

## ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ: $Q^2$ -ЗАВИСИМОСТЬ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

*А. В. Котиков*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор некоторых характерных черт процесса глубоконеупругого рассеяния. В частности, подробно описана  $Q^2$ -зависимость структурных функций, особенно в области малых значений переменной Бьеркена  $x$ . Продемонстрирована также техника вычисления коэффициентных функций вильсоновского разложения. Показана важность перехода к схемно-инвариантной теории возмущений в кинематических областях, где неведущая поправка к наблюдаемым получает большие численные значения.

A review of some specific properties of the deep inelastic scattering process is given. The  $Q^2$ -dependence of structure functions is considered in detail. The technique for calculation of coefficient functions of the Wilson expansion is presented. The importance of the scheme-invariant perturbation theory is demonstrated for the kinematic ranges, where nonleading corrections to observables have large numerical values.

PACS: 12.38.-t, 12.38.Bx, 12.38.Cy, 13.60.Nb

### ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемый в обзоре процесс глубоконеупругого рассеяния (ГНР) лептонов на адронах (мы ограничимся далее нуклонами) является уникальным из-за нескольких своих характерных черт. Прежде всего, из-за возможности изучать структуру нуклона только по относительным характеристикам налетающего и рассеянного лептонов, что позволяет опустить проблему адронизации образующихся в процессе партонов: кварков и глюонов. Поскольку процесс адронизации зависит существенным образом от непертурбативной динамики кварков и глюонов в нуклоне, необходимость учета его как составной части всегда сильно уменьшает предсказательную силу любого процесса.

Второе важное свойство ГНР — малость константы связи электрослабого взаимодействия, что позволяет при теоретическом анализе ограничиться только однобозонным (однофотонным или одно- $(W, Z)$ -бозонным) обменом

между лептоном и нуклоном, т.е. ведущим членом разложения\* по электрослабой константе связи  $\alpha_{ew}$ . Сечение однофотонного (или одно- $(W, Z)$ -бозонного) обмена может быть представлено согласно оптической теореме как мнимая часть амплитуды рассеяния виртуального фотона на нуклоне, что позволяет применить к процессу ГНР вильсоновское операторное разложение на световом конусе и разделить этот процесс на части, ответственные за большие и малые расстояния. Часть, ответственную за малые расстояния, а также эволюция второй части (связанной с большими расстояниями) при изменении виртуальности обменной частицы могут быть найдены из пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД). Таким образом, только нормировка адронной части процесса ГНР (т.е. значение части, связанной с большими расстояниями, при одной фиксированной виртуальности) является невычисляемой в рамках пертурбативной КХД и должна быть определена из экспериментальных данных ГНР.

Вычисления фейнмановских диаграмм, соответствующих рассеянию виртуального фотона на нуклоне, являются весьма трудоемкими, что привело к развитию новых методов, которые могут быть найдены в работах [2–4]. В настоящем обзоре методы вычисления фейнмановских интегралов рассматриваться не будут из-за ограниченности объема. Их рассмотрению посвящено несколько обзоров (см., например, [5] и ссылки в нем).

Получение информации на основе высоких порядков теории возмущений (ТВ) — процесс трудоемкий. Однако это не единственная проблема в рамках пертурбативной квантовой теории поля. Другая важная проблема возникает при сравнении предсказаний теории с экспериментальными данными. Как правило, для проверки теории (и/или для получения информации о каких-либо ее невычисляемых параметрах) используют некоторые физические величины (т.е. наблюдаемые), которые, с одной стороны, могут быть найдены из эксперимента, а с другой — представлены в виде ряда ТВ с известными коэффициентами (обычно могут быть рассчитаны несколько первых коэффициентов). При таком сравнении основная трудность возникает из-за зависимости этих коэффициентов (а также константы связи) от схемы устранения бесконечностей, которые присущи фейнмановским интегралам. Эта проблема становится особенно актуальной в приложениях КХД и других моделей, где константа связи и/или коэффициенты разложения наблюдаемых по константе связи не являются достаточно малыми в физически интересной кинематической области (например, при значениях переменной Бьеркена  $x \sim 0$  и  $x \sim 1$  для структурных функций (СФ) ГНР (см., например, [6])). Следовательно,

---

\*Коррекции за счет следующего порядка в разложении по электрослабой константе связи  $\alpha_{ew}$  иногда становятся важными. Они посчитаны в [1] и используются при выделении адронной части сечения ГНР.

для осуществления какого-либо осмысленного сравнения предсказаний КХД с экспериментом необходимо как-то решить проблему схемного произвола. Анализ ситуации, связанной с этой проблемой, а также приложения к процессу ГНР даны в разд. 3–5.

Целью настоящей обзорной работы является:

- демонстрация вычисления  $\alpha_s$ -поправки к коэффициентной функции ведущего твиста разложения Вильсона для продольной СФ ГНР,
- анализ неоднозначностей, индуцированных зависимостью от схемы вычитаний бесконечностей фейнмановских интегралов, а также изучение их влияния на интерпретацию экспериментальных данных ГНР,
- изучение свойств СФ ГНР в двух важных областях переменной Бьеркена  $x$ :  $x \sim 0$  и  $x \sim 1$ .

Основное содержание работы представлено в пяти разделах. Во введении обозначена цель настоящей работы. В разд. 1 введены общие положения процесса ГНР. Рассмотрены СФ ГНР и партонные распределения (ПР). Введены представления для коэффициентных функций вильсоновского разложения и аномальных размерностей операторов Вильсона. Разд. 2 посвящен вычислению  $\alpha_s$ -поправки к продольной СФ. В разд. 3 проведен схемно-инвариантный анализ СФ и отношения  $R = \sigma_L/\sigma_T$  в процессе ГНР и показано его значение в области экспериментов, проводимых на ускорителе HERA. В разд. 4 исследована область малых значений переменной Бьеркена  $x$ . На основе метода сведения конволюции Меллина к простому произведению, рассмотренного в приложении, изучены  $Q^2$ -зависимости ПР и связи между СФ ГНР. Разд. 5 содержит параметризации СФ и их отношений, совместимые с предсказаниями пертурбативной КХД во всей области переменной  $x$ . Исследованы  $Q^2$ -зависимость асимметрии  $A_1(x, Q^2)$  и ее влияние на величину правила сумм Бьеркена. В заключении перечислены основные результаты, рассмотренные в обзоре.

## 1. ПРОЦЕСС ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО РАССЕЙНИЯ

**1.1. Общие положения.** 1. Сечение процесса ГНР лептонов на нуклонах  $l + N \rightarrow l' + X$  может быть представлено в виде\*

$$d\sigma \sim L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Здесь лептонная часть задается (см., например, [7, 8]) тензором  $L^{\mu\nu}$ , вычисляемым точно для точечной вершины  $\gamma ll'$ . Адронная часть сечения описывается безразмерным тензором  $W_{\mu\nu}$ , который согласно общим принципам

---

\*Как обычно, за исключением специально отмеченных мест, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

инвариантности раскладывается на так называемые СФ ГНР  $F_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) следующим образом\*:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \int d^4z e^{iqz} \langle p | J_\mu^+(z) J_\nu(0) | p \rangle = \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) 2x F_1(x, Q^2) - \\ - \left( p_\mu + \frac{(pq)}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu + \frac{(pq)}{q^2} q_\nu \right) \frac{2x}{q^2} F_2(x, Q^2) + \\ + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \frac{x}{q^2} F_3(x, Q^2) + \dots, \quad (2)$$

где символом «...» обозначены члены, зависящие от спина нуклона. Импульсы фотона и адрона обозначены символами  $q_\mu$  и  $p_\mu$  соответственно. Введены также стандартные для ГНР обозначения:  $Q^2 = -q^2 > 0$  и  $x = Q^2/(2pq)$  для квадрата виртуальности фотона, т. е. его «массы», и для части  $x$  импульса адрона, переносимого партоном, соударяющимся с фотоном.

СФ  $g_1$ , описывающая спин адрона, а также функция  $F_3$ , которая вносит вклад при рассеянии нейтрино на нуклоне, будут рассматриваться только в разд. 5. Все интересующие нас элементы анализа подобны для СФ  $F_2$ ,  $F_3$  и  $g_1$ , поэтому в нашем рассмотрении до п. 5.4 мы ограничимся исследованием только СФ  $F_2$  и  $F_1$ . Более того, вместо СФ  $F_1$  введем новую функцию  $F_L$  и/или отношение  $R$ , которые определяются соотношениями

$$F_L(x, Q^2) = F_2(x, Q^2) - 2x F_1(x, Q^2), \quad R(x, Q^2) = \frac{F_L(x, Q^2)}{2x F_1(x, Q^2)}. \quad (3)$$

Заметим, что величина  $R$  может быть представлена также как отношение сечений продольно- и поперечно-поляризованных фотонов на адроне:

$$R(x, Q^2) = \sigma_L / \sigma_T. \quad (4)$$

Как уже было отмечено во введении, тензор  $W_{\mu\nu}$  связан по оптической теореме с амплитудой  $T_{\mu\nu}$  упругого рассеяния фотона на адроне:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \int d^4z e^{iqz} \langle p | T (J_\mu^+(z) J_\nu(0)) | p \rangle = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) T_L(x, Q^2) - \\ - \left( g_{\mu\nu} + \frac{2x(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu)}{q^2} + p_\mu p_\nu \frac{4x^2}{q^2} \right) T_2(x, Q^2). \quad (5)$$

---

\*Строго говоря, данное ниже разложение содержит не все возможные комбинации независимых тензорных структур. Однако структуры, отличные от рассмотренных, зануляются при свертке с лептонным тензором  $L^{\mu\nu}$ .

Разложим инвариантные амплитуды  $T_L$  и  $T_2$  по обратным степеням  $x$  (здесь и далее  $k$  пробегает значения 2 и  $L$ ):

$$T_k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n T_{k,n}. \quad (6)$$

Коэффициенты  $T_{k,n}$  совпадают (для четных  $n$ ) с моментами  $M_{k,n}$  СФ  $F_k$ :

$$T_{k,n} = M_{k,n} \equiv \int_0^1 dx x^{n-2} F_k(x, Q^2) \quad (n = 2m). \quad (7)$$

Далее везде в этом разделе  $n$  будут принимать четные значения.

С другой стороны, произведение токов в уравнении (5) можно выразить через набор локальных операторов  $O_{\mu_1, \dots, \mu_n}^j$  с коэффициентными функциями  $C_n^j(z)^*$ :

$$T(J_\mu^+(z)J_\nu(0)) = \sum_{n,j} C_n^j(z) O_{\mu_1, \dots, \mu_n}^j. \quad (8)$$

Следовательно, моменты СФ представляются в виде суммы произведений коэффицентных функций  $C_{k,n}^j(Q^2/\mu^2)$  и матричных элементов

$$\langle N | O_{\mu_1, \dots, \mu_n}^j | N \rangle = p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_n} A_n^j(\mu^2):$$

$$M_{k,n}(Q^2) = \sum_j C_{k,n}^j(Q^2/\mu^2) A_n^j(\mu^2). \quad (9)$$

2. Коэффициентные функции удовлетворяют ренорм-групповым уравнениям:

$$\begin{aligned} & \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_{NS}^n \right) C_{k,n}^{\text{MS}}(Q^2/\mu^2, g) = 0, \\ & \sum_b \left( \left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} \right] \delta_b^a - \gamma_{ba}^n \right) C_{k,n}^j(Q^2/\mu^2, g) = 0 \quad (b = S, G), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\delta_b^a$  — символ Кронекера;  $\gamma_{NS}^n$  — аномальная размерность оператора  $O_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{NS}$ , а  $\gamma_{ba}^n$  — элементы матрицы аномальных размерностей операторного вектора  $\vec{O}_{\mu_1, \dots, \mu_n} = (O_{\mu_1, \dots, \mu_n}^S, O_{\mu_1, \dots, \mu_n}^G)$  в кварковых и глюонных обкладках.

---

\*Здесь и далее, кроме специально отмеченных мест, индекс  $j$  (индекс  $a$ ) пробегает значения  $NS$ ,  $S$  и  $G$  ( $S$  и  $G$ ), которыми обозначены несинглетная и синглетная кварковые, а также глюонная компоненты соответственно.

Решая уравнения (10), получаем для коэффициентных функций следующие выражения:

$$C_{k,n}^{NS}(Q^2/\mu^2, a_s) = C_{k,n}^{NS}(1, \bar{a}_s(Q^2)) \exp\left(-\int_{\bar{a}_s(\mu^2)}^{\bar{a}_s(Q^2)} db \frac{\gamma_{NS}^n(b)}{2\beta(b)}\right),$$

$$\mathbf{C}_{k,n}(Q^2/\mu^2, a_s) = \left[ T \exp\left(\int_{\bar{a}_s(Q^2)}^{\bar{a}_s(\mu^2)} db \frac{\hat{\gamma}^n(b)}{2\beta(b)}\right) \right] \mathbf{C}_{k,n}(1, \bar{a}_s(Q^2)), \quad (11)$$

где  $\bar{a}_s(Q^2) = g^2(Q^2)/(4\pi)^2 \equiv \alpha_s(Q^2)/(4\pi)$ ,  $a_s = \bar{a}_s(\mu^2)$  и

$$T \exp\left(\int_{\bar{a}_s(Q^2)}^{\bar{a}_s(\mu^2)} db \frac{\hat{\gamma}^n(b)}{2\beta(b)}\right) \equiv 1 + \int_{\bar{a}_s(Q^2)}^{\bar{a}_s(\mu^2)} db \frac{\hat{\gamma}^n(b)}{2\beta(b)} + \int_{\bar{a}_s(Q^2)}^{\bar{a}_s(\mu^2)} db \int_{a_s}^b dc \frac{\hat{\gamma}^n(b)\hat{\gamma}^n(c)}{4\beta(b)\beta(c)} + \dots$$

Соотношения (11) справедливы для любого порядка теории возмущений. Разложим все величины в ряд по константе связи  $\bar{a}_s$ :

$$C_{2,n}^j(1, a_s) = 1 - \delta_G^j + B_{2,n}^{(1)j} a_s + \dots, \quad (12)$$

$$C_{L,n}^j(1, a_s) = B_{L,n}^{(1)j} a_s \left(1 + R_{L,n}^{(2)j} a_s + \dots\right),$$

$$\beta(a_s) = -\sum_{m=0} \beta_m a_s^{m+2}, \quad \gamma_{NS}^n(a_s) = \sum_{m=0} \gamma_{NS}^{(m)n} a_s^{m+1}, \quad (13)$$

$$\hat{\gamma}^n(a_s) = \sum_{m=0} \hat{\gamma}^{(m)n} a_s^{m+1}.$$

Подставляя (12) и (13) в выражение (11) и диагонализуя синглетный вклад, получаем во втором порядке по  $\bar{a}_s(Q^2)$  (здесь и далее, кроме специально отмеченных мест,  $i = NS, +, -$ ):

$$M_{2,n}(Q^2) = \sum_i A_n^i [\bar{a}_s(Q^2)]^{d_i^n} \left(1 + \bar{a}_s(Q^2) \left[B_{2,n}^{(1)i} + \bar{Z}_n^{(i)}\right] + O(\bar{a}_s^2(Q^2))\right), \quad (14)$$

$$M_{L,n}(Q^2) = \sum_i A_n^i B_{L,n}^{(1)i} [\bar{a}_s(Q^2)]^{d_i^n + 1} \times$$

$$\times \left(1 + \bar{a}_s(Q^2) \left[R_{L,n}^{(2)i} + \bar{Z}_n^{(i)}\right] + O(\bar{a}_s^2(Q^2))\right), \quad (15)$$

где

$$d_{NS}^n = \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2\beta_0}, \quad d_{\pm}^n = \frac{\gamma_{\pm}^{(0)n}}{2\beta_0}, \quad (16)$$

$$B_{k,n}^{(1)\pm} = B_{k,n}^{(1)S} + \frac{\gamma_{\pm}^{(0)n} - \gamma_{SS}^{(0)n}}{\gamma_{SG}^{(0)n}} B_{k,n}^{(1)G}, \quad R_{k,n}^{(2)\pm} = R_{k,n}^{(2)S} + \frac{\gamma_{\pm}^{(0)n} - \gamma_{SS}^{(0)n}}{\gamma_{SG}^{(0)n}} R_{k,n}^{(2)G}, \quad (17)$$

$$\bar{Z}_n^{NS} = \frac{\gamma_{NS}^{(1)n}}{2\beta_0} - \frac{\gamma_{NS}^{(0)n} \beta_1}{2\beta_0^2}, \quad \bar{Z}_n^{\pm} = \frac{\gamma_{\pm\pm}^{(1)n}}{2\beta_0} - \frac{\gamma_{\pm}^{(0)n} \beta_1}{2\beta_0^2} - \frac{\gamma_{\pm\mp}^{(1)n}}{2\beta_0 + \gamma_{\pm}^{(0)n} - \gamma_{\mp}^{(0)n}}. \quad (18)$$

Дальнейшую расшифровку обозначений можно найти в работе [8].

**1.2. ПР и их  $Q^2$ -эволюция.** Для упрощения анализа уравнений (14) и (15) удобно ввести ПР, через которые можно выразить одновременно и поперечную, и продольную СФ. Введем\* несинглетную  $f_{NS}(x, Q^2)$  и синглетную  $f_S(x, Q^2)$  функции распределения кварков, а также  $f_G(x, Q^2)$ -функцию распределения глюонов.

Существует несколько возможностей связи моментов СФ  $M_{k,n}(Q^2)$  и моментов ПР (см. [7, 8]):

$$f_j(n, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} \tilde{f}_j(x, Q^2). \quad (19)$$

Мы ограничимся рассмотрением наиболее часто используемой схемы (см. обзор [8]), в которой аномальные размерности ответственны за эволюцию (момента) ПР, а коэффициентные функции — за связь моментов СФ и ПР. Более того, положим для простоты равными факторизационную и ренормализационную шкалы. Определим моменты ПР следующим образом:

$$f_{NS}(n, Q^2) = f_{NS}(n, \mu^2) \exp \left( - \int_{\bar{a}_s(\mu^2)}^{\bar{a}_s(Q^2)} db \frac{\gamma_{NS}^n(b)}{2\beta(b)} \right),$$

$$\begin{pmatrix} f_S(n, Q^2) \\ f_G(n, Q^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_S(n, \mu^2) \\ f_G(n, \mu^2) \end{pmatrix} T \exp \left( \int_{\bar{a}_s(Q^2)}^{\bar{a}_s(\mu^2)} db \frac{\hat{\gamma}^n(b)}{2\beta(b)} \right). \quad (20)$$

Сравнивая выражения (14), (15) и (20) в первых двух порядках (по  $\bar{a}_s$ ), находим (при  $\mu^2 = Q^2$ ):

в ведущем порядке ТВ:

$$M_{2,n}(Q^2) = \delta_{NS} \cdot f_{NS}(n, Q^2) + \delta_S \cdot f_S(n, Q^2),$$

$$M_{L,n}(Q^2) = B_{L,n}^{(1)S} \bar{a}_s(Q^2) M_{2,n}(Q^2) + B_{L,n}^{(1)G} \bar{a}_s(Q^2) \delta_S \cdot f_G(n, Q^2), \quad (21)$$

---

\*Здесь и далее ПР уже домножены на  $x$ , в отличие от их стандартного определения.

где в коэффициентах  $\delta_{NS} = 1/6$  и  $\delta_S = 5/18$  учтены заряды  $u$ -,  $d$ -,  $s$ - и  $c$ -кварков;

в следующем за ведущим приближении:

$$M_{2,n}(Q^2) = (\delta_{NS} \cdot f_{NS}(n, Q^2) + \delta_S \cdot f_S(n, Q^2)) \left(1 + B_{2,n}^{(1)S} \bar{a}_s(Q^2)\right) + \delta_S B_{2,n}^{(1)G} \bar{a}_s(Q^2) \cdot f_G(n, Q^2), \quad (22)$$

$$M_{L,n}(Q^2) = B_{L,n}^{(1)S} \bar{a}_s(Q^2) \times \left[ \delta_{NS} \cdot f_{NS}(n, Q^2) \left(1 + R_{L,n}^{(2)NS} \bar{a}_s(Q^2)\right) + \delta_S \cdot f_S(n, Q^2) \left(1 + R_{L,n}^{(2)S} \bar{a}_s(Q^2)\right) \right] + B_{L,n}^{(1)G} \bar{a}_s(Q^2) \delta_S \cdot f_G(n, Q^2) \left(1 + R_{L,n}^{(2)G} \bar{a}_s(Q^2)\right). \quad (23)$$

В выражениях (22) и (23) учтено соотношение

$$B_{k,n}^{(1)NS} = B_{k,n}^{(1)S}. \quad (24)$$

**1.3. Коэффициентные функции.** Запишем разложение Вильсона для коэффициентов  $T_{k,n}^{NS}$ ,  $T_{k,n}^a$ , выделив из операторов  $A_n^{NS}$ ,  $A_n^{ab}$  перенормированные множители  $Z_n^{NS}$ ,  $Z_n^{ab}$  ( $a, b = S, G$ ):

$$T_{k,n}^{NS} = \bar{A}_n^{NS} Z_n^{NS} C_{k,n}^{NS}(Q^2/\mu^2, a_s), \quad T_{k,n}^S = \bar{A}_n^S \hat{Z}_n^S C_{k,n}^S(Q^2/\mu^2, a_s). \quad (25)$$

Новые операторы  $\bar{A}_n^{NS}$  и  $\bar{A}_n^{ab}$  являются неизвестными константами, вообще говоря, зависящими от нормировки  $\mu^2$ , при работе в адронных обкладках.

Разложим все величины в ряд по константе связи с учетом выражений (12), (13). Тогда коэффициентные функции могут быть представлены в следующем виде:

$$C_{2,n}^{NS}(Q^2/\mu^2, a_s) = 1 + a_s C_{2,n}^{(1)NS}(Q^2/\mu^2) + \dots = 1 + a_s \left[ B_{2,n}^{(1)NS} - \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right] + \dots, \quad (26)$$

$$C_{L,n}^{NS}(Q^2/\mu^2, a_s) = a_s C_{L,n}^{(1)NS}(Q^2/\mu^2) + a_s^2 C_{L,n}^{(2)NS}(Q^2/\mu^2) + \dots = a_s B_{L,n}^{(1)NS} + \left[ B_{L,n}^{(2)NS} - \left( \beta_0 + \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2} \right) B_{L,n}^{(1)NS} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right] + \dots, \quad (27)$$

$$C_{2,n}^S(Q^2/\mu^2, a_s) = 1 + a_s C_{2,n}^{(1)S}(Q^2/\mu^2) + \dots = 1 + a_s \left[ B_{2,n}^{(1)S} - \frac{\gamma_{SS}^{(0)n}}{2} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right] + \dots, \quad (28)$$



$$C_{L,n}^S(Q^2/\mu^2, a_s) = a_s C_{L,n}^{(1)S}(Q^2/\mu^2) + a_s^2 C_{L,n}^{(2)S}(Q^2/\mu^2) + \dots = a_s B_{L,n}^{(1)S} +$$

$$+ \left[ B_{L,n}^{(2)S} - \left\{ \left( \beta_0 + \frac{\gamma_{SS}^{(0)n}}{2} \right) B_{L,n}^{(1)S} + \frac{\gamma_{SG}^{(0)n}}{2} B_{L,n}^{(1)G} \right\} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right] + \dots, \quad (29)$$

$$C_{2,n}^G(Q^2/\mu^2, a_s) = 1 + a_s C_{2,n}^{(1)G}(Q^2/\mu^2) + \dots =$$

$$= 1 + a_s \left[ B_{2,n}^{(1)G} - \frac{\gamma_{GS}^{(0)n}}{2} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right] + \dots, \quad (30)$$

$$C_{L,n}^G(Q^2/\mu^2, a_s) = a_s C_{L,n}^{(1)G}(Q^2/\mu^2) + a_s^2 C_{L,n}^{(2)G}(Q^2/\mu^2) + \dots = a_s B_{L,n}^{(1)G} +$$

$$+ \left[ B_{L,n}^{(2)G} - \left\{ \left( \beta_0 + \frac{\gamma_{GG}^{(0)n}}{2} \right) B_{L,n}^{(1)G} + \frac{\gamma_{GS}^{(0)n}}{2} B_{L,n}^{(1)S} \right\} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right] + \dots, \quad (31)$$

где

$$B_{L,n}^{(2)j} = B_{L,n}^{(1)j} R_{L,n}^{(2)j}. \quad (32)$$

Заметим, что в правой части (32) нет суммирования по повторяющимся индексам.

Для моментов СФ и перенормированных множителей операторов можно написать следующие выражения:

$$T_{2,n}^j = \bar{A}_n^j \left( 1 + a_s T_{2,n}^{(1)j} + \dots \right), \quad T_{L,n}^j = \bar{A}_n^j \left( a_s T_{L,n}^{(1)j} + a_s^2 T_{L,n}^{(2)j} + \dots \right), \quad (33)$$

$$Z_n^{NS} = 1 + a_s Z_n^{(1)NS} + \dots, \quad Z_{n,b}^a = \delta_b^a + a_s Z_{n,b}^{(1)a} + \dots, \quad (34)$$

где (см. [7, 8])\*

$$Z_n^{(1)NS} = \frac{1}{2\varepsilon} \left( \gamma_{NS}^{(0)n} + 2\gamma_S^{(0)} \right) = \frac{C_F}{\varepsilon} \left( 4S_1(n) - 3 - \xi - \frac{2}{n(n+1)} \right), \quad (35)$$

$$\hat{Z}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} Z_{n,S}^{(1)S} & Z_{n,G}^{(1)S} \\ Z_{n,S}^{(1)G} & Z_{n,G}^{(1)G} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\varepsilon} \begin{pmatrix} \gamma_{SS}^{(0)n} + 2\gamma_S^{(0)} & \gamma_{SG}^{(0)n} \\ \gamma_{GS}^{(0)n} & \gamma_{GG}^{(0)n} + 2\gamma_G^{(0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} C_F \left[ 4S_1(n) - 3 - \xi - \frac{2}{n(n+1)} \right] & -4T_F \left[ \frac{1}{n} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right] \\ -4C_F \left[ \frac{1}{(n+1)} + \frac{2}{n(n-1)} \right] & C_A \left[ 4S_1(n) - \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{4}{n(n-1)} - \frac{4}{(n+1)(n+2)} \right] \end{pmatrix} \quad (36)$$

\*Здесь и далее  $\varepsilon = (4 - D)/2$ , где  $D$  — размерность пространства.

в произвольной  $\xi$ -калибровке глюонного пропагатора

$$-\frac{i}{k^2} \left( g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right),$$

а  $\gamma_S^{(0)}$  и  $\gamma_G^{(0)}$  — аномальные размерности кварка и глюона соответственно. Здесь

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C_A = N, \quad T_F = \frac{f}{2}$$

для  $SU(N)$ -калибровочной группы и  $f$  сортов кварков и

$$S_r(n) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^r} \equiv S_r. \quad (37)$$

Подставляя разложения (33) и (34) в уравнение (25), получаем в первом порядке по  $a_s$

$$C_{L,n}^{(1)j} = T_{L,n}^{(1)j}, \quad (38)$$

$$C_{2,n}^{(1)NS} = T_{2,n}^{(1)NS} - Z_n^{(1)NS}, \quad (39)$$

$$C_{2,n}^{(1)a} = T_{2,n}^{(1)a} - Z_{n,a}^{(1)S} \quad (40)$$

и во втором порядке по  $a_s$

$$C_{L,n}^{(2)NS} = T_{L,n}^{(2)NS} - Z_n^{(1)NS} C_{L,n}^{(1)NS}, \quad (41)$$

$$C_{L,n}^{(2)a} = T_{L,n}^{(2)a} - \sum_{b=S,G} Z_{n,b}^{(1)a} C_{L,n}^{(1)b}. \quad (42)$$

Замечательное свойство ГНР — независимость коэффициентных функций  $C_{k,n}^{NS}$  и  $C_{k,n}^a$  от типа обкладок, т. е. от специфики мишени, на которой рассеивается фотон. Это свойство позволяет применить рассмотренный здесь аппарат к рассеянию фотона на свободном партоне, где все рассмотренные выше величины могут быть вычислены точно, а для операторов  $\bar{A}_n^{NS}$  и  $\bar{A}_n^{ab}$  могут быть применены нормировочные условия  $\bar{A}_n^{NS} = 1$  и  $\bar{A}_n^{ab} = \delta_b^a$ . Таким образом, на партонном уровне коэффициентные функции  $C_{k,n}^{NS}$  и  $C_{k,n}^a$  могут быть найдены, а затем использованы в уравнениях (14), (15), (22) и (23) на адронном уровне для нахождения аналитической зависимости (моментов) СФ и ПР и последующего сравнения зависимости этих моментов с экспериментальными данными.

**1.4. Степенные поправки.** Далее в обзоре основное внимание будет уделено исследованию свойств операторов низшего твиста вильсоновского разложения. В этом пункте рассмотрим также степенные  $\sim 1/Q^{2n}$  ( $n = 1, 2$ ) поправки, свойства которых в настоящий момент интенсивно изучаются.

Одни степенные поправки возникают из-за массы мишени, другие — из-за ненулевых кварковых масс (см. [7]). Кроме того, существуют поправки от операторов высших твистов в разложении Вильсона, приводящие к новым динамическим эффектам, связанным с «изначальным» поперечным импульсом кварков внутри нуклона или с конечностью размера нуклона.

Вклады, связанные с массой мишени и тяжелых кварков, изучены достаточно хорошо, по крайней мере, в ведущем приближении. Изучение же операторов высших твистов представляет собой гораздо более трудную задачу. Заметим, что даже классификация операторов четвертого твиста, наиболее простого среди операторов высших твистов, является довольно непростой задачей (см., например, обзор [9]).

Это и обуславливает тот факт, что методы анализа операторов высших твистов начали развиваться интенсивно только несколько лет назад. До недавнего времени были выполнены только некоторые теоретические вычисления (см., например, [10]) и выдвинуты эвристические аргументы [7]. Последние показали, что вклад от операторов высших твистов, вероятно, имеет следующий вид (например, для СФ  $F_2$ ):

$$F_2^{(\text{full})}(x, Q^2) = F_2^{(\text{tw}2)}(x, Q^2) \left[ 1 + \frac{h_4(x, Q^2)}{Q^2} + \frac{h_6(x, Q^2)}{Q^4} + \dots \right], \quad (43)$$

где символами  $h_4(x, Q^2)$  и  $h_6(x, Q^2)$  обозначены амплитуды вкладов четвертого и шестого твистов.

В ранних работах был исследован только вклад четвертого твиста, который представлялся в виде  $h_4(x, Q^2) = k_1^2 x / (1 - x) + k_2^2$ , где коэффициенты  $k_1^2$  и  $k_2^2$  являлись феноменологическими параметрами и определялись из эксперимента (см., например, фиты SLAC/BCDMS-данных в работах [11–13]).

В последние несколько лет, однако, наметился несомненный прогресс в процессе оценки вклада высших твистов. Прогресс связан с развитием ренормального подхода, который основан на том факте, что в КХД определение матричных элементов операторов низших твистов является некорректной операцией из-за появления степенных расходимостей. Необходимость интерпретации в самосогласованной манере вклада радиационных коррекций высоких порядков (в асимптотических рядах) требует [10] существования степенным образом подавленных членов. Таким образом, предсказания ренормальной модели для поправок высших твистов в СФ ГНР возникают за счет степенным образом подавленных неопределенностей, появляющихся в пертурбативном разложении вильсоновских коэффициентов для операторов низших твистов.

Такие оценки вклада высших твистов, возникающие в ренормальной модели, успешно описывают феноменологически как форму, так и величину степенным образом подавленных вкладов в СФ ГНР в области средних и больших значений  $x$  (см., например, недавние фиты экспериментальных данных для  $xF_3$  [14] и  $F_2$  [15–19, 11–13]).

В рамках ренормальной модели СФ  $F_2$  может быть представлена в форме, аналогичной (43):

$$F_2(x, Q^2) = F_2^{(\text{tw}2)}(x, Q^2) + \sum_{k=4,6} \left( \frac{\Lambda_k^2}{Q^2} \right)^{\frac{k-2}{2}} h_k(x, Q^2) \otimes F_2^{(\text{tw}2)}(x, Q^2), \quad (44)$$

где два последних слагаемых записаны в виде конволюции Меллина:

$$f_1(x) \otimes f_2(x) \equiv \int_x^1 \frac{dy}{y} f_1(y) f_2(x/y). \quad (45)$$

После преобразования Меллина конволюции в правой части (44) пропадают и результат для  $M_{k,n}$  имеет вид, подобный (43).

Еще одна возможность изучения вклада высших твистов может быть реализована безмодельным способом. Амплитуда  $h_4(x)$  может быть представлена как конечная сумма независимых элементов

$$h_4(x) = \sum_{i=1}^I h_4(x_i),$$

найденных путем фита экспериментальных данных на каждом отрезке (бине)  $x_i$ . Такая возможность была реализована, например, в недавней работе [13].

Более подробный анализ проблемы вклада операторов высших твистов может быть найден, например, в недавнем обзоре [10].

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Следуя рецепту вычисления моментов коэффициентных функций вильсоновского разложения (см. п. 1.3), найдем поправки к коэффициентам. Расчет проводим в партонных обкладках при  $p^2 = 0$  (напомним, что  $p$  — это импульс партона), а полученные инфракрасные расходимости сокращаем расходимостями, возникающими при перенормировке операторов Вильсона. Инфракрасный характер расходимостей нами не выделяется, т.к. все ультрафиолетовые расходимости устраняются  $R$ -операцией. Вычисления проводятся в фейнмановской калибровке. Подобный анализ был проведен в работах [4, 20, 21]. Учет вклада, пропорционального калибровочному параметру, проведен в работе [4].

### 2.1. Однопетлевые вычисления.

1. Несинглетный вклад. а) Расчет коэффициента  $B_{L,n}^{(1)NS}$ .

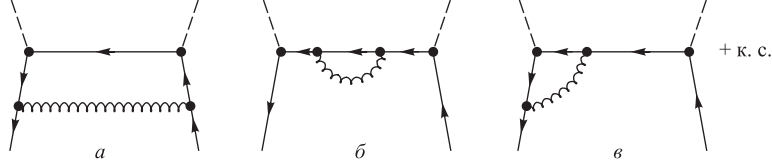


Рис. 1. Диаграммы, дающие однопетлевой вклад кварков в коэффициентную функцию

Применяя проектор  $\sim p_\mu p_\nu$  к фейнмановским диаграммам, изображенным на рис. 1, видим, что только диаграмма *a* дает вклад в  $T_{L,n}^{(1)}$ . Результат не содержит расходимостей и хорошо известен:

$$T_{L,n}^{(1)NS} = \frac{4C_F}{(n+1)} (1 + \varepsilon [S_1 + 1 + \phi(Q^2/\mu^2)]),$$

где  $S_1$  дан в (37), а  $\phi(y) = \ln(4\pi) - \gamma - \ln(y)$ .

Используя соотношения (27) и (38) при  $j = NS$ , получаем\*

$$B_{L,n}^{(1)NS} = \frac{4C_F}{(n+1)} (1 + \varepsilon [S_1 + 1]). \quad (46)$$

б) Расчет коэффициента  $B_{2,n}^{(1)NS}$ .

Диаграммы, дающие вклад в  $T_{2,n}^{(1)NS}$ , изображены на рис. 1. Суммарный вклад их может быть представлен в виде

$$T_{2,n}^{(1)NS} = \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2} + \gamma_S^{(0)} \right) + \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2} \phi(Q^2/\mu^2) + B_{2,n}^{(1)NS}(\Sigma), \quad (47)$$

где

$$B_{2,n}^{(1)NS}(\Sigma) = C_F \left[ 2S_1^2 - 2S_2 + S_1 \left( 3 - \frac{2}{n(n+1)} \right) - 9 + \frac{3}{n} + \frac{4}{(n+1)} + \frac{2}{n^2} \right].$$

Подставляя (26) в (39) и учитывая (33) и (41), получаем значение коэффициента  $B_{2,n}^{(1)NS}$  в  $\overline{MS}$ -схеме:

$$B_{2,n}^{(1)NS}(\overline{MS}) = B_{2,n}^{(1)NS}(\Sigma), \quad (48)$$

которое совпадает с найденным в работе [22].

---

\*Результаты приведены с точностью до  $O(\varepsilon)$ , что понадобится ниже при двухпетлевых вычислениях.

2. Синглетный вклад. а) Расчет коэффициента  $B_{k,n}^{(1)S}$ .

В ведущем порядке ТВ вклад в синглетную СФ определяют диаграммы, изображенные на рис. 1. Таким образом, получаем результат (24), т. е.  $B_{k,n}^{(1)NS} = B_{k,n}^{(1)S}$ .

б) Расчет коэффициента  $B_{L,n}^{(1)G}$ .

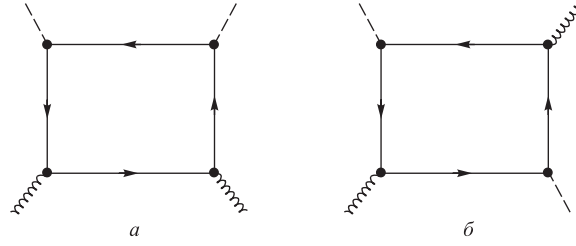


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для глюонов

Применяя продольный проектор  $\sim p_\mu p_\nu$  к фейнмановским диаграммам, изображенным на рис. 2, видим, что вклад дает только диаграмма б. Результат не содержит расходимостей и имеет вид

$$T_{L,n}^{(1)G} = \frac{16T_F}{(n+1)(n+2)} (1 + \varepsilon [S_1 + 1 + \phi(Q^2/\mu^2)]).$$

Используя соотношения (31) и (38) при  $j = G$ , получаем

$$B_{L,n}^{(1)G} = \frac{16T_F}{(n+1)(n+2)} (1 + \varepsilon [S_1 + 1]). \quad (49)$$

в) Расчет коэффициента  $B_{2,n}^{(1)G}$ .

Диаграммы, дающие вклад в  $T_{2,n}^{(1)G}$ , изображены на рис. 2. Суммарный их вклад может быть представлен в виде

$$T_{2,n}^{(1)G} = \left( \frac{1}{\varepsilon} + \phi(Q^2/\mu^2) \right) \frac{\gamma_{SG}^{(0)n}}{2} + B_{2,n}^{(1)G}(\Sigma), \quad (50)$$

где

$$B_{2,n}^{(1)G}(\Sigma) = \frac{4T_F}{(n+1)} \left[ S_1 \left( -1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{(n+2)} \right) + \frac{1}{n} + \frac{4}{(n+2)} + \frac{1}{n^2} \right].$$

Это выражение совпадает с результатом работы [23]. Подставляя  $Z_{n,G}^{(1)S}$  в (50) и учитывая (30) и (40) для  $j = G$ , получаем

$$B_{2,n}^{(1)G}(\overline{MS}) = B_{2,n}^{(1)G}(\Sigma). \quad (51)$$

Полученный результат не совпадает с найденным в работе [22]. Как было отмечено в [23], различие в результатах можно исключить переопределением вильсоновского оператора. Действительно, при преобразовании перенормировочного множителя  $Z_{n,G}^{(1)S} \rightarrow Z_{n,G}^{(1)S}(1 - \varepsilon)$  коэффициент  $B_{2,n}^{(1)G}$  получает дополнительный вклад

$$\frac{4T_F}{(n+1)} \left( -1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{(n+2)} \right)$$

и совпадает с полученным в работе [22]. Таким образом, разница в результатах связана с различными прескрипциями при вычислении фейнмановских интегралов (см., например, [21]).

### 2.3. Двухпетлевые вычисления.

#### 1. Несинглетный вклад\*

Вклад в продольную несинглетную СФ дают диаграммы, изображенные на рис. 3. Их суммарный вклад можно записать в виде

$$T_{L,n}^{(2)NS} = \overline{B}_{L,n}^{(1)NS} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \phi(Q^2/\mu^2) \right) \left( \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2} + \gamma_S^{(0)} \right) + \left( \beta_0 + \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2} \right) \phi(Q^2/\mu^2) + R_{L,n}^{(2)NS}(\Sigma) \right],$$

где  $\overline{B}_{L,n}^{(1)j} = B_{L,n}^{(1)j} |_{\varepsilon=0}$ ,

$$\begin{aligned} R_{L,n}^{(2)NS}(\Sigma) = & 2C_F \left[ 3S_1^2 - S_2 + S_1 \left( \frac{25}{6} - \frac{2}{n} \right) + \frac{151}{36} - \frac{13}{6} \frac{1}{n} - \frac{1}{6} \frac{1}{(n+1)} + \right. \\ & \left. \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right] + (2C_F - C_A) \left[ 8K_2S_1 - 8K_{2,1} + 4K_3 - 4S_3 + 12\zeta(3) - \right. \\ & \left. - 8K_2 \left( 1 + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{(n-2)(n+3)} \right) - \frac{23}{3}S_1 - \frac{215}{18} + \frac{11}{3} \frac{1}{n} + \right. \\ & \left. + \frac{11}{3} \frac{1}{(n+1)} + \frac{18}{(n-2)(n+3)} \right] - \frac{4}{3}T_F \left[ S_1 + \frac{19}{6} - \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right] \quad (52) \end{aligned}$$

---

\*До вычислений, представленных в [4,20], существовали только два расчета (в работах [25] и [26])  $\alpha_s$ -поправок к продольной СФ в несинглетном случае, результаты которых находились в противоречии друг с другом.

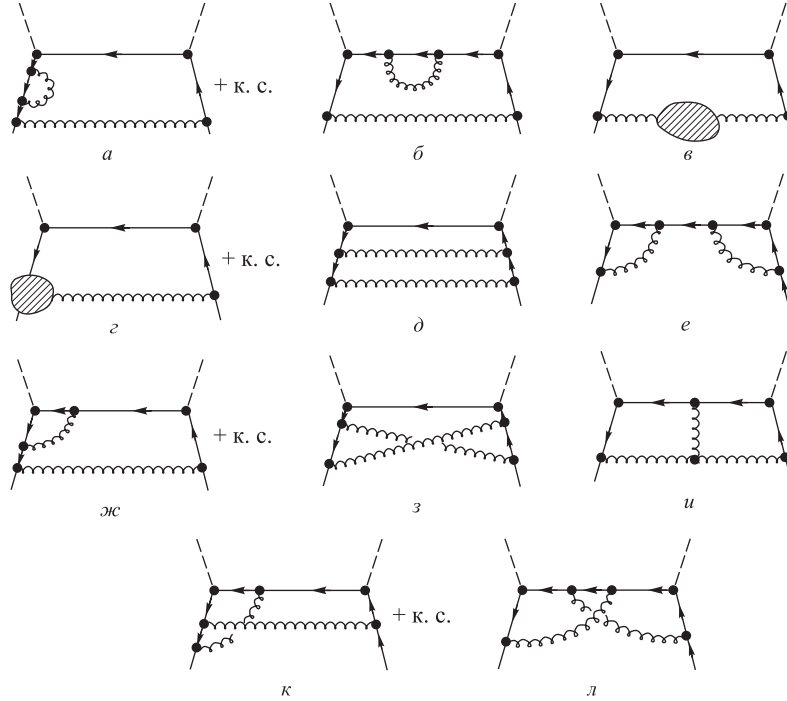


Рис. 3. Диаграммы, дающие двухпетлевой вклад валентных кварков в коэффициентную функцию  $F_L$

и\*

$$K_r(n) = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m^r} \equiv K_r, \quad K_{2,1}(n) = \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} S_1(m) \equiv K_{2,1}, \quad (53)$$

$$\frac{1}{n-2} (4K_2(n) - 3) \Big|_{n=2} = 6\zeta(3) - 7.$$

Для нахождения коэффициента  $R_{L,n}^{(2)NS}$  рассмотрим произведение

$$C_{L,n}^{(1)NS} \cdot Z_n^{(1)NS} = \overline{B}_{L,n}^{(1)NS} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \phi(Q^2/\mu^2) \right) \left( \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2} + \gamma_S^{(0)} \right) + R_{L,n}^{(2)NS}(IR) \right],$$

\*Заметим, что суммы  $K_r$  и  $K_{r,l}$  иногда обозначают как  $S_{-r}$  и  $S_{-r,l}$  (см., например, [24]).



где

$$R_{L,n}^{(2)NS}(IR) = 2C_F \left[ 2S_1 - 2 - \frac{1}{n(n+1)} \right] (S_1 + 1). \quad (54)$$

Подставляя (52) и (54) в (41) и учитывая (27), получаем для  $R_{L,n}^{(2)NS} = R_{L,n}^{(2)NS}(\Sigma) - R_{L,n}^{(2)NS}(IR)$  в  $\overline{MS}$ -схеме:

$$\begin{aligned} R_{L,n}^{(2)NS}(\overline{MS}) = & 2C_F \left[ S_1^2 - S_2 + S_1 \left( \frac{19}{6} - \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right) + \frac{277}{36} - \frac{7}{6} \frac{1}{n} - \right. \\ & \left. - \frac{19}{6} \frac{1}{(n+1)} + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right] + (2C_F - C_A) \left[ 8K_2S_1 - 8K_{2,1} + 4K_3 - 4S_3 + \right. \\ & \left. + 12\zeta(3) - 8K_2 \left( 1 + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{3}{(n-2)(n+3)} \right) - \frac{23}{3}S_1 - \frac{215}{18} + \frac{11}{3} \frac{1}{n} + \right. \\ & \left. + \frac{11}{3} \frac{1}{(n+1)} + \frac{18}{(n-2)(n+3)} \right] - \frac{4}{3}T_F \left[ S_1 + \frac{19}{6} - \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right]. \quad (55) \end{aligned}$$

Результат (55) был получен в аналитическом виде впервые в работах [3,4,20]. Численно он полностью совпадает с полуаналитическим результатом работ [25].

2. Синглетный вклад. а) Расчет коэффициента  $B_{L,n}^{(2)S}$ .

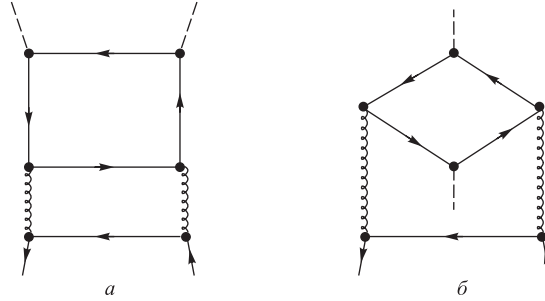


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но для морских кварков

Вклад в продольную синглетную СФ кроме диаграмм рис. 3 дают две дополнительные диаграммы, изображенные на рис. 4. Их суммарный вклад можно записать в виде

$$T_{L,n}^{(2)PS} \equiv T_{L,n}^{(2)S} - T_{L,n}^{(2)NS} = \overline{B}_{L,n}^{(1)G} \left( \frac{1}{\varepsilon} + 2\phi(Q^2/\mu^2) \right) \frac{\gamma_{GS}^{(0)n}}{2} + R_{L,n}^{(2)PS}(\Sigma),$$

где

$$R_{L,n}^{(2)PS}(\Sigma) = \frac{8T_F}{(n+1)(n+2)} \left[ S_1 \left( -2 - \frac{8}{(n-1)} + \frac{4}{n} \right) - 3 - \frac{16}{3} \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \frac{4}{3} \frac{1}{(n+2)} - \frac{2}{n^2} \right]. \quad (56)$$

Для нахождения  $C_{L,n}^{(1)S}$  рассмотрим произведение

$$C_{L,n}^{(1)G} \cdot Z_{n,S}^{(1)G} = \overline{B}_{L,n}^{(1)G} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \phi(Q^2/\mu^2) \right) \frac{\gamma_{GS}^{(0)n}}{2} + R_{L,n}^{(2)PS}(IR) \right],$$

где

$$R_{L,n}^{(2)PS}(IR) = -\frac{8T_F}{(n+2)} \left[ \frac{1}{(n+1)} + \frac{2}{n(n-1)} \right] (S_1 + 1). \quad (57)$$

Подставляя (56) и (57) в (42) при  $j = S$  и учитывая (27) и (29), получаем для  $R_{L,n}^{(2)S} - R_{L,n}^{(2)NS} = R_{L,n}^{(2)PS}(\Sigma) - R_{IR,n}^{(2)PS}$  в  $\overline{MS}$ -схеме (и в прескрипции  $A$  [21]):

$$R_{L,n}^{(2)S}(\overline{MS}) = R_{L,n}^{(2)NS}(\overline{MS}) + \frac{8T_F}{(n+1)(n+2)} \left[ S_1 \left( -1 - \frac{4}{(n-1)} + \frac{2}{n} \right) - 2 - \frac{4}{3} \frac{1}{(n-1)} - \frac{3}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \frac{4}{3} \frac{1}{(n+2)} - \frac{2}{n^2} \right]. \quad (58)$$

б) Расчет коэффициента  $B_{L,n}^{(2)G}$ .

Вклад в продольную синглетную СФ дают диаграммы, изображенные на рис. 5. Их суммарный вклад можно представить в виде

$$T_{L,n}^{(2)G} = \overline{B}_{L,n}^{(1)G} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \phi(Q^2/\mu^2) \right) \left( \frac{\gamma_{GG}^{(0)n}}{2} + \gamma_G^{(0)} \right) + \left( \beta_0 + \frac{\gamma_{GG}^{(0)n}}{2} \right) \phi(Q^2/\mu^2) + R_{L,n}^{(2)G}(\Sigma) \right],$$

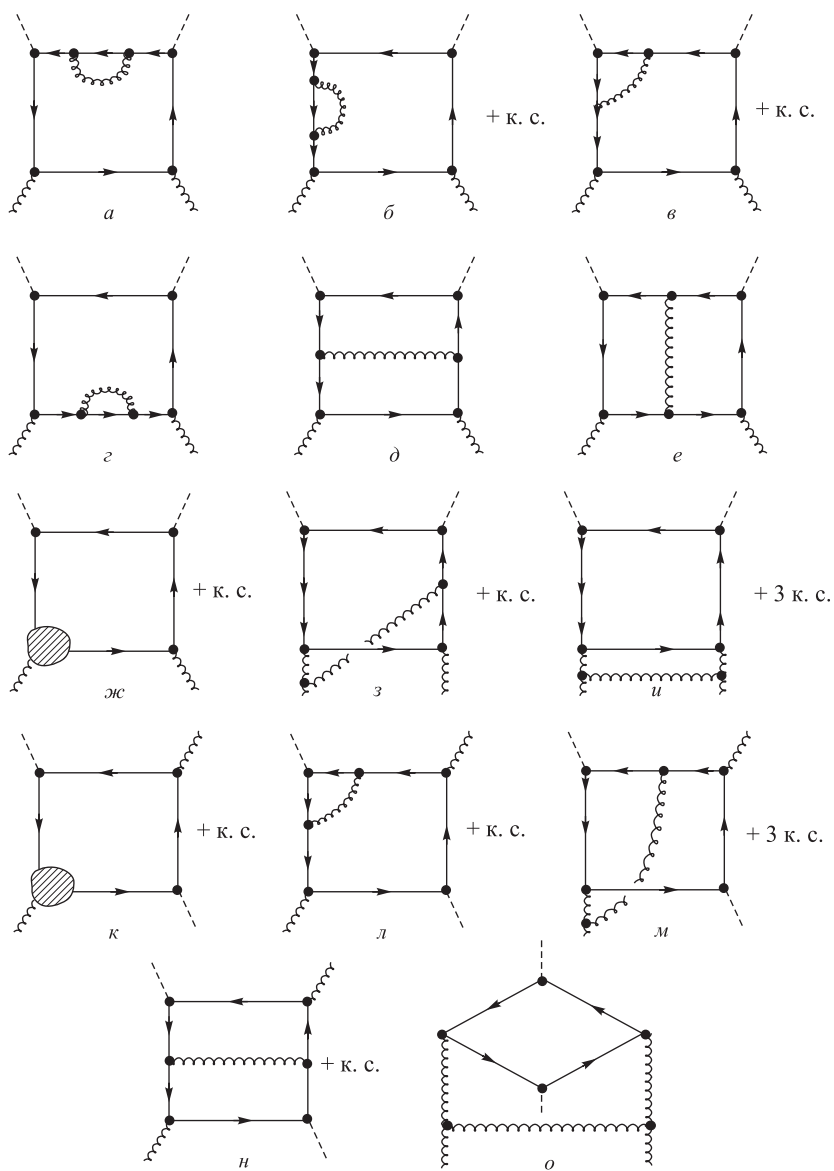


Рис. 5. То же, что и на рис. 3, но для глюонов

где

$$\begin{aligned}
R_{L,n}^{(2)G}(\Sigma) = & 2C_A \left[ 3S_1^2 - S_2 + 2K_2 + S_1 \left( 6 - \frac{2}{(n-1)n} - \frac{4}{(n+1)} \right) - \right. \\
& \left. -1 - \frac{2}{3} \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{8}{3} \frac{1}{(n+2)} - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n+1)^2} - \frac{4}{(n+2)^2} \right] - \\
& - 2C_F \left[ 2K_2 \left( 1 + \frac{4}{(n-2)(n+3)} \right) + 2S_1 \left( 1 + \frac{1}{n(n+1)} \right) - \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n(n+1)} - \right. \\
& \left. - \frac{6}{(n-2)(n+3)} - \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right]. \quad (59)
\end{aligned}$$

Для нахождения коэффициента  $C_{L,n}^{(1)G}$  рассмотрим величину

$$\begin{aligned}
\sum_{j=S,G} C_{L,n}^{(1)j} Z_{n,G}^{(1)j} = & \overline{B}_{L,n}^{(1)G} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} + \phi(Q^2/\mu^2) \right) \left( \frac{\gamma_{GG}^{(0)n}}{2} + \gamma_G^{(0)} \right) + R_{L,n}^{(2)G}(IR) \right] + \\
& + \overline{B}_{L,n}^{(1)S} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \phi(Q^2/\mu^2) \right) \frac{\gamma_{NS}^{(0)n}}{2},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{L,n}^{(2)G}(IR) = & \left( 2C_A \left[ 2S_1 - 1 - \frac{2}{n(n-1)} - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right] + \right. \\
& \left. + 2C_F \left[ -\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] \right) (S_1 + 1). \quad (60)
\end{aligned}$$

Подставляя (59) и (60) в (42) при  $j = G$  и учитывая (31), получаем  $R_{L,n}^{(2)G} = R_{L,n}^{(2)G}(\Sigma) - R_{IR,n}^{(2)G}$  в  $\overline{MS}$ -схеме (и в прескрипции  $A$  [21]):

$$\begin{aligned}
R_{L,n}^{(2)G}(\overline{MS}) = & 2C_A \left[ S_1^2 - S_2 + 2K_2 + 2S_1 \left( 2 - \frac{1}{(n-1)n} - \frac{2}{(n+1)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{4}{3} \frac{1}{(n-1)} - \frac{3}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \frac{2}{3} \frac{1}{(n+2)} - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{(n+1)^2} - \frac{4}{(n+2)^2} \right] - \\
& - 2C_F \left[ 2K_2 \left( 1 + \frac{4}{(n-2)(n+3)} \right) + S_1 \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{n(n+1)} \right) - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{n} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)} - \frac{6}{(n-2)(n+3)} - \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right]. \quad (61)
\end{aligned}$$

Заметим, что рассеяние происходит на «физическом» глюоне. Учет этого факта выполнен путем использования физической суммы по поляризациям глюона:

$$\sum_{\lambda} \varepsilon^{\mu}(\lambda) \varepsilon^{*\mu}(\lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{u^{\mu} p^{\nu} + u^{\nu} p^{\mu}}{(up)} - \frac{u^2 p^{\mu} p^{\nu}}{(up)^2}, \quad (62)$$

где вектор  $u$  удовлетворяет условию  $u^2 < 0$ . Результаты (58) и (61) могут быть получены и при использовании фейнмановской суммы по поляризации, однако в этом случае дополнительные диаграммы, учитывающие рассеяние фотона на духах Фаддеева–Попова, должны быть добавлены (см. обсуждение этого вопроса в [4]).

*Резюме:* Результат для двухпетлевой поправки к продольной СФ ГНР имеет компактный вид, близкий к двухпетлевым поправкам к аномальным размерностям вильсоновских операторов [27]. Поддиаграммный вклад, а также доказательство калибровочной инвариантности полученного результата даны в [4].

Соответствующие выражения для ядер эволюции могут быть получены обратным преобразованием Меллина выражений (55), (58) и (61), они даны в [6, 29]. Заметим, что результаты [6, 29], как и [4], содержали ошибку в глюонном секторе. Точные ядра эволюции даны в работах [30] как для продольной, так и для поперечной СФ. Моменты этих ядер совпадают численно для продольной части с исправленными в [21]. Точные выражения для двухпетлевых поправок к коэффициентам Вильсона СФ ГНР  $F_2$ ,  $F_L$  и  $F_3$  были найдены в работах [30, 31].

Отметим также большой прогресс в получении нескольких первых моментов в порядке  $\sim \alpha_s^3$  для аномальных размерностей операторов Вильсона для СФ  $F_2$  и  $F_3$ : 14 первых четных моментов в случае СФ  $F_2$  и 13 первых нечетных моментов в случае СФ  $F_3$  были найдены недавно в работах [32, 33] соответственно. Полная  $n$ - (или  $x$ )-зависимость неизвестна сейчас только для  $\alpha_s^3$ -поправок к аномальным размерностям (или к ядрам эволюции). Их вычисление, однако, — предмет недалекого будущего (см. [34])\* . Заметим, что знание этих поправок позволит проводить полный анализ процесса ГНР в первых трех порядках теории возмущений\*\*.

---

\*Во время подготовки этого текста аналитическая зависимость 3-петлевых поправок к аномальным размерностям вильсоновских операторов и ядер эволюции, а также к коэффициентным функциям была найдена точно в работах [35] и [36] соответственно.

\*\*Знание первых моментов для этих поправок позволяет проводить соответствующий анализ только в области промежуточных значений переменной  $x$  (см., например, фиты экспериментальных данных в [11, 14, 18, 37]).

### 3. СХЕМНО-ИНВАРИАНТНАЯ ТВ И СФ

Как мы уже показали выше, получение информации из высоких порядков ТВ — процесс трудоемкий, он требует введения оригинальных методов вычисления фейнмановских интегралов. Другая важная проблема возникает при сравнении предсказаний теории возмущений с экспериментальными данными.

Как правило, для проверки теории (или для получения информации о каких-либо ее невычисляемых параметрах) используют некоторые физические величины (т. е. наблюдаемые), которые, с одной стороны, могут быть найдены из эксперимента, а с другой — представлены в виде ряда ТВ с известными коэффициентами (обычно могут быть рассчитаны несколько первых коэффициентов). Основная трудность, возникающая при таком сопоставлении, состоит в зависимости этих коэффициентов (и константы связи также) от схемы вычитания бесконечностей, которые присущи фейнмановским интегралам. Эта проблема становится особенно существенной в КХД и других теориях, где константа связи не является достаточно малой в физически интересной области переданных импульсов [38, 39]. Следовательно, для осуществления какого-либо осмысленного сравнения КХД-предсказаний с экспериментом необходимо как-то решить проблему схемного произвола.

**3.1. Общая характеристика методов.** Первоначально проблема неоднозначности пертурбативных вычислений решалась в рамках попыток ответа на вопрос о том, какую схему перенормировок следует выбирать, чтобы получать надежные предсказания для наблюдаемых в пертурбативной КТП (см., например, [9, 40, 41]). В таком подходе решение данной проблемы прямо связано с идеей «улучшенной по ренорм-группе» ТВ и является задачей поиска «оптимальной» схемы перенормировок.

Отсутствие информации о поведении поправок высоких порядков ряда ТВ не дает возможности сформулировать строгое математическое утверждение для выбора «оптимальной» схемы перенормировок, применимой для произвольной физической величины. Вследствие этого данный критерий обычно сводят к требованию, чтобы поправка второго порядка была достаточно мала, произвольно допуская, что и поправки высших порядков при этом также малы.

Описанный подход первым подверг критике Стивенсон [39, 42], который показал, что предположение о том, что для любого физического процесса необходимо использовать одну и ту же схему перенормировки, является ничем не оправданным и, по-видимому, неверным. Напротив, параметр разложения, а значит, схему перенормировки, следует выбирать специально для каждого отдельного физического процесса и даже для каждого порядка пертурбативной аппроксимации.

Грюнберг [43] предложил использовать для получения пертурбативных предсказаний метод эффективных зарядов, который позволяет построить для

каждой физической величины свою собственную «оптимальную» схему перенормировок, основываясь на так называемом принципе «скорейшей явной сходимости». В рамках процедуры Грюнберга все поправки высших порядков к главному вкладу исчезают и изучаемая наблюдаемая становится тождественно равной величине константы связи, вычисленной в этой схеме и, таким образом, сопряженной с определенным физическим процессом. Этот подход являлся, по-видимому, первой схемно-инвариантной (СИ) процедурой.

Другой СИ-формализм был дан Даром и Гуптой [44], которые предложили новый пертурбативный подход к перенормируемым полевым теориям. Они показали, что вместо обычных перенормированных рядов ТВ для безразмерных квантово-полевых величин следует использовать некоторые СИ-дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию этих величин. Такие эволюционные уравнения могут быть определены как на основе перенормированных рядов, так и непосредственно из перенормированных рядов ТВ. Данный метод был первоначально развит Даром и Гуптой для безмассового случая. Впоследствии Казаков и Ширков [45] построили обобщение этого формализма на случай учета массовых зависимостей. Дальнейшее развитие метода в рамках массового случая может быть найдено в работе Гупты, Ширкова и Тарасова [46].

Существуют и некоторые другие подходы к построению схемно-инвариантных ТВ (СИТВ) (см. [47,48]), а также варианты оптимизационной процедуры Стивенсона [49]. Как было отмечено Владимировым [48], различные версии СИТВ, существующие в литературе, эквивалентны для полных рядов ТВ, однако для оборванных рядов дают различные результаты. Проблема выбора «лучшей» СИТВ есть общая проблема ТВ: какой параметр разложения выбрать. Разумеется, такая задача не может быть решена в рамках СИТВ. Последняя просто представляет собой ТВ, свободную от неопределенностей, связанных с бесконечностями фейнмановских интегралов, но не от неопределенностей выбора параметра разложения.

**3.2. Общие положения СИТВ.** С феноменологической точки зрения переход от обычной ТВ к СИТВ соответствует пересуммированию ряда ТВ и изменению количественных предсказаний теории в тех областях, где эффективная константа взаимодействия не мала. В областях с малой константой взаимодействия предсказания обеих ТВ обычно близки. Такое свойство СИТВ обычно приводит к улучшению согласия теории и эксперимента\*.

Рассмотрим кратко суть СИТВ, следуя рецепту эффективных зарядов Грюнберга (более подробное изучение проблемы может быть найдено в работах [47] и обзоре [48]). Пусть некоторая физическая величина  $R$  представлена

---

\*См., например, фиты экспериментальных данных ГНР в [11, 18, 37].

в виде ряда ТВ, улучшенного методом ренорм-группы:

$$R = \bar{a}_s^p \left( 1 + r_1 \bar{a}_s + \dots \right), \quad (63)$$

где параметр разложения  $a_s(Q^2)$  находится из уравнения

$$Q^2 \frac{d}{dQ^2} \bar{a}_s(Q^2) = \beta(\bar{a}_s), \quad (64)$$

а  $\beta(\bar{a}_s)$  определяется разложением (13). Так, например, в одно- и двухпетлевых приближениях константа связи  $\bar{a}_s(Q^2)$  удовлетворяет, соответственно, уравнениям

$$\frac{1}{\bar{a}_s(Q^2)} = \beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{LO}^2), \quad (65)$$

$$\frac{1}{\bar{a}_s(Q^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln[\beta_0 \bar{a}_s(Q^2)] = \beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{MS}^2). \quad (66)$$

Заметим, что величины  $r_i, \bar{a}_s, \Lambda$  являются схемно-зависимыми.

Следуя Грюнбергу, можно построить новое представление для исходной величины

$$R = \bar{a}_R^p, \quad (67)$$

где новая константа взаимодействия (эффективный заряд)  $\bar{a}_R$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\bar{a}_R(Q^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln[\beta_0 \bar{a}_R(Q^2)] = \beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_a^2) - \frac{r_1}{p}. \quad (68)$$

При работе с приближением выше двухпетлевого (которым мы здесь ограничиваемся) правая часть содержит дополнительные члены (см. [43]).

Величины  $\bar{a}_R, \Lambda_a$  являются схемно-инвариантными, а шкалы  $\Lambda_a$  и  $\Lambda$  связаны соотношением

$$\Lambda_a = \Lambda \exp \left[ \frac{r_1}{2p\beta_0} \right]. \quad (69)$$

Таким образом, каждый процесс (вернее, каждая наблюдаемая процесса) характеризуется своей эффективной константой связи. Заметим, что такие константы связи (например,  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$ ) не являются, конечно, независимыми. Их шкалы связаны соотношением

$$\Lambda_{a_1} = \Lambda_{a_2} \exp \left[ \frac{r_1 - r_2}{2p\beta_0} \right].$$



В случае СФ ГНР СИ-константа связи зависит также от номера момента и типа СФ. Следовательно, при использовании СИТВ моменты СФ представляются в виде

$$\begin{aligned} M_{2,n}(Q^2) &= \sum_j A_n^j \left[ \bar{a}_{2,n}^j(Q^2) \right]^{d_j^n}, \\ M_{L,n}(Q^2) &= \sum_j A_n^j B_{L,n}^{(1)j}(Q^2) \left[ \bar{a}_{L,n}^j(Q^2) \right]^{d_j^n+1}, \end{aligned} \quad (70)$$

где СИ-константы связи  $\bar{a}_{2,n}^j$  и  $\bar{a}_{L,n}^j$  определяются решениями уравнения (68) при  $r_1/p$ , равными

$$\frac{1}{d_j^n} \left[ B_{2,n}^{(1)j}(\overline{MS}) + \bar{Z}_n^j(\overline{MS}) \right] \quad \text{и} \quad \frac{1}{d_j^n + 1} \left[ B_{L,n}^{(1)j}(\overline{MS}) + \bar{Z}_n^j(\overline{MS}) \right]$$

соответственно.

**3.3. Расчет  $\alpha_s$ -поправки к  $R(x, Q^2)$ .** Моменты в ведущем порядке ТВ и в следующем в  $\overline{MS}$ -схеме и СИТВ представляются формулами (20)–(23) и (70) соответственно. Для получения СФ удобно использовать так называемую технику Индурайна\*. Суть ее в том, что берется  $N$  известных моментов и численно восстанавливается вид СФ. Использование в обработке 9 первых моментов позволяет восстановить структурную функцию с шагом по  $x$ , равным 0,1, и точностью лучше 10 % (см. [50]).

Заметим, что в обработке должны быть использованы моменты  $M_{k,n}$  как для четных, так и для нечетных  $n$ . Как было уже показано в разд. 1, из расчета фейнмановских интегралов для коэффициентов  $T_{k,n}$  можно получить теоретическую информацию только для четных значений  $M_{k,n}$ . В ведущем порядке в качестве значений для величины  $M_{k,n}$  для всех  $n$  можно использовать аналитический результат для  $T_{k,n}$  для четных  $n$ . В настоящем анализе такое отождествление невозможно из-за наличия сумм  $K_2(n)$ ,  $K_3(n)$  и  $K_{2,1}(n)$ , имеющих различный аналитический вид для четных и нечетных значений  $n$ . Эти суммы являются следствием непланарности некоторых из диаграмм, изображенных на рис. 3 и 5. Трудность снимается переопределе-

---

\*Техника Индурайна [50] основана на восстановлении СФ ГНР по их моментам с использованием полиномов Бернштейна. Этот метод, а также метод, основанный на полиномах Якоби (см., например, [16,51]), хорошо воспроизводят СФ в области средних значений  $x$ , где они применялись для анализа экспериментальных данных как во втором (см., например, [4, 13, 16, 18, 20, 52]), так и в третьем порядках ТВ [11, 14].

нием  $K_2(n)$ ,  $K_3(n)$  и  $K_{2,1}(n)$  (см. [4, 53, 54]):

$$\begin{aligned} K_2(n) &\rightarrow \overline{K}_2(n) \equiv (-1)^n K_2(n) + \zeta(2) \frac{1 - (-1)^n}{2}, \\ K_3(n) &\rightarrow \overline{K}_3(n) \equiv (-1)^n K_3(n) + \frac{3}{2} \zeta(3) \frac{1 - (-1)^n}{2}, \\ K_{1,2}(n) &\rightarrow \overline{K}_{1,2}(n) \equiv (-1)^n K_{1,2}(n) + \frac{5}{4} \zeta(3) \frac{1 - (-1)^n}{2}. \end{aligned} \quad (71)$$

Соотношения (72) могут быть получены при использовании процедуры\*, аналогичной продолжению на нецелые значения аргумента в более простых функциях  $S_m(n)$  (см. (37)):

$$S_m(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^m} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+n)^m} = \zeta(m) - \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \Psi^{(m-1)}(n+1). \quad (72)$$

Возникающая в правой части уравнения (72) полигамма-функция Эйлера  $\Psi^{(m-1)}(n+1) = (d/da)^m \ln(\Gamma(n+1+a))|_{a=0}$  является хорошо изученной даже для области изменения аргумента в комплексной плоскости. Действуя аналогично в случае функций  $K_m(n)$  (см. (53)), т. е. представляя сумму  $\sum_{j=1}^n$

как разность  $\sum_{j=1}^{\infty} - \sum_{j=1+n}^{\infty}$  и сдвигая на  $n$  аргумент последней суммы, получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} K_m(n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^m} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+n)^m} = \\ &= (1 - 2^{1-m}) \zeta(m) - (-1)^{j+1} \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \beta^{(m-1)}(n+1), \end{aligned} \quad (73)$$

где  $\beta^{(m-1)}(z)$  также является хорошо определенной функцией аргумента  $z$ , поскольку выражается через полигамма-функции:  $2^{i+1} \beta^{(i)}(z) = \Psi^{(i)}((z+1)/2) - \Psi^{(i)}(z/2)$ .

Из уравнения (73) видно, что хорошо определенной функцией (как для четных, так и для нечетных значений  $n$ ) является не сама функция  $K_m(n)$ , а ее комбинация с  $\zeta(m)$ , домноженная на фактор  $(-1)^n$ , т. е.

$$(-1)^n [K_m(n) - (1 - 2^{1-m}) \zeta(m)]. \quad (74)$$

---

\*Эта процедура применима также для аналитического продолжения функций  $S_m(n)$ ,  $K_m(n)$  ( $m = 2, 3$ ) и  $K_{2,1}(n)$  на действительные и комплексные значения аргумента [53, 54].

Добавляя к комбинации (74) фактор  $(1 - 2^{2-m})\zeta(m)$  так, чтобы для четных значений  $n$  новая конструкция воспроизводила функцию  $K_m(n)$ , получаем первые два соотношения из (61). Для воспроизведения последнего соотношения достаточно повторить изложенный анализ.

Заметим интересный факт, следующий из первого соотношения уравнения (71): присутствие члена  $\sim \zeta(2)$  в выражении для поправки  $R_{L,n}^{(2)j}$  к моменту СФ ГНР. Как хорошо известно, члены  $\sim \zeta(2)$  всегда сокращаются при вычислении безмассовых двухточечных диаграмм и, следовательно, отсутствуют в поправке  $R_{L,n}^{(2)j}(n = 2m)$  к коэффициенту  $T_{k,n}$  сечения упругого рассеяния вперед. Таким образом, аналитическое продолжение (72) объясняет появление члена  $\sim \zeta(2)$  в правиле сумм Готфрида (см. [55]).

Нормировки партонных распределений при  $Q_0^2 = 5 \text{ ГэВ}^2$  могут быть выбраны, например, в виде [57]:

$$\begin{aligned} f_{NS}(x, Q_0^2) &= 0,29 x^{0,52} (1-x)^{3,26} (1+8,9x), \\ f_S(x, Q_0^2) &= 6,3 x^{0,7} (1-x)^{3,21} + 1,03(1-x)^{13,47}, \\ f_G(x, Q_0^2) &= 3,81 (1-x)^{6,7}. \end{aligned}$$

Как и в [4], мы используем здесь два значения  $\Lambda_{\overline{MS}}$  (и соответствующих  $\Lambda_{LO}$ ):

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{(1)} = 230 \text{ МэВ} \quad \left( \Lambda_{LO}^{(1)} = 200 \text{ МэВ} \right), \quad \Lambda_{\overline{MS}}^{(2)} = 105 \text{ МэВ} \quad \left( \Lambda_{LO}^{(2)} = 90 \text{ МэВ} \right).$$

Такие  $\Lambda_{\overline{MS}}$  и  $\Lambda_{LO}$  получены группами BCDMS [56] и EMC [57]\*. Мы восстанавливаем  $R(x, Q^2)$  в ведущем ( $\sim \alpha_s$ ) и двухпетлевом ( $\sim \alpha_s^2$ ) порядках\*\*, причем во втором случае используем моменты как в обычной формулировке, так и обработанные с помощью СИТВ.

Полученные кривые для  $R(x, Q^2)$  сравниваются с экспериментальными данными (см. рис. 6, а также работу [4]). При достаточно малых значениях  $x$  ( $x \approx 0,1 \div 0,2$ ) их двухпетлевой результат лучше согласуется с результатами экспериментов, полученными группой EMC [57], а при больших  $x$  ( $x > 0,3$ ) и малых  $Q^2$  СИ-результат в целом лучше согласуется с результатами экспериментов группы SLAC [59]. Все результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными группой BCDMS [56]. Относительное (выше или ниже) расположение кривых ведущего и двухпетлевого вкладов определяется выбором  $\Lambda_{\overline{MS}}$  и  $\Lambda_{LO}$ , значения которых точно неизвестны. Однако СИ-результат спадает с ростом  $x$  менее круто, что, как видно, лучше согласуется с результатами экспериментов различных групп.

\*После опубликования в [4] представленных здесь результатов данные EMC [57] были переработаны (см. [58]). Выводы, полученные в [4], однако, не меняются.

\*\*Анализ в области малых значений  $x$  дан в следующем разделе.

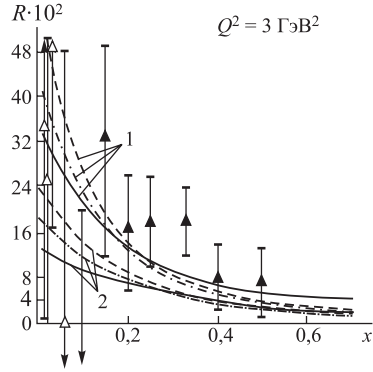


Рис. 6. Зависимость отношения  $R = \sigma_L / \sigma_T$ . Штрихпунктирная, штриховая и сплошная линии соответствуют ведущему, двухпетлевому в  $\overline{MS}$ -схеме и СИ-вкладам соответственно. Индексы 1 и 2 обозначают два различных выбора параметра КХД  $\Lambda^{(1)}$  и  $\Lambda^{(2)}$ . Данные NMC [58] и SLAC [59] обозначены как светлые и темные треугольники соответственно

Экспериментальные значения имеют большие ошибки, поэтому можно говорить только о качественном улучшении согласия теории и эксперимента при учете  $\alpha_s$ -поправки.

**3.4. Фит самодействия глюонов в КХД.** Исследования, описанные в этом разделе, были выполнены при использовании экспериментальных данных, существовавших до начала работы ускорителя HERA. Современные данные H1- и ZEUS-коллективов достаточно хорошо выделяют глюонное распределение, его рост с увеличением  $Q^2$  (при достаточно малых  $x$ ), который определяется самодействием глюонов\* (и демонстрирует, в свою очередь, это самодействие) (см. разд. 4).

Заметим, что слабо чувствительные к глюонам данные при достаточно больших значениях  $x$ , известные ранее, тем не менее позволили определить самодействие глюонов, используя описанное ниже обобщение анализа [61] Рейи.

Вначале рассмотрим качественно причину слабой зависимости экспериментальных данных ГНР (существовавших до начала работы ускорителя HERA) от величины самодействия глюонов. В  $Q^2$ -эволюцию момента синглетной СФ ГНР в ведущем порядке ТВ входят блоки

$$f_S^\pm(n, Q^2) \left[ \frac{\bar{a}_s(Q^2)}{\bar{a}_s(Q_0^2)} \right]^{\gamma_\pm^{(0)n} / 2\beta_0} \approx f_S^\pm(n, Q^2) \left[ 1 - \gamma_\pm^{(0)n} \bar{a}_s(Q_0^2) \ln \left( \frac{Q^2}{Q_0^2} \right) + \dots \right], \quad (75)$$

величина которых слабо зависит от значения  $\beta_0$  (все обозначения даны во введении).

\*Наличие самодействия глюонов было также продемонстрировано в  $e^+e^-$ -экспериментах на ускорителе LEP (см. недавний обзор [60] и ссылки в нем).

В КХД  $f_S^-(n, Q^2) \gg f_S^+(n, Q^2)$  (при  $n \geq 2$  и  $Q^2 \geq Q_0^2$ ). При выключении взаимодействия глюонов ситуация меняется на обратную. Следовательно, определяющим вкладом в  $Q^2$ -эволюцию момента СФ в КХД является коэффициент  $\gamma_-^{(0)}(n) \approx \gamma_{SS}^{(0)}(n)$ , а при выключении взаимодействия глюонов — коэффициент  $\gamma_+^{(0)}(n)$ , который опять близок к  $\approx \gamma_{SS}^{(0)}(n)$ , поскольку  $C_A = 0$ . В аномальную размерность  $\gamma_{SS}^{(0)}(n)$  трехглюонная вершина вклада не дает. Таким образом,  $Q^2$ -эволюция момента синглетной части СФ в ведущем порядке практически не зависит от взаимодействия глюонов. Все описанные выше свойства в целом сохраняются и в следующем приближении ТВ. Следовательно, наличие (или отсутствие) члена  $\sim C_A$ , ответственного за взаимодействие глюонов, как в  $\beta_0$ , так и в  $\gamma_{GG}^{(0)}(n)$  слабо влияет на  $Q^2$ -зависимость СФ.

Рейя предложил изучать  $Q^2$ -эволюцию самого глюонного распределения  $f_G(x, Q^2)$  (вернее, его моментов  $f_G(n, Q^2)$ ), которая чувствительна к трехглюонной вершине. Качественно рассуждения можно провести аналогично тому, как это сделано для моментов синглетной части СФ ГНР. Получаем, что  $Q^2$ -эволюция моментов глюонного распределения слабо зависит от величины  $\beta_0$  и определяется обоими коэффициентами  $\gamma_-^{(0)}(n)$  и  $\gamma_+^{(0)}(n)$  и, следовательно, существенным образом зависит от значения аномальной размерности  $\gamma_{GG}^{(0)}(n)$ . Теоретически  $Q^2$ -зависимость глюонного распределения рассмотрена в [8]. Экспериментальную информацию о глюонном распределении можно получить, зная поперечную  $F_2$  и продольную  $F_L$  СФ ГНР [53, 62, 63]. Точность определения продольной СФ  $F_L$  (вернее, отношения  $R = \sigma_L/\sigma_T$ ) невелика, однако можно использовать в качестве ее значений параметризации\*, предложенные в [65]. Сравнивая теоретическую  $Q^2$ -эволюцию трех моментов ( $n = 3, 4, 5$ ) глюонного распределения с данными экспериментов для  $F_2$  и  $F_L$  [56, 57], можно показать (см. [66]), что в КХД  $Q^2$ -зависимости (теоретическая и «экспериментальная») хорошо согласуются одна с другой при различных параметризациях для  $R$  (за исключением параметризации  $R = 4\langle p_t^2 \rangle / Q^2$ , где  $p_t$  — поперечный импульс партонов в нуклоне, что демонстрирует тот факт, что логарифмическое (по  $Q^2$ ) нарушение соотношения Каллана–Гросса является основным). Для теории, в которой нет взаимодействия глюонов, такого согласия нет.

Подробное изложение дано в работах [66]. Отметим, однако, что Рейя рассматривал в [61] вклад взаимодействия глюонов (или его отсутствие) только в аномальную размерность  $\gamma_{GG}^{(0)}(n)$ . Следовательно, он имел слегка различающиеся значения для двух теоретических кривых (с учетом взаимодействия глюонов и без него) и единственную экспериментальную кривую (вернее, область

---

\*Заметим, что популярная в настоящее время SLAC-параметризация для отношения  $R = \sigma_L/\sigma_T$  [64] была получена после излагаемого анализа.

значений, так как любая величина, взятая из эксперимента, приводится с ошибками). Так как эта область экспериментальных данных чрезвычайно широка, то нельзя было отдать предпочтение ни одной из этих кривых.

В работах [66] был учтен вклад самодействия глюонов также и в  $\beta$ -функцию. Такое дополнение слабо меняет вид обеих теоретических кривых, полученных Рейя в [61] (см. выше уравнение (75)). Однако в качестве экспериментальной информации мы получаем уже две «экспериментальные» области (соответствующие ситуациям с включенным и выключенным самодействием глюонов), значения которых сильно отличаются друг от друга. Теперь каждая из теоретических кривых сравнивается со своей «экспериментальной» областью. Несмотря на большую величину ошибок для «экспериментальных» данных  $Q^2$ -зависимости глюонов в ГНР, вклад их самодействия удается выделить однозначно (см. [66]).

Заметим, что это исследование самодействия глюонов было проведено в области  $Q^2 \geq 50 \text{ ГэВ}^2$ , где можно пренебречь непертурбативными поправками как к СФ и глюонному распределению, так и к связи между ними.

#### 4. СФ И ПР ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПЕРЕМЕННОЙ $x$

**4.1. Краткий анализ современной ситуации в этой области.** В последнее время в глубоконеупругом рассеянии область кинематических переменных  $x$  и  $Q^2$ , доступных экспериментально, сильно увеличилась. Основным успех связан с работой ускорителя HERA, на котором возможно прецизионное измерение СФ при значениях  $x$ , меньших чем  $10^{-2}$ . Область изменения значений переданного импульса  $Q^2$  достаточно широка, что позволяет расширить знание о партонной подструктуре нуклона (за счет изучения морских кварковых и глюонных компонент) и тестировать КХД, изучая  $Q^2$ -эволюцию ПР.

Основные результаты, полученные в экспериментах на HERA, можно сформулировать в следующем виде:

- СФ  $F_2$  растет с падением  $x$  для всех  $Q^2$ . Степень роста увеличивается с ростом значений  $Q^2$ .

- $Q^2$ -зависимость СФ  $F_2$  находится в прекрасном согласии с предсказаниями уравнения ДГЛАП [67] в первых двух порядках теории возмущений (за исключением, может быть, наименьших значений  $Q^2 \leq 1,5 \text{ ГэВ}^2$ ), где степенные поправки начинают быть существенными. Оценка степенных поправок возможна при учете вклада так называемых операторов высших твистов (см., например, [19]).

До сравнения этих результатов с КХД дадим краткие обзоры ДГЛАП- и БФКЛ-описаний.

**4.1.1. Уравнение ДГЛАП.** Кварк-глюонные взаимодействия приводят к  $Q^2$ -зависимости ПР. На качественном уровне это может быть показано следу-

ющим образом. Соударяющийся с фотоном кварк может иметь уже некоторую историю: он мог, например, родить глюон до соударения. Тогда, если соударяющийся кварк имеет часть импульса  $x$ , первоначальный содержит большую часть импульса  $y$ :  $y > x$ . С другой стороны, взаимодействующий кварк мог быть рожден глюоном (вместе с антикварком) с долей импульса  $y$ , опять же большей  $x$ . Таким образом, ПР с долей импульса  $y$ :  $x \leq y \leq 1$ , дают вклад в процесс взаимодействия фотона и кварка, имеющего долю импульса  $x$ . Математически этот факт может быть выражен через уравнения ДГЛАП для кварковой и глюонной функций распределения:

$$\begin{aligned} \frac{f_{NS}(x, Q^2)}{\ln Q^2} &= -\frac{1}{2} f_{NS}(x, Q^2) \otimes \gamma_{NS}(x, \bar{a}_s(Q^2)), \\ \frac{f_a(x, Q^2)}{\ln Q^2} &= -\frac{1}{2} \sum_{b=S,G} f_b(x, Q^2) \otimes \gamma_{ba}(x, \bar{a}_s(Q^2)), \end{aligned} \quad (76)$$

где символ  $\otimes$  — это конволюция Меллина (45), а ядра  $\gamma_{ab}(x, \bar{a}_s)$  обозначают вероятность партонa с индексом  $a$  (и долей момента  $x$ ) излучить партон с индексом  $b$  в интервале от  $Q^2$  до  $Q^2 + dQ^2$ . Эти ядра могут быть найдены по теории возмущений в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{NS}(z) &= \bar{a}_s \gamma_{NS}^{(0)}(z) + \bar{a}_s^2 \gamma_{NS}^{(1)}(z) + \bar{a}_s^3 \gamma_{NS}^{(2)}(z) + \dots, \\ \gamma_{ab}(z) &= \bar{a}_s \gamma_{ab}^{(0)}(z) + \bar{a}_s^2 \gamma_{ab}^{(1)}(z) + \bar{a}_s^3 \gamma_{ab}^{(2)}(z) + \dots \end{aligned} \quad (77)$$

В настоящий момент известны первые три слагаемые правой части (77). Заметим, что в моментном пространстве уравнения (76) являются дифференциальными (ренорм-групповыми) уравнениями 1-го порядка. Они даны в разд. 1 (см. уравнения (20)).

**4.1.2. Уравнение БФКЛ.** В области малых значений переменной Бьеркена  $x$  суммирование ведущих членов  $\bar{a}_s \ln(1/x)$  (что делает уравнение БФКЛ [68]) должно быть более актуальным, нежели суммирование членов  $\bar{a}_s \ln(Q^2/\mu^2)$ , что достигается с помощью уравнения ДГЛАП. Как это хорошо известно, здесь основную роль играют глюоны и кварк-антикварковые пары моря и, таким образом, СФ ГНР также определяются глюонами. Основная динамическая величина при малых  $x$  — это неинтегрированное глюонное распределение  $\varphi(x, k_t^2)$ , которое определяет обычную глюонную плотность при интегрировании  $\varphi$  по  $k_t^2$ :

$$xf_G(x, Q^2) = \int \frac{dk_t^2}{k_t^2} \varphi(x, k_t^2).$$

В приближении ведущих логарифмов распределение  $\varphi(x, k_t^2)$  удовлетворяет БФКЛ-уравнению [68]:

$$\varphi(x, k_t^2) = \varphi^0(x, k_t^2) + 12\bar{a}_s \int_x^1 \frac{dx'}{x'} \int \frac{d^D q}{\pi q^2} \left[ \varphi(x, (k_t + q)^2) \frac{k_t^2}{(k_t + q)^2} - \varphi(x', k_t^2) \Theta(k_t^2 - q^2) \right]. \quad (78)$$

Это уравнение суммирует лестничные диаграммы, составленные из глюонов. Для фиксированной константы связи (в этом приближении\* было построено БФКЛ-уравнение) решение уравнения (78) имеет вид

$$\varphi(x, k_t^2) \sim (k_t^2)^{1/2} \frac{x^{-\lambda_{\text{BFKL}}}}{\sqrt{\ln(1/x)}} \exp \left[ -\frac{\ln^2(k_t^2/\tilde{k}_t^2)}{2\lambda'' \ln(1/x)} \right],$$

где  $\lambda_{\text{BFKL}} = 48 \ln 2 \bar{a}_s$ ,  $\lambda'' = 336\zeta(3) \bar{a}_s$ ,  $\tilde{k}_t^2$  — некоторый (невывчисляемый) параметр.

В остальных пунктах настоящего раздела мы ограничимся рассмотрением различных приложений уравнения ДГЛАП. Результаты БФКЛ-динамики будут использоваться только при обсуждении\*\*.

**4.2.  $Q^2$ -эволюция ПР в первых двух порядках ТВ.** Цель этого пункта — получить асимптотику при малых значениях  $x$  для ПР (и СФ  $F_2(x, Q^2)$ ), используя ДГЛАП-эволюцию и несингулярные начальные условия при некотором достаточно малом значении  $Q_0^2$  (где ТВ, однако, еще применима)\*\*\*:

$$f_a(x, Q_0^2) = A_a \quad (a = S, G). \quad (79)$$

Как отмечалось во введении, ПР  $f_a$  уже домножены на  $x$ , числа  $A_a$  — неизвестные параметры, которые должны быть определены из фита экспериментальных данных. Анализ дан вначале в ведущем порядке, а затем в первых двух порядках ТВ.

\*Неведущая поправка к уравнению БФКЛ посчитана недавно Фадиным и Липатовым в [69] (см. также [70, 71]), где в том числе учтена и  $Q^2$ -зависимость константы связи.

\*\*Заметим, что БФКЛ-подход был использован в [72] для анализа процесса рождения тяжелых кварков, где найдены ядра для вкладов в структурные функции  $F_2$  и  $F_L$  в  $k_t$ -формализме [73], включающем основные черты динамик ДГЛАП и БФКЛ (см., например, [130]).

\*\*\*Мы следуем здесь работе [74]. Поскольку мы интересуемся только поведением ПР при малых  $x$ , а также поскольку используем несингулярные граничные условия (79), мы можем работать далее с переменной  $z = x/x_0$ , где  $x_0$  играет роль границы применимости приближения и/или является свободным параметром в фите данных. Результаты слабо зависят от конкретного значения  $x_0$  (см. [74]), поэтому мы ограничимся здесь случаем  $x_0 = 1$ .



4.2.1. *Ведущий порядок ТВ в отсутствие кварков.* Прежде всего рассмотрим ведущий порядок ТВ при отсутствии кварков. Этот случай, с одной стороны, очень простой, с другой же — близок к реальной ситуации, поскольку именно глюоны дают определяющий вклад в области малых значений переменной  $x$ .

Решение уравнения ДГЛАП для моментов глюонного распределения в этом приближении имеет вид

$$f_G(n, Q^2) = f_G(n, Q_0^2) e^{-d_{GG}(n)s}, \quad (80)$$

где

$$s = \ln(\bar{\alpha}_s(Q_0^2)/\bar{\alpha}_s(Q^2)) \quad \text{и} \quad d_{GG} = \frac{\gamma_{GG}^{(0)}(n)}{2\beta_0}. \quad (81)$$

В этом пункте, как это будет видно ниже, любую пертурбативно-рассчитываемую величину  $K(n)$  удобно представить в виде двух частей: сингулярной (т. е. содержащей член  $\sim 1/(n-1)$  и обозначаемой как  $\hat{K}/(n-1)$ ) и регулярной, обозначаемой как  $\bar{K}(n)$ . Тогда уравнение (80) может быть представлено в виде

$$f_G(n, Q^2) = f_G(n, Q_0^2) e^{-\hat{d}_{GG}s/(n-1)} e^{-\bar{d}_{GG}(n)s}, \quad (82)$$

где  $\hat{\gamma}_{GG} = -8C_A$ .

Используя преобразования Меллина (7), из граничных условий уравнения (79) получаем, что

$$f_a(n, Q_0^2) = \frac{A_a}{n-1}. \quad (83)$$

*A. Классический дважды логарифмический предел.* Как первый шаг, рассмотрим классический дважды логарифмический предел, который соответствует рассмотрению только сингулярной части аномальной размерности  $d_{GG}(n)$ , т. е. случаю, когда  $\bar{d}_{GG}(n) = 0$ .

Разлагая правую часть уравнения (82):

$$f_G^{\text{cdl}}(n, Q^2) = A_G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-\hat{d}_{GG}s)^k}{(n-1)^{k+1}}$$

и используя преобразование Меллина для  $(\ln(1/x))^k$ :

$$\int_0^1 dx x^{n-2} \ln^k \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{k!}{(n-1)^{k+1}},$$

мы легко получаем представление для глюонного распределения в этом приближении:

$$f_G^{\text{cdl}}(x, Q^2) = A_G \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} (-\hat{d}_{GGs})^k \ln^k \left( \frac{1}{x} \right) = A_G I_0(\sigma_{LO}), \quad (84)$$

где  $I_0(\sigma_{LO})$  — модифицированная функция Бесселя с аргументом  $\sigma_{LO} = 2\sqrt{\hat{d}_{GGs} \ln(x)}$ .

*Б. Общй случай.* Как будет показано в приложении, для мелиновской свертки ядра  $\tilde{K}(x)$ , имеющего мелиновский образ  $K(n)$ , который, в свою очередь, не содержит слагаемое  $1/(n-1)$ , и ПР в виде  $I_\nu \left( \sqrt{\hat{d} \ln(1/x)} \right)$  можно написать следующее представление:

$$\tilde{K}(x) \otimes f_a(x) = K(1) f_a(x) + O \left( \sqrt{\frac{\hat{d}}{\ln(1/x)}} \right). \quad (85)$$

Из уравнений (84) и (85) получаем представление для глюонного распределения в ведущем порядке ТВ в отсутствие кварков. Оно имеет вид

$$f_G(x, Q^2) = A_G I_0(\sigma_{LO}) e^{-\bar{d}_{GG}(1)s} + O(\rho_{LO}), \quad (86)$$

где  $\rho_{LO} = \sqrt{\hat{d}_{GGs} / \ln(x)} = \sigma_{LO} / [2 \ln(1/x)]$ ,  $\bar{\gamma}_{GG}^{(0)}(1) = 22 + 4f/3$  и  $\bar{d}_{GG}(1) = 1 + 4f/(3\beta_0)$ , а  $f$  — число активных кварков.

*4.2.2. Ведущий порядок ТВ в присутствии кварков.* В моментном пространстве решение уравнений ДГЛАП в этом случае имеет вид

$$f_a(n, Q^2) = f_a^+(n, Q^2) + f_a^-(n, Q^2), \quad (87)$$

$$f_a^\pm(n, Q^2) = f_a^\pm(n, Q_0^2) e^{-d_\pm(n)s} = f_a^\pm e^{-\hat{d}_\pm s / (n-1)} e^{-\bar{d}_\pm(n)s}, \quad (88)$$

где

$$f_a^\pm(n, Q^2) = \varepsilon_{ab}^\pm(n) f_b(n, Q^2), \quad d_{ab} = \frac{\gamma_{ab}^{(0)}(n)}{2\beta_0},$$

$$d_\pm(n) = \frac{1}{2} \left[ (d_{GG}(n) + d_{SS}(n)) \pm \right. \\ \left. \pm (d_{GG}(n) - d_{SS}(n)) \sqrt{1 + \frac{4d_{SG}(n)d_{GS}(n)}{(d_{GG}(n) - d_{SS}(n))^2}} \right], \quad (89)$$

$$\varepsilon_{SS}^\pm(n) = \varepsilon_{GG}^\mp(n) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{d_{SS}(n) - d_{GG}(n)}{d_\pm(n) - d_\mp(n)} \right),$$

$$\varepsilon_{ab}^\pm(n) = \frac{d_{ab}(n)}{d_\pm(n) - d_\mp(n)} \quad (a \neq b).$$

Сингулярная часть (при  $n \rightarrow 1$ ) «+»-компоненты совпадает с соответствующей частью глюонной аномальной размерности, т. е.

$$\hat{d}_+ = \hat{d}_{GG} = -\frac{4C_A}{\beta_0} = -\frac{12}{\beta_0}. \quad (90)$$

Сингулярная часть «-»-компоненты равна нулю. Проведем анализ компонент по отдельности.

А. «+»-компонента. Ситуация здесь практически аналогична той, что была в предыдущем разделе. Единственное отличие — в дополнительном факторе  $\varepsilon_{ab}^+(n)$ . Разложим его в окрестности  $n = 1$ :

$$\varepsilon_{ab}^+(n) = \bar{\varepsilon}_{ab}^+ + (n-1)\tilde{\varepsilon}_{ab}^+ + O((n-1)^2).$$

Когда коэффициент  $\bar{\varepsilon}_{ab}^+$  домножается на  $f_b(n, Q^2)$ , мы получаем тот же результат, что и в предыдущем разделе:

$$\bar{\varepsilon}_{ab}^+ M_b(n, Q^2) \xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}} \bar{\varepsilon}_{ab}^+ A_b I_0(\sigma_{LO}) e^{-\bar{d}_+(1)s} + O(\rho_{LO}),$$

где символ  $\xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}}$  обозначает обратное преобразование Меллина. Значения  $\sigma_{LO}$  и  $\rho_{LO}$  — те же, что и ранее, поскольку  $\hat{d}_+ = \hat{d}_{GG}$ .

Коэффициент  $\tilde{\varepsilon}_{ab}^+$  возникает с дополнительным множителем  $(n-1)$ , что ведет к следующим результатам:

$$\begin{aligned} (n-1)\tilde{\varepsilon}_{ab}^+ \frac{A_b}{(n-1)} e^{-\hat{d}_+ s/(n-1)} &= \tilde{\varepsilon}_{ab}^+ A_b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-\hat{d}_+ s_{LO})^k}{(n-1)^k} \xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}} \tilde{\varepsilon}_{ab}^+ A_b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k-1)!} (-\hat{d}_+ s)^k (\ln(1/x))^{k-1} = \tilde{\varepsilon}_{ab}^+ A_b \rho_{LO} I_1(\sigma_{LO}), \end{aligned}$$

т. е. дополнительный множитель  $(n-1)$  приводит к замене модифицированной функции Бесселя  $I_0(\sigma_{LO})$  произведением  $\rho_{LO} I_1(\sigma_{LO})$  в  $x$ -пространстве.

Таким образом, «+»-компоненты глюонного и кваркового распределений, т. е. слагаемые  $\varepsilon_{ab}^+(n) M_b(n, Q^2)$ , соответствуют в  $x$ -пространстве следующим выражениям:

$$(\bar{\varepsilon}_{ab}^+ I_0(\sigma_{LO}) + \tilde{\varepsilon}_{ab}^+ \rho_{LO} I_1(\sigma_{LO})) A_b e^{-\bar{d}_+(1)s} + O(\rho_{LO}). \quad (91)$$

Поскольку функции Бесселя  $I_\nu(\sigma)$  имеют  $\nu$ -независимую асимптотику при  $\sigma \rightarrow \infty$  (т. е. при  $x \rightarrow 0$ ), второй член в скобках есть  $O(\rho_{LO})$  относительно первого и может быть сохранен только в том случае, если  $\bar{\varepsilon}_{ab}^+ = 0$ . Как раз этот случай и имеет место для кваркового распределения в ведущем порядке.

Используя конкретные значения аномальных размерностей, получаем

$$\begin{aligned} f_G^+(x, Q^2) &= \left( A_G + \frac{4}{9} A_S \right) I_0(\sigma_{LO}) e^{-\bar{d}_+(1)s} + O(\rho_{LO}), \\ f_S^+(x, Q^2) &= \frac{f}{9} \left( A_G + \frac{4}{9} A_S \right) \rho_{LO} I_1(\sigma_{LO}) e^{-\bar{d}_+(1)s} + O(\rho_{LO}), \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$\bar{d}_+(1) = 1 + \frac{20f}{27\beta_0}. \quad (93)$$

*Б. «-»-компонента.* В этом случае аномальная размерность регулярна (т. е. не содержит слагаемое  $\sim 1/(n-1)$ ). Используя результаты, полученные в 4.2.1, находим

$$\varepsilon_{ab}^-(n) A_b e^{-d_-(n)s} \xrightarrow{\mathcal{M}^{-1}} \bar{\varepsilon}_{ab}^-(1) A_b e^{-d_-(1)s} + O(z).$$

Для конкретных значений аномальных размерностей имеем

$$f_G^-(x, Q^2) = -\frac{4}{9} A_S e^{-d_-(1)s} + O(x), \quad f_S^-(x, Q^2) = A_S e^{-d_-(1)s} + O(x), \quad (94)$$

где

$$d_-(1) = \frac{16f}{27\beta_0}. \quad (95)$$

Таким образом, мы получили выражения для ПР и СФ  $F_2$ :

$$f_a(x, Q^2) = f_a^+(x, Q^2) + f_a^-(x, Q^2), \quad (96)$$

$$F_2(x, Q^2) = e \cdot f_S(x, Q^2), \quad (97)$$

где значения компонент  $f_S^+$ ,  $f_G^+$ ,  $f_S^-$  и  $f_G^-$  могут быть найдены из уравнений (92) и (94), а коэффициент  $e = \sum_1^f e_i^2/f$  — это средний квадрат заряда  $f$  активных кварков.

Подведем некоторые итоги:

- Наши результаты в ведущем порядке совпадают с полученными в работе [75], а для «+»-компоненты — с полученными в [76].

- «+»- и «-»-компоненты представлены здесь и дальше специально отдельно друг от друга, т. к., строго говоря, «-»-компонента  $\sim \text{const}$  и пренебрежимо мала при малых  $x$  (и асимптотически больших  $Q^2$ ). Однако при значениях  $Q^2$ , достигнутых экспериментально, она дает существенный вклад (см., например, [77]). Поскольку хотелось бы, чтобы формулы (92)–(97) описывали данные в широком диапазоне по  $Q^2$ , обе компоненты сохранены в этом анализе.

• Разделение на сингулярную и регулярную (при  $n \rightarrow 1$ ) части аномальных размерностей позволяет восстанавливать ПР по известным решениям для их моментов без применения специальных сложных методов (как это было в [76]).

Дадим ниже инструкции по построению асимптотик ПР, которые могут быть получены из проведенного выше анализа и использованы в следующем порядке ТВ. Эти инструкции предполагают следующую последовательность действий:

- а) Используем точное решение в  $n$ -пространстве.
- б) Разлагаем пертурбативно рассчитываемые части в окрестности точки  $n = 1$ .
- в) Сингулярная часть вида

$$A_a(n-1)^{k-1} e^{-\hat{d}s/(n-1)} \quad (98)$$

определяет форму ПР в  $x$ -пространстве (при малых значениях  $x$ ) в виде

$$A_a \left( \frac{\hat{d}s}{\ln x} \right)^{(k)/2} I_k \left( 2\sqrt{\hat{d}s \ln x} \right). \quad (99)$$

г) Регулярная часть  $B(n) \exp(-\bar{d}(n)s)$  ведет к дополнительному коэффициенту  $B(1) \exp(-\bar{d}(1)s) + O\left(\sqrt{\hat{d}s/\ln x}\right)$ , который домножается на решение (99). Только ведущий член (имеющий самое маленькое значение  $k$ ) может быть использован в (99), остальные должны быть опущены из-за используемой точности  $O\left(\sqrt{\hat{d}s/\ln x}\right)$ .

д) Если сингулярная часть отсутствует, то результат в  $x$ -пространстве имеет вид  $B(1) \exp(-\bar{d}(1)s)$  с точностью  $O(x)$ .

Вооружившись правилами а–д, можно легко распространить наш анализ на следующий порядок ТВ.

4.2.3. Следующий за ведущим порядок ТВ. В моментном пространстве решение уравнения ДГЛАП имеет вид (87) с

$$\begin{aligned} f_a^\pm(n, Q^2) &= \tilde{f}_a^\pm(n, Q^2, Q_0^2) \exp(-d_\pm(n)s - D_\pm(n)p) = \\ &= \tilde{f}_a^\pm(n, Q^2, Q_0^2) \exp(-(\hat{d}_\pm s + \hat{D}_\pm p)/(n-1)) \exp(-\bar{d}_\pm(n)s - \bar{D}_\pm(n)p) \end{aligned} \quad (100)$$

и

$$p = \bar{a}_s(Q_0^2) - \bar{a}_s(Q^2). \quad (101)$$

По сравнению с выражениями для  $f_a^\pm(n, Q^2)$  в ведущем порядке ТВ (см. (88)) в уравнении (100) присутствуют следующие дополнительные факторы:

- член  $\sim p$  в эволюционной части, который имеет вид

$$D_\pm(n) = d_{\pm\pm}(n) - \frac{\beta_1}{\beta_0} d_\pm(n); \quad (102)$$

- дополнительные члены  $\sim \bar{a}_s(Q_0^2)$  и  $\sim \bar{a}_s(Q^2)$  в нормировке

$$\begin{aligned} \tilde{f}_a^\pm(n, Q^2, Q_0^2) = \\ = (1 - d_{\pm\mp}^a(n) \bar{a}_s(Q^2)) f_a^\pm(n, Q_0^2) + d_{\mp\pm}^a(n) \bar{a}_s(Q_0^2) f_a^\mp(n, Q_0^2). \end{aligned} \quad (103)$$

Компоненты, возникающие в следующем порядке в правой части уравнений (102) и (103), имеют вид

$$\begin{aligned} d_{\pm\pm}(n) &= \sum_{a,b=S,G} \varepsilon_{ba}^\pm d_{ab}^{(1)}, \\ d_{\pm\mp}(n) &= \sum_{a=S,G} \varepsilon_{aG}^\pm d_{Ga}^{(1)} - \varepsilon_{SS}^\mp d_{SS}^{(1)} + \left( \varepsilon_{GS}^\pm - \varepsilon_{GG}^\pm / \varepsilon_{SG}^\pm \right) d_{GG}^{(1)}, \\ d_{\pm\mp}^S(n) &= \frac{d_{\pm\mp}(n)}{1 + d_\pm(n) - d_\mp(n)}, \quad d_{\pm\mp}^G(n) = d_{\pm\mp}^S(n) \frac{\varepsilon_{GG}^\mp}{\varepsilon_{SS}^\mp}, \end{aligned} \quad (104)$$

где  $d_{ab}^{(1)}(n) = \gamma_{ab}^{(1)}(n)/(2\beta_0)$ , а  $\gamma_{ab}^{(1)}(n)$  — первые неведущие поправки в аномальных размерностях.

Заметим, что часть неведущих поправок  $\sim D_\pm(n)p$  поднята в экспоненту. Мы проверили, что члены  $\sim D_\pm^2(n)p^2/2$  возникают в поправках  $O(a_s^2)$ , так что такое суммирование является корректной операцией. С другой стороны, такое суммирование очень важно, поскольку эти члены пропорциональны  $\sim 1/(n-1)$  и, таким образом, являются наиболее важными в области малых значений  $x$ . Следовательно, такое суммирование автоматически учитывает наиболее важные поправочные члены следующего порядка, приводя к стабильным результатам ТВ в области малых значений  $x$ .

Следуя рекомендациям предыдущего пункта, мы легко можем получить поведение ПР и СФ  $F_2$  при малых значениях  $x$  в первых двух порядках ТВ:

$$\begin{aligned} f_a(x, Q^2) &= f_a^+(x, Q^2) + f_a^-(x, Q^2), \\ f_a^-(x, Q^2) &= A_a^-(Q^2, Q_0^2) \exp(-d_-(1)s - D_-(1)p) + O(x), \end{aligned} \quad (105)$$

$$f_G^+(x, Q^2) = A_G^+(Q^2, Q_0^2) I_0(\sigma) \exp(-\bar{d}_+(1)s - \bar{D}_+(1)p) + O(\rho), \quad (106)$$

$$\begin{aligned} f_S^+(x, Q^2) &= A_S^+(Q^2, Q_0^2) [(1 - \bar{d}_{+-}^S(1) \bar{a}_s(Q^2)) \rho I_1(\sigma) + 20 \bar{a}_s(Q^2) I_0(\sigma)] \times \\ &\times \exp(-\bar{d}_+(1)s - \bar{D}_+(1)p) + O(\rho), \end{aligned} \quad (107)$$

$$F_2(x, Q^2) = e \left( f_S(x, Q^2) + \frac{2}{3} f \bar{a}_s(Q^2) f_G(x, Q^2) \right), \quad (108)$$

где

$$\sigma = 2\sqrt{(\hat{d}_+s + \hat{D}_+p) \ln x}, \quad \rho = \sqrt{\frac{(\hat{d}_+s + \hat{D}_+p)}{\ln x}} = \frac{\sigma}{2\ln(1/x)}, \quad (109)$$

$$A_G^+ = \left[1 - \frac{80}{81}f\bar{a}_s(Q^2)\right] A_G + \frac{4}{9} \left[1 + 3\left(1 + \frac{1}{81}f\right)\bar{a}_s(Q_0^2) - \frac{80}{81}f\bar{a}_s(Q^2)\right] A_S,$$

$$A_G^- = A_G - A_G^+(Q^2, Q_0^2), \quad A_S^+ = \frac{f}{9} \left(A_G + \frac{4}{9}A_S\right), \quad (110)$$

$$A_S^- = A_S - 20\bar{a}_s(Q_0^2)A_S^+.$$

Компоненты сингулярной и регулярной частей  $D_{\pm}$  имеют вид

$$\hat{d}_{++} = \frac{412}{27\beta_0}f, \quad \hat{d}_{+-}^S = -20,$$

$$\hat{d}_{+-}^G = d_{-+}^S(1) = 0, \quad \bar{d}_{+-}^S(1) = 23 - 12\zeta_2 - \frac{13}{81}f,$$

$$\bar{d}_{++}(1) = \frac{8}{\beta_0} \left(36\zeta_3 + 33\zeta_2 - \frac{1643}{12} + \frac{2}{9}f \left[\frac{68}{9} - 4\zeta_2 - \frac{13}{243}f\right]\right), \quad (111)$$

$$\bar{d}_{+-}^G(1) = \frac{80}{81}f, \quad d_{+-}^G(1) = -3 \left(1 + \frac{f}{81}\right),$$

$$d_{--}(1) = \frac{16}{9\beta_0} \left(2\zeta_3 - 3\zeta_2 + \frac{13}{4} + f \left[4\zeta_2 - \frac{23}{18} + \frac{13}{243}f\right]\right).$$

Численные значения этих коэффициентов при различных значениях числа  $f$  активных кварков сведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения параметров  $Q^2$ -эволюции ПР в обобщенном дважды логарифмическом приближении

$f$	$\hat{d}_+$	$\hat{D}_+$	$\bar{d}_+(1)$	$\bar{D}_+(1)$	$d_-(1)$	$D_-(1)$
3	-4/3	1180/81	101/81	-43,37	16/81	1,971
4	-36/25	91096/5625	61/45	-45,49	64/225	3,108
5	-36/23	84964/4761	307/207	-47,73	80/207	4,675
6	-12/7	8576/441	103/63	-50,05	32/63	6,864

4.2.4. *Эффективные «интерсепты».* Поведение ПР и СФ  $F_2$  в формулах (105)–(108) может быть приближено степенной зависимостью в ограниченном интервале значений  $x$  и  $Q^2$ :

$$f_a(x, Q^2) \sim x^{-\lambda_a^{\text{eff}}(x, Q^2)} \quad \text{и} \quad F_2(x, Q^2) \sim x^{-\lambda_{F_2}^{\text{eff}}(x, Q^2)}.$$

Степени  $\lambda_a^{\text{eff}}$ , которые мы будем называть «интерсептами» и/или «наклонами», могут быть найдены из уравнений (105)–(108) в виде  $\lambda_a^{\text{eff}} = -(d/d \ln x) \ln f_a(x, Q^2)$ . Полные их выражения даны в работах [19, 74, 78]. Здесь мы рассмотрим только их асимптотические значения, которые получают при полном пренебрежении «-»-компонентами ПР:

$$\lambda_G^{\text{eff,as}} = \rho \frac{I_1(\sigma)}{I_0(\sigma)} \approx \rho - \frac{1}{4 \ln \frac{1}{x}},$$

$$\lambda_S^{\text{eff,as}} = \rho \frac{I_2(\sigma)(1 - \bar{d}_{+-}^q(1)\bar{a}_s(Q^2)) + 20 \frac{\bar{a}_s(Q^2)}{\rho} I_1(\sigma)}{I_1(\sigma)(1 - \bar{d}_{+-}^q(1)\bar{a}_s(Q^2)) + 20 \frac{\bar{a}_s(Q^2)}{\rho} I_0(\sigma)} \approx$$

$$\approx \rho - \frac{3}{4 \ln \frac{1}{x}} + \frac{10\bar{a}_s(Q^2)}{\rho \ln \frac{1}{x}}, \quad (112)$$

$$\lambda_{F_2}^{\text{eff,as}}(x, Q^2) = \rho \frac{I_2(\sigma)}{I_1(\sigma)} + 26\bar{a}_s(Q^2) \left( 1 - \frac{I_2(\sigma)I_0(\sigma)}{I_1^2(\sigma)} \right) \approx$$

$$\approx \rho - \frac{3}{4 \ln \frac{1}{x}} + \frac{13\bar{a}_s(Q^2)}{\rho \ln \frac{1}{x}},$$

где символ « $\approx$ » обозначает приближение, полученное в результате разложения функций Бесселя.

Как видно из (112) и из рис. 9, значение величины  $\lambda_G^{\text{eff,as}}$  больше значений  $\lambda_S^{\text{eff,as}}$ , что находится в прекрасном согласии с фитами [79, 80] экспериментальных данных: наклон  $\lambda_{F_2}^{\text{eff,as}}$  располагается между кривыми  $\lambda_S^{\text{eff,as}}$  и  $\lambda_G^{\text{eff,as}}$ .

**4.3. Сравнение с экспериментом.** С помощью уравнений, полученных в 4.2.3, проанализированы данные коллабораций H1 [81] и ZEUS [82] для СФ  $F_2(x, Q^2)$ . Фиты проведены в предположении, что  $\Lambda_{MS}^{(f=4)} = 250$  МэВ, что является стандартным выбором для основного КХД-параметра. В качестве начальной точки  $Q^2$ -эволюции мы выбрали вначале  $Q_0^2 = 1$  ГэВ<sup>2</sup>. Результаты представлены в табл. 2 и на рис. 7 и 8. Как можно видеть, фиты с



учетом неведущей поправки лучше описывают экспериментальные данные. Отсутствие согласия при небольших значениях  $Q^2$  говорит о необходимости выбора меньшего значения  $Q_0^2$  (и о важности в области малых значений  $Q^2$ -поправок от БФКЛ-динамики, которые могут быть добавлены, например, в формализме  $k_t$ -факторизации, что, однако, выходит за рамки настоящего обзора). Далее  $Q_0^2$  рассматривается как свободный параметр. Сравнение табл. 2 и 3 и кривых на рис. 7 и 8 позволяет сделать вывод о существенном улучшении согласия между теорией и экспериментом при  $Q_0^2 \leq 1 \text{ ГэВ}^2$ . Из табл. 3

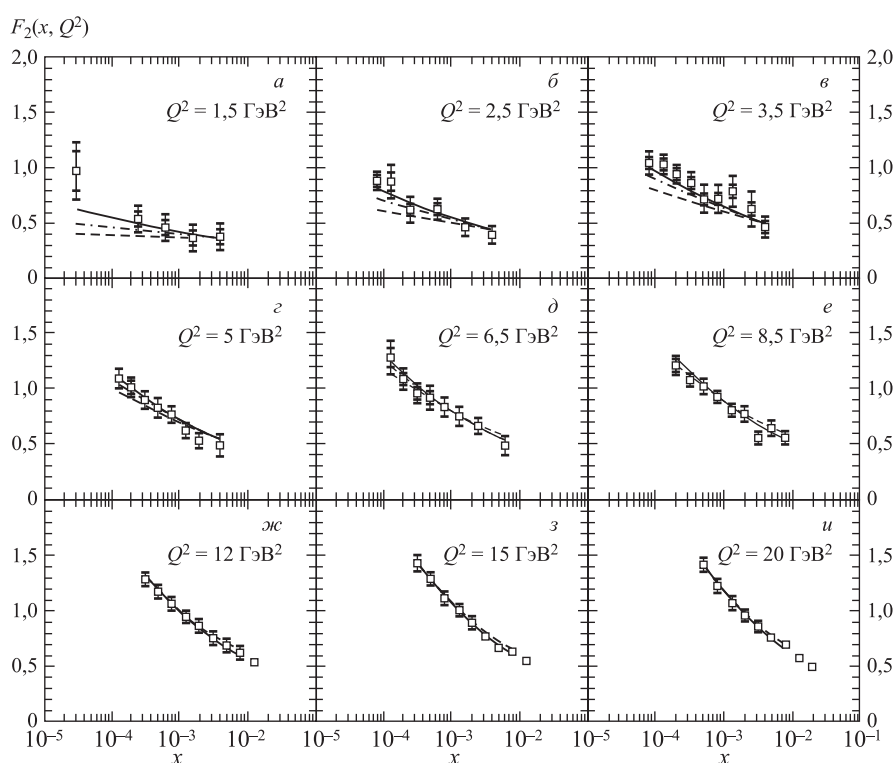


Рис. 7. Зависимость СФ  $F_2$  от  $x$  при различных значениях  $Q^2$ . Экспериментальные точки соответствуют данным группы Н1 [81], которые представлены как со статистическими ошибками, так и с полными (т. е. суммой статистических и систематических ошибок, взятых в квадратуре). Штриховая и штрихпунктирная линии соответствуют анализам в ведущем и следующем за ним порядках ТВ при  $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  (см. табл. 1). Сплошная линия представляет фит в следующем за ведущим порядке при  $Q_0^2 = 0,55 \text{ ГэВ}^2$  (см. табл. 2)

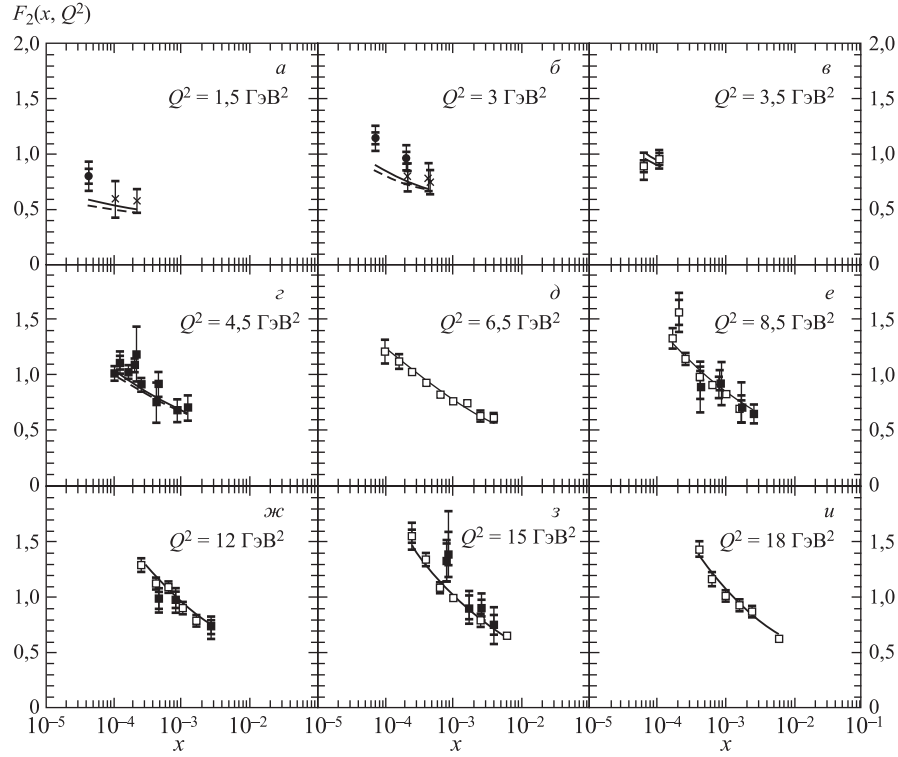


Рис. 8. То же, что и на рис. 7, но для данных группы ZEUS [82]

видно, что при значении  $Q_0^2 = 0,55 \text{ ГэВ}^2$  экспериментальные данные согласуются с предсказаниями теории. Более того, табл. 3 указывает также на близость параметров, получаемых из фита H1- и ZEUS-данных, что является дополнительным подтверждением их взаимосогласованности.

Обнаруженное уменьшение глюонной плотности при малых  $Q^2$  находится в согласии с традиционным предположением (см. [80]), что основной вклад в СФ  $F_2$  при малых  $Q^2$  дают валентные кварки.

С помощью формул (112) было оценено значение эффективного «наклона» для СФ  $F_2$  с использованием параметров, найденных из фита данных в первых двух порядках ТВ. Результаты имеют следующий вид:

$$0,05 < \lambda_{F_2}^{\text{eff,as}} < 0,30-0,37 \quad (\text{H1-данные}),$$

$$0,07-0,09 < \lambda_{F_2}^{\text{eff,as}} < 0,31-0,34 \quad (\text{ZEUS-данные}).$$

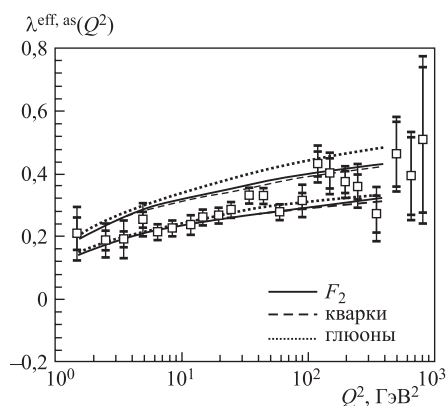


Рис. 9. Асимптотические значения эффективных «наклонов»  $\lambda_g^{\text{eff,as}}$ ,  $\lambda_q^{\text{eff,as}}$  и  $\lambda_{F_2}^{\text{eff,as}}$ , найденных из фита данных группы Н1 в следующем за ведущим порядке ТВ при  $Q_0^2 = 0,55 \text{ ГэВ}^2$  (см. табл. 2). Точки соответствуют данным эксперимента Н1, ошибки приведены, как на рис. 1

Таблица 2. Результаты фитов данных эксперимента Н1 (1994 г.) при различных значениях обрезания данных по  $Q^2$ . Фиты проведены с помощью формул ведущего (LO — leading order) и следующего за ним (NLO — next-to-leading order) порядков ТВ. Значение параметра  $Q_0^2$  фиксировано равным 1

$Q^2 >$	$A_q$	$A_g$	$x_0$	$\chi^2/\text{п. о. п.}$
LO (Н1)				
1	$1,06 \pm 0,07$	$2,46 \pm 0,19$	$0,11 \pm 0,02$	114/104
3	$0,96 \pm 0,08$	$2,53 \pm 0,19$	$0,12 \pm 0,02$	88/92
5	$0,83 \pm 0,09$	$2,47 \pm 0,18$	$0,15 \pm 0,02$	40/83
8,5	$0,80 \pm 0,10$	$2,30 \pm 0,18$	$0,18 \pm 0,03$	23/67
NLO (Н1)				
1	$0,97 \pm 0,08$	$1,30 \pm 0,11$	$0,20 \pm 0,03$	63/104
3	$0,91 \pm 0,10$	$1,31 \pm 0,11$	$0,22 \pm 0,03$	50/92
5	$0,81 \pm 0,10$	$1,28 \pm 0,11$	$0,26 \pm 0,04$	27/83
8,5	$0,84 \pm 0,11$	$1,22 \pm 0,11$	$0,28 \pm 0,05$	21/67

Нижние (верхние) пределы соответствуют  $Q^2 = 1,5 \text{ ГэВ}^2$  ( $Q^2 = 400 \text{ ГэВ}^2$ ). Дисперсия в значениях  $\lambda_{F_2}^{\text{eff,as}}$  возникает за счет  $x$ -зависимости «наклонов». Эти результаты согласуются с полученными в ходе других анализов, а также с экспериментальными данными (см. рис. 9).

Таблица 3. Результаты фитов данных экспериментов H1 и ZEUS (1994 г.) в ведущем (LO) и следующем за ним (NLO) порядках ТВ при произвольном значении  $Q_0^2$  (и фиксированном  $x_0 = 1$ )

Аппроксимация	$A_q$	$A_g$	$Q_0^2$	$\chi^2/\text{п. о. п.}$
LO (H1)	$1,10 \pm 0,08$	$0,35 \pm 0,06$	$0,55 \pm 0,02$	60/104
HLO (H1)	$0,83 \pm 0,09$	$0,21 \pm 0,07$	$0,55 \pm 0,03$	45/104
LO (ZEUS)	$1,13 \pm 0,07$	$0,28 \pm 0,05$	$0,55 \pm 0,02$	174/126
NLO (ZEUS)	$0,85 \pm 0,08$	$0,18 \pm 0,05$	$0,56 \pm 0,02$	143/126

**4.4. Выделение глюонного распределения из данных для  $F_2$  и ее производной.** В отсутствие несинглетной части кварковой плотности (которой можно пренебречь в области малых  $x$ ) при  $x \rightarrow 0$  существуют только две независимые структуры, например, синглетное распределение кварков и распределение глюонов. Экспериментально, однако, их нельзя измерить, поэтому удобно в качестве независимых структур выбрать СФ  $F_2$  и ее производную по  $Q^2$ , которые можно измерить с хорошей точностью. Остальные структуры могут быть выражены через выбранные. В настоящем пункте мы покажем, как глюонное распределение может быть выделено из данных для СФ  $F_2$  и ее производной по  $Q^2$ . В следующем пункте подобный анализ будет проведен для СФ  $F_L$ . Введем ПР при некотором  $Q^2$  в виде

$$f_a(x, Q^2) = x^{-\delta} \tilde{f}_a(x, Q^2), \quad (113)$$

где  $\tilde{f}_S$  и  $\tilde{f}_G$  обладают теми же свойствами, что и структура  $\tilde{f}$  в приложении, т. е.  $\tilde{f}_a(0)$  и  $d\tilde{f}_a(0)/d \ln x$  не сингулярны и  $\tilde{f}_a(1) = d\tilde{f}_a(1)/d \ln x = 0$ .

Заметим, что для больших значений  $\delta$  (т. е.  $x^{-\delta} \gg \text{const}$ )  $Q^2$ -независимое значение  $\delta$  удовлетворяет эволюции ДГЛАП (см. п. 4.6, а также [77]). Если  $\delta(Q^2) = 0$  в некоторой точке  $Q_0^2$ , то поведение  $f_a(x, Q^2) \sim \text{const}$  не поддерживается эволюцией ДГЛАП и генерируется бессельподобная форма для ПР (см. п. 4.2). Здесь мы рассмотрим выделение глюонного распределения в обоих случаях.

4.4.1. Предполагая *реджеподобное* поведение (113), получаем, используя результаты п. 4.2 и уравнение ДГЛАП, для  $F_2$  следующие выражения:

$$\frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = -\frac{1}{2} [r_{SG}^{1+\delta}(\bar{a}_s) e f_G(x, Q^2) + r_{SS}^{1+\delta}(\bar{a}_s) F_2(x, Q^2) + O(x^{1-\delta})], \quad (114)$$

где

$$\begin{aligned} r_{SS}^\eta(\bar{a}_s) &= \bar{a}_s \gamma_{SS}^{(0),\eta} + \bar{a}_s^2 \bar{\gamma}_{SS}^{(1),\eta} + O(\bar{a}_s^3), \\ r_{SG}^\eta(\bar{a}_s) &= \bar{a}_s \gamma_{SG}^{(0),\eta} + \bar{a}_s^2 \bar{\gamma}_{SG}^{(1),\eta} + O(\bar{a}_s^3) \end{aligned} \quad (115)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{SG}^{(1),\eta} &= \gamma_{SG}^{(1),\eta} + B_2^{G,\eta} (2\beta_0 + \gamma_{GG}^{(0),\eta} - \gamma_{SS}^{(0),\eta}) + B_2^{G,\eta} \gamma_{SG}^{(0),\eta}, \\ \bar{\gamma}_{SS}^{(1),\eta} &= \gamma_{SS}^{(1),\eta} + B_2^{G,\eta} \gamma_{GS}^{(0),\eta} + 2\beta_0 B_2^{S,\eta}. \end{aligned} \quad (116)$$

Замена  $\gamma_{Sa}^{(1),\eta} \rightarrow \bar{\gamma}_{Sa}^{(1),\eta}$  в уравнениях (114) и (115) произошла из-за использования в уравнениях ДГЛАП СФ  $F_2$  вместо кваркового распределения. Заметим, что в (114) мы ограничились точностью приближения  $O(x^{1-\delta})$ . Результаты с лучшей точностью могут быть найдены в [83].

Анализируя уравнение (114) и ограничиваясь двумя первыми порядками ТВ, получаем искомое представление для глюонной плотности:

$$\begin{aligned} f_G(x, Q^2) &= -\frac{2f}{\bar{a}_s e} \frac{1}{\gamma_{SG}^{(0),1+\delta} + \bar{\gamma}_{SG}^{(1),1+\delta} \bar{a}_s} \times \\ &\times \left[ \frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} + \frac{\bar{a}_s}{2} \gamma_{SS}^{(0),1+\delta} F_2(x, Q^2) + O(\bar{a}_s^2, x^{1-\delta}) \right]. \end{aligned} \quad (117)$$

Используя конкретные значения для аномальных размерностей и коэффициентов Вильсона, получаем для значений  $\delta = 0,5$  и  $\delta = 0,3$  (и  $f = 4$ )

$$\begin{aligned} f_G(x, Q^2) &= \frac{1,14}{\bar{a}_s} \frac{1}{(1 + 26,93\bar{a}_s)} \times \\ &\times \left[ \frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} + 2,12\bar{a}_s F_2(x, Q^2) + O(\bar{a}_s^2, x^{1-\delta}) \right] \quad (\delta = 0,5), \end{aligned} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} f_G(x, Q^2) &= \frac{0,98}{\bar{a}_s} \frac{1}{(1 + 59,5\bar{a}_s)} \times \\ &\times \left[ \frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} + 1,39\bar{a}_s F_2(x, Q^2) + O(\bar{a}_s^2, x^{1-\delta}) \right] \quad (\delta = 0,3). \end{aligned} \quad (119)$$

4.4.2. Предполагаем *нереджеподобное* поведение\*:

$$f_a(x, Q^2) = I_0 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\delta(Q^2) \ln \frac{1}{x}} \right) \tilde{f}_a(x, Q^2), \quad (120)$$

---

\*В представлении (120) мы пренебрегли «-»-компонентой (см. п. 4.2), что возможно в настоящем анализе и не нарушает воспроизводства глюонного распределения (см. обсуждение в 4.4.3).

значение  $\delta(Q^2)$  было получено в п. 4.3. Действуя аналогично анализу, проведенному в 4.4.1, имеем для глюонного распределения следующее представление:

$$f_G(x, Q^2) = \frac{3}{4e} \frac{1}{\bar{a}_s} \frac{1}{\left(1 + 26\bar{a}_s \left[1/\tilde{\delta} - \frac{41}{13}\right]\right)} \left[ \frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} + O(\bar{a}_s^2, x^1) \right], \quad (121)$$

где (см. приложение)  $1/\tilde{\delta} = 1/\tilde{\delta}_I$  при  $\delta = 0$ . Член  $\sim F_2(x, Q^2)$  выпал из правой части (121), поскольку  $\gamma_{SS}^{(0),n=1} = 0$ .

Мы в состоянии дать также представление для глюонного распределения и в случае более общих асимптотик для  $f_a(x, Q^2)$ . Пусть в правую часть (120) будет добавлен множитель  $x^{-\delta}$ . Тогда выражение для  $f_G(x, Q^2)$  будет иметь вид, совпадающий с (117), но с заменой  $\bar{\gamma}_{SG}^{(0),1+\delta} \rightarrow \tilde{\gamma}_{SG}^{(0),1+\delta}$ , где  $\tilde{\gamma}_{SG}^{(0),1+\delta}$  воспроизводится из  $\bar{\gamma}_{SG}^{(0),1+\delta}$  при  $1/\delta \rightarrow 1/\tilde{\delta}_I$  (см. приложение). Такое представление, однако, несколько усложняет формулы.

**4.4.3. Анализ экспериментальных данных.** Прежде всего проведем реконструкцию глюонного распределения при  $Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$ , используя пара-

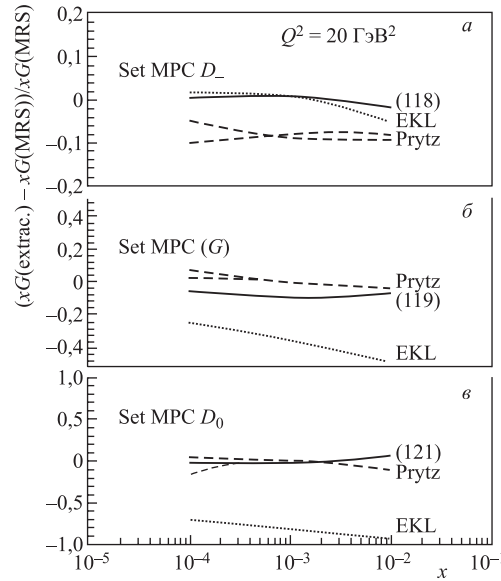


Рис. 10. Относительная разница между глюонными распределениями, восстановленными с помощью формул п. 4.3, работ [84], и первоначальными параметризациями MPC при  $Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$

метризации Мартина–Роверта–Стирлинга (МРС) для партонных плотностей. Реконструкция состоит в получении  $F_2$  и ее производной численно при помощи точных меллиновских сверток и возвращении к глюонной плотности на основе использования приближенных формул. Получена [83] очень хорошая точность восстановления глюонного распределения для  $\delta = 0,5$  и  $\delta = 0$  при использовании наборов МРС, имеющих те же значения наклона  $\delta$ . Точность восстановления несколько хуже для случая  $\delta = 0,3$ , поскольку в анализе использован  $G$ -набор, в котором  $\delta = 0,3$  только для глюонного распределения; для кварковой плотности в этом наборе  $\delta = 0$ , что находится в противоречии с нашим предположением (см. (120)). Вклад морских кварков невелик по сравнению с вкладом глюонов, поэтому мы получаем неплохую точность восстановления глюонного распределения и в этом случае. На рис. 10 мы сравниваем точность вычисления нашего подхода с двумя другими, полученными в работах [84]. Можно увидеть, что наши формулы воспроизводят глюонное распределение лучше для всех значений  $\delta$ .

Рис. 11. Глюонная плотность при малых значениях  $x$ . Точки соответствуют значению глюонного распределения, выделенного из данных  $F_2$  и  $dF_2/d \ln(Q^2)$  при помощи формулы (119). Сплошная линия представляет значение глюонной плотности МРС-параметризации типа  $G$ . Штриховыми линиями обозначены области ограничений на значения глюонного распределения из данных (1993 г.) экспериментов H1 и ZEUS

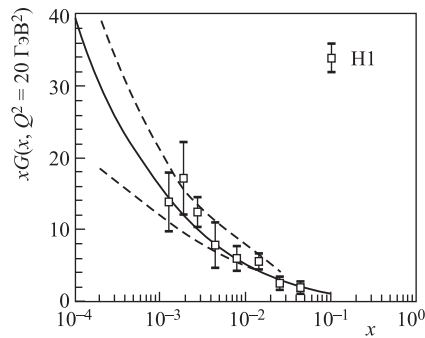


Рис. 11 показывает величину глюонной плотности, выделенной из данных для СФ  $F_2$  и ее производной с помощью формулы (119). Были использованы данные групп H1 [81] и ZEUS [82]\*.

**4.5. Выделение  $F_L$  из данных для  $F_2$  и ее производной.** Как это уже освещалось во введении, продольная СФ  $F_L$  очень чувствительна к свойствам КХД, поскольку она равна нулю в партонной модели, содержащей партоны спина  $1/2$ . Небольшое, но отличное от нуля значение  $F_L$  естественно объясняется в рамках пертурбативной КХД, т.к. может возникать за счет кварк-глюонного взаимодействия, отличающего КХД от кварк-партонной модели.

\*Заметим, что рис. 11, взятый из работы [83], содержит относительно старые данные с ускорителя HERA. Современные данные позволяют существенно уменьшить величину неопределенностей при выделении глюонного распределения (см. [86, 87]).

Значения  $F_L$  при малых  $x$  были неизвестны до недавнего времени, и впервые они были получены (и представлены на конференции DIS'96) одновременно экспериментально коллаборацией H1 [85] и с помощью приводимой здесь методики (см. [88]).

Многие выкладки настоящего анализа полностью аналогичны рассмотренным в предыдущем пункте и, чтобы не повторяться, будем использовать написанные там формулы. Пусть ПР имеют вид (113) при некотором  $Q_0^2$ , тогда, как описано в п. 4.4, они будут либо воспроизводиться при  $Q^2 > Q_0^2$ , если  $x^{-\delta} \gg \text{const}$ , либо генерировать бессельподобное поведение. Как и в п. 4.4, мы рассмотрим здесь оба случая отдельно.

4.5.1. Предполагая *реджеподобное* поведение (113) для ПР, получаем формулу для связи СФ  $F_L$  с  $F_2$  и глюонной плотностью:

$$F_L(x, Q^2) = r_{LG}^{1+\delta}(\bar{a}_s) e f_G(x, Q^2) + r_{LS}^{1+\delta}(\bar{a}_s) F_2(x, Q^2) + O(x^{1-\delta}), \quad (122)$$

где

$$\begin{aligned} r_{Ls}^{\eta}(\bar{a}_s) &= \bar{a}_s B_L^{s,\eta} \left[ 1 + \bar{a}_s \bar{R}_L^{s,\eta} \right] + O(\bar{a}_s^3), \\ r_{Lg}^{\eta}(\bar{a}_s) &= \bar{a}_s B_L^{g,\eta} \left[ 1 + \bar{a}_s \bar{R}_L^{g,\eta} \right] + O(\bar{a}_s^3) \end{aligned} \quad (123)$$

и

$$\bar{R}_L^{s,\eta} = R_L^{s,\eta} - B_2^{s,\eta}, \quad \bar{R}_L^{g,\eta} = R_L^{g,\eta} - B_2^{g,\eta} B_L^{s,\eta} / B_L^{g,\eta}. \quad (124)$$

Для получения (122) мы использовали метод сведения меллиновской конволюции к обычному произведению, рассмотренный в приложении. В правой части (122) мы ограничились точностью  $O(x^{1-\delta})$ .

Комбинируя уравнения (122) и (114) из п. 4.4, мы получаем искомое представление для продольной СФ  $F_L$ . Ограничиваясь двумя первыми порядками теории возмущений, имеем

$$\begin{aligned} F_L(x, Q^2) &= -2 \frac{B_L^{g,1+\delta} \left( 1 + \bar{a}_s \bar{R}_L^{g,1+\delta} \right)}{\gamma_{SG}^{(0),1+\delta} + \bar{\gamma}_{SG}^{(1),1+\delta} \bar{a}_s} \left[ \frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{a}_s}{2} \left( \frac{B_L^{s,1+\delta}}{B_L^{g,1+\delta}} \gamma_{SG}^{(0),1+\delta} - \gamma_{SS}^{(0),1+\delta} \right) F_2(x, Q^2) \right] + O(\bar{a}_s^2, x^{1-\delta}), \end{aligned} \quad (125)$$

где  $\bar{\gamma}_{SG}^{(1),1+\delta}$  дана в п. 4.4 (см. (116)), а  $\bar{R}_L^{i,\eta}$  — в уравнении (124).

Используя конкретные значения для аномальных размерностей и коэффициентов Вильсона, для значений  $\delta = 0,5$  и  $\delta = 0,3$  (и  $f = 4$ ) получаем следующие выражения:



при  $\delta = 0,5$

$$F_L(x, Q^2) = \frac{1,04}{1 + 22,9\bar{a}_s} \left[ \frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} + 4,17\bar{a}_s F_2(x, Q^2) \right] + O(\bar{a}_s^2, x^{1-\delta}), \quad (126)$$

при  $\delta = 0,3$

$$F_L(x, Q^2) = \frac{1,05}{1 + 59,3\bar{a}_s} \left[ \frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} + 3,59\bar{a}_s F_2(x, Q^2) \right] + O(\bar{a}_s^2, x^{1-\delta}). \quad (127)$$

4.5.2. Предполагаем *нереджеподобное* поведение (120) и, действуя аналогично анализу, проведенному в 4.4.2, имеем для СФ  $F_L$  следующее представление:

$$F_L(x, Q^2) = \frac{1}{\left(1 + 30\bar{a}_s(Q^2) \left[ \frac{1}{\tilde{\delta}} - \frac{116}{45} \right] \right)} \times \left[ \frac{dF_2(x, Q^2)}{d \ln Q^2} + \frac{8}{3}\bar{a}_s(Q^2) F_2(x, Q^2) \right] + O(\bar{a}_s^2, x), \quad (128)$$

где значение  $1/\tilde{\delta}$  дано после уравнения (121).

Как и для глюонного распределения (см. обсуждения в конце предыдущего пункта), мы в состоянии дать представление для СФ  $F_L$  в случае более общей асимптотики для  $f_G(x, Q^2)$  и  $F_2(x, Q^2)$ . Если в правую часть (120) будет добавлен множитель  $x^{-\delta}$ , тогда выражение для  $F_L$  будет иметь тот же вид, что и (125) с заменой  $\bar{\gamma}_{SG}^{(0),1+\delta} \rightarrow \tilde{\gamma}_{SG}^{(0),1+\delta}$  и  $\bar{R}_L^{i,\eta} \rightarrow \tilde{R}_L^{i,\eta}$ , где  $\tilde{\gamma}_{SG}^{(0),1+\delta}$  и  $\tilde{R}_L^{i,\eta}$  совпадают, соответственно, с  $\bar{\gamma}_{SG}^{(0),1+\delta}$  и  $\bar{R}_L^{i,\eta}$  при  $1/\delta \rightarrow 1/\tilde{\delta}_I$  (см. приложение).

4.5.3. *Анализ экспериментальных данных.* Проведено сравнение результатов для СФ  $F_L$ , полученных с использованием точного численного расчета соответствующих сверток Меллина и приближенных формул, рассмотренных выше. Очень хорошее согласие между этими двумя результатами обнаруживается при  $\delta = 0,5$  и  $\delta = 0$ . Для  $\delta = 0,3$  согласие не столь хорошее, что связано (как это обсуждалось в предыдущем п. 5.4) с различной величиной наклонов:  $\delta = 0,3$  для глюонов и  $\delta = 0$  для кварков в  $G$ -наборе, используемом здесь для ПР.

На рис. 12 мы приводим результаты для СФ  $F_L$ , используя данные Н1 [81] и ZEUS [82] для СФ  $F_2$  и ее производной по  $Q^2$ . Там же приведено предварительное значение для  $F_L$ , полученное группой Н1 в [85]. Мы использовали значения  $\delta = 0, 0,3$  и  $0,5$  и наборы МРС-параметризации  $D_0$ ,  $G$  и  $D_-$  соответственно. Большое разногласие между нашими результатами для  $F_L$  при

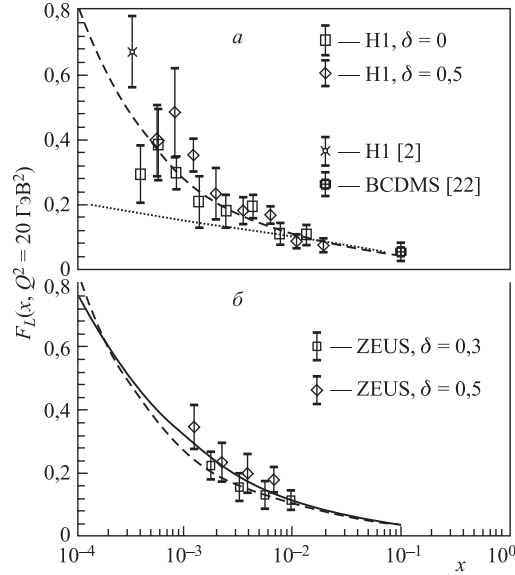


Рис. 12. Продольная СФ  $F_L$  при малых значениях  $x$  и  $Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$ . Точки соответствуют значениям  $F_L$ , выделенным из данных групп H1 и ZEUS при помощи уравнений (126) и (127). Сплошная, штриховая и пунктирная линии соответствуют результатам для  $F_L$  (с учетом  $\alpha_s^2$ -поправок) при использовании различных наборов параметризаций МРС. Показаны и данные эксперимента BCDMS, а также предварительное значение группы H1 [85]

$\delta = 0$  и предсказаниями МРС показывает, что данные не описываются не-сингулярными ПР. В противоположность этому результаты, полученные с помощью формул (126) и (127), т. е. при  $\delta = 0,5$  и  $\delta = 0,3$ , согласуются друг с другом в пределах своих ошибок, а также с предсказаниями МРС и с предварительной точкой, измеренной группой H1. При непрерывном продолжении точек, полученных здесь, в область переменной  $x$ , где наши формулы не должны работать, мы видим, тем не менее, хорошее согласие с данными группы BCDMS.

Заметим, что подобный анализ был проведен (см. [88]) также для отношения  $R = \sigma_L/\sigma_T$ , которое может быть выражено через СФ  $F_L$  и  $F_2$  в виде

$$R(x, Q^2) = \frac{F_L(x, Q^2)}{F_2(x, Q^2) - F_L(x, Q^2)}.$$

**4.6.  $Q^2$ -зависимость наклонов ПР.** В п.4.3 мы нашли асимптотики ПР, удовлетворяющих уравнению ДГЛАП в первых двух порядках ТВ. Полученные асимптотики оказались нереджевского типа, т.е. они являются обобщением решения дважды логарифмического типа:

$$\sim \exp(\sim \sqrt{\ln \ln(Q^2/Q_0^2) \ln(1/x)}).$$

Такие асимптотики хорошо описывают современные экспериментальные данные.

Заметим, однако, что данные коллабораций H1 и ZEUS при достаточно больших  $Q^2$  хорошо описываются также при помощи ПР, параметризации которых содержат надкритический (т.е. БФКЛ) померон. Хорошо известно к тому же, что данные коллабораций NM и E665 при низких значениях  $Q^2$  находятся в хорошем согласии с предсказаниями, основанными на обмене помероном, имеющим интерсепт, близкий к критическому значению  $\alpha_P = 1$  (см. [89]). В работе [90] данные (при больших и малых значениях  $Q^2$ ) были профитированы с использованием реджевской асимптотики  $\sim x^{-\delta(Q^2)}$  ( $\alpha_P \equiv 1 + \delta(Q^2)$ ). Результат анализа содержал быстрое изменение наклона траектории от значений порядка  $\sim 1,08$  до значений  $\sim 1,4$  в достаточно узком интервале значений  $Q^2$ :  $1 < Q^2 < 10$  ГэВ<sup>2</sup>. При  $Q^2 < 1$  ГэВ<sup>2</sup> и  $Q^2 > 10$  ГэВ<sup>2</sup> значения наклона  $\delta(Q^2)$ , близкие к 0,08 и 0,4, оставались практически постоянными\*.

Далее в этом разделе мы представим попытку, сделанную в работах [77], объяснения такого поведения наклона  $\delta(Q^2)$ .

Рассмотрим *реджеподобную* форму ПР в виде (113). Подставим ее в уравнение ДГЛАП и из совместимости правой и левой его частей найдем  $Q^2$ -зависимость параметров  $f_a(x, Q^2)$ . Результат имеет вид

$$\frac{f_a(x, t)}{f_a(x, t_0)} = \frac{M_a(1 + \delta, t)}{M_a(1 + \delta, t_0)}, \quad (129)$$

где  $t = \ln(Q^2/\Lambda^2)$ ,  $t_0 = t(Q^2 = Q_0^2)$  и  $M_a(1 + \delta, t)$  есть аналитическое продолжение моментов  $M_a(n, t)$  на нецелое значение аргумента  $n = 1 + \delta$ .

В случае больших значений  $\delta$  (т.е. в случае, когда  $x^{-\delta} \gg \text{const}$ ) подобные исследования уже были проведены в [28].

Распространим полученные ранее результаты на случай  $\delta \sim 0$  (т.е. на область небольших значений  $Q^2$ ), следуя представленному в приложении методу замены конволюции Меллина простым произведением. Поскольку моменты  $M_a$  эволюционируют по  $Q^2$  как комбинация «+»- и «-»-компонент,

---

\*Как мы уже показали в предыдущем разделе, в современных данных чаще наблюдается более плавный рост наклона с увеличением значений  $Q^2$ .

очевидно, что и сами ПР изменяются подобным образом (см. п. 4.3, где точные бессельподобные асимптотики ПР были получены именно в таком виде).

4.6.1. *Ведущий порядок ТВ.* Рассмотрим ДГЛАП-уравнение для «+»- и «-»-компонент по отдельности. Используя метод, приведенный в приложении, мы можем представить эволюционные уравнения в виде дифференциальных уравнений 1-го порядка (пусть  $\tilde{d}_\pm = \tilde{\gamma}_\pm/(2\beta_0)$ ):

$$\frac{d}{ds} f_a^\pm(x, t) = -\tilde{d}_\pm(\alpha, 1 + \delta_\pm) f_a^\pm(x, t) + O(x^{1-\delta_\pm}), \quad (130)$$

где мы постулируем вид ПР в реджеподобном виде:

$$f_a^\pm(x, Q^2) = A_a^\pm x^{-\delta_\pm} + O(x^{1-\delta_\pm}). \quad (131)$$

Как следует из анализа, приведенного в 4.2.2, anomальная размерность  $\gamma_-(n)$  не содержит членов  $\sim 1/(n-1)$ , тогда  $\tilde{\gamma}_-(1 + \delta_-) = \gamma_-(1 + \delta_-)$  и ПР  $f_a^-(x, t)$ , являющееся решением уравнения (130) для «-»-случая, может быть представлено в виде

$$\frac{f_a^-(x, t)}{f_a^-(x, t_0)} = e^{-d_-(1+\delta_-)s}. \quad (132)$$

Anomальная размерность  $\gamma_+(n)$  содержит сингулярный (при  $n \rightarrow 1$ ) член и  $f_a^+(x, t)$  имеет решение, подобное (132), только для  $x^{-\delta} \gg \text{const}$ , т. е.

$$\frac{f_a^+(x, t)}{f_a^+(x, t_0)} = e^{-d_+(1+\delta_+)s}, \quad \text{если } x^{-\delta_+} \gg 1. \quad (133)$$

Оба наклона  $\delta_+$  и  $\delta_-$  неизвестны и должны быть, в принципе, найдены из анализа экспериментальных данных. Существует, однако, облегчающее обстоятельство. Из данных NMC и E665 при малых значениях  $Q^2$  и  $x$  можно заключить, что СФ  $F_2$  и, следовательно, ПР  $f_a(x, Q^2)$  имеют нерастущие асимптотики при  $x \rightarrow 0$  и  $Q^2 \sim 1$  ГэВ<sup>2</sup>. Таким образом, мы знаем, что значения  $\delta_+$  и  $\delta_-$  близки к нулю при  $Q^2 \sim 1$  ГэВ<sup>2</sup>.

Рассмотрим уравнения (130) при  $\delta_\pm = 0$  и начальном условии (79) при  $Q^2 = 1$  ГэВ<sup>2</sup>. Для «-»-компоненты реджеподобное решение уже существует: это (132) при  $\delta_- = 0$ , что совпадает с (94). Для «+»-компоненты уравнение (130) можно переписать в следующем виде (далее индекс  $1 + \delta$  будет обозначаться как 1 в случае  $\delta \rightarrow 0$ ):

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) \frac{d}{ds} \delta_+(s) + \frac{d}{ds} \ln(A_a^+) = -\hat{d}_+ \left( \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \hat{\rho}(\nu) \right) + \bar{d}_+(1), \quad (134)$$

где  $\hat{d}_+$  и  $\bar{d}_+(1)$  даны в (90) и (95) соответственно. Решение этого уравнения имеет вид

$$f_a^+(x, t) = A_a^+ x^{\hat{d}_+ s} e^{-\bar{d}_+ s}, \quad (135)$$

где  $\tilde{d}_+ = \bar{d}_+ - \hat{d}_+ \hat{\rho}(\nu)$ , а  $\hat{\rho}(\nu)$  определено в приложении (см. (177)).

Как можно видеть из формулы (134), растущая форма «+»-компоненты (имеющая  $\delta_+ = 0$  при  $Q^2 = Q_0^2$ ) нестабильна, поскольку  $d\delta_+(Q_0^2)/ds \neq 0$  и для  $Q^2 \neq Q_0^2$  генерируется ненулевая степень  $x$  (см. [112–115]). Заметим, что для  $Q^2 > Q_0^2$  степень  $x$  отрицательна, что находится в согласии с экспериментальными данными и анализом, полученным в 4.2.4. Рассмотрение значений  $Q^2 < Q_0^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$  является весьма сомнительной операцией и обсуждаться не будет.

Таким образом, мы получили две формы  $Q^2$ -зависимости «+»-компоненты, одна из которых, т. е. (135), совместима с уравнением ДГЛАП при значениях  $Q^2$ , близких к  $Q_0^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$ , где наклон  $\delta(Q^2)$  начинает свое движение в отрицательную область. Другая, т. е. (133), может быть использована при больших значениях  $Q^2$  и содержит наклон, не зависящий от  $Q^2$ . Вообще говоря, общее решение должно содержать плавный переход между этими картинками, однако такое решение отсутствует\*. Как возможный выход из ситуации, можно ввести некоторое «критическое» значение  $Q^2$ :  $Q_c^2$ , при котором решение (135) должно переходить в уравнение (133), т. к. при  $Q^2 = Q_c^2$  величина  $\delta_+ = \hat{d}_+ s$  становится существенно отличной от нуля. Точное значение  $Q_c^2$  может быть найдено из анализа экспериментальных данных.

Итак, получаем в ведущем порядке ТВ реджеподобные ПР в виде (96), где

$$f_a^-(x, t) = A_a^- \exp(-d_- s),$$

$$f_a^+(x, t) = \begin{cases} A_a^+(R) x^{\hat{d}_+ s} \exp(-\bar{d}_+ s), & \text{если } Q^2 \leq Q_c^2, \\ f_a^+(x, t_c) \exp\left(-d_+(1 + \delta_c)(s - s_c)\right), & \text{если } Q^2 > Q_c^2 \end{cases} \quad (136)$$

и  $t_c = t(Q_c^2)$ ,  $s_c = s(Q_c^2)$ . Значения  $A_a^\pm$  даны в (92) и (94),  $A_G^+(R) = A_G^+$ ,  $A_S^+(R)$  получается из  $A_S^+$  при замене

$$\rho \rightarrow \rho_R = \left( \ln(1/x) - \hat{\rho}(\nu) - 85/108 \right)^{-1}. \quad (137)$$

Таким образом, значение «+»-компоненты кваркового распределения подавлено логарифмически, что находится в качественном согласии с параметризацией  $F_2$  (см. [91]), где амплитуда при факторе  $x^{-\delta}$  составляет величину, равную 5–10% от амплитуды несингулярной (при  $x \rightarrow 0$ ) компоненты.

4.6.2. Следующий за ведущим порядок ТВ. По аналогии с предыдущим пунктом, зная в следующем за ведущим порядке ТВ соответствующую

---

\*Функция вида  $A_+^a \exp(-s\bar{\gamma}_+(1+\delta)/2\beta_0)$  совпадает с уравнением (133) при  $x^{\hat{d}_+} \gg \text{const}$  и уравнением (135), когда  $\delta_+ = 0$ , однако эта функция не совместима с уравнением ДГЛАП.

$Q^2$ -зависимость моментов ПР, мы получаем ПР в виде (96) и

$$\begin{aligned} f_a^-(x, t) &= \tilde{A}_a^- \exp(-d_- s - D_-^a p), \\ f_a^+(x, t) &= \begin{cases} \tilde{A}_a^+(R) x^{(\tilde{d}_+ s + \tilde{D}_+^a p)} \exp(-\tilde{d}_+ s - \tilde{D}_+^a p), & \text{если } Q^2 \leq Q_c^2, \\ f_a^+(x, t_c) \exp\left(-d_+(1 + \delta_c)(s - s_c) - D_+^a(1 + \delta_c)(p - p_c)\right), & \text{если } Q^2 > Q_c^2, \end{cases} \end{aligned} \quad (138)$$

где  $p$  дано в (101) и

$$s_c = s(Q_c^2), \quad p_c = p(Q_c^2), \quad D_{\pm}^a = D_{\pm} - d_{\pm\mp}^a. \quad (139)$$

Значения величин  $D_{\pm}$  и  $d_{\pm\mp}^a$  представлены в (102), (104) и (111), нормировки  $\tilde{A}_a^-$  и  $\tilde{A}_a^+(R)$  даны уравнениями (110) при замене  $\bar{a}_s(Q^2) \rightarrow \bar{a}_s(Q_0^2)$  и  $\rho \rightarrow \rho_R$ .

СФ  $F_2(x, Q^2)$  может быть получена на основе найденных представлений для ПР согласно следующей формуле:

$$\begin{aligned} F_2(x, Q^2)/\delta_s^2 &= \left(1 + \bar{a}_s(Q^2)B_q(1 + \delta)\right) f_q(x, Q^2) + \\ &+ \bar{a}_s(Q^2)B_g(1 + \delta) f_g(x, Q^2). \end{aligned} \quad (140)$$

Иногда удобно дать представления типа (138) для самой СФ  $F_2(x, Q^2)$  в виде ее «+»- и «-»-компонент (см. [77]).

Как можно видеть из приведенного выше анализа, влияние неведущих поправок такое же, как и в п. 4.3: они уменьшают значения наклона  $\delta(Q^2)$  и, как следствие, величину вклада глюонного распределения. Для кваркового распределения, однако, возможно лишь небольшое уменьшение за счет неведущего вклада, поскольку в следующем за ведущим порядке появляется дополнительный вклад  $\sim a_s(Q_0^2)$ , не подавленный как  $\sim 1/\ln(1/x)$  (см. уравнение (107)).

Заметим также, что в интервале значений нашей  $Q^2$ -эволюции лежит порог рождения четвертого кварка при  $Q_{\text{th}}^2 \sim 10 \text{ ГэВ}^2$ . Значение  $Q_{\text{th}}^2$  может быть меньше или больше  $Q_c^2$ . Оценим скачок интерсепта при изменении числа сортов  $f$  кварков от 3 до 4, предполагая для простоты, что  $Q_{\text{th}}^2 = Q_c^2$ . После некоторых выкладок (см. [77]) получаем

$$\Delta\alpha_p = 0,11\tilde{s}(Q_{\text{th}}^2, Q_0^2) - 3,55p(Q_{\text{th}}^2, Q_0^2),$$

т. е. скачок зависит от конкретных значений  $Q_{\text{th}}^2$  и  $Q_0^2$ . Для  $Q_{\text{th}}^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$ ,  $Q_0^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  его величина мала:  $\Delta\alpha_p = 0,012$ , что согласуется с результатами, полученными в рамках дуальной партонной модели [92].

4.6.3. *Обсуждение результатов.* Итак, получены представления (96), (136) и (138) для ПР и (140) для СФ  $F_2$ , имеющих *реджеподобную* форму и следующие свойства:

- при малых значениях  $Q^2$  ( $Q^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$ ) СФ  $F_2$  и ПР имеют нерастущую по  $x$  асимптотику при  $x \rightarrow 0$ ,
- при больших значениях  $Q^2$  СФ  $F_2$  и ПР быстро увеличиваются при  $x \rightarrow 0$ .

Нерастущее поведение СФ  $F_2$  при  $Q^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$  нестабильно: оно становится сингулярным при  $x \rightarrow 0$  и  $Q^2 > 1 \text{ ГэВ}^2$ . Поведение при больших значениях  $Q^2$  соответствует независимому от  $Q^2$  наклону  $\delta(Q^2)$ . Общее решение должно содержать непрерывный переход между этими различными формами ПР. К сожалению, невозможно его получить в виде простой формы (133), т. к. правая часть уравнения ДГЛАП будет содержать члены как  $\sim x^{-\delta}$ , так и  $\sim \text{const}$  при подстановке пробной функции типа (133) в ее подынтегральное выражение. Поэтому мы построили приближение, сшивающее рассмотренные выше случаи при малых и больших значениях  $Q^2$ . Численные значения  $\delta_S(Q^2)$  и  $\delta_G(Q^2)$  даны в [77] при следующих предположениях:  $Q_0^2 = 1$  и  $2 \text{ ГэВ}^2$ , КХД-параметр  $\Lambda$  в виде 200 и 300 МэВ и  $\nu = 5$ . Последнее условие согласуется с асимптотикой при глюонной плотности, полученной в рамках правил кваркового счета. Значения  $\delta_S(Q^2)$  хорошо согласуются с полученными коллаборацией N1. Более того,  $\delta_a(Q^2)$  близки к значениям «эффективных» наклонов, найденных в п. 4.3, а  $\delta_a(Q^2 = 4 \text{ ГэВ}^2)$  близки к полученным в работе [93]. Мы, однако, заметим, что «эффективные» наклоны несколько меньше приведенных в [77], поскольку существует вторая (предасимптотическая) компонента.

В заключение этого раздела отметим, что ситуация слабо меняется (см. [77]) при использовании в качестве «затравочного» интерсепта значения  $\delta(Q_0^2) = \varepsilon \equiv 0,08$ , найденного в [89] из фита экспериментальных данных при малых значениях  $Q^2$ .

## 5. ПАРАМЕТРИЗАЦИИ СФ

Теоретически удобно рассматривать не СФ ГНР, а их моменты, коэффициентные функции которых можно вычислять по ТВ и улучшать с помощью метода ренорм-группы (см. разд. 1). Однако сравнивать с экспериментальными данными удобнее сами СФ. Точно восстановить их по моментам не удается, поэтому используются различные параметризации, введенные, например, Фейнманом и Филдом [97], Бурасом и Гамерсом [98] и др. [38, 99, 100].

Следуя [8, 101], Лопец и Индурайн показали, что для нахождения параметров параметризаций СФ можно использовать анализ поведения СФ при  $x \sim 0$  и  $x \sim 1$  (см. [7, 28]).

**5.1. СФ и ПР при  $x \rightarrow 1$ .** Начнем с рассмотрения поведения несинглетных СФ в ведущем порядке ТВ в пределе  $x \rightarrow 1$ .

*5.1.1. Несинглетный случай.* Предположим, что ПР  $f_{NS}(x)$  (которое совпадает с несинглетной СФ в рассматриваемом приближении) обладают асимптотическим поведением вида

$$f_{NS}(x, Q^2)|_{x \rightarrow 1} = A(Q^2)(1-x)^{\nu(\bar{a}_s)}, \quad (141)$$

к которому могут существовать логарифмические поправки. Известно, что поведение СФ в пределе  $x \rightarrow 1$  связано с поведением моментов СФ при больших значениях  $n$ . Используя асимптотику (141), получаем выражение для моментов

$$f_{NS}(n, Q^2)|_{n \rightarrow \infty} = A(Q^2) \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(1+\nu(\bar{a}_s))}{\Gamma(n+\nu(\bar{a}_s))}. \quad (142)$$

Из соотношений для  $Q^2$ -зависимости моментов (см. уравнения (141) и (87), (88)) имеем

$$\frac{f_{NS}(n, Q^2)}{f_{NS}(n, Q_0^2)} \Big|_{n \rightarrow \infty} = \exp\left(-\frac{4C_F}{\beta_0}(\ln n - 3/4 + \gamma)s\right), \quad (143)$$

поскольку  $S_1(n) = \ln(n) + \gamma + O(1/n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Приравнявая результаты, находим точный вид  $Q^2$ -зависимости коэффициентов  $A$  и  $\nu$ , а также выражение для асимптотики СФ в пределе  $x \rightarrow 1$ :

$$f_{NS}(x, Q^2)|_{x \rightarrow 1} = A_{0,NS}[\bar{a}_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu_{NS}(\bar{a}_s)}}{\Gamma(1+\nu_{NS}(\bar{a}_s))}, \quad (144)$$

где

$$\nu_{NS}(\bar{a}_s) = \nu_0 - \frac{4C_F}{\beta_0} \ln(\bar{a}_s(Q^2)), \quad d_0 = \frac{4C_F}{\beta_0} \left(\frac{3}{4} - \gamma\right). \quad (145)$$

Константы  $\nu_0^{NS}$  и  $A_{0,NS}$  теоретически рассчитать не удастся, но ожидаемое значение параметра  $\nu_0^{NS}$  лежит в пределах от 2 до 3 [94, 95]. Оно может быть оценено из правил кваркового счета [96], которые определяют поведение  $f_{NS}(x) \sim (1-x)^3$  при  $x \rightarrow 1$ .

В следующем за ведущим порядке ТВ СФ и ПР уже не совпадают (в  $\overline{MS}$ -схеме, см. обсуждение в п. 1.2). Асимптотики при  $x \rightarrow 1$  для тех и других могут быть легко получены аналогично тому, как это было сделано в ведущем порядке. Несинглетное ПР имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{f}_{NS}(x, Q^2) &= A_{0,NS}[\bar{a}_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu_{NS}(\bar{a}_s)}}{\Gamma(1+\nu_{NS}(\bar{a}_s))} \times \\ &\times \left(1 + \left[\bar{a}_s(Q^2)\tilde{Z}^{NS}(x, Q^2) - \bar{a}_s(Q_0^2)\tilde{Z}^{NS}(x, Q_0^2)\right]\right), \quad (146) \end{aligned}$$



где коэффициенты

$$\tilde{Z}^{NS}(x, Q^2) = Q_1^{NS} \left( \ln \left( \frac{1}{1-x} \right) + \gamma + \Psi(1 + \nu_{NS}(a_s(Q^2))) \right) + Q_2^{NS} \quad (147)$$

получаются из разложения (при  $n \rightarrow \infty$ ) неведущих поправок (см. (22) и (35)) в моментном представлении  $\bar{Z}_n^{NS} = Q_1^{NS} \ln n + Q_2^{NS}$ . Коэффициенты  $Q_1^{NS}$  и  $Q_2^{NS}$  могут быть найдены в [6], где получены также и выражения для СФ.

**5.1.2. Синглетный случай.** Анализ синглетных ПР в ведущем порядке ТВ может быть проведен аналогично тому, как это было сделано в несинглетном канале.

Пусть синглетное кварковое  $f_S(x)$  и глюонное  $f_G(x)$  распределения имеют вид

$$f_a(x, Q^2)|_{x \rightarrow 1} = A_a(Q^2)(1-x)^{\nu_i(\bar{a}_s)}. \quad (148)$$

Выполняя преобразование Меллина и сравнивая его с асимптотикой (при  $n \rightarrow \infty$ )  $Q^2$ -зависимости моментов распределений, получаем асимптотики ПР при  $x \rightarrow 1$  в следующем виде (см. [6]):

$$f_S^{(1)}(x, Q^2)|_{x \rightarrow 1} = A_{0,S}[\bar{a}_s(Q^2)]^{-d_0} \frac{(1-x)^{\nu_S(\bar{a}_s)}}{\Gamma(1 + \nu_S(\bar{a}_s))}, \quad (149)$$

$$f_g^{(1)}(x, Q^2)|_{x \rightarrow 1} = \frac{C_F}{C_A - C_F} \frac{A_{0,S}[\bar{a}_s(Q^2)]^{-d_0}}{\left[ \ln \left( \frac{1}{1-x} \right) + \tilde{\gamma} + \Psi(1 + \nu_{NS}(\bar{a}_s)) \right]} \times \frac{(1-x)^{\nu_S(\bar{a}_s)+1}}{\Gamma(2 + \nu_S(\bar{a}_s))}, \quad (150)$$

где  $\tilde{\gamma} = \gamma + (11C_A - 9C_F - 4C_A T_F / C_F) / [12(C_A - C_F)]$ . Как и в несинглетном случае, константы  $\nu_0^S$  и  $A_{0,S}$  теоретически рассчитать не удастся, однако величина  $\nu_0^S$  близка к  $\nu_0^{NS}$ , что следует из правил кваркового счета [96].

Вычисления с учетом следующего порядка ТВ достаточно громоздки и выражения для СФ и ПР могут быть найдены в [6], где даны представления и оценки и для предасимптотических членов.

**5.2. СИ-обобщение параметризации Лопца и Индурайна.** Используя анализ поведения СФ при  $x \sim 0$  и  $x \sim 1$ , Лопец и Индурайн построили параметризации, которые удовлетворяют точно правилам сумм, а также уравнениям эволюции КХД в этих пределах. При промежуточных значениях  $x$  погрешность в эволюции составляет менее 1% (см. [7]). Их форма, однако, имеет достаточно громоздкий вид, поэтому в целях экономии места здесь не

приведена. Версия, близкая к оригинальной [28], а также СИ-вариант параметризации даны в [6]. Отметим, что СИ-вариант [6] качественно лучше согласуется с экспериментальными данными. В качестве примера рассмотрим здесь анализ отношения  $R(x, Q^2)$  (следуя [102]).

Используя знание поведения  $R(x, Q^2)$  в окрестности точек  $x = 0$  и  $x = 1$ , получаем простые параметризации для отношения в ведущем порядке ТВ:

$$\bar{R}(x, Q^2) = \left[ B_{L,\delta}^{(1)+}(1-x) + B_L^{(1)S}(x) \frac{1}{1 + \nu_S(\bar{a}_s)} \right] \bar{a}_s(Q^2)(1-x), \quad (151)$$

в следующем порядке ТВ:

$$\begin{aligned} \bar{R}(x, Q^2) = & \left[ B_{L,\delta}^{(1)+}(1-x) \left( 1 + \bar{a}_s(Q^2) B_{R,\delta}^+ \right) + \right. \\ & \left. + B_L^{(1)S}(x) \frac{1}{1 + \nu_S(\bar{a}_s)} \left( 1 + \bar{a}_s(Q^2) \tilde{B}_R(x, Q^2) \right) \right] \bar{a}_s(Q^2)(1-x), \quad (152) \end{aligned}$$

в СИТВ:

$$\begin{aligned} \bar{R}^{SI}(x, Q^2) = & \left[ B_{L,\delta}^{(1)+}(1-x) \bar{a}_\delta(Q^2) + \right. \\ & \left. + B_L^{(1)S}(x) \frac{1}{1 + \nu_S(\bar{a}_x)} \bar{a}_x(Q^2) \right] (1-x), \quad (153) \end{aligned}$$

где

$$\bar{R} \equiv \frac{F_2}{F_L} = \frac{R}{1+R}, \quad \nu(\bar{a}_s) = \nu_0 + \frac{4C_F}{\beta_0} \bar{a}_s.$$

Константы связи  $\bar{a}_s^{LO}$  и  $\bar{a}_s^{MS}$  удовлетворяют (65) и (66), а СИ-константы связи  $\bar{a}_\delta$  и  $\bar{a}_x$  — (70) при  $r_1 = B_{R,\delta}^+$  и  $r_1 = \tilde{B}_R [1 + 4C_F(1 + \nu(\bar{a}_s^{MS}(Q^2)))/\beta_0]^{-1}$  соответственно.

Коэффициенты  $B_{R,\delta}^+$  и  $B_{L,\delta}^{(i)+}$  являются аналитическим продолжением коэффициентов моментов СФ (см. п. 4.1). Функции  $\tilde{B}_R$  и  $\tilde{B}_L$  получены обратным меллиновским преобразованием и сверткой с ПР соответствующих коэффициентов СФ (см. [6]).

В работе [102] приведены графики параметризаций отношения  $R$ , значения которого близки к результатам, полученным в п. 3.3 с помощью техники Индурайна. Были учтены также поправки за счет массы мишени и поперечного импульса партонов в нуклоне, величины которых в экспериментально исследуемой области значений  $x$  и  $Q^2$  оказались невелики, что согласуется с результатами ранних исследований (см. [28, 50]).

**5.3. СИ-анализ СФ ГНР в области экспериментов HERA.** В п. 4.6 мы изучили связь между поведением СФ при  $x \rightarrow 0$  и их моментами. Было показано, что в асимптотике Редже поведение СФ при  $x \rightarrow 0$  пропорционально произведению степенной асимптотики СФ на аналитическое продолжение ее момента в область (нецелого) « $\delta$ »-го номера (см. уравнение (129)).

При  $\delta \sim 0,5$  СФ и отношение  $R$  уже анализировались в предыдущем пункте. Отметим, что в области малых  $x$  число партонов: глюонов и морских кварков, сильно увеличивается, что приводит к существенным поправкам (см. [103]) к уравнению ДГЛАП за счет рекомбинации глюонов и экранирования. Учет этих поправок приводит к выполаживанию СФ в области малых  $x$ , т. е. к ее асимптотике вида  $\sim x^{-\delta_{\text{eff}}}$ , где  $0 \leq \delta_{\text{eff}} \leq 0,3$ . Подобные значения  $\delta_{\text{eff}}$  найдены также экспериментально (см., например, п. 4.3).

Из-за ограниченности места проанализируем здесь только отношение  $R$ , которое чрезвычайно информативно в области экспериментов, проводимых на ускорителе HERA. Во-первых, отношение велико в этой области и им нельзя пренебречь при выделении  $F_2$  из сечения (см. обсуждение этого вопроса в работах [93]). Во-вторых, в этой области СФ  $F_L$  дает определяющий вклад в распределение глюонов (см. [53, 63]) и может быть представлена (см. [88]) как комбинация вкладов СФ  $F_2$  и ее производной, измеренных с хорошей точностью коллаборациями H1 [81] и ZEUS [82].

Отметим, что и с точки зрения приложения СИТВ отношение  $R(x, Q^2)$  также является уникальным. Прежде всего, неведущая поправка к  $R(x, Q^2)$  большая и отрицательная\*:

$$R(x, Q^2) \approx \frac{4}{3} \bar{a}_s(Q^2) \frac{f\Delta(1 + \bar{a}_s(Q^2)R_L^G) + 2(1 + \bar{a}_s(Q^2)R_L^S)}{1 - \frac{2}{3}(4 + f\Delta)\bar{a}_s(Q^2)R_L^G}, \quad (154)$$

где

$$R_L^G = -4 \left[ \ln \frac{1}{x} - \hat{\rho}(\nu) - \frac{5}{4} \right], \quad R_L^S = 8,46 - \frac{8f}{9} \left[ \ln \frac{1}{x} - \hat{\rho}(\nu) - 5,64 \right],$$

а  $\Delta$  — отношение синглетного кваркового распределения к глюонному.

Начиная с некоторых  $x$  (см. [104, 105])  $\alpha_s$ -поправка начинает превышать ведущий вклад, приводя к отрицательному результату для отношения  $R^{**}$ , что

---

\*Для простоты мы ограничимся здесь рассмотрением случая  $\delta = 0$ . При «больших» значениях  $\delta$  ( $\delta \approx 0,5$ ) двухпетлевая поправка приводит лишь к небольшому росту отношения  $R$  (см. [104] и предыдущий пункт).

\*\*Заметим, что подобное поведение обнаружено недавно в фитах экспериментальных данных [116].

свидетельствует о неприемлемости обычной ТВ. СИТВ дает неотрицательный результат:

$$R^{SI}(x, Q^2) = \frac{4}{3} \bar{a}(x, Q^2) [f\Delta + 2], \quad (155)$$

где эффективная константа связи  $\bar{a}(x, Q^2)$  удовлетворяет уравнению (68) при

$$r_1 = \frac{2}{3} (f\Delta + 4) + (f\Delta R_L^G + 2R_L^S) / (f\Delta + 2).$$

Итак, в рамках СИТВ отношение  $R$  неотрицательно и стремится к нулю как  $\ln^{-1}(1/x)$  при  $x \rightarrow 0$  (см. рисунки работ [104–106]). Таким образом, соотношение Каллана–Гросса восстанавливается при  $x \rightarrow 0$ .

**5.4. ЕМС-отношение как функции  $x$  и  $Q^2$  в модели рескейлинга.** Открытие ЕМС-эффекта [107] продемонстрировало существенное различие ПР в ядрах и свободных нуклонах. Для объяснения этого эффекта были предложены различные схемы (см. обзор [108] и ссылки там). Рассмотрим здесь модель рескейлинга [109, 110], где СФ в ядрах  $A$  и  $A'$  связаны соотношением

$$\frac{1}{A'} F_k^{A'}(x, Q^2) = \frac{1}{A} F_k^A(x, \xi_{AA'} Q^2) \quad (k = 2, 3), \quad (156)$$

и получим в результате параметризацию для их отношения  $r_{k,A}^{A'} = A F_k^{A'}(x, Q^2) A' / F_k^A(x, Q^2)$ .

Идея модели рескейлинга: радиус конфайнмента  $\lambda_A$  зависит от типа ядра (т.е. от его номера  $A$ ). Как следствие, появляется  $A$ -зависимость начала  $Q^2$ -эволюции моментов СФ ( $\mu_A^2$ ):

$$\bar{a}_s(\xi_{AA'} \cdot Q^2) = \frac{\bar{a}_s(\mu_A^2)}{\bar{a}_s(\mu_{A'}^2)} \bar{a}_s(Q^2), \quad (157)$$

где  $\mu_{A'}^2 / \mu_A^2 = \lambda_A^2 / \lambda_{A'}^2$ , а отношения радиусов  $\lambda_A$  и  $\lambda_{A'}$  даны в [110].

Действуя по аналогии с анализом отношения  $R = \sigma_L / \sigma_T$  (см. п. 5.2), получаем в ведущем порядке ТВ простые параметризации для ЕМС-отношения (см. [111]):

$$\begin{aligned} r_{3,A}^{A'} &= 1 - \bar{a}_s(\mu_A^2) \ln \left( \frac{\mu_A^2}{\mu_{A'}^2} \right) \left[ \gamma_{NS}^{(0)\lambda} (1 - \sqrt{x}) + \gamma_x(\bar{a}_s) \sqrt{x} \right], \\ r_{2,A}^{A'} &= 1 - \bar{a}_s(\mu_A^2) \ln \left( \frac{\mu_A^2}{\mu_{A'}^2} \right) \left[ \gamma_+^{(0)\lambda} (1 - \sqrt{x}) + \gamma_x(\bar{a}_s) \sqrt{x} \right], \end{aligned} \quad (158)$$

где функции  $\gamma_{NS}^{(0)\lambda}$  и  $\gamma_+^{(0)\lambda}$  являются аналитическим продолжением аномальных размерностей  $\gamma_{NS}^{(0)n}$  и  $\gamma_+^{(0)n}$  в область нецелых значений  $\lambda$  (см. разд. 4), а

$\gamma_x(a_s)$  получается из  $\gamma_{NS}^{(0)n}$  при замене  $\Psi(n) \rightarrow \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + \gamma + \Psi(1 + \nu(\bar{a}_s))$  (см. обсуждение несинглетного случая в 5.1.1).

Параметризация (158) хорошо согласуется с данными различных групп при  $0,2 \leq x \leq 0,7$  в большом интервале по  $Q^2$  (см. [111]). Зависимость параметризаций (158) от  $Q^2$  крайне слабая: дважды логарифмическая и стоит под знаком  $\Psi$ -функции. Такое поведение  $r_{2,D}^A$  наблюдается экспериментально (см. рис. 2 работы [111]). В области малых и больших значений переменной  $x$  модель рескейлинга не согласуется с экспериментом [110]. Следовательно, там параметризации (158) неприменимы.

В конце данного пункта отметим, что в последнее время существует большой прогресс как в экспериментальном, так и теоретическом исследованиях ЕМС-эффекта, особенно в области малых значений  $x$ . Однако обзор современного состояния проблемы выходит за рамки настоящего обзора и может быть найден, например, в [108].

**5.5. Параметризации ПР, совместимые с пертурбативной КХД при  $x \rightarrow 1$  и  $x \rightarrow 0$ .** В работах [112–114] был предложен новый тип параметризации СФ ГНР, которая в отличие от известных ранее форм совместима с предсказаниями теории в рамках пертурбативной КХД, т. е. воспроизводит свойства СФ в областях  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow 1$ , где возможно получение аналитических результатов.

Параметризация, обладающая такими свойствами, дает возможность применять ее сразу во всей области переменной  $x$ . Это позволяет избежать сшивок асимптотик, как в случае параметризации Лопеса–Индурайна (см. п. 5.2).

Рассмотрим здесь только несинглетный случай (анализ синглетного канала может быть найден в работе [114]) в ведущем порядке ТВ, где СФ  $F_2$  и ПР совпадают (см. уравнение (21) в п. 1.2).

Перепишем уравнение (14) в виде

$$M_2^{NS}(n, Q^2) = M_2^{NS}(n, Q_0^2) e^{-d(n)s}. \quad (159)$$

Дифференцируя (159) по  $s$ , получаем для СФ  $F_2$  уравнение ДГЛАП:

$$\frac{d}{ds} F_2(x, Q^2) = -\frac{1}{2\beta_0} \gamma_{NS}(x) \otimes F_2^{NS}(x, Q^2), \quad (160)$$

где  $\gamma_{NS}(x)$  — несинглетное ядро, совпадающее с  $\gamma_{SS}(x)$  в ведущем порядке.

Функциональная структура ядра эволюции уравнения ДГЛАП не позволяет выполнить явно обратное преобразование Меллина. Не представляется также возможным и решение уравнения ДГЛАП (160) для всех  $x$ . В связи с этим при сравнении теории с экспериментом прибегают к различного рода

параметризациям. Наиболее часто используют параметризацию типа Бураса–Гаемерса [98, 99]:

$$\tilde{F}_2^p(x, Q^2) = \tilde{B}(Q^2)x^{\tilde{a}(s)}(1-x)^{\tilde{b}(s)}. \quad (161)$$

Следует отметить особо, что для КХД-расчетов, помимо естественного требования к параметризации по количественному описанию эксперимента, обязательным является также требование ее качественного согласия с теорией.

Нетрудно увидеть, что представление (161) не совместимо с асимптотикой ДГЛАП-уравнения при  $x \rightarrow 0$  (см. разд. 4).

Для устранения этого недостатка в [113, 114] была предложена параметризация

$$\overline{F}_2^p(x, Q^2) = B(Q^2)x^{a(s)}(1-x)^{b(s)}I_{2g(s)}\left(2\sqrt{f(s)\ln\frac{1}{x}}\right), \quad (162)$$

где  $I_\nu(x)$  — модифицированная функция Бесселя (см. также разд. 4). Используя асимптотические свойства  $I_\nu(x)$  [117], находим

$$\begin{aligned} \overline{F}_2^p(x, Q^2)|_{x \rightarrow 0} &= \\ &= B(Q^2)\frac{f(s)^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}x^{a(s)}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{b(s)-1/4}\exp\left(2\sqrt{f(s)\ln\frac{1}{x}}\right), \end{aligned} \quad (163)$$

$$\overline{F}_2^p(x, Q^2)|_{x \rightarrow 1} = B(Q^2)\frac{f(s)^{g(s)}}{\Gamma(2g(s)+1)}(1-x)^{b(s)+g(s)}. \quad (164)$$

Асимптотики (163) и (164) близки к поведению СФ вблизи точек  $x = 0$  и  $x = 1$  (см. разд. 4 и п. 5.1). Параметры могут быть зафиксированы на основе равенства правой и левой частей уравнения ДГЛАП, а также правил сумм (см. [113, 114]) при замене СФ ее параметризацией\*:

$$F_2^p(x, Q^2) = \overline{F}_2^p(x, Q^2)(1 + h_1(s)x + h_2(s)x^2). \quad (165)$$

Следовательно, функция  $F_2^p(x, Q^2)$  позволяет описывать поведение СФ  $F_2(x, Q^2)$  во всей области  $x$  без сшивания решений, как это делалось ранее (см. п. 5.2).

---

\* Дополнительный фактор  $(1 + h_1(s)x + h_2(s)x^2)$  позволяет добиться прекрасного согласия (см. [118]) с экспериментальными данными при промежуточных значениях  $x$ .

**5.6.  $Q^2$ -эволюция асимметрии  $A_1(x, Q^2)$ .** В настоящем пункте мы изучим  $Q^2$ -эволюцию отношения спинзависящей СФ  $g_1(x, Q^2)$  и спинусредненной СФ  $F_1(x, Q^2)$ :

$$A_1(x, Q^2) = \frac{g_1(x, Q^2)}{F_1(x, Q^2)}, \quad (166)$$

т. е. исследуем одно из важных свойств спинзависящей части адронного тензора  $W_{\mu\nu}$  (см. п. 1.1). Свойства спинзависящих СФ  $g_1(x, Q^2)$  и  $g_2(x, Q^2)$  (особенно правила сумм, связанные с ними) интенсивно изучаются в настоящее время, что связано с довольно сильным разногласием между экспериментальными данными для правила сумм Эллиса–Джаффе [119] и теоретическими предсказаниями. Современное состояние этого вопроса таково: экспериментальные данные показывают, что лишь небольшая часть спина нуклона переносится валентными кварками. Основная же часть нуклонного спина связана со спинами странных кварков и глюонов и/или с орбитальным моментом движения валентных кварков. Такая картина, конечно же, находится в противоречии с нерелятивистской кварковой моделью, и это несоответствие получило название «спинового кризиса».

В настоящем обзоре проблема «спинового кризиса» не будет подробно анализироваться, поскольку она не входит в число рассматриваемых тем\*. Мы ограничимся только рассмотрением  $Q^2$ -зависимости СФ  $g_1$ , которая, по нашему мнению, достаточно сильно отличается от  $Q^2$ -зависимости СФ  $F_1$ , в противоположность общепризнанному мнению\*\*. Проблема же  $Q^2$ -эволюции СФ — одна из основных, здесь рассматриваемых.

В следующих двух пунктах мы рассмотрим два различных метода для учета  $Q^2$ -зависимости асимметрии  $A_1(x, Q^2)$ . Актуальность изучения именно этой  $Q^2$ -зависимости связана с тем фактом, что экспериментально измеряется не СФ  $g_1(x, Q^2)$ , а асимметрия  $A_1(x, Q^2)$  (с целью устранения большого числа систематических ошибок, одинаковых для СФ  $g_1$  и  $F_1$ ). Более того, обычно эта асимметрия измеряется только в одной точке (или, что весьма редко, в нескольких точках) по  $Q^2$  для каждого бина по  $x$ , т. е. экспериментально полученный результат имеет вид  $A_1(x_i, Q_i^2)$ . Для анализа свойств СФ  $g_1(x, Q^2)$  (например, при получении правил сумм) требуется знание величины асимметрии в различных бинах при одном и том же значении  $Q^2$ , т. е. знание величины  $A_1(x_i, Q^2)$ , а это, в свою очередь, требует изучения  $Q^2$ -зависимости асимметрии.

---

\*Обзор проблем спинового кризиса может быть найден, например, в работе [120].

\*\*В последнее время ситуация стала меняться, и в экспериментальных работах последних двух лет обычно представляются данные, полученные как с помощью гипотезы о  $Q^2$ -независимости отношения  $A_1$ , так и при помощи точной  $Q^2$ -эволюции СФ  $g_1(x, Q^2)$  (см., например, недавнюю статью [121] и обсуждения в ней).

5.6.1. *Использование экспериментального «биннинга».* Наиболее простой путь (см. [122, 123]) количественной оценки величины зависимости асимметрии  $A_1$  от  $Q^2$  состоит в использовании уравнений ДГЛАП для СФ  $F_1$  и  $g_1$ , а также экспериментального биннинга для  $A_1$ , т. е. представления асимметрии в виде ломаной с  $I$  звеньями:

$$A_1(x, Q^2) = \sum_{i=1}^{I+1} A_{1,i}(Q^2) \Theta(x_i - x) \Theta(x - x_{i-1}), \quad (167)$$

и постоянным значением  $A_{1,i}(Q^2)$  для каждого  $i$ -го звена.

Действительно, при  $x \rightarrow 1$  СФ  $F_1$  и  $g_1$  имеют близкую  $Q^2$ -зависимость (одинаковую для ведущего порядка ТВ). Например, в ведущем порядке, где справедливо соотношение Каллана–Гросса  $x F_1 = F_2$ , асимптотика (при  $x \rightarrow 1$ ) СФ  $F_1$  дается формулами (144) и (149). Форма для этой асимптотики СФ  $g_1$  имеет тот же вид (только невычисляемые параметры, аналогичные  $A_{0NS}$ ,  $A_{0S}$  и  $\nu_0^{NS}$ ,  $\nu_0^S$ , могут быть другими\*), поскольку аномальные размерности  $\gamma_{NS}^{(0)}(n)$  и  $\gamma_S^{(0)}(n)$  одинаковы в спинзависящем и спинусредненном случаях. Таким образом, получаем, что  $A_1 \rightarrow 1$ , когда  $x \rightarrow 1$  и не зависит от  $Q^2$  в этом пределе.

Далее изложим схему расчета  $Q^2$ -зависимости  $A_1$  в несинглетном приближении, которое справедливо в области  $x > 0,3$ . Более подробный анализ, включающий в рассмотрение поляризованное и неполяризованное глюонные распределения, может быть найден в [123].

Используя несинглетные части эволюционных уравнений для СФ  $F_1$  и  $g_1$  (см. уравнение (171) в следующем пункте), получаем соответствующее уравнение для самой асимметрии  $A_1(x, Q^2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dA_1(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = & - \frac{1}{2F_1(x, Q^2)} \int_x^1 \frac{dy}{y} \gamma_{NS} \left( \frac{x}{y}, \bar{a}_s \right) \times \\ & \times [A_1(y, Q^2) - A_1(x, Q^2)] F_1(y, Q^2). \end{aligned} \quad (168)$$

Представление (167) для  $A_1(x, Q^2)$  в виде ломаной позволяет выносить разность  $[A_1(y, Q^2) - A_1(x, Q^2)]$  из-под знака интеграла на каждом отрезке

---

\*Правила кваркового счета [96] говорят, однако, о близости значений  $\nu_0^{NS}$  и  $\nu_0^S$  для  $F_1$  и  $g_1$ .



$[x_j, x_{j+1}]$ , представляя правую часть (168) в виде суммы:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=j}^{I+1} [A_{1,i}(Q^2) - A_{1,j}(Q^2)] \frac{1}{F_1(x_j, Q^2)} \left[ \frac{dF_1(x_i, Q^2)}{d \ln Q^2} - \frac{dF_1(x_{i+1}, Q^2)}{d \ln Q^2} \right] = \\ & = \sum_{i=j}^{I+1} A_{1,i}(Q^2) \frac{1}{F_1(x_j, Q^2)} \left[ \frac{dF_1(x_i, Q^2)}{d \ln Q^2} - \frac{dF_1(x_{i+1}, Q^2)}{d \ln Q^2} \right] - \\ & - A_{1,j}(Q^2) \frac{d}{d \ln Q^2} \ln F_1(x_j, Q^2). \quad (169) \end{aligned}$$

Имея параметризации для СФ  $F_2(x, Q^2)$  и  $R(x, Q^2)$ , мы легко можем вычислить правую часть (168) в виде (169) и, интегрируя по  $\ln Q^2$ , восстановить асимметрию  $A_1(x, Q^2)$ . К сожалению, параметризации для СФ  $F_2(x, Q^2)$  и  $R(x, Q^2)$  имеют достаточно громоздкий вид, что приводит к невозможности провести до конца аналитические вычисления. Соответствующий анализ поэтому был проведен численно, и результаты для  $A_1(x, Q^2)$  могут быть найдены в [122] (для больших  $x$ ) и в [123] (для промежуточных значений  $x$ ). В рамках такого подхода результаты при малых значениях  $x$  получить не удастся, поскольку число звеньев становится слишком велико. Однако к этой области может быть успешно применен другой метод учета  $Q^2$ -зависимости асимметрии, представленный в следующем пункте.

5.6.2. *Использование подобия СФ  $g_1(x, Q^2)$  и  $F_3(x, Q^2)$ .* Продемонстрируем близость  $Q^2$ -зависимостей для пары СФ  $g_1$  и  $F_3$  [124, 125], а не для СФ  $g_1$  и  $F_1$ , как общепринято (в так называемом  $A_1$ - или  $g_1/F_1$ -скейлинге). Рассмотрим вначале соответствующие уравнения ДГЛАП в несинглетном канале:

$$\begin{aligned} \frac{dg_1^{NS}(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= -\frac{1}{2} \gamma_{NS}^-(x, \bar{a}_s(Q^2)) \otimes g_1^{NS}(x, Q^2), \\ \frac{dF_1^{NS}(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= -\frac{1}{2} \gamma_{NS}^+(x, \bar{a}_s(Q^2)) \otimes F_1^{NS}(x, Q^2), \quad (170) \\ \frac{dF_3(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= -\frac{1}{2} \gamma_{NS}^-(x, \bar{a}_s(Q^2)) \otimes F_3(x, Q^2), \end{aligned}$$

где символ  $\otimes$ , как обычно, обозначает конволюцию Меллина (45), а ядра  $\gamma_{NS}^\pm(x, \bar{a}_s)$  составлены из меллиновских прообразов несинглетных аномальных размерностей и вильсоновских коэффициентов (см. также п. 4.4 и 4.5).

Формулы (170) показывают, что уравнения ДГЛАП для СФ  $F_3$  и для несинглетной части СФ  $g_1$  одинаковы (это свойство может быть продемонстрировано точно в первых двух порядках теории возмущений) и отличаются от соответствующих уравнений для несинглетной части  $F_1$  уже в порядке, следующем за ведущим.

Для синглетной части  $g_1$  и  $F_1$  эволюционные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dg_1^S(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= -\frac{1}{2} [\gamma_{SS}^*(x, \bar{a}_s(Q^2)) \otimes g_1^S(x, Q^2) + \\ &\quad + \gamma_{SG}^*(x, \bar{a}_s(Q^2)) \otimes \Delta f_G(x, Q^2)], \\ \frac{dF_1^S(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= -\frac{1}{2} [\gamma_{SS}(x, \bar{a}_s(Q^2)) \otimes F_1^S(x, Q^2) + \\ &\quad + \gamma_{SG}(x, \bar{a}_s(Q^2)) \otimes f_G(x, Q^2)], \end{aligned} \quad (171)$$

где ядра  $\gamma_S(x, \bar{a}_s)$  и  $\gamma_S^*(x, \bar{a}_s)$  являются известными комбинациями (см. [125]) меллиновских прообразов синглетных аномальных размерностей и вильсоновских коэффициентов.

Внимательное рассмотрение кварковых частей этих ядер демонстрирует близость ядер  $\gamma_{NS}(x)$  и  $\gamma_{SS}^*(x)$ . Их разница не имеет степенных сингулярностей при  $x \rightarrow 0$  и ведет себя как  $O(1-x)$  при  $x \rightarrow 1$ . Разница ядер  $\gamma_{SS}(x)$  и  $\gamma_{SS}^*(x)$  содержит степенные сингулярности при  $x \rightarrow 0$ . Таким образом, уравнения ДГЛАП для  $F_3$  и синглетной части  $g_1$  содержат похожие ядра, которые существенно отличаются от соответствующих ядер для синглетной части  $F_1$ .

Заметим, что кварковая часть синглетного канала СФ  $g_1$  содержит две компоненты: валентную и морскую. Валентная часть не связана с глюонами и эволюционирует в согласии с первым уравнением из (171). Синглетная часть удовлетворяет первому уравнению из (171) (т.е. она связана с глюонами), однако ее величина, по-видимому, достаточно мала, т.к. вклад синглетной части еще никак не проявил себя экспериментально. Вклад глюонов также не должен быть большим, т.к. данные хорошо фитируются при достаточно произвольных как величине, так и знаке\* поляризованного глюонного распределения. Таким образом, членом  $\sim \Delta f_G(x, Q^2)$  в правой части первого уравнения из (171) можно пренебречь.

Поскольку уравнения ДГЛАП интегродифференциальные, то подобие ядер еще не обеспечивает близости самих СФ. Необходима еще близость начальных условий, т.е. подобие формы при некотором значении  $Q_0^2$ . Это подобие действительно имеет место, например, для  $Q_0^2 = 3 \text{ ГэВ}^2$  (см. [128]).

Итак, из анализа\*\*, проведенного нами, можно заключить, что формы и уравнения ДГЛАП для СФ  $g_1$ , и  $F_3$  очень похожи как в несинглетном, так и в синглетном каналах и сильно отличаются от соответствующих величин

\*Указание на положительную величину знака отношения первых моментов глюонных распределений  $\Delta f_G$  и  $f_G$  получено недавно коллаборацией HERMES [126]. Более точное определение параметров поляризованного глюонного распределения  $\Delta f_G$  ожидается в будущем эксперименте COMPASS [127].

\*\*Обсуждение близости формы СФ  $g_1(x)$  и  $F_3(x)$  для малых значений  $x$ , которое следует из анализа [129], основанного на результатах БФКЛ, можно найти в [125].

для СФ  $F_1$ . Такое подобие ведет к близкой  $Q^2$ -эволюции СФ  $g_1(x, Q^2)$  и  $F_3(x, Q^2)$ , что и было использовано в работах [124, 125] для оценки  $Q^2$ -зависимости асимметрии  $A_1(x, Q^2)$ . Действительно, поскольку отношение

$$A_1^*(x) = \frac{g_1(x, Q^2)}{F_3(x, Q^2)} \quad (172)$$

должно иметь слабую  $Q^2$ -зависимость, нужная нам асимметрия при некотором значении  $Q^2$  выражается через реально измеряемые значения  $A_1(x_i, Q_i^2)$  в следующем виде:

$$A_1(x_i, Q^2) = \frac{F_3(x_i, Q^2)}{F_3(x_i, Q_i^2)} \frac{F_1(x_i, Q_i^2)}{F_1(x_i, Q^2)} A_1(x_i, Q_i^2). \quad (173)$$

Это уравнение, конечно, не является точным, однако позволяет получить:

- $Q^2$ -зависимость для асимметрии  $A_1(x, Q^2)$  [125], близкую к полученным с помощью более точных, но более громоздких методов [129];
- результаты для  $g_1(x, Q^2)$ , которые находятся в прекрасном согласии с полученными коллаборациями SM и E154 с помощью точной  $Q^2$ -эволюции [131–134] (рис. 13 и 14). Заметим также сильное отличие этих обоих результатов от полученных стандартным методом ( $A_1$ -скейлинг);

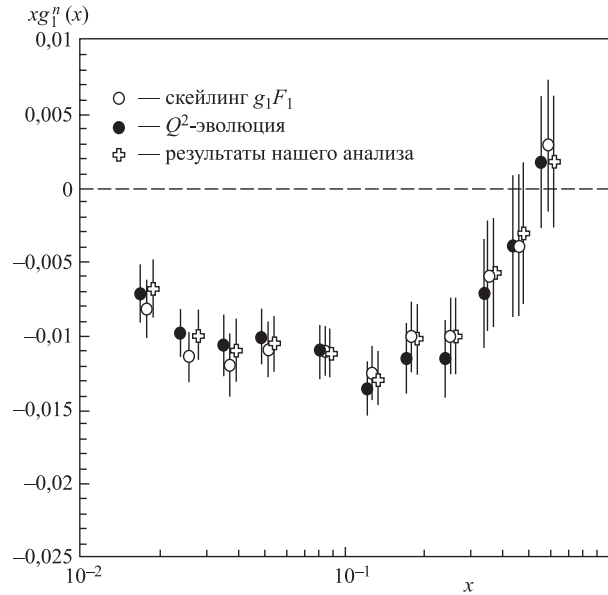


Рис. 13. СФ  $xg_1^n(x, Q^2)$  при  $Q^2 = 5 \text{ ГэВ}^2$ , следующая из (173), представлена вместе с оригинальными данными эксперимента E154 [133, 134], полученными двумя способами: при помощи эволюции ДГЛАП и предположения независимости асимметрии  $A_1$  от  $Q^2$

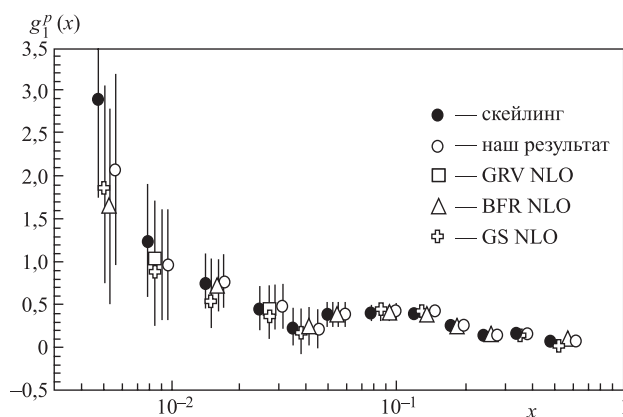


Рис. 14. То же, что и на рис. 13, но для СФ  $g_1^p(x, Q^2)$  при  $Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$  и данных SMC [131]

Таблица 4. Зависимость величины, полученной согласно правилу сумм Бьеркена, от переменной  $Q^2$ . Ошибки анализа совпадают с представленными в экспериментальных работах и друг с другом, поэтому приведены ошибки только при некоторых значениях  $Q^2$  (см. [125])

$Q^2$ , ГэВ <sup>2</sup>	100	30	10	5	3
Протонные [131] и дейтронные [132] данные SMC					
$A_1$ -скейлинг	0,247	0,226	0,202	0,186	0,170
$A_1^*$ -скейлинг	0,210	0,201	0,191	0,184	0,176
Анализ [131]			0,183	$1,181 \pm 0,035$	
Протонные [131] и нейтронные [134] данные					
$A_1$ -скейлинг	0,221	0,209	0,194	0,183	0,171
$A_1^*$ -скейлинг	0,194	0,190	0,185	0,181	0,176
Протонные и дейтронные [135] данные					
$A_1$ -скейлинг	0,170	0,169	0,165	0,160	0,154
$A_1^*$ -скейлинг	0,163	0,162	0,160	0,157	0,154
Анализ [135]				$0,164 \pm 0,021$	0,164
Протонные [135] и нейтронные [133, 134] данные					
$A_1$ -скейлинг	0,189	0,186	0,179	0,174	0,169
$A_1^*$ -скейлинг	0,172	0,172	0,171	0,169	0,166
Анализ [134]				$0,171 \pm 0,013$	
Анализ [135]				$0,170 \pm 0,012$	
Предсказания теории	0,194	0,191	0,186	$0,181 \pm 0,002$	

• результаты для правил сумм Бьеркена (табл. 4), демонстрирующие очень хорошее согласие между экспериментальными данными различных групп и теоретическими предсказаниями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре рассмотрены некоторые характерные черты ГНР.

Достаточно подробно продемонстрирована техника получения коэффициентных функций вильсоновского разложения из инвариантных амплитуд сечения упругого рассеяния вперед.

Дан краткий обзор различных типов СИТВ. Исследовано поведение отношения  $R = \sigma_L/\sigma_T$  в области малых значений  $x$  при выборе различных асимптотик ПР. Продемонстрирована возможность отрицательных значений для  $R$  в области экспериментов, проводимых на ускорителе HERA, при наивном использовании стандартной ТВ, а также восстановлении соотношения Каллана–Гросса в рамках СИТВ.

Даны аналитические результаты для  $Q^2$ -зависимости ПР в рамках дважды логарифмического подхода в первых двух порядках ТВ. Результаты имеют простой вид и прекрасно описывают экспериментальные данные при  $Q^2 \geq 2 \text{ ГэВ}^2$ . Для меньших значений  $Q^2$  степенные поправки могут быть добавлены, что существенно улучшает (см. [19]) предсказательную силу дважды логарифмического подхода. Изучены также  $Q^2$ -зависимости наклонов ПР и  $F_2(x, Q^2)$ .

Выделено глюонное распределение и продольная СФ  $F_L$  из данных для  $F_2$  и  $dF_2/d\ln Q^2$ . Результаты даны как для дважды логарифмической, так и для реджеподобной асимптотик ПР. Продемонстрирована возможность изучения самодействия глюонов.

Рассмотрены некоторые удобные параметризации ПР, с помощью которых исследованы отношения  $R = \sigma_L/\sigma_T$  и  $r_{k,A}^{A'} = AF_2^{A'}/A'F_2^A$  в широкой области значений переменной Бьеркена  $x$ .

Исследована  $Q^2$ -эволюция асимметрии  $A_1(x, Q^2)$  как с использованием экспериментального биннинга, так и в предположении близости  $Q^2$ -зависимостей СФ  $g_1$  и  $F_3$ .

Автор надеется, что данный обзор окажется полезным при изучении КХД и процесса ГНР.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы опишем технику для представления меллиновской конволюции ПР (или СФ) и пертурбативно-рассчитываемого ядра эволюции (или коэффициентной функции разложения Вильсона) в виде обычного произведения

этого ПР (или СФ) со сдвинутым аргументом и коэффициентом, являющегося меллиновским образом ядра. При  $x \rightarrow 0$  такое представление может быть получено для ядер и ПР достаточно общего вида.

Настоящий метод обобщает процедуры, развитые в работах [53, 63], и позволяет представить результаты с точностью до  $O(x^{2-\delta})$  при асимптотике ПР  $\sim x^{-\delta}$ . Здесь мы ограничимся, однако, точностью  $O(x^{1-\delta})$ , которая позволяет представить ответ через ПР со стандартным, т.е. не сдвинутым, аргументом (см. также приложения в работах [19, 74]).

Рассмотрим наборы ПР:

- реджеподобной формы  $f_R(x) = x^{-\delta} \tilde{f}(x)$ ;
- логарифмическиподобной формы  $f_L(x) = x^{-\delta} \ln(1/x) \tilde{f}(x)$ ;
- бессельподобной формы  $f_I(x) = x^{-\delta} I_k \left( 2\sqrt{d \ln(1/x)} \right) \tilde{f}(x)$ , где  $I_k$  — модифицированная функция Бесселя, а  $\tilde{f}(x)$  — некоторая функция, которая вместе со своей производной  $\tilde{f}'(x) \equiv d\tilde{f}/dx$  непрерывны при  $x = 0$  и обращаются в нуль при  $x = 1$ :  $\tilde{f}(1) = \tilde{f}'(1) = 0$ .

1. Вначале удобно проанализировать базисный интеграл вида

$$J_{\delta,i}(n, x) \doteq x^n \otimes f_i(x) \equiv \int_x^1 \frac{dy}{y} y^n f_i\left(\frac{x}{y}\right) \quad (i = R, L, I), \quad (174)$$

где  $n$  — неотрицательное целое число.

а) *Реджеподобный случай.* Разлагая  $\tilde{f}(x)$  в окрестности  $\tilde{f}(0)$ , получаем

$$\begin{aligned} J_{\delta,R}(n, x) &= \\ &= x^{-\delta} \int_x^1 dy y^{n+\delta-1} \left[ \tilde{f}(0) + \frac{x}{y} \tilde{f}'(0) + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{y}\right)^k \tilde{f}^{(k)}(0) + \dots \right] = \\ &= x^{-\delta} \left[ \frac{1}{n+\delta} \tilde{f}(0) + O(x) \right] - \\ &- x^n \left[ \frac{1}{n+\delta} \tilde{f}(0) + \frac{1}{n+\delta-1} \tilde{f}'(0) + \dots + \frac{1}{k!} \frac{1}{n+\delta-k} \tilde{f}^{(k)}(0) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (175)$$

Второй член правой части (175) может быть просуммирован, и тогда формула принимает вид

$$J_{\delta,R}(n, x) = x^{-\delta} \left[ \frac{1}{n+\delta} \tilde{f}(0) + O(x) \right] + x^n \frac{\Gamma(-(n+\delta))\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-n-\delta)} \tilde{f}(0). \quad (176)$$

Рассмотрим важные частные случаи:

1а) при  $n \geq 1$

$$J_{\delta,R}(n, x) = x^{-\delta} \frac{1}{n + \delta} \tilde{f}(x) + O(x^{1-\delta}) = \frac{1}{n + \delta} f_R(x) + O(x^{1-\delta});$$

2а) при  $n = 0$

$$\begin{aligned} J_{\delta,R}(0, x) &= x^{-\delta} \left[ \frac{1}{\delta} \tilde{f}(0) + O(x) \right] + \frac{\Gamma(-\delta)\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\delta)} \tilde{f}(0) = \\ &= x^{-\delta} \frac{1}{\tilde{\delta}_R} \tilde{f}(x) + O(x^{1-\delta}) = \frac{1}{\tilde{\delta}_R} f_R(x) + O(x^{1-\delta}), \end{aligned}$$

где

$$\frac{1}{\tilde{\delta}_R} = \frac{1}{\delta} \left[ 1 - \frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\delta)} x^\delta \right],$$

т. е. в этом случае остается корреляция между характеристиками поведения ПР при малых (т. е. зависимость от  $\delta$ ) и больших (т. е. зависимость от  $\nu$ ) значениях  $x$ . Заметим, что при  $\delta \rightarrow 0$  величина  $1/\tilde{\delta}_R$  не является сингулярной:

$$\frac{1}{\tilde{\delta}_R} \Big|_{\delta=0} = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - (\Psi(1+\nu) - \Psi(1)) \equiv \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \hat{\rho}(\nu), \quad (177)$$

однако растет логарифмически при  $x \rightarrow 0$ .

б) *Логарифмическиподобный случай.* Используя простое соотношение:  $x^{-\delta} \ln(1/x) = (d/d\delta)x^{-\delta}$ , и результаты 1а), легко получаем

1б) при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} J_{\delta,L}(n, x) &= z^{-\delta} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \left[ \frac{1}{n + \delta} \left( 1 - \frac{1}{(n + \delta) \ln(1/x)} \right) \tilde{f}(0) + O(x) \right] = \\ &= \frac{1}{n + \delta} \left( 1 - \frac{1}{(n + \delta) \ln(1/x)} \right) f_L(x) + O(x^{1-\delta}) = \\ &= \frac{1}{n + \delta} f_L(x) + O\left(\frac{1}{\ln(1/x)}\right); \end{aligned}$$

2б) при  $n = 0$

$$\begin{aligned} J_{\delta,L}(0, x) &= z^{-\delta} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \left[ \frac{1}{n + \delta} \left( 1 - \frac{1}{\delta \ln(1/x)} \right) \tilde{f}(0) + O(x) \right] + \\ &+ \frac{\Gamma(-\delta)\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\delta)} \tilde{f}(0) [\Psi(1+\nu-\delta) - \Psi(-\delta)] = \\ &= \frac{1}{\delta_L} f_L(x) + O(x^{1-\delta}), \end{aligned}$$

где

$$\frac{1}{\tilde{\delta}_L} = \frac{1}{\delta} \left[ 1 - \frac{1}{\ln(1/x)} \left( \frac{1}{\tilde{\delta}_R} + \frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-\delta)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times x^\delta [\Psi(1+\nu-\delta) - \Psi(1-\delta)] \right) \right] = \frac{x^\delta}{\ln(1/x)} \frac{d}{d\delta} \frac{x^{-\delta}}{\tilde{\delta}_R}.$$

Величина  $1/\tilde{\delta}_L$ , как и  $1/\tilde{\delta}_R$ , также несингулярна при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\frac{1}{\tilde{\delta}_L} \Big|_{\delta=0} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2 \ln(1/x)} \left[ \left( \Psi(1+\nu) - \Psi(1) \right)^2 - \left( \Psi'(1+\nu) - \Psi'(1) \right) \right], \quad (178)$$

и растет логарифмически при  $x \rightarrow 0$ .

в) *Бессельподобный случай.* Представляя функцию Бесселя в следующем виде:

$$I_k \left( 2\sqrt{\hat{d} \ln(1/x)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+k+1)!} \left( \hat{d} \frac{d}{d\delta} \right)^n x^{-\delta} \Big|_{\delta=0},$$

и повторяя анализ, аналогичный выполненным в предыдущих пунктах, получаем

1в) при  $n \geq 1$

$$J_{\delta,I}(n, x) = \frac{1}{n+\delta} f_I(x) + O \left( \sqrt{\frac{\hat{d}}{\ln(1/x)}} \right);$$

2в) при  $n = 0$

$$J_{\delta,I}(n, x) = \frac{1}{\tilde{\delta}_I} f_I(x) + O(x^{1-\delta}),$$

где

$$\frac{1}{\tilde{\delta}_I} = \frac{x^\delta}{I_k \left( 2\sqrt{\hat{d} \ln(1/x)} \right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+k)!} \left( \hat{d} \frac{d}{d\delta} \right)^n \frac{x^{-\delta}}{\tilde{\delta}_R} \equiv \\ \equiv \frac{x^\delta}{I_k \left( 2\sqrt{\hat{d} \ln(1/x)} \right)} I_k \left( 2\sqrt{\hat{d} \left( \frac{d}{d\delta} \right)} \right) \frac{x^{-\delta}}{\tilde{\delta}_R},$$

а последнее выражение есть, конечно, просто формальное представление ряда. Представим здесь выражение для  $1/\tilde{\delta}_I$  в пределе  $\delta \rightarrow 0$  (общий слу-



чай дан в работе [43]), где оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\delta}_I} \Big|_{\delta=0} &= \sqrt{\frac{\ln(1/x)}{\hat{d}} \frac{I_{k+1}\left(2\sqrt{\hat{d}\ln(1/x)}\right)}{I_k\left(2\sqrt{\hat{d}\ln(1/x)}\right)}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{\ln(1/x)}{\hat{d}}} - \frac{1}{4\hat{d}} + O\left(\sqrt{\frac{\hat{d}}{\ln(1/x)}}\right). \end{aligned} \quad (179)$$

Заметим, что самая правая часть формулы (179) получена в результате разложения функций Бесселя при  $x \rightarrow 0$ . Видно, что величина  $1/\tilde{\delta}_I$  также несингулярна при  $\delta \rightarrow 0$  и растет как  $\sqrt{\ln(1/x)}$  при  $x \rightarrow 0$ .

2. Рассмотрим интеграл

$$I_\delta(x) = \tilde{K}(x) \otimes f(x) \equiv \int_x^1 \frac{dy}{y} \tilde{K}(y) f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Определим также моменты ядра  $\tilde{K}(y)$  в виде  $K_n \equiv \int_0^1 dy y^{n-2} \tilde{K}(y)$ .

Действуя аналогично п. 1, получаем в реджеподобном случае

$$\begin{aligned} I_{\delta,R}(x) &= x^{-\delta} \int_x^1 dy y^{\delta-1} \tilde{K}(y) \left[ \tilde{f}(0) + \frac{x}{y} \tilde{f}^{(1)}(0) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{y}\right)^k \tilde{f}^{(k)}(0) + \dots \right] = x^{-\delta} \left[ K_{1+\delta} \tilde{f}(0) + O(x) \right] - \\ &\quad - \left[ N_{1+\delta}(x) \tilde{f}(0) + N_\delta(x) \tilde{f}^{(1)}(0) + \dots + \frac{1}{k!} N_{1+\delta-k}(x) \tilde{f}^{(k)}(0) + \dots \right], \end{aligned}$$

где  $N_\eta(x) = \int_0^1 dy y^{\eta-2} \tilde{K}(xy)$ .

Случай  $K_{1+\delta} = 1/(n+\delta)$  соответствует ядру специального вида  $\tilde{K}(y) = y^n$ . Он уже рассмотрен в п. 1. В более общем случае (например, для  $K_{1+\delta} = \Psi(1+\delta)$ ) мы можем представить момент  $K_{1+\delta}$  в виде ряда  $\sum_{m=1}^{\infty} 1/(n+m+\delta)$  и работать с выражением  $1/(n+m+\delta)$  по аналогии с п. 1. Сингулярный (при  $\delta \rightarrow 0$ ) случай возникает, когда  $n = m = 0$ , и он тоже уже был рассмотрен в п. 1.

Таким образом, для интеграла  $I_{\delta,R}(x)$  мы получаем следующее представление, справедливое при  $x \rightarrow 0$ :

$$I_{\delta,R}(x) = x^{-\delta} K_{R,1+\delta} \tilde{f}(z) + O(x^{1-\delta}) = K_{R,1+\delta} f_R(x) + O(x^{1-\delta}),$$

где коэффициент  $K_{R,1+\delta}$  совпадает с  $K_{1+\delta}$  в том случае, если  $K_n$  не содержит члена  $1/(n-1)$ . В присутствии члена  $1/(n-1)$  в  $K_n$  в выражении для  $K_{R,1+\delta}$  возникает множитель  $1/\tilde{\delta}_R$ . Следовательно, коэффициент  $K_{R,1+\delta}$  может быть представлен в виде

$$K_{R,1+\delta} = K_{1+\delta} \Big|_{1/\delta \rightarrow 1/\tilde{\delta}_R}.$$

Повторяя анализ, аналогичный пп. (1б) и (1в), можно легко получить

$$I_{\delta,L}(n, x) = K_{L,1+\delta} f_L(x) + O\left(\frac{1}{\ln(1/x)}\right),$$

$$I_{\delta,I}(n, x) = K_{I,1+\delta} f_I(x) + O\left(\sqrt{\frac{\hat{d}}{\ln(1/x)}}\right),$$

где  $K_{M,1+\delta} = K_{1+\delta} \Big|_{1/\delta \rightarrow 1/\tilde{\delta}_M}$  ( $M = R, L, I$ ).

Таким образом, для несингулярного случая (т.е. случая, когда  $K_n$  не содержит  $1/(n-1)$ ) результат представления свертки зависит только от значения  $\delta$ , характеризующего величину степенной асимптотики при  $x \rightarrow 0$ , но не от конкретной формы ПР. Наличие члена  $1/(n-1)$  в  $K_n$  приводит к результатам, зависящим от численного значения  $\delta$ . Если значение  $\delta$  велико (более корректно, если  $x^{-\delta} \gg \text{const}$ ), то слагаемое  $1/(n-1)$  в  $K_n$  приводит к появлению  $1/\delta$  в  $K_{M,1+\delta}$  (т.к. членом  $\sim x^\delta$  в выражении для  $1/\tilde{\delta}_i$  можно пренебречь) и результат снова не зависит от конкретной формы ПР и определяется величиной  $\delta$ . Если численная величина  $\delta$  мала (т.е. выполняется приближение  $x^{-\delta} \sim 1 + \delta \ln(1/x)$ , которое, конечно, зависит и от рассматриваемых значений  $x$ ), тогда предасимптотика ПР вступает в игру и слагаемое  $K_{M,1+\delta}$  содержит член  $1/\tilde{\delta}_M$ , определяемый уже как асимптотикой, так и предасимптотикой ПР.

Автор благодарен А. П. Бакулеву, А. Ю. Илларионову, Д. И. Казакову, В. Г. Кривохижину, Л. Н. Липатову, С. В. Михайлову, Г. Паренте и Д. В. Ширкову за полезные обсуждения и критические замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bardin D., Shumeiko N. // Nucl. Phys. B. 1977. V. 127. P. 242.
2. Chetyrkin K. G., Gorishny S. G., Tkachov F. V. // Phys. Lett. B. 1982. V. 119. P. 407;  
Tkachov F. V. // Phys. Lett. B. 1983. V. 124. P. 212;  
Gorishny S. G., Larin S. A. // Nucl. Phys. B. 1987. V. 283. P. 452.

3. Казаков Д. И., Котиков А. В. // ТМФ. 1987. Т. 73. С. 348;  
Котиков А. В. // ТМФ. 1989. Т. 78. С. 187.
4. Kazakov D. I., Kotikov A. V. // Nucl. Phys. B. 1988. V. 307. P. 721;  
Errata // Nucl. Phys. B. 1990. V. 345. P. 299.
5. Kotikov A. V. // Nucl. Instr. Meth. A. 2003. V. 502. P. 615; Proc. of the 35th Annual Winter School on Nuclear and Particle Physics, Repino, Russia, Feb. 19–25, 2001; hep-ph/0112347.
6. Котиков А. В. Препринт ОИЯИ Р2-88-139. Дубна, 1988. 12 с.;  
Kotikov A. V. JINR Preprint E2-88-422. Dubna, 1988. 24 p.
7. Индурайн Ф. Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
8. Buras A. J. // Rev. Mod. Phys. 1980. V. 52. P. 199.
9. Politzer H. D. // Phys. Rep. C. 1974. V. 14. P. 129.
10. Beneke M. // Phys. Rep. 1999. V. 317. P. 1.
11. Parente G., Kotikov A. V., Krivokhizhin V. G. // Phys. Lett. B. 1994. V. 333. P. 190.
12. Kotikov A. V., Krivokhizhin V. G. hep-ph/9805353; Proc. of the Intern. Workshop on Deep Inelastic Scattering and Related Phenomena, Brussels, 1998. P. 242.
13. Кривохижин В. Г., Котиков А. В. // ЯФ. 2005. Т. 68. С. 1935.
14. Kataev A. L. et al. // Phys. Lett. B. 1996. V. 388. P. 179; 1998. V. 417. P. 374; Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1998. V. 64. P. 138; Nucl. Phys. B. 2000. V. 573. P. 405; Part. Nucl. 2003. V. 34. P. 20.
15. Virchaux M., Milsztajn A. // Phys. Lett. B. 1992. V. 274. P. 221.
16. Krivokhizhin V. G. et al. // Z. Phys. C. 1987. Bd. 36. S. 51; 1990. Bd. 48. S. 347.
17. Златев И. С. и др. // ЯФ. 1982. Т. 35. С. 454;  
Бедняков В. А. и др. // Там же. Т. 36. С. 745.
18. Kotikov A. V., Parente G., Sanchez Guillen J. // Z. Phys. C. 1993. Bd. 58. S. 465.
19. Illarionov A. Yu., Kotikov A. V., Parente G. hep-ph/0402173.
20. Казаков Д. И., Котиков А. В. // ЯФ. 1987. Т. 46. С. 1767.
21. Kazakov D. I., Kotikov A. V. // Phys. Lett. B. 1992. V. 291. P. 171.
22. Bardin W. A. et al. // Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 3998.
23. Altarelli G., Ellis R. K., Martinelli G. // Nucl. Phys. B. 1979. V. 157. P. 461.
24. Vermaseren J. A. M. math-ph/0010025.
25. Duke D. W., Kiwel J. D., Sowell G. A. // Phys. Rev. D. 1982. V. 25. P. 71;  
Devoto A. et al. // Phys. Rev. D. 1984. V. 30. P. 541.
26. Coulson S. N., Eccestone R. E. // Nucl. Phys. B. 1983. V. 211. P. 317.
27. Floratos E. G., Ross D. A., Sachrajda C. T. // Nucl. Phys. B. 1979. V. 152. P. 493.
28. Lopez C., Yndurain F. J. // Nucl. Phys. B. 1980. V. 171. P. 231; 1981. V. 183. P. 157;  
Martin F. // Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 1382.
29. Kazakov D. I. et al. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1535;  
Sanchez Guillen J. et al. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 353. P. 337.
30. Zijlstra E. B., van Neerven W. L. // Phys. Lett. B. 1991. V. 272. P. 127; V. 273. P. 476; Nucl. Phys. B. 1992. V. 383. P. 525; Phys. Lett. B. 1992. V. 297. P. 377.
31. Moch S., Vermaseren J. A. M. // Nucl. Phys. B. 2000. V. 573. P. 853.

32. *Larin S. A., Vermaseren J. A. M.* // *Z. Phys. C.* 1993. Bd. 57. S. 93;  
*Larin S. et al.* // *Nucl. Phys. B.* 1997. V. 492. P. 338.
33. *Retey A., Vermaseren J. A. M.* // *Nucl. Phys. B.* 2001. V. 604. P. 281.
34. *Matiounine Y., Smith J., van Neerven W. L.* // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 57. P. 6701.
35. *Moch S., Vermaseren J. A. M., Vogt A.* // *Nucl. Phys. B.* 2004. V. 688. P. 101; V. 691. P. 129.
36. *Moch S., Vermaseren J. A. M., Vogt A.* hep-ph/0508055.
37. *Vovk V. I.* // *Z. Phys. C.* 1991. V. 47. P. 57.
38. *Duke D. W., Roberts R. G.* // *Phys. Rep.* 1985. V. 120. P. 257.
39. *Stevenson P. M.* // *Phys. Lett. B.* 1981. V. 100. P. 61.
40. *Duke D., Owens J. E.* // *Phys. Rev. D.* 1984. V. 30. P. 49.
41. *Gell-Mann M., Low F.* // *Phys. Rev.* 1954. V. 95. P. 1300.
42. *Stevenson P. M.* // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 2916; *Nucl. Phys. B.* 1984. V. 231. P. 65.
43. *Grunberg G.* // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 95. P. 70; *Phys. Rev. D.* 1984. V. 29. P. 2315.
44. *Dhar A.* // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 128. P. 407;  
*Dhar A., Gupta V.* // *Phys. Rev. D.* 1984. V. 29. P. 2822.
45. *Казаков Д. И., Шурков Д. В.* // *ЯФ.* 1985. Т. 42. P. 768.
46. *Gupta V., Shirkov D. V., Tarasov O. V.* // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1991. V. 6. P. 3381.
47. *Владимиров А. А.* // *ЯФ.* 1980. Т. 31. С. 1083;  
*Maximov S. I., Vovk V. I.* // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 199. P. 433;  
*Вовк В. И., Максимов С. И.* // *ЯФ.* 1987. Т. 46. С. 961.
48. *Vladimirov A. A.* JINR Preprint E2-89-2. Dubna, 1989. 5 p.
49. *Maxwell G. J.* // *Phys. Rev. D.* 1983. V. 28. P. 2037;  
*Schellekens A. N.* // *Lett. Nuovo Cim.* 1979. V. 24. P. 513.
50. *Yndurain F. J.* // *Phys. Lett. B.* 1978. V. 74. P. 68.
51. *Parisi G., Sourlas N.* // *Nucl. Phys. B.* 1979. V. 151. P. 421.
52. *Escoubes B. et al.* // *Nucl. Phys. B.* 1984. V. 242. P. 329.
53. *Котиков А. В.* // *ЯФ.* 1994. Т. 57. С. 142.
54. *Kotikov A. V., Velizhanin V. N.* hep-ph/0501274.
55. *Ross D. A., Sachrajda C. T.* // *Nucl. Phys. B.* 1979. V. 149. P. 497.
56. *Benvenuti A. C. et al.* // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 195. P. 91; 97; 1989. V. 223. P. 485.
57. *Aubert J. J. et al.* // *Nucl. Phys. B.* 1985. V. 259. P. 189; 1986. V. 272. P. 158; 1987. V. 293. P. 740.
58. *Arneodo M. et al.* // *Nucl. Phys. B.* 1990. V. 733. P. 1.
59. *Bodek A. et al.* // *Phys. Rev. D.* 1979. V. 20. P. 1471.
60. *Nisius R.* // *Phys. Rep.* 2000. V. 332. P. 165.
61. *Reya E.* // *Phys. Rep.* 1981. V. 69. P. 195; *Phys. Rev. Lett.* 1979. V. 43. P. 8.
62. *Cooper-Sarkar A. M. et al.* // *Z. Phys. C.* 1988. Bd. 39. S. 281.
63. *Kotikov A. V.* // *Phys. Rev. D.* 1994. V. 49. P. 5746.
64. *Whitlow L. W. et al.* // *Phys. Lett. B.* 1990. V. 250. P. 193.
65. *Биленькая С. И., Стаменов Д. Б.* Препринт ОИЯИ Р2-86-65. Дубна, 1986. 15 с.

66. *Котиков А. В.* // ЯФ. 1989. Т. 49. С. 223;  
*Kotikov A. V.* // Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 2017.
67. *Грибов В. Н., Липатов Л. Н.* // ЯФ. 1972. Т. 15. С. 781; 1218;  
*Липатов Л. Н.* // ЯФ. 1974. Т. 20. С. 181;  
*Altarelli G., Parisi G.* // Nucl. Phys. B. 1977. V. 129. P. 298;  
*Докуштыцер Ю. Л.* // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 1216.
68. *Липатов Л. Н.* // ЯФ. 1976. Т. 23. С. 642;  
*Куряев Е. А., Липатов Л. Н., Фадин В. С.* // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 840; 1977. Т. 72. С. 377;  
*Балицкий Я. Я., Липатов Л. Н.* // ЯФ. 1978. Т. 28. С. 1597;  
*Липатов Л. Н.* // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. С. 1536.
69. *Fadin V. S., Lipatov L. N.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 429. P. 127.
70. *Camidi G., Ciafaloni M.* // Ibid. V. 430. P. 349.
71. *Kotikov A. V., Lipatov L. N.* // Nucl. Phys. B. 2000. V. 582. P. 19; 2003. V. 661. P. 19.
72. *Kotikov A. V. et al.* // Eur. Phys. J. C. 2002. V. 26. P. 51; 2003. V. 27. P. 219; ЖЭТФ. 2005. Т. 128. С. 938;  
*Yung H. et al.* hep-ph/0611093.
73. *Ciafaloni M.* // Nucl. Phys. B. 1987. V. 296. P. 249;  
*Catani S. et al.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 234. P. 389; Nucl. Phys. B. 1990. V. 336. P. 18; 1991. V. 361. P. 645.
74. *Kotikov A. V., Parente G.* // Nucl. Phys. B. 1999. V. 549. P. 242.
75. *Mankiewicz L., Saalfeld A., Weigl T.* // Phys. Lett. B. 1997. V. 393. P. 175.
76. *Ball R. D., Forte F.* // Phys. Lett. B. 1994. V. 336. P. 77; Acta Phys. Polon. B. 1995. V. 26. P. 2097; Nucl. Phys. Proc. Suppl. A. 1997. V. 54. P. 163.
77. *Котиков А. В.* // ЯФ. 1996. Т. 59. С. 2219;  
*Kotikov A. V.* // Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 103.
78. *Kotikov A. V., Parente G.* // ЖЭТФ. 2003. Т. 97. С. 963.
79. *Lai H. L. et al. (CTEQ Collab.)* // Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 4763; 1997. V. 55. P. 1280;  
*Martin A. D., Stirling W. S., Roberts R. G.* // Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 6734.
80. *Gluck M., Reya E., Vogt A.* // Phys. Lett. B. 1993. V. 306. P. 391; Z. Phys. C. 1992. Bd. 53. S. 127; 1995. Bd. 67. S. 433;  
*Martin A. D., Stirling W. S., Roberts R. G.* // Phys. Lett. B. 1996. V. 387. P. 419.
81. *Aid S. et al. (H1 Collab.)* // Nucl. Phys. B. 1996. V. 470. P. 3.
82. *Derrick M. et al. (ZEUS Collab.)* // Z. Phys. C. 1996. Bd. 72. S. 399; Bd. 69. S. 607.
83. *Kotikov A. V., Parente G.* // Phys. Lett. B. 1996. V. 379. P. 195.
84. *Ellis R. K., Kunszt Z., Levin E. M.* // Nucl. Phys. B. 1994. V. 420. P. 393;  
*Prytz K.* // Phys. Lett. B. 1993. V. 311. P. 286; 1994. V. 332. P. 393.
85. *Aid S. et al. (H1 Collab.)* // Phys. Lett. B. 1997. V. 393. P. 452.
86. *Adloff C. et al. (H1 Collab.)* // Eur. Phys. J. C. 2003. V. 30. P. 32.
87. *Chekanov S. et al. (ZEUS Collab.)* // Eur. Phys. J. C. 2005. V. 42. P. 1.
88. *Kotikov A. V., Parente G.* // Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 963; ЖЭТФ. 1997. Т. 112. С. 32; hep-ph/9609237; Proc. of Intern. Workshop on Deep Inelastic Scattering and Related Phenomena, Rome, 1996. P. 237.

89. *Amaudrus P. et al. (NM Collab.) // Phys. Lett. B. 1992. V. 295. P. 159;*  
*Arneodo M. et al. (NM Collab.) // Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 3; 1995. V. 441. P. 3; 1997. V. 483. P. 3; V. 487. P. 3; 1996. V. 481. P. 23; 3;*  
*Donnachie A., Landshoff P. V. // Nucl. Phys. B. 1984. V. 244. P. 322; 1986. V. 267. P. 690.*
90. *Abramowitz H. et al. // Phys. Lett. B. 1991. V. 269. P. 465;*  
*Levy A. DESY Preprint DESY-95-003. Hamburg, 1995. 20 p.*
91. *Wolf G. DESY Preprint DESY-94-022. Hamburg, 1994. 15 p.*
92. *Capella A. et al. // Phys. Rep. 1993. V. 223. P. 225; Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 109.*
93. *Martin A.D. et al. // Phys. Lett. B. 1995. V. 354. P. 155; Eur. Phys. J. C. 1998. V. 4. P. 463;*  
*Gluck M. et al. // Ibid. V. 5. P. 461.*
94. *Gross D.I. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 19. P. 1071;*  
*Gross D.I., Treiman S.B. // Phys. Lett. B. 1976. V. 61. P. 85.*
95. *Lipatov L.N. // Phys. Rep. 1997. V. 286. P. 131.*
96. *Matveev V.A., Muradyan R.M., Tavkhelidze A.N. // Lett. Nuovo Cim. 1973. V. 7. P. 719;*  
*Brodsky S.J., Farrar G. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1153;*  
*Brodsky S.J., Burkardt M., Schmidt I. // Nucl. Phys. B. 1995. V. 441. P. 197.*
97. *Feynman R.P., Field R.D. // Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 2590.*
98. *Buras A.J., Gaemers K.J. // Nucl. Phys. B. 1978. V. 132. P. 249.*
99. *Owens J.E., Reya E. // Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 3003.*
100. *Eichen E. et al. // Rev. Mod. Phys. 1984. V. 56. P. 579.*
101. *Celmaster W., Gonzalves R.J. // Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 3112.*
102. *Котиков А. В. // ЯФ. 1989. Т. 49. С. 1725.*
103. *Gribov L.V., Levin E.M., Ryskin M.G. // Phys. Rep. 1983. V. 100. P. 1.*
104. *Kotikov A.V. // Phys. Lett. B. 1994. V. 338. P. 349.*
105. *Котиков А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. С. 3.*
106. *Котиков А. В. Многопетлевые расчеты в пертурбативной КХД и их приложение к эксперименту. Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Дубна, 1991.*
107. *Aubert J.J. et al. // Phys. Lett. B. 1983. V. 123. P. 275.*
108. *Savin I.A. // Proc. of Intern. Conf. of High Energy Physics. 1984. V. 2. P. 251.*
109. *Close F.E. et al. // Phys. Lett. B. 1989. V. 129. P. 346.*
110. *Close F.E. et al. // Phys. Rev. D. 1984. V. 31. P. 1004.*
111. *Котиков А. В. // ЯФ. 1989. Т. 50. С. 201.*
112. *Вовк В. И., Котиков А. В., Максимов С. И. // Докл. АН УССР. А. 1990. С. 58.*
113. *Вовк В. И., Котиков А. В., Максимов С. И. // ТМФ. 1990. Т. 84. С. 101.*
114. *Котиков А. В., Максимов С. И., Паробий И. С. // ТМФ. 1997. Т. 111. С. 63.*
115. *Енковский Л. Л., Котиков А. В., Пакканони Ф. // ЯФ. 1992. Т. 55. С. 2205; Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. С. 165; Phys. Lett. B. 1993. V. 314. P. 421.*
116. *Martin A.D. et al. // Eur. Phys. J. C. 2002. V. 23. P. 73.*
117. *Abramowitz M.A., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions. Dover, 1965.*
118. *Kotikov A.V., Maximov S.I., Vovk V.I. Preprint ITP-89-64E. Kiev, 1989. 15 p.*
119. *Ellis J., Jaffe R.L. // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 1444.*

120. Anselmini M., Efremov A., Leader E. // Phys. Rep. 1994. V. 261. P. 1.
121. Leader E., Sidorov A. V., Stamenov D. B. // Eur. Phys. J. C. 2002. V. 23. P. 479.
122. Котиков А. В., Пешехонов Д. В. // ЯФ. 1997. Т. 60. С. 736.
123. Kotikov A. V., Peshekhonov D. V. // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 3162.
124. Котиков А. В., Пешехонов Д. В. // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. С. 9.
125. Kotikov A. V., Peshekhonov D. V. // Eur. Phys. J. C. 1999. V. 9. P. 55.
126. HERMES Collab. Preprint DESY 98-122. Hamburg, 1998; hep-ex/9809915; Airapetian A. et al. (HERMES Collab.) // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 012002.
127. COMPASS Collab. Proposal CERN/SPSLC 96-14; Ageev E. S. et al. (COMPASS Collab.). hep-ex/0610068.
128. Bourrely C., Soffer J. // Nucl. Phys. B. 1995. V. 445. P. 341.
129. Bartels J., Ermolaev B. I., Ryskin M. G. // Z. Phys. C. 1996. Bd. 70. S. 273; Bd. 72. S. 627; Ermolaev B. I., Manaenkov S. I., Ryskin M. G. // Ibid. Bd. 69. S. 259.
130. Andersson Bo et al. // Eur. Phys. J. C. 2002. V. 25. P. 77.
131. Adams D. et al. (SM Collab.) // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 5330.
132. Adams D. et al. (SM Collab.) // Phys. Lett. B. 1997. V. 396. P. 338.
133. Abe K. et al. (E154 Collab.) // Ibid. V. 405. P. 180.
134. Abe K. et al. (E154 Collab.) // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 26.
135. Abe K. et al. (E143 Collab.) // Phys. Rev. D. 1997. V. 58. P. 112003.