

УДК 539.12

КЛАССИЧЕСКИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

А. В. Зотов

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

ВВЕДЕНИЕ	759
ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ	768
ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ	778
ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ	794
УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ VI И МОДЕЛЬ КАЛОДЖЕРО–ИНОЗЕМЦЕВА	811
О СВЯЗИ ФОРМУЛ ВЕЙЛЯ И КОНЦЕВИЧА ДЛЯ КВАНТОВОГО УМНОЖЕНИЯ	820
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	832
ПРИЛОЖЕНИЕ	832
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	840

УДК 539.12

КЛАССИЧЕСКИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

А. В. Зотов

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Обзор посвящен исследованию взаимосвязей между интегрируемыми системами классической механики, построению их теоретико-полевых обобщений и некоторым вопросам квантования пуассоновских многообразий.

The review is devoted to the investigation of interrelations between integrable systems, construction of their field-theoretical generalizations and to some problems related to quantization of Poisson manifolds.

ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемые системы классической механики представляют собой исключительные случаи систем дифференциальных уравнений, для которых существует нужное число независимых интегралов движения. Значительный прогресс в изучении таких систем появился в связи с открытием в конце 1960-х гг. К. Гарднером, Дж. Грином, М. Крускалом и Р. Миурой метода обратной задачи рассеяния, или метода изоспектральной деформации, сформулированного П. Лаксом. Идея метода очень проста. Уравнения движения некоторой динамической системы удалось записать в виде

$$\partial_t L = [L, M],$$

где L и M — пара матриц (пара Лакса). Тогда из этого уравнения следует, что матрица $L(t)$ в процессе эволюции подвергается преобразованию подобия:

$$L(t) = g(t)L(0)g^{-1}(t), \quad M = \partial_t g g^{-1}.$$

Следовательно, собственные значения $L(t)$ от времени не зависят и являются интегралами движения.

Однако во многих важных случаях рассмотрение лишь конечномерных алгебр Ли недостаточно. Например, число функционально независимых инвариантов полупростой алгебры Ли равно ее рангу, так что указанные выше интегралы обеспечивают интегрируемость лишь для тех орбит, размерность

которых не превышает удвоенного ранга. Это приводит к естественному обобщению конструкции — рассмотрению уравнений Лакса, содержащих дополнительный параметр z (так называемый спектральный параметр), рассматриваемый как локальная координата на римановой поверхности:

$$\partial_t L(z) = [L(z), M(z)].$$

В таком виде уравнения Лакса впервые появились в работах И. Кричевера и С. Новикова [1]. Инварианты $\text{tr}(L(z)^k)$, как и прежде, являются интегралами движения, но теперь уже зависят от z и тем самым являются производящими функциями законов сохранения.

Уравнения Лакса со спектральным параметром оказались исключительно полезными для исследования интегрируемых систем. Было доказано, что в общем положении эти уравнения линеаризуются на многообразии Якоби алгебраической кривой, заданной характеристическим уравнением

$$\det(L(z) - \lambda) = 0.$$

Этот результат приводит, в принципе, к явному решению уравнений движения в терминах η -функций Римана (в этом случае система называется алгебраически интегрируемой). Взгляд на матрицу Лакса как на мероморфную матричнозначную функцию на римановой поверхности позволил использовать методы алгебраической геометрии.

Существенное развитие геометрического подхода произошло с появлением работы Н. Хитчина [2]. В ней было показано, что вполне интегрируемые системы естественным образом возникают на пространстве модулей голоморфных расслоений над римановыми поверхностями. Равенство количества степеней свободы количеству независимых интегралов в инволюции оказалось в этой конструкции следствием теоремы Римана–Роха. Первые явные примеры систем Хитчина появились в работах А. Горского и Н. Некрасова [3, 4]. В частности, в работе Н. Некрасова была построена эллиптическая модель Годена, расширяющая класс спиновых обобщений модели Калоджеро–Мозера [5] (КМ). Сопоставление каждому интегрируемому случаю некоторой алгебро-геометрической конструкции оказалось удобным и наглядным для классификации. Например, интегрируемые системы с рациональными потенциалами возникают на сфере, а с эллиптическим — на торе.

Параллельно развивался теоретико-групповой подход к изучению интегрируемых систем. Например, в работах М. Ольшанецкого и А. Переломова [6] было показано, что динамика некоторых многочастичных интегрируемых систем может быть получена в результате редукции свободного движения на фазовом пространстве большей размерности.

Объединение алгебро-геометрических и теоретико-групповых методов позволило решить ряд важных задач и достигнуть понимания во многих вопросах, некоторые из которых составляют содержание обзора.

Оказалось, что применение теоретико-группового подхода к описанию систем Хитчина позволяет описывать интегрируемую динамику сразу в терминах представления Лакса со спектральным параметром [7]. Изначально свободная динамика задается на пространстве сечений голоморфного векторного расслоения E над римановой поверхностью Σ_n с n отмеченными точками с помощью матричнозначных полей $\Phi \in \Omega_{C^\infty}^{(1,0)}(\Sigma_n, \text{End}^* E)$ и связности \bar{A} , задающей на E комплексную структуру. Для этого вводится симплектическая форма

$$\omega = \int_{\Sigma_n} \text{tr} (D\Phi \wedge D\bar{A})$$

и гамильтонианы

$$H_j = \int_{\Sigma_n} \nu_j \text{tr} (\Phi^j),$$

где ν_j — некоторые $(1 - j, 1)$ -дифференциалы на Σ_n . Тогда динамика по временам t_j , соответствующим j -м гамильтонианам, свободна:

$$\partial_{t_j} \Phi = 0.$$

Заданные таким образом симплектическая форма и гамильтонианы инвариантны относительно калибровочных преобразований:

$$\Phi \rightarrow f^{-1} \Phi f, \quad \bar{A} \rightarrow f^{-1} \bar{\partial} f + f^{-1} \bar{A} f.$$

Заметим также, что для преобразованного поля $\Phi' = f^{-1} \Phi f$ уравнение движения имеет вид

$$\partial_{t_j} \Phi' = [\Phi', M_j], \quad M_j = f^{-1} \partial_{t_j} f,$$

т. е. записывается в лаксовой форме. Инвариантность симплектической формы позволяет провести гамильтонову редукцию относительно калибровочных преобразований. В результате этой редукции поле Φ становится лаксовой матрицей со спектральным параметром (локальной координатой на Σ_n) и определяется как решение уравнения момента:

$$\mu(\bar{A}, \Phi) = \bar{\partial} \Phi + [\bar{A}, \Phi] = 0.$$

Наличие отмеченных точек фиксирует полюса и вычеты $\Phi(z)$.

В то же время решение уравнения момента зависит и от некоторых дополнительных данных, например, от степени расслоения E . По сути, этот топологический инвариант определяет граничные условия для решения уравнения момента. Так, для $\text{deg } E = 0$ на эллиптической кривой решением будет лаксова матрица модели Калоджеро, а для $\text{deg } E = 1$ — эллиптического $\text{SL}(N, \mathbb{C})$ -волчка. Вообще, все явные результаты, излагаемые в работе,

относятся к эллиптическому случаю. Преобразование, меняющее степень, называется модификацией расслоения E . На языке лаксовых матриц соответствующих систем оно выглядит как сингулярное калибровочное преобразование

$$L(z) \rightarrow \Xi(z)L(z)\Xi(z)^{-1},$$

где под сингулярностью имеется в виду вырожденность $\Xi(z)$ в некоторой точке. Оказывается возможным определить $\Xi(z)$ явно и тем самым установить калибровочную эквивалентность некоторого семейства систем, включающую эллиптическую модель Калоджеро и эллиптический волчок [8].

Кроме того, $\text{rank } E$ -кратное применение модификации переводит исходную систему в себя, т. е. описывает преобразования Бэклунда.

На данный момент далеко не все вполне интегрируемые системы удалось описать как системы Хитчина. Так, например, до сих пор не решенной остается проблема доказательства алгебраической интегрируемости для бесспиновых систем, построенных по полупростым алгебрам Ли. В рамках подхода Хитчина воспроизведены системы только для A_N -серии. Проблема состоит в том, что размерность многообразия Якоби спектральной кривой $\det(L(z) - \lambda)$ оказывается для указанных систем больше размерности фазового пространства. Один из естественных способов решения — проведение редукции по некоторым дискретным симметриям из спиновой A_N -системы, замораживающей степени свободы, связанные с орбитами коприсоединенного действия. Пример такой процедуры используется для описания системы Калоджеро–Иноземцева [9] с одной степенью свободы, и алгебраическая интегрируемость в этом случае доказана [10]. Важность этой системы заключается еще и в том, что ее уравнения движения представляют собой автономный аналог знаменитого уравнения Пенлеве VI:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = - \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp'(u + \omega_\alpha),$$

где τ — модуль эллиптической кривой Σ ; $\omega_\alpha = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2} \right\}$, а ν_α — произвольные константы. Неавтономность означает, что потенциал явно зависит от времени, роль которого играет модуль τ . Оказывается, что данное уравнение можно записать в виде

$$\partial_t L(z) - \partial_z M(z) = [L(z), M(z)]$$

с теми же $L(z)$ и $M(z)$, что и для автономной системы. Вообще описанная выше конструкция систем Хитчина допускает обобщение на уравнения изомондромных деформаций. При этом модификации используются для описания и вычисления дискретных групп симметрий.

Метод обратной задачи рассеяния, разработанный Л. Фаддеевым, В. Захаровым и А. Шабатом [11, 12], позволяет получать законы сохранения для уравнений в частных производных в случае, когда они записываются в виде уравнений нулевой кривизны

$$\partial_t \tilde{L}(z) - \partial_x \tilde{M}(z) = [\tilde{L}(z), \tilde{M}(z)].$$

Например, использование метода обратной задачи рассеяния позволило А. Белавину и В. Захарову получить инстантонные решения уравнений дуальности для полей Янга–Миллса [13]. Оказывается, существует обобщение систем Хитчина, дающее конструктивный метод построения теоретико-полевых обобщений классических интегрируемых систем. Другими словами, в классе систем Хитчина можно указать способ получения $\tilde{L}(z)$, $\tilde{M}(z)$.

Для многочастичной системы это означает, что импульсы и координаты частиц p_i, q_j должны рассматриваться как поля:

$$\{p, q\} = 1 \longrightarrow \{p(x), q(y)\} = \delta(x - y).$$

Переменная x может быть координатой на вещественной прямой или окружности. В последнем случае все поля считаются периодическими функциями на этой окружности, а гамильтониан задается интегралом $H = \oint h(x)$. Вычисление плотности $h(x)$ является нетривиальной задачей, так как $\text{tr}(L^k)$ уже не являются сохраняющимися величинами.

Интегрируемые системы проявили себя во многих областях теоретической физики. Оказалось, что многие известные системы описывают эффективное низкоэнергетическое действие в суперсимметричных калибровочных теориях [14]. Например, чистые калибровочные $\mathcal{N} = 2$ теории связаны с цепочками Тоды, XXX спиновой цепочке отвечает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная квантовая хромодинамика с группой $SU(N_c)$ и числом мультиплетов материи $N_f < 2N_c$. Модель Калоджеро появляется с введением присоединенного $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплета. Также активно изучается связь квантовых интегрируемых систем с уравнениями ренормгруппы в калибровочных теориях. Показано, что в однопетлевом приближении спектр аномальных размерностей некоторых операторов в суперсимметричных калибровочных теориях совпадает со спектром квантовых интегрируемых цепочек. Методы интегрируемых систем активно используются в исследовании задач лапласовского роста и матричных моделях.

В работе также изучаются некоторые вопросы деформационного квантования. Задача ставится следующим образом. Пусть на некотором гладком пуассоновом многообразии M задана скобка Пуассона. В локальных координатах $\{x^i\}$ для пары функций f и g имеем

$$\{f, g\} = \alpha^{ij} \partial_i f \partial_j g,$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Скобка Пуассона по определению должна быть антисимметричной и удовлетворять тождеству Якоби

$$\alpha^{ij} = -\alpha^{ji}, \quad \alpha^{in} \partial_n \alpha^{jk} + \alpha^{kn} \partial_n \alpha^{ij} + \alpha^{jn} \partial_n \alpha^{ki} = 0.$$

Стандартная каноническая скобка для $\{x^i\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\} \in \mathbb{R}^{2n}$ записывается с помощью постоянной $2n \times 2n$ -матрицы ϑ^{ij} , которая в виде блоков $n \times n$ выглядит следующим образом:

$$\|\vartheta\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При квантовании функции f ставится в соответствие некоторый оператор \hat{f} . Для того, чтобы это соответствие было однозначным, необходимо зафиксировать упорядочение. Далее, произведение двух операторов $\hat{f}\hat{g}$ тоже должно быть упорядочено. В результате получится выражение, соответствующее уже не просто произведению fg , а тому, что называется квантовым умножением $f * g$:

$$\begin{array}{ccc} \hat{f}, \hat{g} & \longrightarrow & f, g \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{f}\hat{g} & \longrightarrow & f * g. \end{array}$$

Формула для квантового умножения в случае стандартной пуассоновой структуры на \mathbb{R}^{2n} давно известна. Для симметрического (вейлевского) упорядочения она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f * g &= fg + \hbar \vartheta^{ij} \partial_i f \partial_j g + \\ &+ \frac{\hbar^2}{2!} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \partial_i \partial_k f \partial_j \partial_l g + \frac{\hbar^3}{3!} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \partial_i \partial_k \partial_m f \partial_j \partial_l \partial_n g + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n} \prod_{k=1}^n \vartheta^{i_k j_k} \left(\prod_{k=1}^n \partial_{i_k} \right) (f) \times \left(\prod_{k=1}^n \partial_{j_k} \right) (g) = \\ &= e^{\hbar \vartheta^{ij} \partial_i^{(1)} \partial_j^{(2)}} f(x_{(1)}) g(x_{(2)}) \Big|_{x_{(1)}=x_{(2)}=x}. \end{aligned}$$

Однако часто фазовое пространство динамической системы не является плоским. Простейшим примером такой ситуации является вращение твердого тела. Фазовым пространством является двумерная сфера. Таким образом, возникает задача написания формулы для квантового умножения в случае произвольного пуассонова бивектора α^{ab} . Рецепт написания такого квантового умножения был сформулирован М. Концевичем [15]:

$$f * g := \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{\Gamma \in G_n} \omega_{\Gamma} B_{\Gamma, \alpha}(f, g),$$

где выражения $B_{\Gamma, \alpha}(f, g)$ строятся с помощью графов $\Gamma \in G_n$ (или диаграмм) Концевича; ω_{Γ} — постоянные коэффициенты, отвечающие графам $\Gamma \in G_n$. Для значений коэффициентов указаны интегральные формулы. Однако вычислить эти коэффициенты в произвольном случае оказывается очень сложной задачей, и для их нахождения используются различные технические приемы. В данной работе предлагается воспользоваться теоремой Концевича, утверждающей, что все формулы квантового умножения эквивалентны по модулю диффеоморфизмов и некоторой калибровочной группы, действующей на пространстве квантовых умножений. Поэтому, сделав замену переменных $x \rightarrow z(x)$ в известной формуле Вейля, можно ожидать, что с помощью калибровочной группы полученное выражение можно будет представить в виде формулы Концевича в координатах z с некоторой $\alpha^{ab}(\vartheta^{ij}, z)$ [16]. В работе такие вычисления сделаны до третьего порядка по \hbar . Таким образом, можно получить формулу Концевича с численными значениями коэффициентов. Кроме того, выясняется, что при замене переменных пуассонов бивектор преобразуется нековариантным образом. Более точно, при замене переменных к пуассонову бивектору появляются квантовые поправки вида

$$\alpha^{ab} = \vartheta^{ij} \partial_i z^a \partial_j z^b + \hbar^2 \alpha_2^{ab}(z, x) + \dots$$

В разд. 1 описана конструкция систем Хитчина. Динамика на пространстве модулей голоморфных векторных расслоений возникает в ней в результате редукции из свободной гамильтоновой теории поля. В результате редукции матричнозначное поле становится матрицей Лакса для некоторой интегрируемой системы, а пространство модулей (параметров) расслоений является для нее конфигурационным пространством. Системы, получаемые вышеуказанным способом, существенно различаются в зависимости от топологического инварианта (степени) рассматриваемых расслоений. Так, например, может быть описана система Калоджеро

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + g^2 \sum_{i>j}^N \wp(u_i - u_j),$$

где v_k — импульсы частиц, а u_k — сопряженные им координаты, или эллиптический волчок

$$H^{\text{top}} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S} \hat{\wp} \mathbf{S}),$$

где \mathbf{S} — матрица $N \times N$ с нулевым следом (матрица моментов); $\wp(\alpha)$ — обратные компоненты главных моментов инерции и $\hat{\wp} \mathbf{S} = \sum_{\alpha} S_{\alpha} \wp(\alpha) \sigma_{\alpha}$.

Однако, как показано в разд. 2, существует преобразование (модификация расслоений), которое изменяет этот инвариант и соответственно переводит одну систему в другую. На языке лаксовых матриц это преобразование

устанавливает калибровочную эквивалентность: $L_1(z) = \Xi(z)L_2(z)\Xi(z)^{-1}$. На эллиптической кривой размерность пространства модулей голоморфных стабильных расслоений равна (N, deg) , где N — ранг, deg — степень расслоений. Поэтому N последовательных применений верхних (или нижних) модификаций переводит систему в себя. Тем самым такая процедура описывает преобразования Бэклунда.

В разд. 2 методы и конструкции, описанные в разд. 1, демонстрируются на различных примерах. Эллиптическая система Калоджеро и волчок описаны как системы Хитчина с $\text{deg } E = 0$ и $\text{deg } E = 1$ соответственно. Матрица $\Xi(z)$ построена таким образом, что

$$L^{\text{top}} = \Xi(z)L\Xi(z)^{-1}.$$

Таким образом, устанавливается калибровочная эквивалентность между указанными системами.

В разд. 3 описан конструктивный метод построения теоретико-полевых обобщений для некоторых классических интегрируемых систем. Другими словами, для систем Хитчина указан способ получения \tilde{L}, \tilde{M} по паре Лакса в механике L, M . Метод продемонстрирован на примере двухчастичной системы Калоджеро, уравнения движения которой можно записать в виде

$$\begin{cases} u_t = -\frac{v}{8\pi^2}, \\ v_t = 2h\wp'(2u). \end{cases}$$

Результатом теоретико-полевого обобщения являются следующие уравнения:

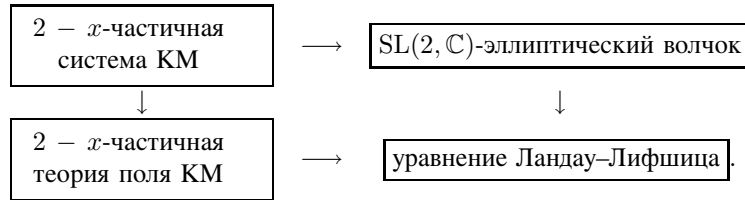
$$\begin{cases} u_t = -\frac{v}{8\pi^2} \left(1 - \frac{u_x^2}{h} \right), & h = u_x^2 + v^2 = \text{const}, \\ v_t = \frac{1}{8\pi^2 h} \partial_x (v^2 u_x) - 2(3u_x^2 - h)\wp'(2u) + 6\partial_x (u_x \wp(2u)) + \\ \quad + \frac{1}{2} \partial_x \left(\frac{u_{xxx} v - v_x u_{xx}}{v^3} \right), \end{cases}$$

представимые в виде уравнения нулевой кривизны для некоторых $\tilde{L}(z), \tilde{M}(z)$, выписанных в разд. 3 явно.

При этом процедура модификации $\tilde{L}_1 = \tilde{\Xi} \tilde{L}_2 \tilde{\Xi}^{-1} + \partial_x \tilde{\Xi} \tilde{\Xi}^{-1}$ устанавливает калибровочную эквивалентность полученного уравнения с уравнением Ландау–Лифшица [17, 18], описывающим непрерывный предел в XYZ -магнетике и являющимся полевым обобщением $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -волчка:

$$\partial_t \mathbf{S} = \frac{1}{2} [\mathbf{S}, J(\mathbf{S})] + \frac{1}{2} [\mathbf{S}, \partial_{xx} \mathbf{S}].$$

Этот результат можно изобразить на диаграмме:



В разд. 4 предложено представление Лакса со спектральным параметром для эллиптической модели Калоджеро–Иноземцева, задаваемой гамильтонианом

$$H^{\text{КИ}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + g^2 \sum_{i>j}^N (\wp(u_i - u_j) + \wp(u_i + u_j)) + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp(u_i + \omega_\alpha).$$

В случае N -частичной задачи пара Лакса задана $3N \times 3N$ -матрицами. Однако, как показано в разд. 4, в случае одной степени свободы существует 2×2 -представление. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H^{\text{КИП}} = \frac{1}{2} v^2 + \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp(u + \omega_\alpha),$$

где «П» напоминает о связи этой системы с уравнением Пенлеве VI. Показано, что та же пара Лакса удовлетворяет, кроме уравнения Лакса, и уравнению изомонодромных деформаций:

$$\partial_t L - \partial_z M = [L, M].$$

При этом последнее уравнение эквивалентно уравнению Пенлеве VI.

В разд. 5 проверяется утверждение М. Концевича об эквивалентности формул деформационного квантования пуассоновых многообразий по модулю диффеоморфизмов и некоторой группы симметрий. Установление такой эквивалентности между формулами Вейля и Концевича дает метод нахождения коэффициентов в формуле для квантового умножения. Явные вычисления проведены до третьего порядка.

Показано, что если в формуле Вейля, записанной в терминах постоянного пуассонова бивектора ϑ для функций $f(x)$ и $g(x)$, сделать замену переменных $x \rightarrow z(x)$, то, используя калибровочные преобразования, можно получить

формулу Концевича с фиксированными численными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
f * g = & fg + \hbar \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g + \\
& + \hbar^2 \left[\frac{1}{2} \alpha^{ab} \alpha^{cd} \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g + \frac{1}{3} \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f) \right] + \\
& + \hbar^3 \left[\frac{1}{6} \alpha^{ab} \alpha^{cd} \alpha^{ho} \partial_a \partial_c \partial_h f \partial_b \partial_d \partial_o g + \right. \\
& + \frac{1}{3} \alpha^{tp} \partial_p \alpha^{as} \partial_s \partial_t \alpha^{bc} (\partial_a \partial_c f \partial_b g - \partial_a \partial_c g \partial_b f) + \\
& + \left[\frac{2}{3} \alpha^{dp} \partial_p \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} + \frac{1}{3} \alpha^{ap} \partial_p \alpha^{ds} \partial_s \alpha^{cb} \right] \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g + \\
& + \frac{1}{6} \alpha^{as} \alpha^{ct} \partial_s \partial_t \alpha^{bd} (\partial_a \partial_b \partial_c f \partial_d g - \partial_a \partial_b \partial_c g \partial_d f) + \\
& \left. + \frac{1}{3} \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} \alpha^{hd} (\partial_a \partial_b \partial_h f \partial_c \partial_d g - \partial_a \partial_b \partial_h g \partial_c \partial_d f) \right] + O(\hbar^4).
\end{aligned}$$

Члены бивекторного типа отсутствуют, так как они не влияют на ассоциативность в третьем порядке. Однако они могут быть использованы для переопределения $\alpha(z)$. Показано, что при замене координат пуассонов бивектор приобретает поправки по \hbar :

$$\begin{aligned}
\alpha^{ab} = & \vartheta^{ij} \frac{\partial z^a}{\partial x^i} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} + \hbar^2 \left[\frac{1}{3!} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \frac{\partial^3 z^a}{\partial x^i \partial x^k \partial x^m} \frac{\partial^3 z^b}{\partial x^j \partial x^l \partial x^n} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{18} S^{spt} \partial_p \partial_s \partial_t \alpha^{ab} - \frac{1}{4} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^s}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^t}{\partial x^j \partial x^l} \partial_s \partial_t \alpha^{ab} \right] + \\
& + \hbar^2 (\text{бивекторные члены}),
\end{aligned}$$

где

$$S^{abc} = \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \left(\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} \frac{\partial z^c}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 z^c}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^a}{\partial x^j} \frac{\partial z^b}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^c}{\partial x^j} \frac{\partial z^a}{\partial x^l} \right).$$

В заключении подводятся итоги и перечисляются нерешенные проблемы.

1. ГОЛОМОРФНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

В этом разделе опишем способ получения уравнений Лакса с помощью гамильтоновой редукции. С этой целью построим некоторые расслоения (расслоения Хиггса) на римановой поверхности и в терминах сечений (полей Хиггса) зададим гамильтонову динамику. Инвариантность симплектической

формы и гамильтонианов позволит провести гамильтонову редукцию. При этом специальные свойства расслоений (квазипараболические структуры в отмеченных точках) зафиксируют после редукции структуру особенностей матрицы Лакса.

1.1. Пространство модулей голоморфных расслоений в описании Чеха.

Пусть E — тривиальное голоморфное векторное расслоение ранга r со структурной группой G над римановой кривой Σ_n с n отмеченными точками. Рассмотрим такое покрытие кривой Σ_n открытыми дисками \mathcal{U}_a , $a = 1, 2, \dots$, что любая карта содержит не более одной отмеченной точки w_α .

Как известно, по векторному расслоению и покрытию $\{\mathcal{U}_a\}$ можно построить функции перехода $\{g_{ab}\}$, удовлетворяющие требованию коцикла:

$$g_{ab}(z)g_{bc}(z)g_{ca}(z) = \text{Id}, \quad z \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \cap \mathcal{U}_c, \quad (1.1)$$

и

$$g_{ab} = g_{ba}^{-1}. \quad (1.2)$$

Поэтому набор $\{g_{ab}\}$ называют также склеивающим коциклом.

Функции переклейки g_{ab} определены на пересечении карт $\mathcal{U}_{ab} = \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$. Тривиальность расслоения E означает, что на каждой карте \mathcal{U}_a существует G -значная функция h_a , являющаяся сечением локального пучка $\Omega_{C^\infty}^0(\Sigma_n, \text{Aut } E)$ и $g_{ab} = h_a h_b^{-1}$. Голоморфность расслоения означает, что функции g_{ab} голоморфны, т. е.

$$\bar{\partial}_a g_{ab} = \bar{\partial}_b g_{ab} = 0, \quad g_{ab} \in \Omega_{\text{hol}}^0(\mathcal{U}_{ab}, \text{Aut } E). \quad (1.3)$$

Голоморфная структура на E может быть задана с помощью дифференциала d'' . На каждой карте \mathcal{U}_a он записывается в виде

$$d''_a = \bar{\partial}_a + \bar{A}_a, \quad \bar{A}_a = h_a^{-1} \bar{\partial}_a h_a, \quad \bar{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_a},$$

где z_a — локальная координата на \mathcal{U}_a . В этом случае

$$h_a d''_a = d''_b h_b = 0,$$

а условие (1.3) означает, что $\bar{A}_a = \bar{A}_b \bar{\partial}_a \bar{z}_b$ на \mathcal{U}_{ab} .

Преобразование $h_a \rightarrow f_a h_a$, заданное с помощью функции, голоморфной на \mathcal{U}_a ($f_a \in \Omega_{\text{hol}}^0(\mathcal{U}_a, \text{Aut } E)$), не меняет \bar{A}_a . Аналогичным образом преобразование $h_b \rightarrow f_b h_b$, заданное с помощью функции $f_b \in \Omega_{\text{hol}}^0(\mathcal{U}_b, \text{Aut } E)$, не меняет \bar{A}_b . Следовательно, голоморфные структуры, заданные функциями переклейки g_{ab} и $f_a g_{ab} f_b^{-1}$, эквивалентны. Глобально имеется набор отображений

$$\mathcal{L}_\Sigma^C = \{g_{ab}(z_a) = h_a(z_a) h_b^{-1}(z_b(z_a)), \quad z_a \in \mathcal{U}_{ab}, \quad a, b = 1, 2, \dots, \}, \quad (1.4)$$

задающий голоморфные структуры на E или $P = \text{Aut } E$, в зависимости от выбора представления. Индекс « C » символизирует чеховское описание.

Степенью расслоения E называется степень линейного, детерминантного расслоения $L = \det g$. Данное выше определение голоморфных структур работает для произвольной степени.

Рассмотрим открытое подмножество стабильных голоморфных структур $\mathcal{L}_\Sigma^{C, \text{st}}$ в \mathcal{L}_Σ^C . На $\mathcal{L}_\Sigma^{C, \text{st}}$ калибровочная группа $\mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}}$ действует автоморфизмами:

$$g_{ab} \rightarrow f_a g_{ab} f_b^{-1}, \quad f_a = f(z_a), \quad f_b = f_b(z_b(z_a)), \quad f \in \mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}}. \quad (1.5)$$

Калибровочные преобразования $\mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}}$ в отмеченных точках зададим локально. Рассмотрим некоторый набор

$$P_1, \dots, P_\alpha, \dots, P_n$$

параболических подгрупп группы G , приписанных к отмеченным точкам. Далее, положим

$$f_a = \begin{cases} \tilde{f}_\alpha^{(0)} + z_\alpha f_\alpha^{(1)} + \dots, & \tilde{f}_\alpha^{(0)} \in P_\alpha, \text{ если} \\ & z_\alpha = z - w_\alpha, w_\alpha - \text{отмеченная точка,} \\ f_a^{(0)} + z_a f_a^{(1)} + \dots, & f_a^{(0)} \in G, \text{ если } a \neq \alpha \\ & (\text{в } \mathcal{U}_a \text{ отмеченных точек).} \end{cases} \quad (1.6)$$

Из (1.5) следует, что левое действие калибровочной группы в отмеченных точках сохраняет флаги

$$E_\alpha \sim P_\alpha \setminus G, \quad E_\alpha = Fl_1(\alpha) \supset \dots \supset Fl_{s_\alpha}(\alpha) \supset Fl_{s_\alpha+1}(\alpha) = 0. \quad (1.7)$$

Такую структуру в отмеченных точках будем называть квазипараболической. Следуя [19], определим пространство модулей стабильных голоморфных расслоений $\mathcal{M}_n(\Sigma, G)$ с квазипараболической структурой в отмеченных точках как фактор-пространство по калибровочной группе (1.6):

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}} \backslash \mathcal{L}_\Sigma^{C, \text{st}}. \quad (1.8)$$

Для $G = \text{GL}(N, \mathbb{C})$ получим несвязное объединение компонент, нумеруемых степенями $d = c_1(\det E) : \mathcal{M}_n(\Sigma, G) = \bigsqcup \mathcal{M}_n^{(d)}$.

Касательное пространство к $\mathcal{M}_n(\Sigma, G)$ изоморфно $h^1(\Sigma, \text{End } E)$. Его размерность вычисляется с помощью теоремы Римана–Роха. Для кривых без отмеченных точек ($n = 0$) имеем

$$\dim h^0(\Sigma, \text{End } E) - \dim h^1(\Sigma, \text{End } E) = (1 - g) \dim G.$$

Для стабильных расслоений $\dim h^0(\Sigma, \text{End } E) = 1$, тогда

$$\dim \mathcal{M}_0(\Sigma, G) = (g - 1)N^2 + 1$$

для $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ и

$$\dim \mathcal{M}_0(\Sigma, G) = (g - 1) \dim G + 1$$

для простых групп.

Наиболее важным в приложениях является случай эллиптической кривой:

$$\dim h^1(\Sigma, \mathrm{End} E) = \dim h^0(\Sigma, \mathrm{End} E).$$

М. Атья [20] доказал, что

$$\dim \mathcal{M}_0^d = \mathrm{НОД}(N, d). \quad (1.9)$$

В этом случае структура пространства модулей для тривиальных расслоений (т. е. для случая $\deg(E) = 0$) и, например, для расслоений степени один, $\deg(E) = 1$, различны.

Для квазипараболических расслоений имеем

$$\dim \mathcal{M}_n^d = \dim \mathcal{M}_0^d + \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha, \quad (1.10)$$

где f_α — размерность соответствующего флага E_α . В частности, для $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ получаем

$$f_\alpha = \frac{1}{2} \left(N^2 - \sum_{i=1}^{s_\alpha} m_i^2(\alpha) \right), \quad m_i(\alpha) = \dim Fl_i(\alpha) - \dim Fl_{i+1}(\alpha), \quad (1.11)$$

где s_α определяются из (1.7). Пространство \mathcal{L}_Σ^C похоже на двумерную решетчатую калибровочную теорию. Действительно, границы покрытия $\{\mathcal{U}_a, a = 1, \dots\}$ образуют ориентированный граф, вершины которого V_a — некоторые внутренние точки \mathcal{U}_a , а ребра L_{ab} соединяют только те вершины V_a и V_b , для которых соответствующие им карты имеют непустое пересечение $U_{ab} \neq \emptyset$. Выберем ориентацию графа таким образом, что $a > b$ на ребре L_{ab} и зафиксируем голоморфную функцию $z_b(z_a)$, задающую голоморфное отображение из \mathcal{U}_a в \mathcal{U}_b . Тогда пространство \mathcal{L}_Σ^C можно задать следующим набором данных: каждому ребру L_{ab} , $a > b$, припишем матричнозначную функцию $g_{ab} \in G$ и голоморфное отображение $z_b(z_a)$. Калибровочные поля f_a в таком случае приписываются вершинам V_a , а калибровочные преобразования заданы в (1.5).

1.2. Системы Хитчина. Следуя [7], опишем конструкцию систем Хитчина в подходе Чеха. Рассмотрим кокасательное расслоение $T^*\mathcal{L}_{\Sigma_n}^C$ к голоморфным структурам на $P = \mathrm{Aut} E$ (1.4). Теперь

$$T^*\mathcal{L}_{\Sigma_n}^C = \left\{ \eta_{ab}, g_{ab} \mid \eta_{ab} \in \Omega_{\mathrm{hol}}^{(1,0)}(\mathcal{U}_{ab}, (\mathrm{End} E)^*), g_{ab} \in \Omega_{\mathrm{hol}}^0(\mathcal{U}_{ab}, P) \right\}. \quad (1.12)$$

1-формы η_{ab} называются полями Хигса. Указанное расслоение можно снабдить симплектической структурой с помощью 1-формы Маурера–Картана на $\Omega_{\text{hol}}^0(\mathcal{U}_{ab}, P)$.

Пусть $\Gamma_a^b(\beta\gamma)$ — ориентированное ребро в \mathcal{U}_{ab} с вершинами в тройных пересечениях $\beta \in \mathcal{U}_{abc} = \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b \cap \mathcal{U}_c$, $\gamma \in \mathcal{U}_{abd}$. Поля η_{ab}, g_{ab} соответствуют ребру $\Gamma_a^b(\beta\gamma)$. При смене ориентации графа на противоположную, $\Gamma_a^b(\beta\gamma) \rightarrow \Gamma_b^a(\gamma\beta)$, поля η_{ab}, g_{ab} также меняются, а именно $g_{ba} = g_{ab}^{-1}$ (см. (1.2)) и

$$\eta_{ab}(z_a) = g_{ab}(z_a)\eta_{ba}(z_b(z_a))g_{ab}^{-1}(z_a). \quad (1.13)$$

Следовательно, интеграл

$$\int_{\Gamma_a^b(\beta\gamma)} \text{tr} (\eta_{ab}(z_a)Dg_{ab}g_{ab}^{-1}(z_a)) \quad (1.14)$$

не зависит от ориентации графа.

Можно расположить данные (1.12) на графе $\{\Gamma_a^b\}$, соответствующем покрытию $\{\mathcal{U}_a\}$. Принимая также во внимание (1.14), определим симплектическую структуру следующим образом:

$$\omega^C = \sum_{\text{edges}} \int_{\Gamma_a^b(\beta\gamma)} D \text{tr} (\eta_{ab}(z_a)Dg_{ab}g_{ab}^{-1}(z_a)). \quad (1.15)$$

Так как η_{ab} и g_{ab} голоморфны в \mathcal{U}_{ab} , интеграл не зависит от выбора пути Γ_a^b внутри \mathcal{U}_{ab} . Заметим здесь, что условие коцикла (1.1) не накладывает дополнительных ограничений, так как оно сохраняется под действием (1.5).

Построенная симплектическая форма инвариантна относительно калибровочных преобразований (1.5), сопровождаемых

$$\eta_{ab} \rightarrow f_a \eta_{ab} f_a^{-1}. \quad (1.16)$$

Набор инвариантных коммутирующих гамильтонианов на $T^*\mathcal{L}_\Sigma^C$:

$$I_{j,k}^C = \sum_{\text{edges}} \int_{\Gamma_a^b(\beta\gamma)} \nu_{(j,k)}^C(z_a) \text{tr} (\eta_{ab}^{d_j}(z_a)) \quad (k = 1, \dots, n_j), \quad (1.17)$$

где d_j — порядки инвариантных полиномов группы G и $\nu_{j,k}^C$ — $(1 - d_j, 0)$ -дифференциалы. Локально они связаны с $(1 - j, 1)$ -дифференциалами по формуле $\nu_{j,k}^D = \bar{\partial}\nu_{j,k}^C$ и

$$n_j = \dim h^1(\Sigma, \mathcal{T}^{\otimes(d_j-1)}) = (2d_j - 1)(g - 1) + (d_j - 1)n \quad (j = 1, \dots, r)$$

для простых групп и

$$n_j = \begin{cases} (2j-1)(g-1) + (j-1)n & (j=2, \dots, N) \\ g & (j=1), \end{cases}$$

для $\mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$. Общее число независимых гамильтонианов

$$\sum_{j=1}^N n_j = \mathcal{M}_0^d + \frac{1}{2}r(r+1)n.$$

Это число больше размерности пространства модулей \mathcal{M}_n^d (1.10). «Лишние» rn интегралов, соответствующих $j=r$, станут функциями Казимира орбит коприсоединенного действия после симплектической редукции, к рассмотрению которой сейчас перейдем.

Выполним симплектическую редукцию по действию группы (1.5), (1.16). Отображение момента:

$$\mu_{\mathcal{G}_\Sigma^{\mathrm{hol}}}(\eta_{ab}, g_{ab}) : T^* \mathcal{L}_\Sigma^C \rightarrow \mathrm{Lie}^*(\mathcal{G}_\Sigma^{\mathrm{hol}}).$$

Здесь коалгебра Ли $\mathrm{Lie}^*(\mathcal{G}_\Sigma^{\mathrm{hol}})$ определена относительно спаривания:

$$\sum_{\mathrm{edges}} \int_{\Gamma_a^b(\beta\gamma)} \mathrm{tr}(\xi_a \epsilon_a), \quad \epsilon_a \in \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_\Sigma^{\mathrm{hol}}).$$

Тогда локально имеем

$$\xi_a = \begin{cases} \left(z_a^{-1} \tilde{\xi}_a + z_a^{-2} \xi_a^{(-2)} + \dots \right) dz_a, & \tilde{\xi}_a \in \mathrm{Lie}^*(P_\alpha), \mathcal{U}_a \text{ содержит} \\ & \text{отмеченную точку } w_\alpha, \\ \left(z_a^{-1} \xi_a^{(-1)} + z_a^{-2} \xi_a^{(-2)} + \dots \right) dz_a, & \xi_a^{(-1)} \in \mathrm{Lie}^*(G), \\ & \mathcal{U}_a \text{ не содержит } w_\alpha. \end{cases} \quad (1.18)$$

Канонические калибровочные преобразования (1.5), (1.16) симплектической формы (1.15) генерируются гамильтонианом

$$F_{\epsilon^{\mathrm{hol}}} = \sum_{\mathrm{edges}_{\Gamma_a^b(\beta\gamma)}} \int \mathrm{tr}(\eta_{ab}(z_a) \epsilon_a^{\mathrm{hol}}(z_a)) - \\ - \mathrm{tr}(\eta_{ab}(z_a) g_{ab}(z_a) \epsilon_b^{\mathrm{hol}}(z_b(z_a)) g_{ab}(z_a)^{-1}) = \sum_a \int_{\Gamma_a} \sum_b \mathrm{tr}(\eta_{ab}(z_a) \epsilon_a^{\mathrm{hol}}(z_a)),$$

где Γ_a — ориентированный контур вокруг \mathcal{U}_a .

Зафиксируем ненулевой уровень момента специальным образом в окрестности отмеченных точек. Пусть $\tilde{G}_\alpha \subset P_\alpha$ — максимальная полупростая подгруппа параболической группы P_α , определенной в точке w_α . Опустим здесь для простоты индекс α . Выберем упорядочение в подалгебре Картана $\mathfrak{h} \in \text{Lie}(G)$, согласованное с вложением $P \subset G$. Пусть $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \cap \tilde{G}$ — подалгебра Картана в \tilde{G} . Рассмотрим ортогональное разложение \mathfrak{h}^* :

$$\mathfrak{h}^* = \tilde{\mathfrak{h}}^* + \mathfrak{h}'^*.$$

Зафиксируем некоторый вектор $p^{(0)} \in \mathfrak{h}^*$ как элемент общего положения в \mathfrak{h}'^* и

$$\langle p^{(0)}, \tilde{\mathfrak{h}}^* \rangle = 0, \quad (1.19)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение Киллинга в \mathfrak{h}^* . Так как $\mathfrak{h}'^* \subset \text{Lie}^*(P)$, то $\mu_{\mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}}}$ можно рассмотреть в виде

$$\mu_{\mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}}} = \mu_0 = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha^{(0)} z_\alpha^{-1} dz_\alpha, \quad p^{(0)} \in \mathfrak{h}'^*, \quad (1.20)$$

где $z_\alpha = z - w_\alpha$ — локальная координата в \mathcal{U}_α . Уравнение момента $\mu_{\mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}}} = \mu_0$ следует из выражения для $F_{\epsilon^{\text{hol}}}$. Из определения $\text{Lie}^*(\mathcal{G}_\Sigma^{0,\text{hol}})$ следует, что η_{ab} — граничное значение некоторой голоморфной или мероморфной 1-формы H_a на \mathcal{U}_a :

$$\eta_{ab}(z_a) = H_a(z_a), \quad z_a \in \mathcal{U}_{ab}, \quad H_a \in \Omega_{\text{hol}}^{(1,0)}(\mathcal{U}_a, \text{End}^*(E)), \quad (1.21)$$

где

$$H_a = \begin{cases} z_a^{-1} p_\alpha^{(0)} + H_a^{(0)} + z_a H_a^{(1)} + \dots, & \text{если } \mathcal{U}_a \text{ содержит} \\ & \text{отмеченную точку } w_\alpha, \\ H_a^{(0)} + z_a H_a^{(1)} + \dots, & \text{если } \mathcal{U}_a \text{ не содержит } w_\alpha. \end{cases} \quad (1.22)$$

Фиксация калибровки означает, что функции переклейки g_{ab} являются элементами пространства модулей $\mathcal{M}_n^d(\Sigma, E)$. Симплектический фактор

$$\mathcal{H}_n^d = \mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}} \backslash T^* \mathcal{L}_\Sigma^C = \mathcal{G}_\Sigma^{\text{hol}} \backslash \mu^{-1}(\mu_0) \quad (1.23)$$

называется расслоением Хиггса с квазипараболическими структурами. На этом фактор-пространстве симплектическая форма выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega^C = & \sum_{\text{edges}} \int_{\Gamma_a^b(\beta\gamma)} D \text{tr} (\eta_{ab}(z_a) Dg_{ab} g_{ab}^{-1}(z_a)) + \\ & + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^n \sum_b D \text{tr} (p_\alpha^{(0)} Dg_{\alpha b}^{(0)} (g_{\alpha b}^{(0)})^{-1}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Последняя сумма задает симплектические формы Кириллова–Костанта на орбитах коприсоединенного действия $\mathcal{O}(n) = (\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_\alpha, \dots, \mathcal{O}_n)$, где

$$\mathcal{O}_\alpha = \left\{ p_\alpha \in \text{Lie}^*(G) \mid p_\alpha = (g_\alpha^{(0)})^{-1} p_\alpha^{(0)} g_\alpha^{(0)} \right\}. \quad (1.25)$$

Заметим, что $\dim(\mathcal{O}_\alpha) = 2f_\alpha$ из (1.11).

Стандартный подход к системам Хитчина [2] основан на описании голоморфных расслоений в терминах оператора d'' . Фазовое пространство до редукции имеет вид

$$T^*\mathcal{L}_{\Sigma_n}^D = \left\{ \Phi, d'' \mid \Phi \in \Omega_{C^\infty}^{(1,0)}(\Sigma_n, \text{End}^* E) \right\}, \quad (1.26)$$

где Φ по определению называется полем Хиггса. Симплектическая форма

$$\omega^D = \int_{\Sigma_n} \text{tr}(D\Phi \wedge D\bar{A}) \quad (1.27)$$

инвариантна относительно действия калибровочной группы

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\Sigma^{C^\infty} &= \{ f \in \Omega_{C^\infty}^0(\Sigma_n, \text{Aut } V) \}, \\ \Phi &\rightarrow f^{-1}\Phi f, \quad \bar{A} \rightarrow f^{-1}\bar{\partial}f + f^{-1}\bar{A}f. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Калибровочно-инвариантные гамильтонианы имеют простой вид (сравните с (1.17)):

$$I_{j,k}^D = \int_{\Sigma_n} \nu_{(j,k)}^D \text{tr}(\Phi^{d_j}) \quad (k = 1, \dots, n_j), \quad (1.29)$$

где $\nu_{j,k}^D$ являются $(1-j, 1)$ -дифференциалами на Σ_n . Симплектическая редукция по действию этой группой приводит к отображению момента:

$$\mu : T^*\mathcal{L}_{\Sigma_n}^D \rightarrow \text{Lie}^*(\mathcal{G}_\Sigma^{C^\infty}) \quad \mu = \bar{\partial}\Phi + [\bar{A}, \Phi].$$

Поле Хиггса Φ связано с η простым соотношением

$$\eta_{ab} = h_a^{-1} \Phi h_a |_{\mathcal{U}_{ab}},$$

и $\bar{A}_a = h_a^{-1} \bar{\partial}_a h_a$. Голоморфность η эквивалентна уравнению $\mu(\Phi, \bar{A}) = 0$, и Φ имеет те же полюса, что и H_a (1.21). Для простоты будем называть η также полем Хиггса. Расслоение E с 1-формой η будем называть расслоением Хиггса. В этом подходе орбиты p_α в отмеченных точках вводятся простым добавлением соответствующих форм Кириллова–Костанта к форме (1.27). В этом случае уравнение моментов $\mu = 0$ приобретает правую часть в виде суммы дельта-функций [4].

1.3. Процедура модификации расслоений. Рассмотрим только $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоения. Пусть E и \tilde{E} — два расслоения на Σ одинакового ранга. Предположим, что существует отображение $\Xi^+ : E \rightarrow \tilde{E}$ (более точно отображение пучков сечений $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\tilde{E})$) таких, что оно является изоморфизмом на дополнении к точке $w \in \Sigma$ и имеет в этой точке одномерное коядро:

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{\Xi^+} \tilde{E} \rightarrow \mathbb{C}|_w \rightarrow 0. \quad (1.30)$$

Такое отображение называется верхней модификацией \mathfrak{H}_w^+ расслоения E в точке w . Аналогичным образом, если на дополнении к точке w задать отображение

$$E \xleftarrow{\Xi^-} \tilde{E}$$

такое, что $\Xi^- \Xi^+ = \text{Id}$, то оно называется нижней модификацией \mathfrak{H}_w^- в точке w .

Рассмотрим теперь два квазипараболических расслоения E и \tilde{E} со структурой флагов в отмеченных точках. Структура флага $E_\alpha(s)$ в точке w_α для расслоения E имеет форму (1.7), а для \tilde{E} определим ее так:

$$\tilde{E}_\alpha(s) = \tilde{F}l_1(\alpha) \supset \dots \supset \tilde{F}l_{s_\alpha}(\alpha) \supset \tilde{F}l_{s_\alpha+1}(\alpha) = 0,$$

где $\tilde{F}l_k \sim Fl_{k-1}/Fl_{s_\alpha}$ для $s_\alpha + 1 \geq k \geq 2$. Построим \tilde{E} в терминах пучков сечений $\Gamma(E)$. Пусть Ξ_α^+ — отображение пучков сечений $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\tilde{E})$, являющееся изоморфизмом на дополнении к отмеченной точке $w_\alpha \in \Sigma$. Пусть также $\sigma \in \Gamma(E)$ и $\Xi_\alpha^+ : \sigma \rightarrow \tilde{\sigma} \in \Gamma(\tilde{E})$. Если $\sigma|_{w_\alpha} \in Fl_{k-1}$, то $\tilde{\sigma}|_{w_\alpha} \in \tilde{F}l_k$.

Назовем Ξ_α^+ верхней модификацией квазипараболического расслоения E . Нижняя модификация квазипараболического расслоения действует в противоположном направлении. Она схожа с нижней модификацией (1.30), и мы временно предположим, что Ξ_α^+ имеет одномерное коядро.

Пусть флаг E_α (1.7) имеет одномерное подпространство ($\dim(Fl_{s_\alpha}) = 1$). В этом случае верхняя модификация Ξ_α^+ строится следующим образом. Пусть (e_1, \dots, e_N) — базис локальных сечений E , совместимый со структурой флага:

$$Fl_1 \rightarrow (e_1, \dots, e_N), \dots, Fl_{s_\alpha} \rightarrow (e_N).$$

Из определения следует, что Ξ_α^+ может быть преобразовано к канонической форме

$$\Xi_\alpha^+ = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_{N-1} \\ z_\alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

На самом деле, пучок сечений $\Gamma(\tilde{E})$ совпадает с пучком сечений $\Gamma(E)$ с полюсом первого порядка в точке w_α , и особые сечения лежат в ядре Ξ^+ (см. [21]).

Аналогичным образом нижняя модификация приводится к виду

$$\Xi_{\alpha}^{+} = \begin{pmatrix} 0 & z_{\alpha}^{-1} \\ \text{Id}_{N-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Определим отображение между расслоениями Хиггса $f : (E, \eta) \rightarrow (\tilde{E}, \tilde{\eta})$ как отображение расслоений $f : E \rightarrow \tilde{E}$ такое, что

$$f\eta = \tilde{\eta}f. \quad (1.33)$$

Рассмотрим два расслоения Хиггса (E, η) и $(\tilde{E}, \tilde{\eta})$, где E — квазипараболическое расслоение, а его отображение в \tilde{E} — верхняя модификация Ξ_{α}^{+} расслоения E в точке $w_{\alpha} \in \Sigma$. Назовем $(\tilde{E}, \tilde{\eta})$ верхней модификацией расслоения (E, η) , если $\Xi_{\alpha}^{+}\eta = \tilde{\eta}\Xi_{\alpha}^{+}$.

Пусть w_{α} — отмеченная точка. Поле Хиггса η имеет полюс первого порядка в w_{α} (1.22), и вычет $p_{\alpha}^{(0)}$ определяет орбиту \mathcal{O}_{α} .

Лемма 1.1. Калибровочные преобразования Ξ_{α}^{\pm}

- не меняют порядок особенности поля Хиггса в w_{α} ;
- симплектические;
- сохраняют гамильтонианы (1.17).

□

Выбор $p_{\alpha}^{(0)}$ (1.19) совместим с каноническими формами (1.31), (1.32) для Ξ_{α}^{\pm} и их действие не меняет порядок полюсов. Действие на форме (1.34) симплектично, так как Ξ_{α}^{\pm} зависит только от $p_{\alpha}^{(0)}$. Инвариантность гамильтонианов следует из (1.33).

■

В частности, из леммы 1.1 следует, что Ξ_{α}^{\pm} сохраняет все гамильтонианы (1.17) и симплектическую форму (1.24).

1.4. Модификации и преобразования Бэклунда. Рассмотрим расслоения Хиггса с квазипараболическими структурами в отмеченных точках. Калибровочные преобразования Ξ_{α}^{\pm} зависят только от отмеченной точки w_{α} . Они задают отображения между системами Хитчина

$$\mathfrak{S}_{\alpha}^{+} \sim \xi^{\alpha} : T^{*}\mathcal{M}^{(d)}(\Sigma_n, G) \rightarrow T^{*}\mathcal{M}^{(d+1)}(\Sigma_n, G), \quad (1.34)$$

$$\mathfrak{S}_{\alpha}^{-} \sim \xi_{\beta} : T^{*}\mathcal{M}^{(d)}(\Sigma_n, G) \rightarrow T^{*}\mathcal{M}^{(d-1)}(\Sigma_n, G). \quad (1.35)$$

Рассмотрим последовательно выполненные верхнюю и нижнюю модификации

$$\xi_{\alpha_2}^{\alpha_1} = \xi^{\alpha_1} \cdot \xi_{\alpha_2}. \quad (1.36)$$

Так как $\deg(E)$ не изменяется, то данное преобразование $T^{*}\mathcal{M}_n^d(\Sigma, E)$ симплектическое, т.е. $\xi_{\alpha_2}^{\alpha_1}$ переводит решения уравнений иерархии Хитчина в себя.

Лемма 1.2. *Отображение (1.36) является преобразованием Бэклунда, параметризованным парой отмеченных точек $(w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2})$.*

Можно обобщить (1.36) следующим образом:

$$\xi_{\alpha_{i_1}; \dots; \alpha_{i_s}}^{\alpha_{j_1}; \dots; \alpha_{j_s}} = \xi^{\alpha_{j_1}} \cdot \xi_{\alpha_{i_1}} \dots$$

Так как преобразование Бэклунда является каноническим, то можно рассмотреть дискретную гамильтонову систему на пространстве $T^*\mathcal{M}_n^d(\Sigma, E)$. Такие преобразования попарно коммутируют и в терминах переменных действие-угол генерируют решетку на торе Лиувилля [22, 28].

Заметим также, что когда Σ_n — эллиптическая кривая, системы Хитчина, соответствующие $d = kN$ и $d = 0$ ($d = \deg(V)$), эквивалентны. Так что в этом случае можно построить преобразования Бэклунда, применяя верхнюю модификацию N раз.

2. ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

2.1. Примеры интегрируемых систем. Приведем основные примеры интегрируемых систем, которые могут быть описаны как системы Хитчина на эллиптической кривой. Из (1.9) следует, что компоненты пространства модулей \mathcal{M}_n^d , соответствующие разным степеням $\deg E$, имеют разные размерности. Например,

$$\deg E = 0 \rightarrow \dim \mathcal{M}_0^d = N$$

и

$$\deg E = 1 \rightarrow \dim \mathcal{M}_0^d = 1.$$

Эта размерность связана со степенями свободы частиц. Более точно, пространство \mathcal{M}_n^d является конфигурационным для системы взаимодействующих частиц. Однако кроме степеней свободы, связанных с частицами, существуют также степени свободы, связанные с динамикой орбит коприсоединенного действия (1.25) в отмеченных точках. В случае $\deg E = 0$ редуцированная система будет содержать динамику обоих типов. В некоторых случаях потенциал взаимодействия напоминает гамильтониан спиновых цепочек, поэтому такие системы называют спиновыми обобщениями. Для одной отмеченной точки такая система называется спиновым обобщением модели Калоджеро, а для многих — эллиптической системой Годена.

В случае $\deg E = 1$ частиц нет. Как будет показано ниже, уравнения движения механической системы имеют такую же форму, как и уравнения движения, описывающие вращение твердого тела. Семейство таких систем называют системами Годена, а в случае одной отмеченной точки — эллиптическим волчком.

Эллиптическая модель Калоджеро–Мозера. Эллиптическая модель КМ впервые была описана в квантовом случае [5]. Фазовое пространство представляет собой пространство импульсов и координат частиц в системе центра масс:

$$\mathcal{R} = \left(\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N), \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N), \sum_j v_j = 0, \sum_j u_j = 0 \right) \quad (2.1)$$

с канонической симплектической формой

$$\omega = (D\mathbf{v} \wedge D\mathbf{u}). \quad (2.2)$$

Квадратичный по импульсам \mathbf{v} гамильтониан, задающий уравнения движения, выглядит следующим образом:

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N v_j^2 + \nu^2 \sum_{j>k} \wp(u_j - u_k; \tau). \quad (2.3)$$

Как было показано в [3, 23], эллиптическая КМ-система может быть описана как система Хитчина. Лаксова матрица L появляется как редуцированное поле η на эллиптической кривой

$$E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{L}, \quad \mathbb{L} = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$$

с одной отмеченной точкой $z = 0$, в которой у L^{KM} есть полюс первого порядка. Фазовое пространство КМ \mathcal{R}^{KM} определяется парами:

(квазипараболическое $SL(N)$ -расслоение V над E_τ , поле Хиггса L^{KM} на нем (2.9)).

Расслоение задается функциями перехода (мультипликаторами)

$$Id_N : z \rightarrow z + 1, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \text{diag}(\mathbf{e}(u_1), \dots, \mathbf{e}(u_N)) : z \rightarrow z + \tau,$$

где $\mathbf{e}(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$. Оператор Лакса $L^{\text{KM}}(z)$ является квазипериодической матричнозначной $N \times N$ 1-формой на решетке $\mathbb{L} = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ и имеет вид

$$L^{\text{KM}}(z + 1) = L^{\text{KM}}(z), \quad L^{\text{KM}}(z + \tau) = \mathbf{e}(-\mathbf{u})L^{\text{KM}}(z)\mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad (2.5)$$

с полюсом первого порядка в $z = 0$ и вычетом

$$p^{(0)} = \text{Res}_{z=0}(L(z)) = L_{-1}^{\text{KM}} = \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Этот вычет является орбитой коприсоединенного действия \mathcal{O}_{\min} (1.25) наименьшей размерности ($\dim(\mathcal{O}_{\min}) = 2N - 2$). Мультипликаторы (2.4) одновременно коммутируют с диагональными матрицами, т. е. с подгруппой Картана T из $SL(N)$. По этой остаточной калибровочной симметрии следует профакторизовать. Так как калибровочные преобразования действуют на поле Хиггса, а следовательно, и на матрицу Лакса сопряжениями, то степени свободы, связанные с орбитой \mathcal{O}_{\min} , исчезают. Действительно, $\dim\{\mathcal{O}_{\min}/T\} = 0$.

Вектор-столбец $e_1 = (1, 1, \dots, 1)$ является собственным:

$$L_{-1}^{\text{KM}} e_1 = (N - 1)\nu e_1. \quad (2.7)$$

Кроме того, имеется $(N - 1)$ -мерное собственное подпространство T_{N-1} , соответствующее собственному значению $-\nu$:

$$L_{-1}^{\text{KM}} e_{\mathbf{a}} = -\nu e_{\mathbf{a}}, e_{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_N) \left(\sum_n a_n = 0 \right). \quad (2.8)$$

Квазипериодические граничные условия (2.5) позволяют представить явный вид L^{KM} :

$$L_{ij}^{\text{KM}} = v_i \delta_{ij} + \nu(1 - \delta_{ij})\phi(z, u_j - u_k), \quad (2.9)$$

где ϕ определено в приложении (A.5).

Матрица M^{KM} , отвечающая квадратичному гамильтониану (2.3), имеет вид

$$M^{\text{KM}} = -\delta_{ij} \sum_{k \neq j} \wp(u_j - u_k) + \nu(1 - \delta_{ij}) \frac{\partial \phi(z, u)}{\partial u} \Big|_{u=u_i - u_j}. \quad (2.10)$$

В дальнейшем будем писать $\phi'(z, u_j - u_k)$, имея в виду производную по второму аргументу.

Эллиптическая модель Годена. Эллиптическая система Годена была предложена в [4] как пример системы Хитчина на эллиптической кривой с отмеченными точками. Она обобщает описанную выше систему Калоджеро на случай произвольного числа отмеченных точек. Матрица Лакса имеет вид

$$L_{ij}^G = \delta_{ij} \left(v_i + \sum_a p_{ii} E_1(z - z_a) \right) + (1 - \delta_{ij}) \sum_a p_{ij}^a \phi(z - z_a, u_j - u_k), \quad (2.11)$$

где z_a — координаты отмеченных точек, а p^a — соответствующие им вычеты. Как видно, диагональная часть этой матрицы будет эллиптической функцией (что необходимо, так как L^G — сечение расслоения с функциями переклейки из (2.4)) только в том случае, если

$$\sum_a p_{ii}^a = 0, \forall i. \quad (2.12)$$

Эти $N - 1$ условия являются на самом деле уравнениями моментов по действию диагональной подгруппы $T \in GL(N, \mathbb{C})$, как и в случае системы Калоджеро. Симплектическая редукция подразумевает также и некоторую фиксацию калибровки. В случае системы Калоджеро эта фиксация полностью заморозила степени свободы, связанные с орбитой коприсоединенного действия. В данном случае никакой выделенной фиксации нет. Поэтому матрицу Лакса системы Годена обычно пишут в виде (2.11), имея в виду, что указанная редукция еще не проведена.

Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок. Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок является примером волчка Эйлера–Арнольда [24], фазовое пространство которого задано орбитой коприсоединенного действия группы $SL(N, \mathbb{C})$:

$$\mathcal{R}^{\text{rot}} = \left\{ \mathbf{S} \in SL(N, \mathbb{C}), \quad \mathbf{S} = g^{-1} \mathbf{S}^{(0)} g \right\}, \quad (2.13)$$

где g определено по модулю левых сдвигов G_0 , коммутирующих с $\mathbf{S}^{(0)}$. Иными словами, в терминах группы G орбита есть фактор-пространство $G_0 \backslash G$ по стабилизатору, который в случае общего положения является подгруппой Картана $T \in G$.

На фазовом пространстве волчка \mathcal{R}^{rot} существует невырожденная симплектическая форма Кириллова–Костанта:

$$\omega^{\text{rot}} = \text{tr} \left(\mathbf{S}^{(0)} Dg g^{-1} Dg g^{-1} \right). \quad (2.14)$$

Динамика задается гамильтонианом

$$H^{\text{rot}} = -\frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{S} J(\mathbf{S})), \quad (2.15)$$

где J — линейный оператор на алгебре Ли $(SL(N, \mathbb{C}))$. Обратный к нему обычно называют тензором инерции. Уравнения движения имеют вид

$$\partial_t \mathbf{S} = [J(\mathbf{S}), \mathbf{S}]. \quad (2.16)$$

Мы рассмотрим специальный $J = \hat{\varphi}$. При этом описанная выше система окажется интегрируемой. А именно

$$\hat{\varphi} S = \sum_{mn} \hat{\varphi}_{mn} s_{mn} E_{mn},$$

$$S = \sum_{mn} s_{mn} E_{mn},$$

где $\{E_{mn}\}$ — некоторый специальный базис в $SL(N, \mathbb{C})$, образующий синус-алгебру (B.4); s_{mn} — компоненты разложения S в этом базисе, а $\hat{\varphi}_{mn}$ —

компоненты линейного оператора \wp в базисе $\{E_{mn}\}$:

$$\hat{\wp} = \{\hat{\wp}_{mn}\} = \left\{ \wp \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \right\} \quad (m, n = 1, \dots, N), \quad (2.17)$$

$$\wp \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \wp \left(\frac{m + n\tau}{N}; \tau \right).$$

Выпишем уравнения движения в базисе $\{E_{mn}\}$:

$$\partial_t S_{mn} = \frac{N}{\pi} \sum_{k,l} S_{k,l} S_{m-k,n-l} \wp \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} \sin \frac{\pi}{N} (kn - ml). \quad (2.18)$$

Эллиптический волчок, описанный выше, является примером системы Хитчина [23]. Поясним это утверждение.

Лемма 2.1. *Эллиптический $SL(N, \mathbb{C})$ -волчок является системой Хитчина, отвечающей $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоению Хиггса ($\deg E = 1$) с квазипараболической структурой над эллиптической кривой E_τ с одной отмеченной точкой $z = 0$.*

□

Несложно доказать, что (2.18) эквивалентны уравнениям Лакса. В базисе $\{E_{mn}\}$ пара Лакса имеет вид

$$L^{\text{rot}} = \sum_{m,n} S_{mn} \wp \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) E_{mn}, \quad \wp \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) = e \left(-\frac{nz}{N} \right) \phi \left(-\frac{m + n\tau}{N}; z \right), \quad (2.19)$$

$$M^{\text{rot}} = \sum_{m,n} S_{mn} f \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) E_{mn}, \quad f \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) = e \left(-\frac{nz}{N} \right) \partial_u \phi(u; z) \Big|_{u=-\frac{m+n\tau}{N}}. \quad (2.20)$$

Тогда уравнение Лакса

$$\begin{aligned} \partial_t S_{mn} \wp \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) &= \\ &= \sqrt{-1} \sum_{k,l} S_{m-k,n-l} S_{kl} \wp \begin{bmatrix} m-k \\ n-l \end{bmatrix} (z) f \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} (z) \sin \frac{\pi}{N} (nk - ml). \end{aligned}$$

Используя функциональное уравнение Калоджеро (А.34), несложно показать, что эти уравнения оказываются эквивалентными (2.18) тождественно по z . Далее, вычислим гамильтониан

$$\frac{1}{N} \text{tr} (L^{\text{rot}})^2 = -2H^{\text{rot}} + \text{tr} \mathbf{S}^2 \wp(z),$$

где H^{rot} — гамильтониан (2.15) для $J = \hat{\wp}$.

Оператор Лакса (2.19) удовлетворяет уравнению на поле Хиггса

$$\bar{\partial}L^{\text{rot}} = 0, \quad \text{Res } L^{\text{rot}}|_{z=0} = 2\pi\sqrt{-1}\mathbf{S}$$

и обладает следующими квазипериодическими свойствами:

$$L^{\text{rot}}(z + 1) = Q(\tau)L^{\text{rot}}(z)Q^{-1}(\tau), \tag{2.21}$$

$$L^{\text{rot}}(z + \tau) = \tilde{\Lambda}(z, \tau)L^{\text{rot}}(z)(\tilde{\Lambda}(z, \tau))^{-1}, \tag{2.22}$$

где $\tilde{\Lambda}(z, \tau) = -\mathbf{e} \left(\frac{-z - \frac{1}{2}\tau}{N} \right) \Lambda$, а матрицы Q и Λ определены в (B.2), (B.3).

Функции перехода

$$Q(\tau) : z \rightarrow z + 1, \tag{2.23}$$

$$\tilde{\Lambda}(z, \tau) : z \rightarrow z + \tau \tag{2.24}$$

задают $GL(N, \mathbb{C})$ -расслоение над E_τ степени $\text{deg } V = 1$. Для него $\dim(\mathcal{M}_0^1) = 1$ (1.9), и после симплектической редукции получаем орбиту коприсоединенного действия $G_0 \backslash SL(N, \mathbb{C})$ (2.13). Форма Кириллова–Костанта (2.14) возникает из последнего члена в (1.24) в точке $z = 0$. Таким образом, фазовое пространство $SL(N)$ -волчка определяется по полю Хиггса L^{rot} на расслоении с мультипликаторами $Q, \tilde{\Lambda}$ с полюсом первого порядка в отмеченной точке.



2.2. Связь между системами Калоджеро–Мозера и эллиптическим волчком Эйлера–Арнольда. Здесь будет показано, что указанные в названии интегрируемые модели связаны сингулярным симплектическим преобразованием

$$L^{\text{top}}(z) = \Xi(z)L^{\text{KM}}(z)\Xi^{-1}(z). \tag{2.25}$$

Ценность этого утверждения состоит в упрощении классификации интегрируемых систем. На языке систем Хитчина такие преобразования изменяют степень расслоения, а следовательно, и пространство модулей.

Напомним, что матрицы Лакса задаются своими вычетами

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \text{Res } L^{\text{KM}} &= \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \text{Res } L^{\text{top}} &= S = \sum_{m,n} E_{mn} S_{mn}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

где $\Lambda_{ij} = \delta(\text{mod}_N(i+1), j)$, $Q_{ij} = \delta_{ij} e\left(\frac{i}{N}\right)$, $E_{mn} = e\left(\frac{mn}{2N}\right) Q^m \Lambda^n$, и граничными условиями

$$\begin{aligned} L^{\text{KM}}(z+1) &= L^{\text{KM}}(z), & L^{\text{top}}(z+1) &= QL^{\text{top}}(z)Q^{-1}, \\ L^{\text{KM}}(z+\tau) &= e(-u)L^{\text{KM}}(z)e(u), & L^{\text{top}}(z+\tau) &= \Lambda L^{\text{top}}(z)\Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь и далее приняты обозначения $\sum_{m,n} = \sum_{m,n=0, m^2+n^2 \neq 0}^{p-1}$. Посмотрим, каким граничным условиям должна удовлетворять $\Xi(z)$ для выполнения (2.25):

$$\begin{aligned} L^{\text{top}}(z+1) &= \Xi(z+1)L^{\text{KM}}(z+1)\Xi^{-1}(z+1) = \Xi(z+1)L^{\text{KM}}(z)\Xi^{-1}(z+1), \\ L^{\text{top}}(z+1) &= QL^{\text{top}}(z)Q^{-1} = Q\Xi(z)L^{\text{KM}}(z)\Xi^{-1}(z)Q^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда (с точностью до скалярного множителя) имеем

$$\begin{cases} \Xi(z+1) = Q\Xi(z), \\ \Xi(z+\tau) = \Lambda\Xi(z)e(u). \end{cases} \quad (2.28)$$

Матрицу с такими свойствами удается построить в терминах тэта-функции с характеристиками (см. приложение А). Для начала рассмотрим $\tilde{\Xi}(z)$:

$$\tilde{\Xi}_{ij}(z, u_1, \dots, u_N, \tau) = \theta \begin{bmatrix} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ \frac{N}{2} \end{bmatrix} (z - Nu_j, N\tau). \quad (2.29)$$

Ее трансформационные свойства таковы:

$$\tilde{\Xi}(z+1, \tau) = -Q \times \tilde{\Xi}(z, \tau), \quad Q = \text{diag}(e(i/N)), \quad (2.30)$$

$$\tilde{\Xi}(z+\tau, \tau) = \tilde{\Lambda}(z, \tau) \times \tilde{\Xi}(z, \tau) \times \text{diag}(e(u_j)), \quad (2.31)$$

$$\tilde{\Lambda}(z, \tau) = -e\left(-\frac{\tau}{2N} - \frac{z}{N}\right) \Lambda,$$

$$\tilde{\Xi}(u_j+1; \tau) = \tilde{\Xi}(u_j; \tau) \times \text{diag}(1, \dots, (-1)^N, \dots, 1), \quad (2.32)$$

$$\tilde{\Xi}(u_j+\tau; \tau) = \tilde{\Xi}(u_j; \tau) \times \text{diag}\left(1, \dots, (-1)^N e\left(-\frac{N\tau}{2} + z - Nu_j\right), \dots, 1\right). \quad (2.33)$$

Систему Калоджеро будем рассматривать, как всегда, в системе центра масс:

$$u_N = \sum_{i=1}^{N-1} u_i. \quad (2.34)$$

Таким образом, размерность фазового пространства равна $2N - 2$. Для установления симплектического отображения необходимо, чтобы такой же была и размерность орбиты коприсоединенного действия, определяющей фазовое пространство волчка. Это означает, что S лежит в орбите минимальной размерности (как раз $2N - 2$), т. е. орбита проходит через элемент вида $\text{diag}(-N\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$.

Как мы видели выше, система КМ получается из ее спинового обобщения как раз в случае орбиты наименьшей размерности. Дополнительная симплектическая редукция по картановской подгруппе в $SL(N, \mathbb{C})$, являющейся стабилизатором связи $\sum p_{ii} = 0$, полностью вырождает степени свободы орбит. Тем самым преобразование, которое мы изучаем, переводит пространство модулей в орбиту коприсоединенного действия соответствующей размерности.

Проверим обратимость $\tilde{\Xi}(z)$.

Лемма 2.2

$$\det \tilde{\Xi} = C(\tau) \vartheta(z) \prod_{j < k} \vartheta(u_j - u_k, \tau) \tag{2.35}$$

для некоторой ненулевой $C(\tau)$.

□

Обозначим

$$f(z) = \vartheta(z) \prod_{j < k} \vartheta(u_j - u_k, \tau), \tag{2.36}$$

$z \rightarrow z + 1$, и покажем, что функции $f(z, u_i)$ и $\det \tilde{\Xi}(z, u_i)$, где $i < N$, обладают одинаковыми трансформационными свойствами, и, следовательно, их отношение является голоморфной двойкопериодической функцией на торе, т. е. константой.

Действительно, для $z \rightarrow z + 1$ имеем

$$f(z + 1) = -f(z)$$

и

$$\det \tilde{\Xi}(z + 1) = \det\{-Q\} \det \tilde{\Xi}(z) = (-1)^N \prod_{i=1}^N e\left(\frac{i}{N}\right) \det \tilde{\Xi}(z) = -\det \tilde{\Xi}(z),$$

для $z \rightarrow z + \tau$

$$f(z + \tau) = -e\left(-\frac{\tau}{2} - z\right) f(z)$$

и

$$\begin{aligned} \det \tilde{\Xi}(z + \tau) &= \det\{\mathbf{e}(u)\} \det\{\tilde{\Lambda}(z)\} \det \tilde{\Xi}(z) = \\ &= (-1)^{N-1} \prod_{i=1}^N e\left(-\frac{\tau}{2N} - \frac{z}{N} - \frac{1}{2}\right) = -e\left(-\frac{\tau}{2} - z\right) \det \tilde{\Xi}(z), \end{aligned}$$

где множитель $(-1)^{N-1}$ возник как следствие циклической перестановки, для $u_j \rightarrow u_j + 1$, $j < N$,

$$f(u_j + 1) = e\left(\frac{1}{2}(2N - 2)\right) f(u_j) = f(u_j)$$

и

$$\det \tilde{\Xi}(u_j + 1) = \det\{1, \dots, (-1)^N, \dots, (-1)^N\} \det \tilde{\Xi}(u_j) = \det \tilde{\Xi}(u_j),$$

для $u_j \rightarrow u_j + \tau$

$$\begin{aligned} f(u_j + \tau) &= \\ &= \prod_{k < l} e\left(-\frac{\tau}{2} + u_k - u_j\right) \prod_{k > l} e\left(-\frac{\tau}{2} - (u_j - u_k)\right) \prod_{k \neq j, N} e\left(-\frac{\tau}{2} - (u_k - u_N)\right) \times \\ &\quad \times e(-2\tau - 2(u_j - u_N)) f(u_j) = e(-N\tau + Nu_N - Nu_j) f(u_j) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \det \tilde{\Xi}(u_j + \tau) &= \\ &= \det \left\{ 1, \dots, e\left(-\frac{N\tau}{2} + z - Nu_j + \frac{N}{2}\right), \dots, e\left(-\frac{N\tau}{2} - z + Nu_N - \frac{N}{2}\right) \right\} \times \\ &\quad \times \det \tilde{\Xi}(u_j) = e(-N\tau + Nu_N - Nu_j) \det \tilde{\Xi}(u_j). \end{aligned}$$

Осталось доказать, что $C(\tau) \neq 0$. Это сделано в [8] с помощью асимптотической оценки $\sqrt{-1}\tau \rightarrow \infty$.

■

На самом деле величина $C(\tau)$ известна:

$$\det \theta \begin{bmatrix} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ N \\ \frac{N}{2} \end{bmatrix} (Nx_j, N\tau) = (-1)^N \frac{\vartheta(\sum x_j)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)} \prod_{i < j} \frac{\vartheta(x_i - x_j)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)} \quad (2.37)$$

или

$$\det \theta \begin{bmatrix} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ N \\ \frac{N}{2} \end{bmatrix} (z - Nq_j, N\tau) = (-1)^N \frac{\vartheta(z)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)} \prod_{i < j} \frac{\vartheta(q_i - q_j)}{\sqrt{-1}\eta(\tau)}, \quad (2.38)$$

если $\sum q_j = 0$.

Итак, $\tilde{\Xi}(z)$ невырождена везде, кроме точки $z = 0$. Это означает, что сопряжение такой матрицей может привести к появлению полюса второго порядка. Для избежания этого явления достаточно потребовать, чтобы собственный вектор вычета преобразуемой матрицы лежал в ядре $\Xi(0)$.

Лемма 2.3. Пусть $L(z)$ — матричнозначная функция с полюсами первого порядка в $z = 0$ и e^+ , e^- — собственные векторы ее вычета $L_{-1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \operatorname{Res} L(z)$:

$$L_{-1}e^+ = \lambda_+e^+, \quad e^-L_{-1} = \lambda_-e^-.$$

Рассмотрим калибровочные преобразования

$$L(z) \rightarrow \Xi^\pm(z)L(z) (\Xi^\pm(z))^{-1},$$

и пусть

$$a) \det \Xi^\pm(z) \sim z^\pm \text{ в окрестности нуля;}$$

$$б) \lim_{z \rightarrow 0} \Xi^+(z)e^+ = \lim_{z \rightarrow 0} e^- (\Xi^-(z))^{-1} = 0,$$

тогда Ξ^\pm не изменяют при калибровочных преобразованиях сингулярностей $L(z)$.

□

Доказательство будет локальным в окрестности точки $z = 0$. Выберем базис, в котором $e^- = (0, \dots, 0, 1)$. В этом базисе

$$L_{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Несложно видеть, что матрица

$$\Xi^- = \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_{N-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию леммы. Сопрягая L_{-1} , убеждаемся, что дополнительных полюсов не возникает:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Id}_{N-1} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_{N-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & *z \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Аналогично выберем $e^+ = (e^-)^T$, тогда

$$L_{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & \lambda_+ \end{pmatrix} \text{ и } \Xi^+ = \begin{pmatrix} \operatorname{Id}_{N-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}.$$

■

Теперь наша задача — модифицировать $\tilde{\Xi}(z, u, \tau) \rightarrow \Xi(z, u, \tau)$ таким образом, чтобы собственный вектор L_{-1} лежал в ядре $\Xi(0)$. В качестве последнего выберем $(1, \dots, 1)$. Решение указанной задачи содержит следующую лемму.

Лемма 2.4. Вектор-столбец

$$\left\{ (-1)^l \prod_{j < k; j, k \neq l} \vartheta(u_k - u_j, \tau) \right\}, \quad l = 1, 2, \dots, N$$

лежит в ядре $\tilde{\Xi}(0)$.

□

Мы должны доказать, что для любого i

$$\sum_{l=1}^N (-1)^l \theta \left[\begin{array}{c} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ \frac{N}{2} \end{array} \right] (z - Nu_l, N\tau) \prod_{j < k; j, k \neq l} \vartheta(u_k - u_j, \tau) = 0. \quad (2.39)$$

Во-первых, докажем, что группа перестановок частиц действует на левую часть (2.39) антисимметрично. Перепишем левую часть в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N (-1)^l \theta \left[\begin{array}{c} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ \frac{N}{2} \end{array} \right] (z - Nu_l, N\tau) (-1)^{\frac{1}{2}N(N-1)} \times \\ & \times \frac{\prod_{j < k} \vartheta(u_k - u_j)}{\prod_{j < l} \vartheta(u_l - u_j) \prod_{k > l} \vartheta(u_k - u_l)} = - \frac{\det \tilde{\Xi}(z, u_1, \dots, u_N)}{C(\tau) \vartheta(z)} (-1)^{\frac{1}{2}N(N-1)} \times \\ & \times \sum_{l=1}^N \theta \left[\begin{array}{c} \frac{i}{N} - \frac{1}{2} \\ \frac{N}{2} \end{array} \right] (z - Nu_l, N\tau) \frac{1}{\prod_{j \neq l} \vartheta(u_j - u_l)}. \quad (2.40) \end{aligned}$$

Общий знак минус появился в результате смены знаков множителей первого произведения в знаменателе, что дало $(-1)^{l-1}$. В полученном выражении сумма симметрична относительно перестановок. В то же время при любой перестановке $\det \tilde{\Xi}$ выбрасывает минус, что и доказывает антисимметричность в целом.

Итак, левая часть (2.39) зануляется на гиперплоскостях $u_i = u_j$. Отсюда следует, что, как у функции от переменной u_1 , у нее $2N$ нулей: $N - 2$ нуля $u_1 = u_k$, $k \neq 1, N$, $N - 2$ нуля $u_N = u_k$, $k \neq 1, N$ и четыре нуля $u_1 = u_N$ (последнее уравнение $2u_1 = - \sum_{j=2}^{N-1} u_j$).

С другой стороны, левая часть (2.39) квазипериодична по отношению к сдвигам $u_1 \rightarrow u_1 + 1$, $u_1 \rightarrow u_1 + \tau$ с мультипликаторами 1 и $e(-(N-1)\tau -$

$(N - 1)(u_1 - u_N)$). Любая квазипериодическая функция с такими мультипликаторами либо равна нулю, либо имеет $2N - 2$ нуля. Так как наше выражение зануляется в $2N$ точках, то оно равно нулю тождественно.

■

Итак, окончательный ответ для искомого преобразования

$$\Xi(z) = \tilde{\Xi}(z) \text{diag} \left((-1)^l \left(\prod_{j < k; j, k \neq l} \vartheta(u_k - u_j, \tau) \right)^{-1} \right). \quad (2.41)$$

Отметим также, что система КМ описывается динамической R -матрицей, а волчок — нединамической [25–27]. Указанное калибровочное преобразование переводит одну R -матрицу в другую.

2.3. Преобразования Бэклунда в модели КМ: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -случай. Модификация в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -случае. Продемонстрируем процедуру верхней модификации в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -случае. Для этого рассмотрим матрицу Лакса модели Калоджеро:

$$L^{\text{KM}} = \begin{pmatrix} v & \nu\Phi(2u, z) \\ \nu\Phi(-2u, z) & -v \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

в которой v и u — канонически сопряженные переменные: $\{v, u\} = 1$. Нашей задачей является построение канонического преобразования, переводящего вышеуказанный оператор Лакса в оператор Лакса эллиптического $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -волчка:

$$L^{\text{rot}} = \begin{pmatrix} S_{10}\phi_{10} & S_{01}\phi_{01} - iS_{11}\phi_{11} \\ S_{01}\phi_{01} + iS_{11}\phi_{11} & -S_{10}\phi_{10} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

где тройка динамических переменных (S_{10}, S_{11}, S_{01}) образует синус-алгебру относительно скобки Пуассона*. В данном случае она совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$:

$$\{S_{10}, S_{11}\} = -2iS_{01}, \quad \{S_{11}, S_{01}\} = -2iS_{10}, \quad \{S_{01}, S_{10}\} = -2iS_{11}. \quad (2.44)$$

Функции $\phi_{mn}(z)$ в матрице (2.43) являются коэффициентами в разложении этой матрицы по базису синус-алгебры. Согласно общей формуле для $\phi_{mn}(z)$:

$$\phi_{10} = \Phi\left(z, \frac{1}{2}\right), \quad \phi_{11} = \Phi\left(z, \frac{1+\tau}{2}\right) e^{\pi iz}, \quad \phi_{01} = \Phi\left(z, \frac{\tau}{2}\right) e^{\pi iz}. \quad (2.45)$$

Для дальнейших целей полезно записать эти формулы в следующем виде:

$$\phi_{10} = \frac{\vartheta'(0)\theta_{10}(z)}{\vartheta(z)\theta_{10}(0)}, \quad \phi_{11} = \frac{\vartheta'(0)\theta_{00}(z)}{\vartheta(z)\theta_{00}(0)}, \quad \phi_{01} = \frac{\vartheta'(0)\theta_{01}(z)}{\vartheta(z)\theta_{01}(0)}. \quad (2.46)$$

*Для удобства у S_{10} изменен знак.

Сам же базис строится по генераторам некоммутативного тора:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Следовательно,

$$E_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Очевиден изоморфизм этой алгебры и алгебры Ли $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$:

$$E_{01} = \sigma_1, \quad E_{11} = \sigma_2, \quad E_{10} = -\sigma_3, \quad (2.49)$$

где σ_a — матрицы Паули. Согласно общему определению

$$\tilde{\Xi} = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z - 2u, 2\tau) & \theta_{00}(z + 2u, 2\tau) \\ -\theta_{10}(z - 2u, 2\tau) & -\theta_{10}(z + 2u, 2\tau) \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Из собственных векторов матрицы $\lim_{z \rightarrow 0} (zL^{\text{KM}}(z))$ выберем $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, который выделен в случае произвольного ранга. Для того чтобы верхняя модификация не производила старшие полюса, необходимо потребовать $e_1 \in \text{Ker } \Xi(0)$. Тогда для Ξ имеем

$$\Xi = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z - 2u, 2\tau) & -\theta_{00}(z + 2u, 2\tau) \\ -\theta_{10}(z - 2u, 2\tau) & \theta_{10}(z + 2u, 2\tau) \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Связь между двумя системами представляется в виде

$$L^{\text{rot}} = \Xi L^{\text{KM}} \Xi^{-1}. \quad (2.52)$$

О представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ дифференциальными операторами. Наша цель — проверить формулу (2.52) и получить представление алгебры $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$, т. е. $S_{kl} = S_{kl}(v, u)$.

Выпишем равенство (2.52) для матричных элементов:

$$L_{11}^{\text{rot}} = \frac{1}{\det \Xi} (L_{11}^{\text{KM}}(\Xi_{11}\Xi_{22} + \Xi_{21}\Xi_{12}) + L_{21}^{\text{KM}}\Xi_{12}\Xi_{22} - L_{12}^{\text{KM}}\Xi_{11}\Xi_{21}), \quad (2.53)$$

$$L_{12}^{\text{rot}} = \frac{1}{\det \Xi} (-2L_{11}^{\text{KM}}\Xi_{12}\Xi_{11} + L_{12}^{\text{KM}}\Xi_{11}^2 - L_{21}^{\text{KM}}\Xi_{12}^2), \quad (2.54)$$

$$L_{21}^{\text{rot}} = \frac{1}{\det \Xi} (2L_{11}^{\text{KM}}\Xi_{21}\Xi_{22} + L_{21}^{\text{KM}}\Xi_{22}^2 - L_{12}^{\text{KM}}\Xi_{21}^2). \quad (2.55)$$

Для проведения дальнейших вычислений следует воспользоваться формулами для удвоенного τ (A.39), (A.40). С их помощью получаем

$$\begin{aligned} \det \Xi &= \vartheta(z)\vartheta(2u), & \Xi_{11}\Xi_{22} + \Xi_{21}\Xi_{12} &= -\theta_{10}(z)\theta_{10}(2u), \\ \Xi_{12}\Xi_{22} &= -\frac{1}{2}\theta_{10}(z+2u)\theta_{10}(0), & \Xi_{11}\Xi_{21} &= -\frac{1}{2}\theta_{10}(z-2u)\theta_{10}(0). \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{12}\Xi_{11} &= \frac{1}{2}(\theta_{00}(z)\theta_{00}(2u) + \theta_{01}(z)\theta_{01}(2u)), \\ \Xi_{11}^2 &= \frac{1}{2}(\theta_{00}(z-2u)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(z-2u)\theta_{01}(0)), \\ \Xi_{12}^2 &= \frac{1}{2}(\theta_{00}(z+2u)\theta_{00}(0) + \theta_{01}(z+2u)\theta_{01}(0)). \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{21}\Xi_{22} &= \frac{1}{2}(\theta_{00}(z)\theta_{00}(2u) - \theta_{01}(z)\theta_{01}(2u)), \\ \Xi_{21}^2 &= \frac{1}{2}(\theta_{00}(z-2u)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(z-2u)\theta_{01}(0)), \\ \Xi_{22}^2 &= \frac{1}{2}(\theta_{00}(z+2u)\theta_{00}(0) - \theta_{01}(z+2u)\theta_{01}(0)). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Теперь необходимы формулы сложения для тэта-функций. Их применение дает окончательный ответ:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{10} = -v \frac{\theta_{10}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{10}(2u)}{\vartheta(2u)} + \nu \frac{\theta_{10}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{00}(2u)\theta_{01}(2u)}{\vartheta^2(2u)}, \\ S_{11} = v \frac{\theta_{00}(0)}{\sqrt{-1}\vartheta'(0)} \frac{\theta_{00}(2u)}{\vartheta(2u)} - \nu \frac{\theta_{00}^2(0)}{\sqrt{-1}\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{10}(2u)\theta_{01}(2u)}{\vartheta^2(2u)}, \\ S_{01} = -v \frac{\theta_{01}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{01}(2u)}{\vartheta(2u)} + \nu \frac{\theta_{01}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)} \frac{\theta_{00}(2u)\theta_{10}(2u)}{\vartheta^2(2u)}. \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Заменяя в полученном v на $\frac{\partial}{\partial u}$, получим реализацию генераторов алгебры Ли $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$.

Следующим шагом следует проверить каноничность преобразования $(v, u) \rightarrow (S_{10}, S_{11}, S_{01})$, т.е. убедиться в том, что $S_{ab}(v, u)$, заданные формулой (2.59), удовлетворяют соотношениям (2.44).

Проверка каноничности. Для удобства перейдем к новым переменным:

$$u \rightarrow \frac{u}{\pi\theta_{00}(0)^2}, \quad v \rightarrow \pi\theta_{00}(0)^2. \quad (2.60)$$

Каноничность этого преобразования очевидна. Теперь перепишем формулы

(2.59) через функции Якоби (А.49):

$$\begin{cases} \kappa' S_{10} = -v \frac{cn2u}{sn2u} + \nu \frac{dn2u}{sn^2 2u}, \\ \sqrt{-1} \kappa \kappa' S_{11} = v \frac{dn2u}{sn2u} - \nu \frac{cn2u}{sn^2 2u}, \\ \kappa S_{01} = -v \frac{1}{sn2u} + \nu \frac{dn2u cn2u}{sn^2 2u}. \end{cases} \quad (2.61)$$

Все вычисления проводятся с помощью формул (А.50)–(А.53). Например, для того чтобы убедиться в соотношении $\{S_{10}, S_{11}\} = -2\pi\sqrt{-1}S_{01}$, необходимо проверить следующие равенства:

$$\left\{ v \frac{cn2u}{sn2u}, v \frac{dn2u}{sn2u} \right\} = 2(\kappa')^2 v \frac{1}{sn2u}$$

и

$$\left\{ v \frac{cn2u}{sn2u}, \frac{cn2u}{sn^2 2u} \right\} - \left\{ v \frac{dn2u}{sn2u}, \frac{dn2u}{sn^2 2u} \right\} = 2(\kappa')^2 \frac{cn2u \cdot dn2u}{sn^2 2u}.$$

Преобразование Бэклунда

$$(L^{KM})'(v', u') = \Omega L^{\text{rot}} \Omega^{-1}, \quad (2.62)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z - 2u', 2\tau) & -\theta_{10}(z - 2u', 2\tau) \\ \theta_{00}(z + 2u', 2\tau) & -\theta_{10}(z + 2u', 2\tau) \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

$$-\theta_{10}(2u', 2\tau)(S_{10} \pm \nu) = \theta_{00}(2u', 2\tau)(S_{01} - \sqrt{-1}S_{11}), \quad (2.64)$$

или

$$-\theta_{10}(2u')\theta_{10}(0)(S_{10} + \nu) = (\theta_{00}(2u')\theta_{00}(0) + \theta_{01}(2u')\theta_{01}(0))(S_{01} - \sqrt{-1}S_{11}), \quad (2.65)$$

$$-\theta_{10}(2u')\theta_{10}(0)(S_{10} - \nu) = (\theta_{00}(2u')\theta_{00}(0) + \theta_{01}(2u')\theta_{01}(0))(S_{01} - \sqrt{-1}S_{11}). \quad (2.66)$$

По аналогии с (2.53) имеем

$$\begin{aligned} (L_{11}^{KM})' &= \frac{1}{\vartheta(z)\vartheta(2u')} \left(-\phi_{10} S_{10} \theta_{10}(z) \theta_{10}(2u') + \phi_{11} \sqrt{-1} S_{11} \theta_{00}(z) \theta_{00}(2u') - \right. \\ &\quad \left. - \phi_{01} S_{01} \theta_{01}(z) \theta_{01}(2u') \right) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(z)^2 \vartheta(2u')} \times \\ &\times \left(-S_{10} \frac{\theta_{10}(z)^2}{\theta_{10}(0)} \theta_{10}(2u') + \sqrt{-1} S_{11} \frac{\theta_{00}(z)^2}{\theta_{00}(0)} \theta_{00}(2u') - S_{01} \frac{\theta_{01}(z)^2}{\theta_{01}(0)} \theta_{01}(2u') \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Используя (A.47), получаем

$$(L_{11}^{\text{KM}})' = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(2u')\theta_{10}(0)^2} \left[\sqrt{-1}S_{11} \frac{\theta_{00}(2u')}{\theta_{00}(0)} \theta_{01}(0)^2 - S_{01} \frac{\theta_{01}(2u')}{\theta_{01}(0)} \theta_{00}(0)^2 \right] + \frac{\theta_{10}(z)^2 - S_{10}\theta_{10}(2u')\theta_{10}(0) + \sqrt{-1}S_{11}\theta_{00}2u'\theta_{00}(0) - S_{01}\theta_{01}(2u')\theta_{01}(0)}{\vartheta(z)^2 \vartheta(2u')\theta_{10}(0)^2}. \quad (2.68)$$

Отсюда

$$v' = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta(2u')\theta_{10}(0)^2} \left[\sqrt{-1}S_{11}(v, u) \frac{\theta_{00}(2u')}{\theta_{00}(0)} \theta_{01}(0)^2 - S_{01}(v, u) \frac{\theta_{01}(2u')}{\theta_{01}(0)} \theta_{00}(0)^2 \right]. \quad (2.69)$$

Член перед $\frac{\theta_{10}(z)^2}{\vartheta(z)^2}$ зануляется в силу (2.64). Для того, чтобы в этом убедиться, заметим, что из (2.64) получаем

$$\begin{cases} \frac{\theta_{01}(2u')\theta_{01}(0)}{\theta_{10}(2u')\theta_{10}(0)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{S_{10} \pm \nu}{S_{01} - \sqrt{-1}S_{11}} - \frac{S_{01} - \sqrt{-1}S_{11}}{S_{10} \pm \nu} \right), \\ \frac{\theta_{00}(2u')\theta_{00}(0)}{\theta_{10}(2u')\theta_{10}(0)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{S_{10} \pm \nu}{S_{01} - \sqrt{-1}S_{11}} + \frac{S_{01} - \sqrt{-1}S_{11}}{S_{10} \pm \nu} \right). \end{cases}$$

Теперь остается показать, что

$$-S_{10} + \sqrt{-1}S_{11} \frac{\theta_{00}(2u')\theta_{00}(0)}{\theta_{10}(2u')\theta_{10}(0)} - S_{01} \frac{\theta_{01}(2u')\theta_{01}(0)}{\theta_{10}(2u')\theta_{10}(0)} = 0.$$

Это простое вычисление мы опускаем.

В более общем случае преобразования Бэклунда описаны в [28].

2.4. Система Русенарса–Шнайдера и L -оператор Хасегавы. Система Русенарса–Шнайдера [30, 31] является однопараметрической интегрируемой деформацией модели КМ. Этот параметр будем обозначать буквой γ . Гамильтониан выглядит следующим образом:

$$H = \sum_j \cosh v_j \prod_{k \neq j} \left\{ \frac{\vartheta(u_{kj} + \gamma)\vartheta(u_{kj} - \gamma)}{\vartheta^2(u_{kj})} \right\}^{1/2}, \quad (2.70)$$

L -оператор:

$$L_{ij}^R = e^{v_j} \frac{\vartheta(u_{ij} + \gamma + z)}{\vartheta(u_{ij} + \gamma)\vartheta(z)} \prod_{k \neq j} \left\{ \frac{\vartheta(u_{kj} + \gamma)\vartheta(u_{kj} - \gamma)}{\vartheta^2(u_{kj})} \right\}^{1/2}. \quad (2.71)$$

Сделаем каноническое преобразование

$$v_j \rightarrow v_j + \frac{1}{2} \ln \prod_{k \neq j} \frac{\vartheta(u_{kj} + \gamma)}{\vartheta(u_{kj} - \gamma)} \quad (2.72)$$

и калибровочное преобразование диагональной матрицей $1 / \prod_{k \neq i} \vartheta(u_{ki})$.

Тогда оператор Лакса переписывается в виде

$$\begin{aligned} L_{ij}^R &= e^{v_j} \frac{\prod_{k \neq j} \vartheta(\gamma + u_{kj})}{\vartheta(u_{ij} + \gamma) \vartheta(z) \prod_{k \neq i} \vartheta(u_{ki})} = \\ &= \frac{1}{\vartheta(\gamma)} \frac{\vartheta(u_{ij} + \gamma + z)}{\vartheta(z)} \prod_{k \neq i} \frac{\vartheta(\gamma + u_{kj})}{\vartheta(u_{kj})} e^{v_j}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Как показано в [32], записанный в такой форме L -оператор Русенарса переписывается в терминах матрицы $\tilde{\Xi}(z)$ (2.29):

$$L_{ij}^R = \frac{1}{\vartheta(\gamma)} \left(\tilde{\Xi}^{-1}(z, u_i) \tilde{\Xi}(z + N\gamma, u_j) \right)_{ij} e^{v_j}. \quad (2.74)$$

Теперь сопряжение матрицей $\tilde{\Xi}$ выполняется элементарно. Полученное при этом выражение называется L -оператором Хасегавы:

$$L_{ij}^{\text{Has}} = \frac{1}{\vartheta(\gamma)} \sum_k \tilde{\Xi}_{ik}(z + N\gamma, u_i) e^{v_k} \tilde{\Xi}_{kj}^{-1}(z, u_j). \quad (2.75)$$

Тем самым мы выполнили аналог процедуры верхней модификации в релятивистском случае.

3. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

3.1. Системы Хитчина бесконечного ранга. В этом разделе описан способ построения L -оператора для интегрируемых двумерных теорий поля [8], обобщающих классические интегрируемые системы. В основе лежит метод Некрасова–Хитчина, изложенный в [4] и [7]. Полученные уравнения будут интегрируемы в смысле метода обратной задачи рассеяния [33].

$\hat{L}(\text{GL}(N, \mathbb{C}))$ **голоморфные расслоения.** Пусть $L(\text{gl}(N, \mathbb{C}))$ — алгебра петель C^∞ -отображений

$$L(\text{gl}(N, \mathbb{C})) : S^1 \rightarrow \text{gl}(N, \mathbb{C}),$$

а $\hat{L}(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ — ее центральное расширение с умножением

$$(g, c) \times (g', c') = (gg', cc' \exp \mathcal{C}(g, g')), \quad (3.1)$$

где $\exp \mathcal{C}(g, g')$ — 2-коцикл в $\hat{L}(\mathrm{GL}(N, \mathbb{C}))$, обеспечивающий ассоциативность умножения.

Рассмотрим голоморфное расслоение бесконечного ранга V над римановой кривой Σ_n с n отмеченными точками. Оно задается функциями переклейки из $\hat{L}(\mathrm{GL}(N, \mathbb{C}))$. Слои расслоения изоморфны алгебре Ли $\hat{L}(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. Голоморфная структура на V задается оператором

$$d'' : \Omega_{C^\infty}^{(0)}(\Sigma_n, \mathrm{End} V) \rightarrow \Omega_{C^\infty}^{(0,1)}(\Sigma_n, \mathrm{End} V).$$

Этот оператор состоит из двух компонент: $d'' = d''_A + d''_\lambda$. Первая компонента

$$d''_A : \Omega_{C^\infty}^{(0)}(\Sigma_n, L(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))) \rightarrow \Omega_{C^\infty}^{(0,1)}(\Sigma_n, L(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))),$$

или, локально,

$$d''_{\bar{A}} = \bar{\partial} + \bar{A}, \quad \bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}, \quad \bar{A} = \bar{A}(x, z, \bar{z}), \quad x \in S^1.$$

Вторая компонента определяется связностью d''_λ в тривиальном линейном расслоении \mathcal{L} над Σ_n :

$$d''_\lambda = \bar{\partial} + \lambda.$$

Поле λ играет роль отображения из Σ_n в центральный элемент $\hat{L}(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. Локальное сечение σ в V голоморфно, если $d''\sigma = 0$. Голоморфные сечения позволяют определить функции переклейки.

Будем полагать, что \bar{A} и λ — гладкие в отмеченных точках. Кроме того, зададим n копий центрально расширенных групп петель, локализованных в отмеченных точках:

$$\hat{L}G_\alpha = (g_\alpha(x), c_\alpha), \quad G_\alpha = \mathrm{GL}(N, \mathbb{C}) \quad (\alpha = 1, \dots, n), \quad x \in S^1,$$

с умножением (3.1).

Тем самым мы задали множество полей \mathcal{R} , играющих роль переменных в конфигурационном пространстве:

$$\mathcal{R} = \{\bar{A}, \lambda, (g_1, c_1), \dots, (g_n, c_n)\}. \quad (3.2)$$

Калибровочные симметрии и симплектическая редукция. Пусть \mathcal{G} — группа автоморфизмов \mathcal{R} (калибровочная группа).

$$\mathcal{G} = C^\infty \mathrm{Map}(\Sigma_n \rightarrow \hat{L}(\mathrm{GL}(N, \mathbb{C}))) = \{f(z, \bar{z}, x), s(z, \bar{z})\},$$

где $f(z, \bar{z}, x)$ принимает значения в $GL(N, \mathbb{C})$, а $s(z, \bar{z})$ — отображение в центральный элемент $\hat{L}(GL(N, \mathbb{C}))$. Умножение определяется поточечно:

$$(f_1, s_1) \times (f_2, s_2) = (f_1 f_2, s_1 s_2 \exp \mathcal{C}(f_1, f_2)),$$

где $\exp \mathcal{C}(f_1, f_2)$ — отображение из Σ_n во второй коцикл $\hat{L}(GL(N, \mathbb{C}))$.

Пусть $f_\alpha = f_\alpha(x), s_\alpha$ — значения калибровочных полей в отмеченных точках w_α . Действие калибровочной группы \mathcal{G} на \mathcal{R} устроено следующим образом:

$$\bar{A} \rightarrow f^{-1} \bar{\partial} f + f^{-1} \bar{A} f, \quad (3.3)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda + s^{-1} \bar{\partial} s + \oint \operatorname{tr} (\bar{A} f^{-1} \partial_x f) dx, \quad (3.4)$$

$$c_\alpha \rightarrow c_\alpha s_\alpha, \quad g_\alpha \rightarrow g_\alpha f_\alpha. \quad (3.5)$$

Фактор-пространство $\mathcal{N} = \mathcal{R}/\mathcal{G}$ — пространство модулей голоморфного расслоения бесконечного ранга над римановой кривой с отмеченными точками.

Фазовое пространство. Кокасательное пространство к \mathcal{R} устроено следующим образом. Рассмотрим аналог поля Хиггса $\Phi \in \Omega_{C^\infty}^{(1,0)}(\Sigma_n, (\operatorname{End} V)^*)$. Это 1-форма Φ на Σ_n , принимающая значения в коалгебре Ли $L^*(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. Пусть k — скалярная 1-форма на Σ_n , $k \in \Omega_{C^\infty}^{(1,0)}(\Sigma_n)$. Она дуальна к λ . В отмеченных точках мы задали набор коалгебр Ли $L(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ с центральными элементами r_α , двойственными к c_α . Таким образом, кокасательное расслоение $T^*\mathcal{R}$ состоит из следующего набора полей:

$$T^*\mathcal{R} = \{(\bar{A}, \Phi), (\lambda, k); (p_1, r_1), \dots, (p_n, r_n)\}. \quad (3.6)$$

На $T^*\mathcal{R}$ существует каноническая симплектическая структура.

Для $F \in \Omega_{C^\infty}^{(1,0)}(\Sigma_n, (\operatorname{End} V)^*)$ и $G \in \Omega_{C^\infty}^{(0,1)}(\Sigma_n, L(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})))$ определим спаривание:

$$\langle F|G \rangle = \int_{\Sigma_n} \oint \operatorname{tr} (FG) dx.$$

Тогда

$$\omega = \langle D\Phi|D\bar{A} \rangle + \int_{\Sigma_n} DkD\lambda + \sum_{\alpha=1}^n \omega_\alpha, \quad (3.7)$$

где ω_α — каноническая форма на $T^*\hat{L}(G_\alpha)$. Она задается известным образом, как форма Маурера–Картана $\hat{L}(G_\alpha) = \{g_\alpha, c_\alpha\}$. В итоге имеем

$$\omega_\alpha = \oint_{S_\alpha^1} \operatorname{tr} (D(p_\alpha g_\alpha^{-1}) Dg_\alpha) + D(r_\alpha c_\alpha^{-1}) Dc_\alpha + \frac{r_\alpha}{2} \oint_{S_\alpha^1} \operatorname{tr} (g_\alpha^{-1} Dg_\alpha \partial_x (g_\alpha^{-1} Dg_\alpha)). \quad (3.8)$$

Симплектическая редукция. Теперь рассмотрим поднятие \mathcal{G} до глобальных канонических преобразований $T^*\mathcal{R}$. В добавление к (3.3), (3.4), (3.5) укажем следующие действия калибровочной группы \mathcal{G} :

$$\Phi \rightarrow f^{-1}k\partial_x f + f^{-1}\Phi f, \quad k \rightarrow k, \quad (3.9)$$

$$p_\alpha \rightarrow f_\alpha^{-1}p_\alpha f_\alpha + r_\alpha f_\alpha^{-1}\partial_x f_\alpha, \quad r_\alpha \rightarrow r_\alpha. \quad (3.10)$$

Эти симметрии позволяют построить отображение момента, действующее из фазового пространства в коалгебру Ли калибровочной группы:

$$\mu : T^*\mathcal{R} \rightarrow \text{Lie}^*(\mathcal{G}).$$

Оно выглядит следующим образом:

$$\mu = \left(\bar{\partial}\Phi - k\partial_x \bar{A} + [\bar{A}, \Phi] + \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \delta(z_\alpha), \bar{\partial}k + \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha \delta(z_\alpha) \right). \quad (3.11)$$

Положим $\mu = (0, 0)$. Тем самым приходим к двум условиям голоморфности:

$$\bar{\partial}\Phi - k\partial_x \bar{A} + [\bar{A}, \Phi] + \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \delta(z_\alpha) = 0, \quad (3.12)$$

$$\bar{\partial}k + \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha \delta(z_\alpha) = 0. \quad (3.13)$$

Уравнение связи (3.13) означает, что компонента поля Хиггса k является голоморфной 1-формой на Σ_n с полюсами первого порядка в отмеченных точках.

Зафиксируем калибровку:

$$\bar{L} = f^{-1}\bar{\partial}f + f^{-1}\bar{A}f. \quad (3.14)$$

То же самое калибровочное преобразование f действует на поле Хиггса:

$$L = k f^{-1}\partial_x f + f^{-1}\Phi f. \quad (3.15)$$

Мы сохраним обозначения g_α, p_α и для калибровочно-преобразованных переменных. Уравнение момента (3.12) в переменных \bar{L} и L имеет тот же вид:

$$\bar{\partial}L - k\partial_x \bar{L} + [\bar{L}, L] + \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \delta(z_\alpha) = 0. \quad (3.16)$$

Решение этого уравнения вместе с (3.13) определяет редуцированное фазовое пространство

$$T^*\mathcal{R}/\mathcal{G} \sim T^*\mathcal{N}.$$

Симплектическая форма (3.7) на $T^*\mathcal{N}$ выглядит так:

$$\omega = \langle \delta L | \delta \bar{L} \rangle + \int_{\Sigma_n} \delta k \delta \lambda + \sum_{\alpha=1}^n \omega_\alpha. \quad (3.17)$$

Орбиты коприсоединенного действия. Рассмотрим более подробно симплектическую форму ω (3.8) на

$$T^*\hat{L}(G) \sim \{(p, r); (g, c)\}.$$

(Индекс α будем опускать.) Мы не рассмотрели следующее каноническое преобразование формы ω под действием $(f, s) \in \hat{L}(G)$, где s — центральный элемент:

$$g \rightarrow fg, \quad p \rightarrow p, \quad r \rightarrow r, \quad c \rightarrow sc, \quad f \in L(G). \quad (3.18)$$

Симплектическая редукция относительно этих преобразований ограничивает фазовое пространство на орбиты коприсоединенного действия группой $\hat{L}(\text{GL}(N, \mathbb{C}))$. Отображение момента

$$\mu : T^*\hat{L}(G) \rightarrow \text{Lie}^*(\hat{L}(\text{GL}(N, \mathbb{C})))$$

имеет вид

$$\mu = (-gpg^{-1} + r\partial_x gg^{-1}, r).$$

Зафиксируем уровень отображения момента $\mu = (p^{(0)}, r^{(0)})$. В результате симплектической редукции пространство $T^*\hat{L}(G)$ перейдет в орбиту коприсоединенного действия:

$$\mathcal{O}(p^{(0)}, r^{(0)}) = (p = -g^{-1}p^{(0)}g - r^{(0)}g^{-1}\partial_x g, r^{(0)}) = \mu^{-1} \left(T^*\hat{L}(\text{SL}(N, \mathbb{C})) \right) / G_0,$$

где G_0 — подгруппа в $\hat{L}(\text{GL}(N, \mathbb{C}))$, сохраняющая μ (стабилизатор):

$$G^0 = \left\{ g \in L(\text{GL}(N, \mathbb{C})) \mid p^{(0)} = -g^{-1}p^{(0)}g + r^{(0)}g^{-1}\partial_x g \right\}.$$

На орбите \mathcal{O} симплектическая форма (3.8) принимает вид

$$\omega = \oint \text{tr} (D(pg^{-1})Dgg^{-1}) + \frac{r^{(0)}}{2} \oint \text{tr} (g^{-1}DgD(g^{-1}\partial_x g)). \quad (3.19)$$

Итак, будем иметь дело с набором орбит в отмеченных точках $\mathcal{O}_\alpha(p_\alpha^{(0)}, r_\alpha^{(0)})$ вместо рассмотрения кокасательного расслоения $T^*\hat{L}(G_\alpha)$. В итоге фазовое пространство $T^*\mathcal{R}$ (3.6) изменится следующим образом:

$$T^*\mathcal{R} = \left\{ (\bar{A}, \Phi), (\lambda, k), \mathcal{O}_1(p_1^{(0)}, r_1^{(0)}), \dots, \mathcal{O}_n(p_n^{(0)}, r_n^{(0)}) \right\}. \quad (3.20)$$

Законы сохранения и уравнения движения. Калибровочно-инвариантными сохраняющимися величинами являются следы матриц монодромии поля Φ , т. е. производящую функцию гамильтонианов в общем виде можно записать так:

$$H(z) = \text{tr} \left(P \exp \frac{1}{k} \oint_{S_1} \Phi^N \right), \quad (3.21)$$

где z — локальная координата любой точки. Если эта точка отмеченная, то Φ имеет полюс первого порядка и, следовательно,

$$H(z) = \sum_{j=-N}^{+\infty} H_j z^j. \quad (3.22)$$

Так как (3.21) калибровочно-инвариантное выражение, то Φ можно заменить на L :

$$H(z) = \text{tr} \left(P \exp \frac{1}{k} \oint_{S_1} L^N \right). \quad (3.23)$$

Рассмотрим уравнения движения на нередуцированном фазовом пространстве $T^*\mathcal{R}$ (3.20). Они записываются с помощью симплектической формы ω (3.7), где ω_α заменены на (3.19), и гамильтонианов (3.21), (3.22). Пусть t_j — время, соответствующее гамильтониану H_j . Принимая во внимание, что H_j функционально зависят только от поля Хиггса и центрального заряда k , выпишем следующую систему уравнений:

$$\partial_j \Phi = 0, \quad (3.24)$$

$$\partial_j \bar{A} = \frac{\delta H_j}{\delta \Phi}, \quad (3.25)$$

$$\partial_j k = 0, \quad \partial_j \lambda = \frac{\delta H_j}{\delta k}, \quad \partial_j p_\alpha = 0. \quad (3.26)$$

Редуцированное фазовое пространство описывается полями \bar{L} (3.14), L (3.15). Подставляя (3.15) в (3.24), получаем уравнения Захарова–Шабата:

$$\partial_j L - k \partial_x M_j + [M_j, L] = 0 \quad (\partial_j = \partial_{t_j}), \quad (3.27)$$

где $M_j = \partial_j f f^{-1}$. Оператор M_j можно пытаться получить из второго уравнения (3.25):

$$\bar{\partial} M_j - \partial_j \bar{L} + [M_j, \bar{L}] = \frac{\delta H_j}{\delta L}. \quad (3.28)$$

Приведенные выше два уравнения наряду с уравнением момента (3.16) являются условиями совместности следующей системы линейных уравнений:

$$(k\partial_x + L)\Psi = 0, \quad (3.29)$$

$$(\bar{\partial} + \bar{L})\Psi = 0, \quad (3.30)$$

$$(\partial_j + M_j)\Psi = 0. \quad (3.31)$$

Гамильтонианы в случае $SL(2, \mathbb{C})$. Здесь опишем простейший способ получения плотностей сохраняющихся величин в случае $SL(2, \mathbb{C})$.

Выполним калибровочное преобразование:

$$f^{-1}Lf + kf^{-1}\partial_x f = L', \quad (3.32)$$

где f определено как

$$f = \begin{pmatrix} \sqrt{L_{12}} & 0 \\ -\frac{L_{11}}{\sqrt{L_{12}}} - k\frac{\partial_x \sqrt{L_{12}}}{L_{12}} & \frac{1}{\sqrt{L_{12}}} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Под действием этого преобразования L -оператор перейдет в

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

где

$$T = L_{21}L_{12} + L_{11}^2 + k\frac{L_{11}\partial_x L_{12}}{L_{12}} - k\partial_x L_{11} - \frac{1}{2}k^2\frac{\partial_x^2 L_{12}}{L_{12}} + \frac{3}{4}k^2\frac{(\partial_x L_{12})^2}{L_{12}^2}. \quad (3.35)$$

Первое уравнение в линейной задаче

$$\begin{cases} (k\partial_x + L')\psi = 0, \\ (\partial_j + M'_j)\psi = 0, \end{cases} \quad (3.36)$$

где ψ — волновые функции $\psi = \exp\{-i \oint \chi\}$, переписывается как уравнение Риккати на χ :

$$ik\partial_x \chi - \chi^2 + T = 0. \quad (3.37)$$

Коэффициенты разложения $\chi(z)$,

$$\chi = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k \chi_k, \quad (3.38)$$

найденные из (3.37), являются плотностями сохраняющихся величин (см. [34]):

$$H_k \sim \oint dx \chi_{k-1}. \tag{3.39}$$

При этом нужно пользоваться (3.35) для нахождения коэффициентов разложения $T(z)$: $T(z) = \sum_{k=-2}^{\infty} z^k T_k$. Для $k = -2, -1$ и 0 имеем

$$\begin{cases} \chi_{-1} = \sqrt{T_{-2}} = \sqrt{h}, \\ 2\sqrt{h}\chi_0 = T_{-1} + ik\partial_x \chi_{-1} = T_{-1}, \\ 2\sqrt{h}\chi_1 = T_0 + ik\partial_x \chi_0 - \chi_0^2. \end{cases} \tag{3.40}$$

В дальнейшем эти формулы будут использованы для нахождения гамильтонианов в теоретико-полевых обобщениях систем Калоджеро–Мозера и Годена.

3.2. Полевое обобщение моделей Калоджеро и Годена. $\hat{L}(\text{SL}(N, \mathbb{C}))$ -*расслоение над эллиптическими кривыми.* Общую конструкцию, рассмотренную в предыдущем разделе, применим к $\hat{L}(\text{SL}(N, \mathbb{C}))$ -расслоению над эллиптической кривой

$$E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \tag{3.41}$$

с отмеченными точками $w_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$. Наша цель — получить двумерное обобщение эллиптической системы Годена, описанной в [4]. В частности, в случае одной точки $z = 0$ получим полевое обобщение модели Эйлера–Калоджеро–Мозера.

Построим решения уравнений (3.11), выбирая для простоты орбиты в отмеченных точках с нулевыми центральными зарядами:

$$\mathcal{O}_\alpha = \{p_{ij}^\alpha, r_\alpha = 0\}.$$

Для эллиптической кривой зафиксируем центральный заряд $k = 1$. В случае стабильных расслоений преобразования (3.3) позволяют диагонализовать компоненту связности \bar{A} :

$$\bar{L}_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\tau - \bar{\tau}} u_i. \tag{3.42}$$

Тогда оператор Лакса L^G должен удовлетворять (3.16). Отсюда имеем

$$\begin{aligned} L_{ij}^G = & -\frac{\delta_{ij}}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{v_i}{2} + \sum_{\alpha} p_{ii}^\alpha \left(2\pi\sqrt{-1} \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}} + E_1(z - w_\alpha) \right) \right) - \\ & - \frac{1 - \delta_{ij}}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\alpha} p_{ij}^\alpha e \left(\frac{z - w_\alpha - (\bar{z} - \bar{w}_\alpha)}{\tau - \bar{\tau}} u_{ij} \right) \phi(u_{ij}, z - w_\alpha), \quad u_{ij} = u_i - u_j. \end{aligned} \tag{3.43}$$

С помощью калибровочного преобразования

$$f = \text{diag} \left\{ e \left(\frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}} u_i \right) \right\} \quad (3.44)$$

получаем голоморфный квазипериодический оператор Лакса:

$$l_{ij}^G(z) = -\frac{\delta_{ij}}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{v_i}{2} + \sum_{\alpha} p_{ii}^{\alpha} E_1(z - w_{\alpha}) \right) - \frac{1 - \delta_{ij}}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\alpha} p_{ij}^{\alpha} \phi(u_{ij}, z - w_{\alpha}). \quad (3.45)$$

Уравнение момента на диагонали дает дополнительную связь

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\alpha} p_{ii}^{\alpha} = \partial_x u_i. \quad (3.46)$$

В этом разделе подробно изучим двумерное обобщение двухчастичной системы Калоджеро.

L-оператор. Из (3.45) следует, что оператор Лакса в голоморфном представлении состоит из следующих матричных элементов:

$$\begin{cases} l_{11}^G = -\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} - \sum_{\alpha} \frac{p_{11}^{\alpha}}{2\pi\sqrt{-1}} E_1(z - w_{\alpha}), \\ l_{12}^G = -\sum_{\alpha} \frac{p_{12}^{\alpha}}{2\pi\sqrt{-1}} \phi(2u, z - w_{\alpha}), \\ l_{21}^G = -\sum_{\alpha} \frac{p_{21}^{\alpha}}{2\pi\sqrt{-1}} \phi(-2u, z - w_{\alpha}) \end{cases} \quad (3.47)$$

с дополнительным условием (3.46):

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\alpha} p_{11}^{\alpha} = u_x. \quad (3.48)$$

Мы до сих пор не зафиксировали действие диагональной подгруппы из группы петель $\hat{L}(\text{SL}(N, \mathbb{C}))$ на L^G . Соответствующее этому действию уравнение момента и есть связь (3.48).

В случае одной отмеченной точки $w_1 = 0$ имеем

$$p = 2\pi\sqrt{-1} \begin{pmatrix} u_x & -\nu \\ -\nu & -u_x \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

где $\nu = \text{const}$ — результат фиксации указанной выше калибровочной свободы. В этом случае оператор Лакса является двумерным обобщением соответствующего оператора для двухчастичной модели Калоджеро–Мозера:

$$L^{\text{KM}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} v - u_x E_1(z) & \nu \phi(2u, z) \\ \nu \phi(-2u, z) & \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} v + u_x E_1(z) \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Гамильтонианы для $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ двумерной модели Калоджеро. Используя (3.35)–(3.40), получим коэффициенты разложения T_k функции T :

$$\begin{cases} T_{-2}^{\text{KM}} = u_x^2 + \nu^2 = h, \\ T_{-1}^{\text{KM}} = 2 \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} u_x - \frac{\nu_x}{\nu} u_x + u_{xx}, \\ T_0^{\text{KM}} = -\frac{v^2}{16\pi^2} + (2u_x^2 - \nu^2)\wp(2u) - \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} \frac{\nu_x}{\nu} + \frac{1}{4} \left(\frac{\nu_x}{\nu} \right)^2, \end{cases} \quad (3.51)$$

где h — оператор Казимира, фиксирующий орбиту коприсоединенного действия в отмеченной точке. Выберем его константой.

Первый гамильтониан — линейный по импульсу:

$$H_{-1}^{\text{KM}} = \oint \frac{v}{2\pi\sqrt{-1}} u_x - \frac{\nu_x}{\nu} u_x. \quad (3.52)$$

Перепишем его в следующем виде:

$$H_{-1}^{\text{KM}} = \oint \frac{v}{2\pi\sqrt{-1}} u_x + \frac{u_{xx}h}{\nu^2}. \quad (3.53)$$

Так как $\left\{ \oint dx \frac{u_{xx}}{\nu^2}, v(y) \right\} = 0$, то уравнения движения принимают вид

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} u_x, \\ v_t = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} v_x. \end{cases} \quad (3.54)$$

Заметим, что L - A -пара в этом случае строится элементарно: $M = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} L$.

Следующий гамильтониан H_0 — квадратичный по полю v . Он представляет основной интерес, так как является непосредственным обобщением гамильтониана модели Калоджеро–Мозера для двухчастичной задачи:

$$H_0^{\text{KM}} = \oint dx 2\sqrt{h}\chi_1 = \oint dx \left(T_0 - \frac{1}{4h} T_{-1}^2 \right). \quad (3.55)$$

Прямое вычисление дает ответ:

$$T_0^{\text{KM}} - \frac{1}{4h} (T_{-1}^{\text{KM}})^2 = -\frac{v^2}{16\pi^2} \left(1 - \frac{u_x^2}{h} \right) + (3u_x^2 - h)\wp(2u) - \frac{u_{xx}^2}{4\nu^2}. \quad (3.56)$$

Теперь можно записать уравнения движения, описывающие эволюцию по гамильтониану H_0^{KM} :

$$\begin{cases} u_t = -\frac{v}{8\pi^2} \left(1 - \frac{u_x^2}{h}\right), \\ v_t = \frac{1}{8\pi^2 h} \partial_x (v^2 u_x) - 2(3u_x^2 - h) \wp'(2u) + 6\partial_x (u_x \wp(2u)) + \\ + \frac{1}{2} \partial_x \left(\frac{u_{xxx} \nu - \nu_x u_{xx}}{\nu^3} \right). \end{cases} \quad (3.57)$$

Заметим, что в пределе, когда поля u и v не зависят от x , получаем хорошо известные уравнения движения для двухчастичной модели Калоджеро.

L-пара для двумерной эллиптической $\text{sl}(2, \mathbb{C})$ -модели **КМ**. Уравнения движения (3.57) могут быть записаны в форме уравнений Захарова–Шабата. Проверка этого факта — необходимый тест на правильность полученных результатов. *L*-оператор задан формулой (3.50). К сожалению, для *M*-оператора не существует естественного способа получения. Приведем ответ:

$$\begin{cases} M_{11} = -u_t E_1(z) - \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{8\pi^2 h} v^2 u_x + 6u_x \wp(2u) + \frac{u_{xxx} \nu - \nu_x u_{xx}}{2\nu^3} \right) + \\ + \frac{u_x}{2\pi\sqrt{-1}} (E_2(2u) - E_2(z)), \\ M_{12} = -\frac{\nu}{2\pi\sqrt{-1}} \Phi'(2u, z) + \\ + \left(\frac{\nu}{2\pi\sqrt{-1}} E_1(z) + \frac{v u_x \nu}{8\pi^2 h} - \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \frac{u_{xx}}{\nu} \right) \Phi(2u, z), \\ M_{21} = -\frac{\nu}{2\pi\sqrt{-1}} \Phi'(-2u, z) + \\ + \left(\frac{\nu}{2\pi\sqrt{-1}} E_1(z) + \frac{v u_x \nu}{8\pi^2 h} + \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \frac{u_{xx}}{\nu} \right) \Phi(-2u, z). \end{cases} \quad (3.58)$$

Этот результат можно получить, используя естественный анзац.

Выпишем уравнения Захарова–Шабата в случае $\text{sl}(2, \mathbb{C})$ покомпонентно:

$$\begin{cases} 11 : \partial_t L_{11} - \partial_x M_{11} = M_{21} L_{12} - M_{12} L_{21}, \\ 12 : \partial_t L_{12} - \partial_x M_{12} = 2L_{11} M_{12} - 2L_{12} M_{11}, \\ 21 : \partial_t L_{21} - \partial_x M_{21} = 2M_{11} L_{21} - 2L_{11} M_{21}. \end{cases} \quad (3.59)$$

Предположим, что внедиагональная часть матрицы M имеет вид

$$\begin{cases} M_{12} = c(x) \Phi'(2u, z) + (f_{12}^1(x) E_1(z) + f_{12}^0(x)) \Phi(2u, z), \\ M_{21} = c(x) \Phi'(-2u, z) + (f_{21}^1(x) E_1(z) + f_{21}^0(x)) \Phi(-2u, z). \end{cases} \quad (3.60)$$

Такой выбор является более или менее естественным обобщением соответствующего оператора в конечномерном случае. Тогда из диагональной части (3.59) заключаем, что

$$M_{11} = -u_t E_1(z) + \alpha(x) + \Delta M_{11}, \quad (3.61)$$

где

$$\alpha(x) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \left(\frac{1}{8\pi^2 h} v^2 u_x + 6u_x \wp(2u) + \frac{u_{xxx} \nu - \nu_x u_{xx}}{2\nu^3} \right), \quad (3.62)$$

а ΔM_{11} будет определено в дальнейшем. Предположим, что эта величина не зависит от $E_2(2u)$, чтобы сократить члены, пропорциональные $E_2(2u)$ и $E_2'(2u)$ в (3.59).

Используя формулу (A.8) во внедиагональной части (3.59), получаем условия, эквивалентные сокращению коэффициентов перед функциями $\xi(2u, z) = E_1(2u + z) - E(2u)$, $E_1(z)$, $E_1^2(z)$, $E_1(z)\xi(-2u, z)$:

$$12 : \begin{cases} E_1(z)\xi(2u, z) : f_{12}^1 = -c, \\ E_1^2(z) : f_{12}^1 = -c, \\ \xi(2u, z) : 2\nu u_t - c_x - 2u_x f_{12}^0 = -2c \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}, \\ E_1(z) : -\partial_x f_{12}^1 = -2 \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} f_{12}^1 - 2u_x f_{12}^0 + 2u_t \nu, \end{cases} \quad (3.63)$$

$$21 : \begin{cases} E_1(z)\xi(-2u, z) : f_{12}^1 = -c, \\ E_1^2(z) : f_{12}^1 = -c, \\ \xi(-2u, z) : -2\nu u_t - c_x + 2u_x f_{21}^0 = 2c \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}, \\ E_1(z) : -\partial_x f_{21}^1 = 2 \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} f_{12}^1 + 2u_x f_{21}^0 - 2u_t \nu. \end{cases} \quad (3.64)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} f_{12}^1 = f_{21}^1 = -c, \\ 2u_x f_{12}^0 = 2\nu u_t - c_x + 2c \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}, \\ 2u_x f_{21}^0 = 2\nu u_t + c_x + 2c \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}, \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\begin{cases} f_+ = f_{21}^0 + f_{12}^0 = \frac{2}{u_x} \left(\nu u_t + c \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} \right), \\ f_- = f_{21}^0 - f_{12}^0 = \frac{c_x}{u_x}. \end{cases} \quad (3.66)$$

Оставшаяся часть внедиагональных уравнений

$$\begin{cases} \nu_t + 12cu_x\eta_1 - \frac{\partial_x f_{12}^0}{v} - 2cu_x E_2(z) - 4cu_x E_2(2u) = \\ \quad = -2\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}f_{12}^0 - 2\nu\alpha - 2\nu\Delta M_{11}, \\ -\nu_t + 12cu_x\eta_1 + \frac{\partial_x f_{21}^0}{v} - 2cu_x E_2(z) - 4cu_x E_2(2u) = \\ \quad = -2\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}f_{21}^0 - 2\nu\alpha - 2\nu\Delta M_{11}. \end{cases} \quad (3.67)$$

Вычитая их друг из друга, имеем

$$2\frac{u_x}{\nu}\partial_x u_t + \partial_x f_+ = -2\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}f_-. \quad (3.68)$$

Подставим теперь f_+ и f_- из (3.66) в (3.68). Получим уравнение на c :

$$\frac{u_x}{\nu}\partial_x u_t + \partial_x \left(\frac{1}{u_x} \left(\nu u_t + c \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} \right) \right) = -\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} \frac{c_x}{u_x}. \quad (3.69)$$

Итак, мы убедились в правильности выбранного анзаца. Теперь остается использовать конкретные уравнения движения для нахождения c . Для H_{-1}^{KM} получаем $c \sim \sqrt{u_x/v}$. Однако коэффициент пропорциональности оказывается равным нулю. Для H_0^{KM} (3.56) имеем $c = -\frac{\nu}{2\pi\sqrt{-1}}$. Что и требовалось доказать.

Соответствие 2d-модели КМ уравнению Ландау–Лифшица. Процедура верхней модификации, устанавливающая связь между моделью эллиптического волчка и эллиптической системой Калоджеро–Мозера, с тем же успехом может быть применена и в двумерном случае.

Теоретико-полевое обобщение $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -эллиптического волчка описывается уравнением Ландау–Лифшица:

$$\partial_t \mathbf{S} = \frac{1}{2}[\mathbf{S}, J(\mathbf{S})] + \frac{1}{2}[\mathbf{S}, \partial_{xx} \mathbf{S}]. \quad (3.70)$$

Это уравнение записывается в форме уравнений Захарова–Шабата [18]. Оператор L^{LL} имеет тот же вид, что и в конечномерном случае. Для $\text{sl}(2, \mathbb{C})$ базис матриц Паули совпадает с базисом синус-алгебры, следовательно, для L^{LL} имеем

$$L^{LL} = L^{\text{rot}} = \sum_a u_a(z) S_a \sigma_a,$$

$$u_1 = \varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (z), \quad u_2 = \varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (z), \quad u_3 = \varphi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (z).$$

Оператор M^{LL} строится сравнительно просто:

$$M^{LL} = M^{\text{rot}} - E_1(z)L^{\text{rot}} + \sum_a u_a(z) \text{tr}(\sigma_a[\mathbf{S}, \partial_x \mathbf{S}]).$$

Легко проверить, что уравнения Захарова–Шабата сводятся к (3.70), если

$$\sum_a S_a^2 = 1.$$

Теперь верхняя модификация действует следующим образом:

$$L^{LL} = \Xi \partial_x \Xi^{-1} + \Xi L_{2D}^{KM} \Xi^{-1},$$

где L_{2D}^{KM} определен в (3.50). Сингулярное калибровочное преобразование Ξ имеет те же квазипериодические свойства, что и в одномерном случае. Следовательно, для $N = 2$ оно должно определяться формулами (2.63). Однако это не так. Причина заключается в том, что вычет (3.50) отличается от вычета L^{KM} , а следовательно, отличаются и собственные векторы. Если принять во внимание указанную поправку, то можно осуществить переход от полей $v(x, t), u(x, t)$ в модель КМ и константы ν к полям $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ с условием фиксации орбиты:

$$\sum_a S_a^2 = -\frac{1}{2\pi^2}(u_x^2 + \nu^2).$$

Хорошо известно, что модель анизотропного магнетика Гейзенберга (которая описывается уравнениями Ландау–Лифшица) — универсальная. Как специальный предел, она содержит в себе модели синус-Гордона и нелинейную Шредингера [11]. В этом смысле двумерная модель Калоджеро–Мозера обладает той же универсальностью. В качестве примера извлечем из нее уравнение синус-Гордона.

Предел к уравнению синус-Гордона. Скейлинговый предел в модели КМ представляет собой комбинацию тригонометрического предела $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$, сдвига координат: $u = U + \frac{1}{2}\text{Im } \tau$ и перенормировки константы связи $\nu = \bar{\nu} e^{1/2}(\text{Im } \tau)$ [35]. Эта процедура, примененная к $2d$ -модели КМ, дает систему синус-Гордона:

$$H_{SG} = -\frac{v^2}{16\pi^2} - \bar{\nu}^2(e^{2U} + e^{-2U}) + \frac{U_x^2}{4}. \quad (3.71)$$

Уравнения движения

$$\begin{cases} U_t = -\frac{v}{8\pi^2}, \\ v_t = 2\bar{\nu}^2(e^{2U} - e^{-2U}) + \frac{1}{2}U_{xx}. \end{cases} \quad (3.72)$$

L -А-пара:

$$L^{\text{SG}} = \begin{pmatrix} -\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}U_x & \bar{\nu}(1 - e^{2U}Z) \\ \bar{\nu}\left(\frac{1}{Z} - e^{-2U}\right) & \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}U_x \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

$$M^{\text{SG}} = \begin{pmatrix} -\frac{U_t}{2} - \frac{1}{8\pi\sqrt{-1}}U_x & \frac{\bar{\nu}}{4\pi\sqrt{-1}}(1 + e^{2U}Z) \\ \frac{\bar{\nu}}{4\pi\sqrt{-1}}\left(e^{-2U} + \frac{1}{Z}\right) & \frac{U_t}{2} + \frac{1}{8\pi\sqrt{-1}}U_x \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Гамильтонианы для $2d$ -эллиптической модели Годена. Используя (А.35), получаем плотность линейного по импульсам гамильтониана:

$$\begin{aligned} H_{-1,a}^G &= 2\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}\frac{p_{11}^a}{2\pi\sqrt{-1}} + 2\sum_b \frac{p_{11}^a}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{p_{11}^b}{2\pi\sqrt{-1}}E_1(z_a - z_b) - \\ &- \sum_{a \neq b} \frac{p_{12}^a p_{21}^b}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \phi(2u, z_b - z_a) + \sum_{a \neq b} \frac{p_{12}^b p_{21}^a}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \phi(2u, z_a - z_b) - \frac{p_{11}^a}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial_x p_{12}^a}{p_{12}}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Последний член является отличительной особенностью двумерного случая.

Рассмотрим теперь $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -случай с двумя отмеченными точками на эллиптической кривой.

Будем использовать обозначения:

$$\begin{cases} p_{11}^1 = 2\pi\sqrt{-1}\gamma_1, & p_{11}^2 = 2\pi\sqrt{-1}\gamma_2, \\ p_{12}^1 = -2\pi\sqrt{-1}\nu_+, & p_{21}^1 = -2\pi\sqrt{-1}\nu_-, \\ p_{12}^2 = -2\pi\sqrt{-1}\mu_+, & p_{21}^2 = -2\pi\sqrt{-1}\mu_-. \end{cases} \quad (3.76)$$

L -матрица выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} l_{11}^G = -\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} - \gamma_1 E_1(z - z_1) - \gamma_2 E_1(z - z_2), \\ l_{12}^G = \nu\phi(2u, z - z_1) + \mu_+\phi(2u, z - z_2), \\ l_{21}^G = \nu\phi(-2u, z - z_1) + \mu_-\phi(-2u, z - z_2). \end{cases} \quad (3.77)$$

Условие связи:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = u_x. \quad (3.78)$$

Зафиксируем калибровку в виде

$$\nu_+ = \nu_- = \nu. \quad (3.79)$$

Мы зафиксировали операторы Казимира $h_1 = \gamma_1^2 + \nu^2$ и $h_2 = \gamma_2^2 + \mu_+\mu_-$, положив их константами: $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$.

На редуцированном фазовом пространстве, кроме полей $u(x)$ и $v(x)$, есть еще два независимых поля. Выберем таковыми ν и μ_+ :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sqrt{h_1 - \nu^2}, \\ \gamma_2 = u_x - \sqrt{h_1 - \nu^2}, \\ \mu_- = \frac{1}{\mu_+}(h_2 - (u_x - \sqrt{h_1 - \nu^2})^2). \end{cases} \quad (3.80)$$

Тем не менее будем использовать все переменные (имея в виду вышеуказанные связи), чтобы не загромождать формулы.

Нетривиальные скобки на редуцированном пространстве могут быть получены с помощью процедуры Дирака:

$$\begin{aligned} \{v(x), u(y)\} &= \delta(x - y), \quad \{v(x), \gamma_1(y)\} = -\delta'(x - y), \\ \{\mu_+(x), \gamma_1(y)\} &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mu_+\delta(x - y), \\ \{\mu_+(x), \mu_-(y)\} &= -2\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\gamma_2\delta(x - y), \\ \{\mu_+(x), \gamma_2(y)\} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mu_+\delta(x - y), \\ \{\mu_+(x), \nu(y)\} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\gamma_1}{\nu}\mu_+\delta(x - y), \\ \{\nu(x), \mu_-(y)\} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\gamma_1}{\nu}\mu_-\delta(x - y), \quad \{v(x), \nu(y)\} = \frac{\gamma_1}{\nu}\delta'(x - y). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Линейный гамильтониан:

$$H_{-1}^G = \oint dx \left(2\gamma_1 \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} - \gamma_1 \frac{\nu_x}{\nu} + \partial_x \gamma_1 + \nu\mu_+\phi(2u, z_1 - z_2) - \nu\mu_-\phi(2u, z_2 - z_1) + 2\gamma_1\gamma_2 E_1(z_1 - z_2) \right). \quad (3.82)$$

Соответствующие ему уравнения движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\gamma_1(x), \\ \partial_t v(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}v_x - \partial_x \left(\frac{\gamma_1\mu_+}{\nu}\phi(2u, z_1 - z_2) \right) + \partial_x \left(\frac{\gamma_1\mu_-}{\nu}\phi(2u, z_2 - z_1) \right) - \\ - 2\nu\mu_+\phi'(2u, z_1 - z_2) + 2\nu\mu_-\phi'(2u, z_2 - z_1) - \partial_x \left(\frac{\gamma_1\partial_x\gamma_1}{\nu^2} \right), \\ \partial_t \nu = - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial_x \left(\frac{\gamma_1^2}{\nu} \right) + \frac{\gamma_1}{2\pi\sqrt{-1}\nu}(\mu_+\phi(2u, z_1 - z_2) - \mu_-\phi(2u, z_2 - z_1)), \\ \partial_t \mu_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(2\frac{v}{4\pi\sqrt{-1}}\mu_+ + 2\mu_+(\gamma_2 - \gamma_1)E_1(z_1 - z_2) \right) - \\ - \frac{2\nu\gamma_2}{2\pi\sqrt{-1}}\phi(2u, z_2 - z_1) - \frac{\gamma_1\mu_+}{2\pi\sqrt{-1}\nu}(\mu_+\phi(2u, z_1 - z_2) - \mu_-\phi(2u, z_2 - z_1)). \end{array} \right. \quad (3.83)$$

Следующий квадратичный гамильтониан является непосредственным обобщением (3.56):

$$H_0^G = \oint dx 2\sqrt{h_1}\chi_1 = \oint dx \left(T_0 - \frac{1}{4h_1}T_{-1}^2 \right), \quad (3.84)$$

где

$$\begin{aligned} 2\sqrt{h_1}\chi_1 = & -\frac{v^2}{16\pi^2} \left(1 - \frac{\gamma_1^2}{h_1} \right) + (2u_x\gamma_1 - \nu^2)\wp(2u) - \frac{(\partial_x\gamma_1)^2}{4\nu^2} + \\ & + \mu_+\mu_-(E_2(z_1 - z_2) - E_2(2u)) + 4\eta_1\gamma_1\gamma_2 + \\ & + \nu\mu_-\phi(2u, z_2 - z_1)(E_1(z_1 - z_2) - E_1(2u) + E_1(2u + z_2 - z_1)) - \\ & - \nu\mu_+\phi(2u, z_1 - z_2)(E_1(z_1 - z_2) + E_1(2u) - E_1(2u + z_1 - z_2)) + \\ & + \gamma_2^2 E_1^2(z_1 - z_2) + 2\gamma_2 \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} E_1(z_1 - z_2) - \\ & - \gamma_2 \frac{\nu_x}{\nu} E_1(z_1 - z_2) + \gamma_1 \frac{\mu_+}{\nu^2} \phi(2u, z_1 - z_2) - \\ & - \gamma_1 \phi(2u, z_1 - z_2) \left[\frac{\partial_x \mu_+}{\nu} + 2u_x \frac{\mu_+}{\nu} (E_1(z_1 - z_2 + 2u) - E_1(2u)) \right] - \\ & - \frac{1}{4h_1} (\nu\mu_+\phi(2u, z_1 - z_2) - \nu\mu_+\phi(2u, z_2 - z_1) + 2\gamma_1\gamma_2 E_1(z_1 - z_2))^2 - \\ & - \frac{1}{2h_1} (\nu\mu_+\phi(2u, z_1 - z_2) - \nu\mu_+\phi(2u, z_2 - z_1) + \\ & + 2\gamma_1\gamma_2 E_1(z_1 - z_2)) \left(2\gamma_1 \frac{v}{4\pi\sqrt{-1}} - \gamma_1 \frac{\nu_x}{\nu} + \partial_x \gamma_1 \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

**4. УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ VI И МОДЕЛЬ
КАЛОДЖЕРО–ИНОЗЕМЦЕВА**

Пара Лакса для модели Калоджеро–Иноземцева. Эллиптическая модель Калоджеро–Мозера (КМ) [5] является одним из ключевых примеров много-частичных интегрируемых систем. Она определяется гамильтонианом

$$H^{KM} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + g^2 \sum_{i>j}^N \wp(u_i - u_j). \tag{4.1a}$$

Важным инструментом для изучения интегрируемых систем является представление Лакса со спектральным параметром. Для системы КМ пара Лакса была построена Кричевером [36]. Расширение семейства интегрируемых систем типа Калоджеро было предложено Ольшанецким и Переломовым [6]. Позднее Докер, Фонг и др. [37, 38] нашли для этих систем представление Лакса со спектральным параметром. Для нас представляет интерес найденная Иноземцевым [9] модель Калоджеро–Иноземцева (КИ). Она задается гамильтонианом

$$H^{KI} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + g^2 \sum_{i>j}^N (\wp(u_i - u_j) + \wp(u_i + u_j)) + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp(u_i + \omega_\alpha) \tag{4.2a}$$

на эллиптической кривой $\langle 1, \tau \rangle$, $\omega_\alpha = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2} \right\}$ с пятью произвольными константами g, ν_α . В оригинальной работе [9] была определена пара Лакса и показана возможность выделения спектрального параметра. Однако в явном виде это сделать не удалось. Следуя указанным выше работам, мы предьявим $3N \times 3N$ -матрицы Лакса для системы КИ с явной зависимостью от спектрального параметра.

Редукция из эллиптической модели Годена. Другой сюжет связан с подходом Хитчина [2, 7, 40] к изучению классических интегрируемых систем. Первые явные примеры таких систем были предложены Некрасовым [4]. Основными представителями оказались спиновые обобщения КМ [41] и эллиптические волчки [42]. (Между последними была обнаружена естественная связь [8, 32].) Однако до сих пор в рамках подхода Хитчина–Некрасова воспроизведены системы только для A_N -серии. Проблема заключается в том, чтобы провести редукцию, замораживающую спиновые степени свободы. Пример такой редукции будет приведен в настоящем разделе для системы КИ с одной степенью свободы, которая характеризуется гамильтонианом

$$H^{КИП} = \frac{1}{2} v^2 + \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp(u + \omega_\alpha), \tag{4.3a}$$

где «П» напоминает о связи этой системы с уравнением Пенлеве VI (см. ниже). Для системы (4.3а) мы укажем 2×2 -представление Лакса со спектральным параметром. Будет показано, что эта пара Лакса может быть получена редукцией из 2×2 -эллиптической модели Годена [4] с четырьмя отмеченными точками на эллиптической кривой (Γ_4). В результате редукции значения операторов Казимира орбит, соответствующие этим точкам, перейдут в четыре константы ν_α гамильтониана (4.3а).

Спектральная кривая и алгебраическая интегрируемость в 2×2 -случае. Мы приведем явное выражение для спектральной кривой Γ_4 и покажем, что она представляет собой двулистное накрытие над \mathbb{CP}^1 , разветвленное в восьми точках. Эта кривая имеет род 5. Указанная выше редукция $4 \rightarrow$ позволит уменьшить род с пяти до одного, что и будет доказательством алгебраической интегрируемости в 2×2 -случае.

Эллиптическая форма уравнения Пенлеве VI. Уравнение Пенлеве VI (PVI) [43] в эллиптической форме [44–46] представляет собой неавтономную версию уравнений движения системы (4.3а)

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = - \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp'(u + \omega_\alpha). \quad (4.4a)$$

При этом уравнение PVI в стандартной форме может быть описано [47, 48] как система Шлезингера [49] изомонодромных деформаций на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Возникает естественное желание описать PVI как систему Шлезингера на торе. Воспользовавшись 2×2 -представлением Лакса для (4.3а), эту задачу можно легко решить. Отметим, что изомонодромные деформации на торе и кривых старшего рода уже неоднократно изучались [50–53]. Кроме того, линейная задача для некоторого частного случая уравнения Пенлеве VI обсуждалась в [54–56].

4.1. Представление Лакса для модели Калоджеро–Иноземцева. Как было отмечено во введении, модель КИ определяется гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + g^2 \sum_{i>j}^N (\wp(u_i - u_j) + \wp(u_i + u_j)) + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp(u_i + \omega_\alpha). \quad (4.1)$$

на эллиптической кривой $\langle 1, \tau \rangle$, где $\omega_\alpha = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2} \right\}$, а g, ν_α — пять произвольных констант.

Предложение 4.1. Для модели Калоджеро–Иноземцева (4.1) существует представление Лакса в матрицах $3N \times 3N$ со спектральным параметром на

эллиптической кривой*

$$L = \begin{pmatrix} V + A & B_1 & -C_1 \\ B_2 & -V + A^T & C_2 \\ -C_2 & C_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} D + A' & B_1' & -C_1' \\ B_2' & D + A'^T & C_2' \\ -C_2' & C_1' & D + E \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где все входящие блоки — $N \times N$ -матрицы, причем V, D, C_1 и C_2 — диагональны, в то время как остальные внедиагональны:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= g(1 - \delta_{ij})\Phi(z, u_i - u_j), & E_{ij} &= g(1 - \delta_{ij})(\wp(u_i - u_j) - \wp(u_i + u_j)), \\ V_{ij} &= \delta_{ij}v_i, & D_{ij} &= g\delta_{ij} \sum_{k \neq i}^N (\wp(u_k - u_i) + \wp(u_k + u_i)), \\ C_{1ij} &= \delta_{ij} \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u_i), & C_{2ij} &= \delta_{ij} \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha - u_i), \\ B_{1ij} &= g(1 - \delta_{ij})\Phi(z, u_i + u_j), & B_{2ij} &= g(1 - \delta_{ij})\Phi(z, -u_i - u_j). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из этого утверждения следует, что для модели КИП (4.3а) существует 3×3 -представление Лакса. Однако, оказывается, имеет место более сильное

Предложение 4.2. Для модели Калоджеро–Иноземцева–Пенлеве (4.3а) существует представление Лакса в матрицах 2×2 :

$$\begin{aligned} L^{\text{КИП}} &= \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 L_\alpha^{\text{КИП}}, \\ L_\alpha^{\text{КИП}} &= \begin{pmatrix} 0 & \nu_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u) \\ \nu_\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha - u) & 0 \end{pmatrix}, \\ M^{\text{КИП}} &= \sum_{\alpha=0}^3 M_\alpha^{\text{КИП}}, & M_\alpha^{\text{КИП}} &= \begin{pmatrix} 0 & \nu_\alpha \varphi'_\alpha(z, \omega_\alpha + u) \\ \nu_\alpha \varphi'_\alpha(z, \omega_\alpha - u) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ниже будет объяснен факт существования 2×2 -представления Лакса (4.4) для системы КИП. А именно будет показано, что оно может быть получено редукцией из $SL(2, \mathbb{C})$ -эллиптической модели Годена [4] с четырьмя отмеченными точками на эллиптической кривой (Γ_4).

Доказательство указанных выше утверждений основано на тождествах, приведенных в приложении А. В частности, из (А.34) следует удобное для проверки

*Правильный знак для потенциала (4.2) получится, если сделать замену $g, \nu \rightarrow \sqrt{-1}g, \sqrt{-1}\nu$.

Предложение 4.3. При $\alpha \neq \beta$ для матриц $L_\alpha^{\text{КИП}}, M_\alpha^{\text{КИП}}$ (4.4) выполняется равенство

$$[L_\alpha^{\text{КИП}}, M_\beta^{\text{КИП}}] + [L_\beta^{\text{КИП}}, M_\alpha^{\text{КИП}}] = 0. \quad (4.5)$$

□

$$\begin{aligned} & \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u) \varphi'_\beta(z, \omega_\beta - u) - \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha - u) \varphi'_\beta(z, \omega_\beta + u) + \\ & + \varphi_\beta(z, \omega_\beta + u) \varphi'_\alpha(z, \omega_\alpha - u) - \varphi_\beta(z, \omega_\beta - u) \varphi'_\alpha(z, \omega_\alpha + u) = \\ & = \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_\alpha + \omega_\beta) (\wp(\omega_\beta - u) - \wp(\omega_\alpha + u) + \wp(\omega_\alpha - u) - \wp(\omega_\beta + u)) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

■

4.2. Алгебраическая интегрируемость в 2×2 -случае. Эллиптическая модель Годена и редукция к модели КИП. Как отмечалось выше, в случае одной степени свободы система КИ описывается гамильтонианом

$$H^{\text{КИП}} = \frac{1}{2}v^2 + \sum_{\alpha=0}^3 v_\alpha^2 \wp(u + \omega_\alpha) \quad (4.7)$$

и уравнения движения могут быть представлены в форме уравнений Лакса с матрицами (4.4). Докажем алгебраическую интегрируемость КИП. Для этого, следуя [4], рассмотрим модель Г4. Она описывает четыре степени свободы, из которых одна соответствует движению пары частиц в системе центра масс, а еще три определяют динамику сложного многообразия $\{\mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O}\} // T$, где T — подгруппа Картана в $SL(2, \mathbb{C})$. Матрица Лакса модели Г4 представляет собой $sl(2, \mathbb{C})$ -значную функцию на торе с надлежащими квазипериодическими свойствами и полюсами в четырех точках. Вычеты в этих точках являются указанными выше орбитами \mathcal{O} коприсоединенного действия.

Определим матрицу Лакса модели Г4 на удвоенном торе $\langle 2, 2\tau \rangle$:

$$\begin{aligned} L^{G4} &= \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^3 L_\alpha^{G4}, \\ L_\alpha^{G4} &= \begin{pmatrix} s_{11}^\alpha E_1(z - 2\omega_\alpha, 2\tau) & \tilde{s}_{12}^\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u) \\ \tilde{s}_{21}^\alpha \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha - u) & -s_{11}^\alpha E_1(z - 2\omega_\alpha, 2\tau) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

При этом те функции, у которых не указана зависимость от 2τ , определены, как и прежде, на решетке $\langle 1, \tau \rangle$. Четырьмя отмеченными точками являются $\{2\omega_\alpha\}$ или $\{0, 1, \tau, \tau + 1\}$. Заметим, что в отличие от диагональных элементов вычетов (4.8) s_{11}^α , внедиагональные \tilde{s}_{12}^α и \tilde{s}_{21}^α не соответствуют орбите \mathcal{O}_α , а

являются линейными комбинациями соответствующих матричных элементов всех орбит. Линейная замена определяется из (A.29) и с помощью матрицы (A.31) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} s_{12}^\rho &= \sum_{\alpha=0}^3 \mathbf{e}(-2u\partial_\tau\omega_\rho) I_{\rho\alpha} \tilde{s}_{12}^\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 \mathbf{e}(2\omega_\rho\partial_\tau\omega_\alpha - 2(\omega_\alpha + u)\partial_\tau\omega_\rho) \tilde{s}_{12}^\alpha, \\ s_{21}^\rho &= \sum_{\alpha=0}^3 \mathbf{e}(2u\partial_\tau\omega_\rho) I_{\rho\alpha} \tilde{s}_{12}^\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 \mathbf{e}(2\omega_\rho\partial_\tau\omega_\alpha - 2(\omega_\alpha - u)\partial_\tau\omega_\rho) \tilde{s}_{21}^\alpha. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Обратная замена следует из (A.32):

$$\tilde{s}_{12}^\rho = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=0}^3 \mathbf{e}(2u\partial_\tau\omega_\alpha) I_{\rho\alpha} s_{12}^\alpha, \quad \tilde{s}_{21}^\rho = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=0}^3 \mathbf{e}(-2u\partial_\tau\omega_\alpha) I_{\rho\alpha} s_{21}^\alpha. \quad (4.10)$$

Выпишем уравнение спектральной кривой

$$\det(\lambda + L^{G^4}(z)) = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + \det L^{G^4}(z) = 0.$$

Используя (A.13), получаем

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= v^2 + 2v \sum_{\alpha} s_{11}^\alpha E_1(z - 2\omega_\alpha, 2\tau) + \left(\sum_{\alpha} s_{11}^\alpha E_1(z - 2\omega_\alpha, 2\tau) \right)^2 + \\ &+ \sum_{\alpha} \tilde{s}_{12}^\alpha \tilde{s}_{21}^\alpha (\wp(z) - \wp(u + \omega_\alpha)) + \sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{s}_{12}^\alpha \tilde{s}_{21}^\beta \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u) \varphi_\beta(z, \omega_\beta - u). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Гамильтонианы являются коэффициентами в разложении функции

$$-\det L^{G^4}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left((L^{G^4}(z))^2 \right):$$

$$-\det L^{G^4}(z) = \sum_{\alpha=0}^3 H_{2,\alpha} E_2(z - 2\omega_\alpha, 2\tau) + \sum_{\alpha=0}^3 H_{1,\alpha} E_1(z - 2\omega_\alpha, 2\tau) + H_{2,0}, \quad (4.12)$$

где $H_{2,\alpha} = C_\alpha$ — значения операторов Казимира орбит s^α ; $H_{1,\alpha}$ — гамильтонианы, линейные по импульсу v , и $H_{2,0}$ — квадратичный по импульсу.

Симметрия, по которой будет осуществлена редукция, порождается следующей инволюцией:

$$L^{G^4}(z) \rightarrow -\sigma_1 L^{G^4}(-z) \sigma_1, \quad (4.13)$$

где $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Процедура редукции в данном случае состоит в выборе собственного значения отображения (4.13). Выбирая собственное значение

+1 и воспользовавшись (A.21) и (A.23), получаем связи

$$s_{11}^\alpha = 0, \quad \tilde{s}_{12}^\alpha = \tilde{s}_{21}^\alpha. \quad (4.14)$$

Из (4.10) тогда следует, что

$$\mathbf{e}(-2u\partial_\tau\omega_\alpha)s_{21}^\alpha = \mathbf{e}(2u\partial_\tau\omega_\alpha)s_{12}^\alpha. \quad (4.15)$$

Вспоминая также, что операторы Казимира орбит $C_\alpha = (s_{11}^\alpha)^2 + s_{12}^\alpha s_{21}^\alpha$ на поверхности связей (4.14) выглядят как $C_\alpha = s_{12}^\alpha s_{21}^\alpha$, получаем

$$s_{12}^\alpha = \mathbf{e}(-2u\partial_\tau\omega_\alpha)\sqrt{C_\alpha}, \quad s_{21}^\alpha = \mathbf{e}(2u\partial_\tau\omega_\alpha)\sqrt{C_\alpha}. \quad (4.16)$$

И, следовательно, из (4.10)

$$\tilde{s}_{12}^\rho = \tilde{s}_{21}^\rho = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=0}^3 I_{\rho\alpha} \sqrt{C_\alpha} = \nu_\rho. \quad (4.17)$$

Тем самым указанная редукция осуществила переход от лаксовой матрицы (4.8) модели Годена к матрице Лакса (4.4) модели Калоджеро–Иноземцева–Пенлеве.

Можно и непосредственно проверить, что \tilde{s}_{12}^α , \tilde{s}_{21}^α и s_{11}^α коммутируют относительно скобок Пуассона с квадратичным гамильтонианом на поверхности связей (4.14). Это сделано в приложении С.

Алгебраическая интегрируемость. Для доказательства алгебраической интегрируемости модели КИП нужно показать, что род ее спектральной кривой равен 1. Спектральная кривая (4.11) имеет род 5. Действительно, правая часть является двойкопериодической функцией на эллиптической кривой $\langle 2, 2\tau \rangle$ и имеет полюса второго порядка в 4 точках. Следовательно, она имеет 8 нулей и представляет собой двулистное накрытие над эллиптической кривой с ветвлениями в восьми точках. Редукция по инволюции (4.13) в терминах спектральной кривой означает отождествление точек z и $-z$.

Функция $\wp(z)$ четная и имеет 8 нулей на торе $\langle 2, 2\tau \rangle$, поэтому если алгебраическая интегрируемость имеет место, то естественно ожидать, что искомая эллиптическая кривая будет описываться в терминах $\wp(z)$.

Предложение 4.4. *Спектральная кривая модели Калоджеро–Иноземцева–Пенлеве имеет вид*

$$\lambda^2 = \mathcal{R}(X), \quad X = \wp(z), \quad (4.18)$$

где $\mathcal{R}(X)$ — рациональная функция с четырьмя полюсами.

□

Преобразуем последнее слагаемое в выражении для спектральной кривой

(4.11) с помощью (A.36):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{s}_{12}^{\alpha} \tilde{s}_{21}^{\beta} \varphi_{\alpha}(z, \omega_{\alpha} + u) \varphi_{\beta}(z, \omega_{\beta} - u) = \sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{s}_{12}^{\alpha} \tilde{s}_{21}^{\beta} \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) (E_1(z) + \\
 & \quad + E_1(\omega_{\alpha} + u) + E_1(\omega_{\beta} - u) - E_1(z + \omega_{\alpha} + \omega_{\beta})) = \\
 & = \sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{s}_{12}^{\alpha} \tilde{s}_{21}^{\beta} \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) (E_1(z) + E_1(\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) - E_1(z + \omega_{\alpha} + \omega_{\beta})) + \\
 & + \sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{s}_{12}^{\alpha} \tilde{s}_{21}^{\beta} \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) (E_1(\omega_{\beta} - u) + E_1(\omega_{\alpha} + u) - E_1(\omega_{\alpha} + \omega_{\beta})).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

На поверхности связей (4.14) последняя сумма зануляется* и мы получаем следующее уравнение для спектральной кривой модели КИП:

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 = v^2 - \sum_{\alpha} \nu_{\alpha}^2 \wp(u + \omega_{\alpha}) + \wp(z) \sum_{\alpha} \nu_{\alpha}^2 + \\
 + \sum_{\alpha \neq \beta} \nu_{\alpha} \nu_{\beta} \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) (E_1(z) + \\
 + E_1(\omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) - E_1(z + \omega_{\alpha} + \omega_{\beta})). \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся соотношением

$$\varphi_{\alpha}(z, \omega_{\alpha}) (E_1(z) + E_1(\omega_{\alpha}) - E_1(z + \omega_{\alpha})) = \sum_{\rho=0}^3 I_{\alpha\rho} \wp(z - 2\omega_{\rho}, 2\tau), \tag{4.21}$$

где I — матрица (A.31). Доказательство основано на сравнении структуры особенностей и (A.16). Итак, имеем

$$\lambda^2 = 2H^{\text{КИП}} + \wp(z) \sum_{\alpha} \nu_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} \nu_{\alpha} \nu_{\beta} \sum_{\rho} I_{\mu(\alpha,\beta),\rho} \wp(z - 2\omega_{\rho}, 2\tau), \tag{4.22}$$

где индекс $\mu(\alpha, \beta)$ однозначно определяется из условия

$$\omega_{\mu(\alpha,\beta)} = \omega_{\alpha} + \omega_{\beta} \bmod(1, \tau). \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 * \sum_{\alpha \neq \beta} \nu^{\alpha} \nu^{\beta} \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) (E_1(\omega_{\beta} - u) + E_1(\omega_{\alpha} + u) - E_1(\omega_{\alpha} + \omega_{\beta})) = \\
 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \nu^{\alpha} \nu^{\beta} \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_{\alpha} + \omega_{\beta}) (E_1(\omega_{\alpha} - u) + E_1(\omega_{\alpha} + u) + \\
 + E_1(\omega_{\beta} - u) + E_1(\omega_{\beta} + u) - 2E_1(\omega_{\alpha}) - 2E_1(\omega_{\beta})) = 0.
 \end{aligned}$$

Подставляя в (4.22) $\wp(z, \tau) = \sum_{\alpha} \wp(z - 2\omega_{\alpha}, 2\tau)$, получаем окончательный ответ

$$\lambda^2 = 2H^{\text{КИП}} + \sum_{\rho=0}^3 K_{\rho} \wp(z - 2\omega_{\rho}, 2\tau), \quad K_{\rho} = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \nu_{\alpha} \nu_{\beta} I_{\mu(\alpha, \beta), \rho}. \quad (4.24)$$

Для завершения доказательства остался последний шаг:

$$\wp(z + \omega_{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{\wp''(\omega_{\alpha})}{\wp(z) - \wp(\omega_{\alpha})} + \wp(\omega_{\alpha}). \quad (4.25)$$

Правая часть (4.24) является рациональной функцией с полюсами в четырех точках, соответствующих $z = \{\omega_{\alpha}\}$. Итак, искомая кривая рода 1 возникла как двулистное накрытие над рациональной кривой с ветвлениями в четырех точках с помощью параметризации функцией $\wp(z)$. При этом z следует понимать как координату на торе $\langle 1, \tau \rangle \supset \langle 2, 2\tau \rangle$.

■

4.3. Эллиптическая форма уравнения Пенлеве VI. Как было показано самим Пенлеве [44], уравнение Пенлеве VI (PVI) может быть записано в эллиптической форме на кривой Σ , с фундаментальным параллелограммом $\langle 1, \tau \rangle$:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = - \sum_{\alpha=0}^3 \nu_{\alpha}^2 \wp'(u + \omega_{\alpha}), \quad (4.26)$$

где $\omega_{\alpha} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2} \right\}$, а ν_{α} — произвольные константы. Значительно позже этот результат был переоткрыт в работах [45, 46]. Изначально Б. Гамбье [43] нашел PVI в более сложной форме

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X-t} \right) \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{X-t} \right) \frac{dX}{dt} + \\ & + \frac{X(X-1)(X-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{t}{X^2} + \gamma \frac{t-1}{(X-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(X-t)^2} \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

которая переводится в (4.26) с помощью замен:

$$\begin{aligned} (u, \tau) \rightarrow & \left(X = \frac{\wp(u) - \wp(\omega_1)}{\wp(\omega_2) - \wp(\omega_1)}, \tau = \frac{\wp(\omega_3) - \wp(\omega_1)}{\wp(\omega_2) - \wp(\omega_1)} \right), \\ (\nu_0^2, \nu_1^2, \nu_2^2, \nu_3^2) = & 4\pi^2 \left(\alpha, -\beta, \frac{1}{2}\gamma, -\delta \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Вывод PVI как уравнения изомонодромных деформаций был предложен Р. Фуксом [47]. Точнее, было показано, что PVI можно описать как систему Шлезингера [49]:

$$\frac{\partial A_j}{\partial \lambda_i} = \frac{[A_i, A_j]}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_i} = - \sum_{j \neq i} \frac{[A_i, A_j]}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (4.29)$$

на $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, где A_j — $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -значные матрицы. При этом само уравнение появляется как условие изомонодромности:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_j} = - \frac{A_j}{\lambda - \lambda_j} \Psi \quad (4.30)$$

для матричнозначной функции $\Psi(\lambda) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, удовлетворяющей матричному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = \sum_{j=1}^4 \frac{A_j}{\lambda - \lambda_j} \Psi. \quad (4.31)$$

Другими словами, система уравнений (4.30) и (4.31) является линейной задачей для уравнений Шлезингера (4.29), которые в частном случае оказываются эквивалентными уравнению PVI (4.27). Возникает естественная задача: построить аналог уравнений Шлезингера на эллиптической кривой, описывающий PVI сразу в эллиптической форме (4.26). Ниже будет приведено решение этой задачи в следующей форме. Будет показано, что на эллиптической кривой Σ существует пара матричнозначных функций $L^{\mathrm{PVI}}(z), M^{\mathrm{PVI}}(z)$, задающих линейную задачу:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + L^{\mathrm{PVI}}(z) \right) \Psi(z) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + M^{\mathrm{PVI}}(z) \right) \Psi(z) = 0. \quad (4.32)$$

При этом аналог уравнений Шлезингера

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L^{\mathrm{PVI}} - \frac{\partial}{\partial z} M^{\mathrm{PVI}} = [L^{\mathrm{PVI}}, M^{\mathrm{PVI}}] \quad (4.33)$$

окажется эквивалентным (4.26).

Отметим, что уравнения изомонодромных деформаций на римановых поверхностях произвольного рода и, в частности, рода один активно изучались, например, в работах [7, 50, 52].

Рассмотрим сначала автономную механику, которая соответствует следующей линейной задаче:

$$(\mu + L^{\mathrm{PVI}}(z)) \Psi(z) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + M^{\mathrm{PVI}}(z) \right) \Psi(z) = 0 \quad (4.34)$$

и является аналогом условия изомонодромности в виде уравнений Лакса

$$\frac{\partial}{\partial t} L = [L, M]. \quad (4.35)$$

В работе [9] В.Иноземцев доказал интегрируемость системы (Калоджеро–Иноземцева), заданной гамильтонианом

$$H^{\text{КИ}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + g^2 \sum_{i>j}^N (\wp(u_i - u_j) + \wp(u_i + u_j)) + \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp(u_i + \omega_\alpha) \quad (4.36)$$

с пятью произвольными константами g, ν_α . В простейшем случае для гамильтониана (4.36) имеем следующее выражение:

$$H^{\text{PVI}} = \frac{1}{2} v^2 + \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp(u + \omega_\alpha) \quad (4.37)$$

и соответствующие уравнения движения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = - \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp'(u + \omega_\alpha). \quad (4.38)$$

Последнее уравнение является автономной версией (4.26).

Анонсированное выше утверждение состоит в том, что неавтономная версия уравнения (4.38) или уравнение Пенлеве VI

$$\frac{dv}{d\tau} = - \sum_{\alpha=0}^3 \nu_\alpha^2 \wp'(u + \omega_\alpha) \quad (4.39)$$

эквивалентно

$$\partial_\tau L^{\text{КИП}} - \partial_z M^{\text{КИП}} = [L^{\text{КИП}}, M^{\text{КИП}}] \quad (4.40)$$

с матрицами $L^{\text{КИП}}, M^{\text{КИП}}$, определенными в (4.4). Проверка основана на тождестве

$$\partial_\tau \varphi_\alpha(z, u + \omega_\alpha) = \partial_z \partial_u \varphi_\alpha(z, u + \omega_\alpha) + \partial_\tau u \partial_u \varphi_\alpha(z, u + \omega_\alpha). \quad (4.41)$$

5. О СВЯЗИ ФОРМУЛ ВЕЙЛЯ И КОНЦЕВИЧА ДЛЯ КВАНТОВОГО УМНОЖЕНИЯ

Квантовое умножение. Следуя работе [15], определим квантовое умножение как ассоциативную билинейную операцию на пространстве $A[[\hbar]]$ гладких функций на конечномерном C^∞ многообразии X :

$$f * g = fg + \hbar B_1(f, g) + \hbar^2 B_2(f, g) + \dots \in A[[\hbar]], \quad (5.1)$$

где \hbar — формальный параметр, а $B_i(f, g)$ — бидифференциальные операторы.

Ассоциативность в n -м порядке означает, что $(f * g) * h = f * (g * h) + O(\hbar^{n+1})$.

Калибровочная группа. На пространстве квантовых умножений существует естественная группа симметрий:

$$* \rightarrow *', f'(\hbar) = Df(\hbar), f' *' g' = D(D^{-1}f' * D^{-1}g'), \quad (5.2)$$

где $D = 1 + \sum_{i \geq 1} \hbar^i D_i$ с произвольными дифференциальными операторами D_i .

$$f \rightarrow f + \hbar D_1 f + \hbar^2 D_2 f + O(\hbar^3).$$

Ассоциативность $*'$ очевидна, так как $f' *' g' *' h' = D(f * g * h)$.

Из вышесказанного, в частности, следует, что

$$B_1'(f, g) = B_1(f, g) + D_1(fg) - fD_1(g) - gD_1(f) \quad (5.3)$$

и, следовательно, $B_1(f, g)$ может быть выбран в виде кососимметрического бивекторного поля. Положим $B_1(f, g) = \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g$, $\alpha^{ab} = -\alpha^{ba}$. При этом, вообще говоря, пуассонов бивектор может зависеть от \hbar :

$$\alpha^{ab}(\hbar) = \sum_{i \geq 0} \hbar^i \alpha_i^{ab} \quad (5.4)$$

и должен удовлетворять тождеству Якоби:

$$\alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} + \alpha^{cs} \partial_s \alpha^{ab} + \alpha^{bs} \partial_s \alpha^{ca} = 0. \quad (5.5)$$

Члены второго порядка $O(\hbar^2)$ в уравнении ассоциативности $f * (g * h) = (f * g) * h$ показывают, что α задает пуассонову структуру на X :

$$\forall f, g, h \quad \{f\{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

где $\{f, g\} := \frac{f * g - g * f}{\hbar} \Big|_{\hbar=0}$.

Квантовое умножение Вейля. Самым известным примером $*$ -произведения является квантовое умножение Вейля (в работе [15] оно называется мой-аловским):

$$\begin{aligned} f * g &= fg + \hbar \vartheta^{ij} \partial_i f \partial_j g + \\ &+ \frac{\hbar^2}{2!} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \partial_i \partial_k f \partial_j \partial_l g + \frac{\hbar^3}{3!} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \partial_i \partial_k \partial_m f \partial_j \partial_l \partial_n g + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n} \prod_{k=1}^n \vartheta^{i_k j_k} \left(\prod_{k=1}^n \partial_{i_k} \right) (f) \times \left(\prod_{k=1}^n \partial_{j_k} \right) (g) = \\ &= e^{\hbar \vartheta^{ij} \partial_i^{(1)} \partial_j^{(2)}} f(x_{(1)}) g(x_{(2)}) \Big|_{x_{(1)}=x_{(2)}=x}, \quad (5.6) \end{aligned}$$

где бивектор ϑ^{ij} постоянен и кососимметричен.

Формула Концевича. В [15] доказана следующая

Теорема 5.1. Пусть α — пуассоново бивекторное поле в открытой области из R^d . Тогда формула

$$f * g := \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{\Gamma \in G_n} \omega_{\Gamma} B_{\Gamma, \alpha}(f, g) \quad (5.7)$$

определяет ассоциативное умножение. Замена переменных в (5.7) эквивалентна некоторому калибровочному преобразованию.

В формуле (5.7) выражения $B_{\Gamma, \alpha}(f, g)$ строятся с помощью диаграмм Концевича $\Gamma \in G_n$, G_n — множество диаграмм n -го порядка и ω_{Γ} — постоянные коэффициенты, отвечающие графам $\Gamma \in G_n$. Значения коэффициентов, в принципе, могут быть вычислены по интегральным формулам, предъявленным в [15]. Однако в общем случае эти формулы оказываются неконструктивными, т. е. вышеприведенная теорема, по сути, является теоремой существования.

Для членов второго порядка значения коэффициентов известны:

$$f * g = fg + \hbar \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g + \frac{1}{2} \hbar^2 \alpha^{ab} \alpha^{cd} \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g + \\ + \frac{1}{3} \hbar^2 \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f) + O(\hbar^3). \quad (5.8)$$

В данном разделе делается непосредственная проверка утверждения Концевича о том, что замена переменных в формуле для квантового умножения приводит к калибровочно-эквивалентному $*$ -произведению. (Аналогичное утверждение в симплектическом случае было доказано в [57].) Вычисления проводятся до порядка \hbar^3 . При этом замена переменных производится в известной формуле Вейля (5.6), которая получается из формулы Концевича подстановкой постоянного бивектора ϑ^{ij} . Полученное выражение не представляется в виде формулы Концевича в новых координатах $z^a(x^i)$ с $\alpha_0^{ab} = \vartheta^{ij} \frac{\partial z^a}{\partial x^i} \frac{\partial z^b}{\partial x^j}$. Однако с помощью калибровочных преобразований (5.7) это удается. В результате получается формула (5.9) для квантового умножения с некоторыми коэффициентами. В членах третьего порядка, оказывается, с помощью калибровочных преобразований все-таки невозможно избавиться от явной зависимости от диффеоморфизмов. Однако такие члены удается интерпретировать как квантовую поправку к пуассонову бивектору. Тем самым доказано существование ненулевого α_2^{ab} в формуле (5.4): $\alpha^{ab}(\hbar) = \sum_{i \geq 0} \hbar^i \alpha_i^{ab}$.

Выражение для α_2^{ab} определено с точностью до членов бивекторного типа в третьем порядке (на ассоциативность в этом порядке они не влияют). Например, добавление в третий порядок члена $\partial_s \alpha^{pt} \partial_p \alpha^{so} \partial_o \partial_t \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g$ означает вычитание его из α_2 .

Полученная формула до третьего порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
 f * g = & fg + \hbar \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g + \\
 & + \hbar^2 \left[\frac{1}{2} \alpha^{ab} \alpha^{cd} \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g + \frac{1}{3} \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f) \right] + \\
 + \hbar^3 & \left[\frac{1}{6} \alpha^{ab} \alpha^{cd} \alpha^{ho} \partial_a \partial_c \partial_h f \partial_b \partial_d \partial_o g + \frac{1}{3} \alpha^{tp} \partial_p \alpha^{as} \partial_s \partial_t \alpha^{bc} (\partial_a \partial_c f \partial_b g - \partial_a \partial_c g \partial_b f) + \right. \\
 & + \left[\frac{2}{3} \alpha^{dp} \partial_p \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} + \frac{1}{3} \alpha^{ap} \partial_p \alpha^{ds} \partial_s \alpha^{cb} \right] \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g + \\
 & + \frac{1}{6} \alpha^{as} \alpha^{ct} \partial_s \partial_t \alpha^{bd} (\partial_a \partial_b \partial_c f \partial_d g - \partial_a \partial_b \partial_c g \partial_d f) + \\
 & \left. + \frac{1}{3} \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} \alpha^{hd} (\partial_a \partial_b \partial_h f \partial_c \partial_d g - \partial_a \partial_b \partial_h g \partial_c \partial_d f) \right] + O(\hbar^4), \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha^{ab} = & \vartheta^{ij} \frac{\partial z^a}{\partial x^i} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} + \hbar^2 \left[\frac{1}{3!} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \frac{\partial^3 z^a}{\partial x^i \partial x^k \partial x^m} \frac{\partial^3 z^b}{\partial x^j \partial x^l \partial x^n} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{18} S^{spt} \partial_p \partial_s \partial_t \alpha^{ab} - \frac{1}{4} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^s}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^t}{\partial x^j \partial x^l} \partial_s \partial_t \alpha^{ab} \right] + \\
 & + \text{члены бивекторного типа} + O(\hbar^3), \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

и коэффициенты S^{abs} заданы в (5.18). Дифференциальный оператор из (5.2), необходимый для получения (5.9), (5.10), имеет вид

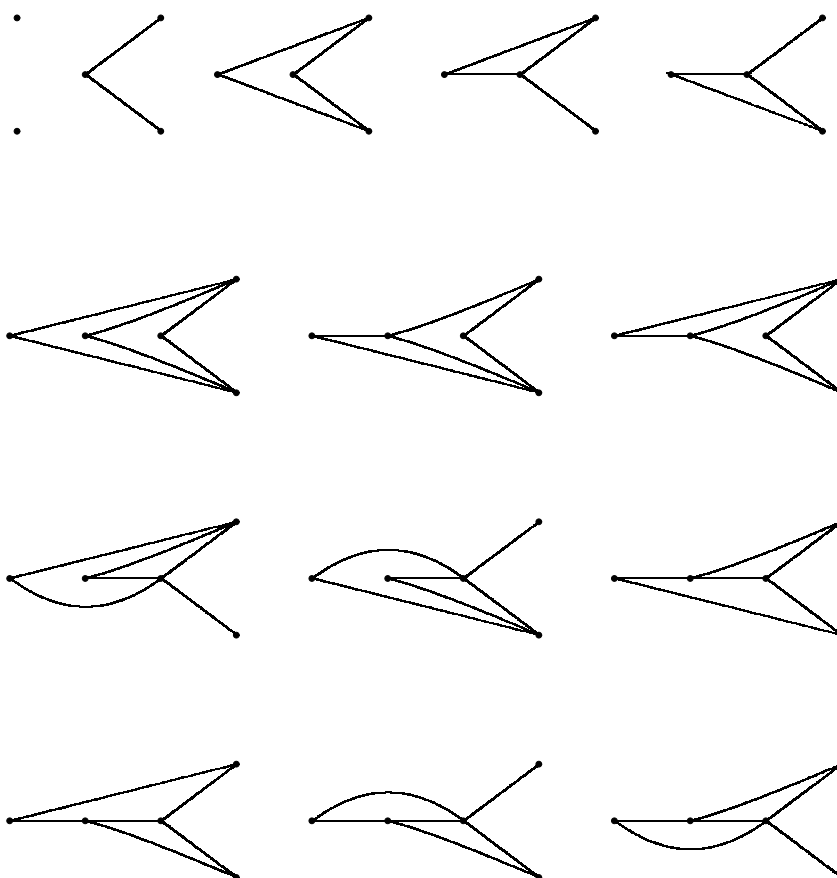
$$\begin{aligned}
 D = & 1 + \hbar^2 \left[-\frac{1}{4} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^j \partial x^l} \partial_a \partial_b + -\frac{1}{18} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \times \right. \\
 \times & \left. \left(\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} \frac{\partial z^c}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 z^c}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^a}{\partial x^j} \frac{\partial z^b}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^c}{\partial x^j} \frac{\partial z^a}{\partial x^l} \right) \partial_a \partial_b \partial_c \right] + O(\hbar^4).
 \end{aligned}$$

В конце раздела показано, что полученные коэффициенты можно вывести из требования ассоциативности. Заметим, что результаты согласуются с [58].

5.1. Представление формулы Концевича в виде диаграмм. Существует естественный способ изобразить каждый член ряда (5.7) в виде диаграммы [15]. Для члена, содержащегося в n -м порядке, возьмем n вершин (точек), каждой из которых приписывается бивектор α и две точки, сопоставляемые функциям f и g . Первые n вершин будем располагать горизонтально. Из каждой из них выходят две стрелки*, соответствующие паре градиентов в

*Мы опустим значок стрелки, имея в виду, что все отрезки направлены вправо.

свертке $\alpha^{ab} \partial_a \wedge \partial_b$. Стрелка заканчивается на той вершине, которую дифференцирует выбранный градиент. На двух точках, соответствующих функциям, стрелки могут только заканчиваться. Поэтому расположим их справа по вертикали. Для выражения (5.9) набор диаграмм (графов) Концевича приведен на рисунке.



Заметим, что в приведенных диаграммах нет «петель», т. е. структур вида $\partial_c \alpha^{da} \partial_a \alpha^{bc}$. Петли, по всей видимости, появятся в графах бивекторного типа, т. е. в выражениях, содержащих два внешних индекса. Такие члены не влияют на ассоциативность в третьем порядке. Однако их существование можно предсказать исходя из требования тождества Якоби (5.5). Ниже мы еще вернемся к этому вопросу.

5.2. Вычисления во втором порядке. Рассмотрим формулу Вейля (5.6) до второго порядка и сделаем в ней замену переменных $x \rightarrow z(x)$.

$$\begin{aligned}
 f * g &= fg + \hbar \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g + \frac{1}{2} \hbar^2 \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \times \\
 &\times \left(\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial f}{\partial z^a} + \frac{\partial z^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 f}{\partial z^a \partial z^c} \frac{\partial z^c}{\partial x^k} \right) \left(\frac{\partial^2 z^b}{\partial x^j \partial x^l} \frac{\partial g}{\partial z^b} + \frac{\partial z^b}{\partial x^j} \frac{\partial^2 g}{\partial z^b \partial z^d} \frac{\partial z^d}{\partial x^l} \right) = \\
 &= fg + \hbar \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g + \frac{1}{2} \hbar^2 \alpha^{ab} \alpha^{cd} \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \hbar^2 \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^j \partial x^l} \partial_a f \partial_b g + \\
 &\quad + \hbar^2 \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^c}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^a}{\partial x^l} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f) + O(\hbar^3), \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

где $\alpha^{ab} = \vartheta^{ij} \partial_i z^a \partial_j z^b$.

Как видно, полученное выражение не записывается в виде (5.8) и явно содержит зависимость от диффеоморфизма $x \rightarrow z$. Другими словами, выражение (5.11) не представляется в виде зависящего только от α и производных по z . Утверждение Концевича состоит в том, что существуют калибровочные преобразования (5.2), которые эту проблему решают.

Предпоследний член в (5.2) $\frac{1}{2} \hbar^2 \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^j \partial x^l} \partial_a f \partial_b g$ — бивекторного типа и симметричен, поэтому он легко устраняется по аналогии с тем, как в первом порядке бивектор приводился к антисимметрической форме (5.3). Соответствующее калибровочное преобразование легко выписать:

$$D'_2 = -\frac{\hbar^2}{4} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^j \partial x^l} \partial_a \partial_b. \quad (5.12)$$

Заметим, что по тем же причинам мы вольны добавлять во второй порядок петлевую диаграмму

$$\lambda \hbar^2 \partial_a \alpha^{ac} \partial_c \alpha^{bd} \quad (5.13)$$

с произвольной постоянной λ , так как этот член является симметрическим бивектором. Добавление этого члена скажется на виде формулы деформационного квантования в старших порядках. Кроме того, выражение (5.13) можно использовать для переопределения пуассонова бивектора:

$$\alpha^{ab} \rightarrow \alpha^{ab} + \hbar \partial_a \alpha^{ac} \partial_c \alpha^{bd}. \quad (5.14)$$

Мы, однако, положим $\lambda = 0$, исходя из желания получить ответ в максимально приведенном виде.

Возвращаясь к (5.13), рассмотрим теперь члены вида $\partial^2 f \partial g$ и $\partial^2 g \partial f$:

$$\frac{1}{2}P_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^c}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^a}{\partial x^l} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f). \quad (5.15)$$

Необходимо подобрать калибровочное преобразование, переводящее выражение (5.15) в $K_0 \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f)$, с некоторой константой K_0 . Подставляя сюда $\alpha^{ab} = \vartheta^{ij} \frac{\partial z^a}{\partial x^i} \frac{\partial z^b}{\partial x^j}$, получаем

$$\begin{aligned} K_0 \left(-\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^c}{\partial x^l} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 z^c}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^a}{\partial x^l} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} \right) (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f) = \\ = K_0 P_1 - K_0 P_2, \quad (5.16) \end{aligned}$$

$$\text{где } P_2 = \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^c}{\partial x^l} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f).$$

Исходя из тензорной структуры (5.15) и (5.16), будем искать калибровочное преобразование в виде

$$D_2 = K_1 S^{abc} \partial_a \partial_b \partial_c, \quad (5.17)$$

$$S^{abc} = \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \left(\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} \frac{\partial z^c}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 z^c}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^a}{\partial x^j} \frac{\partial z^b}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^c}{\partial x^j} \frac{\partial z^a}{\partial x^l} \right), \quad (5.18)$$

где K_1 — постоянная. Заметим, что S^{abc} симметричен по своим индексам a, b, c . Преобразование (5.17), (5.18) добавляет к (5.15) следующие члены:

$$D_2(fg) - fD_2(g) - gD_2(f) = 3S^{abc} (\partial_a \partial_b f \partial_c g + \partial_a \partial_b g \partial_c f) = 3K_1 (P_1 + 2P_2). \quad (5.19)$$

Тем самым из (5.15), (5.19) и (5.16) получаем уравнение на K_0 и K_1 :

$$\frac{1}{2}P_1 + 3K_1(P_1 + 2P_2) = K_0(P_1 - P_2), \quad K_0 = \frac{1}{3}, \quad K_1 = -\frac{1}{18}.$$

Итак, искомое калибровочное преобразование

$$\begin{aligned} D_2 = 1 + \hbar^2 D_2 + \hbar^2 D'_2 = \\ = 1 - \frac{1}{18} S^{abc} \partial_a \partial_b \partial_c - \frac{\hbar^2}{4} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^j \partial x^l} \partial_a \partial_b, \quad (5.20) \end{aligned}$$

где S^{abc} определено в (5.18).

5.3. Вычисления в третьем порядке. В третьем порядке для $B_3(f, g)$ появятся поправки за счет калибровочных преобразований, выполненных во втором с помощью D_2 (5.20). Вид поправки следует из общего определения (5.2):

$$B'_3(f, g) = B_3(f, g) + D_2 B_1(f, g) - B_1(D_2 f, g) - B_1(f, D_2 g). \quad (5.21)$$

Выпишем, как и ранее для второго порядка, члены, получающиеся заменой переменных в умножении Вейля (5.7):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial z^a \partial z^c \partial z^e} \frac{\partial z^e}{\partial x^i} \frac{\partial z^c}{\partial x^k} \frac{\partial z^a}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^a \partial z^c} \left(\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial z^c}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^m} \times \right. \right. \\ & \times \left. \frac{\partial z^c}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^c}{\partial x^m} \right) + \frac{\partial^3 z^a}{\partial x^i \partial x^k \partial x^m} \frac{\partial f}{\partial z^a} \left(\frac{\partial^3 g}{\partial z^b \partial z^d \partial z^e} \frac{\partial z^e}{\partial x^j} \frac{\partial z^d}{\partial x^l} \frac{\partial z^b}{\partial x^n} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2 g}{\partial z^b \partial z^d} \left(\frac{\partial^2 z^b}{\partial x^l \partial x^n} \frac{\partial z^d}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^l \partial x^j} \frac{\partial z^d}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^n \partial x^j} \frac{\partial z^d}{\partial x^l} \right) + \frac{\partial^3 z^b}{\partial x^j \partial x^l \partial x^n} \frac{\partial g}{\partial z^b} \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Далее, как уже отмечалось, следует к полученному выражению добавить (5.21):

$$\begin{aligned} & D_2 B_1(f, g) - B_1(D_2 f, g) - B_1(f, D_2 g) + D'_2 B_1(f, g) - \\ & - B_1(D'_2 f, g) - B_1(f, D'_2 g), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где D_2 и D'_2 определены в (5.17), (5.18) и (5.12).

Наша задача — представить сумму выражений (5.22) и (5.23) в виде диаграмм Концевича в новых координатах.

Ниже будет показано, что нет необходимости делать калибровочное преобразование в третьем порядке, так как калибровочных членов (5.23) окажется, по существу, достаточно для получения ответа. Некоторая неоднозначность возникнет лишь с диаграммами бивекторного типа. Важные следствия такой неоднозначности анализируются в конце этого пункта.

В качестве примера вычисления рассмотрим члены, содержащие вторые производные по функциям $(\partial^2 f \partial^2 g)$. В умножении Вейля (5.22) эти члены таковы:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \left(\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial z^c}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^m} \frac{\partial z^c}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z^c}{\partial x^m} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial^2 z^b}{\partial x^l \partial x^n} \frac{\partial z^d}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^l \partial x^j} \frac{\partial z^d}{\partial x^n} + \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^n \partial x^j} \frac{\partial z^d}{\partial x^l} \right) \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g = \\ & = \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^j \partial x^l} \frac{\partial z^c}{\partial x^m} \frac{\partial z^d}{\partial x^n} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^l \partial x^n} \frac{\partial z^c}{\partial x^m} \frac{\partial z^d}{\partial x^j} \right) \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Калибровочные члены (5.23):

$$D'_2 : -\frac{1}{2}\vartheta^{ij}\vartheta^{kl}\vartheta^{mn}\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial^2 z^b}{\partial x^j\partial x^l}\frac{\partial z^c}{\partial x^m}\frac{\partial z^d}{\partial x^n}\partial_a\partial_c f\partial_b\partial_d g \quad (5.25)$$

(заметим, что данное выражение сокращает первый член в правой части (5.24)) и

$$D_2 : -\frac{1}{3}S^{scd}\partial_s\alpha^{ab}\partial_a\partial_c f\partial_b\partial_d g, \quad (5.26)$$

где S^{scd} определена в (5.18). Несложно убедиться, что (5.26) равно

$$-\frac{1}{3}S^{scd}\partial_s\alpha^{ab}\partial_a\partial_c f\partial_b\partial_d g = -\frac{1}{3}Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 - \frac{1}{3}Y_3, \quad (5.27)$$

где выражения Y_1 , Y_2 и Y_3 даны ниже:

$$Y_1 = \vartheta^{ij}\vartheta^{kl}\vartheta^{mn}\frac{\partial z^a}{\partial x^j}\frac{\partial^2 z^d}{\partial x^k\partial x^i}\left(\frac{\partial^2 z^c}{\partial x^m\partial x^l}\frac{\partial z^b}{\partial x^n} - \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^m\partial x^l}\frac{\partial z^c}{\partial x^n}\right), \quad (5.28)$$

$$Y_2 = \vartheta^{ij}\vartheta^{kl}\vartheta^{mn}\frac{\partial z^a}{\partial x^j}\frac{\partial z^d}{\partial x^l}\frac{\partial^2 z^s}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial x^o}{\partial z^s}\left(\frac{\partial^2 z^c}{\partial x^m\partial x^o}\frac{\partial z^b}{\partial x^n} - \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^m\partial x^o}\frac{\partial z^c}{\partial x^n}\right), \quad (5.29)$$

$$Y_3 = \vartheta^{ij}\vartheta^{kl}\vartheta^{mn}\frac{\partial z^d}{\partial x^j}\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^k\partial x^i}\left(\frac{\partial^2 z^c}{\partial x^m\partial x^l}\frac{\partial z^b}{\partial x^n} - \frac{\partial^2 z^b}{\partial x^m\partial x^l}\frac{\partial z^c}{\partial x^n}\right). \quad (5.30)$$

Будем искать ответ в форме

$$[A\alpha^{dp}\partial_p\alpha^{as}\partial_s\alpha^{bc} + B\alpha^{ap}\partial_p\alpha^{ds}\partial_s\alpha^{cb}]\partial_a\partial_c f\partial_b\partial_d g \quad (5.31)$$

с произвольными коэффициентами A и B . В старых координатах (5.31) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} [A\alpha^{dp}\partial_p\alpha^{as}\partial_s\alpha^{bc} + B\alpha^{ap}\partial_p\alpha^{ds}\partial_s\alpha^{cb}]\partial_a\partial_c f\partial_b\partial_d g = \\ = A(Y_2 - Y_1) + B(Y_3 - Y_2). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Заметим здесь, что последний член в правой части (5.24) равен Y_3 , так как

$$\vartheta^{ij}\vartheta^{kl}\vartheta^{mn}\frac{\partial^2 z^a}{\partial x^i\partial x^k}\frac{\partial^2 z^c}{\partial x^l\partial x^n}\frac{\partial z^b}{\partial x^m}\frac{\partial z^d}{\partial x^j}\partial_a\partial_c f\partial_b\partial_d g = 0$$

в силу антисимметричности по перестановке ($a \leftrightarrow c$ и $d \leftrightarrow b$). Найдем A и B :

$$Y_3 - \frac{1}{3}Y_1 - \frac{1}{3}Y_2 - \frac{1}{3}Y_3 = A(Y_3 - Y_2) + B(Y_2 - Y_1),$$

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3}.$$

Итак, члены $(\partial^2 f \partial^2 g)$ в формуле деформационного квантования (5.9) установлены:

$$\hbar^3 \left[\frac{2}{3} \alpha^{dp} \partial_p \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} + \frac{1}{3} \alpha^{ap} \partial_p \alpha^{ds} \partial_s \alpha^{cb} \right] \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g.$$

Остальные члены вычисляются аналогично. Единственное исключение происходит с членами $\partial f \partial g$. Для них имеем

$$\text{вейлевский член : } \frac{1}{6} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \frac{\partial^3 z^a}{\partial x^i \partial x^k \partial x^m} \frac{\partial^3 z^b}{\partial x^j \partial x^l \partial x^n}, \quad (5.33)$$

$$\text{добавочный от } D_2 : -\frac{1}{18} S^{spt} \partial_p \partial_s \partial_t \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g, \quad (5.34)$$

$$\text{добавочный от } D'_2 : -\frac{1}{4} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^s}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^t}{\partial x^j \partial x^l} \partial_s \partial_t \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g. \quad (5.35)$$

Эти члены не могут быть сокращены калибровочными преобразованиями, так как они кососимметричны. Кроме того, они не представляются в виде графов Концевича. Следовательно, будем трактовать их как добавку к α :

$$\alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g = \alpha_0^{ab} \partial_a f \partial_b g + \hbar^2 \alpha_2^{ab} \partial_a f \partial_b g.$$

Определить α_2 можно многими разными способами по следующей причине. К α_2 можно добавлять любые линейные комбинации из диаграмм бивекторного типа в третьем порядке, компенсируя их вклад вычитанием из конечной формулы для деформационного квантования. Например, выражение (5.35) содержится в диаграмме $\partial_p \alpha^{so} \partial_o \alpha^{tp} \partial_s \partial_t \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g$, хотя последняя содержит и много других членов. Выражение (5.34) вообще не может содержаться в какой-либо диаграмме, так как содержит третью производную по α . Мoyalовский член (5.33) представляет собой выражение вида $\partial^3 z^a \partial^3 z^b$ и, следовательно, содержится только в диаграмме $\alpha^{pt} \partial_t \partial_s \alpha^{ao} \partial_o \partial_p \alpha^{bs}$. Неоднозначность в определении α_2 , по-видимому, может быть устранена, если потребовать от полного $\alpha(\hbar)$ выполнения тождества Якоби. Это может позволить восстановить коэффициенты для членов бивекторного типа, которые из условия ассоциативности в порядке \hbar^3 не фиксируются.

Выпишем найденную версию α :

$$\begin{aligned} \alpha^{ab} = & \vartheta^{ij} \frac{\partial z^a}{\partial x^i} \frac{\partial z^b}{\partial x^j} + \hbar^2 \left[\frac{1}{3!} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \vartheta^{mn} \frac{\partial^3 z^a}{\partial x^i \partial x^k \partial x^m} \frac{\partial^3 z^b}{\partial x^j \partial x^l \partial x^n} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{18} S^{spt} \partial_p \partial_s \partial_t \alpha^{ab} - \frac{1}{4} \vartheta^{ij} \vartheta^{kl} \frac{\partial^2 z^s}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 z^t}{\partial x^j \partial x^l} \partial_s \partial_t \alpha^{ab} \right] + O(\hbar^3). \quad (5.36) \end{aligned}$$

Итак, мы зафиксировали $\alpha = \alpha_0 + \hbar^2 \alpha_2$. Очевидно, что $\alpha^{ab} = \vartheta^{ij} \frac{\partial z^a}{\partial x^i} \frac{\partial z^b}{\partial x^j}$ удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\alpha_0^{as} \partial_s \alpha_0^{bc} + \alpha_0^{cs} \partial_s \alpha_0^{ab} + \alpha_0^{bs} \partial_s \alpha_0^{ca} = 0.$$

Однако $\alpha(\hbar)$, определенный в (5.36), не удовлетворяет тождеству Якоби в порядке \hbar^2 . Для доказательства этого утверждения достаточно проследить несокращение членов фиксированной структуры, которая определяется порядком производных и типом индексов.

Итак, в порядке \hbar^2 тождество Якоби выглядит следующим образом:

$$\alpha_0^{as} \partial_s \alpha_2^{bc} + \alpha_2^{as} \partial_s \alpha_0^{bc} + \alpha_0^{cs} \partial_s \alpha_2^{ab} + \alpha_2^{cs} \partial_s \alpha_0^{ab} + \alpha_0^{bs} \partial_s \alpha_2^{ca} + \alpha_2^{bs} \partial_s \alpha_0^{ca} = 0.$$

Чтобы убедиться в его невыполнении для α из (5.36), посмотрим на выражения вида $\partial z \partial^4 z \partial^3 z$. Координата z может нести два типа индексов: внешние a, b, c и внутренние o, t, p . Тем самым существует набор выражений указанного типа с разной тензорной структурой индексов, и каждое из них должно сокращаться в тождестве Якоби для того, чтобы оно выполнялось и для полного α . Выражения указанного вида появляются из первых двух членов в (5.36). Структура индексов такова: $\partial z^a \partial^4 z^b \partial^3 z^c$ от первого, $\partial z^a \partial^4 z^s \partial^3 z^b$ и $\partial z^a \partial^4 z^b \partial^3 z^s$ от второго. Оба эти выражения нарушают тождество Якоби. Однако следует помнить, что α_2 может быть переопределена, если добавить к ней члены бивекторного вида $\partial f \partial g$, а следовательно, и в квантовое умножение (5.9).

Можно убедиться, что, переопределяя α_2 с помощью диаграмм $\partial_p \alpha^{so} \partial_o \alpha^{tp} \partial_s \partial_t \alpha^{ab}$ и $\alpha^{pt} \partial_t \partial_s \alpha^{ao} \partial_o \partial_p \alpha^{bs}$, можно разрешить указанное выше несокращение.

5.4. Значения коэффициентов из требования ассоциативности. В этом пункте формально получим значения коэффициентов в формуле (5.9), потребовав ассоциативности и выполнения тождества Якоби для α_0 . В n -м порядке ассоциативность означает, что $(f * g) * h = f * (g * h) + O(\hbar^{n+1})$. Для второго и третьего порядков имеем (квантовое умножение определено в (5.1)):

$$B_2(fg, h) + B_1(B_1(f, g), h) + B_2(f, g)h = B_2(f, gh) + B_1(f, B_1(g, h)) + fB_2(g, h), \quad (5.37)$$

$$B_3(fg, h) + B_2(B_1(f, g), h) + B_1(B_2(f, g), h) + B_3(f, g)h = B_3(f, gh) + B_2(f, B_1(g, h)) + B_1(f, B_2(g, h)) + fB_3(g, h). \quad (5.38)$$

Во втором порядке (5.37) можно положить $\alpha = \alpha_0$. В третьем (5.38) $B_3(f, g)$ содержит член, зависящий от α_2 , но так как этот член бивекторного типа

$\alpha_2^{ab} \partial_a f \partial_b g$, то он сокращается в (5.38) в силу правила Лейбница. Другими словами, нет возможности извлечь какую-либо информацию об α_2 из требования ассоциативности для порядка \hbar^3 . Тем самым можно использовать тождество Якоби для α в уравнениях (5.37), (5.38).

Положим произвольными коэффициенты в формуле (5.9):

$$\begin{aligned}
 f * g = & fg + \hbar \alpha^{ab} \partial_a f \partial_b g + \\
 & + \hbar^2 [A_1 \alpha^{ab} \alpha^{cd} \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g + A_2 \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} \partial_a \partial_b f \partial_c g + A_3 \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} \partial_a \partial_b g \partial_c f] + \\
 & + \hbar^3 [C_1 \alpha^{ab} \alpha^{cd} \alpha^{ho} \partial_a \partial_c \partial_h f \partial_b \partial_d \partial_o g + C_2 \alpha^{tp} \partial_p \alpha^{as} \partial_s \partial_t \alpha^{bc} \partial_a \partial_c f \partial_b g + \\
 & + C_3 \alpha^{tp} \partial_p \alpha^{as} \partial_s \partial_t \alpha^{bc} \partial_a \partial_c g \partial_b f + \\
 & + [C_4 \alpha^{dp} \partial_p \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} + C_5 \alpha^{ap} \partial_p \alpha^{ds} \partial_s \alpha^{cb}] \partial_a \partial_c f \partial_b \partial_d g + \\
 & + C_6 \alpha^{as} \alpha^{ct} \partial_s \partial_t \alpha^{bd} \partial_a \partial_b \partial_c f \partial_d g + C_7 \alpha^{as} \alpha^{ct} \partial_s \partial_t \alpha^{bd} \partial_a \partial_b \partial_c g \partial_d f + \\
 & + C_8 \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} \alpha^{hd} \partial_a \partial_b \partial_h f \partial_c \partial_d g + C_9 \alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} \alpha^{hd} \partial_a \partial_b \partial_h g \partial_c \partial_d f] + O(\hbar^4).
 \end{aligned}
 \tag{5.39}$$

Уравнение (5.36) тогда дает $A_1 = \frac{1}{2}$ и

$$((1-A_2)\alpha^{as} \partial_s \alpha^{bc} + (1-A_3)\alpha^{cs} \partial_s \alpha^{ab} + (A_2+A_3)\alpha^{bs} \partial_s \alpha^{ca}) \partial_a f \partial_b g \partial_c h = 0.$$

Так как α_0 удовлетворяет тождеству Якоби, имеем

$$1 - A_2 = 1 - A_3 = A_2 + A_3$$

и, следовательно, $A_2 = A_3 = \frac{1}{3}$.

Аналогично из уравнения (5.38) можно получить

$$C_1 = \frac{1}{6}, \quad C_2 = -C_3 = \frac{1}{3}, \quad C_4 - C_5 = \frac{1}{3}, \quad C_6 = -C_7 = \frac{1}{6} C_8 = -C_9 = \frac{1}{3}.$$

Эти результаты находятся в соответствии с (5.9). Вместе с тем они были получены в [58]. Разница состоит в том, что авторы [58] выбрали $C_4 = -C_5 = \frac{1}{6}$, а в формуле (5.9), $C_4 = \frac{2}{3}$, $C_5 = \frac{1}{3}$. Оба выбора удовлетворяют требованию $C_4 - C_5 = \frac{1}{3}$. Мы не фиксируем C_4 и C_5 , так как диаграммы вида $\partial^2 f \partial^2 g$ являются зависимыми, что следует из тождества Якоби для α_0 . При этом, как отмечалось выше, полный бивектор $\alpha(\hbar)$ имеет нетривиальную структуру и, возможно, значение коэффициентов в (5.9) лучше подойдут для следующих старших порядков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведем основные результаты:

- Показана связь между системой Калоджеро–Мозера и эллиптическим волчком.
- Получено полевое обобщение системы Калоджеро–Мозера и эллиптической модели Годена.
- Предложено представление Лакса со спектральным параметром на эллиптической кривой для системы Калоджеро–Иноземцева.
- Построена линейная задача со спектральным параметром на эллиптической кривой для уравнения Пенлеве VI, а в автономном случае доказана алгебраическая интегрируемость этого уравнения.
- Показано появление квантовых поправок к пуассонову бивектору при замене координат.
- Предложен метод получения коэффициентов в формуле Концевича для деформационного квантования.

Результаты могут быть использованы для исследования различных задач из области интегрируемых систем и деформационного квантования. В частности, было бы интересно получить полевое обобщение уравнения Пенлеве VI. Из полученных результатов следует, что такое уравнение должно приводить к обобщению уравнения Ландау–Лифшица, соответствующей дискретной XYZ-модели и алгебры Склянина. Также можно надеяться, что предложенный в работе метод нахождения коэффициентов в формуле Концевича поможет получить ее полную форму.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Необходимые сведения по эллиптическим функциям. В этом приложении приведены основные определения и соотношения для эллиптических функций, необходимые для проверки результатов, представленных в данной работе. Большинство формул заимствованы из [59] и [60].

Введем обозначение $q = \exp 2\pi i\tau$, где τ — модулярный параметр эллиптической кривой E_τ .

Основной объект — тэта-функция:

$$\begin{aligned} \vartheta(z|\tau) &= q^{1/8} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n e^{\pi i(n(n+1)\tau + 2nz)} = \\ &= q^{1/8} e^{-i\pi/4} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^n e^{2i\pi z})(1 - q^n e^{-2i\pi z}). \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

Функции Эйзенштейна

$$E_1(z|\tau) = \partial_z \log \vartheta(z|\tau), \quad E_1(z|\tau) \sim \frac{1}{z} - 2\eta_1 z, \quad (\text{A.2})$$

где

$$\eta_1(\tau) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m\tau + n)^2} = \frac{24}{2\pi i} \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)}, \quad (\text{A.3})$$

$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n)$ — функция Дедекинда.

$$E_2(z|\tau) = -\partial_z E_1(z|\tau) = \partial_z^2 \log \vartheta(z|\tau), \quad E_2(z|\tau) \sim \frac{1}{z^2} + 2\eta_1. \quad (\text{A.4})$$

Следующий важный объект

$$\phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}, \quad \varphi_\alpha(z, \alpha+u) = \mathbf{e}(z\partial_\tau \alpha)\phi(z, \alpha+u). \quad (\text{A.5})$$

Эта функция имеет полюс в точке $z = 0$ и разлагается в ее окрестности в следующий ряд:

$$\phi(u, z) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2}(E_1^2(u) - \wp(u)) + \dots \quad (\text{A.6})$$

Формула для производной:

$$\phi(u, z)^{-1} \partial_u \phi(u, z) = E_1(u+z) - E_1(u). \quad (\text{A.7})$$

Следующее соотношение полезно при проверке уравнения Захарова–Шабата для двумерного обобщения модели Калоджеро:

$$\phi''(u, z) = \phi(u, z)(E_2(z) - E_1^2(z) + 2E_1(z)(E_1(u+z) - E_1(u)) + 2E_2(u) - 6\eta_1). \quad (\text{A.8})$$

Оно является следствием хорошо известного тождества:

$$(E_1(z) + E_1(u) - E_1(z+u))^2 = E_2(u) + E_2(z) + E_2(u+z) - 6\eta_1. \quad (\text{A.9})$$

Связь с функциями Вейерштрасса

$$\zeta(z|\tau) = E_1(z|\tau) + 2\eta_1(\tau)z, \quad (\text{A.10})$$

$$\wp(z|\tau) = E_2(z|\tau) - 2\eta_1(\tau), \quad (\text{A.11})$$

$$\phi(u, z) = \exp(-2\eta_1 uz) \frac{\sigma(u+z)}{\sigma(u)\sigma(z)}, \quad (\text{A.12})$$

$$\phi(u, z)\phi(-u, z) = \wp(z) - \wp(u) = E_2(z) - E_2(u). \quad (\text{A.13})$$

Точные значения

$$E_1(\omega_\alpha) = -2\pi\sqrt{-1}\partial_\tau\omega_\alpha, \quad (\text{A.14})$$

где $\partial_\tau\omega_\alpha = \left\{0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, или

$$E_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad E_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = E_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -\pi\sqrt{-1}. \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 \wp(\omega_\alpha) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Представление в виде рядов

$$\begin{aligned} E_1(z|\tau) &= -2\pi i \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i z}}{1 - q^n} \right) = \\ &= -2\pi i \left(\sum_{n < 0} \frac{1}{1 - q^n e^{2\pi i z}} + \sum_{n \geq 0} \frac{q^n e^{2\pi i z}}{1 - q^n e^{2\pi i z}} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$E_2(z|\tau) = -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{q^n e^{2\pi i z}}{(1 - q^n e^{2\pi i z})^2}, \quad (\text{A.18})$$

$$\phi(u, z) = 2\pi i \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{e^{-2\pi i n z}}{1 - q^n e^{-2\pi i u}}. \quad (\text{A.19})$$

Четность

$$\vartheta(-z) = -\vartheta(z), \quad (\text{A.20})$$

$$E_1(-z) = -E_1(z), \quad (\text{A.21})$$

$$E_2(-z) = E_2(z), \quad (\text{A.22})$$

$$\phi(u, z) = \phi(z, u) = -\phi(-u, -z). \quad (\text{A.23})$$

Квазипериодические свойства

$$\vartheta(z+1) = -\vartheta(z), \quad \vartheta(z+\tau) = -q^{-1/2} e^{-2\pi\sqrt{-1}z} \vartheta(z), \quad (\text{A.24})$$

$$E_1(z+2\omega_\alpha) = E_1(z) - 4\pi\sqrt{-1}\partial_\tau\omega_\alpha, \quad (\text{A.25})$$

$$E_1(z+1) = E_1(z), \quad E_1(z+\tau) = E_1(z) - 2\pi\sqrt{-1}, \quad (\text{A.26})$$

$$E_2(z+2\omega_\alpha) = E_2(z) : \quad E_2(z+1) = E_2(z), \quad E_2(z+\tau) = E_2(z), \quad (\text{A.27})$$

$$\phi(u+1, z) = \phi(z, u), \quad \phi(u+\tau, z) = e^{-2\pi\sqrt{-1}z}\phi(z, u). \quad (\text{A.28})$$

$\varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u)$	$\text{Res}_{z=0}$	$\text{Res}_{z=1}$	$\text{Res}_{z=\tau}$	$\text{Res}_{z=1+\tau}$
$\varphi_0(z, \omega_0 + u)$	1	1	$\mathbf{e}(-u)$	$\mathbf{e}(-u)$
$\varphi_1(z, \omega_1 + u)$	1	1	$-\mathbf{e}(-u)$	$-\mathbf{e}(-u)$
$\varphi_2(z, \omega_2 + u)$	1	-1	$\mathbf{e}(-u)$	$-\mathbf{e}(-u)$
$\varphi_3(z, \omega_3 + u)$	1	-1	$-\mathbf{e}(-u)$	$\mathbf{e}(-u)$.

(A.29)

Эта матрица определяется выражением

$$\text{Res}_{z=2\omega_\rho}\varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u) = \mathbf{e}(2\omega_\rho\partial_\tau\omega_\alpha - 2(\omega_\alpha + u)\partial_\tau\omega_\rho). \quad (\text{A.30})$$

Для симметричной 4×4 -матрицы $\text{Res}_{z=2\omega_\rho}\varphi_\alpha(z, \omega_\alpha)$ введем обозначение

$$I_{\rho\alpha} = \text{Res}_{z=2\omega_\rho}\varphi_\alpha(z, \omega_\alpha) = \mathbf{e}(2\omega_\rho\partial_\tau\omega_\alpha - 2\omega_\alpha\partial_\tau\omega_\rho) \quad (\text{A.31})$$

или

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$I^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}I_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.32})$$

Формулы сложения

$$\phi(u, z)\partial_v\phi(v, z) - \phi(v, z)\partial_u\phi(u, z) = (E_2(v) - E_2(u))\phi(u+v, z), \quad (\text{A.33})$$

или

$$\phi(u, z)\partial_v\phi(v, z) - \phi(v, z)\partial_u\phi(u, z) = (\wp(v) - \wp(u))\phi(u+v, z). \quad (\text{A.34})$$

Доказательство формулы (A.33) основано на использовании (A.6), (A.23) и (A.28).

На самом деле, $\phi(u, z)$ удовлетворяет более общему соотношению, следующему из тождества Фэя для тройной секущей:

$$\begin{aligned} &\phi(u_1, z_1)\phi(u_2, z_2) - \phi(u_1 + u_2, z_1)\phi(u_2, z_2 - z_1) - \\ &\quad - \phi(u_1 + u_2, z_2)\phi(u_1, z_1 - z_2) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Частным случаем этой формулы является

$$\phi(u_1, z)\phi(u_2, z) - \phi(u_1 + u_2, z)(E_1(u_1) + E_1(u_2)) + \partial_z\phi(u_1 + u_2, z) = 0. \quad (\text{A.36})$$

Интегралы

$$\int_{E_\tau} E_1(z|\tau) dz d\bar{z} = 0. \quad (\text{A.37})$$

Тэта-функции с характеристиками

Для $a, b \in \mathbb{Q}$ положим: $\theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right] (z, \tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{e} \left((j+a)^2 \frac{\tau}{2} + (j+a)(z+b) \right).$

В частности, функция ϑ (A.1) является тэта-функцией с характеристиками:

$$\vartheta(x, \tau) = \theta \left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right] (x, \tau). \quad (\text{A.38})$$

Имеем

$$\theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right] (z+1, \tau) = \mathbf{e}(a) \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right] (z, \tau),$$

$$\theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right] (z+a'\tau, \tau) = \mathbf{e} \left(-a'^2 \frac{\tau}{2} - a'(z+b) \right) \theta \left[\begin{smallmatrix} a+a' \\ b \end{smallmatrix} \right] (z, \tau),$$

$$\theta \left[\begin{smallmatrix} a+j \\ b \end{smallmatrix} \right] (z, \tau) = \theta \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right] (z, \tau), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Ниже будем пользоваться обозначением $\theta \left[\begin{smallmatrix} a/2 \\ b/2 \end{smallmatrix} \right] = \theta_{ab}$. При этом $\vartheta = \theta_{11}$.

Формулы с удвоенным модулярным параметром

$$\begin{aligned} \theta_{01}(x, \tau) \theta_{00}(y, \tau) + \theta_{01}(y, \tau) \theta_{00}(x, \tau) &= 2\theta_{01}(x+y, 2\tau) \theta_{01}(x-y, 2\tau), \\ \theta_{01}(x, \tau) \theta_{00}(y, \tau) - \theta_{01}(y, \tau) \theta_{00}(x, \tau) &= 2\vartheta(x+y, 2\tau) \vartheta(x-y, 2\tau), \\ \theta_{00}(x, \tau) \theta_{00}(y, \tau) + \theta_{01}(y, \tau) \theta_{01}(x, \tau) &= 2\theta_{00}(x+y, 2\tau) \theta_{00}(x-y, 2\tau), \\ \theta_{00}(x, \tau) \theta_{00}(y, \tau) - \theta_{01}(y, \tau) \theta_{01}(x, \tau) &= 2\theta_{10}(x+y, 2\tau) \theta_{10}(x-y, 2\tau), \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned}
 2\vartheta(x, 2\tau)\theta_{01}(y, 2\tau) &= \vartheta\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{10}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \\
 &\quad + \theta_{10}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right), \\
 2\theta_{00}(x, 2\tau)\theta_{10}(y, 2\tau) &= \vartheta\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\vartheta\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \\
 &\quad + \theta_{10}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{10}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right), \\
 2\theta_{00}(x, 2\tau)\theta_{00}(y, 2\tau) &= \theta_{00}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{00}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) + \\
 &\quad + \theta_{01}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{01}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right), \\
 2\theta_{10}(x, 2\tau)\theta_{10}(y, 2\tau) &= \theta_{00}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{00}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right) - \\
 &\quad - \theta_{01}\left(\frac{x+y}{2}, \tau\right)\theta_{01}\left(\frac{x-y}{2}, \tau\right).
 \end{aligned} \tag{A.40}$$

Тождества Римана для тэта-функций

Здесь приводятся несколько тождеств Римана, необходимых при вычислении преобразований Бэклунда в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -случае:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{2}(x+y+u+v), & y_1 &= \frac{1}{2}(x+y-u-v), \\
 u_1 &= \frac{1}{2}(x-y+u-v), & v_1 &= \frac{1}{2}(x-y-u+v),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_{00}(x)\theta_{00}(y)\theta_{00}(u)\theta_{00}(v) + \theta_{01}(x)\theta_{01}(y)\theta_{01}(u)\theta_{01}(v) + \\
 + \theta_{10}(x)\theta_{10}(y)\theta_{10}(u)\theta_{10}(v) + \vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(u)\vartheta(v) = \\
 = 2\theta_{00}(x_1)\theta_{00}(y_1)\theta_{00}(u_1)\theta_{00}(v_1), \tag{A.41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_{00}(x)\theta_{00}(y)\theta_{01}(u)\theta_{01}(v) - \theta_{01}(x)\theta_{01}(y)\theta_{00}(u)\theta_{00}(v) - \\
 - \theta_{10}(x)\theta_{10}(y)\vartheta(u)\vartheta(v) + \vartheta(x)\vartheta(y)\theta_{10}(u)\theta_{10}(v) = \\
 = -2\theta_{10}(x_1)\theta_{10}(y_1)\vartheta(u_1)\vartheta(v_1), \tag{A.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_{00}(x)\theta_{00}(y)\theta_{10}(u)\theta_{10}(v) - \theta_{01}(x)\theta_{01}(y)\vartheta(u)\vartheta(v) - \\
 - \theta_{10}(x)\theta_{10}(y)\theta_{00}(u)\theta_{00}(v) + \vartheta(x)\vartheta(y)\theta_{01}(u)\theta_{01}(v) = \\
 = 2\theta_{01}(x_1)\theta_{01}(y_1)\vartheta(u_1)\vartheta(v_1). \tag{A.43}
 \end{aligned}$$

Следствиями тождеств Римана являются
 Формулы сложения для тэта-функций

$$\vartheta(x+u)\theta_{00}(x-u)\theta_{01}(0)\theta_{10}(0) = \theta_{00}(x)\vartheta(x)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u) + \theta_{10}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(u)\vartheta(u), \quad (\text{A.44})$$

$$\vartheta(x-u)\theta_{00}(x+u)\theta_{01}(0)\theta_{10}(0) = \theta_{00}(x)\vartheta(x)\theta_{01}(u)\theta_{10}(u) - \theta_{10}(x)\theta_{01}(x)\theta_{00}(u)\vartheta(u),$$

$$\vartheta(x+u)\theta_{01}(x-u)\theta_{00}(0)\theta_{10}(0) = \theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\vartheta(u) + \theta_{01}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u) \quad (\text{A.45})$$

$$\vartheta(x-u)\theta_{01}(x+u)\theta_{00}(0)\theta_{10}(0) = -\theta_{00}(x)\theta_{10}(x)\theta_{01}(u)\vartheta(u) + \theta_{01}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{10}(u),$$

$$\vartheta(x+u)\theta_{10}(x-u)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0) = \theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{10}(u)\vartheta(u) + \theta_{10}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{01}(u) \quad (\text{A.46})$$

$$\vartheta(x-u)\theta_{10}(x+u)\theta_{00}(0)\theta_{01}(0) = -\theta_{00}(x)\theta_{01}(x)\theta_{10}(u)\vartheta(u) + \theta_{10}(x)\vartheta(x)\theta_{00}(u)\theta_{01}(u).$$

Соотношения между квадратами тэта-функций

$$\begin{aligned} \vartheta(z)^2\theta_{01}(0)^2 &= \theta_{00}(z)^2\theta_{10}(0)^2 - \theta_{10}(z)^2\theta_{00}(0)^2, \\ \theta_{10}(z)^2\theta_{01}(0)^2 &= \theta_{01}(z)^2\theta_{10}(0)^2 - \vartheta(z)^2\theta_{00}(0)^2, \\ \theta_{00}(z)^2\theta_{01}(0)^2 &= \theta_{01}(z)^2\theta_{00}(0)^2 - \vartheta(z)^2\theta_{10}(0)^2, \\ \theta_{01}(z)^2\theta_{01}(0)^2 &= \theta_{00}(z)^2\theta_{00}(0)^2 - \theta_{10}(z)^2\theta_{10}(0)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Здесь же выпишем знаменитое тождество Римана:

$$\theta_{10}(0)^4 + \theta_{01}(0)^4 = \theta_{00}(0)^4. \quad (\text{A.48})$$

Эллиптические функции Якоби

$$z' = \frac{z}{\pi\theta_{00}(0)^2}, \quad \kappa = \frac{\theta_{10}(0)^2}{\theta_{00}(0)^2}, \quad \kappa' = \frac{\theta_{01}(0)^2}{\theta_{00}(0)^2},$$

$$\text{dn}(z) = \frac{\theta_{01}(0)\theta_{00}(z')}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(z')}, \quad \text{cn}(z) = \frac{\theta_{01}(0)\theta_{10}(z')}{\theta_{10}(0)\theta_{01}(z')}, \quad \text{sn}(z) = \frac{\theta_{00}(0)\vartheta(z')}{\theta_{10}(0)\theta_{01}(z')}, \quad (\text{A.49})$$

$$\frac{d}{dz}\text{sn}(z) = \text{cn}(z)\text{dn}(z), \quad \frac{d}{dz}\text{cn}(z) = -\text{sn}(z)\text{dn}(z), \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\text{dn}(z) &= -\kappa^2\text{cn}(z)\text{sn}(z), \\ \kappa^2 + (\kappa')^2 &= 1, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

$$\operatorname{cn}(z)^2 + \operatorname{sn}(z)^2 = 1, \quad (\text{A.52})$$

$$\operatorname{dn}(z)^2 + \kappa^2 \operatorname{sn}(z)^2 = 1. \quad (\text{A.53})$$

В. Синус-алгебра

$$\mathbf{e}(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z), \quad (\text{B.1})$$

$$Q = \operatorname{diag}(\mathbf{e}(1/N), \dots, \mathbf{e}(m/N), \dots, 1), \quad (\text{B.2})$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$E_{mn} = \mathbf{e}\left(\frac{mn}{2N}\right) Q^m \Lambda^n \quad (\text{B.4})$$

$$(m = 0, \dots, N-1, n = 0, \dots, N-1, (\bmod N) m^2 + n^2 \neq 0)$$

в базисе $SL(N, \mathbb{C})$. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[E_{sk}, E_{nj}] = 2\sqrt{-1} \sin \frac{\pi}{N} (kn - sj) E_{s+n, k+j}, \quad (\text{B.5})$$

$$\operatorname{tr}(E_{sk} E_{nj}) = \delta_{s, -n} \delta_{k, -j} N. \quad (\text{B.6})$$

С. Приложение к разд. 4. Здесь опишем редукцию, выполненную в разд. 4 в следующем виде. Покажем, что условия редукции по (4.13) задают точку равновесия. Другими словами, уравнения движения не сдвигают связь (4.14).

Запишем производящую функцию гамильтонианов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L^{G^4}(z))^2 &= v^2 + 2v \sum_{\alpha} s_{11}^{\alpha} E_1(z - 2\omega_{\alpha}, \{2, 2\tau\}) + \\ &+ \left(\sum_{\alpha} s_{11}^{\alpha} E_1(z - 2\omega_{\alpha}, \{2, 2\tau\}) \right)^2 + \sum_{\alpha} \tilde{s}_{12}^{\alpha} \tilde{s}_{21}^{\alpha} (\wp(z) - \wp(u + \omega_{\alpha})) + \\ &+ \sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{s}_{12}^{\alpha} \tilde{s}_{21}^{\beta} \varphi_{\alpha}(z, \omega_{\alpha} + u) \varphi_{\beta}(z, \omega_{\beta} - u). \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

Инфинитезимальные деформации связей (4.14)

$$s_{11}^{\alpha} = 0, \quad \tilde{s}_{12}^{\alpha} = \tilde{s}_{21}^{\alpha}$$

определим в виде

$$\delta s_{11}^{\alpha} = \epsilon^{\alpha}.$$

Так как замена переменных $s \rightarrow \tilde{s}$ линейна, то имеем

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{12}^\alpha &= \nu^\alpha + \tilde{\epsilon}^\alpha, \\ \tilde{s}_{21}^\alpha &= \nu^\alpha - \tilde{\epsilon}^\alpha,\end{aligned}\tag{C.2}$$

где $\tilde{\epsilon}$ — линейная комбинация ϵ . Покажем, что такие деформации для гамильтониана $H_{2,0}$ квадратичны по ϵ на поверхности связей.

Подставляя инфинитезимальные деформации в (С.1), видим, что наше предположение верно. Действительно, для последнего слагаемого имеем

$$\begin{aligned}\delta \sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{s}_{12}^\alpha \tilde{s}_{21}^\beta \varphi_\alpha(z, \omega_\alpha + u) \varphi_\beta(z, \omega_\beta - u) &= \\ = \delta \sum_{\alpha \neq \beta} \tilde{s}_{12}^\alpha \tilde{s}_{21}^\beta \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_\alpha + \omega_\beta) (E_1(z) + E_1(\omega_\alpha + u) + E_1(\omega_\beta - u) - \\ - E_1(z + \omega_\alpha + \omega_\beta)) &= \sum_{\alpha \neq \beta} (\tilde{\epsilon}^\alpha \nu^\beta - \tilde{\epsilon}^\beta \nu^\alpha) \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_\alpha + \omega_\beta) (E_1(z) + \\ + E_1(\omega_\alpha + u) + E_1(\omega_\beta - u) - E_1(z + \omega_\alpha + \omega_\beta)) &= \\ = \sum_{\alpha \neq \beta} (\tilde{\epsilon}^\alpha \nu^\beta - \tilde{\epsilon}^\beta \nu^\alpha) \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_\alpha + \omega_\beta) (E_1(\omega_\alpha + u) + E_1(\omega_\beta - u)).\end{aligned}\tag{C.3}$$

Однако это выражение не связано с квадратичным гамильтонианом $H_{2,0}$, так как

$$\varphi_\alpha(z, \omega_\alpha) \sim \frac{1}{z} - \frac{z}{2} \rho(\omega_\alpha).\tag{C.4}$$

Тем самым предполагаемое утверждение проверено.

Благодарности. Выражаю благодарность соавторам Г.Брадону, В.Долгушеву, А.Левину, М.Ольшанецкому и Ю.Чернякову, а также искреннюю признательность за ценные советы и полезные обсуждения А.Белавину, А.Горскому, А.Забродину, А.Исаеву, И.Кричеверу, А.Морозову, С.Облезину.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ-1999.2003.2, МК-2059.2005.2, РФФИ 03-02-17554 и CRDF RM1-2545-MO-03.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кричевер И. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функциональный анализ и приложения. 1977. Т. 11, вып. 1. С. 15–31;
Кричевер И., Новиков С. Векторные расслоения на алгебраических кривых и нелинейные уравнения // УМН. 1980. Т. 35, № 6. С. 47–68.
2. Hitchin N. Stable bundles and integrable systems // Duke Math. Jour. 1987. V. 54. P. 91–114.

3. *Gorsky A., Nekrasov N.* Elliptic Calogero–Moser system from two dimensional current algebra. hep-th/9401021. 1994.
4. *Nekrasov N.* Holomorphic bundles and many-body systems // Commun. Math. Phys. 1996. V. 180. P. 587–604. hep-th/9503157. 1996.
5. *Calogero F.* // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 19;
Moser J. // Adv. Math. 1975. V. 16. P. 197–220.
6. *Olshanetsky M., Perelomov A.* Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras // Phys. Rep. C. 1981. V. 71. P. 313–400.
7. *Levin A., Olshanetsky M.* Double coset construction of moduli space of holomorphic bundles and Hitchin systems // Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 449–466.
8. *Levin A., Olshanetsky M., Zotov A.* Hitchin systems — Symplectic Hecke correspondence and two-dimensional version // Commun. Math. Phys. 2003. V. 236. P. 93–133.
9. *Inozemtsev V. I.* Lax representation with spectral parameter on a torus for particle systems // Lett. Math. Phys. 1989. V. 17. P. 11–17.
10. *Zotov A.* Elliptic linear problem for Painlevé VI equation with spectral parameter // Czech. J. Phys. 2003. V. 53, No. 11. P. 1147–1152.
11. *Фаддеев Л., Тахтаджян Л.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
12. *Sokolov V. V., Schabat A. B.* Classification of integrable evolution equations // Sov. Sci. Rev. C. 1984. V. 4. P. 221–280;
Mikhailov A. V., Schabat A. B., Yamilov R. I. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete list of integrable systems // Usp. Mat. Nauk. 1987. V. 42. P. 3–53;
Fokas A. S. Symmetries and integrability // Stud. Appl. Math. 1987. V. 77. P. 253–299.
13. *Белавин А. А., Захаров В. Е.* Многомерный метод обратной задачи рассеяния и уравнения дуальности для поля Янга–Миллса // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25. С. 603–607.
14. *Gorsky A., Gukov S., Mironov A.* Multiscale $N = 2$ SUSY field theories, integrable systems and their stringy/brane origin – I, II // Nucl. Phys. B. 1998. V. 517. P. 409–461; V. 518. P. 689–713.
15. *Kontsevich M.* Deformation quantization of Poisson manifolds I. IHES Preprint. q-alg/9709040. 1997.
16. *Zotov A.* On relation between Moyal and Kontsevich quantum products. Direct evaluation up to the \hbar^3 -order // Mod. Phys. Lett. A. 2001. V. 16. P. 615–626.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Собр. тр. Л. Д. Ландау. М., 1969. Т. 1. С. 128–143.
18. *Sklyanin E.* On complete integrability of the Landau–Lifshitz equation. Preprint LOMI E-3-79. 1979;
Borovik A. E., Robuk V. N. Linear pseudopotentials and conservation laws for the Landau–Lifshitz equation // Theor. Math. Phys. 1981. V. 46. P. 371–381.
19. *Mehta V. B., Seshardi C. S.* Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures // Math. Ann. 1980. V. 248. P. 205–239.
20. *Atiyah M. F.* Vector bundles over an elliptic curve // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 414–452.
21. *Arinkin D., Lysenko S.* Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$ -bundles with connections on $P^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$ // Math. Res. Lett. 1997. V. 4. P. 181–190.
22. *Veselov A. P.* Integrable maps // Rus. Math. Surveys. 1991. V. 46. P. 1–51.
23. *Markman E.* Spectral curves and integrable systems // Comp. Math. 1994. V. 93. P. 255–290.

24. *Arutyunov G., Chekhov L., Frolov S.* Quantum dynamical R -matrices // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1999. V. 191.
25. *Suris Yu. B.* Elliptic Ruijsenaars–Schneider and Calogero–Moser hierarchies are governed by the same r -matrix. *solv-int/9603011*. 1996.
26. *Belavin A. A.* Dynamical symmetry of integrable system // Nucl. Phys. 1981. V. 180 [FS2]. P. 189–200.
27. *Billey E., Avan J., Babelon O.* Exact Yangian symmetry in the classical Euler–Calogero–Moser model. *hep-th/9401117*. 1994.
28. *Kuznetsov V., Sklyanin E.* On Backlund transformations for many-body systems // J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 2241–2251.
29. *Avan J., Babelon O., Talon M.* Construction of the classical R -matrices for the Toda and Calogero models. *hep-th/9306102*. 1993.
30. *Ruijsenaars S. N. M.* Complete integrability of relativistic Calogero–Moser systems and elliptic function identities // Commun. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 191.
31. *Ruijsenaars S. N. M.* Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems // Commun. Math. Phys. 1988. V. 115. P. 127–165;
Gorsky A. Integrable many-body problems from the field theories // Theor. Math. Phys. 1995. V. 103. P. 681–700;
Mironov A. Seiberg–Witten theory and duality in integrable systems. *hep-th/0011093*. 2000.
32. *Hasegawa K.* Ruijsenaars’ commuting difference operators as commuting transfer matrices. *q-alg/9512029*. 1995.
33. *Baxter R. J.* Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain // I. Ann. Phys. 1973. V. 76;
Jimbo M., Miwa T., Okado M. Local state probabilities of solvable lattice models: an A_{n-1}^1 family // Nucl. Phys. B. 1988. V. 300 [FS22]. P. 74–108;
Faddeev L., Takhtajan L. The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model // Usp. Mat. Nauk. 1979. V. 34, No. 5. P. 11–68.
34. *Dubrovin B., Matveev V., Novikov S.* Nonlinear equations of KdV type and finite gap linear operators and abelian manifolds // Usp. Mat. Nauk. 1976. V. 31. P. 187.
35. *Inozemtsev V. I.* The finite Toda lattices // Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 629–638.
36. *Krichever I.* Elliptic solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation and integrable systems of particles // Funct. Anal. Appl. 1980. V. 14. P. 282–290.
37. *D’Hoker E., Phong D. H.* Calogero–Moser–Lax pairs with spectral parameter for general Lie algebras // Nucl. Phys. B. 1997. V. 530. P. 537–610.
38. *D’Hoker E., Phong D. H.* Calogero–Moser and Toda systems for twisted and untwisted affine Lie algebras. *hep-th/9804125*. 1998.
39. *Khastgir S. P., Sasaki R., Takasaki K.* Calogero–Moser models IV: Limits to Toda theory. *hep-th/9907102*. 1999.
40. *Krichever I.* Vector bundles and Lax equations on algebraic curves. *hep-th/0108110*. 2001.
41. *Krichever I. et al.* Spin generalization of the Calogero–Moser system and the matrix KP equation // Amer. Math. Soc. Transl. 1995. V. 170. P. 83–119.
42. *Reyman A. G., Semenov-Tyan-Shanskii M. A.* Lie algebras and Lax equations with spectral parameter on elliptic curve // Notes from Sci. Seminar LOMI. 1986. V. 150. P. 104–118.
43. *Gambier B.* Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l’intégral générale a ses points critiques fixes // Acta Math. Ann. 1910. V. 33. P. 1–55.

44. *Painlevé P.* Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes // C. R. Acad. Sci. 1906. V. 143. P. 1111–1117.
45. *Manin Yu. I.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of P^2 // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1998. V. 186. P. 131–151. alg-geom/9605010. 1998.
46. *Babich A., Bordag L.* The elliptic form of the sixth Painlevé equation. Preprint NTZ 25. 1997.
47. *Fuchs R.* Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiterordnung mit im endlich gelegne wesentlich singulären Stellen // Math. Ann. 1907. Bd. 63. S. 301–323.
48. *Jimbo M., Miwa T.* Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II // Physica D. 1981. V. 2. P. 407–448.
49. *Schlesinger L.* Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten // J. Reine Angew. Math. 1912. Bd. 141. S. 96–145.
50. *Korotkin D.* Isomonodromic deformations in genus zero and one: algebrogeometric solutions and Schlesinger transformations. math-ph/0003016. 2000;
Kitaev A. V., Korotkin D. A. On solutions of the Schlesinger equations in terms of Θ -functions // Intern. Math. Res. Notices. 1998. No. 17. P. 877–905.
51. *Levin A., Olshanetsky M.* Isomonodromic deformations and Hitchin systems // Amer. Math. Soc. Transl (2). 1999.
52. *Krichever I.* Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations. hep-th/0112096. 2001.
53. *Olshanetsky M. A.* Generalized Hitchin systems and Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equation on elliptic curves. hep-th/9510143. 1995.
54. *Slavyanov S.* Painlevé equations as classical analogues of Heun equations // J. Phys. A. Gen. 1996. V. 29. P. 7329–7335.
55. *Mathieu E., Liouville J.* // J. de Math. (2). 1868. V. 13.
56. *Poole E. G. C.* Theory of linear differential equations. Oxford: Clarendon press, 1936.
57. *Fedosov B. V.* A simple geometrical construction of geometric quantization // J. Different. Geom. 1994. V. 40. P. 213–238.
58. *Penkava M., Vanhaecke P.* Deformation quantization of polynomial Poisson algebras. q-alg/9804022. 1998.
59. *Weyl A.* Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1976.
60. *Mumford D.* Tata Lectures on Theta I, II. Boston: Birkhäuser, 1983; 1984.