

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЯДЕРНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОЦЕССАХ СЛИЯНИЯ-ДЕЛЕНИЯ

*В. И. Загребаяев<sup>а</sup>, А. В. Карпов<sup>а</sup>, Я. Аритомо<sup>а</sup>, М. А. Науменко<sup>а</sup>,  
В. Грайнер<sup>б</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Франкфуртский университет, Франкфурт, Германия

ВВЕДЕНИЕ	893
ДИАБАТИЧЕСКИЙ ЯДРО-ЯДЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ	898
МАКРО-МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АДИАБАТИЧЕСКАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ	911
ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЯДЕРНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОЦЕССАХ СЛИЯНИЯ-ДЕЛЕНИЯ	922
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	934
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	936

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЯДЕРНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОЦЕССАХ СЛИЯНИЯ-ДЕЛЕНИЯ

*В. И. Загрбаев<sup>а</sup>, А. В. Карпов<sup>а</sup>, Я. Аритомо<sup>а</sup>, М. А. Науменко<sup>а</sup>,  
В. Грайнер<sup>б</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Франкфуртский университет, Франкфурт, Германия

В работе обсуждается проблема описания низкоэнергетической ядерной динамики и построения многомерной потенциальной энергии ядерной системы, зависящей от нескольких коллективных степеней свободы и позволяющей на единой основе анализировать процессы глубоко-неупругого рассеяния, слияния и деления. Необходимость единого описания диктуется сильной связью и значительным перекрытием этих каналов реакции в тяжелых ядерных системах, используемых, в частности, для синтеза сверхтяжелых элементов. Многомерный адиабатический потенциал построен на основе расширенной версии двухцентровой оболочечной модели. Он имеет правильную асимптотику и высоту кулоновского барьера во входном канале (слияние) и подходящее поведение в выходном канале, обеспечивающее требуемые массовые и энергетические распределения фрагментов реакции и осколков деления. Полученный драйвинг-потенциал предлагается использовать для адекватного динамического анализа низкоэнергетических процессов взаимодействия тяжелых ядер.

A problem of description of low-energy nuclear dynamics and derivation of multidimensional potential energy surface, depending on several collective degrees of freedom and allowing one to perform a unified analysis of the processes of deep-inelastic scattering, fusion and fission, is discussed in the paper. A unified description is required due to strong coupling and significant overlapping of these reaction channels in heavy nuclear systems used, in particular, for synthesis of superheavy elements. Multidimensional adiabatic potential is derived basing on extended version of the two-center shell model. It has correct asymptotic value and height of the Coulomb barrier in the entrance channel (fusion) and appropriate behavior in the exit one, giving required mass and energy distributions of reaction products and fission fragments. Derived driving potential is proposed to be used for adequate dynamic analysis of low-energy interactions of heavy nuclei.

PACS: 24.10.-i, 25.70.-z

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительно возрос интерес к процессам околобарьерного столкновения тяжелых ядер. С одной стороны, этот интерес обусловлен реальной возможностью с помощью этих реакций синтезировать и изучать свойства сверхтяжелых ядер в области предполагаемого острова стабильности [1]. С другой стороны, изучение динамики этих процессов представляет

самостоятельный интерес как для более глубокого понимания механизмов реакции (в частности, проявления оболочечных эффектов и процессов квазиделения [2]), так и для извлечения фундаментальных ядерных характеристик, таких как ядерная вязкость и скорость нуклонного обмена (см. [3] и многочисленные ссылки там по данной теме, а также недавнюю работу [4]). В последние годы появилась возможность изучать процессы слияния атомных ядер и в глубокоподбарьерной области [5]. Измерение сечений таких процессов имеет чрезвычайно важное значение для астрофизических исследований. Найденные отклонения от барьерной проницаемости, рассчитанной с помощью стандартного метода связанных каналов, могут свидетельствовать о более сложном поведении ядро-ядерного потенциала взаимодействия на малых расстояниях в области перекрытия ядерных поверхностей.

Анализ околобарьерных ядро-ядерных столкновений показывает, что основными каналами реакции здесь являются глубоконеупругое рассеяние [6] и квазиделение [2, 7], в то время как вероятность слияния (образования составного ядра) чрезвычайно мала. Именно процесс квазиделения в тяжелых ядерных системах значительно подавляет процесс слияния. Заметим, что процессы квазиделения проявляются и играют заметную роль также при слиянии сравнительно легких атомных ядер [2, 8]. При энергиях столкновения, близких к высоте кулоновского барьера во входном канале, вероятность слияния не превышает  $10^{-3}$  для масс-асимметричных реакций с участием  $^{48}\text{Ca}$  и трансактинидных мишеней. Эта вероятность намного меньше в более симметричных комбинациях, используемых в реакциях «холодного синтеза» (рис. 1).

Для того чтобы оценить столь малые величины, прежде всего необходимо уметь правильно описывать основные каналы реакции, а именно глубоконеупругое рассеяние и квазиделение. Процессы квазиделения, как правило, трудно отличимы от процессов глубоконеупругого рассеяния, а часто и от процессов обычного деления, являющегося основным каналом распада тяжелого возбужденного ядра. Таким образом, чрезвычайно важно проводить анализ всего процесса в рамках единого подхода с учетом сильной связи и перекрытия всех реакционных каналов: глубоконеупругого рассеяния, квазиделения, слияния и обычного деления. Заметим, что эти процессы до сих пор описываются, как правило, в совершенно разных подходах с использованием разных степеней свободы и уравнений движения.

Единый подход к описанию сильносвязанных каналов реакции подразумевает использование единых (общих для всех каналов) коллективных степеней свободы, единой многомерной потенциальной поверхности, зависящей от этих координат и регулирующей весь процесс слияния-деления, и единого набора связанных динамических уравнений движения. Подходящий выбор единых степеней свободы, играющих наиболее важную роль как на стадии сближения ядер, так и на стадии разделения фрагментов, является очень важ-

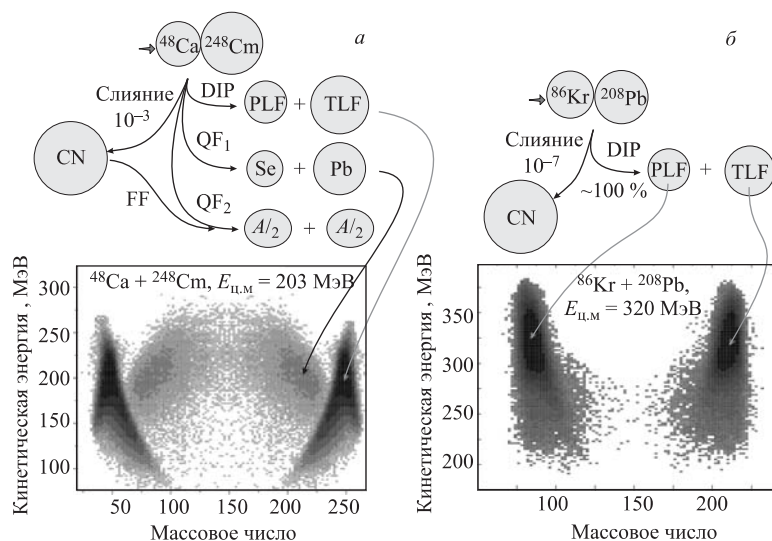


Рис. 1. Основные каналы реакции и экспериментальные массово-энергетические распределения фрагментов при околобарьерных столкновениях  $^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$  и  $^{86}\text{Kr} + ^{208}\text{Pb}$

ной и трудной задачей. Число таких переменных не должно быть очень большим, для того чтобы в дальнейшем было возможно проводить численные решения соответствующей системы динамических уравнений. С другой стороны, при ограниченном числе коллективных координат невозможно одновременно описать процессы глубоконеупругого рассеяния разделенных ядер и процессы деления (квазиделения) образующегося сильнодеформированного моноядра. Расстояние между центрами ядер (удлинение моноядра), динамические деформации фрагментов, их взаимная ориентация и, наконец, массовая асимметрия, описывающая процесс передачи нуклонов, являются, на наш взгляд, наиболее подходящими переменными для адекватного моделирования процессов слияния-деления тяжелых ядерных систем.

Для выбранного набора коллективных степеней свободы необходимо правильным образом рассчитать потенциальную энергию ядерной системы — многомерную функцию этих переменных. Потенциал взаимодействия двух разделенных ядер вычисляется достаточно просто (см. разд. 1). Безусловно, некоторая неопределенность остается и здесь, однако рассчитываемые высоты кулоновских барьеров в пределах 1–2 МэВ согласуются с экспериментальными значениями и/или с параметризацией Басса [9]. После контакта ядер (происходящего на несколько меньших расстояниях, чем положение

кулоновского барьера) механизм взаимодействия сталкивающихся ядер становится более сложным. Для быстрых столкновений, когда скорость сближения ядер соизмерима с нуклонными скоростями внутри ядра (диабатические условия), ядро-ядерный потенциал  $V_{\text{diab}}$  должен проявлять дополнительное отталкивание на малых расстояниях, препятствующее проникновению «замороженных» ядер друг в друга и образованию ядерной материи с удвоенной плотностью [10, 11]. Для медленных (околобарьерных) столкновений, когда нуклоны имеют достаточно времени для установления равновесного распределения и форма ядер изменяется таким образом, что плотность ядерного вещества остается неизменной (адиабатические условия), потенциальная энергия ядерной системы  $V_{\text{adiab}}$  имеет принципиально иной вид (рис. 2). Вычисление многомерной поверхности адиабатической потенциальной энергии для тяжелой ядерной системы является сложной физической проблемой, не решенной до сих пор в полной мере.

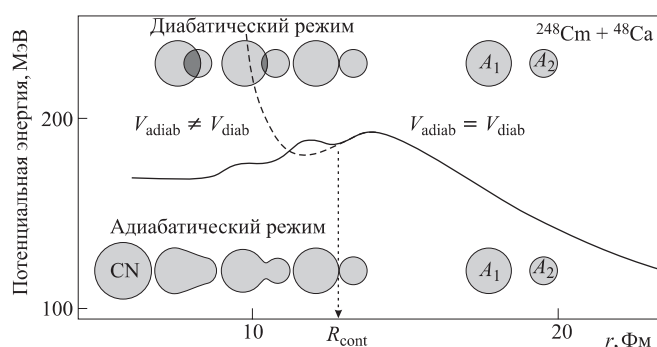


Рис. 2. Потенциальная энергия в системе  $^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$  при быстрых (штриховая кривая) и медленных (сплошная) столкновениях (нулевые динамические деформации фрагментов)

На рис. 3 показана эволюция волновой функции внешнего нейтрона, находящегося первоначально в состоянии  $2d_{5/2}$  ядра  $^{96}\text{Zr}$ , при околобарьерном столкновении ядер  $^{40}\text{Ca} + ^{96}\text{Zr}$ . Нейтронная волновая функция была получена непосредственно из численного решения трехчастичного нестационарного уравнения Шредингера, соответствующего данной системе [12]. Нетрудно видеть, что волновой пакет валентного нейтрона, следуя эволюции двухцентрового молекулярного состояния, растекается по всему объему обоих ядер чрезвычайно быстро, еще до того, как ядра соприкасаются, и даже раньше, чем они преодолевают кулоновский барьер. Таким образом, микроскопические квантовые расчеты подтверждают важную роль, которую играют

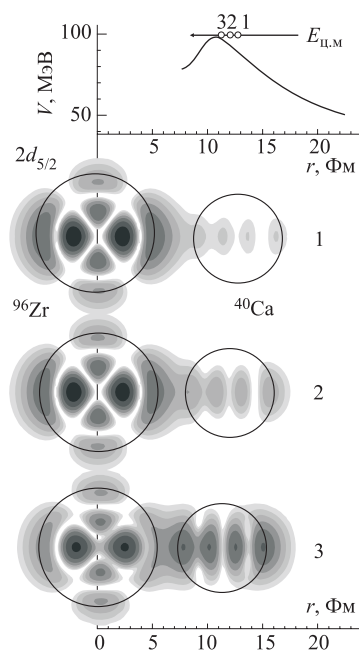


Рис. 3. Амплитуда волновой функции валентного нейтрона, находящегося вначале в состоянии  $2d_{5/2}$  ядра  $^{96}\text{Zr}$ , при трех различных расстояниях между сталкивающимися ядрами  $^{40}\text{Ca} + ^{96}\text{Zr}$ , потенциальная энергия которых показана в верхней части рисунка

нейтронные передачи, а также механизм коллективизации нуклонов при околобарьерном слиянии ядер [13, 14]. В этой связи для построения адиабатической потенциальной энергии ядерной системы наиболее уместным представляется использование именно двухцентровой оболочечной модели [16, 17].

Стандартная версия этой модели, однако, с обычной параметризацией макроскопической (жидкокапельной) части полной энергии [18–20] и стандартным набором базисных функций для расчета одночастичных состояний не воспроизводит правильным образом ядро-ядерное взаимодействие в точке контакта и в асимптотической области двух разделенных ядер (см. разд. 2). Как следствие, в этой модели не получаются правильные значения кулоновских барьеров и потенциальных карманов, имеющих принципиальное значение для описания глубоконеупругих столкновений и процессов слияния-деления.

В данной работе на основе расширенной версии двухцентровой оболочечной модели получена лишенная этих недостатков многомерная адиабати-

ческая потенциальная энергия тяжелой ядерной системы, которая может быть использована для единого описания процессов глубоконеупругого рассеяния, квазиделения, слияния и обычного деления (разд. 3). Построенный потенциал имеет правильную асимптотику и высоту кулоновского барьера во входном канале и подходящее поведение в выходном канале, позволяющее правильным образом описать наблюдаемые массовые и энергетические распределения фрагментов реакции и осколков деления.

## 1. ДИАБАТИЧЕСКИЙ ЯДРО-ЯДЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**1.1. Феноменологические потенциалы.** В простейших расчетах потенциальная энергия взаимодействия двух разделенных ядер обычно параметризуется какой-либо функциональной зависимостью, например, потенциалом Вудса–Саксона или потенциалом «проксимити» (proximity) [21]. В случае небольших деформаций форма аксиально-симметричного ядра обычно определяется формулой

$$R(\beta, \theta) = \tilde{R} \left( 1 + \sum_{\lambda \geq 2} \beta_{\lambda} \sqrt{\frac{2\lambda + 1}{4\pi}} P_{\lambda}(\cos \theta) \right), \quad (1)$$

где  $\beta \equiv \{\beta_{\lambda}\}$  — безразмерные параметры деформации мультипольности  $\lambda = 2, 3, \dots$ ;  $P_{\lambda}$  — полиномы Лежандра,

$$\tilde{R} = R_0 \left[ 1 + \frac{3}{4\pi} \sum_{\lambda} \beta_{\lambda}^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{\lambda, \lambda', \lambda''} \sqrt{\frac{(2\lambda' + 1)(2\lambda'' + 1)}{4\pi(2\lambda + 1)}} (\lambda' 0 \lambda'' 0 | \lambda 0)^2 \beta_{\lambda} \beta_{\lambda'} \beta_{\lambda''} \right]^{-1/3}, \quad (2)$$

$R_0$  — радиус эквивалентной сферы с тем же объемом, что и объем деформированного ядра;  $(\lambda' 0 \lambda'' 0 | \lambda 0)$  — коэффициенты Клебша–Гордона. Потенциальная энергия взаимодействия двух деформированных ядер может быть записана в виде суммы кулоновской и ядерной энергии:

$$V_{12}(r; \beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2) = V_C(r; \beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2) + V_N(r; \beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2). \quad (3)$$

Здесь и далее индекс  $i = 1, 2$  нумерует взаимодействующие ядра, а  $\theta_{1,2}$  — ориентации осей симметрии деформированных ядер (рис. 4).

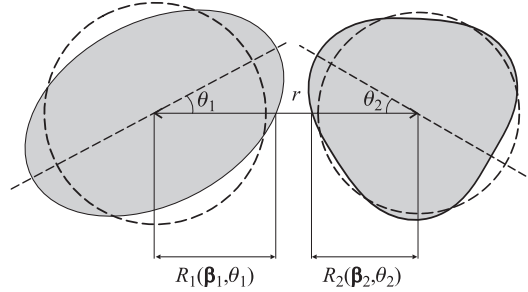


Рис. 4. Схематическое изображение относительного положения двух деформированных ядер, вращающихся в плоскости реакции

Пренебрегая мультиполь-мультипольным взаимодействием, с точностью до второго порядка по деформациям кулоновское взаимодействие деформированных ядер можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 V_C = & Z_1 Z_2 e^2 \left[ F^{(0)}(r) + \sum_{i=1}^2 \sum_{\lambda \geq 2} F_{i\lambda}^{(1)}(r) \beta_{i\lambda} Y_{\lambda 0}(\theta_i) \right] + Z_1 Z_2 e^2 \times \\
 & \times \sum_{i=1}^2 \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \sum_{\lambda=|\lambda'-\lambda''|}^{\lambda=\lambda'+\lambda''} F_{i\lambda}^{(2)}(r) \sum_{\mu} \int Y_{\lambda'\mu}^* Y_{\lambda''-\mu}^* Y_{\lambda 0} d\Omega \beta_{i\lambda'} \beta_{i\lambda''} Y_{\lambda 0}(\theta_i) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Здесь  $F_{\lambda}^{(n)}(r)$  — формфакторы взаимодействия. При  $r > R_1 + R_2$  имеем  $F^{(0)} = \frac{1}{r}$ ,  $F_{i\lambda}^{(1)} = \frac{3}{2\lambda+1} \frac{R_i^{\lambda}}{r^{\lambda+1}}$ ,  $F_{i\lambda=2}^{(2)} = \frac{6}{5} \frac{R_i^2}{r^3}$ ,  $F_{i\lambda=4}^{(2)} = \frac{R_i^4}{r^5}$ . При меньших значениях  $r$ , когда ядерные поверхности перекрываются, для формфакторов кулоновского взаимодействия получаются более сложные выражения [22], что, впрочем, несущественно для рассматриваемых здесь процессов слияния-деления, поскольку при  $r < R_1 + R_2$  ядерная система регулируется уже адиабатической потенциальной энергией (см. разд. 2). При описании вращения деформированных ядер обычно учитывается их квадрупольная и/или гексадекапольная деформация. Поскольку, как правило,  $\beta_4 \ll 1$ , то в третьем слагаемом сохраняются лишь члены с  $\lambda' = \lambda'' = 2$  и  $\lambda$  принимает значения 2 и 4.

Короткодействующее ядерное взаимодействие зависит от расстояния между поверхностями ядер, в качестве которого обычно используется расстояние вдоль межъядерной оси  $\xi = r - R_1(\beta_1, \theta_1) - R_2(\beta_2, \theta_2)$  (см. рис. 4). Это взаимодействие часто аппроксимируется потенциалом Вудса–Саксона, который записывается в форме  $V_{WS}(\xi) = V_0 [1 + \exp(\xi/a)]^{-1}$ , где  $\xi = r - R_V -$



$\Delta R_1 - \Delta R_2$ ,  $\Delta R_1 = R_1(\beta_1, \theta_1) - R_1$ ,  $\Delta R_2 = R_2(\beta_2, \theta_2) - R_2$ . Заметим, что для потенциала Вудса–Саксона радиус взаимодействия  $R_V = r_0^V (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$  обычно не совпадает с суммой радиусов самих ядер и  $r_0^V$  является дополнительным независимым параметром. Другой возможностью является использование потенциала проксимити для описания ядерного взаимодействия [21]:

$$V_{\text{prox}}(\xi) = 4\pi\gamma b P_{\text{sph}}^{-1} \Phi\left(\frac{\xi}{b}\right). \quad (5)$$

Здесь  $\Phi(\xi/b)$  — универсальный безразмерный формфактор;  $b$  — параметр толщины поверхностного слоя ( $\approx 1$  Фм),  $\gamma = \gamma_0(1 - 1,7826 I^2)$ ,  $\gamma_0 \approx 0,95$  МэВ  $\cdot$  Фм $^{-2}$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $I = (N - Z)/A$ ;  $\xi = r - R_1(\beta_1, \theta_1) - R_2(\beta_2, \theta_2)$ ;  $P_{\text{sph}} = 1/\bar{R}_1 + 1/\bar{R}_2$  и  $\bar{R}_i = R_i[1 - (b/R_i)^2]$ . Это взаимодействие наиболее чувствительно к выбору материальных радиусов ядер. Наиболее реалистические результаты получаются при выборе  $r_0 \approx 1,16$  Фм для радиусов тяжелых ядер ( $A > 40$ ) и  $r_0 \approx 1,22$  Фм для ядер с  $A \sim 16$ . Основное достоинство потенциала проксимити состоит в его универсальности, т. е. в отсутствии подгоночных параметров типа  $V_0, r_0^V, a_V$ .

Величина притяжения двух ядерных поверхностей зависит также от их кривизны [21, 23], т. е. от площади соприкасающихся поверхностей. Обычно это учитывается заменой  $P_{\text{sph}}$  в (5) на выражение

$$P(\beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2) = \left[ (k_1^{\parallel} + k_2^{\parallel})(k_1^{\perp} + k_2^{\perp}) \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где  $k_i^{\parallel, \perp}$  — главные параметры локальной кривизны поверхностей снаряда и мишени (см., например, [24]). Для сферических ядер  $k_i^{\parallel, \perp} = R_i^{-1}$  и  $P = P_{\text{sph}}$ . В случае межосевых динамических деформаций ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ), возникающих при медленных столкновениях динамически деформируемых ядер, локальная кривизна поверхностей может быть найдена в явном виде [25]:

$$\begin{aligned} P(\beta_1, \theta_1 = 0, \beta_2, \theta_2 = 0) = \\ = \sum_{i=1,2} \frac{1}{\bar{R}_i} \left( 1 + \sum_{\lambda \geq 2} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \beta_{i\lambda} \right)^{-2} \left( 1 + \sum_{\lambda \geq 2} (1 + \eta(\lambda)) \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \beta_{i\lambda} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\eta(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)/2$ . Для деформированных вращающихся ядер, в принципе, необходимо учитывать отличие кратчайшего расстояния между поверхностями  $\xi_s$  от расстояния  $\xi$ , вычисленного вдоль центральной линии (см. рис. 4). Однако для реалистических деформаций результирующий эффект учета неравенства  $\xi_s$  и  $\xi$  при вычислении потенциалов взаимодействия

и сечений слияния не очень велик по сравнению с эффектом изменения кривизны ( $P \neq P_{\text{sph}}$ ) [26].

Формально выражение (6) может обращаться в ноль при некоторых отрицательных значениях деформации (соприкосновение двух плоских поверхностей). Этот нефизический эффект возникает из-за пренебрежения конечными размерами площадей соприкасающихся поверхностей ядер и указывает на необходимость перехода к более точному приближению при больших отрицательных деформациях. Основной вклад в ядро-ядерный потенциал вносят взаимодействия наиболее близко расположенных нуклонов, число которых хотя и зависит от локальной кривизны поверхностей, но всегда конечно. Таким образом, вместо простой замены в (5)  $P_{\text{sph}}$  на величину  $P$  для короткодействующего межъядерного взаимодействия более правильно использовать выражение  $V_N = G(\beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2)V_N^0(r, \beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2)$ , где  $V_N^0$  — взаимодействие, вычисленное с учетом деформаций ядер и их взаимной ориентации, но без учета изменения кривизны поверхностей, а  $G(\beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2)$  — геометрический фактор, учитывающий изменение числа взаимодействующих нуклонов, находящихся в близко расположенных поверхностных слоях двух ядер, по сравнению со случаем сферических поверхностей. Приближенное выражение для геометрического фактора  $G(\beta_1, \theta_1, \beta_2, \theta_2)$ , который играет заметную роль при не очень малых деформациях, можно найти в работе [25].

**1.2. Фолдинг-потенциал.** Наиболее последовательным подходом к вычислению адиабатического ядро-ядерного потенциала взаимодействия является так называемая фолдинг-процедура (или процедура двойной свертки), в которой осуществляется простое суммирование и усреднение по плотностям ядер эффективных нуклон-нуклонных взаимодействий (см., например, [27]). Эффекты, обусловленные изменением кривизны ядерных поверхностей, при этом автоматически учитываются. В этом подходе межъядерное взаимодействие достаточно просто вычисляется также для случая произвольной ориентации статически деформированных ядер (см. ниже). Потенциал взаимодействия при этом записывается в виде

$$V_{12}(r; \beta_1, \Omega_1, \beta_2, \Omega_2) = \int_{V_1} \rho_1(\mathbf{r}_1) \int_{V_2} \rho_2(\mathbf{r}_2) v_{NN}(\mathbf{r}_{12}) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2, \quad (8)$$

где  $v_{NN}(\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  — эффективный нуклон-нуклонный потенциал;  $\rho_i(\mathbf{r}_i)$  — плотность распределения ядерного вещества в  $i$ -м ядре.

Плотность ядерного вещества  $\rho(\mathbf{r})$  обычно выбирается в виде фермиевской функции с диффузностью  $a$ :

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R(\Omega_{\mathbf{r}})}{a}\right)}, \quad (9)$$

где  $R(\Omega_r)$  — радиус точки на поверхности ядра ( $\Omega_r$  — сферические координаты вектора  $\mathbf{r}$ ), а значение  $\rho_0$  определяется из условия нормировки  $\int \rho_i d^3\mathbf{r} = A_i$ .

Эффективный нуклон-нуклонный потенциал состоит из короткодействующей ядерной части и дальнодействующей кулоновской  $v_{NN} = v_{NN}^{(N)} + v_{NN}^{(C)}$ . Последняя, очевидно, действует только между протонами. Для ядерной части эффективного нуклон-нуклонного взаимодействия используются как конечный, так и нулевой радиус действия. Среди потенциалов конечного радиуса действия наиболее часто используется потенциал МЗУ. Потенциал МЗУ представляется в виде суммы трех функций Юкавы и состоит из прямой и обменной части. Для каждой из этих частей существуют две параметризации: МЗУ-Reid [28] и более современная — МЗУ-Paris [29, 30].

Фолдинг-потенциал для прямой части МЗУ-взаимодействия рассчитывается по формуле (8). Для обменной части фолдинг-процедура существенно усложняется. Вводя одночастичные матрицы плотности  $\rho_{1(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  [ $\rho_{1(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \equiv \rho_{1(2)}(\mathbf{r})$ ], имеем для обменного взаимодействия [31–33]:

$$V_{12}^{(\text{exch})}(r; \beta_1, \Omega_1, \beta_2, \Omega_2) = \int_{V_1} \rho_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{12}) \int_{V_2} \rho_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{12}) \times \\ \times v_{NN}^{(\text{exch})}(\mathbf{r}_{12}) \exp\left(\frac{i\mathbf{k}(\mathbf{r})\mathbf{r}_{12}}{M}\right) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2, \quad (10)$$

где

$$k^2(\mathbf{r}) = \frac{2mM}{\hbar^2} [E_{\text{cm}} - V_{12}], \quad (11)$$

$M = A_1 A_2 / (A_1 + A_2)$  — приведенное массовое число;  $m$  — масса нуклона. Легко видеть, что вычисление фолдинг-потенциала с учетом обменного взаимодействия приводит к интегральному уравнению из-за зависимости  $k$  от полного потенциала взаимодействия ядер.

Существенного упрощения в расчете обменного фолдинг-потенциала удалось достичь в работах [34, 35]. Было показано, что потенциал обменного взаимодействия с достаточной степенью точности может быть описан потенциалом нулевого радиуса действия

$$v_{NN}^{(\text{exch})}(\mathbf{r}_{12}) = \hat{J}\delta(\mathbf{r}_{12}), \quad (12)$$

где  $\hat{J}$  — амплитуда обменного взаимодействия. Легко видеть, что в этом случае фолдинг-процедура (10) сводится к выражению (8) с потенциалом (12).

Не зависящий от плотности МЗУ-потенциал не удовлетворяет условию насыщения для холодной ядерной материи. Поэтому было предложено ввести в МЗУ-тип взаимодействия плотностную зависимость. Новый, зависящий

от плотности потенциал МЗУ получается домножением не зависящего от плотности МЗУ-потенциала на некую функцию  $F(\rho = \rho_1 + \rho_2)$ . Было предложено несколько вариантов плотностной зависимости потенциала МЗУ. В работе [36] была введена экспоненциальная форма функции  $F$ :

$$F(\rho) = C[1 + \alpha \exp(-\beta\rho)]. \quad (13)$$

С использованием МЗУ-Reid- и МЗУ-Paris-взаимодействий были подобраны параметры выражения (13) [37]. Однако из-за сильной экспоненциальной зависимости в (13) был получен только нижний предел коэффициента несжимаемости ядерной материи  $K \leq 176$  МэВ. Для получения других решений была также предложена более гибкая степенная параметризация плотностной зависимости [37]:

$$F(\rho) = C[1 - \alpha\rho^\beta]. \quad (14)$$

Для простоты расчета фолдинг-потенциала значение коэффициента  $\beta$  обычно выбирается целым. С целыми  $\beta = 1, 2, 3$  значения коэффициента несжимаемости равны  $K = 270, 418, 566$  МэВ. Поскольку, однако, из экспериментальных данных следует, что значения  $K$  лежат в области  $(270 \pm 60)$  МэВ, то для получения таких значений в работе [38] была введена гибридная версия плотностной зависимости МЗУ-потенциала

$$F(\rho) = C[1 + \alpha \exp(-\beta\rho) - \gamma\rho]. \quad (15)$$

Значения констант, входящих в выражения (13)–(15), подбираются таким образом, чтобы воспроизвести свойства насыщения в симметричной ядерной материи, а именно: энергию связи на нуклон, равную 16 МэВ, и плотность  $\rho_0 \approx 0,17$  Фм<sup>-3</sup>, при которой наступает насыщение.

При соответствующем выборе параметров фолдинг-потенциал с МЗУ-взаимодействием хорошо описывает барьеры слияния ядер. Однако в области перекрытия ядер, где должно возникать отталкивание из-за действия принципа Паули, препятствующего удвоению ядерной плотности, МЗУ-взаимодействие дает слишком сильное притяжение. Одно из решений этой проблемы было предложено в работе [39], где был введен дополнительный феноменологический нуклон-нуклонный отталкивательный потенциал нулевого радиуса действия в области перекрытия ядер. В этом подходе суммарный ядерный потенциал взаимодействия ядер находится как суперпозиция притягивательного потенциала с МЗУ-взаимодействием и отталкивательного, вычисляемого по формуле

$$V_{12}^{(\text{rep})}(r; \beta_1, \Omega_1, \beta_2, \Omega_2) = V_{\text{rep}} \int_{V_1} \rho_1'(\mathbf{r}_1) \int_{V_2} \rho_2'(\mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_{12}) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2. \quad (16)$$

Штрихи у плотностей в формуле (16) означают, что они рассчитываются с меньшими диффузностями и радиусами по сравнению с МЗУ-частью потенциала. В работе [39] для симметричной системы  $^{24}\text{Mg} + ^{24}\text{Mg}$  были подобраны следующие значения параметров для МЗУ-части потенциала:  $r_0 = 1,02$  Фм,  $a = 0,48$  Фм, а для отталкивательной части:  $r'_0 = 0,95$  Фм,  $a' = 0,45$  Фм,  $V_{\text{геп}} = 500$  МэВ. При этих значениях суммарный фолдинг-потенциал оказался близким к потенциалу проксимити. Понятно, что эти значения не являются универсальными и для другой пары ядер необходимо заново выбирать величину этих параметров. В литературе отсутствует какая-либо глобальная параметризация этих пяти параметров для достаточно широкой группы ядер. Получить такую глобальную параметризацию пяти параметров представляется довольно сложным, если опираться только на высоту кулоновского барьера и его положение.

В качестве альтернативного нуклон-нуклонного взаимодействия нулевого радиуса действия, существенно упрощающего вычисление шестимерного интеграла (8), в работе [40] было предложено использовать зависящий от плотности эффективный потенциал Мигдала [41]

$$v_{NN}^{(N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C \left[ F_{\text{ex}} + (F_{\text{in}} - F_{\text{ex}}) \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1) + \rho_2(\mathbf{r}_2)}{\rho_{00}} \right] \delta(\mathbf{r}_{12}) = v_{\text{eff}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta(\mathbf{r}_{12}), \quad (17)$$

где

$$F_{\text{ex(in)}} = f_{\text{ex(in)}} \pm f'_{\text{ex(in)}}. \quad (18)$$

Здесь знак «плюс» соответствует взаимодействию одинаковых частиц (протон–протон или нейтрон–нейтрон), а «минус» — разных (протон–нейтрон). Для фиксированного значения нормировочной константы  $C = 300$  МэВ·Фм<sup>3</sup> в [41] были рекомендованы следующие значения амплитуд:  $f_{\text{in}} = 0,09$ ;  $f_{\text{ex}} = -2,59$ ;  $f'_{\text{in}} = 0,42$ ;  $f'_{\text{ex}} = 0,54$ . Величина  $\rho_{00}$  есть плотность распределения нуклонов в центре ядра, которую мы определяем как среднее арифметическое соответствующих величин для налетающего ядра и ядра-мишени:  $\rho_{00} = (\rho_{01} + \rho_{02})/2$ . Потенциал (17) определяется амплитудой  $F_{\text{ex}}$  при взаимодействии «свободных» нуклонов (т.е. нуклонов из хвостов плотности распределения ядерной материи, где  $\rho_1(\mathbf{r}_1) + \rho_2(\mathbf{r}_2) \cong 0$ ), амплитудой  $F_{\text{in}}$  при взаимодействии свободного нуклона с нуклоном, находящимся внутри ядра ( $\rho_1(\mathbf{r}_1) + \rho_2(\mathbf{r}_2) \cong \rho_{00}$ ), и величиной  $(2F_{\text{in}} - F_{\text{ex}})$ , если оба взаимодействующих нуклона находятся внутри ядра (т.е. при удвоении ядерной плотности).

Плотность ядерного вещества  $\rho_i$  является суммой плотностей протонов и нейтронов:  $\rho_i = \rho_i^{(p)} + \rho_i^{(n)}$ . Учитывая теперь, что протон-протонное взаимо-

действие содержит также и кулоновскую часть, окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 V_{12}(r; \beta_1, \Omega_1, \beta_2, \Omega_2) = & \int_{V_1} \rho_1^{(p)}(\mathbf{r}_1) d^3 \mathbf{r}_1 \int_{V_2} \rho_2^{(p)}(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{r_{12}} d^3 \mathbf{r}_2 + \\
 & + \int_{V_1} \left\{ \left[ \rho_1^{(p)}(\mathbf{r}_1) \rho_2^{(p)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) + \rho_1^{(n)}(\mathbf{r}_1) \rho_2^{(n)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \right] v_{\text{eff}}^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) + \right. \\
 & \left. + \left[ \rho_1^{(p)}(\mathbf{r}_1) \rho_2^{(n)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) + \rho_1^{(n)}(\mathbf{r}_1) \rho_2^{(p)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \right] v_{\text{eff}}^{(-)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \right\} d^3 \mathbf{r}_1, \quad (19)
 \end{aligned}$$

где верхний индекс у эффективного потенциала соответствует знаку в (18). Протонные и нейтронные плотности мы параметризовали с помощью (9), считая их одинаковыми в центре ядер, т.е.  $\rho_{i0}^{(p)} = \rho_{i0}^{(n)} = \rho_{i0}$ . Таким образом, данная фолдинг-модель содержит лишь два параметра: радиус плотности распределения протонов в ядре  $r_0^{(p)}$  ( $R_Z = r_0^{(p)} A^{1/3}$ ) и диффузность  $a$ . Зная  $r_0^{(p)}$ , можно определить  $\rho_{0i}$  из условия нормировки плотности заряда на число протонов в  $i$ -м ядре. Далее, используя условие нормировки нейтронной плотности, находим соответствующий нейтронный радиус  $r_0^{(n)}$ .

Глобальная параметризация зарядового радиуса  $r_0^{(p)}$  может быть получена из аппроксимации имеющихся экспериментальных данных [42, 43], удобная компиляция которых может быть найдена на сайте [44]. Предлагаемая нами параметризация

$$r_0^{(p)}(Z) = 0,94 + \frac{32}{Z^2 + 200} \quad (20)$$

изображена на рис. 5 и может быть использована для всех ядер тяжелее углерода. Значения второго параметра модели — диффузности  $a$  — мы подбирали

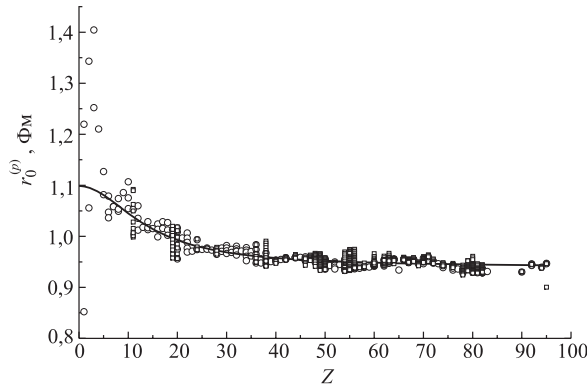


Рис. 5. Зависимость зарядового радиуса  $r_0^{(p)}$  от  $Z$ . Квадраты [42] и кружки [43] — экспериментальные данные; кривая — аппроксимация экспериментальных точек с помощью выражения (20)

исходя из наилучшего соответствия получаемых барьеров слияния ядер экспериментальным значениям или эмпирическим значениям барьеров Басса [9]. Исследовав различные комбинации пар сферически-симметричных ядер ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{60}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ ,  $^{144}\text{Sm}$ ,  $^{208}\text{Pb}$ ), мы получили следующую зависимость:

$$a(Z) = 0,734 - \frac{150}{Z^2 + 500}, \quad (21)$$

которая может быть рекомендована для расчетов ядро-ядерных фолдинг-потенциалов для  $A_{1,2} \geq 16$ . Сравнительный вид потенциалов взаимодействия сферических ядер  $^{48}\text{Ca}$  и  $^{208}\text{Pb}$ , полученных в разных моделях, показан на рис. 6.

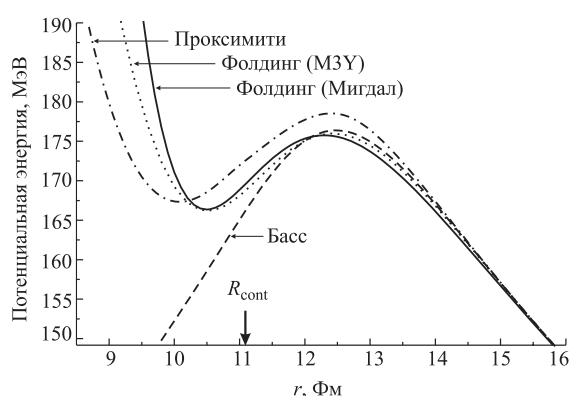


Рис. 6. Сравнение диабатических потенциалов взаимодействия ядер  $^{48}\text{Ca} + ^{208}\text{Pb}$ . Сплошная кривая — фолдинг-потенциал с силами Мигдала и параметризацией ядерных плотностей с помощью выражений (20) и (21); штриховая — потенциал Басса; штрихпунктирная — потенциал проксимити; точечная — фолдинг-потенциал с плотностно-независимым МЗУ-Reid-взаимодействием, обменным потенциалом (12) с  $\hat{J} = -276 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$  и отталкивательным кором (16) с параметрами  $r_0 = 1,16 \text{ Фм}$ ,  $a = 0,49 \text{ Фм}$ ,  $r'_0 = 1,13 \text{ Фм}$ ,  $a' = 0,435 \text{ Фм}$ ,  $V_{\text{геп}} = 500 \text{ МэВ}$

На рис. 7 изображена разница величин барьеров слияния и их положений, полученных в разных моделях. Темным символам соответствует разница между фолдинг-потенциалом с силами Мигдала и потенциалом Басса, а светлым — между тем же фолдинг-потенциалом и потенциалом проксимити (для комбинаций тяжелее Sn + Sn потенциал проксимити не имеет кармана). Из рис. 7 видно, что предлагаемые нами глобальные параметризации ядерной плотности (20) и (21) для расчета фолдинг-потенциала с силами Мигдала дают отклонение от величин барьеров слияния ядер, рассчитанных с потенциалом проксимити и/или параметризованных в модели Басса, в пределах  $\pm 3 \text{ МэВ}$ .

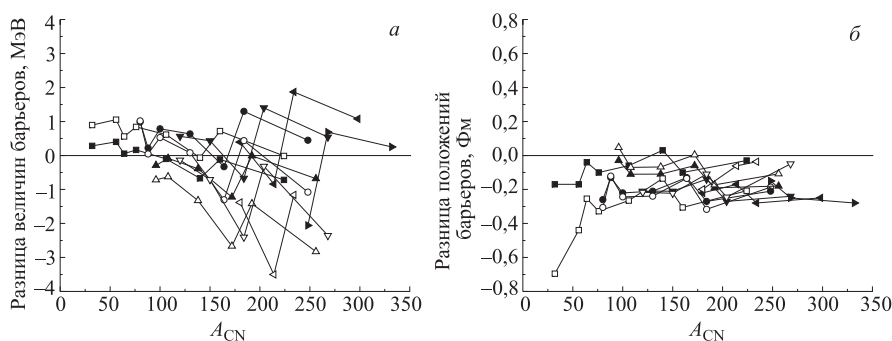


Рис. 7. Разница величин барьеров слияния (а) и их положений (б) для всех возможных комбинаций ядер  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{60}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ ,  $^{144}\text{Sm}$ ,  $^{208}\text{Pb}$ . Темным символам соответствует разница между фолдинг-потенциалом с силами Мигдала и потенциалом Басса, а светлым — между тем же фолдинг-потенциалом и потенциалом проксимити. Разным символам, соединенным линиями, соответствуют цепочки с разными налетающими ионами:  $\square, \blacksquare$  —  $^{16}\text{O} + \text{X}$ ;  $\circ, \bullet$  —  $^{40}\text{Ca} + \text{X}$ ;  $\triangle, \blacktriangle$  —  $^{48}\text{Ca} + \text{X}$ ;  $\nabla, \blacktriangledown$  —  $^{60}\text{Ni} + \text{X}$ ;  $\triangleleft, \blacktriangleleft$  —  $^{90}\text{Zr} + \text{X}$ ;  $\triangleright, \blacktriangleright$  —  $^{124}\text{Sn} + \text{X}$

Положение барьера при этом получается систематически заниженным примерно на 0,2 Фм, что не является чрезмерным с учетом экспериментальной неопределенности этой величины.

**1.3. Зависимость от ориентации и деформаций.** Наиболее эффективный метод расчета фолдинг-потенциала взаимодействия статически деформированных ядер, произвольно ориентированных относительно друг друга, основан на фурье-преобразовании подынтегрального выражения и разложении угловой зависимости плотности ядерного вещества в ряд по сферическим функциям [45, 46]. Если выбрать систему координат так, чтобы ось  $z$  была направлена вдоль межъядерной оси, то шестикратный интеграл (8) сводится к выражению [45–47]

$$V_{12}(r; \beta_1, \Omega_1, \beta_2, \Omega_2) = \sum_{\mu\lambda_1\lambda_2\lambda_3} V_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^{\mu-\mu_0} (r) \cos(\mu\Delta\varphi) d_{\mu_0}^{\lambda_1}(\theta_1) d_{-\mu_0}^{\lambda_2}(\theta_2), \quad (22)$$

где  $d_{MK}^L(\theta)$  — функции Вигнера;  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ;  $\theta_i$  и  $\varphi_i$  — полярные и азимутальные углы ориентации ядер, а радиальные мультиполи даются выражением

$$V_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^{\mu_1\mu_2\mu_3}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} i^{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} \sqrt{2\lambda_1+1} \sqrt{2\lambda_2+1} (2\lambda_3+1) \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} F_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(r). \quad (23)$$



Здесь  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$  —  $3j$ -символы. Часть выражения (23), зависящая от расстояния между центрами масс ядер, имеет вид

$$F_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}(r) = \int dq q^2 \tilde{\rho}_{\lambda_1}(q) \tilde{\rho}_{\lambda_2}(q) j_{\lambda_3}(qr) \tilde{v}_{NN}(q). \quad (24)$$

В (24)  $j_\lambda(q)$  — функции Бесселя;  $\tilde{\rho}_\lambda(q)$  — фурье-образ величин  $\rho_\lambda(q)$ :

$$\tilde{\rho}_\lambda(q) = 4\pi \int dr r^2 \rho_\lambda(r) j_\lambda(qr), \quad (25)$$

где  $\rho_\lambda(r)$  — коэффициенты разложения угловой части ядерной плотности по сферическим функциям:

$$\rho_\lambda(r) = \int d\Omega \rho(\mathbf{r}) Y_{\lambda 0}(\Omega). \quad (26)$$

Наконец, фурье-образ нуклон-нуклонного потенциала имеет вид

$$\tilde{v}_{NN}(q) = 4\pi \int ds s^2 v_{NN}(s) j_0(qs). \quad (27)$$

Отметим также, что в силу свойств  $3j$ -символов в выражении (23) ненулевыми будут лишь слагаемые, для которых комбинация  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  четная.

На рис. 8 показаны зависимости фолдинг-потенциала с силами Мигдала от расстояния между центрами масс и взаимной ориентации ядер для системы  $^{64}\text{Zn} + ^{150}\text{Nd}$ . Зависимости от азимутального угла  $\Delta\varphi$  для  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$  и  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$  показаны на рис. 8, *a* и *б*, а на рис. 8, *в* дана зависимость от полярного угла  $\theta_1 = \theta_2$  при  $\Delta\varphi = 0$ . Из рисунка видно сильное влияние угла  $\theta$  (ориентации ядер в плоскости реакции) на величину потенциальной энергии взаимодействия, в частности, на положение и величину кулоновского барьера. В то же время влияние угла  $\Delta\varphi$  сравнительно невелико — величина барьера меняется на величину порядка 2 МэВ в случае рис. 8, *a* и менее чем на 1 МэВ в случае рис. 8, *б*. Положение барьера при этом также меняется несущественно.

Для деформируемых ядер (когда  $\beta_1$  и  $\beta_2$  являются динамическими переменными) к энергии взаимодействия (3) и (8) надо добавить энергию деформации, которая в гармоническом приближении находится следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{\lambda} C_{i\lambda} (\beta_{i\lambda} - \beta_{i\lambda}^{\text{г.с.}})^2. \quad (28)$$

Здесь  $C_{i\lambda}$  — параметры жесткости ядерной поверхности, которые могут быть вычислены в жидкокапельной модели [48]. Заметим, что для больших динамических деформаций гармоническое приближение (28) может быть недостаточным. Энергию деформации в этом случае требуется вычислять более точно,

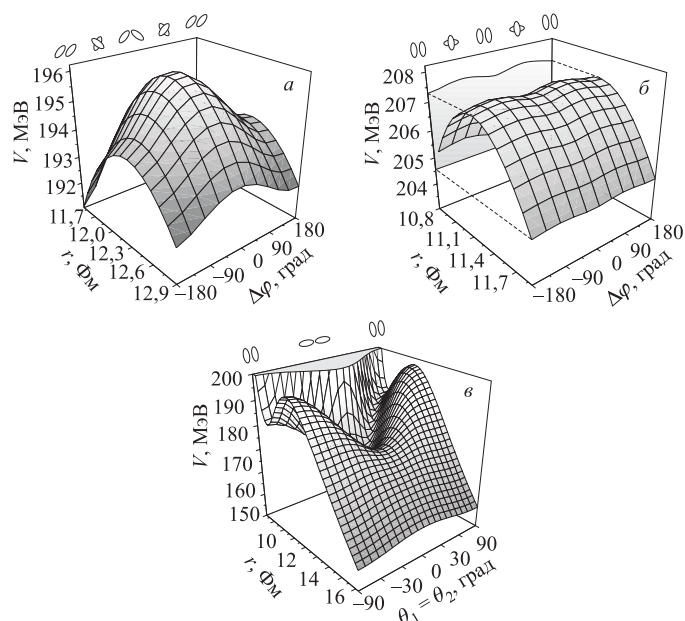


Рис. 8. Фолдинг-потенциал с силами Мигдала в зависимости от азимутальной и полярной ориентации статически деформированных ядер  $^{64}\text{Zn}(\beta_2^{g.s.} = 0,22)$  и  $^{150}\text{Nd}(\beta_2^{g.s.} = 0,24)$ . В верхней части рисунков схематически показано взаимное расположение ядер

например, в макро-микроскопическом подходе (см. ниже) как разность масс деформированного ядра и ядра в основном состоянии.

Как уже было сказано, расчет фолдинг-потенциала приводит к шестикратному интегрированию, что даже при использовании метода, изложенного выше, остается достаточно трудоемким. Однако при использовании сил Мигдала вычисление ядерной части фолдинг-потенциала существенно упрощается и сводится к трехкратному интегралу. Еще одно интегрирование может быть выполнено аналитически при наличии аксиальной симметрии у системы (ориентация ядер «нос к носу»).

Расчет кулоновской энергии взаимодействия произвольно ориентированных ядер с распределением заряда вида (9) не допускает подобных упрощений. В то же время для нулевой диффузности шестикратное интегрирование может быть сведено к четырехкратному [19], а для ориентации «нос к носу» и к трехкратному. Как показали расчеты, наличие диффузного края у ядра не оказывает практически никакого влияния на значение кулоновской энергии сферических ядер: фолдинг-потенциалы, рассчитанные для сферической деформации тяжелой системы  $^{238}\text{U} + ^{238}\text{U}$  с нулевой и ненулевой диф-

фузностью, различаются на величину, меньшую 0,15 МэВ, вплоть до точки контакта. Для более легких ядер различие будет еще меньше.

Диффузность оказывает гораздо большее влияние на следующие члены в разложении кулоновской энергии по мультиполям, т. е. в случае деформированных ядер. При этом знак эффекта зависит от углов ориентации: для ориентации «нос к носу» наличие диффузности увеличивает барьер слияния, а для ориентации «бок к боку» — уменьшает.

Исследовав несколько комбинаций деформированных ядер, мы получили, что влияние диффузности больше для тяжелых ядер и меньше для легких. При деформациях, соответствующих основным состояниям ядер, максимальная разница потенциалов до точки контакта составляет: для системы  $^{238}\text{U} + ^{238}\text{U}$  — 2,5 МэВ, для системы  $^{58}\text{Fe} + ^{244}\text{Pu}$  — около 1 МэВ, а для  $^{20}\text{Ne} + ^{58}\text{Fe}$  — лишь  $\sim 0,2$  МэВ.

**1.4. Сфероидальные деформации.** Если при описании формы ядра ограничиться квадрупольными деформациями в разложении по мультиполям (1), то при малых ее значениях форма ядра близка к эллипсоидальной. Однако при больших  $\beta_2 > 0,5$  появляется шейка, а  $\beta_2 = 4\sqrt{\pi/5} \simeq 3,17$  соответствует двум касающимся ядрам. Такая параметризация подходит для описания форм составного ядра, проходимых им в процессе деления.

В реакциях слияния-деления также могут возникать большие динамические деформации обоих ядер. Несмотря на это мы будем предполагать, что в первичном процессе в выходном канале всегда образуются лишь два фрагмента. После разлета эти фрагменты, в принципе, могут испытывать и деление (при достаточной энергии возбуждения), которое может быть рассмотрено уже в рамках статистической модели. Для того чтобы избежать появления более двух фрагментов в первичном процессе, при описании больших динамических деформаций лучше использовать параметризацию ядер в виде эллипсоидов вращения. Форма ядра при этом задается вращением относительно оси симметрии профильной функции, которая в цилиндрических координатах имеет вид

$$\rho_s^2(z) = a^2 \left( 1 - \frac{z^2}{b^2} \right), \quad (29)$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипсоида. Деформация ядра характеризуется одним параметром, который удобно выбрать в виде  $\delta = a/b - 1$ . Тогда, в силу сохранения объема, имеем  $a = R_0(1 + \delta)^{2/3}$  и  $b = R_0(1 + \delta)^{-1/3}$ , где  $R_0$  — радиус сферического ядра. Очевидно, что  $\delta = 0$  соответствует сферическому ядру. При малых деформациях  $\beta_2 \approx 4/3\sqrt{\pi/5}\delta \approx 1,057\delta$ .

**1.5. Нуклонные передачи и драйвинг-потенциал.** В низкоэнергетических ядро-ядерных столкновениях во всех каналах (глубоконеупругое рассеяние, квазиделение, слияние и обычное деление) большую роль играет пере-

дача нуклонов или перераспределение массы между фрагментами. Для макроскопического описания этих процессов обычно используют переменную массовой асимметрии  $\eta = (A_2 - A_1)/(A_1 + A_2)$ . Перераспределение нуклонов между разделенными ядрами приводит к изменению их внутренней энергии, т. е. их энергии связи. Такое изменение энергии удобно включить именно в потенциальную энергию ядерной системы:

$$V_{\text{diab}}(A, Z; r, \beta_1, \Omega_1, \beta_2, \Omega_2, \eta) = V_{12}(A_1, Z_1, A_2, Z_2; r, \beta_1, \Omega_1, \beta_2, \Omega_2) + M(A_1, Z_1; \beta_1) + M(A_2, Z_2; \beta_2) - M(A_T, Z_T; \beta_T^{\text{g.s.}}) - M(A_P, Z_P; \beta_P^{\text{g.s.}}). \quad (30)$$

Здесь  $M(A_{1,2}, Z_{1,2})$  — массы образующихся фрагментов, а постоянная величина  $M(A_T, Z_T) + M(A_P, Z_P)$  (сумма масс налетающих ядер) добавлена для того, чтобы результирующий потенциал обращался в ноль на бесконечности именно во входном канале. Нетрудно видеть, что в каналах с перераспределением нуклонов потенциал (30) равен на бесконечности  $Q$ -реакции. Многомерная потенциальная энергия, записанная в виде (30), обычно называется драйвинг-потенциалом.

## 2. МАКРО-МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АДИАБАТИЧЕСКАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Адиабатическая потенциальная энергия определяется как разность массы всей системы (моноядро или два разделенных ядра) и масс основных состояний мишени и налетающего иона:

$$V_{\text{adiab}}(A, Z; r, \beta, \eta) = M(A, Z; r, \beta, \eta) - M(A_T, Z_T; \beta_T^{\text{g.s.}}) - M(A_P, Z_P; \beta_P^{\text{g.s.}}). \quad (31)$$

Два последних слагаемых в (31), как и в (30), в силу их постоянства определяют фактически нулевую точку отсчета потенциальной энергии во входном канале на бесконечности. Отметим, что для разделенных ядер первое слагаемое в (31) равняется сумме масс образовавшихся фрагментов плюс энергия их взаимодействия. Легко видеть, что выражения (30) и (31) в этом случае совпадают.

В макро-микроскопической модели, базирующейся на методе оболочечной поправки Струтинского [49, 50], зависящая от деформации масса ядра вычисляется следующим образом:

$$M(A, Z; r, \beta, \eta) = M_{\text{mac}}(A, Z; r, \beta, \eta) + \delta E(A, Z; r, \beta, \eta), \quad (32)$$

где  $M_{\text{mac}}$  — макроскопическая (гладкая) часть, которая обычно рассчитывается с использованием одного из вариантов модели жидкой капли (МЖК);  $\delta E$  — оболочечная поправка. Для расчета  $M_{\text{mac}}$  мы используем МЖК, учитывая конечный радиус действия ядерных сил [18–20]. Оболочечная поправка представляется как сумма оболочечных поправок протонной и нейтронной подсистем  $\delta E = \delta E_p + \delta E_n$ , а  $\delta E_{p(n)}$ , в свою очередь, есть сумма собственно оболочечной поправки  $\delta U_{p(n)}$  и оболочечной поправки к энергии спаривания  $\delta P_{p(n)}$ :  $\delta E_{p(n)} = \delta U_{p(n)} + \delta P_{p(n)}$ .

Для определения оболочечной поправки  $\delta E$  в рамках метода Струтинского необходимо рассчитать схему одночастичных уровней. При этом модель для расчета одночастичных состояний должна быть применима как для малых деформаций в области основного состояния ядра, так и для больших деформаций, корректно описывая переход схемы одночастичных уровней моноядра к уровням разделенных фрагментов. Для этих расчетов удобно использовать двухцентровую оболочечную модель.

Необходимо отметить, что использование потенциала гармонического осциллятора для описания среднего поля в двухцентровой оболочечной модели является, несомненно, достаточно грубым приближением. Физически более обоснованно применение потенциалов конечной глубины типа Вудса–Саксона [51–53] либо свернутого потенциала Юкавы [20, 54–56]. Для расчетов потенциальной энергии также может быть использован расширенный метод Томаса–Ферми с применением сил Скирма, определяющих эффективное взаимодействие между нуклонами [57]. Еще одним широко используемым и перспективным методом расчета потенциальной энергии является микроскопический подход, базирующийся на релятивистских и нерелятивистских самосогласованных моделях типа Хартри–Фока [58, 59].

Тем не менее мы остановили свой выбор на двухцентровой оболочечной модели для расчета спектра одночастичных состояний, поскольку она имеет следующие важные преимущества.

1) Двухцентровая параметризация позволяет описывать формы ядер, характерные для процессов как слияния, так и деления. Основываясь на современных представлениях о процессах слияния двух ионов и деления составного ядра, можно сделать вывод, что для процесса деления характерны разрывные конфигурации, имеющие большие расстояния между центрами масс осколков и хорошо выраженную шейку. В то же время на стадии слияния ионов в точке контакта у системы отсутствует шейка, и расстояния между центрами масс ионов оказываются существенно меньшими. Таким образом, параметризация должна быть достаточно «гибкой» для единого описания форм ядерной системы в ходе всего процесса слияния-деления.

2) Все матричные элементы, необходимые для расчета спектра одночастичных состояний, могут быть записаны в аналитическом виде, что существенно увеличивает точность и уменьшает время расчетов. Это позволяет

проводить реалистичные динамические расчеты в пространстве трех коллективных координат на сетке, имеющей  $\sim 10^6$  узлов.

**2.1. Макроскопическая часть потенциальной энергии.** Макроскопическая масса ядра в рамках МЖК с конечным радиусом действия ядерных сил [19, 20] имеет вид

$$\begin{aligned}
 M_{\text{FRLDM}}(A, Z; r, \beta, \eta) = & M_p Z + M_n N - a_v(1 - k_v I^2)A + \\
 & + a_s(1 - k_s I^2)B_n(r, \beta, \eta)A^{2/3} + \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{r_0 A^{1/3}} B_C(r, \beta, \eta) - \\
 & - \frac{3}{4} \frac{e^2}{r_0} \left( \frac{9Z^4}{4\pi^2 A} \right)^{1/3} + f(k_F r_p) \frac{Z^2}{A} - c_a(N - Z) + a_0 A^0 + \\
 & + W \left( |I| + \left\{ \begin{array}{l} 1/A, \quad \text{нечетные } Z = N; \\ 0, \quad \text{в противном случае} \end{array} \right\} \right) + \\
 & + \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\Delta}_p + \bar{\Delta}_n - \delta_{np}, & Z \text{ и } N \text{ нечетные;} \\ \bar{\Delta}_p, & Z \text{ нечетное и } N \text{ четное;} \\ \bar{\Delta}_n, & Z \text{ четное и } N \text{ нечетное;} \\ 0, & Z \text{ и } N \text{ четные;} \end{array} \right. - a_{\text{el}} Z^{2,39} \quad (33)
 \end{aligned}$$

и содержит, соответственно, следующие слагаемые: массы  $Z$  протонов и  $N$  нейтронов; объемная энергия; ядерная (поверхностная) и кулоновская энергии, зависящие от деформации через безразмерные функционалы  $B_n(r, \beta, \eta)$  и  $B_C(r, \beta, \eta)$ ; поправка на обменное кулоновское взаимодействие; кулоновский формфактор; поправка на зарядовую асимметрию ( $(N - Z)$ -член);  $A^0$ -член (константа); вигнеровский член; средняя энергия спаривания и энергия связанных электронов. Величина  $f(k_F r_p)$ , входящая в кулоновский формфактор, дается соотношением

$$-f(k_F r_p) = -\frac{r_p^2 e^2}{8r_0^3} \left[ \frac{145}{48} - \frac{327}{2880} (k_F r_p)^2 + \frac{1527}{1209600} (k_F r_p)^4 \right], \quad (34)$$

где волновое число

$$k_F = \left( \frac{9\pi Z}{4A} \right)^{1/3} \frac{1}{r_0}. \quad (35)$$

Точкой отсчета энергии спаривания являются четно-четные ядра; величины средней нейтронной щели  $\bar{\Delta}_n$ , средней протонной щели  $\bar{\Delta}_p$  и средняя энергия нейтрон-протонного взаимодействия  $\delta_{np}$  имеют вид

$$\bar{\Delta}_n = \frac{r_{\text{mac}} B_S}{N^{1/3}}, \quad \bar{\Delta}_p = \frac{r_{\text{mac}} B_S}{Z^{1/3}}, \quad \delta_{np} = \frac{h}{B_S A^{2/3}}, \quad (36)$$

где  $B_S(r, \beta, \eta)$  — площадь поверхности деформированного ядра в единицах поверхности равновеликой сферы:

$$B_S(r, \beta, \eta) = \frac{1}{4\pi r_0^2 A^{2/3}} \int_S dS. \quad (37)$$

Безразмерные функционалы ядерной и кулоновской энергии, зависящие от деформации ядра, определяются с учетом конечного радиуса действия ядерных сил следующим образом [18–20]:

$$B_n(r, \beta, \eta) = \frac{1}{8\pi^2 a^4 r_0^2 A^{2/3}} \int_V \int_V \left( 2 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right) \frac{\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a} d^3r d^3r', \quad (38)$$

$$B_C(r, \beta, \eta) = \frac{15}{32\pi^2 r_0^5 A^{5/3}} \int_V \int_V \left[ 1 - \left( 1 + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2a_d} \right) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a_d}\right) \right] \frac{d^3r d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Здесь интегрирование производится по объему ядра;  $a$  — радиус действия потенциала, являющегося суммой потенциала Юкавы и экспоненциального потенциала,  $a_d$  — радиус действия функции Юкавы, генерирующей плотность распределения заряда. Отметим, что выражение для функционала  $B_C$  получено для равномерно заряженного ядра произвольной формы и имеющего диффузную поверхность. Шестикратное интегрирование в (38) сводится по теореме Остроградского–Гаусса к четырехкратному, а в случае аксиальной симметрии системы кратность интегрирования уменьшается до трех.

Для полноты изложения ниже мы приводим значения девяти констант макроскопической модели [20]:

$$\begin{aligned} a_{e1} &= 1,433 \cdot 10^{-5} \text{ МэВ}, & r_p &= 0,80 \text{ Фм}, & r_0 &= 1,16 \text{ Фм}, \\ a &= 0,68 \text{ Фм}, & a_d &= 0,70 \text{ Фм}, & r_{\text{max}} &= 4,80 \text{ МэВ}, \\ h &= 6,6 \text{ МэВ}, & a_s &= 21,18466 \text{ МэВ}, & k_s &= 2,345 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (39)$$

Значения остальных пяти констант (слегка измененные по сравнению с [20]) можно найти ниже в таблице (с. 924).

**2.2. Стандартная двухцентровая оболочечная модель.** Первая модель для расчета спектра одночастичных состояний деформированного ядра была предложена Нильссоном [60]. Эта модель основана на потенциале среднего поля в виде аксиально-симметричного гармонического осциллятора, а форма ядра предполагалась, соответственно, эллипсоидом вращения. Несмотря на свою простоту модель Нильссона оказалась достаточно успешной в описании масс основных состояний ядер, но не могла быть применена для больших

деформаций ядер. Поэтому несколько позже было предложено хорошо известное обобщение модели Нильссона, названное двухцентровой оболочечной моделью [16, 17, 61–62]. Эта модель способна корректно описывать переход от малых эллиптических деформаций основного состояния ядра, где она совпадает с моделью Нильссона, к сильно деформированному ядру и далее к системе двух полностью разделенных ядер, давая нильссоновскую модель для каждого из осколков.

Ниже при описании стандартной двухцентровой модели мы будем следовать работе [17], в которой представлен ее наиболее общий вид. В частности, в [17] модель была обобщена на случай масс-асимметричных форм системы и был модифицирован потенциал среднего поля, обеспечивающий его гладкость в точке касания фрагментов.

Одночастичные состояния деформированного ядра находятся путем диагонализации полного гамильтониана в пространстве выбранных волновых функций. Задача существенно упрощается, если все матричные элементы могут быть вычислены аналитически, что достигается подходящим выбором базисных функций. Полный гамильтониан двухцентровой оболочечной модели имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + V_{LS}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{s}) + V_{L^2}(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (40)$$

В цилиндрических координатах не зависящая от момента часть потенциала  $V(\mathbf{r})$  в силу аксиальной симметрии ядра является функцией лишь  $\rho$  и  $z$ :

$$V(\rho, z) = \frac{1}{2}m_0 \begin{cases} \omega_{z_1}^2 z'^2 + \omega_{\rho_1}^2 \rho^2, & z < z_1, \\ \omega_{z_1}^2 z'^2 (1 + c_1 z' + d_1 z'^2) + \omega_{\rho_1}^2 (1 + g_1 z'^2) \rho^2, & z_1 < z < 0, \\ \omega_{z_2}^2 z'^2 (1 + c_2 z' + d_2 z'^2) + \omega_{\rho_2}^2 (1 + g_2 z'^2) \rho^2, & 0 < z < z_2, \\ \omega_{z_2}^2 z'^2 + \omega_{\rho_2}^2 \rho^2, & z > z_2, \end{cases} \quad (41)$$

где

$$z' = \begin{cases} z - z_1, & z < 0, \\ z - z_2, & z > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Видно (см. рис. 9), что внешние (относительно  $z_1$  и  $z_2$ ) части потенциала (41) представляют собой потенциалы аксиально-симметричных гармонических осцилляторов с центрами в точках  $z_i$  и частотами  $w_{\rho i}$  и  $w_{z i}$ , где  $i = 1, 2$ . Внутренняя часть потенциала (между  $z_1$  и  $z_2$ ) имеет более сложный вид.



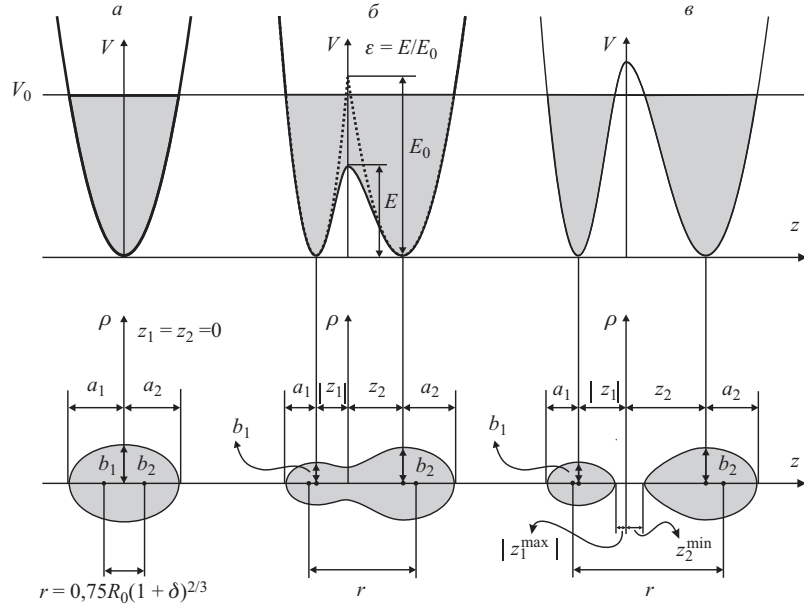


Рис. 9. Пример форм ядра в двухцентровой параметризации и соответствующие им потенциалы  $V(\rho = 0, z)$ . Рисунок выполнен для  $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0,5$  и  $\varepsilon = 0,5$ . На рис. *a* и *б*  $z_1^{\max} = z_2^{\min} = 0$ . Параметр массовой асимметрии равен нулю для рис. *a* и  $\eta = 0,625$  для рис. *б* и *в*

Потенциал спин-орбитального взаимодействия записывается в виде

$$V_{LS}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{s}) = \begin{cases} \left\{ -\frac{\hbar\kappa_1}{m_0\omega_{01}}, (\nabla V \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s} \right\}, & z < 0; \\ \left\{ -\frac{\hbar\kappa_2}{m_0\omega_{02}}, (\nabla V \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s} \right\}, & z > 0; \end{cases} \quad (43)$$

а потенциал  $V_{L^2}$  имеет вид

$$V_{L^2}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\{\kappa_1\mu_1\hbar\omega_{01}, \mathbf{l}^2\} + \kappa_1\mu_1\hbar\omega_{01}\frac{\mathcal{N}_1(\mathcal{N}_1 + 3)}{2}\delta_{if}, & z < 0, \\ -\frac{1}{2}\{\kappa_2\mu_2\hbar\omega_{02}, \mathbf{l}^2\} + \kappa_2\mu_2\hbar\omega_{02}\frac{\mathcal{N}_2(\mathcal{N}_2 + 3)}{2}\delta_{if}, & z > 0. \end{cases} \quad (44)$$

Здесь фигурные скобки обозначают антикоммутатор, обеспечивающий эрмитовость соответствующего оператора;  $\kappa_i$  — константа спин-орбитального

взаимодействия;  $\mu_i$  — подгоночный параметр модели Нильссона;  $\mathcal{N}_i$  — «номер осцилляторной оболочки» для левой ( $z < 0$ ) или правой ( $z > 0$ ) части ядра;  $\hbar\omega_{0i} = 41/\tilde{A}_i^{1/3}$  — расстояние между уровнями сферического осциллятора, где  $\tilde{A}_i$  — массовое число «будущего фрагмента», определенное в [17] как  $\tilde{A}_i = a_i b_i^2 / r_0^3$ , т. е. дополнением формы соответствующей части ядра до эллипсоида с полуосями  $a_i$  и  $b_i$ . Параметры  $\mathcal{N}_i$  и  $\tilde{A}_i$  должны быть определены так, чтобы для эллипсоидальной формы исходного составного ядра равнялись номеру осцилляторной оболочки и массовому числу этого ядра, а в асимптотике разделенных ядер достигать значений, соответствующих фрагментам. Более детальное описание двухцентровой оболочечной модели можно найти в [17].

Потенциал (41) содержит 12 параметров ( $z_i, \omega_{zi}, \omega_{\rho i}, c_i, d_i$  и  $g_i$ ). На этот потенциал могут быть наложены условия, позволяющие определить 7 из этих параметров.

1) Потенциал  $V(\rho, z)$ , так же, как и его производная по  $z$ , должен быть непрерывным в точках плоскости  $z = 0$ .

2) Объем ядра постоянен и равен  $(4/3)\pi R_0^3$ , где  $R_0$  — радиус сферического ядра. Это означает, что поверхность ядра является эквипотенциалью  $V(\rho, z)$  и величина потенциала на поверхности остается неизменной, независимо от деформации. В частности, для сферического ядра имеем

$$\hbar \omega_0 = \frac{41}{A^{1/3}} \text{ МэВ}, \quad R_0 = r_0 A^{1/3}, \quad V_0 = \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 R_0^2. \quad (45)$$

Тогда, приравняв (41) к  $V_0$ , мы получаем выражение для профильной функции  $\rho_s(z)$ , вращение которой относительно оси симметрии  $z$  дает форму ядра

$$\rho_s^2(z) = \begin{cases} b_1^2 \left[ 1 - \frac{z'^2}{a_1^2} \right], & z < z_1, \\ \frac{b_1^2}{1 + g_1 z'^2} \left[ 1 - \frac{z'^2}{a_1^2} (1 + c_1 z' + d_1 z'^2) \right], & z_1 < z < 0, \\ \frac{b_2^2}{1 + g_2 z'^2} \left[ 1 - \frac{z'^2}{a_2^2} (1 + c_2 z' + d_2 z'^2) \right], & 0 < z < z_2, \\ b_2^2 \left[ 1 - \frac{z'^2}{a_2^2} \right], & z > z_2. \end{cases} \quad (46)$$

Из (46) видно, что форма ядра в областях  $z < z_1$  и  $z > z_2$  является половиной эллипсоида вращения с центром в точках  $z_i$ . На рис. 9 показаны примеры форм ядра в двухцентровой параметризации с объяснением

геометрических параметров ядра. Полуоси  $a_i$  и  $b_i$  связаны с соответствующими частотами соотношениями:  $a_i \omega_{zi} = R_0 \overset{\circ}{\omega}_0 = b_i \omega_{\rho i}$ . Три формы ядра соответствуют трем стадиям процесса деления: составное ядро (эллипсоидальная форма), сильно деформированное моноядро и, наконец, два осколка.

Поскольку приведенные выше условия фиксируют лишь 7 из 12 параметров потенциала, то остальные 5 являются свободными и определяют форму ядра. Они (или их функции) могут быть рассмотрены как коллективные координаты. Мы используем следующий набор степеней свободы ядра.

1) Расстояние между центрами масс двух половин системы (в области  $z < 0$  и  $z > 0$ ):

$$r = \frac{\int_{z_2^{\min}}^{z_2^{\max}} z \rho_s^2(z) dz}{\int_{z_2^{\min}}^{z_2^{\max}} \rho_s^2(z) dz} - \frac{\int_{z_1^{\min}}^{z_1^{\max}} z \rho_s^2(z) dz}{\int_{z_1^{\min}}^{z_1^{\max}} \rho_s^2(z) dz}. \quad (47)$$

Значения  $z_i^{\min}$  и  $z_i^{\max}$  являются корнями уравнения  $\rho_s(z) = 0$ . Для системы из двух разделенных ядер имеем четыре корня данного уравнения. Для моноядра корней будет два и тогда  $z_1^{\max} = z_2^{\min} = 0$ . Из рис. 9 видно, что  $z_1^{\min} = z_1 - a_1$ , а  $z_2^{\max} = z_1 + a_2$ . В случае разделенных ядер  $r$  — расстояние между центрами масс этих ядер. Сферическому моноядру соответствует  $r = 0,75R_0$ .

2–3) Деформации осколков  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , задаваемые как деформации двух потенциалов гармонического осциллятора. Мы определяем их как  $\delta_i = a_i/b_i - 1 = \omega_{\rho i}/\omega_{z i} - 1$  ( $i = 1, 2$ ), где  $a_i$  и  $b_i$  — полуоси эллипсоидов.

4) Координата массовой асимметрии  $\eta = (A_2 - A_1)/(A_1 + A_2)$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — массовые числа двух половин системы (в области  $z < 0$  и  $z > 0$ ):

$$\eta = \frac{3}{4R_0^3} \left[ \int_{z_2^{\min}}^{z_2^{\max}} \rho_s^2(z) dz - \int_{z_1^{\min}}^{z_1^{\max}} \rho_s^2(z) dz \right]. \quad (48)$$

5) Параметр шейки  $\varepsilon$  возникает из-за сглаживания потенциала  $V(\rho, z)$  в области между осцилляторными центрами  $z_1$  и  $z_2$  и определяется как отношение высоты сглаженного и несглаженного потенциала в точке пересечения потенциалов гармонических осцилляторов (см. рис. 9). Таким образом, меньшим значениям  $\varepsilon$  соответствует большая толщина шейки при фиксированном значении  $r$ .

**2.3. Неаддитивность формулы Вайцзеккера и недостатки стандартной версии двухцентровой оболочечной модели.** Непосредственное использование макроскопической формулы Вайцзеккера (33) при расчете массы сильно деформированной ядерной системы (например, конфигурации из двух касающихся ядер) сталкивается с определенными трудностями. Нетрудно видеть, что зависимость от деформации ядра входит только в два слагаемых выражения (33) через безразмерные функционалы поверхностной  $B_n(r, \beta, \eta)$  и кулоновской энергии  $B_C(r, \beta, \eta)$ . Остальные члены (33) от деформации не зависят. Некоторые из этих членов неаддитивны по  $A$  и  $Z$ . Аддитивной является только часть выражения (33):  $M_p Z + M_n N - c_a(N - Z)$ . В специальном случае  $I_1 = I_2 = I$ , реализуемом, например, при симметричном делении составного ядра, будут аддитивны также объемный, поверхностный и кулоновский члены. Однако в общем случае следует предполагать, что

$$\frac{Z_1}{A_1} \neq \frac{Z_2}{A_2} \neq \frac{Z}{A}. \quad (49)$$

Данная неаддитивность приводит к неправильному описанию перехода от массы основного состояния ядра к массам двух разделенных ядер, образующихся, например, в процессе деления составного ядра [55, 56, 64, 65]. Это легко понять, рассмотрев два ядра, находящиеся на расстоянии  $r$  друг от друга, двумя способами: 1) как единую систему, масса которой может быть описана с помощью выражения (33), примененного ко всей системе; 2) как два взаимодействующих ядра; в этом случае масса каждого из ядер дается формулой (33), а масса системы есть сумма масс частей плюс энергия их взаимодействия. Очевидно, что оба этих подхода должны давать одинаковый результат, чего не происходит. Так, например, в первом случае выражение для массы системы будет содержать один член  $A^0$ , а во втором — два таких члена. Приведем еще один пример с вигнеровским членом: для моноядра он составляет  $W|I|$ , а для разделенных ядер он должен быть равен  $W|I_1| + W|I_2| \neq W|I|$ . Наличие неаддитивных членов в (33) заведомо приводит к неправильной асимптотике потенциальной энергии для разделенных ядер.

В принципе, поверхностная и кулоновская энергии уже содержат зависимость от деформации. Однако в формуле (33) предполагается, что плотность заряда в системе постоянна. Следует отметить, что плотность заряда входит как в ядерную энергию (через нейтронный избыток, приходящийся на один нуклон  $I$ ), так и в кулоновскую. В то же время она может отличаться в двух сталкивающихся ядрах, продуктах реакции и составном ядре, если справедливо соотношение (49). Приближение постоянной зарядовой плотности является грубым и может приводить к ошибкам в определении потенциальной энергии в несколько МэВ. В связи с этим возникает вопрос: где происходит изменение плотностей заряда на разных стадиях реакции и как это учесть в потенциальной энергии?

Стандартная двухцентровая оболочечная модель также имеет свои недостатки.

1) Ошибки, возникающие при расчете одночастичных уровней вблизи точки контакта и для разделенных ядер в случае ненулевой массовой асимметрии. Как было сказано выше, метод расчета одночастичных состояний базируется на диагонализации гамильтониана (40) в пространстве выбранных базисных функций. Причем эти базисные функции должны иметь аналитическую запись и приводить к аналитическим выражениям для матричных элементов. В работе [17] базисные функции выбирались как решение уравнения Шредингера для потенциала двух гармонических осцилляторов с центрами в точках  $z_1$  и  $z_2$ , частотами  $\omega_{z1}$  и  $\omega_{z2}$  вдоль оси симметрии  $z$  и равными частотами  $\omega_\rho$  относительно оси, перпендикулярной оси  $z$ :

$$V(\rho, z) = \frac{1}{2}m_0\omega_\rho^2\rho^2 + \begin{cases} \frac{1}{2}m_0\omega_{z1}^2(z - z_1)^2, & z < 0, \\ \frac{1}{2}m_0\omega_{z2}^2(z - z_2)^2, & z > 0. \end{cases} \quad (50)$$

Можно видеть, что этот потенциал совпадает с потенциалом двухцентровой оболочечной модели (41), если исключить сглаживание потенциала между центрами  $z_1$  и  $z_2$  и положить  $\omega_{\rho1} = \omega_{\rho2} = \omega_\rho$ . Последнее условие, с одной стороны, обеспечивает разделение переменных в уравнении Шредингера с потенциалом (50) и, следовательно, аналитическую форму базисных функций. С другой стороны, если  $\omega_{\rho1}$  и  $\omega_{\rho2}$  значительно отличаются друг от друга (что соответствует, например, случаю больших массовых асимметрий), то становится практически невозможным точно рассчитать спектр одночастичных состояний, используя базисные функции из [17], или в процедуре диагонализации необходимо брать нереально большое (с точки зрения времени счета) число базисных функций.

2) Неудачная параметризация формы разделенных ядер. Процедура сглаживания потенциала влияет как на форму моноядра, так и на форму разделенных ядер, что хорошо видно на рис. 9. Эта процедура обеспечивает вполне реалистичные формы моноядра. Для разделенных же ядер, на наш взгляд, предпочтительней использовать чисто эллиптическую параметризацию без образования вытянутых навстречу друг другу «носиков» ядер (т. е. без всякого сглаживания между  $z_1$  и  $z_2$ ). Это особенно важно для входного канала реакции.

Таким образом, описанная выше стандартная макро-микроскопическая модель наряду с несомненными преимуществами имеет ряд недостатков. Под «стандартной моделью» понимается применение выражения (33) для расчета макроскопической части массы ядерной системы при любых деформациях (в том числе разделенных фрагментов) и стандартной двухцентровой оболочечной модели для определения оболочечной поправки.

На рис. 10 показана адиабатическая потенциальная энергия, вычисленная в стандартном подходе (сплошная кривая), в сравнении с диабатическим потенциалом проксимити (пунктирная кривая) для случая  $^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$ . Поскольку основному состоянию составного ядра  $^{296}116$  соответствует нулевая массовая асимметрия  $\eta = 0$ , а разделенным ядрам — массовая асимметрия входного канала  $\eta \approx 0,675$ , то при  $r < R_{\text{cont}}$  мы учитывали изменение параметра  $\eta$  с уменьшением  $r$  (при  $r > R_{\text{cont}}$ , разумеется,  $\eta = \text{const}$ ). Как отмечалось выше, адиабатический и диабатический потенциалы должны давать одинаковые значения в асимптотической области разделенных ядер, где их энергия известна точно: сумма экспериментальных значений масс плюс кулоновское взаимодействие. Однако из рисунка хорошо видно существенное отклонение адиабатической потенциальной энергии, полученной в стандартной модели, от «точного» значения не только в асимптотической области, но и в области контакта ядер. Стандартная макро-микроскопическая модель не дает правильного значения кулоновского барьера и даже потенциального кармана для такой системы, как  $^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$ . Таким образом, драйвинг-потенциал, рассчитанный в этой модели, не может быть непосредственно использован для описания процессов глубоконеупругого рассеяния, слияния и квазиделения. Ниже предлагается расширенная версия макро-микроскопической модели, в которой устранены отмеченные выше недостатки.

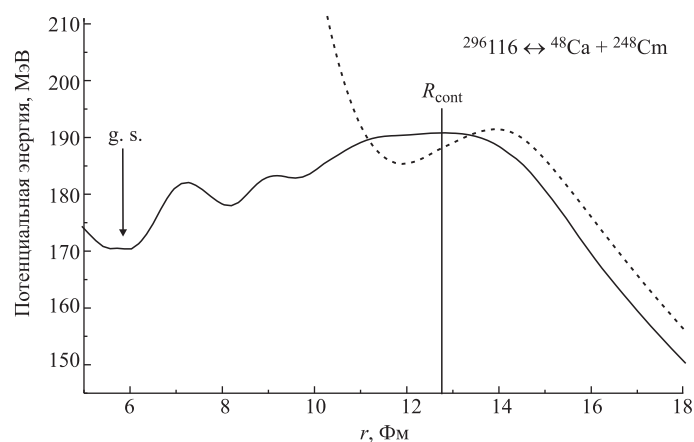


Рис. 10. Потенциальная энергия взаимодействия системы  $^{296}116 \leftrightarrow ^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$ , полученная в стандартной макро-микроскопической модели (сплошная кривая) и с использованием потенциала проксимити (пунктирная). Положение точки контакта показано вертикальной линией. Расчеты выполнены для  $\delta = 0$  (см. ниже (59)). Параметр массовой асимметрии является функцией расстояния между центрами масс

### 3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЯДЕРНОЙ СИСТЕМЫ В ПРОЦЕССАХ СЛИЯНИЯ-ДЕЛЕНИЯ

**3.1. Расширенная макро-микроскопическая модель.** Проблема неаддитивности вигнеровского и  $A^0$  членов подробно обсуждается в [55, 56, 64, 65]. В этих работах было предложено ввести деформационную зависимость этих двух членов. В настоящей работе мы предлагаем ввести зависимость от деформации для всех не аддитивных по  $A$  и  $Z$  слагаемых в (33). В этом случае каждое из таких слагаемых в (33) будет заменено следующим образом:

$$\text{NAT}(A, Z) \rightarrow \text{NAT}(A, Z)B(r, \beta, \eta) + [\text{NAT}(A_1, Z_1) + \text{NAT}(A_2, Z_2)] [1 - B(r, \beta, \eta)], \quad (51)$$

где NAT обозначает одно из неаддитивных слагаемых;  $A_i$  и  $Z_i$  — массовые и зарядовые числа осколков и  $B(r, \beta, \eta)$  — некая функция, зависящая от деформации. Следует отметить, что для аддитивных членов замена (51) является тождеством. Таким образом, если заменить все не зависящие от деформации слагаемые в (33) согласно (51), то при подходящем выборе функции  $B(r, \beta, \eta)$  будет полностью решена проблема с этими членами.

Обсудим теперь поверхностную и кулоновскую энергию деформации ядра. Как было сказано выше, неправильное поведение этих слагаемых при приближении к точке разрыва связано с изменением плотности заряда при переходе от моноядра к разделенным ядрам. Для малых деформаций составного ядра имеем

$$M_{\text{mac}}(A, Z; r, \beta, \eta) = M_{\text{FRLDM}}(A, Z; r, \beta, \eta), \quad (52)$$

а для разделенных деформированных ядер

$$M_{\text{mac}}(A, Z; r, \beta, \eta) = M_{\text{FRLDM}}(A_1, Z_1; \beta_1) + M_{\text{FRLDM}}(A_2, Z_2; \beta_2) + V_{12}(A_1, Z_1, A_2, Z_2; r, \beta_1, \beta_2). \quad (53)$$

В (53)  $V_{12}$  — энергия взаимодействия ядер, которая может быть легко рассчитана с помощью потенциала проксимити или фолдинг-процедуры (см. разд. 1). В промежуточной области должен происходить плавный переход между (52) и (53). Этот переход можно реализовать с помощью той же сглаживающей функции  $B(r, \beta, \eta)$ . Таким образом, окончательно имеем для макроскопической массы

$$M_{\text{mac}}(A, Z; r, \beta, \eta) = M_{\text{FRLDM}}(A, Z; r, \beta, \eta)B(r, \beta, \eta) + [M_{\text{FRLDM}}(A_1, Z_1; \beta_1) + M_{\text{FRLDM}}(A_2, Z_2; \beta_2) + V_{12}(A_1, Z_1, A_2, Z_2; r, \beta_1, \beta_2)] [1 - B(r, \beta, \eta)]. \quad (54)$$

Конкретный вид функции  $B(r, \beta, \eta)$  достаточно произволен, с тем лишь ограничением, что ее значение должно быть единицей в области основного

состояния составного ядра и нулем для полностью разделенных осколков. Например, в [55] значения функции  $B(r, \beta, \eta)$  определялись толщиной шейки. Функция  $B(r, \beta, \eta)$  из [55] равна единице для форм без шейки, начинает монотонно уменьшаться при появлении шейки и достигает нуля в точке касания осколков.

Как показывают результаты численного решения нестационарного уравнения Шредингера, представленные выше (см. рис. 3), существенное изменение волновых функций нуклонов в ядрах начинается еще до их контакта. Тогда следует предположить, что и переход между (52) и (53), определяемый  $B(r, \beta, \eta)$ , начинается до контакта ядер. Мы используем функцию  $B(r, \beta, \eta)$  вида

$$B(r, \beta, \eta) = \left[ 1 + \exp \left( \frac{r - R_{\text{cont}}}{a_{\text{diff}}} \right) \right]^{-2}, \quad (55)$$

где  $R_{\text{cont}}(\beta; A_1, A_2)$  — расстояние между центрами масс ядер, соответствующее точке контакта (или разрыва), и  $a_{\text{diff}}$  — варьируемый параметр.

Отметим, что выражение (54) обеспечивает корректное поведение макроскопической части драйвинг-потенциала как в районе основного состояния составного ядра, так и в асимптотике двух разделенных ядер. Выбор параметра  $a_{\text{diff}} \sim 0,5$  Фм гарантирует, что драйвинг-потенциал будет давать те же положение и величину кулоновского барьера слияния, что и адиабатический потенциал (30).

Одной из ключевых характеристик потенциальной энергии является точность, с которой описываются массы основных состояний ядер. Следовательно, в первую очередь мы должны проверить, как точно мы описываем экспериментальные массы основных состояний ядер. Для этих расчетов мы ограничились только эллипсоидальными формами ядер. Разница между экспериментальными и рассчитанными значениями масс, полученными со стандартными значениями параметров [20], показана на рис. 11, *а* как функция

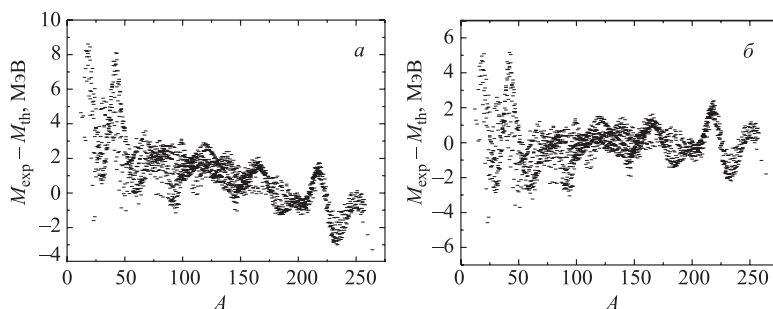


Рис. 11. Разница между экспериментальными и теоретически рассчитанными массами основных состояний ядер: *а*) с параметрами МЖК из работы [20]; *б*) с параметрами, полученными в настоящей работе (см. таблицу)



массового числа. Как видно, полученные значения имеют систематический наклон. Этот наклон может быть ликвидирован подгонкой макроскопической части потенциальной энергии (33). Дополнительное фитирование пяти параметров макроскопической массовой формулы, входящих в объемный,  $A^0$ ,  $(N-Z)$  и вигнеровский члены, дает результат, показанный на рис. 11, б. Найденные значения параметров представлены в таблице.

**Параметры макроскопической составляющей массы ядра (33)**

Параметры	$a_v$ , МэВ	$k_v$	$a_0$ , МэВ	$c_a$ , МэВ	$W$ , МэВ
[20]	16,00126	1,92240	2,615	0,10289	30,0
Данная работа	16,02590	1,91385	6,711	0,04998	27,276

Как уже отмечалось выше, для более точного расчета одночастичных уровней и оболочечной поправки для больших массовых асимметрий необходимо использовать более подходящий набор базисных функций. Данная задача является достаточно сложной и ее аккуратное решение приводит к существенному увеличению трудоемкости расчетов. Здесь мы предлагаем использовать достаточно простую процедуру решения этой проблемы. Следует ожидать, что наибольшая ошибка при расчете схемы уровней (или оболочечной поправки) возникнет в районе точки контакта (или разрыва) и для разделенных ядер, т. е. в области, где уже хорошо выражены индивидуальные свойства двух ядер. В то же время мы легко можем рассчитать значения оболочечной поправки  $\delta E$  для двух разделенных ядер. Таким образом, мы можем использовать ту же самую процедуру, что и для макроскопической части потенциальной энергии с той же функцией (55):

$$\delta E = \delta E_{\text{TCSM}} B(r, \beta, \eta) + \left[ \delta E_{\text{TCSM}}^{(1)} + \delta E_{\text{TCSM}}^{(2)} \right] [1 - B(r, \beta, \eta)], \quad (56)$$

где  $\delta E_{\text{TCSM}}$  — оболочечная поправка, рассчитанная в стандартной двухцентровой модели, а  $\delta E_{\text{TCSM}}^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) — оболочечные поправки, определенные отдельно для каждого из ядер. Очевидно, что эта процедура обеспечивает асимптотически верное поведение оболочечной поправки и тем самым более правильное значение  $Q$ -реакции в каналах с перераспределением нуклонов.

Таким образом, суммируя сказанное выше, получаем следующее выражение для адиабатической потенциальной энергии в расширенной макромикроскопической модели:

$$\begin{aligned} V_{\text{adiab}}(A, Z; r, \beta, \eta) = & \{ [M_{\text{FRLDM}}(A, Z; r, \beta, \eta) + \delta E_{\text{TCSM}}(A, Z; r, \beta, \eta)] - \\ & - [M_{\text{FRLDM}}(A_P, Z_P; \beta_P^{\text{g.s.}}) + \delta E_{\text{TCSM}}(A_P, Z_P; \beta_P^{\text{g.s.}})] - \\ & - [M_{\text{FRLDM}}(A_T, Z_T; \beta_T^{\text{g.s.}}) + \delta E_{\text{TCSM}}(A_T, Z_T; \beta_T^{\text{g.s.}})] \} B(r, \beta, \eta) + \\ & + V_{\text{diab}}(A, Z; r, \beta_1, \beta_2, \eta) [1 - B(r, \beta, \eta)]. \quad (57) \end{aligned}$$

Отметим, что первые два слагаемых в (57) рассчитываются в рамках двухцентр-  
 тровой параметризации ядер, а все остальные — в эллипсоидной.

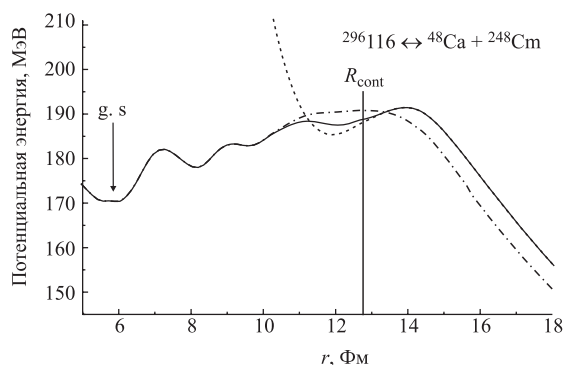


Рис. 12. Потенциальная энергия взаимодействия ядерной системы  $^{296}_{116}\text{Cm} \leftrightarrow ^{48}_{20}\text{Ca} + ^{248}_{98}\text{Cf}$ , полученная в расширенной (сплошная кривая) и стандартной (штрих-  
 пунктирная) макро-микроскопической модели. Пунктирная кривая соответствует диа-  
 батическому потенциалу проксимити. Положение точки контакта показано вертикаль-  
 ной линией

На рис. 12 показан пример рассчитанного драйвинг-потенциала в рас-  
 ширенной макро-микроскопической модели с использованием формулы (57).  
 В качестве энергии взаимодействия ядер  $V_{12}$  при расчете  $V_{\text{diab}}$  был использо-  
 ван потенциал проксимити. Из рис. 12 видно, что предлагаемый метод обес-  
 печивает правильное поведение потенциальной энергии в асимптотической  
 области разделенных ядер, а также правильное положение и величину бар-  
 ьера слияния.

**3.2. Приближение двух коров.** В работах [13–15] для вычисления адиа-  
 батической потенциальной энергии было предложено использовать «прибли-  
 жение двух коров», позволяющее избежать сложных вычислений, связанных  
 с расчетом оболочечных поправок. В основе этого приближения также лежит  
 идея двухцентр-овой оболочечной модели и поэтапного процесса «коллекти-  
 визации нуклонов». Предполагается, что на пути от начальной конфигурации  
 двух касающихся ядер к конфигурации составного моноядра и на обратном  
 пути в канал деления ядерная система состоит из двух коров  $(z_1, n_1)$  и  $(z_2, n_2)$   
 и некоторого числа обобществленных нуклонов  $\Delta A = A_{CN} - a_1 - a_2$ , на-  
 ходящихся на квазимолекулярных уровнях и движущихся во всем объеме,  
 занимаемом ядерной системой (см. рис. 13). Введем обозначение  $\Delta A_{CN}$  для  
 такого количества обобществленных нуклонов, при котором два кора  $a_1$  и  $a_2$   
 помещаются в объеме составного ядра (и полностью в нем «растворяются»),  
 т. е.  $R(a_1, \delta) + R(a_2, \delta) = R(A_{CN}, \delta_{CN}^{g.s})$ . Очевидно, что  $\Delta A_{CN} < A_{CN}$ . Про-  
 цессы образования составного ядра ( $\Delta A \rightarrow \Delta A_{CN}$ ), деления и квазиделения

( $\Delta A \rightarrow 0$ ) происходят в пространстве  $(z_1, n_1, \delta_1; z_2, n_2, \delta_2)$ , при этом составное ядро считается образовавшимся, когда удлинение системы становится меньше удлинения, соответствующего седловой конфигурации.

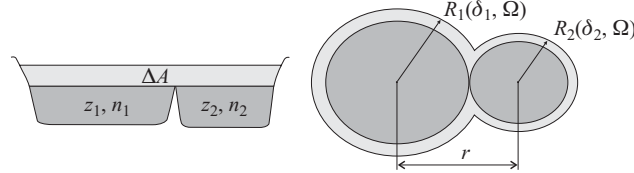


Рис. 13. Схематическое изображение ядерной системы в приближении двух коров

Адиабатический драйвинг-потенциал в приближении двух коров определяется следующим образом:

$$V_{\text{adiab}}(r; z_1, n_1, \delta_1; z_2, n_2, \delta_2) = \tilde{V}_{12}(r, z_1, n_1, \delta_1; z_2, n_2, \delta_2) - [\tilde{B}(a_1) + \tilde{B}(a_2) + \tilde{B}(\Delta A)] + B(A_P) + B(A_T). \quad (58)$$

Здесь  $\tilde{B}(a_1) = \tilde{\beta}_1 a_1$ ,  $\tilde{B}(a_2) = \tilde{\beta}_2 a_2$  и  $\tilde{B}(\Delta A) = 0,5(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2)\Delta A$  — энергии связи коров и общих нуклонов. Эти величины зависят от числа коллективизированных нуклонов. Определим степень коллективизации как  $x = \Delta A / \Delta A_{CN}$ , тогда  $\tilde{\beta}_{1,2}$  могут быть вычислены следующим образом:  $\tilde{\beta}_{1,2} = \beta_{1,2}^{\text{exp}} \varphi(x) + \beta_{CN}^{\text{exp}} [1 - \varphi(x)]$ . Здесь  $\beta_{1,2}^{\text{exp}}$  и  $\beta_{CN}^{\text{exp}}$  — удельные энергии связи изолированных (свободных) фрагментов, которые известны экспериментально или (для сверхтяжелых составных ядер) вычисляются в рамках макро-микроскопической модели [20],  $\varphi(x)$  — достаточно произвольная монотонная функция, удовлетворяющая условиям  $\varphi(x = 0) = 1$  и  $\varphi(x = 1) = 0$ . Таким образом, удельная энергия связи коров с ростом  $\Delta A$  постепенно приближается к удельной энергии связи составного ядра, а все оболочечные эффекты учитываются в (58) явным образом за счет  $\beta_{1,2}^{\text{exp}}$  и  $\beta_{CN}^{\text{exp}}$ . Взаимодействие двух фрагментов  $\tilde{V}_{12}$  определяется обычным образом при  $r \geq R_{\text{cont}}$  как сумма кулоновского и ядерного взаимодействий (см. разд. 1). Предполагается, что это взаимодействие постепенно ослабевает с ростом числа общих нуклонов  $\Delta A$  при  $R_{CN} < r < R_{\text{cont}}$ , т.е. по мере «растворения» двух коров в объеме составного моноядра:  $\tilde{V}_{12}(x \rightarrow 1) \rightarrow 0$  (см. детали в [13]). Таким образом, при образовании составного ядра ( $\Delta A = \Delta A_{CN}$ ) полная энергия системы  $V_{\text{adiab}} = Q_{gg}^{\text{fus}} = B(A_P) + B(A_T) - B(A_{CN})$ , как и должно быть, если за нулевую энергию выбрать энергию двух исходных ядер ( $A_P$  и  $A_T$ ) на бесконечности.

Драйвинг-потенциал (58) показан на рис. 14 как функция  $z_1$  и  $z_2$  при  $r \leq R_{\text{cont}}$  (минимизированный по  $n_1$  и  $n_2$ ), а также как функция удлинения и массовой асимметрии. Нетрудно видеть, что оболочечная структура, ярко проявляющаяся при контакте двух ядер ( $\Delta A = 0$ , диагональ на рис. 14, б),

сохраняется и при  $r < R_{\text{cont}}$  (см. глубокие минимумы в области  $z_{1,2} \sim 50$  и  $z_{1,2} \sim 82$  на рис. 14, б). На пути в долину деления (точечные кривые на рис. 14, б и г) ядерная система преодолевает многогорбый делительный барьер (рис. 14, в). Хорошо известно, что промежуточные минимумы соответствуют изомерам формы. Из анализа драйвинг-потенциала (см. рис. 14, б) мы можем сделать определенный вывод о том, что эти изомерные состояния есть не что иное, как двухкластерные конфигурации с магическими или полумагическими корами.

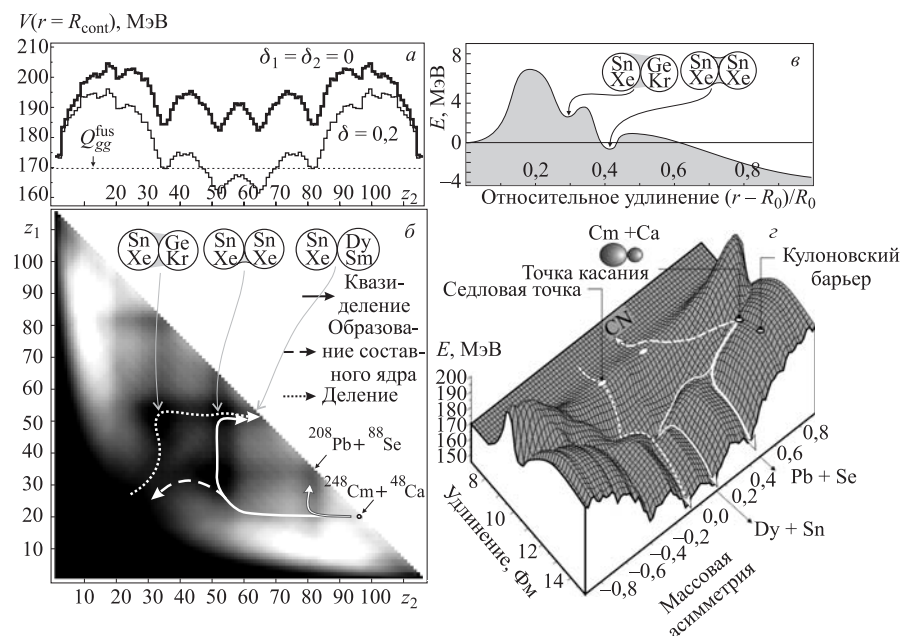


Рис. 14. Драйвинг-потенциал ядерной системы  $^{296}_{116}\text{U} \leftrightarrow ^{48}_{20}\text{Ca} + ^{248}_{96}\text{Cm}$ . а) Потенциальная энергия двух соприкасающихся сферических (толстая линия) и деформированных (тонкая линия) фрагментов при  $a_1 + a_2 = A_{\text{CN}}$ ,  $\Delta A = 0$ , т. е. на диагонали рис. б). б) Топографический ландшафт драйвинг-потенциала на плоскости  $(z_1, z_2)$ . Штриховая, сплошная и точечная кривые со стрелками показывают наиболее вероятные траектории слияния, квазиделения и обычного деления соответственно. в) Трехгорбый барьер, вычисленный вдоль траектории деления (точечная кривая). г) Потенциальная поверхность в пространстве «массовая асимметрия–удлинение»

Как показано в [4, 14], расчеты адиабатической потенциальной энергии в приближении двух коров и в рамках обычной двухцентральной оболочечной модели дают достаточно близкие результаты. Вместе с тем, помимо простоты вычисления, приближение двух коров имеет и некоторые другие преимущества. Драйвинг-потенциал (58) вычисляется на основе эксперимен-

тальных энергий связи двух коров. Это означает, что используется «истинная» оболочечная поправка и, таким, образом, для разделенных ядер ( $r > R_{\text{cont}}$ ) (58) дает *точное* значение ядро-ядерного взаимодействия. Драйвинг-потенциал (58) определен во всем пространстве  $R_{CN} < r < \infty$ , является непрерывной функцией при  $r = R_{\text{cont}}$ , дает реалистические барьеры слияния и может быть использован для одновременного описания всего процесса слияния-деления. Наряду с использованием переменных  $(z_1, n_1; z_2, n_2)$ , можно легко пересчитать драйвинг-потенциал как функцию массовой асимметрии  $\eta = (a_1 - a_2)/(a_1 + a_2)$  и удлинения  $r$ . Эти переменные вместе с деформацией фрагментов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  обычно и используются при описании процессов слияния-деления (см. выше).

**3.3. Ориентационные эффекты в слиянии ядер.** Хорошо известно, что ориентационные эффекты играют важную роль при подбарьерном слиянии ядер, значительно увеличивая сечение контакта за счет понижения высоты кулоновского барьера при ориентации «нос к носу» (см. рис. 8). Существуют некоторые указания на то, что ориентация ядер в точке контакта сильно влияет также на вероятность образования составного ядра [66, 67] (особенно в реакциях синтеза сверхтяжелых элементов [1]), значительно уменьшая эту вероятность именно для ориентаций «нос к носу», при которых ядерная система распадается преимущественно в каналы квазиделения. До сих пор этот эффект не изучался в теоретических моделях, лишь эмпирическая параметризация его [15] использовалась для оценок сечений образования сверхтяжелых ядер. Основная проблема здесь заключается именно в сложности расчета соответствующей потенциальной энергии для последовательных форм ядерной системы, которые, вообще говоря, неизвестны и трудно определимы при отсутствии аксиальной симметрии. Вряд ли в этом случае удастся избежать введения дополнительных степеней свободы для описания таких форм.

В рамках «приближения двух коров» мы можем рассчитать адиабатическую потенциальную энергию не только для аксиально-симметричных форм, но и для ориентации ядер «бок к боку», предположив, что на пути к составному ядру может происходить динамическое изменение лишь экваториальных деформаций обоих ядер, в то время как их статическая деформация вдоль осей, перпендикулярных линии, соединяющей два центра, постепенно релаксирует к нулевому значению с увеличением экваториальных деформаций и величины переданной массы (см. рис. 15). Это предположение выглядит достаточно оправданным, поскольку в системе нет сил, которые могли бы изменять «перпендикулярные» деформации фрагментов. В этом случае нам не требуется введение дополнительных степеней свободы. Те же переменные  $\delta_1$  и  $\delta_2$  могут быть использованы для динамических деформаций вдоль оси, соединяющей центры ядер (в точке контакта  $\delta_{1,2} = 0$ ). Можно предположить, что статические деформации ядер монотонно убывают с увеличением переданной массы и увеличением динамических экваториальных деформаций:

$\delta_{1,2}^{\perp} = \delta_{1,2}^{\perp}(0) \exp \left[ - \left( \frac{\eta - \eta_0}{\Delta_{\eta}} \right)^2 \right] \exp \left[ - \left( \frac{\delta_{1,2}}{\Delta_{\delta}} \right)^2 \right]$ . Таким образом, они не являются независимыми динамическими переменными. Здесь  $\eta_0$  — начальная массовая асимметрия,  $\delta_{1,2}^{\perp}(0)$  — статические деформации снаряда и мишени, а  $\Delta_{\eta} \sim 10/A_{CN}$  и  $\Delta_{\delta} \sim 0,2$  — подбираемые параметры, значения которых не очень сильно влияют на весь процесс. Величина  $\Delta_{\eta}$ , в частности, взята исходя из среднего расстояния (по числу протонов и нейтронов) между деформированными и сферическими оболочками на карте ядер.

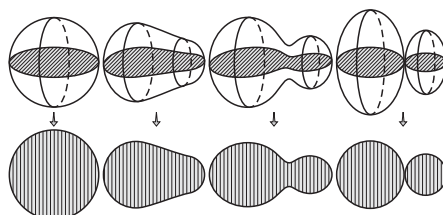


Рис. 15. Вид сбоку (верхние фигуры) и сверху (нижние фигуры) на последовательные формы ядерной системы, эволюционирующей из конфигурации двух статически деформированных ядер, касающихся друг друга в экваториальной плоскости, в состоянии составного моноядра

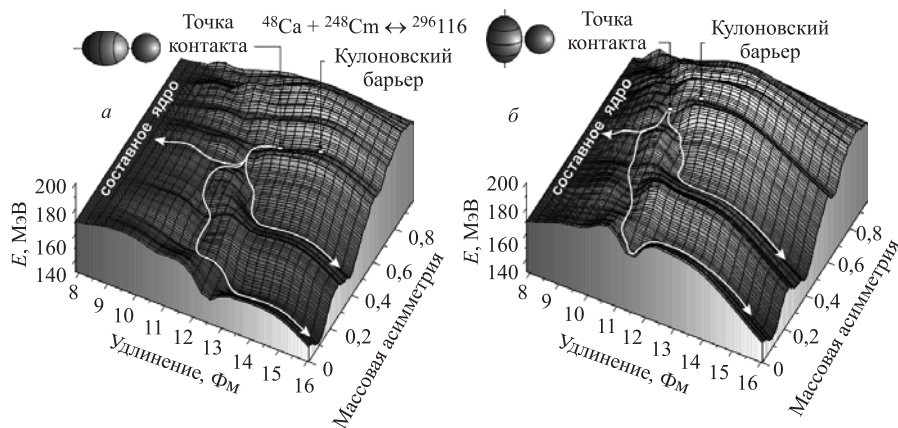


Рис. 16. Драйвинг-потенциал ядерной системы, образующейся при «полярном» (а) и «экваториальном» (б) столкновении ядер  $^{48}\text{Ca}$  и  $^{248}\text{Cm}$ . Кривые со стрелками показывают траектории квазиделения (идущие в долины с образованием магических ядер свинца и олова) и формирования составного ядра

Рассчитанные потенциальные поверхности для двух фиксированных ориентаций статически деформированного ядра  $^{248}\text{Cm}$ , сливающегося с ядром  $^{48}\text{Ca}$ , показаны на рис. 16 в пространстве «массовая асимметрия–удлинение».

Для боковых ориентаций высота кулоновского барьера во входном канале значительно выше. Однако в точке контакта такая конфигурация намного компактней и путь к образованию составного ядра намного короче по сравнению с ориентацией «нос к носу». Поэтому мы можем ожидать более высокой вероятности слияния для таких конфигураций.

Довольно сложно (если вообще возможно) получить адиабатический драйв-винг-потенциал для ядерной системы, эволюционирующей из состояния с произвольной ориентацией касающихся друг друга статически деформированных ядер. Заметим, что адиабатический потенциал вычисляется при этом довольно просто (см. п. 1.3). Для оценки образования составного ядра можно в этом случае произвести простое усреднение результатов, полученных для двух предельных ориентаций.

**3.4. Динамика слияния-деления в рамках двухцентровой модели.** Выбор подходящих коллективных степеней свободы для описания низкоэнергетической ядерной динамики является довольно сложной задачей. С одной стороны, этих переменных не должно быть слишком много, чтобы провести соответствующий численный анализ. С другой стороны, при малом их числе вряд ли возможно адекватное описание ядерных форм, через которые проходит система в процессах слияния-деления. Как уже отмечалось, расстояние между центрами масс двух разделенных ядер или формирующихся осколков (удлинение), их динамические деформации, а также координата массовой асимметрии системы (нуклонные передачи), безусловно, играют наиболее важную роль. Помимо этого, существенную роль может играть также различие форм ядер во входном (слияние) и выходном (деление, квазиделение) каналах. Принято считать, что для процесса деления (и квазиделения) характерны разрывные конфигурации с большим расстоянием между центрами масс осколков и ярко выраженной шейкой. В то же время при начальном соприкосновении ядер во входном канале, по всей видимости, образуются более компактные конфигурации без образования шейки. Таким образом, параметр  $\varepsilon$ , определяющий толщину шейки в двухцентровой параметризации формы ядер, также должен быть включен в рассмотрение.

Учет всех пяти степеней свободы, однако, выходит за рамки современных вычислительных возможностей. С целью уменьшения числа переменных мы, во-первых, предлагаем вместо двух независимых динамических деформаций  $\delta_1$  и  $\delta_2$  использовать лишь одну переменную  $\delta$ . Связь между  $\delta$  и  $\delta_i$  задается следующим образом:

$$2\delta = (\delta_1 - \delta_1^{(0)}) + (\delta_2 - \delta_2^{(0)}), \quad C_{\delta 1}(\delta_1 - \delta_1^{(0)}) = C_{\delta 2}(\delta_2 - \delta_2^{(0)}), \quad (59)$$

$$C_{\delta i} = \frac{8}{45} \left( 2a_s \left[ 1 - k_s \left( \frac{N_i - Z_i}{A_i} \right)^2 \right] A_i^{2/3} - \frac{3}{5} \frac{e^2 Z_i^2}{r_0 A_i^{1/3}} \right).$$

Второе соотношение в (59) фактически означает равенство сил, прилагаемых при деформации двух фрагментов (в области  $z < 0$  и  $z > 0$ ). При этом мы ограничились квадратичным членом разложения энергии деформации в ряд Тейлора по степеням деформации. Для жесткости  $C_{\delta_i}$  может быть использовано выражение, полученное для эллипсоидальной формы ядра. Деформации  $\delta_i^{(0)}$  приближенно соответствуют минимуму потенциальной энергии при фиксированных остальных коллективных координатах и задаются в виде

$$\delta_i^{(0)} = \begin{cases} \delta^{\text{g.s.}}(A, Z), & r \leq \tilde{R}_{CN}, \\ \delta^{\text{g.s.}}(A_i, Z_i), & r \geq R_{\text{cont}}, \\ \delta^{\text{g.s.}}(A, Z) + [\delta^{\text{g.s.}}(A_i, Z_i) - \delta^{\text{g.s.}}(A, Z)] \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{r - \tilde{R}_{CN}}{r_{\text{cont}} - r_{CN}} \right), & R_{\text{cont}} > r > \tilde{R}_{CN}, \end{cases} \quad (60)$$

где  $\delta^{\text{g.s.}}(A, Z)$  — деформация основного состояния ядра, а  $\tilde{R}_{CN}$  — расстояние между центрами масс, соответствующее  $z_2 - z_1 = 0$ .

Рассмотрим теперь возможность приближенного учета изменения параметра толщины шейки. Для фазы слияния компактная форма ядер хорошо описывается при значении  $\varepsilon = 1$ . При описании процесса деления значение  $\varepsilon$  должно быть выбрано так, чтобы минимизировать потенциальную энергию вдоль пути деления. В работе [68] было рекомендовано использовать  $\varepsilon \approx 0,35$ . На рис. 17 показана двумерная карта макроскопической потенциальной энергии в координатах  $(r, \varepsilon)$ . Соответствующая карта форм ядерной системы показана на рис. 18. Как видно из этого рисунка, положение точки разрыва очень чувствительно к величине  $\varepsilon$ . Следовательно, и кинетическая энергия осколков деления также будет существенно зависеть от  $\varepsilon$ . На основании проведенных расчетов мы можем сделать следующие выводы.

1) Для разделенных ядер потенциальная энергия практически не зависит от  $\varepsilon$ . Поэтому при движении сталкивающихся ядер из бесконечности к точке контакта величина  $\varepsilon$  практически не изменяется ( $\varepsilon = 1$ ).

2) Потенциальная энергия не зависит от  $\varepsilon$  в области основного состояния составного ядра.

3) Деление составного ядра (движение от основного состояния вдоль дна ландшафта потенциальной энергии к точке разрыва и далее на бесконечность) происходит при  $\varepsilon < 1$ . Для показанного на рисунке случая  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  наиболее вероятная разрывная конфигурация соответствует  $\varepsilon_{\text{out}} \simeq 0,25$ . Однако это значение существенно зависит от деформации осколков, например,  $\varepsilon_{\text{out}} \simeq 0,35$  для  $\delta_1 = \delta_2 = 0,4$  и  $\varepsilon_{\text{out}} \simeq 0,45$  для  $\delta_1 = \delta_2 = 0,7$ . Для того чтобы ограничиться вычислениями в пространстве лишь трех динамических переменных  $(r, \eta, \delta)$ , мы предлагаем использовать временную зависимость адиабатической потенциальной энергии  $V_{\text{adiab}}$ , релаксирующей от величины, полученной при  $\varepsilon = 1$  (входной канал), к потенциальной энергии,



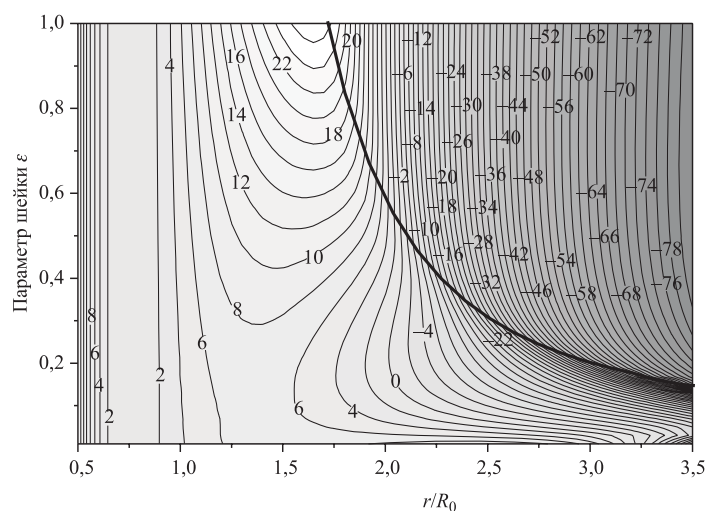


Рис. 17. Потенциальная энергия в координатах  $(r, \varepsilon)$  для ядра  $^{224}\text{Th}$ , полученная в МЖК [18, 19] и нормированная на ноль для сферического составного ядра. Потенциальная энергия рассчитана при  $\eta = 0$  и  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ . Толстая кривая — линия разрыва

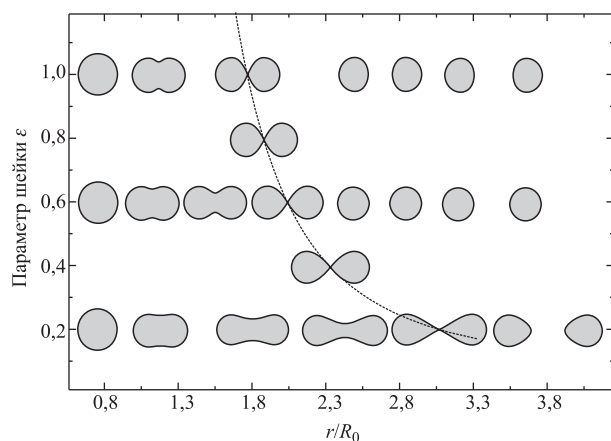


Рис. 18. Карта форм ядра в координатах  $(r, \varepsilon)$  для случая  $\eta = 0$  и  $\delta_1 = \delta_2 = 0$

соответствующей  $\varepsilon_{\text{out}}$ . Характерное время релаксации  $\tau_\varepsilon \sim 10^{-21}$  с является параметром модели, который может быть извлечен из анализа массовых и энергетических распределений осколков деления.

Для того, чтобы использовать предлагаемые многомерные ядро-ядерные потенциалы взаимодействия также для анализа ядерных реакций при не очень

низких энергиях (в области от 10 до 40 МэВ/нуклон, где коллективные степени свободы все еще играют заметную роль), необходимо учитывать различие адиабатического (начальная стадия) и неадиабатического режимов столкновения ядер. Переход к равновесному распределению нуклонов и адиабатическому режиму столкновения происходит довольно быстро, за характерное время  $\tau_{\text{relax}} \sim 10^{-21}$  с [69]. Мы рассматриваем здесь  $\tau_{\text{relax}}$  в качестве параметра модели, величину которого можно уточнить из анализа многочисленных экспериментальных данных по глубоконеупругому рассеянию ядер. Заметим, что в последнее время делаются попытки микроскопического рассмотрения процесса временной релаксации адиабатической потенциальной энергии взаимодействия ядер в адиабатическую [70]. В этих расчетах получаются примерно те же значения  $\sim 10^{-21}$  с для параметра  $\tau_{\text{relax}}$ . Таким образом, при описании процессов столкновения ядер вплоть до энергии 40 МэВ/нуклон можно использовать следующее выражение для ядро-ядерной потенциальной энергии взаимодействия:

$$V_{\text{fus-fis}}(r, \beta, \eta; A_P, Z_P, A_T, Z_T; t) = V_{\text{diab}} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{\text{relax}}}\right) + \tilde{V}_{\text{adiab}}(\varepsilon, t) \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{\text{relax}}}\right)\right], \quad (61)$$

где  $\tau$  — время контакта ядер;  $V_{\text{diab}}$  — адиабатическая потенциальная энергия и  $\tilde{V}_{\text{adiab}}(\varepsilon, t)$  — неадиабатическая потенциальная энергия, зависящая от  $\varepsilon$  и времени:

$$\tilde{V}_{\text{adiab}}(\varepsilon, t) = V_{\text{adiab}}(\varepsilon = 1) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right) + V_{\text{adiab}}(\varepsilon_{\text{out}}) \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right)\right]. \quad (62)$$

Адиабатическая потенциальная энергия в (61) рассчитывается в эллипсоидной параметризации ядер (см. разд. 1), а неадиабатическая  $V_{\text{adiab}}$  в (62) — согласно выражению (57) для двух разных значений параметра шейки  $\varepsilon$ . При этом вся временная зависимость многомерной потенциальной энергии параметризуется с помощью соответствующих экспоненциальных множителей в (61) и в (62), моделирующих релаксацию адиабатического потенциала в адиабатический (параметр  $\tau_{\text{relax}}$ ) и образование шейки в выходном канале (параметр  $\tau_\varepsilon$ ). На рис. 19 в качестве примера показана неадиабатическая потенциальная энергия во входном ( $\varepsilon = 1$ ) и выходном ( $\varepsilon_{\text{out}} = 0,35$ ) каналах реакции слияния-деления. Следует обратить внимание на большое различие точки контакта во входном канале и точки разрыва в выходном. Это

различие имеет важное значение при динамических расчетах, поскольку диссипация энергии относительного движения ядер и передача массы происходит главным образом тогда, когда ядра находятся в контакте.

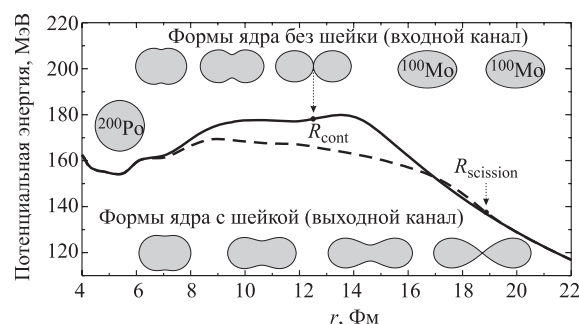


Рис. 19. Пример адиабатической потенциальной энергии во входном (сплошная кривая) и выходном (штриховая) каналах реакции для составного ядра  $^{200}\text{Po}$ . Расчеты выполнены для нулевой динамической деформации  $\delta = 0$  и нулевой массовой асимметрии  $\eta = 0$

Заметим, что большая величина ядерной вязкости ( $\mu_0 \sim 10^{-22}$  МэВ  $\times$  с  $\cdot$  Фм $^{-3}$ ) приводит к достаточно большим временам протекания ядерных реакций при околорезонансных энергиях столкновения [4] и первое слагаемое в (61) фактически не играет никакой роли при этих энергиях. Эволюция системы в этом случае практически полностью определяется адиабатической потенциальной энергией. Для более высоких энергий, однако, за время  $\tau \leq \tau_{\text{relax}}$  ядра успевают достичь области перекрытия, где заметную роль играет отталкивающая часть адиабатической потенциальной энергии и первое слагаемое в (61) необходимо учитывать.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Потенциальная энергия ядерной системы является ее ключевой характеристикой, определяющей не только статические свойства этой системы, но и всю ее динамику при низких энергиях. Последнее обусловлено большой величиной ядерной вязкости (несмотря на значительную неопределенность ее конкретного значения). В этих условиях динамика тяжелых ядерных систем с ненулевой температурой близка к сильно затухающему режиму, при котором кинетическая энергия быстро и практически полностью переходит в энергию возбуждения. Ядерная система при этом движется преимущественно

вдоль минимума потенциальной энергии в многомерном пространстве коллективных степеней свободы. Флуктуации, безусловно, играют заметную роль, но основным регулятором эволюции всей системы является именно драйвинг-потенциал, его долины и барьеры. Нахождение основных степеней свободы тяжелой ядерной системы, играющих наиболее принципиальную роль, и построение соответствующей многомерной потенциальной поверхности по-прежнему является одной из основных задач низкоэнергетической ядерной физики.

В данной работе исследованы несколько возможностей построения адиабатического ядро-ядерного потенциала взаимодействия, который может быть использован при описании глубоконеупругих процессов рассеяния и процессов слияния при надбарьерных энергиях. Предложена глобальная параметризация ядерной плотности для вычисления фолдинг-потенциала с зависящими от плотности силами Мигдала. Этот потенциал дает правильные значения кулоновских барьеров слияния для ядер тяжелее углерода. Он может быть использован для вычисления энергии взаимодействия деформированных ядер с произвольной взаимной ориентацией (как в плоскости реакции, так и вне ее).

Для построения адиабатической потенциальной энергии тяжелой ядерной системы предложена расширенная версия двухцентровой оболочечной модели, позволяющая получить правильное значение потенциала в асимптотической области разделенных фрагментов и в области касания ядер, в частности, правильное значение высоты барьера слияния. Введение эмпирической временной зависимости драйвинг-потенциала, моделирующей переход от адиабатического к адиабатическому режиму движения, позволяет использовать этот потенциал в динамических расчетах при надбарьерных энергиях столкновения, а также при описании процессов слияния-деления, когда в выходном канале (в точке разрыва) образуются сильно вытянутые ядерные конфигурации. Основным достоинством предлагаемого драйвинг-потенциала является возможность единого (одновременного) описания сильно связанных каналов реакции: глубоконеупругого рассеяния, процессов квазиделения, слияния и обычного деления. Сохранение полного потока (равного сумме потоков во все каналы реакции) может позволить более надежно рассчитывать и предсказывать абсолютные сечения исследуемых процессов.

Расчет и использование рассмотренных в данной работе многомерных драйвинг-потенциалов может быть выполнен с помощью соответствующих программ, расположенных на web-сервере [71] со свободным доступом.

Авторы признательны ДФГ и РФФИ за поддержку данной работы (грант 04-02-04008). Один из нас (А. В. Карпов) признателен INTAS за поддержку данных исследований в рамках гранта молодых ученых 05-109-5058.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oganessian Yu. Ts. et al.* // Phys. Rev. C. 2004. V. 70. P. 064609.
2. *Itkis M. G. et al.* // Nucl. Phys. A. 2004. V. 734. P. 136.
3. *Schröder W. U., Huizenga J. R.* Damped Nuclear Reactions // Treatise on Heavy-Ion Science / Ed. D. A. Bromley. N. Y., 1984. V. 2. P. 140.
4. *Zagrebaev V., Greiner W.* // J. Phys. G. 2005. V. 31. P. 825.
5. *Jiang C. L. et al.* // Phys. Rev. C. 2005. V. 71. P. 044613.
6. *Волков В. В.* Ядерные реакции глубоконеупругих передач. М.: Энергоиздат, 1982. 183 с.
7. *Péter J. et al.* // Nucl. Phys. A. 2004. V. 279. P. 110.
8. *Berriman A. C. et al.* // Nature. 2001. V. 413. P. 144.
9. *Bass R.* Nuclear Reactions with Heavy Ions. Springer-Verlag, 1980. 326 p.
10. *Scheid W., Ligensa R., Greiner W.* // Phys. Rev. Lett. 1968. V. 21. P. 1479.
11. *Greiner W., Park J. Y., Scheid W.* Nuclear Molecules. Singapore: World Scientific, 1995.
12. *Загребаев В. И., Самарин В. В.* // ЯФ. 2007. Т. 70, № 6.
13. *Zagrebaev V. I.* // Phys. Rev. C. 2001. V. 64. P. 034606.
14. *Zagrebaev V. I.* // J. Nucl. Rad. Sci. 2002. V. 3, No. 1. P. 13.
15. *Zagrebaev V. I.* // Tours Symp. on Nuclear Physics / Ed. by M. Arnould et al. AIP Conf. Proc. No. 704. N. Y., 2004. P. 31.
16. *Mosel U., Maruhn J., Greiner W.* // Phys. Lett. B. 1971. V. 34. P. 587.
17. *Maruhn J., Greiner W.* // Z. Phys. A. 1972. Bd. 251. S. 431.
18. *Krappe H. J., Nix J. R., Sierk A. J.* // Phys. Rev. C. 1979. V. 20. P. 992.
19. *Sierk A. J.* // Phys. Rev. C. 1986. V. 33. P. 2039.
20. *Möller P. et al.* // At. Data Nucl. Data Tables. 1995. V. 59. P. 185.
21. *Blocki J. et al.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1977. V. 105. P. 427.
22. *Takigawa N., Rumin T., Ihara N.* // Phys. Rev. C. 2000. V. 61. P. 044607.
23. *Broglia R. A., Dasso C. H., Winter A.* // Proc. of Intern. School of Physics «Enrico Fermi», Varenna Course, 1979 / Eds. R. A. Broglia, R. A. Ricci, H. A. Dasso. Amsterdam, 1981. P. 327.
24. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М: Наука, 1970.
25. *Загребаев В. И., Самарин В. В.* // ЯФ. 2004. Т. 67. С. 1488.
26. *Gontchar I. I. et al.* // Phys. Rev. C. 2002. V. 65. P. 034610.
27. *Satchler G. R., Love W. G.* // Phys. Rep. 1979. V. 55. P. 183.
28. *Bertsch G. et al.* // Nucl. Phys. A. 1977. V. 284. P. 399.
29. *Lacombe M. et al.* // Phys. Rev. C. 1980. V. 21. P. 861.
30. *Anantaraman N., Toki H., Bertsch G. F.* // Nucl. Phys. A. 1983. V. 398. P. 269.
31. *Sinha B., Moszkowski S. A.* // Phys. Lett. B. 1979. V. 81. P. 289.
32. *Chaudhuri A. K., Basu D. N., Sinha B.* // Nucl. Phys. A. 1985. V. 439. P. 415;  
*Chaudhuri A. K., Sinha B.* // Nucl. Phys. A. 1986. V. 455. P. 169.

33. *Khoa Dao T.* // Nucl. Phys. A. 1988. V. 484. P. 376;  
*Khoa Dao T., Faessler A., Ohtsuka N.* // J. Phys. G. 1990. V. 16. P. 1253.
34. *Petrovich F. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 22. P. 895;  
*Golin M., Petrovich F., Robson D.* // Phys. Lett. B. 1976. V. 64. P. 253;  
*Petrovich F.* Microscopic Optical Potentials. Berlin: Springer, 1979. 155 p.
35. *Love W. G., Owen L. W.* // Nucl. Phys. A. 1975. V. 239. P. 74;  
*Satchler G. R., Love W. G.* // Phys. Lett. B. 1976. V. 65. P. 415.
36. *Kobos A. M. et al.* // Nucl. Phys. A. 1982. V. 384. P. 65.
37. *Khoa Dao T., von Oertzen W.* // Phys. Lett. B. 1993. V. 304. P. 8; 1995. V. 342. P. 6.
38. *Khoa Dao T., Satchler G. R., von Oertzen W.* // Phys. Rev. C. 1997. V. 56. P. 954.
39. *Uegaki E., Abe Y.* // Prog. Theor. Phys. 1993. V. 90. P. 615.
40. *Adamian G. G. et al.* // Intern. J. Mod. Phys. E. 1996. V. 5, No. 1. P. 191.
41. *Мигдал А. Б.* Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. 2-е изд. М.: Наука, 1983. 432 с.
42. *Nadjakov E. G., Marinova K. P., Gangrsky Y. P.* // At. Data Nucl. Data Tables. 1994. V. 56. P. 133.
43. *Angeli I.* // Acta Phys. Hung. A: Heavy Ion Physics. 1998. V. 8. P. 23.
44. NRV nuclear map // <http://nr.v.jinr.ru/nrv>
45. *Moffa P. J., Dover C. B., Vary J. P.* // Phys. Rev. C. 1977. V. 16. P. 1857.
46. *Carstoiu F., Lombard R. J.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1992. V. 217. P. 279.
47. *Misicu S., Greiner W.* // Phys. Rev. C. 2002. V. 66. P. 044606.
48. *Bohr A., Mottelson B. R.* Nuclear Structure. V. 2: Nuclear Deformations. N. Y.: Benjamin, 1974.
49. *Strutinsky V. M.* // Nucl. Phys. A. 1967. V. 95. P. 420;  
*Strutinsky V. M.* // Nucl. Phys. A. 1968. V. 22. P. 1.
50. *Brack M. et al.* // Rev. Mod. Phys. 1972. V. 44. P. 320.
51. *Pashkevich V. V.* // Nucl. Phys. A. 1971. V. 169. P. 275;  
*Cwiok S. et al.* // Nucl. Phys. A. 1983. V. 410. P. 254;  
*Cwiok S., Lojewski Z., Pashkevich V. V.* // Nucl. Phys. A. 1985. V. 444. P. 1;  
*Pashkevich V. V.* // Nucl. Phys. A. 1988. V. 477. P. 1.
52. *Baran A. et al.* // Nucl. Phys. A. 1981. V. 361. P. 83;  
*Patyk Z. et al.* // Nucl. Phys. A. 1989. V. 502. P. 591c;  
*Smolanczuk R., Skalski J., Sobiczewski A.* // Phys. Rev. C. 1995. V. 52. P. 1871.
53. *Smolanczuk R.* // Phys. Rev. C. 1997. V. 56. P. 812.
54. *Möller P., Nix J. R., Swiatecki W. J.* // Nucl. Phys. A. 1987. V. 469. P. 1.
55. *Möller P., Nix J. R., Swiatecki W. J.* // Nucl. Phys. A. 1989. V. 492. P. 349.
56. *Möller P., Sierk A. J., Iwamoto A.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 072501.
57. *Mamdouh A. et al.* // Nucl. Phys. A. 1998. V. 644. P. 389; 1999. V. 648. P. 282(E);  
*Mamdouh A. et al.* // Nucl. Phys. A. 2001. V. 679. P. 337.
58. *Bürvenich T. et al.* // Phys. Rev. C. 2004. V. 69. P. 014307.
59. *Goutte H. et al.* // Phys. Rev. C. 2005. V. 71. P. 024316.
60. *Nilsson S. G.* // Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1955. V. 29. No. 16;  
*Nilsson S. G. et al.* // Nucl. Phys. A. 1969. V. 131. P. 1.
61. *Черданцев П. А., Маршалкин В. Е.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1966. Т. 30. С. 341.

62. *Demeur M., Reidemeister G.* // Ann. Phys. (Paris). 1966. V. 1. P. 181.
63. *Holzer P., Mosel U., Greiner W.* // Nucl. Phys. A. 1969. V. 138. P. 241.
64. *Myers W. D.* Droplet Model of Atomic Nuclei. N. Y.: IFI/Plenum, 1977. 150 p.
65. *Myers W. D., Swiatecki W. J.* // Nucl. Phys. A. 1996. V. 601. P. 141.
66. *Iwamoto A. et al.* // Ibid. V. 596. P. 329.
67. *Nishio K. et al.* // Phys. Rev. C. 2000. V. 62. P. 014602;  
*Mitsuoka S. et al.* // Ibid. P. 054603.
68. *Yamaji S., Hofmann H., Samhammer R.* // Nucl. Phys. A. 1988. V. 475. P. 487.
69. *Bertsch G. F.* // Z. Phys. A. 1978. Bd. 289. S. 103;  
*Cassing W., Nörenberg W.* // Nucl. Phys. A. 1983. V. 401. P. 467.
70. *Diaz-Torres A.* // Phys. Rev. C. 2004. V. 69. P. 021603;  
*Diaz-Torres A., Scheid W.* // Nucl. Phys. A. 2005. V. 757. P. 373.
71. NRV codes for driving potentials // <http://nrv.jinr.ru/nrv>