ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2012. Т. 43. ВЫП. 6

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И СРЕДЕ

И. А. Баланцев [1], *А. И. Студеникин* [1,2], *И. В. Токарев* [1]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
[2] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2012. Т. 43. ВЫП. 6

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И СРЕДЕ

И. А. Баланцев [1], *А. И. Студеникин* [1,2], *И. В. Токарев* [1]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
[2] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлен краткий обзор использования метода точных решений квантовых уравнений для описания движения заряженных частиц во внешних полях. Развивается метод квантования с помощью повышающих и понижающих операторов, который применяется для описания состояний ферми-частиц, движущихся в магнитном поле и плотном веществе. Впервые поставлена и решена задача о движении заряженного фермиона в среде и внешнем магнитном поле с учетом аномального магнитного момента частицы: получены точные решения для волновых функций и спектра энергий соответствующего модифицированного уравнения Дирака. Обсуждается квазиклассическая интерпретация полученных решений, и, в частности, найдена поправка к интенсивности синхротронного излучения, зависящая от плотности среды.

A brief review of method of exact solutions of quantum equations describing charged particles motion in external fields is presented. A quantization method using increasing and decreasing operators that is applied for description of states of fermions propagating in the magnetic field and matter is developed. The problem of charged fermion motion in matter and magnetic field with account for nonzero anomalous magnetic moment is first formulated and solved. Exact solutions for spectrum and wavefunctions for corresponding modified Dirac equation are obtained. Semiclassical interpretation of the obtained solutions is discussed. In particular an amendment to synchrotron radiation intensity that is dependent on matter density is obtained.

PACS: 03.65.Pm

ВВЕДЕНИЕ

Точные решения квантовых уравнений движения дают эффективный инструмент для исследования различных явлений взаимодействия частиц, имеющих место в физике высоких энергий. Они применяются для решения частных задач движения элементарных частиц в электромагнитных полях, создаваемых в земных установках, а также в астрофизике и космологии. Точные решения были впервые применены в квантовой электродинамике для развития квантовой теории синхротронного излучения, т. е. для изучения движения и излучения электрона в магнитном поле (см., например, [1]) и также для изучения электродинамики и слабых взаимодействий в различных конфигурациях внешних электромагнитных полей [2, 3]. Этот метод основан на представлении Фарри [4] в квантовой электродинамике (более детальное обсуждение этого вопроса см. в [5]), широко используемого для описания взаимодействия частиц при наличии внешнего электромагнитного поля. Недавно было показано, что метод точных решений может также применяться для задачи о движении нейтрино и электрона в присутствии плотной среды (см. [5]). Наиболее ярко эта возможность указана в [6, 7], где было получено и исследовано точное решение модифицированного уравнения Дирака для нейтрино, движущегося в среде. Соответствующее точное решение для электрона получено в [8]. В [9] и [10] впервые решена задача о распространении нейтрино в среде с градиентом скорости. Там же было рассмотрено распространение нейтрино во вращающейся среде с учетом эффекта ненулевой массы.

Для описания квантового состояния частицы в среде заданного состава нужно воспользоваться уравнением Дирака, в которое следует добавить слагаемые, учитывающие взаимодействие этой частицы с частицами материи. Конкретная структура этого взаимодействия зависит как от состава среды, так и от типа пробной частицы и может быть установлена исходя из модели, применяемой для описания частиц и их взаимодействий. Приведем в качестве примера модифицированное уравнение Дирака, описывающее состояния электрона в среде и магнитном поле, в случае, когда частица и ее взаимодействие со средой описываются Стандартной моделью [6, 12]:

$$\left\{\gamma_\mu(p^\mu + e_0 A^\mu) + \frac{1}{2}\gamma_\mu(1 - 4\sin^2\theta_W + \gamma^5) f^\mu - m\right\}\Psi(x) = 0. \qquad (1)$$

Это наиболее общая форма уравнения для волновой функции электрона, в которой эффективный потенциал $V_\mu = 1/2(1 - 4\sin^2\theta_W + \gamma_5) f_\mu$ включает взаимодействие электрона с частицами среды посредством как нейтральных, так и заряженных токов, и который может также учитывать эффекты движения и поляризации вещества. Следует заметить, что существуют и другие модификации уравнения Дирака. Некоторые из них были использованы в [11] для изучения дисперсионных соотношений для нейтрино, генерации массы нейтрино и осцилляций в веществе.

Как показано в [6, 7], квантовое уравнение (1) может быть обобщено на случай других элементарных частиц, движущихся в среде.

В [5–10] использован тот факт, что уравнение (1) и его обобщения можно эффективно применять для систематического рассмотрения различных точно решаемых задач на собственные значения и собственные функции для описания состояния различных частиц, движущихся в веществе. Найденные волновые функции должны использоваться для расчетов конкретных квантовых процессов с участием этих частиц.

Как показано в [12], многие из известных задач для модифицированного уравнения Дирака имеют ряд общих модельных свойств. Вследствие чего для их решения применяются схожие в своей основе алгоритмы. Это нашло отражение в попытке найти и обосновать некоторый абстрактный подход для решения задач с определенной постановкой, которая включает в себя все рассмотренные в [5–12] частные случаи. Ниже в данной работе мы обосновываем утверждения, выражающие теоретические основы этого подхода. При этом перечисленные частные задачи могут рассматриваться как его применения.

В настоящей работе развивается «метод точных решений» для задачи об электроне, распространяющемся в среде заданной плотности и сильном магнитном поле. Работа организована следующим образом. В разд. 1 мы кратко остановимся на описании истоков применяемой нами методологии и прокомментируем пример ее использования для решения задачи о движении электрона в магнитном поле, акцентируя внимание на наиболее существенных деталях. В последующих разделах проводится подробное рассмотрение задачи о движении электрона во внешнем магнитном поле и среде. В разд. 2 излагается решение задачи для электрона без учета аномального магнитного момента, а также некоторые связанные с этим физические следствия. В разд. 3 аномальный магнитный момент принят во внимание. В разд. 4 мы рассматриваем физические следствия из полученных в предыдущих разделах результатов и их интерпретацию, переходя к классическому описанию. В заключении мы приведем некоторые примеры использования полученных точных решений для задач астрофизики.

1. О СПОСОБЕ КВАНТОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Как известно, состояния электрона, движущегося в вакууме при наличии постоянного и однородного магнитного поля, могут быть найдены с помощью уравнения Дирака. Решение этой классической задачи хорошо изучено и представлено в литературе (см., например, [1]). И те место и роль, которые занимает это решение в совокупности теоретических построений, обусловлены помимо возможности непосредственного применения этого результата для решения других задач еще и тем, что это одна из совсем немногих проблем квантовой теории, которая решается точно. С учетом этого важного обстоятельства авторам кажется целесообразным проанализировать это решение, чтобы на простом примере выявить и показать некоторые методологические приемы, приведшие их к исследованию новых задач теории иными подходами и в конечном счете к написанию этой работы.

Рассмотрим движение электрона в постоянном однородном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$. Векторный потенциал этого поля выбираем в виде* $\mathbf{A} = \{0, Bx, 0\}$. Заряд электрона $e = -e_0$. Гамильтониан

*Такую калибровку векторного потенциала удобно использовать, если требуется построить решение задачи в декартовых координатах. Конечно, допустима любая другая калибровка. Например, $\mathbf{A} = \left\{-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0\right\}$ используется, когда требуется построить решение в цилиндрических координатах.

Дирака и уравнение Дирака в этом случае запишутся, соответственно, так (полагаем $c = \hbar = 1$):

$$H = (\boldsymbol{\alpha}, \hat{\mathbf{p}} + e_0\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})) + m\beta, \quad i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle. \tag{2}$$

Построим решение безотносительно к представлению. Из вида гамильтониана следует, что интегралами движения будут импульсы p_y и p_z и энергия p_0. Поэтому будем искать решение в виде

$$|\psi\rangle = \mathrm{e}^{-ip_0t}|p_y\rangle|p_z\rangle \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Очевидно, что $\hat{p}_y|\psi\rangle = p_2|\psi\rangle$, $\hat{p}_z|\psi\rangle = p_3|\psi\rangle$. Тогда, используя для матриц Дирака стандартное представление, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&(p_0 - m)|\psi_1\rangle + i(e_0B\hat{x} + i\hat{p}_x + p_2)|\psi_4\rangle - p_3|\psi_3\rangle = 0,\\
&(p_0 - m)|\psi_2\rangle - i(e_0B\hat{x} - i\hat{p}_x + p_2)|\psi_3\rangle + p_3|\psi_4\rangle = 0,\\
&(p_0 + m)|\psi_3\rangle + i(e_0B\hat{x} + i\hat{p}_x + p_2)|\psi_2\rangle - p_3|\psi_1\rangle = 0,\\
&(p_0 + m)|\psi_4\rangle - i(e_0B\hat{x} - i\hat{p}_x + p_2)|\psi_1\rangle + p_3|\psi_2\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\hat{x}' = \hat{x} + \frac{p_2}{e_0B}, \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{e_0B}}, \quad p_0 = \sqrt{e_0B}$$

и введем по аналогии с одномерным гармоническим осциллятором повышающий и понижающий операторы

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}'}{x_0} + i\frac{\hat{p}_x}{p_0}\right), \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}'}{x_0} - i\frac{\hat{p}_x}{p_0}\right). \tag{4}$$

В результате система перепишется в виде*

$$\begin{aligned}
(p_0 - m)|\psi_1\rangle + i\sqrt{2e_0B}\,\hat{a}|\psi_4\rangle - p_3|\psi_3\rangle = 0,\\
(p_0 - m)|\psi_2\rangle - i\sqrt{2e_0B}\,\hat{a}^+|\psi_3\rangle + p_3|\psi_4\rangle = 0,\\
(p_0 + m)|\psi_3\rangle + i\sqrt{2e_0B}\,\hat{a}|\psi_2\rangle - p_3|\psi_1\rangle = 0,\\
(p_0 + m)|\psi_4\rangle - i\sqrt{2e_0B}\,\hat{a}^+|\psi_1\rangle + p_3|\psi_2\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

---

*Так как в определении операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ произвели замену $\hat{x}$ на $\hat{x}'$, то при переходе к x-представлению вместо собственных векторов $|x\rangle$ оператора $\hat{x}$ следует использовать собственные векторы $|x + p_2x_0^2\rangle$ оператора $\hat{x}'$.

Будем искать решение этой системы как

$$\begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1|n_1\rangle' \\ iC_2|n_2\rangle' \\ C_3|n_3\rangle' \\ iC_4|n_4\rangle' \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $|n_i\rangle'$ — собственные векторы гармонического осциллятора со сдвинутым аргументом, $'\langle n_i|n_j\rangle' = \delta_{i,j}$ для $\forall\ i = 1, 2, 3, 4$. Подставим этот вид решения в систему (5):

$$\begin{gathered}
(p_0 - m)C_1|n_1\rangle' - C_4\sqrt{2e_0Bn_4}\,|n_4 - 1\rangle' - p_3C_3|n_3\rangle' = 0, \\
(p_0 - m)C_2|n_2\rangle' - C_3\sqrt{2e_0B(n_3 + 1)}\,|n_3 + 1\rangle' + p_3C_4|n_4\rangle' = 0, \\
(p_0 + m)C_3|n_3\rangle' - C_2\sqrt{2e_0Bn_2}\,|n_2 - 1\rangle' - p_3C_1|n_1\rangle' = 0, \\
(p_0 + m)C_4|n_4\rangle' - C_1\sqrt{2e_0B(n_1 + 1)}\,|n_1 + 1\rangle' + p_3C_2|n_2\rangle' = 0.
\end{gathered}$$

Отсюда видно, что следует положить $n_1 = n_3 = n - 1$, $n_2 = n_4 = n$. В этом случае векторы состояний всюду сокращаются и получается однородная система линейных уравнений для нахождения коэффициентов C_i:

$$\left\{ \begin{array}{l}
(p_0 - m)C_1 - C_4\sqrt{2e_0Bn} - p_3C_3 = 0, \\
(p_0 - m)C_2 - C_3\sqrt{2e_0Bn} + p_3C_4 = 0, \\
(p_0 + m)C_3 - C_2\sqrt{2e_0Bn} - p_3C_1 = 0, \\
(p_0 + m)C_4 - C_1\sqrt{2e_0Bn} + p_3C_2 = 0.
\end{array} \right. \tag{7}$$

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
p_0 - m & 0 & -p_3 & -\sqrt{2e_0Bn} \\
0 & p_0 - m & -\sqrt{2e_0Bn} & p_3 \\
-p_3 & -\sqrt{2e_0Bn} & p_0 + m & 0 \\
-\sqrt{2e_0Bn} & p_3 & 0 & p_0 + m
\end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель раскрывается элементарно. Достаточно заметить, что его равенство нулю означает существование нетривиального решения у соответствующей однородной системы линейных уравнений, которую можно записать так:

$$(p_0 - m)\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_3 & -\sqrt{2e_0Bn} \\ -\sqrt{2e_0Bn} & p_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix},$$

$$(p_0 + m)\begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_3 & -\sqrt{2e_0Bn} \\ -\sqrt{2e_0Bn} & p_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, например, для первого спинора получим уравнение

$$(p_0+m)(p_0-m)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p_3 & -\sqrt{2e_0Bn}\\ -\sqrt{2e_0Bn} & p_3\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}-p_3 & -\sqrt{2e_0Bn}\\ -\sqrt{2e_0Bn} & p_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix},$$

которое при перемножении матриц примет вид

$$(p_0^2-m^2)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_3^2+2e_0Bn & 0\\ 0 & p_3^2+2e_0Bn\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}.$$

А тогда очевидно, чему равно p_0, при которых существуют нетривиальные решения — уровни Ландау:

$$p_0=\pm\sqrt{m^2+p_3^2+2e_0Bn},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Таким образом, на простом примере мы показали, как безотносительно к представлению с использованием лишь повышающих и понижающих операторов можно исследовать уравнение Дирака. В последующих разделах статьи этот подход будет применен для решения более сложных задач с получением новых результатов.

2. ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОНА В СРЕДЕ И МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Теперь, используя подход, связанный с применением повышающих и понижающих операторов, кратко рассмотрим ход решения одной конкретной задачи для упомянутого в предыдущем разделе модифицированного уравнения Дирака. Полное исследование этой задачи читатель может найти в [12].

Мы рассматриваем электрон, распространяющийся в неподвижной намагниченной среде, состоящей из нейтронов, причем магнитное поле постоянное и однородное, так что для электромагнитного поля и эффективного потенциала вещества получаем выражения

$$A^\mu=(0,\mathbf{A})=(0,0,xB,0),\quad f^\mu=-Gn(1,0,0,0), \tag{8}$$

где $G=G_F/\sqrt{2}$, n — концентрация вещества. Это может быть принято как первый подход к моделированию электрона, распространяющегося внутри нейтронной звезды. Для определенности мы здесь ограничимся случаем электрона, тогда как обобщение на другие заряженные частицы производится тривиально.

Перепишем уравнение (1) с учетом (8) в гамильтоновой форме

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle, \quad \hat{H} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{p}} + e_0\mathbf{A}) + m\gamma^0 + \frac{1}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W + \gamma^5)Gn. \tag{9}$$

Как и выше, строим решение безотносительно к представлению. Интегралами движения являются импульсы p_2, p_3 и энергия p_0. Поэтому будем искать решение в виде (3). Очевидно, что $\hat{p}_y|\psi\rangle = p_2|\psi\rangle$, $\hat{p}_z|\psi\rangle = p_3|\psi\rangle$. Тогда, используя для матриц Дирака стандартное представление и вводя повышающие и понижающие операторы по формулам (4), получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} m + \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) & & p_3 - \frac{Gn}{2} & -i\sqrt{2e_0B}\hat{a} \\ & & i\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & -p_3 - \frac{Gn}{2} \\ p_3 - \frac{Gn}{2} & -i\sqrt{2e_0B}\hat{a} & -m + \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) & \\ i\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & -p_3 - \frac{Gn}{2} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix} = p_0 \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В этом месте, перед тем как идти дальше, сделаем небольшое отступление от обозначенного способа вычислений и покажем, как можно легко вычислить спектр частицы. После этого вернемся к решению этой системы и найдем вектор состояния.

Как нетрудно проверить непосредственным вычислением, оператор продольной поляризации $\hat{T}^0 = \frac{1}{m}\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e_0\mathbf{A})$ [1], где $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}' & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}' \end{pmatrix}$ — матрицы Дирака, коммутирует с гамильтонианом (9). В этом легко убедиться, если записать $\hat{T}^0$ в матричной форме, используя операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$:

$$\hat{T}^0 = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} p_3 & -i\sqrt{2e_0B}\hat{a} & 0 & 0 \\ i\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & -p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & -i\sqrt{2e_0B}\hat{a} \\ 0 & 0 & i\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & -p_3 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Отсюда понятно (более подробно см. [12]), что действие гамильтонина (9) на его собственные векторы сводится к действию на них оператора

$$\begin{pmatrix} m + \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) & mT^0 - \frac{Gn}{2} \\ mT^0 - \frac{Gn}{2} & -m + \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

а спектр задачи образуют собственные значения матрицы (12). Элементарные вычисления дают

$$p_0 = \frac{Gn}{2} - 2Gn\sin^2\theta_W + \varepsilon\sqrt{\left(mT^0 - \frac{Gn}{2}\right)^2 + m^2}, \tag{13}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ — «знак» энергии. Таким образом, найдено точное выражение для спектра.

2.1. Особенности спектра энергии. Важно заметить особенности энергетического спектра электрона в намагниченной среде, следующие из (13). В частности, известно, что спектр электрона в магнитном поле вырожден по спиновому квантовому числу (каждому уровню Ландау в магнитном поле соответствуют две ориентации спина). Наличие материи (любой сколь угодно малой ненулевой плотности $n \neq 0$) устраняет это вырождение. Это связано с нарушением четности в слабых взаимодействиях. Оценим разность энергий спиновых состояний, соответствующих одному энергетическому квантовому числу. Асимптотическое представление спектра (13) при низких энергиях электрона ($p \ll m$) имеет вид (положим $\varepsilon = 1$)

$$p_0 = \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) + \tilde{m} + \frac{p^2}{2\tilde{m}} - s\frac{Gn}{2\tilde{m}}p + \mathcal{O}\left(\frac{p^4}{\tilde{m}^3}, \frac{Gnp^3}{\tilde{m}^3}, \frac{(Gn)^2p^2}{\tilde{m}^3}\right), \tag{14}$$

где $\tilde{m} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{Gn}{2}\right)^2}$, $p = \sqrt{p_3^2 + 2e_0BN}$. Тогда расщепление по s для фиксированного N составит величину

$$\Delta p_0 = \frac{Gn}{\tilde{m}}p \sim \sqrt{N}. \tag{15}$$

Расщепление растет при росте N. Найдем условие, при котором энергетические уровни перекрываются, т. е.

$$p_0(s = +1, N + 1) \leqslant p_0(s = -1, N), \tag{16}$$

откуда

$$\frac{2e_0B}{Gn} \leqslant \sqrt{p_3^2 + 2e_0BN} + \sqrt{p_3^2 + 2e_0B(N + 1)}. \tag{17}$$

Полагая $p_3 = 0$, приходим к следующему условию*:

$$N \geqslant \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2e_0B}}{Gn}\right)^2. \tag{18}$$

---

*При этом считается, что $N \geqslant 1$ и принято во внимание неравенство $\sqrt{N+1} \leqslant \sqrt{2N}$.

Другим непосредственным следствием зависимости энергетического спектра от ориентации спина является изменение структуры критического поля электрона. Исследуем этот вопрос более подробно. Предположим, что электрон рождается в результате реакции β-распада $n \to p + e + \tilde{\nu}_e$. Обозначим $\Delta = m_n - m_p$. Массой антинейтрино пренебрегаем. Тогда условие для нахождения критического поля (т. е. максимального значения поля, при котором возможно рождение электрона не на нулевом уровне) представится в следующей форме:

$$\Delta \geqslant \sqrt{\left(s\sqrt{2e_0 B} - \frac{Gn}{2}\right)^2 + m^2}, \tag{19}$$

которое мы перепишем как

$$\Delta^2 - m^2 \geqslant \left(s\sqrt{2e_0 B} - \frac{Gn}{2}\right)^2. \tag{20}$$

Исследуем случай $s = 1$, при котором

$$\Delta^2 - m^2 \geqslant \left(\sqrt{2e_0 B} - \frac{Gn}{2}\right)^2. \tag{21}$$

Если $\dfrac{Gn}{2} > \sqrt{\Delta^2 - m^2}$, то рождение электрона не на нулевом уровне возможно в полях

$$\frac{1}{2e_0}\left(\frac{Gn}{2} - \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2 < B < \frac{1}{2e_0}\left(\frac{Gn}{2} + \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2. \tag{22}$$

Крайние значения этого диапазона можно назвать критическими для этого случая. Отметим, что в этом случае рождение частиц в полях вне этого диапазона невозможно (в частности, на основном уровне). Поэтому сам диапазон можно назвать критическим. Чем плотнее среда, тем он больше. Таким образом, для любого значения плотности всегда найдется диапазон значений магнитного поля, в котором рождение частиц возможно для любого заданного $N \geqslant 1$.

Однако, если фиксированы поле и плотность, то не всегда найдется хотя бы один уровень N, на котором возможно рождение частиц.

Продемонстрируем эти выводы на нескольких примерах. Диапазон для значений магнитного поля, при которых электрон рождается на втором энергетическом уровне, имеет вид

$$\frac{1}{4e_0}\left(\frac{Gn}{2} - \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2 < B < \frac{1}{4e_0}\left(\frac{Gn}{2} + \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2. \tag{23}$$

При относительно низких значениях плотности среды этот диапазон перекрывается вышенаписанным для $N = 1$. Однако, как нетрудно вычислить, при $Gn \geqslant \frac{10}{3}\sqrt{\Delta^2 - m^2}$ эти диапазоны перекрываться не будут. Значит, при этих условиях в полях

$$\frac{1}{4e_0}\left(\frac{Gn}{2} + \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2 < B < \frac{1}{2e_0}\left(\frac{Gn}{2} - \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2 \tag{24}$$

частицы рождаться не будут ни на каких уровнях. Отметим, что для того чтобы не перекрывались второй и третий диапазоны, плотность должна быть на порядок выше.

Если $\frac{Gn}{2} < \sqrt{\Delta^2 - m^2}$, то критическое поле равно

$$B_c = \frac{1}{2e_0}\left(\frac{Gn}{2} + \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2. \tag{25}$$

В этом случае наличие среды усиливает действие магнитного поля.

Исследуем случай $s = -1$, при котором

$$\Delta^2 - m^2 \geqslant \left(\sqrt{2e_0 B} + \frac{Gn}{2}\right)^2. \tag{26}$$

Если $\frac{Gn}{2} > \sqrt{\Delta^2 - m^2}$, то процесс закрыт. В этом случае все рождающиеся электроны правополяризованы.

Если $\frac{Gn}{2} < \sqrt{\Delta^2 - m^2}$, то критическое поле равно

$$B_c = \frac{1}{2e_0}\left(\sqrt{\Delta^2 - m^2} - \frac{Gn}{2}\right)^2. \tag{27}$$

Это позволяет утверждать, что при полях из диапазона

$$\frac{1}{2e_0}\left(\sqrt{\Delta^2 - m^2} - \frac{Gn}{2}\right)^2 < B < \frac{1}{2e_0}\left(\sqrt{\Delta^2 - m^2} + \frac{Gn}{2}\right)^2 \tag{28}$$

все частицы, рожденные не на нулевом уровне, будут правополяризованы. Соберем все рассмотренные частные случаи в одну общую таблицу.

Наконец, подчеркнем одно важное соотношение между p_0 и T_0, которое немедленно следует из вида спектра (13):

$$\left(p_0 - \frac{Gn}{2} + 2Gn\sin^2\theta_W\right)^2 = \left(mT^0 - \frac{Gn}{2}\right)^2 + m^2, \tag{29}$$

Критические поля

Случай	$s = 1$	$s = -1$
$\frac{Gn}{2} < \sqrt{\Delta^2 - m^2}$	$B_c = \frac{1}{2e_0}\left(\frac{Gn}{2} + \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2$	$B_c = \frac{1}{2e_0}\left(\sqrt{\Delta^2 - m^2} - \frac{Gn}{2}\right)^2$
$\frac{Gn}{2} > \sqrt{\Delta^2 - m^2}$	$B_{\min} = \frac{1}{2e_0}\left(\frac{Gn}{2} - \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2$, $B_{\max} = \frac{1}{2e_0}\left(\frac{Gn}{2} + \sqrt{\Delta^2 - m^2}\right)^2$	—

где T^0 — одно (любое фиксированное) из собственных значений оператора спина $\hat{T}^0$. Это соотношение, как легко видеть, при исчезающе малой плотности $\left(\text{т.е. при } \frac{Gn}{m} \ll 1\right)$ переходит в известное соотношение Эйнштейна $p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ и при конечной величине плотности среды является его обобщением в рамках принятых модельных допущений. Мы используем это соотношение в дальнейших вычислениях.

2.2. Определение спиновых коэффициентов. Теперь вернемся к решению системы (10). Решение этой системы, как и той, что получена в разд. 1, будем искать в виде (6). Рассуждая таким способом, приходим к системе

$$\begin{cases} \left(m + \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) - p_0\right) C_1 + \sqrt{2e_0 Bn}\, C_4 + \left(p_3 - \frac{Gn}{2}\right) C_3 = 0, \\ \left(m + \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) - p_0\right) C_2 + \sqrt{2e_0 Bn}\, C_3 - \left(p_3 + \frac{Gn}{2}\right) C_4 = 0, \\ \left(-m + \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) - p_0\right) C_3 + \sqrt{2e_0 Bn}\, C_2 + \left(p_3 - \frac{Gn}{2}\right) C_1 = 0, \\ \left(-m + \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) - p_0\right) C_4 + \sqrt{2e_0 Bn}\, C_1 - \left(p_3 + \frac{Gn}{2}\right) C_2 = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Здесь, конечно, можно было выписать определитель этой системы, приравнять его нулю и получить спектр*. Это несложно сделать, и мы не будем на этом останавливаться. Ответ нам уже известен.

*Конечно, для того чтобы сравнить спектр, получаемый таким способом, с (13), необходимо еще попутно вычислить спектр спинового оператора, который оказывается состоящим из двух значений $T^0 = s|T^0|$, см. подробнее [12].

Таким образом, осталось лишь вычислить коэффициенты C_i. Вернемся к системе уравнений (10). Учитывая, что действия гамильтониана на его собственный вектор эквивалентны действию матрицы (12), первое уравнение можно записать в виде

$$\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2} - m\right) C_1 = \left(mT^0 - \frac{Gn}{2}\right) C_3, \tag{31}$$

где

$$\tilde{p}_0 = p_0 + 2Gn \sin^2 \theta_W. \tag{32}$$

Введем величину $\eta = \operatorname{sgn}\left(mT^0 - \dfrac{Gn}{2}\right)$ и выполним цепочку преобразований

$$\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2} - m\right) C_1 = \eta \sqrt{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)^2 - m^2}\, C_3, \tag{33}$$

$$\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\left(1 - \frac{m}{\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}}\right) C_1 = \eta \left|\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right| \sqrt{1 - \frac{m^2}{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)^2}}\, C_3, \tag{34}$$

$$\varepsilon \sqrt{1 - \frac{m}{\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}}}\, C_1 = \eta \sqrt{1 + \frac{m}{\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}}}\, C_3. \tag{35}$$

Следовательно, мы получим

$$C_1 = \eta \sqrt{1 + \frac{m}{\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}}}\, A, \quad C_3 = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{m}{\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}}}\, A. \tag{36}$$

Аналогичным путем найдем соответствующие выражения для C_2 и C_4:

$$C_2 = \eta \sqrt{1 + \frac{m}{\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}}}\, B, \quad C_4 = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{m}{\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}}}\, B, \tag{37}$$

где A и B — новые константы. Получим соотношение между ними. Используя уравнения

$$\left(p_3 - mT^0\right) C_{1,3} + \sqrt{2e_0 B(l+s)}\, C_{2,4} = 0, \tag{38}$$

аналогичным путем мы получим

$$A = \sqrt{1 + \frac{p_3}{mT^0}}\, C, \quad B = s\sqrt{1 - \frac{p_3}{mT^0}}\, C \tag{39}$$

с единственным коэффициентом C, который должен быть определен из условия нормировки $C_1^2+C_2^2+C_3^2+C_4^2=1$. Именно, $C=1/2$. Таким образом, полный вектор состояния имеет вид

$$|\Psi\rangle = \mathrm{e}^{-ip_0t}|p_2\rangle|p_3\rangle \begin{pmatrix} C_1|n-1\rangle' \\ iC_2|n\rangle' \\ C_3|n-1\rangle' \\ iC_4|n\rangle' \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где

$$C_1 = \frac{\eta}{2}\sqrt{1+\frac{m}{\tilde{p}_0-\dfrac{Gn}{2}}}\sqrt{1+\frac{p_3}{mT^0}}, \quad C_2 = \frac{s\eta}{2}\sqrt{1+\frac{m}{\tilde{p}_0-\dfrac{Gn}{2}}}\sqrt{1-\frac{p_3}{mT^0}}, \tag{41}$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1-\frac{m}{\tilde{p}_0-\dfrac{Gn}{2}}}\sqrt{1+\frac{p_3}{mT^0}}, \quad C_4 = \frac{s\varepsilon}{2}\sqrt{1-\frac{m}{\tilde{p}_0-\dfrac{Gn}{2}}}\sqrt{1-\frac{p_3}{mT^0}}. \tag{42}$$

Формулы (40)–(42) представляют собой точное решение задачи (9), которая описывает квантовые состояния электрона в среде и магнитном поле. Как и в вакуумном случае, частица в нулевом состоянии левополяризована. Правополяризованного нулевого состояния не существует. Заметим, что в случае $n=0$ эти формулы сводятся к известному решению задачи для электрона в постоянном магнитном поле (см. подробнее [1]), рассмотренному в разд. 1.

3. ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОНА В СРЕДЕ И МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ АНОМАЛЬНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА

Рассмотрим электрон, обладающий аномальным магнитным моментом, распространяющийся в неподвижной намагниченной среде, состоящей из нейтронов, причем магнитное поле постоянное и однородное. Это также может быть принято как подход к моделированию электрона, распространяющегося внутри нейтронной звезды. Здесь мы ограничимся решением задачи для электрона, тогда как обобщение на другие заряженные частицы производится тривиально. Наш подход, как и прежде, будет предполагать использование повышающих и понижающих операторов. Модифицированное уравнение Дирака для волновой функции электрона с учетом аномального магнитного момента, точно учитывающее взаимодействие частицы с веществом при наличии магнитного поля, выглядит так:

$$\left\{\gamma_\mu(p^\mu + e_0 A^\mu) + \frac{1}{2}\gamma_\mu(1 - 4\sin^2\theta_W + \gamma^5)f^\mu - \frac{i}{2}\mu\sigma_{nm}F^{nm} - m\right\}|\Psi\rangle = 0, \tag{43}$$

и отличается от рассмотренного ранее уравнения (1) слагаемым, описывающим взаимодействие аномального магнитного момента с магнитным полем.

Для наглядности ограничимся частным случаем постоянного магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ и неподвижной однородной среды, так что для электромагнитного поля и эффективного потенциала вещества используем выражения (8). Таким образом, в гамильтоновой форме уравнение (43) примет вид

$$\begin{gathered} i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle, \\ \hat{H} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{p}} + e_0\mathbf{A}) + m\gamma^0 + \mu B\gamma^0\sigma_3 + \frac{1}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W + \gamma^5)Gn. \end{gathered} \tag{44}$$

Как и в предыдущих разделах, строим решение безотносительно к представлению. Интегралами движения являются импульсы p_2, p_3 и энергия p_0. Поэтому будем искать решение в виде (3). Очевидно, что $\hat{p}_y|\psi\rangle = p_2|\psi\rangle$, $\hat{p}_z|\psi\rangle = p_3|\psi\rangle$. Тогда, используя для матриц Дирака стандартное представление и вводя повышающие и понижающие операторы по формулам (4), получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} m + \mu B & 0 & p_3 - \dfrac{Gn}{2} & -i\sqrt{2e_0B}\hat{a} \\ 0 & m - \mu B & i\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & -p_3 - \dfrac{Gn}{2} \\ p_3 - \dfrac{Gn}{2} & -i\sqrt{2e_0B}\hat{a} & -m - \mu B & 0 \\ i\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & -p_3 - \dfrac{Gn}{2} & 0 & -m + \mu B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix} = \left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right) \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ |\psi_3\rangle \\ |\psi_4\rangle \end{pmatrix}, \tag{45}$$

где $\tilde{p}_0$ определено формулой (32). Нетрудно заметить, что в правой части этой системы стоит гамильтониан без аддитивного слагаемого. Теперь можно переходить к вычислению спектра частицы.

Введем спиновый оператор

$$\hat{T} = \frac{Gn}{2}\frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}}{m} - \mu B\left(\sigma_3 + \rho_2\frac{[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{P}]_3}{m}\right). \tag{46}$$

Полезно представить его в виде матрицы

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} - \mu B & -\frac{i}{m}\frac{Gn}{2}\sqrt{2e_0B}\hat{a} & 0 & \frac{i}{m}\mu B\sqrt{2e_0B}\hat{a} \\ \frac{i}{m}\frac{Gn}{2}\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & -\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} + \mu B & \frac{i}{m}\mu B\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & 0 \\ 0 & -\frac{i}{m}\mu B\sqrt{2e_0B}\hat{a} & \frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} - \mu B & -\frac{i}{m}\frac{Gn}{2}\sqrt{2e_0B}\hat{a} \\ -\frac{i}{m}\mu B\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & 0 & \frac{i}{m}\frac{Gn}{2}\sqrt{2e_0B}\hat{a}^+ & -\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m}\mu B \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Заметим, что этот оператор коммутирует с гамильтонианом (44). Поэтому операторы (44) и (46) имеют одинаковый набор собственных векторов и собственные значения спинового оператора являются интегралами движения.

Нетрудно установить прямым вычислением, что имеет место соотношение

$$\left(\hat{H} - \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W)\right)^2 = m^2 + (\mu B)^2 + (p_3)^2 + \left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + \tag{48}$$

$$+ \begin{pmatrix} 2e_0B\hat{a}\hat{a}^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2e_0B\hat{a}^+\hat{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_0B\hat{a}\hat{a}^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2e_0B\hat{a}^+\hat{a} \end{pmatrix} - 2m\hat{T}. \tag{49}$$

Учитывая, что решение задачи можно искать в виде (6), находим спектр

$$p_0 = \frac{Gn}{2} - 2Gn\sin^2\theta_W + \\ + \varepsilon\sqrt{m^2 + (\mu B)^2 + (p_3)^2 + \left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + 2e_0BN - 2mT}, \tag{50}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ — «знак» энергии; $T = s|T|$ — собственные значения оператора спина (47),

$$T = s\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} - \mu B\right)^2 + \frac{2e_0BN}{m^2}\left(\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2\right)}. \tag{51}$$

Таким образом, найдено точное выражение для спектра. Заметим, что традиционно применяемый в подобных задачах способ вычисления спектра путем приравнивания нулю некоторого определителя (см. разд. 1) с дальнейшим решением алгебраического уравнения четвертого порядка приводит к тому же результату, но сопровождается гораздо большим объемом выкладок и трудностями в физической интерпретации получаемых ответов. Использованный здесь подход свободен от этих недостатков.

3.1. Особенности энергетического спектра. Здесь, как и в рассмотренном в предыдущем разделе случае, важно заметить особенности энергетического спектра заряженной частицы, обладающей аномальным магнитным моментом, в намагниченной среде, следующие из (50). Отметим, что в спектре (50), как и в (13), отсутствует вырождение по спиновому квантовому числу. Как говорилось выше, это связано с нарушением четности в слабых взаимодействиях. Оценим разность энергий двух спиновых состояний, соответствующих одному энергетическому квантовому числу. Асимптотическое представление спектра (50) при низких энергиях электрона ($p \ll m$) имеет вид (положим $\varepsilon = 1$)

$$p_0 = \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) + \tilde{m} + \frac{p^2}{2\tilde{m}} - \\ - s\frac{Gn}{2\tilde{m}}p\left(1 - \frac{mp_3\Delta}{p^2} + \frac{(m^2 + 2e_0BN)\Delta^2}{2p^2}\right) + \ldots, \quad (52)$$

где $\tilde{m} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}$, $p = \sqrt{p_3^2 + 2e_0BN}$, $\Delta = \frac{2\mu B}{Gn}$. Тогда расщепление по s для фиксированного N составит величину

$$\Delta p_0 = \frac{Gn}{\tilde{m}}p\left(1 - \frac{mp_3\Delta}{p^2} + \frac{(m^2 + 2e_0BN)\Delta^2}{2p^2}\right) \sim \sqrt{N}. \quad (53)$$

Если $p_3 = 0$, то определяющей поправкой к (15) является фактор, пропорциональный Δ^2. Расщепление растет при росте N. Найдем условие, при котором энергетические уровни перекрываются, т. е.

$$p_0(s = 1, N + 1) \leqslant p_0(s = -1, N), \quad (54)$$

откуда, полагая $p_3 = 0$,

$$e_0B \leqslant 3\sqrt{(\mu Bm)^2 + 2e_0BN\left(\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2\right)}. \quad (55)$$

Приходим к следующему условию*:

$$N \geqslant \frac{\frac{1}{18}e_0B - \frac{(\mu Bm)^2}{2e_0B}}{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}. \quad (56)$$

*При этом считается, что $N \geqslant 1$ и принято во внимание неравенство $\sqrt{N+1} \leqslant \sqrt{2N}$.

Видно, что влияние магнитного момента приводит к уменьшению номера уровня энергии, с которого начинается перекрытие.

Отметим, что исследование критических полей в этом случае выполняется нетривиально и поэтому опускается.

Наконец, подчеркнем одно важное соотношение между p_0 и T_0, которое немедленно следует из вида спектра (50):

$$\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2\right) = \\ = \left(m\frac{Gn}{2} + \mu B p_3\right)^2 + \left(\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2 - mT\right)^2, \quad (57)$$

где T^0 — одно (любое фиксированное) из собственных значений оператора спина $\hat{T}^0$. Ниже мы получим это соотношение конструктивно. Оно, как легко видеть, при исчезающе малой плотности $\left(\text{т. е. при } \dfrac{Gn}{m} \ll 1\right)$ и равном нулю магнитном моменте переходит в известное соотношение Эйнштейна $p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ и при конечной величине плотности среды и аномального магнитного момента является его обобщением в рамках принятых модельных допущений. Мы используем это соотношение в дальнейших вычислениях.

3.2. Вычисление спиновых коэффициентов. Теперь вернемся к решению системы (45). Решение этой системы, как и той, что получена в разд. 1, будем искать в виде (6). Рассуждая таким способом, приходим к двум системам

$$\begin{pmatrix} p_3 - \dfrac{Gn}{2} & -m - \mu B - \tilde{p}_0 + \dfrac{Gn}{2} \\ m + \mu B - \tilde{p}_0 + \dfrac{Gn}{2} & p_3 - \dfrac{Gn}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = -\sqrt{2e_0BN} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

$$\begin{pmatrix} p_3 + \dfrac{Gn}{2} & m - \mu B + \tilde{p}_0 + \dfrac{Gn}{2} \\ -m + \mu B + \tilde{p}_0 + \dfrac{Gn}{2} & p_3 + \dfrac{Gn}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \sqrt{2e_0BN} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Таким образом, осталось лишь вычислить коэффициенты C_i. Для того чтобы упростить эти вычисления, проанализируем систему, возникающую при нахождении собственных значений оператора спина, именно

$$\frac{\sqrt{2e_0BN}}{m}\begin{pmatrix}\dfrac{Gn}{2} & -\mu B\\ \mu B & \dfrac{Gn}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_2\\C_4\end{pmatrix}=\left(T-\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m}+\mu B\right)\begin{pmatrix}C_1\\C_3\end{pmatrix}. \tag{60}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{pmatrix}\dfrac{Gn}{2} & -\mu B\\ \mu B & \dfrac{Gn}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{Gn}{2} & \mu B\\ -\mu B & \dfrac{Gn}{2}\end{pmatrix}=\left(\frac{Gn}{2}\right)^2+(\mu B)^2, \tag{61}$$

$$\left(T+\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m}-\mu B\right)\left(T-\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m}+\mu B\right)=\frac{2e_0BN}{m^2}\left(\left(\frac{Gn}{2}\right)^2+(\mu B)^2\right), \tag{62}$$

домножим обе части (60) на $\sqrt{\left(\dfrac{Gn}{2}\right)^2+(\mu B)^2}$:

$$\left(T+\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m}-\mu B\right)^{1/2}\left(T-\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m}+\mu B\right)^{1/2}\begin{pmatrix}\dfrac{Gn}{2} & -\mu B\\ \mu B & \dfrac{Gn}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_2\\C_4\end{pmatrix}= \tag{63}$$

$$=\left(T-\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m}+\mu B\right)\begin{pmatrix}\dfrac{Gn}{2} & -\mu B\\ \mu B & \dfrac{Gn}{2}\end{pmatrix}^{1/2}\begin{pmatrix}\dfrac{Gn}{2} & \mu B\\ -\mu B & \dfrac{Gn}{2}\end{pmatrix}^{1/2}\begin{pmatrix}C_1\\C_3\end{pmatrix}. \tag{64}$$

Выполняя сокращение подобных множителей, получаем соотношение

$$\sqrt{1+\frac{\dfrac{Gn}{2}\dfrac{p_3}{m}-\mu B}{T}}\begin{pmatrix}\dfrac{Gn}{2} & -\mu B\\ \mu B & \dfrac{Gn}{2}\end{pmatrix}^{1/2}\begin{pmatrix}C_2\\C_4\end{pmatrix}= \tag{65}$$

$$=s\sqrt{1-\frac{\dfrac{Gn}{2}\dfrac{p_3}{m}-\mu B}{T}}\begin{pmatrix}\dfrac{Gn}{2} & \mu B\\ -\mu B & \dfrac{Gn}{2}\end{pmatrix}^{1/2}\begin{pmatrix}C_1\\C_3\end{pmatrix}, \tag{66}$$

где квадратный корень из матрицы равен

$$\begin{pmatrix} \frac{Gn}{2} & -\mu B \\ \mu B & \frac{Gn}{2} \end{pmatrix}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{Gn}{2} + \sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}} & -\frac{\mu B}{\sqrt{\frac{Gn}{2} + \sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}} \\ \frac{\mu B}{\sqrt{\frac{Gn}{2} + \sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}} & \sqrt{\frac{Gn}{2} + \sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

В результате получаем для спиновых коэффициентов

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = s\sqrt{1 - \frac{\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} - \mu B}{T}} \begin{pmatrix} \frac{Gn}{2} & \mu B \\ -\mu B & \frac{Gn}{2} \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \tag{68}$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \frac{\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} - \mu B}{T}} \begin{pmatrix} \frac{Gn}{2} & -\mu B \\ \mu B & \frac{Gn}{2} \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \tag{69}$$

где A и B — новые неизвестные константы.

Теперь вернемся к уравнению (58) и подставим в него полученные выражения:

$$\sqrt{1 + \frac{\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} - \mu B}{T}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} p_3 - \frac{Gn}{2} & -m - \mu B - \tilde{p}_0 + \frac{Gn}{2} \\ m + \mu B - \tilde{p}_0 + \frac{Gn}{2} & p_3 - \frac{Gn}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Gn}{2} & -\mu B \\ \mu B & \frac{Gn}{2} \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} =$$

$$= -s\sqrt{2e_0 BN}\sqrt{1 - \frac{\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} - \mu B}{T}} \begin{pmatrix} \frac{Gn}{2} & \mu B \\ -\mu B & \frac{Gn}{2} \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Учитывая сказанное выше, это выражение можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{Gn}{2} & -\mu B \\ \mu B & \frac{Gn}{2} \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} p_3 - \frac{Gn}{2} & -m - \mu B - \tilde{p}_0 + \frac{Gn}{2} \\ m + \mu B - \tilde{p}_0 + \frac{Gn}{2} & p_3 - \frac{Gn}{2} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{Gn}{2} & -\mu B \\ \mu B & \frac{Gn}{2} \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -mT \left(1 - \frac{\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} - \mu B}{T} \right) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (71)$$

После несложных преобразований получаем

$$\left(mT - \left(\frac{Gn}{2}\right)^2 - (\mu B)^2 \right) A -$$
$$- \left(m\frac{Gn}{2} + \left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} + \mu B p_3 \right) B = 0,$$

$$\left(m\frac{Gn}{2} - \left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} + \mu B p_3 \right) A +$$
$$+ \left(mT - \left(\frac{Gn}{2}\right)^2 - (\mu B)^2 \right) B = 0. \quad (72)$$

Из условия равенства нулю определителя этой матрицы (что является необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения) следует представленное выше без доказательства соотношение (57).

Теперь несложно найти соотношение между A и B. Запишем первое уравнение системы (72):

$$\left(mT - \left(\frac{Gn}{2}\right)^2 - (\mu B)^2 \right) A =$$
$$= \left(m\frac{Gn}{2} + \left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} + \mu B p_3 \right) B. \quad (73)$$

Введем величину $\eta = \operatorname{sgn}\left(mT - \left(\frac{Gn}{2}\right)^2 - (\mu B)^2\right)$ и преобразуем это выражение

$$\eta\sqrt{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} - m\frac{Gn}{2} - \mu B p_3} \times \\ \times \sqrt{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2} + m\frac{Gn}{2} + \mu B p_3}\, A = \\ = \left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}\left(1 + \frac{m\frac{Gn}{2} + \mu B p_3}{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}\right) B, \tag{74}$$

откуда следует, что

$$\eta\sqrt{1 - \frac{m\frac{Gn}{2} + \mu B p_3}{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}}\,A = \\ = \varepsilon\sqrt{1 + \frac{m\frac{Gn}{2} + \mu B p_3}{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}}\,B. \tag{75}$$

Окончательно получаем выражения для коэффициентов

$$A = \eta\sqrt{1 + \frac{m\frac{Gn}{2} + \mu B p_3}{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}}\,C, \\ B = \varepsilon\sqrt{1 - \frac{m\frac{Gn}{2} + \mu B p_3}{\left(\tilde{p}_0 - \frac{Gn}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2}}}\,C \tag{76}$$

с единственным коэффициентом C, который должен быть определен из условия нормировки $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 = 1$. Именно,

$$C = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\left(\frac{Gn}{2}\right)^2 + (\mu B)^2\right)^{1/4}}. \tag{77}$$

Таким образом, полный вектор состояния имеет вид

$$|\Psi\rangle = \mathrm{e}^{-ip_0 t}|p_2\rangle|p_3\rangle \begin{pmatrix} C_1|n-1\rangle' \\ iC_2|n\rangle' \\ C_3|n-1\rangle' \\ iC_4|n\rangle' \end{pmatrix}, \tag{78}$$

где спиновые коэффициенты выражаются формулами (68), (69) и (76).

Формула (78) представляет собой точное решение задачи (44), которая описывает квантовые состояния заряженной частицы, обладающей аномальным магнитным моментом, в среде и магнитном поле. Нулевое состояние частицы оказывается строго поляризованным. При $\frac{Gn}{2}\frac{p_3}{m} > \mu B$ это состояние оказывается левополяризованным, в противном случае — правополяризованным.

Следует также отметить, что данное решение можно использовать для описания состояния миллизаряженного нейтрино, обладающего аномальным магнитным моментом. Описание электромагнитных свойств нейтрино можно найти в [14–17].

Нетрудно видеть, что в случае $\mu = 0$ полученные выражения переходят в формулы (40)–(42), которые представляют собой точное решение задачи (9), описывающей квантовые состояния электрона в среде и магнитном поле без учета аномального магнитного момента. Заметим также, что в случае $\mu = 0$, $n = 0$ эти же выражения сводятся к известному решению задачи для электрона в постоянном магнитном поле (см. подробнее [1]), рассмотренному в разд. 1.

4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СПЕКТРА: ПЕРЕХОД К КЛАССИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ

Как было установлено выше, спектр электрона в среде из нейтронов и магнитном поле дается формулой (13), которую для наглядности перепишем в виде

$$\left(p^0 - \frac{Gn}{2} + 2Gn\sin^2\theta_W\right)^2 = \left(\sqrt{p_3^2 + 2e_0BN} - s\frac{Gn}{2}\right)^2 + m^2. \tag{79}$$

Интерпретировать это решение будет проще, если найти соответствующий его аналог в классической теории. Как известно, движение электрона в вакууме и магнитном поле описывается функцией Лагранжа

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + q(\mathbf{vA}). \tag{80}$$

Отталкиваясь от этой функции Лагранжа, нетрудно построить функцию Гамильтона

$$H = \sqrt{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + m^2}. \tag{81}$$

Сравнивая формулы (79) и (81), замечаем, как должна быть обобщена классическая функция Гамильтона (81) на тот случай, когда электрон помещен в среду из нейтронов:

$$H = \frac{Gn}{2}(1 - 4\sin^2\theta_W) + \sqrt{\left(|\mathbf{p} - q\mathbf{A}| - s\frac{Gn}{2}\right)^2 + m^2}. \tag{82}$$

В этой формуле спиновое квантовое число можно понимать как параметр, характеризующий поляризацию частицы. Исходя из этой функции Гамильтона найдем отвечающую ей функцию Лагранжа с помощью преобразования Лежандра

$$L = \mathbf{pv} - H. \tag{83}$$

Согласно уравнениям Гамильтона

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{|\mathbf{p} - q\mathbf{A}| - s\dfrac{Gn}{2}}{\sqrt{\left(|\mathbf{p} - q\mathbf{A}| - s\dfrac{Gn}{2}\right)^2 + m^2}} \frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{|\mathbf{p} - q\mathbf{A}|}. \tag{84}$$

Обращая эту формулу относительно $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$, находим

$$|\mathbf{p} - q\mathbf{A}| = s\frac{Gn}{2} + \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{85}$$

Так как согласно (84) $\mathbf{v} \upuparrows (\mathbf{p} - q\mathbf{A})$, то

$$\mathbf{p} - q\mathbf{A} = \left(s\frac{Gn}{2v} + \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}\right)\mathbf{v}. \tag{86}$$

Подставляя (86) в (83) и отбрасывая аддитивную постоянную, получаем функцию Лагранжа

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + q(\mathbf{vA}) + s\frac{Gn}{2}v. \tag{87}$$

Найдем уравнения Лагранжа и решим их. Дифференцируя эту функцию Лагранжа, получим уравнения движения

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{P}}} - q[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + s\frac{Gn}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{v}\right) = 0, \quad \boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{88}$$

Из уравнения (88) следует, что $(\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{v}) = 0$. В этом случае имеем цепочку связей

$$(\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{v}) = \frac{m\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{v}}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \dot{v} = \frac{\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}}{v} = 0. \tag{89}$$

Тогда обобщенная энергия

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \tag{90}$$

сохраняется, и уравнение (88) перепишем в виде

$$\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + s\frac{Gn}{2v}\right)\dot{\mathbf{v}} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \tag{91}$$

Пусть магнитное поле имеет структуру $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$. Принимая во внимание, что $v_z = \mathrm{const}$, выпишем оставшиеся два уравнения системы:

$$\left(\mathcal{E} + s\frac{Gn}{2v}\right)\dot{v}_x = qv_yH, \tag{92}$$

$$\left(\mathcal{E} + s\frac{Gn}{2v}\right)\dot{v}_y = -qv_xH. \tag{93}$$

Чтобы проинтегрировать эту систему, перейдем к комплексной записи. Домножим второе уравнение на мнимую единицу и сложим его с первым. Получим простейшее дифференциальное уравнение на величину $(v_x + iv_y)$. Интегрируя его и разделяя действительную и мнимую части, находим ответ:

$$v_x = v_0 \cos\left(\frac{qHt}{\mathcal{E} + s\dfrac{Gn}{2v}} + \alpha\right), \quad v_y = v_0 \sin\left(\frac{qHt}{\mathcal{E} + s\dfrac{Gn}{2v}} + \alpha\right). \tag{94}$$

Частица, как и в случае отсутствия среды, движется по окружности с постоянной скоростью. Частота вращения

$$\omega = \frac{qH}{\mathcal{E} + s\dfrac{Gn}{2v}} \tag{95}$$

зависит от поляризации частицы и плотности нейтронной среды. Видно, что для левополяризованных электронов $(s = -1)$ может иметь место резонанс, когда частота вращения резко возрастает при определенных условиях. Условие резонанса

$$\mathcal{E} - \frac{Gn}{2v} = 0 \tag{96}$$

можно также переписать в виде

$$\mathcal{P} - \frac{Gn}{2} = 0. \tag{97}$$

В квантовом описании это соответствует случаю, когда в формуле (79) собственное значение спинового оператора обращается в нуль.

Частота вращения электрона может быть представлена в виде

$$\omega = \frac{qvH}{\mathcal{P} + s\dfrac{Gn}{2}}. \tag{98}$$

Радиус окружности, по которой движется электрон, вычисляется так (считаем, что $v_3 = 0$):

$$\omega = \frac{qvH}{\mathcal{P} + s\dfrac{Gn}{2}} = \frac{v}{R} \Rightarrow R = \frac{\mathcal{P} + s\dfrac{Gn}{2}}{qH}. \tag{99}$$

Радиус окружности при резонансе стремится к нулю. Наконец, ускорение, развиваемое электроном, вычисляется по формуле

$$a = \omega v = \frac{qv^2H}{\mathcal{P} + s\dfrac{Gn}{2}}. \tag{100}$$

Интенсивность излучения при этом составляет

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3}\frac{a^2}{(1-v^2)^2} = \frac{2}{3}\frac{q^4H^2}{\left(\mathcal{P} + s\dfrac{Gn}{2}\right)^2}\frac{v^4}{(1-v^2)^2}. \tag{101}$$

Сравнивая с интенсивностью излучения в вакууме, находим

$$\frac{\dfrac{dE}{dt}}{\left.\dfrac{dE}{dt}\right|_{n=0}} = \frac{1}{\left(1 + s\dfrac{Gn}{2\mathcal{P}}\right)^2} = 1 - s\frac{Gn}{\mathcal{P}} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{Gn}{\mathcal{P}}\right)^2\right). \tag{102}$$

В условиях резонанса интенсивность резко возрастает, что может проявляться в виде вспышек при прохождении частицей среды с переменной плотностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы рассмотрели некоторые точные решения модифицированного уравнения Дирака, описывающего распространение электрона в однородной среде и сильном магнитном поле. Мы подчеркиваем, что этот подход также может быть обобщен на другие элементарные частицы (например, нейтрино), движущиеся в среде заданного состава и магнитном поле. Полученные решения для определенных случаев движения могут быть использованы как первые приближения в более сложных моделях. Найденные точные решения оказываются полезными при изучении процессов взаимодействия нейтрино [18–20] и других частиц в различных астрофизических и космологических условиях. Также их можно применять для изучения гамма-вспышек в процессе коллапса нейтронных звезд (предсказаны с использованием моделей GRBs [21]), в процессе поглощения нейтронной звезды черной дырой или при изучении других процессов, обсуждение которых можно найти в [22]. Поведение заряженных частиц в экстремально сильных полях [23] дает другие интересные приложения выполненным рассмотрениям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-02-01509-а и № 12-02-06833-моб_г), а также Министерства образования и науки РФ (госконтракт № 12.741.11.0180 и проекты № 2012-1.2.1-12-000-1012-1958 и № 2012-1.1-12-000-1011-6097).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соколов А. А., Тернов И. М.* Синхротронное излучение. М.: Наука, 1966.
2. *Ритус В. И.* Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем // Тр. ФИАН. 1979. Т. 111. С. 5.
3. *Никишов А. И.* Проблемы интенсивного внешнего поля в квантовой электродинамике // Тр. ФИАН. 1979. Т. 111. С. 152.
4. *Furry W.* // Phys. Rev. 1951. V. 81. P. 115.
5. *Studenikin A.* // Annales de la Fondation Louis de Broglie. 2006. V. 31. P. 289;
Studenikin A. // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. P. 164047;
Studenikin A. // J. Phys. A: Math. Theor. 2006. V. 39. P. 6769.
6. *Studenikin A., Ternov A.* // Phys. Lett. B. 2005. V. 608. P. 107; hep-ph/0410297, hep-ph/0410296;
Grigoriev A., Studenikin A., Ternov A. // Phys. Lett. B. 2005. V. 622. P. 199; hep-ph/0502231.
7. *Grigoriev A., Studenikin A., Ternov A.* // Grav. & Cosm. 2005. V. 11. P. 132;
Grigoriev A., Studenikin A., Ternov A. // Phys. At. Nucl. 2006. V. 69. P. 1940.
8. *Grigoriev A. et al.* // Rus. Phys. J. 2007. V. 50. P. 596;
Grigoriev A. et al. // Grav. & Cosm. 2008. V. 14. P. 248.

9. *Grigoriev A., Savochkin A., Studenikin A.* // Rus. Phys. J. 2007. V. 50. P. 845.
10. *Balantsev I., Popov Yu., Studenikin A.* // Nuovo Cim. C. 2009. V. 32. P. 53.
11. *Mannheim P.* // Phys. Rev. D. 1988. V. 37. P. 1935;
    Nötzold D., Raffelt G. // Nucl. Phys. B. 1988. V. 307. P. 924;
    Nieves J. // Phys. Rev. D. 1989. V. 40. P. 866;
    Chang L. N., Zia R. K. // Phys. Rev. D. 1988. V. 38. P. 1669;
    Pantaleone J. // Phys. Lett. B. 1991. V. 268. P. 227;
    Pantaleone J. // Phys. Rev. D. 1992. V. 46. P. 510;
    Kiers K., Weiss N. // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 5776;
    Kiers K., Tytgat M. // Phys. Rev. D. 1999. V. 57. P. 5970;
    Oraevsky V., Semikoz V., Smorodinsky Ya. // Phys. Lett. B. 1989. V. 277. P. 255;
    Haxton W., Zhang W.-M. // Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 2484;
    Loeb A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 115.
12. *Balantsev I., Popov Yu., Studenikin A.* // J. Phys. A. 2011. V. 44. P. 255301.
13. *Marciano W. J., Sanda A. I.* // Phys. Lett. B. 1977. V. 67. P. 303;
    Lee B. W., Shrock R. E. // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 1444;
    Fujikawa K., Shrock R. E. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 963.
14. *Giunti C., Studenikin A.* // Phys. At. Nucl. 2009. V. 72. P. 2089; hep-ph/0812.3646 preprint. 2008.
15. *Studenikin A.* // Nucl. Phys. B. (Proc. Suppl.). 2009. V. 188. P. 220.
16. *Raffelt G.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2856;
    Stars as Laboratories for Fundamental Physics / Ed. by P. Schellinger, G. Thomas and J. Tryneski. Chicago, USA: Univ. of Chicago Press, 1996;
    Raffelt G. // Phys. Rep. 1999. V. 320. P. 319;
    Haft M., Raffelt G., Wiess A. // Astrophys. J. 1994. V. 425. P. 222.
17. *Lim C., Marciano W.* // Phys. Rev. D. 1988. V. 37. P. 1368;
    Akhmedov E. // Phys. Lett. 1988. V. 213. P. 64.
18. *Lobanov A., Studenikin A.* // Phys. Lett. B. 2003. V. 564. P. 27; V. 601. P. 171;
    Dvornikov M., Grigoriev A., Studenikin A. // Intern. J. Mod. Phys. D. 2005. V. 14. P. 309.
19. *Lobanov A.* // Dokl. Phys. 2005. V. 50. P. 286; Phys. Lett. B. 2005. V. 619. P. 136.
20. *Grigoriev A., Studenikin A., Ternov A.* // Phys. At. Nucl. 2009. V. 72. V. 718.
21. *Zhang B., Meszaros P.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 2004. V. 19. P. 2385;
    Piran T. // Rev. Mod. Phys. 2004. V. 76. P. 1143.
22. *Colladay D., Kostelecky A.* // Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 116002;
    Coleman S., Glashow S. // Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 116008;
    Zhukovsky V., Lobanov A., Murchikova E. // Phys. Rev. D. 2006. V. 73. P. 065016.
23. *Balantsev I., Studenikin A.* // Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. Proc. of XXIV Intern. Conf. on Neutr. Phys. and Astrophys., Athens, June 14–19, 2010. Preprint hep-ph/1012.3653.