappa_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{w}_2, \\ \ell_3 &= x\varphi_1 + \varphi_3 q^{1/2} \mathbf{u}_3 + y^{-1} \varphi_2 \mathbf{w}_3 + \varphi_1 \kappa_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{w}_3, \end{aligned} \quad (23)$$

откуда получается следующая матрица коэффициентов:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} x + y\kappa_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 + yq^{1/2} \mathbf{u}_2 & x + \kappa_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{w}_3 \\ q^{1/2} \mathbf{u}_1 & x^{-1} \kappa_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{w}_2 & y^{-1} \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_1 & 1 & q^{1/2} \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Определитель \mathbf{L} вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{L} &= xq^{1/2} \mathbf{u}_1 + y^{-1} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3 + x^{-1} yq^{1/2} \kappa_1 \kappa_2 \mathbf{u}_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{w}_2 \mathbf{u}_3 - \\ &- x^{-1} \kappa_2 \kappa_3 \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{w}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{w}_3 - yq^{3/2} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 - xy^{-1} \mathbf{w}_3 + \mathbf{H} q^{1/2} \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{w}_3, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\mathbf{H} = (\mathbf{w} + \kappa_2 \mathbf{u}^{-1} - q^{1/2} \kappa_2 \mathbf{u}^{-1} \mathbf{w}) + \mathbf{s} (\mathbf{w}^{-1} + \kappa_1 \mathbf{u} - q^{1/2} \kappa_3 \mathbf{u} \mathbf{w}^{-1}), \quad (26)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_2^{-1} \mathbf{w}_3, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_3^{-1}, \quad \mathbf{s} = -q^{-1/2} \mathbf{u}_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_2^{-1} \mathbf{w}_2 \mathbf{u}_3^{-1} \mathbf{w}_3^{-1}. \quad (27)$$

Применяя схему, предлагаемую уравнением (22), получаем, что некоммутативной парой является, например, $\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3$ и $\mathbf{u}_1^{-1}\mathbf{w}_3$, а полным набором коммутативных элементов являются полиномы \mathbf{H} и \mathbf{s} , уравнения (26), (27) и произвольный полином $f(\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1^{-1}\mathbf{w}_3)$.

1.3.2. Спираль. Другой вариант вспомогательной решетки — это «спиральная» решетка произвольного размера. Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} — два базисных цикла на торе. Спираль с m витками — это линия гомотопического класса $\mathcal{A} + m\mathcal{B}$. Вторая линия — это линия класса \mathcal{A} . Пример спиральной решетки с $m = 2$ приведен на рис. 2, а ее фрагмент, содержащий μ -ю вершину, $\mu = 0, \dots, m - 1$, — на рис. 4. Граничные условия в вертикальном направлении (цикл \mathcal{B} , параметр x) указаны непосредственно на рисунке, граничные условия в горизонтальном направлении (цикл \mathcal{A}) сводятся к отождествлению $x\varphi_{-1} = xy^{-1}\varphi_{m-1}$, $\varphi_m = y\varphi_0$.

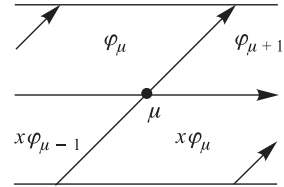


Рис. 4. Фрагмент спиральной решетки

Для вычисления определителя сначала перепишем линейную задачу рис. 1 особым образом. Заметим, во-первых, что для системы линейных уравнений $\ell_V = \sum_S \varphi_S \mathbf{L}_{S|V}$ определитель матрицы коэффициентов возникает при *решении* однородной системы $\ell_V = 0$ в виде $\varphi_S \det \|\mathbf{L}\| = 0$. Детально мы обсудим это в следующем разделе, однако эвристически это очевидно. Линейное уравнение, соответствующее μ -й вершине рис. 4,

$$[\ell_\mu =] \varphi_\mu + \varphi_{\mu+1} q^{1/2} \mathbf{u}_\mu + x \varphi_{\mu-1} \mathbf{w}_\mu + x \varphi_\mu \kappa_\mu \mathbf{u}_\mu \mathbf{w}_\mu = 0 \quad (28)$$

может быть тождественно переписано в форме (4) как

$$\Phi_\mu L_\mu(x) = \Phi_{\mu+1} (-q^{1/2} \mathbf{u}_\mu), \quad (29)$$

где введены вектор-строки $\Phi_\mu = (\varphi_\mu, \varphi_{\mu-1})$, граничное условие для которых $\Phi_m = y\Phi_0$, а матрица L есть

$$L_\mu(x) = \begin{pmatrix} 1 + x \kappa_\mu \mathbf{u}_\mu \mathbf{w}_\mu & -q^{1/2} \mathbf{u}_\mu \\ x \mathbf{w}_\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

L является оператором Лакса квантовой релятивистской цепочки Тоды. Система однородных линейных уравнений (28) может быть переписана как система *двух* линейных уравнений

$$\Phi_0 \left(T(x) - y \prod_{\mu=0}^{m-1} (-q^{1/2} \mathbf{u}_\mu) \right) = 0, \quad (31)$$

где матрица монодромии

$$T(x) = L_0(x) L_1(x) \cdots L_{m-1}(x). \quad (32)$$

Эвристически очевидно, что определитель $\mathbf{j}(x, y)$ пропорционален подходящим образом заданному определителю матрицы $T(x) - y \prod_{\mu=0}^{m-1} (-q^{1/2} \mathbf{u}_\mu)$. Комбинаторно можно строго доказать, что

$$\mathbf{j}(x, y) = t(x) - y \prod_{\mu=0}^{m-1} (-q^{1/2} \mathbf{u}_\mu) - x^m y^{-1} \prod_{\mu=0}^{m-1} (-\mathbf{w}_\mu), \quad (33)$$

где $t(x)$ — след матрицы монодромии, производящий коммутативный набор интегралов движения, $t(x) = \sum_{k=0}^m x^k \mathbf{t}_k$. К счастью, $\mathbf{t}_0 = 1$, так что определитель не надо нормировать. К тому же $\mathbf{t}_m = \prod_{\mu=0}^{m-1} \kappa_\mu \mathbf{u}_\mu \mathbf{w}_\mu$, а, например, $\mathbf{t}_1 = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_m} \kappa_\mu \mathbf{u}_\mu \mathbf{w}_\mu - q^{1/2} \mathbf{u}_\mu \mathbf{w}_{\mu+1}$. Нетрудно заметить, что \mathbf{t}_k является полиномом k -й степени как по \mathbf{w}_μ , так и по \mathbf{u}_μ . Набор \mathbf{t}_k полон и содержит неявно первый элемент некоммутативной пары, а элемент $\prod_{\mu} \mathbf{u}_\mu$ — второй элемент некоммутативной пары, так что соотношение (21) в случае цепочки Тоды выглядит как

$$\left(\prod_{\mu} \mathbf{u}_\mu \right) t(x) = t(qx) \left(\prod_{\mu} \mathbf{u}_\mu \right). \quad (34)$$

1.3.3. Квадратная решетка. Квадратная решетка является нашим основным примером, поскольку имеет произвольные размеры в обоих направлениях, т. е. является нетривиально двумерной и к тому же имеет простейшую из мыслимых структур. Вершины квадратной решетки нумеруются парами индексов $V = (n_2, n_3)$, где $n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}$ и $n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}$, N_2 и N_3 — размеры тора*. (n_2, n_3) -е линейное соотношение

$$\begin{aligned} \ell_{n_2, n_3} = & \varphi_{n_2, n_3} + \varphi_{n_2, n_3+1} q^{1/2} \mathbf{u}_{n_2, n_3} + \\ & + \varphi_{n_2-1, n_3} \mathbf{w}_{n_2, n_3} + \varphi_{n_2-1, n_3+1} \kappa_{n_2, n_3} \mathbf{u}_{n_2, n_3} \mathbf{w}_{n_2, n_3}. \end{aligned} \quad (35)$$

*Забегая вперед, отметим, что нумерация с помощью n_1 и N_1 зарезервирована за дискретным временем квантовой механики и за третьим пространственным измерением статмеханики.

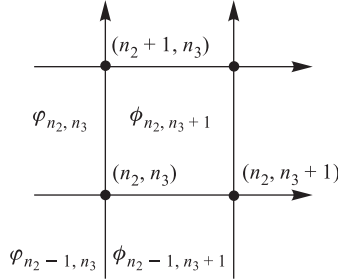


Рис. 5. Фрагмент вспомогательной квадратной решетки

В системе этих уравнений $n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ и $n_3 = 0, \dots, N_3 - 1$, периодические же граничные условия для линейных переменных

$$\varphi_{-1, n_3} = x \varphi_{N_2 - 1, n_3}, \quad \varphi_{n_2, N_3} = y \varphi_{n_2, 0}. \quad (36)$$

По определению матрицы $\mathbf{L} \ell_V = \sum_S \varphi_S \mathbf{L}_{S|V}$ из (35), (36) соответствуют

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{n_2, n_3 | n_2, n_3} &= 1, \\ \mathbf{L}_{n_2, n_3 + 1 | n_2, n_3} &= q^{1/2} \mathbf{u}_{n_2, n_3} y^{\delta_{n_3, N_3 - 1}}, \\ \mathbf{L}_{n_2 - 1, n_3 | n_2, n_3} &= \mathbf{w}_{n_2, n_3} x^{\delta_{n_2, 0}}, \\ \mathbf{L}_{n_2 - 1, n_3 + 1 | n_2, n_3} &= \kappa_{n_2, n_3} \mathbf{u}_{n_2, n_3} \mathbf{w}_{n_2, n_3} x^{\delta_{n_2, 0}} y^{\delta_{n_3, N_3 - 1}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь $n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}$, $n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}$ и все остальные $\mathbf{L}_{S|V} = 0$. Расстановка индексов показана на рис. 5. Определитель $\mathbf{j}(x, y) = \det \|\mathbf{L}\|$ не нуждается в нормировке, поскольку в разложении

$$\mathbf{j}(x, y) = \sum_{\nu_2=0}^{N_2} \sum_{\nu_3=0}^{N_3} y^{\nu_2} x^{\nu_3} \mathbf{j}_{\nu_2, \nu_3} \quad (38)$$

$\mathbf{j}_{0,0} \equiv 1$. Пусть

$$\mathbf{U}_{n_2} = \prod_{n_3=0}^{N_3-1} (-q^{1/2} \mathbf{u}_{n_2, n_3}), \quad \mathbf{W}_{n_3} = \prod_{n_2=0}^{N_2-1} (-\mathbf{w}_{n_2, n_3}). \quad (39)$$

Несложно получить, что

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_2=0}^{N_2} y^{\nu_2} \mathbf{j}_{\nu_2, 0} &= \prod_{n_2=0}^{N_2-1} (1 - y \mathbf{U}_{n_2}), \\ \sum_{\nu_3=0}^{N_3} x^{\nu_3} \mathbf{j}_{0, \nu_3} &= \prod_{n_3=0}^{N_3-1} (1 - x \mathbf{W}_{n_3}). \end{aligned} \quad (40)$$

Без ограничения общности некоммутативной парой можно выбрать \mathbf{U}_0 и \mathbf{W}_0 , так что в наборе коммутативных интегралов движения

$$\mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3} = \mathbf{j}_{\nu_2, \nu_3} \mathbf{U}_0^{-\nu_2} \mathbf{W}_0^{-\nu_3} \quad (41)$$

содержатся все остальные $\mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_0^{-1}$ и $\mathbf{W}_{n_3} \mathbf{W}_0^{-1}$. Перестановочные соотношения между $\mathbf{j}_{\nu_2, \nu_3}$ и \mathbf{U}_{n_2} , \mathbf{W}_{n_3} удобно также записывать в виде

$$\mathbf{j}(x, y) \mathbf{U}_{n_2} = \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{j}(q^{-1}x, y), \quad \mathbf{j}(x, y) \mathbf{W}_{n_3} = \mathbf{W}_{n_3} \mathbf{j}(x, qy). \quad (42)$$

Комбинаторное представление. Для квадратной решетки существует замечательное комбинаторное представление $\mathbf{j}_{\nu_2, \nu_3}$ с помощью множества путей специального вида на решетке. Каждый путь проходит через каждую вершину один раз и проходит через каждую клетку один раз. Пусть существуют всего четыре способа прохода пути через вершину, эти способы приведены на рис. 6, *a–г*. Пути, вообще говоря, многосвязны, элементарная компонента связности изображена на рис. 6, *a*. Ориентируем торический цикл \mathcal{B} снизу вверх, а цикл \mathcal{A} — справа налево. Каждый путь \mathcal{W} имеет определенный гомотопический класс $c(\mathcal{W}) = \nu_2 \mathcal{A} + \nu_3 \mathcal{B}$. Пусть γ_V — фактор, ассоциированный со способом прохождения пути через вершину. Список этих факторов приведен в виде подписей к фрагментам рис. 6. Тогда

$$\mathbf{j}_{\nu_2, \nu_3} = \sum_{\mathcal{W}: c(\mathcal{W}) = \nu_2 \mathcal{A} + \nu_3 \mathcal{B}} (-)^{nm + \# \text{петель}} \prod_{\text{вдоль } \mathcal{W}} \gamma_V. \quad (43)$$

Это представление есть буквально определение детерминанта как суммы по перестановкам σ : $\det \mathbf{L} = \sum_{\sigma} (-)^{\sigma} \prod_j L_{j, \sigma(j)}$. В случае неквадратной решетки правила прохождения путей и правила присвоения факторов γ_V зависят от вида вершины.

Оператор Лакса. Аналогично предыдущему случаю спиральной решетки однородную линейную задачу $\ell_{n_2, n_3} = 0$ можно переписать для векторов-строк и квантовых операторов Лакса. Рассмотрим часть общей системы (35)

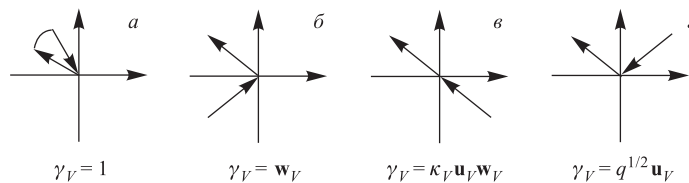


Рис. 6. Четыре варианта прохождения пути через вершину для квадратной решетки

$\ell_{n_2, n_3} = 0$ для фиксированного n_3 и для всех $n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$. Ее можно тождественно переписать как

$$\Phi^{(n_3)} A^{(n_3)}(x) = -\Phi^{(n_3+1)} B^{(n_3)}(x), \quad (44)$$

где $\Phi^{(n_3)} = (\varphi_{0, n_3}, \varphi_{1, n_3}, \dots, \varphi_{N_2-1, n_3})$ и

$$\begin{aligned} A^{(n_3)}(x) &= \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} (e_{n_2, n_2} + x^{\delta_{n_2, 0}} e_{n_2+1, n_2} \mathbf{w}_{n_2, n_3}), \\ B^{(n_3)}(x) &= \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} (e_{n_2, n_2} q^{1/2} \mathbf{u}_{n_2, n_3} + x^{\delta_{n_2, 0}} \kappa_{n_2, n_3} \widehat{\mathbf{u}}_{n_2, n_3} \mathbf{w}_{n_2, n_3}). \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь $e_{n'_2, n_2}$ — матричная (n'_2, n_2) -я единица в $\text{End}(\mathbb{C}^{N_2})$. Вводя теперь

$$L^{(n_3)}(x) = A^{(n_3)}(x)(B^{(n_3)}(x))^{-1}(-q^{1/2} \mathbf{u}_{0, n_3})^{-1}, \quad (46)$$

систему однородных линейных уравнений вдоль горизонтальной полосы рис. 5 можно переписать практически в виде (4). Заметим, что в силу результатов работы [10] матрицы (46) удовлетворяют уравнению сплетения (1) для некоторой специальной R -матрицы, ассоциированной с $\mathcal{U}_q(\widehat{sl_{N_2}})$. Множитель \mathbf{u}_{0, n_3}^{-1} нужен для того, чтобы трансфер-матрица, построенная из монодромии (46), производила бы коммутативный (но не полный) набор $\mathbf{t}_{1, \nu_3} \mathbf{W}_0^{\nu_3} = \mathbf{j}_{1, \nu_3} \mathbf{U}_0^{-1}$.

1.4. Свойства обратной матрицы коэффициентов. Помимо удивительных свойств своего определителя $\mathbf{j} = \det \|\mathbf{L}_{S|V}\|$, матрицы коэффициентов \mathbf{L} обладают и другими, не менее удивительными свойствами. Строгие доказательства результатов этого раздела читатель может найти в [5].

Поскольку элементы различных столбцов матрицы \mathbf{L} коммутируют, то наряду с детерминантом хорошо определены также и алгебраические дополнения. Пусть $\mathbf{A}_{V|S}$ — алгебраическое дополнение к элементу $\mathbf{L}_{S|V}$, так что

$$\sum_V \mathbf{L}_{S|V} \mathbf{A}_{V|S'} = \mathbf{j} \delta_{S|S'}, \quad (47)$$

где $\mathbf{j} = \det \mathbf{L}$, т. е. хорошо определена обратная матрица коэффициентов:

$$(\mathbf{L}^{-1})_{V|S} = \mathbf{A}_{V|S} \mathbf{j}^{-1}. \quad (48)$$

Основным свойством элементов \mathbf{L}^{-1} является коммутативность всех элементов любой ее строки:

$$(\mathbf{L}^{-1})_{V|S} (\mathbf{L}^{-1})_{V|S'} = (\mathbf{L}^{-1})_{V|S'} (\mathbf{L}^{-1})_{V|S} \quad \forall V, S, S', \quad (49)$$

что есть весьма простое следствие локальности (17). Заинтересованный читатель волен, не обращаясь к [5], убедиться в справедливости этой формулы на примере простейшей матрицы (24).

Среди всех V и S выберем V_0 и S_0 такие, что $\mathbf{A}_{V_0|S_0} \neq 0$, и определим нормированные операторнозначные коэффициенты

$$\mathbf{m}_{S,S_0}(V_0) = (\mathbf{L}^{-1})_{V_0|S_0}^{-1} (\mathbf{L}^{-1})_{V_0|S} = \mathbf{A}_{V_0|S} \mathbf{A}_{V_0|S_0}^{-1}. \quad (50)$$

Отметим два следствия (49):

$$\mathbf{m}_{S,S_0}(V_0) \mathbf{m}_{S',S_0}(V_0) = \mathbf{m}_{S',S_0}(V_0) \mathbf{m}_{S,S_0}(V_0) \quad (51)$$

и

$$\mathbf{m}_{S,S_0}(V_0) \mathbf{j} = \mathbf{j} \tilde{\mathbf{m}}_{S,S_0}(V_0), \quad \tilde{\mathbf{m}}_{S,S_0}(V_0) = \mathbf{A}_{V_0|S_0}^{-1} \mathbf{A}_{V_0|S}. \quad (52)$$

Из этих формул следует рецепт построения формального решения системы однородных уравнений $\ell_V = 0 \forall V$. Выделим из всей системы вершин и клеток V_0 и S_0 , $\mathbf{A}_{V_0|S_0} \neq 0$. Решение неполной системы $\ell_V = 0$, $V \neq V_0$ есть

$$\varphi_S = \varphi_{S_0} \mathbf{m}_{S,S_0}, \quad (53)$$

причем все \mathbf{m} коммутируют (51). Оставшееся уравнение $\ell_{V_0} = 0$ с учетом (53) приводится к

$$\varphi_{S_0} \mathbf{j} = 0. \quad (54)$$

В силу (52) это условие должно выполняться для любой клетки:

$$\varphi_S \mathbf{j} = 0 \forall S. \quad (55)$$

Отметим, что результаты этого раздела можно получить, основываясь только на локальности коэффициентов $\mathbf{L}_{S|V}$: $\mathbf{L}_{S|V} \mathbf{L}_{S'|V'} = \mathbf{L}_{S'|V'} \mathbf{L}_{S|V} \forall S, S'$ при $V \neq V'$. А в приложении же к локальной алгебре Вейля следует отметить, что для любой из рассматриваемых решеток с Δ вершинами после удаления V_0 -й вершины остается $\Delta - 1$ вейлевских пар, что равняется количеству независимых неединичных коммутативных операторов $\mathbf{m}_{S,S_0}(V_0)(x, y)$.

2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ НАБЛЮДАЕМЫХ

2.1. Конечномерное представление алгебры Вейля в корне из единицы.

2.1.1. Простая алгебра Вейля в корне из единицы. Теперь мы обратимся к конечномерным представлениям алгебры Вейля, существующим, когда вейлевский параметр q является корнем из единицы:

$$q = e^{2i\pi/N}, \quad q^{1/2} = e^{i\pi/N}. \quad (56)$$

N — произвольное натуральное число, большее единицы. Вейлевская пара \mathbf{u}, \mathbf{w} допускает конечномерное унитарное представление:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{x}, \quad \mathbf{w} = w\mathbf{z}, \quad (57)$$

где $u, w \in \mathbb{C}$ — параметры представления, а \mathbf{x} и \mathbf{z} могут быть заданы в базисе $|\sigma\rangle = |\sigma \bmod N\rangle$, $\langle\sigma|\sigma'\rangle = \delta_{\sigma,\sigma'}$ как

$$\langle\sigma|\mathbf{x}|\sigma'\rangle = q^\sigma \delta_{\sigma,\sigma'}, \quad \langle\sigma|\mathbf{z}|\sigma'\rangle = \delta_{\sigma,\sigma'+1}. \quad (58)$$

N -е степени \mathbf{u} и \mathbf{w} являются числами: $\mathbf{u}^N = u^N$ и $\mathbf{w}^N = w^N$. Заметим, что, помимо унитарного конечномерного представления, в корне из единицы существует и бесконечномерное вещественное представление.

2.1.2. Алгебра наблюдаемых в корне из единицы. При распространении этого представления на всю решетку с Δ вершинами мы определим

$$\mathbf{u}_V = u_V \mathbf{x}_V, \quad \mathbf{w}_V = w_V \mathbf{z}_V, \quad (59)$$

где набор 2Δ параметров u_V, w_V , вообще говоря, произвольный, а

$$\mathbf{x}_V = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbf{x}}_{\substack{V\text{-е} \\ \text{место}}} \otimes \cdots, \quad \mathbf{z}_V = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbf{z}}_{\substack{V\text{-е} \\ \text{место}}} \otimes \cdots \quad (60)$$

Таким образом, для алгебры наблюдаемых определено N^Δ -мерное гильбертово пространство \mathcal{H} с исходным базисом

$$|\sigma\rangle = |\sigma_1\rangle \otimes |\sigma_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\sigma_V\rangle \otimes \cdots \quad (61)$$

Вспомогательные же элементы φ_S принадлежат теперь дуальному пространству \mathcal{H}^* . Далее нам удобнее будет использовать для них дираковские обозначения $\langle\varphi_S|$.

Отметим, что случай $N = 2$ выделен. Для $N = 2$ матрицы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -q^{1/2}\mathbf{xz} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

являются эрмитовыми матрицами Паули. Как легко убедиться для любой решетки, если $q^{1/2}u_V, w_V$ и κ_V — вещественны для всех V , то все операторы $\mathbf{j}_{\alpha,\beta}$ из разложения определителя (19) эрмитовы. Таким образом, для $N = 2$ предлагаемые интегрируемые модели физичны.

Теперь, поскольку все операторы стали конечномерными, приобретает смысл основная задача теории интегрируемых систем: одновременная диагонализация полного коммутативного набора матриц $\mathbf{t}_{\alpha,\beta}$, по крайней мере, вычисление их спектра. Заметим, что для $N = 2$ возможность одновременной диагонализации следует из эрмитовости, а при $N > 2$ возможность одновременной диагонализации постулируется.

2.2. Вспомогательная линейная задача в конечномерном случае. Обратимся теперь к полной вспомогательной задаче в конечномерном случае:

$$\sum_S \langle \varphi_S | \mathbf{L}_S | V = 0. \quad (63)$$

Система (63) является системой уравнений на векторы $\langle \varphi_S |$, каждый из которых есть N^Δ -мерный вектор. Таким образом, (63) — система ΔN^Δ \mathbb{C} -числовых уравнений, для которой условие существования решения

$$\text{Det } \mathbf{L} = 0, \quad (64)$$

где Det обозначает полный $\Delta N^\Delta \times \Delta N^\Delta$ -определитель матрицы \mathbf{L} . Заметим, что

$$\text{Det } \mathbf{L} = \det \mathbf{j}, \quad (65)$$

где \mathbf{j} — определитель (16), а $\det \mathbf{j}$ берется по \mathbf{j} как матрица размерности $N^\Delta \times N^\Delta$. В силу (55) каждый $\langle \varphi_S |$ принадлежит нулевому подпространству оператора \mathbf{j} . Поскольку величины u_V, w_V, κ_V являются произвольными внешними параметрами, то условие совместности (64) является условием на x и y .

Для построения решения полной вспомогательной задачи (63) удобно воспользоваться базисом, в котором все \mathbf{m}_{S,S_0} диагональны, т. е. уравнение (53) имеет тривиальный смысл:

$$\langle \varphi_S | = \langle \varphi_{S_0} | \mathbf{m}_{S,S_0} = \langle \varphi_{S_0} | m_{S,S_0}, \quad (66)$$

где $m \in \mathbb{C}$ — собственное значение оператора \mathbf{m} . Квазипериодические же условия с использованием параметров x и y накладываются на m_{S,S_0} . Тогда типичное линейное уравнение рис. 1 имеет вид

$$\langle \varphi | \left(m_{a,S_0} + m_{b,S_0} q^{1/2} \mathbf{u}_V + m_{c,S_0} \mathbf{w}_V + m_{d,S_0} \kappa_V \mathbf{u}_V \mathbf{w}_V \right) = 0. \quad (67)$$

Уравнение (67) имеет тривиальное условие совместности ($N \times N$ -определитель в V -й компоненте):

$$m_{a,S_0}^N - m_{b,S_0}^N \epsilon_N \mathbf{u}_V^N + m_{c,S_0}^N \epsilon_N \mathbf{w}_V^N + m_{d,S_0}^N \kappa_V^N \mathbf{u}_V^N \mathbf{w}_V^N = 0, \quad (68)$$

где

$$\epsilon_N \equiv \det \mathbf{x} \equiv \det \mathbf{z} = (-1)^{N-1}. \quad (69)$$

Система линейных \mathbb{C} -числовых уравнений (68) по структуре в точности совпадает с квантовой системой (63) с очевидной заменой x, y периодических

условий для φ_S на x^N, y^N -периодические условия для m_{S,S_0}^N , систему (68) можно также переписать в матричном виде

$$\sum_S m_{S,S_0}^N L_{S|V} = 0, \quad (70)$$

где \mathbb{C} -числовые матричные элементы $L_{S|V}$ набираются из коэффициентов (68). Пусть

$$J(x^N, y^N) = \det \|L_{S|V}\|. \quad (71)$$

В случае, когда $J(x^N, y^N) = 0$, но ранг матрицы L не ниже $\Delta - 1$, система (68) имеет единственное решение с нормировкой $m_{S_0,S_0} = 1$. Спектры операторов \mathbf{m}_{S,S_0} , таким образом, фиксируются, правильный вид (66) есть

$$\langle \varphi_S(\zeta) | \mathbf{m}_{S,S_0} = m_{S,S_0} q^{\zeta S} \langle \varphi_{S_0}(\zeta) |, \quad (72)$$

где $m_{S_0,S_0} = 1$; $\zeta_{S_0} = 0$; все остальные m_{S,S_0} — произвольные фиксированные N -е корни из решения m_{S,S_0}^N уравнения (68), и все остальные $\zeta_S \in \mathbb{Z}_N$. Как следствие этих рассуждений, заметим, что операторы \mathbf{m} цикличны, т. е. $\mathbf{m}^N = m^N \in \mathbb{C}$. Немного позже мы построим явный вид матричных элементов $\langle \varphi_S(\zeta) | \sigma' \rangle$ в базисе (61).

Важно отметить, что полная вспомогательная линейная задача (63) имеет решение только тогда, когда $J(x^N, y^N) = 0$, что есть условие на (x^N, y^N) . Точнее, уравнение $J(x^N, y^N) = 0$ задает алгебраическую кривую Γ_g , точка на которой $P \equiv (x^N, y^N)$, и которую мы будем называть классической спектральной кривой, а ситуацию $J(x^N, y^N) = 0$ — случаем спектральных параметров на кривой. Альтернативно произвольные (x, y) мы будем называть свободными спектральными параметрами.

Как следствие наших рассуждений, видим, что размерность линейного пространства $\langle \varphi_S(\zeta) |$, определяемого условием (55), есть количество различных наборов ζ_S , т. е. $N^{\Delta-1}$. Это максимально возможная размерность. Следовательно, $J(x^N, y^N) = 0$ есть не только необходимое, но и достаточное условие существования решения системы (63), что приводит нас к алгебраическому тождеству при свободных x, y :

$$\text{Det} \|\mathbf{L}\| = \det \mathbf{j}(x, y) = J(x^N, y^N)^{N^{\Delta-1}}. \quad (73)$$

По всей видимости, уравнение (73) имеет весьма простую комбинаторную природу: оно отражает способ вычисления $\text{Det} \mathbf{L}$ как определителя блочной матрицы двумя различными способами блочного разбиения.

В свою очередь, $\det \mathbf{j}$ можно вычислять по-другому: поскольку \mathbf{j} содержит коммутативный набор $\mathbf{t}_{\alpha,\beta}$ и только одну некоммутативную пару $\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0$ (см., например, (41)), то в базисе диагональных \mathbf{t}

$$\det \mathbf{j}(x, y) = \prod_{\mathbf{t}_{\alpha,\beta} = t_{\alpha,\beta}} \det_{\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0} \mathbf{j}(x, y). \quad (74)$$

Определитель $N \times N$ по некоммутативной паре порождает N -е степени x и y , а произведение совокупности собственных значений $\mathbf{t}_{\alpha,\beta} = t_{\alpha,\beta}$ содержит $N^{\Delta-1}$ множителей. По этой причине, а также из-за того, что $J(x^N, y^N)$ неприводим как полином по x^N, y^N в точке общего положения, (73) является тождеством, производящим при разложении по x^N, y^N абелеву алгебру $\mathbf{t}_{\alpha,\beta}$:

$$\det_{\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0} \mathbf{j}(x, y) = J(x^N, y^N). \quad (75)$$

Уравнение (75) суть функциональное уравнение, позволяющее вычислять спектр $\mathbf{t}_{\alpha,\beta}$.

Строгое доказательство результатов этого раздела читатель может найти в [5].

2.3. Примеры. Приведем некоторые примеры вычисления $J(x^N, y^N)$ и примеры построения параметризации $J(x^N, y^N) = 0$. Заметим с самого начала, что для решетки произвольной формы с произвольными данными u_V, w_V, κ_V (то, что называется точкой общего положения), задача параметризации u_V^N, w_V^N, κ_V^N и набора \mathbf{m}_S^N имеет общее решение в рамках алгебраической геометрии. Для решетки, Δ вершин которой образованы пересечениями Δ' линий, уравнение $J(x^N, y^N) = 0$ определяет плоскую алгебраическую кривую* $\Gamma_g \ni P = (x^N, y^N)$ рода $g = \Delta - \Delta' + 1$. Параметры u_V^N, w_V^N, κ_V^N и величины \mathbf{m}_S^N выражаются в терминах тета-функций на $\text{Jac}(\Gamma_g)$ и главных форм на $\Gamma_g \times \Gamma_g$. Уравнение (68) эквивалентно в точке общего положения комбинации двух тождеств Фэя. В этой параметризации помимо g модулей и g компонент произвольного вектора $\vec{z} \in \text{Jac}(\Gamma_g)$ важную роль играют дивизоры мероморфных функций (x^N) и (y^N) , которые и являются в некотором смысле спектральными параметрами. Движение же по \vec{z} , изменяющее u_V и w_V , представляет собой изоспектральную деформацию теории, поскольку не меняет коэффициенты в $J(x^N, y^N)$. Это означает с точки зрения пуассоновской механики, что классическая система u_V^N, w_V^N , наделенная скобкой $\{u_V^N, w_V^N\} = u_V^N w_V^N$, является интегрируемой, \mathbf{m}_S^N — ее функция Бейкера–Ахиезера, и \vec{z} — ее «времена». Читатель может найти подробности, относящиеся к приложению алгебраической геометрии, в [3, 11–13].

Особенный интерес для нас представляют случаи, когда набор «начальных данных» u_V, w_V и параметров κ_V не является точкой общего положения, т. е. когда Γ_g вырождается. Поэтому в нашей работе мы не будем рассматривать кривые высокого рода, читатель же может найти алгебро-геометрическое исследование классической системы в [3, 11].

*Не стоит путать кривую Γ , называемую классической, точка на которой определяется парой (x^N, y^N) , с кривой Γ^Q , точка на которой определяется парой (x, y) и которую логично назвать квантовой.

2.3.1. Тривиальный пример. Рассмотрим квадратную решетку с $N_2 = N_3 = 1$, $\Delta = 1$. Согласно (35) и (36)

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{j}(x, y) = 1 + yq^{1/2}\mathbf{u} + x\mathbf{w} + xy\kappa\mathbf{u}\mathbf{w}. \quad (76)$$

Единственная некоммутативная пара здесь \mathbf{u} и \mathbf{w} . Такой определитель уже вычислялся (переход от (67) к (68)), и как результат

$$\begin{aligned} \text{Det } \mathbf{L} \equiv \det_{\mathbf{u}, \mathbf{w}} \mathbf{j} &\equiv 1 - y^N \epsilon_N \mathbf{u}^N + x^N \epsilon_N \mathbf{w}^N + \\ &+ x^N y^N \kappa^N \mathbf{u}^N \mathbf{w}^N \equiv J(x^N, y^N). \end{aligned} \quad (77)$$

Уравнение $J(x^N, y^N) = 0$ на (x^N, y^N) определит* кривую рода 0.

2.3.2. Однородная квадратная решетка. Следующий пример — квадратная решетка с размерами N_2 и N_3 с однородными u_V, w_V и κ_V : без ограничения общности

$$u_{n_2, n_3} = -q^{-1/2}, \quad w_{n_2, n_3} = -1, \quad \kappa_{n_2, n_3} = \kappa. \quad (78)$$

Система уравнений (68) для \mathbf{m}_S^N (знак S_0 опущен) в обозначениях (35) принимает вид

$$\mathbf{m}_{n_2, n_3}^N - \mathbf{m}_{n_2, n_3+1}^N - \mathbf{m}_{n_2-1, n_3}^N - \mathbf{m}_{n_2-1, n_3+1}^N \kappa^N = 0 \quad (79)$$

с граничными условиями $\mathbf{m}_{-1, n_3}^N = x^N \mathbf{m}_{N_2-1, n_3}^N$, $\mathbf{m}_{n_2, N_3}^N = y^N \mathbf{m}_{n_2, 0}^N$. Поскольку (79) — рекурсия первого порядка с однородными коэффициентами, то ее решение можно искать в виде $\mathbf{m}_{n_2, n_3} = \lambda^{-n_2} \mu^{n_3}$, где

$$1 - \lambda - \mu - \kappa^N \lambda \mu = 0, \quad \lambda^{N_2} = x^N, \quad \mu^{N_3} = y^N. \quad (80)$$

Отсюда следует, что если x и y общего положения, то

$$J(x^N, y^N) = \prod_{\lambda^{N_2}=x^N, \mu^{N_3}=y^N} (1 - \lambda - \mu - \kappa^N \lambda \mu). \quad (81)$$

Выпишем теперь для примера функциональное уравнение на спектр \mathbf{j} для (38) и для $N = 2$. В силу нормировки (78), (39) дает

$$\mathbf{U}_{n_2} = \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \mathbf{x}_{n_2, n_3}, \quad \mathbf{W}_{n_3} = \prod_{n_2=0}^{N_2-1} \mathbf{z}_{n_2, n_3}, \quad (82)$$

*В качестве комментария к предыдущей сноске отметим, что $J(x^N, y^N) = 0$ как уравнение на (x, y) определяет специальную кривую Бакстера γ_G рода $G = (N-1)^2$ с бакстеровским модулем $k^2 = -\kappa^N$.

так что $\mathbf{U}_0^2 = \mathbf{W}_0^2 = 1$, и

$$\mathbf{j}(x, y) = \sum_{\nu_1, \nu_2} (x\mathbf{W}_0)^{\nu_2} (y\mathbf{U}_0)^{\nu_1} \mathbf{t}_{\nu_1, \nu_2} \equiv t_{0,0}(x^2, y^2) - x\mathbf{W}_0 t_{0,1}(x^2, y^2) - y\mathbf{U}_0 t_{1,0}(x^2, y^2) - ixy\mathbf{W}_0\mathbf{U}_0 t_{1,1}(x^2, y^2), \quad (83)$$

где, как отмечалось выше, для $N = 2$ и для вещественного κ все $\mathbf{j}_{\nu_2, \nu_3}$, а следовательно, и полиномы $t_{j,k}(x^2, y^2)$ — эрмитовы. Определитель \mathbf{j} по подпространству операторов $\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0$ в терминах $t_{j,k}(x^2, y^2)$ есть

$$\det_{\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0} \mathbf{j}(x, y) \equiv t_{0,0}^2(x^2, y^2) - x^2 t_{0,1}^2(x^2, y^2) - y^2 t_{1,0}^2(x^2, y^2) - x^2 y^2 t_{1,1}^2(x^2, y^2), \quad (84)$$

и, приравнивая это $J(x^2, y^2)$ (формула (81) при $N = 2$), получаем функциональное уравнение. Особое внимание следует уделять полиномиальной структуре $t_{j,k}(x^2, y^2)$, которая следует из разложений (38), (40) и т. п. В дальнейшем полезно будет также фиксировать базис $\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0$, например, $\mathbf{U}_0 = \sigma_2$ и $\mathbf{W}_0 = \sigma_1$, тогда

$$\mathbf{j}(x, y) = \begin{pmatrix} t_{0,0} + xyt_{1,1} & xt_{0,1} + iyt_{1,0} \\ xt_{0,1} - iyt_{1,0} & t_{0,0} - xyt_{1,1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A(x, y) & B(x, y) \\ C(x, y) & D(x, y) \end{pmatrix}, \quad (85)$$

так что $\det_{\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0} \mathbf{j} = AD - BC$.

В качестве примера частного решения функционального уравнения приведем следующее. Пусть размер решетки четный в одном из направлений: $N_3 = 2M$, и пусть

$$f(x^2, y) = \prod_{\lambda^{N_2}=x^2, \mu^M=y} (1 - \lambda - \mu - \kappa^2 \lambda \mu). \quad (86)$$

Тогда, очевидно, $J(x^2, y^2) = f(x^2, y)f(x^2, -y)$, и одно решение функционального уравнения следующее:

$$t_{0,0} + xyt_{1,1} = f(x^2, -y), \quad t_{1,0} = t_{0,1} = 0. \quad (87)$$

Мы привели только одно, простейшее, решение функционального уравнения, заметим, однако, всего различных решений $2^{N_2 N_3 - 1}$, т. е. *любому* решению функционального уравнения с правильной полиномиальной структурой $t_{j,k}(x^2, y^2)$ соответствует свое состояние спиновой решетки с надлежащими собственными значениями $\mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3}$.

2.3.3. Неоднородная квадратная решетка с рациональной параметризацией. В этом разделе мы рассмотрим квадратную вспомогательную решетку с весьма специфической неоднородностью. Для данного случая мы

не будем вычислять $J(x^N, y^N)$ при x, y общего положения, но предложим некий способ параметризации линейных уравнений на N -х степенях (68) в координатах (35):

$$\mathbf{m}_{n_2, n_3}^N - \mathbf{m}_{n_2, n_3+1}^N \epsilon_N \mathbf{u}_{n_2, n_3}^N + \mathbf{m}_{n_2-1, n_3}^N \epsilon_N \mathbf{w}_{n_2, n_3}^N + \mathbf{m}_{n_2-1, n_3+1}^N \kappa_{n_2, n_3}^N \mathbf{u}_{n_2, n_3}^N \mathbf{w}_{n_2, n_3}^N = 0. \quad (88)$$

Упомянутая неоднородность решетки дается следующим переопределением параметров решетки в терминах $2N_2 + 2N_3$ \mathbb{C} -чисел $Y_{n_2}, Y'_{n_2}, Z_{n_3}, Z'_{n_3}$ и $N_2 + N_3$ вспомогательных (масштабных) множителей $\xi_{2, n_2}, \xi_{3, n_3}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n_2, n_3}^N &= \epsilon_N \xi_{3, n_3}^N \frac{Y'_{n_2} - Z'_{n_3}}{Y'_{n_2} - Z_{n_3}}, & \mathbf{w}_{n_2, n_3}^N &= -\epsilon_N \xi_{2, n_2}^N \frac{Y_{n_2} - Z_{n_3}}{Y'_{n_2} - Z_{n_3}}, \\ \kappa_{n_2, n_3}^N &= -\frac{(Y_{n_2} - Z'_{n_3})(Y'_{n_2} - Z_{n_3})}{(Y_{n_2} - Z_{n_3})(Y'_{n_2} - Z'_{n_3})}. \end{aligned} \quad (89)$$

При таких значениях параметров решетки, как легко убедиться, общее ненормированное решение системы (88) таково:

$$\mathbf{m}_{n_2-1, n_3}^N = \mathbf{m}_{n_2-1, n_3}^N(X) = \prod_{j_2=0}^{n_2-1} \xi_{2, j_2}^N \frac{X - Y_{j_2}}{X - Y'_{j_2}} \prod_{j_3=0}^{n_3-1} \frac{1}{\xi_{3, j_3}^N} \frac{X - Z_{j_3}}{X - Z'_{j_3}}, \quad (90)$$

где X — свободный параметр, определяющий при замыкании (90) значения x^N и y^N на кривой $J(x^N, y^N) = 0$:

$$x^{-N} = \prod_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} \xi_{2, n_2}^N \frac{X - Y_{n_2}}{X - Y'_{n_2}}, \quad y^N = \prod_{n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}} \frac{1}{\xi_{3, n_3}^N} \frac{X - Z_{n_3}}{X - Z'_{n_3}}. \quad (91)$$

Параметризация (89), (90) возникает, например, в результате редукции классической кривой Γ_g рода $g = (N_2 - 1)(N_3 - 1)$ в сферу с выделенными точками Y_{n_2}, \dots, Z'_{n_3} , при которой тета-функции обращаются в единицы, а главная форма двух дивизоров X и Y превращается в главную форму на сфере $\frac{X - Y}{\sqrt{dXdY}}$. Детали таких редукций читатель может найти в приложении к работе [12]). Параметризация (89) не является единственной такого рода, ниже будет показано, что она является в некотором смысле «0-солитонной».

2.3.4. Шахматная решетка. Рассмотрим в заключение пример квадратной решетки, когда Γ_g факторизуется в тор. Естественный способ такой факторизации — это периодичность решетки *параметров* с шагом $M = 2$, индексы n_2, n_3 у параметров $\kappa_{n_2, n_3}, u_{n_2, n_3}, w_{n_2, n_3}$ определены по mod 2. Естественно, при этом N_2 и N_3 четные. Вычисление $J(x^N, y^N)$ производится

с помощью преобразования Фурье, аналогично вычислению формулы (81), с подстановкой $\mathbf{m}_{n_2-2, n_3}^N = \lambda \mathbf{m}_{n_2, n_3}^N$ и $\mathbf{m}_{n_2, n_3+2}^N = \mu \mathbf{m}_{n_2, n_3}^N$, и последующего вычисления определителя

$$\begin{aligned} \chi_4(\lambda, \mu) = \\ = \det \begin{vmatrix} 1 & -\mu \epsilon_N \mathbf{u}_{0,1}^N & \epsilon_N \mathbf{w}_{1,0}^N & \mu \kappa_{1,1}^N \mathbf{u}_{1,1}^N \mathbf{w}_{1,1}^N \\ -\epsilon_N \mathbf{u}_{0,0}^N & 1 & \kappa_{1,0}^N \mathbf{u}_{1,0}^N \mathbf{w}_{1,0}^N & \epsilon_N \mathbf{w}_{1,1}^N \\ \lambda \epsilon_N \mathbf{w}_{0,0}^N & \lambda \mu \kappa_{0,1}^N \mathbf{u}_{0,1}^N \mathbf{w}_{0,1}^N & 1 & -\mu \epsilon_N \mathbf{u}_{1,1}^N \\ \lambda \kappa_{0,0}^N \mathbf{u}_{0,0}^N \mathbf{w}_{0,0}^N & \lambda \epsilon_N \mathbf{w}_{0,1}^N & -\epsilon_N \mathbf{u}_{1,0}^N & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (92)$$

Ответ же для (x^N, y^N) общего положения есть

$$J(x^N, y^N) = \prod_{\lambda^{N_2/2}=x^N, \mu^{N_3/2}=y^N} \chi_4(\lambda, \mu). \quad (93)$$

Решетку параметров можно еще упростить, выбирая шахматную структуру параметров:

$$\begin{aligned} \epsilon_N \mathbf{u}_{0,0}^N = \epsilon_N \mathbf{u}_{1,1}^N = b, \quad \epsilon_N \mathbf{w}_{0,0}^N = \epsilon_N \mathbf{w}_{1,1}^N = -a, \\ \kappa_{0,0}^N \mathbf{u}_{0,0}^N \mathbf{w}_{0,0}^N = \kappa_{1,1}^N \mathbf{u}_{1,1}^N \mathbf{w}_{1,1}^N = -c, \\ \epsilon_N \mathbf{u}_{1,0}^N = \epsilon_N \mathbf{u}_{0,1}^N = b', \quad \epsilon_N \mathbf{w}_{1,0}^N = \epsilon_N \mathbf{w}_{0,1}^N = -a', \\ \kappa_{1,0}^N \mathbf{u}_{1,0}^N \mathbf{w}_{1,0}^N = \kappa_{0,1}^N \mathbf{u}_{0,1}^N \mathbf{w}_{0,1}^N = -c'. \end{aligned} \quad (94)$$

Для $N = 2$ физической режим — это вещественные a, a', b, b', c, c' . Далее сделаем замену

$$\begin{aligned} aa' \lambda = \frac{u^2}{w^2}, \quad bb' \mu = \frac{v^2}{w^2}, \quad cc' \lambda \mu = u^2 v^2, \\ \left(4h \frac{uv}{w}\right)^2 = (c + c' + ab' + a'b)^2 \lambda \mu \end{aligned} \quad (95)$$

и определим k как

$$h = \sqrt{k^{-2} + \left(\frac{w - w^{-1}}{2}\right)^2}, \quad k^{-2} = h^2 - \left(\frac{w - w^{-1}}{2}\right)^2. \quad (96)$$

При этой замене

$$\chi_4(\lambda \mu) = \chi_2(u, v, w, k) \chi_2(-u, v, w, k), \quad (97)$$

где

$$\chi_2(u, v, w, k) = 1 - \frac{u^2}{w^2} - \frac{v^2}{w^2} + u^2 v^2 - 4h \frac{uv}{w}. \quad (98)$$

2.4. Термодинамический предел. Спектр интегралов коммутативного набора, содержащегося в функционале $\mathbf{j}(x, y)$, определяется уравнением (75). Решить такое уравнение полностью и явно для большой вспомогательной решетки не представляется возможным, однако можно сделать некоторые заключения об асимптотике некоторых состояний при $N_2, N_3 \mapsto \infty$. Этот предел мы будем называть термодинамическим, хотя система наша и не является статистической. Детали вычислений этого раздела читатель может найти в [9].

2.4.1. Однородная решетка. Мы будем рассматривать термодинамический предел для квадратной решетки для простоты при $N = 2$. Для начала рассмотрим случай однородной решетки, в котором $J(x^N, y^N)$ дан формулой (81). Пусть

$$\lambda = \lim_{N_2 \mapsto \infty} x^{N/N_2}, \quad \mu = \lim_{N_3 \mapsto \infty} y^{N/N_3} \quad (99)$$

вещественны (ср. (80)), и для краткости

$$\chi_1(\lambda, \mu, \kappa^N) = 1 - \lambda - \mu - \kappa^N \lambda \mu. \quad (100)$$

Тогда (81) может быть переписан как

$$J = J(\lambda, \mu) = \prod_{n_2=0}^{N_2-1} \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \chi_1(\lambda e^{2\pi i n_2/N_2}, \mu e^{2\pi i n_3/N_3}, \kappa^N). \quad (101)$$

В частности, если J рассматривается «на кривой» $J = 0$, то это означает, что существуют выделенные пары (одна или две) $(n_2, n_3) = (m_2, m_3)$ такие, что $\chi_1(\lambda e^{2\pi i m_2/N_2}, \mu e^{2\pi i m_3/N_3}) = 0$, и можно определить ненулевой

$$J'(\lambda, \mu) = \prod_{(n_2, n_3) \neq (m_2, m_3)} \chi_1(\lambda e^{2\pi i n_2/N_2}, \mu e^{2\pi i n_3/N_3}, \kappa^N). \quad (102)$$

Теперь отметим, что если $J(x^N, y^N)$ вещественный, $\overline{J(x^N, y^N)} = J(x^N, y^N)$, то при $N_2, N_3 \mapsto \infty$

$$J \text{ или } J' \sim e^{N_2 N_3 f}, \quad (103)$$

где

$$f(\lambda, \mu, \kappa^N) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi_2 \int_0^{2\pi} d\phi_3 \times \\ \times \log |1 - \lambda e^{i\phi_2} - \mu e^{i\phi_3} - \kappa^N \lambda \mu e^{i\phi_2 + i\phi_3}|. \quad (104)$$

Асимптотически разницы между выражениями для J и J' никакой, поскольку логарифмические особенности интегрируемы.

Асимптотика (103), будучи подставленной в функциональное уравнение (75), позволяет заключить, например, для $N = 2$ и формы (85), что существуют состояния (конечно же, различные для A, B, C, D) такие, что максимальные собственные значения операторов A, B, C или D на них

$$\max(A, B, C, D) \sim e^{N_2 N_3 i/2}. \quad (105)$$

Вычисление же (104) зависит от того, рассматривается ли J на кривой (т. е. аргумент логарифма содержит два нуля на торе интегрирования) или вне кривой (т. е. аргумент логарифма не содержит нулей в области интегрирования).

Для первого случая параметризуем

$$\lambda = \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}, \quad \mu = \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_1}, \quad \kappa^N = \frac{\sin \beta_0 \sin \beta_1}{\sin \beta_2 \sin \beta_3}, \quad (106)$$

где по определению

$$\beta_0 = \pi - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3. \quad (107)$$

Нули χ_1 есть

$$\chi_1 \left(\frac{1 - e^{-2i\beta_2}}{1 - e^{2i\beta_1}}, \frac{1 - e^{2i\beta_3}}{1 - e^{-2i\beta_1}} \right) = \chi_1 \left(\frac{1 - e^{2i\beta_2}}{1 - e^{-2i\beta_1}}, \frac{1 - e^{-2i\beta_3}}{1 - e^{2i\beta_1}} \right) = 0. \quad (108)$$

Благодаря очевидной симметрии

$$\begin{aligned} f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= f(\pi + \beta_1, \beta_2, \beta_3) = f(\beta_1, \pi + \beta_2, \beta_3) = \\ &= f(\beta_1, \beta_2, \pi + \beta_3) = f(-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3) \end{aligned} \quad (109)$$

любой набор $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ может быть приведен к каноническому:

$$0 \leq \beta_1 + \beta_2 < \pi, \quad 0 \leq \beta_1 + \beta_3 < \pi, \quad 0 \leq \beta_2 + \beta_3 < \pi. \quad (110)$$

В режиме (110)

$$f = \mathfrak{J}(\beta_0) + \mathfrak{J}(\beta_1) + \mathfrak{J}(\beta_2) + \mathfrak{J}(\beta_3) - \log |2 \sin \beta_1|, \quad (111)$$

где функция \mathfrak{J} связана с дилогарифмом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\beta) &\stackrel{\text{опр}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\beta \alpha \cot \alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{\beta}{\pi} \log |2 \sin \beta| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2m\beta}{2\pi m^2}, \quad -\pi < \beta < \pi. \end{aligned} \quad (112)$$

Для получения f для набора $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, отличного от (110), можно использовать простые симметричные свойства функции \mathfrak{J} :

$$\mathfrak{J}(\beta) + \mathfrak{J}(-\beta) = 0, \quad \mathfrak{J}(\beta) + \mathfrak{J}(\pi - \beta) = \log |2 \sin \beta|. \quad (113)$$

Ответ включает как физический (когда $\kappa > 0$), так и не физический режимы для κ^N (когда, например, $\kappa^2 < 0$).

Режим, когда уравнение $\chi_1(a e^{i\phi_2}, b e^{i\phi_3}) = 0$ не имеет решений (или имеет только одно решение, например $\chi_1(a, b) = 0$), может быть параметризован посредством

$$\lambda = \frac{\sinh \beta_2}{\sinh \beta_1}, \quad \mu = \frac{\sinh \beta_3}{\sinh \beta_1}, \quad \kappa^N \lambda \mu = \frac{\sinh(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}{\sinh \beta_1} \quad (114)$$

с $\beta_j \in \mathbb{R} \bmod i\pi$. В этом режиме

$$f = \log \max(1, |\lambda|, |\mu|, |\kappa^N \lambda \mu|). \quad (115)$$

В заключение отметим, что в глаза бросается сходство выражения (111) и формулы для статсуммы [14] модели Замолодчикова–Бажанова–Бакстера [15, 16]. Это не случайно, в свое время мы это прокомментируем. Сейчас же отметим, что выражение (111) не содержит особенностей, позволяющих хоть в каком-либо смысле упоминать фазовый переход, что согласуется с критичностью модели Замолодчикова–Бажанова–Бакстера [17]. Технической причиной отсутствия особенностей является примитивная структура интеграла (104). В следующем разделе предлагается способ элементарного усложнения структуры интегрирования.

2.4.2. Шахматная решетка. Обратимся теперь к шахматной решетке, $J(x^N, y^N)$ для которой дан формулой (93) и далее (97), (98). Выражение (103) и предположение (105) остаются неизменными, однако функция f теперь имеет вид

$$f = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \int_0^{2\pi} d\phi d\phi' \log |\chi_2(u e^{i\phi}, v e^{i\phi'})|. \quad (116)$$

Поскольку значение f зависит от $|u|$ и $|v|$, мы можем всегда считать все u, v, w, h вещественными положительными числами. Можно легко получить несколько симметричных свойств f . Используя, например, $\chi_2(u, v, w, k) = \chi_2(v, u, w, k)$ или $\chi_2(u, v, w, k) = -\frac{u^2}{w^2} \chi_2(u^{-1}, v, w^{-1}, k)$, можно получить

$$f(u, v, w, k) = \frac{1}{2} \log \frac{uv}{w} + f_0(u, v, w, k), \quad (117)$$

где

$$f_0(u, v, w, k) = f_0(v, u, w, k) = f(u^{-1}, v, w^{-1}, k) = f(u^{-1}, v^{-1}, w, k). \quad (118)$$

Интегрирование (116) мы проведем для $u = v = 1$, когда возникают три режима.

1) $0 < k \leq 1$, т. е. $h \geq \frac{w + w^{-1}}{2}$. Тогда

$$f_0(w, k) = \mathfrak{F}(w, k), \quad (119)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(w, k) \stackrel{\text{онп}}{=} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\phi \times \\ & \times \log \left(2\sqrt{k^{-2} + \left(\frac{w - w^{-1}}{2}\right)^2} + 2\sqrt{k^{-2} - \sin^2 \phi} \right). \end{aligned} \quad (120)$$

В частности, при $k = 1$ и $w = \tan \beta_1$, $0 \leq \beta_1 \leq \pi/2$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(w = \tan \beta_1, k = 1) &= \frac{2}{\pi} \text{Catalan} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2 - 2\beta_1} \frac{\alpha d\alpha}{\cos \alpha} = \\ &= 2\mathfrak{J}(\beta_1) + 2\mathfrak{J}(\pi/2 - \beta_1) - \frac{1}{2} \log(2 \sin 2\beta_1), \end{aligned} \quad (121)$$

где \mathfrak{J} определен формулой (112), а $\text{Catalan} \stackrel{\text{онп}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^j}{(2j+1)^2} \sim 0,9159655942$.

В этом случае f совпадает с (111) с $\beta_0 = \beta_1$ и $\beta_2 = \pi/2 - \beta_1$. Таким образом, в некотором смысле (120) — это эллиптическое продолжение дилогарифма. Производная (119) (см. соотношения между h, k, w в формуле (96))

$$\frac{\partial f_0(w, k)}{\partial k^{-1}} = \frac{h^{-1}}{\pi} K(k), \quad \text{где } K(k) \stackrel{\text{онп}}{=} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (122)$$

имеет логарифмическую расходимость при $k \mapsto 1$. Это сильно напоминает фазовый переход в решеточных интегрируемых моделях.

2) $0 \leq k^{-1} \leq 1$, т. е. $\frac{|w - w^{-1}|}{2} \leq h \leq \frac{w + w^{-1}}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} f_0(w, k) &= \frac{1}{2} |\log w| + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\arcsin(k^{-1})} d\phi \log \left(\frac{h + \sqrt{k^{-2} - \sin^2 \phi}}{\sqrt{\left(\frac{w - w^{-1}}{2}\right)^2 + \sin^2 \phi}} \right), \end{aligned} \quad (123)$$

где $0 \leq \arcsin(k^{-1}) \leq \pi/2$, а производная

$$\frac{\partial f_0(w, k)}{\partial k^{-1}} = \frac{k^{-1}h^{-1}}{\pi} K(k^{-1}). \tag{124}$$

3) $\left(\frac{w - w^{-1}}{2}\right)^2 \leq -k^{-2} \leq 0$, т. е. $0 \leq h \leq \frac{|w - w^{-1}|}{2}$. Тогда

$$f(w, k) = \frac{1}{2} |\log w|. \tag{125}$$

Ситуация же при $u, v \neq 1$ немного иная и более сложная. Хорошего ответа во всем четырехмерном пространстве u, v, w, k мы найти не смогли (в особенности для случая, когда χ_2 имеет четыре нуля в области интегрирования), однако читатель может найти выражения для различных частных случаев в [9]. Заметим только, что и при $u, v \neq 1$ существуют признаки фазовых переходов, аналогичные особенностям полного эллиптического интеграла $K(k)$ при $k \mapsto 1$.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Итак, в предыдущих разделах мы построили трехмерные аналоги цепочек и вспомогательных трансфер-матриц. Теперь настало время обратиться к трехмерным аналогам квантовых сплетающих операторов, а именно построить аналог уравнения (5) и аналоги операторов и величин (6), (7), (9).

3.1. Оператор \mathcal{R} . *3.1.1. Формулировка представления нулевой кривизны.* Рассмотрим фрагмент вспомогательной плоскости, линии на котором образовали треугольник, изображенный в левой части рис. 7. Пронумеруем вершины этого треугольника номерами 1, 2, 3, а клетки — буквами b, c, d, e, f, g, h . Согласно правилам рис. 1 с треугольником ассоциирована тройка линейных соотношений вида $\ell_V = \sum_S \varphi_S \mathbf{L}_{S|V}$, где

$$S \in (b, c, d, e, f, g, h), \quad V \in (1, 2, 3), \tag{126}$$

и при указанном порядке индексов

$$\|\mathbf{L}_{S|V}\| = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{w}_2 & \kappa_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{w}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \kappa_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{w}_1 & q^{1/2} \mathbf{u}_2 & 0 \\ q^{1/2} \mathbf{u}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_0 & 1 & q^{1/2} \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}. \tag{127}$$

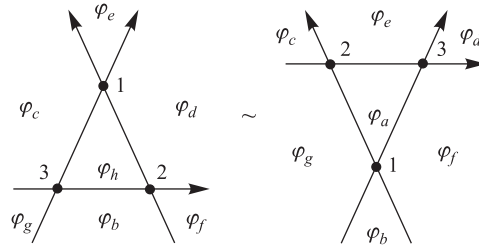


Рис. 7. Представление нулевой кривизны как эквивалентность двух треугольников

В правой части рис. 7 нарисован альтернативный вариант прохождения линий. Пронумеруем вершины также индексами 1, 2, 3, однако, чтобы не путать левую часть с правой, ассоциируем с правыми вершинами пары \mathbf{u}'_V и \mathbf{w}'_V . Клетки пронумеруем буквами a, b, c, d, e, f . Заметим, что внешние клетки справа и слева одни и те же, а внутренняя клетка поменялась с h на a . Для правой части также выписывается тройка линейных соотношений $\ell'_V = \sum_{S'} \varphi_{S'} \mathbf{L}'_{S'|V}$, где

$$S' \in (b, c, d, e, f, g, a), \quad V \in (1, 2, 3), \tag{128}$$

и при указанном порядке индексов

$$\|\mathbf{L}'_{S'|V}\| = \begin{pmatrix} \mathbf{w}'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^{1/2} \mathbf{u}'_3 \\ 0 & q^{1/2} \mathbf{u}'_2 & 1 \\ \kappa_1 \mathbf{u}'_1 \mathbf{w}'_1 & 0 & \kappa_3 \mathbf{u}'_3 \mathbf{w}'_3 \\ 1 & \mathbf{w}'_2 & 0 \\ q^{1/2} \mathbf{u}'_1 & \kappa_2 \mathbf{u}'_2 \mathbf{w}'_2 & \mathbf{w}'_3 \end{pmatrix}. \tag{129}$$

Важно, что в матрицах \mathbf{L} и \mathbf{L}' параметры κ_V одни и те же.

Пусть $x, y \in (b, c, d, e, f, g)$, $x \neq y$. Таких неэквивалентных пар 15. Пусть далее $M_{x,y,h}$ — минор матрицы \mathbf{L} , составленный из строк x, y и h , а $M'_{x,y,a}$ — минор матрицы \mathbf{L}' , составленный из строк x, y и a .

Определение 3. Представлением нулевой кривизны назовем систему соотношений

$$M_{x,y,h} \mathbf{u}_1^{-1} = M'_{x,y,a} \mathbf{u}'_1^{-1} \forall x, y. \tag{130}$$

Множители после миноров возникли как нормировка (130) при $x = c$, $y = e$, при этом (130) превращается в $q^{1/2} = q^{1/2}$, и из возможных 15 остается 14 уравнений.

Заметим, что данное представление нулевой кривизны похоже слегка на так называемое локальное уравнение Янга–Бакстера [18] тем, что сопоставляются два янг–бакстеровских треугольника. Однако наше представление нулевой кривизны по смыслу более близко условию эквивалентности различных электрических соединений [19]. Заинтересованный читатель может найти классификацию решений локального уравнения Янга–Бакстера в [20].

3.1.2. Решение. Систему (130) следует понимать как систему 14 уравнений на шесть элементов $\mathbf{u}'_1, \mathbf{w}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{w}'_2, \mathbf{u}'_3, \mathbf{w}'_3$. Несмотря на переопределенность, эта система имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_1 &= \mathbf{w}_2 \Lambda_3, & \mathbf{w}'_2 &= \Lambda_3^{-1} \mathbf{w}_1, & \mathbf{w}'_3 &= \Lambda_2^{-1} \mathbf{u}_1^{-1}, \\ \mathbf{u}'_1 &= \Lambda_2^{-1} \mathbf{w}_3^{-1}, & \mathbf{u}'_2 &= \Lambda_1^{-1} \mathbf{u}_3, & \mathbf{u}'_3 &= \mathbf{u}_2 \Lambda_1, \end{aligned} \quad (131)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \mathbf{u}_1^{-1} \mathbf{u}_3 - q^{1/2} \mathbf{u}_1^{-1} \mathbf{w}_1 + \kappa_1 \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_2^{-1}, \\ \Lambda_2 &= \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \mathbf{u}_2^{-1} \mathbf{w}_3^{-1} + \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \mathbf{u}_1^{-1} \mathbf{w}_2^{-1} - q^{-1/2} \frac{\kappa_1 \kappa_3}{\kappa_2} \mathbf{u}_2^{-1} \mathbf{w}_2^{-1}, \\ \Lambda_3 &= \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3^{-1} - q^{1/2} \mathbf{u}_3 \mathbf{w}_3^{-1} + \kappa_3 \mathbf{w}_2^{-1} \mathbf{u}_3. \end{aligned} \quad (132)$$

Более того, $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{w}'_3$, определяемые соотношениями (131), (132), образуют ту же самую локальную алгебру Вейля (13), что и исходные $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{w}_3$, т. е. мы имеем дело с автоморфизмом локальной алгебры Вейля.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{R}_{1,2,3}$ — оператор, определяющий автоморфизм $\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V \mapsto \mathbf{u}'_V, \mathbf{w}'_V$ (131), (132) с помощью сопряжения

$$\mathfrak{R}_{1,2,3} \mathbf{u}_V = \mathbf{u}'_V \mathfrak{R}_{1,2,3}, \quad \mathfrak{R}_{1,2,3} \mathbf{w}_V = \mathbf{w}'_V \mathfrak{R}_{1,2,3}, \quad V = 1, 2, 3. \quad (133)$$

\mathfrak{R} определен фактически как отображение на кольце рациональных функций от локальной алгебры Вейля, а запись (133) в форме сопрягающего оператора без спецификации гильбертова пространства достаточно условна. Впредь в этом обзоре готические символы будут употребляться для обозначения подобных отображений.

Утверждение 3. Автоморфизм \mathfrak{R} , определенный (133), удовлетворяет уравнению тетраэдров

$$\mathfrak{R}_{1,2,3} \mathfrak{R}_{1,4,5} \mathfrak{R}_{2,4,6} \mathfrak{R}_{3,5,6} = \mathfrak{R}_{3,5,6} \mathfrak{R}_{2,4,6} \mathfrak{R}_{1,4,5} \mathfrak{R}_{1,2,3}. \quad (134)$$

Доказательство: для доказательства этого утверждения следует рассмотреть граф, образованный четырьмя попарно не параллельными линиями, ориентированными так, чтобы треугольник, образованный любыми тремя линиями, был бы ориентированным как треугольник в левой части рис. 7. Вершины этой фигуры пронумеруем числами от 1 до 6 в правильном порядке, чтобы частичные треугольники были бы (1, 2, 3), (1, 4, 5), (2, 4, 6) и (3, 5, 6).

Смещением линий из этого графа можно получить другой граф, все частичные треугольники которого ориентированы так, как ориентирован треугольник в правой части рис. 7. Существуют две последовательности таких смещений, с которыми очевидным образом ассоциируются преобразования $\mathfrak{T}_{\text{лев}} = \mathfrak{R}_{1,2,3}\mathfrak{R}_{1,4,5}\mathfrak{R}_{2,4,6}\mathfrak{R}_{3,5,6}$ и $\mathfrak{T}_{\text{прав}} = \mathfrak{R}_{3,5,6}\mathfrak{R}_{2,4,6}\mathfrak{R}_{1,4,5}\mathfrak{R}_{1,2,3}$. Однако результат этого преобразования можно вычислять вне зависимости от последовательности смещений, используя только начальный и конечный граф и рассматривая задачу эквивалентности 6×6 миноров двух матриц размером 11×6 , соответствующих линейным задачам для одной и второй конфигурации, совершенно аналогично (130). Поскольку эта переопределенная система имеет единственное решение \mathfrak{T} , то со всей очевидностью $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{лев}} = \mathfrak{T}_{\text{прав}}$.

Таким образом у нас возник трехмерный сплетатель, удовлетворяющий трехмерному аналогу уравнения Янга–Бакстера.

3.1.3. \mathfrak{R} как оператор эволюции. \mathfrak{R} может быть интерпретирован как простейший оператор эволюции подобно случаю $m = 2$ в двумерном операторе эволюции (9). Рассмотрим вспомогательную решетку на торе, состоящую всего из трех линий. Эта решетка рассматривалась ранее, она изображена на рис. 3. В силу циклических граничных условий треугольник рис. 3 эквивалентен как правому треугольнику рис. 7, так и левому. Таким образом, сдвиг линии, ассоциированный с преобразованием $\mathfrak{R}_{1,2,3}$, не изменяет такой элементарной решетки. Из определения условия нулевой кривизны (130) следует, и в этом можно убедиться прямым вычислением, что $\det \|\mathbf{L}\| \mathbf{u}_1^{-1}$ формулы (25) является инвариантом преобразования (131), (132) для любых спектральных параметров (аналог двумерного (12)). Инвариантность некоммутативных элементов $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2$, $\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3$ и $\mathbf{u}_1^{-1} \mathbf{w}_3$ видна из (131), (132) непосредственно, а проверка инвариантности \mathbf{H} (26) — довольно утомительное вычисление.

3.1.4. Эволюционные решетки. Трехмерных обобщений формулы (9) много. В двумерье единственным параметром являлась длина цепочки, в то время как в трехмерье параметром является не только размер, но и форма решетки.

Рассмотрим вспомогательную решетку на торе, для которой выполнены два дополнительных условия:

- все частичные треугольники, содержащиеся в решетке, ориентированы, как треугольники на рис. 7,
- существует определенное нетривиальное движение линий, такое, что с учетом торических граничных условий решетка переходит сама в себя. Будем называть такие решетки эволюционными, а оператор канонического преобразования, набираемый из локальных операторов \mathfrak{R} (133) и соответствующий данному движению линий, оператором эволюции \mathfrak{E} (аналог (9)). Из построения \mathfrak{R} как оператора, не меняющего миноры, следует, что \mathfrak{E} не меняет подходящим образом нормированный определитель матрицы коэффи-

циентов, т. е. не меняет $\mathbf{j}(x, y) \forall x, y \in \mathbb{C}$. Таким образом, $\mathbf{j}_{\alpha, \beta}$ действительно имеют смысл интегралов движения эволюции \mathfrak{E} .

Основной пример эволюционной решетки — это решетка кагоме, однако мы ее рассматривать в этой работе не будем. Читатель может найти формулировку эволюционной системы на решетке кагоме в [1, 3].

Здесь же мы приведем другой пример не совсем эволюционной решетки, изображенный на рис. 8. Правый верхний угол этого рисунка содержит открытую квадратную решетку размером $N_2 \times N_3$

с вершинами, пронумерованными так же, как на рис. 5, с $n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ и $n_3 = 0, \dots, N_3 - 1$. Вершины вспомогательной линии пронумерованы как $(2 : n_3)$ и $(3 : n_2)$. Чтобы различить вспомогательные вершины и вершины квадратной решетки, мы будем обозначать последние как $(1 : n_2, n_3)$. Символы 1, 2, 3, отделенные двоеточием от номеров n_2, n_3 , здесь и впредь обозначают номера «пучков» на вспомогательной решетке, зафиксированные обозначениями $V = 1, 2, 3$ на рис. 7. Количество треугольников такого типа, как левый треугольник рис. 7, равно $N_2 N_3$. Оператор, соответствующий проносу вспомогательной линии с юго-востока на северо-запад сквозь все вершины квадратной решетки, очевидно, строится как упорядоченное произведение локальных операторов \mathfrak{R} :

$$\widehat{\mathfrak{T}} = \prod_{n_2=0 \uparrow N_2-1} \prod_{n_3=0 \uparrow N_3-1} \mathfrak{R}_{(1:n_2, n_3), (2:n_3), (3:n_2)}, \quad (135)$$

где использовано обозначение упорядоченного произведения

$$\prod_{n_j=0 \uparrow N_j-1} \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_{N_j-1}. \quad (136)$$

Оператор $\widehat{\mathfrak{T}}$ является трехмерным аналогом квантовой матрицы монодромии, след которой* по вспомогательным пространствам

$$\mathfrak{T} = \text{Tr}_{(2:n_3), (3:n_2)} \widehat{\mathfrak{T}} \quad (137)$$

является аналогом квантовой трансфер-матрицы (6). Функционал $\mathbf{j}(x, y)$ для квадратной решетки (38), определенный ранее, производит полный набор

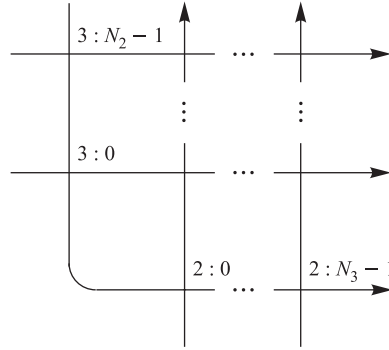


Рис. 8. Вспомогательное отображение квадратной решетки

*Определенность следа для q общего положения является условным предположением!

операторов, коммутирующих с \mathfrak{T} :

$$\mathbf{j}(x, y) \mathfrak{T} = \mathfrak{T} \mathbf{j}(x, y) \forall x, y \in \mathbb{C}. \quad (138)$$

3.1.5. Оператор \mathfrak{Z} . Выше мы рассмотрели случай всего одной вспомогательной линии, порождающей дополнительные вершины типа $(2 : n_3)$, $(3 : n_2)$. Теперь же пусть количество вспомогательных линий равно N_1 , и они нумеруются индексом $n_1 = 0, \dots, N_1 - 1$, так что на рис. 8 изображена начальная вспомогательная линия с номером $n_1 = 0$.

Сохраняя нумерацию вершин исходной квадратной решетки $(1 : n_2, n_3)$ (пучок номер 1), мы будем нумеровать вспомогательные вершины как $(2 : n_1, n_3)$ (пучок номер 2) и $(3 : n_1, n_2)$. Оператор, соответствующий смещению всех вспомогательных линий сквозь основную квадратную решетку, есть

$$\mathfrak{Z}_{1,2,3} = \prod_{n_1=0 \uparrow N_1-1} \prod_{n_2=0 \uparrow N_2-1} \prod_{n_3=0 \uparrow N_3-1} \mathfrak{R}_{(1:n_2, n_3), (2:n_1, n_3), (3:n_1, n_2)}. \quad (139)$$

Оператор $\mathfrak{Z}_{1,2,3}$ совершает рациональное преобразование алгебры наблюдаемых, результат которого мы будем обозначать звездочкой (аналогично штриху в определении $\mathfrak{R}_{1,2,3}$ (131)):

$$\mathfrak{Z}_{1,2,3} \mathbf{u}_V = \mathbf{u}_V^* \mathfrak{Z}_{1,2,3}, \quad \mathfrak{Z}_{1,2,3} \mathbf{w}_V = \mathbf{w}_V^* \mathfrak{Z}_{1,2,3}, \quad (140)$$

$$V \in \{(1 : n_2, n_3), (2 : n_1, n_3), (3 : n_1, n_2)\}.$$

Очевидно, по структуре $\mathfrak{Z}_{1,2,3}$ — кубическая решетка. Оператор $\widehat{\mathfrak{T}}$ является частным случаем оператора $\mathfrak{Z}_{1,2,3}$ при $N_1 = 1$, т. е. связан с одним слоем кубической решетки, а оператор (137) — трансфер-матрицей «слой–слой» для кубической решетки.

3.2. \mathfrak{R} в конечномерном случае. 3.2.1. R-матрица. Перестановочные соотношения (133), определяющие оператор \mathfrak{R} , решаются для конечномерных представлений (59), (60) с $q^N = 1$, в принципе, однозначно*. Однако конечномерность слегка меняет вид (133).

Из определения (133) следует, что \mathfrak{R} не только наделен некоторой матричной структурой, но и изменяет центры вейлевских алгебр:

$$\mathfrak{R}_{1,2,3} \mathbf{u}_V^N = \mathbf{u}_V'^N \mathfrak{R}_{1,2,3}, \quad \mathfrak{R}_{1,2,3} \mathbf{w}_V^N = \mathbf{w}_V'^N \mathfrak{R}_{1,2,3}. \quad (141)$$

Согласно (131), (132) и соотношению $(\mathbf{u} + \mathbf{w})^N = \mathbf{u}^N + \mathbf{w}^N$, форма этого отображения в точности повторяет форму отображения для исходных** $\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V$:

*Второй случай однозначного решения в терминах нелокальных квантовых дилогарифмов — это модулярная дуализация вейлевских алгебр по Фаддееву в режиме «сильной» связи с дополнительным требованием унитарности \mathfrak{R} .

**Заметим, что N -е степени \mathbf{u}_V^N и \mathbf{w}_V^N суть модулярные партнеры $\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V$ с точки зрения формальной модулярной дуализации.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_1{}^N &= \mathbf{w}_2^N \Lambda_3^N, & \mathbf{w}'_2{}^N &= \Lambda_3^{-N} \mathbf{w}_1^N, & \mathbf{w}'_3{}^N &= \Lambda_2^{-N} \mathbf{u}_1^{-N}, \\ \mathbf{u}'_1{}^N &= \Lambda_2^{-N} \mathbf{w}_3^{-N}, & \mathbf{u}'_2{}^N &= \Lambda_1^{-N} \mathbf{u}_3^N, & \mathbf{u}'_3{}^N &= \mathbf{u}_2^N \Lambda_1^N, \end{aligned} \quad (142)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1^N &= \mathbf{u}_1^{-N} \mathbf{u}_3^N + \mathbf{u}_1^{-N} \mathbf{w}_1^N + \kappa_1^N \mathbf{w}_1^N \mathbf{u}_2^{-N}, \\ \Lambda_2^N &= \frac{\kappa_1^N}{\kappa_2^N} \mathbf{u}_2^{-N} \mathbf{w}_3^{-N} + \frac{\kappa_3^N}{\kappa_2^N} \mathbf{u}_1^{-N} \mathbf{w}_2^{-N} + \frac{\kappa_1^N \kappa_3^N}{\kappa_2^N} \mathbf{u}_2^{-N} \mathbf{w}_2^{-N}, \\ \Lambda_3^N &= \mathbf{w}_1^N \mathbf{w}_3^{-N} + \mathbf{u}_3^N \mathbf{w}_3^{-N} + \kappa_3^N \mathbf{w}_2^{-N} \mathbf{u}_3^N. \end{aligned} \quad (143)$$

Определим теперь

$$u'_V = \sqrt[N]{\mathbf{u}'_V{}^N}, \quad w'_V = \sqrt[N]{\mathbf{w}'_V{}^N}, \quad V = 1, 2, 3, \quad (144)$$

с тремя естественными ограничениями на фазы

$$w_1 w_2 = w'_1 w'_2, \quad u_1^{-1} w_3 = u'^{-1}_1 w'_3, \quad u_2 u_3 = u'_2 u'_3. \quad (145)$$

Пусть

$$\mathbf{x}'_V = \frac{\mathbf{u}'_V}{u'_V}, \quad \mathbf{z}'_V = \frac{\mathbf{w}'_V}{w'_V}, \quad V = 1, 2, 3. \quad (146)$$

В силу каноничности и правильной нормированности отображения \mathfrak{A} , по лемме Шура, существует единственная (с точностью до общего множителя) $N^3 \times N^3$ -матрица $\mathbf{R}_{1,2,3}$ такая, что

$$\mathbf{x}'_V \mathbf{R}_{1,2,3} = \mathbf{R}_{1,2,3} \mathbf{x}_V, \quad \mathbf{z}'_V \mathbf{R}_{1,2,3} = \mathbf{R}_{1,2,3} \mathbf{z}_V, \quad V = 1, 2, 3. \quad (147)$$

Чтобы выписать матричные элементы матрицы \mathbf{R} , например, в базисе (58), нам потребуются некоторые дополнительные обозначения.

Пусть p — точка на кривой Ферма \mathcal{F} :

$$p \stackrel{\text{опр}}{=} (x, y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x^N + y^N = 1. \quad (148)$$

Функцию $W_p(n)$, $p \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{Z}_N$, мы определим посредством

$$\frac{W_p(n)}{W_p(n-1)} = \frac{y}{1 - x q^n}, \quad W_p(0) = 1. \quad (149)$$

Функция $W_p(n)$, будучи « q -гамма-функцией», « q -экспонентой» и « q -дилогарифмом» в корне из единицы, имеет множество замечательных свойств (см., например, приложение работы [21]) для введения в « q -корень из единицы гипергеометрию».

Определим $N^3 \times N^3$ -матрицу $\mathbf{R}_{1,2,3}$ как матричнозначную функцию четырех точек p_1, p_2, p_3, p_4 с кривой Ферма следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \mathbf{R} | \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \rangle &\stackrel{\text{опр}}{=} R_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3} = \\ &= \delta_{\sigma_2 + \sigma_3, \sigma'_2 + \sigma'_3} q^{(\sigma'_1 - \sigma_1) \sigma'_3} \frac{W_{p_1}(\sigma_2 - \sigma_1) W_{p_2}(\sigma'_2 - \sigma'_1)}{W_{p_3}(\sigma'_2 - \sigma_1) W_{p_4}(\sigma_2 - \sigma'_1)}, \end{aligned} \quad (150)$$

где x -координаты четырех точек кривой Ферма связаны соотношением

$$x_1 x_2 = q x_3 x_4. \quad (151)$$

Эта матрица называется \mathbf{R} -матрицей модели Замолотчикова–Бажанова–Бакстера [16, 21]. Матрица \mathbf{R} совершает преобразование (147) в базисе (58) при идентификации

$$x_1 = \frac{q^{-1/2} u_2}{\kappa_1 u_1}, \quad x_2 = q^{-1/2} \kappa_2 \frac{u'_2}{u'_1}, \quad x_3 = q^{-1} \frac{u'_2}{u_1}, \quad x_4 = q^{-1} \frac{\kappa_2 u_2}{\kappa_1 u'_1} \quad (152)$$

и

$$\frac{y_3}{y_1} = \kappa_1 \frac{w_1}{u'_3}, \quad \frac{y_4}{y_1} = q^{-1/2} \kappa_3 \frac{w_3}{w_2}, \quad \frac{y_3}{y_2} = \frac{w'_2}{w_3}, \quad \frac{y_4}{y_2} = q^{-1/2} \frac{\kappa_3 u'_3}{\kappa_1 w'_1}, \quad (153)$$

где u'_V, w'_V и u_V, w_V связаны (142), (144), (145). Для доказательства (147) достаточно взять матричный элемент каждого соотношения (147) и воспользоваться определением (58) и разностным свойством (149).

\mathbf{R} -матрица (150) является матричной функцией трех непрерывных параметров (см. соотношение (151)) и трех дискретных параметров, связанных с определением y_j на кривых Ферма: $y_j^N = 1 - x_j^N$. Дискретных параметров именно три, поскольку одновременное изменение фаз всех четырех y_j , $y_j \mapsto q y_j$ не меняет вид матричных элементов (150). С другой стороны, параметризация (152), (153) подразумевает девять независимых u_V, w_V, κ_V и три независимые фазы в наборе u'_V, w'_V — независимых фаз именно три в силу (145). Мы будем называть (152), (153) свободной параметризацией \mathbf{R} -матрицы, и использовать как обозначение $\mathbf{R}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, так и обозначение $\mathbf{R}(u_V, w_V, \kappa_V)$.

Отметим важное различие между отображением \mathfrak{R} и сопряжением с помощью матрицы \mathbf{R} . По определению (133) напомним, что для любой рациональной функции на вейлевской алгебре $F(\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V)$

$$\mathfrak{R} F(\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V) = F(\mathbf{u}'_V, \mathbf{w}'_V) \mathfrak{R}, \quad V = 1, 2, 3, \quad (154)$$

в то время как в корне из единицы $\mathbf{u}_V = u_V \mathbf{x}_V$, $\mathbf{w}_V = w_V \mathbf{z}_V$, и

$$\mathbf{R} F(u_V \mathbf{x}_V, w_V \mathbf{z}_V) = F(u_V \mathbf{x}'_V, w_V \mathbf{z}'_V) \mathbf{R}. \quad (155)$$

Иными словами, действие отображения \mathfrak{R} эквивалентно сопряжению с помощью матрицы \mathbf{R} и изменению центров алгебры Вейля $u_V \mapsto u'_V$, $w_V \mapsto w'_V$. Заметим, что подобное обстоятельство было замечено ранее в [22].

3.2.2. Эволюционные отображения в конечномерном случае. При построении конечномерных (т.е. матричных) частей эволюционных отображений \mathfrak{T} или \mathfrak{Z} придется рассматривать итерации функциональных отображений $u_V, w_V \mapsto u'_V, w'_V$. Это порождает определенные сложности при построении и исследовании конечномерных операторов. Типичная ситуация такова: пусть \mathfrak{Z} — некоторое эволюционное отображение, построенное из различных \mathfrak{R} и определенное на некоторой вспомогательной решетке:

$$\mathfrak{Z} F(\mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V) = F(\mathbf{u}_V^*, \mathbf{w}_V^*) \mathfrak{Z}. \quad (156)$$

Естественно, отображение \mathfrak{Z} распадается на конечномерную часть

$$\mathbf{Z} F(u_V \mathbf{x}_V, w_V \mathbf{z}_V) = F(u_V \mathbf{x}_V^*, w_V \mathbf{z}_V^*) \mathbf{Z}, \quad (157)$$

где

$$\mathbf{x}_V^* = \frac{\mathbf{u}_V^*}{\sqrt[N]{\mathbf{u}_V^{*N}}}, \quad \mathbf{z}_V^* = \frac{\mathbf{w}_V^*}{\sqrt[N]{\mathbf{w}_V^{*N}}}, \quad (158)$$

и функциональную часть

$$u_V \mapsto u_V^* = \sqrt[N]{\mathbf{u}_V^{*N}}, \quad w_V \mapsto w_V^* = \sqrt[N]{\mathbf{w}_V^{*N}}. \quad (159)$$

Среди функций на алгебре наблюдаемых, как мы знаем, есть две выделенные — производящие функционалы для интегралов движения для эволюционного отображения \mathfrak{Z} : $\mathbf{j}(x, y | \mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V)$ и $J(x^N, y^N | \mathbf{u}_V^N, \mathbf{w}_V^N)$. Оба они являются инвариантами отображения \mathfrak{Z} :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(x, y | \mathbf{u}_V, \mathbf{w}_V) &= \mathbf{j}(x, y | \mathbf{u}_V^*, \mathbf{w}_V^*), \\ J(x^N, y^N | \mathbf{u}_V^N, \mathbf{w}_V^N) &= J(x^N, y^N | \mathbf{u}_V^{*N}, \mathbf{w}_V^{*N}). \end{aligned} \quad (160)$$

Матрица \mathbf{j} , однако, не является инвариантом \mathbf{Z} , по определению (157)

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(x, y | u_V \mathbf{x}_V, w_V \mathbf{z}_V) &\equiv \mathbf{j}(x, y | u_V^* \mathbf{x}_V^*, w_V^* \mathbf{z}_V^*) = \\ &= \mathbf{Z} \mathbf{j}(x, y | u_V^* \mathbf{x}_V, w_V^* \mathbf{z}_V) \mathbf{Z}^{-1}. \end{aligned} \quad (161)$$

Отсюда видно, что если набор u_V, w_V, κ_V общего положения, так что отображение (159) не тривиально, то

- отображение (159) есть изоспектральная деформация оператора $\mathbf{j}(x, y)$,
- а матрица \mathbf{Z} реализует эту изоспектральную деформацию.

Метод изоспектральных деформаций мы будем использовать в том числе и при построении гипотезы квантового разделения переменных.

В многообразии начальных данных u_V, w_V, κ_V можно выбрать подмногообразие (причем далеко не единственным способом) такое, что

$$u_V^* = u_V, \quad w_V^* = w_V. \quad (162)$$

При таком дополнительном условии изоспектральное преобразование становится тривиальным, и $\mathbf{j}(x, y)$ производит полный независимый набор матриц, коммутирующих с \mathbf{Z} , что говорит о решаемости задачи нахождения спектра \mathbf{Z} . Таким образом, циклические граничные условия (162) используются для формулировки точно решаемых моделей статистической механики на трехмерных решетках. Заметим, что задача параметризации u_V, w_V одновременно с u_V^*, w_V^* и наложения периодических граничных условий решается полностью в рамках алгебраической геометрии (об этом упоминалось в примерах параметризации решеток).

Полезно прокомментировать частный случай, когда центры вейлевской алгебры лежат на специальном подмногообразии, таком, что

$$u'_V = u_V, \quad w'_V = w_V \quad (163)$$

для каждой отдельной \mathbf{R} -матрицы. Это условие намного сильнее, чем периодическое граничное условие (162) для всего эволюционного отображения, рассмотренное выше. Для одной \mathbf{R} -матрицы независимых среди уравнений (163) всего три, и параметризовать это подмногообразие проще всего можно в терминах точек p_1, p_2, p_3, p_4 :

$$\frac{w_3}{w_2} = \frac{y_2}{y_3}, \quad \frac{w_1}{u_3} = q^{-1/2} \frac{x_1 y_3}{x_3 y_1}, \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{q x_3} \quad (164)$$

и

$$\kappa_1 = q^{1/2} \frac{x_3}{x_1}, \quad \kappa_2 = q^{1/2} \frac{x_4}{x_1}, \quad \kappa_3 = q^{1/2} \frac{y_3 y_4}{y_1 y_2}. \quad (165)$$

На этом подмногообразии, когда действие \mathfrak{A} полностью эквивалентно сопряжению \mathbf{R} -матрицей, существует, в частности, конечномерное уравнение тетраэдров [15, 16, 21] для \mathbf{R} -матриц, являющееся прямым следствием (134). Аргументы четырех \mathbf{R} -матриц в этом уравнении тетраэдров разные, а знаменитая тетраэдральная связь естественно возникает как следствие набора соотношений (164) для всех четырех \mathbf{R} -матриц. Уравнение тетраэдров является условием интегрируемости для модели Замолодчикова–Бажанова–Бакстера, и исходная параметризация Замолодчикова в терминах двугранных углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ сферического треугольника эквивалентна

$$\kappa_1^N = \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right)^2, \quad \kappa_2^N = \left(\cot \frac{\theta_2}{2} \right)^2, \quad \kappa_3^N = \left(\tan \frac{\theta_3}{2} \right)^2. \quad (166)$$

Существует также и иная параметризация образующих u_j, w_j, κ_j , эквивалентная параметризации двугранными углами. Она фактически связана с проекцией сферического треугольника на плоскость и имеет вид

$$\begin{aligned}\kappa_1^N &= -\frac{(Y-Z')(Y'-Z)}{(Y-Z)(Y'-Z')}, \quad \kappa_2^N = -\frac{(X-Z)(X'-Z')}{(X'-Z)(X-Z')}, \\ \kappa_3^N &= -\frac{(X'-Y)(X-Y')}{(X-Y)(X'-Y')},\end{aligned}\quad (167)$$

так что

$$\begin{aligned}\frac{w_3^N}{w_2^N} &= \frac{(X'-Y')(X-Z)}{(X-Y')(X'-Z)}, \quad \frac{w_1^N}{w_3^N} = -\frac{(Y-Z)(X-Y')}{(Y'-Z)(X-Y)}, \\ \frac{u_1^N}{u_2^N} &= \frac{(Y'-Z')(X-Z)}{(Y'-Z)(X-Z')}.\end{aligned}\quad (168)$$

Несмотря на то, что в параметризации участвуют шесть точек на комплексной плоскости, в силу мебиус-инвариантности кросс-отношений независимых параметров здесь всего три. Одним из преимуществ использования кросс-отношений является то, что при параметризации уравнения тетраэдров геометрическое условие тетраэдра выполняется автоматически. Эта параметризация кросс-отношениями нами уже применялась при построении примеров квадратных решеток со специальной неоднородностью (см. формулу (89)).

В более полном подходе, когда условие (163) не накладывается для каждой \mathbf{R} -матрицы по отдельности, интегрируемость базируется не на уравнении тетраэдров (хотя таковое и можно получить), а на принципе изоспектральных деформаций (161) и на циклических граничных условиях (162).

4. КВАНТОВАЯ ТРАНСФЕР-МАТРИЦА

В этом разделе мы построим конечномерное представление операторов $\mathfrak{Z}_{1,2,3}$ и \mathfrak{T} , см. (139), (135), (137). Конечномерное представление оператора (139) суть статсумма кубической решетки с открытыми граничными условиями. Самое нетривиальное при этом — учет динамики числовых параметров $\mathbf{u}_V^N, \mathbf{w}_V^N$ при последовательном применении отображений \mathfrak{A} .

4.1. Ситуация общего положения. Для построения матричного элемента оператора $\mathfrak{Z}_{1,2,3}$ (139), очевидно, следует последовательно, для всех операторов $\mathfrak{A}_{1,2,3}$, входящих в определение $\mathfrak{Z}_{1,2,3}$, применить процедуру (141), (146) и (147).

Исходные параметры локальной вейлевской алгебры для $\mathfrak{Z}_{1,2,3}$, согласно обозначениям формулы (139), для основной квадратной решетки есть $u_{1:n_2,n_3}, w_{1:n_2,n_3}, \kappa_{1:n_2,n_3}$, а для вершин, расположенных на вспомогательных линиях,

$u_{2:n_1,n_3}$, $w_{2:n_1,n_3}$, $\kappa_{2:n_1,n_3}$ и $u_{3:n_1,n_2}$, $w_{3:n_1,n_2}$, $\kappa_{3:n_1,n_2}$. Напомним: в обозначении $V = (j : n_k, n_l)$ j — это номер «пучка» при сравнении вспомогательной решетки с левым треугольником рис. 7, а индексы n_k, n_l нумеруют вершину в соответствующей квадратной решетке (основной для $j = 1$ и двух вспомогательных для $j = 2, 3$). Формулы (142), (3.2), будучи внимательно соотнесены со структурой $\mathbf{Z}_{1,2,3}$ (139), задают трехмерную рекурсию на кубической решетке:

$$\begin{aligned} w_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}^N &= w_{2,\mathbf{n}}^N \Lambda_{3,\mathbf{n}}^N, & w_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}^N &= \Lambda_{3,\mathbf{n}}^{-N} w_{1,\mathbf{n}}^N, & w_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}^N &= \Lambda_{2,\mathbf{n}}^{-N} u_{1,\mathbf{n}}^{-N}, \\ u_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}^N &= \Lambda_{2,\mathbf{n}}^{-N} w_{3,\mathbf{n}}^{-N}, & u_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}^N &= \Lambda_{1,\mathbf{n}}^{-N} u_{3,\mathbf{n}}^N, & u_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}^N &= u_{2,\mathbf{n}}^N \Lambda_{1,\mathbf{n}}^N, \end{aligned} \quad (169)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,\mathbf{n}}^N &= u_{1,\mathbf{n}}^{-N} u_{3,\mathbf{n}}^N + u_{1,\mathbf{n}}^{-N} w_{1,\mathbf{n}}^N + \kappa_{1,\mathbf{n}}^N w_{1,\mathbf{n}}^N u_{2,\mathbf{n}}^{-N}, \\ \Lambda_{2,\mathbf{n}}^N &= \frac{\kappa_{1,\mathbf{n}}^N}{\kappa_{2,\mathbf{n}}^N} u_{2,\mathbf{n}}^{-N} w_{3,\mathbf{n}}^{-N} + \frac{\kappa_{3,\mathbf{n}}^N}{\kappa_{2,\mathbf{n}}^N} u_{1,\mathbf{n}}^{-N} w_{2,\mathbf{n}}^{-N} + \frac{\kappa_{1,\mathbf{n}}^N \kappa_{3,\mathbf{n}}^N}{\kappa_{2,\mathbf{n}}^N} u_{2,\mathbf{n}}^{-N} w_{2,\mathbf{n}}^{-N}, \\ \Lambda_{3,\mathbf{n}}^N &= w_{1,\mathbf{n}}^N w_{3,\mathbf{n}}^{-N} + u_{3,\mathbf{n}}^N w_{3,\mathbf{n}}^{-N} + \kappa_{3,\mathbf{n}}^N w_{2,\mathbf{n}}^{-N} u_{3,\mathbf{n}}^N. \end{aligned} \quad (170)$$

Здесь трехмерные векторы

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 \quad (171)$$

задают вершину кубической решетки, и для этой рекурсии начальные данные и κ -параметры есть

$$\begin{aligned} u_{1,n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3} &= u_{1:n_2,n_3}, & w_{1,n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3} &= w_{1:n_2,n_3}, & \kappa_{1,\mathbf{n}} &= \kappa_{1:n_2,n_3}, \\ u_{2,n_1 \mathbf{e}_1 + n_3 \mathbf{e}_3} &= u_{2:n_1,n_3}, & w_{2,n_1 \mathbf{e}_1 + n_3 \mathbf{e}_3} &= w_{2:n_1,n_3}, & \kappa_{2,\mathbf{n}} &= \kappa_{2:n_1,n_3}, \\ u_{3,n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2} &= u_{3:n_1,n_2}, & w_{3,n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2} &= w_{3:n_1,n_2}, & \kappa_{3,\mathbf{n}} &= \kappa_{3:n_1,n_2}. \end{aligned} \quad (172)$$

Напомним, что извлечение корней N -й степени из (169) управляется соглашением (145), которое на решетке имеет вид

$$\begin{aligned} w_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} w_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} &= w_{1,\mathbf{n}} w_{2,\mathbf{n}}, & u_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}^{-1} w_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} &= u_{1,\mathbf{n}}^{-1} w_{3,\mathbf{n}}, \\ u_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} u_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} &= u_{2,\mathbf{n}} u_{3,\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (173)$$

Результат применения $\mathfrak{Z}_{1,2,3}$ к параметрам $\mathbf{u}_V^N \equiv u_V^N$, $\mathbf{w}_V^N \equiv w_V^N$ (см. (140))

$$\mathfrak{Z}_{1,2,3} \mathbf{u}_V^N = \mathbf{u}_V^{*N} \mathfrak{Z}_{1,2,3}, \quad \mathfrak{Z}_{1,2,3} \mathbf{w}_V^N = \mathbf{w}_V^{*N} \mathfrak{Z}_{1,2,3} \quad (174)$$

в терминах рекурсии (169), (170) выражается как

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1:n_2,n_3}^{*N} &= u_{1,N_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3}^N, & \mathbf{w}_{1:n_2,n_3}^{*N} &= w_{1,N_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3}^N, \\ \mathbf{u}_{2:n_1,n_3}^{*N} &= u_{2,n_1 \mathbf{e}_1 + N_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3}^N, & \mathbf{w}_{2:n_1,n_3}^{*N} &= w_{2,n_1 \mathbf{e}_1 + N_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3}^N, \\ \mathbf{u}_{3:n_1,n_2}^{*N} &= u_{3,n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + N_3 \mathbf{e}_3}^N, & \mathbf{w}_{3:n_1,n_2}^{*N} &= w_{3,n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + N_3 \mathbf{e}_3}^N. \end{aligned} \quad (175)$$

Далее согласно (158) следует ввести нормированные вейлевские элементы $\mathbf{x}_V^* = \frac{\mathbf{u}_V^*}{u_V^*}$, $\mathbf{z}_V^* = \frac{\mathbf{w}_V^*}{w_V^*}$ и определить однозначно матрицу $\mathbf{Z}_{1,2,3}$:

$$\mathbf{Z}_{1,2,3}\mathbf{x}_V = \mathbf{x}_V^* \mathbf{Z}_{1,2,3}, \quad \mathbf{Z}_{1,2,3}\mathbf{z}_V = \mathbf{z}_V^* \mathbf{Z}_{1,2,3}, \quad (176)$$

матричные элементы которой набираются из (150) как

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \mathbf{Z}_{1,2,3} | \sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^* \rangle = \\ & = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} \prod_{n_1, n_2, n_3} \langle \sigma_{1,n}, \sigma_{2,n}, \sigma_{3,n} | \mathbf{R}_n | \sigma_{1,n+\mathbf{e}_1}, \sigma_{2,n+\mathbf{e}_2}, \sigma_{3,n+\mathbf{e}_3} \rangle, \end{aligned} \quad (177)$$

где обкладками $\mathbf{Z}_{1,2,3}$ использованы векторы индексов

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{ \sigma_{1,n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3} \}, \quad \sigma_2 = \{ \sigma_{2,n_1\mathbf{e}_1+n_3\mathbf{e}_3} \}, \\ \sigma_3 &= \{ \sigma_{3,n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2} \}, \quad n_j = 0, \dots, N_j - 1 \end{aligned} \quad (178)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= \{ \sigma_{1,N_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3} \}, \quad \sigma_2^* = \{ \sigma_{2,n_1\mathbf{e}_1+N_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3} \}, \\ \sigma_3^* &= \{ \sigma_{3,n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+N_3\mathbf{e}_3} \}, \quad n_j = 0, \dots, N_j - 1, \end{aligned} \quad (179)$$

а суммирование производится по всем «внутренним» $\sigma_{j,n}$, $0 < n_j < N_j$. Каждая матрица \mathbf{R}_n в (177) является матричной функцией (150) с аргументами $p_{1,n}$, $p_{2,n}$, $p_{3,n}$, $p_{4,n}$, которые в силу (152), (153) и решения рекурсии (169) имеют вид

$$\begin{aligned} x_{1,n} &= \frac{q^{-1/2} u_{2,n}}{\kappa_{1,n} u_{1,n}}, \quad x_{2,n} = q^{-1/2} \kappa_{2,n} \frac{u_{2,n+\mathbf{e}_2}}{u_{1,n+\mathbf{e}_1}}, \\ x_{3,n} &= q^{-1} \frac{u_{2,n+\mathbf{e}_2}}{u_{1,n}}, \quad x_{4,n} = q^{-1} \frac{\kappa_{2,n}}{\kappa_{1,n}} \frac{u_{2,n}}{u_{1,n+\mathbf{e}_1}} \end{aligned} \quad (180)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{y_{3,n}}{y_{1,n}} &= \kappa_{1,n} \frac{w_{1,n}}{u_{3,n+\mathbf{e}_3}}, \quad \frac{y_{4,n}}{y_{1,n}} = q^{-1/2} \kappa_{3,n} \frac{w_{3,n}}{w_{2,n}}, \\ \frac{y_{3,n}}{y_{2,n}} &= \frac{w_{2,n+\mathbf{e}_2}}{w_{3,n}}, \quad \frac{y_{4,n}}{y_{2,n}} = q^{-1/2} \frac{\kappa_{3,n}}{\kappa_{1,n}} \frac{u_{3,n+\mathbf{e}_3}}{w_{1,n+\mathbf{e}_1}}. \end{aligned} \quad (181)$$

Помимо открытой системы, определяемой рекурсией (169), (170), и случая полных циклических граничных условий (162), можно рассматривать и частичные циклические граничные условия. Важным примером для нас являются циклические граничные условия во 2-м и 3-м пучках:

$$\begin{aligned} u_{2:n_1,n_3}^* &= u_{2:n_1,n_3}, \quad w_{2:n_1,n_3}^* = w_{2:n_1,n_3}, \\ u_{3:n_1,n_2}^* &= u_{3:n_1,n_3}, \quad w_{3:n_1,n_2}^* = w_{3:n_1,n_3}. \end{aligned} \quad (182)$$

Эти граничные условия подразумевают последующее взятие следа $\mathbf{Z}_1 = \text{Tr}_{2,3} \mathbf{Z}_{1,2,3}$:

$$\langle \sigma_1 | \mathbf{Z}_1 | \sigma_1^* \rangle = \sum_{\sigma_2, \sigma_3} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \mathbf{Z}_{1,2,3} | \sigma_1^*, \sigma_2, \sigma_3 \rangle. \quad (183)$$

Заметим, что периодичность по первому пучку не следует, вообще говоря, из периодических условий (182). То, что \mathbf{Z}_1 является оператором только в первом пучке, вспомогательная решетка для которого квадратная, означает, что \mathbf{Z}_1 удовлетворяет соотношениям типа (161) для функционала $\mathbf{j}(x, y)$ для квадратной решетки, построенного в п. 1.3.3 с очевидной модификацией обозначений в формулах (35), (37) и т. д.: $\mathbf{u}_{n_2, n_3} \mapsto \mathbf{u}_{1:n_2, n_3}$, $\mathbf{w}_{n_2, n_3} \mapsto \mathbf{w}_{1:n_2, n_3}$, $\kappa_{n_2, n_3} \mapsto \kappa_{1:n_2, n_3}$. Удобно указать параметры $u_{1:n_2, n_3}$, $w_{1:n_2, n_3}$, используемые при построении \mathbf{j} , как параметры \mathbf{j} :

$$\mathbf{j}(x, y) = \mathbf{j}(x, y | \{u_{1:n_2, n_3}, w_{1:n_2, n_3}\}). \quad (184)$$

Тогда в силу наших построений матрица \mathbf{Z}_1 совершает изоспектральное преобразование

$$\mathbf{Z}_1 \mathbf{j}(x, y | \{u_{1:n_2, n_3}, w_{1:n_2, n_3}\}) = \mathbf{j}(x, y | \{u_{1:n_2, n_3}^*, w_{1:n_2, n_3}^*\}) \mathbf{Z}_1. \quad (185)$$

Если же динамика $u_{j, \mathbf{n}}, w_{j, \mathbf{n}}$ периодична вдобавок к (182) и по первому направлению, то соотношение (185) превращается в $\mathbf{Z}_1 \mathbf{j}(x, y) = \mathbf{j}(x, y) \mathbf{Z}_1$, т. е. операторнозначные полиномы из \mathbf{j} действительно являются интегралами движения для *конечномерной* \mathbf{Z}_1 . Заметим, что и во вспомогательных плоскостях, соответствующих пучкам 2 и 3, при этом также можно построить свои функционалы \mathbf{j} , которые будут производить соответствующие интегралы движения. В этом смысле трехмерная инвариантность подхода налицо.

4.2. Солитонное решение. Рекурсия (169), (170) с начальными данными (172) является уравнениями движения для классической интегрируемой модели на кубической решетке. Как неоднократно упоминалось выше, ее полное решение может быть выписано в рамках алгебраической геометрии (см. [3, 11]). Параметризация $u_{j, \mathbf{n}}^N, w_{j, \mathbf{n}}^N, \kappa_{j, \mathbf{n}}^N$ в терминах отношений Θ -функций и главных форм, выписанная в [11], явно задает посредством (180), (181) распределение параметров всех матриц $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$ в (177). Периодические же граничные условия (162) фиксируют вид алгебраической кривой, на якобиане которой определены Θ -функции. Например, при частичных периодических граничных условиях (182) алгебраическая кривая задается уравнением $J(x^N, y^N) = 0$, где J — определитель \mathbb{C} -числовой матрицы коэффициентов для квадратной решетки первого пучка (см. формулу (71) и далее). Однако, поскольку алгебро-геометрические выражения мало пригодны для практических нужд, мы ограничиваемся предельным случаем, когда спектральная

кривая вырождается в сферу с выделенными точками. При этом параметризация $u_{j,\mathbf{n}}^N, w_{j,\mathbf{n}}^N$ интерпретируется как солитонный сектор решений уравнений движения.

Для параметризации $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$ нам необходимы $u_{j,\mathbf{n}}, w_{j,\mathbf{n}}, \kappa_{j,\mathbf{n}}$, а не их N -е степени, поэтому мы будем использовать N -е корни из рациональных выражений. Пусть для кубической решетки с размерами $N_1 \times N_2 \times N_3$ комплексные числа $X_{n_1}, X'_{n_1}, Y_{n_2}, Y'_{n_2}, Z_{n_3}, Z'_{n_3}$ общего положения, для различных пар которых выбраны корни

$$e(X, Y) : e(X, Y)^N = X - Y. \quad (186)$$

Зафиксируем

$$\begin{aligned} \kappa_{1,\mathbf{n}} &= q^{1/2} \frac{e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})}{e(Y_{n_2}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}, \\ \kappa_{2,\mathbf{n}} &= q^{1/2} \frac{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(X'_{n_1}, Z'_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(X_{n_1}, Z'_{n_3})}, \\ \kappa_{3,\mathbf{n}} &= q^{1/2} \frac{e(X'_{n_1}, Y_{n_2})e(X_{n_1}, Y'_{n_2})}{e(X_{n_1}, Y_{n_2})e(X'_{n_1}, Y'_{n_2})} \end{aligned} \quad (187)$$

(ср. с (167)). Далее, подстановка

$$\begin{aligned} u_{1,\mathbf{n}} &= -q^{-1/2} \xi_{3,n_3} \frac{e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}{e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \frac{\tau_{2,\mathbf{n}}}{\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}, \\ w_{1,\mathbf{n}} &= -\xi_{2,n_2} \frac{e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \frac{\tau_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\tau_{3,\mathbf{n}}}, \\ u_{2,\mathbf{n}} &= -q^{-1/2} \xi_{3,n_3} \frac{e(X_{n_1}, Z'_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})} \frac{\tau_{1,\mathbf{n}}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}, \\ w_{2,\mathbf{n}} &= -\xi_{1,n_1} \frac{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})} \frac{\tau_{3,\mathbf{n}}}{\tau_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}, \\ u_{3,\mathbf{n}} &= -q^{-1/2} \xi_{2,n_2} \frac{e(X_{n_1}, Y_{n_2})}{e(X_{n_1}, Y'_{n_2})} \frac{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\tau_{1,\mathbf{n}}}, \\ w_{3,\mathbf{n}} &= -\xi_{1,n_1} \frac{e(X'_{n_1}, Y'_{n_2})}{e(X_{n_1}, Y'_{n_2})} \frac{\tau_{2,\mathbf{n}}}{\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}} \end{aligned} \quad (188)$$

является своего рода заменой переменных в уравнениях движения (169), (170), такой, что $\tau_{j,\mathbf{n}}^N$ — лагранжевы переменные. Решение же лагранжевых уравнений движения определяется в терминах определителя Казоратти — функции $H^{(g)}$, параметрами которой служат числа P_0, P_1, \dots, P_{g-1} и $P'_0, P'_1, \dots, P'_{g-1}$,

а аргументом является g -мерный вектор f_0, f_1, \dots, f_{g-1} :

$$H^{(g)}(\{f_k\}_{k=0}^{g-1}) \stackrel{\text{опр}}{=} \frac{\det |P_j^i - f_j P_j^{i}|_{i,j=0}^{g-1}}{\prod_{i>j} (P_i - P_j)}. \quad (189)$$

Пусть

$$\sigma_k(X) \stackrel{\text{опр}}{=} \frac{P'_k - X}{P_k - X}. \quad (190)$$

Локальное решение уравнений (169), (170) есть

$$\begin{aligned} \tau_{1,\mathbf{n}}^N &= H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{I_k(\mathbf{n})}{\sigma_k(X_{n_1})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), \\ \tau_{2,\mathbf{n}}^N &= H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{I_k(\mathbf{n})}{\sigma_k(Y_{n_2})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), \\ \tau_{3,\mathbf{n}}^N &= H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{I_k(\mathbf{n})}{\sigma_k(Z_{n_3})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), \\ \lambda_{\mathbf{n}}^N &= H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{I_k(\mathbf{n}) \sigma_k(Z'_{n_3})}{\sigma_k(X_{n_1}) \sigma_k(Y_{n_2})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), \end{aligned} \quad (191)$$

где

$$I_k(\mathbf{n}) = \left(\prod_{j_1=0}^{n_1-1} \frac{\sigma_k(X'_{j_1})}{\sigma_k(X_{j_1})} \right) \left(\prod_{j_2=0}^{n_2-1} \frac{\sigma_k(Y'_{j_2})}{\sigma_k(Y_{j_2})} \right) \left(\prod_{j_3=0}^{n_3-1} \frac{\sigma_k(Z'_{j_3})}{\sigma_k(Z_{j_3})} \right). \quad (192)$$

Выражение для $\lambda_{\mathbf{n}}^N$ предваряет соотношения для $y_{j,\mathbf{n}}$ (см. ниже). В аргументах (191) f_0, \dots, f_{g-1} — произвольный g -мерный комплексный вектор. Анзац (191) решает локально уравнения движения (169), (170) при произвольных значениях всех параметров, включая g , которое есть число солитонных мод. С точки зрения алгебраической геометрии вектор $\{f_k\}_{k=0}^{g-1}$ имеет смысл экспоненты от произвольной точки якобиана спектральной кривой рода g , а функция $H^{(g)}$ есть специальный предел Θ -функции при вырождении алгебраической кривой в сферу. Решение уравнений движения (169) в терминах алгебраической геометрии можно найти в работах [3, 11], а детали редукции — в приложении к работе [12].

Подстановка (191) в (180), (181) дает

$$\begin{aligned}
 x_{1,\mathbf{n}} &= q^{-1} \frac{e(X_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1,\mathbf{n}}\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}\tau_{2,\mathbf{n}}}, \\
 y_{1,\mathbf{n}} &= \frac{e(X_{n_1}, Y_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\lambda_{\mathbf{n}}\tau_{3,\mathbf{n}}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}\tau_{2,\mathbf{n}}}, \\
 x_{2,\mathbf{n}} &= \frac{e(X'_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}, \\
 y_{2,\mathbf{n}} &= q \frac{e(X'_{n_1}, Y'_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\lambda_{\mathbf{n}}\tau_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}, \\
 x_{3,\mathbf{n}} &= q^{-1} \frac{e(X_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}\tau_{2,\mathbf{n}}}, \\
 y_{3,\mathbf{n}} &= q \frac{e(X_{n_1}, Y'_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\lambda_{\mathbf{n}}\tau_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}\tau_{2,\mathbf{n}}}, \\
 x_{4,\mathbf{n}} &= q^{-1} \frac{e(X'_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1,\mathbf{n}}\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}, \\
 y_{4,\mathbf{n}} &= \frac{e(X'_{n_1}, Y_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\lambda_{\mathbf{n}}\tau_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}.
 \end{aligned} \tag{193}$$

В частности, если все $f_k \equiv 0$, то $\tau_{j,\mathbf{n}} \equiv 1$. В этом случае параметризация каждой $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$ -матрицы эквивалентна (167), (168), и (193) дает неоднородную модель Замолотчикова–Бажанова–Бакстера в вершинной формулировке. Решение полной линейной задачи при этом дается формулами (89)–(91).

Обратимся напоследок к периодическим граничным условиям (182). На языке аргументов τ -функций (182) означают

$$I_k(\mathbf{n} + N_2\mathbf{e}_2) = I_k(\mathbf{n} + N_3\mathbf{e}_3) = I_k(\mathbf{n}). \tag{194}$$

Это приводит нас к ограничению: каждая пара P_k, P'_k должна удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned}
 \prod_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{P' - Y'_{n_2}}{P - Y'_{n_2}} &= \prod_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{P' - Y_{n_2}}{P - Y_{n_2}}, \\
 \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{P' - Z'_{n_3}}{P - Z'_{n_3}} &= \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{P' - Z_{n_3}}{P - Z_{n_3}}.
 \end{aligned} \tag{195}$$

Система (195) имеет всегда

$$g = (N_2 - 1)(N_3 - 1) \quad (196)$$

неэквивалентных решений. Под эквивалентностью понимается, что если (P, P') — решение (195), то эквивалентное ему решение есть (P', P) . Таким образом, хотя с помощью τ -функций с произвольным числом солитонов и с произвольными параметрами P_0, \dots, P_{g-1} и P'_0, \dots, P'_{g-1} уравнения движения решаются *локально*, периодические граничные условия (конечный объем) накладывают ограничения на максимально возможное число солитонных мод g и на значения параметров P_0, \dots, P'_{g-1} . Заметим, что в ситуации общего положения g было бы родом классической спектральной кривой $J(x^N, y^N) = 0$.

4.3. Т-матрица. Оператор (183), очевидно, есть простое матричное произведение более простых объектов, ассоциированных с n_1 -слоями в выражении для \mathbf{Z}_1 и называемых трансфер-матрицами слой–слой. По аналогии с двумерными моделями можно определить «матрицу монодромии»: при фиксированном n_1

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \widehat{\mathbf{T}}^{(n_1)} | \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \rangle &= \sum_{\sigma_2, \sigma_3} \prod_{n_2, n_3} \times \\ &\times \langle \sigma_{1:n_2, n_3}, \sigma_{2:n_2, n_3}, \sigma_{3:n_2, n_3} | \mathbf{R}_{\mathbf{n}} | \sigma'_{1:n_2, n_3}, \sigma'_{2:n_2+1, n_3}, \sigma'_{3:n_2, n_3+1} \rangle, \end{aligned} \quad (197)$$

где матричные элементы $\widehat{\mathbf{T}}^{(n_1)}$ берутся между наборами

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{ \sigma_{1:n_2, n_3} \}, \quad \sigma_2 = \{ \sigma_{2:0, n_3} \}, \quad \sigma_3 = \{ \sigma_{3:n_2, 0} \}, \\ n_2 &= 0, \dots, N_1 - 1, \quad n_3 = 0, \dots, N_3 - 1 \end{aligned} \quad (198)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= \{ \sigma'_{1:n_2, n_3} \}, \quad \sigma'_2 = \{ \sigma'_{2:N_2, n_3} \}, \quad \sigma'_3 = \{ \sigma'_{3:n_2, N_3} \}, \\ n_2 &= 0, \dots, N_2 - 1, \quad n_3 = 0, \dots, N_3 - 1, \end{aligned} \quad (199)$$

а суммирование производится по всем «внутренним» $\sigma_{2:n_2, n_3}, \sigma_{3:n_2, n_3}$, $0 < n_2 < N_2$, $0 < n_3 < N_3$. Трансфер-матрица слой–слой есть след матрицы монодромии: при периодических граничных условиях (182)

$$\langle \sigma_1 | \mathbf{T}^{(n_1)} | \sigma'_1 \rangle = \sum_{\sigma_2, \sigma_3} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \widehat{\mathbf{T}}^{(n_1)} | \sigma'_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle, \quad (200)$$

где сумма берется по всем $\sigma_2 = \{ \sigma_{2:0, n_3} = \sigma_{2:N_2, n_3} \}$ и $\sigma_3 = \{ \sigma_{3:n_2, 0} = \sigma_{3:n_2, N_3} \}$. Благодаря периодичности мы будем всегда подразумевать ниже

$$n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}, \quad n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}. \quad (201)$$

В терминах $\mathbf{T}^{(n_1)}$ -матриц (183) есть

$$\mathbf{Z}_1 = \prod_{n_1=0 \uparrow N_1-1} \mathbf{T}^{(n_1)}. \quad (202)$$

Помимо полной \mathbf{T} -матрицы (200) нам в дальнейшем понадобится и вырожденная \mathbf{T} -матрица,

$$\langle \sigma_1 | \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) | \sigma'_1 \rangle = \sum_{\substack{\sigma_2 : \sum_{n_3} \sigma_{2:n_3} = -\beta \\ \sigma_3 : \sum_{n_2} \sigma_{3:n_2} = \alpha}} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \widehat{\mathbf{T}}^{(n_1)} | \sigma'_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle, \quad (203)$$

так что

$$\mathbf{T}^{(n_1)} = \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta). \quad (204)$$

Обратимся теперь к соотношениям типа (161) или (185) для каждой из $\mathbf{T}^{(n_1)}$ -матриц. Функционал $\mathbf{j}(x, y)$ для квадратной решетки в первом пучке содержит набор начальных данных $u_{1:n_2, n_3}, w_{1:n_2, n_3}$, $n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}$, $n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}$ в качестве своих параметров. Это отражено в формуле (185). «Запускающая» динамику (188), можно, естественно, определить

$$\mathbf{j}^{(n_1)}(x, y) = \mathbf{j}(x, y | \{u_{1, \mathbf{n}}, w_{1, \mathbf{n}}\}), \quad n_1 \text{ — фиксирован,} \quad (205)$$

$$n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}, \quad n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}.$$

Очевидно, начальный $\mathbf{j}(x, y) \equiv \mathbf{j}^{(0)}(x, y)$, а конечный функционал в (185) $\mathbf{j}(x, y | \{u_{1:n_2, n_3}^*, w_{1:n_2, n_3}^*\}) \equiv \mathbf{j}^{(N_1)}(x, y)$. По построению все $\mathbf{j}^{(n_1)}(x, y)$ эквивалентны, и

$$\mathbf{j}^{(n_1)}(x, y) \mathbf{T}^{(n_1)} = \mathbf{T}^{(n_1)} \mathbf{j}^{(n_1+1)}(x, y). \quad (206)$$

Здесь везде подразумевается, что x, y — свободные спектральные параметры.

Следует особо прокомментировать смысл индекса n_1 , перехода $n_1 \mapsto n_1 + 1$ и параметров $\mathbf{T}^{(n_1)}$ -матрицы в (206). Согласно параметризации (188), $u_{1, \mathbf{n}}$ и $w_{1, \mathbf{n}}$ являются отношениями функций $\tau_{2, \mathbf{n}}$ и $\tau_{3, \mathbf{n}}$ при одном и том же n_1 . При фиксированном n_1 формулу (192) можно переписать как

$$f_k I_k(\mathbf{n}) = f_k(n_1) I_k(n_2, n_3), \quad (207)$$

где

$$I_k(n_2, n_3) = \left(\prod_{j_2=0}^{n_2-1} \frac{\sigma_k(Y'_{j_2})}{\sigma_k(Y_{j_2})} \right) \left(\prod_{j_3=0}^{n_3-1} \frac{\sigma_k(Z'_{j_3})}{\sigma_k(Z_{j_3})} \right), \quad (208)$$

и $f_k(n_1) = f_k \prod_{j_1=0}^{n_1-1} \frac{\sigma_k(X'_{j_1})}{\sigma_k(X_{j_1})}$ — перемасштабированные амплитуды на уровне n_1 . На следующем же уровне, $n_1 \mapsto n_1 + 1$, все амплитуды получают сдвиг

$$f_k(n_1 + 1) = f_k(n_1) \frac{\sigma_k(X'_{n_1})}{\sigma_k(X_{n_1})}, \quad (209)$$

который, как видно, параметризуется парой X'_{n_1}, X_{n_1} . Эта пара и является эффективным аргументом $\mathbf{T}^{(n_1)}$ -матрицы, что довольно сложно увидеть в параметризации (193).

Если же все солитонные моды отсутствуют, $f_k = 0$ в (192), т. е. $\tau_{j,\mathbf{n}} \equiv 1$, то $\mathbf{j}^{(n_1)}(x, y) = \mathbf{j}(x, y) \forall n_1$, и (206) превращается в уравнение коммутации \mathbf{j} и $\mathbf{T}^{(n_1)}$. Как следствие, все $\mathbf{T}^{(n_1)}$ коммутируют между собой. В этом случае $\mathbf{T}^{(n_1)}$ — трансфер-матрица неоднородной модели Замолодчикова–Бажанова–Бакстера.

4.4. Квантовое преобразование Бэклунда. Весьма нетривиальным фактом является то, что спектр коммутативного набора из $\mathbf{j}(x, y)$ не зависит от значений f_k , т. е. любой $\mathbf{j}^{(n_1)}(x, y)$ изоспектрален $\mathbf{j}(x, y)$ с $\tau_{j,\mathbf{n}} \equiv 1$. Чтобы установить эту связь, нужно рассмотреть некий предельный случай для амплитуд f_k и X_{n_1}, X'_{n_1} в (191).

Пусть $N_1 = g \equiv (N_2 - 1)(N_3 - 1)$, так что можно идентифицировать нумерацию k и n_1 . Изменим нормировку амплитуд f_k :

$$f_k = f'_k \sigma_k(X_k) \quad (210)$$

и рассмотрим предел

$$X_k \mapsto P'_k, \quad f'_k - \text{произвольный}. \quad (211)$$

В этом пределе $\sigma_k(X_k) \mapsto 0$. Зафиксируем некий n_1 . Аргументы функций $\tau_{2,\mathbf{n}}^N, \tau_{3,\mathbf{n}}^N$ с точностью до регулярных $\sigma_k(Y), \sigma_k(Z)$ есть

$$f_k I_k(\mathbf{n}) = f'_k \sigma_k(X_k) \prod_{j=0}^{n_1-1} \frac{\sigma_k(X'_j)}{\sigma_k(X_j)} I_k(n_2, n_3), \quad (212)$$

где $I_k(n_2, n_3)$ дан формулой (208). В пределе (211), как легко увидеть, $f_k I_k(\mathbf{n}) = 0$ для всех $k \geq n_1$. Таким образом, по формулам (192), (191) в наборе аргументов $\tau_{2,\mathbf{n}}$ и $\tau_{3,\mathbf{n}}$ число ненулевых амплитуд среди $f_k I_k(\mathbf{n})$ равно n_1 . Назовем его числом солитонов в наборе $u_{1,\mathbf{n}}, w_{1,\mathbf{n}}$. В частности, при $n_1 = 0$ параметризация $u_{1,\mathbf{n}}, w_{1,\mathbf{n}}$ (188) в точности есть параметризация (89), т. е. $\mathbf{j}^{(0)}(x, y) = \mathbf{j}(x, y)$. Отметим, что аргументы функции $\tau_{1,\mathbf{n}}$

$$f_k \frac{I_k(\mathbf{n})}{\sigma_k(X_{n_1})} = f'_k \frac{\sigma_k(X_k)}{\sigma_k(X_{n_1})} \prod_{j=0}^{n_1-1} \frac{\sigma_k(X'_j)}{\sigma_k(X_j)} I_k(n_2, n_3) \quad (213)$$

в пределе (211) содержат $n_1 + 1$ ненулевых солитонных мод ($k = n_1$ не вырождается). В частности, при $n_1 = 0$, когда $\tau_{2,n} = \tau_{3,n} = 1$, из определения (189) легко получить

$$\tau_{1,n}^N = 1 - f'_0 \prod_{j \neq 0} \frac{P'_0 - P_j}{P_0 - P_j} I_k(n_2, n_3). \quad (214)$$

Это и есть, согласно Хироте [23], односолитонная волна.

В уравнении (206) матрица $\mathbf{T}^{(n_1)}$ связывает n_1 -солитонное состояние с $n_1 + 1$ -солитонным, т. е. $\mathbf{T}^{(n_1)}$ ассоциирована с рождением солитона и представляет собой преобразование Бэклунда. Последнее же состояние $u_{1,n}, w_{1,n}$ при $n_1 = g$ параметризуется полным набором солитонных амплитуд. Соответствующее произведение \mathbf{T} -матриц

$$\mathbf{K} = \prod_{k=0 \uparrow g-1} \mathbf{T}^{(k)} \quad (215)$$

является оператором рождения общего солитонного состояния.

Заметим, что для построения оператора \mathbf{K} мы выбрали произвольное упорядочивание набора P_k, P'_k — конечное g -солитонное состояние не зависит от конкретного упорядочивания. Однако таких упорядочиваний всего $g!$, т. е. существует $g!$ способов факторизовать (215). Во всех этих способах внутренние \mathbf{T} -операторы будут разные, т. е. в солитонном секторе вместо простой коммутации \mathbf{T} -операторов существуют весьма затейливые перестановочные соотношения, учитывающие, какой солитон рождается первым, какой вторым и т. д.

4.5. Вырожденная \mathbf{T} -матрица и вспомогательная линейная задача. Теперь настало время обратиться к следующему сюжету в нашей теории — связи \mathbf{T} -матрицы со вспомогательной линейной задачей.

Вырожденная $\mathbf{T}^{(n_1)}$ -матрица определена формулой (203). Форма (150) содержит дельта-символ, и при подстановке (150) в (203) удобно снять этот дельта-символ подстановкой

$$\sigma_{2:n_2, n_3} = \zeta_{n_2-1, n_3} - \zeta_{n_2-1, n_3+1}, \quad \sigma_{3:n_2, n_3} = \zeta_{n_2, n_3} - \zeta_{n_2-1, n_3}, \quad (216)$$

причем в силу разностей в (216) следует зафиксировать $\zeta_{0,0} \equiv 0$, а периодические условия по определению (203) таковы:

$$\zeta_{n_2+N_2, n_3} = \zeta_{n_2, n_3} + \alpha, \quad \zeta_{n_2, n_3+N_3} = \zeta_{n_2, n_3} + \beta. \quad (217)$$

После подстановки (216) матричные элементы $\mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta)$ имеют вид

$$\langle \sigma_1 | \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) | \sigma'_1 \rangle = \sum_{\zeta} \langle \sigma_1 | \phi^{(n_1)}(\zeta) \rangle \langle \phi^{(n_1+1)}(\zeta) | \sigma'_1 \rangle, \quad (218)$$

где суммирование берется с $\zeta_{0,0} \equiv 0$ и условиями периодичности (217), и

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 | \phi'^{(n_1)}(\zeta) \rangle &= \prod_{n_2, n_3} q^{\sigma_{1:n_2, n_3}(\zeta_{n_2-1, n_3+1} - \zeta_{n_2, n_3+1})} \times \\ &\quad \times \frac{W_{p_{1, n}}(\zeta_{n_2-1, n_3} - \zeta_{n_2-1, n_3+1} - \sigma_{1:n_2, n_3})}{W_{p_{3, n}}(\zeta_{n_2, n_3} - \zeta_{n_2, n_3+1} - \sigma_{1:n_2, n_3})}, \\ \langle \phi^{(n_1+1)}(\zeta) | \sigma' \rangle &= \prod_{n_2, n_3} q^{\sigma'_{1:n_2, n_3}(\zeta_{n_2, n_3+1} - \zeta_{n_2-1, n_3+1})} \times \\ &\quad \times \frac{W_{p_{2, n}}(\zeta_{n_2, n_3} - \zeta_{n_2, n_3+1} - \sigma'_{1:n_2, n_3})}{W_{p_{4, n}}(\zeta_{n_2-1, n_3} - \zeta_{n_2-1, n_3+1} - \sigma'_{1:n_2, n_3})}. \end{aligned} \quad (219)$$

Возникшие векторы $|\phi'^{(n_1)}(\zeta)\rangle$ и $\langle \phi^{(n_1+1)}(\zeta)|$ решают полную вспомогательную линейную задачу в следующих формах:

$$0 = \langle \phi^{(n_1+1)}(\zeta) | (m_{n_2, n_3} + m_{n_2, n_3+1} q^{1/2} \mathbf{u}_{1, n+e_1} + m_{n_2-1, n_3} \mathbf{w}_{1, n+e_1} + m_{n_2-1, n_3+1} \kappa_{1, n} \mathbf{u}_{1, n+e_1} \mathbf{w}_{1, n+e_1}), \quad (220)$$

где подразумевается

$$\mathbf{u}_{1, n+e_1} = u_{1, n+e_1} \mathbf{X}_{1:n_2, n_3}, \quad \mathbf{w}_{1, n+e_1} = w_{1, n+e_1} \mathbf{Z}_{1:n_2, n_3} \quad (221)$$

и

$$\begin{aligned} m_{n_2-1, n_3} &= m_{n_2-1, n_3}(X'_{n_1}) = \\ &= q^{\zeta_{n_2-1, n_3}} \tau_{1, n} \prod_{j_2=0}^{n_2-1} \xi_{2, j_2} \frac{e(X'_{n_1}, Y_{j_2})}{e(X'_{n_1}, Y'_{j_2})} \prod_{j_3=0}^{n_3-1} \frac{1}{\xi_{3, j_3}} \frac{e(X'_{n_1}, Z_{j_3})}{e(X'_{n_1}, Z'_{j_3})}. \end{aligned} \quad (222)$$

Для доказательства (220) достаточно взять матричный элемент от (220), воспользоваться определением базиса (58) и разностными свойствами функции W (149), а далее подставить (188) и (193).

Вид (220) и есть представление (67) для решения полной вспомогательной линейной задачи (63). Формула (222) определяет собственные значения операторов \mathbf{m}_{S, S_0} при $S_0 = (0, 0)$ (см. (66)). Спектральные параметры для определителя $\mathbf{j}^{(n_1+1)}$ специфичны, их N -е степени лежат на кривой. Для таких случаев удобно ввести обозначение

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(x, y) = \mathbf{j}(X|\alpha, \beta) \Leftrightarrow x^{-1} &= q^\alpha \prod_{n_2=0}^{N_2-1} \xi_{2, n_2} \frac{e(X, Y_{n_2})}{e(X, Y'_{n_2})}, \\ y &= q^\beta \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{1}{\xi_{3, n_3}} \frac{e(X, Z_{n_3})}{e(X, Z'_{n_3})}. \end{aligned} \quad (223)$$

Полезно сравнить (222) с (90) и (223) с (91). Далее, поскольку $\langle \phi^{(n_1+1)} |$ решает полную линейную задачу, то согласно (55)

$$\langle \phi^{(n_1+1)}(\zeta) | \mathbf{j}^{(n_1+1)}(X'_{n_1} | \alpha, \beta) = 0 \quad \forall \zeta, \quad (224)$$

где аргументы оператора \mathbf{j} зафиксировались из циклических свойств (222) и определения (223).

Аналогично можно получить для $|\phi'^{(n_1)}(\zeta)\rangle$

$$(m_{n_2, n_3} + m_{n_2, n_3+1} q^{1/2} \mathbf{u}_{1, \mathbf{n}} + m_{n_2-1, n_3} q \mathbf{w}_{1, \mathbf{n}} + m_{n_2-1, n_3+1} q \kappa_{1, \mathbf{n}} \mathbf{u}_{1, \mathbf{n}} \mathbf{w}_{1, \mathbf{n}}) |\phi'^{(n_1)}(\zeta)\rangle = 0, \quad (225)$$

где подразумевается

$$\mathbf{u}_{1, \mathbf{n}} = u_{1, \mathbf{n}} \mathbf{x}_{1: n_2, n_3}, \quad \mathbf{w}_{1, \mathbf{n}} = w_{1, \mathbf{n}} \mathbf{z}_{1: n_2, n_3} \quad (226)$$

и

$$\begin{aligned} m_{n_2-1, n_3} &= m_{n_2-1, n_3}(X_{n_1}) = \\ &= q^{\zeta^{n_2-1, n_3}} \tau_{1, \mathbf{n}} \prod_{j_2=0}^{n_2-1} \xi_{2, j_2} \frac{e(X_{n_1}, Y_{j_2})}{e(X_{n_1}, Y'_{j_2})} \prod_{j_3=0}^{n_3-1} \frac{1}{\xi_{3, j_3}} \frac{e(X_{n_1}, Z_{j_3})}{e(X_{n_1}, Z'_{j_3})}. \end{aligned} \quad (227)$$

Соотношение (225) — дуальная линейная задача, для которой справедливы все результаты предыдущих разделов. Единственное отличие (225) от стандартной формы вспомогательной задачи — это преобразование $\mathbf{z}_{1: n_2, n_3} \mapsto q \mathbf{z}_{1: n_2, n_3}$. Поэтому определитель системы (225)

$$\mathbf{j}'^{(n_1)}(x, y) = \mathbf{U} \mathbf{j}^{(n_1)}(x, y) \mathbf{U}^{-1}, \quad (228)$$

где (см. формулу (39))

$$\mathbf{U} = \prod_{n_2, n_3} \mathbf{x}_{1: n_2, n_3}. \quad (229)$$

Принимая во внимание определение (223), формулы (227) и (217), мы приходим к следующему виду уравнения, аналогичного (224):

$$\mathbf{j}'^{(n_1)}(X_{n_1} | \alpha, \beta) \cdot |\phi'^{(n_1)}(\zeta)\rangle = 0 \quad \forall \zeta. \quad (230)$$

Следствием пары уравнений (224) и (230) является пара уравнений на вырожденную \mathbf{T} -матрицу:

$$\mathbf{j}'^{(n_1)}(X_{n_1} | \alpha, \beta) \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) = \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) \mathbf{j}^{(n_1+1)}(X'_{n_1} | \alpha, \beta) = 0. \quad (231)$$

Ниже мы проанализируем это соотношение, однако сначала поговорим о собственных векторах.

4.6. Спектральные разложения. Пусть $\mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3}^{(n_1)}$ — набор коммутативных операторов в разложении $\mathbf{j}^{(n_1)}(x, y)$ (ср. (38), (41)):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{(n_1)}(x, y) &= \sum_{\nu_2=0}^{N_2} \sum_{\nu_3=0}^{N_3} \mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3}^{(n_1)} (x \mathbf{W}_0)^{\nu_3} (y \mathbf{U}_0)^{\nu_2} \equiv \\ &\equiv \sum_{m_2=0}^{N-1} \sum_{m_3=0}^{N-1} \mathbf{t}_{m_2, m_3}^{(n_1)} (x^N, y^N) (x \mathbf{W}_0)^{m_3} (y \mathbf{U}_0)^{m_2}, \end{aligned} \quad (232)$$

где без ограничения общности

$$\mathbf{U}_0 = \prod_{n_3} \mathbf{x}_{1:0, n_3}, \quad \mathbf{W}_0 = \prod_{n_2} \mathbf{z}_{1: n_2, 0} \quad (233)$$

есть нормированная некоммутативная пара.

Выберем *полный* набор собственных векторов $|\Psi_{t, \gamma}^{(n_1)}\rangle$:

$$\mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3}^{(n_1)} |\Psi_{t, \gamma}^{(n_1)}\rangle = |\Psi_{t, \gamma}^{(n_1)}\rangle t_{\nu_2, \nu_3}, \quad \mathbf{W}_0 |\Psi_{t, \gamma}^{(n_1)}\rangle = |\Psi_{t, \gamma}^{(n_1)}\rangle q^\gamma, \quad (234)$$

где собственные значения t_{ν_2, ν_3} операторов $\mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3}^{(n_1)}$ не зависят от n_1 (изоспектральность), и оператор \mathbf{W}_0 из пары $\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0$ выбран диагональным. Индекс t в собственных векторах означает набор $N_2 N_3 - 1$ независимых операторов среди всех $\mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3}$, а индекс $\gamma \in \mathbb{Z}_N$ благодаря нормировке $\mathbf{W}_0^N = 1$. Дуальный базис $\langle \Psi_{t, \gamma}^{(n_1)} |$ определяется как ортогональный введенному:

$$\langle \Psi_{t, \gamma}^{(n_1)} | \Psi_{t', \gamma'}^{(n_1)} \rangle = \delta_{t, t'} \delta_{\gamma, \gamma'}. \quad (235)$$

Действие \mathbf{U}_0 на этих векторах определяется как

$$\mathbf{U}_0 |\Psi_{t, \gamma}^{(n_1)}\rangle = |\Psi_{t, \gamma-1}^{(n_1)}\rangle, \quad \langle \Psi_{t, \gamma}^{(n_1)} | \mathbf{U}_0 = \langle \Psi_{t, \gamma+1}^{(n_1)} |. \quad (236)$$

В базисе собственных векторов оператор $\mathbf{j}^{(n_1)}(x, y)$ имеет разложение

$$\mathbf{j}^{(n_1)}(x, y) = \sum_{t, \gamma, \gamma'} |\Psi_{t, \gamma}^{(n_1)}\rangle (\mathbf{j}_t(x, y))_{\gamma, \gamma'} \langle \Psi_{t, \gamma'}^{(n_1)} |, \quad (237)$$

где согласно второй строке (232)

$$(\mathbf{j}_t(x, y))_{\gamma, \gamma'} = \sum_{m_2=0}^{N-1} \delta_{\gamma+m_2, \gamma'} y^{m_2} t_{m_2} (q^\gamma x, y^N) \quad (238)$$

с

$$t_{m_2}(x, y^N) = \sum_{m_3=0}^{N-1} x^{m_3} t_{m_2, m_3}(x^N, y^N). \quad (239)$$

Перестановочное соотношение (206), в свою очередь, подразумевает, что

$$\mathbf{T}^{(n_1)} = \sum_{t,\gamma} |\Psi_{t,\gamma}^{(n_1)}\rangle T_t |\Psi_{t,\gamma}^{(n_1+1)}\rangle, \quad (240)$$

где T_t не зависит от γ , поскольку и \mathbf{U}_0 , и \mathbf{W}_0 коммутируют с $\mathbf{T}^{(n_1)}$.

Обратимся теперь к вырожденной $\mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta)$. Из определения $\mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta)$ можно извлечь

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) \mathbf{U}_0 &= \mathbf{U}_0 \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha + 1, \beta), \\ \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) \mathbf{W}_0 &= \mathbf{W}_0 \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta + 1), \end{aligned} \quad (241)$$

что совершенно аналогично (42) при связи (x, y) с (α, β) посредством (223). Следующее предположение, усиливающее (206), основано на точных аналитических выкладках, сделанных для частных случаев $N_2, N_3 = 2, 3, 4, 5$:

$$\mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3}^{(n_1)} \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) = \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) \mathbf{t}_{\nu_2, \nu_3}^{(n_1+1)}. \quad (242)$$

Следствием (242) и (241) является следующее разложение оператора $\mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta)$:

$$\mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) = \sum_{t,\gamma,\gamma'} |\Psi_{t,\gamma}^{(n_1)}\rangle T_t^{(n_1)}(\alpha - \gamma, \alpha - \gamma') q^{\beta(\gamma' - \gamma)} \langle \Psi_{t,\gamma'}^{(n_1+1)} |, \quad (243)$$

и, в частности,

$$\mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha) \stackrel{\text{онп}}{=} \sum_{\beta} \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta) = \sum_{t,\gamma} |\Psi_{t,\gamma}^{(n_1)}\rangle T_t^{(n_1)}(\alpha - \gamma) \langle \Psi_{t,\gamma}^{(n_1+1)} |. \quad (244)$$

4.7. Уравнение Бакстера. Определим аналитическое уравнение Бакстера как уравнение на нулевой собственный вектор $Q_{t,\gamma'}$ или собственный ковектор $Q'_{t,\gamma}$ матрицы $(\mathbf{j}_t(x, y))_{\gamma,\gamma'}$ (формула (238)):

$$\sum_{\gamma'} (\mathbf{j}_t(x, y))_{\gamma,\gamma'} Q_{t,\gamma'} = \sum_{\gamma} Q'_{t,\gamma} (\mathbf{j}_t(x, y))_{\gamma,\gamma'} = 0. \quad (245)$$

Если (x^N, y^N) — точка общего положения на классической спектральной кривой $J(x^N, y^N) = 0$, то оба уравнения (245) имеют единственное, с точностью до общей нормировки, решение.

Прокомментируем, почему мы называем пару уравнений (245) уравнениями Бакстера. Подставляя (238) в (245), можно заключить, что нулевые векторы суть функции

$$Q_{t,\gamma} = Q_t(q^\gamma x, y), \quad Q'_{t,\gamma} = Q'_t(q^\gamma x, y), \quad (246)$$

мероморфные на квантовой кривой $\Gamma^Q \ni (x, y) : J(x^N, y^N) = 0$, а (245) приводятся к функциональным уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{m_2=0}^{N-1} y^{m_2} t_{m_2}(x, y^N) Q_t(q^{m_2} x, y) &= 0, \\ \sum_{m_2=0}^{N-1} Q'_t(q^{-m_2} x, y) y^{m_2} t_{m_2}(q^{-m_2} x, y^N) &= 0. \end{aligned} \quad (247)$$

Естественно, Q_t и Q'_t определены с точностью до нормировки $\mathcal{N}(x^N, y)$. Если размер решетки $N_2 = 2$ (и $N > 2$), то суммирование по ν_2 в (38) и, соответственно, суммирование по m_2 во всех предыдущих формулах имеет всего три слагаемых, $m_2 = 0, 1, 2$. Тогда t_0 и t_2 в (247) имеют тривиальную структуру (типа выражений (40)), в то время как t_1 эквивалентен трансфер-матрице для киральной модели Поттса, и (247) в точности воспроизводят бакстеровские t - Q -уравнения.

Величины Q и Q' как мероморфные функции, однако, для наших целей не очень удобны. Пару (x, y) на квантовой кривой мы параметризуем тройкой $(X|\alpha, \beta)$ (см. (223)). Определим $Q_{t,\gamma}(X)$ и $Q'_{t,\gamma}(X)$ как решения (245) при (x, y) , определенные тройкой $(X|0, 0)$. Тогда для произвольных α, β будет выполняться

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma'} (\mathbf{j}_t(X|\alpha, \beta))_{\gamma, \gamma'} q^{-\gamma' \beta} Q_{t, \gamma' - \alpha}(X) &= \\ &= \sum_{\gamma} Q'_{t, \gamma - \alpha}(X) q^{\gamma \beta} (\mathbf{j}_t(X|\alpha, \beta))_{\gamma, \gamma'} = 0. \end{aligned} \quad (248)$$

Пара уравнений (231) есть не что иное, как пара уравнений Бакстера в операторной форме для двух эквивалентных операторов $\mathbf{j}^{(n_1)}$ и $\mathbf{j}^{(n_1+1)}$. Это позволяет моментально заключить, что в (243)*

$$T_t^{(n_1)}(\alpha - \gamma, \alpha - \gamma') = \frac{Q_{t, \gamma - \alpha}(X_{n_1}) Q'_{t, \gamma' - \alpha}(X'_{n_1})}{\mathcal{N}_t}. \quad (249)$$

Коэффициент \mathcal{N}_t здесь является нормировочным множителем. К сожалению, способ вычисления \mathcal{N}_t для какой-либо из схем вычисления коэффициентов Q_t неизвестен. Имеются в виду, как минимум, две очевидные схемы: или вычисление Q как мероморфной функции, или примитивное вычисление Q как

*Здесь для простоты мы приняли, что $N_2 = 0 \pmod N$, так что $\mathbf{j}'^{(n_1)} = \mathbf{j}^{(n_1)}$ в (231). Иначе разложение (243) с (249) было бы справедливо для $\mathbf{U}_0^{-N_2} \mathbf{T}^{(n_1)}(\alpha, \beta)$.

вектора алгебраических дополнений матрицы $(\mathbf{j}_t)_{\gamma, \gamma'}$. В обеих схемах оказывается, что \mathcal{N}_t существенно зависит от спектра собственных состояний. Эта проблема — существенное различие спектра Q -оператора и решений аналитического уравнения Бакстера — давно была известна в киральной модели Поттса.

4.8. Гипотеза о квантовом разделении переменных. Как отмечалось выше в п. 4.4, состояния $u_{1,n}, w_{1,n}$, параметризуемые с помощью солитонных τ -функций (191), изоспектральны простой неоднородной модели Замолодчикова–Бажанова–Бакстера (т. е. случаю единичных $\tau_{2,n}, \tau_{3,n}$). Оператор (215), описанный в том пункте, осуществляет преобразование подобия между начальным «чистым» состоянием и конечным полным $g = (N_2 - 1)(N_3 - 1)$ -солитонным состоянием.

Гипотеза о квантовом разделении переменных основывается на возможности распорядиться этой \mathbb{C}^g -параметрической свободой так, чтобы по возможности упростить структуру *собственных состояний* конечного оператора $\mathbf{j}^{(g)}$.

Определим оператор $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$:

$$\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \mathbf{T}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \mathbf{T}^{(1)}(\alpha_1, \beta_1) \cdots \mathbf{T}^{(g-1)}(\alpha_{g-1}, \beta_{g-1}), \quad (250)$$

где $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ строится аналогично оператору (215), т. е. при некотором выбранном упорядочивании (P_k, P'_k) и в пределе (211). В силу (242), оператор $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ также связывает 0-солитонное и g -солитонное состояния, как и оператор (215). Однако дополнительно к пределам (211) в определении оператора $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ потребуем

$$f'_k \mapsto \prod_{j \neq k} \frac{P_k - P_j}{P'_k - P_j}. \quad (251)$$

Как отмечалось в п. 4.4, \mathbf{K} , равно как и $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, не зависит от выбранного упорядочивания (P_k, P'_k) .

Рассмотрим теперь первый оператор в произведении (250) $\mathbf{T}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0)$ и полную вспомогательную линейную задачу, с ним ассоциированную (см. (218), (225)). При $n_1 = 0$ собственные значения оператора $\mathbf{m}_{n_2-1, n_3}(X_0 = P'_0 | \alpha_0, \beta_0)$ даны формулой (227), а функция $\tau_{1,n}$ дана выражением (214). Аргументом \mathbf{m} использована параметризация (223) для точки (x, y) на квантовой кривой. Если теперь принять во внимание (251), то легко увидеть, что $m_{-1,0} = 0$. На операторном языке это означает, что

$$\mathbf{m}_{-1,0}(P'_0 | \alpha_0, \beta_0) \mathbf{T}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) = 0. \quad (252)$$

Вследствие естественной инвариантности оператора $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ относительно упорядочивания (P_k, P'_k) , предыдущее нулевое соотношение можно усилить:

$$\mathbf{m}_{-1,0}(P'_k | \alpha_k, \beta_k) \mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \quad \forall k. \quad (253)$$

Эта формула связана с классическим разделением переменных. \mathbf{m}_{n_2, n_3}^N — классическая функция Бейкера–Ахиезера, и (253) означает, что уравнение $\mathbf{m}_{-1,0}^N(P) = 0$ имеет g решений $P = P'_k$ на классической кривой. При переходе к квантовой кривой оператор $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ является проектором на состояние, на котором все $\mathbf{m}_{-1,0}(P'_k|\alpha_k, \beta_k)$ имеют нулевое собственное значение.

Заметим, однако, что среди операторов $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ подавляющее большинство тождественных нулей, поскольку помимо (253) оператор (250) удовлетворяет еще и всем уравнениям $\mathbf{j}(P'_k|\alpha_k, \beta_k)\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

Структуру $\mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ можно «улучшить» следующим образом. Пусть $\mathcal{V}_k(\alpha, \beta)$ — подпространство пространства состояний такое, что

$$|\Phi\rangle \in \mathcal{V}_k(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \mathbf{j}(P'_k|\alpha, \beta)|\Phi\rangle = \mathbf{m}_{-1,0}(P'_k|\alpha, \beta)|\Phi\rangle = 0. \quad (254)$$

Пусть $\mathcal{V}_k(\alpha) = \bigcap_{\beta} \mathcal{V}_k(\alpha, \beta)$. По построению, очевидно, $\dim \mathcal{V}_k(\alpha, \beta) = N^{\Delta-2}$, $\Delta = N_2 N_3$ и $\dim \mathcal{V}_k(\alpha) = N^{\Delta-1}$. Тогда, если $\mathcal{V}(\vec{\alpha}) = \bigcup_{k=0}^{g-1} \mathcal{V}_k(\alpha_k)$, то $\dim \mathcal{V}(\vec{\alpha}) = N^{\Delta-g}$. Векторы из $\mathcal{V}(\vec{\alpha})$ мы будем обозначать как $|\Phi_{\vec{\alpha}, t'}\rangle$, где t' — набор собственных значений неких $\Delta - g = N_2 + N_3 - 1$ операторов.

Теперь сформулируем непосредственно гипотезу о квантовом разделении переменных.

Предположение 1. Набор t' — не что иное, как собственные значения операторов \mathbf{W}_{n_3} и $\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{U}_{n_2}$.

Предположение 2. Оператор

$$\mathbf{K}(\vec{\alpha}) = \sum_{\vec{\beta}} \mathbf{K}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \quad (255)$$

имеет разложение

$$\mathbf{K}(\vec{\alpha}) = \sum_{t'} |\Phi_{\vec{\alpha}, t'}\rangle \langle \xi_{t'}|. \quad (256)$$

Первое предположение основано на том, что каждый из $\mathbf{T}^{(k)}(\alpha_k)$, а следовательно, и $\mathbf{K}(\vec{\alpha})$ коммутирует со всеми \mathbf{W}_{n_3} и $\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{U}_{n_2}$. Важным же во втором предположении является то, что $|\xi_{t'}\rangle$ не зависят от $\vec{\alpha}$.

Доказательство второго предположения — весьма трудоемкая задача, для которой у нас пока нет удовлетворительных результатов. Причина этого в том, что предел (251) подразумевает неопределенности $0/0$ в параметризации (193), что оставляет некоторые степени свободы в определении $\langle \xi_{t'}|$. Детально построение разложения (256) сделано только для квантовой релятивистской цепочки Тоды в корне из единицы (см. [12]). Точная параметризация неопределенностей в (193) и вычисление $\langle \xi_{t'}|$ для модели Замолдчикова–Бажанова–Бакстера является нашей ближайшей задачей.

С другой стороны, $\mathbf{K}(\vec{\alpha})$ должно иметь стандартное разложение, следующее из (244):

$$\mathbf{K}(\vec{\alpha}) = \sum_{t,\gamma} |\Psi_{t,\gamma}\rangle \left(\prod_{k=0}^{g-1} T_t^{(k)}(\alpha_k - \gamma) \right) \langle \Psi_{t,\gamma}^{(g)}|. \quad (257)$$

Значение γ входит в список t' , и, сравнивая (257) и (256), можно заключить, что

$$\langle \Phi_{t,\gamma}^{(g)}| \equiv \langle \xi_{t'}|, \quad (258)$$

т. е. предел (251) для конечных собственных векторов $\langle \Psi_{t,\gamma}^{(g)}|$ подразумевает коллинеаризацию по $t \setminus t'$. Эта коллинеаризация неоднозначна в силу той же самой необходимости доопределять правила раскрытия неопределенностей $0/0$. Однако, с другой стороны, мы получаем в точности склянинскую формулу [24, 25] для квантового разделения переменных:

$$|\Phi_{\vec{\alpha}, t'}\rangle = \sum_{t \setminus t'} |\Psi_{t,\gamma}\rangle \prod_{k=0}^{g-1} T_t^{(k)}(\alpha_k). \quad (259)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим проблемы, не решенные на момент написания этого обзора.

Первая часть вопросов относится к формулировке $2 + 1$ -мерных моделей. Азац (14) в рамках локальной алгебры Вейля как алгебры наблюдаемых и принцип (130) оказались продуктивными в отношении построения трехмерных точно решаемых моделей, обобщающих в узком смысле модель Замолодчикова–Бажанова–Бакстера в вершинной формулировке. Однако не исключено, что существует более широкий класс вспомогательных линейных задач, в том числе с нелокальной алгеброй наблюдаемых.

Самое простое замечание, какое можно сделать, — параметры κ_V , которые являлись инвариантами в представлении (130), можно сделать динамическими (т. е. отображение (131) будет содержать еще и третью строчку, с $\kappa'_1, \dots, \kappa'_3$, а (132) будут иметь другой вид), но так, что уравнение (134) будет по-прежнему выполняться. Динамика $\kappa_{j,n}$ на всей решетке, совпадающая с описанной в [19], при этом будет описываться четырехчленным уравнением Хироты–Мивы [26], квантовый аналог которого неизвестен. Полная решеточная модель в таком случае будет напоминать парафермионы $\mathbf{u}_{j,n}, \mathbf{w}_{j,n}$, взаимодействующие с классической гравитацией $\kappa_{j,n}$.

Остаются не решенными до конца и большинство проблем, связанных с моделью Замолодчикова–Бажанова–Бакстера. Как отмечалось, одной из главных задач является вычисление спектра квантовых трансфер-матриц (249),

что затруднительно из-за нормировочного множителя, зависящего от спектра t . Можно, однако, отметить, что при вычислении Q как вектора алгебраических дополнений к $(\mathbf{j}_t)_{\gamma, \gamma'}$, например, в представлении (85) и в термодинамическом пределе (105), (111), формула (249) дает почти правильный ответ [14] (в параметризации (106) β_k — в точности бакстеровские линейные эксцессы). Имеется в виду, что нормировочный множитель является экспонентой от логарифмов синусов линейных эксцессов, в то время как (111) содержит все нужные дилогарифмы.

Конечно же, для модели Замолотчикова–Бажанова–Бакстера остается проблема доказательства предположений о квантовом разделении переменных. Необходимо представить явно хотя бы один способ устранения неопределенностей в параметризации разделяющего оператора $\mathbf{K}(\vec{\alpha})$ и для данного способа вычислить $\langle \xi' |$. Эта задача скорее техническая, связанная с исследованием разложений функции (189) вблизи ее нулей.

Далее следует упомянуть о бесконечномерных представлениях алгебры наблюдаемых. Схема, представленная в этой работе, моментально модулярно дуализируется [27] при знаменитом $q = e^{i\pi\tau}$, $\tau = e^{i\theta}$, так что все операторы эволюции становятся унитарными. При подходящем выборе вспомогательных решеток и эволюционных отображений в нашу схему входят не только квантовая релятивистская цепочка Тоды в режиме сильной связи [28] (вспомогательная решетка, отвечающая цепочке Тоды, отмечена в примерах), но и, скажем, квантовая модель Лиувилля [29] и ее различные не исследованные обобщения (например, пара взаимодействующих лиувиллевских полей). В общем же виде, для произвольной эволюционной решетки, можно говорить о некоей (новой?) трехмерной теории поля.

При конечномерной алгебре наблюдаемых простым, но, по нашему мнению, чрезвычайно важным является наблюдение о том, что при $N = 2$ весь коммутативный набор $\mathbf{t}_{\mu, \nu}$ — эрмитов, что говорит о физичности эволюционных моделей. Вдобавок, если классическая спектральная кривая не вырождена и имеет ненулевой род, то даже беглое исследование термодинамического предела, сделанное в этой работе, позволяет ожидать нетривиальную фазовую структуру в этих моделях (напомним, модель Замолотчикова–Бажанова–Бакстера критична, если только не рассматривать конечность решетки в одном из направлений, что эквивалентно обобщенной киральной модели Поттса).

В этой работе мы коснулись лишь случая классической спектральной кривой рода 1. Мы не использовали и не упоминали за ненадобностью соответствующую параметризацию квантовых \mathbf{T} -матриц или статсуммы Z , хотя во введенных ранее обозначениях это просто: в формулах (186)–(188), (191) и (193) нужно положить $e(X, Y)^N = \theta_1(X - Y)$, $\tau_{1, \mathbf{n}}^N = \theta_1(f - X_{n_1} + I(\mathbf{n}))$, $\tau_{2, \mathbf{n}}^N = \theta_1(f - Y_{n_2} + I(\mathbf{n}))$, $\tau_{3, \mathbf{n}}^N = \theta_1(f - Z_{n_3} + I(\mathbf{n}))$ и $\lambda_{\mathbf{n}}^N = \theta_1(f + Z'_{n_3} - X_{n_1} -$

$Y_{n_2} + I(\mathbf{n})$), где $I(\mathbf{n}) = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} X'_{j_1} - X_{j_1} + \sum_{j_2=0}^{n_2-1} Y'_{j_2} - Y_{j_2} + \sum_{j_3=0}^{n_3-1} Z'_{j_3} - Z_{j_3}$ и $\theta_1(z) \equiv \theta_1(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2 + 2i\pi(z+1/2)(n+1/2)}$. Эта параметризация

относится, строго говоря, к вырождению общей классической спектральной кривой в кривую рода 1 без сингулярностей. Однако эта параметризация становится полной, если при определении статсуммы Z рассматривается подрешетка параметров с периодом 2: $X_{n_1}^\#, Y_{n_2}^\#, Z_{n_3}^\#$, где индексы n_1, n_2, n_3 определены по mod 2, и периодические условия (без ограничения общности) $X'_0 - X_0 + X'_1 - X_1 = Y'_0 - Y_0 + Y'_1 - Y_1 = Z'_0 - Z_0 + Z'_1 - Z_1 = \pi$. Именно такой параметризации соответствует шахматная решетка из п. 2.4.2. Упрощенная же шахматная решетка соответствует дополнительным ограничениям типа $X'_j = X_j + \pi/2$ и т. д.

Заметим, что модель статмеханики, отвечающая упрощенной эллиптической параметризации, впервые была предложена в [30] как простейшая интегрируемая модель, соответствующая так называемому модифицированному уравнению тетраэдров (с точностью до соответствия вершинной формулировки и «IRC»-формулировки, в вершинной же формулировке модифицированное уравнение тетраэдров использовалось в [31]). Универсальный подход к модифицированному уравнению тетраэдров и к уравнению тетраэдров для сложных весов, в котором инвариантами уравнения тетраэдров является алгебраическая кривая, а спектральными аргументами весов являются мероморфные функции на кривой, был сформулирован в [32] и далее в [13]. Однако вычисление статсуммы для этих моделей на кубической решетке (даже для модели Мангазеева–Строганова) никем не предпринималось, не говоря уже об исследовании полного спектра. Такое исследование, на наш взгляд, является одной из наиболее важных предстоящих задач.

Благодарности. Автор хотел бы поблагодарить С. Пакуляка, Г. фон Гелена, А. Исаева, В. Бажанова, В. Мангазеева, Р. Кашаева, Ю. Строганова, Г. Пронько, И. Корепанова и Ж.-М. Майяра. Совместные с ними работы легли в основу этого обзора. Автор также хотел бы выразить признательность В. Мангазееву, М. Батчелору и Т. Меррел за гостеприимство и помощь во время моего пребывания в АНУ.

Работа была поддержана грантами CRDF RM1-2334-MO-02, INTAS OPEN 00-00055 и Australian Research Council.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sergeev S. M.* Quantum 2+1 evolution model // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 5639–5714.
2. *Sergeev S. M.* A three-dimensional quantum integrable mapping // TMF. 1999. V. 118, No. 3. P. 479–487.

3. *Sergeev S.* On exact solution of a Classical 3d integrable model // *J. Nonlin. Math. Phys.* 2000. V. 7, No. 1. P. 57–72.
4. *Sergeev S.* Auxiliary transfer matrices for three dimensional integrable models // *TMF.* 2000. V. 124, No. 3. P. 1187–1201.
5. *Сергеев С.М.* Некоторые свойства матриц локальной линейной задачи // *Записки научн. сем. ПОМИ (Notes of PDMI).* 2000. Т. 269. С. 292–307.
6. *Sergeev S.* Integrable three dimensional models in wholly discrete space-time // *Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory.* NATO Science. Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. Kluwer Academic Publishers, 2001, P. 293.
7. *Sergeev S.* Complex of three dimensional integrable models // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2001. V. 34, No. 48. P. 10493–10503.
8. *Sergeev S.* Functional equations and quantum separation of variables for 3d spin models // *TMF.* 2004. V. 138. P. 226.
9. *Sergeev S.* An evidence for a phase transition in three dimensional lattice models // *TMF.* 2004. V. 138. P. 310.
10. *Isaev A.P., Sergeev S.M.* Quantum Lax operators and discrete $2 + 1$ -dimensional integrable models // *Lett. Math. Phys.* 2003. V. 64. P. 57.
11. *Pakuliak S., Sergeev S.* Spectral curves and parameterizations of a discrete integrable three dimensional model // *TMF.* 2003. V. 136. P. 917.
12. *Pakuliak S., Sergeev S.* Quantum relativistic Toda chain at root of unity: Isospectrality, modified Q -operator and functional Bethe ansatz // *Intern. J. Math. Sci.* 2002. V. 31, No. 9. P. 513–553.
13. *Pakuliak S., Sergeev S., von Gehlen G.* Theta function parameterization and fusion for 3D integrable Boltzmann weights // *J. Phys. A.* 2004. V. 37. P. 1159.
14. *Baxter R.J.* On Zamolodchikov's solution of the tetrahedron equation // *Commun. Math. Phys.* 1983. V. 88. P. 185–205;
Baxter R.J. Partition function of the three-dimensional Zamolodchikov model // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V. 53. P. 1795;
Baxter R.J. The Yang–Baxter equations and the Zamolodchikov model // *Physica D.* 1986. V. 18. P. 321–347.
15. *Замолодчиков А.Б.* // *ЖЭТФ.* 1980. Т. 79. С. 641;
Zamolodchikov A.B. // *Commun. Math. Phys.* 1981. V. 79. P. 489–505.
16. *Bazhanov V.V., Baxter R.J.* New solvable lattice models in three dimensions // *J. Stat. Phys.* V. 69. P. 453–485.
17. *Baxter R.J., Forrester P.J.* Is the Zamolodchikov model critical? // *J. Phys. A.* 1985. V. 18. P. 1483–1497.
18. *Maillet J.-M., Nijhoff F.* Integrability for multidimensional lattice models // *Phys. Lett. B.* 1989. V. 224. P. 389–396.
19. *Kashaev R.M.* On discrete three-dimensional equations associated with the local Yang–Baxter relation // *Lett. Math. Phys.* 1996. V. 35. P. 389–397.
20. *Sergeev S.M.* Solutions of the functional tetrahedron equation connected with the local Yang–Baxter equation for the ferro-electric // *Lett. Math. Phys.* 1997. V. 45, No. 2;
Korepanov I.G., Kashaev R.M., Sergeev S.M. Functional tetrahedron equation // *TMF.* 1998. V. 117, No. 3. P. 370–384.
21. *Sergeev S.M., Mangazeev V.V., Stroganov Yu. G.* Vertex reformulation of the Bazhanov–Baxter model // *J. Stat. Phys.* 1996. V. 82. P. 31–50.

22. *Bazhanov V., Bobenko A., Reshetikhin N.* Quantum discrete sine-Gordon model at roots of 1 // Commun. Math. Phys. 1996. V. 175. P. 377–400.
23. *Hirota R.* Discrete analogue of a generalized Toda equation // Proc. Japan Acad. 1981. V. 50, No. 11. P. 3785–3791.
24. *Sklyanin E. K.* Functional Bethe ansatz in integrable and superintegrable systems. Singapore, 1990. P. 8–33;
Sklyanin E. K. Quantum inverse scattering method // Quantum Group and Quantum Integrable Systems: Nankai Lectures in Mathematical Physics. Singapore, 1992. P. 63–97;
Sklyanin E. K. Separation of variables. New trends // Progr. Theor. Phys. (Suppl.). 1995. V. 118. P. 35–60.
25. *Smirnov F. A.* Separation of variables for quantum integrable models related to $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$. math-ph/0109013. 2001.
26. *Miwa T.* On Hirota's difference equations // Proc. Japan Acad. 1982. V. 58. Ser. A. P. 9–12.
27. *Faddeev L. D.* Discrete Heisenberg–Weyl group and modular group // Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 249–254;
Faddeev L. D. Modular double of quantum group // Conf. Moshé Flato. 1999. V. I. P. 149–156; Math. Phys. Stud. Dordrecht, 2000. V. 21.
28. *Kharchev S., Lebedev D., Semenov-Tian-Shansky M.* Unitary representations of $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, the modular double, and the multiparticle q -deformed Toda chains // Commun. Math. Phys. 2002. V. 225. P. 573–609.
29. *Faddeev L. D., Kashaev R. M., Volkov A. Yu.* Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I: Algebraic approach and duality // Commun. Math. Phys. 2001. V. 219. P. 199–219;
Faddeev L. D., Kashaev R. M. Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. II: Geometric interpretation of the evolution operator // J. Phys. A. V. 35. P. 4043–4048.
30. *Mangazeev V. V., Stroganov Yu. G.* Elliptic solution for modified tetrahedron equation // Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 3475–3482.
Mangazeev V. V., Sergeev S. M., Stroganov Yu. G. New series of 3D lattice integrable models // Intern. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 5517–5530.
31. *Maiillard J.-M., Sergeev S.* Three dimensional integrable models based on modified tetrahedron equations and quantum dilogarithm // Phys. Lett. B. 1997. V. 405. P. 55–63.
32. *von Gehlen G., Pakuliak S., Sergeev S.* Explicit free parameterization of the modified tetrahedron equation // J. Phys. A. 2203. V. 36. P. 975.