ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2007. Т. 38. ВЫП. 2

ИЗМЕРЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

Д. А. Славнов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Описана схема построения квантовой механики, в которой гильбертово пространство и линейные операторы не являются первичными элементами теории. Вместо этого рассматривается некоторый вариант алгебраического подхода. В качестве первичных составляющих используются элементы некоммутативной алгебры (наблюдаемые) и функционалы на этой алгебре (элементарные состояния), которые ассоциируются с результатами единичных измерений. Такая схема позволяет, с одной стороны, использовать аппарат классической (колмогоровской) теории вероятностей, а с другой стороны, воспроизвести математический аппарат стандартной квантовой механики и указать границы его применимости. Дан краткий обзор необходимых сведений из теории алгебр и теории вероятностей. Описывается, как рассматриваемая математическая схема согласуется с теорией квантовых измерений и позволяет избежать квантовых парадоксов.

We describe a scheme for constructing quantum mechanics in which the Hilbert space and linear operators are not primary elements of the theory. Some variant of the algebraic approach is instead considered. The elements of a noncommutative algebra (observables) and functionals in this algebra (the elementary states associated with the results of a single measurement) serve as the primary components of the theory. Such a scheme allows us to use, on the one hand, the formalism of the classical (Kolmogorovian) theory of probability, and on the other hand, to reproduce the mathematical formalism of standard quantum mechanics and to specify borders of its applicability. A brief review of necessary data from the theory of algebras and probability theory is given. The manner is described in which the considered mathematical scheme agrees with the theory of quantum measurements and allows one to avoid quantum paradoxes.

PACS: 03.65.Ud

ВВЕДЕНИЕ

Создание квантовой теории произвело революционный переворот в физике. Это утверждение давно стало банальностью, но от этого не перестало быть справедливым. Действительно, в рамках квантовой физики удалось количественно описать огромное количество явлений, которые в рамках классической физики описанию не поддавались. На основе квантовой физики было развито огромное количество новых технологий.

Однако, как всякая революция, квантовая революция имела не только положительные, но и отрицательные последствия. В физике как-то незаметно произошла подмена понятий. Под словами «дать объяснение какому-то явлению» в квантовой физике обычно подразумевают «дать математическое описание этого явления».

Такая подмена имеет вполне понятное происхождение. Современная квантовая физика строится как аксиоматическая теория, основывающаяся на *математических* аксиомах [1]. Эти аксиомы очень удобны для построения мощного математического аппарата. Вместе с тем их связь с нашими интуитивными представлениями практически полностью отсутствует [2]. Среди большинства физиков-теоретиков прочно утвердилось мнение, что в квантовой теории физическая интуиция, основанная на классических представлениях, бесполезна. Поэтому теория может строиться на основании более или менее произвольного набора математических аксиом. Лишь бы они были внутренне непротиворечивы, и их *следствия* хорошо количественно описывали достаточно широкий круг экспериментальных результатов. Таким образом, одним из последствий квантовой революции стала замена объяснения физического явления его математическим описанием.

Современная стандартная квантовая механика основывается на постулатах:

I. Состояние физической системы описывается вектором $|\Psi\rangle$ некоторого гильбертова пространства или статистическим оператором (матрицей плотности) в этом пространстве.

II. Наблюдаемые $\widehat{D}$ системы описываются самосопряженными операторами $\widehat{\mathcal{D}}$.

III. Среднее значение наблюдаемой $\widehat{D}$ в состоянии $|\Psi\rangle$ равно математическому ожиданию $\langle\Psi|\widehat{\mathcal{D}}|\Psi\rangle$.

Почему гильбертово пространство имеет какое-то отношение к состоянию физической системы, почему оператор $\widehat{\mathcal{D}}$ соответствует наблюдаемой $\widehat{D}$, наконец, почему среднее значение наблюдаемой равняется $\langle\Psi|\widehat{\mathcal{D}}|\Psi\rangle$? Все эти вопросы считаются неуместными.

В стандартной квантовой механике восторжествовал лозунг «Победителей не судят!». Огромное количество прекрасных результатов, полученных на основании этих постулатов, позволяет со спокойной совестью отмахнуться от неуместных «почему».

Тем не менее в глубине души какой-то червь сомнения шевелится. С другой стороны, не могут же быть случайностью такие прекрасные результаты. А может быть, утверждения I–III не нужно принимать в качестве первичных постулатов, может быть, они следуют из более фундаментальных положений, которые более непосредственно связаны с физикой?

Если это так, то появляется надежда выявить условия, при которых утверждения I–III справедливы, иными словами, установить границы применимости стандартной квантовой механики. В свою очередь, это может помочь положить конец спорам о квантовых парадоксах, которые будоражат физическое сообщество почти с самого зарождения квантовой механики.

Постулаты I–III имеют еще один существенный недостаток. Они разрывают связь квантовой физики с классической. В последней состояния и наблюдаемые описываются с помощью совершенно других математических понятий. Вообще, связь классической физики с квантовой оказывается какой-то странной. С одной стороны, классическая физика считается предельным случаем квантовой, т. е. классическая физика — это вторичная теория. С другой стороны, для формулировки основных положений квантовой физики требуется представление о взаимодействии квантового объекта с прибором, который описывается с помощью классической физики [3]. В логике такая ситуация хорошо известна и называется порочным кругом. В качестве выхода из этой ситуации делается утверждение, что классическая логика в квантовой физике не действует, что там требуется специальная квантовая логика.

Таким образом, квантовая теория подразумевает еще и революционный переворот в логике. Однако, в отличие от физики, здесь существенных положительных результатов от такого переворота наблюдается мало. Кроме того, квантовая логика как некая последовательная полная схема не создана. Отдельные сформулированные утверждения фактически являются некоторой переформулировкой постулатов I–III или следствий из них. Недаром подавляющее большинство реально практикующих физиков не ссылаются на утверждения квантовой логики, а предпочитают обращаться непосредственно к постулатам I–III.

В стандартной формулировке квантовой механики имеется еще один неприятный момент. Квантовая механика по своей сути — это статистическая теория. Поэтому она должна основываться на теории вероятностей. Теория вероятностей (в формулировке Колмогорова [4]) в настоящий момент — это вполне сформировавшийся раздел математики. Однако считается, что такая теория вероятностей не пригодна для квантовой механики и требуется специальная квантовая теория вероятностей, т. е. квантовая теория требует еще и революционного переворота в математике. Здесь также особых положительных результатов не достигнуто. Сформулированы только отдельные утверждения этой новой теории вероятностей, опять-таки фактически сводящиеся к постулатам I–III (см., например, [5]).

Таким образом, наблюдается разрыв квантовой теории с математикой, которая остается в традиционном русле классической логики и классической теории вероятностей. Из сказанного следует, что было бы крайне желательно построить теоретико-математическую схему, которая была бы пригодна как для классической, так и для квантовой физики. Было бы очень хорошо, если бы правила игры в этой схеме, или, как говорят философы, парадигме, были классическими. Под классической парадигмой здесь будет подразумеваться, прежде всего, классическая формальная логика и представление о наличии причинно-следственной связи как между физическими явлениями, так и между логическими утверждениями. Далее, предположение о существовании физических реальностей, которые являются носителями причин физических явлений. Кроме того, предположение о том, что вероятностные суждения подчиняются классической колмогоровской теории вероятностей.

Обычно считается, что все эти положения несовместимы с математической схемой, которая принята в квантовой механике. Здесь предпринята попытка доказать обратное. При этом мы не будем основываться на постулатах I–III, а используем алгебраический подход [6–8]. В рамках этого подхода оказывается возможным сформулировать аксиомы, которые, во-первых, более фундаментальны, чем постулаты I–III, а во-вторых, являются интуитивно гораздо более понятными [9–11].

Здесь, правда, придется преодолеть некоторый психологический барьер. Дело в том, что аппарат гильбертова пространства стал стандартным в квантовой механике. Поэтому он кажется интуитивно понятным. Но это привычка к определенному математическому аппарату, а не физическая интуиция. В противоположность этому аппарат теории алгебр гораздо менее привычен для большинства физиков. Поэтому утверждения, использующие язык теории алгебр, кажутся более сложными, чем утверждения, использующие язык теории гильбертова пространства. Хотя, как правило, алгебраические утверждения более элементарны. Чтобы помочь преодолеть этот психологический барьер, в следующем разделе будут приведены элементарные сведения из теории алгебр.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГЕБР

Определения и утверждения заимствованы из монографий [6, 12–15].

***Определение* 1.** Множество $\mathfrak{L}$ называется комплексным (действительным) линейным пространством, если:

а) для любого комплексного (действительного) числа α и любого элемента $\hat{U} \in \mathfrak{L}$ определен элемент $\alpha\hat{U} \in \mathfrak{L}$;

б) для любых двух элементов $\hat{U}, \hat{V} \in \mathfrak{L}$ определен элемент $\hat{U} + \hat{V} \in \mathfrak{L}$;

в) операции а) и б) обладают обычными свойствами умножения и сложения соответственно.

***Определение* 2.** Комплексное (действительное) линейное пространство $\mathfrak{L}$ называется комплексной (действительной) алгеброй $\mathfrak{A}$, если для любых элементов $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W} \in \mathfrak{A}$ определена операция умножения, обладающая следующими свойствами:

а) $\hat{U}\hat{V} \in \mathfrak{A}$;

б) $(\hat{U} + \hat{V})\hat{W} = \hat{U}\hat{W} + \hat{V}\hat{W}$, $\hat{U}(\hat{V} + \hat{W}) = \hat{U}\hat{V} + \hat{U}\hat{W}$;

в) $\alpha(\hat{U}\hat{V}) = (\alpha\hat{U})\hat{V} = \hat{U}(\alpha\hat{V})$.

***Определение* 3.** Алгебра $\mathfrak{A}$ называется ассоциативной, если для любых $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W} \in \mathfrak{A}$ справедливо $\hat{U}(\hat{V}\hat{W}) = (\hat{U}\hat{V})\hat{W}$.

***Определение* 4.** Алгебра $\mathfrak{A}$ называется коммутативной, если для любых $\hat{U}, \hat{V} \in \mathfrak{A}$ справедливо $\hat{U}\hat{V} = \hat{V}\hat{U}$.

ПРИМЕРЫ:

а) множество всех действительных непрерывных ограниченных функций одного переменного является действительной алгеброй;

б) множество всех комплексных непрерывных ограниченных функций одного переменного является комплексной алгеброй;

в) множество ограниченных линейных операторов гильбертова пространства является комплексной алгеброй;

г) множество взаимно коммутирующих ограниченных эрмитовых линейных операторов гильбертова пространства является действительной алгеброй;

д) множество всех ограниченных эрмитовых линейных операторов гильбертова пространства не является алгеброй.

***Определение* 5.** Отображение $\hat{U} \to \hat{U}^*$ комплексной алгебры $\mathfrak{A}$ на себя $(\hat{U}, \hat{U}^* \in \mathfrak{A})$ называется инволюцией, если для любого комплексного числа α и всех $\hat{U}, \hat{V} \in \mathfrak{A}$ справедливы следующие равенства:

а) $(\hat{U} + \hat{V})^* = \hat{U}^* + \hat{V}^*$;

б) $(\alpha\hat{U})^* = \alpha^*\hat{U}^*$;

в) $(\hat{U}\hat{V})^* = \hat{V}^*\hat{U}^*$;

г) $\hat{U}^{**} = \hat{U}$.

ПРИМЕРЫ:

а) если $\mathfrak{A}$ — множество всех комплексных непрерывных ограниченных функций одного переменного, то операция комплексного сопряжения является инволюцией;

б) если $\mathfrak{A}$ — множество всех ограниченных линейных операторов гильбертова пространства, то операция эрмитового сопряжения является инволюцией.

***Определение* 6.** Комплексная алгебра, оснащенная операцией инволюции, называется инволютивной алгеброй.

ЗАМЕЧАНИЕ. В действительной коммутативной алгебре операцию инволюции можно определить как тождественное преобразование.

***Определение* 7.** Если $\hat{U}^* = \hat{U}$ $(\hat{U} \in \mathfrak{A})$, то элемент $\hat{U}$ называется эрмитовым.

***Определение* 8.** Элемент $\hat{I} \in \mathfrak{A}$ называется единицей алгебры, если для любого $\hat{U} \in \mathfrak{A}$ справедливо $\hat{I}\hat{U} = \hat{U}\hat{I} = \hat{U}$.

***Утверждение* 1.** Любая алгебра либо содержит единицу, либо может быть дополнена элементом, обладающим свойствами единичного элемента.

Далее будут рассматриваться алгебры, в которых единица имеется.

***Определение* 9.** Элемент $\hat{U}^{-1} \in \mathfrak{A}$ называется обратным элементу $\hat{U}$, если $\hat{U}^{-1}\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^{-1} = \hat{I}$.

***Определение* 10.** Спектром $\sigma(\hat{U};\mathfrak{A})$ элемента $\hat{U}$ в алгебре $\mathfrak{A}$ ($\hat{U} \in \mathfrak{A}$) называется множество всех таких чисел λ, для которых элемент $\lambda\hat{I} - \hat{U}$ не имеет обратного в алгебре $\mathfrak{A}$.

***Определение* 11.** Спектральным радиусом элемента $\hat{U}$ называется число $r = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(\hat{U};\mathfrak{A})\}$.

***Определение* 12.** Подмножество $\mathfrak{Q}$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется подалгеброй, если $\mathfrak{Q}$ является алгеброй при том же определении операций сложения и умножения.

***Определение* 13.** Пусть $\mathfrak{Q}$ — действительная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$. Подалгебра $\mathfrak{Q}$ называется максимальной действительной коммутативной подалгеброй, если она не является подалгеброй никакой другой подобной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$.

В общем случае спектр $\sigma(\hat{U};\mathfrak{Q})$ элемента $\hat{U}$ в подалгебре $\mathfrak{Q}$ может не совпадать со спектром $\sigma(\hat{U};\mathfrak{A})$ того же элемента в алгебре $\mathfrak{A}$. Однако справедливо следующее утверждение.

***Утверждение* 2.** Если $\mathfrak{Q}$ — максимальная действительная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ и $\hat{U} \in \mathfrak{Q}$, то $\sigma(\hat{U};\mathfrak{Q}) = \sigma(\hat{U};\mathfrak{A})$.

***Определение* 14.** Совокупность $\mathfrak{J}_l$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ называется ее левым идеалом, если:

а) $\mathfrak{J}_l \neq \mathfrak{A}$;

б) $\mathfrak{J}_l$ — линейное подпространство $\mathfrak{A}$;

в) из $\hat{U} \in \mathfrak{J}_l$, $\hat{V} \in \mathfrak{A}$ следует $\hat{V}\hat{U} \in \mathfrak{J}_l$.

Аналогично определяется правый идеал. Множество $\mathfrak{J}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$, которое одновременно является и левым, и правым идеалом, называется двусторонним идеалом.

***Определение* 15.** Пусть $\mathfrak{J}$ — двусторонний идеал алгебры $\mathfrak{A}$. Элементы $\hat{U}, \hat{V}$ называются эквивалентными относительно $\mathfrak{J}$, если $\hat{U} - \hat{V} \in \mathfrak{J}$. Множество всех эквивалентных между собой элементов называется классом вычетов алгебры $\mathfrak{A}$.

***Определение* 16.** Множество всех классов вычетов алгебры $\mathfrak{A}$ называется фактор-алгеброй и обозначается через $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$.

***Утверждение* 3.** Если в множестве $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ операции умножения классов на число, сложения классов и их перемножения ввести как соответствующие действия над представителями этих классов, то множество $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ приобретет структуру алгебры, т. е. фактор-алгебра является алгеброй.

***Определение* 17.** Инволютивная алгебра называется нормированной, если в ней для каждого элемента $\hat{U}$ определена норма $\|\hat{U}\|$ — неотрицательное число, удовлетворяющее следующим условиям:

а) $\|\alpha\hat{U}\| = |\alpha|\|\hat{U}\|$;
б) $\|\hat{U} + \hat{V}\| \leqslant \|\hat{U}\| + \|\hat{V}\|$;
в) $\|\hat{U}^*\| = \|\hat{U}\|$;
г) $\|\hat{U}\hat{V}\| \leqslant \|\hat{U}\|\,\|\hat{V}\|$;
д) если $\|\hat{U}\| = 0$, то $\hat{U} = 0$.

***Определение* 18.** Величина $\|\hat{U}\|$, для которой выполняются все условия предыдущего определения, кроме пункта д), называется полунормой.

***Определение* 19.** Последовательность $\{\hat{U}_n\}$ элементов нормированного пространства называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\|\hat{U}_n - \hat{U}_m\| < \varepsilon$.

***Определение* 20.** Нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится по норме к некоторому элементу этого пространства, называется полным.

***Определение* 21.** Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

***Утверждение* 4.** Любое нормированное пространство может быть дополнено до банахова пространства.

***Определение* 22.** Инволютивная ассоциативная алгебра, являющаяся банаховым пространством (банаховой алгеброй), в которой норма удовлетворяет дополнительному условию $\|\hat{U}^*\hat{U}\| = \|\hat{U}\|^2$, называется C^*-алгеброй.

***Определение* 23.** Отображение $\hat{U} \to \hat{U}'$ инволютивной алгебры $\mathfrak{A}$ ($\hat{U} \in \mathfrak{A}$) в инволютивную алгебру $\mathfrak{A}'$ ($\hat{U}' \in \mathfrak{A}'$) называется гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, если из $\hat{U} \to \hat{U}'$, $\hat{V} \to \hat{V}'$ следует $\hat{U}^* \to \hat{U}'^*$, $\alpha\hat{U} \to \alpha\hat{U}'$, $\hat{U} + \hat{V} \to \hat{U}' + \hat{V}'$, $\hat{U}\hat{V} \to \hat{U}'\hat{V}'$.

При гомоморфизме нескольким элементам алгебры $\mathfrak{A}$ может соответствовать один элемент алгебры $\mathfrak{A}'$.

***Определение* 24.** Если гомоморфизм есть взаимно однозначное отображение, то он называется изоморфизмом.

***Определение* 25.** Изоморфное отображение алгебры на себя называется автоморфизмом.

***Определение* 26.** Гомоморфизм коммутативной ассоциативной действительной (комплексной) алгебры $\mathfrak{A}$ в множество действительных (комплексных) чисел называется характером этой алгебры.

***Определение* 27.** Гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в множество линейных операторов некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ называется представлением этой алгебры.

***Определение* 28.** Отображение нормированной алгебры $\mathfrak{A}$ в нормированную алгебру $\mathfrak{A}'$ называется изометрическим, если из $\hat{U} \to \hat{U}'$ следует $\|\hat{U}\| \to \|\hat{U}'\|$.

***Определение* 29.** Отображение $\hat{U} \to \varphi(\hat{U})$ алгебры $\mathfrak{A}$ в множество комплексных чисел называется линейным функционалом, если $\varphi(\alpha\hat{U}) = \alpha\varphi(\hat{U})$, $\varphi(\hat{U} + \hat{V}) = \varphi(\hat{U}) + \varphi(\hat{V})$. Здесь $\hat{U}, \hat{V} \in \mathfrak{A}$, а α и $\varphi(\hat{U})$ — комплексные числа.

***Определение* 30.** Линейный функционал φ на инволютивной алгебре $\mathfrak{A}$ называется положительным, если $\varphi(\hat{U}\hat{U}^*) \geqslant 0$ для каждого $\hat{U} \in \mathfrak{A}$.

***Утверждение* 5.** Если $\varphi(\hat{U})$ — положительный функционал, то:

а) $\varphi(\hat{U}^*) = \varphi^*(\hat{U})$;

б) $|\varphi(\hat{U}^*\hat{V})|^2 \leqslant \varphi(\hat{U}^*\hat{U})\varphi(\hat{V}^*\hat{V})$.

***Утверждение* 6.** Положительный функционал на банаховой алгебре непрерывен.

***Утверждение* 7.** Если $\varphi(\hat{U})$ $(\hat{U} \in \mathfrak{A})$ — характер коммутативной ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$, то:

а) $\varphi(0) = 0$;

б) $\varphi(\hat{I}) = 1$;

в) $\varphi(\hat{U}\hat{U}^*) \geqslant 0$.

Таким образом, характер является положительным функционалом на алгебре $\mathfrak{A}$.

***Утверждение* 8.** Если дополнительно алгебра $\mathfrak{A}$ банахова, а $\{\varphi(\hat{U})\}$ — множество всех ее характеров, то:

а) $\lambda = \varphi(\hat{U}) \in \sigma(\hat{U}; \mathfrak{A})$;

б) если $\lambda \in \sigma(\hat{U}; \mathfrak{A})$, то $\lambda = \varphi(\hat{U})$ для некоторого $\varphi(\hat{U}) \in \{\varphi(\hat{U})\}$.

***Определение* 31.** Элемент $\hat{p}$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется проектором, если $\hat{p}^* = \hat{p}$, $\hat{p}^2 = \hat{p}$.

***Определение* 32.** Проектор $\hat{p}_\lambda \neq 0$ называется минимальным, если из $\hat{p}_\lambda \hat{p}_\mu = \hat{p}_\mu \hat{p}_\lambda = \hat{p}_\mu$ следует, что либо $\hat{p}_\mu = 0$, либо $\hat{p}_\mu = \hat{p}_\lambda$.

***Утверждение* 9.** Если $\mathfrak{A}$ — алгебра ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то минимальный проектор — это проектор на одномерное подпространство пространства $\mathfrak{H}$.

***Определение* 33.** Будем говорить, что последовательность $\{\hat{U}_n\}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ сходится в слабой топологии к элементу $\hat{U}$, если для любого линейного ограниченного положительного функционала φ справедливо $\varphi(\hat{U}_n) \to \varphi(\hat{U})$.

***Определение* 34.** Множество G элементов банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ называется системой образующих этой алгебры, если наименьшая замкнутая подалгебра, содержащая G, совпадает с $\mathfrak{A}$.

***Определение* 35.** Булевой алгеброй множества Ω называется совокупность подмножеств множества Ω, в которой определены следующие алгебраические операции:

а) операция логического сложения — объединение подмножеств;

б) операция логического умножения — пересечение подмножеств;

в) операция логического отрицания — дополнение подмножества до множества Ω.

***Определение* 36.** Булева алгебра называется замкнутой относительно некоторой алгебраической операции, если в результате этой операции получается элемент исходной алгебры.

***Определение* 37.** Булева алгебра называется σ-алгеброй, если она:

а) содержит само множество Ω и пустое множество $\emptyset$;

б) содержит дополнение до Ω каждого подмножества, входящего в алгебру;

в) замкнута относительно счетного числа объединений и пересечений подмножеств.

***Определение* 38.** Множество Ω, в котором выбрана определенная σ-алгебра, называется измеримым пространством.

В дальнейшем ссылки на определения и утверждения будут делаться по следующему шаблону: (О.35, б) — определение 35, пункт б), (У.7, в) — утверждение 7, пункт в).

2. НАБЛЮДАЕМЫЕ, ИЗМЕРЕНИЯ, СОСТОЯНИЯ

Обратимся теперь к физическим проблемам. Нашей целью будет формулировка основных постулатов квантовой механики. При этом мы будем стараться в качестве постулатов брать такие утверждения, которые в эксперименте можно проверить непосредственно, а не их отдаленные последствия. В противном случае всегда существует опасность сделать лишние предположения, которые в дальнейшем могут привести к противоречию. Соответственно, будем стараться отталкиваться от физических явлений и подстраивать под них математический аппарат, а не придумывать физическое истолкование какой-то заранее выбранной математической схемы.

При изучении физических систем базовым понятием является «наблюдаемая». Это понятие представляется самоочевидным и не нуждающимся в точном определении. Эвристически наблюдаемая — это такой атрибут исследуемой физической системы, для которого с помощью определенной измерительной процедуры можно получить некоторое численное значение.

Замечание. Далее мы будем предполагать, что зафиксирована некоторая система единиц, и поэтому все наблюдаемые можно считать безразмерными.

Понятие наблюдаемой является базовым как в классической, так и в квантовой физике. Однако традиционно в математическом аппарате классической и квантовой физики наблюдаемой сопоставляются различные математические объекты. Постараемся провести унификацию. Для этого необходимо выделить действительно существенные математические характеристики наблюдаемых, отделив их от характеристик, которые обычно приписываются наблюдаемым ради удобства построения математического аппарата.

Замечание. Часто для исследуемой системы заранее известны и остаются неизменными значения некоторых наблюдаемых. Например, при изучении взаимодействия электронов с фотонами заранее известны массы электронов и фотонов, заряд электрона. Такие величины удобно исключить из множества наблюдаемых, а их значения рассматривать как параметры, входящие в определение исследуемой физической системы.

В процессе измерения физическая система подвергается воздействию со стороны измерительного прибора. По характеру этого воздействия измерения можно подразделить на два типа: воспроизводимые и невоспроизводимые. Воспроизводимые измерения характеризуются тем, что несмотря на возмущение, которое система испытывает при каждом измерении, повторное измерение той же наблюдаемой тем же или другим прибором дает тот же результат. Предполагается, что в интервале между измерениями система не подвергалась внешнему воздействию, а изменение значений наблюдаемых за счет свободной эволюции мы умеем учитывать.

Особый интерес представляет проблема воспроизводимости, когда мы проводим измерения нескольких наблюдаемых для одной физической системы. Пусть мы, например, измеряем наблюдаемую $\hat{A}$, затем наблюдаемую $\hat{B}$, потом опять наблюдаемую $\hat{A}$ (возможно, прибором, отличным от первоначального) и, наконец, вновь наблюдаемую $\hat{B}$. Если результаты повторных измерений для каждой наблюдаемой будут совпадать с результатами первичных измерений, то такие измерения назовем совместимыми. Если для наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ существуют приборы, которые позволяют осуществить совместимые измерения, то такие наблюдаемые назовем совместимыми, или одновременно измеримыми.

Опыт показывает, что у классических физических систем все наблюдаемые совместимы. В противоположность этому в квантовом случае существуют как совместимые, так и несовместимые наблюдаемые.

В стандартной квантовой механике этот факт квалифицируется как составная часть «принципа дополнительности» [16]. Мы его будем рассматривать просто как свидетельство того, что для измерения двух несовместимых наблюдаемых требуются приборы, которые несовместимы друг с другом [17].

Множество всех наблюдаемых обозначим через $\mathfrak{A}_+$, а его максимальное подмножество совместимых наблюдаемых — через $\mathfrak{Q}_\xi$. Индекс ξ отличает одно максимальное подмножество совместимых наблюдаемых от другого. В свою очередь, множество значений индекса ξ обозначим через Ξ. Ясно, что для классической системы множество Ξ состоит из одного элемента. Для квантовой системы это множество состоит более чем из одного элемента. В дальнейшем мы убедимся, что в этом случае множество Ξ бесконечно и даже имеет мощность континуума. Одна и та же наблюдаемая может одновременно принадлежать различным подмножествам $\mathfrak{Q}_\xi$.

Опыт показывает, что для двух любых совместимых наблюдаемых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ существует третья наблюдаемая $\widehat{D}$, которая обладает следующими свойствами. Во-первых, она совместима как с $\hat{A}$, так и с $\hat{B}$. Во-вторых, результаты одновременного измерения наблюдаемых $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\widehat{D}$ (для одной физической системы) удовлетворяют соотношению

$$A + B = D. \tag{1}$$

В действительности одновременность не очень существенна. Достаточно, чтобы измерения этих наблюдаемых были совместимы. Тем не менее в дальнейшем для краткости в подобной ситуации будем говорить, что наблюдаемые измеряются одновременно.

Соотношение (1) выполняется всегда, вне зависимости от конкретных результатов измерений. Это позволяет считать, что сами наблюдаемые связаны подобным соотношением:

$$\hat{A} + \hat{B} = \widehat{D}.$$

Тем самым можно оснастить множество $\mathfrak{Q}_\xi$ операцией сложения. Аналогичным образом вводятся операции перемножения элементов и умножения на действительное число. Опыт показывает, что каждое из подмножеств $\mathfrak{Q}_\xi$ обладает свойствами действительной ассоциативной коммутативной алгебры.

Таким образом, характеристическим математическим свойством наблюдаемых является то, что их можно рассматривать в качестве элементов некоторой алгебры. Пока мы обосновали это утверждение только для совместимых наблюдаемых. Далее мы увидим, что его можно распространить и на несовместимые наблюдаемые.

Если для фиксированной физической системы с помощью совместимых измерений мы каждой наблюдаемой сопоставим результат измерения

$$\hat{A} \to A = \varphi_\xi(\hat{A}),$$

то зададим функционал на алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$. В силу определения алгебраических операций в $\mathfrak{Q}_\xi$ этот функционал будет одним из характеров алгебры $\mathfrak{Q}_\xi$ (см. (О.26)).

В любом реальном измерении для любой наблюдаемой всегда получается конечное значение. Этот факт можно обратить и считать физическими (т. е. фиксируемыми в реальном эксперименте) только те наблюдаемые $\hat{A}$, для которых

$$\sup_\xi \sup_{\varphi_\xi} |\varphi_\xi(\hat{A})| < \infty. \tag{2}$$

В дальнейшем мы увидим, что ограниченность функционалов $\varphi_\xi(\cdot)$ не является непреодолимым препятствием для рассмотрения в теории наблюдаемых, которые не ограничены. В стандартной квантовой механике такие наблюдаемые сплошь и рядом рассматриваются.

В качестве итога предыдущих рассуждений сформулируем три постулата.

Постулат 1. Множество $\mathfrak{Q}_\xi$ совместимых наблюдаемых можно оснастить структурой действительной ассоциативной коммутативной алгебры. Наоборот, если наблюдаемые принадлежат какой-нибудь одной действительной ассоциативной коммутативной алгебре, то они совместимы.

Постулат 2. Для классической системы все наблюдаемые совместимы.

Постулат 3. Результаты одновременного измерения наблюдаемых, принадлежащих алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$, описываются действительным ограниченным (в смысле неравенства (2)) функционалом $\varphi_\xi(\cdot)$, который является характером алгебры $\mathfrak{Q}_\xi$.

Ранее неоднократно использовалось понятие «физическая система». Интуитивно ясно, что это понятие означает. Поэтому мы не будем пытаться дать ему физическое истолкование. Однако, чтобы строить математический аппарат, нужно четко представлять, что подразумевается под словами «заданная физическая система».

Далее будет считаться, что физическая система задана, если выполнено несколько условий. Во-первых, задано множество $\mathfrak{A}_+$ ее наблюдаемых. Величины, значения которых заранее известны и не меняются, в множество $\mathfrak{A}_+$ не включаются, но также считаются заданными. Во-вторых, заданы множества совместимых наблюдаемых $\mathfrak{Q}_\xi$ ($\xi \in \Xi$). Эти множества являются подмножествами множества $\mathfrak{A}_+$. В-третьих, заданы соотношения между наблюдаемыми. Соотношения между совместимыми наблюдаемыми определяются тем, что они являются элементами алгебр $\mathfrak{Q}_\xi$. Соотношения между несовместимыми наблюдаемыми мы обсудим позже. В-четвертых, задана динамика системы. Поскольку мы хотим с единых позиций описывать и классические, и квантовые системы, то не будем использовать какой-нибудь конкретный способ описания динамики системы. Будем просто считать, что наблюдаемые могут зависеть от времени, и слова «заданы соотношения между наблюдаемыми» подразумевают и соотношения между наблюдаемыми в разные моменты времени.

Замечание. Если рассматриваемая физическая система консервативна, то, учитывая однородность времени, следует считать, что динамика описывается некоторым зависящим от времени автоморфизмом алгебры наблюдаемых. Если же система испытывает внешние возмущения, зависящие от времени, то описание динамики может оказаться более сложным. В частности, возможно, потребуется изменять сами алгебры наблюдаемых.

Если отвлечься от рассмотрения Вселенной как заданной физической системы, то во всех остальных случаях каждая физическая система является подсистемой некоторой бо́льшей физической системы. Математически это значит, что множество наблюдаемых исследуемой физической системы является подмножеством наблюдаемых другой системы. Выделение подмножества может осуществляться по различным признакам. В первую очередь — это локализация.

С каждой областью $\mathcal{O}$ четырехмерного пространства-времени можно связать множество наблюдаемых, для которых можно получить численные значения, производя измерения в области $\mathcal{O}$. Такие наблюдаемые называются (см. [6, 7]) локальными (локализованными в области $\mathcal{O}$). Строго говоря, все наблюдаемые следовало бы считать локальными, однако в теории обычно рассматривают и глобальные (квазилокальные) наблюдаемые, имея в виду некоторые пределы последовательностей локальных наблюдаемых.

Если руководствоваться признаком локализации, то математически исследуемой физической системой следует считать множество наблюдаемых, локализованных в некоторой области. Однако на практике очень часто приходится руководствоваться и другими признаками. Например, мы хотим рассматривать некоторое твердое тело как классическую физическую систему. Вообще-то, твердое тело характеризуется огромным числом наблюдаемых. Некоторые из них характеризуют твердое тело как целое. Эти наблюдаемые могут рассматриваться в рамках классической физики. Другие наблюдаемые характеризуют отдельные молекулы. Эти наблюдаемые в рамках классической физики описаны быть не могут. С другой стороны, и те, и другие наблюдаемые локализованы в области $\mathcal{O}$, занимаемой рассматриваемым телом. Таким образом, в данном случае признаком выделения изучаемой системы является не только определенная локализация наблюдаемых, но и их классичность.

Этот пример демонстрирует также, что из квантовой системы, характеризуемой множеством совместимых и несовместимых наблюдаемых, можно выделить классическую подсистему, которая характеризуется только совместимыми наблюдаемыми. При этом изолированность подсистемы от остальной части системы не предполагается. Например, при упругом ударе, успешно описываемом в рамках классической физики, самое деятельное участие принимают молекулы, которые описываются квантовой физикой. Эффект этого участия в классическом описании может быть учтен с помощью граничных условий или некоторого эффективного внешнего поля.

Обсудим теперь понятие «состояние физической системы». Начнем обсуждение с классической системы. В этом случае под состоянием системы понимается некоторый атрибут физической системы, который однозначно определяет результат измерения всех наблюдаемых. Со времен Ньютона в физике принят принцип локальности, который, в частности, предполагает, что состояние локализованной физической системы определяется какими-то внутренними характеристиками этой системы и теми характеристиками воздействующего на систему внешнего поля, которые относятся к области локализации физической системы. Согласно классической парадигме должна существовать некая локальная реальность, которая определяет это состояние.

Математически состояние обычно задается с помощью точки в фазовом пространстве. При этом предполагается, что динамика системы задана. В рамках развиваемого в данной статье подхода такой способ задания состояния неудобен. Во-первых, его трудно перенести на квантовый случай. Во-вторых, он жестко связан с определенным способом задания динамики. В частности, он предполагает введение канонически сопряженных переменных. Однако нетрудно сообразить, что этот способ задания состояния всего лишь конкретный вариант задания на алгебре наблюдаемых некоторого действительного функционала, который является характером этой алгебры. Если не связываться ни с каким конкретным вариантом, то состояние классической системы можно определить как характер алгебры наблюдаемых этой системы.

Обратимся теперь к квантовому случаю. Множество $\mathfrak{A}_+$ квантовых наблюдаемых нельзя оснастить структурой ассоциативной коммутативной алгебры. Поэтому непосредственный перенос определения состояния с классической системы на квантовую невозможен. Однако множество $\mathfrak{A}_+$ можно рассматривать как совокупность подмножеств $\mathfrak{Q}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, каждое из которых имеет структуру действительной ассоциативной коммутативной алгебры. Каждое подмножество $\mathfrak{Q}_\xi$ мы можем рассматривать в качестве множества наблюдаемых, соответствующих классической подсистеме квантовой системы. Конечно, эта классическая подсистема не будет изолирована от остальной части квантовой системы. Но изолированность не является обязательным условием выделения подсистемы.

Состояние каждой такой классической подсистемы мы по-прежнему можем математически описывать с помощью функционала $\varphi_\xi(\cdot)$, заданного на алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$, который является характером этой алгебры. В связи с этим введем новое понятие — элементарное состояние.

***Определение* 39.** Назовем элементарным состоянием физической системы совокупность $\varphi = [\varphi_\xi]$ $(\xi \in \Xi)$ функционалов φ_ξ, каждый из которых является некоторым характером соответствующей алгебры $\mathfrak{Q}_\xi$. В свою очередь, множества $\mathfrak{Q}_\xi$ являются максимальными подмножествами множества $\mathfrak{A}_+$, которые имеют структуру действительной ассоциативной коммутативной алгебры.

Термин «состояние» оправдан и в квантовом случае. Действительно, в каждом отдельном измерении и даже в совокупности совместимых измерений мы можем, самое бóльшее, найти значения некоторой совокупности совместимых наблюдаемых. Все эти наблюдаемые принадлежат какой-то одной алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$. Поэтому их значения определяются соответствующим функционалом φ_ξ. Задание элементарного состояния φ фиксирует все такие функционалы. Тем самым фиксирует результаты всех возможных измерений. В стандартной квантовой механике состоянием называется другой математический объект. Поэтому для $\varphi = [\varphi_\xi]$ мы используем термин «элементарное состояние». В стандартной квантовой механике такой термин не используется. В случае классической системы понятия «элементарное состояние» и «состояние» тождественны.

Этот этап рассуждений завершим следующим постулатом.

Постулат 4. Результат каждого индивидуального эксперимента по измерению наблюдаемых физической системы определяется элементарным состоянием этой системы.

В случае классической системы этот постулат не дает ничего нового. Наоборот, в квантовом случае этот постулат совершенно необычен. Более того, существуют многочисленные «доказательства» того, что ничего подобного быть не может. В нашем подходе этот постулат занимает центральное место. Можно считать, что элементарное состояние является реализацией концепции «потенциальных возможностей». Это понятие ввел Фок [18], но не дал ему математического оформления.

Обратим внимание, что никаких дополнительных предположений о свойствах функционалов φ_ξ не делается. В частности, не предполагается, что

$$\varphi_\xi(\hat{A}) = \varphi_{\xi'}(\hat{A}), \text{ если } \hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi \cap \mathfrak{Q}_{\xi'}. \tag{3}$$

Конечно, для некоторых элементарных состояний φ равенство (3) может выполняться. Будем говорить, что элементарное состояние φ стабильно на наблюдаемой $\hat{A}$, если равенство (3) выполняется для всех $\mathfrak{Q}_\xi$ и $\mathfrak{Q}_{\xi'}$, которые содержат наблюдаемую $\hat{A}$.

С другой стороны, кажется очень естественным потребовать выполнения равенства (3). В связи с этим возможность нарушения этого равенства нуждается в специальном комментарии.

Экспериментально значения наблюдаемых проявляются как отклик измерительного прибора на воздействие со стороны изучаемой системы. В принципе, отклики различных приборов на одно и то же воздействие могут быть разными. С точки зрения экспериментатора, это очень плохо. Поэтому экспериментатор стремится унифицировать реакцию (показания) различных приборов. Такой унификации служит процедура калибровки приборов.

Схематически эта процедура выглядит следующим образом. В качестве шаблона берется измерительный прибор, который осуществляет воспроизводимое измерение некоторой наблюдаемой $\hat{A}$. С помощью этого прибора проводится измерение наблюдаемой $\hat{A}$ у какой-нибудь тестовой физической системы. Получается некоторое значение A. По определению воспроизводимого измерения повторное измерение той же наблюдаемой прибором, подлежащим калибровке, должно дать то же значение. Только прибор, многократно выдерживающий такой тест, заслуживает названия измерительного. Калибровка призвана исключить зависимость результата измерения от неконтролируемого влияния прибора, в частности, от неконтролируемого состояния прибора.

Однако против одного параметра, значение которого может определяться прибором, калибровка бессильна. Таким параметром является $\xi \in \Xi$. Поясним, какое отношение параметр ξ имеет к измерительному прибору. Каждый прибор в зависимости от своей конструкции (настройки) предназначается либо для измерения одной наблюдаемой $\hat{A}$, либо для одновременного измерения группы наблюдаемых. Эта наблюдаемая (группа наблюдаемых) принадлежит какой-то алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$. Будем считать, что прибор относится к типу ξ, если, во-первых, он предназначен для измерения наблюдаемой (наблюдаемых) из подмножества $\mathfrak{Q}_\xi$, во-вторых, результатом измерения наблюдаемой $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$ (группы совместимых наблюдаемых) является $A_\xi = \varphi_\xi(\hat{A})$ (группа соответствующих результатов).

С помощью калибровки нельзя выяснить, зависит ли результат измерения от параметра ξ. Действительно, первым этапом калибровки является воспроизводимое измерение, после которого состояние тестовой системы становится стабильным на наблюдаемой $\hat{A}$. Поэтому результат последующего измерения этой наблюдаемой в любом случае не будет зависеть от параметра ξ. При любом другом способе проверки равенства (3) мы должны подвергнуть одну и ту же испытуемую систему двум измерениям: один раз с помощью прибора типа ξ, другой раз — типа ξ' $(\xi \neq \xi')$. Это два разных прибора, поэтому одновременно оба измерения мы выполнить не можем.

Пусть мы сначала производим измерение с помощью прибора типа ξ и получаем результат $A_\xi = \varphi_\xi(\hat{A})$. Если это измерение невоспроизводимое, то после него элементарное состояние φ испытуемой системы изменится неконтролируемым образом. Поэтому результат второго измерения (прибором типа ξ') в любом случае никак не будет связан с результатом первого измерения. Если первое измерение воспроизводимо, то после него элементарное состояние φ заменится на φ'. Так как после воспроизводимого измерения элементарное состояние становится стабильным на соответствующей наблюдаемой, то для состояния φ' должно выполняться соотношение $\varphi'_{\xi'}(\hat{A}) = \varphi_\xi(\hat{A})$ вне зависимости от того, выполняется или нет равенство (3). Таким образом, в любом случае равенство (3) мы проверить не сможем.

Конечно, приведенные рассуждения не гарантируют, что зависимость результатов измерения от параметра ξ существует. Они только демонстрируют возможность такой зависимости. Поэтому любые выводы, которые основываются на предположении о справедливости равенства (3), не имеют доказательной силы. Надо подчеркнуть, что классификация приборов по типам ξ — это классификация по характеру взаимодействия прибора с исследуемой системой. Поэтому она определяется не только свойствами прибора, но и исследуемой системой (множеством $\mathfrak{A}_+$, алгебрами $\mathfrak{Q}_\xi$).

Зависимость результата измерения от типа прибора можно рассматривать как реализацию и конкретизацию представлений Бора [19] о зависимости результата измерения от общего контекста эксперимента. Вместе с тем предлагаемый здесь вариант зависимости не противоречит ни принципу причинности, ни представлению о существовании локальной реальности. Однако локальная реальность — это не определенное значение каждой наблюдаемой для рассматриваемой физической системы, а некая причина, вызывающая определенную реакцию измерительного прибора определенного типа.

Измерительный прибор — это классическая система, и любое внешнее воздействие на него можно рассматривать как результат действия некоторого внешнего поля. В данном случае источником поля должна являться исследуемая система. Для прибора как классической системы несущественны микроскопические квантовые детали этого поля, важны только его классические характеристики. Поэтому в данном контексте это поле можно трактовать как некоторое эффективное классическое поле, характеристики которого определяются элементарным состоянием исследуемой системы. Именно это эффективное поле следует считать локальной реальностью, определяющей результат каждого индивидуального измерения.

Только в случае, если соответствующее элементарное состояние стабильно на некоторой наблюдаемой, можно говорить об определенном значении этой наблюдаемой. В классическом случае множество Ξ состоит только из одного элемента. Поэтому все измерительные приборы относятся к одному типу. Соответственно, все элементарные состояния стабильны на любой наблюдаемой, т. е. каждая наблюдаемая имеет определенное значение.

В измерении классическим прибором элементарное состояние квантовой системы не может быть зафиксировано однозначно. Действительно, так как приборы, предназначенные для измерения несовместимых наблюдаемых, несовместимы, то в одном эксперименте мы можем измерить наблюдаемые, принадлежащие одной алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$. В результате мы установим только значения функционала φ_ξ. В остальном элементарное состояние φ останется неопределенным. Повторное измерение с использованием другого типа прибора даст новую информацию, но неконтролируемым образом возмутит элементарное состояние, возникшее после первого измерения. Поэтому информация, полученная в первом измерении, станет бесполезной.

В связи с этим удобно принять следующее определение.

***Определение* 40.** Элементарные состояния φ назовем φ_ξ-эквивалентными, если они имеют одно и то же сужение φ_ξ на алгебру $\mathfrak{Q}_\xi$.

Таким образом, в квантовом измерении мы можем установить только класс эквивалентности, к которому принадлежит исследуемое физическое состояние. В воспроизводимом измерении наблюдаемых, принадлежащих алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$, легко узнать процедуру приготовления чистого состояния в стандартной квантовой механике. Далее это состояние будем называть квантовым состоянием и примем определение.

***Определение* 41.** Квантовым состоянием $\Psi_{\varphi\xi}$ назовем класс $\{\varphi\}_{\varphi\xi}$ φ_ξ-эквивалентных элементарных состояний, стабильных на алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$.

В действительности такое определение квантового состояния удобно только для систем, в которых нет тождественных частиц. Дело в том, что измерительный прибор не может установить, какая из тождественных частиц в него попала. Поэтому удобно несколько обобщить понятие эквивалентности. Будем говорить, что элементарное состояние φ слабо φ_ξ-эквивалентно элементарному состоянию φ', если сужение φ_ξ элементарного состояния φ на алгебру $\mathfrak{Q}_\xi$ совпадает с сужением $\varphi'_{\xi'}$ элементарного состояния φ' на алгебру $\mathfrak{Q}_{\xi'}$. Здесь предполагается, что алгебра $\mathfrak{Q}_{\xi'}$ получается из алгебры $\mathfrak{Q}_\xi$ в результате замены наблюдаемых одной из тождественных частиц на соответствующие наблюдаемые другой. Для систем с тождественными частицами в определении квантового состояния эквивалентность следует заменить на слабую эквивалентность. Далее будем считать, что если необходимо, то такая замена сделана.

Таким образом, мы, так же как Блохинцев [20–23], будем считать, что квантовое состояние является характеристикой не отдельного квантового объекта, а целого ансамбля таких объектов.

3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КВАНТОВЫЙ АНСАМБЛЬ

Большинство предсказаний квантовой теории носит вероятностный характер. Поэтому квантовая теория должна основываться на теории вероятностей. В настоящее время наиболее математически развитой является колмогоровская теория вероятностей [4]. Обычно считается, что для квантовых систем требуется специальная квантовая теория вероятностей. Здесь будет защищаться тезис о том, что и в квантовом случае вполне достаточно классической колмогоровской теории вероятностей, нужно только учесть особенность квантовых измерений [24].

В основе колмогоровской теории вероятностей (см., например, [4, 25]) лежит так называемое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Первая составляющая Ω — это множество (пространство) элементарных событий. Физический смысл элементарных событий специально не оговаривается, но считается, что они являются взаимоисключающими, и в каждом испытании реализуется одно и только одно элементарное событие. В нашем случае в качестве элементарного события будет выступать элементарное состояние φ.

Замечание. Квантовое состояние, очевидно, не может играть роль элементарного события, так как два неортогональных квантовых состояния не являются взаимоисключающими. Поэтому, действительно, оставаясь в рамках стандартной квантовой механики, нельзя использовать колмогоровскую теорию вероятностей. Аналогичным образом дело обстоит и с классической формальной логикой.

Помимо элементарного события вводится еще понятие «случайное событие», или просто «событие». Каждое событие F отождествляется с некоторым подмножеством множества Ω. Считается, что произошло событие F, если реализовалось одно из элементарных событий, принадлежащих этому подмножеству ($\varphi \in F$). Предполагается, что в каждом испытании мы можем установить, произошло событие или нет. От элементарных событий это не требуется.

Наборы подмножеств множества Ω (включающие само множество Ω и пустое множество $\emptyset$) наделяются структурой булевых алгебр. Соответственно, второй составляющей вероятностного пространства является некоторая булева σ-алгебра $\mathcal{F}$. Таким образом, вероятностное пространство оснащается структурой измеримого пространства.

Наконец, третья составляющая вероятностного пространства — вероятностная мера P. Это отображение множества $\mathcal{F}$ в множество действительных чисел (каждому $F \in \mathcal{F}$ ставится в соответствие число $P(F)$), удовлетворяющее условиям: а) $0 \leqslant P(F) \leqslant 1$ для всех $F \in \mathcal{F}$, $P(\Omega) = 1$; б) $P\left(\sum_j F_j\right) = \sum_j P(F_j)$ для любой счетной совокупности непересекающихся подмножеств $F_j \in \mathcal{F}$.

Обратим внимание, что вероятностная мера определена только для событий, входящих в алгебру $\mathcal{F}$. Для элементарных событий вероятность, вообще говоря, не определена.

Поясним последнее утверждение простым примером. Пусть пространство элементарных событий — это множество рациональных чисел, лежащих между нулем и единицей. Испытание — это угадывание одного из этих чисел, загаданного собеседником. Очевидно, что вероятность угадывания любого из чисел не может иметь никакого численного значения, отличного от нуля. Но нулю она также не может равняться. Действительно, вероятность того, что загаданное число лежит между нулем и единицей, равна единице. Множество рациональных чисел счетно. Поэтому согласно свойствам вероятностной меры единица должна была бы равняться счетной сумме нулей. Никакого противоречия не возникает, если в качестве $\mathcal{F}$ мы выберем множество всех интервалов (и их объединений) и сопоставим каждому интервалу вероятность, равную его длине.

Таким образом, измеримость — очень существенное свойство вероятностного пространства. Далее мы убедимся, что в квантовом случае роль измеримости еще более важная. Кроме того, свойство измеримости несет не только математическую, но и очень существенную физическую нагрузку.

Теперь обсудим особенности приложения основных принципов теории вероятностей к квантовым измерениям. Большинство квантовых измерений связано с нахождением вероятностных распределений тех или иных наблюдаемых величин. При использовании определенной измерительной аппаратуры мы можем получить такое распределение для некоторой совокупности совместимых наблюдаемых. С точки зрения теории вероятностей, выбирая определенную измерительную аппаратуру, мы выбираем определенную σ-алгебру $\mathcal{F}$.

Для большей наглядности дальнейшее обсуждение проведем на конкретном примере. Пусть наша изучаемая система — это частица, которая может двигаться в фиксированной плоскости. Пусть мы сначала хотим найти вероятностное распределение X-й координаты этой частицы. Для этого мы должны разбить плоскость движения на полосы, перпендикулярные оси X. Ширина полос должна быть согласована с чувствительностью используемого измерительного прибора. Эти полосы будут играть роль элементов F_i^X σ-алгебры $\mathcal{F}_X$. С помощью измерительного прибора мы сможем определить вероятность попадания частицы в определенную полосу. Аналогичный эксперимент можно провести для нахождения вероятностного распределения по оси Y. В этом случае полосы будем обозначать через F_j^Y, а σ-алгебру — через $\mathcal{F}_Y$.

Мы можем провести более детальное исследование и найти вероятностное распределение координат частиц по обеим осям одновременно. Для этого надо разбить плоскость движения на прямоугольники, получающиеся при пересечении различных полос: $F_{ij}^{XY} = F_i^X \cap F_j^Y$. Прямоугольники F_{ij}^{XY} будут элементами σ-алгебры $\mathcal{F}_{XY}$. Говорят, что алгебра $\mathcal{F}_{XY}$ порождена алгебрами $\mathcal{F}_X$ и $\mathcal{F}_Y$. Пока никакой разницы в классическом и квантовом рассмотрении нет.

Пусть теперь мы хотим узнать вероятностное распределение не только для координат, но и для импульсов. Если мы интересуемся вероятностными распределениями по координатам и отдельно по импульсам, то эксперимент можно организовать по предыдущей схеме. Только полосы придется проводить и в плоскости импульсов.

Однако ситуация коренным образом изменится, если мы захотим найти вероятностное распределение, совместное по X-й координате и K_x-й проекции импульса. Формально, чисто математически (см., например, [25]), мы можем построить σ-алгебру $\mathcal{F}_{XK_x}$, которая порождается алгебрами $\mathcal{F}_X$ и $\mathcal{F}_{K_x}$. Элементами такой алгебры будут прямоугольники (и всевозможные их объединения) в двумерной плоскости (XK_x) четырехмерного фазового пространства. В классическом случае мы можем организовать эксперимент для нахождения вероятности попадания частицы в такой прямоугольник. Однако в квантовом случае такой эксперимент принципиально невозможен, так как измерительные приборы, предназначенные для определения X-й координаты и K_x-й проекции импульса, несовместимы. Это значит, что такому прямоугольнику нельзя приписать никакой вероятностной меры, т. е. для события, заключающегося в попадании частицы в такой прямоугольник, вообще не существует понятия «вероятность».

Общий вывод из рассмотренного примера следует сформулировать следующим образом. Не всякая математически возможная (и допустимая в классическом случае) σ-алгебра допустима в качестве σ-алгебры вероятностного пространства в квантовом случае.

Таким образом, элементу измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ в эксперименте соответствует пара: исследуемый объект и определенный тип измерительной аппаратуры, позволяющий зафиксировать событие, соответствующее некоторому набору совместимых наблюдаемых величин, т. е. принадлежащих одной алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$. Поэтому σ-алгебра $\mathcal{F}$ также может быть проиндексирована параметром ξ: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi$.

Особенность квантового эксперимента требует внимательности при определении одного из основных понятий теории вероятностей — действительной случайной величины. Обычно действительная случайная величина определяется как отображение пространства Ω элементарных событий в расширенную действительную прямую $\mathcal{R} = [-\infty, +\infty]$. Однако такое определение не учитывает особенностей квантового эксперимента, в котором результат может зависеть от типа измерительного прибора. Поэтому мы примем более развернутое определение.

***Определение* 42.** Действительной случайной величиной называется отображение измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{F}_\xi)$ элементарных событий в расширенную действительную прямую.

В приложении к наблюдаемой $\hat{A}$ это будет выглядеть так:

$$\varphi \xrightarrow{\hat{A}} A_\xi(\varphi) \equiv \varphi_\xi(\hat{A}) \in \mathcal{R}.$$

Назовем квантовым ансамблем множество одинаковых (т. е. описываемых одним множеством $\mathfrak{A}_+$ наблюдаемых и фиксированным множеством $\{\mathfrak{Q}_\xi\}$ коммутативных алгебр $\mathfrak{Q}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$) физических систем, которые находятся в некотором квантовом состоянии. Смесь квантовых ансамблей, в которую каждый из этих ансамблей входит с кратностью C_i $\left(C_i \geqslant 0, \sum C_i < \infty\right)$, назовем смешанным квантовым ансамблем. Эксперимент свидетельствует в пользу следующего постулата.

Постулат 5. Квантовый (в общем случае — смешанный) ансамбль может быть оснащен структурой вероятностного пространства. В результате воспроизводимого измерения квантовый ансамбль переходит в квантовый ансамбль, вообще говоря, с другим вероятностным распределением наблюдаемых.

Рассмотрим ансамбль физических систем, которые находятся в квантовом состоянии $\Psi_{\varphi\eta}$ $(\eta \in \Xi)$. Соответственно, будем рассматривать класс эквивалентности $\{\varphi\}_{\varphi\eta}$ как пространство $\Omega(\varphi_\eta)$ элементарных событий φ. Пусть в эксперименте измеряется значение наблюдаемой $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$ и используется прибор типа ξ. Обозначим через $(\Omega(\varphi_\eta), \mathcal{F}_\xi)$ соответствующее измеримое пространство. Пусть P_ξ — вероятностная мера на этом пространстве, т. е. $P_\xi(F)$ — вероятность события $F \in \mathcal{F}_\xi$.

Будем считать, что в эксперименте реализуется событие F_A, если зарегистрированное значение наблюдаемой $\hat{A}$ не больше A. Вероятность этого события обозначим через $P_\xi(F_A) = P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{A}) \leqslant A)$. Зная вероятности $P_\xi(F)$, с помощью соответствующих суммирований и интегрирований мы можем найти вероятность $P_\xi(F_A)$; распределение $P_\xi(F_A)$ является маргинальным для вероятностей $P_\xi(F)$ (см., например, [26]).

Наблюдаемая $\hat{A}$ может принадлежать не только алгебре $\mathfrak{Q}_\xi$, но и другой максимальной алгебре $\mathfrak{Q}_{\xi'}$. Поэтому для определения вероятности события F_A мы можем использовать прибор типа ξ'. В этом случае для вероятности мы могли бы получить другое значение $P_{\xi'}(F_A)$. Однако опыт показывает, что вероятности не зависят от используемого измерительного прибора. Поэтому мы должны принять еще один постулат.

Постулат 6. Пусть наблюдаемая $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi \cap \mathfrak{Q}_{\xi'}$, тогда вероятность обнаружить событие F_A для системы, находящейся в квантовом состоянии $\Psi_{\varphi\eta}$, не зависит от типа используемого прибора, т. е. $P(\varphi : \varphi_\xi(\hat{A}) \leqslant A) = P(\varphi : \varphi_{\xi'}(\hat{A}) \leqslant A)$.

Поэтому несмотря на то, что элементарное состояние φ — это совокупность функционалов φ_ξ, для вероятности события F_A мы вправе использовать обозначение $P(\varphi : \varphi(\hat{A}) \leqslant A)$.

Введем еще обозначение

$$P_{\hat{A}}(d\varphi) = P(\varphi : \varphi(\hat{A}) \leqslant A + dA) - P(\varphi : \varphi(\hat{A}) \leqslant A)$$

и рассмотрим ансамбль квантовых систем, находящихся в квантовом состоянии $\Psi_{\varphi\eta}$. Согласно теории вероятностей (см., например, [25]) математическое ожидание наблюдаемой $\hat{A}$ в этом состоянии определяется формулой

$$\langle\hat{A}\rangle = \int\limits_{\varphi\in\Psi_{\varphi\eta}} P_{\hat{A}}(d\varphi)\, A(\varphi) \equiv \int\limits_{\varphi\in\Psi_{\varphi\eta}} P_{\hat{A}}(d\varphi)\, \varphi(\hat{A}). \tag{4}$$

С другой стороны, справедлива теорема Хинчина (см. закон больших чисел, например, в [25]).

Теорема. Пусть $A_i = \varphi_i(\hat{A})$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ \varphi_i \in \Psi_{\varphi\eta})$ — последовательность взаимно независимых случайно выбранных величин, имеющих одно и то же распределение вероятностей с конечным математическим ожиданием $\langle\hat{A}\rangle$. Тогда при $n \to \infty$ величина $(A_1 + \ldots + A_n)/n$ сходится по вероятности к $\langle\hat{A}\rangle$. Таким образом,

$$\Psi_{\varphi\eta}(\hat{A}) \equiv \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big[n^{-1}\Big(\varphi_1(\hat{A}) + \ldots + \varphi_n(\hat{A})\Big)\Big] = \langle\hat{A}\rangle. \tag{5}$$

Формула (5) определяет функционал (квантовое среднее) на множестве $\mathfrak{A}_+$. Этот функционал мы обозначили символом $\Psi\varphi\eta(\cdot)$, будем также называть его квантовым состоянием. Из формулы (5) и свойств функционалов $\varphi_i(\cdot)$ сразу же следует, что $\Psi\varphi\eta(\cdot)$ линеен на каждом подмножестве $\mathfrak{Q}_\xi$ совместимых наблюдаемых, т. е. сужение функционала $\Psi\varphi\eta(\cdot)$ на каждое подмножество $\mathfrak{Q}_\xi$ является линейным функционалом. Свойство линейности функционала $\Psi\varphi\eta(\cdot)$ можно распространить на все множество $\mathfrak{A}_+$. Однако предварительно надо оснастить множество $\mathfrak{A}_+$ структурой действительного линейного пространства.

Так как каждый элемент $\hat{A}$ множества $\mathfrak{A}_+$ принадлежит какому-то линейному подмножеству $\mathfrak{Q}_\xi$, то для него операция умножения на действительное число определена. С операцией сложения элементов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ дело обстоит сложнее, так как эти элементы могут принадлежать разным линейным подмножествам $\mathfrak{Q}_\xi$ и $\mathfrak{Q}_{\xi'}$. Однако вся совокупность квантовых экспериментов указывает на то, что при любых $\hat{A}$ и $\hat{B}$, принадлежащих $\mathfrak{A}_+$, существует такой элемент $\widehat{D} \in \mathfrak{A}_+$, что для каждого квантового состояния $\Psi\varphi\eta(\cdot)$ справедливо равенство

$$\Psi\varphi\eta(\hat{A}) + \Psi\varphi\eta(\hat{B}) = \Psi\varphi\eta(\widehat{D}).$$

Такой элемент $\widehat{D}$ мы можем, по определению, считать суммой элементов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, т. е. $\widehat{D} = \hat{A} + \hat{B}$. Имея в виду эти рассуждения, примем следующий постулат.

Постулат 7. Множество $\mathfrak{A}_+$ может быть оснащено структурой действительного линейного пространства, и функционалы $\Psi\varphi\eta(\cdot)$ линейны на этом пространстве.

Это значит, что

$$\Psi\varphi\eta(\hat{A}) + \Psi\varphi\eta(\hat{B}) = \Psi\varphi\eta(\hat{A} + \hat{B})$$

и в том случае, когда $\hat{A}$ и $\hat{B}$ принадлежат разным подмножествам $\mathfrak{Q}_\xi$ и $\mathfrak{Q}_{\xi'}$.

Множество $\mathfrak{A}_+$ можно оснастить структурой действительной алгебры. Для этого произведение элементов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ следует определить формулой

$$\hat{A} \circ \hat{B} = 1/2((\hat{A} + \hat{B})^2 - \hat{A}^2 - \hat{B}^2). \tag{6}$$

Это произведение очевидным образом коммутативно, но в общем случае неассоциативно (см. (О.3)), т. е. ассоциатор $\{\hat{A}, \hat{B}, \widehat{D}\} = (\hat{A} \circ \hat{B}) \circ \widehat{D} - \hat{A} \circ (\hat{B} \circ \widehat{D})$ не обязательно равен нулю. Можно показать (см. [6]), что для дистрибутивности (см. (О.2, б, в)) произведения $\hat{A} \circ \hat{B}$ необходимо и достаточно равенство нулю ассоциатора $\{\hat{A}, \hat{B}, \alpha\hat{I}\}$ для любых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ и любого действительного числа α. При выполнении этого условия действительная алгебра с произведением (6) называется действительной алгеброй Иордана [6, 27].

В принципе, квантовую теорию можно пытаться строить на основе этой алгебры. Однако на этом пути удалось достичь лишь отдельных успехов (см. [6]). Гораздо более успешным оказалось направление, основанное на комплексной ассоциативной алгебре, для которой алгебра Иордана в некотором смысле является действительной частью.

Все алгебры Иордана разделяются на два класса: специальные и исключительные. Специальная алгебра Иордана определяется следующим образом. Пусть имеется действительная или комплексная алгебра $\mathfrak{A}$ с «обычным» произведением $\hat{U}\hat{V}$ ($\hat{U} \in \mathfrak{A}, \hat{V} \in \mathfrak{A}, \hat{U}\hat{V} \in \mathfrak{A}$). Относительно этого произведения алгебра ассоциативна, но не обязательно коммутативна. В множестве $\mathfrak{A}$ можно ввести «симметризированное» произведение

$$\hat{U} \circ \hat{V} = 1/2(\hat{U}\hat{V} + \hat{V}\hat{U}). \tag{7}$$

Относительно такого произведения множество $\mathfrak{A}$ будет алгеброй Иордана. Любая алгебра Иордана, изоморфная такой алгебре (или ее подалгебре), называется специальной. В противном случае алгебра Иордана называется исключительной. Не всякая алгебра Иордана является специальной. Поэтому, чтобы алгебра Иордана была специальной, ее элементы должны удовлетворять некоторым тождествам, которые, в принципе, могли бы быть проверены в эксперименте. Однако в настоящий момент перечень этих тождеств не известен. С другой стороны, в любой из рассмотренных до сих пор квантовых моделей множество наблюдаемых может быть оснащено структурой специальной алгебры Иордана.

Мы останемся в рамках этой традиции и примем следующую гипотезу.

Гипотеза. Существует инволютивная, ассоциативная, в общем случае некоммутативная алгебра $\mathfrak{A}$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) для каждого элемента $\hat{U} \in \mathfrak{A}$ найдется эрмитов элемент $\hat{A}$, такой, что $\hat{U}^*\hat{U} = \hat{A}^2$;

б) если $\hat{U}^*\hat{U} = 0$, то $\hat{U} = 0$;

в) множество эрмитовых элементов алгебры $\mathfrak{A}$ совпадает с множеством $\mathfrak{A}_+$ наблюдаемых.

В дальнейшем элементы алгебры $\mathfrak{A}$ будем называть динамическими величинами.

Очевидно, что множество $\mathfrak{A}_+$ мы можем снабдить структурой алгебры Иордана, определив произведение его элементов с помощью формулы (7). Гипотеза означает, что иорданова алгебра наблюдаемых является специальной и действительной. Соответственно, динамические величины можно складывать и перемножать, используя обычные правила сложения и умножения (кроме коммутирования). Это кажется настолько очевидным, что почти никогда специально не оговаривается. Тем не менее соответствующие утверждения мы назвали гипотезой, а не постулатом потому, что мы не можем указать экспериментального способа проверки *необходимости* этих утверждений.

Надо подчеркнуть, что в стандартной квантовой механике утверждения гипотезы принимаются в гораздо более сильной форме. Там дополнительно предполагается, что наблюдаемые являются самосопряженными операторами в некотором гильбертовом пространстве. Это дополнительное предположение вряд ли можно считать самоочевидным.

Далее физическую систему будем считать заданной, если задана алгебра $\mathfrak{A}$ ее динамических величин. В силу первого постулата алгебры $\mathfrak{Q}_\xi$ совместимых наблюдаемых являются максимальными действительными коммутативными подалгебрами алгебры $\mathfrak{A}$, принадлежащими $\mathfrak{A}_+$. Отсюда, в свою очередь, следует, что совместимые наблюдаемые являются взаимно коммутирующими элементами алгебры $\mathfrak{A}$, а несовместимые наблюдаемые не коммутируют между собой.

Ранее упоминалось, что в квантовом случае множество Ξ подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi$ ($\xi \in \Xi$) имеет мощность континуума. Действительно, даже если алгебра $\mathfrak{A}$ — это алгебра с двумя некоммутирующими эрмитовыми образующими $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, то коммутативная алгебра $\mathfrak{Q}_\alpha$ с образующей $\hat{A}_\alpha = \hat{A}_1 \cos\alpha + \hat{A}_2 \sin\alpha$ будет алгеброй типа $\mathfrak{Q}_\xi$ при любом действительном α.

4. C^*-АЛГЕБРА И ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Любой элемент $\hat{U}$ алгебры $\mathfrak{A}$ однозначно представляется в виде $\hat{U} = \hat{A} + i\hat{B}$, где $\hat{A}, \hat{B} \in \mathfrak{A}_+$. Поэтому функционал $\Psi_{\varphi\eta}(\,\cdot\,)$ можно однозначно расширить до линейного функционала на алгебре $\mathfrak{A}$: $\Psi_{\varphi\eta}(\hat{U}) = \Psi_{\varphi\eta}(\hat{A}) + i\Psi_{\varphi\eta}(\hat{B})$.

Определим полунорму элемента $\hat{U}$ равенством

$$\|\hat{U}\|^2 = \sup_\xi \sup_{\varphi_\xi} \varphi_\xi(\hat{U}^*\hat{U}) = r(\hat{U}^*\hat{U}), \tag{8}$$

где $r(\hat{U}^*\hat{U})$ — спектральный радиус элемента $\hat{U}^*\hat{U}$ в алгебре $\mathfrak{A}$.

Такое определение допустимо. Во-первых, $\|\hat{U}\|^2 \geqslant 0$ благодаря свойству (У.7, в). Далее, в силу определения вероятностной меры для любого $\eta \in \Xi$ имеем

$$\Psi_{\varphi\eta}(\hat{U}^*\hat{U}) = \int\limits_{\varphi\in\{\varphi\}_{\varphi\eta}} P_{\hat{U}^*\hat{U}}(d\varphi)\,\varphi(\hat{U}^*\hat{U}) \leqslant \sup_\xi \sup_{\varphi_\xi} \varphi_\xi(\hat{U}^*\hat{U}) = r(\hat{U}^*\hat{U}). \tag{9}$$

Для $\eta \in \Xi$, такого, что $\hat{U}^*\hat{U} \in \mathfrak{Q}_\eta$, справедливо $\Psi_{\varphi\eta}(\hat{U}^*\hat{U}) = \varphi_\eta(\hat{U}^*\hat{U})$. Поэтому для такого η

$$\sup_{\varphi_\eta} \Psi_{\varphi\eta}(\hat{U}^*\hat{U}) = \sup_{\varphi_\eta} \varphi_\eta(\hat{U}^*\hat{U}) = r_\eta(\hat{U}^*\hat{U}), \tag{10}$$

где $r_\eta(\hat{U}^*\hat{U})$ — спектральный радиус в $\mathfrak{Q}_\eta$. Так как подалгебра $\mathfrak{Q}_\eta$ максимальна, то (см. (У.2)) $r_\eta(\hat{U}^*\hat{U}) = r(\hat{U}^*\hat{U})$. Отсюда, учитывая равенства (8),

(9) и (10), получаем

$$\|\hat{U}\|^2 = \sup_{\xi} \sup_{\varphi_\xi} \varphi_\xi(\hat{U}^*\hat{U}) = \sup_{\xi} \sup_{\varphi_\xi} \Psi_{\varphi\xi}(\hat{U}^*\hat{U}). \tag{11}$$

Так как $\Psi_{\varphi\xi}(\,\cdot\,)$ — линейный положительный функционал, то справедливо неравенство Коши–Буняковского–Шварца (см. (У.5, б)):

$$|\Psi_{\varphi\xi}(\hat{U}^*\hat{V})\Psi_{\varphi\xi}(\hat{V}^*\hat{U})| \leqslant \Psi_{\varphi\xi}(\hat{U}^*\hat{U})\Psi_{\varphi\xi}(\hat{V}^*\hat{V}). \tag{12}$$

Отсюда следует, что для $\|\hat{U}\|$ выполняются аксиомы полунормы элемента $\hat{U}$ (см., например, [6]):

$$\|\hat{U}+\hat{V}\| \leqslant \|\hat{U}\|+\|\hat{V}\|, \quad \|\lambda\hat{U}\| = |\lambda|\|\hat{U}\|, \quad \|\hat{U}^*\| = \|\hat{U}\|, \quad \|\hat{U}\hat{V}\| \leqslant \|\hat{U}\|\|\hat{V}\|.$$

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{J}$ элементов $\hat{U}$ алгебры $\mathfrak{A}$, для которых $\|\hat{U}\|^2 = 0$. Из неравенства (12) следует, что $\mathfrak{J}$ является двусторонним идеалом $\mathfrak{A}$. Поэтому можно образовать фактор-алгебру $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$. В алгебре $\mathfrak{A}'$ из $\|\hat{U}\|^2 = 0$ следует $\hat{U} = 0$. Поэтому в алгебре $\mathfrak{A}'$ равенство (8) определяет не полунорму, а норму. С другой стороны, можно убедиться, что алгебра $\mathfrak{A}'$ несет ту же физическую информацию, что и $\mathfrak{A}$.

Для этой цели рассмотрим две наблюдаемые $\hat{A}$ и $\hat{B}$, которые одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат каждой из подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi$. Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ удовлетворяют дополнительному условию $\|\hat{A} - \hat{B}\| = 0$. Тогда из равенства (8) следует

$$\varphi_\xi(\hat{A}) = \varphi_\xi(\hat{B}) \tag{13}$$

для всех $\mathfrak{Q}_\xi$, которые содержат эти наблюдаемые. Равенство (13) означает, что никакой эксперимент не может различить эти наблюдаемые. Поэтому с феноменологической точки зрения эти наблюдаемые следует отождествить. Математически эти наблюдаемые эквивалентны по идеалу $\mathfrak{J}$. При переходе от алгебры $\mathfrak{A}$ к алгебре $\mathfrak{A}'$ все эквивалентные наблюдаемые отождествляются математически. Чтобы сразу иметь дело с алгеброй типа $\mathfrak{A}'$, можно принять следующий постулат.

Постулат 8. Если $\sup\limits_{\xi} \sup\limits_{\varphi_\xi} |\varphi_\xi(\hat{A} - \hat{B})| = 0$, то $\hat{A} = \hat{B}$.

Постулат 8 носит технический характер. Вместе с тем с точки зрения феноменологии он не накладывает никаких дополнительных ограничений. Он только упрощает математическое описание физических систем. Далее будем считать, что требование постулата 8 удовлетворяется, и поэтому равенство (11) определяет норму элемента $\hat{U}$.

Из мультипликативных свойств функционала φ_ξ следует $\varphi_\xi([\hat{U}^*\hat{U}]^2) = [\varphi_\xi(\hat{U}^*\hat{U})]^2$. Это значит, что $\|\hat{U}^*\hat{U}\| = \|\hat{U}\|^2$. Поэтому если мы пополним алгебру $\mathfrak{A}$ по норме $\|\cdot\|$, то $\mathfrak{A}$ превратится в C^*-алгебру [15]. Таким образом, алгебра квантовых динамических величин может быть оснащена структурой C^*-алгебры. В стандартном алгебраическом подходе к квантовой теории это утверждение принимается в качестве исходной аксиомы. Математически это, конечно, очень удобно. Однако с феноменологической точки зрения необходимость такой аксиомы остается совершенно неясной.

В большинстве наших предыдущих построений центральное место занимало элементарное состояние $\varphi = [\varphi_\xi]$. Элементарное состояние обладает многими свойствами, которые обычно приписывают так называемым скрытым параметрам [28]. В стандартной квантовой механике со времен фон Неймана [1] прочно укоренилось мнение, что в квантовой механике скрытых параметров нет и быть не может. Поэтому необходимо убедиться, что элементарные состояния можно ввести непротиворечивым образом.

Задание физической системы предполагает задание алгебры $\mathfrak{A}$ динамических величин. Как мы только что убедились, эта алгебра должна иметь структуру C^*-алгебры. Задавая алгебру $\mathfrak{A}$, мы тем самым задаем множество ее максимальных коммутативных ассоциативных подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi$. Каждая из этих подалгебр является банаховой алгеброй.

Ясно, что для построения любого элементарного состояния $\varphi = [\varphi_\xi]$ необходимо и достаточно построить все его составляющие φ_ξ, а каждое φ_ξ — это характер подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$. Каждый функционал φ_ξ можно построить следующим образом. В подалгебре $\mathfrak{Q}_\xi$ произвольным образом выбираем систему $G(\mathfrak{Q}_\xi)$ независимых образующих. Имея в виду утверждение (У.8), каждому элементу множества $G(\mathfrak{Q}_\xi)$ ставим в соответствие одну из точек его спектра. Так мы определяем функционал φ_ξ на множестве $G(\mathfrak{Q}_\xi)$. По линейности и мультипликативности функционал φ_ξ однозначно расширяется на всю подалгебру $\mathfrak{Q}_\xi$. Перебирая для каждого элемента множества $G(\mathfrak{Q}_\xi)$ все точки его спектра, мы построим все функционалы φ_ξ. Для другого ξ функционалы φ_ξ строим по тому же рецепту. Эта процедура заведомо непротиворечива, если для разных ξ функционалы строятся независимо друг от друга. Если мы наложим условие (3), то процедура может оказаться, и в некоторых случаях действительно оказывается, противоречивой.

Однако всегда можно построить элементарное состояние φ, стабильное на всех наблюдаемых, принадлежащих любой одной подалгебре $\mathfrak{Q}_\xi$. Для этого достаточно начать построение функционала φ именно с этой подалгебры, используя только что описанную процедуру. На другой подалгебре $\mathfrak{Q}_{\xi'}$ функционал $\varphi_{\xi'}$ строим следующим образом. Пусть $\mathfrak{Q}_\xi \cap \mathfrak{Q}_{\xi'} = \mathfrak{Q}_{\xi\xi'}$ и $G(\mathfrak{Q}_{\xi\xi'})$ — независимые образующие подалгебры $\mathfrak{Q}_{\xi\xi'}$. Пусть $\widetilde{G}(\mathfrak{Q}_{\xi\xi'})$ — дополнение этих образующих до множества образующих подалгебры $\mathfrak{Q}_{\xi'}$. Если $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_{\xi\xi'}$, то полагаем $\varphi_{\xi'}(\hat{A}) = \varphi_\xi(\hat{A})$. Если $\hat{A} \in \widetilde{G}(\mathfrak{Q}_{\xi\xi'})$, то строим $\varphi_{\xi'}(\hat{A})$ как отображение элемента $\hat{A}$ в одну из точек его спектра. На остальные элементы подалгебры $\mathfrak{Q}_{\xi'}$ функционал $\varphi_{\xi'}$ продлевается согласно линейности и мультипликативности.

Таким образом, мы видим, что для элементарного состояния проблема существования отсутствует. Доказательство фон Неймана [1] невозможности существования скрытых параметров для элементарных состояний φ не проходит по следующей причине. Фон Нейман предполагал, что состояние описывается линейным функционалом на множестве наблюдаемых. Элементарное состояние φ можно рассматривать как некий функционал на множестве наблюдаемых. Однако этот функционал линеен только на подмножествах $\mathfrak{Q}_{\xi}$, кроме того, этот функционал многозначен.

В этом же доказательстве фон Нейман показал, что линейность функционала, описывающего состояние системы, несовместима с предположением о наличии причинности на микроскопическом уровне. Отсюда он сделал вывод, что причинность на микроуровне отсутствует, а на макроуровне появляется за счет усреднения по большому числу непричинных событий. Аналогичным образом Блохинцев [20,22,23] считал, что для квантовых систем причинность свойственна не отдельным квантовым объектам, а только ансамблю таких объектов. Это позволяет считать квантовые процессы, управляемые уравнением Шредингера, причинными. В предлагаемом подходе дилемму «причинность–линейность» предлагается решать прямо противоположным образом. На микроскопическом уровне причинность есть, а линейности состояния, описывающего индивидуальную квантовую систему, нет. Линейность квантового состояния возникает за счет усреднения по квантовому ансамблю.

Заметим, что возникновение свойства линейности при усреднении — это обычное явление в теории вероятностей. Поэтому принципы линейности и суперпозиции, которые в стандартной квантовой механике рассматриваются как краеугольные физические принципы, в действительности таковыми не являются. Эти свойства всего лишь математические артефакты, обязанные своим происхождением процедуре усреднения. В противоположность этому причинность — это действительно физический принцип, который в обход «официальному запрету» широко используется в физике. Именно элементарное состояние может претендовать на роль математического образа реальности, которая является физическим носителем причинности.

Упомянутое свойство суперпозиции обязано своим происхождением следующей замечательной особенности C^*-алгебры. Любая C^*-алгебра изометрически изоморфна подалгебре линейных ограниченных операторов в подходящем гильбертовом пространстве [15]. Это позволит нам в дальнейшем использовать привычный аппарат гильбертова пространства, в котором свойство суперпозиции возникает естественным образом.

Замечание. В стандартной квантовой механике обычно предполагается, что все самосопряженные ограниченные операторы в гильбертовом пространстве являются наблюдаемыми. Это предположение не выполняется в моделях с правилами суперотбора [29]. Алгебраический подход (в том числе и рассматриваемый в данной статье) обходится без такого предположения.

В алгебраическом подходе состояние определяется как положительный линейный функционал Ψ на множестве наблюдаемых, удовлетворяющий условию нормировки $\Psi(\hat{I}) = 1$. В стандартной квантовой механике состояние обычно задается либо с помощью вектора в гильбертовом пространстве, либо, в более общем случае, с помощью матрицы плотности. Однако не всякое интересное с физической точки зрения состояние может быть задано с помощью матрицы плотности (см. [6]). Поэтому алгебраическое определение является более общим. Часто таким образом определенное состояние называют алгебраическим. Так как $\varphi(\hat{I}) = 1$ (см. (У.7, б)), то определенный формулой (4) функционал $\Psi_{\varphi\eta}(\hat{A})$ удовлетворяет условию нормировки. Поэтому введенное в данной статье квантовое состояние является алгебраическим состоянием. Поскольку линейный положительный функционал, определенный на множестве наблюдаемых, однозначно расширяется на алгебру динамических величин, то в дальнейшем мы будем называть алгебраическим состоянием линейный положительный нормированный функционал, определенный на алгебре $\mathfrak{A}$.

***Определение* 43.** Алгебраическое состояние Ψ называется чистым, если равенство

$$\Psi = \lambda\Psi_1 + (1-\lambda)\Psi_2, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{14}$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — два состояния, возможно только в случае $\Psi_1 = \Psi_2$.

Нетрудно убедиться, что введенное нами в определении (О.41) квантовое состояние $\Psi_{\varphi\xi}$ является алгебраическим чистым состоянием. Действительно, предположим, что функционал $\Psi_{\varphi\xi}$ можно представить в виде (14). Сузим равенство (14) на подалгебру $\mathfrak{Q}_\xi$. На этой подалгебре, т. е. для всех $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$, справедливо $\varphi_\xi(\hat{A}) = \Psi_{\varphi\xi}(\hat{A})$. Но функционал $\varphi_\xi(\cdot)$ является характером подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$. Каждый характер коммутативной алгебры — это чистое состояние (см. [14]). Поэтому из равенства $\Psi_{\varphi\xi}(\hat{A}) = \lambda\Psi_1(\hat{A}) + (1-\lambda)\Psi_2(\hat{A})$ следует, что при $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$ справедливо $\Psi_1(\hat{A}) = \Psi_2(\hat{A}) = \Psi_{\varphi\xi}(\hat{A}) = \varphi_\xi(\hat{A})$ и, в частности,

$$\Psi_1([\hat{A} - \varphi_\xi(\hat{A})]^2) = \varphi_\xi([\hat{A} - \varphi_\xi(\hat{A})]^2) = 0.$$

Отсюда вытекает, что при $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$

$$\int\limits_{\varphi \in \Psi_1} P_{\hat{A}}(d\varphi)\, \varphi([\hat{A} - \varphi_\xi(\hat{A})]^2) \equiv \Psi_1([\hat{A} - \varphi_\xi(\hat{A})]^2) = 0.$$

Поэтому если $\varphi \in \Psi_1$, то почти наверное $\varphi(\hat{A}) = \varphi_\xi(\hat{A})$ при $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$. Это значит, что почти наверное элементарные состояния $\varphi \in \Psi_1$ образуют класс эквивалентности $\{\varphi\}_{\varphi\xi}$. Отсюда следует, что

$$\Psi_1(\hat{A}) = \int\limits_{\varphi\in\Psi_1} P_{\hat{A}}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}) = \int\limits_{\varphi\in\Psi_{\varphi\xi}} P_{\hat{A}}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}) = \Psi_{\varphi\xi}(\hat{A})$$

при всех $\hat{A}$. Аналогично для $\Psi_2(\hat{A})$, т. е. $\Psi_1(\hat{A}) = \Psi_2(\hat{A})$.

Процедурой, которая реализует связь C^*-алгебры с гильбертовым пространством, является так называемая каноническая конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) (см., например, [6, 13]). Вкратце она состоит в следующем.

Пусть имеется некоторая C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ и линейный положительный функционал Ψ_0 на этой алгебре. Будем считать два элемента $\hat{U}, \hat{U}' \in \mathfrak{A}$ эквивалентными, если для любого $\hat{W} \in \mathfrak{A}$ справедливо следующее равенство: $\Psi_0(\hat{W}^*(\hat{U} - \hat{U}')) = 0$. Обозначим через $\Phi(\hat{U})$ класс эквивалентности элемента $\hat{U}$ и рассмотрим множество $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ всех классов эквивалентности в $\mathfrak{A}$. Превратим множество $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ в линейное пространство, положив $a\Phi(\hat{U}) + b\Phi(\hat{V}) = \Phi(a\hat{U}+b\hat{V})$. Определим в $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ скалярное произведение формулой

$$(\Phi(\hat{U}), \Phi(\hat{V})) = \Psi_0(\hat{U}^*\hat{V}). \tag{15}$$

Это скалярное произведение порождает в $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ норму $\|\Phi(\hat{U})\| = [\Psi_0(\hat{U}^*\hat{U})]^{1/2}$. Пополнение по этой норме превращает $\mathfrak{A}(\Psi_0)$ в гильбертово пространство. Каждый элемент $\hat{V}$ алгебры $\mathfrak{A}$ однозначно представляется в этом пространстве линейным оператором $\Pi(\hat{V})$, действующим по правилу

$$\Pi(\hat{V})\Phi(\hat{U}) = \Phi(\hat{V}\hat{U}). \tag{16}$$

Таким образом, конструкция ГНС позволяет построить представление любой C^*-алгебры. Напомним, какие бывают представления.

Представление может быть точным и неточным. В точном представлении разным элементам алгебры ставятся в соответствие разные операторы в гильбертовом пространстве.

***Определение* 44.** Представление $\hat{V} \to \Pi(\hat{V})$ называется точным, если из $\Pi(\hat{V}) = 0$ следует $\hat{V} = 0$.

Представление может быть нулевым.

***Определение* 45.** Представление $\hat{V} \to \Pi(\hat{V})$ называется нулевым, если $\Pi(\hat{V}) = 0$ при любом $\hat{V}$.

***Определение* 46.** Представление $\hat{V} \to \Pi(\hat{V})$ является прямой ортогональной суммой $\Pi(\hat{V}) = \Pi_1(\hat{V}) \oplus \Pi_2(\hat{V})$ двух (или большего числа) представлений, если операторы $\Pi(\hat{V})$ действуют в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ по правилу $\Pi(\hat{V})\Phi = \Pi_1(\hat{V})\Phi_1 + \Pi_2(\hat{V})\Phi_2$. Здесь $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$,

$\Phi_1 \in \mathfrak{H}_1$, $\Phi_2 \in \mathfrak{H}_2$, а $\Pi_1(\hat{V})$ и $\Pi_2(\hat{V})$ — операторы представления в пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно.

***Определение* 47.** Представление $\hat{V} \to \Pi(\hat{V})$ называется вырожденным, если оно может быть представлено в виде прямой ортогональной суммы представлений, среди которых хотя бы одно является нулевым.

***Определение* 48.** Представление $\hat{V} \to \Pi(\hat{V})$ называется неприводимым, если его нельзя представить в виде прямой ортогональной суммы двух других представлений.

***Определение* 49.** Представление $\hat{V} \to \Pi(\hat{V})$, действующее в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется циклическим, если в $\mathfrak{H}$ существует вектор Φ (называемый циклическим), такой, что множество векторов $\Pi(\hat{V})\Phi$ всюду плотно в $\mathfrak{H}$.

Это эквивалентно тому, что с помощью конструкции $\Pi(\hat{V})\Phi$ можно построить базис в $\mathfrak{H}$.

Очевидно, что представление, построенное с помощью конструкции ГНС, является циклическим и невырожденным. Можно показать, что это представление неприводимо в том и только в том случае, если состояние Ψ_0 чистое. В общем случае это представление не является точным. Однако существует так называемое универсальное представление $\hat{V} \to \Pi_u(\hat{V})$. Это представление является прямой суммой $\Pi_u(\hat{V}) = \oplus_i \Pi_i(\hat{V})$ представлений. Каждое из представлений $\hat{V} \to \Pi_i(\hat{V})$ построено по конструкции ГНС с состоянием Ψ_i. Суммирование ведется по всем алгебраическим состояниям Ψ_i.

Любое невырожденное представление C^*-алгебры изоморфно некоторому подпредставлению универсального представления. Универсальное представление является точным. Это значит, что алгебра элементов $\hat{V}$ изоморфна алгебре операторов $\Pi_u(\hat{V})$. Иными словами, C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторой подалгебре ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_u$. Для установления какого-либо алгебраического соотношения между элементами алгебры $\mathfrak{A}$ достаточно установить соответствующие соотношения между операторами, реализующими ее любое точное представление. Наличие универсального представления гарантирует, что, по крайней мере, одно такое представление существует.

Ранее уже говорилось, что введенное в данной статье квантовое состояние является чистым алгебраическим состоянием. Теперь покажем, как могут быть построены функционалы, которые обладают нужными свойствами. Сначала рассмотрим случай, когда коммутативная алгебра $\mathfrak{Q}_\xi$, определяющая квантовое состояние, содержит одномерный проектор $\hat{p}_0$. Нагляднее всего одномерный проектор можно определить как такой элемент алгебры, которому в любом точном представлении соответствует оператор проектирования на одномерное гильбертово подпространство.

Замечание. В стандартной квантовой механике обычно считается, что любой ограниченный самосопряженный оператор соответствует некоторой наблюдаемой. В этом случае любая максимальная коммутативная подалгебра содержит одномерные проекторы. Наоборот, любой одномерный проектор принадлежит какой-нибудь коммутативной подалгебре. В такой ситуации рассматриваемый случай является общим.

Итак, пусть $\hat{p}_0 \in \mathfrak{Q}_\xi$. Рассмотрим какое-нибудь точное представление алгебры $\mathfrak{A}$. В гильбертовом пространстве этого представления существует вектор $|\Phi_0\rangle$, такой, что $\hat{p}_0|\Phi_0\rangle = |\Phi_0\rangle$, $\langle\Phi_0|\Phi_0\rangle = 1$, $\hat{p}_0 = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|$. Рассмотрим комбинацию $\hat{p}_0\hat{B}\hat{p}_0 = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|\hat{B}|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0| \equiv \vartheta(\hat{B})|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|$, т. е.

$$\hat{p}_0\hat{B}\hat{p}_0 = \vartheta(\hat{B})\hat{p}_0 \tag{17}$$

для любого $\hat{B} \in \mathfrak{A}$.

Соотношение (17) — это соотношение между элементами алгебры $\mathfrak{A}$. Поэтому оно определяется только структурой алгебры $\mathfrak{A}$ и не зависит от ее конкретного представления. В частности, от этого представления не зависит функционал $\vartheta(\hat{B})$. Легко убедиться, что $\vartheta(\hat{B})$ является алгебраическим состоянием на алгебре $\mathfrak{A}$. Линейность этого функционала следует из соотношения

$$\vartheta(\hat{B} + \widehat{D})\hat{p}_0 = \hat{p}_0(\hat{B} + \widehat{D})\hat{p}_0 = [\vartheta(\hat{B}) + \vartheta(\widehat{D})]\hat{p}_0.$$

Положительность следует из соотношения $\hat{p}_0\hat{B}^*\hat{B}\hat{p}_0 = \vartheta(\hat{B}^*\hat{B})\hat{p}_0$. Так как операторы $\hat{p}_0\hat{B}^*\hat{B}\hat{p}_0$ и $\hat{p}_0$ положительны, то $\vartheta(\hat{B}^*\hat{B}) \geqslant 0$. Наконец, нормировка следует из соотношения $\vartheta(\hat{I})\hat{p}_0 = \hat{p}_0\hat{I}\hat{p}_0 = \hat{p}_0$. Кроме того, сужение функционала $\vartheta(\cdot)$ на подалгебру $\mathfrak{Q}_\xi$ является характером этой подалгебры. Действительно, пусть $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\xi$ и $\hat{B} \in \mathfrak{Q}_\xi$, тогда

$$\vartheta(\hat{A}\hat{B})\hat{p}_0 = \hat{p}_0\hat{A}\hat{B}\hat{p}_0 = \hat{p}_0\hat{A}\hat{p}_0\hat{p}_0\hat{B}\hat{p}_0 = \vartheta(\hat{A})\vartheta(\hat{B})\hat{p}_0.$$

Таким образом, функционал $\vartheta(\cdot)$ обладает свойством, которого требует постулат 7 от квантового среднего. Кроме того, $\vartheta(\cdot)$ положителен и удовлетворяет условию нормировки. Это как раз те условия, которые должны выполняться для функционала, описывающего квантовое состояние. Равенство (17) чисто алгебраическое. Поэтому значение функционала $\vartheta(\hat{B})$ зависит только от $\hat{p}_0$ (квантового состояния) и от $\hat{B}$ как элемента алгебры $\mathfrak{A}$, но не от какой-нибудь частной коммутативной подалгебры ($\hat{B}$ может принадлежать нескольким таким подалгебрам). Это значит, что функционал $\vartheta(\cdot)$ удовлетворяет постулату 6.

Покажем теперь, что справедливо обратное утверждение. Если квантовому состоянию Ψ^0_ξ, такому, что $\varphi_\xi(\hat{p}_0) = 1$, соответствует функционал $\Psi^0_\xi(\cdot)$, то $\Psi^0_\xi(\cdot) = \vartheta(\cdot)$. Действительно, из равенства (4) следует

$$\Psi^0_\xi(\hat{p}_0) = \Psi^0_\xi(\hat{I}) = 1. \tag{18}$$

Из неравенства Коши–Буняковского–Шварца (см. формулу (12)) получаем

$$\left|\Psi_\xi^0\left(\hat{B}(\hat{I}-\hat{p}_0)\right)\right|^2 \leqslant \Psi_\xi^0(B^*\hat{B})\Psi_\xi^0(\hat{I}-\hat{p}_0).$$

Откуда, с учетом равенства (18), имеем

$$\Psi_\xi^0(\hat{B}) = \Psi_\xi^0(\hat{B}\hat{p}_0) = \Psi_\xi^0(\hat{p}_0\hat{B}). \tag{19}$$

Произведя в (19) замену $\hat{B} \to (\hat{I}-\hat{p}_0)\hat{B}$, получим

$$\Psi_\xi^0(\hat{B}) = \Psi_\xi^0(\hat{p}_0\hat{B}\hat{p}_0). \tag{20}$$

Воспользовавшись в правой части (20) формулой (17), приходим к равенству

$$\Psi_\xi^0(\hat{B}) = \Psi_\xi^0(\vartheta(\hat{B})\hat{p}_0) = \vartheta(\hat{B}). \tag{21}$$

Рассмотрим теперь ГНС-конструкцию, в которой в качестве функционала, порождающего представление, фигурирует $\Psi_\xi^0(\hat{B})$. Пусть $\Phi_0(\hat{I})$ — класс эквивалентности элемента $\hat{I}$, тогда согласно равенствам (15) и (16) имеем

$$\left(\Phi_0(\hat{I}), \Pi(\hat{B})\Phi_0(\hat{I})\right) = \Psi_\xi^0(\hat{B}) \tag{22}$$

для любого $\hat{B} \in \mathfrak{A}$.

Согласно равенствам (4) и (5) функционал $\Psi_\xi^0(\hat{B})$ описывает среднее значение наблюдаемой $\hat{B}$ в квантовом состоянии Ψ_ξ^0. Равенство (22) говорит о том, что это среднее значение равняется математическому ожиданию оператора $\Pi(\hat{B})$ в состоянии, описываемом вектором $\Phi_0(\hat{I})$ гильбертова пространства. Это позволяет в предлагаемом подходе для вычисления квантовых средних в полной мере использовать математический аппарат стандартной квантовой механики.

Вместе с тем в этом пункте имеется существенное отличие предлагаемого подхода от стандартной квантовой механики. В последней соотношения типа (22) постулируются (постулат Борна [30]). Этот постулат *достаточен* для квантово-механических расчетов, однако его *необходимость* не ясна. В противоположность этому в нашем случае равенство (22) является следствием феноменологически необходимых постулатов.

Перейдем теперь к случаю, когда подалгебра $\mathfrak{Q}_\xi$ не содержит одномерных проекторов. В этой ситуации следует рассмотреть точное представление алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство этого представления, а $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ — множество всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$. Можно считать, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{Q}_\xi$ являются подалгебрами алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Пусть $\mathfrak{Q}'_\xi$ — максимальная действительная коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, такая, что $\mathfrak{Q}'_\xi \supset \mathfrak{Q}_\xi$. Рассмотрим множество всех проекторов, принадлежащих $\mathfrak{Q}'_\xi$. Эти проекторы являются взаимно коммутирующими самосопряженными операторами в $\mathfrak{H}$ с дискретными спектрами. В пространстве $\mathfrak{H}$ существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этих операторов. Пусть $\{\hat{p}\}$ — множество проекторов на такие базисные векторы. Все эти проекторы одномерны, они принадлежат $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, но в рассматриваемом случае не принадлежат $\mathfrak{Q}_\xi$. Каждый из проекторов $\hat{p}_i \in \{\hat{p}\}$ определяет линейный функционал $\vartheta_i(\cdot)$ на $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$: $\hat{p}_i\hat{A}\hat{p}_i = \vartheta_i(\hat{A})\hat{p}_i$. Сужение этого функционала на алгебру $\mathfrak{A}$ обладает всеми свойствами, необходимыми для описания соответствующего чистого квантового состояния.

5. ИЛЛЮСТРАЦИИ

В качестве иллюстраций общих рассуждений рассмотрим три простых примера.

Первый пример — это двухуровневая квантовая система, наблюдаемые которой описываются эрмитовыми матрицами 2×2. В этом случае в качестве алгебры $\mathfrak{A}$ динамических величин можно рассматривать множества всех матриц следующего вида:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

в которых алгебраические операции совпадают с соответствующими матричными операциями.

Для такой системы не составляет большого труда построить все элементарные состояния. Пусть $\hat{A}$ — эрмитова матрица, тогда $a^* = a$, $d^* = d$, $c = b^*$. Любая такая матрица может быть представлена в виде

$$\hat{A} = r_0\hat{I} + r\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi}). \tag{23}$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}$ — единичный трехмерный вектор; τ_i — матрицы Паули, $\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi}) = (\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\xi})$. Чтобы формула (23) была справедливой, следует положить

$$\begin{gathered} r = \big((a-d)^2/4 + b\,b^*\big)^{1/2}, \quad r_0 = (a+d)/2, \\ \xi_1 = (b+b^*)/(2r), \quad \xi_2 = (b-b^*)/(2ir), \quad \xi_3 = (a-d)/(2r). \end{gathered} \tag{24}$$

Очевидно, что $\hat{\tau}(-\boldsymbol{\xi}) = -\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi})$. При $\boldsymbol{\xi}' \neq \pm\boldsymbol{\xi}$ коммутатор матриц $\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ и $\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi}')$ отличен от нуля. Поэтому каждая (с точностью до знака) матрица $\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ является образующей для действительной максимальной коммутативной подалгебры $\mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\xi}}$. Так как $\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi})\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{I}$, то спектр элемента $\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ состоит из двух точек: ± 1.

Пусть $\varphi^\alpha = [\varphi^\alpha_{\boldsymbol{\xi}}]$ — элементарное состояние. Здесь $\varphi^\alpha_{\boldsymbol{\xi}}$ — характер подалгебры $\mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\xi}}$, индекс α отличает одно элементарное состояние от другого.

Рассмотрим функцию $f^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$, такую, что $f^{\alpha}(-\boldsymbol{\xi}) = -f^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$ и для каждого $\boldsymbol{\xi}$ значение функции равно либо $+1$, либо -1, индекс α отличает одну функцию от другой. Тогда, очевидно, мы можем положить $\varphi^{\alpha}_{\boldsymbol{\xi}}(\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi})) = f^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$. Учитывая, что $\hat{\tau}(\boldsymbol{\xi})$ является образующей подалгебры $\mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\xi}}$, получаем

$$\varphi^{\alpha}_{\boldsymbol{\xi}}(\hat{A}) = r_0(\hat{A}) + r(\hat{A}) f^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$$

для $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\xi}}$.

Отметим, что для данной квантовой системы каждая наблюдаемая $\hat{A}$ (не кратная $\hat{I}$) принадлежит одной и только одной максимальной подалгебре $\mathfrak{Q}_{\boldsymbol{\xi}}$. В общем случае это, конечно, не так. Воспользовавшись указанной особенностью рассматриваемой системы, мы можем представить элементарное состояние в виде единого функционала, определенного на всем множестве $\mathfrak{A}_{+}$:

$$\varphi^{\alpha}(\hat{A}) = r_0(\hat{A}) + r(\hat{A}) f^{\alpha}(\boldsymbol{\xi}(\hat{A})), \tag{25}$$

для любой наблюдаемой $\hat{A}$. Здесь не только r и r_0, но и $\boldsymbol{\xi}$ следует рассматривать как функции $\hat{A}$ (см. формулу (24)). Этот функционал очевидным образом расширяется на всю алгебру $\mathfrak{A}$. Данный пример является дополнительным свидетельством того, что доказательство фон Неймана несуществования скрытых параметров нельзя распространять на элементарные состояния. Обратим внимание, что функционал $\varphi^{\alpha}(\hat{A})$, определяемый формулой (25), нелинеен. В общем случае элементарное состояние формально тоже можно представить в виде нелинейного функционала, определенного на всей алгебре $\mathfrak{A}$. Однако этот функционал, вообще говоря, будет неоднозначным, так как одна и та же наблюдаемая $\hat{A}$ может одновременно принадлежать нескольким максимальным коммутативным подалгебрам $\mathfrak{Q}_{\xi}$.

Вернемся к рассмотрению двухуровневой системы. Гамильтониан этой системы можно представить в виде

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{bmatrix},$$

а проектор на основное состояние — в виде

$$\hat{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\hat{p}_0 \hat{H} \hat{p}_0 = -E_0 \hat{p}_0$, $\hat{p}_0 \Psi_0(\hat{A}) = \hat{p}_0 \hat{A} \hat{p}_0 = \hat{p}_0 d(\hat{A})$. Поэтому основное квантовое состояние описывается линейным функционалом $\Psi_0(\hat{A}) = d(\hat{A})$. С другой стороны, основное квантовое состояние является классом эквивалентности элементарных состояний, определяемых условием $\varphi^{\alpha=0}(\hat{p}_0) = 1$. Из этого условия получаем

$$f^0(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1) = -1. \tag{26}$$

Таким образом, основное состояние — это множество элементарных состояний (25), в которых функции f^0 удовлетворяют условию (26).

Представляет интерес посмотреть, как для данной системы выглядит свойство эргодичности. Будем считать, что временная эволюция наблюдаемых обычным образом определяется унитарным автоморфизмом

$$\hat{A} \xrightarrow{t} \hat{A}(t) = \exp(-i\hat{H}t)\hat{A}\,\exp(i\hat{H}t),$$

и рассмотрим наблюдаемую $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dt\,\hat{A}(t).$$

Предел и интеграл будем понимать в смысле слабой топологии (см. (О.33)). Для $\hat{H}$ справедливо спектральное разложение $\hat{H} = E_0\hat{p}_1 - E_0\hat{p}_0$, где $\hat{p}_1 = \hat{I} - \hat{p}_0$. Поэтому наблюдаемую $\tilde{A}$ можно представить в виде

$$\tilde{A} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dt\,\left[\hat{p}_0\hat{A}\hat{p}_0 + \hat{p}_1\hat{A}\hat{p}_1 + \hat{p}_0\hat{A}\hat{p}_1\,\mathrm{e}^{2iE_0t} + \hat{p}_1\hat{A}\hat{p}_0\,\mathrm{e}^{-2iE_0t}\right] = \\ = \hat{p}_0\hat{A}\hat{p}_0 + \hat{p}_1\hat{A}\hat{p}_1.$$

Пусть φ^0 — некоторое элементарное состояние, принадлежащее основному квантовому состоянию, тогда

$$\varphi^0(\hat{p}_1) = \varphi^0(\hat{I} - \hat{p}_0) = 0.$$

Так как $[\hat{p}_0\hat{A}\hat{p}_0, \hat{p}_1\hat{A}\hat{p}_1] = 0$, то

$$\varphi^0(\tilde{A}) = \varphi^0(\hat{p}_0\hat{A}\hat{p}_0) + \varphi^0(\hat{p}_1\hat{A}\hat{p}_1) = \Psi_0(\hat{A}) + \varphi^0(\hat{p}_1)\varphi^0(\hat{p}_1\hat{A}\hat{p}_1).$$

Отсюда получаем

$$\varphi^0(\tilde{A}) = \Psi_0(\hat{A}).$$

Таким образом, значение наблюдаемой $\hat{A}$, усредненной по ансамблю, описываемому основным квантовым состоянием, равно значению этой наблюдаемой, усредненной по времени, в любом элементарном состоянии, принадлежащем основному квантовому состоянию.

Второй пример — одномерный гармонический осциллятор. Будем интересоваться функциями Грина для этой системы. Конечно, с помощью ГНС-конструкции можно перейти к стандартной схеме, использующей гильбертово пространство. Однако можно предложить и более непосредственный с точки зрения развиваемого здесь подхода метод.

Итак, будем считать, что гармонический осциллятор — это физическая система, описываемая алгеброй динамических величин $\mathfrak{A}$. Это алгебра с двумя некоммутирующими эрмитовыми образующими $\hat{X}$ и $\hat{K}$, удовлетворяющими перестановочному соотношению

$$[\hat{X}, \hat{K}] = i.$$

Мы используем естественную систему единиц, в которой $\hbar = m = 1$. Временная эволюция в алгебре $\mathfrak{A}$ управляется гамильтонианом $\hat{H} = 1/2(\hat{K}^2 + \omega^2 \hat{X}^2)$. Элементы $\hat{X}$, $\hat{K}$ и $\hat{H}$ не ограниченны, поэтому не принадлежат C^*-алгебре. Однако здесь можно использовать стандартную в алгебраическом подходе процедуру. Следует считать, что эти элементы задаются своими спектральными разложениями по проекторам. Эти проекторы, с одной стороны, принадлежат C^*-алгебре, а с другой — определяют представление этих элементов как линейных операторов в гильбертовом пространстве. Элементы, допускающие такую процедуру, называются присоединенными к C^*-алгебре. Таким образом, в данном случае $\mathfrak{A}$-алгебру следует считать C^*-алгеброй, дополненной присоединенными элементами.

От эрмитовых элементов $\hat{X}$ и $\hat{K}$ удобно перейти к элементам

$$\hat{a}^- = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{X} + i\hat{K}), \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{X} - i\hat{K})$$

с перестановочным соотношением

$$[\hat{a}^-, \hat{a}^+] = 1 \tag{27}$$

и простой временной зависимостью

$$\hat{a}^-(t) = \hat{a}^- \exp(-i\omega t), \qquad \hat{a}^+(t) = \hat{a}^+ \exp(+i\omega t).$$

Вычислим производящий функционал для функций Грина. В стандартной квантовой механике n-временная функция Грина определяется формулой

$$G(t_1, \ldots, t_n) = \langle 0|T(\hat{X}(t_1) \cdots \hat{X}(t_n))|0\rangle,$$

где T — оператор хронологического упорядочивания; $|0\rangle$ — квантовое основное состояние.

Согласно формулам (17) и (21) в предлагаемом подходе функция Грина будет определяться формулой

$$\hat{p}_0 T(\hat{X}(t_1) \cdots \hat{X}(t_n))\hat{p}_0 = G(t_1, \ldots, t_n)\hat{p}_0, \tag{28}$$

где $\hat{p}_0$ — спектральный проектор $\hat{H}$, соответствующий минимальному значению энергии.

Легко убедиться, что $\hat{p}_0$ можно представить в виде

$$\hat{p}_0 = \lim_{r\to\infty} \exp(-r\hat{a}^+\hat{a}^-). \tag{29}$$

Как упоминалось ранее, предел следует понимать в смысле слабой топологии C^*-алгебры.

Сначала докажем вспомогательное утверждение:

$$\begin{gathered}\hat{E} = \lim_{r_1,r_2\to\infty} \exp(-r_1\hat{a}^+\hat{a}^-)(\hat{a}^+)^k(\hat{a}^-)^l \exp(-r_2\hat{a}^+\hat{a}^-) = 0,\\ k,l \geqslant 0, \quad k+l>0.\end{gathered} \tag{30}$$

Пусть Ψ — ограниченный положительный линейный функционал. Тогда

$$\Psi(\hat{E}) = \lim_{r_1,r_2\to\infty} \exp(-r_1k - r_2l)\Psi((\hat{a}^+)^k\times \\ \times \exp(-r_1\hat{a}^+\hat{a}^-)\exp(-r_2\hat{a}^+\hat{a}^-)(\hat{a}^-)^l).$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функционала Ψ и перестановочным соотношением (27). Далее, учитывая, что $\|\exp(-r\hat{a}^+\hat{a}^-)\| \leqslant 1$, имеем

$$|\Psi(\hat{E})| \leqslant \lim_{r_1,r_2\to\infty} \exp(-r_1k - r_2l)|\Psi((\hat{a}^+)^k \exp(-2r_1\hat{a}^+\hat{a}^-)(\hat{a}^-)^k)|^{1/2}\times \\ \times|\Psi((\hat{a}^+)^l \exp(-2r_2\hat{a}^+\hat{a}^-)(\hat{a}^-)^l)|^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \lim_{r_1,r_2\to\infty} \exp(-r_1k - r_2l)|\Psi((\hat{a}^+)^k(\hat{a}^-)^k)|^{1/2}|\Psi((\hat{a}^+)^l(\hat{a}^-)^l)|^{1/2} = 0.$$

Это доказывает равенство (30).

Теперь убедимся в справедливости (29). В терминах элементов $\hat{a}^+$, $\hat{a}^-$ гамильтониан $\hat{H}$ выглядит так: $\hat{H} = \omega(\hat{a}^+\hat{a}^- + 1/2)$. Согласно (30)

$$\lim_{r_1,r_2\to\infty} \exp(-r_1\hat{a}^+\hat{a}^-)\hat{H}\exp(-r_2\hat{a}^+\hat{a}^-) = \frac{\omega}{2}\lim_{r_1,r_2\to\infty} \exp(-(r_1+r_2)\hat{a}^+\hat{a}^-).$$

Это доказывает равенство (29).

Из формулы (28) следует

$$G(t_1,\ldots,t_n)\hat{p}_0 = \\ = \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n}{\delta j(t_1)\cdots\delta j(t_n)}\hat{p}_0 T\exp\left(i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, j(t)\hat{X}(t)\right)\hat{p}_0\Bigg|_{j=0}. \tag{31}$$

По теореме Вика (см. [31])

$$
\begin{aligned}
&T\exp\left(i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, j(t)\hat{X}(t)\right) = \\
&= \exp\left(\frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{\delta}{\delta\hat{X}(t_1)} D^c(t_1-t_2)\frac{\delta}{\delta\hat{X}(t_2)}\right) : \exp\left(i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt j(t)\hat{X}(t)\right) : .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Здесь : : — операция нормального упорядочивания и

$$
D^c(t_1-t_2) = \frac{2}{\pi}\int dE\, \exp\left(-i(t_1-t_2)E\right)\frac{1}{\omega^2-E^2-i0}.
$$

Выполняя варьирование по $\hat{X}$ в правой части (32) и учитывая (30), получаем равенство

$$
\begin{aligned}
&\hat{p}_0 T\exp\left(i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, j(t)\hat{X}(t)\right)\hat{p}_0 = \\
&\qquad = \exp\left(-\frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2\, j(t_1)D^c(t_1-t_2)j(t_2)\right)\times \\
&\qquad\qquad \times\, \hat{p}_0 : \exp\left(i\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, j(t)\hat{X}(t)\right) : \hat{p}_0 = \\
&\qquad\qquad\qquad = \hat{p}_0\,\exp\left(-\frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2\, j(t_1)D^c(t_1-t_2)j(t_2)\right).
\end{aligned}
$$

Сравнивая данное выражение с (31), находим

$$
G(t_1\cdots t_n) = \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{\delta^n Z(j)}{\delta j(t_1)\cdots\delta j(t_n)}\bigg|_{j=0},
$$

где

$$
Z(j) = \exp\left(\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2\, j(t_1)D^c(t_1-t_2)j(t_2)\right)
$$

— производящий функционал.

Как известно, в рамках теории возмущений рассмотрение квантово-полевых систем можно свести к рассмотрению многомерного гармонического осциллятора. Поэтому предложенный метод вычисления производящего функционала для функций Грина непосредственно обобщается на квантово-полевые модели.

Третий пример — рассеяние квантовой частицы на двух щелях.

Чтобы максимально упростить задачу, будем считать, что щели a и b одинаковые и на экран со щелями перпендикулярно падает однородный поток частиц. Будем интересоваться интерференционной картиной. Очевидно, структура интерференционной картины определяется вероятностным распределением импульсов частиц после рассеяния.

Обозначим через $P(F_k)$ вероятность того, что частица после рассеяния имеет импульс K. Точнее, под этими словами будем подразумевать следующее: имеет импульс внутри фиксированного малого интервала около значения K. Соответствующее событие (в смысле теории вероятностей) обозначим через F_k. Вероятность $P(F_k)$ является условной: прежде чем произойдет событие F_k, частица должна попасть в одну из щелей. Это значит, что в момент рассеяния координата частицы должна лежать либо в области щели a (соответствующее событие обозначим через F_a), либо в области щели b (событие F_b). В подобной ситуации условную вероятность принято обозначать через $P(F_k/(F_a + F_b))$.

Согласно теории вероятностей (см., например, [25])

$$P(F_k/(F_a + F_b)) = \frac{P(F_k \cap (F_a + F_b))}{P(F_a + F_b)}. \tag{33}$$

$F_k \cap (F_a + F_b)$ означает, что должно произойти два события: F_k и $(F_a + F_b)$. Использование символа $\cap$ отражает тот факт, что по законам теории вероятностей подмножество элементарных событий, соответствующее двум одновременным событиям, совпадает с пересечением подмножеств элементарных событий, соответствующих каждому из этих событий.

Так как события F_a и F_b не пересекаются, то

$$P(F_k \cap (F_a + F_b)) = P(F_k \cap F_a + F_k \cap F_b) = P(F_k \cap F_a) + P(F_k \cap F_b). \tag{34}$$

С другой стороны, в силу однородности потока

$$P(F_a + F_b) = P(F_a) + P(F_b) = 2P(F_a) = 2P(F_b). \tag{35}$$

Используя формулы (34) и (35), преобразуем равенство (33) в

$$P(F_k/(F_a + F_b)) = \frac{1}{2}\left[\frac{P(F_k \cap F_a)}{P(F_a)} + \frac{P(F_k \cap F_b)}{P(F_b)}\right].$$

Первое слагаемое в квадратных скобках правой части этого равенства соответствует рассеянию на щели a, второе слагаемое — рассеянию на щели b. Таким образом, интерференционной картины мы не получили. Это объясняется тем, что мы использовали формулы теории вероятностей, не учитывая особенностей приложения теории вероятностей к квантовым событиям. Ошибка допущена уже в формуле (33). Дело в том, что наблюдаемые импульс и координата несовместимы. Поэтому, как объяснялось в разд. 3, подмножеству $F_k \cap (F_a + F_b)$ не соответствует никакая вероятность.

Чтобы избежать подобной ошибки, можно поступить следующим образом: считать, что первый этап рассеяния, попадание частицы в область одной из щелей, — это приготовление некоторого *квантового* состояния, которому соответствует определенный класс эквивалентности элементарных состояний. Далее этот класс эквивалентности следует рассматривать как новое пространство элементарных событий. В этом пространстве рассеяние на интересующий нас угол можно рассматривать уже как безусловное событие.

Событию F_a (попаданию частицы в область щели a) сопоставим наблюдаемую $\hat{p}_a$, которая может принимать два значения: единица, если частица попала в щель, и нуль, если не попала. Очевидно, эта наблюдаемая обладает свойствами проектора. Аналогично введем наблюдаемую $\hat{p}_b$. Ясно, что в формировании интерференционной картины могут принимать участие только те частицы, элементарные состояния которых соответствуют значению наблюдаемой $\hat{p}_a + \hat{p}_b$, равному единице. Множество этих элементарных событий обозначим через $\Omega(p_a + p_b = 1)$. Это множество соответствует квантовому ансамблю. В общем случае такой ансамбль является некоторой смесью чистых квантовых ансамблей. Средние значения наблюдаемых по каждому из этих чистых ансамблей описываются линейным положительным функционалом. Поэтому средние значения наблюдаемых по рассматриваемому квантовому ансамблю также описываются линейным положительным функционалом.

Пусть $\Psi(\cdot)$ — такой функционал, соответствующий множеству $\Omega(p_a + p_b = 1)$. Так как этот функционал удовлетворяет равенству

$$\Psi(\hat{p}_a + \hat{p}_b) = \Psi(\hat{I}) = 1,$$

то для него можно повторить вывод формулы (20) и убедиться, что справедливо равенство

$$\Psi(\hat{B}) = \Psi\left((\hat{p}_a + \hat{p}_b)\hat{B}(\hat{p}_a + \hat{p}_b)\right)$$

для любой наблюдаемой $\hat{B}$. Воспользовавшись этой формулой для среднего значения импульса K после рассеяния, получим

$$\langle\hat{K}\rangle = \Psi(\hat{p}_a\hat{K}\hat{p}_a) + \Psi(\hat{p}_b\hat{K}\hat{p}_b) + \Psi(\hat{p}_a\hat{K}\hat{p}_b + \hat{p}_b\hat{K}\hat{p}_a).$$

Первые два слагаемые в правой части описывают рассеяние на щелях a и b соответственно. Третье слагаемое является интерференционным членом.

6. ПРОБЛЕМА ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ

В знаменитой работе Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) [32] были сформулированы принципы, которым, по мнению авторов, должна удовлетворять полная физическая теория: а) «каждый элемент физической реальности должен иметь копию в полной физической теории»; б) «если без какого-либо возмущения системы мы можем с уверенностью (т. е. с вероятностью единица) предсказать значение физической величины, то, значит, существует элемент реальности, соответствующий этой величине».

Стандартная квантовая механика не восприняла этот тезис. Единичный эксперимент не имеет адекватной копии в математическом аппарате стандартной квантовой механики. Более того, прочно утвердилось мнение, что такой копии быть не может и даже не существует объективной физической реальности, которая определяет результат единичного эксперимента.

В пользу такого мнения приводятся достаточно веские аргументы. Пожалуй, наиболее известный основывается на неравенстве Белла [33, 34]. Белл вывел свое неравенство, рассуждая в рамках тезиса ЭПР. После Белла было предложено много вариантов аналогичных неравенств. Здесь мы рассмотрим вариант, предложенный в работе [35]. Этот вариант обычно обозначается аббревиатурой CHSH.

Пусть частица со спином 0 распадается на две частицы A и B со спинами 1/2. Эти частицы разлетаются на большое расстояние и регистрируются приборами D_a и D_b соответственно. У частицы A прибор D_a измеряет проекцию спина на направление a, а у частицы B прибор D_b измеряет проекцию спина на направление b. Соответствующие наблюдаемые обозначим через $\hat{A}_a$ и $\hat{B}_b$, а результаты измерений — через A_a и B_b.

Предположим, что состояние исходной частицы характеризуется некоторой физической реальностью, которая может быть отмечена параметром ν. Этот же параметр будем использовать для описания физических реальностей, характеризующих продукты распада. Соответственно, результаты измерения наблюдаемых $\hat{A}_a$, $\hat{B}_b$ можно рассматривать как функции $A_a(\nu)$, $B_b(\nu)$ параметра ν. Пусть распределение событий по параметру ν характеризуется вероятностной мерой $P(\nu)$, удовлетворяющей стандартным условиям:

$$\int P(d\nu) = 1, \quad 0 \leqslant P(\nu) \leqslant 1.$$

Введем корреляционную функцию $E(a, b)$:

$$E(a, b) = \int P(d\nu)\, A_a(\nu)\, B_b(\nu), \tag{36}$$

и рассмотрим комбинацию

$$N = |E(a,b) - E(a,b')| + |E(a',b) + E(a',b')| = \\ = \left| \int P(d\nu)\, A_a(\nu)\, [B_b(\nu) - B_{b'}(\nu)] \right| + \\ + \left| \int P(d\nu)\, A_{a'}(\nu)\, [B_b(\nu) + B_{b'}(\nu)] \right|. \quad (37)$$

Для любых направлений a и b

$$A_a(\nu) = \pm 1/2, \quad B_b(\nu) = \pm 1/2. \quad (38)$$

Поэтому

$$N \leqslant \int P(d\nu)\, [|A_a(\nu)|\, |B_b(\nu) - B_{b'}(\nu)| + |A_{a'}(\nu)|\, |B_b(\nu) + B_{b'}(\nu)|] = \\ = 1/2 \int P(d\nu)\, [|B_b(\nu) - B_{b'}(\nu)| + |B_b(\nu) + B_{b'}(\nu)|]. \quad (39)$$

Благодаря равенствам (38) при любом ν одно из выражений

$$|B_b(\nu) - B_{b'}(\nu)|, \quad |B_b(\nu) + B_{b'}(\nu)| \quad (40)$$

равно нулю, а другое — единице. Обратим внимание на то, что в обоих выражениях фигурирует одно и то же значение ν.

Учитывая свойство выражений (40), из неравенства (39) получается неравенство Белла (CHSH):

$$N \leqslant 1/2 \int P(d\nu) = 1/2. \quad (41)$$

В стандартной квантовой механике корреляционная функция легко вычисляется, результат таков:

$$E(a,b) = -1/4 \cos \theta_{ab},$$

где θ_{ab} — угол между направлениями a и b. Для направлений $a = 0$, $b = \pi/8$, $a' = \pi/4$, $b' = 3\pi/8$ получаем

$$N = 1/\sqrt{2},$$

что противоречит неравенству (41).

Результаты экспериментов согласуются с квантово-механическими расчетами и не подтверждают неравенство Белла. Обычно эти результаты рассматриваются как свидетельство того, что для квантово-механической системы нет никакой физической реальности, которая предопределяла бы результаты измерения.

Однако с точки зрения современной теории вероятностей приведенный вывод неравенства Белла слишком наивен. В этом выводе предполагается, что существует вероятностное распределение по параметру ν. По своему смыслу этот параметр маркирует элементарное событие. А как отмечалось ранее (см. разд. 3), элементарному событию далеко не всегда можно приписать какую-либо вероятность. Прежде чем говорить о вероятности, надо снабдить рассматриваемое множество элементарных событий структурой измеримого пространства. В связи с этим попытаемся повторить вывод неравенства Белла, используя в качестве параметра ν элементарное состояние φ.

По условию задачи начальная частица находится в определенном квантовом состоянии. Это значит, что в качестве пространства $\Omega(\varphi_\eta)$ элементарных событий φ мы должны рассмотреть класс эквивалентности $\{\varphi\}_{\varphi\eta}$, т. е. если наблюдаемая $\hat{A} \in \mathfrak{Q}_\eta$, то для всех $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi\eta}$ значение этой наблюдаемой будет одним и тем же. Элементарные состояния $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi\eta}$ различаются между собой за счет значений наблюдаемых $\hat{B} \notin \mathfrak{Q}_\eta$. Нетрудно убедиться, что благодаря такому различию множество $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi\eta}$ будет иметь мощность континуума. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим некоторую подалгебру $\mathfrak{Q}_\xi \neq \mathfrak{Q}_\eta$. Так как подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$ и $\mathfrak{Q}_\eta$ максимальны, то существует, по крайней мере, одна наблюдаемая $\hat{B}$, такая, что $\hat{B} \in \mathfrak{Q}_\xi$ и $\hat{B} \notin \mathfrak{Q}_\eta$. Спектр такой наблюдаемой не может состоять из одной точки. Если такая точка λ одна, то спектральный радиус элемента $\hat{B} - \lambda\hat{I}$ равен нулю: $r(\hat{B} - \lambda\hat{I}) = 0$. Но для C^*-алгебры $\|\hat{B} - \lambda\hat{I}\| = r(\hat{B} - \lambda\hat{I})$. Значит, $\hat{B} = \lambda\hat{I} \in \mathfrak{Q}_\eta$. Отсюда следует, что существует, по крайней мере, два элементарных состояния $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi\eta}$, различающихся значениями наблюдаемой $\hat{B}$. Те же рассуждения мы можем повторить для другой подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi \neq \mathfrak{Q}_\eta$. Поскольку множество таких подалгебр $\mathfrak{Q}_\xi$ имеет мощность континуума, то и множество отличных друг от друга $\varphi \in \{\varphi\}_{\varphi\eta}$ будет так же иметь мощность континуума.

Обратимся теперь к формуле (36) для корреляционной функции. Нам потребуются корреляционные функции для четырех комбинаций наблюдаемых: $\hat{A}_a\hat{B}_b$, $\hat{A}_a\hat{B}_{b'}$, $\hat{A}_{a'}\hat{B}_b$, $\hat{A}_{a'}\hat{B}_{b'}$. Интерес представляет вариант, когда направления a, a', b, b' попарно не параллельны друг другу. В этом случае перечисленные наблюдаемые попарно несовместимы между собой. Поэтому для экспериментального нахождения корреляционных функций мы должны провести четыре отдельные серии экспериментов. В реальном случае каждая из этих серий состоит из конечного числа экспериментов, в идеальном — из счетного числа.

Таким образом, в эксперименте мы имеем дело не с единым пространством $\Omega(\varphi_{\varphi\eta})$ элементарных событий, а с четырьмя отдельными случайными выборками из него. Обозначим их: Ω_{ab}, $\Omega_{ab'}$, $\Omega_{a'b}$, $\Omega_{a'b'}$. Так как даже в идеальном случае эти выборки счетны, а пространство $\Omega(\varphi_{\varphi\eta})$ имеет мощность континуума, то вероятность наличия общих элементов в этих выборках равна нулю. Кроме того, чтобы эти выборки стали измеримыми пространствами, нужно в них выбрать соответствующие σ-алгебры: $\mathcal{F}_{ab}$, $\mathcal{F}_{ab'}$, $\mathcal{F}_{a'b}$, $\mathcal{F}_{a'b'}$. Эти подалгебры не только разные, но, как объяснялось в разд. 3, не могут быть подалгебрами одной σ-алгебры, которой соответствует некоторая вероятностная мера, т. е. в каждой выборке должна быть своя вероятностная мера: P_{ab}, $P_{a'b}$, $P_{ab'}$, $P_{a'b'}$.

Таким образом, формула (36) теперь будет выглядеть следующим образом:

$$E(a,b) = \int\limits_{\Omega_{ab}} P_{ab}(d\varphi)\varphi(\hat{A}_a\hat{B}_b),$$

а формула (37) — так:

$$N = \left| \int\limits_{\Omega_{ab}} P_{ab}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}_a\hat{B}_b) - \int\limits_{\Omega_{ab'}} P_{ab'}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}_a\hat{B}_{b'}) \right| + \\ + \left| \int\limits_{\Omega_{a'b}} P_{\hat{A}_{a'}\hat{B}_b}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}_{a'}\hat{B}_b) + \int\limits_{\Omega_{a'b'}} P_{a'b'}(d\varphi)\,\varphi(\hat{A}_{a'}\hat{B}_{b'}) \right|. \quad (42)$$

Хотя во всех четырех слагаемых в формуле (42) использован один и тот же символ $d\varphi$, надо иметь в виду, что множества элементарных состояний, соответствующие $d\varphi$, будут разными. Они являются элементами разных σ-алгебр. Более того, равна нулю вероятность наличия в них общих элементов. Поэтому, во-первых, нельзя в формуле (42), как это сделано в правой части формулы (37), объединить интегралы, стоящие под знаком модуля, в один интеграл. Во-вторых, нельзя образовать пары, подобные тем, которые фигурируют в формуле (40). В свою очередь, это не позволяет доказать неравенство (41). Таким образом, если мы связываем понятие физической реальности с элементарным состоянием, то нарушение неравенства Белла ни в коей мере не доказывает противоречивости этого понятия.

Другим аргументом против использования понятия физической реальности в квантовой физике служит так называемая запрещающая теорема Кочена–Шпекера [36]. Смысл этой теоремы сводится к следующему. Рассмотрим в качестве физической системы частицу со спином единица. Пусть направления x, y, z взаимно ортогональны. Тогда наблюдаемые $\hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2, \hat{S}_z^2$, описывающие квадраты проекций спина на соответствующие направления, коммутируют между собой. Поэтому они совместимы и могут быть одновременно измерены. Предположим, что существует некоторая физическая реальность, которая однозначно предопределяет результат измерения по любому направлению. При измерении по одному из направлений должен получиться нуль, а по двум другим — единица. Зафиксируем одно из последних направлений и рассмотрим два направления (отличных от предыдущих), перпендикулярных ему и друг другу. По одному из этих направлений в результате измерения должен получиться нуль, по другому —- единица. Зафиксируем первое и повторим всю процедуру сначала. За конечное число таких шагов можно придти к ранее рассмотренному направлению. При этом окажется, что если первоначально по этому направлению значение квадрата проекции спина равнялось нулю, то при возврате к этому направлению тот же квадрат должен равняться единице.

Из этого противоречия делается вывод, что не может существовать физическая реальность, которая предопределяет результат измерения. Однако в этом рассуждении полностью игнорируется проблема измеримости. Между тем здесь приходится иметь дело с двумя тройками направлений: x, y, z и x, y', z'. Внутри каждой из троек все направления взаимно ортогональны, но в разных тройках имеются неортогональные направления. Поэтому наблюдаемые $\hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2, \hat{S}_z^2$ и $\hat{S}_x^2, \hat{S}_{y'}^2, \hat{S}_{z'}^2$ принадлежат разным коммутативным подалгебрам алгебры $\mathfrak{A}$. Соответственно, приборы, осуществляющие совместимые внутри каждой из троек измерения, относятся к разным типам. Эти приборы не обязательно должны давать один и тот же результат при измерении наблюдаемой $\hat{S}_x^2$. При доказательстве теоремы это молчаливо предполагалось. Напомним, что элементарное состояние не фиксирует однозначно значения всех наблюдаемых. Оно однозначно фиксирует показания приборов *определенного типа*. Для разных типов эти показания могут быть разными.

Таким образом, в рамках предлагаемого подхода теорема Кочена–Шпекера не исключает возможности существования объективной физической реальности, связанной с элементарным состоянием.

7. ПАРАДОКСЫ

Критики стандартной квантовой механики указали на большое количество ситуаций, в которых квантово-механические рассуждения приводят к парадоксальным результатам. В этом разделе мы обсудим только два, пожалуй, наиболее часто упоминаемых парадокса. Это парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР) и парадокс кошки Шредингера. Надо сразу сказать, что наиболее ортодоксальные сторонники стандартной квантовой механики утверждают, что никаких парадоксов не существует. Надо только грамотно использовать формулы квантовой механики. Поэтому, прежде чем обсуждать конкретные парадоксы, зафиксируем собственную позицию. Она состоит в следующем.

Формулы стандартной квантовой механики, безусловно, справедливы в случае рассмотрения квантовых ансамблей. Они правильно описывают средние значения наблюдаемых величин и вероятности событий и в тех физических моделях, которые предлагаются авторами парадоксов. Поэтому интерес представляет обсуждение только одиночных явлений. Здесь возможны две позиции. По этому поводу смотрите обзор [37]. Во-первых, можно считать, что одиночные явления лежат вне компетенции квантовой механики. В этом случае предмет спора исчезает. Однако одиночные явления заведомо существуют. Поэтому возникает вопрос о полноте квантово-механического описания. Во-вторых, можно считать, что для одиночных явлений квантовая механика должна предсказывать только вероятности, и полнота описания исчерпывается предсказанием соответствующих вероятностей. В этом случае надо считать, что вероятность является некоторой самостоятельной сущностью этого единичного явления.

В современной математической теории вероятностей это не так. Напомним, что, прежде чем ввести понятие о вероятностной мере, вводится понятие пространства элементарных событий. Соответственно, единичное явление (элементарное событие) рассматривается как элемент определенного множества (ансамбля). При этом одно и то же единичное явление можно рассматривать в качестве элемента разных множеств. В зависимости от этого множества одному и тому же явлению будут соответствовать разные вероятности или не будет соответствовать никакая вероятность.

Ортодоксальные сторонники стандартной квантовой механики такую точку зрения отвергают и предпочитают считать вероятность фундаментальной неопределяемой сущностью единичного явления, которой в математическом аппарате квантовой механики соответствует либо вектор гильбертова пространства, либо матрица плотности. Формально так парадоксов удается избежать, но при этом физическая сущность явлений остается за рамками обсуждения.

После этих предварительных замечаний приступим непосредственно к обсуждению парадоксов. Начнем с парадокса ЭПР. В оригинальной работе [32] этот парадокс рассматривался на примере измерения координаты и импульса. Более простую физическую модель предложил Бом [38]. В ней та же проблема обсуждается на примере измерений проекций спина на разные направления. Здесь мы остановимся на варианте, предложенном Бомом. В этом случае рассматривается та же физическая система, что и при обсуждении неравенства Белла.

Пусть частица со спином 0 распадается на две одинаковые частицы A и B со спинами 1/2, которые разлетаются на большое расстояние. Спиновое состояние этой системы согласно формулам стандартной квантовой механики описывается вектором состояния

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|A_z^{(+)}\rangle|B_z^{(-)}\rangle - |A_z^{(-)}\rangle|B_z^{(+)}\rangle\right], \tag{43}$$

где $|A_z^{(\pm)}\rangle$, $|B_z^{(\pm)}\rangle$ — собственные векторы операторов проекций спина на ось z с собственными значениями $+1/2$ и $-1/2$. Это так называемое запутанное состояние. В этом состоянии ни частица A, ни частица B не имеют определенного значения проекции спина на ось z. Спиновое состояние каждой из частиц может быть описано матрицей плотности. Например, для частицы A матрица плотности будет иметь вид

$$\rho(A) = \frac{1}{2}\left[|A_z^{(+)}\rangle\langle A_z^{(+)}| + |A_z^{(-)}\rangle\langle A_z^{(-)}|\right].$$

Эта матрица означает, что с вероятностью 1/2 частица имеет проекцию спина $+1/2$ и с такой же вероятностью — проекцию $-1/2$.

В момент, когда частицы A и B находятся в пространственноподобных областях, измерим у частицы B проекцию спина на ось z. Пусть результат будет $+1/2$. Тогда согласно постулату о коллапсе квантового состояния (проекционному принципу) состояние $|\Psi\rangle$ мгновенно заменится состоянием

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \hat{p}_+|\Psi\rangle/\sqrt{\langle\Psi|\hat{p}_+|\Psi\rangle}, \tag{44}$$

где $\hat{p}_+$ — проектор вида

$$\hat{p}_+ = \hat{I}_A \otimes |B_z^{(+)}\rangle\langle B_z^{(+)}|. \tag{45}$$

Здесь $\hat{I}_A$ — единичный оператор в пространстве состояний частицы A.

Подставляя (45) в (44), получаем $|\tilde{\Psi}\rangle = -|A_z^{(-)}\rangle|B_z^{(+)}\rangle$. Матрица плотности частицы A, соответствующая этому состоянию, имеет вид $\tilde{\rho}(A) = |A_z^{(-)}\rangle\langle A_z^{(-)}|$. Это значит, что при последующем измерении у частицы A проекции спина на ось z мы с вероятностью единица получим значение $-1/2$. Это совершенно верно описывает экспериментальную ситуацию. Таким образом, в качестве рецепта получения правильного результата проекционный принцип работает очень хорошо. Однако хотелось бы понять, какой *физический* механизм обеспечивает действенность этого рецепта.

Сразу напрашиваются два варианта такого механизма. Первый заключается в следующем. В момент распада частицы приобрели определенные проекции спина на ось z (противоположного знака), но до измерения проекции у частицы B мы не знаем, какие именно это проекции. Измерив проекцию у частицы B, мы автоматически узнали проекцию у частицы A. Но такое объяснение не согласуется с общей концепцией стандартной квантовой механики.

Дело в том, что то же квантовое состояние $|\Psi\rangle$ можно представить в виде

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|A_x^{(+)}\rangle|B_x^{(-)}\rangle - |A_x^{(-)}\rangle|B_x^{(+)}\rangle\right],$$

где обозначения те же, что в формуле (43), только вместо проекций на ось z фигурируют проекции на ось x. Теперь мы можем повторить все рассуждения, приведенные после формулы (43), заменяя в них ось z на ось x. В результате мы получим, что в момент распада частицы должны приобрести определенные значения проекций спина на ось x. Но наблюдаемые, соответствующие проекциям спина на оси z и x, взаимно несовместимы и согласно стандартной квантовой механике не могут одновременно иметь определенные значения.

Второй вариант механизма выглядит так. После распада частицы A и B не приобрели определенных значений проекций спина ни на какую ось. В результате измерения проекции на определенную ось они такие значения проекций на эту ось приобрели. В то, что для частицы B, которая взаимодействовала с измерительным прибором, такой механизм возможен, поверить нетрудно. Но как такое измерение могло повлиять на частицу A, находящуюся в пространственноподобной области относительно измерительного прибора, представить нельзя, не нарушая принципов теории относительности. Таким образом, оба варианта объяснения физического механизма оказываются несостоятельными. В этом и состоит парадокс.

Возражая против наличия парадокса, Бор в статье [39] писал, что при обсуждении системы, в которой существуют корреляции, нельзя ее рассматривать как систему, состоящую из двух независимых частей. Поэтому всякое измерение над одной частью этой системы следует рассматривать как измерение над всей системой. Это объяснение представляется не особенно убедительным. Дело в том, что существуют два типа корреляций, поддающихся рациональному объяснению. К первому типу относятся корреляции, которые обязаны своим происхождением взаимодействию между частями системы. В случае парадокса ЭПР такое взаимодействие должно было бы передаваться со сверхсветовой скоростью. Ко второму типу относятся корреляции, обусловленные какой-то связью между начальными условиями для рассматриваемых частиц. В случае парадокса ЭПР такая связь существует, так как частицы A и B возникли в результате распада одной первичной частицы. Однако наличия такой связи недостаточно для *однозначной* корреляции этих частиц в последующем. Для этого еще необходимо, чтобы начальные условия однозначно фиксировали последующую временну́ю эволюцию этих частиц. А это значит, что уже сразу после рождения, еще до момента измерения, частицы A и B должны были обладать неким свойством, которое однозначно определяло бы результат измерения. Это противоречит общей концепции стандартной квантовой механики.

Конечно, можно предположить, что существует какой-то особый квантовый тип корреляций, который не поддается рациональному толкованию. Однако такое объяснение является с точки зрения науки наихудшим из всех возможных, так как основная задача научной теории — это сокращение числа не поддающихся рациональному толкованию истин.

Более удачными представляются рассуждения Фока [40]. Фок считал, что в квантовом случае понятию «состояние» не следует приписывать объективного смысла. Скорее, его следует понимать как «сведение о состоянии». При таком толковании парадокса действительно можно избежать. Но возникает вопрос: «Существует ли нечто объективное, о чем мы получаем эти сведения?».

В рамках предлагаемого в настоящей статье подхода такое «нечто» существует. Это элементарное состояние. Элементарное состояние является объективной характеристикой физической системы. Оно не зависит от каких-либо знаний о системе. В противоположность этому квантовое состояние, т. е. некоторый класс эквивалентности элементарных состояний, не является полностью объективной характеристикой физической системы. Это понятие является объективной характеристикой *ансамбля* физических систем. Определенную интересующую нас систему мы можем рассматривать в качестве элемента разных ансамблей (свобода выбора). Соответственно, она будет характеризоваться разными квантовыми состояниями. Поэтому в квантовом состоянии присутствует субъективный фактор.

Обращаясь непосредственно к парадоксу ЭПР, можно ему дать следующую интерпретацию. Как до, так и после распада исходной частицы физическая система характеризуется стабильными (нулевыми) значениями наблюдаемых $\hat{S}_{\mathbf{n}}$ (проекции полного спина на направление $\mathbf{n}$). После распада значения наблюдаемых $\hat{A}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ (проекции спинов на направление $\mathbf{n}$ для частиц A и B соответственно) удовлетворяют соотношению

$$A_{\mathbf{n}} + B_{\mathbf{n}} = S_{\mathbf{n}} = 0. \tag{46}$$

В принципе, каждая из наблюдаемых $\hat{A}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ могла бы быть нестабильной. Однако, как указывалось в разд. 5, в случае двухуровневой системы, какой является частица со спином 1/2, эти наблюдаемые будут стабильными. В элементарном состоянии несовместимые наблюдаемые могут одновременно иметь определенные значения. Только эти значения не могут быть одновременно измерены с помощью классического прибора. В конкретном эксперименте мы можем измерить наблюдаемую $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ для любого, но только для одного, направления $\mathbf{n}$, так как для разных направлений $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ наблюдаемые $\hat{B}_{\mathbf{n}}$, $\hat{B}_{\mathbf{n}'}$ несовместимы. Благодаря равенству (46) при таком измерении мы автоматически измеряем значение наблюдаемой $\hat{A}_{\mathbf{n}}$. Это так называемое косвенное измерение. Таким образом, в таком подходе парадокс ЭПР разрешается тривиально.

На примере этой физической системы можно дать вполне рациональную интерпретацию такому явлению, как коллапс квантового состояния. В рамках стандартной квантовой механики это явление выглядит мистическим.

До измерения проекции спина у частицы B мы знаем, что наша физическая система находится в некотором элементарном состоянии, которое принадлежит классу эквивалентности, характеризуемому нулевыми значениями наблюдаемых $\hat{S}_{\mathbf{n}}$, то есть мы знаем, что система находится в синглетном квантовом состоянии, но мы не знаем, в каком конкретном элементарном состоянии она находится. После измерения наблюдаемой $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ мы благодаря равенству (46) приобретаем знание не только о значении этой наблюдаемой, но и о значении наблюдаемой $\hat{A}_{\mathbf{n}}$. Поэтому теперь мы знаем, что после измерения рассматриваемая система будет находиться в элементарном состоянии, которое принадлежит классу эквивалентности, характеризуемому значениями $A_{\mathbf{n}} = -B_{\mathbf{n}}$ (значение $B_{\mathbf{n}}$ известно) наблюдаемых $\hat{A}_{\mathbf{n}}$ и $\hat{B}_{\mathbf{n}}$. Здесь мы считали, что измерение наблюдаемой $\hat{B}_{\mathbf{n}}$ было воспроизводимым. Теперь мы опять не знаем, в каком конкретном элементарном состоянии оказалась физическая система, но мы знаем, что она находится в определенном квантовом состоянии (типа $|\tilde{\Psi}\rangle$, формула (44)).

Благодаря взаимодействию с измерительным прибором значение наблюдаемых $\hat{B}_{\mathbf{n}'}$ для направлений $\mathbf{n}' \neq \mathbf{n}$ изменяется неконтролируемым образом. Поэтому для таких направлений равенство (46) нарушается. Это соответствует тому, что рассматриваемая система перестает принадлежать синглетному состоянию. Таким образом, воспроизводятся все признаки коллапса квантового состояния. Заметим, что до измерения мы могли описать квантовое состояние частицы A с помощью матрицы плотности

$$\rho(A) = \frac{1}{2}\left[|A_{\mathbf{n}}^{(+)}\rangle\langle A_{\mathbf{n}}^{(+)}| + |A_{\mathbf{n}}^{(-)}\rangle\langle A_{\mathbf{n}}^{(-)}|\right], \tag{47}$$

а после измерения — с помощью матрицы плотности

$$\tilde{\rho}(A) = |-B_{\mathbf{n}}\rangle\langle -B_{\mathbf{n}}|. \tag{48}$$

Хотя квантовое состояние (47) смешанное, а состояние (48) чистое, это не означает, что произошло какое-то изменение элементарного состояния частицы A. Просто мы приобрели дополнительную информацию об этом элементарном состоянии.

Равенству (46) можно дать еще такую полезную интерпретацию. Во время распада первичной частицы каждая из вторичных частиц производит «измерение» *элементарного состояния* своего партнера в том смысле, что элементарное состояние одной из частиц является негативной копией элементарного состояния другой. Создание такой копии можно назвать измерением с помощью *квантового* прибора. Одна частица является квантовым измерительным прибором для другой. В отличие от измерения классическим прибором такое измерение может однозначно зафиксировать элементарное состояние измеряемой частицы. Однако, чтобы результат такого «измерения» стал нам доступен, надо провести измерение с помощью классического прибора уже этого квантового прибора. В результате такого вторичного измерения мы получим знание только о классе эквивалентности, к которому принадлежит элементарное состояние измеряемой частицы.

Сценарий второго парадокса, который мы здесь обсудим, был предложен Шредингером [41] (по этому поводу смотрите также [42]). Сценарий выглядит следующим образом. В ящик помещается кошка и радиоактивный источник очень малой интенсивности. Когда в источнике происходит распад атома, срабатывает счетчик Гейгера. Импульс от счетчика подается через усилительное устройство на автомат, который разбивает ампулу с ядом. От яда кошка погибает. Наблюдатель не знает, произошел распад или нет. Поэтому по правилам квантовой механики он должен описывать состояние сложной системы (кошка плюс радиоактивный источник) с помощью вектора состояния, который является суперпозицией двух квантовых состояний: нераспавшийся атом и живая кошка плюс распавшийся атом и мертвая кошка. Суперпозиция живой и мертвой кошки выглядит, по меньшей мере, странной.

Существует утверждение, что парадокса не будет, если от описания состояния с помощью вектора гильбертова пространства перейти к описанию с помощью матрицы плотности. Однако здесь надо четко договориться, в какую игру мы играем. Если мы считаем, что матрица плотности описывает ансамбль физических систем, то парадокса не будет. Но в этом случае мы будем описывать состояние не одной кошки, а ансамбля кошек, в котором часть кошек жива, другая мертва. В этом случае каждая из кошек либо определенно жива, либо мертва, а вот то, с какой из кошек нам придется иметь дело, определяется теорией вероятностей. Но в сценарии парадокса Шредингера имеется в виду, что мы имеем дело с одной кошкой. В таком случае указанная трактовка матрицы плотности не годится. Если же мы считаем, что матрица плотности описывает состояние одной кошки, то представить смешанное состояние живой и мертвой кошки не проще, чем суперпозицию таких кошек.

Парадокса, конечно, не будет, если принять интерпретацию Фока, то есть считать, что под термином «состояние» в квантовой механике в действительности подразумевается наше знание об объективном состоянии физического объекта. Однако, во-первых, стандартная квантовая механика не приемлет такую точку зрения. Во-вторых, остается вопрос, существует ли такое объективное состояние.

В рамках концепции элементарного состояния парадокс опять-таки разрешается тривиально. Изучаемая пара (кошка плюс радиоактивный атом) находится в определенном элементарном состоянии. В данный момент времени в этом состоянии кошка либо определенно жива, либо определенно мертва. Никакого смешанного элементарного состояния живой и мертвой кошки нет. Квантовое состояние описывает класс эквивалентности таких элементарных состояний. Среди этих элементарных состояний имеются такие, которые соответствуют живой кошке в данный момент времени, а есть такие, которые соответствуют мертвой кошке в тот же момент времени.

Когда мы помещаем кошку в ящик, нам доступна информация только о классе эквивалентности, но не об индивидуальном элементарном состоянии. Класс эквивалентности фиксируется классически регистрируемыми условиями: в момент приготовления исследуемой системы кошка была жива, а атом не распался. С другой стороны, однозначная эволюция конкретной физической системы определяется именно ее элементарным состоянием. С помощью классических наблюдений это состояние не может быть однозначно зафиксировано.

8. КОРПУСКУЛЯРНО-ПОЛЕВОЙ ДУАЛИЗМ

В квантовом случае элементарное состояние $\varphi = [\varphi_\xi]$ индивидуальной физической системы — это совокупность функционалов $\varphi_\xi(\cdot)$, каждый из которых является характером максимальной действительной коммутативной подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$ алгебры $\mathfrak{A}$. Множество Ξ ($\xi \in \Xi$) таких подалгебр имеет мощность континуума. Таким образом, элементарное состояние — это функциональнозначное поле над множеством Ξ.

Для задания φ необходимо и достаточно задать φ_ξ для каждого $\xi \in \Xi$. В свою очередь, для задания φ_ξ достаточно задать значение φ_ξ на каждой образующей подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$. Можно считать, что каждой образующей подалгебры $\mathfrak{Q}_\xi$ соответствует компонента этого функциональнозначного поля φ. Значение функционала φ_ξ на образующей может рассматриваться как значение компоненты поля φ в точке ξ. Таким образом, φ — это действительное c-числовое многокомпонентное поле над множеством Ξ.

Соответственно, даже квантовая система, которую принято рассматривать как систему с конечным числом степеней свободы (например, гармонический осциллятор), в действительности является полевой системой, т. е. системой с бесконечным числом степеней свободы. Отсюда следует, что в элементарном состоянии любой квантовой системы, в принципе, может быть зашифрован бесконечный объем информации. Однако для реального использования этот бесконечный объем недоступен. Дело в том, что для того чтобы информация была для нас полезной, мы должны иметь возможность ее контролировать с помощью классических приборов. Однако классические приборы не могут отличить одно элементарное состояние от другого, они различают только классы эквивалентности, которые соответствуют квантовым состояниям. Поэтому объем контролируемой информации оказывается конечным, но он все равно может быть гораздо бóльшим, чем для классических физических систем. Это является физической предпосылкой возможности построения квантовых компьютеров.

Элементарное состояние всякой физической системы является полем и над пространством Минковского. Дело в том, что системы, которые в квантовой механике традиционно рассматриваются как точечные, в действительности являются распределенными в пространстве Минковского.

Например, рассмотрим электрон, который формально упруго рассеивается на ядре. В действительности такое рассеяние сопровождается тормозным излучением мягких фотонов. Просто энергия и значения других наблюдаемых для этих фотонов лежат за пределами чувствительности измерительных приборов, то есть рассеяние электрона сопровождается излучением электромагнитного поля мягких фотонов. Хотя это поле с помощью классических приборов не наблюдаемо, теоретически оно играет очень важную роль. Без его учета в теории возникают бессмысленные инфракрасные расходимости. В свое время такая ситуация в квантовой электродинамике получила название «инфракрасная катастрофа».

Инфракрасной катастрофы удается избежать только в том случае, когда число таких излученных мягких фотонов бесконечно. Это значит, что электрон сопровождается (эффективным) классическим полем. Ясно, что любой другой процесс через рождение виртуальных электрон-позитронных пар будет сопровождаться излучением такого (эффективного) классического электромагнитного поля. Аналогичная ситуация имеет место в квантовой хромодинамике. Там именно с мягкими партонами связываются основные надежды на объяснение явления удержания кварков.

Таким образом, элементарное состояние φ любой квантовой системы описывается действительным c-числовым полем над множеством Ξ и пространством Минковского. Это поле имеет все признаки реального классического поля. Если мы принимаем классическую парадигму, то должны считать, что существует некоторое материальное поле, математическим образом которого является φ. Это эффективное классическое поле может включать в себя классическую составляющую электромагнитного поля, гравитационное поле или какие-либо другие поля. Конкретная физическая реализация этого поля для нас несущественна. Поэтому назовем его фазовым полем по аналогии с фазовым пространством, которое определяет состояние классической системы. Отметим, что в силу классичности для этого поля не обязательно должно соблюдаться квантовое соотношение между частотой и энергией.

Предположение о материальном существовании фазового поля может помочь решить одну из проблем квантовой теории — корпускулярно-волновой дуализм. Здесь для этого понятия будет использоваться термин «корпускулярно-полевой дуализм». Полевые свойства квантовой системы естественным образом связываются с фазовым полем, т. е. с элементарным состоянием системы, в то время как корпускулярные свойства — с наблюдаемыми системы, точнее, с локальными наблюдаемыми.

Корпускулярные свойства квантовой системы означают следующее. У физической системы имеются локальные наблюдаемые, т. е. наблюдаемые, ассоциированные с ограниченной областью в пространстве Минковского. Эти наблюдаемые, точнее, их комплексные комбинации, образуют алгебру локальных наблюдаемых. Заметим, что алгебра локальных наблюдаемых — это одно из основных понятий традиционного алгебраического подхода в квантовой теории поля (см. [6, 7, 43, 44]). Существуют устойчивые (в смысле, часто повторяющиеся) наборы значений локальных наблюдаемых, которые мы трактуем как квантовые частицы определенного типа: электроны, протоны, ядра, атомы и т. п.

Измерительные приборы воспринимают эти наблюдаемые как неделимое целое. В этом проявляются корпускулярные свойства квантовых систем. Реакция измерительного прибора определяется элементарным состоянием системы (фазовым полем). В свою очередь, структура (значение) фазового поля определяется спектрами соответствующих наблюдаемых. Отметим, что точка спектра — это неделимая сущность. Таким образом, в квантовой системе корпускулярные и полевые свойства оказываются тесным образом переплетенными.

В стандартной квантовой механике квантовое состояние физической системы также ассоциируется с c-числовым полем — волновой функцией. Однако волновая функция комплексна. Поэтому она не может непосредственно соответствовать материальному полю. В предлагаемой трактовке волновая функция связана только с вероятностью, причем довольно опосредовано. Именно средние значения наблюдаемых *могут быть представлены* (а не являются) в виде математических ожиданий линейных операторов некоторого гильбертова пространства. В свою очередь, векторы этого гильбертова пространства *могут быть представлены* в виде волновых функций.

Фазовое поле может рассматриваться в качестве материального носителя информации о физическом состоянии квантового объекта. Чтобы являться таким носителем, оно должно быть согласованным (когерентным) с ассоциированным квантовым объектом. Это позволяет на основе фазового поля построить вполне правдоподобную модель процесса измерения. Напомним, что на отсутствие такой модели обычно списывают все нестыковки, которые существуют в стандартной квантовой механике.

Опишем подобную модель. (По этому поводу см. также работы Блохинцева [20–23].) Измерительный прибор состоит из анализатора и детектора. Иногда эти составляющие измерительного прибора могут быть совмещены. Анализатор — это устройство с одним входным каналом и несколькими выходными. Если прибор предназначен для измерения наблюдаемой $\hat{A}$, то каждый выходной канал соответствует определенному участку спектра этой наблюдаемой, т. е. каждый выходной канал соответствует некоторому классу эквивалентности элементарных состояний.

Фазовое поле, ассоциированное с измеряемым квантовым объектом, возбуждает в анализаторе коллективные колебания, когерентные полю. Колебания могут быть очень слабыми, но в силу когерентности они взаимодействуют с квантовым объектом резонансным образом. Микроскопическое описание такого взаимодействия практически не осуществимо. Однако результат этого взаимодействия можно описать в виде некоторого граничного условия. Если квантовое состояние измеряемого объекта описывает класс эквивалентности, который соответствует одному из выходных каналов, то объект однозначно попадает в этот выходной канал. Если изучаемый объект находится в квантовом состоянии, которое не соответствует ни одному из выходных каналов, то анализатор оказывается областью бифуркации для этого объекта. В этом случае резонансное взаимодействие объекта с возбужденными фазовым полем колебаниями анализатора оказывается той случайной силой, которая направляет объект в определенный выходной канал. Именно в канал, соответствующий классу эквивалентности, к которому принадлежит элементарное состояние измеряемого объекта.

Здесь под областью локализации квантового объекта подразумевается область локализации его локальных наблюдаемых, которые могут быть зарегистрированы классическими измерительными приборами. В дальнейшем эту область локализации будем называть керном квантового объекта. Вместе с тем, как уже упоминалось, квантовый объект сопровождается полем, которое, с одной стороны, не регистрируется измерительными приборами, а с другой стороны, является составной частью фазового поля. Поэтому анализатор может стать областью ветвления фазового поля. В каждый выходной канал анализатора попадет соответствующая часть фазового поля.

Анализатор — это классический объект. Взаимодействие фазового поля с классическим объектом может быть двух типов. При первом типе когерентность фазового поля с излучающим объектом не нарушается, при втором типе — нарушается. Поскольку мы предполагаем, что фазовое поле возбуждает в анализаторе колебания, когерентные полю, и они резонансно взаимодействуют с квантовым объектом, то следует считать, что взаимодействие с анализатором не нарушает когерентность поля. Будем также считать, что воздействие квантового объекта на анализатор макроскопически не регистрируемо. Подобная регистрация происходит в детекторе.

Детектор — это классическая система, находящаяся в состоянии неустойчивого равновесия. Детектор сильно взаимодействует с керном квантового объекта. В результате этого взаимодействия детектор выходит из состояния равновесия. В нем развивается катастрофический, макроскопически регистрируемый процесс. Детектор (детекторы) располагается на одном (нескольких) выходном канале анализатора. В результате срабатывания детектора происходит фиксация выходного канала анализатора, в который попал керн квантового объекта. Так происходит фиксация значения наблюдаемой $\hat{A}$ у квантового объекта. Одновременно фиксируется класс эквивалентности, к которому принадлежит элементарное состояние измеряемого объекта.

Обратное воздействие детектора на квантовый объект также сильное. В случае невоспроизводимого измерения происходит полное изменение элементарного состояния квантового объекта. При воспроизводимом измерении когерентность также нарушается, но элементарное состояние квантового объекта остается в классе эквивалентности, который соответствует выходному каналу, через который прошел керн квантового объекта. Керн квантового объекта и сопровождающее его фазовое поле перестают быть когерентными частями фазового поля, прошедшими через другие выходные каналы анализатора.

Если детектор стоит на выходном канале, через который керн квантового объекта не прошел, то детектор испытывает только слабое воздействие со стороны фазового поля, прошедшего через этот канал. Катастрофический процесс в детекторе не развивается, и макроскопический эффект не регистрируется. Однако обратное воздействие детектора на фазовое поле оказывается существенным. Поле в этом канале теряет когерентность с керном квантового объекта и частями фазового поля, прошедшими через другие каналы.

Если ни в одном из каналов анализатора детекторы не поставлены, то можно, в принципе, соединить вновь все части фазового поля, прошедшие через разные каналы. Они когерентно сложатся, и может воссоздаться прежнее элементарное состояние. Если в каком-то канале детектор имеется, то соответствующая часть фазового поля не может принять участие в когерентном сложении. Эффективно с точки зрения элементарного состояния квантового объекта эта часть фазового поля теряется.

Таким образом, часть фазового поля, определяющего элементарное состояние квантового объекта, эффективно может «исчезнуть» в двух случаях. Либо происходит изменение состояния (с нарушением когерентности) этой части поля, либо с этой частью поля ничего не происходит, а меняется состояние керна квантового объекта. В обоих случаях меняется структура фазового поля, когерентного керну. Именно такое поле определяет элементарное состояние квантового объекта. При изменении элементарного состояния, естественно, происходит изменение квантового состояния. Такое изменение имеет все признаки коллапса квантового состояния при измерении. Модель измерения, напоминающая эту, описана в обзоре [45].

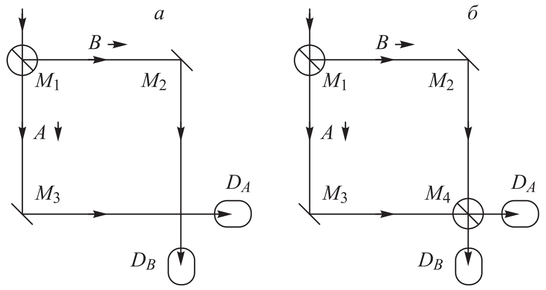
Фазовое поле выполняет те функции, которые обычно приписываются скрытым параметрам. Однако, в отличие от ситуации со скрытыми параметрами, у нас указан конструктивный способ построения математического образа этого поля. Поэтому с точки зрения математики проблемы существования такого поля нет. Все доводы, которые обычно приводятся против скрытых параметров, в случае фазового поля не имеют доказательной силы. Но, конечно, существование материальной реализации фазового поля остается пока гипотезой.

Отметим, что эта гипотеза имеет статус, отличный от статуса утверждений, которые содержатся в сформулированных ранее постулатах. Последние являются обобщением (абсолютизацией) результатов, полученных из физических наблюдений. На основании этих постулатов построен математический аппарат предлагаемой схемы. Для такого построения обсуждаемая гипотеза не нужна. Наоборот, в рамках классической парадигмы утверждения гипотезы, скорее, можно рассматривать как следствие построенного математического аппарата. Точнее, фазовое поле представляется как наиболее естественный способ материальной реализации математического понятия «элементарное состояние». Вместе с тем утверждение «наиболее естественное» не означает единственно возможное.

В отличие от скрытых параметров фазовое поле частично наблюдаемо. Оно влияет на поведение керна квантового объекта в случае, когда этот керн когерентен фазовому полю. В свою очередь, детектор классического измерительного прибора реагирует на керн. На фазовое поле, потерявшее когерентность с керном, классический прибор никак не реагирует. Однако это не означает, что это поле исчезло. Оно может проявить себя в виде темной материи.

Представление о том, что квантовый объект состоит из керна и фазового поля, позволяет дать очень наглядную интерпретацию так называемому эксперименту с отсроченным выбором. Идея эксперимента была предложена Виллером [46], сам эксперимент был независимо выполнен двумя группами [47,48].

Схематически эксперимент выглядит следующим образом.



Эксперимент с отсроченным выбором

На рис. *а* и *б* изображены две экспериментальные установки. M_1 и M_4 представляют два полупрозрачных зеркала; M_2 и M_3 — два обычных зеркала; D_A и D_B — два детектора.

На зеркало M_1 подается импульс света, который в этом зеркале расщепляется на две части. Одна из этих частей идет по маршруту A, другая — по маршруту B. В случае, приведенном на рис. *а*, эти части в дальнейшем никак друг с другом не смешиваются и независимо регистрируются детекторами D_A и D_B. В случае рис. *б* обе части попадают в полупрозрачное зеркало M_4, где происходит интерференция этих частей. Так как при отражении от зеркала фаза колебаний меняется на $\pi/2$, а при прохождении сквозь зеркало фаза не меняется, то в результате интерференции после зеркала M_4 весь световой импульс попадает в детектор D_B.

Идея Виллера состояла в том, что, во-первых, импульс должен быть слабым и очень коротким, а промежутки между импульсами — достаточно большими. Этим достигалось то, что в экспериментальной установке одновременно находился не более чем один фотон. Во-вторых, зеркало M_4 должно быть съемным. По своему усмотрению экспериментатор может его вставлять или убирать в промежутке времени, когда фотон проходит зеркало M_1 и когда он достигает области, где располагается зеркало M_4.

В случае, если зеркало M_4 не вставлено (рис. *а*), в каждом импульсе с вероятностью 1/2 срабатывает либо детектор D_A, либо детектор D_B. Эта ситуация легко интерпретируется, если считать фотон частицей. Тогда с вероятностью 1/2 он после зеркала M_1 выбирает либо маршрут A, либо маршрут B. Соответственно, попадает либо в детектор D_A, либо в детектор D_B.

В случае, если зеркало M_4 вставлено (рис. *б*), всегда срабатывает только детектор D_B. Эта ситуация легко интерпретируется, если считать фотон волной. Тогда в зеркале M_1 волна расщепляется на две составляющие, распространяющиеся по маршрутам A и B. В зеркале M_4 эти составляющие интерферируют. В результате после зеркала M_4 волна распространяется только в направлении детектора D_B.

Результаты реальных экспериментов полностью подтвердили ожидания Виллера. Это означает, что фотон в некоторой ситуации ведет себя как частица, а в другой — как волна. Однако изюминка предложенного Виллером эксперимента состояла в том, что в момент, когда фотон взаимодействует с зеркалом M_1, он еще «не знает», как ему следует себя вести: как частице или как волне. Он должен заранее предугадать прихоть экспериментатора.

Ортодоксальный сторонник стандартной квантовой механики сразу же скажет, что приведенные наглядные интерпретации никуда не годятся, так как они классические. В действительности фотон не является ни частицей, ни волной, и после зеркала M_1 ни он, ни его составляющие не распространяются ни по маршруту A, ни по маршруту B. Просто в зеркале M_1 происходит расщепление волновой функции первоначального фотона на две части, соответствующие маршрутам A и B. Затем, в зеркале M_4, если оно присутствует, происходит когерентное сложение этих частей волновой функции. Такое сложение правильно описывает результат эксперимента.

С таким объяснением легко можно было бы согласиться, если считать, что волновая функция описывает какое-то физическое поле. Но стандартная квантовая механика такое предположение отвергает. И это совершенно справедливо, хотя бы потому, что волновая функция комплексна. Волновая функция — это амплитуда вероятности, т. е. чисто математический объект. Математический объект не может взаимодействовать ни с зеркалом M_1, ни с зеркалом M_4. Таким образом, эволюция волновой функции должна описывать какой-то физический процесс. Что это за процесс, стандартная квантовая механика не объясняет.

Описанный эксперимент вроде бы подтверждает одну из основных заповедей квантовой механики: квантовый объект не может иметь определенной траектории. Однако почти все эксперименты в физике элементарных частиц (заведомо квантовых объектов) базируются на анализе этих несуществующих траекторий. Складывается парадоксальная ситуация — теоретики и экспериментаторы в области физики элементарных частиц играют одновременно в одну и ту же игру по разным правилам.

В рамках гипотезы фазового поля интерпретация эксперимента тривиальна. После зеркала M_1 керн фотона в зависимости от его элементарного состояния распространяется либо по маршруту A, либо по маршруту B. Фазовое поле в зеркале M_1 разделяется на две части, которые распространяются по разным маршрутам. В зеркале M_4, если оно присутствует, эти две части фазового поля когерентно складываются в результирующее фазовое поле (элементарное состояние), которое направляет керн фотона в сторону детектора D_B.

Так же просто в рамках этой гипотезы интерпретируется эксперимент рассеяния квантового объекта на двух щелях. В этом эксперименте наблюдается отчетливая интерференционная картина. При этом интерференционная картина наблюдается и в том случае, если интенсивность потока частиц настолько мала, что одновременно в экспериментальной установке не может находиться более одной частицы [49]. Поэтому объяснить интерференцию взаимодействием падающих частиц между собой нельзя. Если отбросить всякие словесные украшения, то стандартная интерпретация этого эксперимента сводится к следующему. *Неделимый* до щелей квантовый объект проходит одновременно через разделенные макроскопическим расстоянием щели, после чего опять становится *неделимым*.

Предлагаемый подход позволяет проинтерпретировать этот эксперимент гораздо более наглядно. Фазовое поле квантового объекта возбуждает в экране слабые коллективные колебания, которые создают вторичное классическое поле. Колебания в разных областях экрана когерентны между собой. Поэтому части вторичного поля, излученные разными участками экрана, складываются когерентно. Керн квантового объекта неделимым подходит к одной из щелей. Угол рассеяния керна на щели может быть разным. С точки зрения стандартной квантовой механики этот процесс не имеет определенной причины. В терминах настоящей статьи в этом процессе щель является для квантового объекта областью бифуркации. Поведение конкретного квантового объекта в этой области определяется случайной силой. Такой случайной силой является взаимодействие керна со вторичным классическим полем, излученным экраном. Это поле очень слабое, но когерентное керну. Поэтому оно с ним взаимодействует резонансным образом. Структура вторичного поля в районе нахождения керна зависит от того, открыта ли одна из щелей или обе. Поэтому ансамбль квантовых объектов, рассеянных на двух открытых щелях, не является простой смесью ансамблей квантовых объектов, рассеянных на каждой из щелей по отдельности. В результате возникает интерференционная картина.

Конечно, приведенные качественные рассуждения недостаточны для количественного расчета интерференционной картины. Для такого количественного расчета можно воспользоваться математическим аппаратом стандартной квантовой механики. Дело в том, что интерференционная картина возникает только тогда, когда произошло рассеяние очень большого числа квантовых объектов (см. [49]). В этом случае мы имеем дело не с отдельным элементарным состоянием, а с большим количеством эквивалентных элементарных состояний. По закону больших чисел эту совокупность элементарных состояний мы можем заменить классом эквивалентности, т. е. квантовым состоянием. Здесь мы оказываемся в области применимости методов стандартной квантовой механики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый в настоящей статье подход к квантовой теории ни в коей мере не отвергает стандартную квантовую механику. Отцы-основатели построили замечательное здание — квантовую механику. Но они начали возводить это здание со второго этажа — с описания вероятностей и средних значений. Поэтому для устойчивости этого здания потребовалось большое количество подпорок в виде целого ряда «принципов»: принцип суперпозиции, принцип неопределенности, принцип дополнительности, проекционный принцип, принцип неразличимости, принцип отсутствия траекторий. Все эти принципы далеко несамоочевидны и выглядят в достаточной мере искусственными. С другой стороны, пришлось отказаться от принципов (принцип причинности, формальная логика), которые были проверены всей предыдущей историей человечества. Конечно, может оказаться, что эти последние принципы всего лишь прочно укоренившиеся заблуждения. Такое в истории бывало. Однако прежде чем от них отказываться, желательно испробовать по возможности большее количество способов сохранить эти принципы. Предложенная здесь схема является таким способом.

В некотором смысле отношение этой схемы к стандартной квантовой механике аналогично отношению статистической физики к термодинамике. Термодинамика может строиться на основании собственных принципов без ссылок на статистическую физику. Исторически именно так она и строилась. Однако известно, какой мощный импульс в своем развитии получила термодинамика, когда принципы термодинамики перестали рассматриваться в качестве первичных законов. Вместо этого их стали рассматривать как следствия более фундаментальных законов статистической физики. В этом случае в физику в полной мере удалось вовлечь мощный аппарат теории вероятностей.

Отличительной чертой статистической физики является то, что в ней можно ввести понятие «элементарное событие». В статистической физике, которая изучает поведение физических систем, состоящих из огромного числа составных частей, элементарное событие — это состояние всех этих частей. Практически это элементарное событие не наблюдаемо и не может быть зафиксировано. Но его существование имеет принципиальное значение. Оно позволяет использовать теорию вероятностей.

В стандартной квантовой механике, как это было в термодинамике, понятие «элементарное событие» отсутствует. Принципиальной особенностью предложенного в данной статье подхода является то, что в нем введено понятие «элементарное состояние», которое может рассматриваться в качестве элементарного события. Аналогично тому, как в статистической физике элементарное состояние не наблюдаемо, но позволяет в полной мере использовать классическую формальную логику и стандартную теорию вероятностей.

Понятие «элементарное состояние» позволяет установить область применимости математического аппарата стандартной квантовой механики. Это изучение ансамблей квантовых объектов, которые могут быть описаны «квантовым состоянием». Это очень важный вид ансамблей, но далеко не самый общий. В частности, стандартная квантовая механика не позволяет в общем случае описывать индивидуальные квантовые объекты. С другой стороны, аппарат современной теории вероятностей достаточно мощен, чтобы описывать поведение ансамблей более общего вида. Это позволяет надеяться, что область применимости квантовой механики удастся расширить.

Кроме того, с помощью элементарного состояния, которое соответствует поведению индивидуального квантового объекта, можно дать интуитивно понятную интерпретацию квантовых явлений. Понятие элементарного состояния позволяет отказаться от использования так называемой квантовой логики и квантовой теории вероятностей. Обе эти схемы в настоящее время существуют главным образом в виде анонса, а отнюдь не в виде четко разработанных схем. Интуитивно они представляются малоправдоподобными.

Предложенная схема позволяет с общих позиций описывать квантовые и классические системы. Тем самым снимается весьма болезненный в стандартной квантовой механике вопрос о том, какая из теорий — квантовая или классическая — логически первична.

Наконец, данная схема позволяет не отказываться от принципа причинности как принципа, общего для классической и квантовой физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
2. *Сигал И.* Математические проблемы релятивистской физики. М.: Мир, 1968.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
4. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
5. *Холево А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980.
6. *Эмх Ж.* Алгебраический подход в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
7. *Хоружий С. С.* Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М.: Наука, 1986.
8. *Боголюбов Н. Н. и др.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
9. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2001. Т. 129, № 1. С. 87.
10. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2002. Т. 132, № 3. С. 434.
11. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2005. Т. 142, № 3. С. 510.
12. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
13. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
14. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
15. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
16. *Бор Н.* Квантовый постулат и новейшее развитие атомной теории // Избр. науч. тр.: В 2 т. М.: Наука, 1971. Т. 2. С. 30.
17. *Zeilinger A.* // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. P. S289.
18. *Фок В. А.* Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.
19. *Бор Н.* Дискуссия с Эйнштейном по проблемам теории познания в атомной физике // Избр. науч. тр.: В 2 т. М.: Наука, 1971. Т. 2. С. 399.
20. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976.
21. *Блохинцев Д. И.* // УФН. 1977. Т. 122, № 4. С. 745.
22. *Блохинцев Д. И.* Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1987.
23. *Блохинцев Д. И.* Квантовая механика. Лекции по избранным вопросам. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
24. *Славнов Д. А.* // ТМФ. 2003. Т. 136, № 3. С. 437.
25. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
26. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.
27. *Jordan P.* // Z. Phys. 1933. Bd. 80. S. 285.
28. *Bohm D.* // Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 166.

29. *Стритер Р., Вайтман А. С.* PCT, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966.
30. *Born M.* // Z. Phys. 1926. Bd. 37. S. 863; Bd. 38. S. 803; 1927. Bd. 40. S. 167.
31. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
32. *Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н.* // УФН. 1936. Т. 16, вып. 4. С. 440.
33. *Bell J. S.* // Physics. 1965. V. 1. P. 195.
34. *Bell J. S.* On the Einstein–Podolsky–Rosen Paradox // Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Paper on Quantum Philosophy. Cambridge, 1993. P. 139.
35. *Clauser J. F. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 23. P. 880.
36. *Kochen S., Specker E. P.* // J. Math. Mechanics. 1967. V. 17. P. 59.
37. *Home D., Whitaker M. A. B.* // Phys. Rep. 1992. V. 210. P. 223.
38. *Бом Д.* Квантовая теория. М.: Наука, 1965.
39. *Бор Н.* // УФН. 1936. Т. 16, вып. 4. С. 446.
40. *Фок В. А.* // Там же. С. 436.
41. *Schrödinger E.* // Naturwissenschaften. 1935. Bd. 23. S. 807.
42. *Белокуров В. В., Тимофеевская О. Д., Хрусталев О. А.* Квантовая телепортация — обыкновенное чудо. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
43. *Araki H.* // Progr. Theor. Phys. 1964. V. 32, No. 5. P. 844.
44. *Haag R., Kastler D.* // J. Math. Phys. 1964. V. 5, No. 7. P. 848.
45. *Namiki M., Pascazio S.* // Phys. Rep. 1993. V. 232. P. 301.
46. *Wheeler J. A.* Mathematical Foundation of Quantum Theory. N. Y., 1978. P. 9.
47. *Alley C. O., Jakubowicz O. G., Wicks W. C.* // Proc. of the Second Intern. Symp. on the Foundations of Quantum Mechanics. Tokyo, 1987. P. 36.
48. *Hellmuth T. et al.* // Phys. Rev. A. 1987. V. 35. P. 2532.
49. *Tonomura A.* // Phys. Today. 1990. V. 41. P. 22.