

УДК 539.12.01

## РЕЛЯТИВИСТСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАЛОНУКЛОННЫХ СИСТЕМ

*С. М. Доркин<sup>1</sup>, Л. П. Кантарь<sup>2</sup>, Б. Кэмпфер<sup>3</sup>, С. С. Семих<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына  
МГУ, Москва

<sup>2</sup>Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>3</sup>Исследовательский центр, Россендорф, Германия

Анализируются теоретические подходы, используемые при исследовании релятивистских эффектов в реакциях столкновения лептонов и адронов высоких энергий с малонуклонными системами. Детально излагается формализм Бете–Солпитера для описания взаимодействующих систем из двух спинорных частиц как в непрерывном спектре, так и в связанном состоянии. Особое внимание уделено парциальным разложениям и унитарным преобразованиям, связывающим различные представления для парциальных амплитуд. Рассматриваются математические методы численного решения уравнений. Представлены результаты расчетов релятивистских поправок и эффектов взаимодействия в конечном состоянии в конкретных реакциях с участием дейтрона, а именно в упругом  $pD$ -рассеянии назад и в реакциях развала дейтрона с образованием коррелированных пар.

Theoretical approaches to investigation of relativistic effects in the processes of high energy lepton and hadron scattering off few-nucleon systems are considered. The Bethe–Salpeter formalism for description of interacting two-nucleon systems both in bound and scattered states is presented in detail. In particular, special attention is paid to the partial expansions and unitary transformations, connecting different sets of partial amplitudes. Different methods of numerical solving the Bethe–Salpeter equations are considered. Calculations of the relativistic corrections and final state interaction effects are presented for numerous processes on deuteron-like backward  $pD$ -scattering and different types of proton–deuteron breakup with formation of correlated pair in final state.

### ВВЕДЕНИЕ

Открытие квантового числа цвет [1–5] и асимптотической свободы в неабелевой калибровочной теории [6], а также экспериментальное открытие масштабной инвариантности в реакциях глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния [7–9] положили основу формулировки фундаментальной теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики (КХД). Благодаря явлению асимптотической свободы стало возможным применение методов теории возмущений для описания свойств адронов на малых расстояниях и получение ряда фундаментальных теоретических предсказаний о кварковой динамике. Среди них особую роль играют правила сумм КХД, связывающие

между собой различными соотношениями распределения кварков и глюонов разных цветов и ароматов. В большинстве они были получены как теоретические результаты в асимптотической области, т. е. для малых значений эффективной константы связи  $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ , больших передач импульса  $Q^2 \rightarrow \infty$  и, следовательно, для малых расстояний. Экспериментальная проверка справедливости правил сумм и определение пределов их применения имеют огромное значение как для КХД в целом, так и для выяснения взаимосвязи КХД и «старых» подходов, основанных на эффективных мезон-нуклонных теориях, которые призваны описать ядерные системы на больших и средних расстояниях, где пертурбативные методы КХД неприменимы.

Одним из ярких примеров здесь может служить исследование  $Q^2$ -зависимости разности спиновых структурных функций нуклонов  $g_{1p}$  и  $g_{1n}$ , интеграл от которой положителен при  $Q^2 \rightarrow \infty$  (известное асимптотическое правило сумм Бьеркена [10]) и отрицателен при  $Q^2 \rightarrow 0$  (знаменитое правило сумм Герасимова–Дрелла–Херна [11], экспериментальная проверка которого в настоящее время осуществляется (см. [12] и ссылки в ней)). Ясно, что при некотором значении  $Q^2$  упомянутый интеграл становится равным нулю. Эта точка, соответствующая, по различным оценкам, возбуждению нуклонных резонансов, определяет область перехода к непертурбативной КХД или же, за отсутствием иного выбора, к эффективным мезон-нуклонным теориям. Стоит отметить, что при изучении структуры нейтрона, ввиду известных трудностей с приготовлением нейтронных мишеней, необходимо использовать ядерные. Например, для извлечения электромагнитных формфакторов нейтрона или его структурных функций в глубоконеупругом рассеянии необходимы измерения на протоне и дейтроне, а сам процесс выделения нейтронных величин неизбежно связан со структурой дейтрона, т. е. с необходимостью рассматривать большие расстояния. Именно таким образом извлекалась информация о структурной функции нейтрона  $F_{2n}$  в работе [13]. Понятно, что релятивистские способы расчета структуры дейтрона чрезвычайно важны для решения подобных задач. Заслуживает упоминания также тот факт, что спиновые структурные функции нейтрона  $g$  оказалось возможным извлечь из анализа данных на зеркальных ядрах  $^3\text{He}$  и  $^3\text{H}$  [14]. Во всех приведенных примерах для получения желаемой информации необходимо иметь надежные методы выделения ядерных эффектов.

Особый интерес представляют исследования электромагнитных процессов на ядрах, проводимые в ТЛЛАВ (США). В них можно получить информацию о природе сильных взаимодействий, например, о феномене цветовой прозрачности [15, 16]. Было высказано предположение, что при больших  $Q^2$  сильнонемассовый кварк (после поглощения  $\gamma$ -кванта внутри нуклона) некоторое время не взаимодействует с окружающими кварками и процесс адронизации происходит в другой точке пространства. Это можно наблюдать экспериментально, сравнивая рассеяние на нуклоне и на ядрах. Ожидается,

что из-за взаимодействия в конечном состоянии сечение на ядре будет отличаться от нуклонного, если адронизация произошла внутри ядра [17]. Таким образом, и в этих исследованиях роль ядерных эффектов весьма существенна.

Важно также отметить и то, что успехи КХД в описании свойств адронов как связанных состояний кварков не столь значительны. Поэтому в данной области большую роль играют теории составных систем, например, кварковые модели адронов, взаимодействие между кварками в которых задается феноменологически. Поскольку энергия связи в таких объектах велика, то релятивистское описание связанных состояний становится весьма существенным, что приводит к заимствованию соответствующих методов из традиционных мезон-нуклонных моделей [18].

В общем, мы приходим к несколько парадоксальному заключению, что несмотря на все успехи КХД роль эффективных мезон-нуклонных теорий остается значительной в областях, традиционно относимых к промежуточным энергиям, где достижения непертурбативной КХД пока невелики. В этих областях заметную роль продолжают играть процессы с участием дейтрона, в частности, реакции протон-дейтронного взаимодействия при энергиях налетающих протонов в несколько ГэВ. Помимо сечений в них измеряются и поляризационные характеристики, поведение которых крайне чувствительно к структуре дейтрона. Описание экспериментальных данных с поляризацией требует разработки моделей с детальным учетом самых различных эффектов. Перечисленные выше примеры подчеркивают важность релятивистского описания малочастичных систем.

## 1. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОДХОДЫ

В этом разделе мы дадим обзор релятивистских подходов для описания малонуклонных, главным образом двухчастичных, систем. Понятно, что в основе любого подхода должно лежать предположение о нуклон-нуклонном взаимодействии, которое пока не получено из первых принципов. В нерелятивистской квантовой механике эта информация закладывается в потенциал, который выбирается так, чтобы получить наилучшее согласие с опытом. Построение такого феноменологического потенциала (и его аналога в релятивистских подходах), в сущности, и является одной из основных задач теории малонуклонных систем.

В настоящее время доминирующими концепциями для построения взаимодействия являются давняя идея Юкавы о мезонно-обменном характере ядерных сил и киральная эффективная полевая теория. Оба подхода сталкиваются с большими техническими трудностями при практической реализации. Так, в теории Юкавы расчеты обычно ограничиваются лестничным приближением, в киральных подходах также учитывается только ряд низших диаграмм. Тем

не менее удовлетворительное описание многих экспериментальных данных позволяет надеяться, что основные свойства потенциала взаимодействия отражены правильно, по крайней мере, до межнуклонных расстояний  $r \sim 0,5$  Фм.

Необходимо отметить, что нерелятивистское описание дейтрона и других малонуклонных систем вполне адекватно, если речь идет о межнуклонных расстояниях  $r \sim 1,0$  Фм и больше. Имеется широкий класс потенциалов, для которых уравнение Шредингера решается численно (см. обзор [19] и ссылки в нем) и где волновая функция дейтрона является суперпозицией двух компонент —  $S$ - и  $D$ -волн.

Однако при описании реакций с большой передачей импульса, в которых затрагиваются малые межнуклонные расстояния, простая нерелятивистская картина становится неадекватной [20] и для улучшения согласия с опытом приходится учитывать дополнительные эффекты. Это особенно хорошо видно при вычислении электромагнитных формфакторов дейтрона [21]. Так, в расчетах, основанных на нерелятивистском уравнении Шредингера, приходится вводить множество поправок различной природы [22], в том числе и релятивистских.

К настоящему времени стало ясно, что описание дейтрона должно быть исходно релятивистским. Это означает, что волновые функции должны быть решениями релятивистских уравнений, а матричные элементы должны рассчитываться самосогласованным способом. К настоящему времени для осуществления этой программы сложилось несколько подходов.

В обзоре релятивистских подходов мы будем концентрировать внимание на двух аспектах: на динамическом уравнении, в которое вложено предположение о взаимодействии и решением которого является волновая функция (или амплитуда), и ее расчете в произвольной системе отсчета. Последнее важно для вычисления матричных элементов процессов с участием малонуклонных систем. Поскольку основная часть обзора посвящена реакциям с участием дейтрона, в этом разделе описание будет сосредоточено именно на двухчастичных системах.

**1.1. Подход Бете–Солпитера.** В квантовой теории поля одним из распространенных средств исследования двухчастичных состояний является уравнение Бете–Солпитера (БС) [23]. После работ [24–27] стало возможным говорить о целом подходе (формализме) Бете–Солпитера, включающем в себя, с одной стороны, способ описания связанных состояний и состояний рассеяния при помощи амплитуд БС, а с другой — метод Мандельстама [27], который в тех же терминах дает рецепт вычисления наблюдаемых величин в любых процессах с участием связанных состояний. В качестве примера приведем общую форму уравнения БС для  $T$ -матрицы в случае скалярных частиц:

$$T(k, q, s) = V(k, q, s) + i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V(k, p, s) S(p_1) S(p_2) T(p, q, s), \quad (1)$$

где  $S(p)$  — пропагатор скалярной частицы. Информация о взаимодействии содержится в ядре  $V(k, p, s)$ , где  $s = P^2$ , а  $P$  — полный 4-импульс системы. Если система двух частиц имеет связанное состояние, то вблизи  $P^2 = M^2$  ( $M$  — масса связанного состояния)  $T$ -матрицу можно представить в виде

$$T(k, q, s) \approx \frac{\mathcal{G}(k)\mathcal{G}(q)}{s - M^2}, \quad (2)$$

где  $\mathcal{G}(k) = \mathcal{G}(k_0, \mathbf{k})$  — вершинная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\mathcal{G}(k) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V(k, p, s) S(p_1) S(p_2) \mathcal{G}(p). \quad (3)$$

Уравнения БС (1) и (3) ковариантны, т. е. имеют один и тот же вид в любой системе отсчета. Обычно они решаются в системе покоя пары, т. е. при  $P = (\sqrt{s}, 0)$ , а вычисленная вершинная функция может быть определена в любой движущейся системе отсчета. Зависимость вершинной функции от  $k_0$  и  $\mathbf{k}$  можно переписать в виде зависимости от скалярных произведений  $Pk$  и  $k^2$ , так как  $k_0 = \frac{Pk}{M}$ , а  $|\mathbf{k}| = \sqrt{(Pk)^2/M^2 - k^2}$ . Таким образом, вершинная функция, вычисленная в системе покоя, может быть рассчитана в любой движущейся системе.

Для спинорных частиц уравнения БС более сложны в силу матричной структуры. В подходе БС система из двух спинорных частиц  $A + B$  может описываться амплитудой

$$\Phi(x_1, x_2)_{\alpha\beta} = \langle 0 | T \psi_\alpha^A(x_1) \psi_\beta^B(x_2) | AB \rangle \equiv e^{-iPX} \Phi(x)_{\alpha\beta}, \quad (4)$$

где  $|AB\rangle$  может быть как связанным состоянием, так и состоянием рассеяния,  $\psi^A(x_1)$ ,  $\psi^B(x_2)$  — полевые спинорные операторы в представлении Гейзенберга со спинорными индексами  $\alpha, \beta$ , а  $x = x_1 - x_2$  — относительная координата. Как пояснено выше, для связанных состояний величина (4) удовлетворяет однородным уравнениям БС, а для состояний рассеяния — неоднородным. Например, уравнение БС с ядром взаимодействия в виде суммы однобозонных обменов, описывающее дейтрон, в импульсном представлении имеет вид [28]:

$$\Psi_D(p) = i \sum_b g_b^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{S(p_1) \gamma_b \Psi_D(k) \tilde{\gamma}_b \tilde{S}(p_2)}{(p-k)^2 - \mu_b^2 + i\varepsilon}, \quad (5)$$

где  $b$  обозначает тип мезона;  $\gamma_b$  — матрицы, определяющие вершины мезон-нуклонного взаимодействия;  $p_{1,2} = P/2 \pm p$ ,  $P$  — полный 4-импульс дейтрона;  $S(p)$  — пропагатор свободного нуклона. Отметим, что для реалистического описания  $NN$ -взаимодействия достаточно учесть вклады шести

наиболее легких мезонов:  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$  и  $\eta$ . Для удобного перехода к матричному умножению амплитуда (4) переопределена по формуле  $\Psi = -\Phi U_C$ , где  $U_C = i\gamma_2\gamma_0$  — матрица зарядового сопряжения и  $\hat{S}(p) = U_C S^T(p) U_C$ . С учетом этого 16-компонентная величина  $\Psi_{\alpha\beta}$  в уравнении (5) теперь может рассматриваться как матрица  $4 \times 4$  в спинорном пространстве, причем индекс  $\alpha$  относится к частице  $A$ , а  $\beta$  — к частице  $B$ . Неоднородное уравнение, описывающее нуклон-нуклонное рассеяние, отличается от (5) только добавлением свободного члена, соответствующего плоской волне [29, 30].

В общем случае уравнение типа (5) представляет собой систему из шестнадцати 4-мерных интегральных уравнений, нелинейно зависящих от полной энергии системы. Кроме явных полюсных особенностей от пропагаторов, в уравнении БС (УБС) сами амплитуды имеют полюсы и разрезы вдоль реальной оси относительной энергии [26]. Кроме того, структура ядра взаимодействия до конца не исследована, что с необходимостью предполагает использование различных упрощений и приближений. Наиболее адекватным физической картине описания системы двух нуклонов считается лестничное приближение, когда ядро взаимодействия аппроксимируется суммой фейнмановских диаграмм  $NN$ -рассеяния с однобозонным обменом. Эффективные параметры таких диаграмм подбираются из условия наиболее полного описания экспериментальных данных, например, энергетической зависимости фаз  $NN$ -рассеяния, и поэтому такое ядро УБС часто именуется реалистическим взаимодействием. Существуют и другие подходы в выборе ядер взаимодействия, например, сепарабельные потенциалы или упрощенные потенциалы кулоновского типа. Они обычно имеют методический характер и для адекватного анализа данных ограничено применимы. В свою очередь, численные решения уравнений БС с реалистическим взаимодействием до сих пор удавалось получить, по-видимому, только небольшому числу авторов (см., например, [28, 31]).

Как правило, при решении уравнений типа (5) неизвестные матрицы  $\Psi(p)$  разлагаются по некоторому полному набору матриц. Коэффициенты такого представления являются функциями нескольких переменных (координат или импульсов частиц) и удовлетворяют многомерной системе интегральных уравнений. С целью уменьшения кратности интегралов неизвестные функции разлагаются по некоторому полному базису угловых функций, интегралы по углам вычисляются аналитически. Как уже было отмечено, амплитуды БС содержат множество сингулярностей, поэтому решение УБС обычно ищется во всей комплексной плоскости относительной энергии, за исключением реальной оси. Например, поворот Вика [26] позволяет получить регулярное уравнение БС на неизвестные функции, определенные вдоль мнимой оси энергии (в евклидовом пространстве), что в некоторых случаях позволяет воспользоваться строгими результатами теории Гильберта–Шмидта симметричных интегральных уравнений [32]. В практических приложениях бывает достаточно

знать только эти решения. Однако в некоторых случаях решения УБС нужны непосредственно в пространстве Минковского, для чего необходимо провести обратный поворот Вика к реальной оси или аналитическое продолжение решений на всю плоскость. Эта процедура в данной работе рассматриваться не будет.

Изложим более детально переход от матричного вида к обычной системе уравнений и связь различных базисов разложения. Так как амплитуда  $\Psi(p)$  является матрицей  $4 \times 4$ , то наиболее естественным выбором базиса является полный набор дираковских  $\gamma$ -матриц:

$$\Psi(p) = \hat{1}\psi_s(p) + \gamma_5\psi_p(p) + \gamma_\mu\psi_v^\mu(p) + \gamma_5\gamma_\mu\psi_a^\mu(p) + \sigma_{\mu\nu}\psi_t^{\mu\nu}(p), \quad (6)$$

где коэффициентные функции  $\psi_i(p)$  (скалярные, псевдоскалярные, векторные, аксиально-векторные и тензорные) далее разлагаются по полному набору скалярных и векторных сферических гармоник. Например, для дейтрона полная амплитуда БС принимает вид [33, 34]:

$$\begin{aligned} \Psi_D(p) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \{ & \gamma_5\psi_{p1}Y_{1M} + \gamma_5\gamma_0\psi_{a1}^0Y_{1M} - \psi_{v1}(\gamma, f\mathbf{Y}_{1M}^1) - \\ & - \psi_{a0}\gamma_5(\gamma, \mathbf{Y}_{1M}^0) - \psi_{a2}\gamma_5(\gamma, \mathbf{Y}_{1M}^2) - 2i\psi_{t1}^0\gamma_0(\gamma, \mathbf{Y}_{1M}^1) + \\ & + i\psi_{t0}(\gamma, [\gamma, \mathbf{Y}_{1M}^0]) + i\psi_{t2}(\gamma, [\gamma, \mathbf{Y}_{1M}^2]) \}. \quad (7) \end{aligned}$$

Подставляя (7) в (5), вычисляя соответствующие шпуры и интегрируя по углам, получаем систему из восьми двумерных интегральных уравнений на парциальные амплитуды. Данный базис оказывается весьма удобным для численных расчетов, однако в рамках такого разложения физическая интерпретация амплитуд в терминах привычной нерелятивистской классификации по состояниям с определенным угловым моментом и полным спином затруднительна. В релятивистском случае с этой целью рассматриваются спин-угловые гармоники  $\Gamma_M^\alpha(\mathbf{p})$ , которые конструируются по обычным правилам сложения угловых моментов:

$$\begin{aligned} \Gamma_M^\alpha(\mathbf{p})U_C = (-)^{\rho_1+\rho_2} i^L \sum_{\mu_1\mu_2m_L} (Lm_LSm_S|JM) \left( \frac{1}{2}\mu_1\frac{1}{2}\mu_2|Sm_S \right) \times \\ \times Y_{Lm_L}(\hat{\mathbf{p}}) U_{\mu_1}^{\rho_1}(\mathbf{p}) U_{\mu_2}^{\rho_2 T}(-\mathbf{p}), \quad (8) \end{aligned}$$

где  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ , спиноры  $U_{\mu_i}^{\rho_i}(\mathbf{p}_i)$  обозначают полный набор решений свободного уравнения Дирака для частицы  $i$  с проекцией спина  $\mu$  и положительным или отрицательным  $\rho$ -спином [35], а индекс  $\alpha$  нумерует различные состояния системы:  $\alpha = \{LSJ\rho_1\rho_2\}$ , где  $L$  — относительный угловой момент,  $S$  — спин,  $J$  — полный угловой момент. Для  $\alpha$  мы будем использовать спектроскопическое обозначение  $\alpha \equiv {}^{2S+1}L_J^{\rho_1\rho_2}$  [35]. В этом случае парциальное

разложение записывается в общем виде как

$$\Psi(p) = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(p_0, |\mathbf{p}|) \Gamma_M^{\alpha}(\mathbf{p}), \quad (9)$$

где  $\phi_{\alpha}(p_0, |\mathbf{p}|)$  — парциальные амплитуды. Далее в данной работе мы будем рассматривать только два случая: i)  $J = 0$ ,  $\mathcal{P} = +1$  (протон-протонная пара в  $^1S_0$ -состоянии), ii)  $J = 1$ ,  $\mathcal{P} = +1$  (дейтрон, т. е. преимущественно  $^3S_1$ -состояние). В  $^1S_0$ -канале амплитуда БС имеет четыре парциальные волны, а именно  $^1S_0^{++}$ ,  $^1S_0^{--}$ ,  $^3P_0^{+-}$ ,  $^3P_0^{-+}$ . В  $^3S_1$ -канале, соответствующем дейтрону, амплитуда БС имеет следующие восемь парциальных компонент:  $^3S_1^{++}$ ,  $^3D_1^{++}$ ,  $^3S_1^{--}$ ,  $^3D_1^{--}$ ,  $^1P_1^{+-}$ ,  $^1P_1^{-+}$ ,  $^3P_1^{+-}$ ,  $^3P_1^{-+}$ , причем иногда более удобно использовать четные или нечетные комбинации гармоник вида

$$\Gamma^{P^e} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^{P^{+-}} + \Gamma^{P^{-+}}), \quad \Gamma^{P^o} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Gamma^{P^{+-}} - \Gamma^{P^{-+}}). \quad (10)$$

Явный вид гармоник может быть найден в [34], и так как они довольно громоздки, их использование в численных расчетах не всегда оправданно. Поскольку различные базисы всегда связаны между собой унитарными преобразованиями, то и коэффициенты разложений (7) и (9) также связаны друг с другом. Например, для дейтрона вектор-столбец  $Y$  из шести амплитуд  $Y^T = (\phi_{^1P_1^e}, \phi_{^3P_1^o}, \phi_{^3S_1^{++}}, \phi_{^3S_1^{--}}, \phi_{^3D_1^{++}}, \phi_{^3D_1^{--}})$  парциального разложения (9) связан с соответствующим столбцом разложения (7)  $X^T = (\psi_{a1}^0, \psi_{t1}^0, \psi_{p1}, \psi_{v1}, \psi_0^+, \psi_0^-, \psi_2^+, \psi_2^-)$ , где  $\psi_i^{\pm} = \sqrt{2}(\psi_{ti} \pm \psi_{ai}/2)$ , матрицей  $U$  ортогонального преобразования  $Y = U X$  [34]:

$$U = \frac{\eta}{2\sqrt{1+\eta^2}} \times \begin{pmatrix} -\frac{2}{\eta} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\eta} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} & \frac{1-\sqrt{1+\eta^2}}{3\eta} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1-\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1-\sqrt{1+\eta^2}}{3\eta} & \frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1-\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1-\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} & -\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} & \frac{1-\sqrt{1+\eta^2}}{3\eta} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{1-\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} & 0 & \frac{1-\sqrt{1+\eta^2}}{3\eta} & -\frac{1+\sqrt{1+\eta^2}}{\eta} \end{pmatrix}, \quad (11)$$



где  $\eta \equiv |\mathbf{p}|/m$ . В нерелятивистском пределе  $\eta \ll 1$ , т.е. матрица (11) преобразуется к диагональной форме  $U = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, -1, -1)$ . Оставшиеся две амплитуды равны  $\phi_{1P_1^0} = -2i\psi_{a1}^0$ ,  $\phi_{3P_1^e} = 4\psi_{t1}^0$ .

Следует отметить, что разложение (9) позволяет классифицировать парциальные амплитуды по их величине и относительному вкладу в данный процесс. Так, для дейтрона восемь компонент можно разделить на три группы: 1) две самые большие по величине компоненты с положительными  $\rho$ -спинами:  $\phi_{3S_1^{++}}$ ,  $\phi_{3D_1^{++}}$ , которые непосредственно связаны с нерелятивистскими  $S$ - и  $D$ -волнами, 2) четыре так называемые  $P$ -волны, с одним  $\rho$ -спином положительным и другим отрицательным:  $\phi_{1P_1^0}$ ,  $\phi_{3P_1^e}$ ,  $\phi_{1P_1^e}$ ,  $\phi_{3P_1^0}$ , 3) две пренебрежимо малые компоненты с обоими отрицательными  $\rho$ -спинами:  $\phi_{3S_1^{--}}$ ,  $\phi_{3D_1^{--}}$  (более подробно см. [34]). Так как отрицательные значения  $\rho$ -спина соответствуют  $v$ -спинорам, группы компонент 2 и 3 можно интерпретировать как вклады античастиц в состояние дейтрона. Поэтому условимся в дальнейшем называть группу 1 положительно-энергетическими компонентами (или волнами с положительной энергией), а группы 2 и 3 — отрицательно-энергетическими, или волнами с отрицательной энергией.

**1.2. Редукция уравнения Бете–Солпитера.** Реализация подхода БС затрудняется в основном техническими проблемами. Уравнение БС удается решить лишь для некоторых частных моделей взаимодействующих скалярных частиц [23, 36], а для спинорных частиц известны лишь два реалистических решения [28, 31]. Амплитуда БС зависит от 4-мерного относительного импульса  $k = (k_0, \mathbf{k})$ , так как обе частицы являются немассовыми. Но, с другой стороны, понятно, что область по  $k_0$ , особенно значимая для описания двухчастичных систем, сосредоточена вблизи  $k_0 \simeq 0$ . Этот факт указывает на возможность построения редукций уравнения БС.

Пояснить процедуру редукции можно следующим образом: запишем уравнение БС символически в виде

$$T = V + VGT = V + VgT + V(G - g)T, \quad (12)$$

где  $g$  — трехмерная аппроксимация к двухчастичному пропагатору. Это уравнение можно переписать в форме системы

$$\begin{aligned} T &= K + KgT, \\ K &= V + V(G - g)K, \end{aligned} \quad (13)$$

которая полностью эквивалентна исходному уравнению. Эту систему можно решить методом итераций, но в случае, когда разность  $G - g$  предполагается малой,  $K$  можно приравнять к  $V$ . Как правило, такое приближение и делается в известных схемах редукции.

Одно из самых известных уравнений, полученных таким способом, — уравнение Логунова–Тавхелидзе [37]. Оно получается из уравнения БС с

помощью следующей аппроксимации двухчастичного пропагатора:

$$g(s, k) = \frac{1}{4(2\pi)^3} \delta(k_0) \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m^2 - s/4)\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}.$$

В результате вместо (1) получается уравнение вида

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = V(\mathbf{k}, \mathbf{p}) - 2m^2 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{q})T(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{(\mathbf{q}^2 - \mathbf{k}^2)\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}. \quad (14)$$

Полный и прозрачный вывод можно найти в [38]. Это уравнение является более простым, и  $T$ -матрица (а соответственно, и вершинные функции) зависят уже только от трехимпульсов  $\mathbf{p}$ . Тем не менее оно релятивистское, в частности,  $T$ -матрица удовлетворяет релятивистскому условию унитарности в упругом канале. Кроме того, это уравнение ковариантно. Однако решение в системе покоя не позволяет рассчитать волновую функцию движущейся системы, так как оператор буста является динамическим.

Необходимо отметить, что из-за неоднозначности выбора трехмерной аппроксимации двухчастичного пропагатора  $g$  можно построить множество трехмерных уравнений [39]. Среди них можно упомянуть уравнения Кадышевского [40] и Гросса [41], которые с успехом применялись для исследования связанных состояний кварков.

Применительно к дейтрону наибольшая активность была предпринята группой под руководством Гросса [42]. В основе их подхода лежит предположение о том, что нуклон-нуклонные силы обусловлены релятивистскими одномезонными обменами. Для расчета фазовых сдвигов в  $NN$ -взаимодействии и вычисления волновых функций дейтрона учитывались 6 мезонов: скалярные, псевдоскалярные и векторные. В этом методе волновая функция дейтрона содержит 4 компоненты: помимо стандартных  $S$ - и  $D$ -волн появились две  $P$ -волны — синглетная и триплетная, которые, несмотря на малость по сравнению с основными, дают заметный вклад в наблюдаемые характеристики процессов с участием дейтрона.

Недавно также была предложена трехмерная редукция уравнения БС на поверхность светового фронта [43]. Она основана на уравнениях типа (13), которые решались методом итераций без приближения  $K = V$ . Была рассмотрена модель скалярных частиц в лестничном приближении, для которой имеется точное численное решение уравнения БС. Такая редукция дала возможность сравнить полученные решения приближенного уравнения с точным. Эти результаты представляют интерес, так как динамические модели на поверхности светового фронта интенсивно обсуждаются в последние годы, но их обоснование лежит в несколько иной плоскости (см. ниже).

**1.3. Релятивистская квантовая механика.** Релятивистская квантовая механика основана на обычной квантовой механике с фиксированным числом

частиц. В подходе БС и в трехмерных релятивистских уравнениях число частиц не сохраняется и в рассмотрение вовлекаются состояния с отрицательной энергией, что естественно для полевых теорий. В релятивистской квантовой механике античастицы исключены, и в этом ее главное отличие от упомянутых подходов.

Состояния в релятивистской квантовой механике — это векторы в гильбертовом пространстве, первоначально определенные на некоторой гиперповерхности в пространстве Минковского. Дирак [44] выделил несколько форм динамики в зависимости от выбранной гиперповерхности. В каждой из перечисленных ниже форм некоторые из 10 генераторов группы Пуанкаре смещают векторы состояний с начальной поверхности, и для вычисления их действия надо решать динамические уравнения, а другие оставляют вектор состояния в пределах поверхности (и называются кинематическими).

- Гиперповерхность задается уравнением  $t = 0$  (*instant form*). Генераторы импульса  $P_i$  и момента импульса  $L_j$  — кинематические, генераторы буста  $K_k$  содержат взаимодействие, а динамика системы определяется гамильтонианом  $H$ .

- Гиперповерхность определяется световым фронтом  $x^- = x - t = 0$  (*light front form*). Кинематическими являются генераторы  $P^+ = H + P_3$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $L_3$ ,  $K_3$ , а также  $K_\perp - z \times L$ . Динамика системы определяется генератором  $H - P_3$  вдоль оси  $x^+$ .

- Гиперповерхность определяется гиперboloидом  $x^2 - t^2 = \text{const}$  (*point form*). Генераторы  $L_k$  и  $K_j$  — кинематические, динамика содержится в генераторах  $P_i$  и  $H$ . Динамика системы определяется генератором  $H$ .

Отметим, что форма светового фронта содержит наибольшее число кинематических генераторов, а именно 7, поэтому она представляется наиболее интересной для практической реализации.

Динамическое уравнение в релятивистской квантовой механике получают обычно методом, предложенным Бакамжаном и Томасом в [45]. Поясним его на примере динамики мгновенной формы. Идея заключается во введении 10 вспомогательных операторов  $P, X, J, M$ , где  $J$  — спин системы,  $X = -i\nabla P$ , а  $M$  — массовый оператор. Предполагается также, что взаимодействие входит в массовый оператор аддитивно, а остальные операторы имеют тот же вид, что и в системе без взаимодействия. Физическое состояние должно являться собственным для массового оператора. Генераторы Пуанкаре тогда выражаются через эти операторы следующим образом:

$$H = \sqrt{P^2 + M^2}, \quad L = j + X \times P, \quad K = -\frac{1}{2}\{H, X\} - \frac{P \times j}{H + M}. \quad (15)$$

Применительно к системе двух частиц, например нуклонов с массой  $m$  и относительным импульсом  $\mathbf{k}$ , уравнение на собственные состояния принимает

вид

$$[4(k^2 + m^2) + V]|\Psi\rangle = \lambda^2|\Psi\rangle, \quad (16)$$

который можно привести к обычному уравнению Шредингера переопределением константы  $\lambda$ . Принимая во внимание, что такое уравнение с феноменологическим потенциалом  $V$  адекватно воспроизводит свойства нуклон-нуклонной системы, включая фазы рассеяния, можно заключить, что *при сделанных предположениях* реализация подхода достигнута.

Такую же процедуру можно применить и для динамики на световом фронте [46]. Динамические генераторы зависят от массового оператора следующим образом:

$$P_- = \frac{M^2 + P_{\perp}^2}{P_+}, \quad (17)$$

и оказывается возможным получить связь с уравнением Шредингера.

Итак, динамическое уравнение оказалось нерелятивистским уравнением Шредингера с феноменологическим потенциалом. Но привлекательность динамики на световом фронте состоит в том, что буст вдоль этой поверхности легко учесть. Это важно, например, при расчете формфакторов дейтрона [47]. Однако наличие динамического генератора  $J_{\perp}$  приводит к нарушению инвариантности относительно вращения вдоль оси, перпендикулярной к поверхности светового фронта, так называемого углового условия [48]. Оно обычно выводится из требования, что матричный элемент в брейтовской системе с передачей спиральности больше единицы должен обращаться в нуль. И хотя нарушение углового условия по оценкам невелико (оно характеризуется безразмерным параметром  $Q/2M$ , где  $Q$  — переданный импульс), это приводит к неоднозначностям в выделении формфакторов [49].

Несмотря на то, что теории, основанные на динамике светового фронта, не лишены некоторых внутренних противоречий, они широко применяются в расчетах различных процессов в физике малочастичных систем. В то же время продолжают исследования самого подхода и его связи с другими релятивистскими методами [50].

Особого внимания заслуживает еще один метод описания дейтрона, привлекающий динамику на поверхности светового фронта, развиваемый В. А. Кармановым [51]. Поверхность светового фронта задается уравнением  $\omega x = 0$ , где 4-вектор  $\omega = (\omega_0, \mathbf{n})$  предполагается произвольным, но удовлетворяющим условию  $\omega^2 = 0$ . Теория, таким образом, становится ковариантной, и хотя операторы и векторы состояний зависят от ориентации поверхности светового фронта, эту зависимость из наблюдаемых величин можно исключить. Волновые функции двухчастичных систем зависят не только от относительного импульса  $\mathbf{k}$ , но и от вектора  $\mathbf{n}$ , точнее, от скалярных произведений  $\mathbf{k}^2$ ,  $(\mathbf{k}\mathbf{n})$ , и для описания двухнуклонной системы в  $^1S_0$ -состоянии необходимо учитывать две компоненты, а дейтрон описывается шестью функциями

(вместо двух в нерелятивистских подходах). Вычисление таких функций представляет непростую, но вполне решаемую задачу [52]. Необходимо отметить, что этот ковариантный подход оказался весьма успешным для описания электромагнитных формфакторов дейтрона [53].

**1.4. Эффективные теории.** Одна из основных задач ядерной физики — выяснение природы взаимодействия нуклонов. В обсуждавшихся подходах нуклон-нуклонное взаимодействие описывалось в рамках модели одномезонного обмена. Если следовать идеям хромодинамики, то ядерные силы обусловлены остаточным сильным взаимодействием между бесцветными нуклонами. Прямой вывод этих сил в рамках современной КХД невозможен из-за существенно непертурбативного характера процессов при низких энергиях. Поэтому феноменологические подходы остаются значимыми в ядерной физике.

Киральная теория возмущений основана на приближенной и спонтанно нарушенной киральной симметрии КХД. Основываясь на наиболее общем эффективном лагранжиане для голдстоуновских частиц (пионов) и полей материи (нуклонов,  $\Delta$ -изобар), можно получить матричный элемент нужного процесса, выражающийся через внешние импульсы и массы кварков.

Эффективные теории хорошо работают, если шкалы больших и малых расстояний в достаточной степени разделены. Обозначим такую границу  $M_0$ . Тогда на малых расстояниях физика процессов исследуется через разложение величин по степеням  $E/M_0$ . Применительно к нуклон-нуклонному взаимодействию в литературе обсуждаются две шкалы. В первой, так называемой беспионной,  $M_0$  выбирается равным  $m_\pi$ . В этой теории нуклоны взаимодействуют напрямую (без мезонов), и она работает только при очень низких энергиях. Во второй  $M_0 \sim m_\rho$ , и в этом подходе делаются попытки описать взаимодействия нуклонов до энергий порядка массы  $\rho$ -мезона, используя мезон-нуклонное взаимодействие, определяемое киральной симметрией. Более точно, если величина относительного импульса в системе центра масс  $|\mathbf{p}| < \frac{M_0}{2}$ , а кинетическая энергия нуклона  $E_{\text{lab}} < \frac{M_0^2}{2m}$ , то при  $E_{\text{lab}} < 10$  МэВ работает беспионная теория, а при  $E_{\text{lab}} < 320$  МэВ — киральная теория возмущений.

В простейшей безмезонной эффективной теории лагранжиан нуклон-нуклонного взаимодействия в любом парциальном канале ( $^1S_0, ^3S_1 - ^3D_1, \dots$ ) записывается в виде

$$\mathcal{L} = C_0(\psi^T P_i \psi)^\dagger (\psi^T P_i \psi) + \frac{1}{2} C_2 [(\psi^T P_i \psi)^\dagger (\Delta^2 \Psi^T P_i \Psi + \psi^T P_i \Delta^2 \psi + 2\Delta \psi^T P_i \Delta \psi) + \text{h. c.}] + \dots, \quad (18)$$

где  $\psi$  — оператор нуклонного поля (индекс  $T$  означает транспонирование);  $P_i$  — проекционные операторы, выделяющие определенный канал, а  $C_0, C_2, \dots$  — коэффициенты. Существенной особенностью лагранжиана (18)

является его перенормируемость. Амплитуда рассеяния, определяемая (18), есть сумма петлевых диаграмм, которые регуляризуются в схеме размерной регуляризации с вычитанием степенных расходимостей, и в низшем порядке она имеет вид

$$\mathcal{M} = \frac{C_0(\mu)}{1 + \frac{m}{4\pi} C_0(\mu)(\mu + ip)} = \frac{4\pi}{m} \frac{1}{p \cot \delta + ip}. \quad (19)$$

Из этих формул могут быть извлечены длины рассеяния и волновые функции дейтрона.

Теория эффективного радиуса, предложенная Бете [54], — это ранняя версия того, что впоследствии стало называться беспионной эффективной теорией, а современная киральная теория возмущений для описания нуклон-нуклонного взаимодействия основана на идее Вайнберга [55]. В сущности, предложения Вайнберга можно сформулировать так:

- Исходя из предложенного эффективного лагранжиана необходимо выбрать все значимые для заданного процесса диаграммы.
- Из-за расходимости петлевых диаграмм необходимо сделать перенормировку. Практически это означает включение в лагранжиан контрчленов.
- Каждая диаграмма связана со степенью малой величины внешнего импульса или массы мезона, и надо определить степенной счет. Он может быть связан со схемой перенормировок.
- Если перенормированная константа связи естественна, то тогда высшие степени малых параметров будут подавлены. Для того чтобы получить интересующую физическую характеристику, надо выбрать все перенормированные диаграммы до заданного порядка и просуммировать.

Необходимо заметить, что расчеты в эффективных теориях выполняются обычно для относительно малых импульсов взаимодействующих частиц. В последние годы были выполнены расчеты фаз нуклон-нуклонного рассеяния в различных парциальных волнах до  $T_{\text{lab}} < 300$  МэВ в различных регуляризационных схемах, а также электромагнитные характеристики дейтрона, включая формфакторы [56].

## 2. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БС

**2.1. Метод исчерпывания.** Весьма распространенными являются методы получения решений интегральных уравнений, основанные на итерациях пробной функции. Их разновидности применяются как для однородных, так и для неоднородных уравнений БС. Особенно успешно такие методы применимы к нахождению основного состояния системы. Напомним, что в УБС энергия входит нелинейно, и здесь задача на собственное значение энергии заменяется

на задачу нахождения собственных значений и собственных функций некоторого линейного параметра, например константы мезон-нуклонного взаимодействия. Этот метод эффективен в случае, когда система двух частиц обладает единственным уровнем энергии (дейтрон) или когда в рассматриваемой задаче существенным является только основное состояние системы. Однако зачастую предметом экспериментального и теоретического исследования являются возбужденные состояния системы. Например, детальное исследование спектра  $J/\Psi$ -частицы как связанного состояния кварк-антикварковой пары дает уникальную информацию о природе сильного взаимодействия в области, где пертурбативные методы КХД неприменимы. Здесь для ковариантного анализа связанных систем широко используются эффективные модели и среди них особую роль играют основанные на формализме БС. Следовательно, задача разработки строгих математических методов нахождения всего спектра связанных состояний весьма актуальна не только с точки зрения ковариантного описания двухчастичных систем в традиционных мезонных и нуклонных степенях свободы, но также и для разработки кварковых моделей в пертурбативной области КХД.

Ниже на примере скалярного УБС со скалярным обменом рассматривается в деталях один из таких методов, известный как метод исчерпывания [57]. Итак, если частицы  $A$  и  $B$  скалярные, то вместо уравнения типа (5) получим для простейшего случая обмена одним мезоном следующее:

$$\varphi_{JM}(p) = i g^2 S(p_1)S(p_2) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-p')^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \varphi_{JM}(p'), \quad (20)$$

где масса системы определена как  $M_B^2 = (p_1 + p_2)^2 \equiv P^2$ , относительный импульс  $p = (p_1 - p_2)/2$ , а  $S(p) = 1/(p^2 - m^2 + i\varepsilon)$  обозначает пропагатор скалярной частицы. Здесь в явном виде указаны полный угловой момент состояния и его проекция  $JM$  в системе покоя. Далее, в этом уравнении можно перейти от амплитуды  $\varphi_{JM}(p)$  к вершинной функции  $\mathcal{G}_{JM}(p)$ , где  $\varphi_{JM}(p) = S(p_1)\mathcal{G}_{JM}(p)S(p_2)$ . Тогда после поворота Вика получим

$$\mathcal{G}_{JM}(p) = \lambda \int d^4 p'_E K_E(p, p'; M_B) \mathcal{G}_{JM}(p'), \quad (21)$$

$$K_E(p, p'; M_B) = \frac{1}{(2\pi)^4} D_E(p'_0, |\mathbf{p}'|) \frac{1}{(p-p')_E^2 + \mu^2}, \quad (22)$$

где  $p_E^2 \equiv p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ . В данном случае

$$D_E^{-1}(p_0, |\mathbf{p}|) = \left( E_p^2 + p_0^2 - \frac{1}{4} M_B^2 \right)^2 + p_0^2 M_B^2, \quad (23)$$

где  $E_p = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$ , а  $p_0$  — нулевая компонента евклидова 4-вектора  $p_E$ . Очевидно, что уравнение (21) нелинейно относительно массы связанного состояния  $M_B$ , тогда как параметр  $\lambda = g^2$  входит в него линейно. Поэтому при фиксированной массе  $M_B$  мы можем рассматривать (21) как уравнение на собственные значения  $\lambda_{iJ} = g_{iJ}^2$  и соответствующие им собственные функции  $\mathcal{G}_{JM}^i(p)$ , в полной аналогии с задачей о спектре уравнения Фредгольма [32]. Совокупность всех значений  $\lambda_{iJ} \equiv \lambda_{iJ}(M_B)$  при фиксированной массе связанного состояния  $M_B$  мы будем называть спектром уравнения (21) по константе связи. Оказывается, что между энергетическим спектром и спектром по константе связи можно установить определенное соответствие, и при этом физическая задача вычисления энергетического спектра при заданном  $g$  сводится к вычислению спектра  $\lambda_{iJ}(M_B)$  при всех допустимых  $M_B$ ,  $0 \leq M_B \leq 2m$ . Таким образом, задача сводится к разработке подходящего метода определения спектра по константе связи  $\lambda_{iJ}(M_B)$ . Основываясь на строгих результатах теории Гильберта–Шмидта симметричных интегральных уравнений [32], можно показать, что справедливы следующие положения [57]:

1. Спектр уравнения (21) является дискретным и вещественным, а собственные значения  $\lambda_{iJ}$  образуют неубывающую последовательность:  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots \leq |\lambda_{n-1}| \leq |\lambda_n| \leq \dots$

2. Последовательность собственных функций  $\mathcal{G}_{JM}^i(p)$  и соответствующих им амплитуд  $\varphi_{JM}^i(p)$  образует биортогональный базис с соотношением ортогональности

$$\int d^4p \varphi_{JM}^{i*}(p) \mathcal{G}_{J'M'}^j(p) = \delta_{ij} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}. \quad (24)$$

3. Ядро  $K_E(p, p'; M_B)$  может быть представлено в виде билинейного ряда Гильберта–Шмидта:

$$K_E(p, p'; M_B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{JM} \frac{1}{\lambda_{iJ}} \mathcal{G}_{JM}^i(p) \varphi_{JM}^{i*}(p'). \quad (25)$$

Приведем теперь формулы, которые потребуются непосредственно для изложения численного метода. Парциальное разложение вершины БС  $\mathcal{G}_{JM}^i(p)$  имеет вид

$$\mathcal{G}_{JM}^i(p) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} G_J^i(\tilde{p}) Y_{JM}(\Omega_p), \quad (26)$$

где введено обозначение для пары аргументов:  $\tilde{p} = (p_0, |\mathbf{p}|)$ . После парциального разложения уравнения (21) получим [57]:

$$G_J^i(\tilde{p}) = \lambda_{iJ} \int d\tilde{p}' K_E^J(\tilde{p}; \tilde{p}'; M_B) G_J^i(\tilde{p}'), \quad (27)$$



$$K_E^J(\tilde{p}; \tilde{p}'; M_B) = \frac{1}{(2\pi)^3} D_E(\tilde{p}') Q_J(y_\mu), \quad (28)$$

где  $d\tilde{p} = dp_0 d|\mathbf{p}|$ ,  $Q_J(y_\mu)$  — обобщенные функции Лежандра от аргумента

$$y_\mu(p, p') = \frac{\mu^2 + \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2 + (p_0 - p'_0)^2}{2|\mathbf{p}| |\mathbf{p}'|}. \quad (29)$$

Из соотношения (24) следует, что парциальные амплитуды и вершинные функции также образуют ортонормированный базис:

$$\int d\tilde{p} G_J^i(\tilde{p}) \varphi_J^j(\tilde{p}) = \delta_{ij}. \quad (30)$$

Следовательно, в соответствии с формулой (25) для ядра (28) справедливо билинейное разложение

$$K_E^J(\tilde{p}; \tilde{p}'; M_B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{iJ}} G_J^i(\tilde{p}) \varphi_J^i(\tilde{p}'). \quad (31)$$

Теперь можно сформулировать численный метод нахождения спектра по константе связи уравнения (21). Для этого необходимо вычислить спектры уравнения (27) при всех значениях  $J$ . Основой метода, излагаемого здесь, является разложение (31). Зафиксируем значения  $J$  и  $M_B$  и рассмотрим задачу определения наименьшего собственного значения  $\lambda_{1J}$  уравнения (27). В краткой форме это уравнение имеет вид

$$\alpha_{iJ} G_J^i = K_E^J G_J^i, \quad (32)$$

где  $\alpha_{iJ} = 1/\lambda_{iJ}$ . Первоначально неизвестны ни  $\lambda_{1J}$ , ни  $G_J^1$ . Выберем некоторое нулевое приближение — функцию  $\chi(\tilde{p})$  и построим последовательность функций  $K_E^J \chi$ ,  $(K_E^J)^2 \chi, \dots$ ,  $(K_E^J)^n \chi, \dots$ . Функцию  $\chi$  можно разложить по полному набору функций  $G_J^i$ :

$$\chi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i G_J^i, \quad (33)$$

где, в соответствии с (30),  $c_i = \int d\tilde{p} \varphi_J^i(\tilde{p}) \chi(\tilde{p})$ . Из формул (33) и (32) следует

$$\begin{aligned} K_E^J \chi &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ} G_J^i, \\ (K_E^J)^2 \chi &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ}^2 G_J^i, \dots, \\ (K_E^J)^n \chi &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ}^n G_J^i, \dots \end{aligned}$$

На каждом шаге  $n$  составляется отношение  $(K_E^J)^n \chi / (K_E^J)^{n-1} \chi$ :

$$\frac{(K_E^J)^n \chi}{(K_E^J)^{n-1} \chi} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ}^n G_J^i}{\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{iJ}^{n-1} G_J^i} = \alpha_{1J} \frac{c_1 G_J^1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i \left( \frac{\alpha_{iJ}}{\alpha_{1J}} \right)^n G_J^i}{c_1 G_J^1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i \left( \frac{\alpha_{iJ}}{\alpha_{1J}} \right)^{n-1} G_J^i}. \quad (34)$$

Среди всех собственных значений величина  $\lambda_{1J}$  является наименьшей, следовательно,  $\alpha_{1J}$  — наибольшее из всех  $\alpha_{iJ}$ , и тогда для всех  $i > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha_{iJ}}{\alpha_{1J}} \right)^n = 0, \quad (35)$$

то есть, если  $c_1 \neq 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(K_E^J)^n \chi}{(K_E^J)^{n-1} \chi} = \alpha_{1J}. \quad (36)$$

Итак, для того чтобы вычислить значение  $\alpha_{1J}$ , нужно найти отношение (34) при достаточно большом  $n$ . Вершинная функция  $G_J^1$  может быть найдена при помощи того же процесса (34). В самом деле, легко заметить, что при больших  $n$  главный вклад в разложение  $(K_E^J)^n \chi$  будет давать слагаемое с  $G_J^1$ , и, если в последовательности (34) на каждом шаге сохранять неизменной норму выражения  $(K_E^J)^n \chi$ , то эта последовательность сойдется к функции  $\text{const} \cdot G_J^1$ . Отметим, что описанный метод вычисления наименьшего собственного значения  $\lambda_{1J} = 1/\alpha_{1J}$  и собственных функций  $G_J^1$  является, несмотря на свою простоту, весьма эффективным и устойчивым по отношению к функции нулевого приближения  $\chi$ .

Покажем теперь, как, умея вычислять для заданного ядра уравнения только его наименьшее собственное значение, найти первые  $N$  собственных значений  $\lambda_{1J}, \lambda_{2J}, \dots, \lambda_{NJ}$  и соответствующие им собственные функции уравнения (27). Предположим, что для заданного ядра  $K_E^J$  найдено  $\lambda_{1J}$  и  $G_J^1$ . Построим теперь новое ядро  $K_E^{J,1}$ :

$$\begin{aligned} K_E^{J,1}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) &= K_E^J(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) - \frac{1}{\lambda_{1J}} G_J^1(\tilde{p}) \varphi_J^1(\tilde{p}') = \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{iJ}} G_J^i(\tilde{p}) \varphi_J^i(\tilde{p}'). \end{aligned} \quad (37)$$

Из последнего соотношения следует, что все собственные функции  $G_J^i$  ядра  $K_E^J$ , кроме  $G_J^1$ , являются собственными функциями ядра  $K_E^{J,1}$  с теми же собственными значениями  $\lambda_{iJ}$ . При этом наименьшим собственным значением

ядра  $K_E^{J,1}$  является уже  $\lambda_{2J}$ . Теперь можно применить к ядру  $K_E^{J,1}$  описанный выше способ нахождения наименьшего  $\lambda_{2J}$  и соответствующей ему  $G_J^2$ . Вычислив эти величины, построим следующее ядро  $K_E^{J,2}$ :

$$K_E^{J,2}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) = K_E^{J,1}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) - \frac{1}{\lambda_{2J}} G_J^2(\tilde{p}) \varphi_J^2(\tilde{p}') = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{iJ}} G_J^i(\tilde{p}) \varphi_J^i(\tilde{p}'), \quad (38)$$

у которого, очевидно, наименьшим собственным значением является уже  $\lambda_{3J}$ , и т. д. Эта процедура и есть суть метода исчерпывания. Таким образом, метод исчерпывания состоит в нахождении наименьших собственных значений и соответствующих им собственных функций у последовательности ядер, которые выражаются друг через друга рекуррентным соотношением:

$$K_E^{J,n}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) = K_E^{J,n-1}(\tilde{p}, \tilde{p}'; M_B) - \frac{1}{\lambda_{nJ}} G_J^n(\tilde{p}) \varphi_J^n(\tilde{p}') = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{iJ}} G_J^i(\tilde{p}) \varphi_J^i(\tilde{p}'). \quad (39)$$

**Вычисления и результаты.** В методических целях были получены энергетические спектры и спектр по константе взаимодействия уравнения (21) по методу исчерпывания для модельной системы  $A$  и  $B$  с эффективными параметрами:  $m_A = m_B = 1$  ГэВ,  $\mu = 1$  кэВ. Это уравнение рассматривалось на гауссовской сетке  $32 \times 32$  для трех значений полного углового момента  $J = 0, 1, 2$  (детали вычислений см. в [57]). При этом были вычислены только первые два уровня по константе связи, т. е.  $i = 1, 2$  («основное» и «первое возбужденное» состояния). На рис. 1 представлены полученные зависимости спектральных значений  $g_{iJ}(M_B)$ . Кривые, обозначенные цифрами 0, 1 и 2, являются решениями уравнения Бете–Солпитера для значений углового момента системы  $J = 0, 1$  и 2 соответственно; сплошным кривым соответствует  $i = 1$ , пунктирным —  $i = 2$ . Может показаться, что в пределах ошибки вычислений кривые  $g_{1J}(M_B)$  и  $g_{2,J-1}(M_B)$ ,  $J = 1, 2$ , совпадают, т. е. имеется вырождение уровней по константе связи. Этот вопрос был детально исследован (путем вычислений на сетках Гаусса большей размерности  $48 \times 48$ ,  $64 \times 64$ ). Было установлено, что эти кривые не совпадают и не пересекаются, а сохраняют свое поведение во всем исследованном интервале  $M_B$ . Отметим, что кривые  $g(M_B)$  с аналогичным поведением были получены в работе [58] для спинор-спинорного уравнения БС. Имея теперь зависимость  $g(M_B)$ , легко установить энергетический спектр связанных состояний системы  $A + B$ : для этого необходимо зафиксировать некоторое постоянное значение  $g = g_0$  и определить, каким массам системы оно соответствует. На рис. 1 это продемонстрировано на примере  $g_0 = 10$ : точки пересечения горизонтальной

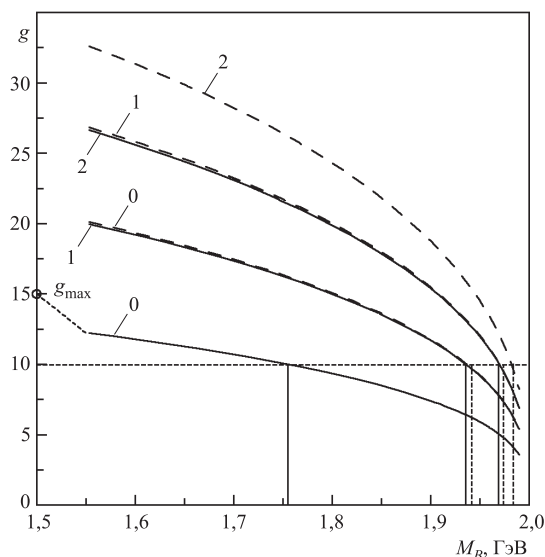


Рис. 1. Зависимость спектральных значений константы взаимодействия  $g_{iJ}(M_B)$  для системы из двух скалярных частиц, взаимодействующих путем скалярного обмена, для значений углового момента системы  $J = 0, 1$  и  $2$

пунктирной линии с кривыми  $g_{iJ}(M_B)$  определяют значения  $M_B^{nJ}$  основного и возбужденных состояний (сплошные и пунктирные вертикальные линии). Отметим, что в соответствии с полученными численными результатами для функций  $G_J^i(p_0, |\mathbf{p}|)$  кривую  $g_{10}(M_B)$  можно назвать кривой основного радиального состояния системы при  $J = 0$ , кривую  $g_{20}(M_B)$  — кривой первого радиального возбуждения при  $J = 0$  и т. д., так как при каждом значении  $M_B$  при любом  $p_0$  и  $|\mathbf{p}| > 0$  соответствующая функция  $G_0^1(p_0, |\mathbf{p}|)$  не имеет нулей (узлов) по  $|\mathbf{p}|$ , функция  $G_0^2(p_0, |\mathbf{p}|)$  имеет один узел, функция  $G_0^3(p_0, |\mathbf{p}|)$  — два узла. . . Таким образом, здесь прослеживается точная аналогия с поведением решений радиального уравнения Шредингера, например, с кулоновским потенциалом. Эта аналогия позволяет сделать вывод о том, что физическое значение константы взаимодействия  $g_0$  не должно превышать  $g_{\max} = g_{10}(0)$ , так как в противном случае получающийся спектр состояний не будет содержать, по крайней мере, основного радиального состояния при  $J = 0$ , что выглядит физически бессмысленным.

В заключение отметим, что состояния с более высокими, чем рассмотренные, значениями  $J$  и  $i$  ( $J > 2$ ,  $i > 2$ ) могут быть рассчитаны по методу исчерпывания без затруднений и с той же степенью точности. Таким образом, предложенный метод позволяет найти в ковариантном подходе весь энергетический спектр связанного состояния.

**Спинорные уравнения.** Применительно к спинорным уравнениям итерационная процедура использовалась нами для нахождения только основного состояния системы, т. е. возбужденные состояния не рассматривались. Однородные спинорные уравнения для системы двух нуклонов применялись для построения модели дейтрона. Простейшая модель — это связанное состояние двух нуклонов, взаимодействующих путем обмена скалярным мезоном, когда в уравнении (5) ядро состоит из единственного  $\sigma$ -мезонного обмена и  $\gamma_\sigma = 1$ . Она была рассмотрена в [33] с целью анализа работоспособности численного метода и выяснения основных физических свойств решений. Отметим, что в отличие от скалярного случая учет спина приводит к существенно более громоздким вычислениям, хотя принципиальных математических трудностей не представляет.

Ясно, что полномасштабное описание всех свойств дейтрона в модели скалярного обмена невозможно. С другой стороны, известно, что дейтрон — слабосвязанная система и находится преимущественно в  $S$ -состоянии (вероятность  $D$ -состояния составляет несколько процентов), так что в рамках этой модели можно ожидать удовлетворительного описания по крайней мере неполяризованных сечений в реакциях с его участием. Это положение подтверждено в работе [33], где приведен расчет реакции  $pD \rightarrow pX$ . Также там показано, что в этом случае абсолютно невозможно добиться согласия с экспериментальными данными по поляризационным характеристикам, таким как тензорная анализирующая способность  $T_{20}$ , что прямо указывает на необходимость более реалистической модели дейтрона. Такая модель, основанная на уравнении (5) со всеми перечисленными мезонными обходами, исследована в работах [28]. Парциальная система уравнений, соответствующая дейтрону, численно решалась описанным выше методом, и в работе [59] приведена параметризация решения. Именно его мы будем в дальнейшем именовать реалистическим и использовать в расчетах наблюдаемых величин  $pD$ -реакций.

Необходимо отметить, что расчеты релятивистских уравнений такого рода выполнялись в мировой практике очень небольшим числом авторов. Это обусловлено прежде всего громоздкостью соответствующего формализма и потребностью в больших вычислительных мощностях. Так, в работах [31, 60] были представлены результаты численного решения уравнения БС для  $T$ -матрицы двухнуклонной системы, в котором ядро взаимодействия также представлялось в виде суммы одномезонных обменов. Здесь неоднородное уравнение БС рассматривалось при помощи известного метода паде-аппроксимаций, приводящего к существенной экономии компьютерных ресурсов. При этом параметры ядра (константы связи мезонов  $g_b$  и параметры формфакторов) определялись из подгонки фаз  $NN$ -рассеяния и энергии связи дейтрона. Уравнение (5) было решено для значений параметров ядра, очень близких к полученным в [60].

Отметим также, что возбужденные состояния связанных систем спиновых частиц также могут быть исследованы по методу исчерпывания, так как в случае лестничного приближения ядро спинового уравнения БС имеет структуру, сходную с (25) (детали см. в [57]).

**2.2. Приближение одной итерации.** Итерационный метод решения уравнений БС в лестничном приближении демонстрирует достаточно быструю сходимость для произвольного выбора функции нулевого приближения. Опыт численного решения показывает, что даже при произвольном выборе пробной функции результат пятой или шестой итерации оказывается достаточно близким к точному решению в достаточно большом интервале изменения переменных  $p_0$  и  $|\mathbf{p}|$ , а дальнейшие итерации сводятся, в основном, к уточнению поведения на асимптотике. Однако осмысленный выбор пробной функции может существенно ускорить сходимость процесса, чтобы уже первая итерация обеспечивала вполне удовлетворительное решение УБС, и это положение является исходным для формулировки метода (или приближения) одной итерации. Суть его вкратце такова.

Как уже упоминалось, парциальные компоненты *спиновой* амплитуды БС делятся на положительно- и отрицательно-энергетические, причем первые лидируют по абсолютной величине. Более того, для них оказывается возможным построить нерелятивистские аналоги, что будет в подробностях обсуждаться также при анализе  $pD$ -реакций. Например, в случае дейтрона из восьми парциальных вершинных функций  $G_{1-8}$  (см. комментарии после формулы (9)), две из них,  $G_1$  и  $G_3$ , соответствующие состояниям  ${}^3S_1^{++}$  и  ${}^3D_1^{++}$ , являются доминирующими. Из них можно построить следующие величины, именуемые волновыми функциями БС [34, 42, 61]:

$$U(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2M_D}} \frac{G_1(p_0, |\mathbf{p}|)}{2E_p - M_D}, \quad W(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2M_D}} \frac{G_3(p_0, |\mathbf{p}|)}{2E_p - M_D}, \quad (40)$$

где  $p_0 = \frac{1}{2}M_D - E_p$ . Численный анализ показывает [34], что функции  $U(|\mathbf{p}|)$  и  $W(|\mathbf{p}|)$  при малых и средних  $|\mathbf{p}|$  (до нескольких сотен МэВ) с хорошей точностью совпадают с широко известными нерелятивистскими  $S$ - и  $D$ -волнами в дейтроне  $u(|\mathbf{p}|)$  и  $w(|\mathbf{p}|)$ , т. е. являются их релятивистскими аналогами. Для  $P$ -компонент  ${}^3P_1^{+-}$ ,  ${}^3P_1^{-+}$ ,  ${}^1P_1^{+-}$  и  ${}^1P_1^{-+}$  также определяются волновые функции БС через их вершинные функции  $G_5$ ,  $G_6$ ,  $G_7$  и  $G_8$  в виде

$$\Psi_{P_5}(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2M_D}} \frac{G_5(p_0, |\mathbf{p}|)}{M_D}, \quad \Psi_{P_7}(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2M_D}} \frac{G_7(p_0, |\mathbf{p}|)}{M_D}, \quad (41)$$

$$\Psi_{P_6}(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2M_D}} \frac{G_6(p_0, |\mathbf{p}|)}{M_D}, \quad \Psi_{P_8}(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2M_D}} \frac{G_8(p_0, |\mathbf{p}|)}{M_D}, \quad (42)$$

причем функции (40) доминируют по абсолютной величине над (41) и (42). Поэтому совершенно ясно, что если в качестве нулевого приближения для

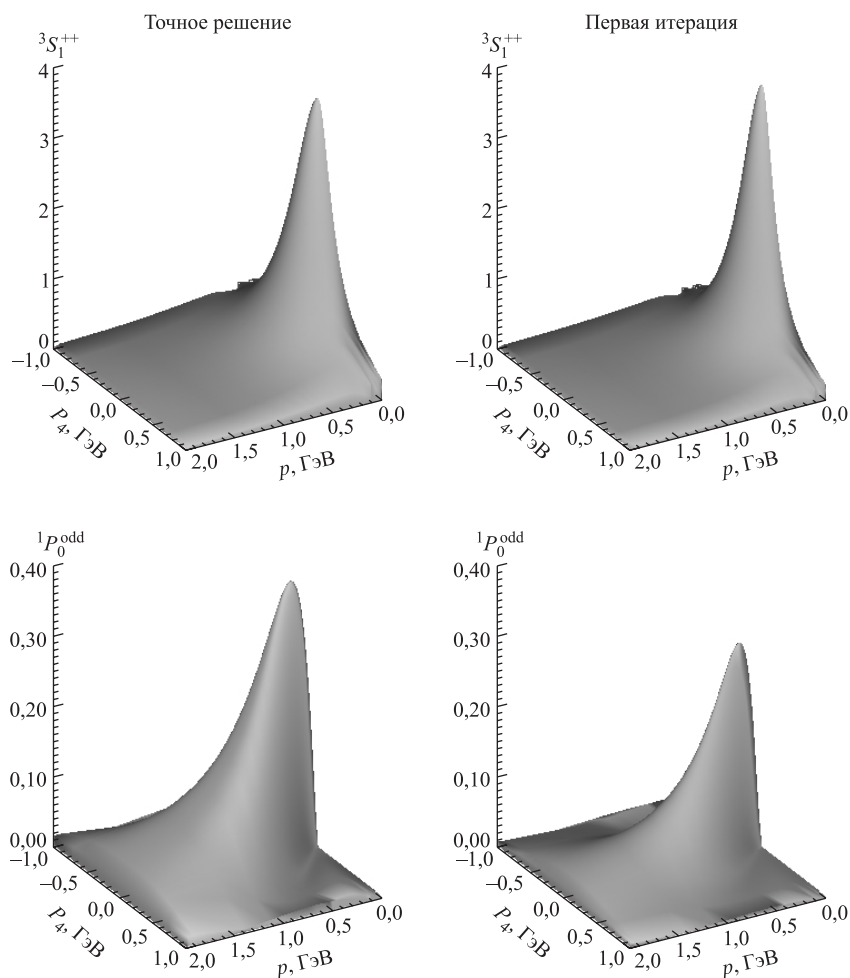


Рис. 2. Амплитуды точного численного решения в сравнении с полученными в приближении одной итерации

неизвестных вершин БС принять уже известные нерелятивистские функции (решения уравнения Шредингера с реалистическим потенциалом), то следует ожидать существенного улучшения сходимости итерационного процесса. При этом, в нулевом приближении, все отрицательно-энергетические компоненты необходимо приравнять к нулю, так как они существенно меньше главных по модулю. Эта качественная картина находит подтверждение в численных расчетах, причем во многих случаях уже первая итерация дает результат, близкий к окончательному [62], что проиллюстрировано на рис. 2.

Как было отмечено В. А. Кармановым [63] (см. также [64, 65]), замечательное свойство процедуры одной итерации заключается в том, что для некоторого класса ядер взаимодействия ее можно выполнить аналитически. Полученные в таком случае явные выражения для парциальных амплитуд позволяют более прозрачную интерпретацию природы  $P$ -волн в релятивистском описании дейтрона. Для этого уравнение БС (5) перепишем в эквивалентном виде

$$\mathcal{G}(k) = i \sum_b \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{g_b^2}{(p-k)^2 - \mu_b^2} \gamma_b \Psi(p) \gamma_b, \quad (43)$$

где, для простоты, значение углового момента  $J = 1$  и его проекция  $M$  в обозначении амплитуды  $\Psi$  и вершинной функции  $\mathcal{G}$  опущены. С использованием разложений  $\mathcal{G}(k)$  и  $\Psi(p)$  по полному набору спин-угловых гармоник  $\Gamma_\alpha$  (9) для парциальных вершинных функций получаем

$$G_\alpha(k_0, |\mathbf{k}|) = - \sum_b g_b^2 \int \frac{\mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}| dp_0}{4\pi^2} W_{\alpha\beta}(k, p) \phi_\beta(p_0, |\mathbf{p}|), \quad (44)$$

$$W_{\alpha\beta}(k, p) \equiv \sum_{lm} \frac{Q_l(z)}{2\pi |\mathbf{p}| |\mathbf{k}|} \int d\Omega_k d\Omega_p Y_{lm}(\mathbf{p}) Y_{lm}^*(\mathbf{k}) \text{Tr} [\Gamma_\alpha^+(-\mathbf{k}) \gamma_b \Gamma_\beta(\mathbf{p}) \gamma_b].$$

Эти выражения все еще соответствуют точному уравнению БС в лестничном приближении. Приближение одной итерации состоит в следующем:

1. Отрицательно-энергетические волны приравняем к нулю, т. е. в формулах (44) останутся только  $\phi_{3S_1^{++}}$  и  $\phi_{3D_1^{++}}$ .

2. В ядрах взаимодействия  $W_{\alpha\beta}$  и в вершинных функциях  $G_{++}$  пренебрегаем зависимостью от относительной энергии, т. е.

$$W_{\alpha\beta}(k, p) \simeq W_{\alpha\beta}(|\mathbf{k}|, |\mathbf{p}|), \quad G_{++}(k_0, |\mathbf{k}|) \simeq G_{++}(0, |\mathbf{k}|).$$

3. Отрицательно-энергетические волны получаем только одной итерацией уравнения (44).

В качестве примера рассмотрим случай только псевдоскалярного изовекторного взаимодействия ( $\pi$ -мезон). Парциальные ядра имеют следующий вид:

$$W_{P_1^{+-} \rightarrow S^{++}} = W_{P_1^{-+} \rightarrow S^{++}} = N [Q_0(y_\mu) |\mathbf{k}| - Q_1(y_\mu) |\mathbf{p}|], \quad (45)$$

$$W_{P_1^{+-} \rightarrow D^{++}} = W_{P_1^{-+} \rightarrow D^{++}} = N \sqrt{2} [Q_2(y_\mu) |\mathbf{k}| - Q_1(y_\mu) |\mathbf{p}|], \quad (46)$$

$$W_{P_3^{+-} \rightarrow S^{++}} = -W_{P_3^{-+} \rightarrow S^{++}} = N \sqrt{2} [-Q_0(y_\mu) |\mathbf{k}| + Q_1(y_\mu) |\mathbf{p}|], \quad (47)$$

$$W_{P_3^{+-} \rightarrow D^{++}} = -W_{P_3^{-+} \rightarrow D^{++}} = N [-Q_1(y_\mu) |\mathbf{p}| + Q_2(y_\mu) |\mathbf{k}|], \quad (48)$$



где  $N = -\sqrt{3}/(2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|E_k)$ ,  $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \sim m$ , а  $y_\mu = y_\mu(k, p)$  (см. (29)). Дальнейшие вычисления выполняются в координатном пространстве с использованием формул

$$\int \frac{\mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}|}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} [|\mathbf{k}|Q_0(y_\mu) - |\mathbf{p}|Q_1(y_\mu)] U(|\mathbf{p}|) = \int dr \frac{U(r)}{r} e^{-\mu r} (1 + \mu r) j_1(kr),$$

$$\int \frac{\mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}|}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} [|\mathbf{p}|Q_1(y_\mu) - |\mathbf{k}|Q_2(y_\mu)] W(|\mathbf{p}|) = - \int dr \frac{W(r)}{r} e^{-\mu r} (1 + \mu r) j_1(kr),$$

где  $U(|\mathbf{p}|)$  и  $W(|\mathbf{p}|)$  — волновые функции (40), а  $U(r)$  и  $W(r)$  — их координатное представление. Тогда для функций  $\Psi_{P_{5,7}}$  получим

$$\begin{aligned} \Psi_{P_{5,7}}(P_{\text{lab}}) &= \\ &= -g_{ps}^2 \frac{2\sqrt{3}}{M_D E_p'} \int_0^\infty dr \frac{e^{-\mu r}}{r} (1 + \mu r) j_1(r P_{\text{lab}}) [N_u U(r) + N_w W(r)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь  $U(r)$  и  $W(r)$  — нерелятивистские волновые функции дейтрона, константа пион-нуклонного взаимодействия  $g_{ps}^2 \equiv g_{\pi NN}^2 \approx 14,5$  и нормировочные множители  $N_u = \sqrt{2}$  (1) и  $N_w = -1$  ( $\sqrt{2}$ ) для функций  $\Psi_{P_5}$  ( $\Psi_{P_7}$ ).

Использование такого определения отрицательно-энергетических волн проясняет источник возникновения релятивистских поправок в нерелятивистских подходах как дополнительных вкладов от мезонных обменных токов и диаграмм рождения  $N\bar{N}$ -пар в диаграммы импульсного приближения. Конкретные примеры будут обсуждаться в следующих разделах. Кроме того, приближение одной итерации может быть также использовано для получения приближенного решения неоднородного уравнения БС, что будет выполнено ниже для случая  $pp$ -пары в  $^1S_0$ -состоянии при анализе процессов расщепления дейтрона и перезарядки на дейтроне.

**2.3. Гиперсферические гармоники.** Представленные методы численного исследования уравнений БС в целом следуют принципам, заложенным в работах [31, 60], где неоднородное спинорное уравнение БС было решено численно на двумерной гауссовской сетке. Хотя нет оснований сомневаться в правильности полученных результатов, следует отметить два существенных обстоятельства. Во-первых, можно убедиться путем непосредственных расчетов, что неудачный выбор двумерной сетки интегрирования сильно влияет на конечный результат (решение уравнения), а для ее выбора нет четких критериев. Иными словами, нет единственной оптимальной двумерной замены переменных, чтобы перейти в парциальных уравнениях БС от бесконечных пределов интегрирования к конечным. Однако именно она определяет эффективность сетки интегрирования, традиционно выбираемой как гауссовская по каждой переменной. В сущности, такая замена определяется подбором, зачастую в ходе весьма утомительной процедуры. Поэтому необходимо продол-

жить поиск метода решения для уравнений БС, который содержал бы меньший произвол. Второе обстоятельство заключается в том, что итерационные методы не столь эффективны при решении *неоднородных* УБС, когда решение зависит еще и от полной массы взаимодействующей пары как от непрерывного параметра. Это сильно затрудняет практическое применение такого рода решения в анализах конкретных реакций, поскольку либо необходимо иметь хорошую параметризацию решения по трем параметрам ( $p_0$ ,  $|\mathbf{p}|$  и  $P^2$ ), либо решать УБС интерактивно во всей кинематической области рассматриваемого процесса, что практически невозможно. В таком случае желательно иметь относительно простое разложение амплитуды БС, коэффициенты которого можно находить независимо от анализируемого процесса. Это позволило бы решать поставленную задачу поэтапно: сперва находить (численно) коэффициенты разложения, затем фактически использовать такое разложение как параметризацию амплитуды в интересующей кинематической области.

В работе [36] предлагается для однородного УБС (3) использовать разложение вершинной функции  $\mathcal{G}$  и ядра взаимодействия  $V$  по гиперсферическим 4-мерным гармоникам. После поворота Вика эти разложения для случая скалярных частиц имеют вид

$$\mathcal{G}_{JM}(ik_4, \mathbf{k}) = \sum_n \varphi_J^n(\hat{k}) Z_{nJM}(\omega_k), \quad (50)$$

$$V_E(k, p, s) \equiv -\frac{g^2}{(k-p)_E^2 + \mu^2} = -2\pi^2 \sum_{nlm} \frac{g^2}{n+1} V_n(\hat{k}, \hat{p}) Z_{nlm}(\omega_k) Z_{nlm}^*(\omega_p), \quad (51)$$

$$V_n(\hat{k}, \hat{p}) = \frac{4}{(\Lambda_+ + \Lambda_-)^2} \left( \frac{\Lambda_+ - \Lambda_-}{\Lambda_+ + \Lambda_-} \right)^n, \quad \Lambda_{\pm} = \sqrt{(\hat{k} \pm \hat{p})^2 + \mu^2}, \quad (52)$$

где 4-модуль  $\hat{k} = \sqrt{k_4^2 + \mathbf{k}^2}$ ;  $\omega_k = (\chi, \theta, \phi)$  — углы вектора  $k = (k_4, \mathbf{k})$  в 4-мерном евклидовом пространстве, причем  $\theta, \phi$  — обычные полярный и азимутальный углы, а  $\chi$  — дополнительный угол. Гиперсферические гармоники

$$Z_{nlm}(\chi, \theta, \phi) = X_{nl}(\chi) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

$$X_{nl}(\chi) = \sqrt{\frac{2^{2l+1} (n+1)(n-l)! l!^2}{\pi (n+l+1)!}} \sin^l \chi C_{n-l}^{l+1}(\cos \chi)$$

пропорциональны произведению обычных сферических гармоник для орбитального момента  $l$  и полиномов Гегенбауэра  $C_{n-l}^{l+1}$  и удовлетворяют соотношению ортонормировки

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\pi} d\chi \sin^2 \chi Z_{klm}(\chi, \theta, \phi) Z_{k'l'm'}^*(\chi, \theta, \phi) = \delta_{kk'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

В общих чертах метод решения состоит в следующем. УБС (3) после поворота Вика и подстановки (50) и (51) сводится к бесконечной системе одномерных интегральных уравнений. Интегралы сводятся к конечным суммам путем замены переменных и использования сетки Гаусса, а так как замена однократная, ее выбор существенно облегчается по сравнению с двумерным случаем. С другой стороны, базис гиперсферических гармоник оказывается наиболее естественным для данного класса задач, и ряд (50) сходится весьма быстро, так что для получения окончательного результата достаточно рассмотреть систему уравнений для нескольких ( $\sim 5$ ) первых членов этого ряда.

Этот метод был обобщен нами на неоднородные уравнения [66]. Рассмотрим уравнение БС (1), где в лестничном приближении  $V(k, p, s) = 1/((k - p)^2 - \mu^2 + i\varepsilon)$ , а  $T(k, q, s)$  — «ампутированная полумассовая»  $T$ -матрица, описывающая рассеяние реальных частиц с 4-импульсами  $q_{1,2}$ , для которых в с. ц. м.

$$s = (q_1 + q_2)^2 = (2E_{\tilde{p}})^2, \quad E_{\tilde{p}} = \sqrt{m^2 + \tilde{p}^2}, \quad q = \frac{q_1 - q_2}{2} = (0, \mathbf{q}).$$

Основные этапы аналитического рассмотрения уравнения (1) таковы: i) парциальное разложение, ii) поворот Вика, iii) разложение по гиперсферическим гармоникам. Для неоднородных уравнений на каждом этапе возникают свои особенности, поэтому рассмотрим их вкратце. Парциальное разложение применим в виде

$$T(k, q, s) \equiv T(k_0, \mathbf{k}) = -\frac{2\pi}{|\mathbf{k}||\mathbf{q}|} \sum_{lm} T_l(\tilde{k}) Y_{lm}(\Omega_k) Y_{lm}^*(\Omega_q), \quad (53)$$

где, как и раньше, тильда обозначает пару переменных, например,  $\tilde{k} = (k_0, |\mathbf{k}|)$  (см. комментарии после (26)). Нормировка  $T$ -матрицы фиксируется из свободного члена в (1) и приводит к следующему выражению для фазовых сдвигов  $\delta_l$  [66]:

$$T_l(\tilde{q}) = 16\pi |\mathbf{q}| \sqrt{s} e^{i\delta_l} \sin \delta_l. \quad (54)$$

Для дальнейших действий необходимо избавиться от устранимой сингулярности в точке  $\tilde{p} = (0, |\mathbf{q}|)$  [67], для чего введем новую неизвестную функцию  $\varphi_l(\tilde{k})$ :

$$T_l(\tilde{k}) \equiv \frac{\varphi_l(\tilde{k})}{g^2 Q_l(s)} T_l(\tilde{q}), \quad (55)$$

где для краткости функции Лежандра от аргумента  $y_\mu(q, q)$  обозначены как  $Q_l(s)$ , т. е.  $Q_l(s) \equiv Q_l(y_\mu(q, q))$ . Получим уравнение для новой функции

$$\begin{aligned} \varphi_l(\tilde{k}) = g^2 Q_l(\tilde{k}; \tilde{q}) - \\ - i \int \frac{d\tilde{p}}{(2\pi)^3} \left\{ g^2 Q_l(\tilde{k}; \tilde{p}) \frac{g^2}{Q_l(s)} Q_l(\tilde{k}; \tilde{q}) Q_l(\tilde{q}; \tilde{p}) \right\} S(p_1) S(p_2) \varphi_l(\tilde{p}) \end{aligned} \quad (56)$$

и одновременно уравнение для вычисления фаз (подробнее см. в [67, 68]):

$$T_l(\tilde{q}) = g^2 Q_l(s) \left[ 1 + i \int \frac{d\tilde{p}}{(2\pi)^3} Q_l(\tilde{q}; \tilde{p}) S(p_1) S(p_2) \frac{\varphi_l(\tilde{p})}{Q_l(s)} \right]^{-1}. \quad (57)$$

Процедура поворота Вика [26, 69], которую необходимо выполнить в (56), чтобы применить разложения типа (50) и (51), является не вполне тривиальной. Выражение  $S(p_1)S(p_2)$  содержит четыре полюса по переменной  $p_0$ , два из которых,

$$p_{1,2}^0 = \mp \left[ \frac{\sqrt{s}}{2} - E_p + i\varepsilon \right], \quad (58)$$

при определенном значении  $p$  могут пересечь мнимую ось на комплексной плоскости  $p_0$ . Как легко убедиться, такого не может произойти для связанных состояний, у которых  $\sqrt{s} < 2m$ , а для состояний рассеяния ( $\sqrt{s} > 2m$ ) полюсы (58), пересекая мнимую ось, проникают в контур интегрирования по  $p_0$ . Вычеты в них от подынтегрального выражения в (56) приводят к появлению дополнительных неизвестных функций [69], которые должны быть включены в общую систему, и уравнения для которых получаются из (56).

После поворота Вика парциальные амплитуды  $\varphi_l(\tilde{k})$  раскладываются в ряд по полиномам Гегенбауэра. Например, для  $l = 0$  (т. е. для  ${}^1S_0$  рассеяния) из (50) получим

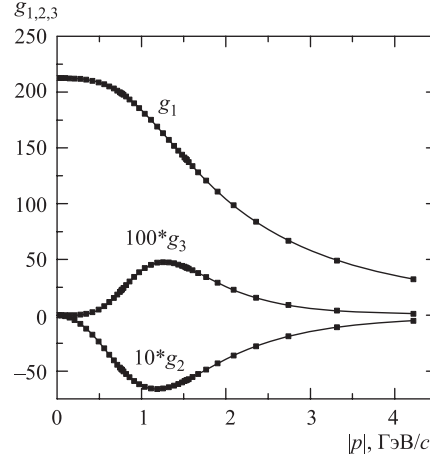
$$\varphi_0(\tilde{k}) = |\mathbf{k}||\mathbf{q}| \sum_{j=1}^{\infty} g_j(\hat{k}) X_{2j-2,0}(\chi). \quad (59)$$

Явный вид системы уравнений для системы функций  $g_j$  мы не приводим здесь в силу громоздкости (см. [66]). Отметим, что если  $g_j$  найдены, то уравнения (59) и (55) могут рассматриваться как параметризация решения.

**Численные результаты и дальнейшее развитие метода.** При численном анализе выяснилось, что ряд (59) сходится весьма быстро. Для примера на рис. 3 приведены графики функций  $g_j(\hat{k})$ ,  $j = 1, 2, 3$ , из разложения (59), полученные при следующих значениях параметров:  $\frac{g^2}{4\pi m^2} = 4\pi$ ,  $m = \mu = 1$  ГэВ,  $|\mathbf{q}| = 0,77$  ГэВ/с. Компоненты с  $j \geq 4$  не показаны, так как малы по абсолютной величине. По этой же причине  $g_2$  показана умноженной на 10, а  $g_3$  — на 100. Сплошная линия, соединяющая точки, соответствует интерполяции данных соответственно для  $g_{1,2,3}(\hat{k})$  следующими функциями:

$$F_1(\hat{k}) = \sum_{j=1}^4 \frac{a_j^1 \hat{k}^{2j-2}}{(\hat{k}^2 + b_1^2)^j}, \quad (60)$$

Рис. 3. Функции  $g_{1,2,3}$  — коэффициенты разложения в (59), вычисленные в узлах сетки (■). Ввиду малой величины  $g_2$  и  $g_3$  умножены соответственно на 10 и 100. Функции  $g_j$  безразмерны. Сплошные линии воспроизводят результаты фитирования с функциями (60)–(62)



$$F_2(\hat{k}) = \frac{\hat{k}^2}{\hat{k}^2 + b_2^2} \sum_{j=1}^4 \frac{a_j^2 \hat{k}^{2j-2}}{(\hat{k}^2 + b_2^2)^j}, \quad (61)$$

$$F_3(\hat{k}) = \left[ \frac{\hat{k}^2}{\hat{k}^2 + b_3^2} \right]^2 \sum_{j=1}^4 \frac{a_j^3 \hat{k}^{2j-2}}{(\hat{k}^2 + b_3^2)^j}. \quad (62)$$

Значения параметров приведены в таблице. Качество интерполяции оказывается настолько высоким, что этот факт заслуживает отдельного обсуждения. Функции  $F_i(\hat{k})$  имеют очень простой аналитический вид, но, несмотря на это, во всем интервале изменения  $\hat{k}$  они точно воспроизводят полученные компоненты решения. В работе [70] этот факт рассматривается как проявление эффектов сепарабельности в ядре взаимодействия БС, выбранном в форме одномезонного обмена. Кроме того, по имеющимся результатам, компоненты решений спинорных уравнений в лестничном приближении также могут быть с высокой точностью интерполированы аналогичными выражениями. Поэтому функции параметризации  $F_i(\hat{k})$  полезны и в практическом применении, например, для представления результатов расчетов в компактной форме.

**Численные значения параметров в формулах (60)–(62). Величины  $b_n$  имеют размерность ГэВ/с,  $a_j^n$  — (ГэВ/с)<sup>2</sup>**

$n$	$b_n$	$a_1^n$	$a_2^n$	$a_3^n$	$a_4^n$
1	0,8807	164,787	166,651	87,412	225,434
2	1,1195	-160,725	-262,017	-730,961	1158,73
3	1,3135	182,945	4872,76	-10705,6	5687,98

Отдельный методический интерес представляет исследование зависимости фазовых сдвигов от  $s$ . На рис. 4 приведены вычисленные фазы рассеяния

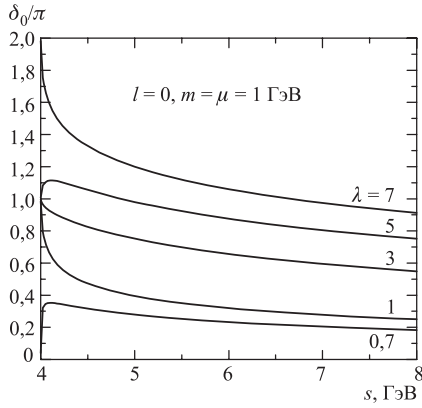


Рис. 4. Фазы рассеяния (в единицах  $\pi$ ) для  $l = 0$  и различных значений константы связи

при  $l = 0$  для  $s$  из интервала  $(2m)^2 < s < (2m + \mu)^2$ . Разные кривые соответствуют различным значениям безразмерного параметра  $\lambda$ , связанного со значениями константы связи соотношением  $\frac{g^2}{4\pi m^2} = 4\pi\lambda$ . Представленные результаты находятся в хорошем согласии с полученными в [67,68]. Примечательно, что для  $\lambda = 0,7$  по теореме Левинсона нет связанных состояний, так как фазовый сдвиг в нуле равен нулю. Для значений  $\lambda = 1, 3, 5$  имеется одно связанное состояние, а для  $\lambda = 7$  — два.

В заключение приведем еще несколько общих замечаний относительно дальнейшего развития формализма. Выше мы рассматривали скалярное уравнение БС в лестничном приближении с ядром взаимодействия в виде одномезонного обмена с точечными вершинами. Обобщение метода на спинорные уравнения кратко обсуждается в работе [70]. Кроме того, переход к более сложным ядрам взаимодействия, содержащим, например, формфакторы вида (поворот Вика считается выполненным)

$$F[(p - q)_E^2] = \frac{\Lambda^2}{(p - q)_E^2 + \Lambda^2},$$

может быть без труда выполнен в рамках описанных методов. В самом деле, оказывается справедливым следующее разложение:

$$\frac{g^2}{(p - q)_E^2 + \mu^2} F[(p - q)_E^2]^2 = 2\pi^2 \sum_{klm} \frac{1}{k+1} \tilde{V}_k(\hat{p}, \hat{q}) Z_{klm}(\omega_p) Z_{klm}^*(\omega_q), \quad (63)$$

где, в свою очередь,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_k(\hat{p}, \hat{q}) = & 4g^2 \left[ \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - \mu^2} \right]^2 \left[ \frac{(\Lambda_+^\mu - \Lambda_-^\mu)^k}{(\Lambda_+^\mu + \Lambda_-^\mu)^{k+2}} - \frac{(\Lambda_+^\Lambda - \Lambda_-^\Lambda)^k}{(\Lambda_+^\Lambda + \Lambda_-^\Lambda)^{k+2}} \right] - \\ & - 4g^2(k+1) \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - \mu^2} \frac{\Lambda^2}{\Lambda_+^\Lambda \Lambda_-^\Lambda} \frac{(\Lambda_+^\Lambda - \Lambda_-^\Lambda)^k}{(\Lambda_+^\Lambda + \Lambda_-^\Lambda)^{k+2}}; \quad \Lambda_\pm^\alpha = \sqrt{(\hat{p} \pm \hat{q})^2 + \alpha^2}. \quad (64) \end{aligned}$$

Сравнивая (63), (64) с (51), (52), приходим к выводу, что включение факторов в ядро взаимодействия не приводит к принципиальным изменениям методов расчета решений.

### 3. $pD$ -РЕАКЦИИ: ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Этот раздел посвящен некоторым примерам применения формализма БС в анализе реакций столкновения протона с дейтроном, когда в конечном состоянии имеются только три нуклона. В большинстве процессов два нуклона в конечном состоянии скоррелированы, а третий нуклон считается независимым. Будем рассматривать реакции фрагментации дейтрона протонами в двух разных кинематических областях, перезарядку налетающего протона на нейтроне мишени и упругое  $pD$ -рассеяние назад. Более подробно в символических обозначениях их можно представить следующим образом (в порядке перечисления):

$$pD \rightarrow p[0^\circ] + n[0^\circ] + p[180^\circ], \quad (65)$$

$$pD \rightarrow (pp)[0^\circ] + n[180^\circ], \quad (66)$$

$$pD \rightarrow n[\sim 0^\circ] + (pp)[\sim 0^\circ], \quad (67)$$

$$pD \rightarrow p[180^\circ] + D. \quad (68)$$

Здесь в квадратных скобках приведены области значений углов, в которых эти реакции рассматриваются в лабораторной системе отсчета, где начальный дейтрон покоится. Круглые скобки служат для обозначения коррелированных протон-протонных пар с энергиями возбуждения порядка единиц МэВ. Очевидно, что в процессах (65)–(67) состав частиц в конечном состоянии один и тот же, поэтому с точки зрения кинематики это различные частные случаи общего процесса эксклюзивного расщепления дейтрона протонами. Однако доминирующие физические механизмы этих реакций разные, и, забегая вперед, отметим, что они используют различные кинематические области  $NN$ -рассеяния — упругое рассеяние и область перезарядки. Поэтому и причины интереса к их экспериментальному изучению различные. В самых общих словах, изучение процессов (65) и (68) может пролить свет на мезонные и  $\Delta$ -изобарные степени свободы, процесс (66) примечателен значительной ролью немассовых эффектов, а (67) предоставляет возможность построения дейтронного тензорного поляриметра для высоких энергий. Кроме того, для всех процессов в равной степени представляет большой интерес систематическое выделение релятивистских эффектов и изучение их роли в сечениях и поляризационных наблюдаемых величинах.

Доминирующим механизмом в (65), (66) и (68) является однонуклонный обмен, диаграмма которого приведена на рис. 5. Вершина I представляет

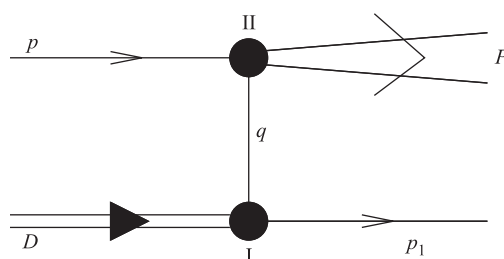


Рис. 5. Диаграмма однонуклонного обмена

начальный дейтрон, в матричных элементах ей соответствует амплитуда БС  $\Psi_D$  или вершинная функция  $\Gamma_D$ , в зависимости от удобства вычислений. В случае упругого  $pD$ -рассеяния (68) вершина II также соответствует дейтрону, а в процессах фрагментации она представляет упругое  $NN$ -рассеяние: протон-нейтронное в (65) и протон-протонное в (66). В последних случаях вершина II либо моделируется реальным процессом рассеяния, либо представляется амплитудой БС в континууме. Реакция перезарядки (67) стоит несколько особняком, так как ее механизм не сводится к однонуклонному обмену и в деталях будет обсуждаться позже. Тем не менее у процессов (67) и (66) также много общего — у обоих в конечном состоянии имеется коррелированная  $pp$ -пара с малым относительным импульсом. В дополнение к однонуклонному обмену для упругого  $pD$ -рассеяния будет рассматриваться важный дополнительный механизм, обусловленный вкладами «треугольных» диаграмм с обменом пионов.

#### 4. ФРАГМЕНТАЦИЯ ДЕЙТРОНА $pD \rightarrow pnp$

Интерес к реакциям фрагментации дейтрона протонами [71–73] исторически обусловлен ожидавшейся возможностью прямого извлечения волновой функции дейтрона из экспериментальных данных (в предположении, что механизм реакции хорошо описывается импульсным приближением). Установлено, что импульсное приближение удовлетворительно описывает данные в широком интервале импульсов детектируемых протонов, за исключением области около  $0,3 \text{ ГэВ}/c$  (в с. ц. м. дейтрона), где график сечения имеет относительно широкое «плечо». В экспериментах, помимо сечения, измерялись тензорная анализирующая способность  $T_{20}$  и передача поляризации  $\kappa_{D \rightarrow p}$ . Они более чувствительны к предполагаемому механизму реакции, и совместный анализ всех данных может предоставить дополнительную информацию об  $S$ - и  $D$ -компонентах волновой функции дейтрона. Однако, как и для сечения,



данные по  $T_{20}$  и  $\kappa_{D \rightarrow p}$  демонстрируют систематические отклонения от теоретических предсказаний [74, 75] в той же области импульсов конечного протона. Кинематический анализ показывает, что эта область соответствует возможному возбуждению  $\Delta$ -изобары и поэтому следует ожидать, что механизм реакции здесь не может быть описан простым импульсным приближением.

Экспериментальное исследование эксклюзивной фрагментации поляризованного дейтрона поляризованными протонами планировалось на синхротроне COSY [71]. Прежние релятивистски-инвариантные расчеты диаграмм однонуклонного обмена для инклюзивного и упругого  $pD$ -рассеяния были основаны на численных решениях уравнения БС с реалистическим взаимодействием [61, 74]. Некоторые авторы (см., например, [42]) изучали релятивистские эффекты в дейтроне, рассматривая дейтронную вершину как решение некоторого приближенного уравнения, полученного из уравнения БС, и анализируя электронное и упругое адронное рассеяние на дейтроне. Однако последовательное исследование поляризационных явлений в эксклюзивных процессах с явным выделением релятивистских эффектов по-прежнему актуально. На примере реакции  $pD \rightarrow pnp$  мы проиллюстрируем общий метод выделения релятивистских эффектов в подходе БС.

**4.1. Спектаторный механизм и наблюдаемые величины.** Итак, запишем реакцию фрагментации (65) в виде закона сохранения 4-импульса:

$$p + D \rightarrow p_1(180^\circ) + p_2(0^\circ) + n(0^\circ).$$

Обозначения здесь следуют диаграмме рис. 5, представляющей предполагаемый механизм реакции, так что полный 4-импульс пары протон + нейтрон  $P \equiv p_2 + n$ . В данных условиях вершины I и II могут быть факторизованы [74] и вычислены независимо друг от друга. Это означает, что вершина II может рассматриваться как процесс реального упругого протон-нейтронного рассеяния, с вытекающей отсюда возможностью параметризации ее из экспериментальных данных. Опуская промежуточные выкладки (см. [74]), для сечения фрагментации поляризованного дейтрона с проекцией спина  $M$  на ось  $z$  будем иметь

$$2E_1 \frac{d^4\sigma}{dt d^3\mathbf{p}_1} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{\lambda(p, q)}}{\sqrt{\lambda(p, D)}} \frac{d\sigma^{NN}}{dt} \frac{(p_1^2 - m^2)}{2m} \text{Tr} \left[ \bar{\Psi}_D^M(k) \hat{I} \Psi_D^M(k) (\hat{p}_1 - m) \right].$$

Здесь  $d\sigma^{NN}/dt$  — сечение упругого  $NN$ -рассеяния; кинематическая функция  $\lambda(p, q) = (pq)^2 - m^4$ ,  $k = (q - p_1)/2$ ; переменная Мандельстама  $t = (p - p_2)^2$ ; оператору  $\hat{I}$  соответствует единичная матрица, если конечный протон неполяризован, или матрица  $(1 + \gamma_5 \hat{s}_1)/2$  в противном случае. Для детектируемого протона  $p_1^2 - m^2 = 0$ , но амплитуда БС сама сингулярна на массовой поверхности, и поэтому результат (сечение) является конечным. Кроме того,

отметим известный факт [42, 61] — в силу той же причины только четыре из восьми парциальных компонент амплитуды  $\Psi_D^M$  дают вклад в матричный элемент в формуле (69). В данном случае это амплитуды, отвечающие состояниям  ${}^3S_1^{++}$ ,  ${}^3D_1^{++}$ ,  ${}^3P_1^{-+}$  и  ${}^1P_1^{-+}$ , с соответствующими вершинными функциями  $G_1$ ,  $G_3$ ,  $G_6$  и  $G_8$ .

Вычисление следа в формуле (69) достаточно громоздкое и может быть выполнено при помощи программ манипуляции с алгебраическими выражениями. Чтобы представить формулы в более знакомом виде, известном из нерелятивистских вычислений, воспользуемся определениями волновых функций БС (40) и (42) и выразим через них результаты расчетов для всех наблюдаемых величин. Например, неполяризованное дифференциальное сечение примет вид

$$E_1 \frac{d^4\sigma}{dt d^3\mathbf{p}_1} = \frac{M_D}{2\pi^2} \frac{\sqrt{\lambda(p, q)}}{\sqrt{\lambda(p, D)}} \frac{d\sigma^{NN}}{dt} \left\{ U^2(|\mathbf{k}|) + W^2(|\mathbf{k}|) + \right. \quad (69)$$

$$+ \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{|\mathbf{k}|}{m} \left[ U(|\mathbf{k}|) \left( -\Psi_{P_8}(|\mathbf{k}|) + \sqrt{2}\Psi_{P_6}(|\mathbf{k}|) \right) - \right. \quad (70)$$

$$\left. \left. - W(|\mathbf{k}|) \left( \sqrt{2}\Psi_{P_8}(|\mathbf{k}|) + \Psi_{P_6}(|\mathbf{k}|) \right) \right] \right\}.$$

Как уже отмечалось, функции  $\Psi_{P_{6,8}}(|\mathbf{k}|)$  на несколько порядков величины меньше, чем  $U(|\mathbf{k}|)$  и  $W(|\mathbf{k}|)$ , и для рассматриваемого процесса с импульсом конечного протона  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{k}| \leq 0,51$  ГэВ/с диагональные по ним члены пренебрежимо малы. Эти факты открывают новую возможность для интерпретации результатов расчетов в подходе БС и установления их связи с нерелятивистскими вычислениями. На примере формулы (69) становится очевидно, что вклады от доминирующих компонент в точности совпадают с известными нерелятивистскими выражениями, в то время как оставшиеся интерференционные слагаемые типа (70) содержат вклады состояний с отрицательной энергией и пропорциональны  $|\mathbf{k}|/m$ . В силу чистого релятивистского происхождения мы будем именовать их далее релятивистскими поправками. Эта структура справедлива для всех наблюдаемых величин [74]. Таковы в нескольких словах общие черты метода анализа релятивистских эффектов.

**4.2. Численные результаты.** Сечение, вычисленное по формулам (69), (70), изображено на рис. 6, где потоковый множитель положен равным единице [74]. Для упругого  $NN$ -рассеяния используются данные из работы [76]. Кривая 3 на рис. 6 показывает вклады только положительно-энергетических волн, кривая 1 — релятивистские поправки. Кривая 4 — суммарный результат. Для полноты мы приводим также результаты нерелятивистских расчетов с использованием боннской волновой функции (кривая 4).

Из рис. 6 следует, что релятивистские поправки начинают проявляться только при  $|\mathbf{p}_1| > 0,6$  ГэВ/с. Отсюда можно заключить, что для кине-

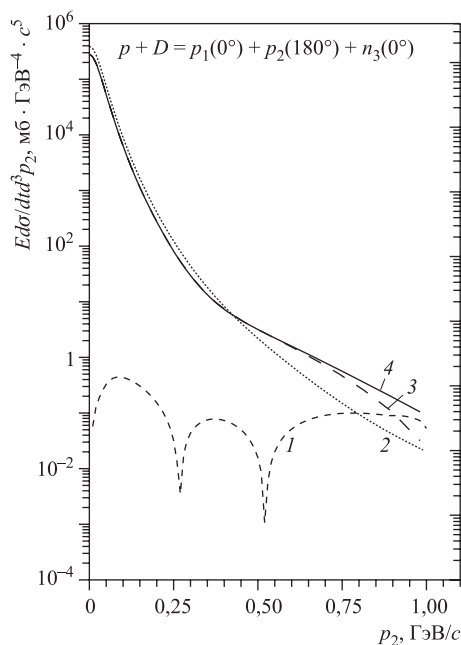


Рис. 6. Дифференциальное сечение реакции  $pD \rightarrow pnp$  с потоковым фактором, равным 1

матических условий на COSY [71] эти поправки можно не учитывать, так как они будут гораздо меньше ожидаемых ошибок эксперимента. Следовательно, в предложенных экспериментах можно детально исследовать различные аспекты механизмов реакции, не беспокоясь об учете релятивистских эффектов.

### 5. РАСЩЕПЛЕНИЕ ДЕЙТРОНА $pD \rightarrow (pp)n$

Перейдем к изучению процесса расщепления дейтрона (66) с быстрой  $pp$ -парой в конечном состоянии, имеющей малую энергию возбуждения.

Одной из мотиваций эксперимента [77] по изучению такого процесса была возможность исследования эффектов немассовости в  $NN$ -взаимодействиях. Как предсказывалось в [77–79], при определенной начальной энергии сечение процесса должно иметь минимум, соответствующий нулю нерелятивистской волновой функции  $^1S_0$ -состояния конечной  $pp$ -пары. Однако измерения показали, что сечение плавно падает с ростом начальной энер-

гии. Учет поправок за рамками однонуклонного обмена частично исправляет положение [78]. Также можно предположить, что вклады от возбуждения  $\Delta$ -изобар здесь относительно меньше, чем в сходной реакции упругого  $pD$ -рассеяния [79–81].

Ясно, что нерелятивистское рассмотрение процесса может стать неадекватным вследствие высокой виртуальности протона в дейтроне при рассматриваемых кинематических условиях [82]. Следовательно, для анализа данных [78] было бы полезно обратиться к формализму БС, так как немассовость участвующих частиц является его внутренним свойством. Кроме того, решения уравнений БС, будучи явно ковариантными, включают в себя релятивистские эффекты, а именно эффекты от лоренц-буста и вклады  $P$ -компонент (см. [80] и ссылки там).

**5.1. Кинематика и матричный элемент процесса.** Итак, рассмотрим процесс фрагментации дейтрона (66)

$$p + D = (p_2 p_3)(0^\circ) + p_1(180^\circ) \quad (71)$$

при энергиях возбуждения пары  $E_x \sim 0-3$  МэВ и значениях начальной энергии  $T_p \sim 0,6-2,0$  ГэВ [77,78]. Эта реакция также представляется диаграммой на рис. 5, где приняты обозначения  $p = (E_p, \mathbf{p})$  и  $p_1 = (E_n, \mathbf{n})$  — соответственно 4-импульсы начального протона и конечного нейтрона,  $P = p_2 + p_3$  — полный 4-импульс  $pp$ -пары, причем  $P^2 = M_{pp}^2 = (2m + E_x)^2$ , где  $E_x$  — энергия возбуждения.

Особенностью процесса (71) является довольно большой переданный импульс от начального протона к одному из протонов пары. Из рассмотрения кинематики легко убедиться, что импульс конечного нейтрона достаточно велик ( $|\mathbf{n}| \sim 0,3-0,5$  ГэВ/ $c$ ), и так как он находится на массовой поверхности, то оставшийся из состава дейтрона протон оказывается существенно немассовым перед взаимодействием с протоном из пучка. Отсюда ясно, что процесс  $NN$ -взаимодействия в верхней части диаграммы не может рассматриваться как упругое  $NN$ -рассеяние и следует ожидать, что релятивистские поправки будут играть здесь существенную роль.

Матричный элемент, соответствующий рис. 5,

$$M_{fi} = \bar{u}(s, \mathbf{n})(\hat{p}_1 - m)\Psi_D [(\hat{q} + m)\bar{\Psi}_{1S_0}(\hat{p} - m)u(r, \mathbf{p})], \quad (72)$$

где  $u(r, \mathbf{p})$  ( $\bar{u}(s, \mathbf{n})$ ) — дираковский спинор начального протона (конечного нейтрона);  $\Psi_{D(1S_0)}$  — амплитуда БС для дейтрона ( $pp$ -пары в континууме). С использованием базиса спин-угловых гармоник для получения частичного разложения амплитуды БС для дейтрона и ковариантной формы [62] для амплитуды  $1S_0$ -состояния пары амплитуду процесса  $M_{fi}$  можно представить

следующим образом:

$$M_{fi} = (-1)^{\frac{1}{2}-r} C(^1S_0) \frac{1}{\sqrt{8\pi}(M_D - 2E_n)} \times \\ \times \left\{ \sqrt{2} C_{\frac{1}{2}s\frac{1}{2}-r}^{1M} \left( G_1 - \frac{G_3}{\sqrt{2}} \right) + 3\delta_{M,0}\delta_{s,r} \frac{G_3}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (73)$$

где вклад  $C(^1S_0)$  от верхней части диаграммы на рис. 5:

$$C(^1S_0) = \sqrt{\frac{E_p + m}{E_n + m}} \left[ h_1 \left( E_n + m - \frac{|\mathbf{n}||\mathbf{p}|}{E_p + m} \right) - \right. \\ \left. - h_3 \frac{M_D - 2E_n}{m} \left( E_n + m + \frac{|\mathbf{n}||\mathbf{p}|}{E_p + m} \right) \right]; \quad (74)$$

$G_{1,3}$  соответствуют вершинным функциям дейтрона;  $h_1, h_3$  — инвариантные амплитуды  $^1S_0$ -состояния в континууме. Связь величин  $h_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) с парциальными компонентами  $^1S_0^{++}, ^1S_0^{--}, ^3P_0^{+-}, ^3P_0^{-+}$ , которые далее также нумеруются как  $1, \dots, 4$ , приводится, например, в [62]. В данном случае компоненты  $h_2, h_4$  не дают вклада в матричный элемент, и среди парциальных компонент также остаются только две — главная компонента  $^1S_0^{++}$  и одна из  $P$ -компонент, обеспечивающая релятивистскую поправку. Эффекты лоренц-буста проявляются в том, что  $pp$ -пара как целое имеет большой по величине 3-импульс (примерно до 4 ГэВ/с), и инвариантные величины  $h_i$  существенно от него зависят [80]. Таким образом, при использовании ковариантной формы записи амплитуды для  $^1S_0$ -состояния через функции  $h_i$  эффекты лоренц-буста учитываются автоматически.

В численных расчетах использовалась амплитуда БС для дейтрона из [28]. Для описания  $pp$ -пары необходимо получить решение соответствующего неоднородного уравнения БС в с. ц. м. пары. Как упоминалось выше, компоненты вершинных функций БС с положительной энергией имеют прямой нерелятивистский аналог — обычные нерелятивистские волновые функции [80]. Релятивистские эффекты тогда будут проявляться в выполнении буста над компонентой  $^1S_0^{++}$ , что соответствует переходу к движущейся в лаб. системе  $pp$ -паре, и учете вклада  $P$ -компоненты. Чтобы ее найти, решим уравнение БС для пары в приближении одной итерации [30, 65], выбрав в качестве нулевого приближения известную сепарабельную параметризацию нуклон-нуклонной  $t$ -матрицы [83].

Проиллюстрируем вкратце схему вычислений (детали см. в [82]). Определяя новые парциальные компоненты  $g_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) как «связные амплитуды», т. е. парциальные амплитуды без свободных членов, соответствующих свободному рассеянию, из полной системы парциальных уравнений для

$P$ -волны  $g_{3P_0^{+-}}$  получаем

$$g_3(k) = ig_{\pi NN}^2 \left[ \frac{M_{pp}}{\sqrt{\pi}} V_{31}(k, p^*) - i \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(2\pi)^3} V_{31}(k, p) \frac{g_1(p)}{M_{pp} - 2E_p + i\epsilon} \right], \quad (75)$$

где  $V_{31}$  — парциальное ядро, соответствующее переходу  $^1S_0^{++} \rightarrow ^3P_0^{+-}$ .

Уравнение (75) было получено из уравнения БС и пока не содержит параметров обрезания. Однако при получении численных решений такие параметры обычно вводятся вместе с феноменологическими дипольными формфакторами (как, например, в [28]) для обеспечения хорошей сходимости и моделирования вкладов от тяжелых мезонов в ядре. Влияние формфакторов незначительно при малых переданных импульсах и растет по мере их увеличения. В нашем случае для значений импульсов в области нуля амплитуды процесса формфакторы можно опустить и записать

$$V_{31}(k, p, \mu_\pi^2) = \frac{\pi m}{p k E_p E_k} \{p Q_1(y) - k Q_0(y)\}. \quad (76)$$

Здесь  $Q_L(y)$  — функция Лежандра второго рода с аргументом  $y = (p^2 + k^2 + \mu_\pi^2 - k_0^2)/(2pk)$ . В формуле (76) квадрат массы мезона  $\mu_\pi^2$  в аргументе парциального ядра означает, что пион-нуклонный формфактор опущен и пропагатор мезона взят в обычном виде:  $1/(k^2 - \mu_\pi^2)$ . Учет формфактора приводит к перенормировке константы связи:  $g_{\pi NN} \rightarrow g_{\pi NN} \frac{\mu_\pi^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2}$ . Тогда для «перенормированного» парциального ядра получим

$$\mathcal{V}_{31}(k, p) = V_{31}(k, p, \mu_\pi^2) - V_{31}(k, p, \Lambda^2) + (\Lambda^2 - \mu_\pi^2) \frac{\partial V_{31}(k, p, \Lambda^2)}{\partial \Lambda^2}, \quad (77)$$

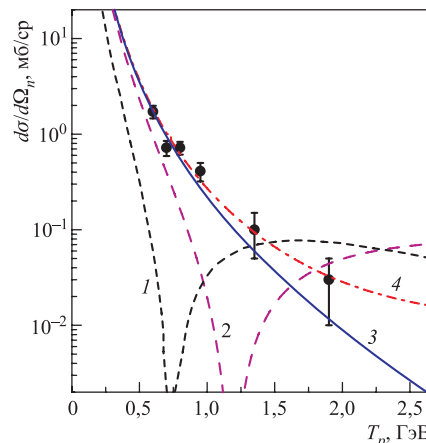
где параметр обрезания  $\Lambda = 1,29$  ГэВ принят таким же, как в [28], и  $V_{31}(k, p, \Lambda^2)$  обозначает парциальное ядро (76) с  $\mu_\pi^2 \rightarrow \Lambda^2$ . В свою очередь, в рамках приближения одной итерации компонента  $g_1(k)$  выражается через нерелятивистскую  $t$ -матрицу [83]:

$$g_1(k) = i(4\pi)^{5/2} \frac{m}{2} t_{NR}(k, p^*) \quad (78)$$

с нормировкой  $t_{NR}(p^*, p^*) = -\frac{2}{\pi m p^*} e^{i\delta_0} \sin \delta_0$ , где  $\delta_0$  — фаза упругого  $pp$ -рассеяния в состоянии  $^1S_0$ .

**5.2. Численные результаты.** На рис. 7 представлены результаты численных расчетов двумерного сечения  $d\sigma/d\Omega_n$  (где  $\Omega_n$  обозначает телесный угол нейтрона в с.ц.м. реакции), проинтегрированного по энергии возбуждения пары в интервале  $E_x = 0-3$  МэВ. Кривая 1 соответствует нерелятивистским

Рис. 7. Дифференциальное сечение, проинтегрированное по энергии возбуждения пары  $E_x$  как функция кинетической энергии начального протона  $T_p$ . Кривая 1 соответствует нерелятивистским расчетам, т.е. вкладу только главной компоненты состояния  $^1S_0$  без учета эффектов лоренц-буста. Кривая 2 отражает влияние буста на главную компоненту. Кривая 4 представляет учет всех релятивистских эффектов (вместе с  $P$ -волной) без параметров обрезания. Кривая 3 обозначает то же что и 4, но с учетом формфактора (77). Экспериментальные точки взяты из [78]



вычислениям, кривая 2 включает поправки от лоренц-буста (при учете только главной  $^1S_0^{++}$ -компоненты). Совершенно ясно, что поправки от буста весьма существенны и приводят к сильному сдвигу предполагаемого минимума сечения. Согласие с экспериментом при низких начальных энергиях становится лучше, однако сечение остается слишком малым при больших значениях  $T_p$ . Из рис. 7 следует, что учета только главных компонент недостаточно для описания данных. Однако если рассмотреть релятивистские поправки в полном объеме, т.е. наряду с эффектами лоренц-буста включить в расчет вклады от  $P$ -волн, то достигается разумное согласие с экспериментом. Отметим, что, как показано в работах [62, 65] для реакций  $pD$ - и  $eD$ -расщепления дейтрона, включение  $P$ -волн в точности воспроизводит нерелятивистские расчеты вкладов от эффектов рождения нуклон-антинуклонных пар. Следовательно, и в данном случае полученные результаты указывают на то, что расчеты релятивистского спектаторного механизма в подходе БС уже содержат некоторые вклады за рамками традиционно понимаемого нерелятивистского однонуклонного обмена.

### 6. РЕАКЦИЯ ПЕРЕЗАРЯДКИ $pD \rightarrow n(pp)$

В экспериментах с поляризованными частицами часто оказывается очень важным измерение поляризационных характеристик продуктов реакций. Любые процессы, в которых измеряются конечные поляризации, являются экспериментами по двойному рассеянию, когда, например, исследуемый конечный дейтрон испытывает рассеяние во вторичной реакции в поляриметре. Поэтому необходимо, чтобы сечение и анализирующие способности этой реакции были достаточно велики, иначе эффективность поляриметра будет не-

высокой. В качестве такой реакции большой интерес представляет процесс  $p\vec{D} \rightarrow n(pp)$ , когда  $pp$ -пара наблюдается с очень малой энергией возбуждения. Вилкин [84] предложил использовать эту реакцию в качестве тензорного дейтронного поляриметра при сравнительно низких (сотни МэВ) энергиях [85]. Им было замечено, что при малых передачах импульса и малых относительных импульсах  $pp$ -пары реакция  $p\vec{D} \rightarrow n(pp)$  в основном идет за счет перезарядки начального протона на нейтроне из дейтрона, тогда как оставшийся протон играет роль зрителя. В этом случае нерелятивистская модель [84], основанная на зрительном механизме, предсказывает нулевую векторную и значительную тензорную анализирующую способность реакции. При этом сечение реакции достаточно велико для эффективного экспериментального исследования. Позже исследования этого процесса [86–89] при низких энергиях полностью подтвердили справедливость таких предсказаний. Таким образом, эта реакция может, например, служить средством измерения  $T_{20}$  в процессе  $pp \rightarrow D\pi^+$  [90], используемом при исследовании  $NN\pi$ -систем, или в неупругих ( $\vec{D}, \vec{D}'$ )-реакциях на тяжелых ядрах для изучения изоскалярных переходов  $\Delta T = 0, \Delta S = 1$  [91] и во многих других приложениях [71, 92–95].

**6.1. Кинематика и механизм реакции.** Перейдем к рассмотрению реакции (67), когда в с.ц.м. дейтрона образуется медленная скоррелированная пара двух протонов и быстрый нейтрон:

$$p + \mathbf{D} = n + (p_1 + p_2). \quad (79)$$

Специфика (79) состоит в том, что передача импульса от протона к нейтрону мала и, следовательно, основной механизм реакции описывается перезарядкой начального протона на нейтроне мишени, в то время как оставшийся протон из дейтрона играет роль зрителя. Такие реакции могут быть надежно выделены и исследованы на фоне других процессов. На рис. 8 изображена диаграмма, где  $p = (E_p, \mathbf{p})$  и  $n = (E_n, \mathbf{n})$  — импульсы начального протона и конечного нейтрона соответственно,  $P' = p_1 + p_2$  — полный 4-импульс  $pp$ -пары, причем, как и в предыдущих разделах,  $s_f = P'^2 = (2m + E_x)^2$ . Интервал энергии возбуждения  $E_x \sim 0-8$  МэВ. При столь малых значениях  $E_x$   $pp$ -пара находится преимущественно в  $^1S_0$ -состоянии [88], что приводит к существенному упрощению выкладок. В частности, в этом случае матричный элемент реакции не зависит от углов относительного импульса протонов пары, что позволяет представить ее сечение в дважды дифференциальном виде (детали см. в [29]):

$$\frac{d^2\sigma}{dt ds_f} = \frac{1}{2} \frac{1}{64\pi\lambda(p, D)} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s_f}} \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2, \quad (80)$$

где переменная Мандельштама  $t = q^2$  и  $q = n - p$ .



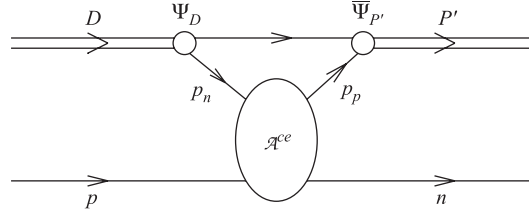


Рис. 8. Диаграмма процесса  $pD \rightarrow n(pp)$ , соответствующая предполагаемому механизму перезарядки начального протона на нейтроне мишени (обозначения вершин — как в формуле (82))

Амплитуда  $M_{fi}$  определяется в рамках формализма Бете–Солпитера по диаграмме, приведенной на рис. 8. Расчет ее весьма громоздкий, поэтому мы отметим здесь лишь ключевые моменты. Прежде всего, вершине перезарядки  $\mathcal{A}^{ce}$  соответствует 4-точечная функция Грина процесса  $pn \rightarrow np$ , у которой начальный нейтрон и конечный протон в общем случае являются немассовыми. С другой стороны, в рассматриваемой реакции энергии возбуждения и переданные импульсы достаточно малы. Следовательно, нуклоны в  $pp$ -паре находятся близко к массовой поверхности, и величину  $\mathcal{A}^{ce}$  можно выразить непосредственно через амплитуды  $f_{r's',sr}$  реального процесса перезарядки  $p + p_n = p_p + n$ :

$$f_{r's',sr} = \bar{u}_\alpha^{s'}(p_p) \bar{u}_\beta^{r'}(n) \mathcal{A}_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{ce} u_\gamma^r(p) u_\delta^s(p_n). \quad (81)$$

С использованием (81) подпроцесс перезарядки включается в матричный элемент в следующем виде [29, 30]:

$$M_{fi} = \sum_{ss'} \frac{1}{(2m)^2} \int d^4k f_{r's',sr} \times \\ \times \bar{u}^s(p_n) \Psi_D^M(k) \left( \frac{\hat{D}}{2} - \hat{k} + m \right) \bar{\Psi}_{P'} \left( k - \frac{q}{2} \right) u^{s'}(p_p). \quad (82)$$

Данная амплитуда обладает явной лоренц-ковариантностью и вычисляется в лаб. системе, где дейтрон покоится. Амплитуда БС для дейтрона  $\Psi_D^M$  уже обсуждалась в предыдущих разделах, здесь мы лишь коротко упомянем, что ее отрицательно-энергетические компоненты не вносят существенного вклада в матричный элемент и поэтому не рассматриваются. Оставшиеся важные узлы диаграммы — подпроцесс перезарядки и амплитуду  $\bar{\Psi}_{P'}$  пары в континууме — обсудим более подробно.

В численных расчетах использовались элементарные амплитуды перезарядки в виде аналитической параметризации [96] или в численном виде,

полученные из парциально-волнового анализа\* различными группами авторов [99, 100]:

$$\begin{aligned} f_1 &= \langle ++ | \mathcal{A}^{ce} | ++ \rangle, & f_2 &= \langle ++ | \mathcal{A}^{ce} | -- \rangle, \\ f_3 &= \langle +- | \mathcal{A}^{ce} | +- \rangle, & f_4 &= \langle +- | \mathcal{A}^{ce} | -+ \rangle, \\ f_5 &= \langle ++ | \mathcal{A}^{ce} | +- \rangle, \end{aligned} \quad (83)$$

где  $f_i$  обозначают спиральные амплитуды  $NN$ -перезарядки (как известно, в данном случае имеются всего 5 независимых амплитуд). В матричном элементе (82) амплитуды  $f_{r's',sr}$ , во-первых, являются спиновыми (не спиральными), а, во-вторых, относятся к системе покоя дейтрона, которая по отношению к подпроцессу перезарядки не является ни лаб. системой, ни системой центра масс. Нами рассматривались параметризации в с. ц. м., поэтому в численных расчетах для (83) необходимо сперва выполнить лоренц-буст вдоль вектора  $\mathbf{p} + \mathbf{k}$  из с. ц. м.  $pn$ -системы в лаб. систему всей реакции, затем при помощи вигнеровского вращения перевести спиральности частиц в проекции спинов на ось  $z$ . С учетом того, что сама процедура лоренц-буста также приводит к вращению спиральностей, всего для каждой частицы потребуется по два вращения спинового состояния [29].

Вычисление амплитуды БС пары в континууме  $\bar{\Psi}_{P'}$  является весьма сложной задачей, так как решает проблему учета взаимодействия в конечном  $^1S_0$ -состоянии данной реакции. Прежде всего стоит отметить, что в лаб. системе конечная  $pp$ -пара обладает ненулевым полным импульсом (движется как целое), что приводит к необходимости использования ковариантной формы для  $\bar{\Psi}_{P'}$ . Это тождественно кинематическому преобразованию состояния пары в подходе БС из ее системы покоя в систему, где пара движется. С точки зрения динамики амплитуда  $\bar{\Psi}_{P'}$  должна удовлетворять неоднородному уравнению БС. Например, в простейшем случае, когда учитывается только псевдоскалярное пион-нуклонное взаимодействие, такое уравнение имеет вид [101]

$$\bar{\Psi}_{P'}(p) = \bar{\Psi}_{P'}^0(p) + ig_{\pi NN}^2 \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \Delta(p-p') \tilde{S}(p_2) \gamma_5 \bar{\Psi}_{P'}(p') \gamma_5 S(p_1). \quad (84)$$

Здесь  $\Delta$  и  $S$  — пропагаторы скалярного и спинорного полей;  $\tilde{S} \equiv U_C S U_C^{-1}$ ;  $\bar{\Psi}_{P'}^0(p)$  — релятивистская плоская волна, соответствующая движению двух протонов без взаимодействия. Решение уравнения (84) может быть представлено в виде ряда Неймана, первым членом которого является  $\bar{\Psi}_{P'}^0(p)$ , и символически это можно записать как

$$\bar{\Psi}_{P'}(p) = \bar{\Psi}_{P'}^0(p) + \bar{\Psi}_{P'}^i(p). \quad (85)$$

\*К этим амплитудам открыт свободный доступ, см., например, [97, 98].

Второе слагаемое, которое определяется взаимодействием, можно условно называть «расходящейся волной». Далее мы рассмотрим результаты вычислений наблюдаемых величин в приближении плоской волны (без второго слагаемого в (85)) и с учетом ВКС, произведенным в рамках приближения одной итерации.

**6.2. Анализ полученных результатов.** На рис. 9 и 10 приведены результаты расчетов дифференциального сечения  $\frac{d\sigma}{dt}$  и тензорной анализирующей способности  $T_{20}$  для процесса (79) в импульсном приближении (штриховые кривые) и с учетом ВКС (сплошные кривые). При этом  $\frac{d\sigma}{dt}$  получается из формулы (80) интегрированием по интервалам энергии возбуждения пары  $E_x$ , соответствующим реальным экспериментальным условиям, т. е.

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_k = \frac{1}{(8\pi)^3\lambda} \int_{R_k} ds_f \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s_f}} |M_{fi}|^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (86)$$

где  $k$  нумерует достижимые интервалы  $E_x$ . В данном случае рассматриваются результаты, полученные на установке SATURN-II [89], где было проведено детальное исследование реакции (79) при энергиях, соответствующих импульсам протона  $|\mathbf{p}| = 0,444$  ГэВ/с и  $|\mathbf{p}| = 0,599$  ГэВ/с, и интервалах энергии возбуждения

$$R_1 : \quad 0 \leq E_x \leq 1 \text{ МэВ}, \quad (87)$$

$$R_2 : \quad 1 \leq E_x \leq 4 \text{ МэВ}, \quad (88)$$

$$R_3 : \quad 4 \leq E_x \leq 8 \text{ МэВ}, \quad (89)$$

причем переменная  $t$  принимает значения от 0 до  $0,16$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>. Поэтому для удобства сравнения во всех расчетах мы будем придерживаться этих областей по  $E_x$  и  $t$ .

Совершенно ясно, что эффектами ВКС в данных условиях нельзя пренебречь. Тем не менее анализ импульсного приближения является весьма поучительным, хотя бы потому, что оно дает качественное описание сечений и тензорной анализирующей способности. Можно отметить, что сечение в импульсном приближении (на рис. 9) разумно согласуется с экспериментом при малых значениях переданного импульса  $|\mathbf{q}|$  примерно до  $0,2$  ГэВ/с и в интервале энергий возбуждения пары  $1 \leq E_x \leq 4$  МэВ. В интервале очень малых энергий возбуждения взаимодействие двух протонов в конечном состоянии играет существенную роль и пренебрежение этими эффектами недопустимо при любых начальных энергиях. С ростом энергии возбуждения пары роль взаимодействия в конечном состоянии падает и использование импульсного приближения становится более аргументированным, с ростом начальной энергии и переданного импульса согласие с экспериментом улучшается,

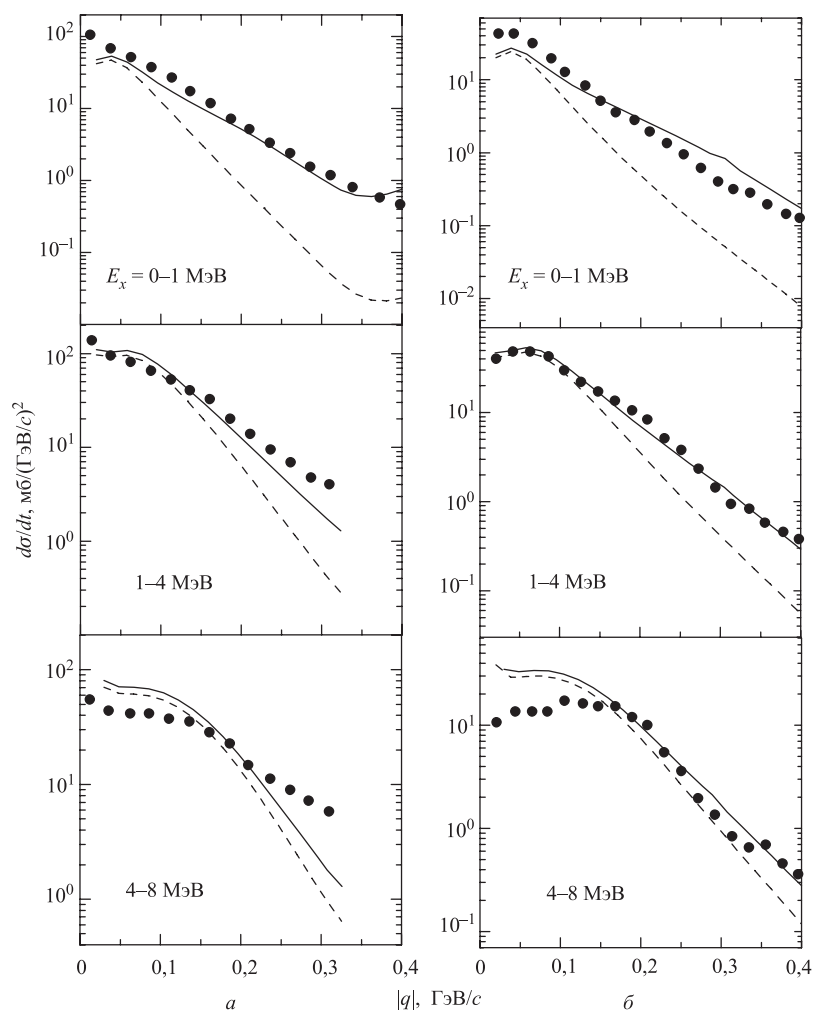


Рис. 9. Сечения (86) для импульсов начального протона: а)  $|\mathbf{p}| = 0,444$  ГэВ/с; б)  $|\mathbf{p}| = 0,599$  ГэВ/с. Экспериментальные данные взяты из [89], пояснения по кривым см. в тексте

и, по-видимому, предположение о детектировании  $pp$ -пары в  $^1S_0$ -состоянии справедливо.

Учет ВКС [30] существенно улучшает описание сечений во всех рассматриваемых кинематических интервалах. При самых малых значениях  $E_x \sim 0$  все еще имеются расхождения, обусловленные необходимостью учета куло-

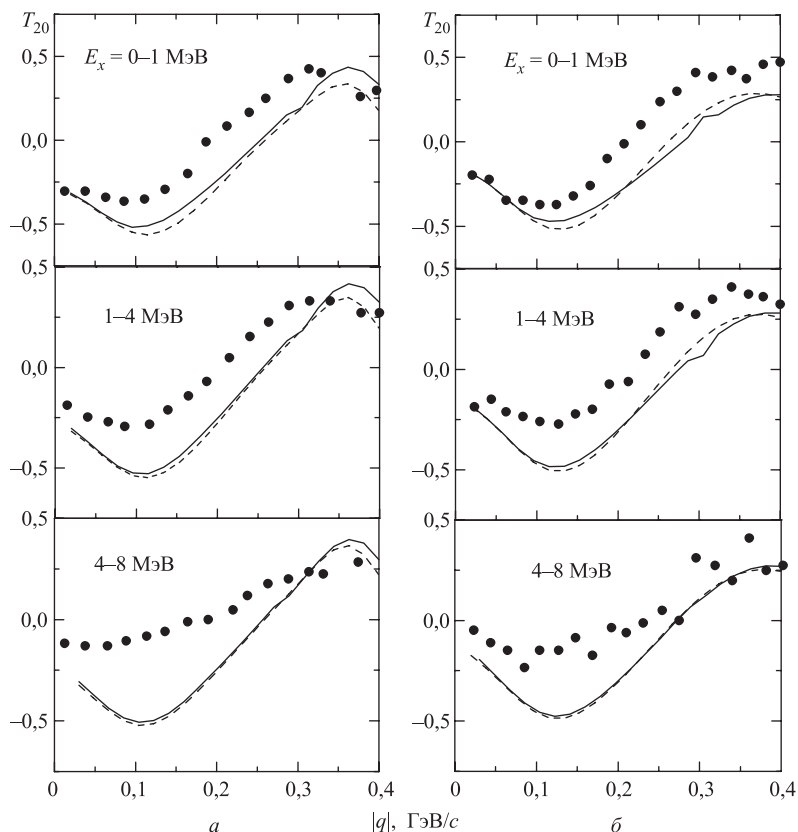


Рис. 10. Тензорные анализирующие способности  $T_{20}$ , соответствующие тем же условиям, что на рис. 9

новского взаимодействия протонов пары. Для более высоких значений  $E_x$ , по-видимому, требуется учет высших парциальных компонент, кроме  $^1S_0$ , хотя бы в импульсном приближении, как делалось в [89]. Тензорная анализирующая способность демонстрирует меньшую чувствительность к поправкам от ВКС, что, по-видимому, является общей проблемой [80].

В целом, в рамках данного подхода, мы обнаруживаем [30], что дифференциальные сечения достаточно велики для экспериментального исследования поляризационных характеристик реакции (79), в том числе и при релятивистских энергиях, достижимых на нуклотроне ОИЯИ и синхротроне COSY (Юлих, ФРГ). Поэтому, в частности, можно получить дополнительные сведения об элементарных парциальных амплитудах перезарядки. С дру-

гой стороны, наблюдение на опыте в этом же процессе протонной пары с малой энергией возбуждения, одновременно с исчезающей векторной и с существенно ненулевой тензорной анализирующей способностью, может однозначно указывать на характер начальной поляризации дейтрона. Другими словами, эта реакция может служить в качестве хорошего поляриметра не только при малых [84], но также при промежуточных и релятивистских начальных энергиях.

### 7. УПРУГОЕ $pD$ -РАССЕЯНИЕ НА $180^\circ$

Отличительная особенность упругого протон-дейтронного рассеяния назад заключается в том, что его амплитуда определяется лишь четырьмя комплексными спиральными амплитудами, и поэтому ее полная экспериментальная реконструкция представляется реальной. Теоретические модели данной реакции предлагались многими авторами [61, 102–113]. Было показано, что механизмы импульсного приближения и двойного рассеяния не обеспечивают полного описания имеющихся данных. Исследования [105, 107, 108] показали, в частности, что дополнение однонуклонного обмена вкладом с промежуточным возбуждением резонансов (таких, как  $N^*(1688)$ ), может существенно улучшить описание эксперимента. Этот подход также не лишен внутренних неопределенностей, связанных, в частности, с рассмотрением вершин типа  $D \rightarrow NN^*$  и амплитуд  $NN \rightarrow NN^*$ .

Помимо упомянутых, имеются еще механизмы мезонных обменов, описываемые треугольными диаграммами [102, 104, 110]. Следует ожидать, что их роль будет важна при импульсах начального протона порядка 1,2–1,3 ГэВ/с (или, что то же самое, при импульсах конечного протона  $P_{\text{lab}} \sim 0,31–0,33$  ГэВ/с). Это соответствует области возможного возбуждения  $\Delta$ -изобар в промежуточном состоянии, и именно при этих энергиях экспериментальный график сечения упругого  $pD$ -рассеяния назад демонстрирует характерную неоднородность поведения (см. [114]). Вклады треугольных диаграмм в неполяризованное сечение и тензорную анализирующую способность исследовались соответственно в работах [102, 104, 110] и [109, 110].

Следует отметить, что модели [102–110] являются существенно нерелятивистскими. Очевидно, что при описании реакции одновременно с установлением ее механизма очень важным является прояснение роли релятивистских эффектов. Первые ковариантные вычисления диаграмм однонуклонного обмена в подходе БС и оценки релятивистских поправок были выполнены в работах [61, 112]. Далее мы рассмотрим механизмы однонуклонного и мезонных обменов (треугольных диаграмм) в подходе БС и на примере однонуклонного обмена представим дальнейшее развитие метода выделения и классификации релятивистских эффектов в подходе БС.

**7.1. Кинематика, структура амплитуды и наблюдаемых.** Запишем реакцию упругого рассеяния назад (68) в следующем виде:

$$p + D = p'(\theta = 180^\circ) + D'. \quad (90)$$

Дифференциальное сечение реакции (90) в системе центра масс сталкивающихся частиц

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 S} \frac{1}{6} \sum_{\text{spin}} \left| \mathcal{M}_{s,M}^{s',M'} \right|^2, \quad (91)$$

где  $S$  — квадрат полной энергии в с.ц.м.;  $\mathcal{M}$  — инвариантная амплитуда процесса. В случае рассеяния назад сечение (91) зависит только от одной кинематической переменной, в качестве которой обычно выбирают  $S$ . В качестве кинематической переменной также будет использоваться импульс конечного протона  $P_{\text{lab}}$  в системе покоя начального дейтрона, которую мы определим здесь как лабораторную систему.

Амплитуда  $\mathcal{M}_{s,M}^{s',M'}$  упругого рассеяния в реакции типа  $1/2 + 1 = 1/2 + 1$  детально изучена в [115–117]. Процесс упругого  $pD$ -рассеяния определяется двенадцатью независимыми парциальными амплитудами [117], но в случае рассеяния вперед или назад только четыре амплитуды остаются независимыми. Запишем полную амплитуду:

$$\mathcal{M}_{s,M}^{s',M'} = \chi_{s'}^+ \mathcal{F}_{M,M'} \chi_s, \quad (92)$$

где  $\chi_s$  ( $\chi_{s'}$ ) — двухкомпонентные спиноры начального (конечного) протонов,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{M,M'} = & \mathcal{A}(\boldsymbol{\xi}_M \cdot \boldsymbol{\xi}_{M'}^+) + \mathcal{B}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}_M)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}_{M'}^+) + i\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma} \cdot [\boldsymbol{\xi}_M \times \boldsymbol{\xi}_{M'}^+]) + \\ & + i\mathcal{D}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\xi}_M \times \boldsymbol{\xi}_{M'}^+]), \end{aligned} \quad (93)$$

$\boldsymbol{\xi}_M$  ( $\boldsymbol{\xi}_{M'}$ ) — вектор поляризации начального (конечного) дейтрона. Вектор  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, параллельный импульсу пучка;  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  — парциальные амплитуды. Во введенных обозначениях неполяризованное сечение (91) определяется как  $\text{Tr}(\mathcal{F}^+ \mathcal{F})$ .

Теперь, с использованием формул (92), (93), можно определить набор всех поляризационных наблюдаемых реакции [115–117]:

$$\mathcal{H}_{\lambda,H \rightarrow \lambda',H'} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F} \sigma_\lambda \mathcal{D}_H \mathcal{F}^+ \sigma_{\lambda'} \mathcal{D}_{H'})}{\text{Tr}(\mathcal{F} \mathcal{F}^+)}. \quad (94)$$

Здесь индексы  $\lambda$  и  $H$  ( $\lambda'$  и  $H'$ ) относятся к поляризациям начального (конечного) протона и дейтрона соответственно;  $\sigma_\lambda$  и  $\mathcal{D}_H$  — матрицы плотности протона и дейтрона. Возможные значения индексов  $\lambda, H \rightarrow \lambda', H'$  являются традиционно сложившимися — например,  $0, 0 \rightarrow 0, 0$  обозначает процесс с

неполяризованными частицами, а  $0, NN \rightarrow 0, NN$  соответствует тензорным поляризациям начального и конечного дейтронов в направлении, перпендикулярном плоскости реакции. Приведем выражения для наблюдаемых величин, которые будут исследоваться далее:

1) тензорная анализирующая способность

$$T_{20} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{H}_{0, NN \rightarrow 0, 0} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4(2 \operatorname{Re}[A\mathcal{B}^*] + |\mathcal{B}|^2 - 2 \operatorname{Re}[C\mathcal{D}^*] - |\mathcal{D}|^2)}{\operatorname{Tr}(\mathcal{F}\mathcal{F}^+)}, \quad (95)$$

2) передача поляризации от начального дейтрона к конечному протону

$$\kappa_{D \rightarrow p} = \frac{3}{2} \mathcal{H}_{0, L \rightarrow L, 0} = \frac{6(\operatorname{Re}[(2A^* + \mathcal{B}^* + \mathcal{D}^*)C] + |C|^2)}{\operatorname{Tr}(\mathcal{F}\mathcal{F}^+)}, \quad (96)$$

3) передача тензорной поляризации от начального дейтрона к конечному

$$\mathcal{H}_{0, LN \rightarrow 0, LN} = \frac{9(|A|^2 + \operatorname{Re} A\mathcal{B} - |C|^2)}{\operatorname{Tr}(\mathcal{F}\mathcal{F}^+)}. \quad (97)$$

**7.2. Матричный элемент.** Диаграмма релятивистского однопуклонного обмена приведена на рис. 5, и матричный элемент в данном случае

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p') \Gamma_D(q) \tilde{S}_2 \bar{\Gamma}_{D'}(q') u(p). \quad (98)$$

Здесь  $\tilde{S}_2 = 1/(\hat{D}/2 - \hat{q} + m)$ ,  $q = p' - D/2$ . Очевидно, что в любой системе отсчета по крайней мере один из дейтронов (начальный либо конечный) движется. Решение уравнения БС для дейтрона численно определено в его системе покоя, и, в принципе, для описания движущегося состояния необходимо выполнить лоренц-буст. Ясно, что эффекты этого буста, релятивистские по своей природе, должны проявляться в наблюдаемых величинах, и далее мы убедимся, что это действительно так. Но сама по себе операция буста в явном виде весьма громоздка, и поэтому вершинные функции  $\Gamma_D(q)$  запишем в ковариантной форме:

$$\Gamma_D(q) = \left[ h_1 \hat{\xi} + h_2 \frac{(q\xi)}{m} \right] + \left[ h_5 \hat{\xi} + h_6 \frac{(q\xi)}{m} \right] \frac{\hat{D}/2 - \hat{q} + m}{m}. \quad (99)$$

Возведя в квадрат матричный элемент (98), можно попытаться вычислить с использованием программ аналитических вычислений (например, Maple V) сечение (91) в ковариантном виде. К сожалению, в данном случае это практически невозможно в силу чрезвычайной громоздкости выражений. Поэтому для явного изучения эффектов лоренц-буста и других релятивистских поправок мы станем рассматривать прежде всего не сечение (91), а амплитуду  $\mathcal{M}$ .



Весьма плодотворным оказывается выделение из матричного элемента (98) структуры (93), когда амплитуды  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  выражаются через функции  $h_1, h_2, h_5, h_6$  и кинематические множители. В этом случае вычисление наблюдаемых величин по формулам типа (95)–(97) становится тривиальным. С другой стороны, инвариантные функции  $h_1, h_2, h_5, h_6$  имеют вид

$$\sqrt{4\pi}h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}G_1 - \frac{1}{2}G_3 + \frac{\sqrt{3}m}{2M_D P_{\text{lab}}}(2E'_p - M_D)G_5, \quad (100)$$

$$\sqrt{4\pi}h_2 = \frac{-m G_1}{\sqrt{2}(m + E'_p)} - \frac{m(m + 2E'_p)}{2P_{\text{lab}}^2}G_3 + \frac{\sqrt{3}m(2M_D - E'_p)}{2P_{\text{lab}}M_D}G_5, \quad (101)$$

$$\sqrt{4\pi}h_5 = -\frac{\sqrt{3}mE'_p}{2M_D P_{\text{lab}}}G_5, \quad (102)$$

$$\sqrt{4\pi}h_6 = \frac{-m^2}{\sqrt{2}M_D(m + E'_p)}G_1 + \frac{(E'_p + 2m)m^2}{2M_D P_{\text{lab}}^2}G_3 + \frac{\sqrt{6}m^2}{2M_D P_{\text{lab}}}G_7, \quad (103)$$

где  $G_i$  — парциальные вершины в системе покоя дейтрона. Вводя волновые функции БС по формулам (40)–(42), можно вычислить  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  в терминах  $U, W$  и  $\Psi_{P_5, P_7}$ . Еще раз отметим, что волновые функции БС  $U$  и  $W$  — это аналоги известных нерелятивистских волновых функций дейтрона  $u(P_{\text{lab}}), w(P_{\text{lab}})$ , и при малых значениях  $P_{\text{lab}}$  они практически с ними совпадают [34]. Поэтому следует ожидать, что их вклады в амплитуды и сечение должны соответствовать нерелятивистским результатам. Части, содержащие отрицательно-энергетические волны  $\Psi_{P_5, P_7}$ , имеют релятивистское происхождение и, следовательно, являются чистыми проявлениями релятивистских эффектов.

**7.3. Релятивистские эффекты.** Сначала рассмотрим принципиально иной источник релятивистских поправок — так называемые эффекты лоренц-буста, возникающие при преобразовании амплитуды БС для дейтрона из системы покоя в систему, где он движется. Наиболее прямой способ изучения этих эффектов состоит в сравнении нерелятивистских результатов с полученными в подходе БС, когда в последних приравниваются к нулю все вклады отрицательно-энергетических волн и остаются только волны  $U, W$ . В нерелятивистском случае сечение имеет вид [115, 116]

$$\frac{d\sigma_{NR}}{d\Omega} = 3(u^2(q) + w^2(q))^2. \quad (104)$$

Вычисляя с учетом вышесказанного сечение (91), произведем разложение результата в ряд Тейлора по  $P_{\text{lab}}^2/2m^2$  с точностью до нескольких лидирующих членов и получим

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{12m^2}{S} (U^2(P_{\text{lab}}) + W^2(P_{\text{lab}}))^2 P_{\text{lab}}^4 \left( 1 + \frac{P_{\text{lab}}^2}{2m^2} + \frac{29P_{\text{lab}}^4}{16m^4} + \dots \right). \quad (105)$$

Видно, что результаты подхода БС в нулевом порядке по  $P_{\text{lab}}^2/2m^2$  воспроизводят нерелятивистские формулы и содержат поправки от лоренц-буста, которые можно выделить явно. При малых значениях  $P_{\text{lab}}$  эти поправки пренебрежимо малы, но по мере роста  $P_{\text{lab}}$  они становятся все более существенными.

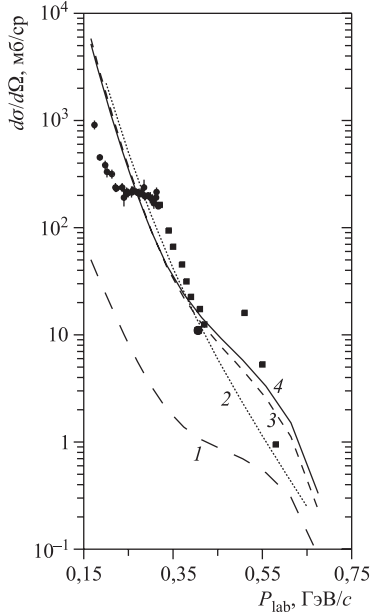


Рис. 11. Дифференциальное сечение реакции  $pD \rightarrow Dp$

Сечение рассматриваемого процесса приведено на рис. 11. Кривая 3 показывает вклад положительно-энергетических функций  $U$  и  $W$ , который можно сравнить с нерелятивистским сечением от боннского потенциала [118], представленным кривой 2. Кривая 1 соответствует чистому эффекту лоренц-буста. Сплошная кривая 4 является полным результатом расчета; экспериментальные данные взяты из [110, 114]. Из рис. 11 следует, что поправки от лоренц-буста становятся существенными для  $P_{\text{lab}} > 0,5$  ГэВ/с. Сравнение с экспериментальными данными свидетельствует о том, что однонуклонный обмен дает только качественное описание сечения, поэтому надо учитывать и иные механизмы реакции.

Произведем теперь полный анализ релятивистских эффектов в сечении. Ясно, что в вычислении поправок имеются две малые величины, удобные в качестве параметров разложения, — это отношение  $P_{\text{lab}}^2/2m^2$  и члены, пропорциональные  $P$ -волнам в амплитуде БС. Удерживая лидирующие члены по этим параметрам, для сечения получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} + \delta\sigma,$$

$$\delta\sigma = \frac{24\sqrt{6}m^3 P_{\text{lab}}^3}{\sqrt{S}}(U^2 + W^2)(U + \sqrt{2}W) \left( \Psi_{P_5} + \frac{2\sqrt{2}P_{\text{lab}}^2}{3m^2} \Psi_{P_7} \right) + (106)$$

$$+ \frac{2\sqrt{6}m P_{\text{lab}}^5}{\sqrt{S}}(U^2 + W^2)(9\sqrt{2}W + 33U) \Psi_{P_5} + \dots$$

Эффекты лоренц-буста никак не проявляются в поляризационных характеристиках (94), так как лоренц-буст факторизуется в виде ряда и происходит его

взаимное сокращение. Для тензорной анализирующей способности  $T_{20}$  имеем

$$T_{20} = T_{20}^{NR} + \delta T_{20},$$

$$\delta T_{20} = -\frac{\sqrt{3}(U + \sqrt{2}W)(\sqrt{2}U - W)^2}{(U^2 + W^2)^2} \frac{m}{P_{\text{lab}}} \left( \Psi_{P_5} + \frac{2\sqrt{2}P_{\text{lab}}^2}{3m^2} \Psi_{P_7} + \dots \right), \quad (107)$$

для передачи поляризации

$$\kappa_{D \rightarrow p} = \kappa_{D \rightarrow p}^{NR} + \delta \kappa,$$

$$\delta \kappa = \frac{\sqrt{6}(U - W/\sqrt{2}) \left[ (2\sqrt{2}W - U)^2 - 9W^2 \right]}{(U^2 + W^2)^2} \times \quad (108)$$

$$\times \frac{m}{P_{\text{lab}}} \left( \Psi_{P_5} + \frac{2\sqrt{2}P_{\text{lab}}^2}{3m^2} \Psi_{P_7} + \dots \right).$$

Здесь первые слагаемые в точности воспроизводят известные нерелятивистские формулы для тензорной анализирующей способности и передачи поляризации

$$T_{20}^{NR} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-W^2 - 2\sqrt{2}UW}{U^2 + W^2}, \quad \kappa_{D \rightarrow p}^{NR} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U^2 - W^2 + UW/\sqrt{2}}{U^2 + W^2}. \quad (109)$$

На рис. 12 представлены результаты расчета  $T_{20}$  в рассматриваемой реакции. Кривая 2 соответствует вкладу компонент только с положительной

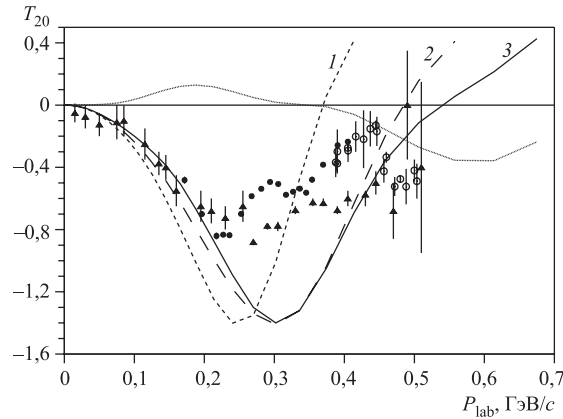


Рис. 12. Тензорная анализирующая способность  $T_{20}$

энергией  $T_{20}^{NR}$ , кривая 1 представляет чистые релятивистские поправки в (107), кривая 3 — полный результат расчета в подходе БС. Экспериментальные данные (светлые и черные кружки) взяты из работ [73, 119, 120]. Для полноты представлены также экспериментальные данные для процессов фрагментации дейтрона [72] (треугольники) и результаты вычисления  $T_{20}$  с использованием минимальной релятивизации [121, 122] для парижской волновой функции дейтрона [123]. Из рис. 12 видно, что теоретические расчеты предсказывают изменение знака  $T_{20}$ , тогда как ее экспериментальные значения остаются отрицательными во всем интервале изменения  $P_{lab}$ , как для упругого, так и для неупругого  $pD$ -рассеяния. Однако легко заметить, что добавление релятивистских поправок (кривая 2) к результату расчета с использованием только положительно-энергетических волн (кривая 1) приводит к лучшему описанию данных.

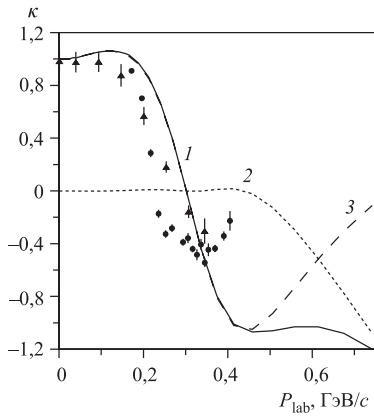


Рис. 13. Передача поляризации от начального дейтрона к конечному протону  $\kappa_{D \rightarrow p}$

правки для  $\kappa_{D \rightarrow p}$  малы для малых и средних значений  $P_{lab}$  и возрастают по мере роста начальной энергии реакции.

Независимый взгляд на природу релятивистских поправок обеспечивает приближение одной итерации. В качестве примера вычислим в этом приближении амплитуду  $\mathcal{A}$ , содержащую поправку от состояния с отрицательной энергией:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + 32\sqrt{6}\pi P_{lab}^3 \left( U - \frac{1}{\sqrt{2}}W \right) \Psi_{P_5}. \quad (110)$$

Подставляя (49) в формулу (110), получаем

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} = & -g_{\pi NN}^2 P_{lab}^3 \frac{192\sqrt{2}\pi}{M_D E_p'} \times \\ & \times \int_0^\infty dr \frac{e^{-\mu r}}{r} (1 + \mu r) j_1(rP_{lab}) \left[ \sqrt{2}u(r) - w(r) \right] \left( U - \frac{1}{\sqrt{2}}W \right). \quad (111) \end{aligned}$$

на остаются отрицательными во всем интервале изменения  $P_{lab}$ , как для упругого, так и для неупругого  $pD$ -рассеяния. Однако легко заметить, что добавление релятивистских поправок (кривая 2) к результату расчета с использованием только положительно-энергетических волн (кривая 1) приводит к лучшему описанию данных.

На рис. 13 представлены аналогичные результаты расчетов передачи поляризации  $\kappa_{D \rightarrow p}$ . Кривая 3 — вклад волновых функций БС с положительной энергией  $\kappa_{D \rightarrow p}^{NR}$ , а релятивистским поправкам (108) соответствует кривая 2; кривая 1 — полный результат. Экспериментальные данные взяты из тех же источников, что для  $T_{20}$ . Как и следовало ожидать, релятивистские поправки для  $\kappa_{D \rightarrow p}$  малы для малых и средних значений  $P_{lab}$  и возрастают по мере роста начальной энергии реакции.

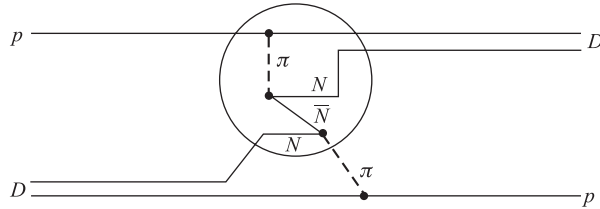


Рис. 14. Возможная диаграмма процесса  $pD \rightarrow Dp$ , уже учтенная в подходе БС через  $P$ -компоненты амплитуды

Это выражение является весьма сходным с результатами нерелятивистских вычислений так называемых «катастрофических» диаграмм и диаграмм рождения пар в процессах электрорасщепления дейтрона [124], а также треугольных диаграмм, обычно рассматриваемых в процессах упругого  $pD$ -рассеяния [104,110]. В нашем случае эти поправки могут быть представлены как диаграммы с мезонным обменом (см. рис. 14), присутствие которых объясняется учетом антинуклонных степеней свободы в уравнении БС. Остальные амплитуды  $B, C, D$  получают аналогичные поправки, и, следовательно, то же самое происходит с сечением (106) и всеми поляризационными наблюдаемыми (94). Отсюда становится ясно, что даже в импульсном приближении последовательные релятивистские вычисления уже содержат в себе специфические мезонообменные диаграммы, например, упомянутые парные токи, и поэтому, в частности, необходимо учитывать проблему «двойного счета» при вычислении релятивистских поправок за пределами спектаторного механизма.

**7.4. О полном наборе наблюдаемых величин.** Как отмечалось в [115], одной из целей будущих экспериментов является прямая реконструкция четырех комплексных амплитуд (93). Полный набор поляризационных наблюдаемых для этого был предложен в [115, 116]. Он может быть составлен из десяти спиновых наблюдаемых, куда войдут две величины первого порядка, такие как сечение и тензорная анализирующая способность  $\mathcal{H}_{0,NN \rightarrow 0,0}$ , и восемь спиновых корреляций второго порядка, например  $\mathcal{H}_{0,NN \rightarrow 0,NN}$ ,  $\mathcal{H}_{0,LN \rightarrow 0,LN}$ , и т. д. Вычисления спиновых корреляций второго порядка подробно представлены в [65]. Здесь же мы отметим, что существуют наблюдаемые, которые в нерелятивистском пределе (в смысле принятого нами определения) в точности равны нулю и, следовательно, складываются только из релятивистских поправок. Например, коэффициент тензор-тензорной передачи от начального дейтрона к конечному  $\mathcal{H}_{0,LN \rightarrow 0,LN}$  в нерелятивистских вычислениях тождественно равен нулю, тогда как в подходе БС получаем

$$\mathcal{H}_{0,LN \rightarrow 0,LN} \simeq 54m^4 P_{\text{lab}}^2 \left[ \sqrt{2}U \left( \Psi_{P_5} + 2\sqrt{2}\Psi_{P_7} \right) - W \left( 7\Psi_{P_5} + 2\sqrt{2}\Psi_{P_7} \right) \right]^2, \quad (112)$$

где опущены вклады более высоких порядков по  $P_{\text{lab}}^2/m^2$ . Из рис. 15 видно, что этот коэффициент весьма мал по абсолютному значению, и прямое измерение наблюдаемых такого рода может прояснить роль релятивистских  $P$ -волн в дейтроне.

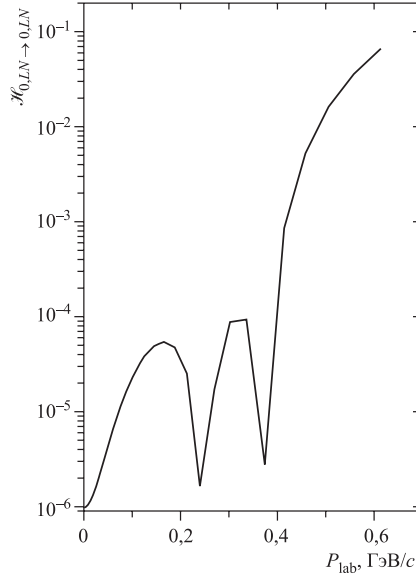


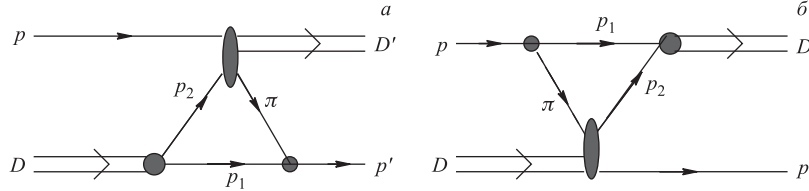
Рис. 15. Коэффициент передачи  $\mathcal{H}_{0, LN \rightarrow 0, LN}$  тензорной поляризации от начального дейтрона к конечному

В заключение подчеркнем, что в различных наблюдаемых величинах релятивистские поправки играют разную роль. Например, в дейтрон-дейтронных корреляциях учет примеси  $P$ -волн в дейтроне приводит к существенному изменению результатов [65].

**7.5. Треугольные диаграммы.** Как уже отмечалось, механизм однонуклонного обмена должен быть дополнен диаграммами с обменом  $\pi$ -мезоном, приведенными на рис. 16, которые мы будем именовать далее треугольными диаграммами. Таким образом, полная амплитуда реакции

$$\mathcal{T}_{s, M}^{s', M'} = \mathcal{M}_{s, M}^{s', M'} + T_{s, M}^{s', M'} + \tilde{T}_{s, M}^{s', M'}, \quad (113)$$

где  $\mathcal{M}_{s, M}^{s', M'}$  соответствует амплитуде однонуклонного обмена, а  $T_{s, M}^{s', M'}$  и  $\tilde{T}_{s, M}^{s', M'}$  обозначают вклады треугольных диаграмм. Сначала рассмотрим тре-

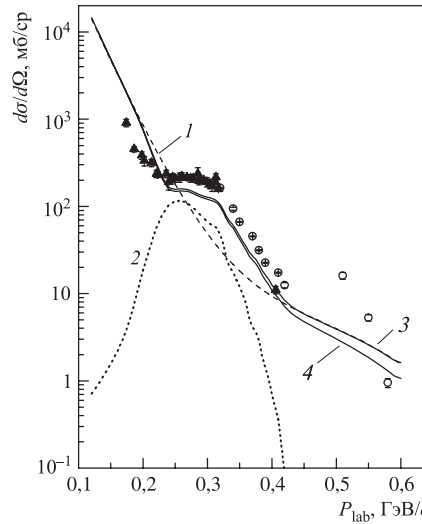

 Рис. 16. Треугольная диаграмма с подпроцессом: а)  $pp \rightarrow D\pi^+$ , б)  $D\pi^+ \rightarrow pp$ 

уюльную диаграмму на рис. 16, а. Соответствующая амплитуда с обменами протоном и  $\pi^+$ -мезоном по правилам Манделъстама запишется в виде

$$T_{s,M}^{s',M'} = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \frac{\sqrt{2} g_{\pi NN} \gamma_5}{\pi^2 - \mu^2 + i\varepsilon} \Psi_D^M(q) \hat{A}_{p_2+p \rightarrow \pi^+ + D'}^{M'} u(\mathbf{p}, s), \quad (114)$$

где  $g_{\pi NN}$  — пион-нуклонная константа связи;  $\mu$  — масса пиона;  $\Psi_D^M(q)$  — амплитуда БС, и оператор  $\hat{A}_{p_2+p \rightarrow \pi^+ + D'}^{M'}$  соответствует подпроцессу  $pp \rightarrow \pi^+ D$ , в общем случае вне-массовому. Помимо амплитуды (114) имеется еще и другая, обусловленная диаграммой с обменами нейтроном и  $\pi^0$ -мезоном и связанная с ней изоспиновым множителем  $1/2$ . Поэтому сумма этих двух диаграмм будет представлена выражением (114) с дополнительным множителем  $3/2$ .

Процедура вычисления треугольных диаграмм подробно описана в [80]. Здесь на рис. 17 мы сразу приводим результаты численного расчета дифференциального сечения. Кривая 1 соответствует вкладу однонуклонного обмена [65]. Вклады диаграмм одномезонного обмена (кривая 2) существенны в области  $P_{\text{lab}} \sim 0,2-0,4$  ГэВ/с, что отвечает значениям импульса начального протона  $0,66-1,85$  ГэВ/с. Именно в этой области, несколько размытой за счет эффектов фермиевского движения, должно проявляться возбуждение  $\Delta$ -изобар в процессе  $pp \rightarrow \pi^+ D$  [125]. За ее границами


 Рис. 17. Сечение реакции  $pD \rightarrow Dp$  с учетом треугольных диаграмм (пояснения см. в тексте); экспериментальные данные взяты из [110, 114]

амплитуда этого подпроцесса очень быстро уменьшается, как и треугольная диаграмма в целом. Суммарный результат представлен сплошными кривыми, из которых кривая 3 соответствует учету  $P$ -волн в однонуклонном обмене, 4 — вкладу только положительно-энергетических компонент во всех диаграммах. Очевидно, что учет  $\Delta$ -возбуждений (опосредованный через амплитуды подпроцесса  $pp \rightarrow \pi^+ D$ ) существенно улучшает описание экспериментальных данных. Также из рис. 17 следует, что в районе максимального вклада треугольных диаграмм поправки от  $P$ -волн (разница между кривыми 3 и 4) пренебрежимо малы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Струминский Б. В. Препринт ОИЯИ Р-1939. Дубна, 1965.
2. Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н. Препринт ОИЯИ Д-1968. Дубна, 1965.
3. Боголюбов Н. Н. и др. Препринт ОИЯИ Д-2075. Дубна, 1965.
4. Han M. Y., Nambu Y. // Phys. Rev. 1965. V. 139. P. 1006.
5. Miyamoto Y. // Suppl. Progr. Theor. Phys. 1965. V. Extra. P. 187.
6. Coleman S., Weinberg E. // Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 1888;  
Zee A. // Ibid. P. 3630;  
Gross D. J., Wilczek F. // Phys. Rev. D. 1974. V. 8. P. 3633;  
Politzer H. D. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1346.
7. Breidenbach M. et al. // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 23. P. 935.
8. Матвеев В. А., Мурадян П. М., Тавхелидзе А. Н. // ЭЧАЯ. 1970. Т. 2. С. 5.
9. Bjorken J. D. // Phys. Rev. 1969. V. 179. P. 1547.
10. Bjorken J. D. // Phys. Rev. 1966. V. 148. P. 1467; Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 1376.
11. Герасимов С. Б. // ЯФ. 1965. Т. 2. С. 598; Т. 5. С. 1263;  
Drell S. D., Hearn A. C. // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. P. 908.
12. Thoma U. // Intern. J. Phys. A. 2005. V. 20. P. 1568.
13. Cioffi degli Atti C. et al. // Phys. Lett. B. 1996. V. 376. P. 309.
14. Kaptari L. P. et al. // Phys. Rev. C. 1995. V. 51. P. 52.
15. Замолодчиков А. Б., Копелиович Б. З., Ланидус Л. И. // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. С. 595.
16. Bertch J. et al. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 297.
17. Jain P., Pire B., Rolston J. P. // Phys. Rep. 1996. V. 271. P. 67.
18. Tiemeier P. C., Tjon J. A. // Phys. Rev. C. 1994. V. 49. P. 494.
19. Machleidt R., Holinde K., Elster Ch. // Phys. Rep. 1987. V. 149. P. 1.
20. Буров В. В., Лукьянов В. К., Тутов А. И. // ЭЧАЯ. 1984. Т. 15. С. 1248.
21. Буров В. В., Достовалов В. Н., Суськов С. Э. // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23. С. 721.
22. Arenhövel H., Ritz F., Wilbois T. // Phys. Rev. C. 2000. V. 61. P. 034002.
23. Nakanishi N. N. // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1969. V. 43. P. 1.



24. *Salpeter E. E., Bethe H. A.* // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 1232.
25. *Gell-Mann M., Low F. E.* // Ibid. P. 350.
26. *Wick G. C.* // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 1124.
27. *Mandelstam S.* // Proc. Roy. Soc. A (London). 1955. V. 233. P. 248.
28. *Umnikov A. Yu., Kartari L. P., Khanna F. C.* // Phys. Rev. C. 1997. V. 56. P. 1700;  
*Umnikov A. Yu., Khanna F. C.* // Phys. Rev. C. 1994. V. 49. P. 2311;  
*Umnikov A. Yu. et al.* // Phys. Lett. B. 1994. V. 334. P. 163.
29. *Доркин С. М. и др.* // ЯФ. 2002. Т. 65. С. 469.
30. *Kartari L. P. et al.* // Eur. Phys. J. A. 2003. V. 17. P. 119.
31. *Zuilhof M. J., Tjon J. A.* // Phys. Rev. C. 1980. V. 22. P. 2369.
32. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959.
33. *Доркин С. М., Каптарь Л. П., Семих С. С.* Релятивистская модель дейтрона в подходе Бете–Солпитера // Теория квантовых систем с сильным взаимодействием: Сб. науч. тр. Тверского гос. ун-та, Тверь, 1995. С. 40–52.
34. *Kartari L. P. et al.* // Phys. Rev. C. 1996. V. 54. P. 986.
35. *Kubis J. J.* // Phys. Rev. D. 1972. V. 6. P. 547.
36. *Nieuwenhuis T., Tjon J. A.* // Few-Body Syst. 1996. V. 21. P. 167.
37. *Logunov A. A., Tavheliidze A. N.* // Nuovo Cim. 1963. V. 29. P. 380.
38. *Klein A., Lee T.-S. H.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 4308.
39. *Браун Дж., Джексон А. Д.* Нуклон-нуклонные взаимодействия. М.: Атомиздат, 1979.
40. *Kadyshevsky V. G.* // Nucl. Phys. 1968. V. 6. P. 125.
41. *Gross F.* // Phys. Rev. 1969. V. 186. P. 1448.
42. *Gross F., Van Orden J. W., Holinde K.* // Phys. Rev. C. 1992. V. 45. P. 2094;  
*Buck W., Gross F.* // Phys. Rev. D. 1979. V. 20. P. 2361;  
*Arnold R. G., Carlson C. E., Gross F.* // Phys. Rev. C. 1980. V. 21. P. 1426.
43. *Frederico T. et al.* // Few-Body Syst. 2003. V. 33. P. 89.
44. *Dirac P. A. M.* // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392.
45. *Bakamjian B., Thomas L. H.* // Phys. Rev. 1953. V. 92. P. 1300.
46. *Keister B. D., Polyzou W. N.* // Adv. Nucl. Phys. 1991. V. 20. P. 225.
47. *Frankfurt L. L., Frederico T., Strikman M.* // Phys. Rev. C. 1993. V. 48. P. 2182;  
*Lev F. M., Pace E., Salme G.* // Phys. Rev. C. 2000. V. 62. P. 064004.
48. *Грач И. Л., Кондратюк Л. А.* // ЯФ. 1984. Т. 39. С. 316.
49. *Cardarelli F. et al.* // Phys. Lett. B. 1995. V. 349. P. 393.
50. *Frederico T. et al.* // Nucl. Phys. A. 2004. V. 373. P. 260.
51. *Carbonell J. et al.* // Phys. Rep. 1998. V. 300. P. 215.
52. *Mangin-Brinet M., Carbonell J., Karmanov V. A.* // Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 125005.
53. *Carbonell J., Karmanov V. A.* // Eur. Phys. J. A. 1999. V. 6. P. 9.
54. *Bethe H. A., Longmire C.* // Phys. Rev. 1950. V. 77. P. 647.
55. *Weinberg S.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 251. P. 228.
56. *Beane S. R. et al.* nucl-th/0008064.

57. Доркин С. М., Каптарь Л. П., Семух С. С. // ЯФ. 1997. Т. 60. С. 1784.
58. Harada M., Yoshida Y. KUNS-1304, HE(HT) 94/16, SU-4240-592; hep-ph/9505206.
59. Umnikov A. Yu. // Z. Phys. A. 1997. Bd. 357. S. 333.
60. Fleischer J., Tjon J. A. // Nucl. Phys. B. 1975. V. 84. P. 375; Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 2537.
61. Keister B. D., Tjon J. A. // Phys. Rev. C. 1982. V. 26. P. 578.
62. Bondarenko S. G. et al. // Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 3143.
63. Desplanques B., Karmanov V. A., Mathiot J. F. // Nucl. Phys. A. 1995. V. 589. P. 697.
64. Kaptari L. P. et al. // Phys. Lett. B. 1997. V. 404. P. 8.
65. Kaptari L. P. et al. // Phys. Rev. C. 1998. V. 57. P. 1097.
66. Семух С. С. и др. // ЯФ. 2005. Т. 68. С. 1.
67. Levine M. J., Wright J., Tjon J. A. // Phys. Rev. 1967. V. 154. P. 1433.
68. Fortes M., Jackson A. D. // Nucl. Phys. A. 1971. V. 175. P. 449.
69. Kemmer W., Salam A. // Proc. Roy. Soc. A. 1955. V. 230. P. 266.
70. Semikh S. S. et al. nucl-th/0410076.
71. Komarov V. I. et al. KFA Annual Rep. Jülich, 1995. P. 64;  
Kacharava A. K. et al. JINR Commun. E1-96-42. Dubna, 1996;  
Perdrisat C. F. et al. Proton-to-Proton Polarization Transfer in Backward Elastic Scattering.  
COSY proposal #68.1.
72. Ableev V. G. et al. // Nucl. Phys. A. 1983. V. 393. P. 491;  
Perdrisat C. F., Punjabi V. // Phys. Rev. C. 1990. V. 42. P. 1899;  
Kühn B., Perdrisat C. F., Strokovsky E. A. // Phys. Lett. B. 1994. V. 312. P. 298;  
Kobushkin A. P. et al. // Phys. Rev. C. 1994. V. 50. P. 2627;  
Erö J. et al. // Ibid. P. 2687;  
Arvieux J. et al. // Nucl. Phys. A. 1984. V. 431. P. 6132.
73. Rekaló M. P., Simik I. M. // Phys. Lett. B. 1995. V. 356. P. 434;  
Azhgirei L. S. et al. // Ibid. V. 361. P. 21.
74. Kaptari L. P. et al. // Phys. Lett. B. 1995. V. 351. P. 400.
75. Dolidze M. G., Lykasov G. I. // Z. Phys. A. 1990. Bd. 336. S. 339.
76. Schopper H., Landolt-Börnstein S. Numerical Data and Functional Relationship in Science and Technology. V. 7. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1973.
77. Komarov V. I. et al. Exclusive Deuteron Break-Up Study with Polarized Protons and Deuterons at COSY. COSY proposal #20 (updated 1999); <http://ikpd15.ikp.kfa-juelich.de:8085/doc/Proposals.html>
78. Komarov V. I. et al. // Phys. Lett. B. 2003. V. 553. P. 179.
79. Uzikov Yu. N. et al. nucl-th/0211001;  
Uzikov Yu. N. // J. Phys. G. 2002. V. 28. P. B13.
80. Kaptari L. P. et al. // Few-Body Syst. 1999. V. 27. P. 189.
81. Abaev V. et al. nucl-ex/0105002.
82. Kaptari L. P. et al. // Eur. Phys. J. A. 2004. V. 19. P. 301.
83. Haidenbauer J., Koike Y., Plessas W. // Phys. Rev. C. 1986. V. 33. P. 439.
84. Bugg D. V., Wilkin C. // Phys. Lett. B. 1985. V. 152. P. 37;  
Bugg D. V., Wilkin C. // Nucl. Phys. A. 1987. V. 467. P. 575.

85. *Kox S. et al.* // Nucl. Instr. Meth. A. 1994. V. 346. P. 527.
86. *Ishida S. et al.* // Phys. Lett. B. 1993. V. 314. P. 279;  
*Sakai H. et al.* // Nucl. Phys. A. 1998. V. 631. P. 757.
87. *Motobayashi T. et al.* // Phys. Lett. B. 1989. V. 233. P. 69.
88. *Carbonell J., Barbaro M., Wilkin C.* // Nucl. Phys. A. 1991. V. 529. P. 653.
89. *Kox S. et al.* // Nucl. Phys. A. 1993. V. 556. P. 621.
90. *Bugg D. V., Hasan A., Shypit R. L.* // Nucl. Phys. A. 1988. V. 477. P. 546;  
*Furget C. et al.* // Nucl. Phys. A. 1998. V. 631. P. 747.
91. *Morlet M. et al.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 247. P. 228.
92. *Aladashvili B. S. et al.* // Nucl. Phys. B. 1975. V. 86. P. 461.
93. *Greiner D. E. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 152.
94. *Кантарь Л. П., Тумов А. И.* // ЯФ. 1984. Т. 39. С. 612.
95. *Sitnik I. M. et al.* // JINR Rapid Commun. 1995. No. 2[70]. P. 19.
96. *Bouquet A., Diu B.* // Nuovo Cim. A. 1976. V. 35. P. 157.
97. <http://nn-online.sci.kun.nl>
98. <http://said.phys.vt.edu> (рекомендуется использовать на том же сайте telnet-версию программы как более полную, login: said, пароль не требуется).
99. *Stoks V. G. J. et al.* // Phys. Rev. C. 1993. V. 48. P. 792.
100. *Arndt R. A., Strakovsky I. I., Workman R. L.* nucl-th/0004039; Phys. Rev. C (in press).
101. *Korchin A. Yu., Shebeko A. V.* Preprint KFTI No. 88-56. Kharkov, 1988.
102. *Kolybasov V. M., Smorodinskaya N. Ya.* // Phys. Lett. B. 1971. V. 37. P. 272.
103. *Chahoud J. N., Russo G.* // Nuovo Cim. A. 1967. V. 49. P. 206;  
*Yao T.* // Phys. Rev. 1964. V. 134. P. B454.
104. *Craigie N. S., Wilkin C.* // Nucl. Phys. B. 1969. V. 14. P. 477.
105. *Kerman A. K., Kisslinger L. S.* // Phys. Rev. 1969. V. 180. P. 1483.
106. *Kisslinger L. S.* Mesons in Nuclei / Eds. M. Rho, D. Wilkinson. Amsterdam: North-Holland, 1978.
107. *Levitas M., Noble J.* // Nucl. Phys. A. 1975. V. 251. P. 385.
108. *Кондратюк Л. А., Лев Ф. М.* // ЯФ. 1977. Т. 26. С. 294; 1976. Т. 23. С. 1056.
109. *Boudard A., Dillig M.* // Phys. Rev. C. 1985. V. 31. P. 302.
110. *Nakamura A., Satta L.* // Nucl. Phys. A. 1985. V. 445. P. 706.
111. *Santos F. D., Arriaga A.* // Phys. Lett. B. 1994. V. 325. P. 267.
112. *Keister B. D.* // Phys. Rev. C. 1981. V. 24. P. 2628.
113. *Узиков Ю. Н.* // ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 1405.
114. *Berthet P. et al.* // J. Phys. G. 1982. V. 8. P. L111;  
*Dubai L. et al.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 597.
115. *Rekalo M. P., Piskunov N. M., Sitnik I. M.* // Few-Body Syst. 1998. V. 23. P. 187; JINR Preprint E2-97-190. Dubna, 1997; JINR Preprint E4-96-328. Dubna, 1996; Phys. At. Nucl. 1994. V. 57. P. 2089.
116. *Ladygin V. P., Ladygina N. B.* // J. Phys. G. 1997. V. 23. P. 847;  
*Ladygin V. P.* // Phys. At. Nucl. 1997. V. 60. P. 1238.

117. *Ghazikhanian V. et al. // Phys. Rev. C. 1991. V. 43. P. 1532;*  
*Alberi G., Bleszyansky M., Jaroszewicz T. // Ann. Phys. 1982. V. 142. P. 299.*
118. *Machleid R., Holinde K., Elster Ch. // Phys. Rep. 1987. V. 149. P. 1.*
119. *Azhgirei L. S. et al. // Proc. of the 14th Intern. IUPAP Conf. on Few Body Problems in Physics (ICFBP 14), Williamsburg, VA, 1994.*
120. *Azhgirei L. S. et al. // Phys. Lett. B. 1997. V. 391. P. 22.*
121. *Frankfurt L. L., Strikman M. I. // Phys. Rep. 1981. V. 76. P. 215.*
122. *Brodsky S. J. et al. // Phys. Rev. D. 1973. V. 8. P. 4574;*  
*Kogut J. B., Soper D. E. // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 2901;*  
*Weinberg S. // Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 1313.*
123. *Lacombe M. et al. // Phys. Rev. C. 1980. V. 21. P. 861.*
124. *Lock J. A., Foldy L. L. // Ann. Phys. 1975. V. 93. P. 276.*
125. *Arndt R. A. et al. // Phys. Rev. C. 1993. V. 48. P. 1926; 1997. V. 56. P. 635.*