

УДК 539.172

СТРУКТУРА ЛЕГКИХ ЯДЕР
С ИЗБЫТКОМ НЕЙТРОНОВ
И ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ С ИХ УЧАСТИЕМ

*Г. Ф. Филиппов**, *Ю. А. Лашко***

Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев, Украина

ВВЕДЕНИЕ	1373
ФОРМУЛИРОВКА ПОДХОДА	1379
ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ ЗАВИСИМОСТИ ФАЗОВЫХ СДВИГОВ ОТ ЭНЕРГИИ	1391
ВЛИЯНИЕ ПРИНЦИПА ПАУЛИ НА ОПЕРАТОР КИНЕТИЧЕ- СКОЙ ЭНЕРГИИ	1394
ОДНОКАНАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ	1403
МНОГОКАНАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ С ИЗБЫТКОМ НЕЙТРОНОВ	1412
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1422
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1424

*E-mail: gfilippov@bitp.kiev.ua

**E-mail: lashko@univ.kiev.ua

УДК 539.172

СТРУКТУРА ЛЕГКИХ ЯДЕР С ИЗБЫТКОМ НЕЙТРОНОВ И ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ С ИХ УЧАСТИЕМ

*Г. Ф. Филиппов**, *Ю. А. Лашко***

Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев, Украина

Приведены основные положения дискретного представления разрешенных состояний, на основе которого удается точно учесть влияние принципа Паули на исследуемые в рамках метода резонирующих групп процессы столкновения легких атомных ядер. Существенной особенностью этого подхода является обращение к пространству Фока–Баргманна, что помогает получить простое описание динамических явлений, сопутствующих процессам столкновения. В качестве интересных примеров рассмотрены ядерные системы ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ и ${}^8\text{He} + {}^4\text{He}$. Дана оценка сечений неупругого рассеяния, когда принимается во внимание возбуждение взаимодействующих подсистем, а также эффективных сечений реакций перестройки сталкивающихся ядер.

The main theses of the discrete representation of the Pauli-allowed states are given. Using this representation, the influence of the Pauli principle in collisions between light atomic nuclei is studied within the resonating-group method. The Fock–Bargmann representation provides us with the simplest means of analysis of dynamical phenomena accompanying collision processes. As the main examples of a real and non-trivial application of our approach, the ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ and the ${}^8\text{He} + {}^4\text{He}$ nuclear systems are examined. The cross-sections of inelastic scattering channels belonging to the excitation of the clusters or to their rearrangement are estimated.

ВВЕДЕНИЕ

Долгое время легкие ядра с избытком нейтронов казались недоступным объектом для экспериментальных исследований по той причине, что периоды β^- -распада таких ядер чрезвычайно малы***. Однако в последние годы были созданы измерительные устройства, позволяющие изучать ядра с весьма малым временем жизни. Такие устройства появились сначала как ответ на запросы, связанные с проблемой идентификации сверхтяжелых изотопов. Позже их стали использовать и при изучении легких нестабильных ядер, особенно тогда, когда были введены в строй ускорители радиоактивных пучков.

*E-mail: gfilippov@bitp.kiev.ua

**E-mail: lashko@univ.kiev.ua

***Например, время жизни ядра ${}^{12}\text{Be}$ в основном состоянии составляет $\sim 0,018$ с.

В итоге было получено много новых данных, касающихся ядер с избытком нейтронов, что стимулировало их теоретическую интерпретацию и развитие моделей, объясняющих свойства таких ядер, а также предсказывающих различные эффекты, не наблюдаемые у атомных ядер долины стабильности, но, возможно, свойственные ядерным системам, находящимся в экстремальных условиях.

Следует отметить несколько проблем, представляющих общий интерес. Во-первых, определение положения границы ядерной стабильности нуклонных систем в зависимости от числа нейтронов и протонов. Такие системы могут быть устойчивы по отношению к развалу ядра на те или иные фрагменты, но, находясь вблизи границы ядерной стабильности, они имеют крайне малый период β^- -распада, когда есть избыток нейтронов, или β^+ -распада в случае избытка протонов. Особого внимания заслуживают системы, которые находятся вне границ ядерной стабильности, при условии, что их основные и возбужденные состояния являются резонансами с достаточно большим временем жизни.

Другая интересная особенность слабосвязанных ядер состоит в том, что даже при относительно малых энергиях их возбуждения оказываются открытыми сразу несколько каналов распада, что существенно усложняет теоретические расчеты зависимости от энергии S -матрицы рассеяния и угловых распределений вылета продуктов различных реакций.

Анализ процессов столкновения легких атомных ядер обычно ограничивается расчетом фаз упругого рассеяния или, когда это удастся сделать, элементов S -матрицы. При этом поведение сталкивающихся ядер на малых расстояниях между ними обычно остается вне поля зрения исследователей. Между тем особое значение область компактных ядерных конфигураций приобретает при изучении роли принципа Паули, его точном учете и анализе его воздействия на поведение ядер по мере их сближения. Однако большое число независимых переменных у волновой функции составной системы препятствует созданию наглядной картины наблюдаемых явлений традиционными средствами.

Наиболее полное описание нуклонных систем, составленных из легких ядер, дают микроскопические модели, располагающие достаточными средствами, чтобы принять во внимание принцип Паули. Таким требованиям удовлетворяют подходы, в основу которых положены идеи метода резонирующих групп (МРГ) [1]. Сейчас уже практически общепринятым является представление о кластерной структуре легких ядер и о возможности, изучая их, исходить из положения об относительной стабильности ядерных подсистем (кластеров). Важно, что МРГ открывает перспективу изучения не только связанных состояний атомных ядер, но и состояний непрерывного спектра, имеющих в общем случае многоканальную структуру. При этом принцип Паули учитывается точно.

Слабое место стандартного варианта МРГ состоит в чрезвычайной громоздкости систем уравнений, с которыми приходится иметь дело, что существенно усложняет теоретический анализ явлений, сопутствующих процессам столкновения кластеров. К тому же приходится преодолевать значительные трудности, если принимать во внимание даже самые простые степени свободы, необходимые для описания возбуждения кластеров. Определенной компенсацией за второй из указанных недостатков является одновременный учет различного типа кластерных конфигураций.

Альтернативой традиционным приемам МРГ стали успешно осуществленные решения уравнений кластерной динамики посредством стохастических подходов [2, 3] и в рамках метода генераторной координаты (МГК) [4]. В работах [5] столкновение легких атомных ядер изучалось на основе идей антисимметризованной молекулярной динамики (АМД).

Стохастические подходы предполагают случайную выборку коэффициентов разложения волновой функции кластерной системы по гауссоидам и тем упрощают решение уравнений МРГ для связанных состояний. Предметом МГК стало исследование гиперповерхностей потенциальной энергии в пространстве генераторных координат, что позволило проследить за эволюцией волновой функции взаимодействующих кластеров в зависимости от расстояния между ними. Наконец, АМД сводит задачу к построению в фазовом пространстве классических траекторий всех нуклонов ядра и при этом принимает во внимание воздействие на эти траектории принципа Паули.

Основная трудность теоретического исследования процессов столкновения легких ядер связана с необходимостью принимать во внимание принцип Паули, существенно влияющий на поведение ядер при уменьшении расстояния между ними. Долгое время, чтобы обойти эту проблему, к обычному кластер-кластерному потенциалу добавляли потенциал, моделирующий действие принципа Паули, например, жесткий кор [6]. Другой путь, к которому обращались в последние годы, особенно в рамках метода гиперсферических функций, сводится к введению дополнительного нуклон-нуклонного взаимодействия, препятствующего, как и принцип Паули, сближению нуклонов, находящихся в одинаковых состояниях [7]. Наконец, в связи с развитием модели ортогональных условий (ОСМ) [8] оказалось целесообразным вводить в динамические уравнения операторы проектирования на запрещенные состояния с последующим исключением этих состояний из волновой функции ядерной системы [9].

Стандартный вариант МРГ обеспечивает точный учет принципа Паули. Однако довольно трудно выделить обязанный оператору антисимметризации вклад в волновую функцию и в S -матрицу рассеяния, обращаясь к уравнениям этого подхода, записанным в координатном представлении.

Наиболее прозрачный путь учета принципа Паули состоит в построении полного базиса разрешенных состояний гармонического осциллятора и

их собственных значений с тем, чтобы волновые функции ядерной системы представить в виде линейных суперпозиций разрешенных состояний и свести задачу их определения к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения. Полезно также, для проверки целого ряда положений, касающихся элементов S -матрицы рассеяния, иметь полный базис запрещенных состояний, собственные значения которых по определению равны нулю.

Особенно простой вид разрешенные и запрещенные состояния имеют в пространстве Фока–Баргманна [10] (фактически в пространстве соответствующим образом определенных комплексных генераторных параметров), где число независимых переменных базисных функций сокращается до минимума. Если в координатном представлении волновая функция какого-либо состояния дает нам распределение вероятности по координатам, а волновая функция импульсного представления приводит нас к распределению вероятности по импульсам, то в представлении Фока–Баргманна независимыми переменными волновой функции становятся и координаты нуклонов, и импульсы, а функция распределения определена в фазовом пространстве. Иными словами, зная волновую функцию того или иного состояния в представлении Фока–Баргманна, можно найти вероятность распределения по фазовым траекториям в этом состоянии или фазовый портрет состояния. Переход от волновой функции координатного или импульсного представления к волновой функции представления Фока–Баргманна осуществляется с помощью интегрального преобразования, ядром которого являются модифицированные орбитали Блоха–Бринка [11].

Заметим, что представление Фока–Баргманна отнюдь не эквивалентно АМД, так как при каждом значении энергии и других квантовых чисел АМД дает лишь одну фазовую траекторию, а не вероятность распределения по континууму фазовых траекторий, как представление Фока–Баргманна. АМД является классическим пределом для представления Фока–Баргманна, когда среди множества фазовых траекторий можно выделить наиболее вероятную и близкую к траектории АМД при той же энергии.

Дискретный базис разрешенных состояний не является препятствием для исследования состояний непрерывного спектра ядерных систем. Коэффициенты разложения волновых функций атомных ядер по этому базису удовлетворяют простым асимптотическим соотношениям и правильно воспроизводят как экспоненциальное затухание волновых функций связанных состояний вне области действия ядерных сил, так и слабо затухающие осцилляции волновых функций непрерывного спектра, в том числе и с учетом кулоновского взаимодействия.

Собственные значения разрешенных состояний для многих бинарных систем были вычислены в работах [12, 13], в которых обсуждались значительные упрощения, связанные с использованием дискретного представления ба-

зиса гармонического осциллятора в пространстве генераторных координат. Однако затем, чтобы решить уравнения МРГ, выполнялось преобразование, возвращающее ядро нормировки и ядро гамильтониана в координатное пространство. Между тем для выполнения реальных расчетов нет необходимости переходить от матричных элементов и волновых функций дискретного варианта МГК к матричным элементам и волновым функциям МРГ. Проще все вычисления, и в том числе решение динамических уравнений МРГ, выполнять в пространстве Фока–Баргманна — пространстве генераторных координат. Что же касается возвращения в координатное пространство, то его уместно осуществлять уже после того, как получено решение в пространстве Фока–Баргманна. Эта находка существенно упрощает все вычисления.

Количество запрещенных состояний, как и величины собственных значений разрешенных состояний, непосредственно влияет на структуру волновых функций дискретного и непрерывного спектра. Так, число запрещенных состояний определяет радиус той области самых малых расстояний между кластерами, где подавлены волновые функции, по крайней мере, пока энергия последних не превысит некоторого предельного значения. Она будет тем больше, чем больше нуклонов входит в состав каждого кластера. Что же касается собственных значений разрешенных состояний, то от них зависит поведение волновых функций вне той области, где они подавлены запрещенными состояниями. Собственные значения формируют эффективный потенциал взаимодействия кластеров, появление которого обязано оператору антисимметризации и от которого зависит, какими будут коэффициенты разложения волновой функции по базису разрешенных состояний.

Поведение собственных значений в зависимости от числа осцилляторных квантов известно. Все они стремятся к единице, когда число квантов ν превышает некоторое ν_{\max} , указывающее на границу области действия оператора антисимметризации.

Наибольшие собственные значения (классифицированные с помощью индексов $SU(3)$ -симметрии и дополнительных квантовых чисел в случае вырождения) соответствуют базисным состояниям лидирующих $SU(3)$ -неприводимых представлений. Амплитуды последних максимальны для состояний дискретного спектра системы кластеров и доминируют в состояниях непрерывного спектра с малой надпороговой энергией.

Эффективное взаимодействие, обусловленное действием принципа Паули, появляется прежде всего как результат модификации матрицы оператора кинетической энергии, которая имеет трехдиагональный вид в представлении базиса гармонического осциллятора. Из-за действия оператора антисимметризации недиагональные элементы этой матрицы содержат собственные значения разрешенных состояний. Именно благодаря этому обстоятельству обращаются в нуль матричные элементы, связывающие разрешенные и запрещенные состояния, а фаза рассеяния оказывается отличной от нуля даже в отсут-

ствие кластер-кластерного взаимодействия, порождаемого нуклон-нуклонным потенциалом. Амплитуда изменения фазы пропорциональна числу запрещенных состояний, и она тем больше, чем интенсивнее эффективный потенциал и чем больше его радиус.

Используя базис гармонического осциллятора для построения разрешенных состояний, можно непосредственно судить о характере кластер-кластерного взаимодействия, обусловленного обменом нуклонов в процессе сближения кластеров. Анализ матрицы оператора кинетической энергии относительного движения кластеров показывает, что влияние принципа Паули на процесс столкновения кластеров сводится к трем эффектам.

Во-первых, устранение запрещенных состояний создает эффективное отталкивание на малых расстояниях между кластерами (мягкий кор), радиус действия и интенсивность которого возрастают с увеличением числа запрещенных принципом Паули состояний. Волновые функции относительного движения кластеров в этой области подавлены, причем тем сильнее, чем больше число запрещенных состояний и чем меньше энергия состояний непрерывного спектра. Об интенсивности мягкого кора можно судить, имея в своем распоряжении отличающиеся значением энергии фазовые портреты состояний непрерывного спектра. Как только энергия относительного движения кластеров начинает превосходить высоту кора, среди фазовых траекторий появляются такие, которые соответствуют проникновению кластеров в классически недоступную область.

Во-вторых, вне мягкого кора (в той области, где собственные значения разрешенных состояний отличны от единицы) появляется дополнительное эффективное взаимодействие кластеров. В том случае, когда собственные значения стремятся к единице снизу, дополнительное взаимодействие тоже оказывается отталкиванием. Если же собственные значения стремятся к единице сверху, то взаимодействие вне мягкого кора является притяжением.

В-третьих, в этой же области собственные значения усиливают центростремительный потенциал в системе двух кластеров, если они превышают единицу, или ослабляют его, если они меньше единицы.

Если сталкивающиеся кластеры содержат нуклоны в открытой p -оболочке, уместно привлечь разрешенные состояния, передающие не только относительное движение кластеров, но и их возбуждение. В результате мы приходим к многоканальной задаче, когда становится возможным изучать и упругие столкновения кластеров, и ядерные реакции, сопровождающиеся возбуждением кластеров. Так как пороговые энергии разных каналов различаются, то существует область энергий, где наряду с открытыми каналами имеются и закрытые. Поэтому представляет интерес исследование зависимости от энергии асимптотических нормировочных констант, характеризующих амплитуду волновых функций в закрытых каналах. Это было предметом работы [14].

Для каждой из составных ядерных систем можно указать несколько кластерных конфигураций, каждая из которых соответствует тому или иному набору кластеров, освобождающихся в результате ядерной реакции. Принимая во внимание разные кластерные конфигурации, мы выходим за рамки традиционного бинарного МРГ и существенно уточняем волновую функцию ядерной системы на малых расстояниях между кластерами, что заметно понижает энергию основного состояния составного ядра и обогащает его спектр. Конечно, волновая функция уточняется и на больших расстояниях, где возрастает количество открытых каналов и, следовательно, число неупругих процессов, реализующихся в ядерных столкновениях.

Далее в разд. 1 дано определение производящей функции, генерирующей полный базис разрешенных принципом Паули базисных функций в координатном пространстве и в пространстве Фока–Баргманна. Там же вводится интеграл перекрытия генераторных функций, который объявляется ядром интегрального уравнения. Обращение к этому интегральному уравнению решает вопрос о построении в явном виде разрешенных базисных функций, чтобы затем вывести систему алгебраических уравнений дискретного представления для реализации метода резонирующих групп. В той же главе поясняются пути решения этой системы алгебраических уравнений. В разд. 2 обсуждаются общие положения, касающиеся зависимости фазовых сдвигов от энергии, и в частности те, которые связаны с обобщенной теоремой Левинсона. В разд. 3 рассматривается вопрос о влиянии принципа Паули на структуру матрицы оператора кинетической энергии. В разд. 4 дискретное представление метода резонирующих групп используется для анализа относительно простых одноканальных систем. Наконец, в разд. 5 внимание сосредоточено на многоканальных бинарных системах с избытком нейтронов.

1. ФОРМУЛИРОВКА ПОДХОДА

1.1. В чем состоит приближение. Следуя методу резонирующих групп, далее будем полагать, что исследуемые нами ядерные системы состоят из двух кластеров. Волновая функция МРГ строится в виде антисимметризованного произведения внутренних волновых функций кластеров и волновой функции их относительного движения. Внутренние волновые функции кластеров фиксированы*, а волновую функцию относительного движения кластеров, которая зависит только от вектора Якоби исследуемой бинарной системы, находят в результате решения интегродифференциального уравнения. По-

*В качестве таких функций часто выбирают функции трансляционно-инвариантной модели оболочек.

следнее получают путем подстановки волновой функции МРГ в уравнение Шредингера и интегрирования по одночастичным координатам.

Как уже упоминалось выше, практическая реализация традиционной версии МРГ требует преодоления огромных вычислительных трудностей, которые неизбежно возникают из-за влияния принципа Паули, приводящего к появлению большого количества обменных слагаемых. Сокращение числа независимых динамических переменных возможно на основе метода генераторной координаты, подразумевающего переход от координатного (или импульсного) представления к представлению генераторных параметров.

Исходным пунктом МГК является определение генераторной функции, содержащей полный базис разрешенных принципом Паули состояний $\psi_n(\{\mathbf{r}\})$, определенных в координатном пространстве, а также их образов $\psi_n(\{\mathbf{R}\})$ в пространстве генераторных координат. Здесь $\{\mathbf{r}\}$ — совокупность нуклонных векторов, а $\{\mathbf{R}\}$ — набор генераторных параметров, с помощью которых мы бы хотели передать динамику интересующих нас степеней свободы; n — совокупность квантовых чисел базисных функций. Конечно, генераторная функция должна быть антисимметричной относительно перестановки нуклонных координат. Поэтому будем строить ее в виде детерминанта Слейтера $\Phi(\{\mathbf{R}\}, \{\mathbf{r}\})$, составленного из нуклонных орбиталей. В качестве пространственных волновых функций нуклонов ядра выберем модифицированные орбитали Блоха–Бринка, одновременно являющиеся производящими функциями базиса гармонического осциллятора. Если один из кластеров содержит A_1 нуклонов, а второй — A_2 нуклонов и $A_1, A_2 \leq 4$, то достаточно двух s -орбиталей:

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{r}_i) &= \frac{1}{\pi^{3/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{r}_i^2 + \sqrt{2}(\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_1^2\right), \quad i \in A_1; \\ \phi_2(\mathbf{r}_i) &= \frac{1}{\pi^{3/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{r}_i^2 + \sqrt{2}(\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{1}{2}\mathbf{R}_2^2\right), \quad i \in A_2.\end{aligned}$$

Каждая из этих орбиталей является собственной функцией оператора координаты $\hat{\mathbf{r}}_i$:

$$\hat{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{R}_k + \nabla_{\mathbf{R}_k}), \quad k = 1, 2,$$

определенного в пространстве Фока–Баргманна и соответствующего собственному значению \mathbf{r}_i . К тому же она представляет собой ядро интегрального преобразования от координатного представления к представлению Фока–Баргманна [10], в котором независимыми переменными являются комплексные векторы

$$\mathbf{R} = \frac{\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}}{\sqrt{2}}.$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ — векторы координаты и импульса соответственно.

Если же один из кластеров (или оба) содержит нуклоны в p -оболочке, то кроме приведенных выше орбиталей приходится привлекать орбитали следующего вида:

$$\phi_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \sqrt{2} (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{r}_i) \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_i^2}{2} + \sqrt{2}(\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{\mathbf{R}_k^2}{2}\right), \quad k = 1, 2;$$

$$\phi_{\mathbf{v}_k}(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \sqrt{2} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_i) \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_i^2}{2} + \sqrt{2}(\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{\mathbf{R}_k^2}{2}\right), \quad k = 1, 2.$$

Здесь генераторные параметры \mathbf{R}_k указывают положение центра масс каждого из кластеров, а параметры \mathbf{u}_k , \mathbf{v}_k введены для описания их внутренних степеней свободы. Далее в этом разделе для простоты изложения будем рассматривать ядерные бинарные системы, составленные из s -кластеров, когда остается только два генераторных параметра — \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 .

Полный базис разрешенных принципом Паули состояний в пространстве Фока–Баргманна вместе с их собственными значениями можно получить, обратившись к интегралу перекрытия $\bar{I}(\mathbf{S}_k, \mathbf{R}_k)$ двух детерминантов Слейтера, который определяют следующим образом:

$$\bar{I}(\mathbf{S}_k, \mathbf{R}_k) = \int \Phi(\mathbf{S}_k, \{\mathbf{r}\}) \Phi(\mathbf{R}_k, \{\mathbf{r}\}) d\tau.$$

Здесь интегрирование проводится по всем одночастичным переменным.

Движение центра масс устраняется путем перехода от векторов $\mathbf{R}_{1,2}$ к векторам Якоби:

$$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}} (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad \mathbf{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{\sqrt{A}} (A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2).$$

Тогда

$$\bar{I}(\mathbf{S}_k, \mathbf{R}_k) = \exp(\mathbf{R}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{S}_{\text{cm}}) I(\mathbf{S}, \mathbf{R}),$$

где $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ — трансляционно-инвариантный интеграл перекрытия, который обычно называют ядром нормировки.

1.2. Дискретный базис в пространстве Фока–Баргманна и условие его полноты. Разрешенные базисные функции $\psi(\mathbf{R})$ являются собственными функциями ядра нормировки, и их можно найти, решая интегральное уравнение

$$\Lambda \psi(\mathbf{R}) = \int I(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \psi(\mathbf{S}^*) d\mu_{\mathbf{S}}. \quad (1)$$

Здесь $d\mu_{\mathbf{S}}$ — мера Баргманна:

$$d\mu_{\mathbf{S}} = \exp\{-(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^*)\} d\xi d\eta.$$

Остается вопрос о выборе квантовых чисел n базисных функций $\psi_n(\mathbf{R})$. В качестве одного из них целесообразно взять полное число осцилляторных квантов ν . После этого интегродифференциальное уравнение традиционной версии МРГ для волновой функции относительного движения кластеров удастся свести к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения по базису состояний гармонического осциллятора, разрешенных принципом Паули. Кроме того, ядро нормировки $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ можно представить в виде суммы вырожденных ортогональных ядер, каждому из которых соответствует определенное число квантов. Поэтому решение уравнения (1) осуществляется стандартными алгебраическими методами для вырожденных ядер.

Для полного описания собственных функций ядра нормировки, кроме числа осцилляторных квантов ν , необходимо указать индексы (λ, μ) их $SU(3)$ -симметрии, дополнительное квантовое число $\alpha_{(\lambda, \mu)}$, если есть несколько различных (λ, μ) -мультиплетов, орбитальный момент L , его проекцию M и еще одно дополнительное квантовое число α_L , если (λ, μ) -мультиплет имеет несколько состояний с одинаковыми значениями L .

Так как ядро нормировки $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ можно рассматривать также как ядро интегрального уравнения (1), ему можно сопоставить разложение Гильберта–Шмидта:

$$I(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = \sum_n \Lambda_n \psi_n(\mathbf{S}) \psi_n(\mathbf{R}), \quad (2)$$

где каждое из Λ_n — собственное значение ядра нормировки, отвечающее собственной функции $\psi_n(\mathbf{R})$.

В такой записи $\psi_n(\mathbf{S})\psi_n(\mathbf{R})$ есть свертка двух тензоров, а $\psi_n(\mathbf{R})$ — волновой пакет $SU(3)$ -неприводимого представления (λ, μ) , или, иначе, многокомпонентный тензор. Конечно, собственные функции ядра нормировки ортогональны с мерой Баргманна и нормированы на число состояний неприводимого представления (λ, μ) [15]:

$$\int d\mu_{\mathbf{R}} \psi_{(\lambda, \mu)}(\mathbf{R}) \psi_{(\lambda, \mu)}(\mathbf{R}^*) = \frac{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\lambda + \mu + 2)}{2}.$$

Такая нормировка соответствует статистической интерпретации ядра $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ как матрицы плотности смешанной системы [16]. Хотя при построении ядра нормировки интегрирование проводится по всем одночастичным переменным, но генераторные параметры \mathbf{R} и \mathbf{S} производящих функций $\Phi(\mathbf{R}, \{\mathbf{r}\})$ и $\Phi(\mathbf{S}, \{\mathbf{r}\})$ имеют смысл тех степеней свободы, динамика которых изучается

на фоне степеней свободы, волновые функции фиксированы и их уместно отнести к степеням свободы «термостата». По этой причине собственные значения ядра нормировки естественно рассматривать как элементы матрицы плотности, приведенной к диагональному виду. Они пропорциональны вероятности пребывания системы в состояниях, определяемых соответствующими собственными функциями.

Важно отметить, что ядро нормировки будет иметь диагональный вид только при условии $SU(3)$ -классификации собственных значений $\Lambda_{n,(\lambda,\mu)}$ и собственных функций $\psi_{n,(\lambda,\mu)}(\mathbf{R})$. Так, например, сохранив в качестве квантового числа ν , можно вместо индексов $SU(3)$ -симметрии (λ, μ) ввести квантовые числа базиса углового момента («физического» базиса) — орбитальные моменты каждого из кластеров l_1, l_2 , а также момент их относительного движения l (см., например, [11, 14]). Функции $SU(3)$ -базиса и функции физического базиса связаны матрицей унитарного преобразования. Но любое унитарное преобразование, выполненное над базисными функциями $\psi_n(\mathbf{R})$, с необходимостью разрушает диагональную форму ядра $I(\mathbf{S}, \mathbf{R})$, так как собственные значения $\Lambda_{n,(\lambda,\mu)}$ отличны от единицы в некоторой области* $\nu_{\min} < \nu < \nu_{\max}$. В пределе же большого числа квантов все собственные значения стремятся к единице. Поэтому ядро интегрального уравнения (1) к тому же еще и особое, так как точка сгущения его собственных значений конечна [17]. Заметим, что собственные значения не зависят от индексов редукции $SU(3) \supset O(3)$, т. е. от орбитального момента L и его проекций на собственную K и внешнюю M оси.

Собственные значения оказываются отличными от нуля, начиная с некоторого минимального числа квантов ν_{\min} . В случае учета лишь бинарной кластеризации при $\nu = \nu_{\min}$ есть только один разрешенный $SU(3)$ -мультиплет (λ_0, μ_0) , соответствующий схеме Эллиотта для спектра трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек, порождаемого лидирующим представлением [18]. Однако, кроме ортонормированного базиса этой схемы, мы находим еще и собственное значение $\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0)}$. Если расчеты ведутся лишь в рамках базиса лидирующего представления, то это собственное значение не влияет на реальные результаты расчетов. Оно вступает в игру, когда мы не ограничиваемся мультиплетом (λ_0, μ_0) и привлекаем все другие мультиплеты с числом квантов $\nu > \nu_{\min}$ вместе с их собственными значениями.

Сначала остановимся на вопросе классификации $SU(3)$ -мультиплетов, ограничившись бинарной кластеризацией и $SU(3)$ -неприводимыми представлениями с четными индексами симметрии** λ и μ . Когда $\nu = \nu_{\min} + 2$, то

*Размеры этой области определяются прежде всего количеством нуклонов в каждом из кластеров.

**Иными словами, ограничившись состояниями, D_2 -симметрия которых A .

разрешенные состояния принадлежат нескольким (в простейшем случае — двум) неприводимым представлениям $(\lambda_0 + 2, \mu_0)$ и $(\lambda_0, \mu_0 + 4)$. Вместе с ними появляются два их собственных значения $\Lambda_{(\lambda_0+2, \mu_0)}$ и $\Lambda_{(\lambda_0, \mu_0+4)}$. С увеличением ν число разрешенных $SU(3)$ -неприводимых представлений растет, пока не станет максимально допустимым и одинаковым для всех ν , начиная с некоторого значения ν_1 .

Неприводимые представления с разным числом квантов можно распределить между несколькими ветвями так, чтобы принадлежащие одной ветви состояния имели одинаковое значение индекса симметрии μ и отличались только значениями первого индекса λ . Так, к первой ветви мы отнесем неприводимые представления $(\lambda_0 + \nu - \nu_{\min}, \mu_0)$, ко второй — неприводимые представления $(\lambda_0 + \nu - \nu_{\min} - 2, \mu_0 + 4)$ и т. д. Иерархия среди этих неприводимых представлений определяется величиной собственных значений $\Lambda_{\nu, (\lambda, \mu)}$. Лидирующими представлениями являются те, у которых значения $\Lambda_{\nu, (\lambda, \mu)}$ максимальны. В частности, к ним относятся представления $(\lambda_0 + \nu - \nu_{\min}, \mu_0)$.

Для многих известных нам систем (например, ${}^8\text{He} + {}^4\text{He}$ и ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$), хотя и не для всех, ветви $(\lambda_0 + \nu - \nu_{\min}, \mu_0)$ соответствуют наименее симметричные $SU(3)$ -представления, а наиболее симметричные представления появляются, когда $\nu = \nu_1$. В случае трехкластерной системы или системы с большим числом кластеров число разрешенных $SU(3)$ -неприводимых представлений неограниченно растет с увеличением ν .

Разложение (2) можно также трактовать как условие полноты базиса разрешенных принципом Паули состояний в пространстве Фока–Баргманна. В самом деле, в координатном представлении условие полноты для базиса ортонормированных функций $\varphi_n(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) \varphi_n^*(\mathbf{r}').$$

В пространстве Фока–Баргманна образ дельта-функции — это интеграл перекрытия модифицированных орбиталей Блоха–Бринка, равный $\exp(\mathbf{RS})$, поэтому условие полноты для базисных функций $f_n(\mathbf{R})$ (образов функций $\varphi_n(\mathbf{r})$) принимает следующую форму:

$$\exp(\mathbf{RS}) = \sum_n f_n(\mathbf{R}) f_n(\mathbf{S}). \quad (3)$$

Разложение Гильберта–Шмидта (2) в двух отношениях отличается от выражения (3). Во-первых, (2) содержит только разрешенные принципом Паули состояния*. Во-вторых, как уже упоминалось выше, функции $\psi_{\{n\}}(\mathbf{R})$ определяются однозначно, в отличие от $f_n(\mathbf{R})$, которые определены с точностью

*Собственные значения запрещенных состояний по определению равны нулю и потому не содержатся в ядре нормировки.

до унитарного преобразования, оставляющего квадратичную форму (3) диагональной.

1.3. Решение системы уравнений дискретного представления. После того как построены производящие инварианты $\Phi(\mathbf{S}, \{\mathbf{r}\})$ и $\Phi(\mathbf{R}, \{\mathbf{r}\})$, подлежащую определению волновую функцию $\Phi(\{\mathbf{r}\})$ метода генераторной координаты представим в виде интеграла Хилла–Уиллера

$$\Phi(\{\mathbf{r}\}) = \int C(\mathbf{R}^*) \Phi(\mathbf{R}, \{\mathbf{r}\}) d\mu_{\mathbf{R}},$$

содержащего новую неизвестную функцию $C(\mathbf{R}^*)$. Уравнение для последней следует из вариационного принципа для функционала

$$\int \int C(\mathbf{S}^*) [H(\mathbf{S}, \mathbf{R}) - EI(\mathbf{S}, \mathbf{R})] C(\mathbf{R}^*) d\mu_{\mathbf{S}} d\mu_{\mathbf{R}} = 0, \quad (4)$$

где множитель Лагранжа E имеет смысл энергии, а $H(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ — ядро гамильтониана рассматриваемой системы кластеров. Его также можно представить в виде разложения по разрешенным базисным функциям

$$H(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = \int \Phi(\mathbf{S}, \mathbf{r}) \hat{H} \Phi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) d\tau = \sum_n \sum_{\tilde{n}} \psi_n(\mathbf{S}) \langle n | \hat{H} | \tilde{n} \rangle \psi_{\tilde{n}}(\mathbf{R}). \quad (5)$$

Чтобы свести функционал (4) к алгебраическому выражению, разложим неизвестные функции $C(\mathbf{R}^*)$ [$C(\mathbf{S}^*)$] по базису разрешенных состояний:

$$C(\mathbf{R}^*) = \sum_n C_n^* \psi_n(\mathbf{R}^*), \quad C(\mathbf{S}^*) = \sum_{\tilde{n}} C_{\tilde{n}} \psi_{\tilde{n}}(\mathbf{S}^*).$$

Воспользовавшись разложениями (2) и (5) для ядра нормировки и ядра гамильтониана соответственно, а также ортонормированностью разрешенных собственных функций, приходим к следующему выражению:

$$\sum_n \sum_{\tilde{n}} C_n^* \left(\langle n | \hat{H} | \tilde{n} \rangle - E \Lambda_n \delta_{n, \tilde{n}} \right) C_{\tilde{n}} = 0. \quad (6)$$

Из (6) следует, что коэффициенты $C_{\tilde{n}}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\sum_{\tilde{n}} \langle n | \hat{H} | \tilde{n} \rangle C_{\tilde{n}} - E \Lambda_n C_n = 0. \quad (7)$$

Конечно, n принимает все допустимые для разрешенных базисных функций значения.

Явный вид системы уравнений (7) указывает на то, что коэффициенты C_n являются собственными векторами обобщенной задачи на собственные значения [19]. Поэтому собственные векторы разных состояний ортогональны и нормированы с весом Λ_n :

$$\sum_n \Lambda_n C_n^{\kappa*} C_n^{\kappa'} = \delta_{\kappa, \kappa'}, \quad \sum_n \Lambda_n C_n^{E*} C_n^{E'} = \delta(E - E'), \quad \sum_n \Lambda_n C_n^{\kappa*} C_n^E = 0.$$

Здесь C_n^κ — собственные векторы дискретных состояний с энергией $E_\kappa = -\kappa^2/2 < 0$, а C_n^E — собственные векторы состояний непрерывного спектра с энергией $E > 0$.

С увеличением числа радиальных квантов $\nu = 2k$ компоненты собственных векторов дискретных состояний бинарной кластерной системы убывают экспоненциально:

$$C_n^\kappa = A_n^\kappa \frac{\sqrt{2} \exp\{-\sqrt{2|E_\kappa|}\sqrt{4k+2l+3}\}}{\sqrt{r_0} \sqrt{4k+2l+3}}.$$

Здесь n — квантовые числа «физического» базиса; l — орбитальный момент относительного движения кластеров; r_0 — осцилляционная длина; A_n^κ — асимптотическая нормировочная константа [20].

Асимптотическое поведение собственных векторов для состояний непрерывного спектра $\{C_n^E\}$ при больших значениях числа квантов ν выражается через функции Ханкеля первого и второго рода и элементы S -матрицы рассеяния или же через функции Бесселя и Неймана и элементы K -матрицы [11, 14].

Переопределим коэффициенты разложения $C_{\bar{n}}$, положив $\bar{C}_{\bar{n}} = \sqrt{\Lambda_{\bar{n}}} C_{\bar{n}}$. Тогда придем к эквивалентной форме уравнений (7):

$$\sum_{\bar{n}} \frac{\langle n | \hat{H} | \bar{n} \rangle}{\sqrt{\Lambda_n \Lambda_{\bar{n}}}} \bar{C}_{\bar{n}} - E \bar{C}_n = 0. \quad (8)$$

Конечно, решением как (7), так и (8) будут волновые функции $\Psi_\kappa(\mathbf{R})$, $\Psi_E(\mathbf{R})$ в пространстве Фока–Баргманна или же функции $\Psi_\kappa(\mathbf{r})$, $\Psi_E(\mathbf{r})$ в координатном представлении:

$$\Psi_{\kappa(E)}(\mathbf{R}) = \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^{\kappa(E)} \psi_n(\mathbf{R}), \quad \Psi_{\kappa(E)}(\mathbf{r}) = \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^{\kappa(E)} \psi_n(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Отметим, что в разложениях (9) участвуют одни и те же коэффициенты C_n^κ и C_n^E .

1.4. Плотность функции распределения в фазовом пространстве. Матрица плотности в представлении Фока–Баргманна определяется выражением

$$\rho(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = \sum_{\kappa} \left\{ \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^{\kappa*} \psi_n(\mathbf{S}) \sum_{\bar{n}} \sqrt{\Lambda_{\bar{n}}} C_{\bar{n}}^{\kappa} \psi_{\bar{n}}(\mathbf{R}) \right\} + \int dE \left\{ \sum_n \sqrt{\Lambda_n} C_n^*(E) \psi_n(\mathbf{S}) \sum_{\bar{n}} \sqrt{\Lambda_{\bar{n}}} C_{\bar{n}}(E) \psi_{\bar{n}}(\mathbf{R}) \right\}. \quad (10)$$

Сумма соответствует дискретным состояниям, а интеграл — непрерывному спектру. Эта матрица плотности дает нам информацию о поведении плотности функции распределения $\rho(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ в фазовом пространстве. Заметим, что в выражении (10) независимых переменных гораздо меньше, чем у функции распределения в координатном пространстве* $\rho(\mathbf{r})$, и проблема анализа функции $\rho(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ уже не представляется непреодолимой. В этом и состоит преимущество метода генераторной координаты вообще и представления Фока–Баргманна в частности. Представление Фока–Баргманна дает нам, таким образом, простейшее средство реализации метода генераторной координаты и открывает новые перспективы для анализа функций распределения кластерных систем.

После интегрирования по фазовому пространству приведенная к диагональному виду матрица плотности системы взаимодействующих кластеров (10), если все состояния системы дискретны, сводится к сумме

$$\int \rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}^*) d\mu_{\mathbf{R}} = \sum_{\kappa} \sum_n |C_n^{\kappa}|^2 \Lambda_n,$$

где

$$(C_n^{\kappa})^2 \Lambda_n = \left| \int \psi_n(\mathbf{R}^*) \Psi_{\kappa}(\mathbf{R}) d\mu_{\mathbf{R}} \right|^2$$

есть вероятность реализации состояния $\psi_n(\mathbf{R})$ в волновой функции системы кластеров $\Psi_{\kappa}(\mathbf{R})$.

Когда число квантов ν велико, информацию о поведении функции $\Psi(\mathbf{r})$ при больших значениях модуля вектора Якоби $|\mathbf{q}|$ можно получить непосредственно из коэффициентов $\{\sqrt{\Lambda_n} C_n\}$, поскольку справедливо асимптотическое соотношение**

$$\Psi(|\mathbf{q}| = r_{\nu}) = \frac{\sqrt{\Lambda_n} C_n}{\sqrt{2r_0}(2\nu + 2l + 3)^{1/4}}, \quad (11)$$

*Напомним, что под \mathbf{r} мы понимаем совокупность нуклонных векторов $\{\mathbf{r}\}$.

**Напомним, что число квантов ν — это лишь одно из квантовых чисел, содержащихся в индексе n .

где $r_\nu = r_0\sqrt{2\nu + 2l + 3}$ — точка поворота в поле $r^2/2$ гармонического осциллятора с энергией $\nu + l + 3/2$.

Чтобы понять происхождение этого соотношения, достаточно вспомнить о δ -образном поведении функций гармонического осциллятора с большим значением ν в окрестности точки поворота:

$$\psi_{\nu l}(r)r^{3/2} \simeq \sqrt{2}\delta(r - r_\nu).$$

Следовательно, асимптотическая оценка плотности функции распределения при больших $|\mathbf{q}|$ имеет вид

$$\rho(|\mathbf{q}| = r_\nu) \sim \Lambda_n \frac{|C_n|^2}{2r_\nu}. \quad (12)$$

Оценка (12) полезна при анализе сходимости разложения волновой функции, когда надо убедиться, что, несмотря на обращение к дискретному представлению гармонического осциллятора, сходимость имеет место и для связанных состояний, и для состояний непрерывного спектра.

1.5. Дискретное представление и непрерывный спектр. На тот факт, что дискретные представления удается приспособить для решения задач непрерывного спектра, впервые было указано в работе [21]. Далее нас будет интересовать специальный случай дискретного представления — ортонормированный базис разрешенных принципом Паули состояний гармонического осциллятора, определенный в пространстве Фока–Баргманна, где базисные функции имеют особенно простой вид и выражаются через степени комплексных векторов. Поэтому волновые функции рассматриваемого нами дискретного представления сводятся к степенным рядам, радиус сходимости которых бесконечно большой. Справедливость этого утверждения обеспечивается тем, что все волновые функции в пространстве Фока–Баргманна являются целыми и аналитическими, а потому их ряды по степеням комплексных векторов сходятся в любой конечной области комплексного пространства.

Часто при оценке возможности использовать дискретный базис гармонического осциллятора, чтобы решить задачи непрерывного спектра, возникает недоразумение, обязанное своим происхождением замечанию о том, что реальные волновые функции и функции базиса гармонического осциллятора имеют кардинально различную асимптотику. Если первые с увеличением радиуса r убывают весьма медленно, обратно пропорционально его первой степени, то вторые убывают экспоненциально, как $\exp(-r^2/2)$. Чтобы понять, в какой степени это замечание относится к проблеме сходимости и ставит ли ее под сомнение, обратимся к разложению волновой функции непрерывного спектра (состояния с нулевым орбитальным моментом) с энергией $E = k^2/2$

по базису гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\pi}}j_0(kr) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin kr}{kr} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(k)(-1)^n \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}} L_n^{1/2}(r^2) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Здесь n — радиальное число осцилляторных квантов; $L_n^{1/2}(r^2)$ — полином Лагерра, а для коэффициентов разложения справедливо выражение

$$C_n(k) = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}} L_n^{1/2}(k^2) \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right).$$

Теперь мы можем сравнить известную нам сумму ряда, т.е. сферическую функцию Бесселя $\sqrt{2/\pi}j_0(kr)$, и ее приближенное значение, соответствующее частичным суммам

$$\sum_{n=0}^{n_0} C_n(k)(-1)^n \sqrt{\frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}} L_n^{1/2}(r^2) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad (13)$$

для $n_0 = 25$ и $n_0 = 50$. Пусть $k = 2$, $r \geq 1$. Иначе говоря, мы полагаем, что асимптотическая область соответствует таким значениям радиуса,

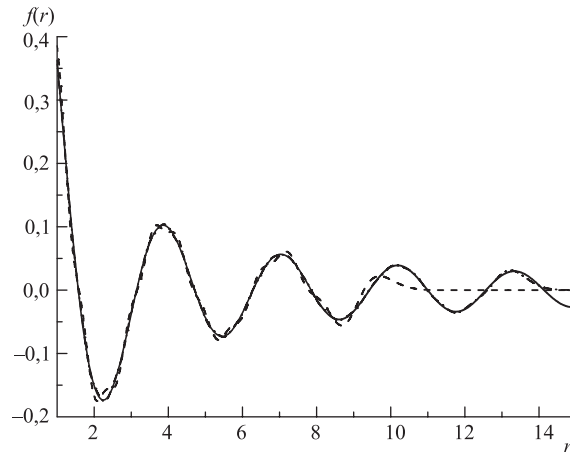


Рис. 1. Аппроксимация волновой функции непрерывного спектра с энергией $E = k^2/2$, $k = 2$, разложениями по дискретному базису с числом базисных функций n_0 . Сплошная кривая — точная функция; штриховая — $n_0 = 25$; штрихпунктирная — $n_0 = 50$

которые превосходят единицу. Как видно из рис. 1, даже при $n_0 = 25$ асимптотическое поведение волновой функции непрерывного спектра правильно передается вплоть до $r \sim r_{n_0} = \sqrt{4n_0 + 3}$, где r_{n_0} — точка поворота в поле гармонического осциллятора. С увеличением числа базисных функций n_0 увеличивается и область, на которой точная волновая функция хорошо аппроксимируется частичной суммой (13). Так, при $n_0 = 50$ удается воспроизвести волновую функцию на интервале $1 < r < 14$, а при $n_0 = 25$ — только до $r \sim 10$. Кроме того, увеличение числа базисных функций позволяет уточнить поведение волновой функции во внутренней области $r < r_{n_0}$.

При построении волновой функции координатного представления для короткодействующих сил вне области их действия используется известная асимптотика, чтобы затем сшить ее с волновой функцией, полученной в результате интегрирования уравнения Шредингера в области действия ядерных сил. По аналогии с этой процедурой реализация представления Фока–Баргманна вовсе не предполагает необходимости знать волновую функцию всюду в комплексном пространстве. Достаточно лишь несколько выйти за границу области действия ядерных сил и оператора антисимметризации и потребовать, чтобы там коэффициенты разложения принимали предельные асимптотические значения. Аналогию между координатным представлением и дискретным подчеркивает и тот факт, что асимптотические уравнения дискретного представления гармонического осциллятора, когда число квантов велико, принимают предельный вид уравнения Шредингера в координатном представлении. Последнее справедливо и в случае учета далекодействующих сил, например, кулоновских [22].

Чтобы найти коэффициенты разложения волновой функции по базису гармонического осциллятора, мы приходим к системе с бесконечным числом однородных уравнений. Однако эта система сводится к системе конечного числа неоднородных алгебраических уравнений, потому что для коэффициентов разложения известны асимптотические по числу осцилляторных квантов выражения, содержащие функции Ханкеля первого и второго рода на множестве дискретных точек и элементы S -матрицы рассеяния*. В итоге подлежат определению лишь элементы S -матрицы и коэффициенты разложения при относительно малых значениях числа квантов.

Классификация базисных состояний с помощью индексов $SU(3)$ -симметрии (λ, μ) упрощает вид алгебраических уравнений, но усложняет матрицу оператора кинетической энергии относительного движения кластеров. Между тем для физического базиса последняя имеет простую трехдиагональную форму. Функции физического базиса связаны только через оператор антисимме-

*Вместо функций Ханкеля иногда целесообразно использовать регулярное и нерегулярное решения разностного аналога уравнения Бесселя, т. е. функции Бесселя и Неймана.

тризации и эта связь убывает с ростом числа квантов экспоненциально, в отличие от функций базиса $SU(3)$, связь которых ослабевает обратно пропорционально числу квантов. По этой причине асимптотика коэффициентов разложения волновой функции по физическому базису выражается через функции Ханкеля и элементы S -матрицы, в то время как уравнения для $SU(3)$ -базиса остаются связанными даже в пределе большого числа квантов. Поэтому важной становится задача построения матрицы унитарного преобразования, связывающего физический базис с базисом $SU(3)$. После того как эта матрица определена, может быть немедленно установлено соответствие между известной асимптотикой коэффициентов разложения по физическому базису и асимптотикой коэффициентов разложения по базису $SU(3)$.

2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ ЗАВИСИМОСТИ ФАЗОВЫХ СДВИГОВ ОТ ЭНЕРГИИ

Коэффициенты разложения волновых функций по базису разрешенных принципом Паули состояний, собственные значения этих состояний, а также элементы S -матрицы рассеяния и ее собственные фазы содержат исчерпывающую информацию о непрерывном спектре составленных из кластеров ядерных систем, структуре их волновых функций, эффективных сечениях и угловых распределениях продуктов ядерных реакций с участием кластеров. При этом, кроме потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия, самым существенным образом на поведение элементов S -матрицы и собственных фаз влияют и разрешенные принципом Паули, и запрещенные состояния. Перечислим факторы, формирующие поведение коэффициентов разложения и собственных фаз.

Зависимость фаз рассеяния от энергии при изменении последней от нуля до бесконечности регулирует теорема Левинсона. Согласно этой теореме амплитуда изменения фазы рассеяния пропорциональна числу связанных состояний системы. Количество запрещенных состояний играет важную роль в связи с существованием обобщенной теоремы Левинсона. Обобщенная теорема Левинсона обращается не только к связанным состояниям, но и к запрещенным принципом Паули. В совокупности они и определяют амплитуду изменения фазы*. Теорема Левинсона есть следствие ортогональности состояний непрерывного спектра как состояниям дискретного спектра, так и всем запрещенным состояниям.

*Если нас интересует только величина эффективного сечения рассеяния, то при построении фазы можно ограничиться, например, интервалом $-\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2$. Однако тогда мы потеряем информацию о том, сколько у системы связанных или запрещенных состояний, и лишим себя возможности проверить, стремится ли фаза к нулю в пределе борновского приближения.

Итак, в отсутствие состояний дискретного спектра амплитуда изменения фазы рассеяния $\delta_l(E)$ определяется числом запрещенных состояний с орбитальным моментом l . Пусть $2k_0$ — минимальное число квантов, при котором реализуется первое разрешенное состояние. Тогда количество запрещенных состояний в этом канале, имеющих орбитальный момент $l < 2k_0$, равно $k_0 - l/2$, и

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = \pi \left(k_0 - \frac{l}{2} \right), \quad l/2 < k_0.$$

Уменьшение числа запрещенных состояний с ростом l есть следствие того факта, что построить запрещенное состояние с ненулевым l возможно только тогда, когда число квантов $2k \geq l$. При $l \geq 2k_0$ запрещенные состояния отсутствуют.

Изучение экспериментальных данных рассеяния уже для самых простых систем показало, что зависимость фазового сдвига от энергии действительно подчиняется теореме Левинсона. В частности, фазовый анализ столкновения двух α -частиц обнаружил, что характер изменения фаз α - α -рассеяния в зависимости от энергии можно объяснить как проявление обобщенной теоремы Левинсона. Так, непрерывное изменение S -фазы от значения 2π при нулевой энергии до нуля, когда энергия стремится к бесконечности, есть следствие того, что система имеет два запрещенных состояния с нулевым орбитальным моментом. Эти состояния соответствуют тому, что в s -оболочке оказалось шесть или восемь нуклонов, что запрещено принципом Паули. Поведение D -фазы указывает на существование одного запрещенного состояния с орбитальным моментом $l = 2$. Эта фаза непрерывно изменяется от π до нуля. Следовательно, число запрещенных состояний можно также извлечь из данных рассеяния посредством фазового анализа.

Ссылка на обобщенную теорему Левинсона потребовала выяснения формальных причин ее справедливости. Вопрос был поставлен так: какое уравнение Шредингера для относительного движения двух α -частиц воспроизводит наблюдаемую зависимость фаз рассеяния от энергии? Было предложено два варианта [23]. Первый вариант состоял в идее использовать сверхглубокий потенциал при том дополнительном условии, что связанные состояния в этом потенциале не имеют физического смысла, но моделируют запрещенные состояния, чтобы выполнялась теорема Левинсона. Второй вариант сводился к введению сингулярного отталкивания, которое в итоге также обеспечивало правильное поведение фазы в согласии с теоремой Левинсона. И в одном, и в другом случае вместо прямого решения микроскопических уравнений МРГ и анализа причин, ответственных за справедливость теоремы Левинсона, вводятся такие уравнения, в которых наблюдаемая в эксперименте зависимость фаз рассеяния от энергии воспроизводится с помощью специально

подобранных кластер-кластерных потенциалов. Эти потенциалы достаточно искусственные, чтобы на их основе выявить какие-либо фундаментальные закономерности, свойственные поведению фаз рассеяния и соответствующих им эффективных сечений. Между тем МРГ определяет не только характер оператора потенциальной энергии взаимодействия кластеров, но и влияет на формирование оператора кинетической энергии относительного движения кластеров. К чему приводит влияние антисимметризации на последний оператор, до сих пор не исследовалось.

Следует напомнить еще одну работу [6], в которой А. И. Базь и др. предположили, что за непрерывный спектр α - α и других систем ответственно взаимодействие в виде кора относительно большого радиуса и потенциала притяжения вне кора. К тому же отмечалось, что пока энергия относительного движения ядер остается малой, кор можно считать жестким. Однако вопрос о том, согласуются ли результаты работы [6] с теоремой Левинсона, остался без внимания.

Итак, есть две точки зрения на характер взаимодействия составных систем. Одна из них сводится к утверждению о существовании сверхглубокого потенциала, обеспечивающего выполнение теоремы Левинсона. Другая предполагает, что важной особенностью кластер-кластерного взаимодействия является существование жесткого кора. Между тем можно показать, что требования обобщенной теоремы Левинсона будут выполняться, если гамильтониан двух составных систем построен в полном соответствии с требованиями принципа Паули. Особенность матрицы гамильтониана МРГ, как и матриц потенциальной и кинетической энергии, состоит в том, что она не содержит матричных элементов, связывающих разрешенные состояния с запрещенными, и матричных элементов, связывающих только запрещенные состояния. Феноменологические гамильтонианы таким условиям не удовлетворяют.

В работе [25] матрица оператора кинетической энергии на разрешенных принципом Паули состояниях вместе с матрицей потенциальной энергии сил Волкова использовалась для расчета фаз α - α -рассеяния в рамках дискретного представления — алгебраической версии МРГ. Главное внимание в [25] было уделено проблеме непрерывного спектра в дискретном представлении, а тот факт, что найденные там фазы рассеяния удовлетворяют требованиям теоремы Левинсона, не обсуждался. Не изучался и вклад в фазы рассеяния от модифицированной принципом Паули матрицы кинетической энергии. Позже, вычислив собственные функции этой матрицы для простых систем, мы убедились, что, во-первых, фазы, порождаемые только модифицированным оператором кинетической энергии, ведут себя в согласии с теоремой Левинсона, и, во-вторых, они имеют тот же порядок величины, что и фазы, найденные с учетом потенциальной энергии.

3. ВЛИЯНИЕ ПРИНЦИПА ПАУЛИ НА ОПЕРАТОР КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Чтобы понять, как влияют запрещенные состояния на структуру волновых функций непрерывного спектра, удовлетворяющих уравнениям МРГ, рассмотрим сначала собственные функции оператора кинетической энергии относительного движения двух тождественных кластеров. При этом мы будем использовать алгебраические уравнения дискретного представления разрешенных базисных состояний гармонического осциллятора и учитывать обусловленную принципом Паули модификацию этого оператора:

$$\sum_{\tilde{n}} \langle n | \hat{T} | \tilde{n} \rangle C_{\tilde{n}} - E \Lambda_n C_n = 0. \quad (14)$$

В силу специальной простоты оператора кинетической энергии его производящий матричный элемент можно записать в виде

$$T(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \hat{T}_{\mathbf{R}, \mathbf{S}} I(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \hat{T}_{\mathbf{R}, \mathbf{S}} \sum_n \Lambda_n \psi_n(\mathbf{R}) \psi_n(\mathbf{S}),$$

где

$$\hat{T}_{\mathbf{R}, \mathbf{S}} = -\frac{\hbar^2}{4mr_0^2} (\mathbf{R}^2 - 2(\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}) - 3 + \mathbf{S}^2) \quad (15)$$

есть образ оператора кинетической энергии в пространстве Фока–Баргманна (см., например, [14]). Здесь и далее m — масса нуклона.

Из (15) немедленно следует, что матрица кинетической энергии трехдиагональна в представлении гармонического осциллятора. Поэтому

$$T(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \sum_{\nu} \{ \Lambda_{\nu-2} T_{\nu-2, \nu} \psi_{\nu-2}(\mathbf{R}) + \Lambda_{\nu} T_{\nu, \nu} \psi_{\nu}(\mathbf{R}) + \\ + \Lambda_{\nu} T_{\nu, \nu+2} \psi_{\nu+2}(\mathbf{R}) \} \psi_{\nu}(\mathbf{S}).$$

Здесь $T_{\nu, \bar{\nu}}$ — матричные элементы оператора кинетической энергии $\hat{T}_{\mathbf{R}}$ на нормированных на единицу с мерой Баргманна функциях $\psi_{\nu}(\mathbf{R})$:

$$T_{\nu, \bar{\nu}} = \int d\mu_{\mathbf{R}} \psi_{\bar{\nu}}(\mathbf{R}^*) \hat{T}_{\mathbf{R}} \psi_{\nu}(\mathbf{R}).$$

Мы получили нелокальный оператор кинетической энергии. Для простоты здесь рассмотрен одноканальный случай, когда базисные функции отличаются только числом осцилляторных квантов ν .

Типичное уравнение системы (14) имеет вид

$$\Lambda_{\nu-2} T_{\nu, \nu-2} C_{\nu-2} + \Lambda_{\nu} (T_{\nu, \nu} - E) C_{\nu} + \Lambda_{\nu} T_{\nu, \nu+2} C_{\nu+2} = 0. \quad (16)$$

Система уравнений (16) в двух отношениях отличается от стандартной системы дискретного представления, не учитывающей требования принципа Паули:

$$T_{\nu,\nu-2}C_{\nu-2} + (T_{\nu,\nu} - E)C_{\nu} + T_{\nu,\nu+2}C_{\nu+2} = 0. \quad (17)$$

Во-первых, в ней участвуют лишь матричные элементы, связывающие разрешенные состояния. Поэтому нет необходимости вводить в исходный гамильтониан дополнительный потенциал для устранения запрещенных состояний или для того, чтобы волновая функция обращалась в нуль при сближении тождественных нуклонов. Такое слагаемое дало бы нулевой вклад в систему уравнений (14), так как уравнения дискретного представления построены с учетом этих требований.

Во-вторых, исключение запрещенных состояний еще не решает задачу полностью, о чем свидетельствует матрица системы уравнений (16). Она содержит собственные значения Λ_{ν} разрешенных состояний и по этой причине не тождественна матрице оператора кинетической энергии свободного движения кластеров (17).

3.1. Запрещенные состояния. Для максимального упрощения задачи, устранив все запрещенные состояния (их собственные значения равны нулю), собственные значения всех разрешенных состояний целесообразно положить равными единице. Тогда собственную волновую функцию оператора кинетической энергии с орбитальным моментом l и энергией $E = \kappa^2/2$ в представлении дискретного базиса разрешенных состояний можно записать в виде*

$$\Psi_l(E) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \left\{ A(l; \kappa) C_{k,l}^{\text{reg}}(\kappa) - B(l; \kappa) C_{k,l}^{\text{irreg}}(\kappa) \right\},$$

где k — число радиальных квантов возбуждения; регулярное и нерегулярное решения уравнения свободного движения в представлении гармонического осциллятора [26]

$$C_{k,l}^{\text{reg}}(\kappa) = \left[\frac{2\Gamma(k+l+3/2)}{\Gamma(k+1)} \right]^{1/2} \frac{\kappa^l \exp(-\kappa^2/2)}{\Gamma(l+3/2)} M(-k, l+3/2; \kappa^2),$$

$$C_{k,l}^{\text{irreg}}(\kappa) = (-1)^{l+1} \left[\frac{2\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+l+3/2)} \right]^{1/2} \frac{\kappa^{-l-1} \exp(-\kappa^2/2)}{\Gamma(-l+1/2)} \times \\ \times M(-k-l-1/2, -l+1/2; \kappa^2).$$

*В этом пункте используется система единиц $\hbar = m = r_0 = 1$.

Функцию

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{(a)_2}{(b)_2 2!}z^2 + \dots + \frac{(a)_k}{(b)_k k!}z^k + \dots$$

называют функцией Куммера или вырожденной гипергеометрической функцией [27].

Коэффициенты $A(l; \kappa)$ и $B(l; \kappa)$ определяются из условия

$$A(l; \kappa)C_{k_0-l/2-1, l}^{\text{reg}}(\kappa) - B(l; \kappa)C_{k_0-l/2-1, l}^{\text{irreg}}(\kappa) = 0,$$

соответствующего требованию, что равны нулю все коэффициенты разложения по базису запрещенных состояний, начиная с тех состояний, у которых число радиальных квантов равно $k_0 - l/2 - 1$.

Поэтому

$$A(l; \kappa) = C_{k_0-l/2-1, l}^{\text{irreg}}(\kappa), \quad B(l; \kappa) = C_{k_0-l/2-1, l}^{\text{reg}}(\kappa).$$

Следовательно,

$$\tan \delta_l(k_0, \kappa) = \frac{C_{k_0-l/2-1, l}^{\text{reg}}(\kappa)}{C_{k_0-l/2-1, l}^{\text{irreg}}(\kappa)}.$$

В итоге

$$\begin{aligned} \tan \delta_l(k_0; \kappa) = & (-1)^{l+1} \frac{\Gamma(k_0 + l/2 + 1/2)}{\Gamma(k_0 - l/2)} \frac{\Gamma(-l + 1/2)}{\Gamma(l + 3/2)} \times \\ & \times \frac{\kappa^{2l+1} M(-k_0 + l/2 + 1, l + 3/2; \kappa^2)}{M(-k_0 - l/2 + 1/2, -l + 1/2; \kappa^2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Как следует из выражения (18), все фазы равны нулю при $k_0 = 0$, т.е. в отсутствие запрещенных состояний.

В асимптотическом пределе $k_0 \gg 1$

$$\tan \delta_l(k_0, \kappa) \rightarrow \frac{J_{l+1/2}(\kappa r_0 \sqrt{4k_0 - 1})}{N_{l+1/2}(\kappa r_0 \sqrt{4k_0 - 1})}$$

и, следовательно,

$$\delta_l(k_0, \kappa) \sim (k_0 - l/2)\pi - \kappa r_0 \sqrt{4k_0 - 1}.$$

Это выражение для фазового сдвига не отличается от известной зависимости фазы от волнового числа, когда рассеяние происходит на жестком коре,

радиус которого равен $r_0\sqrt{4k_0 - 1}$. Но оно справедливо, пока энергия состояний непрерывного спектра не превышает некоторого предела (фактически, высоты кора, создаваемого запрещенными состояниями).

Итак, устранение запрещенных состояний приводит к тому, что для нулевого орбитального момента равны нулю все коэффициенты, соответствующие числу квантов $\nu < 2k_0$. Если $2k_0 \gg 1$, то в области малых энергий это с необходимостью приводит к выводу, что волновая функция относительного движения практически равна нулю в области значений вектора Якоби \mathbf{q} , удовлетворяющих неравенству $|\mathbf{q}| < r_0\sqrt{4k_0 - 1}$, в силу упомянутого выше асимптотического соотношения (11), связывающего значения коэффициентов C'_n и волновых функций координатного представления в дискретных точках. Напомним, что вектор Якоби \mathbf{q} относительного расстояния между кластерами бинарной системы определяется соотношением

$$\mathbf{q} = \sqrt{\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}} \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_{A_1}}{A_1} - \frac{\mathbf{r}_{A_1+1} + \mathbf{r}_{A_1+2} + \dots + \mathbf{r}_{A_1+A_2}}{A_2} \right),$$

где $\{\mathbf{r}_i\}$ — векторы нуклонов первого кластера, если $i \leq A_1$, и векторы нуклонов второго кластера, если $A_1 < i \leq A_2$.

Сравним радиус жесткого кора с радиусом сталкивающихся ядер. Пусть $\langle |\mathbf{r}^2| \rangle_A$ — пропорциональный r_0^2 средний квадратичный радиус каждого из кластеров*. Подсчитаем отношение

$$r_{\text{core}} \equiv \frac{|\mathbf{R}_{\text{cm}}^1 - \mathbf{R}_{\text{cm}}^2|}{\sqrt{\langle |\mathbf{r}^2| \rangle_A}} = \frac{r_0 \sqrt{2/A} \sqrt{4k_0 - 1}}{\sqrt{\langle |\mathbf{r}^2| \rangle_A}}$$

для различных бинарных систем, состоящих из тождественных кластеров ($A_1 = A_2 = A$).

В таблице указаны минимальное разрешенное принципом Паули число радиальных квантов k_0 , отношение радиуса кора к среднеквадратичному радиусу каждого из кластеров r_{core} , а также минимальная энергия возбуждения E_{ex} составного ядра, при которой соответствующая кластерная конфигурация может быть реализована.

Как видно из таблицы, по мере возрастания числа нуклонов в каждом из кластеров увеличивается минимальное допустимое принципом Паули число квантов волновой функции относительного движения кластеров, что свидетельствует об увеличении радиуса отталкивающего кора, порождаемого запрещенными состояниями. Естественно, среднеквадратичный радиус кластеров также возрастает и поэтому r_{core} остается практически неизменным. Важно

*Мы полагаем, что в качестве внутренних волновых функций кластеров выбраны функции ТИМО.

Данные о бинарных системах, составленных из тождественных магических ядер

Система	k_0	r_{core}	Составное ядро	$E_{\text{ex}}, \hbar\omega$
$\alpha + \alpha$	2	1,76	${}^8\text{Be}$	0
${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$	12	1,65	${}^{32}\text{S}$	4
${}^{40}\text{Ca} + {}^{40}\text{Ca}$	40	1,64	${}^{80}\text{Zr}$	20
${}^{80}\text{Zr} + {}^{80}\text{Zr}$	100	1,64	${}^{160}\text{Hg}$	60

отметить, что в рамках рассматриваемого в этом пункте простого приближения область перекрытия волновых функций кластеров не превышает половины среднеквадратичного радиуса каждого из кластеров и потому их взаимодействие было бы только поверхностным.

Конечно, сразу же возникает вопрос, как интенсивность и радиус отталкивающего кора зависят от типа кластерной конфигурации. Почти очевидно, что если масса одного из кластеров растет, а второго уменьшается, но при этом полное число нуклонов не изменяется, то интенсивность и радиус кора уменьшаются. Максимальными они будут для симметричного деления составного ядра. Подтверждением этого служит увеличение энергии возбуждения составного ядра, допускающей симметричную кластерную конфигурацию.

Таким образом, собственные функции оператора кинетической энергии в области относительно малых значений энергии подобны собственным функциям частицы в поле с жестким кором, а в области больших значений энергии тождественны волновым функциям свободного движения частицы. Следовательно, эффективное взаимодействие между кластерами, порождаемое принципом Паули, существенно зависит от энергии сталкивающихся кластеров, а радиус этого взаимодействия одного порядка с массовым радиусом кластеров.

Обратившись к простому приближению, мы получили лишь верхнюю оценку области перекрытия сталкивающихся кластеров. Однако при этом мы не учли факта существования почти запрещенных состояний, собственные значения которых существенно меньше единицы. Максимальное число квантов, им соответствующих, более чем в два раза превышает максимальное число квантов запрещенных состояний.

3.2. Почти запрещенные и почти разрешенные состояния. Действие принципа Паули на характер относительного движения кластеров не сводится лишь к появлению запрещенных состояний, определяющих интенсивность и радиус сил отталкивания. Вторым фактором, который необходимо принять во внимание, состоит в том, что собственные значения Λ_ν разрешенных состояний только при очень больших ν становятся близкими к единице, и тогда обменом нуклонами между кластерами можно пренебречь. Этот фактор вступает в игру на тех расстояниях, для которых $|\mathbf{q}| > r_0\sqrt{4k_0 - 1}$, или,

иными словами, при величине тех коэффициентов разложения C_ν , у которых $\nu > 2k_0$. Далее мы сосредоточим свое внимание на вопросе о том, при каких ν сближающиеся кластеры начинают обмениваться нуклонами и к действию какого эффективного потенциала этот обмен сводится. Те разрешенные состояния, собственные значения которых близки к нулю, уместно назвать *почти запрещенными*, поскольку по характеру их влияния на волновую функцию кластерных систем они подобны запрещенным. Состояния, собственные значения которых меньше единицы, будем называть *почти разрешенными*, а те, которым соответствуют $\Lambda_\nu > 1$, *сверхразрешенными*.

Известно, что уравнение системы (17) при больших значениях ν принимает асимптотический вид и превращается сначала в разностное, а затем в дифференциальное уравнение Шредингера для свободного движения с определенным орбитальным моментом l (см. [24]). Такой же вид при больших ν , когда все Λ_ν равны единице, имеют и уравнения системы (16). Однако в той области значений ν , где собственные значения по мере уменьшения числа квантов становятся отличными от единицы и начинают или уменьшаться, оставаясь положительными, или возрастать, предельный вид уравнений усложняется и они становятся уравнениями движения в поле потенциала, порождаемого обменным слагаемым оператора кинетической энергии. Наша задача — найти эти уравнения, с тем чтобы выявить обязанные принципу Паули основные закономерности в изменении взаимодействия кластеров в процессе их сближения.

Уравнение (16) для столкновения кластеров в состоянии с орбитальным моментом l можно записать в виде разностного уравнения

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left(\nu + \frac{3}{2} - \frac{(2l+1)^2}{8\nu} \right) + 1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right\} \frac{1}{4} (C_{\nu+2} - 2C_\nu + C_{\nu-2}) - \\ & -\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} + \left(1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left(\nu + \frac{3}{2} - \frac{(2l+1)^2}{8\nu} \right) \right\} \frac{1}{4} (C_{\nu+2} - C_{\nu-2}) + \\ & + \left\{ \left(1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \frac{(2l+1)^2}{32\nu} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right\} C_\nu = \frac{mr_0^2}{\hbar^2} EC_\nu. \end{aligned}$$

Последнее уравнение переходит в дифференциальное уравнение Бесселя в пределе $\nu \gg 1$, когда собственные значения Λ_ν становятся равными единице:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \frac{(2l+1)^2}{4} \frac{1}{y^2} + \frac{mr_0^2}{\hbar^2} 2E \right) C(y) = 0; \quad y = \sqrt{2\nu + 2l + 3}.$$

Диагональную матрицу $\|U_{\nu,\bar{\nu}}^{\text{Pauli}} \delta_{\nu,\bar{\nu}}\|$,

$$U_{\nu,\nu}^{\text{Pauli}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \frac{(2l+1)^2}{16\nu} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_\nu} \right) \left(\nu + \frac{1}{2} \right), \quad (19)$$

можно рассматривать в качестве матрицы оператора эффективного взаимодействия между кластерами, происходящего из оператора кинетической энергии, модифицированного принципом Паули. Физический смысл первого слагаемого в выражении (19) простой. Это центробежный потенциал, который перенормирован за счет множителя

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_{\nu}} \right).$$

Последний вместе с собственными значениями стремится к единице, когда $\nu \rightarrow \infty$. Если собственные значения по мере роста ν приближаются к единице снизу, множитель перенормировки не превышает единицы, и поэтому наблюдается частичное подавление центробежного потенциала. В другом случае, когда собственные значения приближаются к единице сверху, имеет место усиление центробежного потенциала. Однако в обоих случаях это слагаемое существенно меньше второго,

$$U_{\nu,\nu}^{\text{eff}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\Lambda_{\nu-2}}{\Lambda_{\nu}} \right) \left(\nu + \frac{1}{2} \right),$$

которое представляет собой эффективный потенциал конечного радиуса действия, порождаемый влиянием принципа Паули на кинетическую энергию. В дальнейшем мы будем называть его *эффективным потенциалом антисимметризации*. Абсолютная величина его интенсивности уменьшается, когда стремится к нулю разность $\Lambda_{\nu} - \Lambda_{\nu-2}$. Если последняя по мере роста ν остается отрицательной (собственные значения монотонно стремятся к единице сверху), то эффективный потенциал антисимметризации оказывается притяжением. Если разность собственных значений при таком же изменении ν остается положительной (собственные значения монотонно стремятся к единице снизу), то эффективный потенциал антисимметризации является отталкиванием. Очевидно, что радиус этого взаимодействия зависит от того, как быстро стремятся собственные значения к единице с ростом ν .

В самом деле, как было показано в п. 1.3, волновую функцию системы двух кластеров можно представить в виде разложения (9). Если $\Lambda_{\nu} < 1$, то их участие в разложениях (9) говорит о подавлении слагаемых с малым ν , что естественно рассматривать как действие на малых расстояниях эффективных сил отталкивания. Это приводит к уменьшению по абсолютной величине энергии связанных состояний и соответствующему изменению фаз рассеяния, обусловленному появлением дополнительного эффективного отталкивания. Если же $\Lambda_{\nu} > 1$, то слагаемые с малыми ν , напротив, окажутся более предпочтительными, что можно рассматривать как эффективное притяжение.

Итак, как следует из сказанного выше, эффекты антисимметризации не сводятся лишь к устранению запрещенных состояний. Они проявляются еще

и в характере изменения кинетической энергии относительного движения кластеров по мере их сближения. В случае свободного движения (когда нет каких-либо сил взаимодействия между кластерами и влияние принципа Паули на их движение не учитывается) в состоянии с определенным орбитальным моментом l единственным фактором, изменяющим скорость относительного движения кластеров при их сближении, является центробежный потенциал. Он уменьшает кинетическую энергию относительного движения кластеров до тех пор, пока они не остановятся в точке поворота $r_\nu = r_0 \sqrt{2\nu + 2l + 3}$ и не начнется их разлет. Если собственные значения Λ_ν убывают при уменьшении ν , скорость относительного движения кластеров под влиянием эффективного потенциала антисимметризации уменьшается сильнее, чем в случае свободного движения. Если же с уменьшением ν собственные значения растут, то скорость кластеров увеличивается под действием эффективного потенциала антисимметризации, который в данном случае соответствует притяжению.

Чтобы понять, как далеко простирается область влияния антисимметризации на структуру волновых функций, уместно обратиться к двум граничным значениям числа квантов ν_{\min} и ν_{\max} . Пока $\nu < \nu_{\min}$, разрешенных состояний рассматриваемой ветви нет и собственные значения равны нулю. Если число квантов удовлетворяет неравенству $\nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max}$, то собственные значения становятся положительными, но отличаются от единицы. Наконец, при выполнении неравенства $\nu > \nu_{\max}$ собственные значения можно полагать приблизительно равными единице. Граничное число квантов ν_{\max} определяется достаточно условно, что указывает на диффузность границы области действия оператора антисимметризации. Величина

$$r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2}} r_0 \sqrt{(2\nu_{\max} + 2l + 3)}$$

определяет расстояние между центрами масс двух ядерных кластеров, на котором вступают в игру обменные эффекты. Это расстояние более чем в два раза превосходит среднеквадратичный радиус кластеров, и поэтому взаимодействие ядер на таком расстоянии является результатом диффузности их граничного слоя.

Радиус действия оператора антисимметризации уместно также сравнить с радиусом сил взаимодействия между кластерами, порождаемых потенциалом нуклон-нуклонных сил. Значения матричных элементов оператора потенциальной энергии, используемых в алгебраической версии МРГ, непосредственно следуют из выражения для ядра потенциальной энергии $U(\mathbf{R}, \mathbf{S})$, определенного в пространстве Фока–Баргманна. Это ядро является целой функцией независимых переменных \mathbf{R} и \mathbf{S} , и его, подобно ядру кинетической энергии, можно интерпретировать как результат действия на ядро нормировки некоторого оператора, содержащего параметры потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия. Построение матричных элементов $\langle \nu, l | U | \tilde{\nu}, l \rangle$

оператора потенциальной энергии МРГ требует разложения ядра $U(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ потенциальной энергии по степеням \mathbf{R} и \mathbf{S} и последующего проектирования на состояния с определенным значением углового момента, осуществляемого аналитически. Оператор антисимметризации устраняет все матричные элементы оператора потенциальной энергии, связывающие разрешенные состояния с запрещенными, и, конечно, те, которые построены только на запрещенных состояниях.

В пределе большого числа осцилляторных квантов ν матрица потенциальной энергии кластеров эквивалентна диагональной матрице $\|\delta_{\nu, \tilde{\nu}} U(r_\nu)\|$ (см. [22]), которая с увеличением ν убывает так же быстро, как в координатном пространстве убывает кластер-кластерный потенциал $U(r)$:

$$\sum_{\nu_{\min}}^{\infty} \langle \nu, l | U | \tilde{\nu}, l \rangle C_{\tilde{\nu}, l} = U(r_\nu) C_{\nu, l}.$$

Тогда для короткодействующего кластер-кластерного потенциала мы приходим к выводу о быстром убывании матричных элементов эквивалентной диагональной матрицы, а закон их убывания можно указать *a priori*. Так, для гауссовского нуклон-нуклонного взаимодействия

$$U(r_\nu) \sim U_0 \exp \left\{ -\frac{r_0^2(2\nu + 2l + 3)}{b_0^2} \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \right\}, \quad (20)$$

где b_0 — радиус гауссовского потенциала, а U_0 — его интенсивность. $U(r_\nu)$ включает как прямое, так и обменное взаимодействие. Эти слагаемые не разделены, так как это разрушило бы симметрию ядра потенциальной энергии.

Строго говоря, выражение (20) неявно содержит также собственные значения ядра нормировки Λ_ν . Однако эта зависимость не может привести к увеличению радиуса действия оператора потенциальной энергии кластеров, оценку которого мы получаем с помощью экстраполяции асимптотического соотношения (20) на область не слишком больших ν . С увеличением числа нуклонов в каждом из взаимодействующих кластеров число запрещенных состояний возрастает. Поэтому даже для минимально допустимого значения числа осцилляторных квантов асимптотическая оценка (20) оказывается справедливой*. Количество почти запрещенных состояний также увеличивается, что приводит к подавлению матричных элементов потенциальной энергии.

При больших значениях числа осцилляторных квантов ν волновой функции относительного движения кластеров элементы матрицы эффективного

*При условии, что осцилляторная длина r_0 выбрана в соответствии с экспериментальным значением радиусов кластеров.

потенциала, происходящего от обменного слагаемого оператора кинетической энергии, стремятся к нулю по мере приближения собственных значений Λ_ν к единице. Поэтому радиус этого потенциала можно оценить с помощью соотношения

$$\Lambda_\nu - 1 \sim \beta(\nu)\alpha^{-\nu} = \beta(\nu) \exp\{-\nu \ln \alpha\}, \quad (21)$$

где параметр $\alpha > 1$ вполне определяется типом рассматриваемой кластерной конфигурации данной ядерной системы. Следовательно, он одинаков для всех ветвей $SU(3)$ -неприводимых представлений. Что же касается параметра $\beta(\nu)$, то его зависимость от числа квантов имеет степенной характер и отличается для разных $SU(3)$ -представлений в пределах одной кластерной конфигурации.

Из (21) следует, что эффективный потенциал антисимметризации убывает по экспоненциальному закону с увеличением числа квантов, равно как и порождаемое нуклон-нуклонными силами кластер-кластерное взаимодействие. Сравнивая показатели экспоненциального убывания выражений (20) и (21), можно определить, какой из потенциалов является более дальнедействующим. Оказывается, что

$$\frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \frac{2r_0^2}{b_0^2} \gg \ln \alpha$$

даже для самых простых бинарных кластерных систем, состоящих из s -кластеров, таких как ${}^4\text{He} + n$, ${}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ и др. Это значит, что при сближении кластеров сначала они испытывают влияние эффективного потенциала, обусловленного изменением кинетической энергии под действием принципа Паули. И только на самых малых расстояниях между кластерами вступает в игру порождаемый нуклон-нуклонными силами потенциал взаимодействия между кластерами.

Далее на примере различных бинарных систем, составленных из s - и p -кластеров, мы продемонстрируем, как зависят собственные значения (а следовательно, параметры эффективного кластер-кластерного взаимодействия) от числа нуклонов компаунд-системы и от типа рассматриваемой кластерной конфигурации. Что же касается интенсивности эффективного потенциала антисимметризации, то его мы обсудим позже, в контексте с фазовыми портретами в представлении Фока–Баргманна.

4. ОДНОКАНАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Наша ближайшая цель — обратившись к самым простым примерам с одним открытым каналом (столкновениям двух тождественных магических ядер), продемонстрировать влияние эффективного потенциала антисимметризации на поведение фаз упругого рассеяния, а также волновых функций дискретного представления (коэффициентов разложения волновых функций по

полному базису разрешенных состояний). Рассмотренные в этом разделе кластерные системы замечательны тем, что каждому значению числа квантов ν соответствует лишь один $SU(3)$ -мультиплет $(\nu, 0)$, что существенно упрощает выражение для разрешенных ортонормированных базисных функций в пространстве Фока–Баргманна (они строятся из целочисленных степеней одного комплексного вектора) и дает лишь два набора собственных значений: один для четных, а другой для нечетных состояний. Следовательно, ядро нормировки, порождающее полный набор разрешенных состояний, имеет вид

$$I(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \sum_{\nu=\nu_{\min}}^{\infty} \Lambda_{\nu} \sum_{L,M} \psi_{\nu,L,M}(\mathbf{R}) \psi_{\nu,L,M}(\mathbf{S}).$$

Далее мы ограничимся состояниями с четным числом квантов $\nu = 2k$ и $L = 0$.

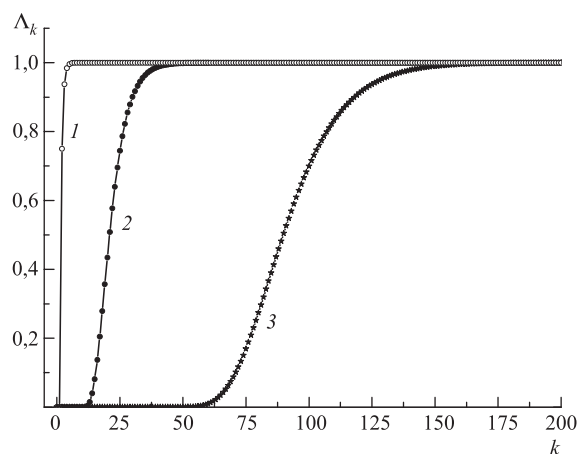


Рис. 2. Собственные значения Λ_k ядер нормировки для одноканальных кластерных систем в зависимости от числа квантов k : 1 — $\alpha + \alpha$; 2 — $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$; 3 — $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$

На рис. 2 показана зависимость собственных значений Λ_k от радиального числа квантов k для трех разных систем: $\alpha + \alpha$, $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ и $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$. Как уже отмечалось в п. 3.1, количество запрещенных состояний заметно возрастает с увеличением числа нуклонов в каждом из кластеров. Кроме того, растет также число почти запрещенных и почти разрешенных состояний, что свидетельствует о расширении той области, где вступают в игру обменные эффекты. Если для $\alpha + \alpha$ -системы максимальное число квантов, определяющее границу области действия оператора антисимметризации, $k_{\max} \simeq 5$, то для системы $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ оно составляет уже 150. О характере и величине эффективного потенциала $U_{k,k}^{\text{eff}}$ для системы $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ можно судить

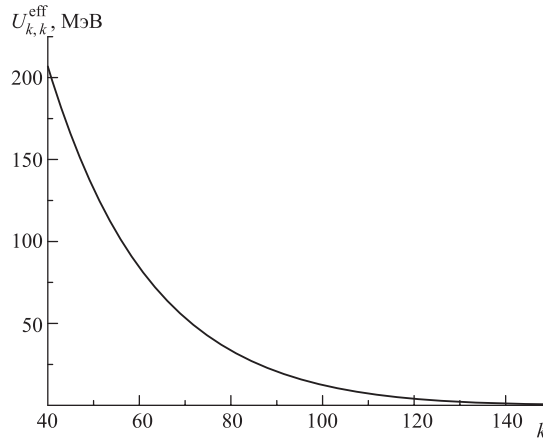


Рис. 3. Эффективный потенциал $U_{k,k}^{eff}$ для системы $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ в зависимости от числа квантов k

по рис. 3. Его действие простирается вплоть до расстояний между центрами масс кластеров порядка 11 фм, т. е. далеко за пределы радиуса каждого из кластеров.

Поскольку все собственные значения монотонно стремятся к единице снизу, эффективное взаимодействие, порождаемое влиянием принципа Паули на оператор кинетической энергии, соответствует отталкиванию. Именно поэтому при малых энергиях волновые функции рассматриваемых систем подавлены в той области, где собственные значения разрешенных состояний близки к нулю. Волновые функции дискретного представления при энергии 5 МэВ для $\alpha + \alpha$ -, $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ - и $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ -систем изображены на рис. 4. Волновая функция дискретного представления имеет вид совокупности коэффициентов разложения $\sqrt{\Lambda_k} C_k^E$ по базису разрешенных состояний. Если в качестве независимой переменной выбрать $r_k = r_0 \sqrt{4k + 3}$, поведение коэффициентов напоминает поведение суперпозиции функций Бесселя $J_{1/2}(r_k \sqrt{2E})$ и Неймана* $N_{1/2}(r_k \sqrt{2E})$.

Очевидно, что равенство нулю коэффициентов разложения волновой функции по запрещенным состояниям всегда имеет место и не зависит от энергии. Между тем коэффициенты разложения почти запрещенных состояний оказываются малыми, пока мала энергия относительного движения кластеров. Однако с ростом энергии абсолютная величина этих коэффициентов

*Здесь $m = \hbar = 1$.

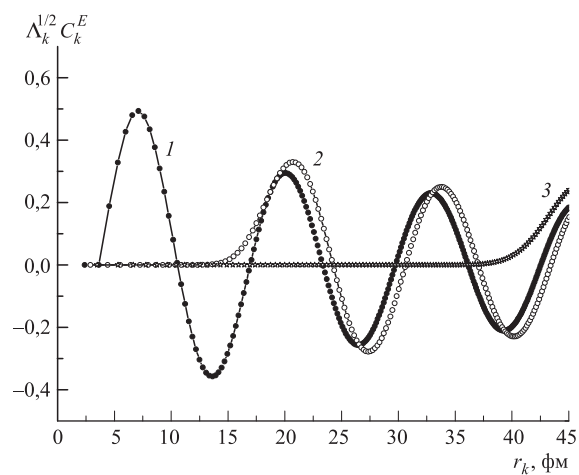


Рис. 4. Коэффициенты разложения $\sqrt{\Lambda_k} C_k^E$ по базису разрешенных состояний волновых функций непрерывного спектра одноканальных кластерных систем при $E = 5$ МэВ: 1 — $\alpha + \alpha$; 2 — $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$; 3 — $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$

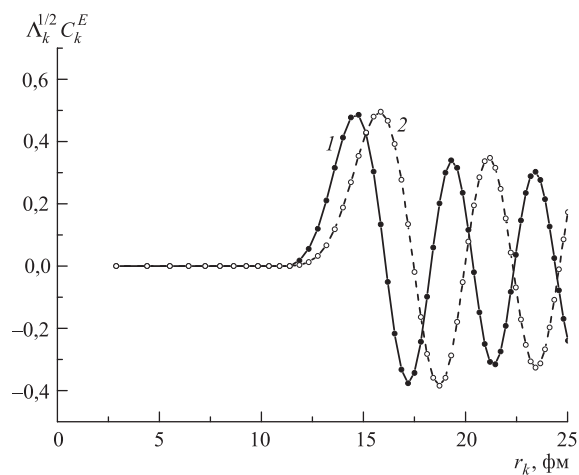


Рис. 5. Коэффициенты разложения $\sqrt{\Lambda_k} C_k^E$ по базису разрешенных состояний волновых функций непрерывного спектра системы $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ при $E = 50$ МэВ: 1 — принято во внимание только влияние принципа Паули на оператор кинетической энергии; 2 — учтено также кулоновское взаимодействие

растет, что демонстрирует рис. 5, где представлена волновая функция системы $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ при энергии 50 МэВ. Дополнительным фактором подавления некоторого количества первых коэффициентов разложения является кулоновский потенциал. Как видно из рисунка, учет кулоновского взаимодействия приводит к тому, что максимум волновой функции сдвигается в сторону больших значений r_k . Обсуждаемое явление связано с тем, что при сближении кластеров происходит их торможение не только из-за кулоновских сил, но и благодаря действию принципа Паули, а преодолеть это торможение кластеры смогут лишь тогда, когда их энергия будет достаточно большой.

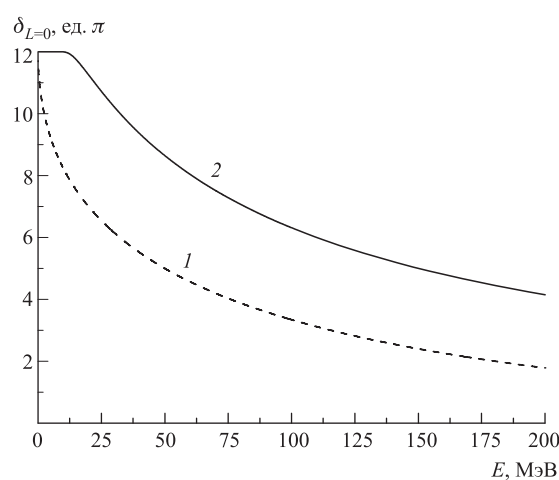


Рис. 6. Фазы упругого рассеяния $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$: 1 — фаза, полученная с учетом лишь модифицированного оператора кинетической энергии; 2 — принят во внимание также кулоновский потенциал

Влияние кулоновского взаимодействия на формирование фазовых сдвигов $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ -рассеяния в состоянии с орбитальным моментом $L = 0$ показано на рис. 6. Пока энергия относительного движения кластеров меньше высоты кулоновского барьера (~ 20 МэВ), доминирующее влияние на поведение фазы рассеяния оказывает кулоновское взаимодействие и потому на этом интервале энергий фаза экспоненциально мала. Однако, как будет показано ниже, интенсивность эффективного взаимодействия отталкивания, обусловленного влиянием принципа Паули на оператор кинетической энергии, на порядок превышает высоту кулоновского барьера. Поэтому при энергиях $E > 20$ МэВ фаза формируется, в первую очередь, модифицированным оператором кинетической энергии. Амплитуда изменения фазы рассеяния определяется числом запрещенных состояний и составляет 12π . Ядерная кулоновская фаза

превышает фазу только ядерную на величину порядка $(2,5-3)\pi$. Этот факт необходимо принимать во внимание при анализе угловых распределений продуктов рассеяния.

4.1. Фазовые портреты и фазы рассеяния. Обратимся к анализу движения кластеров с помощью функции распределения вероятности допустимых фазовых траекторий, определенных в фазовом пространстве импульсов η и координат ξ (фазовых портретов). Фазовые траектории соответствуют контуру точек заданной высоты над ξ, η -плоскостью. Вероятность реализации фазовой траектории пропорциональна этой высоте.

Чтобы построить фазовые траектории классической механики, необходимо при заданных значениях энергии и других интегралов движения найти зависимость импульса от координаты. Тогда фазовый портрет соответствует совокупности фазовых траекторий, отличающихся величиной энергии. В представлении Фока–Баргманна фазовый портрет бинарной системы содержит все возможные траектории при фиксированных значениях энергии и орбитального момента.

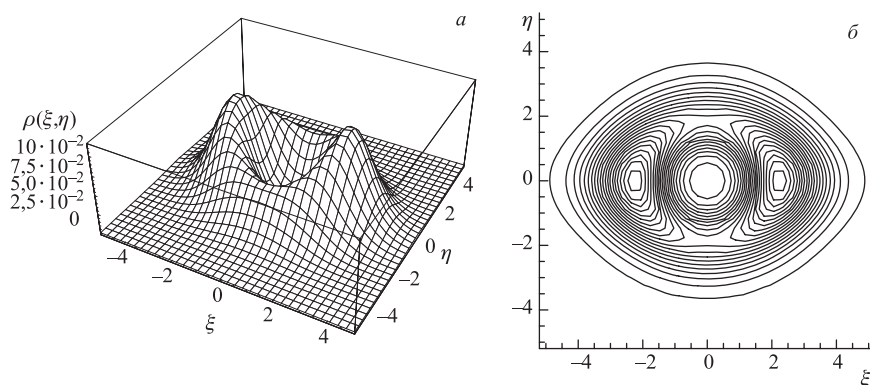


Рис. 7. Фазовый портрет связанного состояния системы ${}^3\text{H} + {}^3\text{H}$: а) плотность распределения вероятности $\rho(\xi, \eta)$ в зависимости от безразмерных координаты ξ и импульса η ; б) фазовые траектории

Для связанных состояний системы двух кластеров есть только финитные траектории (см. рис. 7). Среди них отметим те, которые проходят вокруг одной из точек фазового пространства, где плотность вероятности распределения имеет абсолютный максимум. Им соответствует нулевой импульс и значения координат, близкие к точкам поворота в поле, создающем связанное состояние. Именно в окрестности двух таких точек бинарная система находится большую часть времени. Есть среди финитных траекторий и та-

кие, которые охватывают область, содержащую обе точки поворота. На рис. 7 представлены финитные траектории связанного состояния системы двух ядер ${}^3\text{H}$, соответствующего нулевым значениям полного спина и орбитального момента. Потенциал ${}^3\text{H} + {}^3\text{H}$ -взаимодействия моделируется диагональным матричным элементом в том базисном состоянии, которое соответствует нижней конфигурации трансляционно-инвариантной модели оболочек. Такой модельный потенциал обеспечивает наблюдаемую пороговую энергию развала ядра ${}^6\text{He}$ по каналу ${}^3\text{H} + {}^3\text{H}$ (12,3 МэВ [28]) и близкий к экспериментальному значению среднеквадратичный радиус ${}^6\text{He}$, равный 2,24 фм.

В состояниях непрерывного спектра фазовый портрет содержит, наряду с инфинитными, также финитные траектории. Если первые имеют сходство с классическими для задачи столкновения двух частиц, то последние указывают на факт торможения сталкивающихся кластеров. Оно происходит и тогда, когда кластеры останавливаются, подлетев друг к другу на минимальное для их энергии расстояние, и тогда, когда они, имея энергию, превышающую барьер эффективного отталкивания, проходят, не останавливаясь, нулевое значение координаты. Поведение фазовых траекторий в окрестности начала координат отражает существование обменных эффектов в процессе столкновения кластеров. Кроме того, пока энергия относительного движения кластеров меньше той, которая требуется для квазиклассического предела, наряду с главными максимумами плотности распределения, есть и другие в соответствии с поведением волновой функции координатного представления.

Если эффективный потенциал антисимметризации является притяжением, то точки поворота, а вместе с ними точки максимума плотности, пока энергия меньше барьера Паули, находятся ближе к началу координат, чем в случае отталкивания. В свою очередь, максимум плотности распределения больше, чем при отталкивании. Ясно, что в итоге эффективное сечение ядерных реакций должно увеличиваться.

Есть два предельных случая, когда можно предугадать поведение наиболее вероятных квантовых траекторий, поскольку они приближаются к известным классическим. Результаты квантовой механики должны быть тождественны результатам классической, если энергия системы неограниченно растет или если квантовые траектории определены в той области фазового пространства, где принимает большие значения координата ξ . С увеличением энергии и, следовательно, абсолютного значения соответствующего ей импульса вклад финитных траекторий уменьшается, а инфинитные сгущаются вокруг классических фазовых траекторий относительного движения двух частиц. Если же энергия остается неизменной, но неограниченно растет модуль координаты, вновь оказывается справедливой квазиклассическая аппроксимация, и квантовые траектории в этой области фазового пространства опять сгущаются вокруг классических с положительным и отрицательным импульсом.

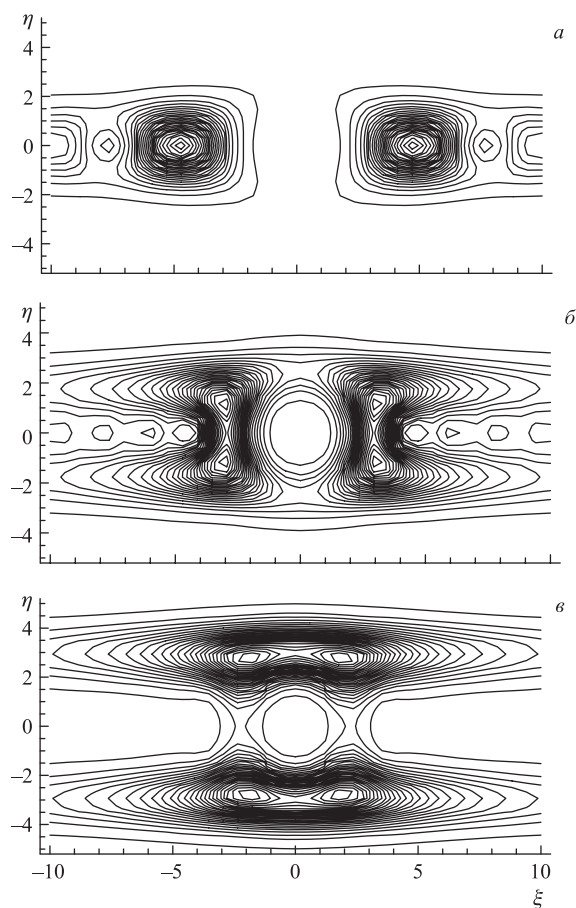


Рис. 8. Фазовые траектории для системы $\alpha + \alpha$ при энергии в с. ц. м.: а) $E = 5$ МэВ; б) $E = 35$ МэВ; в) $E = 100$ МэВ. ξ и η — безразмерные координата и импульс

Теперь обратимся к конкретным примерам, иллюстрирующим сформулированные выше общие соображения при условии, что потенциальная энергия взаимодействия кластеров не принимается во внимание. На рис. 8 представлены фазовые траектории для $\alpha + \alpha$ -рассеяния при трех различных значениях энергии относительного движения кластеров. Анализируя фазовые портреты $\alpha + \alpha$ -столкновения, можно оценить и размеры области влияния принципа Паули r_{eff} на составные частицы, и интенсивность эффективного отталкивания. Пока энергия E системы не достигла некоторого критического значения, существует область межкластерных расстояний, где фазовые траектории прак-

тически отсутствуют, иными словами, вероятность их реализации мала (см. рис. 8, *а*). Более того, все инфинитные траектории соответствуют отталкиванию, создаваемому благодаря принципу Паули. Расстояние между центрами масс двух α -частиц, когда эффекты антисимметризации играют важную роль, приблизительно равно 4,65 Фм. В то же время для двух ядер ^{16}O оно составляет $r_{\text{eff}} \simeq 7,12$ Фм. И в том, и в другом случае радиус области влияния принципа Паули превосходит средний квадратичный радиус взаимодействующих кластеров.

На рис. 8, *б* изображены траектории при энергии, равной высоте барьера Паули (35 МэВ для $\alpha + \alpha$ -системы и 350 МэВ для $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ -системы). При такой энергии α -кластеры могут оказаться в области, недостижимой для классической механики, и поэтому может быть реализовано два вида инфинитных квантовых траекторий.

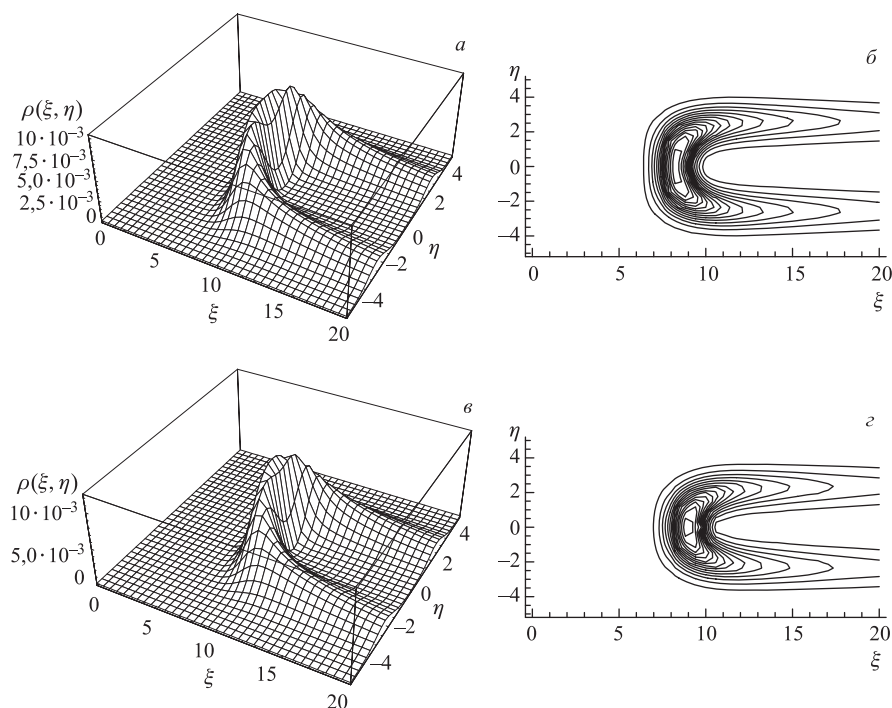


Рис. 9. Фазовый портрет рассеяния $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ при $E = 50$ МэВ в с.ц.м. с учетом только влияния антисимметризации на оператор кинетической энергии (*а*, *б*), а также кулоновского взаимодействия (*в*, *г*). *а*, *в*) Плотность распределения вероятности $\rho(\xi, \eta)$ в зависимости от безразмерных координаты ξ и импульса η ; *б*, *г*) фазовые траектории

Наконец, рис. 8, *в* иллюстрирует поведение α -кластеров, когда энергия их относительного движения превосходит высоту барьера Паули. Тогда большинство фазовых траекторий соответствует прохождению кластеров друг через друга.

Фазовый портрет $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ -столкновения при энергии 50 МэВ представлен на рис. 9, *а, б*. При этом был принят во внимание только перенормированный оператор кинетической энергии. Как отмечалось выше, наиболее вероятные квантовые траектории при больших значениях координаты ξ сосредоточены в окрестности классической. Максимум плотности распределения находится в точке поворота. Как видно из рис. 9, *в, г*, общий характер поведения квантовых траекторий не изменяется при учете кулоновского взаимодействия. Что же касается максимума плотности, то он несколько сместился в сторону больших значений ξ , и к тому же увеличилось значение плотности в точке максимума. Так как кулоновское взаимодействие увеличивает интенсивность эффективного отталкивания кластеров, в этом случае требуется большее значение η , чтобы достичь области относительно малых ξ . Но вместе с этим кулоновское отталкивание, являясь дальнедействующим, несколько сглаживает эффективное взаимодействие кластеров, обусловленное принципом Паули, что приводит к увеличению вероятности нахождения кластеров в точке поворота.

5. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ С ИЗБЫТКОМ НЕЙТРОНОВ

5.1. Система $^6\text{He} + ^6\text{He}$. Кластерная конфигурация $^6\text{He} + ^6\text{He}$ является относительно простой многоканальной системой, на примере которой можно понять, как принцип Паули участвует в формировании связи между разными ее каналами.

Каждый из кластеров системы $^6\text{He} + ^6\text{He}$ имеет открытую p -оболочку и поэтому, изучая столкновение этих кластеров, естественно принять во внимание возможность их возбуждения, сопровождающегося переходом из основного 0^+ -состояния в возбужденное 2^+ . В этом заключается важная особенность системы $^6\text{He} + ^6\text{He}$ по сравнению с обсуждавшимися выше. Она состоит, в частности, в том, что при каждом четном значении полного числа квантов $\nu = 2k > 8$ теперь базис разрешенных состояний с полным орбитальным моментом $L = 0$ содержит пять $SU(3)$ -неприводимых представлений, индексы симметрии которых (λ, μ) четные:

$$(2k - 2, 0), \quad (2k, 2)_1, \quad (2k - 4, 4), \quad (2k, 2)_2, \quad (2k + 4, 0).$$

Обратим внимание на то, что мультиплеты $(2k, 2)_1$ и $(2k, 2)_2$ имеют одинаковые индексы $SU(3)$ -симметрии, но различные собственные значения $\Lambda_{(2k, 2)_1}$ и $\Lambda_{(2k, 2)_2}$.

В итоге интеграл нормировки $I_{6\text{He}+6\text{He}}$ для состояний с $L = 0$ принимает вид

$$I_{6\text{He}+6\text{He}} = \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_{(2k-2,0)} \psi_{(2k-2,0)} \tilde{\psi}_{(2k-2,0)} + \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda_{(2k,2)_1} \psi_{(2k,2)_1} \tilde{\psi}_{(2k,2)_1} + \\ + \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda_{(2k-4,4)} \psi_{(2k-4,4)} \tilde{\psi}_{(2k-4,4)} + \sum_{k=4}^{\infty} \Lambda_{(2k,2)_2} \psi_{(2k,2)_2} \tilde{\psi}_{(2k,2)_2} + \\ + \sum_{k=5}^{\infty} \Lambda_{(2k+4,0)} \psi_{(2k+4,0)} \tilde{\psi}_{(2k+4,0)}.$$

Эти собственные функции и их собственные значения были определены в [14]. Поэтому здесь мы ограничимся лишь теми результатами из [14], которые имеют непосредственное отношение к обсуждаемой проблеме.

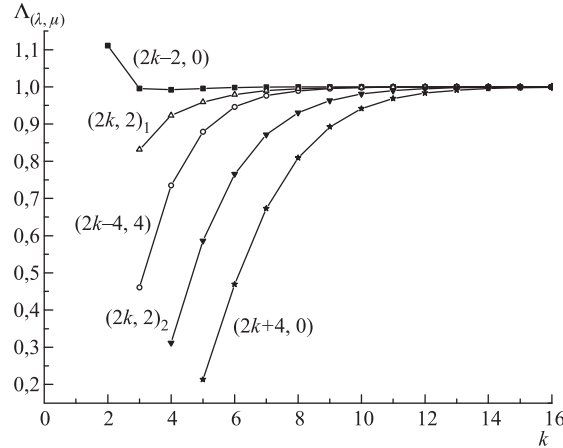


Рис. 10. Собственные значения $\Lambda_{(\lambda,\mu)}$ ядра нормировки для системы ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ в зависимости от числа квантов k . Индексы $SU(3)$ -симметрии (λ, μ) указаны возле кривых

Обилие неприводимых представлений ставит вопрос об их классификации с целью определить наиболее важные среди них, по крайней мере, в области малых надпороговых энергий. На рис. 10 представлена зависимость собственных значений пяти разных ветвей (как они были определены в п. 1.2) от k . Как видно из рисунка, все собственные значения, кроме $\Lambda_{(2,0)}$, меньше единицы и потому порождают эффективный потенциал отталкивания. Наибольшие из собственных значений принадлежат ветви $(2k - 2, 0)$, а наименьшие — ветви $(2k + 4, 0)$. В состояниях последней обусловленное действием принципа Паули отталкивание сближающихся кластеров максимально, а радиус действия обменных эффектов наибольший. Только когда $k \geq 14$, соб-

ственные значения близки к единице. Кроме того, эта ветвь начинается с $k = 5$, т.е. позже других. Несколько меньше отталкивание в состояниях ветви $(2k, 2)_2$, минимальное значение k для которой равно 4, а собственные значения практически равны единице, если $k \geq 13$. Еще меньше отталкивание для ветвей $(2k - 4, 4)$ и $(2k, 2)_1$, которые начинаются при $k = 3$. Собственные значения этих ветвей можно полагать равными единице, если $k \geq 10$. Обращает на себя внимание тот факт, что при отсутствии вырождения собственные значения тем меньше, чем выше $U(3)$ -симметрия (чем больше собственные значения $U(3)$ -оператора Казимира второго порядка).

Конечно, наиболее примечательная особенность базиса разрешенных состояний системы ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ состоит в том, что он соответствует пяти разным каналам. Выше некоторой пороговой энергии ($E = 3,6$ МэВ) все эти каналы открыты. Однако есть область энергий непрерывного спектра, где открыты два канала или только один. Влияние принципа Паули на рассматриваемую систему проявляется в том, что на малых расстояниях между кластерами все пять каналов оказываются связанными. Радиус этой области определяется требованием, что на ее границе пять различных собственных значений разрешенных состояний почти равны единице. Как только все собственные значения приблизятся к единице, становится возможным унитарное преобразование от базиса $SU(3)$ к физическому базису [14], после реализации которого связь разных каналов физического базиса через оператор кинетической энергии исчезает.

Связь между каналами, осуществляемая через матричные элементы оператора кинетической энергии при условии, что собственные значения разных $SU(3)$ -ветвей нетождественны, немедленно приводит к появлению недиагональных элементов S -матрицы рассеяния и неупругим процессам при столкновении двух ядер ${}^6\text{He}$. Разумеется, и потенциальная энергия взаимодействия кластеров может влиять на сечения неупругого рассеяния. Однако, как и выше, мы ограничимся здесь анализом лишь того вклада в сечения ядерных реакций, который дают обменные эффекты с учетом их влияния на оператор кинетической энергии. Простой оператор потенциальной энергии, который мы используем, не связывает разные каналы.

Информацию об интенсивности отталкивания в состояниях разных ветвей дают представленные на рис. 11 коэффициенты разложения волновой функции основного состояния ${}^{12}\text{Be} = {}^6\text{He} + {}^6\text{He}$, полученные в приближении нулевого радиуса ядерных сил [14]. В этом приближении отличными от нуля мы полагаем только два диагональных матричных элемента оператора потенциальной энергии в $SU(3)$ -представлении $(2k - 2, 0)$, т.е.

$$\langle (2k - 2, 0) | U | (2k' - 2, 0) \rangle = \begin{cases} U_0 = -44,2 \text{ МэВ}, & \text{если } k = k' = 2, \\ U_1 = -28,7 \text{ МэВ}, & \text{если } k = k' = 3, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

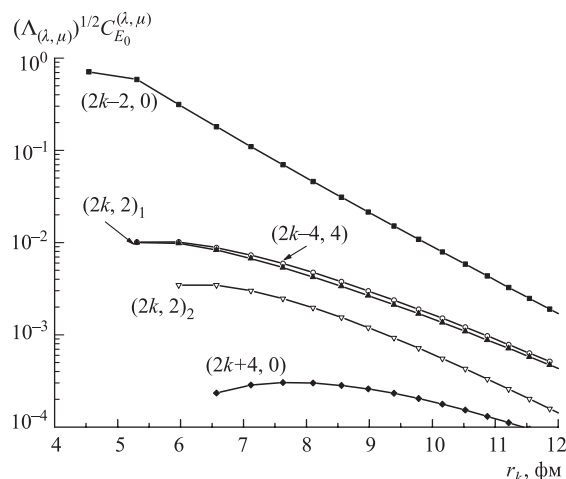


Рис. 11. Коэффициенты разложения $\sqrt{\Lambda_{(\lambda,\mu)}} C_{E_0}^{(\lambda,\mu)}(r_k)$ волновой функции основного состояния ядра $^{12}\text{Be} = {}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ по $SU(3)$ -базису. Индексы $SU(3)$ -симметрии (λ, μ) указаны возле кривых

Эти величины подобраны таким образом, чтобы воспроизвести среднеквадратичный радиус ядра ^{12}Be ($2,59 \pm 0,06$) фм [29]) в основном состоянии и порог развала этого ядра на ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ (10,11 МэВ [30]). Осцилляционная длина была выбрана равной 1,37 фм.

Сравнивая коэффициенты разных ветвей, приходим к выводу, что их значения подчиняются тем же неравенствам, каким подчиняются собственные значения:

$$\Lambda_{(2k-2,0)} \geq \Lambda_{(2k,2)_1} \geq \Lambda_{(2k-4,4)} \geq \Lambda_{(2k,2)_2} \geq \Lambda_{(2k+4,0)}$$

за одним небольшим исключением — коэффициенты ветви $(2k-4,4)$ несколько больше коэффициентов $(2k,2)_1$, если $r_k > 6,5$ фм.

Рассмотрим волновую функцию состояния непрерывного спектра (рис. 12, а). Энергия $E = 0,885$ МэВ этого состояния превосходит порог развала ^{12}Be на два ядра ${}^6\text{He}$ в их основном состоянии ($E = 0$), но меньше порога ($E = 1,8$ МэВ) развала ^{12}Be по каналу, когда один из кластеров находится в 2^+ -возбужденном состоянии*. Пока $r_k < 6$ фм, поведение коэффициентов определяется интенсивностью отталкивания в соответствующих

*Его ширина составляет лишь 113 кэВ, и поэтому мы рассматриваем его как связанное состояние.

$SU(3)$ -ветвях, как и в волновой функции основного состояния. Однако при $r_k > 6$ фм происходит перестройка их значений. Лидирующими оказываются коэффициенты неприводимых представлений $(2k, 2)_1$, затем $(2k - 4, 4)$ и $(2k - 2, 0)$. Соотношение между перечисленными коэффициентами таково, что после проектирования на состояния физического базиса мы приходим к базисным функциям открытого канала. Базисные функции представлений $(2k, 2)_2$ при больших r_k содержат физические базисные функции лишь закрытых каналов. Поэтому коэффициенты разложения ветви $(2k, 2)_2$ экспоненциально стремятся к нулю, когда r_k растет.

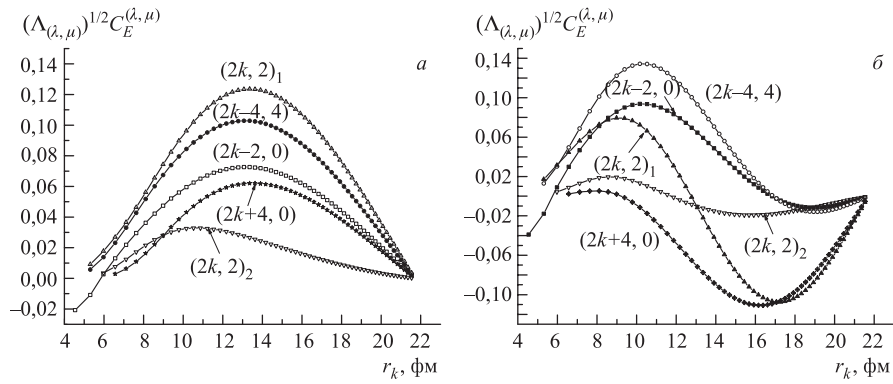


Рис. 12. Коэффициенты разложения $\sqrt{\Lambda_{(\lambda, \mu)}} C_E^{(\lambda, \mu)}(r_k)$ состояний непрерывного спектра ядра $^{12}\text{Be} = ^6\text{He} + ^6\text{He}$ по $SU(3)$ -базису при $E = 0,885$ МэВ (а) и $E = 3,3$ МэВ (б). Индексы $SU(3)$ -симметрии (λ, μ) указаны возле кривых

Обратимся, наконец, к состоянию, энергия которого $E = 3,3$ МэВ (рис. 12, б). Оно находится выше порога развала ^{12}Be на два ядра ^6He , при условии, что одно из них находится в основном, а другое в возбужденном состоянии. В этом интервале энергий все состояния с нулевым орбитальным моментом двукратно вырождены, так как открыты два канала. Для коэффициентов разложения наблюдается то же поведение, что и в предыдущем случае, с учетом того обстоятельства, что существенно отличными от нуля оказываются коэффициенты тех $SU(3)$ -представлений, что содержат базисные функции двух открытых каналов.

Многоканальная ситуация создает проблемы при анализе поведения собственных фаз рассеяния. Непосредственно над соответствующим порогом E_{thr} , когда открываются те или иные каналы, фазы ведут себя так, как того требует закон

$$\delta_l(E) = \delta_l(E_{\text{thr}}) + \text{const} \cdot E^{l+1/2},$$

где $\delta_l(E_{\text{thr}})$ — число, кратное π . Вопрос состоит в том, от каких значений их следует отсчитывать, когда энергия соответствующего канала над его порогом равна нулю, чтобы они, непрерывно изменяясь при последующем росте энергии, стремились к нулю при ее неограниченном увеличении. Однако, имея в своем распоряжении собственные фазы в области энергий до 16 МэВ, мы построили их, принимая во внимание только первое требование и тот факт, что для зависимости фаз от энергии характерны угловые точки в окрестности квазипересечений. В этих точках производная фазовой кривой скачком изменяет свое значение, чтобы избежать пересечения с другой фазовой кривой. Совместив угловые точки разных собственных фаз так, чтобы их положение отвечало квазипересечениям, удастся найти начальное их положение, отвечающее указанным выше условиям (см. рис. 13). Они выполняются, если фазы двух каналов с $l = 0$ и одного из каналов с $l = 2$ отсчитывать от 2π , а фазы еще одного канала с $l = 2$ и канала с $l = 4$ от π . На рис. 13 видны два квазипересечения фазовых траекторий, одно при энергии около 3,5 МэВ, а другое при энергии 7,5 МэВ. Фазы не могут пересекаться по той причине, что это противоречило бы теореме единственности решений волнового уравнения. После квазипересечения каждая из фаз движется по тому направлению, по которому двигалась другая фаза до квазипересечения. Убывание фаз с ростом энергии указывает на отталкивание из-за обменных эффектов и исключает существование резонансов, пока учитывается только одна кластерная конфигурация.

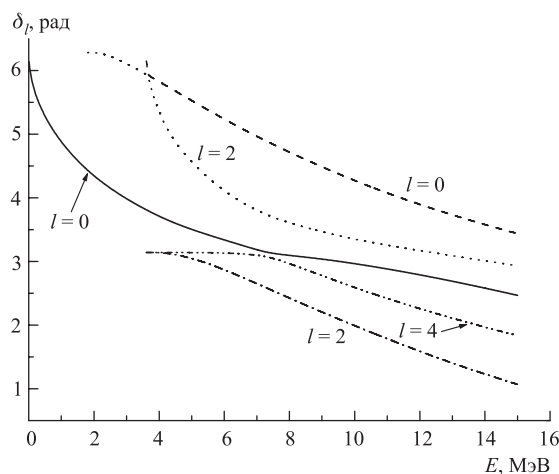


Рис. 13. Собственные фазы $\delta_l(E)$ системы ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$, формируемые модифицированным оператором кинетической энергии. Значения орбитального момента l относительного движения кластеров указаны возле кривых

5.2. Учет двух кластерных конфигураций: ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$ и ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$. Наряду с кластеризацией ${}^{12}\text{Be}$ по каналам, в которых каждое из двух ядер ${}^6\text{He}$ находится в основном или в возбужденном состоянии, рассмотрим также каналы ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$, допуская возможность возбуждения 2^+ -состояния ядра ${}^8\text{He}$. При этом каждой кластерной конфигурации мы соотнесем свое дерево Якоби. Подключение конфигурации ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$ вносит существенные поправки в результаты расчета только с кластеризацией ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$.

Прежде всего растет число разрешенных состояний и появляется дополнительное $SU(3)$ -вырождение. В результате для полного орбитального момента $L = 0$, полного спина $S = 0$ и изоспина $T = 2$ число каналов увеличивается до семи. Кластеризация ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$ поставляет две дополнительные ветви базисных состояний, $SU(3)$ -симметрия которых $(2k - 2, 0)$ и $(2k, 2)$. Базисные состояния разных кластерных конфигураций с одними и теми же индексами $SU(3)$ -симметрии не ортогональны, а два состояния $(2, 0)$ даже идентичны. Поэтому, приняв во внимание две кластеризации одновременно, придем к новым базисным состояниям (собственным функциям ядра нормировки двух связанных кластерных конфигураций), представляющим собой суперпозицию базисных функций каналов ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$ и ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$.

Начнем с разложения Гильберта–Шмидта нового ядра нормировки $I_{(8,4)+(6,6)}$ для состояний с $L = 0$. Семь разных сумм приведены в порядке убывания собственных значений $\Lambda_{(\lambda,\mu)}$:

$$\begin{aligned}
 I_{(8,4)+(6,6)} = & \sum_{k=2}^{\infty} \Lambda_{(2k-2,0)_1} \psi_{(2k-2,0)_1} \tilde{\psi}_{(2k-2,0)_1} + \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda_{(2k,2)_1} \psi_{(2k,2)_1} \tilde{\psi}_{(2k,2)_1} + \\
 & + \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda_{(2k-4,4)} \psi_{(2k-4,4)} \tilde{\psi}_{(2k-4,4)} + \sum_{k=3}^{\infty} \Lambda_{(2k-2,0)_2} \psi_{(2k-2,0)_2} \tilde{\psi}_{(2k-2,0)_2} + \\
 & + \sum_{k=4}^{\infty} \Lambda_{(2k,2)_2} \psi_{(2k,2)_2} \tilde{\psi}_{(2k,2)_2} + \sum_{k=4}^{\infty} \Lambda_{(2k,2)_3} \psi_{(2k,2)_3} \tilde{\psi}_{(2k,2)_3} + \\
 & + \sum_{k=5}^{\infty} \Lambda_{(2k+4,0)} \psi_{(2k+4,0)} \tilde{\psi}_{(2k+4,0)}.
 \end{aligned}$$

Состояния $(2k - 2, 0)$ стали двукратно вырожденными, а кратность вырождения состояний $(2k, 2)$ увеличилась до трех. Зависимость собственных значений разных ветвей от числа квантов показана на рис. 14. Примечательная их особенность состоит в том, что теперь собственные значения двух ветвей $\Lambda_{(2k-2,0)_1}$ и $\Lambda_{(2k,2)_1}$ превышают единицу. Эффективный потенциал антисимметризации в состояниях указанных ветвей соответствует притяжению. Это явно отражается на структуре волновой функции основного состояния ${}^{12}\text{Be}$, так как теперь лидирующими в выражении для волновой функции

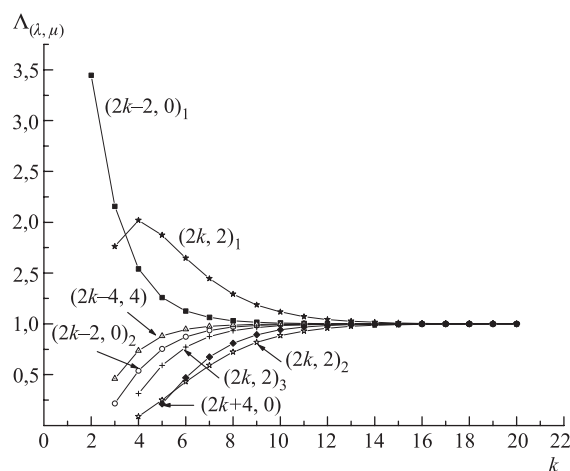


Рис. 14. Собственные значения $\Lambda_{(\lambda, \mu)}$ ядра нормировки для системы ^{12}Be при условии учета двух кластерных конфигураций (ср. рис. 10; подробности в тексте). Индексы $SU(3)$ -симметрии (λ, μ) указаны возле кривых

основного состояния ^{12}Be оказались коэффициенты разложения, принадлежащие $SU(3)$ -неприводимым представлениям $(2k-2, 0)_1$. Базисные функции этих представлений на равной основе содержат состояния кластеризации как $^6\text{He} + ^6\text{He}$, так и $^4\text{He} + ^8\text{He}$.

Теперь даже без какого-либо порождаемого нуклон-нуклонными силами потенциала взаимодействия между кластерами у ядерной системы ^{12}Be появляется связанное состояние с энергией $E_0^* = -50$ кэВ и среднеквадратичным радиусом $r_{\text{rms}} = 4,4$ фм. На рис. 15 показаны коэффициенты разложения волновой функции этого состояния. Наибольшее значение при малых r_k имеют те из них, которые соответствуют неприводимым представлениям $(2k-2, 0)_1$ и $(2k, 2)_1$. Связанное состояние стало результатом притяжения, за которое ответственны две последние ветви $SU(3)$ -неприводимых представлений.

Чтобы ответить на вопрос о существовании резонансов ядра ^{12}Be над порогами его развала на $^6\text{He} + ^6\text{He}$ и $^8\text{He} + ^4\text{He}$, исследуем зависимость фаз упругого многоканального рассеяния от энергии. На рис. 16 изображены фазы упругого рассеяния, формируемые модифицированным оператором кинетической энергии. В окрестности энергии 4 МэВ выше порога развала ^{12}Be на ^4He и ^8He в основном состоянии открыты четыре канала. Однако характерное резонансное поведение проявляется прежде всего у фаз $^8\text{He} + ^4\text{He}$ - и $^6\text{He} + ^6\text{He}$ -рассеяния в состояниях с орбитальным моментом относительного движения $l = 0$ при условии, что сталкивающиеся ядра не возбуждены.

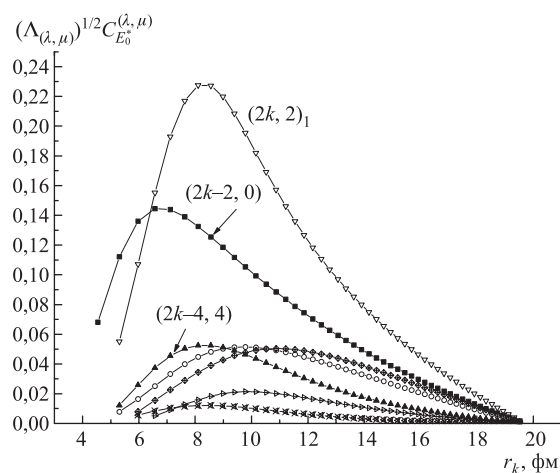


Рис. 15. Коэффициенты разложения $\sqrt{\Lambda_{(\lambda, \mu)}} C_{E_0}^{(\lambda, \mu)}(r_k)$ волновой функции основного состояния ядра ^{12}Be по $SU(3)$ -базису при условии учета двух кластерных конфигураций и модифицированного оператора кинетической энергии. Индексы $SU(3)$ -симметрии (λ, μ) указаны возле кривых

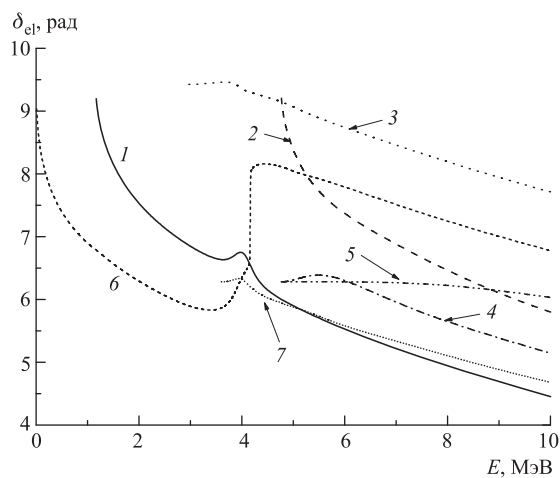


Рис. 16. Фазы упругого многоканального рассеяния $\delta_{el}(E)$, формируемые модифицированным оператором кинетической энергии. Рассеяние $^6\text{He} + ^6\text{He}$: 1 — $(l_1 = l_2 = l = 0)$; 2 — $(l_1 = l_2 = 2, l = 0)$; 3 — $(l_1 = 2(0), l_2 = 0(2), l = 2)$; 4 — $(l_1 = l_2 = l = 2)$; 5 — $(l_1 = l_2 = 2, l = 4)$. Рассеяние $^8\text{He} + ^4\text{He}$: 6 — $(l_1 = l_2 = l = 0)$; 7 — $(l_1 = l = 2, l_2 = 0)$

У первой фазы мы видим S -образную зависимость от энергии, а у второй — дисперсионное поведение. Судя по величине производных обсуждаемых фаз по энергии, парциальная ширина резонанса $\Gamma_{8,4}$ в канале ${}^8\text{He} + {}^4\text{He}$ составляет всего 10 кэВ, и поэтому время жизни в этом канале меньше, чем в

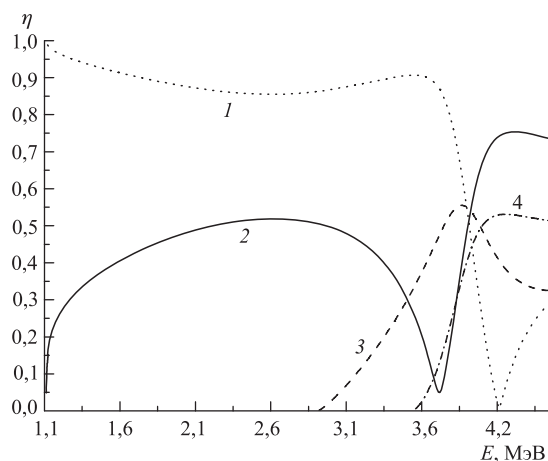


Рис. 17. Коэффициенты неупругости η в каналах: 1) ${}^8\text{He}(0^+) + {}^4\text{He}(0^+)$, $l = 0$; 2) ${}^6\text{He}(0^+) + {}^6\text{He}(0^+)$, $l = 0$; 3) ${}^6\text{He}(2^+) + {}^6\text{He}(0^+)$, $l = 2$; 4) ${}^8\text{He}(2^+) + {}^4\text{He}(0^+)$, $l = 2$. Входной канал ${}^8\text{He}(0^+) + {}^4\text{He}(0^+)$, $l = 0$

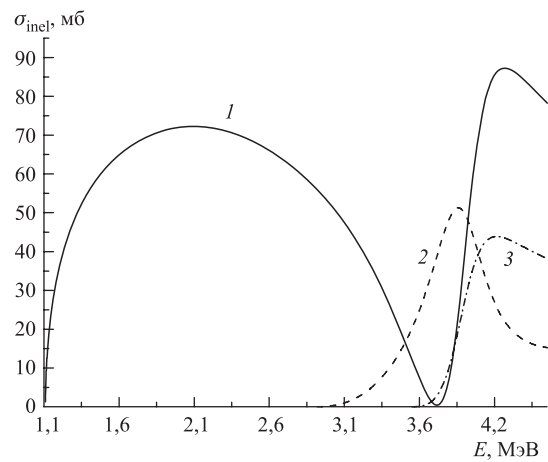


Рис. 18. Сечения неупругого рассеяния в каналы: 1) ${}^6\text{He}(0^+) + {}^6\text{He}(0^+)$, $l = 0$; 2) ${}^6\text{He}(2^+) + {}^6\text{He}(0^+)$, $l = 2$; 3) ${}^8\text{He}(2^+) + {}^4\text{He}(0^+)$, $l = 2$. Входной канал ${}^8\text{He}(0^+) + {}^4\text{He}(0^+)$, $l = 0$

канале ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ ($\Gamma_{6,6} = 1,12$ МэВ). Потому и распад по второму каналу имеет большую вероятность. Обратившись к анализу собственных фаз рассеяния, приходим к выводу о существовании при энергии $E = 4,16$ МэВ резонанса $L^\pi = 0^+$ с шириной $\Gamma \sim 1$ МэВ.

Поведение коэффициентов неупругости (рис. 17) и сечений неупругого рассеяния (рис. 18) подтверждает выводы, следующие из анализа фаз упругого рассеяния относительно резонанса $L^\pi = 0^+$. Как следует из рис. 18, компаунд-ядро, образовавшееся в результате столкновения ядер ${}^8\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, с большой вероятностью распадается по каналу ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$, что согласуется с замечанием, сделанным выше. В области резонанса сечение реакции ${}^8\text{He}({}^4\text{He}, {}^6\text{He}){}^6\text{He}$ имеет ярко выраженный максимум и достигает 90 мб.

Напомним, что все собственные фазы системы ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ монотонно убывают, указывая на отсутствие резонансов в случае, когда к исследованию непрерывного спектра ${}^{12}\text{Be}$ не привлекаются другие кластерные конфигурации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках алгебраической версии метода резонирующих групп изучалось влияние принципа Паули на структуру состояний дискретного и непрерывного спектра компаунд-систем, образующихся на промежуточной стадии столкновения легких ядер. Анализ обусловленных оператором антисимметризации обменных эффектов на кинетическую энергию относительного движения кластеров проводился на основе дискретного представления полного базиса разрешенных состояний многочастичного гармонического осциллятора, классифицированных с помощью индексов $SU(3)$ -симметрии. Задача на собственные функции и собственные значения ядра нормировки была сведена к решению алгебраическими методами вырожденных интегральных уравнений в пространстве Фока–Баргманна.

Влияние принципа Паули на процесс столкновения кластеров сводится к трем эффектам, влияющим на динамику кластер-кластерного взаимодействия. Во-первых, устранение запрещенных состояний радикальным образом увеличивает амплитуду изменения фазы рассеяния, что можно было бы моделировать потенциалом отталкивания на малых расстояниях между кластерами. Интенсивность этого моделирующего потенциала и его радиус тем больше, чем больше число запрещенных состояний. Следует отметить, однако, что последний не превышает половины среднеквадратичного радиуса кластеров. Во-вторых, вне кора появляется дополнительный эффективный потенциал отталкивания или притяжения, способный существенно влиять на поведения фазы рассеяния. Наконец, в этой же области происходит уменьшение или увеличение интенсивности центробежного потенциала, что приводит к некоторому ослаблению эффективного потенциала антисимметризации.

Расстояние между кластерами, на котором вступает в игру принцип Паули, определяется размером той области, где собственные значения разрешенных состояний отличны от единицы. Это расстояние более чем в два раза превосходит среднеквадратичный радиус кластеров и заметно превышает радиус сил взаимодействия между кластерами, порождаемых ядерным нуклон-нуклонным потенциалом. Отметим также, что фазы, порождаемые только модифицированным оператором кинетической энергии, ведут себя в согласии с обобщенной теоремой Левинсона и имеют тот же порядок величины, что и фазы, найденные с учетом потенциальной энергии. Справедливость обобщенной теоремы Левинсона в представлении дискретного базиса обеспечивают такие матричные операторы кинетической и потенциальной энергии, которые не содержат матричных элементов, связывающих разрешенные состояния с каждым из запрещенных, а также разные запрещенные состояния.

Оценки интенсивности и радиуса эффективного отталкивания кластеров, обусловленного влиянием обменных эффектов на оператор кинетической энергии, могут быть получены с помощью анализа фазовых портретов столкновения ядер в представлении Фока–Баргманна. Высота отталкивающего кора примерно равна энергии, при которой появляются инфинитные траектории, соответствующие проникновению кластеров в классически недоступную область ($\xi \simeq 0$). Максимальными радиус и интенсивность отталкивания будут для столкновения тождественных ядер. Последняя на порядок больше интенсивности кулоновского взаимодействия, и поэтому влияние антисимметризации на фазовые портреты и на волновые функции становится доминирующим, как только энергия относительного движения кластеров превысит высоту кулоновского барьера.

Существенное усиление обменных эффектов наблюдается при одновременном учете разных кластерных конфигураций — таких, например, как ${}^6\text{He} + {}^6\text{He}$ и ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$, актуальных для составного ядра ${}^{12}\text{Be}$. Это явление связано с тем, что возникают новые ветви возбуждений с особенно большими, превосходящими единицу собственными значениями разрешенных состояний. В результате обменным эффектам притяжение оказывается достаточно сильным, чтобы без участия нуклон-нуклонного взаимодействия между нуклонами разных кластеров обеспечить появление и связанного состояния, и резонанса.

Благодаря учету принципа Паули задача столкновения атомных ядер становится многоканальной, и продуктами распада компаунд-систем, образующихся в процессе столкновения, становятся возбужденные состояния взаимодействующих кластеров, а также кластеры, структура которых отличается от структуры исходных. В итоге удастся оценить величину эффективных сечений ядерных реакций, сопровождающихся возбуждением или перестройкой кластеров. Сведения хотя бы о порядке величины этих сечений могут быть полезными при постановке будущих экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра. М.: Мир, 1980.
2. Kukulín V. I., Krasnopol'sky V. M. // J. Phys. G. 1977. V. 3. P. 795.
3. Varga K., Suzuki Y., Lovas R. G. // Nucl. Phys. A. 1994. V. 371. P. 447.
4. Baye D., Descouvemont P. // Nucl. Phys. A. 1983. V. 407. P. 77.
5. Ono A., Horiuchi H. // Phys. Rev. C. 1995. V. 51. P. 299.
6. Базь А. И. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 14. С. 607.
7. Danilin B. V. et al. // Sov. J. Nucl. Phys. 1989. V. 49. P. 351; 359.
8. Saito S. // Prog. Theor. Phys. 1977. V. 71. P. 705.
9. Кукублин В. И., Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. // ЭЧАЯ. 1979. Т. 10. С. 1236.
10. Bargmann V. // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 568.
11. Filippov G. F. et al. // Few-Body Syst. 2003. V. 33. P. 173.
12. Horiuchi H. // Suppl. Prog. Theor. Phys. 1977. V. 62. P. 90.
13. Horiuchi H., Suzuki Y. // Prog. Theor. Phys. 1973. V. 49. P. 1974.
14. Filippov G. F. et al. // Few-Body Syst. 2004. V. 34. P. 209.
15. Harvey M. Advances in Nuclear Physics. N. Y., 1973. V. 1. P. 67.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
17. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984.
18. Elliott J. P. // Proc. Roy. Soc. London A. 1958. V. 245. P. 128; 562.
19. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1968.
20. Блохинцев Л. Д., Борбей И., Долинский Э. Д. // ЭЧАЯ. 1977. Т. 8. С. 1189.
21. Yamani H. A., Fishman L. // J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 410.
22. Филиппов Г. Ф. и др. // ЯФ. 1997. Т. 60. С. 635.
23. Baye D. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 2738.
24. Filippov G. F. // Sov. J. Nucl. Phys. 1981. V. 33. P. 488.
25. Filippov G. F., Okhrimenko I. P. // Sov. J. Nucl. Phys. 1980. V. 32. P. 932.
26. Moshinsky M., Smirnov Yu. F. The Harmonic Oscillator in Modern Physics // Contemporary Concepts in Physics. Harwood Academic Publishers, 1996. V. 9.
27. Abramovitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions. Washington, 1964.
28. Ajzenberg-Selove F. // Nucl. Phys. A. 1988. V. 490. P. 1.
29. Tanihata I. et al. // Phys. Lett. B. 1988. V. 206. P. 592.
30. Freer M. et al. // Phys. Rev. C. 2001. V. 63. P. 034301.