

УДК 530.145

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

В. П. Незнамов

Российский федеральный ядерный центр
«Всероссийский научно-исследовательский институт
экспериментальной физики», Саров

ВВЕДЕНИЕ	153
ПОЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАМИЛЬТониАНА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	156
КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА [7–9]	163
МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	168
СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ И РОЛЬ БОЗОНОВ ХИГГСА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	171
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	175
Приложение РАСЧЕТЫ ПРОЦЕССОВ КЭД В FW-ПРЕДСТАВЛЕНИИ	177
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	182

УДК 530.145

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

В. П. Незнамов

Российский федеральный ядерный центр
«Всероссийский научно-исследовательский институт
экспериментальной физики», Саров

Обзор посвящен формулировке квантовой электродинамики (КЭД) и Стандартной модели в представлении Фолди–Ваутхайзена (FW). Применительно к электромагнитному взаимодействию в FW-представлении получен гамильтониан H_{FW} в виде ряда по степеням заряда e . Рассмотрена квантовая электродинамика в нижайших порядках теории возмущений. Проведены расчеты конкретных процессов КЭД. Для внешних фермионных линий ($p_f^2 = m_f^2$) показана возможность разложения матрицы рассеяния по степеням константы связи с матричными элементами без фермионных пропагаторов. Для учета взаимодействия реальных частиц с античастицами предложена модификация FW-представления. Фермионы в этом представлении могут находиться в двух состояниях, характеризуемых знаком третьей компоненты изотопического спина (T_f^3). Знак T_f^3 связан со знаком массовых членов в модифицированном гамильтониане H_{FW} . Реальные фермионы ($p_f^2 = m_f^2$) могут взаимодействовать друг с другом; реальные антифермионы также могут взаимодействовать друг с другом, но реальные фермионы с определенным знаком T_f^3 могут взаимодействовать лишь с реальными антифермионами с противоположным знаком T_f^3 , и наоборот. Формулировка Стандартной модели в FW-представлении не требует для $SU(2)$ -инвариантности обязательного взаимодействия бозонов Хиггса с фермионами. При таком подходе сектор бозонов Хиггса существенно сужается: бозоны Хиггса ответственны лишь за калибровочную инвариантность теории и взаимодействуют лишь с калибровочными бозонами. КЭД в FW-представлении инвариантна относительно C -, P -, T -инверсий. Слабое взаимодействие не сохраняет C - и P -четность, но сохраняет комбинированную CP -четность. В теории существует возможность связать нарушение CP -симметрии с полным или частичным нарушением изотопической симметрии в модифицированном представлении Фолди–Ваутхайзена.

This review is devoted to formulation of quantum electrodynamics (QED) and Standard Model in Foldy–Wouthuysen representation. Hamiltonian H_{FW} in the form of a series of charge e powers is obtained as applied to electromagnetic interaction in FW representation. This paper considers quantum electrodynamics in the lowest-order theory of perturbations. Computations of the certain QED processes have been carried out. For external fermion lines ($p_f^2 = m_f^2$), the possibility of the scattering matrix expansion in powers of the coupling constant with matrix elements containing no terms with fermion propagators is demonstrated. To include the interaction of real particles with antiparticles, the modification to Foldy–Wouthuysen representation has been proposed. Fermions in the modified FW representation can be present in one of the two possible states characterized by the sign of the third component of isotopic spin (T_f^3). The sign of T_f^3 is related to the sign of mass terms in the modified Hamiltonian H_{FW} . Real fermions ($p_f^2 = m_f^2$) can interact with each other, real antifermions can also interact with each other, however, real fermions of a certain sign of T_f^3 can interact only with real antifermions of an opposite sign of T_f^3 , and vice versa. The formulation of the Standard Model in the FW representation doesn't require necessary interactions of Higgs bosons with

fermions to provide $SU(2)$ invariance. With such an approach, the sector of Higgs bosons converges significantly: Higgs bosons are responsible for gauge invariance of the theory alone and interact only with gauge bosons. QED in the FW representation is invariant relative to C, P, T inversions. Weak interaction doesn't preserve C and P parity, however, it preserves the combined CP parity. The theory has a possibility of attributing the CP symmetry violation to full or partial violation of the isotopic symmetry in the modified Foldy–Wouthuysen representation.

ВВЕДЕНИЕ

Исторически первым уравнением, описывающим взаимодействие квантово-механической частицы со спином $1/2$ с внешним электромагнитным полем, явилось нерелятивистское уравнение Паули

$$p_0\varphi(x) = \left[\frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(x))^2}{2m} - \frac{e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}}{2m} + eA_0(x) \right] \varphi(x). \quad (1)$$

В (1) и ниже используется система единиц с $\hbar = c = 1$; x, p, A — 4-векторы; скалярное произведение взято в виде $xy = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - x^k y^k$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$; $p^\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$; $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$; σ^k — матрицы Паули; $\varphi(x)$ — двухкомпонентная волновая функция.

Далее Дирак получил свое знаменитое релятивистское уравнение, описывающее движение частиц со спином $1/2$. В случае взаимодействия с электромагнитным полем уравнение Дирака имеет вид

$$p_0\Psi_D(x) = [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}(x)) + \beta m + eA_0(x)] \Psi_D(x), \quad (2)$$

$\Psi_D(x)$ — четырехкомпонентная волновая функция; $\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ — матрицы Дирака. Уравнение Дирака, в отличие от уравнения (1), линейно по компонентам импульса p^μ и легко записывается в явно ковариантном виде. Уравнение Паули является нерелятивистским пределом уравнения Дирака для верхних компонент волновой функции $\Psi_D(x)$.

В принципе релятивистское обобщение уравнения Паули можно было бы производить другим образом, за основу взяв релятивистское соотношение между энергией и импульсом частицы в отсутствие внешних полей. Это фактически было сделано Фолди и Ваутхайзенем в их классической работе [1]. Уравнение Фолди–Ваутхайзена для свободного движения имеет вид

$$p_0\Psi_{\text{FW}}(x) = (H_0)_{\text{FW}}\Psi_{\text{FW}}(x) = \beta E\Psi_{\text{FW}}(x). \quad (3)$$

В (3) оператор $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Решениями уравнения (3) являются плоские волны с положительной и отрицательной энергией:

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{FW}}^{(+)}(x, s) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} U_s e^{-ipx}, \\ \Psi_{\text{FW}}^{(-)}(x, s) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} V_s e^{ipx}, \quad p_0 \equiv E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}.\end{aligned}\quad (4)$$

В (4) $U_s = \begin{pmatrix} x_s \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_s = \begin{pmatrix} 0 \\ x_s \end{pmatrix}$, x_s — двухкомпонентные нормированные спинорные функции Паули. Для U_s и V_s справедливы следующие соотношения ортонормированности и полноты:

$$\begin{aligned}U_s^\dagger U_{s'} &= V_s^\dagger V_{s'} = \delta_{ss'}; \quad U_s^\dagger V_{s'} = V_s^\dagger U_{s'} = 0, \\ \sum_s (U_s)_\gamma (U_s^\dagger)_\delta &= \frac{1}{2}(I + \beta)_{\gamma\delta}; \quad \sum_s (V_s)_\gamma (V_s^\dagger)_\delta = \frac{1}{2}(I - \beta)_{\gamma\delta}.\end{aligned}\quad (5)$$

В выражениях (4), (5) γ, δ относятся к спинорным индексам, s — к спиновым индексам. Далее при суммировании по спинорным индексам знак суммы и сами индексы не указываются.

Гамильтониан $(H_0)_{\text{FW}}$ связан со свободным гамильтонианом Дирака $(H_0)_D$ унитарным преобразованием. В уравнении (3) видна явная несимметрия пространственных координат и времени, хотя само по себе оно лоренц-инвариантно.

В общем случае взаимодействия с произвольным электромагнитным полем $A^\mu(x)$ точного унитарного преобразования, переводящего уравнение Дирака (2) в представление Фолди–Ваутхайзена (FW), не существует. Фолди и Ваутхайзен гамильтониан H_{FW} в этом случае был найден в виде ряда по степеням $1/m$ [1].

Блоунтом [2] гамильтониан H_{FW} найден в виде ряда по степеням полей и их производных по времени и пространству. Кейс [3] получил точное преобразование при наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, не зависящего от времени. Уравнение Дирака в этом случае преобразуется в уравнение

$$p_0 \Psi_{\text{FW}}(x) = H_{\text{FW}} \Psi_{\text{FW}}(x) = \beta \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B} + m^2} \Psi_{\text{FW}}(x). \quad (6)$$

В работе [4] в общем случае взаимодействия с внешним электромагнитным полем автором получен релятивистский гамильтониан H_{FW} в виде ряда по степеням заряда e .

Во всех рассмотренных случаях в FW-представлении уравнения для волновых функций имеют нековариантный вид, а их гамильтонианы нелокальны и диагональны относительно состояний с верхними и нижними компонентами волновых функций.

С получением в [4] релятивистского гамильтониана H_{FW} появилась возможность рассмотрения в рамках теории возмущений квантово-полевых процессов в FW-представлении. Почему это интересно, несмотря на нековариантность уравнения Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена, нелокальность и относительную сложность выражений для гамильтониана?

Во-первых, в FW-представлении разрешается ряд парадоксов, характерных для представления Дирака. В FW-представлении в свободном случае оператор скорости имеет привычный, сходный с классическим вид $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$ (в представлении Дирака $\mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha}$), отсутствует «дрожание» электрона (*Zitterbewegung*), оператор спина сохраняется во времени [1].

Во-вторых, из-за того, что гамильтониан H_{FW} диагонален относительно начальных (конечных) состояний с положительной энергией и конечных (начальных) состояний с отрицательной энергией, в квантовой теории поля будут отсутствовать процессы взаимодействия реальных пар частица–античастица. Для учета этих процессов необходимо введение в гамильтониан H_{FW} дополнительных членов.

В связи с этим рассмотрение квантовой теории поля в FW-представлении может привести к новым физическим следствиям и переинтерпретации привычных терминов в представлении Дирака.

В данном обзоре подводятся итоги ряда исследований, связанных с применением FW-представления к описанию электромагнитных взаимодействий, а также калибровочных взаимодействий в рамках Стандартной модели. В разд.1 описана процедура получения релятивистского гамильтониана в FW-представлении в виде ряда по степеням заряда e .

Раздел 2 посвящен квантовой электродинамике (КЭД) в представлении Фолди–Ваутхайзена. Здесь определяются правила Фейнмана в FW-представлении, обсуждаются результаты расчетов конкретных процессов КЭД. Для случая, когда внешние фермионные линии соответствуют реальным частицам (античастицам), показана возможность переразложения матрицы рассеяния по степеням e , при котором элементы матрицы рассеяния S_{fi} не содержат членов с электрон-позитронными пропагаторами.

Формулы для вершинных операторов по своей структуре оказываются близкими к формулам «старой» нековариантной теории возмущений, развитой Гайтлером [5].

В разд.3 предложена модификация FW-представления для учета взаимодействия в теории реальных электрон-позитронных пар. Для модификации используется формализм изотопического спина. В модифицированной картине, наряду с правильным учетом процессов взаимодействия реальных электрон-позитронных пар, остаются неизменными физические результаты процессов КЭД, уже рассмотренных во втором разделе работы.

Фермионы в модифицированном FW-представлении могут находиться в двух состояниях, характеризуемых знаком собственного значения третьей

компоненты изотопического спина (T_f^3). Реальные фермионы ($p_f^2 = m_f^2$) с определенным знаком T_f^3 могут взаимодействовать друг с другом; реальные антифермионы с определенным знаком T_f^3 также могут взаимодействовать друг с другом; но реальные фермионы с определенным знаком T_f^3 могут взаимодействовать лишь с реальными антифермионами с противоположным знаком T_f^3 , и наоборот.

В разд. 3 также показано, что предложенная форма КЭД в модифицированном представлении Фолди–Ваутхайзена инвариантна относительно P -, C -, T -преобразований.

В разд. 4 рассматривается стандартная модель в FW-представлении. Формулировка теории в FW-представлении не требует для $SU(2)$ -инвариантности обязательного взаимодействия бозонов Хиггса с фермионами. При таком подходе сектор бозонов Хиггса существенно сужается: бозоны Хиггса ответственны лишь за калибровочную инвариантность теории и взаимодействуют лишь с калибровочными бозонами.

1. ПОЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАМИЛЬТониАНА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

1.1. Определение унитарной матрицы преобразования U_{FW} . Поскольку $\psi_D = (U_{FW})^\dagger \psi_{FW}$, то в общем случае зависящего от времени электромагнитного поля $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ искомым гамильтониан равен [1]

$$H_{FW} = U_{FW} H_D (U_{FW})^\dagger - i U_{FW} \frac{\partial}{\partial t} (U_{FW})^\dagger; \quad (7)$$

$$H_D = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m + e \boldsymbol{\alpha}_\mu A^\mu; \quad e \boldsymbol{\alpha}_\mu A^\mu = e (A_o - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{A}).$$

Будем искать U_{FW} в виде разложения по степеням заряда e :

$$U_{FW} = (1 + \delta_1 + \delta_2 + \dots) U_0, \quad (8)$$

$\delta_1 \sim e$; $\delta_2 \sim e^2$; $U_0 = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(1 + \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{E+m} \right)$ — матрица FW-преобразования при $A^\mu(\mathbf{x}, t) = 0$.

Из условия унитарности преобразования U_{FW} , приравнивая члены с одинаковыми степенями заряда e и учитывая, что $U_0^\dagger U_0 = 1$, получаем

$$(U_{FW})^\dagger U_{FW} = U_0^\dagger \left(1 + \delta_1^\dagger + \delta_2^\dagger + \dots \right) (1 + \delta_1 + \delta_2 + \dots) U_0 = 1; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta_1^\dagger &= -\delta_1; \\ \delta_2^\dagger &= -\delta_2 + \delta_1 \delta_1; \\ &\dots \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что из (9) можно получить связь между любыми δ_i и δ_i^\dagger . Дальнейшие сведения о структуре операторов δ_i можно получить из следующих соображений. Пусть $\psi_D = U_1^\dagger \psi_1$, где

$$U_1^\dagger = \left(1 + (p_0 - eA_0 - \beta m)^{-1} \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right); \quad p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}. \quad (11)$$

Функция ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$\left[p_0 - eA_0 - \beta m - \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) (p_0 - eA_0 + \beta m)^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \right] \psi_1 = 0. \quad (12)$$

В (12), как и в случае уравнений (3), (6), верхние и нижние компоненты функции ψ_1 не связаны друг с другом. Уравнение (12) с $\beta = +1$ для верхних компонент и $\beta = -1$ для нижних компонент ψ_1 можно непосредственно получить из уравнения Дирака исключением соответственно нижних или верхних компонент. Оператор U_1^\dagger неунитарен, поэтому для сохранения нормировки функцию ψ_1 необходимо подвергнуть дальнейшему преобразованию $\psi_1 = U_2^\dagger \psi_{\text{FW}}$, причем $U_2^\dagger = U_2$. Таким образом, $U_{\text{FW}} = U_2 U_1$. Для случая $A^\mu = 0$ $U_2 U_1 = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(1 + \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{E+m} \right) \equiv U_0$.

Как в случае [1], введем понятие четных и нечетных операторов, соответственно связывающих и не связывающих верхние и нижние компоненты волновой функции. Будем обозначать их буквами e (even) и o (odd). Из структуры оператора (11) видно, что при включении поля A^μ дополнительные члены появляются в виде нечетных операторов. Наоборот, в нормировочной матрице U_2 дополнительные члены появляются в виде четных операторов. Отсюда следует, что структура преобразования U_{FW} должна иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} U_{\text{FW}} &= \left(\sqrt{\frac{E+m}{2E}} + A_1^e + A_2^e + \dots \right) \left(1 + \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{E+m} + B_1^o + B_2^o + \dots \right) = \\ &= (1 + \delta_1^e + \delta_1^o + \delta_2^e + \delta_2^o + \dots) U_0; \\ \delta_1^o &= R B_1^o R; \quad \delta_1^e = A_1^e \frac{1}{R} + \delta_1^o L^\dagger; \\ \delta_2^o &= A_1^e \frac{1}{R} \delta_1^o + R B_2^o R; \quad \delta_2^e = A_2^e \frac{1}{R} + \delta_2^o L^\dagger. \end{aligned} \quad (13)$$

В формуле (13)

$$R = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}; \quad L = \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{E+m}; \quad A_1^e, B_1^o \sim e, \quad A_2^e, B_2^o \sim e^2.$$

Используя эрмитовость оператора A_i^e и связи (10), можно выразить четные операторы δ_i^e в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta_1^e R + R \delta_1^e &= RL \delta_1^o - \delta_1^o LR; \\ \delta_2^e R + R \delta_2^e &= RL \delta_2^o - \delta_2^o LR - RL (\delta_1 \delta_1)^o + R (\delta_1 \delta_1)^e; \\ &\dots \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) $(\delta_1 \delta_1)^o = \delta_1^e \delta_1^o + \delta_1^o \delta_1^e$; $(\delta_1 \delta_1)^e = \delta_1^e \delta_1^e + \delta_1^o \delta_1^o$.

Нечетные операторы δ_i^o определяются из условия равенства нулю нечетных членов соответствующего порядка малости по степени заряда e в преобразованном гамильтониане. Подставляя (8) в (7), получаем

$$\begin{aligned} H_{\text{FW}} &= \beta E + \left(\delta_1 \beta E - \beta E \delta_1 + i \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + U_0 e \alpha_\mu A^\mu U_0^\dagger \right) + \\ &+ \left(\delta_2 \beta E - \beta E \delta_2 + \beta E \delta_1 \delta_1 - \delta_1 \beta E \delta_1 + \delta_1 U_0 e \alpha_\mu A^\mu U_0^\dagger - \right. \\ &\quad \left. - U_0 e \alpha_\mu A^\mu U_0^\dagger \delta_1 + i \frac{\partial \delta_2}{\partial t} - i \frac{\partial \delta_1}{\partial t} \delta_1 \right) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

В (15) использовано равенство $U_0 (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m) U_0^\dagger = \beta E$. Члены в первой скобке $\sim e$, члены во второй скобке $\sim e^2$.

Обозначая $(U_0 e \alpha_\mu A^\mu U_0^\dagger)^e = C$; $(U_0 e \alpha_\mu A^\mu U_0^\dagger)^o = N$, приравняем нулю нечетные члены соответственно в первой и во второй скобках выражения (15):

$$\begin{aligned} \delta_1^o \beta E - \beta E \delta_1^o + i \frac{\partial \delta_1^o}{\partial t} + N &= 0; \\ \delta_2^o \beta E - \beta E \delta_2^o + \beta E (\delta_1 \delta_1)^o - (\delta_1 \beta E \delta_1)^o + \delta_1^o C - C \delta_1^o + \\ + \delta_1^e N - N \delta_1^e + i \frac{\partial \delta_2^o}{\partial t} - i \frac{\partial \delta_1^o}{\partial t} \delta_1^e - i \frac{\partial \delta_1^e}{\partial t} \delta_1^o &= 0; \\ &\dots \end{aligned} \quad (16)$$

Операторные соотношения (8), (10), (14), (16) полностью определяют унитарную матрицу преобразования U_{FW} . Гамильтониан (15) можно получить с любой точностью по степеням заряда e . Однако получение каждого последующего члена ряда осложняется увеличением громоздкости выражений. В данной работе для случая квантовой электродинамики используется гамильтониан H_{FW} , полученный с точностью до третьего порядка малости по заряду e ($H_{\text{FW}} = \beta E + K_1 + K_2 + K_3$; $K_1 \sim e$; $K_2 \sim e^2$; $K_3 \sim e^3$). Ниже для иллюстрации приведена процедура определения явного вида членов гамильтониана $H_{\text{FW}} \sim e$ и e^2 .

1.2. Определение членов гамильтониана, пропорциональных заряду e .
Согласно (14)–(16) имеем

$$K_1 = \delta_1^e \beta E - \beta E \delta_1^e + i \frac{\partial \delta_1^e}{\partial t} + C; \quad (17)$$

$$\delta_1^e R + R \delta_1^e = RL \delta_1^o - \delta_1^o LR; \quad (18)$$

$$\delta_1^o \beta E - \beta E \delta_1^o + i \frac{\partial \delta_1^o}{\partial t} + N = 0. \quad (19)$$

Явные выражения C и N :

$$C = eR \left(A_0 + \frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m} A_0 \frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m} \right) R - e\beta R \left(\frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m} \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{A} \frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m} \right) R, \quad (20)$$

$$N = e\beta R \left(\frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m} A_0 - A_0 \frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m} \right) R - eR \left(\alpha \mathbf{A} - \frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m} \alpha \mathbf{A} \frac{\alpha \mathbf{p}}{E+m} \right) R. \quad (21)$$

Операторные равенства (17)–(21) определяют величину K_1 . Для получения K_1 в более явном виде перейдем к представлению, в котором диагональны импульсные переменные. В этом представлении матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}' | e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \mathbf{p}'' \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' - \mathbf{k}). \quad (22)$$

Разложим поле $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ в интеграл Фурье. Для случая квантовой электродинамики в обозначениях [6] имеем

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) = \sum_{\nu=\pm 1} \int A_{\mu k} e^{i\nu k_0 t} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (23)$$

$$A_{\mu k}^{(\nu)} = \begin{cases} A_{\mu k}, & \nu = 1; \\ \bar{A}_{\mu(-k)}, & \nu = -1; \end{cases} \quad k_0 = |\mathbf{k}|.$$

В представлении (22)

$$\langle \mathbf{p}' | A_\mu | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{\nu=\pm 1} A_{\mu(\mathbf{p}''-\mathbf{p}')}^{(\nu)} e^{i\nu k_0 t}; \quad k_0 = |\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'|. \quad (24)$$

Из (17)–(21), используя (23), (24), получаем искомые члены гамильтониана

$$\langle \mathbf{p}' | \delta_1^o | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{\nu=\pm 1} \frac{1}{E' + E'' + \beta\nu k_0} \beta \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}'' \rangle, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}' | K_1 | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{\nu=\pm 1} \frac{E'' - E' - \beta\nu k_0}{R' + R''} \times \\
&\times \left(-\frac{1}{E' + E'' - \beta\nu k_0} R' L' \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}'' \rangle - \frac{1}{E' + E'' + \beta\nu k_0} \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}'' \rangle L'' R'' \right) + \\
&+ \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}'' \rangle = e \sum_{\nu=\pm 1} \exp(i\nu k_0 t) \left\{ \frac{R'}{R' + R''} \frac{1}{E' + E'' + \beta\nu k_0} \times \right. \\
&\times \left[-\frac{E' + m + \beta\nu k_0}{E' + m} \beta \alpha \mathbf{p}' \alpha \mathbf{A}_{(p''-p')}^{(\nu)} - \beta \alpha \mathbf{A}_{(p''-p')}^{(\nu)} \alpha \mathbf{p}'' + \right. \\
&+ (E' + m + \beta\nu k_0) A_{0(p''-p')}^{(\nu)} + \frac{\alpha \mathbf{p}'}{E' + m} A_{0(p''-p')}^{(\nu)} \alpha \mathbf{p}'' \left. \right] + \\
&+ \frac{R''}{R' + R''} \frac{1}{E' + E'' - \beta\nu k_0} \left[-\beta \alpha \mathbf{p}' \alpha \mathbf{A}_{(p''-p')}^{(\nu)} - \right. \\
&- \beta \alpha \mathbf{A}_{(p''-p')}^{(\nu)} \alpha \mathbf{p}'' \frac{E'' + m - \beta\nu k_0}{E'' + m} + A_{0(p''-p')}^{(\nu)} (E'' + m - \beta\nu k_0) + \\
&\left. \left. + \alpha \mathbf{p}' A_{0(p''-p')}^{(\nu)} \frac{\alpha \mathbf{p}''}{E'' + m} \right] \right\}. \quad (26)
\end{aligned}$$

В (25), (26) величины с одним и двумя штрихами соответствуют значениям функций с $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}''$ соответственно; операторы R и L определены формулами (13).

1.3. Определение членов гамильтониана, пропорциональных квадрату заряда e . В выражениях (15), (16) члены, пропорциональные e^2 , можно преобразовать к виду

$$K_2 = \delta_2^e \beta E - \beta E \delta_2^e + i \frac{\partial \delta_2^e}{\partial t} - K_1 \delta_1^e + \delta_1^e C + \delta_1^e N, \quad (27)$$

$$\delta_2^o \beta E - \beta E \delta_2^o + i \frac{\partial \delta_2^o}{\partial t} - K_1 \delta_1^o + \delta_1^o C + \delta_1^o N = 0. \quad (28)$$

Операторы $\delta_2^e, \delta_1^e, \delta_2^o, \delta_1^o, K_1, C, N$ определяются равенствами (14), (17)–(21).

Снова воспользуемся представлением, в котором диагональны импульсные переменные. Тогда квадратичные выражения $A_\mu A_\lambda$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}' | A_\mu A_\lambda | \mathbf{p}'' \rangle &= \int d\mathbf{p}''' \langle \mathbf{p}' | A_\mu | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | A_\lambda | \mathbf{p}'' \rangle = \\
&= \sum_{\nu, \nu'=\pm 1} \int d\mathbf{p}''' A_{\mu(p'''-p')}^{(\nu)} A_{\lambda(p''-p''')}^{(\nu')} \exp[i(\nu k_0 + \nu' k'_0) t], \quad (29) \\
&k_0 = |\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'|; \quad k'_0 = |\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'''|.
\end{aligned}$$

С учетом (29) получаем

$$\langle \mathbf{p}' | \delta_2^0 | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{\nu, \nu' = \pm 1} \frac{1}{E'' + E' + \beta(\nu k_0 + \nu' k'_0)} \times \\ \times \beta \langle \mathbf{p}' | -K_1 \delta_1^0 + \delta_1^0 C + \delta_1^0 N | \mathbf{p}'' \rangle, \quad (30)$$

$$\langle \mathbf{p}' | K_2 | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{\nu, \nu' = \pm 1} \int d\mathbf{p}''' \left\{ \frac{\beta E'' - \beta E' - \nu k_0 - \nu' k'_0}{R' + R''} \times \right. \\ \times \left[\frac{1}{(\beta E' + \beta E''' - \nu k_0)(\beta E'' - \beta E''' - \nu' k'_0)} \langle \mathbf{p}' | R(C + \xi) | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | K_1 | \mathbf{p}'' \rangle + \right. \\ + \frac{1}{(\beta E'' + \beta E''' + \nu' k'_0)(\beta E''' - \beta E' - \nu k_0)} \langle \mathbf{p}' | K_1 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | (C + \xi^\dagger) R | \mathbf{p}'' \rangle - \\ - \frac{1}{(\beta E'' + \beta E' - \nu k_0 - \nu' k'_0)(\beta E'' + \beta E''' - \nu' k'_0)} \langle \mathbf{p}' | R(N + \varphi) | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N | \mathbf{p}'' \rangle + \\ + \frac{1}{(\beta E'' + \beta E' + \nu k_0 + \nu' k'_0)(\beta E''' + \beta E' + \nu k_0)} \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | (N + \varphi^\dagger) R | \mathbf{p}'' \rangle - \\ - \frac{1}{(\beta E'' + \beta E' - \nu k_0 - \nu' k'_0)(\beta E'' - \beta E''' - \nu' k'_0)} \langle \mathbf{p}' | R(C + \xi) | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C | \mathbf{p}'' \rangle - \\ \left. - \frac{1}{(\beta E'' + \beta E' + \nu k_0 + \nu' k'_0)(\beta E''' - \beta E' - \nu k_0)} \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | (C + \xi^\dagger) R | \mathbf{p}'' \rangle \right] + \\ + \frac{1}{R' + R''} \left[- \frac{\beta E'' - \beta E' - \nu k_0 - \nu' k'_0}{(\beta E''' - \beta E' - \nu k_0)(\beta E'' - \beta E''' - \nu' k'_0)} \langle \mathbf{p}' | RC | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | K_1 | \mathbf{p}'' \rangle + \right. \\ + \frac{\beta E'' - \beta E' - \nu k_0 - \nu' k'_0}{(\beta E''' - \beta E' - \nu k_0)(\beta E'' - \beta E''' - \nu' k'_0)} \langle \mathbf{p}' | K_1 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | CR | \mathbf{p}'' \rangle + \\ + \frac{1}{\beta E''' - \beta E' - \nu k_0} \langle \mathbf{p}' | RK_1 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | K_1 | \mathbf{p}'' \rangle - \\ - \frac{1}{\beta E'' - \beta E''' - \nu' k'_0} \langle \mathbf{p}' | K_1 | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | K_1 R | \mathbf{p}'' \rangle + \\ + \frac{1}{\beta E'' - \beta E''' - \nu' k'_0} \langle \mathbf{p}' | RC | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C | \mathbf{p}'' \rangle - \\ - \frac{1}{\beta E''' - \beta E' - \nu k_0} \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | CR | \mathbf{p}'' \rangle + \\ + \frac{1}{\beta E'' + \beta E''' - \nu' k'_0} \langle \mathbf{p}' | RN | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N | \mathbf{p}'' \rangle + \\ \left. + \frac{1}{\beta E''' + \beta E' + \nu k_0} \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | NR | \mathbf{p}'' \rangle \right] \}. \quad (31)$$

$$\text{В выражении (31) } \xi = -\frac{1}{R} \left(A_0 + \alpha \mathbf{A} \frac{\beta \alpha \mathbf{p}}{E + m} \right) R,$$

$$\varphi = \frac{1}{R} \left(A_0 \frac{\beta \alpha \mathbf{p}}{E + m} + \alpha \mathbf{A} \right) R,$$

$\xi^\dagger, \varphi^\dagger$ — операторы, эрмитово-сопряженные ξ, φ .

1.4. Предельные случаи. Разложение гамильтониана H_{FW} с точностью $1/m \sim m^3$ и e^2 в случае статических внешних полей $A_\mu(\mathbf{x})$. В случае статических внешних полей формула (23) переходит в выражение $A_\mu(\mathbf{x}) = \int A_{\mu\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}$; в формулах (26), (31) исчезает суммирование по ν, ν' и $k_0, k'_0 = 0$.

Разлагая (15), (26), (31) по степеням $1/m$ вплоть до членов $\sim 1/m^3$ включительно, получаем

$$\begin{aligned} H_{FW} = & \beta m + \frac{\beta}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{\beta}{8m^3} \mathbf{p}^4 + e \left[-\frac{\beta}{2m} (\alpha \mathbf{A} \alpha \mathbf{p} + \alpha \mathbf{p} \alpha \mathbf{A}) + \right. \\ & + \frac{\beta}{8m^3} (\mathbf{p}^2 (\alpha \mathbf{A} \alpha \mathbf{p} + \alpha \mathbf{p} \alpha \mathbf{A}) + (\alpha \mathbf{A} \alpha \mathbf{p} + \alpha \mathbf{p} \alpha \mathbf{A}) \mathbf{p}^2) + \\ & + A_0 + \frac{1}{8m^2} (2\alpha \mathbf{p} A_0 \alpha \mathbf{p} - \mathbf{p}^2 A_0 - A_0 \mathbf{p}^2 + i\alpha \mathbf{p} \alpha \dot{\mathbf{A}} - i\alpha \dot{\mathbf{A}} \alpha \mathbf{p}) + \\ & \left. + \frac{\beta}{16m^3} (\mathbf{p}^2 i \dot{A}_0 - i \dot{A}_0 \mathbf{p}^2 + \alpha \mathbf{p} \alpha \ddot{\mathbf{A}} + \alpha \ddot{\mathbf{A}} \alpha \mathbf{p}) \right] + \\ & e^2 \left[\frac{\beta}{2m} \mathbf{A}^2 - \frac{\beta}{8m^3} (\mathbf{A}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^2 \mathbf{A}^2 + (\alpha \mathbf{p} \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{A} \alpha \mathbf{p})^2) + \right. \\ & + \frac{1}{8m^2} (\alpha \mathbf{A} \alpha \mathbf{p} - \alpha \mathbf{p} \alpha \mathbf{A}) A_0 - A_0 (\alpha \mathbf{A} \alpha \mathbf{p} - \alpha \mathbf{p} \alpha \mathbf{A}) - \\ & \left. - \frac{\beta}{16m^3} (i (\alpha \mathbf{A} \alpha \mathbf{p} + \alpha \mathbf{p} \alpha \mathbf{A}) \dot{A}_0 - i \dot{A}_0 (\alpha \mathbf{A} \alpha \mathbf{p} + \alpha \mathbf{p} \alpha \mathbf{A}) + 2\mathbf{A} \ddot{\mathbf{A}}) \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

В (32) точки над A^μ означают дифференцирование по времени.

Гамильтониан (32) вплоть до членов $\sim 1/m^2$ включительно совпадает с гамильтонианом Фолди–Ваутхайзена, приведенным в [1]. Если с помощью процедуры, описанной в [1], получить гамильтониан вплоть до членов $\sim 1/m^3$ включительно, то в выражениях $\sim 1/m^3$ обнаружится разница с (32). Вместо последних членов в квадратных скобках $\sim e$ и e^2 в (32), которые можно компактно записать в виде $-\frac{\beta}{16m^3} (\alpha \boldsymbol{\pi} \alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \alpha \boldsymbol{\pi})$, где $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$; $\boldsymbol{\varepsilon} = -\nabla A_0 - \dot{\mathbf{A}}$ — электрическое поле, появляется выражение $\frac{\beta}{8m^3} \boldsymbol{\varepsilon}^2$.

Такая разница закономерна из-за способов получения гамильтониана в [1] и в данной работе. В [1] авторы поэтапно с возрастанием степени $1/m$ избавляются от нечетных членов в преобразованном гамильтониане. С точностью до членов $\sim 1/m^3$

$$H'_{\text{FW}} = e^{iS_3} \left(e^{iS_2} \left(e^{iS_1} \left(H_D - i \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS_1} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS_2} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS_3};$$

$$S_1 \sim \frac{1}{m}; \quad S_2 \sim \frac{1}{m^2}; \quad S_3 \sim \frac{1}{m^3}.$$
(33)

В данной работе согласно (7), (8)

$$H_{\text{FW}} = \exp(\dots + iS_3 + iS_2 + iS_1) \left(H_D - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \exp(-iS_1 - iS_2 - iS_3 - \dots).$$
(34)

Поскольку S_i не коммутируют друг с другом, то $\exp(iS_3 + iS_2 + iS_1) \neq \exp(iS_3) \exp(iS_2) \exp(iS_1)$, и в общем случае $H_{\text{FW}} \neq H'_{\text{FW}}$. Получение H_{FW} в данной работе представляется более последовательным, чем в [1].

Гамильтониан H_{FW} при наличии магнитного поля, не зависящего от времени ($A_0 = 0$). В этом случае из (15), (26), (31) получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | H_{\text{FW}} | \mathbf{p}'' \rangle = & \beta E' \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') - e \frac{\beta}{E' + E''} (\alpha \mathbf{p}'' \alpha \mathbf{A}_{\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'} + \alpha \mathbf{A}_{\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'} \alpha \mathbf{p}'') + \\ & + e^2 \beta \int d\mathbf{p}''' \left(\frac{\mathbf{A}_{\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'} \mathbf{A}_{\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'''} -}{E' + E''} - \right. \\ & \left. - \frac{(\alpha \mathbf{p}' \alpha \mathbf{A}_{\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'} + \alpha \mathbf{A}_{\mathbf{p}''' - \mathbf{p}'} \alpha \mathbf{p}''') (\alpha \mathbf{p}''' \alpha \mathbf{A}_{\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'''} + \alpha \mathbf{A}_{\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'''} \alpha \mathbf{p}'')}{(E' + E'')(E' + E''')(E'' + E''')} \right); \end{aligned}$$
(35)

$$\mathbf{A}_{\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} \text{ и т. д.}$$

Гамильтониан (35) совпадает с соответствующим разложением гамильтониана в уравнении (6) в представлении (22). В этом случае $H_{\text{FW}} = H'_{\text{FW}}$ из-за способа получения H'_{FW} в [3] ($H'_{\text{FW}} = e^{iS} H_D e^{-iS}$).

2. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ-ВАУТХАЙЗЕНА [7-9]

2.1. Правила Фейнмана в FW-представлении. Уравнение Дирака для электрон-позитронного поля в FW-представлении записывается в виде

$$p_0 \Psi_{\text{FW}}(x) = H_{\text{FW}} \Psi_{\text{FW}}(x) = (\beta E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots) \Psi_{\text{FW}}(x);$$

$$K_1 \sim e, \quad K_2 \sim e^2, \quad K_3 \sim e^3.$$
(36)

В (36) операторы K_1, K_2 определяются формулами (15), (26); явное выражение оператора K_3 приведено в работе [8].

Фейнмановский пропагатор уравнения Дирака в представлении Фолди–Ваутхайзена равен

$$\begin{aligned} S_{\text{FW}}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p_0 - \beta E} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{p_0 + \beta E}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \\ &= -i\theta(x_0 - y_0) \int d\mathbf{p} \sum_s \Psi_{\text{FW}}^{(+)}(x, s) \left(\Psi_{\text{FW}}^{(+)}(y, s) \right)^\dagger + \\ &\quad + i\theta(y_0 - x_0) \int d\mathbf{p} \sum_s \Psi_{\text{FW}}^{(-)}(x, s) \left(\Psi_{\text{FW}}^{(-)}(y, s) \right)^\dagger. \end{aligned} \quad (37)$$

В (37) подразумевается фейнмановское правило обхода полюсов; $\theta(x_0) = \begin{cases} 1, & x_0 > 0 \\ 0, & x_0 < 0 \end{cases}$; функции $\Psi_{\text{FW}}^{(+)}(x, s), \Psi_{\text{FW}}^{(-)}(x, s)$ определяются формулами (4).

Интегральное уравнение для $\Psi_{\text{FW}}(x)$ имеет вид

$$\Psi_{\text{FW}}(x) = \Psi_0(x) + \int d^4 y S_{\text{FW}}(x-y) (K_1 + K_2 + \dots) \Psi_{\text{FW}}(y). \quad (38)$$

В (38) $\Psi_0(x)$ — решение уравнения Дирака в FW-представлении при отсутствии электромагнитного поля ($A^\mu = 0$).

Выражения (37), (38) позволяют сформулировать правила Фейнмана для записи элементов матрицы рассеяния S_{fi} и расчетов процессов КЭД [10]. В отличие от дираковского представления в FW-представлении существует бесконечное множество типов вершин взаимодействия с фотоном в зависимости от порядка теории возмущений: вершине взаимодействия с одним фотоном соответствует фактор $(-iK_{1\mu})$, вершине взаимодействия с двумя фотонами соответствует фактор $(-iK_{2\mu\nu})$ и т.д. Для удобства величинами $K_{1\mu}, K_{2\mu\nu}, \dots$ обозначены соответствующие части членов гамильтониана взаимодействия K_1, K_2, \dots без электромагнитных потенциалов $A^\mu, A^\mu A^\nu, \dots$

Каждой внешней фермионной линии соответствует одна из функций (4). Как обычно, решения с положительной энергией соответствуют частицам, решения с отрицательной энергией — античастицам. Остальные правила Фейнмана остаются такими же, как в спинорной электродинамике в дираковском представлении.

2.2. Расчеты процессов КЭД в FW-представлении. Со сформулированными правилами Фейнмана рассмотрены некоторые процессы КЭД в первом и во втором порядках теории возмущений. Вычислены сечения кулоновского рассеяния электронов, меллеровского рассеяния, комптон-эффекта, собственная энергия электрона, поляризация вакуума, аномальный магнитный момент

электрона, лэмбовский сдвиг атомарных энергетических уровней. Ниже приведены диаграммы Фейнмана рассмотренных процессов. Краткие детали расчетов содержатся в Приложении.

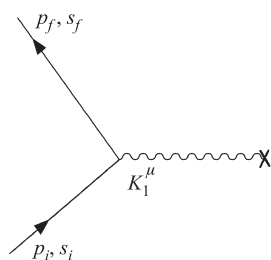


Рис. 1. Рассеяние электронов в кулоновском поле

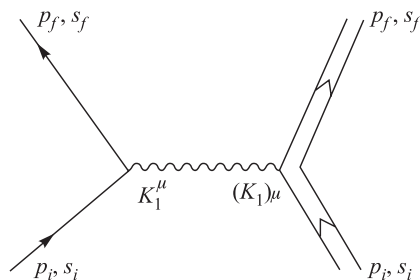


Рис. 2. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Меллера)

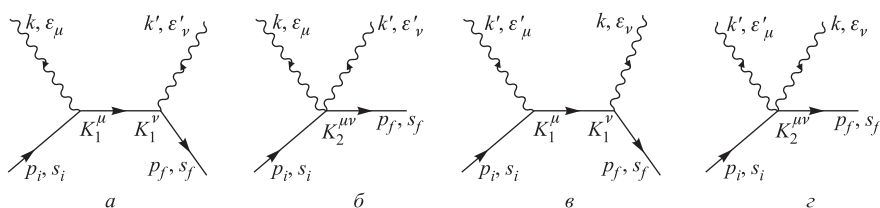


Рис. 3. Комптоновское рассеяние электронов

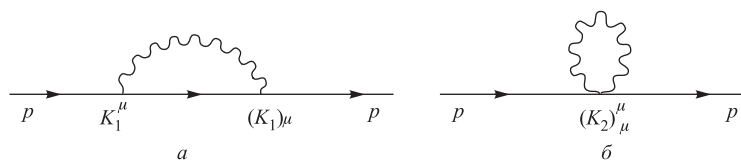


Рис. 4. Собственная энергия электрона

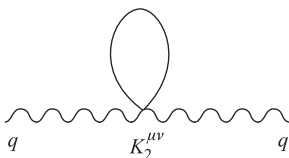


Рис. 5. Поляризация вакуума

Конечные результаты расчетов процессов КЭД, диаграммы которых приведены на рис. 1–5, совпадают с аналогичными величинами, вычисленными в представлении Дирака. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле (рис. 6) при проведении перенормировки массы и заряда дают правильное значе-

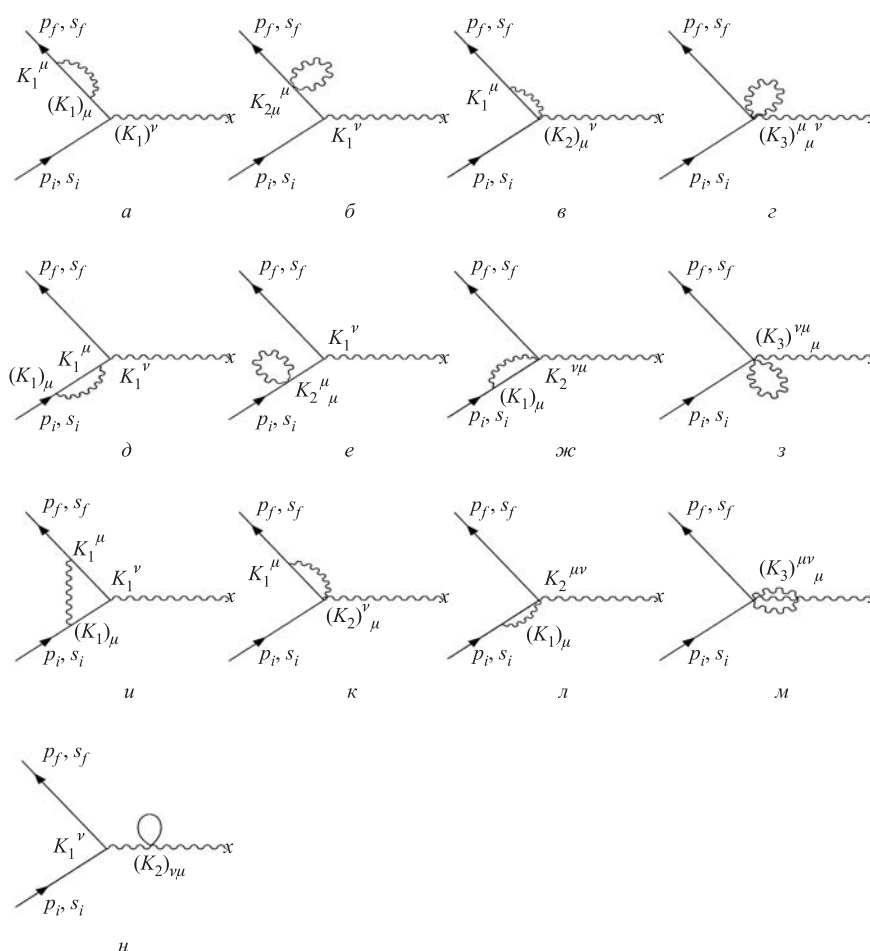


Рис. 6. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

ние аномального магнитного момента электрона и лэмбовского сдвига энергетических уровней.

Особенностью теории является наличие в членах гамильтониана взаимодействия K_n (за исключением K_1) четного числа нечетных операторов N , позволяющих осуществлять связь начальных и конечных состояний с положительной энергией с промежуточными состояниями с отрицательной энергией, и наоборот. Благодаря этому, например, появляется диаграмма рис. 5, связанная с поляризацией электрон-позитронного вакуума. Привычная диаграмма

для поляризации вакуума с двумя вершинами первого порядка по e в данной теории отсутствует из-за четности оператора K_1 .

Интересной особенностью теории в случаях, когда рассматриваются диаграммы с внешними фермионными линиями ($p^2 = m^2$), является компенсация вклада диаграмм с фермионными пропагаторами вкладом соответствующих членов в диаграммах с вершинами высшего порядка разложения по e . Так, на рис. 3 вклад диаграмм a и b компенсируется соответствующими частями вклада диаграмм b и g ; вклад диаграммы a на рис. 4 сокращается с вкладом соответствующей части диаграммы b ; на рис. 6 вклад диаграмм a , b , c сокращается с вкладом соответствующей части диаграммы g , аналогичная компенсация происходит для d , e , $ж$ и $з$; $и$, $к$, $л$ и $м$ диаграмм соответственно. При этом в рассматриваемом случае реальных внешних фермионов вершинные операторы K_n из-за закона сохранения энергии-импульса значительно упрощаются (см., например, (26), (31)).

Учитывая вышесказанное, можно осуществить такое разложение матрицы рассеяния по степеням e , в котором элементы матрицы S_{fi} не будут содержать членов с электрон-позитронными пропагаторами. При этом матричные элементы вершинных операторов видоизменяются следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}' | K_1 | \mathbf{p}'' \rangle \rightarrow \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}'' \rangle, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | K_2 | \mathbf{p}'' \rangle \rightarrow \sum_{\nu_2=\pm 1} \int d\mathbf{p}''' \left\{ \frac{1}{\beta E'' - \beta E''' - \nu_2 k_2^0} \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C | \mathbf{p}'' \rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta E'' + \beta E''' - \nu_2 k_2^0} \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N | \mathbf{p}'' \rangle \right\}, \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | K_3 | \mathbf{p}'' \rangle \rightarrow \\ \rightarrow \sum_{\nu_1, \nu_2=\pm 1} \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}^{IV} \frac{1}{(\beta E^{IV} - \beta E' - \nu_1 k_1^0 - \nu_2 k_2^0)(\beta E''' - \beta E' - \nu_1 k_1^0)} \times \\ \times \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | C | \mathbf{p}'' \rangle - \\ - \frac{1}{(\beta E^{IV} + \beta E' + \nu_1 k_1^0 + \nu_2 k_2^0)(\beta E''' - \beta E' - \nu_1 k_1^0)} \times \\ \times \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | N | \mathbf{p}'' \rangle + \\ + \frac{1}{(\beta E^{IV} + \beta E' + \nu_1 k_1^0 + \nu_2 k_2^0)(\beta E''' + \beta E' + \nu_1 k_1^0)} \times \\ \times \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | N | \mathbf{p}'' \rangle - \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{(\beta E^{IV} - \beta E' - \nu_1 k_1^0 - \nu_2 k_2^0)(\beta E''' + \beta E' + \nu_1 k_1^0)} \times \\ \times \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | C | \mathbf{p}'' \rangle. \quad (41)$$

В (39)–(41) операторы C и N определяются формулами (20), (21).

Формулы (40), (41) по своей структуре близки к формулам «старой» нековариантной теории возмущений, развитой Гайтлером в дираковском представлении [5]. Выражения (40), (41) можно получить из формул теории возмущений Гайтлера, если в матричных элементах гайтлеровских величин $(K_n)_H$ провести FW-преобразование для свободного случая $A^\mu(x) = 0$ (при этом $\alpha_\mu A^\mu(x) \rightarrow (C + N)$) и в возникших произведениях $\langle A_{FW} | (C + N) (C + N) \dots | B_{FW} \rangle$ оставить ненулевые (четные по верхним и нижним компонентам состояний $\langle A_{FW} |$ и $| B_{FW} \rangle$) члены. По-видимому, это правило можно распространить и на высшие члены разложения по e .

Существенным отличием выражений (40), (41) и т.д. от формул [5] является отсутствие взаимодействия между реальными электронами и позитронами из-за четности гамильтониана в FW-представлении. Электрон-позитронное взаимодействие в этом представлении может осуществляться только между реальными и промежуточными виртуальными состояниями.

3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

Для восстановления в теории процессов взаимодействия реальных пар частица–античастица необходимо введение в гамильтониан H_{FW} дополнительных членов.

Вспомним, что при анализе специальной теории относительности и условий обратимости «частица \leftrightarrow античастица» Реками и Зино [11] сделали вывод о противоположности знаков масс у частицы и античастицы, и рассмотрим в этой связи уравнения Дирака, отличающиеся знаком перед массовым членом:

$$p_0 \Psi_D(x) = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m + e \alpha_\mu A^\mu(x)) \Psi_D(x), \quad (42)$$

$$p_0 \Psi_{1D}(x) = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - \beta m + e \alpha_\mu A^\mu(x)) \Psi_{1D}(x). \quad (43)$$

В формулах (42), (43) $\alpha^\mu = \begin{cases} 1, & k, \mu = 0; \\ \alpha^k, & \mu = k; k = 1, 2, 3. \end{cases}$

По своим физическим следствиям уравнения (42) и (43) идентичны друг другу.

Используя формализм изотопического спина, можно написать обобщенное уравнение Дирака

$$p_0 \Phi_D(x) = \left(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_3 \beta m + \frac{1}{2} (I + \tau_1 \gamma_5) e \alpha_\mu A^\mu \right) \Phi_D(x). \quad (44)$$

В (44) $\tau_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ — матрицы изотопического спина; $\Phi_D(x)$ — фактически восьмикомпонентное поле; в случае отсутствия внешних полей $A^\mu(x)$ при значении третьей компоненты изотопического спина $T^3 = +\frac{1}{2}$ $\Phi_D(x)$ удовлетворяет уравнению (42), а при $T^3 = -\frac{1}{2}$ $\Phi_D(x)$ удовлетворяет уравнению (43); в (44) введена связь $\frac{1}{2}(I + \tau_1\gamma_5)$, позволяющая осуществлять взаимодействие между решениями (42), (43), что не меняет конечных физических результатов в представлении Дирака. Используя обобщенную матрицу преобразования U_{FW} , можно перейти от уравнения (44) к уравнению Дирака в модифицированном представлении Фолди–Ваутхайзена. Обобщение матрицы U_{FW} состоит в замене $m \rightarrow \tau_3 m$ и введении около полей $A^\mu(x)$ множителя $\frac{1}{2}(I + \tau_1\gamma_5)$.

Искомое уравнение по своей структуре можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_0 \Phi_{\text{FW}}(x) = & \left[\beta E + K_1 \left(\tau_3 m, \frac{1}{2}(I + \tau_1\gamma_5), \tau_3 m \right) + \right. \\ & + K_2 \left(\tau_3 m, \frac{1}{2}(I + \tau_1\gamma_5), \tau_3 m; \tau_3 m, \frac{1}{2}(I + \tau_1\gamma_5), \tau_3 m \right) + \\ & + K_3 \left(\tau_3 m, \frac{1}{2}(I + \tau_1\gamma_5), \tau_3 m; \tau_3 m, \frac{1}{2}(I + \tau_1\gamma_5), \tau_3 m; \right. \\ & \left. \left. \tau_3 m, \frac{1}{2}(I + \tau_1\gamma_5), \tau_3 m \right) + \dots \right] \Phi_{\text{FW}}(x). \quad (45) \end{aligned}$$

Для свободного движения решения уравнения (45) представляют собой восьмерное обобщение формул (4):

$$\Phi_{\text{FW}}^{(+)} \left(x, s, T^3 = +\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} U_s \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad (46a)$$

$$\Phi_{\text{FW}}^{(+)} \left(x, s, T^3 = -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ U_s \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad (46б)$$

$$\Phi_{\text{FW}}^{(-)} \left(x, s, T^3 = +\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} V_s \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipx}, \quad (46в)$$

$$\Phi_{\text{FW}}^{(-)} \left(x, s, T^3 = -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ V_s \end{pmatrix} e^{ipx}. \quad (46г)$$

Обобщение соотношений ортонормированности и полноты (5) на восьмерный случай вполне очевидно.

Взаимодействие $\frac{1}{2}(I + \tau_3 \gamma_5) A^\mu(x)$ в представлении Фолди–Ваутхайзена позволяет осуществить связь между решениями (46а) и (46г), (46б) и (46в), в то время как связь между другими парами решений — (46а) и (46в), (46б) и (46г), а также (46а) и (46б), (46в) и (46г) — по-прежнему отсутствует.

Анализ показывает, что связь $\frac{1}{2}(I + \tau_3 \gamma_5) A^\mu(x)$ наряду с правильным учетом процессов взаимодействия реальных электрон-позитронных пар оставляет неизменными физические результаты процессов КЭД, рассмотренных в предыдущем разделе.

Для иллюстрации в приложении приводится расчет сечения аннигиляции электрон-позитронной пары во втором порядке теории возмущений с учетом модификации представления Фолди–Ваутхайзена.

Таким образом, фермионы в модифицированном представлении Фолди–Ваутхайзена могут находиться в двух состояниях, характеризуемых знаком третьей компоненты изотопического спина (T_f^3), или, другими словами, знаком перед массами в уравнении (45).

Реальные фермионы ($p_f^2 = m_f^2$) с определенным знаком T_f^3 могут взаимодействовать друг с другом; реальные антифермионы с определенным знаком T_f^3 также могут взаимодействовать друг с другом; но реальные фермионы с определенным знаком T_f^3 могут взаимодействовать лишь с реальными антифермионами с противоположным знаком T_f^3 , и наоборот.

Гамильтониан уравнения (45) инвариантен при пространственных отражениях $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = -\mathbf{x}$. Следовательно, решения уравнения (45) сохраняются при P -инверсии с точностью до фазового множителя и матриц, коммутирующих с оператором p_0 и обобщенным гамильтонианом H_{FW} .

Рассмотрим два случая.

$$1. \quad \Phi'_{\text{FW}}(\mathbf{x}', t) = P\Phi_{\text{FW}}(\mathbf{x}, t) = e^{i\varphi} \tau_3 \beta \Phi_{\text{FW}}(\mathbf{x}, t). \quad (47)$$

В этом случае, как и в дираковском представлении, частицы и античастицы имеют противоположную внутреннюю четность, что соответствует существующим экспериментальным данным.

$$2. \quad \Phi'_{\text{FW}}(\mathbf{x}', t) = P\Phi_{\text{FW}}(\mathbf{x}, t) = e^{i\varphi} \Phi_{\text{FW}}(\mathbf{x}, t). \quad (48)$$

Для этого случая, который также допускается данной теорией, частицы и античастицы в модифицированном FW-представлении имеют одинаковую внутреннюю четность.

При C -сопряжении уравнение (45) преобразуется в уравнение для зарядово-сопряженного спинора Φ_{FW}^C с измененными знаками заряда и массы:

$$P_0 \Phi_{FW}^C(x) = \left[\beta E - K_1(-\tau_3 m; A^0; A^k) + \right. \\ \left. + K_2(-\tau_3 m; A^0; A^k) - K_3(-\tau_3 m; A^0; A^k) + \dots \right] \Phi_{FW}^C(x). \quad (49)$$

Нетрудно показать, используя (30), (31), (45), что теория C -инвариантна, если

$$\Phi_{FW}^C(x) = C \Phi_{FW}^*(x) = \tau_1 \gamma_5 \sigma^{(2)} \Phi_{FW}^*(x). \quad (50)$$

Рассмотрим теперь временную инверсию: $t \rightarrow t' = -t$. Уравнение (45) преобразуется в уравнение для функции $\Phi'_{FW}(t')$ с измененным знаком у вектор-потенциалов A^k :

$$P'_0 \Phi'_{FW}(t') = \left[\beta E + K_1(\tau_3 m; A^0; -A^k) + K_2(\tau_3 m; A^0; -A^k) + \dots \right] \Phi'_{FW}(t'). \quad (51)$$

Можно показать, что для T -инвариантности необходимо, чтобы

$$\Phi'_{FW}(t') = T \Phi_{FW}^*(t) = \sigma^{(2)} \Phi_{FW}^*(t'). \quad (52)$$

Соотношения (47)–(52) показывают, что, как и в дираковском представлении, квантовая электродинамика в модифицированном представлении Фолди–Ваутхайзена инвариантна относительно P -, C -, T -преобразований.

4. СТАНДАРТНАЯ МОДЕЛЬ И РОЛЬ БОЗОНОВ ХИГГСА В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

Первоначально для иллюстрации рассмотрим слабое взаимодействие в $V-A$ -форме ток-токового четырехфермионного взаимодействия в низжайшем порядке теории возмущений.

Как видно из рассмотрения меллеровского рассеяния (рис. 2) с учетом (39), для внешних линий, соответствующих реальным фермионам, электромагнитный векторный ток в FW -представлении в первом порядке по e равен

$$(j_{FW}^V)^\mu = \Phi_{FW}^\dagger(x) C_{эл}^\mu \Phi_{FW}(x). \quad (53)$$

В (53) согласно (45) $C_{эл}^\mu$ имеет структуру: $C_{эл}^\mu \left(\tau_3 m, \frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5), \tau_3 m \right)$. Таким образом, с точностью до первого порядка по e

$$(j_D^V)^\mu = \Psi_D^\dagger(x) e \alpha^\mu \Psi_D(x) \rightarrow (j_{FW}^V)^\mu = \Phi_{FW}^\dagger(x) C_{эл}^\mu \Phi_{FW}(x).$$

Аналогично с той же точностью методами из разд. 1 можно получить аксиальный ток в FW -представлении:

$$(j_D^A)^\mu = \Psi_D^\dagger(x) e \alpha^\mu \gamma^5 \Psi_D(x) \rightarrow (j_{FW}^A)^\mu = \Phi_{FW}^\dagger(x) (N'_{эл})^\mu \Phi_{FW}(x). \quad (54)$$

В (54) $(N'_{эл})^\mu$ отличается от вектора N^μ восьмимерным обобщением и матрицей 8×8 $\gamma_5 = \begin{pmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_5 \end{pmatrix}$, расположенной рядом с матрицей $\frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5)$:

$$\begin{aligned} (N'_{эл})^0 &= eR \left(L \frac{1}{2} (I + \tau_1 \gamma_5) \gamma_5 - \frac{1}{2} (I + \tau_1 \gamma_5) \gamma_5 L \right) R, \\ (N'_{эл})^k &= -eR \left(\alpha^k \frac{1}{2} (I + \tau_1 \gamma_5) \gamma_5 - L \alpha^k \frac{1}{2} (I + \tau_1 \gamma_5) \gamma_5 L \right) R. \end{aligned} \quad (55)$$

С учетом (53), (54) слабый $V-A$ -ток можно записать в виде

$$(j_{\text{FW}}^{\text{сл}})^\mu = \Phi_{\text{FW}}^\dagger(x) (C_{\text{сл}}^\mu - (N'_{\text{сл}})^\mu) \Phi_{\text{FW}}(x) \quad (56)$$

с заменой в $C_{\text{эл}}^\mu$ и $(N'_{\text{эл}})^\mu$ $e \rightarrow (G/\sqrt{2})^{1/2}$, где G — константа Ферми слабого взаимодействия.

Амплитуды процессов со слабыми взаимодействиями в FW-представлении имеют вид

$$M = (j_{\text{FW}}^{\text{сл}})^\mu (j_{\text{FW}\mu}^{\text{сл}})^\dagger. \quad (57)$$

Можно показать, что амплитуда M инвариантна по отдельности относительно P - и C -отражения, но инвариантна относительно комбинированной CP -инверсии.

Выражения (56), (57) позволяют рассчитывать амплитуды конкретных процессов со слабыми взаимодействиями в представлении Фолди–Ваутхайзена в нижайшем порядке теории возмущений. Конечные результаты расчетов совпадают с аналогичными результатами в дираковском представлении.

Амплитуды слабых процессов в FW-представлении в форме (57) вырождены относительно знака третьей компоненты изотопического спина. Частицы с $T_f^3 = +1/2$ взаимодействуют друг с другом и античастицами с $T_f^3 = -1/2$. Наоборот, частицы с $T_f^3 = -1/2$ взаимодействуют друг с другом и с античастицами с $T_f^3 = +1/2$.

Теперь обратимся к Стандартной модели и первоначально выпишем фермионный и фермионно-бозонный гамильтониан в дираковском представлении, отвечающий за свободное движение фермионов и за взаимодействия кварков и лептонов с фотонами, W^\pm - и Z^0 -частицами, глюонами и бозонами Хиггса:

$$\begin{aligned} H_D = \sum_{f=\nu_e, e, u, d} \left\{ (\Psi_D)_f^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m_f) (\Psi_D)_f + e Q_f (\Psi_D)_f^\dagger \alpha^\mu (\Psi_D)_f \cdot A_\mu + \right. \\ \left. + \frac{g_2}{\cos \theta_W} \left[(\Psi_D)_f^\dagger \alpha^\mu \left(\frac{I - \gamma_5}{2} \right) (\Psi_D)_f \left(\widetilde{T}_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_W \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\Psi_D)_f^\dagger \alpha^\mu \left(\frac{I + \gamma_5}{2} \right) (\Psi_D)_f \left(-Q_f \sin^2 \theta_W \right) \right] Z_\mu \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ \left[(\Psi_D)_u^\dagger \alpha^\mu \left(\frac{I - \gamma_5}{2} \right) (\Psi_D)_d + (\Psi_D)_{\nu_e}^\dagger \alpha^\mu \left(\frac{I - \gamma_5}{2} \right) (\Psi_D)_e \right] W_\mu^+ + \right. \\
 & \left. + \text{эрмит. сопр.} \right\} + \frac{g_3}{2} \sum_{f=u,d} (\Psi_{Df})^\dagger_\alpha \alpha^\mu \lambda_{\alpha\beta}^a (\Psi_{Df})_\beta G_\mu^a - \sum_{f=e,u,d} \frac{m_f}{v} (\Psi_D)_f^\dagger \beta (\Psi_D)_f h. \quad (58)
 \end{aligned}$$

В (58) $(\Psi_D)_f$ — дираковское фермионное поле; A_μ — электромагнитное поле; Z_μ, W_μ^\pm — поля калибровочных бозонов; G_μ^α — глюонные поля; h — поле нейтрального хиггсовского бозона; Q_f — электрический заряд фермиона в единицах e ; $\widetilde{T}_f^3 = 1/2$ для $f = \nu, u$; $\widetilde{T}_f^3 = -1/2$ для $f = e, d$; θ_W — угол электрослабого смешивания; $g_2 = e/(\sin \theta_W)$; g_3 — константа связи квантовой хромодинамики; λ^a — генераторы группы $SU(3)$; m_f — масса фермиона f (в (58) предполагается $m_{\nu_e} = 0$); v — хиггсовское вакуумное среднее.

Гамильтониан в (58) выписан лишь для первого семейства лептонов и кварков. Для второго и третьего семейства надо в (58) провести соответственно замены $(\nu_e, e, u, d) \rightarrow (\nu_\mu, \mu, c, s)$ и (ν_τ, τ, t, b) и ввести кварковое смешивание.

Переход к представлению Фолди–Ваутхайзена в более общем случае гамильтониана (58) можно также осуществить методами, развитыми в случае квантовой электродинамики с восьмимерным обобщением матриц Дирака. В результате в представлении Фолди–Ваутхайзена гамильтониан (58) можно записать следующим образом:

$$H_{\text{FW}} = \sum_{f=\nu_e, e, u, d} (\Phi_{\text{FW}})_f^\dagger \{ \beta E_f + K'_1 + K'_2 + \dots \} (\Phi_{\text{FW}})_f. \quad (59)$$

В (59) $E_f = (\mathbf{p}_f^2 + m_f^2)^{1/2}$ — оператор энергии свободного движения фермиона f . Разложение (59) проведено по степеням констант связи $e, g_2, g_3, m_f/v$ и их взаимных произведений.

По своей структуре операторы $K'_1, K'_2 \dots$ сходны с операторами $K_1, K_2 \dots$ в квантовой электродинамике с заменой $e\alpha^\mu A_\mu$ на

$$\begin{aligned}
 & eQ_f \alpha^\mu A_\mu + \frac{g_2}{\cos \theta_W} \left[\left(\widetilde{T}_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_W \right) \alpha^\mu \left(\frac{I - \gamma_5}{2} \right) - \right. \\
 & \left. - Q_f \sin^2 \theta_W \alpha^\mu \left(\frac{I + \gamma_5}{2} \right) \right] Z_\mu + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ \left[(f = u) \alpha^\mu \left(\frac{I - \gamma_5}{2} \right) (f = d) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (f = \nu_e) \alpha^\mu \left(\frac{I - \gamma_5}{2} \right) (f = e) \right] W_\mu^+ + \text{эрмит. сопр.} \right\} + \\
 & + \frac{g_3}{2} \left[(f = u, d)_\alpha \alpha^\mu \lambda_{\alpha\beta}^a (f = u, d)_\beta G_\mu^a \right] - \frac{m_f}{v} \beta h. \quad (60)
 \end{aligned}$$

Кроме того, при наличии в дираковском гамильтониане выражений с операторами $(I \pm \gamma_5)/2$ необходимо в FW-представлении по сравнению с квантово-электродинамическим случаем заменить в соответствующих выражениях четные операторы C^μ на операторы $C^\mu \pm (N')^\mu$ и нечетные операторы N^μ на операторы $N^\mu \pm (C')^\mu$.

В (60) ($f = u$), ($f = d$) и т.д. обозначают, что в гамильтониане на указанных местах будут находиться спинорные FW-поля соответствующих фермионов.

Гамильтонианы (58) и (59) по своему построению инвариантны относительно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -преобразований. Обратим внимание, что в (59) гамильтониан свободного движения инвариантен относительно $SU(2)$ -симметрии в отличие от дираковского гамильтониана свободного движения.

По своей структуре в дираковском свободном гамильтониане члены $\sim \alpha \mathbf{p}$ и $\sim \beta m$ преобразуются по-разному при $SU(2)$ -преобразованиях, в то время как в свободном гамильтониане Фолди–Ваутхайзена $\sim \beta \sqrt{\mathbf{p}_f^2 + m_f^2}$ оба слагаемых под знаком квадратного корня преобразуются одинаково при $SU(2)$ -преобразованиях. Можно показать это непосредственно.

Действительно, в случае свободного движения левый проекционный оператор $(P_D)_L = (I - \gamma_5)/2$ в FW-представлении равен $(P_{FW})_L = \frac{1}{2} \left(I - \frac{\beta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E} - \frac{\tau_3 m}{E} \gamma_5 \right)$; четная часть оператора $(P_{FW})_L^e = \frac{1}{2} \left(I - \frac{\beta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E} \right)$; аналогично правый проекционный оператор $(P_{FW})_R = \frac{1}{2} \left(I + \frac{\beta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E} + \frac{\tau_3 m}{E} \gamma_5 \right)$. Гамильтониан свободного движения в FW-представлении имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{FW}^\dagger \beta E \Psi_{FW} &= \\ &= \Psi_{FW}^\dagger \left[(P_{FW})_L \frac{E^2}{p^2} \beta E (P_{FW})_L + (P_{FW})_R \frac{E^2}{p^2} \beta E (P_{FW})_R \right] \Psi_{FW} = \\ &= (\Psi_{FW}^\dagger)_L \frac{E^2}{p^2} \beta E (\Psi_{FW})_L + (\Psi_{FW}^\dagger)_R \frac{E^2}{p^2} \beta E (\Psi_{FW})_R. \end{aligned} \quad (61)$$

В (61) $(\Psi_{FW})_L = (P_{FW})_L \Psi_{FW}$; $(\Psi_{FW})_R = (P_{FW})_R \Psi_{FW}$. Из (61) видна искомая инвариантность гамильтониана.

При наличии взаимодействующих полей гамильтониан (59) можно также записать в обкладках левых и правых компонент полей $\Psi_{FW}(x)$. В этом случае согласно (8) $U_{FW} = (I + \delta_1 + \delta_2 + \dots) U_0$. С точностью, например, до первого порядка по константе соответствующего взаимодействия левый и правый проекционные операторы в FW-представлении равны

$$(P_{L,R})_{FW} = U_{FW} (P_{L,R})_D U_{FW}^\dagger = \frac{1}{2} (1 \mp A \mp A_1), \quad (62)$$

где $A = \frac{\beta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E} + \frac{\tau_3 m}{E} \gamma_5$; $A_1 = \delta_1 A - A \delta_1$.

Тогда с точностью до первого порядка по константам взаимодействия гамильтониан (59) можно записать в виде

$$H_{FW} = (\Psi_{FW}^\dagger)_L \frac{E^2}{p^2} \beta E (\Psi_{FW})_L + (\Psi_{FW}^\dagger)_R \frac{E^2}{p^2} \beta E (\Psi_{FW})_R + (\Psi_{FW}^\dagger)_L B (\Psi_{FW})_L + (\Psi_{FW}^\dagger)_R B (\Psi_{FW})_R. \quad (63)$$

В (63) оператор B определяется из соотношения

$$\frac{1}{2}(B + ABA) = K'_1 - \frac{1}{2} \left(A \frac{E^2}{p^2} \beta E A_1 + A_1 \frac{E^2}{p^2} \beta E A \right). \quad (64)$$

Очевидно, что обобщение (62)–(64) можно провести для любой степени разложения по константам взаимодействия.

Учитывая вышесказанное, можно сделать интересное наблюдение. Массовый член в первом слагаемом гамильтониана (58) и последнее слагаемое в (58) появились в результате реализации механизма Хиггса спонтанного нарушения симметрии. Введение массового члена в (58) без механизма Хиггса нарушило бы $SU(2)$ -симметрию Стандартной модели в дираковском представлении.

Тем не менее, невзирая на нарушение $SU(2)$ -симметрии, введем массовый член в (58) без механизма Хиггса и перейдем затем в FW-представление. В результате мы получим гамильтониан (59), инвариантный относительно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -преобразований, но без членов, ответственных за взаимодействие фермионов со скалярными бозонами Хиггса. Таким образом, формулировка Стандартной модели в FW-представлении не требует для целей $SU(2)$ -инвариантности теории обязательного взаимодействия бозонов Хиггса с фермионами. В этом случае сектор бозонов Хиггса существенно сужается: бозоны Хиггса ответственны лишь за калибровочную инвариантность теории и взаимодействуют лишь с калибровочными бозонами W_μ^\pm , Z_μ и глюонами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение вариантов теории взаимодействующих полей в представлении Фолди–Ваутхайзена позволяет извлечь новые физические следствия по сравнению с аналогичными вариантами теории в дираковском представлении.

При учете взаимодействия реальных частиц с античастицами и связанной с этим модификации представления Фолди–Ваутхайзена в теории появляется симметрия, идентичная симметрии изотопического спина и обязанная инвариантности гамильтониана H_{FW} относительно замены знаков в массовых членах. Фермионы и антифермионы могут находиться в состояниях со

значениями $T_f^3 = \pm 1/2$, но взаимодействующие друг с другом фермионы и антифермионы должны иметь взаимно противоположные значения T_f^3 .

Фактически модифицированное FW-представление описывает привычные состояния квантовой теории поля с частицами и античастицами, которые взаимодействуют друг с другом с ограничительными условиями, приведенными выше.

Обычное FW-представление описывает некие квазиклассические состояния квантовой теории поля. В этих состояниях присутствуют частицы и античастицы. Частицы взаимодействуют друг с другом. Античастицы также взаимодействуют друг с другом, но взаимодействие реальных частиц с античастицами отсутствует, это взаимодействие возможно лишь в промежуточных (виртуальных) состояниях.

В теории возможно реализовать любую степень подавления взаимодействия реальных частиц с античастицами. Для этого можно ввести в гамильтониан вместо связи $\frac{1}{2}(I + \tau_3 \gamma_5)$ связь $\frac{1}{2}(I + \varepsilon \tau_3 \gamma_5)$, где $1 \geq \varepsilon \geq 0$.

При $\varepsilon = 0$ реализуется обычное FW-представление; при $\varepsilon = 1$ реализуется модифицированное FW-представление.

В теории имеется возможность связать нарушение CP -симметрии с нарушением введенной в модифицированном представлении Фолди–Ваутхайзена изотопической симметрией. Для этого можно ввести в гамильтониан H_{FW} около каждой связи $\frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5)$ множитель $(I + \varepsilon_1 \tau_3)$; $1 \geq \varepsilon_1 \geq 0$. Введенный множитель нарушает изотопическую симметрию теории при конечном ε_1 из-за антикоммутирования τ_3 и τ_1 . Из-за этого происходит нарушение CP -симметрии теории; степень нарушения определяется величиной ε_1 . Величина ε_1 определяет также величину изменения соответствующей константы взаимодействия.

Наконец, стандартная модель в представлении Фолди–Ваутхайзена при сохранении $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -инвариантности может быть сформулирована без требования взаимодействия бозонов Хиггса с фермионами. В этом случае бозоны Хиггса ответственны лишь за калибровочную инвариантность теории и взаимодействуют лишь с калибровочными бозонами W_μ^\pm , Z_μ и глюонами.

Представленные результаты, по-видимому, могут служить стимулом для дальнейших исследований представления Фолди–Ваутхайзена.

Благодарности. Автор выражает благодарность Б. П. Косякову за многочисленные и полезные дискуссии по результатам данной работы. Автор благодарен участникам семинара ЛТФ ОИЯИ за доброжелательное отношение и полезные дискуссии, а также С. Э. Шнеповой за большую техническую помощь при подготовке обзора.

Приложение
РАСЧЕТЫ ПРОЦЕССОВ КЭД В FW-ПРЕДСТАВЛЕНИИ

1. Рассеяние электронов в кулоновском поле $A_0(x) = -\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}$

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int d^4x \left(\Psi_{\text{FW}}^{(+)}(x, p_f, s_f) \right)^\dagger K_1^0 A_0 \Psi_{\text{FW}}^{(+)}(x, p_i, s_i) = \\ &= -\frac{i\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} U_{s_f}^\dagger \langle \mathbf{p}_f | C^0 A_0 | \mathbf{p}_i \rangle U_{s_i} = \\ &= i \frac{Ze^2}{\mathbf{q}^2} \frac{\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} U_{s_f}^\dagger \frac{1}{2E_i} \left(E_i + m + \frac{1}{E_i + m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_f \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}_i \right) U_{s_i}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i. \end{aligned}$$

Запись $K_1^0 A_0$, выполненная для удобства, фактически означает $K_1^0 A_0 \equiv K_1$ при $\mathbf{A}(x) = 0$, т.е. $A_0(x)$ становится на места, определяемые выражением (26). Это же относится и к записи $C^0 A_0$. Переход от $K_1^0 A_0$ к $C^0 A_0$ осуществлен в соответствии с (39).

Далее обычными методами с помощью матричного элемента S_{fi} можно получить дифференциальное сечение рассеяния Мотта, переходящее в нерелятивистском случае в резерфордское.

2. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Меллера)

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int d^4x d^4y \left(\Psi_{\text{FW}}^{(+)}(x, p_f, s_f) \right)^\dagger K_1^\alpha \Psi_{\text{FW}}^{(+)}(x, p_i, s_i) D_F(x - y) \times \\ &\quad \times \left(\Psi_{\text{FW}}^{(+)}(y, P_f, S_f) \right)^\dagger (-K_1)_\alpha \Psi_{\text{FW}}^{(+)}(y, P_i, S_i) = \\ &= -\frac{i\delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)}{(p_f - p_i)^2} 2\pi (U_{s_f}^\dagger \langle \mathbf{p}_f | C^\alpha | \mathbf{p}_i \rangle U_{s_i}) (U_{S_f}^\dagger \langle \mathbf{P}_f | C_\alpha | \mathbf{P}_i \rangle U_{S_i}). \end{aligned}$$

Матричный элемент S_{fi} позволяет определить меллеровское сечение рассеяния электрона.

3. Комптоновское рассеяние электронов

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i (\chi_{s_f}^\dagger 0) \left\{ \int \frac{d^4z d^4y d^4p_1}{(2\pi)^7 \sqrt{2k'_0 2k_0}} \left(e^{ip_f y} K_{1\mu} \varepsilon'^\mu e^{ik'y} \frac{e^{-ip_1 y}}{p_1^0 - \beta E(\mathbf{p}_1)} e^{ip_1 z} \times \right. \right. \\ &\quad \times K_{1\nu} \varepsilon^\nu e^{-ikz} e^{ip_i z} + e^{ip_f y} K_{1\mu} \varepsilon^\mu e^{-iky} \frac{e^{-ip_1 y}}{p_1^0 - \beta E(\mathbf{p}_1)} e^{ip_1 z} K_{1\nu} \varepsilon'^\nu e^{ik'z} e^{-ip_i z} \left. \right) + \\ &\quad + \int d^4y \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2k'_0 2k_0}} \left(e^{ip_f y} K_{2\mu\nu} \varepsilon'^\mu e^{ik'y} \varepsilon^\nu e^{-iky} e^{-ip_i y} + \right. \\ &\quad \left. + e^{ip_f y} K_{2\mu\nu} \varepsilon^\mu e^{-iky} \varepsilon'^\nu e^{ik'y} \right) \left. \right\} \begin{pmatrix} x_{s_i} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В первый интеграл объединены вклад диаграмм рис. 3, *a* и *в*, во второй — вклад диаграмм рис. 3, *б* и *г*.

Запись $K_{1\mu}\varepsilon^\mu e^{-iky}$, $K_{2\mu\nu}\varepsilon^\mu e^{-iky}\varepsilon^\nu e^{ik'y}$ и т. д. понимается в том же смысле, как это указано выше в п. 1.

Из-за закона сохранения энергии-импульса вклад членов в первой квадратной скобке выражения (31) для K_2 в матричный элемент S_{fi} равен нулю. По этой же причине зануляется вклад двух первых слагаемых во второй квадратной скобке. Далее, третье и четвертое слагаемые во второй квадратной скобке компенсируются слагаемыми в первом интеграле в выражении для S_{fi} , соответствующими вкладу диаграмм *a* и *в* на рис. 3. Таким образом, вклад в матричный элемент S_{fi} дают лишь последние четыре слагаемых в выражении (31). Указанные обстоятельства являются общими при расчетах процессов второго порядка теории возмущений с частицами, находящимися на массовой поверхности. С учетом вышесказанного

$$S_{fi} = \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(p_i + k - p_f - k')}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_0 2k'_0}} (\chi_{s_f}^\dagger 0) A \begin{pmatrix} x_{s_i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A = & C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{(1 + \beta)/2}{\beta E(\mathbf{p}_i) + k_0 - E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \varepsilon^\mu + \\ & + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{(1 - \beta)/2}{-\beta E(\mathbf{p}_i) + k_0 + E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \varepsilon^\mu + \\ & + C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{(1 + \beta)/2}{\beta E(\mathbf{p}_i) - k'_0 - E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \\ & + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{(1 - \beta)/2}{-\beta E(\mathbf{p}_i) - k'_0 + E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu, \end{aligned}$$

$$C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) = \begin{cases} eR_f R_1 \left(1 + \frac{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{E(\mathbf{p}_f) + m} \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + m} \right); & \mu = 0, \\ -eR_f R_1 \beta \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{E(\mathbf{p}_f) + m} \alpha^k + \alpha^k \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + m} \right); & \mu = k; \quad k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$N^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) = \begin{cases} eR_f R_1 \beta \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{E(\mathbf{p}_f) + m} - \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + m} \right); & \mu = 0, \\ -R_f R_1 \left(\alpha^k - \frac{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{E(\mathbf{p}_f) + m} \alpha^k \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + m} \right); & \mu = k; \quad k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$R_f \equiv R_{p_f}$, $R_1 \equiv R_{p_i+k}$ и т. д. При получении S_{fi} в импульсном представлении использовались функции (4) с соотношениями (5).

Если выбрать специальную калибровку, в которой начальный и конечный фотоны поперечно поляризованы в лабораторной системе отсчета ($\mathbf{p}_i = 0$; $\varepsilon^0 = \varepsilon'^0 = 0$; $\varepsilon\mathbf{k} = \varepsilon'\mathbf{k}' = 0$), то выражение для S_{fi} упрощается:

$$A = \frac{e^2}{m} R_f(\varepsilon\varepsilon' + \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\boldsymbol{\sigma}\varepsilon'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\varepsilon}{2k^0(2m + k^0 - k'^0)} + \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\boldsymbol{\sigma}\varepsilon\boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}'\boldsymbol{\sigma}\varepsilon'}{2k'^0(2m + k^0 - k'^0)}.$$

Далее обычными методами можно получить формулу Клейна–Нишины–Тамма для дифференциального сечения комптоновского рассеяния.

4. Собственная энергия электрона

$$\begin{aligned} -i \sum^{(2)}(p) = & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \left[K_1^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}; \nu = -1) \frac{1}{p_0 - k_0 - \beta E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} \times \right. \\ & \times K_{1\mu}(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{p}; \nu' = 1) - K_1^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}; \nu = -1) \frac{(1 + \beta)/2}{\beta E(\mathbf{p}) - k_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} \times \\ & \times K_{1\mu}(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{p}; \nu' = 1) + C^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{(1 + \beta)/2}{\beta E(\mathbf{p}) - k_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{p}) + \\ & \left. + N^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{(1 - \beta)/2}{-\beta E(\mathbf{p}) - k_0 + E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{p}) \right]. \end{aligned}$$

Для случая $p^2 = m^2$ и принимая во внимание, что для электронов $\beta\psi_{\text{FW}}^{(+)} = \psi_{\text{FW}}^{(+)}$, получаем $-i \sum^{(2)}(p) = -\frac{2e^2}{E(\mathbf{p})} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{pk + m^2}{[(p - k)^2 - m^2]}$, что совпадает с учетом нормировки спиноров во внешних электронных линиях с выражением для массового оператора в дираковском представлении.

5. Поляризация вакуума

Диаграмме рис. 5 соответствует следующее выражение для поляризационного оператора:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) = & i \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \text{Sp} \frac{1}{E(\mathbf{p}) - q^0 + E(\mathbf{p} - \mathbf{q})} N^\mu(\mathbf{p} - \mathbf{q}; \mathbf{p}) \frac{1 + \beta}{2} N^\nu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{q}) + \right. \\ & \left. + \text{Sp} \frac{1}{E(\mathbf{p}) + q^0 + E(\mathbf{p} - \mathbf{q})} N^\mu(\mathbf{p} - \mathbf{q}; \mathbf{p}) \frac{1 - \beta}{2} N^\nu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{q}) \right\}. \end{aligned}$$

После вычисления шпуров выражение для $(-i)\Pi^{\mu\nu}$ совпадает с гайтлеровским тензором индукции $L^{\mu\nu}$ [5].

6. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

При вычислении радиационных поправок по диаграммам рис. 6 оказывается, что матричные элементы S_{fi} , соответствующие диаграммам с электрон-позитронными пропагаторами, сокращаются с соответствующими частями матричных элементов, для беспропагаторных диаграмм рис. 6, 2, 3, 4. В итоге

с учетом предельного процесса Гайтлера для сингулярных знаменателей [5] матричный элемент для искомых радиационных поправок имеет вид

$$\begin{aligned}
S_{fi} = & \frac{1}{(2\pi)^3} (\chi_{S_f}^\dagger 0) \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \int \frac{d\varepsilon \delta(\varepsilon)}{\mathbf{p}_f^2 \varepsilon (2 + \varepsilon)} \left[C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}) \times \right. \right. \\
& \times \frac{E(\mathbf{p}_f) + E(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon))}{E(\mathbf{p}_f) - k^0 - E(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k})} C^\mu(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f(1 + \varepsilon)) + \\
& \quad \left. \left. + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{E(\mathbf{p}_f) + E(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon))}{E(\mathbf{p}_f) - k^0 + E(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k})} N^\mu(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f(1 + \varepsilon)) \right] C^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) + \right. \\
& \quad \left. + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \int \frac{d\varepsilon \delta(\varepsilon)}{\mathbf{p}_i^2 \varepsilon (2 + \varepsilon)} \left[C_\mu(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon); \mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}) \times \right. \right. \\
& \times \frac{E(\mathbf{p}_i) + E(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon))}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 - E(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k})} C^\mu(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + N_\mu(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon); \mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}) \times \\
& \times \frac{E(\mathbf{p}_i) + E(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon))}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 + E(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k})} N^\mu(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \left. \right] C^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) - \\
& - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{1}{2E(\mathbf{p}_f)} \left[\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) - k^0 + E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) C^\mu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) - k^0 - E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) N^\mu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f) \right] N^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) - \\
& - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{1}{2E(\mathbf{p}_i)} N^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) \left[\frac{1}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 - E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} \times \right. \\
& \quad \times N_\mu(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) C^\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \frac{1}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 + E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} \times \\
& \quad \left. \left. \times C_\mu(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) N^\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \right] - \right. \\
& - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \left[C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) - k^0 - E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} C^\nu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_\nu(q) \times \right. \\
& \quad \left. \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 - E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + N^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) - k^0 + E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} C^\nu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_\nu(q) \times \\
 & \quad \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 + E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \\
 & + N^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) - k^0 + E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} N^\nu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_\nu(q) \times \\
 & \quad \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 - E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \\
 & + C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) - k^0 - E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} N^\nu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_\nu(q) \times \\
 & \times \left. \frac{1}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 + E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \right] - C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) \frac{\Pi^{\mu\nu}(q)}{q^2} A_\nu(q) \left. \vphantom{\frac{1}{E(\mathbf{p}_i) - k^0 + E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})}} \right\} \begin{pmatrix} \chi_{s_i} \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

После перенормировки массы и заряда электрона написанный матричный элемент S_{fi} позволяет вычислить аномальный магнитный момент электрона и лэмбовский сдвиг энергетических атомных уровней. Конечные результаты вычислений совпадают с аналогичными величинами в дираковском представлении.

7. Аннигиляция электрон-позитронной пары

Процессу аннигиляции электрон-позитронной пары во втором порядке теории возмущений соответствуют диаграммы рис. 3 с заменой $\varepsilon, k \rightarrow \varepsilon_1, -k_1$; $\varepsilon', k' \rightarrow \varepsilon_2, k_2$; $p_i, s_i \rightarrow p_-, s_-$; $p_f, s_f \rightarrow -p_+, s_+$.

С учетом восьмимерного обобщения матричный элемент процесса

$$S_{+-} = \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(p_- + p_+ - k_1 - k_2)}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_1^0 2k_2^0}} (0 V_{s_+}^\dagger) \frac{1}{2} A_1 \begin{pmatrix} U_{s_-} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор A_1 по своей структуре с учетом указанной выше замены совпадает с оператором A в выражении S_{fi} для комптоновского рассеяния электронов. При этом $C^\mu \rightarrow C_1^\mu$, $N^\mu \rightarrow N_1^\mu$,

$$C_1^\mu(-\mathbf{p}_+; \mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1) = \begin{cases} eR_{p_+} \left(\frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5) - \frac{\beta \boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{p}_+)}{E(-\mathbf{p}_+) + \tau_3 m} \frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5) \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{\beta \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1)}{E(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1) + \tau_3 m} \right) R_{p_- - k_1}; \mu = 0, \\ -eR_{p_+} \left(\frac{\beta \boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{p}_+)}{E(-\mathbf{p}_+) + \tau_3 m} \alpha^K \frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5) - \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5) \alpha^k \frac{\beta \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1)}{E(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1) + \tau_3 m} \right) R_{p_- - k_1}; \\ \mu = k, k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$N_1^\mu(-\mathbf{p}_+; \mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1) = \begin{cases} eR_{p_+} \left(\frac{\beta\alpha(-\mathbf{p}_+)}{E(-\mathbf{p}_+) + \tau_3 m} \frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5) \frac{\beta\alpha(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1)}{E(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1) + \tau_3 m} \right) R_{p_- - k_1}; \mu = 0, \\ -eR_{p_+} \left(\alpha^k \frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5) - \frac{\beta\alpha(-\mathbf{p}_+)}{E(-\mathbf{p}_+) + \tau_3 m} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{2}(I + \tau_1 \gamma_5) \alpha^k \frac{\beta\alpha(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1)}{E(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1) + \tau_3 m} \right) R_{p_- - k_1}; \\ \mu = k, k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Выражение для S_{+-} позволяет получить дифференциальное сечение аннигиляции электрон-позитронной пары, которое совпадает с сечением этого процесса, вычисленным в представлении Дирака.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foldy L. L., Wouthuysen S. A.* // Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 29.
2. *Blount E. I.* // Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 2454.
3. *Case K. M.* // Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 1323.
4. *Незнамов В. П.* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Теор. и прикл. физика». 1988. Вып. 2. С. 21.
5. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
6. *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой теории поля. М.: Мир, 1971.
7. *Незнамов В. П.* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Теор. и прикл. физика». 1989. Вып. 1. С. 3.
8. *Незнамов В. П.* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Теор. и прикл. физика». 1990. Вып. 1. С. 30.
9. *Незнамов В. П.* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Теор. и прикл. физика». 2004. Вып. 1–2. С. 41; hep-th/041150.
10. *Бьеркен Д. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978. Т. 1.
11. *Resati E., Zino G.* // Nuovo Cim. A. 1976. V. 33. P. 205.