

МГНОВЕННАЯ ФОРМА
ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНОЙ КВАНТОВОЙ
МЕХАНИКИ И ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ
СОСТАВНЫХ СИСТЕМ

А. Ф. Крутов

Самарский государственный университет, Самара, Россия

В. Е. Троицкий

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

ВВЕДЕНИЕ	269
ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНЫЕ КВАНТОВЫЕ МЕХАНИКИ	274
ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СТРУКТУРЫ НА ПРИМЕРЕ ПРОСТОЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ	281
МОДИФИЦИРОВАННОЕ ИМПУЛЬСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ	290
НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ	293
СВЯЗЬ С ДИСПЕРСИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ	294
ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ	297
ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДВУХ ЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА	303
ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРОВ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ	308
ПРИМЕНЕНИЕ К ОПИСАНИЮ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ	313
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	316

МГНОВЕННАЯ ФОРМА ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ

А. Ф. Крутов

Самарский государственный университет, Самара, Россия

В. Е. Троицкий

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Дан обзор работ авторов, в которых развивается релятивистский формализм для описания составных систем. Ядром формализма является процедура разложения матричных элементов локальных токов при помощи аналога теоремы Вигнера–Экарта для группы Пуанкаре. Сформулировано импульсное приближение без нарушения лоренц-ковариантности и закона сохранения. Приведены некоторые результаты применения метода для описания электрослабой структуры составных систем.

The review is devoted to the description of relativistic approach to composite systems. Basis of this approach is the decomposition of the matrix elements of local currents by the Wigner–Eckart theorem on Poincaré group. Impulse approximation is formulated without violation of the Lorentz-covariance and conservation law. Some results of the description of the electroweak properties are presented.

PACS: 03.65.Pm, 11.10.St

ВВЕДЕНИЕ

Все атомы, ядра и большинство так называемых элементарных частиц представляют собой составные системы. Именно поэтому роль корректных методов количественного описания структуры составных систем является очень важной. В нерелятивистской динамике составных систем имеются достаточно надежные методы, опирающиеся на использование модельных или феноменологических потенциалов взаимодействия. Однако для описания процессов, протекающих с участием составных систем, при больших энергиях необходимо развитие релятивистских методов. Более того, даже при низких энергиях описание, например, систем, содержащих легкие кварки,

обязательно требует учета релятивистских эффектов. Следует, однако, подчеркнуть, что количественное описание релятивистских адронных составных систем представляет собой весьма сложную задачу, которая в полном объеме вряд ли может быть решена в ближайшие годы, поскольку для этого нужно решить многотельную релятивистскую задачу, да и то с еще далеко не всегда хорошо известным взаимодействием. Применение же методов теории поля для решения этой проблемы сталкивается с серьезными трудностями. Так, например, известно, что пертурбативная КХД не может быть применена к проблеме связанных состояний кварков (см., например, [1, 2]). В связи с этим для описания составных адронных систем получили широкое распространение так называемые релятивистские составные модели.

Цель настоящего обзора состоит в описании одной из возможных релятивистски-инвариантных моделей электрослабой структуры двухчастичной составной системы. Основной проблемой при построении таких моделей является, как известно, проблема построения операторов токов перехода. Вообще говоря, сложности с построением, например, оператора электромагнитного тока составной системы, удовлетворяющего условиям лоренц-ковариантности и сохранения, возникают во всех подходах, в том числе и в пертурбативной квантовой теории поля. Эта проблема довольно активно обсуждается в литературе [3–9]. Так, для обеспечения закона сохранения в рамках уравнения Бете–Солпитера и квазипотенциальных уравнений необходим выход за рамки импульсного приближения, т. е. в оператор тока необходимо добавить так называемые двухчастичные токи [9], которые, например, в ядерной физике интерпретируются как обменные мезонные токи (ОМТ) [8, 10]. Для дейтрона в электрон-дейтронном рассеянии это будет означать взаимодействие виртуального γ -кванта с протоном и нейтроном одновременно. В то же время отметим работу [11], в которой показано, что, хотя такого рода процессы дают вклад в формфакторы дейтрона, обеспечить закон сохранения тока можно и без них. Вообще, в настоящее время в литературе преобладает тенденция формулировать импульсное приближение с сохранением трансформационных свойств тока без динамического учета обменных токов [4, 11–16]. Представленный в обзоре подход к описанию электрослабой структуры двухчастичных составных систем имеет следующие характерные черты.

1. Матричный элемент электрослабого тока составной системы автоматически удовлетворяет условиям релятивистской ковариантности.

2. Матричный элемент электромагнитного тока удовлетворяет закону сохранения.

3. Релятивистское импульсное приближение (ИП) формулируется релятивистски-инвариантным образом, а в случае электромагнитного тока — и с учетом закона сохранения — так называемое модифицированное импульсное приближение (МИП).

4. Описываемый подход дает естественный и правильный нерелятивистский предел, т. е. для него выполняется принцип соответствия.

5. При описании составных систем (включая системы с ненулевым спином) этот подход дает однозначное описание электромагнитных формфакторов и не оперирует с понятиями «хороших» и «плохих» компонент тока.

6. Расчеты в данном подходе дают хорошее описание электрослабых свойств составных кварковых (легкие мезоны, мезоны, содержащие один тяжелый кварк) и составных нуклонных систем (дейтрон).

Метод в релятивистской теории составных систем, которым мы будем оперировать, базируется на прямой реализации алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых системы [17]. Этот подход называют теорией прямого взаимодействия, релятивистской гамильтоновой динамикой (РГД) или пуанкаре-инвариантной квантовой механикой (ПИКМ) (см., например, [18–25] и ссылки, приведенные в них). Мы будем придерживаться последнего наименования, установившегося в последнее время в литературе (см., например, [25]). С точки зрения принципов, лежащих в ее основе, ПИКМ занимает промежуточное положение между локальной квантовой теорией поля и нерелятивистскими квантово-механическими моделями.

Следует отметить, что теория поля и ПИКМ формулируются как принципиально разные конструкции, и установление связи между ними является трудной и пока еще не решенной проблемой. В отличие от теории поля в ПИКМ исходно выделяется конечное число степеней свободы, что, безусловно, представляет собой некоторую модель. Ковариантность описания в ПИКМ обеспечивается построением на гильбертовом пространстве составной системы с конечным числом степеней свободы однозначного унитарного представления неоднородной группы $SL(2, C)$, которая является универсальной накрывающей группы Пуанкаре. При этом взаимодействие включается в генераторы группы (операторы наблюдаемых системы). ПИКМ основана на согласовании двух фундаментальных принципов — релятивистской инвариантности и гамильтоновости и является, как показывают исследования разных авторов [3, 12–16, 23–46], наиболее приспособленным релятивистским инструментом для работы с системами с конечным числом степеней свободы. Следует отметить, что математический аппарат ПИКМ близок к нерелятивистской квантовой механике, допускает возможность ассимилирования развитых методов феноменологических потенциалов и допускает обобщение на случай трех и более частиц [25].

ПИКМ может быть реализована различными способами или, как говорят, в различных формах динамики (мгновенная форма динамики, точечная форма динамики, динамика на световом фронте), которые отличаются способами включения взаимодействия в алгебру генераторов группы. В работе [47] была показана S -матричная эквивалентность различных форм динамики. Этот факт является важным, однако он не означает полной эквивалентности, так

как она, во-первых, не сводится к эквивалентности только S -матрицы, существует еще, например, проблема описания связанных состояний. Во-вторых, вычисления, как правило, проводятся в некоторых приближениях, и приближение, справедливое в одной форме динамики, может быть несправедливым в другой.

Наиболее развитой и часто используемой для описания электрослабых свойств составных систем является динамика на световом фронте [3, 13–15, 26–36, 43, 45]. Эти работы, в частности, показали, что ПИКМ — не только интересная релятивистская модель, но и работоспособный инструмент и может успешно конкурировать с другими подходами при описании имеющихся экспериментальных данных. Использование динамики на световом фронте является следствием того, что эта форма динамики имеет очевидные достоинства: а) наименьшее число генераторов, содержащих взаимодействие, — три, б) простое релятивистски-инвариантное отделение «внутренних» и «внешних» переменных при формулировке ее как гамильтоновой теории с фиксированным числом частиц, в) простая структура вакуума при построении пертурбативной полевой теории на световом фронте. Однако существуют и трудности, преодолеваются которые достаточно сложным образом. Например, было обнаружено [28, 33], что результаты расчета электромагнитных формфакторов системы с полным моментом $J = 1$ (дейтрон, ρ -мезон) существенно изменяются при вращении системы отсчета. Эта неоднозначность определения электромагнитных формфакторов составной системы связана с нарушением так называемого углового условия [28, 33], которое фактически является математическим выражением условия вращательной инвариантности теории. Обсуждение некоторых трудностей динамики на световом фронте может быть также найдено в [31]. В работе [30] указано на то, что проблема неоднозначности может быть решена путем добавления в электромагнитный ток дополнительных (нефизических) формфакторов (см. также [15] и ссылки, приведенные там). Другой подход к проблеме построения оператора электромагнитного тока составных систем со взаимодействием в динамике на световом фронте предложен в [13]. Этот способ приводит к однозначному построению формфакторов дейтрона. Но, как отмечают сами авторы [13], их токовый оператор и оператор, построенный аналогичным образом в работах [3, 29], являются существенно различными, так как, хотя они и получены из свободного тока, но в различных системах отсчета, связь между которыми осуществляется бустами, содержащими взаимодействие. Кроме того, как показано в работах [48, 49], импульсное приближение, используемое в [13], является не вполне корректным, что приводит к необходимости модифицирования подхода путем учета так называемых двухчастичных токов.

Такого рода факты естественным образом заставляют обратиться к другим формам релятивистских динамик и рассмотреть их возможности. Так, в ряде работ получила развитие точечная форма динамики [12, 16, 40, 41].

В обзоре основное внимание уделено описанию электрослабой структуры составных систем в рамках мгновенной формы ПИКМ. Эта форма имеет свои преимущества, такие как естественный выбор переменных, описывающих состояние, правильный нерелятивистский предел, вращательная инвариантность, позволяющая корректным образом описывать спиновые эффекты. Последнее свойство имеет принципиальное значение для корректного описания современных экспериментов. В частности, точность экспериментов по измерению формфакторов дейтрона и π -мезона, проводимых и планируемых в Джефферсоновской лаборатории (JLab) [50], требует учета таких эффектов.

Динамика составной системы, т.е. взаимодействие конститuentов, описывается в мгновенной форме, как правило, в рамках общей аксиоматики ПИКМ. Однако этот подход существенно отличается от традиционной ПИКМ способом построения операторов токов переходов. Ядром развитого подхода к построению оператора электрослабого тока является так называемая процедура канонической параметризации матричных элементов локальных операторов, основы которой развиты в [51]. Данная процедура фактически реализует теорему Вигнера–Эккарта на группе Пуанкаре, т.е. позволяет выделить из матричного элемента оператора любой тензорной размерности приведенные матричные элементы (формфакторы), которые являются инвариантами при преобразованиях из группы Пуанкаре. Матричный элемент оператора представляется при этом суммой слагаемых, каждое из которых является произведением ковариантного и инвариантного членов. Ковариантная часть такого представления матричного элемента описывает его трансформационные (геометрические) свойства, а вся динамическая информация о переходе, описываемом данным оператором, содержится в инвариантной части — приведенных матричных элементах или формфакторах. В общем случае данные формфакторы канонической параметризации являются не классическими, а обобщенными функциями. Отметим, что при изложении общего формализма мы будем рассматривать только операторы, диагональные по полному моменту.

В рамках развитого подхода удается разрешить некоторые общие проблемы, присущие составным моделям. Описание, например, электромагнитных свойств составных систем в терминах введенных формфакторов фактически решает задачу построения оператора электромагнитного тока, удовлетворяющего условиям трансляционной инвариантности, лоренц-ковариантности, закону сохранения, кластерной сепарабельности и условию неренормируемости заряда составной системы при включении взаимодействия [4].

Физические приближения, используемые при расчетах, формулируются в нашем подходе на языке приведенных матричных элементов. Например, широко используемое в литературе релятивистское импульсное приближение. Обратим внимание, что в нашем подходе данное приближение не приводит

к нарушению стандартных условий на ток, перечисленных выше. Изложение материала производится в соответствии с работами авторов, в которых развит описываемый метод [52–68].

1. ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНЫЕ КВАНТОВЫЕ МЕХАНИКИ

Релятивистская инвариантность означает, что на гильбертовом пространстве состояний системы реализуется унитарное представление группы Пуанкаре (а точнее неоднородной группы $SL(2, C)$, которая является универсальной накрывающей группы Пуанкаре) [69]. Это значит, что если две системы отсчета связаны преобразованием Пуанкаре (a, Λ) , a — 4-вектор трансляций, Λ — матрица преобразования Лоренца ($\Lambda_0^0 > 0$, $\det \Lambda = 1$), то векторы состояния в двух системах связаны унитарным преобразованием

$$|\Psi'\rangle = \hat{U}(a, \Lambda) |\Psi\rangle. \quad (1)$$

Для операторов представления выполняется закон группового умножения

$$\hat{U}(a_1, \Lambda_1) \hat{U}(a_2, \Lambda_2) = \hat{U}(\Lambda_1 a_2 + a_1, \Lambda_1 \Lambda_2). \quad (2)$$

Рассматривая инфинитезимальные преобразования и вводя генераторы трансляций \hat{P}^μ и пространственно-временных вращений $\hat{M}^{\mu\nu}$, обычным образом приходим к алгебре Пуанкаре:

$$\begin{aligned} [\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{P}^\sigma] &= -i(g^{\mu\sigma} \hat{P}^\nu - g^{\nu\sigma} \hat{P}^\mu), \\ [\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\sigma\rho}] &= -i(g^{\mu\sigma} \hat{M}^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} \hat{M}^{\mu\rho}) - (\sigma \leftrightarrow \rho), \\ [\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор в пространстве Минковского. Построение представления группы Пуанкаре в гильбертовом пространстве сводится к нахождению генераторов \hat{P}^μ , $\hat{M}^{\mu\nu}$ в терминах динамических переменных системы. В случае системы невзаимодействующих частиц генераторы в (3) имеют ясный физический смысл: $\hat{P}^0 \equiv \hat{H}$ — оператор полной энергии, $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}^1, \hat{P}^2, \hat{P}^3)$ — оператор полного 3-импульса, $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{M}^{23}, \hat{M}^{31}, \hat{M}^{12})$ — оператор полного углового момента, $\hat{\mathbf{N}} = (\hat{M}^{01}, \hat{M}^{02}, \hat{M}^{03})$ — генераторы лоренцевских бустов. Из этих генераторов можно построить релятивистский оператор положения центра масс — вектор Ньютона–Вигнера $\hat{\mathbf{X}}$ [70], явный вид которого мы здесь выписывать не будем. Однако при включении взаимодействия между частицами на этом пути возникают проблемы, суть которых можно проиллюстрировать, рассмотрев сначала квантовую нерелятивистскую

теорию и ее группу инвариантности — группу Галилея. После известного перехода к центральному расширению группы Галилея и накрывающей группе $SU(2)$ [71] мы получаем 11-параметрическую группу с набором генераторов

$$\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{K}}, \hat{M},$$

где $\hat{\mathbf{K}}$ — генераторы галилеевских бустов; \hat{M} — оператор массы. Остальные генераторы совпадают с соответствующими генераторами группы Пуанкаре.

В алгебре Галилея содержатся следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_i, \hat{J}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k, & [\hat{J}_i, \hat{K}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{K}_k, & [\hat{J}_i, \hat{P}_j] &= i\epsilon_{ijk} \hat{P}_k, \\ [\hat{K}_i, \hat{H}] &= -i \hat{P}_i, & [\hat{K}_i, \hat{P}_k] &= -i\delta_{ik} \hat{M}. \end{aligned} \quad (4)$$

В нерелятивистской квантовой механике оператор взаимодействия добавляется в оператор полной энергии: $\hat{H} \rightarrow \hat{H} + \hat{V}$. Для сохранения галилеевской инвариантности теории, т. е. для сохранения алгебры (4), при таком переопределении оператора полной энергии на оператор взаимодействия необходимо наложить условия

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{V}] = [\hat{\mathbf{J}}, \hat{V}] = [\nabla_P, \hat{V}] = [\hat{M}, \hat{V}] = 0. \quad (5)$$

Так как генератор \hat{H} в правых частях коммутационных соотношений (4) отсутствует, то для сохранения алгебры Галилея нет необходимости включать взаимодействие в другие генераторы группы.

Иначе обстоит дело в случае группы Пуанкаре. Рассмотрим один из генераторов алгебры (3) (см., например, [2]):

$$[\hat{P}^j \hat{N}^k] = i\delta^{jk} \hat{H}. \quad (6)$$

При описанном выше включении взаимодействия в оператор полной энергии правая часть (6) будет зависеть от взаимодействия, значит, от взаимодействия должны зависеть либо оба генератора в левой части (6), либо один из них. Таким образом, чтобы сохранить коммутационные соотношения в (3), необходимо сделать зависящими от взаимодействия и другие генераторы в наборе (3). Генераторы алгебры разделяются при этом на два типа: генераторы, не зависящие от взаимодействия и образующие так называемую кинематическую подгруппу, и генераторы, зависящие от взаимодействия, — гамильтонианы. Разделение генераторов на кинематические и гамильтонианы не является однозначным. Различные способы выделения кинематической подгруппы приводят к различным формам динамики. Обычно выделяют три основных формы динамики: точечную, мгновенную и динамику на световом фронте.

В дальнейшем мы будем использовать мгновенную форму динамики, в которой кинематическую подгруппу составляют генераторы группы вращений и сдвигов евклидова пространства: $\hat{\mathbf{J}}$, $\hat{\mathbf{P}}$, остальные генераторы являются гамильтонианами, т. е. зависят от взаимодействия: \hat{P}^0 , $\hat{\mathbf{N}}$.

Одним из технических способов включения взаимодействия в алгебру (3), позволяющих сохранить коммутационные соотношения, является аддитивное включение взаимодействия в оператор массы — так называемая процедура Бакамджана–Томаса [72] (см. также [2, 19, 20, 46, 53]):

$$\hat{M}_0 \rightarrow \hat{M}_I = \hat{M}_0 + \hat{V}. \quad (7)$$

Здесь \hat{M}_0 — оператор инвариантной массы системы без взаимодействия; \hat{M}_I — оператор массы системы со взаимодействием. В мгновенной форме динамики оператор взаимодействия должен удовлетворять следующим условиям:

$$\hat{M}_I = \hat{M}_I^+, \quad \hat{M}_I > 0, \quad (8)$$

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{V}] = [\hat{\mathbf{J}}, \hat{V}] = [\nabla_P, \hat{V}] = 0. \quad (9)$$

Условия (8) представляют собой спектральные условия для массового оператора. Равенства (9) обеспечивают выполнение алгебраических соотношений (3) в системе со взаимодействием. Соотношения (9) не являются слишком ограничительными, например, им удовлетворяет любой нерелятивистский потенциал взаимодействия частиц (5). Равенства (9) означают, что потенциал взаимодействия не зависит от полного импульса системы, что для некоторых конкретных видов потенциалов, например для сепарабельных, является обоснованным [73]. Тем не менее условия (7) и (9) являются модельными. Возможен, в частности, другой подход [74], в котором потенциал взаимодействия будет зависеть от полного импульса системы, но этот подход будет вне нашего рассмотрения. После того как задан оператор \hat{V} , можно ввести взаимодействие другим способом:

$$\hat{U} = \frac{1}{4}(\hat{M}_I^2 - \hat{M}_0^2) = \frac{1}{4}(\hat{V}^2 + [\hat{M}_0, \hat{V}]_+). \quad (10)$$

Взаимодействие (10) вводится из соображений удобства, поскольку в этом случае проблема нахождения собственного значения оператора массы может быть представлена в виде, аналогичном нерелятивистскому уравнению Шредингера (см., например, [19]). В силу своего определения оператор (10) также удовлетворяет условиям (9).

Волновая функция системы взаимодействующих частиц в ПИКМ определяется как собственная функция полного коммутирующего набора операторов. В мгновенной форме динамики этот набор составляют операторы

$$\hat{M}_I^2 \text{ (или } \hat{M}_I), \hat{J}^2, \hat{J}_3, \hat{\mathbf{P}}. \quad (11)$$

\hat{J}^2 — оператор квадрата полного момента количества движения. В мгновенной форме динамики операторы \hat{J}^2 , \hat{J}_3 , $\hat{\mathbf{P}}$ совпадают с соответствующими операторами системы без взаимодействия. Таким образом, от взаимодействия в (11) зависит только оператор \hat{M}_I^2 (\hat{M}_I).

Для упрощения решения задачи на собственные функции (11) необходимо построить подходящий базис в пространстве состояний составной системы. В случае системы из двух частиц гильбертово пространство состояний в ПИКМ представляет собой прямое произведение двух одночастичных гильбертовых пространств: $\mathcal{H}_{q\bar{q}} \equiv \mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_{\bar{q}}$. В качестве базиса в $\mathcal{H}_{q\bar{q}}$ может быть выбран следующий набор двухчастичных векторов:

$$|\mathbf{p}_1, m_1; \mathbf{p}_2, m_2\rangle = |\mathbf{p}_1 m_1\rangle \otimes |\mathbf{p}_2 m_2\rangle, \quad \langle \mathbf{p}, m | \mathbf{p}' m'\rangle = 2p_0 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{mm'}, \quad (12)$$

где \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 — 3-импульсы частиц; m_1 , m_2 — проекции спинов на ось z ; $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$, M — масса конститuenta.

Наряду с этим базисом можно ввести базис, в котором отделено движение центра масс двух частиц и три из четырех операторов набора (11) являются диагональными:

$$|\mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J\rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | \mathbf{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} \rangle &= \\ &= N_{\text{CG}} \delta^{(3)}(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}) \delta_{JJ'} \delta_{ll'} \delta_{SS'} \delta_{m_J m_{J'}}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$N_{\text{CG}} = \frac{(2P_0)^2}{8k\sqrt{s}}, \quad k = \frac{\sqrt{\lambda(s, M_1^2, M_2^2)}}{2\sqrt{s}},$$

где $P_\mu = (p_1 + p_2)_\mu$, $P_\mu^2 = s$; \sqrt{s} — инвариантная масса системы двух частиц; l — орбитальный момент в системе центра инерции (с.ц.и.); $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 = S(S+1)$, S — суммарный спин в с.ц.и.; J — полный момент количества движения; m_J — проекция полного момента; M_1 , M_2 — массы конститuentов; $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$.

Базис (13) связан с базисом (12) посредством разложения Клебша–Гордана для группы Пуанкаре. Соответствующее разложение прямого произведения (12) двух неприводимых представлений группы Пуанкаре на неприводимые (13) для частиц со спином 1/2 имеет следующий вид [75]:

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1, m_1; \mathbf{p}_2, m_2\rangle &= \sum |\mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J\rangle \times \\ &\times \langle J m_J | S l m_S m_l \rangle Y_{lm_l}^*(\vartheta, \varphi) \left\langle S m_S \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \right. \right\rangle \times \\ &\times \langle \tilde{m}_1 | D^{1/2}(P, p_1) | m_1 \rangle \langle \tilde{m}_2 | D^{1/2}(P, p_2) | m_2 \rangle; \end{aligned} \quad (14)$$

здесь $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2$, $p = |\mathbf{p}|$; ϑ, φ — сферические углы вектора \mathbf{p} в с. ц. и.; Y_{lm} — сферическая функция; $\langle Sm_S | (1/2)(1/2)\tilde{m}_1\tilde{m}_2 \rangle$ и $\langle Jm_J | Sm_S m_l \rangle$ — коэффициенты Клебша–Гордана группы $SU(2)$; $\langle \tilde{m} | D^{1/2}(P, p) | m \rangle$ — матрица трехмерного поворота спина, необходимая для релятивистски-инвариантного сложения спинов частиц. Суммирование идет по всем дискретным переменным $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, m_l, m_S, l, S, J, m_J$.

Обсудим кратко релятивистские свойства спиновых моментов. Известно, что преобразование Лоренца для спинов зависит от импульса частицы [69]. Поэтому для лоренц-инвариантного сложения спинов частиц, имеющих разные импульсы \mathbf{p} и \mathbf{p}' , необходимо «сдвинуть» спины в систему отсчета, где импульсы частиц одинаковы. Так как спин преобразуется по так называемой малой группе, изоморфной группе вращений, то оператор этого сдвига есть матрица 3-мерного вращения $D(\alpha, \beta, \gamma)$ с углами Эйлера α, β, γ , которые выражаются через компоненты векторов \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Происходит так называемая «пересадка» спинов на один и тот же импульс. Для пояснения этого термина рассмотрим пример. Пусть частица с импульсом \mathbf{p}_1 и массой M_1 имеет спин j и проекцию спина m , а частица с импульсом \mathbf{p}_2 и массой M_2 бесспиновая. В случае невзаимодействующих частиц вектор состояния этой системы будет иметь следующий вид:

$$|\mathbf{p}_1, M_1, j, m; \mathbf{p}_2, M_2\rangle = |\mathbf{p}_1, M_1, j, m\rangle \otimes |\mathbf{p}_2, M_2\rangle. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь аналогичное двухчастичное состояние, в котором первая частица бесспиновая, а вторая со спином j :

$$|\mathbf{p}_1, M_1; \mathbf{p}_2, M_2, j, m\rangle = |\mathbf{p}_1, M_1\rangle \otimes |\mathbf{p}_2, M_2, j, m\rangle. \quad (16)$$

В нерелятивистской теории углового момента состояния (15) и (16) идентичны. Они описывают систему двух частиц с импульсами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 и суммарным спином j с проекцией m .

В релятивистской теории состояния (15) и (16) существенно различны. Различие связано с тем, что они по-разному преобразуются при переходе из одной инерциальной системы к другой, так как спины в состояниях (15) и (16) принадлежат частицам с разными импульсами. Чтобы связать векторы состояний (15) и (16), необходимо, например, в (16) вектор спина «сдвинуть» в систему отсчета, где импульс второй частицы равен \mathbf{p}_1 . Это преобразование выполняет матрица $D^j(p_2, p_1)$ из малой группы. Рассмотрим вектор состояния

$$|\mathbf{p}_1, M_1\rangle \otimes D^j(p_2, p_1) |\mathbf{p}_2, M_2, j, m\rangle. \quad (17)$$

Напомним, что преобразование из малой группы не затрагивает импульса. Легко видеть, что получившийся вектор описывает то же состояние, что и вектор (15), и преобразуется при переходе из одной системы отсчета в другую

так же, как и (15). Таким образом, справедливо следующее ковариантное равенство:

$$|\mathbf{p}_1, M_1, j, m; \mathbf{p}_2, M_2\rangle = \sum_{m'} |\mathbf{p}_1, M_1; \mathbf{p}_2, M_2, j, m'\rangle \langle m' | D^j(p_2, p_1) | m \rangle. \quad (18)$$

Как видно из (18), мы «пересадили» спин на другой импульс. На языке генераторов лоренцевских бустов $\hat{\mathbf{N}}_1^j$, $\hat{\mathbf{N}}_2$ «пересадка» формулируется так:

$$D^j(p_2, p_1) (\hat{\mathbf{N}}_1^j + \hat{\mathbf{N}}_2) [D^j(p_2, p_1)]^{-1} = \hat{\mathbf{N}}_1 + \hat{\mathbf{N}}_2^j. \quad (19)$$

Именно эти факты (18) и (19) (и только они) составляют точное утверждение, что D -функция «пересаживает» спин частицы с одного импульса на другой. Аналогичные, но более громоздкие формулы будут иметь место в случае двух спиновых частиц.

Приведем полезные для дальнейших расчетов выражения для D -функций [76] в случае частиц со спином $1/2$ и 1 :

$$\begin{aligned} D^{1/2}(p_1, p_2) &= \cos(\omega/2) - 2i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) \sin(\omega/2), \\ D^1(p_1, p_2) &= I - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) \sin \omega + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j})^2 (\cos \omega - 1), \\ \mathbf{k} &= \frac{[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2]}{[|\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2|]}, \quad \omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{[|\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2|]}{(p_{10} + M_1)(p_{20} + M_2) - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Необходимо сделать замечание относительно инвариантности разложения (14). Выделенные в с.ц.и. суммарный спин S и орбитальный момент l в разложении (14) играют роль инвариантных параметров вырождения. Однако определенный по формуле $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$ квадрат суммарного спина не является инвариантом. Используя тот факт, что спин преобразуется по представлению малой группы, а реализуют это представление D -функции, можно определить квадрат суммарного спина инвариантным образом:

$$\{[D^{S_1}(p_1, P)]^{-1} \mathbf{S}_1 D^{S_1}(p_1, P) + [D^{S_2}(p_2, P)]^{-1} \mathbf{S}_2 D^{S_2}(p_2, P)\}^2 = S(S+1). \quad (21)$$

P — 4-импульс центра инерции. Видно, что в с.ц.и. определение (21) совпадает с обычным. Аналогичным образом можно определить инвариантный орбитальный момент l .

Для получения выражения базиса (13) через векторы (12) обратим (14):

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J\rangle &= \sum_{m_1 m_2} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2p_{10}} \frac{d\mathbf{p}_2}{2p_{20}} |\mathbf{p}_1, m_1; \mathbf{p}_2, m_2\rangle \times \\ &\times \langle \mathbf{p}_1, m_1; \mathbf{p}_2, m_2 | \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J \rangle, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, m_1; \mathbf{p}_2, m_2 | \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J \rangle &= \sqrt{2s} [\lambda(s, M_1^2, M_2^2)]^{-1/2} P_0 \delta(P - p_1 - p_2) \times \\ &\times \sum \langle m_1 | D^{1/2}(p_1, P) | \tilde{m}_1 \rangle \langle m_2 | D^{1/2}(p_2, P) | \tilde{m}_2 \rangle \times \\ &\times \left\langle \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \middle| S m_S \right\rangle Y_{l m_l}(\vartheta, \varphi) \langle S l m_s m_l | J m_J \rangle. \end{aligned}$$

Базис (13) диагонализует операторы \hat{J}^2 , \hat{J}_3 , $\hat{\mathbf{P}}$ в (11). Таким образом, задача вычисления волновой функции системы сводится к диагонализации оператора \hat{M}_I^2 (или \hat{M}_I). Задача на собственные значения для этих операторов в базисе (13) имеет следующую форму (см., например, [19, 20]):

$$(k^2 + \hat{U})|p_c\rangle = \eta|p_c\rangle, \quad (23)$$

$$\left(\sqrt{k^2 + M_1^2} + \sqrt{k^2 + M_2^2} + \hat{V} \right) |p_c\rangle = \lambda|p_c\rangle. \quad (24)$$

Здесь $|p_c\rangle$ — вектор состояния составной системы.

Видно, что если уравнение (24) имеет «типично» релятивистский вид (так как содержит слагаемые $\sqrt{k^2 + M_i^2}$, $i = 1, 2$), то уравнение (23) имеет вид нерелятивистского уравнения Шредингера. Таким образом, оператор \hat{U} можно рассматривать как феноменологический нерелятивистский потенциал.

Соответствующая волновая функция для составной частицы имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | p_c \rangle &= N_C \delta(\mathbf{P} - \mathbf{p}_c) \delta_{J J_c} \delta_{m_J m_{J_c}} \varphi_{l S}^{J_c}(k), \\ N_C &= \sqrt{2p_{c0}} \sqrt{\frac{N_{CG}}{4k}}, \end{aligned} \quad (25)$$

где J_c, m_{J_c} — квантовые числа состояния $|p_c\rangle$.

Волновая функция внутреннего движения двух частиц при фиксированном полном моменте количества движения определяется выражениями

$$\varphi_{l S}^{J_c}(k(s)) = \sqrt{\sqrt{s}(1 - \eta^2/s^2)} u_{l S}(k) k, \quad \sum_{l S} \int u_{l S}^2(k) k^2 dk = 1, \quad (26)$$

где $\eta = M_1^2 - M_2^2$; $u_{l S}(k)$ — модельная волновая функция, являющаяся решением одного из уравнений (23), (24), величина k определена в равенстве (13). Нормировочные множители в (26) перед $u_{l S}(k)$ соответствуют переходу к релятивистской плотности состояний. В случае частиц равной массы $M_1 = M_2 = M$ этот переход имеет особенно наглядный вид:

$$k^2 dk \rightarrow \frac{k^2 dk}{2\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (27)$$

Следует отметить, что используемые в ПИКМ волновые функции и, в частности, волновая функция (25), определенная как собственная функция набора операторов (11), вообще говоря, отличаются от релятивистских ковариантных волновых функций, определенных как решения волновых уравнений или как матричные элементы локального гейзенберговского поля.

2. ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СТРУКТУРЫ НА ПРИМЕРЕ ПРОСТОЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

В настоящем разделе излагается подход к релятивистскому описанию двухчастичных составных систем и их электрослабых свойств. Изложение строится на примере простой модели. А именно описывается электромагнитная структура системы, состоящей из двух бесспиновых частиц, одна из которых является незаряженной, в S -состоянии относительного движения. Заметим, что подобная модель использовалась в [20] для демонстрации описания взаимодействия конститuentов в рамках мгновенной формы ПИКМ, в частности, при описании спектра состояний такой системы. Мы используем эту простую модель для демонстрации описания электромагнитных свойств в рамках нашей формулировки мгновенной формы ПИКМ. Важно подчеркнуть, что предлагаемый метод носит достаточно общий характер. Использование его для описания более сложных систем проходит по схеме, описанной в данном разделе.

Электромагнитные свойства введенной выше простой системы описываются матричным элементом оператора тока, который выражается через зарядовый формфактор системы:

$$\langle p_c | j_\mu(0) | p'_c \rangle = (p_c + p'_c)_\mu F_c(Q^2), \quad (28)$$

где p'_c, p_c — 4-импульсы составной системы в начальном и конечном состояниях; $Q^2 = -t$, $t = (p_c - p'_c)^2 = q^2$; q^2 — квадрат переданного импульса. Вид формулы (28) определяется только условием лоренц-ковариантности и законом сохранения и не зависит от модели внутренней структуры системы.

Представление (28) является простейшим примером реализации аналога теоремы Вигнера–Эккарта на группе Пуанкаре. Как известно, эта теорема сформулирована для группы вращений [77] и утверждает, что матричный элемент неприводимого тензорного оператора на группе вращений можно представить в виде произведения ковариантной части, описывающей трансформационные (геометрические) свойства матричного элемента при вращении, и инвариантной относительно вращений части (приведенного матричного элемента). Приведенный матричный элемент содержит всю физическую информацию о переходе, описываемом данным матричным элементом.

Как видно, в выражении (28) также производится выделение приведенного матричного элемента. 4-вектор $(p_c + p'_c)_\mu$ описывает симметричные или трансформационные свойства матричного элемента. Приведенный матричный элемент (или формфактор) содержит всю динамическую информацию о процессе, описываемом током. Представление матричного элемента в терминах формфакторов называют параметризацией матричного элемента.

Перечислим условия, которые накладываются на оператор электромагнитного тока при релятивистском рассмотрении (см., например, [22]).

Лоренц-ковариантность:

$$\hat{U}^{-1}(\Lambda)\hat{j}^\mu(x)\hat{U}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu\hat{j}^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (29)$$

Трансляционная инвариантность:

$$\hat{U}^{-1}(a)\hat{j}^\mu(x)\hat{U}(a) = \hat{j}^\mu(x - a). \quad (30)$$

Закон сохранения тока:

$$[\hat{P}_\nu, \hat{j}^\nu(0)] = 0. \quad (31)$$

На языке матричных элементов оператора $\langle \hat{j}^\mu(0) \rangle$ закон сохранения можно записать так:

$$q_\mu \langle \hat{j}^\mu(0) \rangle = 0, \quad (32)$$

где q_μ — 4-вектор переданного импульса.

Преобразования оператора тока при пространственно-временных отражениях:

$$\begin{aligned} \hat{U}_P \left(\hat{j}^0(x^0, \mathbf{x}), \hat{\mathbf{j}}(x^0, \mathbf{x}) \right) \hat{U}_P^{-1} &= \left(\hat{j}^0(x^0, -\mathbf{x}), -\hat{\mathbf{j}}(x^0, -\mathbf{x}) \right), \\ \hat{U}_R \hat{j}^\mu(x) \hat{U}_R^{-1} &= \hat{j}^\mu(-x). \end{aligned} \quad (33)$$

В (33) \hat{U}_P — унитарный оператор представления пространственных отражений, \hat{U}_R — антиунитарный оператор представления пространственно-временных отражений, $R = PT$.

Условие кластерной сепарабельности: при выключении взаимодействия оператор тока составной системы равен сумме операторов одночастичных токов.

Неренормируемость заряда при включении взаимодействия: электрический заряд системы со взаимодействием равен сумме электрических зарядов конститuentов.

Рассмотрим сначала систему двух частиц без взаимодействия (свободную систему), имеющую те же квантовые числа, что и система, описываемая равенством (28). Электромагнитные свойства будут описываться оператором

электромагнитного тока свободной двухчастичной системы $j_\mu^{(0)}(0)$. Этот оператор может быть вычислен либо в представлении, задаваемом базисом (12), либо в представлении, задаваемом базисом (13). В первом случае оператор выражается через одночастичный ток в соответствии с представлением $j_\mu^{(0)}(0) = j_{1\mu} \otimes I_2$. Здесь $j_{1\mu}$ — электромагнитный ток заряженной частицы, I_2 — единичный оператор в гильбертовом пространстве состояний незаряженной частицы,

$$\langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | j_\mu^{(0)} | \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}'_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}'_2 \rangle \langle \mathbf{p}_1 | j_{1\mu} | \mathbf{p}'_1 \rangle. \quad (34)$$

Матричный элемент одночастичного тока бесспиновой частицы выражается через единственный формфактор — зарядовый формфактор частицы $f_1(Q^2)$:

$$\langle \mathbf{p}_1 | j_{1\mu} | \mathbf{p}'_1 \rangle = (p_1 + p'_1)_\mu f_1(Q^2). \quad (35)$$

Таким образом, электромагнитные свойства системы из двух не взаимодействующих частиц описываются фактически формфактором $f_1(Q^2)$, который содержит всю динамическую информацию об упругих электромагнитных переходах, описываемых матричным элементом (34) (см. также [20]). В частности, заряд системы задается значением этого формфактора в нуле:

$$\lim_{Q^2 \rightarrow 0} f_1(Q^2) = f_1(0) = e_c, \quad (36)$$

где e_c — заряд системы.

Запишем теперь матричный элемент электромагнитного тока системы из двух не взаимодействующих частиц в базисе с отделенным движением центра масс (13):

$$\langle \mathbf{P}, \sqrt{s} | j_\mu^{(0)} | \mathbf{P}', \sqrt{s'} \rangle. \quad (37)$$

В векторах состояний (13) опущены переменные, которые в рассматриваемой системе равны нулю: $J = S = l = 0$. Этот матричный элемент можно рассматривать как матричный элемент неприводимого тензорного оператора на группе Пуанкаре и применить к нему аналог теоремы Вигнера–Эккарта (см. [12]).

Соответствующее разложение матричного элемента (37) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}, \sqrt{s} | j_\mu^{(0)} | \mathbf{P}', \sqrt{s'} \rangle &= A_\mu(s, Q^2, s') \langle \sqrt{s} || g_0(Q^2) || \sqrt{s'} \rangle = \\ &= A_\mu(s, Q^2, s') g_0(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (38)$$

В силу простоты рассматриваемой системы мотивацию параметризации (38) легко понять: 4-вектор A_μ описывает трансформационные свойства матричного элемента, а $g_0(s, Q^2, s')$ — инвариантная функция, которую мы будем

называть свободным двухчастичным формфактором, — содержит динамическую информацию о процессе. Для более сложных систем процедура параметризации матричного элемента в соответствии с теоремой Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре требует специального математического аппарата, который будет рассмотрен в разд. 7.

Вектор $A_\mu(s, Q^2, s')$, описывающий трансформационные свойства матричного элемента, может быть выражен только через 4-векторы начального и конечного состояний, так как никаких других 4-векторов в нашем распоряжении нет. Накладывая на ток (37) условие (32), получаем

$$A_\mu = \frac{1}{Q^2} [(s - s' + Q^2)P_\mu + (s' - s + Q^2)P'_\mu]. \quad (39)$$

Итак, и в представлении, задаваемом базисом (12), и в представлении, задаваемом базисом (13), мы перешли от описания свойств системы в терминах матричных элементов к описанию системы в терминах лоренц-инвариантных функций — формфакторов. Оба описания являются физически эквивалентными. Как мы покажем ниже, свободный двухчастичный формфактор $g_0(s, Q^2, s')$ является не классической, а регулярной обобщенной функцией по переменным s, s' , порожденной локально интегрируемой функцией [78]. Таким образом, все свойства $g_0(s, Q^2, s')$ должны рассматриваться как свойства функционала, а именно интеграла по переменным s, s' от функции $g_0(s, Q^2, s')$, умноженной на некоторую функцию из пространства основных.

Локально интегрируемая функция $g_0(s, Q^2, s')$ может быть вычислена с использованием разложения Клебша–Гордана для группы Пуанкаре (22). Применяя разложение к (38), получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}, \sqrt{s} | j_\mu^{(0)} | \mathbf{P}', \sqrt{s'} \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2p_{10}} \frac{d\mathbf{p}_2}{2p_{20}} \frac{d\mathbf{p}'_1}{2p'_{10}} \frac{d\mathbf{p}'_2}{2p'_{20}} \langle \mathbf{P}, \sqrt{s} | \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 \rangle \times \\ &\times \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | j_\mu^{(0)} | \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}'_2 \rangle \langle \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}'_2 | \mathbf{P}', \sqrt{s'} \rangle. \end{aligned} \quad (40)$$

Для вычисления свободного двухчастичного формфактора необходимо использовать равенства (34), (35), (38), а также явные выражения для коэффициентов Клебша–Гордана (22) с квантовыми числами рассматриваемой модели. Интегрирование в (40) удобно выполнить в системе отсчета $\mathbf{P}' = 0$, $\mathbf{P} = (0, 0, P)$. В итоге для функции $g_0(s, Q^2, s')$ получаем релятивистски-инвариантное выражение, которое, естественно, не зависит от системы координат, в которой проводится интегрирование:

$$g_0(s, Q^2, s') = \frac{(s + s' + Q^2)^2 Q^2}{2 \sqrt{(s - 4M^2)(s' - 4M^2)}} \frac{\vartheta(s, Q^2, s')}{[\lambda(s, -Q^2, s')]^{3/2}} f_1(Q^2). \quad (41)$$

Здесь $\vartheta(s, Q^2, s') = \theta(s' - s_1) - \theta(s' - s_2)$, θ — ступенчатая функция,

$$s_{1,2} = 2M^2 + \frac{1}{2M^2}(2M^2 + Q^2)(s - 2M^2) \mp \frac{1}{2M^2} \sqrt{Q^2(Q^2 + 4M^2)s(s - 4M^2)}. \quad (42)$$

Функции $s_{1,2}(s, Q^2)$ задают кинематически допустимую область изменения переменных в плоскости (s, s') , положение которой зависит от квадрата переданного импульса $t = -Q^2$. Найти функции $s_{1,2}$ можно геометрическим путем [79].

Построим треугольник, схематически изображенный на рис. 1. На нем отрезок OB изображает вектор $p_{2\mu} = p'_{2\mu}$ (34). Отрезок CB — вектор $p_{1\mu}$ и AB — $p'_{1\mu}$. Тогда стороны треугольника AOC будут образовывать векторы P_μ , P'_μ и $(P_\mu - P'_\mu)$, длина которых \sqrt{s} , $\sqrt{s'}$, \sqrt{t} соответственно. Необходимо найти возможные значения s , если s' и t , векторы начального состояния $p'_{1\mu}$, $p'_{2\mu} = p_{2\mu}$, P'_μ являются фиксированными. Если учесть, что длина вектора $p_{1\mu}$ ($p^2_{1\mu} = M^2$) является неизменной, треугольники являются полностью заданными. Однако треугольник ABC может быть повернут вокруг стороны AB ($p'_{1\mu}$), что означает возможные изменения ориентации вектора $p_{1\mu}$. Минимальная $\sqrt{s_1}$ и максимальная $\sqrt{s_2}$ длины стороны OC (длина вектора P_μ) могут быть легко найдены при таком вращении.

Из выражения для свободного двухчастичного формфактора (41) легко видеть, что $g_0(s, Q^2, s')$ действительно является обобщенной функцией. В самом деле, поточечный предел этой функции при $Q^2 \rightarrow 0$ равен нулю из-за наличия обрезывающей ϑ -функции, и предел существует только в слабом смысле. Функционал, задающий регулярную обобщенную функцию, определим как функционал в $S(R^2)$ следующим образом:

$$\langle g_0(s, Q^2, s'), \phi(s, s') \rangle = \int d\mu(s, s') g_0(s, Q^2, s') \phi(s, s'), \quad (43)$$

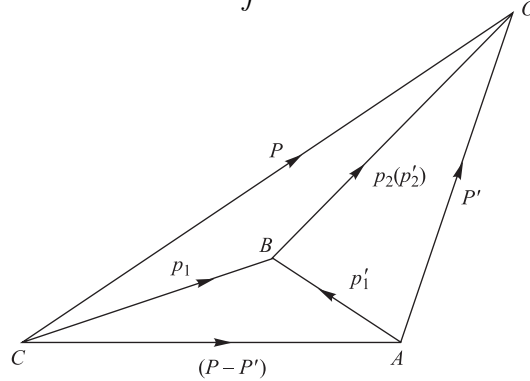


Рис. 1. Кинематический треугольник для вычисления носителя обобщенной функции $g_0(s, Q^2, s')$

где

$$d\mu(s, s') = 16 \theta(s - 4M^2) \theta(s' - 4M^2) \sqrt[4]{ss'} d\mu(s) d\mu(s'), \quad d\mu(s) = \frac{1}{4} k d\sqrt{s}. \quad (44)$$

θ -функции в определении (44) задают физическую область изменения квадрата инвариантных масс в начальном и конечном состояниях, мера интегрирования (44) соответствует переходу к релятивистской плотности состояний (26), (27), $\phi(s, s')$ — функция из пространства основных.

Предел $Q^2 \rightarrow 0$ (статический предел) в $g_0(s, Q^2, s')$ имеет смысл только как предел функционала:

$$\lim_{Q^2 \rightarrow 0} \langle g_0, \phi \rangle = \langle e_c \delta(\mu(s') - \mu(s)), \phi \rangle. \quad (45)$$

В случае, если основные функции нормированы с релятивистской плотностью состояний, правая часть выражения (45) равна полному заряду свободной системы.

Перейдем теперь к описанию электромагнитной структуры системы взаимодействующих частиц в нашей простой модели, т. е. вернемся к обсуждению формулы (28). В ПИКМ вектор состояния $|p_c\rangle$ принадлежит прямому произведению двух одночастичных пространств. Поэтому мы можем произвести разложение этого вектора в (28) по базису (13) при $J = l = S = m_J = 0$:

$$\int \frac{d\mathbf{P} d\mathbf{P}'}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \langle p_c | \mathbf{P}, \sqrt{s} \rangle \langle \mathbf{P}, \sqrt{s} | j_\mu(0) | \mathbf{P}', \sqrt{s'} \rangle \langle \mathbf{P}', \sqrt{s'} | p'_c \rangle = \\ = (p_c + p'_c)_\mu F_c(Q^2). \quad (46)$$

Здесь $\langle \mathbf{P}', \sqrt{s'} | p'_c \rangle$ — волновая функция в смысле мгновенной формы ПИКМ (25). С учетом (25) выражение (46) редуцируется к следующему:

$$\int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(s) \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'} \rangle \varphi(s') = (p_c + p'_c)_\mu F_c(Q^2). \quad (47)$$

Принимая во внимание (26), (44), выражение (47) можно переписать:

$$\int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\mu(s, s') u(k(s)) \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'} \rangle u(k(s')) = \\ = (p_c + p'_c)_\mu F_c(Q^2). \quad (48)$$

Обсудим возможность применения теоремы Вигнера–Эккарта (или канонической параметризации) для матричного элемента $\langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'} \rangle$ в (47).

До сих пор мы выражали матричные элементы операторов тока через форм-факторы (35), (38) в случае, когда векторы состояний в обкладках матричных элементов и операторы преобразуются по одному и тому же представлению неоднородной группы $SL(2, C)$ [69]. Это приводит к следующему:

$$\hat{U}^{-1}(\Lambda)j^\mu(0)\hat{U}(\Lambda) = \tilde{j}^\mu(0), \quad (49)$$

или в терминах матричных элементов:

$$\langle p|\tilde{j}^\mu(0)|p'\rangle = \langle p|\hat{U}^{-1}(\Lambda)j^\mu(0)\hat{U}(\Lambda)|p'\rangle = \langle \Lambda p|j^\mu(0)|\Lambda p'\rangle. \quad (50)$$

Это означает, что трансформационные свойства 4-вектора тока в (50) могут быть описаны при помощи 4-векторов импульсов начального и конечного состояний, что мы и сделали, например, в (38).

В матричном элементе под знаком интеграла (48) векторы состояний и оператор преобразуются по разным представлениям неоднородной группы $SL(2, C)$. Оператор тока описывает систему двух взаимодействующих частиц и преобразуется по представлению, генераторы лоренцевских бустов которого зависят от взаимодействия (11). Векторы обкладок физически описывают систему двух свободных частиц и преобразуются по представлению, генераторы которого от взаимодействия не зависят. В силу этого матричный элемент оператора электромагнитного тока в (48) нельзя представить в виде (38), (39).

Однако матричный элемент тока необходимо рассматривать как обобщенную функцию, т. е. как объект, имеющий смысл только под знаком интеграла в (47), (48). Воспользуемся полнотой набора двухчастичных состояний $|\mathbf{P}, \sqrt{s}\rangle$:

$$\hat{I} = \int \frac{d\mathbf{P}}{N_{CG}} d\sqrt{s} |\mathbf{P}, \sqrt{s}\rangle \langle \mathbf{P}, \sqrt{s}|. \quad (51)$$

Принимая во внимание (25), (51), получим

$$\begin{aligned} & \int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(k)\varphi(k') \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s} | \hat{U}^{-1}(\Lambda) j_\mu(0) \hat{U}(\Lambda) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'} \rangle = \\ & = \langle p_c | \hat{U}^{-1}(\Lambda) \hat{I} j_\mu(0) \hat{I} \hat{U}(\Lambda) | p'_c \rangle = \langle \Lambda p_c | \hat{I} j_\mu(0) \hat{I} | \Lambda p'_c \rangle = \\ & = \int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(k)\varphi(k') \langle \Lambda \mathbf{p}_c, \sqrt{s} | j_\mu(0) | \Lambda \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'} \rangle. \end{aligned} \quad (52)$$

Таким образом, мы имеем аналог равенства (50) в смысле обобщенных функций и можем использовать теорему Вигнера–Эккарта в слабом смысле.

Проблема канонической параметризации матричного элемента (48) может быть решена, если рассматривать равенство (48) как равенство двух функ-

ционалов. Учитывая (26) и (44), равенство (48) можно переписать в виде

$$\int d\mu(s, s') u(k(s)) J_\mu(\mathbf{p}_c, \sqrt{s}; \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}) u(k(s')) = (p_c + p'_c)_\mu F_c(Q^2), \quad (53)$$

$$J_\mu(\mathbf{p}_c, \sqrt{s}; \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}) = \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s} | j_\mu | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'} \rangle.$$

Введем обозначение

$$\psi(s, s') = u(k(s)) u(k'(s')). \quad (54)$$

Интеграл в левой части (53) можно рассматривать как функционал в R^2 на множестве основных функций $\psi(s, s')$, задающий некоторую лоренц-ковариантную обобщенную функцию со значениями в пространстве Минковского, зависящую от параметра Q^2 (см., например, [78]).

Представим матричный элемент в виде, аналогичном (38):

$$J_\mu(\mathbf{p}_c, \sqrt{s}; \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}) = B_\mu(s, Q^2, s') G(s, Q^2, s'). \quad (55)$$

В (55), как и в (38), ковариантную часть, т. е. вектор $B_\mu(s, Q^2, s')$, будем считать гладкой функцией, а инвариантную часть $G(s, Q^2, s')$ — обобщенной функцией. Такое представление лоренц-ковариантной обобщенной функции в виде произведения лоренц-ковариантной гладкой функции и лоренц-инвариантной обобщенной функции описано в [78]. Подставим (55) в (53):

$$\int d\mu(s, s') \psi(s, s') B_\mu(s, Q^2, s') G(s, Q^2, s') = (p_c + p'_c)_\mu F_c[\psi](Q^2). \quad (56)$$

Для определения вектора B_μ потребуем, чтобы равенство (56) было ковариантным в смысле обобщенных функций, т. е. чтобы оно выполнялось для любой основной функции $\psi(s, s')$ в любой фиксированной системе отсчета. Варьирование основной функции в функционале (56) в соответствии с (54) означает фактически варьирование волновой функции внутреннего движения частиц. При варьировании вектор в правой части (56) не будет изменяться, так как он составлен из 4-векторов, описывающих движение системы как целого и не зависящих от внутреннего движения конstituентов. Формфактор же в правой части при изменении основной функции будет изменяться, т. е. при варьировании основной функции правая часть в (56) будет оставаться коллинеарной вектору $(p_c + p'_c)_\mu$. С другой стороны, при произвольном изменении основной функции вектор в левой части, вообще говоря, будет менять свое направление. Таким образом, чтобы равенство (56) выполнялось при любой основной функции (т. е. в смысле обобщенных функций), достаточно потребовать выполнения равенства

$$B_\mu(s, Q^2, s') = (p_c + p'_c)_\mu. \quad (57)$$

Выбор вектора B_μ в (57) приводит к тому, что левая часть в (53) удовлетворяет как условию лоренц-ковариантности тока, так и условию сохранения тока.

Обсудим физический смысл представления матричного элемента в виде (55), (57). Поскольку такое представление матричного элемента тока является явно лоренц-ковариантным и удовлетворяет закону сохранения, это означает, что оператор тока составной системы содержит вклады как одночастичных токов, так и двухчастичных (см., например, [20]):

$$j = \sum_k j^{(k)} + \sum_{k < m} j^{(km)}. \quad (58)$$

Первое слагаемое означает сумму одночастичных токов, а второе сумму двухчастичных токов. Хорошо известно, что в приближении $j \approx \sum_k j^{(k)}$ (импульсное приближение) оператор тока в мгновенной форме динамики не удовлетворяет условиям лоренц-ковариантности и закону сохранения [20]. Таким образом, ковариантная часть матричного элемента тока (55), описывающая трансформационные свойства тока, определяется с физической точки зрения представлением (58), т. е. содержит вклады как одночастичных, так и двухчастичных токов.

Инвариантная часть разложения (55) — формфактор или приведенный матричный элемент $G(s, Q^2, s')$ — содержит информацию о динамике рассеяния зондирующей частицы как на каждом отдельном конституенте (первое слагаемое в (58)), т. е. фактически на свободной двухчастичной системе, так и на двух конституентах одновременно (второе слагаемое в (58)). Это означает, что формфактор содержит вклад свободного формфактора (41), описывающего свободную систему, и вклад двухчастичных токов:

$$G(s, Q^2, s') = g_0(s, Q^2, s') + G_i(s, Q^2, s'). \quad (59)$$

G_i — приведенный матричный элемент, описывающий вклад двухчастичных токов (58). Равенство (56) с учетом (57) приводит нас к скалярному равенству, которое при условии выполнения (26), (44), (54) записывается в виде

$$\int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(s) G(s, Q^2, s') \varphi(s') = F_c(Q^2). \quad (60)$$

Заметим, что представление зарядового формфактора составной системы (60) является максимально общим.

3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ ИМПУЛЬСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Проблема полного вычисления формфактора $G(s, Q^2, s')$ в (60), включающего учет двухчастичных токов, является трудной задачей. В качестве приближенного решения можно предложить некоторый аналог релятивистского импульсного приближения, которое заключается в том, чтобы в (59) оставить вклад только одночастичных токов, а вклад двухчастичных токов отбросить. При этом ковариантную часть матричного элемента тока B_μ в (55), (57) мы изменять не будем, т. е. ковариантная часть матричного элемента тока будет по-прежнему содержать вклад двухчастичных токов и, значит, трансформационные свойства матричного элемента не изменятся. Таким образом, приближение заключается в том, что мы заменяем в (55) обобщенную функцию $G(s, Q^2, s')$ на обобщенную функцию $g_0(s, Q^2, s')$ из (38), (41), описывающую, как мы отмечали выше, электромагнитные свойства системы из двух свободных частиц. В данном приближении матричный элемент (55) в целом будет содержать вклады (правда, усеченные) двухчастичных токов.

Итак, наш подход не противоречит общим утверждениям (см. [20]), что для выполнения условий лоренц-ковариантности и закона сохранения для оператора тока необходим учет многочастичных токов.

Таким образом, в указанном приближении скалярное равенство (60) перейдет в приближенное скалярное равенство, физически соответствующее релятивистскому импульсному приближению. В развитом математическом формализме при этом физическом приближении не нарушается ни лоренц-ковариантность оператора тока, ни закон сохранения тока, кроме того, для вычисления формфактора не использовались какие-либо выделенные компоненты тока, что имеет место в других математических формулировках ПИКМ (см., например, [3,29]). Нашу формулировку импульсного приближения будем называть модифицированным импульсным приближением (МИП). Формула для формфактора составной системы в этом приближении будет иметь вид

$$F_c(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(s) g_0(s, Q^2, s') \varphi(s'). \quad (61)$$

Отметим, что равенство (57) и, соответственно, формула (61) могут быть формально получены при замене в (46) матричного элемента тока со взаимодействием на ток свободной двухчастичной системы (38) при следующем изменении ковариантной части (39):

$$A_\mu(s, Q^2, s') \Big|_{P=p_c, P'=p'_c} = (p_c + p'_c)_\mu. \quad (62)$$

Формула (62) дает простой рецепт представления матричных элементов тока взаимодействующей системы в базисе (13) в МИП, опираясь на параметризацию тока свободной системы (38). Рецепт заключается в том, что в

векторах параметризации (38), (39) необходимо заменить импульсы центра инерции свободной двухчастичной системы на импульсы составной частицы. Заметим, что этот рецепт будет работать и в случае рассмотрения более сложных систем, которые мы рассмотрим в следующих разделах. Проблему выхода за пределы МИП, т. е. вычисление поправок к свободному двухчастичному формфактору $g_0(s, Q^2, s')$ в (61), мы в нашем обзоре обсуждать не будем.

Остановимся на выполнении в нашей процедуре построения тока условий (29)–(33), а также условий кластерной сепарабельности и неренормируемости заряда при включении взаимодействия. Условия (29)–(32) выполняются в нашем подходе по построению. Условие (33) выполняется тривиально, так как в нашей простой модели и формфактор $g_0(s, Q^2, s')$ в (38), и формфактор $G(s, Q^2, s')$ в (55) являются скалярами. Т. е. выполнение этого условия обеспечивается правильными трансформационными свойствами 4-векторов в (38) и в (55), (57).

Отдельно следует обсудить условие кластерной сепарабельности. При увеличении расстояния между частицами (или при выключении взаимодействия) вклад двухчастичных токов в (59) должен обращаться в нуль: $G_i(s, Q^2, s') \rightarrow 0$. Это значит, что в представлении матричного элемента тока (59) формфактор $G(s, Q^2, s')$ должен перейти в формфактор $g_0(s, Q^2, s')$, что уже сделано нами в МИП. Получившийся матричный элемент выражается через одночастичные токи (40), (41). Таким образом, условие кластерной сепарабельности выполняется, т. е. ток составной системы переходит в сумму одночастичных токов.

Условие неренормируемости заряда при включении взаимодействия в МИП также выполняется тривиально в силу существования слабого предела (45) на основных функциях (54).

Вызывает интерес сравнение ИП и МИП в мгновенной форме динамики. Произведем это сравнение на примере нашей простой модели. Для этого вычислим формфактор рассматриваемой модели в мгновенной форме динамики без процедуры канонической параметризации. В частности, сформулируем ИП в терминах операторов, как это обычно делается. Разложим матричный элемент (28) по набору состояний (12):

$$\begin{aligned} \langle p_c | j_\mu(0) | p'_c \rangle &= \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{2p_{10} 2p_{20}} \frac{d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2}{2p'_{10} 2p'_{20}} \langle p_c | \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | j_\mu | \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}'_2 \rangle \langle \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}'_2 | p'_c \rangle, \end{aligned} \quad (63)$$

где $\langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | p_c \rangle$ — волновая функция составной системы.

Для того чтобы выразить формфактор в терминах волновых функций (25), необходимо произвести разложение Клебша–Гордана базиса (12) по базису (13) в волновых функциях в равенстве (63) и воспользоваться явным видом

коэффициентов Клебша–Гордана (14) с квантовыми числами рассматриваемой модели:

$$\langle \mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2 | p_c \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \langle \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | p_c \rangle. \quad (64)$$

Матричный элемент тока в (63) представляется в виде (34), (35). Приравнявая отдельные компоненты в (63) и снимая часть интегралов при помощи δ -функций, можно вычислить формфактор составной системы. Результат вычисления формфактора зависит от того, из какой компоненты тока в (63) он вычисляется, кроме того, результат вычисления зависит от выбора системы отсчета, в которой производится интегрирование в (63). Это соответствует общим утверждениям относительного ИП в обычной формулировке мгновенной формы динамики (см., например, [20]). Приведем окончательный результат вычислений для случая, когда формфактор вычисляется из нулевой компоненты тока и интегрирование производится в системе отсчета $\mathbf{p}'_c = 0$, $\mathbf{p}_c = (0, 0, p_c)$. После перехода к инвариантным переменным s, s' соответствующий формфактор будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_c(Q^2) &= \frac{M_c}{4} \frac{\sqrt{2(2M_c^2 + Q^2)}}{4M_c^2 + Q^2} \times \\ &\times \int \sqrt{\frac{s}{s'}} \frac{d\sqrt{s} d\sqrt{s'}}{\sqrt{(s - 4M^2)(s' - 4M^2)}} \frac{(s + s' + Q^2)^4 Q^2}{[\lambda(s, -Q^2, s')]^{3/2}} \times \\ &\times \frac{1}{(s s')^{1/4}} \frac{\vartheta(s, Q^2, s')}{\sqrt{s'}(s + Q^2)} \varphi(s) \varphi(s') f_1(Q^2). \quad (65) \end{aligned}$$

Выражение (65) отличается от выражения (61), полученного в МИП. Для волновых функций, удовлетворяющих условиям (26), формфактор (65) удовлетворяет условию неренормируемости электрического заряда: $F_c(0) = 1$.

Вычислим разность между (61) и (65):

$$\Delta F_c(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(s) \varphi(s') g_0(s, Q^2, s') [1 - R(s, Q^2, s')], \quad (66)$$

$$R(s, Q^2, s') = \frac{M_c}{2} \frac{\sqrt{2(2M_c^2 + Q^2)}}{4M_c^2 + Q^2} \sqrt{\frac{s}{s'}} \frac{(s + s' + Q^2)^2}{(s s')^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{s'}(s + Q^2)}. \quad (67)$$

По своему смыслу величина $R(s, Q^2, s')$ описывает вклад двухчастичных токов, приводящий к полной лоренц-ковариантности матричного элемента электромагнитного тока и выполнению закона сохранения. Заметим, что эта добавка, обеспечивающая лоренц-ковариантность матричного элемента тока

в (56), не содержит динамической информации о взаимодействии зондирующей частицы с двумя конституентами одновременно, т. е. технически не зависит, например, от соответствующих констант связи.

$R(s, Q^2, s')$ можно вычислить, используя в разности (66) вместо формфактора (65), полученного из нулевой компоненты тока в (63), формфактор, полученный из третьей компоненты. В этом случае величина этой добавки будет отличаться от (67). Таким образом, $R(s, Q^2, s')$ не является инвариантом и, значит, зависит от выбора системы отсчета, в которой происходит вычисление в ИП. Вычисления в МИП от системы отсчета не зависят. Заметим, что ИП и МИП совпадают в нерелятивистском пределе. В нерелятивистском пределе формфакторы в ИП, вычисленные из различных компонент тока, совпадают. Таким образом, разница между ИП и МИП вызвана именно нарушением условий релятивистской ковариантности.

4. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

Интерпретация формфакторов составных систем как линейных функционалов, задающих обобщенные функции, не является особенностью только описываемого в настоящем обзоре релятивистского подхода. Аналогичный формализм (хотя и без ссылок на математический аппарат обобщенных функций) достаточно давно используется в нерелятивистской теории составных систем [80]. Нерелятивистский предел релятивистского выражения для зарядового формфактора (61) имеет следующий вид:

$$F_{\text{NR}}(Q^2) = \int k^2 dk k'^2 dk' u(k) g_{0\text{NR}}(k, Q^2, k') u(k'), \quad (68)$$

$$g_{0\text{NR}}(k, Q^2, k') = \frac{f_1(Q^2)}{k k' Q} \vartheta(k, Q^2, k'), \quad (69)$$

$$\vartheta(k, Q^2, k') = \theta\left(k' - \left|k - \frac{Q}{2}\right|\right) - \theta\left(k' - k - \frac{Q}{2}\right).$$

В этом выражении $g_{0\text{NR}}(k, Q^2, k')$ — свободный нерелятивистский формфактор, который получается из (41) в нерелятивистском пределе; $f_1(Q^2)$ — формфактор заряженной частицы.

Выражение (68) полностью совпадает с выражением для формфактора составной системы в S -состоянии относительного движения в нерелятивистском импульсном приближении через волновые функции в импульсном представлении, полученном в работе [80] из стандартных формул для формфакторов через волновые функции в координатном представлении. Формула (68) может

быть интерпретирована как функционал, порожденный функцией $g_{\text{0NR}}(k, Q^2, k')$ и заданный на функциях $u(k)$ и $u(k')$. Функционал, задающий соответствующую регулярную обобщенную функцию, определим следующим образом (ср. с (43), (44)):

$$\begin{aligned} \langle g_{\text{0NR}}(k, Q^2, k'), \psi(k, k') \rangle &= \int d\mu(k, k') g_{\text{0NR}}(k, Q^2, k') \psi(k, k'), \\ d\mu(k, k') &= \theta(k) \theta(k') d\mu(k) d\mu(k'), \quad d\mu(k) = k^2 dk. \end{aligned} \quad (70)$$

По своему физическому смыслу величина $g_{\text{0NR}}(k, Q^2, k')$, формально появляющаяся в [80], описывает электромагнитные свойства нерелятивистской системы двух свободных бесспиновых частиц в S -состоянии относительного движения, одна из которых не заряжена. Статический предел этой величины $\lim_{Q^2 \rightarrow 0} g_{\text{0NR}}(k, Q^2, k')$, задающий заряд системы, существует только в слабом смысле как предел функционала (70):

$$\lim_{Q^2 \rightarrow 0} \langle g_{\text{0NR}}(k, Q^2, k'), \psi(k, k') \rangle = \langle e_c \delta(\mu(k') - \mu(k)), \psi(k, k') \rangle. \quad (71)$$

На основных функциях вида $\psi(k, k') = u(k) u(k')$, где $u(k)$ — нормированная волновая функция связанного состояния, функционал (70) задает формфактор связанного состояния этих частиц в нерелятивистском импульсном приближении (68). Слабый предел (71) будет равен заряду связанной системы:

$$\lim_{Q^2 \rightarrow 0} \langle g_{\text{0NR}}(k, Q^2, k'), \psi(k, k') \rangle = e_c \int_0^{\infty} k^2 dk u^2(k) = e_c. \quad (72)$$

Заметим, что при описании более сложных систем (например ρ -мезона) релятивистские формфакторы в МИП также имеют правильные нерелятивистские пределы, совпадающие с [80].

5. СВЯЗЬ С ДИСПЕРСИОННЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

На примере рассматриваемой в настоящем разделе простой модели двух-частичной составной системы мы обсудим одну из не решенных пока проблем ПИКМ — проблему связи этой теории с квантовой теорией поля (КТП) [20, 22, 81]. Тот факт, что ПИКМ в отличие от КТП оперирует лишь с конечным числом степеней свободы, делает ее похожей на дисперсионный подход, который, в принципе, также имеет дело с конечным числом степеней свободы. Однако дисперсионные соотношения, опирающиеся на аналитические свойства амплитуд рассеяния, матричных элементов, формфакторов в комплексной плоскости энергий, имеют довольно строгое обоснование в КТП [82].

Таким образом, нам представляется, что решать проблему связи ПИКМ и КТП можно не только прямым сравнением одной и другой, но и сравнением ПИКМ с дисперсионным подходом.

В настоящем разделе мы на примере простой модели проведем сравнение нашей формулировки ПИКМ с так называемым модифицированным дисперсионным подходом к проблеме описания составных адронных систем. Этот подход позволил выразить электромагнитные формфакторы таких составных систем, в частности дейтрона, через физическую фазу рассеяния нуклонов и обеспечил хорошее описание экспериментальных данных по упругому ed -рассеянию. Подробное описание данного дисперсионного подхода может быть найдено в [79, 83–88] (см. также [89]). Непосредственное использование его в описании кварковых систем затруднительно, поскольку имеет место явление невылетаия кварков. Тем не менее существуют работы, в идейном плане примыкающие к упомянутым, в которых исследуются формфакторы адронов как связанных состояний конститuentных кварков в рамках техники дисперсионного интегрирования по массе [90].

Изложим кратко суть модифицированного дисперсионного подхода и выведем формулы для электромагнитного формфактора составной системы для нашей простой модели, следуя работе [79]. Гейзенберговский оператор тока составной системы взаимодействующих частиц в соответствии с (58) представим в виде суммы двух операторов:

$$j_\mu = j_\mu^{(0)} + j_\mu^{(\text{int})}. \quad (73)$$

В (73) $j_\mu^{(0)}$ — ток свободной двухчастичной системы (см. (34), (38)), $j_\mu^{(\text{int})}$ — оператор, включающий в себя взаимодействие. Предположим, что в системе конститuentов в нашей модели существуют состояния рассеяния, и вычислим матричный элемент оператора (73) в обкладках из in- и out-состояний. Будем считать, что в состоянии рассеяния частицы находятся в S -состоянии относительного движения. Матричный элемент оператора $j_\mu^{(0)}$ будет выражаться через свободный двухчастичный формфактор (38), который уже вычислен нами, см. (41). Матричный элемент оператора, учитывающего взаимодействие,

$$\langle \mathbf{P}(\pm) | j_\mu^{(\text{int})} | \mathbf{P}'(\pm) \rangle$$

будет выражаться через формфактор

$$G_i(s \mp i\varepsilon, Q^2, s' \pm i\varepsilon). \quad (74)$$

Знак «+» соответствует in-состоянию, «-» — out-состоянию. Формфактор в (74) имеет кинематические разрезы в комплексной плоскости переменных s, s' , идущие по действительной оси от точки $4M^2$ до бесконечности. Запись

$G_i(s + i\varepsilon, Q^2, s' - i\varepsilon)$ означает, что формфактор аналитически можно продолжить из физической области переменной s в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости, а по переменной s' , соответственно, в нижнюю. Формфактор, параметризующий полный ток (73), представляется в виде суммы формфакторов (59). Рассмотрим матричный элемент полного тока. Зафиксируем переменную s , а векторы базиса переменной s' свяжем при помощи S -матрицы:

$$\langle \mathbf{P} | j_\mu | \mathbf{P}'(+) \rangle = \langle \mathbf{P} | j_\mu | \mathbf{P}'(-) \rangle S(s'); \quad (75)$$

$S(s) = \exp(2i\delta)$, δ — фаза рассеяния. S -матрицу можно представить в виде

$$S(s) = \frac{B(s - i\varepsilon)}{B(s + i\varepsilon)}. \quad (76)$$

Здесь $B(s)$ — релятивистский аналог функции Йоста. Равенство (75) в терминах формфакторов с учетом равенств (74), (76) можно записать в виде

$$\begin{aligned} G_i(s, Q^2, s' - i\varepsilon) B(s' - i\varepsilon) - G_i(s, Q^2, s' + i\varepsilon) B(s' + i\varepsilon) = \\ = -g_0(s, Q^2, s') (B(s' - i\varepsilon) - B(s' + i\varepsilon)). \end{aligned} \quad (77)$$

Равенство (77) представляет собой так называемую задачу Римана–Гильберта на полупрямой, решение которой дано в [91]:

$$G_i(s, Q^2, s') B(s') = \tilde{G}(s, Q^2, s') + C_1(s, Q^2, s'), \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s, Q^2, s') = -\frac{1}{2\pi i} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds'' g_0(s, Q^2, s'') \Delta(s'')}{s' - s''}, \\ \Delta(s) = (B(s + i\varepsilon) - B(s - i\varepsilon)), \end{aligned} \quad (79)$$

$C_1(s, Q^2, s')$ — неизвестная функция, регулярная по переменной s' в окрестности действительной оси при $4M^2 \leq s' < \infty$. Если связать теперь in- и out-базисы по переменной s , то, используя явный вид функции G_i (78), (79), получим краевую задачу Римана–Гильберта для функции C_1 по переменной s , решение которой запишется в виде, аналогичном (78), (79). После выполнения аналитического продолжения по переменным s, s' выражения для формфактора (74) в точку связанного состояния $s = s' = M_c^2$ (M_c — масса связанного состояния) и взятия вычетов в соответствующих полюсах мы получим формфактор связанной системы, выраженный непосредственно в терминах S -фазы рассеяния конstituентов:

$$F_c(Q^2) = \Gamma^2 \int_{4M^2}^{\infty} ds ds' \frac{g_0(s, Q^2, s') \Delta(s) \Delta(s')}{(s - M_c^2)(s' - M_c^2)}. \quad (80)$$

Постоянная Γ^2 определяется из условия $F_c(0) = e_c$ и учитывает вклад так называемых нефизических разрезов. Скачки функции Йоста выражаются через фазу рассеяния, измеряемую в эксперименте. Свободный двухчастичный формфактор для нашей модели задается формулой (41). $F_c(Q^2)$ — функционал, порожденный $g_0(s, Q^2, s')$ на функциях $\Delta(s)/(s - M_c^2)$. Изложенный в работах [84,88] формализм был применен к дейтрону и дал хорошее согласие с экспериментами.

Отметим, что формула (80), полученная в модифицированном дисперсионном подходе, является вполне аналогичной формуле (61), полученной в мгновенной форме. Эта аналогия может быть более явной, если воспользоваться результатами работы [87], где нейтрон-протонная система рассматривалась в нерелятивистском дисперсионном подходе. В этой работе показано, что если амплитуда электрорасщепления дейтрона удовлетворяет представлению Мандельштама, то волновая функция нейтрон-протонной системы является хорошо определенной и может быть выражена в терминах фаз np -рассеяния (детали вывода см. в [87]):

$$u(r) = \tilde{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\Delta(x)}{x - \kappa} \sin(xr), \quad (81)$$

здесь κ^2 — энергия связи дейтрона; $\tilde{\Gamma}$ — нормировочная константа, включающая вклады так называемых нефизических разрезов.

Нерелятивистский аналог формулы (80), записанный в терминах волновых функций (81) с учетом нефизических разрезов, полностью совпадает с формулой (61). Таким образом, формула (61) может быть обоснована (во всяком случае, для систем, имеющих состояния рассеяния) в рамках модифицированного дисперсионного подхода, т. е. фактически с теми же приближениями и тем же уровнем строгости, с которыми в рамках КТП получены аналитические свойства формфакторов составных систем.

6. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОЧАСТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Процедуру построения матричного элемента оператора тока, т. е. представление его через формфакторы, называют параметризацией матричного элемента. В простейших случаях, например, для частиц со спинами 0 и 1/2, параметризацию удается провести из полуэмпирических соображений, однако построить матричный элемент оператора тока, например, для ядра с произвольным спином без общей методики практически невозможно. В обзоре [20] приведены два возможных варианта параметризации — элементарно-частичная и

мультипольная. Альтернативным к ним является общий метод параметризации матричных элементов локальных операторов, основы которого развиты в работе [51]. Так как при формулировке этого метода используется канонический базис в гильбертовом пространстве, его естественно назвать каноническим методом параметризации. С теоретико-групповой точки зрения процедура параметризации представляет собой фактически реализацию известной теоремы Вигнера–Эккарта на группе Пуанкаре. Т. е. параметризация представляет собой процедуру выделения приведенных матричных элементов (формфакторов), которые являются инвариантами при преобразованиях из группы Пуанкаре.

Основная идея канонической параметризации может быть сформулирована следующим образом. Из переменных, от которых зависят векторы гильбертова пространства в обкладках оператора, необходимо построить объекты двух типов.

1. Набор линейно независимых матриц по проекциям спина в начальном и конечном состояниях. Набор этих матриц представляет собой одновременно набор линейно независимых лоренцевских скаляров (скаляров и псевдоскаляров). Данный набор описывает матричные элементы тока, недиагональные по проекциям спина в начальном и конечном состояниях, а также поведение матричного элемента при дискретных преобразованиях пространства-времени.

2. Набор линейно независимых объектов, имеющих такую же тензорную размерность, что и оператор (это может быть, например, 4-вектор или 4-тензор некоторого ранга). Данный набор описывает поведение матричного элемента при преобразованиях Лоренца. Если оператор является лоренцевским скаляром, то этот второй набор совпадает с первым.

Матричный элемент оператора записывается в виде суммы всех возможных произведений объектов первого типа на объекты второго типа. Коэффициенты при элементах этой суммы и будут искомыми приведенными матричными элементами-формфакторами. Получившаяся линейная комбинация модифицируется при наложении дополнительных условий на оператор тока, например, законов сохранения.

Для пояснения сказанного рассмотрим несколько простых случаев. Начнем с параметризации матричного элемента скалярного оператора $A(x)$ между состояниями свободной бесспиновой частицы массой M . В силу трансляционной инвариантности достаточно рассмотреть оператор $A(0)$. Из переменных, от которых зависят векторы гильбертова пространства в начальном и конечном состояниях, можно построить два линейно независимых скаляра $p^2 = p'^2 = M^2$, $(p - p')^2 = q^2 = -Q^2$. Нетривиальным скаляром будет только второй — квадрат переданного импульса. Так как значение M в начальном и конечном состояниях одно и то же, в дальнейшем будем опускать соответствующие аргументы в функциях. Если вектор состояния частицы имеет

нормировку (12), то матричный элемент скалярного оператора может быть записан следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}, M | A(0) | \mathbf{p}', M \rangle = f(Q^2). \quad (82)$$

Рассмотрим теперь матричный элемент скалярного оператора между состояниями частицы со спином j :

$$\langle \mathbf{p}, M, j, m | A(0) | \mathbf{p}', M, j, m' \rangle, \quad (83)$$

m, m' — проекции спина частицы.

Тензорная размерность оператора не изменилась, однако матричный элемент представляет собой матрицу по проекциям спина в начальном и конечном состояниях. Эту матрицу можно разложить по набору матриц, построенных из оператора релятивистского спина $\Gamma_\mu(p)$ [92]. В системе покоя частицы этот оператор совпадает фактически с оператором спина частицы:

$$\Gamma^0(0) = 0, \quad \mathbf{\Gamma}(0) = M \mathbf{j}, \quad [j_i, j_k] = i \varepsilon_{ikl} j_l. \quad (84)$$

Введенный оператор спина может быть выражен через вектор Любаньского-Паули w_μ [69] следующим образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{mm'}^\mu(p) &= \langle \mathbf{p}, m | w^\mu | \mathbf{p}, m' \rangle = \langle 0, m | U^{-1}(\Lambda_p) w^\mu U(\Lambda_p) | 0, m' \rangle = \\ &= (\Lambda_p)^\mu_\nu \langle 0, m | w^\nu | 0, m' \rangle = (\Lambda_p)^\mu_\nu \Gamma_{mm'}^\nu(0). \end{aligned} \quad (85)$$

Здесь Λ_p — буст, связывающий лабораторную систему отсчета с системой покоя частицы; $U(\Lambda_p)$ — соответствующий оператор представления. Матрица Λ_p может быть выражена через матрицу преобразования Лоренца, преобразующую вектор p' в p :

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{2}{M^2} p^\mu p'_\nu - \frac{(p^\mu + p'^\mu)(p_\nu + p'_\nu)}{M^2 + p^\lambda p'_\lambda}. \quad (86)$$

Λ_p задана равенством (86) при $p' = (M, 0, 0, 0)$.

Равенства (84) могут быть записаны в виде

$$\Gamma_{mm'}^0(0) = \langle 0, m | w^0 | 0, m' \rangle = 0, \quad \mathbf{\Gamma}_{mm'}(0) = \langle 0, m | \mathbf{w} | 0, m' \rangle = M \mathbf{j}_{mm'}. \quad (87)$$

Используя явный вид Λ_p , получаем

$$\Gamma_0(p) = (\mathbf{p}\mathbf{j}), \quad \mathbf{\Gamma}(p) = M \mathbf{j} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{j})}{p_0 + M}, \quad \Gamma^2 = -M^2 j(j+1). \quad (88)$$

Оператор 4-спина при преобразованиях Лоренца $p^\mu = \Lambda_\nu^\mu p'^\nu$ преобразуется по представлению малой группы:

$$\Gamma^\mu(p) = \Lambda_\nu^\mu D^j(p, p') \Gamma^\nu(p') D^j(p', p). \quad (89)$$

С помощью (89) можно показать, что матричный элемент оператора $D^j(p, p')\Gamma^\mu(p')$ преобразуется как 4-вектор (точнее, как псевдовектор), а матричные элементы операторов $D^j(p, p')p_\mu\Gamma^\mu(p')$ и $p'_\mu\Gamma^\mu(p)D^j(p, p')$ ведут себя как 4-псевдоскаляры.

Таким образом, набор линейно независимых скаляров, составленных из векторов p^μ , p'^μ и псевдовектора $\Gamma^\mu(p')$, будет содержать не только диагональные по проекциям спина величины, но и недиагональные. Заметим, что в образовании скаляров не участвует псевдовектор $\Gamma^\mu(p)D^j(p, p')$, так как он является линейно зависимым. Это можно показать, если воспользоваться соотношением (89) и явным видом матрицы Λ_ν^μ (86). После простых выкладок получаем

$$\Gamma^\mu(p)D^j(p, p') = D^j(p, p') \left[\Gamma^\mu(p') - \frac{p^\mu + p'^\mu}{M^2 + p_\mu p'^\mu} [p_\nu \Gamma^\nu(p')] \right]. \quad (90)$$

Так как $p'_\mu \Gamma^\mu(p') = 0$, то искомый набор линейно независимых матриц по проекциям спина в начальном и конечном состояниях, которые образуют набор независимых лоренцевских скаляров, составят $2j + 1$ величин

$$D^j(p, p') (p_\mu \Gamma^\mu(p'))^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2j. \quad (91)$$

Число линейно независимых скаляров в (91) ограничено тем, что произведение, содержащее большее, чем $2j$, число множителей $\Gamma^\mu(p')$, сводится к произведениям с меньшим числом сомножителей, т. е. не является линейно независимым. При четном n полученные величины будут скалярами, а при нечетном n — псевдоскалярами. Таким образом, матричный элемент тока можно разложить по системе этих линейно независимых скаляров. Коэффициенты в этой линейной комбинации $f_n(Q^2)$ и будут искомыми формфакторами. Так как приведенные матричные элементы — формфакторы — в силу своей инвариантности относительно вращений не должны зависеть от проекций спина, то они будут зависеть только от одной скалярной комбинации переменных — квадрата переданного импульса.

Наложение на оператор $A(0)$ условия самосопряженности требует минимальной модификации набора (91), а именно, в скалярном произведении в (91) возникает дополнительный множитель — мнимая единица i . Итак, с учетом условия самосопряженности матричный элемент тока запишется в виде

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, M, j, m | A(0) | \mathbf{p}', M, j, m' \rangle = \\ = \sum_{n=0}^{2j} \sum_{m''=-j}^j \langle m | D^j(p, p') | m'' \rangle \langle m'' | \{i p_\mu \Gamma^\mu(p')\}^n | m' \rangle f_n(Q^2). \end{aligned} \quad (92)$$

Самосопряженность построенного оператора можно доказать, используя следующее из (90) соотношение

$$p'_\mu \Gamma^\mu(p) D^j(p, p') = -D^j(p, p') p_\mu \Gamma^\mu(p'). \quad (93)$$

Для скалярного оператора n будет принимать только четные значения, для псевдоскалярного — нечетные.

Рассмотрим оператор $j_\mu(0)$, являющийся 4-вектором. Для параметризации матричного элемента из переменных, от которых зависят векторы состояния, необходимо построить набор величин соответствующей тензорной размерности. Из имеющихся переменных в векторах состояний частицы можно составить один псевдовектор $\Gamma^\mu(p')$ и три независимых вектора

$$K_\mu = (p - p')_\mu = q_\mu, \quad K'_\mu = (p + p')_\mu, \quad R_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\nu p'^\lambda \Gamma^\rho(p'); \quad (94)$$

$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ — абсолютно антисимметричный псевдотензор 4-го ранга, $\epsilon_{0123} = -1$. Матричный элемент оператора, чтобы быть 4-вектором, будет выражаться через матричные элементы указанных величин, умноженных слева на $D^j(p, p')$. При этом каждый такой объект должен быть умножен на сумму линейно независимых скаляров, построенных при параметризации (92):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, M, j, m | j_\mu(0) | \mathbf{p}', M, j, m' \rangle &= \sum_{m''} \langle m | D^j(p, p') | m'' \rangle \times \\ &\times \langle m'' | F_1 K'_\mu + F_2 \Gamma_\mu(p') + F_3 R_\mu + F_4 K_\mu | m' \rangle, \end{aligned} \quad (95)$$

где

$$F_i = \sum_{n=0}^{2j} f_{in}(Q^2) (i p_\mu \Gamma^\mu(p'))^n. \quad (96)$$

Наложим на оператор некоторые дополнительные условия.

1. Условие самосопряженности.

Используя (93), можно показать, что условие самосопряженности в правой части (95) для члена, содержащего F_2 при $n = 0$, приводит к необходимости несколько модифицировать вектор при F_2 с помощью уже введенных в (95) 4-векторов:

$$\Gamma^\mu(p') \rightarrow \Gamma^\mu(p') - \frac{K'^\mu}{K'^2} (p_\mu \Gamma^\mu(p')).$$

Условие самосопряженности для членов, содержащих F_2 и F_3 при $n \neq 0$, дает еще одну модификацию этих членов:

$$F_i A^\mu \rightarrow \frac{1}{2} (F_i A^\mu + A^\mu F_i) = \{F_i A^\mu\}_+, \quad i = 2, 3. \quad (97)$$

Здесь A^μ — соответствующие векторы в (95).

Самосопряженность членов, содержащих F_3 и F_4 , приводит к умножению их на мнимую единицу.

2. Условия ортогональности векторов параметризации.

Это приведет еще к одной модификации вектора при F_2 :

$$\Gamma^\mu(p') - \left(\frac{K'^\mu}{K'^2} + \frac{K^\mu}{K^2} \right) (p_\mu \Gamma^\mu(p')).$$

3. Условие сохранения четности.

Суммирование в (96) ограничено тем, что каждое слагаемое в правой части (95) содержит линейно независимые члены только при условии наличия не более $2j$ сомножителей Γ^μ (см. (91)). При наложении условия сохранения четности суммирование в (96) будет ограничено также тем, что все слагаемые должны содержать только четное число псевдовекторных множителей Γ^μ . Таким образом, суммирование в F_1 и F_4 происходит по четным n : $2j \geq n \geq 0$, в F_3 по четным n : $2j - 1 \geq n \geq 0$, а в F_2 по нечетным n : $2j - 1 \geq n > 0$.

4. Условие сохранения: $j_\mu K^\mu = j_\mu q^\mu = 0$. Легко видеть, что это условие будет выполняться только при $F_4 = 0$.

Таким образом, параметризация матричного элемента при наложении вышеперечисленных условий имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, M, j, m | j_\mu(0) | \mathbf{p}', M, j, m' \rangle = & \sum \langle m | D^j(p, p') | m'' \rangle \times \langle m'' | F_1 K'_\mu + \\ & + \left\{ F_2 \left[\Gamma_\mu(p') - (p_\mu \Gamma^\mu(p')) \left(\frac{K'_\mu}{K'^2} + \frac{K^\mu}{K^2} \right) \right] \right\}_+ + i \{ F_3 R_\mu \}_+ | m' \rangle. \end{aligned} \quad (98)$$

Построенная процедура может быть применена, например, для построения матричного элемента электромагнитного тока для частицы со спином $1/2$ (см. условия (29)–(33)):

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{p}, M, \frac{1}{2}, m \left| j_\mu(0) \right| \mathbf{p}', M, \frac{1}{2}, m' \right\rangle = & \sum_{m''} \langle m | D^{1/2}(p, p') | m'' \rangle \times \\ & \times \langle m'' | f_{10}(Q^2) K'_\mu + i f_{30}(Q^2) R_\mu | m' \rangle. \end{aligned} \quad (99)$$

Формфакторы $f_{10}(Q^2) = f_1(Q^2)$ и $f_{30}(Q^2) = f_2(Q^2)$ имеют смысл электрического и магнитного формфакторов частицы соответственно.

$f_1(Q^2)$, $f_2(Q^2)$ можно выразить через общепринятые саксовские $G_E(Q^2)$ — электрический и $G_M(Q^2)$ — магнитный формфакторы частицы [93]:

$$f_1(Q^2) = \frac{2M}{\sqrt{4M^2 + Q^2}} G_E(Q^2), \quad f_2(Q^2) = -\frac{4}{M\sqrt{4M^2 + Q^2}} G_M(Q^2). \quad (100)$$

Вполне аналогично, хотя и несколько более громоздко, данная процедура выглядит при построении матричных элементов операторов более высокой тензорной размерности.

7. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОКА

В этом разделе мы обобщим метод параметризации, развитый в разд. 6, на случай составных систем без взаимодействия. Возьмем систему из двух свободных частиц со спином $1/2$ и проведем параметризацию матричных элементов операторов на примере построения матричного элемента оператора электромагнитного тока. Заметим, что аналогичная задача решается в работе [94] в формализме мультипольной параметризации. В отличие от простой модели (34) разд. 2 оператор тока двухчастичной системы невзаимодействующих частиц будет иметь вид

$$j_{\mu}^{(0)}(0) = j_{\mu}^{(1)} \otimes I^{(2)} \oplus j_{\mu}^{(2)} \otimes I^{(1)}; \quad (101)$$

$j_{\mu}^{(1,2)}$ — электромагнитные токи частиц; $I^{(1,2)}$ — единичные операторы в одночастичных гильбертовых пространствах состояний частиц. В терминах матричных элементов в базисе (12) равенство (101) переписется в виде суммы матричных элементов одночастичных токов:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_1, m_1; \mathbf{p}_2, m_2 | j_{\mu}^{(0)}(0) | \mathbf{p}'_1, m'_1; \mathbf{p}'_2, m'_2 \rangle = \\ = \langle \mathbf{p}_1, m_1 | \mathbf{p}'_1, m'_1 \rangle \langle \mathbf{p}_2, m_2 | j_{2\mu}(0) | \mathbf{p}'_2, m'_2 \rangle + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (102)$$

Каждый из одночастичных матричных элементов токов в (102) можно записать через формфакторы, как это описано в разд. 6. В случае системы частиц со спином $1/2$ электромагнитные свойства системы будут описываться формфакторами f_1, f_2 , заданными выражениями (99), (100). Рассмотрим теперь матричный элемент электромагнитного тока двух свободных частиц в базисе (13):

$$\langle \mathbf{P}, \sqrt{s} | j_{\mu}^{(0)}(0) | \mathbf{P}', \sqrt{s'} \rangle. \quad (103)$$

Для построения матричного элемента будем использовать процедуру, развитую в разд. 6. Рассмотрим сначала простой случай $J = J' = S = S' = l = l' = 0$. Данный набор квантовых чисел возникает, например, при описании в рамках ПИКМ пиона [63]. При проведении параметризации с данным набором квантовых чисел отсутствует псевдовектор Γ^{μ} , однако наряду со скаляром $(P - P')^2 = -Q^2$ появляются еще два нетривиальных скаляра

$s' = P'^2$ и $s = P^2$, которые имеют смысл квадратов инвариантной массы свободной двухчастичной системы в начальном и конечном состояниях. Таким образом, формфакторы в параметризации будут функциями Q^2, s, s' . Матричный элемент тока будет линейной комбинацией 4-векторов P_μ и P'_μ , и после наложения условия сохранения (32) $j_\mu^{(0)}(0)(P - P')^\mu = 0$ параметризация матричного элемента примет вид, совпадающий с (38), (39). Однако для рассматриваемой системы двух свободных частиц со спином 1/2 свободный двухчастичный формфактор $g_0(s, Q^2, s')$ будет отличаться от (41). Для получения соответствующего выражения необходимо в (38) произвести разложение Клебша–Гордана неприводимого представления (13) на прямое произведение двух неприводимых представлений (12) и подставить равенства (99), (102). Вычисления проводятся вполне аналогично вычислениям свободного формфактора (41) простой модели в разд. 2, однако присутствует ряд усложнений. Во-первых, оператор тока двухчастичной системы будет иметь в отличие от (34) вид (102). Во-вторых, матричные элементы одночастичных токов в отличие от формулы (35) выражаются через зарядовый и магнитный формфакторы частицы (99), (100). В-третьих, в разложении (40) коэффициенты Клебша–Гордана будут иметь более сложный вид. Их явный вид можно получить из (22), положив $J = S = l = 0$. Видно, что в отличие от простой модели разд. 2 коэффициенты Клебша–Гордана будут содержать матрицы вигнеровских вращений. Явное выражение для $g_0(s, Q^2, s')$ в случае двух частиц со спином 1/2 и равной массы (например, u - и \bar{d} -кварков) с суммарным спином и орбитальным моментом, равными нулю, вычислено в работе [63]:

$$g_0(s, Q^2, s') = n_c \frac{(s + s' + Q^2)Q^2}{2\sqrt{(s-4M^2)(s'-4M^2)}} \frac{\vartheta(s, Q^2, s')}{[\lambda(s, -Q^2, s')]^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1+Q^2/4M^2}} \times \\ \times \left\{ (s + s' + Q^2)(G_E^u(Q^2) + G_E^{\bar{d}}(Q^2)) \cos(\omega_1 + \omega_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{M} \xi(s, Q^2, s')(G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) \sin(\omega_1 + \omega_2) \right\}. \quad (104)$$

Здесь $\xi(s, Q^2, s') = \sqrt{ss'Q^2 - M^2\lambda(s, -Q^2, s')}$; n_c — число цветов кварков; ω_1 и ω_2 — параметры вигнеровского поворота спинов:

$$\omega_1 = \arctg \frac{\xi(s, Q^2, s')}{M \left[(\sqrt{s} + \sqrt{s'})^2 + Q^2 \right] + \sqrt{ss'}(\sqrt{s} + \sqrt{s'})}, \\ \omega_2 = \arctg \frac{\alpha(s, s')\xi(s, Q^2, s')}{M(s + s' + Q^2)\alpha(s, s') + \sqrt{ss'}(4M^2 + Q^2)}, \quad (105)$$

$\alpha(s, s') = 2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'}$ и $G_{E,M}^{u,\bar{d}}(Q^2)$ — саксовские формфакторы u - и \bar{d} -кварков. Функция ϑ определяется так же, как в выражении (41). Выражение (104) было использовано при описании электромагнитных свойств пиона в работах [52–54, 57, 58, 61, 63].

Проведем теперь аналогичную параметризацию в базисе (13) для системы с набором квантовых чисел, в котором $J, J' \neq 0$ (см. также [75]). Лоренц-ковариантные свойства матричного элемента (103) будут описываться по аналогии с (94) тремя 4-векторами и одним псевдовектором:

$$K'_\mu = (P + P')_\mu, \quad K_\mu = (P - P')_\mu, \quad R_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} P^\nu P'^\lambda \Gamma^\rho(P'), \quad \Gamma_\mu(P'). \quad (106)$$

Псевдовектор $\Gamma_\mu(P)$ не используется в параметризации, так как связан с $\Gamma_\mu(P')$ соотношением, аналогичным (90):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{s}} \Gamma_\mu(P) D^j(P, P') &= \\ &= D^j(P, P') \left\{ \frac{1}{\sqrt{s'}} \Gamma_\mu(P') - \frac{1}{\sqrt{ss'}} \frac{\sqrt{s'} P_\mu + \sqrt{s} P'_\mu}{P_\nu P'^\nu + \sqrt{ss'}} [P_\nu \Gamma^\nu(P')] \right\}. \end{aligned}$$

Линейно независимые матрицы по проекциям полного момента количества движения в начальном и конечном состояниях строятся из векторов P_μ и $\Gamma_\mu(P')$, как это описано в (91):

$$D^J(P, P') (P_\mu \Gamma^\mu(P'))^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2J. \quad (107)$$

При дополнительных условиях самосопряженности, сохранения тока, сохранения четности, а также взаимной ортогональности векторов параметризации матричного элемента по аналогии с (98) принимает вид (см. также (97))

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | j_\mu^{(0)} | \mathbf{P}', \sqrt{s'}, J, l', S', m'_J \rangle &= \\ = \sum_{m''_J} \langle m_J | D^J(P, P') | m''_J \rangle \langle m''_J | \sum_{i=1}^3 \left\{ F_i^{ll' SS'} A_\mu^i(s, Q^2, s') \right\}_+ | m'_J \rangle, \quad (108) \end{aligned}$$

$$A_\mu^1 = \frac{1}{Q^2} [(s - s' + Q^2) P_\mu + (s' - s + Q^2) P'_\mu],$$

$$\begin{aligned} A_\mu^2 &= \frac{1}{\sqrt{s'}} \left\{ \Gamma_\mu(P') - \frac{1}{2\sqrt{s}} \left[(\sqrt{s} + \sqrt{s'}) \frac{K_\mu}{-Q^2} + \frac{\sqrt{s'} P_\mu + \sqrt{s} P'_\mu}{P P' + \sqrt{ss'}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}{\lambda(s, -Q^2, s')} [(\sqrt{s} + \sqrt{s'})^2 + Q^2] A_\mu^1 \right] (P_\lambda \Gamma^\lambda(P')) \right\}, \quad A_\mu^3 = \frac{i}{\sqrt{s'}} R_\mu. \quad (109) \end{aligned}$$

Величины $F_i^{ll'SS'}$ в (108) определяются по аналогии с равенством (96):

$$F_i^{ll'SS'} = \sum_{n=0}^{2J} f_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s')(iP_\mu \Gamma^\mu(P'))^n. \quad (110)$$

Суммирование в (110) осуществляется с учетом условия сохранения четности так же, как в (98).

Обратим внимание, что приведенные матричные элементы — инвариантные формфакторы в отличие от формфактора (41) — зависят от дополнительных инвариантных величин l, l', S, S' — инвариантных параметров вырождения в базисе (13). Отметим, что условие самосопряженности в (108) будет выполняться при следующих ограничениях на формфакторы $f_{in}^{ll'SS'}$:

$$f_{in}^{ll'SS'^*}(s, Q^2, s') = f_{in}^{l'l'S'S}(s', Q^2, s), \quad (111)$$

где звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

Отдельно рассмотрим случай $M_1 = M_2 = M$, $J = J' = S = S' = 1$, $l = l' = 0$. Соответствующие приведенные матричные элементы использовались в [66] при описании ρ -мезона в МИП без учета возможного D -состояния (см. также [95]). С указанным набором квантовых чисел функции $F_i^{ll'SS'}$ имеют следующий вид (ср. с равенствами (96), (98)):

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{10}(s, Q^2, s') + f_{12}(s, Q^2, s')(iP_\nu \Gamma^\nu(P'))^2, \\ F_2 &= f_{21}(s, Q^2, s')(iP_\nu \Gamma^\nu(P')), \\ F_3 &= f_{30}(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (112)$$

В равенствах (112) опущены фиксированные переменные l, l', S, S' . Требование инвариантности относительно временных отражений накладывает дополнительные условия на формфакторы:

$$f_{in}^* = f_{in}, \quad i = 1, 3; \quad f_{21}^* = -f_{21}. \quad (113)$$

Рассматривая условия (111) и (113) совместно, получаем

$$\begin{aligned} f_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') &= f_{in}^{l'l'S'S}(s', Q^2, s), \quad i = 1, 3, \\ f_{21}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') &= -f_{21}^{l'l'S'S}(s', Q^2, s). \end{aligned} \quad (114)$$

Из (114) видно, что формфактор f_{21} возник в параметризации из-за неравенства инвариантных масс в начальном и конечном состояниях. Как мы увидим далее, этот формфактор не дает вклада в упругие процессы, например, рассеяние электронов на составной частице, однако, например, в процессы радиационных переходов он будет давать вклад.

Для того чтобы введенные формфакторы f_{in} в (112) имели общепринятый смысл, их необходимо переопределить. Вводя новые обозначения, получаем

$$F_1 = g_{0C}(s, Q^2, s') + g_{0Q}(s, Q^2, s') \times \\ \times \left\{ (iP_\nu \Gamma^\nu(P'))^2 - \frac{1}{3} \text{Sp} (iP_\nu \Gamma^\nu(P'))^2 \right\} \frac{2}{\text{Sp} (P_\nu \Gamma^\nu(P'))^2}, \quad (115)$$

$$F_2 = g_{0MQ}(s, Q^2, s') (iP_\nu \Gamma^\nu(P')), \quad F_3 = g_{0M}(s, Q^2, s').$$

Скалярный множитель перед g_{0Q} выбран в таком виде, чтобы g_{0Q} можно было интерпретировать как квадрупольный формфактор системы двух свободных частиц. Остальные свободные двухчастичные формфакторы имеют следующий физический смысл: g_{0C} — зарядовый, $g_{0MQ} = f_{21}$ — магнитный квадрупольный 2-го рода, классическим аналогом которого является так называемый тороидный магнитный момент [96], $g_{0M} = f_{30}$ — магнитный формфактор свободной двухчастичной системы.

Как и в случае (41), свободные двухчастичные формфакторы в (115) можно выразить через формфакторы конstituентов. В силу громоздкости формул мы здесь приведем только выражение для зарядового свободного двухчастичного формфактора, остальные приведены в [66], где использовались при описании электромагнитной структуры ρ -мезона:

$$g_{0C}(s, Q^2, s') = \frac{1}{3} R(s, Q^2, s') Q^2 \left\{ (s + s' + Q^2)(G_E^u(Q^2) + G_E^{\bar{d}}(Q^2)) \times \right. \\ \times [2 \cos(\omega_1 - \omega_2) + \cos(\omega_1 + \omega_2)] - \frac{1}{M} \xi(s, Q^2, s') \times \\ \left. \times (G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) [2 \sin(\omega_1 - \omega_2) - \sin(\omega_1 + \omega_2)] \right\}, \quad (116)$$

где

$$R(s, Q^2, s') = \frac{(s + s' + Q^2)}{2\sqrt{(s - 4M^2)(s' - 4M^2)}} \frac{\vartheta(s, Q^2, s')}{[\lambda(s, -Q^2, s')]^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2/4M^2}}.$$

В приведенных формулах все входящие в них величины определены так же, как в выражении (104).

Свободные двухчастичные формфакторы (104), (115), (116) должны рассматриваться как обобщенные функции так же, как это делалось в разд. 2. Слабые пределы этих формфакторов дают соответствующие статические моменты двухчастичной системы свободных частиц: заряды, квадрупольный и магнитный моменты. Отметим, что условия на свободные двухчастичные формфакторы, следующие из требований, накладываемых на оператор электромагнитного тока (114), также нужно рассматривать в слабом смысле.

Аналогичным образом проводится параметризация и вычисления свободных двухчастичных формфакторов для системы с набором квантовых чисел $J = J' = S = S' = 1$, $l, l' = 0, 2$. В этом случае свободные формфакторы являются матрицами по орбитальному моменту. В силу их громоздкости они здесь не приводятся, их явный вид дан в работе [68], где они использовались при расчете электромагнитных свойств дейтрона.

8. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРОВ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

В настоящем разделе мы проведем обобщение изложенного в предыдущих разделах метода параметризации матричных элементов на случай двухчастичных составных систем, т. е. частиц, внутренняя структура которых определяется взаимодействием ее составляющих.

Пусть оператор $j_\mu(0)$ описывает переход между двумя состояниями рассматриваемой двухчастичной системы и является диагональным по полному моменту импульса. Разложение, аналогичное разложению Вигнера–Экарта, для матричного элемента этого оператора имеет вид (95), (96). Чтобы подчеркнуть, что речь идет о частице, имеющей составную природу, перепишем равенства (95), (96) с очевидными изменениями в обозначениях:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_c, m_{J_c} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, m'_{J_c} \rangle = \\ = \langle m_{J_c} | D^{J_c}(p_c, p'_c) [F_1^c K'_\mu + F_2^c \Gamma^\mu(p'_c) + F_3^c R_\mu + F_4^c K_\mu] | m'_{J_c} \rangle, \end{aligned} \quad (117)$$

где

$$F_i^c = \sum_{n=0}^{2J_c} f_{in}^c(Q^2) (i p_{c\mu} \Gamma^\mu(p'_c))^n. \quad (118)$$

В (117), (118) $(p_c - p'_c)^2 = -Q^2$, $p_{c\mu}^2 = p'_{c\mu}{}^2 = M_c^2$, M_c — масса составной частицы. В обозначениях векторов состояний по сравнению с (95) опущены спин и масса частицы.

Для наглядности изложения мы пока не будем накладывать на матричный элемент оператора (117) дополнительных условий, как это делалось при построении матричного элемента (98). Как уже говорилось в разд. 1, вектор состояний в матричном элементе тока (117) в ПИКМ может быть разложен

по базису (13):

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}_c, m_{Jc} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, m'_{Jc} \rangle &= \\
 &= \sum \int \frac{d\mathbf{P} d\mathbf{P}'}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \langle \mathbf{p}_c, m_{Jc} | \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J \rangle \times \\
 &\quad \times \langle \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J | j_\mu(0) | \mathbf{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} \rangle \times \\
 &\quad \times \langle \mathbf{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} | \mathbf{p}'_c, m'_{Jc} \rangle. \quad (119)
 \end{aligned}$$

Здесь $\langle \mathbf{P}', \sqrt{s'}, J', l', S', m_{J'} | \mathbf{p}'_c, m'_{Jc} \rangle$ — волновая функция в смысле мгновенной формы ПИКМ (26), а суммирование идет по всем дискретным переменным базиса (13).

Трудности параметризации матричного элемента тока в (119) подробно обсуждаются в разд. 2 при параметризации матричного элемента в (47), (48). В данном разделе мы запишем только аналог формул (49) и (50) для случая частиц со спином:

$$\hat{U}^{-1}(\Lambda) j^\mu(0) \hat{U}(\Lambda) = \tilde{j}^\mu(0), \quad (120)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}_c, m_{Jc} | \tilde{j}^\mu(0) | \mathbf{p}'_c, m'_{Jc} \rangle &= \langle \mathbf{p}_c, m_{Jc} | \hat{U}^{-1}(\Lambda) j^\mu(0) \hat{U}(\Lambda) | \mathbf{p}'_c, m'_{Jc} \rangle = \\
 &= \sum_{\tilde{m}_{Jc}, \tilde{m}'_{Jc}} \langle m_{Jc} | [D^{Jc}(R_\Lambda)]^{-1} | \tilde{m}_{Jc} \rangle \langle \Lambda \mathbf{p}_c, \tilde{m}_{Jc} | j^\mu(0) | \Lambda \mathbf{p}'_c, \tilde{m}'_{Jc} \rangle \times \\
 &\quad \times \langle \tilde{m}'_{Jc} | D^{Jc}(R_\Lambda) | m'_{Jc} \rangle. \quad (121)
 \end{aligned}$$

$D^J(R_\Lambda)$ — матрица вращений, осуществляющая преобразование спина при преобразованиях Лоренца. Равенство (121) по аналогии с (50) показывает, что в случае, когда оператор и векторы обкладок преобразуются по одному и тому же представлению группы Лоренца, трансформационные свойства тока как 4-вектора (29) можно описывать, используя 4-векторы начального и конечного состояний.

Как и в разд. 2, будем рассматривать матричный элемент в (119) как некоторую регулярную лоренц-ковариантную обобщенную функцию. Редуцируем выражение (119) с помощью равенства (26) к следующему:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}_c, m_{Jc} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, m'_{Jc} \rangle &= \sum_{l, l', S, S'} \int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi_{lS}^{Jc}(s) \times \\
 &\quad \times \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{Jc} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{Jc} \rangle \varphi_{l'S'}^{Jc}(s'). \quad (122)
 \end{aligned}$$

В (122) учтено, что полный момент составной системы не изменяется.

Воспользуемся полнотой набора состояний:

$$\hat{I} = \sum \int \frac{d\mathbf{P}}{N_{CG}} d\sqrt{s} | \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J \rangle \langle \mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J |. \quad (123)$$

Суммирование в (123) производится по всем дискретным переменным базиса (13).

Вместо равенств (52) имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum \int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi_{lS}^{J_c}(s) \varphi_{l'S'}^{J'_c}(s') \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{J_c} | \hat{U}^{-1}(\Lambda) j_\mu(0) \hat{U}(\Lambda) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{J_c} \rangle = \\
& \quad = \langle \mathbf{p}_c, m_{J_c} | \hat{U}^{-1}(\Lambda) \hat{I} j_\mu(0) \hat{I} \hat{U}(\Lambda) | \mathbf{p}'_c, m'_{J_c} \rangle = \\
& \quad = \sum_{\tilde{m}_{J_c}, \tilde{m}'_{J_c}} \langle m_{J_c} | [D^J(R_\Lambda)]^{-1} | \tilde{m}_{J_c} \rangle \langle \Lambda \mathbf{p}, \tilde{m}_{J_c} | \hat{I} j^\mu(0) \hat{I} | \Lambda \mathbf{p}', \tilde{m}'_{J_c} \rangle \times \\
& \quad \quad \times \langle \tilde{m}'_{J_c} | D^J(R_\Lambda) | m'_{J_c} \rangle = \\
& = \sum \int \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi_{lS}^{J_c}(s) \varphi_{l'S'}^{J'_c}(s') \sum_{\tilde{m}_{J_c}, \tilde{m}'_{J_c}} \langle m_{J_c} | [D^J(R_\Lambda)]^{-1} | \tilde{m}_{J_c} \rangle \times \\
& \quad \times \langle \Lambda \mathbf{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, \tilde{m}_{J_c} | j_\mu(0) | \Lambda \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', \tilde{m}'_{J_c} \rangle \langle \tilde{m}'_{J_c} | D^J(R_\Lambda) | m'_{J_c} \rangle. \quad (124)
\end{aligned}$$

Видно, что под знаком интеграла матричный элемент тока удовлетворяет аналогу соотношений (121) и, значит, к нему *под знаком интегралов и сумм* применима теорема Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре в слабом смысле.

Правую часть в (122) можно рассматривать как функционал на пространстве основных функций вида (см. также (26))

$$\psi^{ll'SS'}(s, s') = u_{lS}(k(s)) u_{l'S'}(k(s')). \quad (125)$$

Перепишем (122) в виде

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}_c, m_{J_c} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, m'_{J_c} \rangle &= \sum_{l, l', S, S'} \int d\mu(s, s') \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} \psi^{ll'SS'}(s, s') \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{J_c} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{J_c} \rangle. \quad (126)
\end{aligned}$$

Мера интегрирования в (126) выбрана в соответствии с нормировкой волновых функций с релятивистской плотностью состояний (26):

$$\begin{aligned}
d\mu(s, s') &= 16\theta(s - (M_1 + M_2)^2) \theta(s' - (M_1 + M_2)^2) \times \\
& \quad \times \sqrt{\sqrt{s}(1 - \eta^2/s^2) \sqrt{s'}(1 - \eta^2/s'^2)} d\mu(s) d\mu(s'), \quad (127)
\end{aligned}$$

где $d\mu(s)$ задано равенством (44).

Заметим, что суммирование по дискретным инвариантным переменным можно заменить интегрированием, вводя под знак интеграла сумму соответствующих дельта-функций. Тогда получившееся выражение необходимо рассматривать как функционал в R^6 . В силу (124) матричный элемент в правой части (126) может быть разложен по тому же набору линейно независимых скаляров, которые входят в правую часть (117), (118):

$$\begin{aligned} \frac{N_c N'_c}{N_{CG} N'_{CG}} \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{J_c} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{J_c} \rangle = \\ = \langle m_{J_c} | D^{J_c}(p_c, p'_c) \sum_{n=0}^{2J_c} (i p_{c\mu} \Gamma^\mu(p'_c))^n \mathcal{A}_{n\mu}^{ll'S S'}(s, Q^2, s') | m'_{J_c} \rangle, \end{aligned} \quad (128)$$

где $\mathcal{A}_{n\mu}^{ll'S S'}(s, Q^2, s')$ — лоренц-ковариантная обобщенная функция.

Приравняем выражения при одинаковых скалярах в правых частях (117) и (126) с учетом (128):

$$\begin{aligned} \sum_{l, l', S, S'} \int d\mu(s, s') \psi^{ll'S S'}(s, s') \langle m_{J_c} | \mathcal{A}_{n\mu}^{ll'S S'}(s, Q^2, s') | m'_{J_c} \rangle = \\ = \langle m_{J_c} | [f_{1n}^c K'_\mu + f_{2n}^c \Gamma_\mu(p'_c) + f_{3n}^c R_\mu + f_{4n}^c K_\mu] | m'_{J_c} \rangle. \end{aligned} \quad (129)$$

Из полученного равенства видно, что обобщенная функция в левой части должна содержать части диагональные и недиагональные по m_{J_c}, m'_{J_c} :

$$\mathcal{A}_{n\mu}^{ll'S S'}(s, Q^2, s') = \mathcal{A}_{1n\mu}^{ll'S S'}(s, Q^2, s') + \mathcal{A}_{2n\mu}^{ll'S S'}(s, Q^2, s'). \quad (130)$$

Первое слагаемое в этом выражении диагонально по проекциям момента, а второе — недиагонально. Рассмотрим диагональную по проекциям полного момента часть матричных элементов (129):

$$\begin{aligned} \sum_{l, l', S, S'} \int d\mu(s, s') \psi^{ll'S S'}(s, s') \langle m_{J_c} | \mathcal{A}_{1n\mu}^{ll'S S'}(s, Q^2, s') | m_{J_c} \rangle = \\ = \langle m_{J_c} | [f_{1n}^c[\psi] K'_\mu + f_{4n}^c[\psi] K_\mu] | m_{J_c} \rangle. \end{aligned} \quad (131)$$

Запись $f_{in}^c[\psi]$ означает, что формфакторы составной частицы являются функционалами на основных функциях (125). Потребуем, чтобы равенство (131) было справедливо при любой основной функции $\psi^{ll'S S'}(s, s')$. Рассуждая так же, как при получении (57) в процедуре параметризации (56), получаем, что вектор правой части (131) лежит в гиперплоскости, определяемой векторами K_μ, K'_μ . По аналогии с (57), чтобы равенство (131) выполнялось на всем пространстве основных функций, обобщенная функция в левой части должна иметь вид

$$\mathcal{A}_{1n\mu}^{ll'S S'}(s, Q^2, s') = K_\mu G_{1n}^{ll'S S'}(s, Q^2, s') + K'_\mu G_{4n}^{ll'S S'}(s, Q^2, s'). \quad (132)$$

Здесь $G_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s')$, $i = 1, 4$, — лоренц-инвариантные обобщенные функции. Подставляя (132) в (131), получаем с учетом (26) и (44) следующие аналоги формулы (60):

$$f_{in}^c(Q^2) = \sum_{l, l', S, S'} \int_{M_1+M_2}^{\infty} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi_{lS}^{Jc}(s) G_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') \varphi_{l'S'}^{Jc}(s'), \quad i=1, 4. \quad (133)$$

Рассматривая недиагональные по m_{Jc} , m'_{Jc} матричные элементы в (129) и повторяя рассуждения при получении (133), получаем интегральные представления для $f_{in}^c(Q^2)$, $i = 2, 3$. Таким образом, матричный элемент в правой части (126) как лоренц-ковариантная обобщенная функция может быть представлен в виде следующего разложения, аналогичного разложению Вигнера–Эккарта:

$$\langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{Jc} | j_{\mu}(0) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{Jc} \rangle = \frac{N_{CG} N'_{CG}}{N_c N'_c} \times \\ \times \langle m_{Jc} | D^{Jc}(p_c, p'_c) [\mathcal{F}_1 K'_{\mu} + \mathcal{F}_2 \Gamma_{\mu}(p'_c) + \mathcal{F}_3 R_{\mu} + \mathcal{F}_4 K_{\mu}] | m'_{Jc} \rangle, \quad (134)$$

$$\mathcal{F}_i = \sum_{n=0}^{2J_c} G_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s') (ip_{c\mu} \Gamma^{\mu}(p'_c))^n, \quad (135)$$

с дополнительными условиями (133).

В выражениях (134), (135) приведенные матричные элементы (формфакторы) содержат всю информацию о переходе, описываемом оператором $j_{\mu}(0)$. В частности, физические приближения, используемые при расчетах, формулируются в нашем подходе в терминах формфакторов $G_{in}^{ll'SS'}(s, Q^2, s')$ (более детальное обсуждение содержится в разд. 3). Трансформационные свойства матричного элемента описываются 4-векторами правой части (134).

Наложим теперь дополнительные условия на матричные элементы (117) и (134) по аналогии с (98) и (115). Правая часть равенств (117) и (134) содержит те же самые 4-векторы и лоренцевские скаляры, что и равенства (118) и (135), поэтому, чтобы учесть дополнительные условия, необходимо переопределить 4-векторы согласно равенствам (95)–(98). Например, закон сохранения тока дает $\mathcal{F}_4 = 0$. Легко видеть, что для переопределенных формфакторов равенство (133) остается справедливым.

Запишем параметризацию (134), (135) с учетом дополнительных условий для частного случая электромагнитного тока составной системы с квантовыми числами $J = J' = S = S' = 1$, который реализуется, например, в случае дейтрона. Отделяя квадрупольный формфактор по аналогии с (115) и используя

выражения (134) и (135), получим:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_c, \sqrt{s}, J_c, l, S, m_{J_c} | j_\mu(0) | \mathbf{p}'_c, \sqrt{s'}, J_c, l', S', m'_{J_c} \rangle = \\ = \frac{N_{CG} N'_{CG}}{N_c N'_c} \langle m_{J_c} | D^1(p_c, p'_c) \left[\tilde{\mathcal{F}}_1 K'_\mu + \frac{i}{M_c} \tilde{\mathcal{F}}_3 R_\mu \right] | m'_{J_c} \rangle, \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{G}'_{10}(s, Q^2, s') + \\ + \tilde{G}'_{12}(s, Q^2, s') \left\{ [ip_{c\nu} \Gamma^\nu(p'_c)]^2 - \frac{1}{3} \text{Sp} [ip_{c\nu} \Gamma^\nu(p'_c)]^2 \right\} \frac{2}{\text{Sp} [p_{c\nu} \Gamma^\nu(p'_c)]^2}, \\ \tilde{\mathcal{F}}_3 = \tilde{G}'_{30}(s, Q^2, s'). \end{aligned} \quad (137)$$

При получении (136), (137) следует принять во внимание, что в слабом смысле является справедливым равенство $\tilde{G}'_{21}(s, Q^2, s') = 0$ на основных функциях (125).

9. ПРИМЕНЕНИЕ К ОПИСАНИЮ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ

В этом разделе мы кратко представим некоторые результаты описания ряда составных систем в рамках развитого метода.

В работе [52] в МИП был рассчитан среднеквадратичный радиус пиона

$$\langle r_\pi^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF_\pi(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0}. \quad (138)$$

Формфактор пиона $F_\pi(Q^2)$ рассчитывался по формуле (61), где свободный двухчастичный формфактор $g_0(s, Q^2, s')$ задан в (104). Волновая функция определялась равенством (26) при $M_1 = M_2 = M$, $S = l = 0$, M — масса легкого кварка. Модельная волновая функция выбиралась в гауссовской форме:

$$u(k) = N_{\text{HO}} \exp\left(-\frac{k^2}{2b^2}\right). \quad (139)$$

В приближении точечности кварков релятивистский среднеквадратичный радиус пиона имеет вид

$$\langle r_\pi^2 \rangle = \langle r_\pi^2 \rangle_{\text{NR}} H(V), \quad V = \frac{M}{b}, \quad (140)$$

где

$$H(V) = \sqrt{\pi} V \exp(V^2) \text{erfc}(V) + \exp(V^2) E_1(V^2),$$

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > 0,$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Здесь $E_1(x)$ — интегральная показательная функция; $\operatorname{erf}(x)$ — функция ошибок; $\langle r_{\pi}^2 \rangle_{\text{NR}} = 3/8b^2$ — нерелятивистское значение среднеквадратичного радиуса. Из условия совпадения (140) с экспериментом были получены ограничения на параметры модели b и M .

Релятивистский расчет электромагнитной структуры пиона и каона был выполнен в работах [54, 55], результаты которых хорошо согласуются с экспериментальными данными. Роль релятивистского эффекта поворота спина в электромагнитной структуре пиона была исследована в [58]. В [61] была обнаружена сильная зависимость формфактора пиона от массы легкого конститuentного кварка. Наглядное представление об этой зависимости дает рис. 2, из которого видно, что результаты расчетов пионного формфактора в различных моделях кварк-антикваркового взаимодействия при фиксированной массе конститuentного кварка собираются в «пучки». Сравнение результатов расчетов с последними экспериментами JLab [97] дает значение массы конститuenta $M = 0,21$ ГэВ.

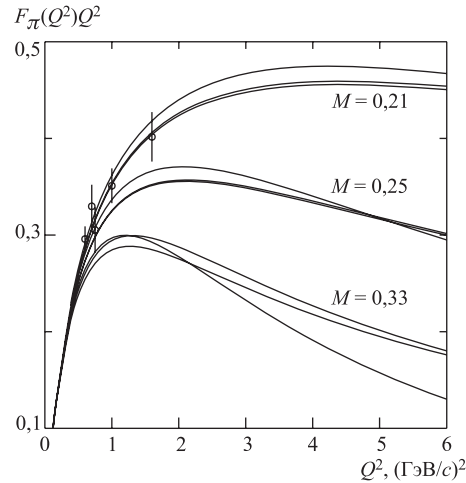


Рис. 2. Формфактор пиона в области экспериментов JLab [97]. Показано, что результаты расчетов в различных моделях взаимодействия конститuentных кварков в пионе при фиксированной массе ($M = 0,21, 0,25, 0,33$ ГэВ) мало отличаются друг от друга (группируются в «пучки»). Показано также изменение положения «пучка» в зависимости от массы конститuenta

В работе [56] был построен лоренц-ковариантный оператор слабого тока и описаны лептонные распады легких псевдоскалярных мезонов.

Работа [59] посвящена построению операторов токов полулептонных распадов псевдоскалярных мезонов и расчету формфакторов $F_{\pm}(t)$ процесса $K^- \rightarrow \pi^0 + \mu^- + \bar{\nu}_{\mu}$. Значения констант λ_+ и λ_0 для этого процесса хорошо согласуются с экспериментами [98].

В работе [62] получены модельно-независимые ограничения на наклон функции Исгура–Вайзе $\rho^2 = -\xi'_{IW}(1)$:

$$0,93 \leq \rho^2 \leq 1,38, \quad (141)$$

которые хорошо описывают экспериментальные данные, полученные в LEP [99, 100].

Электромагнитные свойства ρ -мезона и дейтрона рассчитывались в работах [66, 68] соответственно. Электромагнитные формфакторы для этих частиц рассчитывались по формулам

$$\begin{aligned} G_C(Q^2) &= \sum_{l,l'} \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi^l(s) g_{0C}^{ll'}(s, Q^2, s') \varphi^{l'}(s'), \\ G_Q(Q^2) &= \frac{2M_D^2}{Q^2} \sum_{l,l'} \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi^l(s) g_{0Q}^{ll'}(s, Q^2, s') \varphi^{l'}(s'), \\ G_M(Q^2) &= -M_D \sum_{l,l'} \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi^l(s) g_{0M}^{ll'}(s, Q^2, s') \varphi^{l'}(s'). \end{aligned} \quad (142)$$

Здесь G_C — зарядовый; G_Q — квадрупольный; G_M — магнитный формфакторы дейтрона; $g_{0i}^{ll'}(s, Q^2, s')$, $i = C, Q, M$, — зарядовый, квадрупольный и магнитный свободные двухчастичные формфакторы.

При расчетах свойств ρ -мезона в (142) мы полагали орбитальные моменты $l, l' = 0$, в случае дейтрона $l, l' = 0, 2$, $\varphi^l(s)$ — волновые функции в смысле ПИКМ. Соответствующие свободные двухчастичные формфакторы приведены в [66, 68]. В расчетах ρ -мезона обращает на себя внимание ненулевое значение квадрупольного момента, несмотря на равное нулю значение орбитального момента. Ненулевое значение этого момента является следствием релятивистского эффекта поворота спина.

В работе [68] вычислялась компонента $T_{20}(Q^2)$ тензора поляризации дейтрона в упругом ed -рассеянии. Результаты расчета приведены на рис. 3. Сравнение результатов расчетов с экспериментом позволяет выделить наиболее адекватную модель нуклон-нуклонного взаимодействия [101, 102].

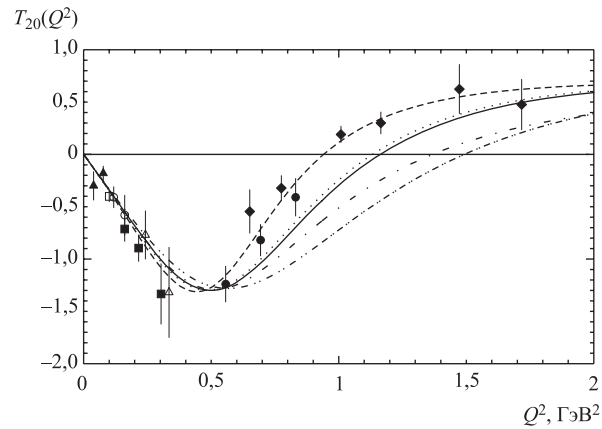


Рис. 3. Экспериментальные точки и результаты вычислений компоненты $T_{20}(Q^2)$ тензора поляризации дейтрона в упругом ed -рассеянии. Вычисления проводились с различными волновыми функциями. Наилучшее описание модели в [101, 102]

Таким образом, метод расчета электрослабых свойств составных систем, описанный в настоящем обзоре, является вполне работоспособным инструментом. В его рамках удалось получить целый ряд интересных результатов, и можно рассчитывать на его дальнейшее успешное использование при релятивистском описании составных систем.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 07-02-00962).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gross F.* Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory. N. Y.: John Wiley & Sons Inc., 1993. 629 p.
2. *Keister B. D.* // AIP Conf. Proc. Few-Body Problem in Phys. N. Y., 1994. V. 334. P. 164–176.
3. *Chung P. L. et al.* // Phys. Rev. C. 1988. V. 37. P. 2000–2015.
4. *Lev F. M.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1995. V. 237. P. 355–456.
5. *Gross F., Riska D. O.* // Phys. Rev. C. 1987. V. 36. P. 1928–1941.
6. *Ito H., Buck W. W., Gross F.* // Phys. Rev. C. 1991. V. 43. P. 2483–2498.
7. *Gross F., Henning H.* // Nucl. Phys. A. 1992. V. 537. P. 344–366.
8. *Burov V. V. et al.* // Europhys. Lett. 1993. V. 24. P. 443–448.
9. *Coester F., Riska D. O.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1994. V. 234. P. 141–161.
10. *Буров В. В., Достовалов В. Н., Суськов С. Э.* // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23. С. 721–766.

11. *Van Orden J. W., Devine N., Gross F.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4369–4372.
12. *Klink W. H.* // Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 3587–3604.
13. *Lev F. M., Pace E., Salmè G.* // Nucl. Phys. A. 1998. V. 641. P. 229–259.
14. *Lev F. M., Pace E., Salmè G.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 5250–5253.
15. *Carbonell J. et al.* // Phys. Rep. 1998. V. 300. P. 215–375.
16. *Allen T. W., Klink W. H.* // Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 3670–3673.
17. *Dirac P. A. M.* // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392–399.
18. *Leutwyler H., Stern J.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1978. V. 112. P. 94–164.
19. *Polyzou W. N.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1989. V. 193. P. 367–418.
20. *Keister B. D., Polyzou W.* // Adv. Nucl. Phys. 1991. V. 20. P. 225–479.
21. *Coester F.* // Prog. Part. Nucl. Phys. 1992. V. 29. P. 1–32.
22. *Lev F. M.* // Riv. Nuovo Cim. 1993. V. 16. P. 1.
23. *Garcon M., Van Orden J. W.* // Adv. Nucl. Phys. 2001. V. 26. P. 293–373.
24. *Gilman R., Gross F.* // J. Phys. G. 2002. V. 28. P. R37–R130.
25. *Lin T. et al.* www.iter.ru; nucl-th/0702005. 2007. 21 p.
26. *Терентьев М. В.* // ЯФ. 1976. V. 24. P. 207–213.
27. *Азнаурян И. Г., Вагдасарян А. С., Тер-Исаакян Н. Л.* // ЯФ. 1982. Т. 36. С. 1278–1289.
28. *Грач И. Л., Кондратьев Л. А.* // ЯФ. 1984. Т. 39. С. 316–327.
29. *Chung P. L., Coester F., Polyzou W. N.* // Phys. Lett. B. 1988. V. 205. P. 545–548.
30. *Карманов В. А.* // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 525–578.
31. *Fuda M. G.* // Ann. Phys. (N. Y.). 1990. V. 197. P. 265–299.
32. *Karmanov V. A., Smirnov A. V.* // Nucl. Phys. A. 1994. V. 575. P. 520–548.
33. *Keister B. D.* // Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 1500–1505.
34. *Cardarelli F. et al.* // Phys. Lett. B. 1995. V. 359. P. 1–7.
35. *Desplanques B., Karmanov V. A., Mathjiot J.-F.* // Nucl. Phys. A. 1995. V. 589. P. 697–712.
36. *Cardarelli F. et al.* // Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 6682–6685.
37. *Le Yaouanc A. et al.* // Phys. Lett. B. 1996. V. 365. P. 319–326.
38. *Melikhov D., Stech B.* // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 014006.
39. *Louise W., Dugne J.-J., Mathjiot J.-F.* // Phys. Lett. B. 2000. V. 472. P. 357–365.
40. *Андреев В. В.* // Весні НАН. Сер. фіз.-мат. наук. 2000. Т. 2. С. 93–98.
41. *Allen T. W., Klink W. H., Polyzou W. N.* // Phys. Rev. C. 2001. V. 63. P. 034002.
42. *Jun He, Julia-Diaz B., Yu-bing Dong* // Phys. Lett. B. 2004. V. 602. P. 212.
43. *de Melo J. P. B. C. et al.* // Few Body Syst. 2005. V. 36. P. 189–193.

44. *Desplanques B.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 2005. V. 20. P. 1601–1606.
45. *Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji* // Phys. Rev. D. 2007. V. 75. P. 034019.
46. *Girlanda L., Klink W. H., Viviani M.* // Phys. Rev. C. 2007. V. 76. P. 044002.
47. *Соколов С. Н., Шатный А. Н.* // ТМФ. 1978. Т. 37. С. 291–304.
48. *Melikhov D., Simula S.* // Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 094043.
49. *Simula S.* // Ibid. V. 66. P. 035201.
50. *Arrington J. et al.* Hall A 12 GeV Upgrade (Pre-Conceptual Design Report). Jefferson Lab., 2005.
51. *Чешиков А. А., Широков Ю. М.* // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 1982–1992.
52. *Krutov A. F., Troitsky V. E.* // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 1993. V. 19. P. L127–L131.
53. *Баландина Е. В., Крутов А. Ф., Троицкий В. Е.* // ТМФ. 1995. Т. 103. С. 41–53.
54. *Баландина Е. В., Троицкий В. Е., Крутов А. Ф.* // Вестн. МГУ. Сер. 3: Физика, астрономия. 1995. Т. 36. С. 16–20.
55. *Balandina E. V., Krutov A. F., Troitsky V. E.* // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 1996. V. 22. P. 1585–1592.
56. *Крутов А. Ф.* // ЯФ. 1997. Т. 60. С. 1442–1450.
57. *Крутов А. Ф., Троицкий В. Е.* // ТМФ. 1998. Т. 116. С. 215–224.
58. *Krutov A. F., Troitsky V. E.* // JHEP. 1999. V. 10. P. 028.
59. *Баландина Е. В. и др.* // ЯФ. 2000. Т. 63. С. 301–311.
60. *Крутов А. Ф.* // Теоретическая физика. 2001. Т. 2. С. 97–111.
61. *Krutov A. F., Troitsky V. E.* // Eur. Phys. J. C. 2001. V. 20. P. 71–76.
62. *Krutov A. F., Shro O. I., Troitsky V. E.* // Phys. Lett. B. 2001. V. 502. P. 140–146.
63. *Krutov A. F., Troitsky V. E.* // Phys. Rev. C. 2002. V. 65. P. 045501.
64. *Krutov A. F., Troitsky V. E.* // Eur. Phys. J. A. 2003. V. 16. P. 285–290.
65. *Krutov A. F., Troitsky V. E.* // Phys. Rev. C. 2003. V. 68. P. 018501.
66. *Крутов А. Ф., Троицкий В. Е.* // Вестн. Самарск. гос. ун-та. 2003. Второй спец. вып. С. 95–111.
67. *Крутов А. Ф., Троицкий В. Е.* // ТМФ. 2005. Т. 143. С. 258–277.
68. *Krutov A. F., Troitsky V. E.* // Phys. Rev. C. 2007. V. 75. P. 014001.
69. *Новожилов Ю. В.* Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972. 472 с.
70. *Newton T. D., Wigner E. P.* // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 400–406.
71. *Фуцич В. И., Никитин А. Г.* Симметрии уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1990. 400 с.
72. *Vakamjian B., Thomas L. H.* // Phys. Rev. 1953. V. 92. P. 1300–1310.
73. *Ito H., Buck W. W., Gross F.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 248. P. 28–33.

74. Широков Ю. М. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 474–477.
75. Кожевников В. П. и др. // ТМФ. 1972. Т. 10. С. 47–57.
76. Чешков А. А. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 144–155.
77. Зар З. Теория углового момента. М., 1993. 351 с.
78. Боголюбов Н. Н. и др. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987. 616 с.
79. Троицкий В. Е., Широков Ю. М. // ТМФ. 1969. Т. 1. С. 213–221.
80. Браун Дж. Е., Джексон А. Д. Нуклон-нуклонные взаимодействия. М.: Атомиздат, 1979. 247 с.
81. Giannini M. M., Kondratyuk L., Saracco P. // Few-Body Syst. 1994. V. 17. P. 21–61.
82. Бартон Г. Дисперсионные методы в теории поля. М.: Атомиздат, 1968. 391 с.
83. Shirokov Yu. M., Troitsky V. E. // Nucl. Phys. B. 1969. V. 10. P. 118–124.
84. Kukulin V. I. et al. // Phys. Lett. B. 1972. V. 39. P. 319–322.
85. Kirillov A. I., Shirokov Yu. M., Troitsky V. E. // Ibid. P. 249–250.
86. Кириллов А. И. и др. // ЭЧАЯ. 1975. Т. 6. С. 3–44.
87. Troitsky V. E. // Lecture Notes in Phys. 1994. V. 427. P. 50–66.
88. Музафаров В. М., Троицкий В. Е. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 78–81.
89. Anisovich V. V. et al. // Nucl. Phys. A. 1992. V. 544. P. 747–792.
90. Мелихов Д. И. // ЯФ. 1994. Т. 57. С. 2070–2078.
91. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
92. Широков Ю. М. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 748–760.
93. Баландина Е. В., Юдин Н. П. // Вестн. МГУ. 1995. Т. 36. С. 14–19.
94. Смирнов С. А., Трубников С. В. // ТМФ. 1977. Т. 30. С. 28–31.
95. Cardarelli F. et al. // Phys. Lett. B. 1995. V. 349. P. 393–399.
96. Дубовик В. М., Тосунян Л. А. // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. С. 1193–1228.
97. Volmer J. et al. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 1713–1716.
98. Артемов В. М. и др. Препринт ОИЯИ Р1-95-330. Дубна, 1995. 9 с.
99. Abbaneo D. et al. CERN Preprint CERN-EP-2000-016. 2000. 83 p.
100. Battaglia M. // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2001. V. 96. P. 443–452.
101. Музафаров В. М., Троицкий В. Е. // ЯФ. 1981. Т. 33. С. 1461–1472.
102. Krutov A. F., Troitsky V. E. // Phys. Rev. C. 2007. V. 76. P. 017001.