

## РАДИАЛЬНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ СИСТЕМ ИЗ ЛЕГКИХ КВАРКОВ

*O.A.Займидорога*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ   | 5  |
| ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССА   |    |
| ДИФРАКЦИОННОЙ ДИССОЦИАЦИИ  | 8  |
| Кинематика процессов дифракции   | 8  |
| Когерентность  | 10 |
| Правила отбора   | 13 |
| Селекция механизма обмена  | 14 |
| Возбуждение внутренней структуры   | 15 |
| Сходимость парциального разложения   |    |
| дифракционной амплитуды  | 17 |
| Экспериментальный фон исследований   | 19 |
| ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ  | 20 |
| Общие характеристики исследуемого процесса   | 22 |
| Анализ спинового содержания конечного состояния  | 23 |
| Метод парциально-волнового анализа   | 25 |
| Структура амплитуды распада  | 30 |
| Унитарность состояний  | 35 |
| Фит данных   | 38 |
| РЕЗУЛЬТАТЫ ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОГО АНАЛИЗА  | 40 |
| Резонансные свойства состояния   |    |
| $J^P LM\eta = 1^+ LO^+$ , $a_1(1260)$ -мезон   | 45 |
| Резонансные свойства состояния $J^P LM\eta = 0^- SO^+$ . $\pi(1300)$ - и $\pi(1770)$ -мезоны [1,2] | 49 |
| Определение параметров резонансов с помощью метода паде-аппроксимации                              | 51 |
| Состояние $J^P LM\eta = 2^- LO^+$ . $\pi_2(1600)$ -резонанс  | 55 |
| НЕРЕЗОНАНСНАЯ МОДЕЛЬ И ВОПРОСЫ   |    |
| МЕЗОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ   | 60 |
| Мезонная спектроскопия   | 65 |
| КОГЕРЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ  | 68 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ  | 69 |

УДК 539.126.4

## РАДИАЛЬНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ СИСТЕМ ИЗ ЛЕГКИХ КВАРКОВ

*O.A.Займидорога*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлены экспериментальные доказательства существования резонансных состояний систем из легких夸克ов, проявляющихся как резонансы с разной массой. Их характерным свойством является существование различных энергетических состояний для данного спина и четности. Такие резонансы в  $\pi\pi$ -системе, рожденные дифракционно, являются радиальными возбуждениями систем из легких夸克ов.

The experimental evidence of resonances, peculiar properties of which are the existence of various energy states for given spin-parity has been presented. These resonances in  $(\pi\pi)$ -system, diffractively produced, are mostly the radial-excited states of light quarks.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты, выполненные на ускорителе 70 ГэВ в Серпухове, привели к обнаружению радиальных дифракционно-возбужденных бозонных резонансов в  $\pi\pi$ - и в  $K\pi$ -системах. Впервые был экспериментально изучен спектр возбуждения кварковой структуры взаимодействующего мезона как по орбитальному, так и по радиальному квантовому числу в системе легких夸克ов [1—3].

Взаимодействия мезонов с ядрами при высоких энергиях с определенной вероятностью приводят к событиям такого типа, когда в результате дифракционной диссоциации падающего мезона на ядре как целом рождается тяжелая бозонная система, а ядро остается в основном состоянии. Такое изменение состояния характеризуется тем, что бозонная система имеет непрерывный спектр состояний, насыщаемый как образованием резонансов, так и продуктами диссоциации в нерезонансную систему.

Открытие дифракционных процессов в неупругих сильных взаимодействиях элементарных частиц и эффекта когерентности амплитуд явилось прямой иллюстрацией фундаментальных идей квантовой механики. Экспериментальные и теоретические исследования [4,5] позволили установить следующие основные свойства этих процессов:

## 6 ЗАЙМИДОРОГА О.А.

- а) сечения этих процессов не зависят от энергии (или слабо зависят при факторе  $\lg S$ );
- б) сечения взаимодействия частицы и античастицы равны;
- в) дифференциальное сечение имеет пик в переднем конусе;
- г) обменные процессы характеризуются квантовыми числами вакуума в  $t$ -канале;
- д) происходит сужение дифракционного конуса с ростом энергии падающей частицы в адрон-адронных процессах дифракционной диссоциации.

Процессы неупругой дифракционной диссоциации адронов на ядрах еще слабо изучены; в них, несмотря на большое изменение массы бозонной системы, ядро остается в основном состоянии, т.е. процесс взаимодействия происходит когерентно, и рожденная система частиц для малых передач импульса сохраняет квантовые числа налетающей частицы, а спин и четность конечного состояния определяются механизмом обменного процесса. Вследствие этого ценным свойством изучения дифракционно образуемых резонансных систем является возможность однозначного определения спина и четности конечного состояния.

Из-за большой передачи энергии рожденной системе (порядка нескольких ГэВ) при малых переданных 4-импульсах ( $\sim 0,01 (\text{ГэВ}/c)^2$ ) исследование этих процессов представляет уникальную возможность изучения возбужденных состояний дифракционно образуемых систем, т.е. исследования спектра уровней возбуждения составной структуры взаимодействующей элементарной частицы как по орбитальному моменту, так и по главному квантовому числу. Кроме того, исследование процессов когерентного рождения состояний на ядерных мишнях дает возможность определить полное сечение поглощения нестабильных систем нуклонов в различных состояниях по спину и четности. Высокая степень когерентности волн приводит к усилению рождения резонансных структур в дифракционных процессах, а строгие правила отбора — к сильной поляризации в конечном состоянии, способствующей однозначному определению углового момента и четности резонансов. Важные сведения могут быть получены также о механизме процессов дифракции при высоких энергиях.

Изучение спектроскопии уровней возбуждения составной структуры как по орбитальному, так и по радиальному квантовому числу необходимо для понимания структуры межкварковых сил.

Существование радиальных возбуждений является еще одним подтверждением реальности кварков, помимо известных фактов рождения струй и глубоконеупругих процессов. Для тяжелых кварков частицы «пси» и «ипсион» в экспериментах на ускорителях наблюдаются в различных энергетических состояниях как частицы с разной массой. Такой энергетический спектр аналогичен атомному спектру: он свидетельствует о существовании

квантовых уровней связанный системы. Каждый из этих энергетических уровней должен представлять собой различные степени возбуждения и различные комбинации спинов составляющих и их орбитального момента. Подобные спектры позволяют объяснить поведение цветных сил на межкварковых расстояниях.

Потенциальная кварковая модель предсказывает существование адронов с одинаковыми квантовыми числами и с различающимся числом узлов (нуклеев) радиальной волновой функции  $q\bar{q}$ -системы. Эти состояния являются радиальными возбуждениями. Решение уравнения Шредингера для радиальной части волновой функции кварк-антикварковой системы определяет энергетические уровни системы. Так, например, в случае сферически-симметричного потенциала  $q\bar{q}$ -взаимодействия для каждого значения орбитального момента существует бесконечное число нулей радиальной волновой функции, которым соответствуют энергии  $E_r = \frac{\hbar^2}{2m} K^2 u_r$ , где  $u_r = 0, 1, 2, \dots$  — радиальное квантовое число. Радиальное и главное квантовое число  $n$  связаны соотношением  $n = u_r + l + 1$ .

Впервые радиальные возбуждения были установлены для кваркония из тяжелых кварков ( $c\bar{c}$ ) — семейство  $J/\Psi$ -мезонов, а впоследствии для ( $b\bar{b}$ )-систем — семейство ипсилон-мезонов.

В отличие от тяжелых мезонов, для легких мезонов, состоящих из  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков, информация о надежно экспериментально установленных радиальных состояниях более скучная. Детальная информация о радиальных состояниях наряду с орбитальными состояниями позволит получить сведения о строении спин-орбитальной связи в кварковой системе. Уже полученные данные свидетельствуют о том, что эта связь устроена не так, как в атомах, а особым образом. Она не похожа ни на  $LS$ - и ни на  $JJ$ -связь.

Простая геометрическая картина дифракционного рассеяния тесно связана с составной структурой адронов. Пространственно-временное описание дифракционного рассеяния при высоких энергиях позволяет выразить амплитуду рассеяния через распределение partонов внутри адронов. КХД с асимптотической свободой наиболее адекватна описанию процессов с большой передачей импульса — глубоконеупругих процессов. В дополнение к этим процессам дифракционные процессы характеризуются малыми 4-передачами импульса и большими передачами энергии составной системе. Применение КХД к этим процессам встречает серьезную проблему, связанную с большими межкварковыми расстояниями и цветовым плением кварков и глюонов.

## **2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССА ДИФРАКЦИОННОЙ ДИССОЦИАЦИИ**

Сразу после открытия [6,7] процессы дифракции адронов стали играть исключительно важную роль в физике высоких энергий. Подобно тому, как изучение проблемы двух тел рассматривалось как инструмент для изучения многих тел, так и процессы дифракционного рассеяния рассматриваются как средство изучения механизма упругих и неупругих процессов при высоких энергиях, вследствие того факта, что эти неупругие процессы по свойствам подобны упругому рассеянию. В процессах дифракции элементарных частиц ярко проявляются волновые свойства сталкивающихся частиц и размеры области их сильного взаимодействия. В формализме Редже дифракционный процесс идет через обмен вакуумным полюсом, и он должен доминировать при высоких энергиях, так как сечение процесса не зависит от энергии падающей частицы.

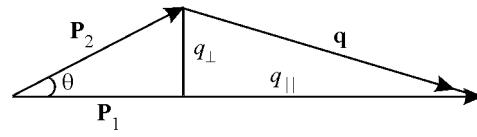
Дифракционная диссоциация адронов усиливает образование резонансов, удовлетворяющих определенным правилам отбора. При взаимодействиях на ядрах, несмотря на огромную передачу энергии (в несколько ГэВ) рожденной системе, ядро получает отдачу как целое и остается в основном состоянии. Такие процессы называются когерентными, и в этом случае ядро играет роль бесструктурной системы нуклонов, амплитуда процесса есть сумма амплитуд процессов на отдельных нуклонах. Поскольку состояние ядра не изменяется, то между падающим адроном и ядром возможен обмен состояниями с квантовыми числами вакуума (померон) или  $\omega$ -мезоном. В случае обмена помероном дифракционно рожденная система сохраняет, кроме спина и четности, все дискретные квантовые числа налетающего адрона (заряд, барионное число, странность, зарядовую и  $G$ -четность и изоспин). В случае обмена  $\omega$ -реджеоном сохраняются те же квантовые числа, кроме  $C$ - и  $G$ -четностей. Вследствие этих свойств изучение процессов дифракции адронов на ядрах позволяет проводить исследования структуры самого ядра и его возбужденных состояний.

**Кинематика процессов дифракции.** Из минимального требования когерентности процесса ядро должно взаимодействовать с налетающим адроном как целое, нежели как группа независимых нуклонов. Из этого следует, что нуклоны ядра не могут получить большую отдачу в процессе взаимодействия. В противном случае это ведет к процессам раз渲ала ядра. Следовательно, передача импульса и энергии ядру как целому происходит таким образом, что ядерные силы способны сохранить целостность ядра.

В неупругих дифракционных процессах изменение масс частиц происходит на сотни МэВ и несколько ГэВ, в то время как ядро получает не более  $\sim 10$  МэВ. Вследствие этого обстоятельства релятивистская частица подобна фотону, так как ее масса не важна.

Пусть падающая частица с 4-импульсом  $(\mathbf{P}_1, E_1)$  взаимодействует с ядром, и образующаяся система частиц имеет 4-импульс  $(\mathbf{P}_2, E_2)$ . Переданный ядру импульс  $\mathbf{q} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$  удобно

разложить на параллельную  $q_{||}$  и перпендикулярную  $q_{\perp}$  компоненты. Тогда  $q_{\perp} = P_2 \sin \theta$ , и для переднего направления



$$-t' = P_2^2 \sin^2 \theta \simeq P_2^2 \theta^2; \quad q_{||} = P_1 - P_2 \cos \theta.$$

Если пренебречь кинетической энергией ядра отдачи, то из закона сохранения следует, что

$$P_2 = (P_1^2 + m_1^2 - m_2^2)^{1/2}, \quad q_{||} = P_1 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{P_1^2}} \right).$$

Разложив в ряд Тейлора и взяв только два члена ряда, будем иметь

$$q_{||}^0 = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2P_1} \quad \text{и} \quad t_{||}^0 = \left( \frac{m_2^2 - m_1^2}{2P_1} \right)^2,$$

т.е. продольная составляющая 4-мерной передачи, определяющая минимальную передачу импульса для рождения массы  $m_2$ , зависит только от импульса падающей частицы и не зависит от массы ядра, и ее величина уменьшается с ростом энергии. Величина  $t_{\min}$  с поправкой на энергию ядра отдачи равна

$$t_{\min} = t_{||}^0 \left( 1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{MP_1} \right),$$

где  $M$  — масса ядра, и с учетом следующего члена разложения в ряд получаем:

$$t_{\min} = \left( 1 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{2P_1^2} \right) t_{||}^0.$$

Величины поправок существенны для импульсов менее 5 ГэВ/с. Для  $P_1 = 40$  ГэВ/с эти поправки составляют величину  $10^{-7}$ , в то время как  $t_{||}^0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$  (ГэВ/с)<sup>2</sup> для массы  $m_2 = 1$  ГэВ/с<sup>2</sup>.

Оценим величину кинетической энергии ядра в неупругом дифракционном процессе  $a + b \rightarrow c + b'$ . Четырехмерная передача  $t_{a \rightarrow c} = t_{b \rightarrow b'} = ({}^4P_a - {}^4P_c)^2 = ({}^4P_b - {}^4P_b')^2$  и  $t = t' + t_{\min}$ , где  $-t' = q_{\perp}^2$ ,  $-t_{\min} = q_{\parallel}^2$ . Передаваемый ядру 4-импульс  $t = 2MT$ , где  $M$  — масса ядра, а  $T$  — его кинетическая энергия, или  $t = P_{\text{я}}^2$ . Таким образом, в когерентной области для ядра Be  $T = 2$  МэВ, для ядра Pb  $T = 20$  кэВ и для протонной мишени — 10 МэВ.

Заметим, что в дифракционных процессах электророждения резонансов вместо массы  $m_1$  в выражении для  $t_{\parallel}^0$  будет квадрат 4-мерного импульса виртуальной частицы.

Таким образом, при высоких энергиях в когерентных процессах практически сохраняется энергетический баланс для быстрых частиц. В тех процессах, где существенны эффекты возбуждения ядра и энергия отдачи,

$$q_{\parallel} \simeq \frac{m_2^2 - m_1^2}{2P_1} + \frac{t}{2M} + E_{\text{возб.}}$$

**Когерентность.** Понятие когерентности в квантовой механике применяется в разных аспектах и имеет широкий диапазон применения. Что касается рассматриваемых нами процессов дифракции сильно взаимодействующих частиц на ядрах, то конечное состояние является результатом взаимодействия с одиночным нуклоном ядра, и имеется  $A$  (число нуклонов ядра) различных амплитуд  $T_k$ , ведущих к конечному состоянию. Если условия процесса дифракции удовлетворены и конечное состояние ядра известно, то рожденная система есть результат сильной интерференции между разными амплитудами, т.е. процесс происходит когерентно. Эта интерференция может быть как конструктивной, так и деструктивной. Каждая амплитуда  $T_k$  на отдельном нуклоне может состоять из двух членов: одного постоянного члена, который одинаков для всех нуклонов, и члена, меняющего свой знак в зависимости от того, что  $K$  есть протон или нейtron, и направления спина нуклона вверх или вниз. Постоянный член является когерентной частью  $T_k$ , и амплитуды отдельных нуклонов складываются конструктивно, давая член  $AT^{\text{kog}}$  с увеличением в амплитуде, характерным для когерентного процесса, в то время как члены с переменным спином на протоне и нейтроне дают деструктивную интерференцию и сокращаются. В когерентном случае амплитуды должны быть суммированы перед тем, как возвести их в квадрат. Однако в квантовой механике амплитуды всегда должны быть суммированы до получения сечения процесса. Часто несущественно, одна ли амплитуда важна, или сумма амплитуд по многим состояниям получена таким образом, что интерференционные эффекты между разными амплитудами сокращают-

ся, так что порядок суммирования амплитуд и возвведения в степень неважен.

К примеру, рассмотрим переход, в котором ядро из основного состояния переходит в одночастичное возбужденное состояние (или имеет группу нуклонов в возбужденном состоянии). В этом случае существенно взаимодействие с одним нуклоном (или с группой). Эффект сокращения амплитуд будет иметь место для когерентных амплитуд при относительно больших передаваемых импульсах, когда ядро разваливается, и будет наблюдаться указанный переход при суммировании по многим конечным состояниям ядра, и ядро для этого перехода представляет собой сумму невзаимодействующих нуклонов. Для когерентного процесса существенным является эффект интерференции между амплитудами дифракции на разных нуклонах ядра.

Физической характеристикой когерентности процесса является не аддитивность амплитуд, а то обстоятельство, что ядро взаимодействует как целое. Если ядро не взаимодействует как целое, то переход в определенные квантовые состояния происходит при сложении амплитуд от различных нуклонов и эффективно является некогерентным процессом, так как суммирование проводится по многим конечным состояниям, между амплитудами которых нет эффекта интерференции.

Амплитуда процесса на  $i$ -м нуклоне имеет вид

$$T_k = T^{\text{Kог}} + T_1\sigma(i) + T_2I(i) + T_3\sigma(i)I(i) \quad (1)$$

и зависит от координат падающей частицы и нуклонов;  $\sigma(i)$  и  $I(i)$  — спин и изоспиновые операторы.

Переход из начального состояния в конечное есть сумма членов:

$$\sum_i^A \langle f | T_i | K \rangle.$$

Для перехода ядра в одночастичное возбужденное состояние (или группу нуклонов) только амплитуда  $T_3$  существенна, а для перехода в основное состояние важна только  $T^{\text{Kог}}$ . Для ядер с приблизительно равным числом протонов и нейтронов член  $T_2I(i)$  при суммировании по ядру обращается в нуль. Для ядер со спином нуль сумма членов  $T_1\sigma(i)$  обращается в нуль и, естественно,  $T_3\sigma(i)I(i)$ . При неполной компенсации спинов вклад в амплитуду процесса составляет малую величину  $\sim S/A$ . Таким образом, только не зависящие от спина и изоспина амплитуды дают вклад в когерентный процесс. Другие амплитуды не дают интерференционных членов при суммировании по ядру, и к тому же амплитуды, зависящие от спина и изоспина, дают состояния ядра, отличные от основного.

Это обстоятельство приводит к определенным правилам отбора состояний и к механизму селекции, которые будут рассмотрены ниже. Нам осталось сформулировать условие когерентности процесса.

Ядра являются протяженными объектами, и амплитуды от нуклонов в разных точках имеют различные фазы. Суммирование по разным точкам дает осциллирующий фазовый фактор, который сильно подавляет полную амплитуду. Разность фаз между двумя точками, разделенными величиной  $x$ , равна  $(K - K')x$ , где  $K, K'$  — волновые векторы, и фазовый фактор есть  $\exp(iqx)$ , где  $q = K - K'$ . Большая величина разности фаз из-за большой передачи импульса  $q$  или больших расстояний между нуклонами ядра приводит к тому, что амплитуды в этих точках будут не в фазе и произойдет полная потеря когерентности. Условием когерентности всех нуклонов ядра является требование:  $qR \lesssim 1$ ,  $R$  — радиус ядра. При данной энергии пучка и данном ядре значения масс когерентно-рожденных систем определяются этим условием. Так, для рождения на нулевом угле это условие приобретает

вид  $q_{\parallel} R \leq 1$  или  $\frac{m_2^2 - m_1^2}{2P} R \lesssim 1$ , и область когерентно рожденных масс определяется радиусом ядра:

$$m_{\text{рез}} = \sqrt{2P/R},$$

где  $R = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 = 1,1f$ ,

$$m_{\text{рез}} \cong \frac{\sqrt{2P}}{A^{1/6}}.$$

Например, при энергии 40 ГэВ/с, область когерентно рожденных состояний на ядре углерода ( $R_c = 3,2$  фм) простирается до  $2,2$  ГэВ/с $^2$ , в то время как для ядра свинца  $R_{\text{Pb}} = 6,3$  фм) до  $1,5$  ГэВ/с $^2$ . Отсюда видно, что при желании исследовать область больших масс ( $> 2$  ГэВ/с $^2$ ) условие для их когерентного рождения выполняется только для легчайших ядер (дейтерий, гелий). Эффект подавления высоких значений масс рожденных систем в когерентных процессах четко наблюдается в эксперименте в распределениях по массам для разных ядер.

В теоретических описаниях когерентных процессов некогерентность учитывается как эффект подавления процесса формфактором ядра. Так, сечение когерентного рождения на ядре имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dt'} = \frac{d\sigma_N}{dt'} A^2 |F(t')|^2,$$

где  $d\sigma_N/dt'$  — когерентное рождение на нуклоне, а  $F(t')$  — ядерный формфактор. В простейшем виде  $|F(t')|^2 = 1 - tR^2/5$ , и для  $qR = 1$   $F^2 = 0,8$ , а для  $qR = 2$   $F^2 = 0,15$ , т.е. сечение процесса для больших масс падает в 7 раз.

**Правила отбора.** Рассмотрим когерентный процесс  $a + x \rightarrow b + x$ , в котором ядро  $x$  переходит в основное состояние со спином  $S_x = 0$  и изоспином  $I_x = 0$ . Если состояние  $b$  есть резонанс, то что можно сказать о его квантовых числах? Очевидно, что  $b$  имеет тот же изоспин, что и  $a$ , так как ядро не изменило квантовые числа и имеет  $I_x = 0$  и тот же заряд, что и  $a$ , и все аддитивные квантовые числа те же, что и у  $a$ . Дифференциальное сечение когерентного процесса имеет пик при нулевом угле, а это означает, что система  $b$  в основном образуется в состоянии с той же спиральностью, что и  $a$ , так как ядро со спином  $S_x = 0$  не может дать вклад в азимутальный угловой момент. Для падающих  $\pi$ - и  $K$ -мезонов образуются бозонные резонансы с  $j_z = 0$ , а для падающих нуклонов образуется  $N^*$  только с  $j_z = +1/2$ . Таким образом, возникает сильная поляризация конечного состояния, которая вместе со знанием угловых характеристик распада резонансов позволяет определить угловой момент и четность резонансов. Если падающая частица имеет нулевой спин, то спин конечного бозона есть  $J$ , и матричный элемент этого процесса может быть построен из тензора с индексами  $J$ , представляющими спин бозона. Так как имеются два вектора  $\mathbf{K}_a$  и  $\mathbf{K}_b$ , падающей частицы и конечного бозона, которые параллельны для переднего конуса, тензор для спина бозона при  $\theta \approx 0^\circ$  имеет вид  $K_a K_b K_J$ . Четность его равна  $(-1)^J$  и четность бозона  $(-1) \times$  четность  $a$ . Таким образом, бозон имеет четность  $P = P_a (-1)^J$ , что соответствует состояниям «натуральной» серии обмена.

Для  $\pi$ - и  $K$ -мезонов резонансы рождаются в угле  $\theta \approx 0^\circ$  в серии  $J^P = 0^-, 1^+, 2^- \dots$  («ненатуральная» серия).

При рождении  $a_1$ -мезона ( $1^+$ )  $\pi$ -мезоном, матричный элемент имеет вид  $K \epsilon_{a_1}$ , где  $\epsilon_{a_1}$  — вектор поляризации  $a_1$ -мезона.

Неколлинеарность векторов  $K_a$  и  $K_b$  дает возможность построить псевдовектор, разрешающий рождение резонансов натуральной серии в угле, не равном нулю. Заметим, что когерентные процессы  $\pi \rightarrow 2\pi$ ,  $\pi \rightarrow 4\pi$  на нулевом угле запрещены. Например, при рождении  $\rho$ -мезона ( $J^P = 1^-$ )  $\pi$ -мезонами матричный элемент  $K_a K_b \epsilon_\rho$  ( $\epsilon_\rho$  — поляризация  $\rho$ ) равен нулю при рождении вперед [8,9]. К сожалению, эти правила селекции не работают

столь четко для падающих частиц со спином ( $\gamma$ -квант, нуклон). В этом случае рожденная система для данного спина будет иметь оба состояния по четности.

Суммируя сказанное, подчеркнем, что для падающих  $\pi$ - и  $K$ -мезонов в процессах дифракции в конечном состоянии рождается бозонная система, принадлежащая серии («ненатуральной») по спину и четности  $0^-, 1^+, \dots$ , а рождение бозонных систем «натуральной» серии  $(0^+, 1^-)$  в переднем конусе сильно подавлено. Так как требование когерентности отбирает только те обменные процессы, которые имеют изоспин, равный нулю, то это представляет возможность исследовать практически чистые механизмы обмена. Так, в реакции рождения  $\rho$ -мезона на ядре  $\pi + A \rightarrow \rho + A$  возможен только  $\omega$ -обмен, хотя на нуклоне разрешены обмены  $\pi$ ,  $\omega$ ,  $a_1$  и  $a_2$ -мезонами.

**Селекция механизма обмена.** Рассмотрим несколько подробнее, какие ограничения возникают на механизмы обмена. Для процессов на свободном нуклоне все четыре члена в операторе  $T_k$  работают (1). На ядрах для переходов в определенное конечное состояние это не так. Член  $T_{2I}(i)$  имеет разные знаки для протонов и нейтронов, так как  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , и стремится к нулю при суммировании по  $i$ . Аналогично ведут себя и члены, содержащие  $\sigma(i)$ . В действительности, если ядро имеет  $I_3 = 0$  и находится в основном состоянии, то по теореме Вигнера — Эккарта члены  $T_2$  и  $T_3$  есть векторы в изоспиновом пространстве и не могут давать вклад в основное состояние. Подобно этому и члены с  $\sigma(i)$  не могут давать вклад в основное состояние со спином  $J_\text{я} = 0$ .

Даже если ядро имеет несколько больше нейтронов, чем протонов, и спин ядра не точно равен нулю, то этим вкладом можно эффективно пре-небречь, так как когерентный вклад существенно превышает вклад от группы нуклонов, к тому же их вклад  $\sim S/A$ . Члены  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  приводят к вкладам с обменом изоспином, например,  $\pi$ -обмен описывает член  $T_3$ , а члены с  $\sigma(i)$  дают магнитную или  $\gamma_5$ -связь. Это дает возможность заключить, что в дифракционных когерентных процессах обмены изоспином и «ненатуральной» серией по спину-четности запрещены. К примеру,  $\rho$ -обмен не может быть ответствен за когерентное образование  $a_1$ -мезона на ядрах, и  $\pi$ -обмен невозможен в процессах  $\gamma \rightarrow \rho$ .

Если основное состояние ядра имеет  $I = 0, J^P = 0^+$ , то амплитуда  $T^{\text{kog}}$  вызывает переходы к состоянию ядра с  $I = 0$  и  $J^P = 0^+, 1^-$ . Амплитуда  $T_2$

ведет к тем же состояниям, но с  $I=1$ , а амплитуды  $T_2$  и  $T_3$  — к состояниям ядра с  $I=0$  и  $I=1$  соответственно и к  $J^P = 0^-, 1^+, \dots$ . Вследствие этих свойств исследование процессов дифракции на ядрах позволяет проводить исследования самого ядра и возбуждения определенных состояний при надлежащем выборе механизмов обмена [10]. В частности, при возбуждении

гигантского дипольного возбуждения когерентная сумма  $\sum_i^A Z_i J_3(i)$  имеет

большую величину, и оператор  $T_2$  в этом случае дает главный вклад и соответствует  $\rho$ -обмену, запрещенному для других процессов возбуждения. Подобно этому для сверхтяжелых ядер, где наблюдаются изотопические аналоговые состояния, являющиеся изотопическим партнером основного ядра, возможны процессы дифракции с зарядовой перезарядкой, запрещенные для ядер, не имеющих этих свойств.

Суммируя свойства процессов дифракции  $\pi$ - и  $K$ -мезонов на ядрах при переходах ядра в основное состояние с эффективным спином, равным нулю, отметим, что по сравнению с начальной частицей бозонная система в конечном состоянии имеет: 1) тот же самый спин, 2) ту же самую спиральность, 3) серию по спину и четности преимущественно  $J^P = 0^-, 1^+, 2^-, \dots$ , конечной системы и максимум сечения в переднем конусе, 4) все дискретные квантовые числа (заряд, странность, ...) одинаковые.

В обмене преимущественно: 1) изоспин равен нулю и 2) натуральная серия  $0^+, 1^-, 2^+$ .

В конечном состоянии:

1. Бозонная система имеет сильную поляризацию и специфичные свойства распада, что позволяет надежно и однозначно определить угловой момент и четность состояния.

2. Малый вклад некогерентных процессов под дифракционным пиком.

3. Отсутствие вклада амплитуд с переворотом спина.

Исследование эксклюзивных процессов дифракции на ядрах привлекательно с многих точек зрения: из-за правил отбора и механизма селекции в когерентных процессах происходит усиление рождения резонансных состояний, принадлежащих серии  $0^-, 1^+, \dots$ , а сильная интерференция парциальных амплитуд позволяет определить квантовые числа резонансов.

Процессы дифракции адронов находят удовлетворительное описание в теории многократного рассеяния [11—13] в объяснении экспериментальных данных как по упругому, так и по квазиупругому рассеянию частиц высоких энергий ядрами.

**Возбуждение внутренней структуры.** Привлекательным свойством дифракции адронов является возбуждение внутренних динамических струк-

тур налетающей частицы как по орбитальному, так и по главному квантовому числу. Такая возможность возникает из-за большой передачи энергии составной системе при малом переданном импульсе, а также из-за ограниченного набора состояний по спину и четности в конечном состоянии.

Прежде всего, рассмотрим процесс дифракции на сложной составной системе, предполагая, что падающая частица несоставная и взаимодействие между конституентами осуществляется в виде двухчастичного потенциала

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_A) = \sum_i^A V(\mathbf{a} - \mathbf{b}_i),$$

где  $a$  — координата падающей частицы, а  $b_i$  — поперечная координата конституента относительно центра масс сложной системы. Тогда фазовый сдвиг  $\chi(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots) = \sum_i^A \chi(\mathbf{a} - \mathbf{b}_i)$ , и можно написать амплитуду дифракции на уровне составляющих системы:

$$F(q) = \langle \Psi' | \frac{i}{2\pi} \int d^2 b e^{i\mathbf{q}\mathbf{b}} \left[ 1 - \prod_i^A (1 - P_i(\mathbf{a} - \mathbf{b}_i)) \right] | \Psi \rangle,$$

где  $P_i(b) = 1 - e^{i\chi_i(b)}$  есть профильная функция каждого конституента. Таким образом, сразу можно получить амплитуду упругого рассеяния. Что же касается неупругой дифракции, то необходимо знание взаимодействия конституентов на больших расстояниях. Теория многократных столкновений на уровне конституентов дает возможность виртуального возбуждения сложной системы. В действительности эйкональные фазы в оптическом подходе и в подходе, указанном выше, связаны соотношением

$$e^{i\chi_{\text{опт}}(a)} = \langle e^{i\chi(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_A)} \rangle_i,$$

где  $i$  определяет начальное состояние конституентов, описываемое их функцией основного состояния. Разлагая в ряд, имеем

$$\chi_{\text{опт}}(a) = \langle \chi(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_A) \rangle_i + \frac{i}{2} \left\{ \langle \chi^2(\mathbf{a}, \mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_n) \rangle_i - \langle \chi(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \rangle^2 \right\}.$$

Это соотношение показывает, что если элементарная эйкональная фаза действительна, то мнимая часть оптической фазы определяется внутренним возбуждением составной системы. Важным результатом в исследовании явления дифракции было открытие дифракционного возбуждения адронов в состояние с большой массой [14].

Что касается возбуждения внутренней структуры налетающей частицы при ее диссоциации, то составные и дуально-резонансные модели адронов предсказывают существование состояний с одинаковыми квантовыми, но с разными радиальными числами. В кварковой модели эти состояния характеризуются различным числом узлов радиальных волновых функций ( $q\bar{q}$ )-системы, и состояния с отличным от нуля числом узлов принято называть радиальным возбуждением. Радиальные возбуждения крайне чувствительны к соотношению между короткодействующей частью кваркового взаимодействия и взаимодействия, обеспечивающего конфайнмент.

Возбуждение составной структуры такой бозонной системы, какой является  $\pi$ -мезон, представляет важное значение для исследования свойств динамики легких кварков.

Экспериментальное обнаружение радиальных возбуждений  $\pi$ -мезона непосредственно свидетельствовало бы о составном характере  $\pi$ -мезона. В этом смысле роль радиальных возбужденных состояний у пиона имеет особое значение по сравнению с другими состояниями, сложными по своей спиновой и кварковой структуре. Экспериментальные данные указывают, что массами  $u$ - и  $d$ -кварков ( $u$ - и  $d$ -кварки составляют пион) можно пренебречь, и в этом случае лагранжиан взаимодействия приближенно инвариантен относительно независимого вращения левых и правых компонент  $u$ - и  $d$ -кварков. Киральная симметрия предсказывает вырождение спектра частиц по четности, что реально не наблюдается.

Однако киральный подход со спонтанным нарушением этой симметрии хорошо объясняет экспериментальные данные по рассеянию элементарных частиц [15]. Объяснение спонтанного нарушения киральной симметрии сводится к тому, что низшее состояние, или вакуум, неинвариантно относительно преобразования киральной группы, несмотря на то, что лагранжиан взаимодействия инвариантен относительно  $\gamma_5$ -вращений. Как результат этого, в вакууме появляется среднее кварковое поле ( $\langle q\bar{q} \rangle \neq 0$ , в то время как  $\langle \bar{q}\gamma_5 q \rangle = 0$ ). Такое нарушение строгой симметрии лагранжиана ведет к появлению голдстоуновских, почти безмассовых частиц, которые отождествляют с  $\pi$ -мезонами.

Как следствие, радиально-возбужденные состояния  $\pi$ -мезона есть результат квантовых флюктуаций кваркового поля в вакууме, и эти состояния необходимо учитывать в лагранжиане взаимодействия.

#### **Сходимость парциального разложения дифракционной амплитуды.**

Полное сечение процесса дифракции, выраженное через сумму парциальных сечений, имеет смысл, если парциальный ряд сходится. Для доказательства этого оценим вклад в дифракцию состояний с большими моментами. Рассмотрим процесс упругой дифракции.

При умеренных энергиях полное сечение приблизительно равно неупругому сечению, это позволяет упругое рассеяние рассматривать как теневое, обусловленное «поглощением» входящей частицы [16]. Так как амплитуда упругой дифракции почти полностью мнимая и дифференциальное сечение имеет острый пик при малых  $t$ , то

$$T(S, t) = 2iq\sqrt{S}e^{bt/2} = 8\pi\sqrt{S} \sum_L (2L+1)P_L(x)T_L(S), \quad (2)$$

где  $T_L$  — парциальная амплитуда,  $x = \cos \theta = 1 + \frac{t}{2q^2}$ . Для малых  $\theta$  полином Лежандра  $P_L(x)$  может быть аппроксимирован функцией Бесселя:

$$P_L(x) = P_L\left(1 + \frac{t}{2q^2}\right) \approx J_0\left(\frac{L}{q}\sqrt{-t}\right),$$

где  $L/q = \rho$  — прицельный параметр. Так как для больших  $L$  состояний много, то суммирование заменим на интегрирование по  $L$ :

$$T(S, t) \approx 8\pi\sqrt{S} \int_0^\infty 2LdL J_0\left(\frac{L}{q}\sqrt{-t}\right) T(L, S) = 16\pi\sqrt{S} \int_0^\infty \rho d\rho J_0(\rho\sqrt{-t}) q^2 T(\rho, S).$$

Пользуясь обратным преобразованием и соотношением (2), получим амплитуду  $T(\rho, S)$ :

$$16\pi\sqrt{S}q^2 T(\rho, S) = 2iq\sqrt{S}\sigma_{\text{полн}} \frac{1}{b} e^{-\rho^2/2b},$$

$$T(\rho, S) = \frac{i\sigma_{\text{полн}}}{8\pi qb} \exp(-\rho^2/2b),$$

$$T_L(S) \approx \frac{i\sigma_{\text{полн}}}{8\pi qb} \exp(-L^2/2q^2b).$$

Из этих соотношений можно определить коэффициент неупругости  $\eta_L$  для парциальной волны с моментом  $L$ :

$$\eta_L \equiv S_L = 1 + 2iqT_L = 1 - \frac{\sigma_{\text{полн}}}{4\pi b} \exp(-L^2/2q^2b).$$

Отсюда непосредственно видно, что для  $L = \infty$   $\eta_L = 1$ , что соответствует отсутствию рассеяния, в то время как  $L = 0$  дает максимальное значение неупругости  $\eta_0 = 1 - \frac{\sigma_{\text{полн}}}{4\pi b}$ . Из этого рассмотрения видно, что в процесс

дифракции дают вклад малые  $L$ , а вклад больших  $L \sim e^{-L^2}$  экспоненциально падает. Ряд парциальных амплитуд процесса дифракции мезонов существенно быстрее сходится, чем в процессе рассеяния, где реализуется  $\pi$ -мезонный обмен ( $\sim e^{-L/q}$ ).

**Экспериментальный фон исследований.** В процессе дифракции  $\pi \rightarrow 3\pi$  интенсивно рождается резонанс  $a_1(1^+)$   $\rightarrow \rho\pi$ , и большой вклад дает нерезонансное рождение ( $\rho\pi$ )-системы в соответствии с механизмом Дрелла — Декка — Хида [17—19], получившее название «механизм Декка» и существенно затрудняющее наблюдение резонансных состояний в парциальных волнах  $0^-$ ,  $1^+$ ,  $2^-$  и т.п. Вплоть до 1977 г. в экспериментах не были установлены резонансные свойства состояний  $a_1$  и  $a_3$ . В опытах [20] на ускорителе ИФВЭ в Серпухове в процессе  $\pi^- + P \rightarrow 3\pi + P$  наблюдалось лишь широкое усиление в  $S$ -волновом канале ( $\rho\pi$ )-системы для  $J^P = 1^+$ . Дополнительный анализ показал [21], что это состояние имеет нерезонансную природу, и это объясняется нерезонансным механизмом Декка. В анализе этих данных использовалась неунитарная изобарная модель и предполагалось, что  $3\pi$ -вершина независима от  $NN$ -вершины, что позволяло отделить события с рождением резонанса  $N^*$  в нижней вершине. В этих же исследованиях было установлено волновое содержание дифракционно-рожденной  $3\pi$ -системы, которое насыщается состояниями  $0^-P$ ,  $1^+S$ ,  $1^+D$ ,  $2^-P$ ,  $2^+D$ ,  $3^+D$  для ( $\rho\pi$ )-системы и  $0^-S$ ,  $1^+P$  и  $2^-D$  для ( $\epsilon\pi$ )-системы. Результаты этих исследований доказали резонансные свойства  $a_2$ -мезона, в то время как фаза волны  $1^+S$  ( $a_1$ ) показывала малые изменения относительно волн  $0^-S$ ,  $1^+P$  и  $2^-P$ . Унитарные коррекции изобарной модели не изменили этих заключений [21]. Аналогичные заключения были получены и в работах [22, 23]. В работе [24] продемонстрировано, что малое изменение фазы может быть вследствие разницы в фазах между декковской амплитудой и амплитудой прямого резонансного образования  $a_1$ , а также из-за большой неупругости каналов  $\rho\pi$ ,  $\epsilon\pi$  и  $K^*K$  вследствие перерассеяния. И, наконец, в работах [25, 26] был выполнен анализ с  $\pi\pi$ -параметризацией фазы упругого  $S$ -рассеяния, с амплитудой, обладающей аналитичностью и унитарностью, а также с включением амплитуды Декка с перерассеянием и прямым резонансным образованием  $a_1$ . В этой работе было показано, что данные [23] совместимы с резонансом в волне  $1^+S$  при массе  $(1300 \pm 150)$  МэВ и  $\Gamma = (400 \pm 100)$  МэВ. Что касается волны  $0^-S$ , то как изменение фазы, так и интенсивность не проявляли резонансных свойств. Следует заметить, что радиальные состояния  $\pi$ -мезона не были предсказаны теоретически.

В исследованиях на ядрах [26] были получены новые данные, которые с большой очевидностью свидетельствовали о резонансных свойствах  $a_1$ -мезона при массе 1,1 ГэВ/с<sup>2</sup>, а движение фазы парциальной волны  $0^-S$  составляло лишь 40°. В работах [27] по образованию  $3\pi$ -системы в заднюю полусферу наблюдался пик при массе 1040 МэВ, но неизвестно его волновое содержание. Анализ по  $SU(3)$ -симметрии [28] показал, что установленные свойства  $f_1(1285)$  и  $f_1(1420)$  вместе с  $a_1$ -мезоном с массой 1100 МэВ не могут составить нонет  $J^{pc} = 1^{++}$ , что, в свою очередь, указывает на то, что экспериментальные массы  $a_1$ -мезона далеки от положения полюса на втором римановом листе. В работах [29,30], выполненных на большой статистике, и в результате парциально-волнового анализа данных были найдены резонансные свойства  $a_1$ -мезона ( $1^+$ ) при массе  $(1240 \pm 40)$  МэВ и во второй работе  $(1280 \pm 20)$  МэВ с шириной  $\Gamma = 300$  МэВ. В анализе был использован тот же метод, что и в работе [24], т.е. амплитуда содержала нерезонансный вклад, вклад перерассеяния и прямое резонансное образование. Непосредственно данные анализа, однако, не свидетельствовали о резонансном характере из-за сильного вклада нерезонансного механизма. Волна  $0^-S$  изменяла свою фазу менее чем на 40°.

### 3. ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Исследование процессов когерентного образования многомезонных систем  $\pi$ - и  $K$ -мезонов при энергиях 25 и 40 ГэВ было осуществлено с помощью магнитного спектрометра [30] ОИЯИ на ускорителе 70 ГэВ в Серпухове в сотрудничестве с институтами физики в Милане и Болонье и Европейским центром ядерных исследований (ЦЕРН). В качестве мишней были использованы Be, C, Si, Ti, Cu, Ag, Ta и Pb для изучения процессов

$$\pi^- + A \rightarrow \pi^- + \pi^- + \pi^+ + A, \quad (3)$$

$$K^- + A \rightarrow K^- + \pi^- + \pi^+ + A. \quad (4)$$

Полное число событий (3) после удовлетворения критериев отбора составило 153359 для всех масс и передач  $3\pi$ -системы. Так как ошибка в эффективной массе  $3\pi$ -системы составляет 34 МэВ/с<sup>2</sup> для  $M_{3\pi} = 1,8$  ГэВ/с<sup>2</sup>, то интервал по  $3\pi$ -массе был выбран равным 40 МэВ, что позволяет иметь  $4000 \div 50000$  событий на этот интервал. Парциально-волевой анализ

(ПВА) позволяет определить интенсивность и относительную фазу каждого состояния по спину и четности  $3\pi$ -системы. ПВА был выполнен для:

- а) когерентного набора событий, характеризующегося тем, что в него входили события всех ядер с  $t' \leq t'^*$ , где  $t'^*$  — 4-передача — выбиралась несколько меньше положения первого дифракционного минимума в сечении. Так, для ядер Be и C  $t'^* \leq 0,04$  ( $\text{ГэВ}/c$ )<sup>2</sup>, для Al и Si  $t'^* \leq 0,03$  ( $\text{ГэВ}/c$ )<sup>2</sup>, Ti и Cu  $\leq 0,02$  ( $\text{ГэВ}/c$ )<sup>2</sup>, Ag, Ta и Pb  $\leq 0,01$  ( $\text{ГэВ}/c$ )<sup>2</sup> в интервале масс системы  $(0,8 \div 2,2)$  ГэВ/c<sup>2</sup>. Число событий равно 110900. Некогерентный вклад в эти события составил, соответственно, 6 % для Be и 2 % для Pb;
- б) каждого ядра отдельно с целью определения A-зависимости поведения парциальных волн;
- в) некогерентного набора событий с  $t'^* < t' < 0,5$  ( $\text{ГэВ}/c$ )<sup>2</sup> для всех ядер вместе;
- г) разных интервалов по  $t'$  для групп легких ядер Be + C, и тяжелых ядер Ag + Ta + Pb для интервалов масс  $3\pi$ -системы  $0,9 \div 1,2$ ,  $1,2 \div 1,5$  и  $1,5 \div 1,8$  ГэВ/c<sup>2</sup>.

Результаты ПВА будут сравниваться с данными, полученными на протонной мишени [30] эксперимента, выполненного в ЦЕРН.

Использование ядерных мишеней имеет ряд преимуществ по сравнению с протонными:

- 1) отсутствуют неоднозначности анализа, обусловленные образованием резонанса  $N^*$  на протонной мишени;
- 2) малый вклад некогерентных процессов и высокая степень когерентности волн дают надежное измерение относительных фаз;
- 3) из-за малости переданного 4-импульса можно ожидать малого вклада амплитуд с переворотом спина  $3\pi$ -системы;
- 4) вследствие большого наклона дифракционного конуса когерентные события на ядрах сосредоточены в области малых передач, где хорошо выполняются правила селекции по спину и четности, что приводит к необходимости учета небольшого числа волн.

Следствием этого является возможность осуществления надежного и однозначного анализа образуемых систем по спину и четности и изучения резонансного рождения. Следует отметить, что вклад состояний с возбуждением ядра мал. К тому же величина возбуждения для случая отбора когерентных событий мала. Легко видеть, что энергия ядра Be для  $t'^* \leq 0,04$  ( $\text{ГэВ}/c$ )<sup>2</sup> составляет  $\leq 2$  МэВ, а для ядра Pb при  $t'^* \leq 0,01$  ( $\text{ГэВ}/c$ )<sup>2</sup> энергия  $\leq 20$  кэВ. Для легких ядер энергия недостаточна для возбуждения ядерных уровней, а для тяжелых ядер энергия меньше энергии вибра-

ционных уровней. Вклад их в амплитуду исследуемого процесса мал, к тому же их сечение ведет себя как  $t' e^{-Bt'}$  и стремится к нулю при малых  $t'$ .

**Общие характеристики исследуемого процесса.** Из анализа массовых спектров и угловых распределений могут быть установлены общие характеристики исследуемого процесса. При этом нас будут интересовать те характеристики, которые важны для парциально-волнового анализа  $3\pi$ -состоинания. Массовый спектр  $M_{3\pi}$  (рис. 1) непосредственно не свидетельствует об образовании резонансов и характеризуется усилением в области  $1,2 \text{ ГэВ}/c^2$ ,

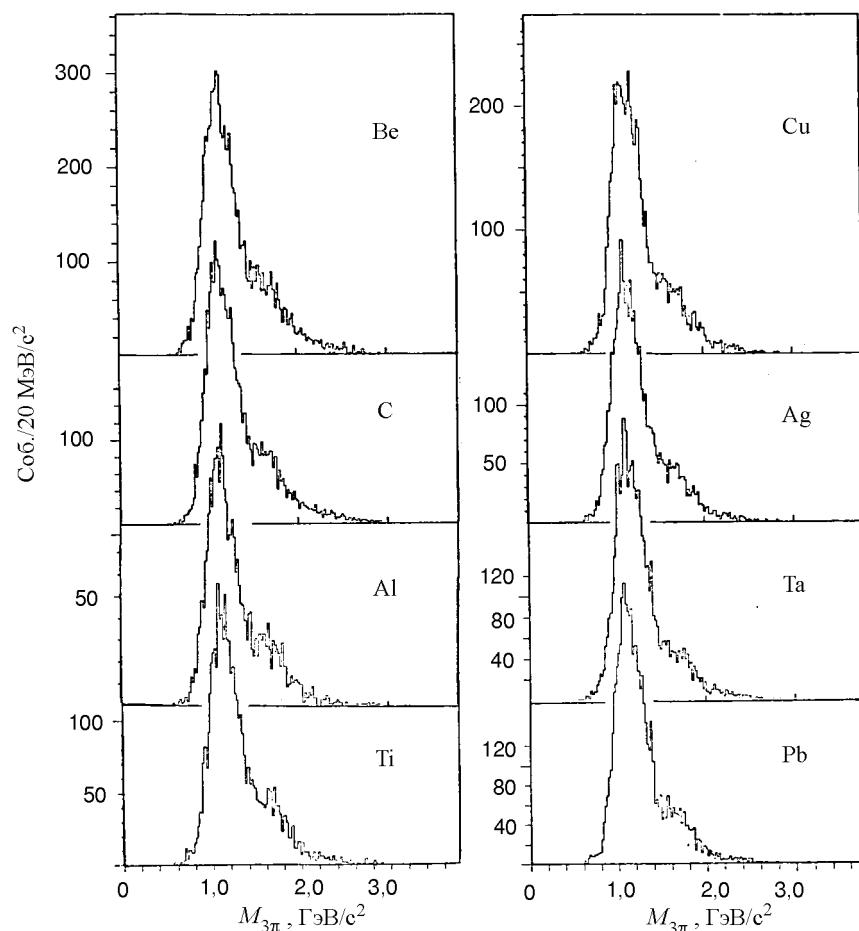


Рис.1. Спектры масс  $3\pi$ -системы для разных ядер

где возможно образование  $a_1(1260)$ , и в области  $1,6 \text{ ГэВ}/c^2$ , где дает вклад  $\pi_2(1670)$ .

Анализ угловых распределений показал, что распад  $\rho^0$ -мезона происходит с испусканием  $\pi^+$ -мезона в заднюю полусферу, а при распаде  $\epsilon$ -мезона — в переднюю полусферу. До массы  $M_{3\pi} = 1,05 \text{ ГэВ}/c^2$  вклад  $S$ -волн в  $\pi^+\pi^-$  является доминирующим.

Вследствие этого параметризация  $S$ -состояния дипионной системы была сделана как с  $\epsilon$ -резонансом ( $J^P = 0^+$ ,  $M_\epsilon = 0,77 \text{ ГэВ}$ ,  $\Gamma_\epsilon = 0,4 \text{ ГэВ}$ ), так и с фазой упругого  $\pi\pi$ -рассеяния [31].

Угловые распределения  $\pi^+$  в системе покоя пары  $\pi^+\pi^-$  свидетельствуют о преимущественном испускании  $\pi^+$ -мезона в плоскости, перпендикулярной спину  $\rho^0$ -мезона, т.е.  $\rho^0$ -мезон в сильной степени поляризован.

Вклад дипионных резонансных состояний отчетливо виден при отборе событий по фейнмановской переменной для всех масс  $3\pi$ -системы при  $x_F \geq 0,8$ , где  $x = P_{||}/P_{||_{\max}}$  быстрого  $\pi^-$ -мезона. В области больших масс  $m_{2\pi}$  виден суммарный сигнал от  $f_2(1270)$ - и  $f_0(1300)$ -мезона. Характер угловых распределений при такой селекции свидетельствует о сильной поляризации как дипионных резонансных состояний, так и резонансных состояний в  $3\pi$ -системе.

**Анализ спинового содержания конечного состояния.** Для полного описания процесса (3) необходимо  $3n - 3$  переменных, где  $n$  — число частиц в конечном состоянии. В случае  $n = 4$  необходимо 9 переменных. Такими переменными для процессов  $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + b'$  могут быть:

$S = ({}^4P_a + {}^4P_b)^2$  — полная энергия системы центра масс,

${}^4P_a, {}^4P_b$  — 4-векторы,

$t$  — 4-передача,

$\Phi_p$  — азимутальный угол ориентации плоскости рождения,

$M_{3\pi}^2$  — квадрат инвариантной массы  $3\pi$ -системы,

$s_1$  — квадрат инвариантной массы  $\pi_2\pi_3$ ,

$s_2$  — квадрат инвариантной массы  $\pi_1\pi_3$ ,

$\theta, \phi, \gamma$  — углы Эйлера, определяющие ориентацию трех мезонов в системе покоя  $3\pi$ -системы.

Для неполяризованной мишени матричный элемент процесса не зависит от азимутального угла  $\Phi_p$ , и остается восемь переменных, описывающих

процесс. Переменные  $s$ ,  $t$ ,  $M_{3\pi}$  описывают рождение  $3\pi$ -системы, а  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$ ,  $\phi$  описывают распад  $3\pi$ -системы. Переменные Далитца  $s_1$  и  $s_2$  полностью определяют энергию трех мезонов в системе покоя  $3\pi$ -системы. Выбор углов  $\theta$ ,  $\gamma$ ,  $\phi$  определяет пространственную ориентацию тройки мезонов относительно данного выбора пространственных осей. В качестве таких углов выбраны углы Эйлера в системе покоя  $3\pi$ -системы (так называемая система Готфрида — Джексона) [32,33]. В этой системе координат характеристики процесса наиболее четко видны; к тому же некоторые свойства обменного процесса могут быть установлены на основании свойств угловых распределений. На рис. 2 показана диаграмма процесса  $a + b \rightarrow c + d$ , где  $e$  — частица обмена и три системы координат: центра масс ( $a$ ), спиральная система ( $b$ ) и система Готфрида — Джексона ( $c$ ). В системе ГД импульсы обменной и падающей частиц равны и противоположно направлены. Если обменная частица имеет спин, равный нулю, то плоскость распада системы  $c$  должна обладать вращательной симметрией относительно их импульса. В спиральной системе импульсы частицы  $e$  и резонанса  $c$  равны и одинаково направлены в отличие от системы покоя падающей частицы, показанной на рис. 2; и снова для нулевого спина обменной частицы должна существовать симметрия плоскости распада резонанса относительно общего момента. Этот азимутальный угол есть угол Треймана — Янга. Как видно, азимуталь-

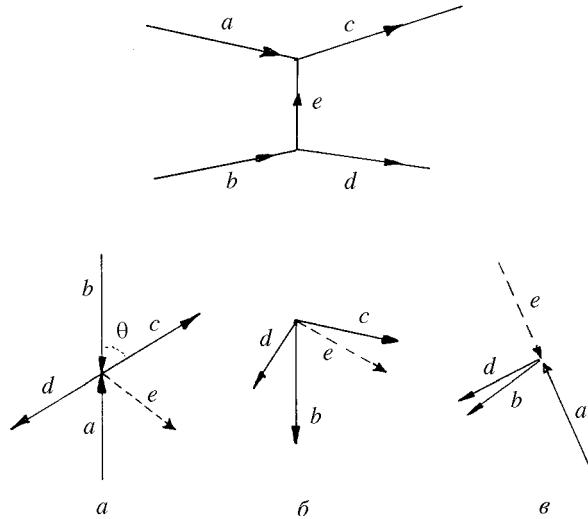


Рис.2. Диаграммы дифракционного процесса

ный угол вращения плоскости распада в системе ГД имеет тот же смысл с углом Треймана — Янга.

Для больших спинов обменной частицы связь спина с угловым распределением распада не доказана аналитически. Из сохранения четности и углового момента следуют только ограничения на величину относительного орбитального момента:  $|J_c - J_e| \leq L \leq |J_c + J_e|$ . Так, для рождения резонансов, принадлежащих ненатуральной серии по четности  $L = J_e$  ( $0^-, 1^+$  ...), это накладывает условие на элементы матрицы плотности. При  $J_c > J_e$  в матрице плотности ненулевые члены будут только в том случае, когда  $J_c^z \leq J_e^z$ , и для амплитуд с  $J^z = 0$  ненулевые члены только те, когда  $(J_e + L + J)$  — четное.

При одной и той же энергии падающей частицы угол поворота спиральной системы и системы ГД зависит только от величины передачи. Для интересующих нас процессов, идущих, в основном, при малых передачах, этот угол составляет величину  $\sim 3,5^\circ (\arctg P/q_{\parallel})$ , и при переходе из одной системы в другую важны эффекты релятивистского поворота спина, так как спиральность системы является лоренц-инвариантной величиной. В исследуемом процессе есть две идентичные частицы, для описания конечного состояния которых существуют два набора углов Эйлера. Принятым выбором углов Эйлера является набор углов  $\theta$  и  $\varphi$   $\pi^+$ -мезона, задающих ориентацию плоскости распада, а угол  $\gamma$  дает ориентацию плоскости, содержащей импульсы двух отрицательных мезонов относительно направления  $\pi^+$ -мезона. При этом ось  $z$  выбрана вдоль импульса падающей частицы в системе  $3\pi$ -покоя, а ось  $y = \mathbf{p}_{\text{отд}} \times \mathbf{p}_{\pi^-}$  есть нормаль к плоскости рождения. При фиксированной энергии падающего пучка в области масс  $3\pi$ -системы и малого интервала  $t$ -передачи имеем, таким образом, пять переменных, описывающих процесс  $(s_1, s_2, \theta, \gamma, \varphi)$ .

**Метод парциально-волнового анализа.** Мощный метод парциально-волнового анализа был развит группой Иллинойского университета [38,39] для анализа процесса дифракционного рождения  $\pi^+\pi^-\pi^-$ -системы на водородной мишени. Для данной спиральности протона  $3\pi$ -система с массой  $M_{3\pi}$  и 4-передачей  $t'$  рождается в состоянии с полным угловым моментом  $J^P$  и магнитным квантовым числом  $M = J_z$ . В дальнейшем образованное состояние  $J^P M$  рассматривается как состоящее из промежуточного дипионного состояния со спином  $j$  и магнитным числом  $m$  и с орбитальным моментом  $l$  «холостого»  $\pi^-$ -мезона. Дипион распадается на два пиона, и угловое распределение пиона в системе покоя дипиона определяется состоянием  $|jm\rangle$ .

Состояние свободной частицы  $|p\lambda ms\rangle$  полностью определяется ее массой  $m$ , спином  $s$ , импульсом  $p$  и спиральностью  $\lambda$ .

В спиральном представлении амплитуда процесса  $\pi^- + A \rightarrow 3\pi + A'$  может быть записана в виде

$$f_{\Lambda\lambda_A\lambda_{A'}}^J = \langle P_{3\pi}\Lambda, P_A\lambda_{A'} | T | P_{\pi^-}, P_A\lambda_A \rangle,$$

где  $J, \Lambda$  — спин и спиральность  $3\pi$ -системы;  $\lambda_A, \lambda_{A'}$  — спиральности начального и конечного состояний ядра. Все импульсы даны в спиральной системе. Для определения амплитуды в  $t$ -канале необходимо перейти в систему Готфрида — Джексона, в которой осью квантования является направление падающего  $\pi^-$ -мезона в  $3\pi$ -системе покоя. Для перехода необходимо повернуть ось квантования в спиральной системе на угол  $\beta(t)$  вокруг нормали к плоскости рождения до направления падающего мезона:

$$F_{M\lambda_A\lambda_{A'}}^J = \sum_{\Lambda} d_{M\Lambda}^J(\beta) f_{\Lambda\lambda_A\lambda_{A'}}^J.$$

Теперь нам необходимо задать полный набор состояний по спину, четности  $3\pi$ -системы, спину, четности, орбитальному моменту дипиона и пиона с тем, чтобы сделать парциально-волновое разложение состояния  $3\pi$ . Так как на опыте измеряются импульсы частиц, а в теоретическом выражении амплитуда представлена в угловых переменных, то необходимо установить связь этих базисов. Набор переменных  $\{p_1 p_2 p_3 m_1 m_2 m_3\}$ , где  $p, m$  — импульсы и массы частиц, эквивалентен набору  $\{P_{123} M_{123} \phi \vartheta M_{13} \psi\}$ , где  $P_{123}$  — импульс  $3\pi$ -системы в с.ц.м.,  $M_{123}$  — инвариантная  $3\pi$ -масса,  $\phi, \vartheta$  — азимутальный и полярный углы дипиона ( $\pi^+ \pi^-$ ) в системе покоя  $3\pi$ -системы (система ГД),  $M_{13}$  — инвариантная масса дипиона,  $\psi$  и  $\chi$  — азимутальный и полярный углы частицы  $\pi^+$  в  $\pi^+ \pi^-$ -системе покоя. В системе ГД ось  $z$  направлена по импульсу пучка  $\mathbf{z} = \mathbf{p}_{\pi^-}$ , а нормаль к плоскости рождения  $\mathbf{y} = \mathbf{p}_{\text{отд}} \times \mathbf{z}$  и  $\mathbf{x} = \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ , тогда  $\cos \vartheta = \mathbf{p}_{\pi^+} \cdot \mathbf{z}$ , а  $\phi$  — азимутальный угол  $\pi^+ \pi^-$  в  $3\pi$ -системе покоя. Для определения углов  $\psi$  и  $\chi$  нужно перейти в систему покоя частиц ( $\pi^+ \pi^-$ ). В этом случае  $\cos \chi = -\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_3$ .

В представлении углового момента, пользуясь свойствами квантово-механического волчка, можно связать состояние  $3\pi$ -системы  $|P_{123} M_{123} \phi \vartheta M_{13} \psi \chi\rangle$  с угловыми моментами  $|P_{123} \Lambda M_{13} j \lambda\rangle$ , где  $\Lambda, J$  — спиральность и спин  $3\pi$ -системы,  $j, \lambda$  — спин и спиральность ( $\pi^+ \pi^-$ )-системы.

$$\begin{aligned} \langle P_{123} M_{123} \phi \vartheta M_{13} \psi \chi | P_{123} \Lambda(JM_{123}) M_{13} j \lambda \rangle = \\ = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J^*}(\phi, \vartheta, 0) D_{\lambda 0}^{j^*}(\psi, \chi, 0), \end{aligned}$$

при этом следует воспользоваться связью двух состояний с одинаковыми квантовыми числами, но имеющими различную ориентацию:

$$|M, knu\rangle = \sum_{M'} D_{MM'}(knu) |M'\rangle.$$

Амплитуда процесса в состоянии определенного углового момента будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_{\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P} = \sum_{J\Lambda j\lambda} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J^*}(\phi, \vartheta, 0) D_{\lambda 0}^{j^*}(\psi, \chi, 0) \times \\ \times \langle P_{123} \Lambda(JM_{123}) M_{13} j \lambda, P_{A'} \lambda_{A'} | T | P_\pi - P_A \lambda_A \rangle. \end{aligned}$$

Если теперь амплитуду процесса выразить через состояние определенного относительного углового момента  $l$  между дипионом ( $\pi^+ \pi^-$ ) и холостым  $\pi^-$  и перейти от углов  $\phi, \vartheta$  для дипиона к углам  $\phi, \theta, \gamma$ , где  $\phi, \theta$  — азимутальный и полярный углы  $\pi^+$  в  $3\pi$ -системе покоя, а угол  $\gamma$  определяет направление проекции  $\pi^-$  на плоскость, перпендикулярную направлению  $\pi^+$ , то в этом случае амплитуда будет иметь вид

$$F_{\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P} = \sum_{JMv} \sqrt{2J+1} D_{Mv}^{J^*}(\phi, \theta, \gamma) \sum_{lj} h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j} G_v^{J^P l j} (s_1 s_2 M_{123}),$$

где  $v$  — спиральность  $\pi^- \pi^-$ -системы, амплитуда  $h$  ответственна за рождение системы в данном квантовом состоянии, а  $G$  — за распад.

Так как сечение процесса есть квадрат этой амплитуды, то мы можем ввести матрицу плотности

$$\rho_{J^P M' \Lambda' \Lambda}^{ll' jj'}(s, t, M_{3\pi}, s_2) = \sum_{\lambda_A \lambda_{A'}} h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j} (h_{\Lambda' \lambda'_{A'} \lambda'_{A'}}^{J' P' l' j'})^*.$$

Требование сохранения четности и инвариантности относительно вращений позволяет выразить матрицу плотности через состояния оператора отражения  $Y = e^{-i\pi J_y} P$ . Для неполяризованного начального состояния амплитуда  $h$  и матрица плотности могут быть выражены не через  $|J^P M\rangle$ , которые есть состояния определенного спина, четности и проекции спина,

а через их линейную комбинацию, содержащую состояния разной четности и оператора вращений.

Тогда состояние  $|J^P M\rangle$  с определенной четностью будет иметь вид

$$|J^P M \eta\rangle = C_M \left[ |J^P M\rangle + \eta \epsilon (-1)^M |J^P - M\rangle \right],$$

где  $\eta$  — собственное значение оператора отражения и  $\eta = \pm 1$ ,  $\epsilon = (-1)^{J+j+l}$ ,  $C_M = \sqrt{1/2}$  для  $M \neq 0$  и  $C_M = 1/2$  для  $M = 0$ . Как показано в работе [40], такое представление матрицы плотности имеет то преимущество, что состояния с  $M = 0$  и  $\eta = +1$  соответствуют естественному обмену, в то время как состояния с  $\eta = -1$  соответствуют неестественному обмену четностями. Для состояний с  $M = 1$  вклад ведет себя как  $1/S$ . Амплитуду для состояний с  $M \neq 0$  принято называть амплитудой с переворотом спина. Амплитуда рождения  $h$  принимает вид:

$$h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j \eta} = C_M \left[ h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j} + \eta \epsilon (-1)^M h_{-M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j} \right],$$

и матрица плотности для определенного состояния четности будет

$$\rho_{J^P M \eta J^{P'} M' \eta}^{ll' jj'} = \sum_{\lambda_A \lambda_{A'}} h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j \eta} (h_{M'\lambda_A' \lambda_{A'}}^{J^{P'} l' j' \eta})^*.$$

Суммирование по  $\lambda_A \lambda_{A'}$  отражает факт неполяризованного начального состояния, и непосредственно видно, что  $\rho$ -матрица диагональна относительно  $\eta$ . Связь  $\rho$ -матрицы с состоянием  $|J^P M\rangle$  имеет вид

$$\rho_{J^P M \eta J^{P'} M' \eta}^{ll' jj'} = 2C_M C_{M'} \left[ \rho_{J^P M \eta J^{P'} M' \eta}^{ll' jj'} + \eta \epsilon (-1)^M \rho_{J^P M \eta J^{P'} -M' \eta}^{ll' jj'} \right].$$

Заметим, что эта, так называемая расширенная  $\rho$ -матрица зависит от  $l$ ,  $l'$ ,  $j$ ,  $j'$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $M_{123}$  и  $s_2$ , т.е. зависит от переменных далиц-распределений, и она описывает рождение  $3\pi$ -системы с массой  $M_{3\pi}$  в состоянии  $|J^P M \eta\rangle$ , состоящей из дипиона с определенной массой, спином  $j$  и угловым моментом  $l$  относительно холостого мезона.

Простое рассмотрение структуры этой матрицы, полученной в общем виде без каких-либо предположений, показывает, что число элементов этой матрицы даже для малых значений  $J$  и  $l$  необычайно велико. Так, для  $J \leq 1$  число комплексных параметров составляет  $5 \times 5$ . Для  $J \leq 3$  число параметров  $29 \times 29$  с учетом состояний с разными  $J$  и четностью. Требование четности и эрмитовости состояний оставляет только действительные зна-

чения параметров. Таким образом, необходимо ввести упрощающие предположения.

Чтобы уменьшить число параметров, сделаны два основных предположения [39].

Первое основано на доказательстве, проведенном Ватсоном [41], что описание рождения двухчастичного резонанса адекватно описанию сильно-го двухчастичного взаимодействия в конечном состоянии. Это позволяет факторизовать двухчастичный вклад и представить амплитуду в виде

$$F_{\lambda_A \lambda_{A'}} = \sum_{\substack{j(\pi^+ \pi^+) = 0 \\ j(\pi^- \pi^+) = 0}}^{j_{\max}} + \sum_{\substack{j(\pi^- \pi^+) = 0 \\ j(\pi^- \pi^-) = 0}}^{j_{\max}} + \sum_{\substack{j(\pi^- \pi^-) = 0 \\ j(\pi^- \pi^-) = 0}}^{j_{\max}} .$$

Это так называемое изobarное приближение. Оно имеет также экспериментальное подтверждение. Как мы видели, в угловых распределениях и массовых спектрах  $m_{2\pi}$  преимущественный вклад дает  $S$ -состояние  $\pi^+ \pi^-$ -системы,  $\rho$ - и  $f$ -сигналы. Парциально-волновой анализ процессов  $\pi \rightarrow 2\pi$  [36] показал, что  $S$ ,  $P$ ,  $D$ -волны достаточно, чтобы описать данные. Это позволяет ограничиться  $j_{\max} \leq 2$ , однако включение высших состояний также возможно. Второе предположение основано на разложении полной амплитуды  $h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}$  для данной моды распада на амплитуду рождения данного состояния и его распада. Для этого амплитуду представим в виде

$$h_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j n \eta}(s, t, M_{123}, M_{12}) = \bar{h}_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j n \eta}(s, t, M_{123}) BW^{jn}(M_n),$$

где  $n$  — мода состояния,  $BW$  — функция Брейта — Вигнера для спина  $j$ -дипиона. В этом случае амплитуда  $\bar{h}$  не зависит от далитцевских переменных и имеет вид

$$\bar{h}_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P l j n \eta}(s, t, M_{3\pi}) = T_{M\lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P \eta}(s, t, M_{3\pi}) \mathcal{M}^{J^P l j n}(s, t, M_{3\pi}),$$

где  $T$  — амплитуда рождения  $3\pi$ -системы в состоянии  $J^P M \eta$ , а  $\mathcal{M}$  — матричный элемент распада. Видно, что  $T$  не зависит от индексов  $l, j, n$ , а  $\mathcal{M}$  не зависит от спиральностей  $\lambda_A, \lambda_{A'}$ .

Это предположение позволяет определить сокращенную матрицу плотности рождения:

$$\bar{\rho}_{J^P M \eta J'^{P'} M' \eta}(s, t, M_{3\pi}) = \sum_{\lambda_A \lambda_{A'}} T_{M \lambda_A \lambda_{A'}}^{J^P \eta} \left( T_{M' \lambda'_A \lambda'_{A'}}^{J'^{P'} \eta} \right)^*$$

Искомыми параметрами являются элементы  $\bar{\rho}$ -матрицы и комплексные параметры матричного элемента распада  $\mathcal{M}$ . Так как матричный элемент  $\mathcal{M}$  для каждого  $J^P$ -состояния один и тот же, то это позволяет с помощью нормализации состояний сделать его константой и находить только комплексные параметры для разных состояний ( $l j n$ ) для данного состояния  $J^P$ . Тем самым определим относительную фазу состояний, соответствующих данному  $J^P$ . В результате, например, для  $J^P = 1^+$  вместо 25 параметров необходимо найти 9 элементов  $\bar{\rho}$ -матрицы и 4 параметра  $\mathcal{M}$ , что дает 13 параметров. Для спина  $J^P = 3^+$ , соответственно, получим 42 параметра для случая отсутствия состояний с разными  $M$ . Зависимость параметров от переменных  $s, t$  и  $M_{3\pi}$  может быть получена при определении их в малом интервале переменных при достаточной статистике и разрешении. В действительности интервал не так уж мал, поэтому необходимо усреднять в каждом интервале по переменным  $t$  и  $M_{3\pi}$ .

Таким образом, сечение процесса  $\pi \rightarrow 3\pi$  равно

$$W(t, M_{3\pi}, s_1, s_2, \phi, \theta, \gamma) = \sum_{\substack{J^P M \eta \\ J'^{P'} M' \eta}} \mathcal{M}^{J^P M \eta} \bar{\rho}_{J^P M \eta} \left( \mathcal{M}^{J'^{P'} M' \eta} \right)^*$$

**Структура амплитуды распада.** Рассмотрим подробнее структуру амплитуды распада. Распад происходит через дипионное состояние  $(\pi^+ \pi^-)$  со спином  $j$  и орбитальным моментом  $l$  холостого  $\pi^-$  относительно дипиона. Разрешенные значения  $l$  определяются законом сохранения углового момента и четности:

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{j}, \quad P = (-1)^{l+j+1},$$

так что для  $J=0$  и  $l=J$   $P = (-1)^{J+1}$  ( $\epsilon\pi$ ); для  $J=1$ ,  $l=J+1$   $P = (-1)^{J+1}$  ( $\rho\pi$ ). Связь матричного элемента распада с орбитальным моментом  $l$  имеет вид

$$\mathcal{M}^{J^P M \eta} = \sum_{lj} C^{J^P l j} \mathcal{M}^{J^P M \eta l j}.$$

Пользуясь свойствами сохранения четности и инвариантностью вращений, получаем

$$\mathcal{M}^{J^p M \eta} = C_M \left[ \mathcal{M}^{J^p M} + \eta \varepsilon_J (-1)^M \mathcal{M}^{J^p - M} \right].$$

Для получения амплитуды распада  $\mathcal{M}^{J^p M}$  в явном виде рассмотрим два последовательных распада:  $(3\pi) \rightarrow \pi^+ + (\pi^- \pi^-)$  и  $(\pi^- \pi^-) \rightarrow \pi^- + \pi^-$ , характеризующихся амплитудами  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Тогда

$$\mathcal{M}^{J^p M} = \sum_v \langle \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 | A_2 | \mathbf{P}_{12} v \rangle B(P_{12}) \langle \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_{12} v | A_1 | J^p M \rangle,$$

где  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{\pi^- 1}$ ,  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{\pi^- 2}$ ,  $\mathbf{P}_3 = P_{\pi^+}$ ,  $\mathbf{P}_{12} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$ ,  $v$  — спиральность  $(\pi^- \pi^-)$ -системы,  $B(P_{12})$  — оператор распространения  $(\pi^- \pi^-)$ -системы. Амплитуда  $\langle \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_{12} v | A_1 | J^p M \rangle$  описывает распад  $3\pi \rightarrow P_3 + (P_1 + P_2)$  для состояния  $J^p M$ , и амплитуда  $\langle \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 v | A_2 | \mathbf{P}_{12} v \rangle$  описывает распад  $\mathbf{P}_{12} \rightarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ . Если теперь амплитуду  $\mathcal{M}$  выразим через состояния определенного  $J$ ,  $J_z = M$  и спиральности  $(\pi^- \pi^-)$ -системы, то непосредственно выделим угловую зависимость амплитуды распада и далее амплитуду:

$$\mathcal{M}^{J^p M} = \sum_v^J \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}} D_{Mv}^{J^*}(\phi, \theta, \gamma) G_v^{J^p}(s_1, s_2),$$

где  $G_v$  — далитецкая амплитуда. Пользуясь соотношениями симметрии

$$D_{Mv}^{J^*}(\phi, \theta, \gamma) = (-1)^{M-v} D_{-M-v}^J(\phi, \theta, \gamma)$$

и

$$G_{-v}^{J^p} = \varepsilon_J (-1)^v G_v^{J^p}, \quad \varepsilon_J = P(-1)^{J+1},$$

окончательно имеем

$$\mathcal{M}^{J^p M \eta} = C_M \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}} \sum_v \left[ D_{Mv}^{J^*}(\phi, \theta, \gamma) + \eta D_{Mv}^J(\phi, \theta, \gamma) \right] G_v^{J^p}(s_1, s_2),$$

где  $C_M = 1/2$  для  $M=0$  и  $C_M = 1/\sqrt{2}$  для  $M \neq 0$ . Таким образом, амплитуда распада выражена через далитецкую амплитуду  $(\pi^- \pi^-)$ -системы.

Амплитуда  $G_v$  может быть выражена в терминах состояний  $(\pi^+ \pi^-)$ -системы. В этой системе, как известно, присутствуют дипионные резонансы

$\epsilon(j^P = 0^+)$  и  $\rho(j^P = 1^-)$  и т.д. Так как два отрицательных  $\pi$ -мезона неразличимы, то амплитуда должна быть симметрична при перестановке координат отрицательных  $\pi$ -мезонов (бозе-симметризация). Поэтому

$$G_v^{J^P}(s_1, s_2) = G_v^{J^P}(s_1 s_2 \pi_1^-) + G_v^{J^P}(s_1 s_2 \pi_2^-).$$

Теперь запишем сечение процесса  $\pi \rightarrow 3\pi$  в полном виде:

$$\begin{aligned} W(t, M_{3\pi}, s_1, s_2, \phi, \theta, \gamma) &= \sum_{\substack{J^P M \eta l j n \\ J' P' M' \eta' l' j' n'}} \mathcal{M}^{J^P M \eta l j n} C^{J^P l j n} \times \\ &\times \bar{\rho}_{J^P M \eta J' P' M' \eta'} \left( C^{J' P' l' j' n'} \mathcal{M}^{J' P' M' \eta' l' j' n'} \right)^*, \end{aligned}$$

где  $\bar{\rho}$  — сокращенная матрица плотности. Для  $\mathcal{M}$  с учетом второго предположения имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{J^P M \eta l j n} &= \sum_v \sqrt{2J+1} C_M \left[ D_{Mv}^{J^*}(\phi, \theta, \gamma) + \eta D_{Mv}^J(\phi, \theta, \gamma) \right] B W^{jn} P^l \times \\ &\times q^j G_v^{J^P l j n} F T(t) \left[ \frac{1}{M_{3\pi}} \int \sum_v |G_v^{J^P l j n}(s_1 s_2 M_{3\pi}) P^l B W^{jn} q^j|^2 ds_1 ds_2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

при этом мы учли нормировку состояний и усреднение по интервалу  $t$  и  $M_{3\pi}$ .

Обсудим некоторые свойства этого сечения.

1. Вследствие ортогональности матриц вращения  $D_{Mv}^J$  невозможна интерференция состояний с разными  $J$  и  $M$ .
2. Из-за свойств диполь-амплитуд  $G_v = \epsilon(-1)^v G_{-v}$  состояния с разной четностью не интерферируют.
3. Интерференция состояний с одинаковыми  $J^P M \eta$  возможна только для разных  $n$ , т.е. для разных каналов. Состояния  $0^-S$  ( $\epsilon\pi$ ),  $0^-P$  ( $\rho\pi$ ) будут интерферировать так же, как состояния  $1^+S$  ( $\rho\pi$ ) и  $1^+P$  ( $\epsilon\pi$ ). Для одинаковых  $n$  возможна интерференция только с разными  $l$  (т.е. для  $1+S$ - и  $1+D$ -волн). Заметим, что характер интерференции для неодинаковых частиц в конечном состоянии (например,  $K\pi\pi$ -система) будет иметь другие свойства.
4. Факт интерференции состояний с разной модой распада для одинаковых частиц обусловлен бозе-симметризацией амплитуды. Это обстоятельство имеет определяющее значение для возможности измерения реальной и

мнимой частей элементов матриц плотности и автоматически устраняет непрерывную неоднозначность решения, т.е. непрерывный набор параметров, удовлетворяющих сечению. Вследствие этого второе предположение для одинаковых частиц в конечном состоянии применяется для уменьшения числа параметров. Для неодинаковых частиц ( $K\pi\pi$ ) это предположение имеет существенное значение. Допустим, что этого предположения нет для одинаковых частиц. Тогда сечение процесса будет выражено через расширенную матрицу, а это значит, что для каждого состояния дипионной системы будет существовать своя матрица плотности, и элементы матрицы плотности будут определяться с точностью до функции, зависящей от массы дипиона и не зависящей от спиновых индексов. В результате будет существовать непрерывный набор параметров, удовлетворяющих сечению. Поведение сечения в зависимости от инвариантной массы конечного состояния может приводить к исчезновению этой неопределенности в том случае, когда произведения двух дипионных пропагаторов  $BW^j(BW^{j'})^*$  будут различаться во всем интервале исследуемых масс. В случае узких резонансов такого различия нет, так как  $BW^j(BW^{j'})^*$  практически константа. Вторая проблема, возникающая в случае отказа от второго предположения, состоит в том, что мнимая часть матрицы плотности не во всем диапазоне переменных может быть измерена. Дело в том, что в выражении для сечения две величины: расширенная матрица плотности и функция Брейта — Вигнера являются комплексными, более того, функции Брейта — Вигнера входят как произведение

$$BW^j(BW^{j'})^* = |BW^j| \cdot |BW^{j'}|^* \exp[i(\varphi - \varphi')].$$

Вследствие этого необходимо проверять, действительно ли  $\cos(\varphi - \varphi')$  и  $\sin(\varphi - \varphi')$  не являются нулями по всему дипион-распределению. В этой области переменных, где  $\sin(\varphi - \varphi')$  обращается в нуль, неизмерима мнимая часть матрицы плотности. Опять для узких резонансов величина  $BW \cdot BW^*$  становится реальной, и возникает принципиальная невозможность измерения мнимой части. Таким образом, чтобы избежать указанных трудностей, следует применить указанное предположение.

5. Другое важное свойство состоит в том, что парциальные волны с одним спином, четностью и  $M; J^P M$ , но с различными  $l$  и  $j$  дипиона, являются когерентными. Степень когерентности можно определить следующим образом:

$$K_{ab} = \frac{|\rho_{ab}|}{(\rho_{aa} \cdot \rho_{bb})^{1/2}} \in (0, 1),$$

где  $a, b$  есть набор квантовых чисел  $J^P M \eta l j$  и  $J'^{P'} M' \eta' l' j'$ . Диагональные члены  $\rho_{aa}, \rho_{bb}$  дают интенсивность амплитуд, а недиагональный определяется относительной фазой двух амплитуд. Для чистых квантово-механических состояний  $K_{ab} \equiv 1$ .

Это означает, что относительная фаза двух состояний есть разность фаз амплитуд  $a$  и  $b$ . Существенное отличие фактора  $K_{ab}$  от единицы ( $\ll 0,5$ ) приводит к тому, что интерпретация фаз становится более сложной.

Таким образом, оба приближения существенны и позволяют устраниить неопределенности, обеспечить единственность решения и уменьшить число параметров.

Со сделанными приближениями связаны и недостатки изложенного метода.

1. Парциальное разложение состояния  $|J^P M\rangle$  в три свободных мезона не рассматривается. Для компенсации в какой-то степени этого недостатка в амплитуду добавлен свободный член, не зависящий от спиновых индексов и вследствие этого не интерферирующий с другими амплитудами, пропорциональный вкладу трехмезонного фазового пространства. Большая интенсивность этого члена может свидетельствовать о недостаточном наборе волн для описания данных, некорректной  $t$ - и  $M_{3\pi}$ -зависимости парциальных волн в данном интервале переменных, слишком широком интервале переменных и сильном усреднении амплитуд по большому интервалу.

2. Парциально-волновой метод позволяет определить относительную фазу двух амплитуд и их зависимость от массы  $3\pi$ -системы, но не абсолютную фазу; а индивидуальная фаза образования входит в нормировку. Этим неупругий процесс отличается от процесса упругого рассеяния, где используется метод фазового анализа, который содержит сведения как о рассеянной волне, так и о нерассеянной волне, определяющей абсолютную фазу. Поэтому, чтобы результаты парциально-волнового анализа представить в виде диаграмм Аргана, необходимо определить абсолютную фазу для каждого значения  $M_{3\pi}$ , так как только относительная фаза известна, а абсолютная фаза является свободным параметром для всех волн. Это может быть сделано, если применить  $K$ -матричный формализм или метод паде-аппроксимантов [42], который использует всю информацию об относительных фазах и интенсивностях волн в широком интервале масс  $M_{3\pi}$ . Вообще говоря [43], можно ожидать, что абсолютная фаза сильнее зависит от 4-передачи, чем от массы  $M_{3\pi}$ . Слабую зависимость от массы экспериментально подтверждает поведение модуля недиагонального элемента расширенной  $\rho$ -матрицы, фаза которого есть разность фаз между двумя амплитудами рождения

$\Phi_{ab} = \arg(\rho)$ , где  $ab \in J^P M \eta l j$ . Модуль этого элемента, нормированный на соответствующие диагональные члены этих амплитуд, дает фактор когерентности, который, как увидим ниже, монотонно уменьшается с ростом  $M_{3\pi}$ . Этот факт, собственно, и является экспериментальным обоснованием введения сокращенной  $\bar{\rho}$ -матрицы  $\rho = c \bar{c}^*$ , а относительная фаза  $\Phi_a - \Phi_b$  определяется из  $cc^* = |c| \cdot |c^*| \exp i\Delta\phi$ , т.е. для данного  $|J^P M\rangle$  и разных мод распада  $\bar{\rho}$ -матрица одна.

3. Как было показано в ряде работ [44—46], второе приближение приводит к тому, что  $3\pi$ -состояние не удовлетворяет условию унитарности. Вследствие этого авторами работы [22] была получена система унитарных уравнений, решение которых позволило получить набор  $3\pi$ -состояний, удовлетворяющих как трехчастичной унитарности, так и двухчастичной. Уравнения трехчастичной унитарности получены в форме уравнений Гайтлера, связывающих  $T$ -матрицу трехчастичного рассеяния с реальной  $K$ -матрицей [45]. Решение этих уравнений по методу Фаддеева позволило унитаризовать матричный элемент. Таким образом, трехчастичная амплитуда может быть представлена как сумма двухчастичных вкладов. Унитарность двухчастичной амплитуды получена из требования правильного порогового поведения амплитуды в соответствии с теоремой Ватсона [41].

**Унитарность состояний.** Для  $3\pi \rightarrow 3\pi$ -рассеяния  $S$ -матрица может быть выражена через лоренц-инвариантную  $T$ -матрицу:

$$S_{ij} = \delta_{ij} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} - p_{j1} - p_{j2} - p_{j3}) \frac{T_{ij}}{2^3 \sqrt{E_{i1} E_{i2} E_{i3} E_{j1} E_{j2} E_{j3}}}.$$

Так как условие унитарности для  $S$ -матрицы есть  $\sum_k S_{ik} S_{jk}^* = \delta_{ij}$ , то урав-

нение унитарности для  $T$ -матрицы, если использовать инвариантность относительно обращения времени и сохранение четности, имеет вид:  
 $\text{Im } T_{ij} = (T_{ij} - T_{ij}^*) / 2i$ .  $T$ -матрица описывает переход трех частиц в начальном состоянии в три частицы в конечном состоянии. Выразим оба состояния, как начальное, так и конечное, через состояние  $\pi_1$  и дипион  $\pi_2 \pi_3$ . Начальное состояние имеет переменные  $s_1$ ,  $\Omega_1$ ,  $\bar{\Omega}_1$ , где  $\sqrt{s_1}$  — масса пиона;  $\Omega_1$  — угол ориентации: полярный и азимутальный дипиона в  $3\pi$ -системе покоя;  $\bar{\Omega}_1$  — углы ориентации в системе покоя дипиона. Переменные конечного состояния будут  $s'_1$ ,  $\Omega'_1$ ,  $\bar{\Omega}'_1$  соответственно. Тогда  $T$ -матрица может быть выражена через парциальные амплитуды и функции углового момента:

$$T = \sum_J \sum_{lj} \sum_{l'j'} T_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) \sum_M Z_{l'j'}^{JM}(\Omega'_1 \bar{\Omega}'_1) Z_{lj}^{JM^*}(\Omega_1 \bar{\Omega}_1),$$

где

$$Z_{lj}^{JM} = \sum_{MlMj} \langle JM | l j M_l M_j \rangle Y_l^{Ml}(\Omega_1) Y_j^{Mj}(\bar{\Omega}_1).$$

Подставляя выражение для  $T$ -матрицы в уравнение унитарности, получим парциальное разложение

$$\text{Im } T_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) = \sum_{l''j''} d(\sqrt{s''_1}) T_{l'j'l''j''}^J(s'_1 s''_1) \rho T_{ljl''j''}^{J^*}(s_1 s''_1),$$

где  $\rho = \frac{2}{(4\pi)^5} \frac{p''_1 q''_1}{M_{3\pi}}$ ,  $p_1$  — относительный импульс дипиона и  $q_1$  — импульс пиона в системе покоя дипиона.  $T$ -матрица может быть выражена через соответствующую реальную  $K$ -матрицу:  $T = K + iK\rho T$ . Так как  $T = T_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) = T_{ljlj}^J(s_1 s'_1)$ , то соотношение унитарности принимает вид

$$T_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) = K_{l'j'lj}^J(s'_1 s_1) + \\ + i \sum_{l''j''} \int_{2m\pi}^{M_{3\pi}-m_\pi} d(\sqrt{s''_1}) K_{l'j'l''j''}^J(s'_1 s''_1) \rho T_{ljl''j''}^J(s''_1 s_1).$$

Решение этого интегрального уравнения по методу Фаддеева позволило сделать унитаризацию матричного элемента  $M^{J^P M}$ , который был получен в форме  $M = R_{lj}(s_1 M_{3\pi}) Z_{lj}^{JM} + (1 \rightarrow 2)$ , где  $R$  — функция Брейта — Вигнера,  $Z$  — функция углового момента.  $K$ -матрицу представим как сумму двухчастичных  $K$ -матриц с третьей частицей-спектатором. Таким образом, трехчастичные резонансные состояния, распадающиеся в три мезона, не будут включены. Такая унитаризация состояний соответствует экспериментальным данным, в которых наблюдаются трехчастичные резонансы в системе дипион + пион.  $T$ -матрица имеет вид  $T = T_1 + T_2 + T_3$ , где матрицы соответствуют взаимодействию частиц  $\pi_2 \pi_3$ ,  $\pi_1 \pi_3$  и  $\pi_1 \pi_2$ . Это позволяет  $T$ -матрицу выразить через двухчастичную матрицу  $t$ :

$$T_1 = t_1 + it_1 \rho(T_2 + T_3),$$

$$T_2 = t_2 + it_2 \rho(T_1 + T_3),$$

$$T_3 = t_3 + it_3 \rho(T_1 + T_2),$$

$$t_i = (1 - iK_i \rho)^{-1} K_i$$

Если пренебречь взаимодействием двух одинаковых мезонов ( $T_3 = 0$ ) и ввести оператор перехода от состояния  $(\pi_1 \pi_3) \pi_2$  к  $(\pi_2 \pi_3) \pi_1 - a_{12}$ , то будем иметь одно уравнение:

$$T_1 = t_1 + it_1 \rho a_{12} T_2.$$

Если умножить справа это уравнение на  $|\psi_i\rangle$ , то получим матричный элемент распада:  $P_1 = R_1 + it_1 \rho a_{12} P_2$ , где  $R_1$  — функция Брейта — Вигнера. Подставляя явный вид  $t_1$ , имеем

$$P_a(s_1) = R_a(s_1) + ie^{i\delta_a} \sin \delta_a \sum_b a_{12} P_b(s_2),$$

где  $\delta_a$  — фазовые сдвиги ( $\pi\pi$ )-рассеяния;  $a, b$  — угловые моменты пар  $(lj)$ . Учитывая, наконец, изоспиновую структуру и пренебрегая вкладом состояний с изоспином больше двух, окончательно имеем два уравнения:

$$P_a^0 = R_a^0 + it_a^0 \rho a_{12} \left[ \frac{2}{3} P_b^0 + \frac{4}{3} P_b^1 \right],$$

$$P_a^1 = R_a^1 + it_a^1 \rho a_{12} \left[ P_b^0 + P_b^1 \right],$$

для изоспина, равного нулю и единице соответственно. Число параметров при фите данных остается тем же.

Таким образом, матричный элемент распада принимает вид  $\mathcal{M}^{JM} = P_{lj} Z_{lj}^{JM}$ , при этом  $P_{lj}$  — аналитическая функция диплонной массы. Что касается двухчастичной унитарности, то необходимо показать, что двухчастичный элемент имеет правильное пороговое поведение. Неунитарный матричный элемент содержит член  $R_a(s_1) + \sum_b a_{12} R_b(s_2)$ , где второй член появляется из-за бозе-симметрии амплитуды. Первый член — функция Брейта — Вигнера — имеет правильное пороговое поведение. Действительно,

$$R_a(s_1) = \frac{p^l q^j}{M_R^2 - s - iM_R \Gamma} = \frac{p^l q^j}{M_R \Gamma} \sin \delta e^{i\delta} = e^{i\delta} q^j r_a(s_1),$$

где  $r_a(s_1)$  — аналитическая функция без особенностей при пороге  $s_1 = 4m_\pi^2$ . Двигаясь вокруг особенности  $s_1 = 4m_\pi^2$  и приняв во внимание  $q \rightarrow -q$ ,  $\delta \rightarrow -\delta$ , получим, что  $R_a(s_1) \rightarrow (-1)^j e^{-i\delta} q^j r_a(s_1)$ . Это свойство и специальная форма  $R_a$ , требуемая теоремой Ватсона, доказывает унитарность. Второй член не удовлетворяет этому условию. Если использовать унитарные состояния, то получим  $P_a(s_1) + \sum_b a_{12} P_b(s_2) = R_a(s_1) + e^{i\delta} \cos \delta_a \sum_b a_{12} P_b(s_2)$ , и оба члена имеют необходимую форму и удовлетворяют теореме Ватсона [41]. Решение унитарных уравнений было сделано численно.

Анализ унитарных поправок показал [38], что полное число событий для состояний  $0^-$ ,  $1^+$ ,  $2^-$ ,  $3^+$  не изменяется. Число событий в состояниях  $1^+S$  и  $1^+P$  увеличивается, и избыток событий компенсируется за счет отрицательной интерференции состояний для случая  $\pi\pi$ -параметризации диплонной амплитуды, а для  $\epsilon$ -параметризации интерференция положительна. Для  $0^-S$ - и  $0^-P$ -состояний интерференция положительна и мала в обоих случаях. Учет унитарных перерассеяний приводит к тому, что для  $\pi\pi$ -параметризации в состоянии  $1^+$  из  $\rho\pi$ -системы больше образуется ( $\epsilon\pi$ ), что находит отражение в величине интерференционного члена. Форма интенсивностей волн не претерпевает изменений. Относительные фазы основных волн  $0^-$ ,  $1^+$  и  $2^-$  показывают такое же поведение, что и для неунитарной амплитуды, хотя сами фазы претерпевают сдвиги. Можно отметить, что их ход становится менее монотонным. Вклады и фазы высших спинов идентичны. Для унитарной амплитуды функция максимального правдоподобия принимает несколько меньшие значения — на 10-15 единиц. Таким образом, анализ унитарных поправок показал, что вклад этих поправок существен для волны  $1^+$ , мал для  $0^-$  и ничтожен для высших спинов.

**Фит данных.** Для определения комплексных параметров канала  $C^{J^Pij}$ , реальных и мнимых частей элементов матрицы плотности использован обобщенный метод максимума правдоподобия [44]. Функция, которая максимизировалась, имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^N \ln W(\tau) - N \int W(\tau) A(\tau, x) d\tau + \sum_{i=1}^N \ln A(\tau, x),$$

где  $\tau \in t$ ,  $M_{3\pi}$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$ ;  $N$  — число событий,  $A(\tau, x)$  — аксептанс спектрометра,  $x \in XYZ\Phi$  — координаты вершины события и азимутальный угол события относительно оси пучка.

Произведение  $W(\tau)A(\tau, x)$  есть вероятность найти событие в пространстве  $(\tau, x)$ . Величина  $A(\tau, x)$  для каждого события рассчитывается с помощью метода Монте-Карло, при этом событие удовлетворяет триггеру с учетом эффективности регистрации спектрометра и топологии события. Для событий, использованных в анализе, вероятность найти событие в  $(\tau, x)$  есть

$$\int WAd\tau = 1 \text{ или } \sum CC^*\rho \int mm^*Ad\tau = 1,$$

где

$$d\tau = \sum_i \frac{N_i}{N} \int d\phi d\cos \theta d\gamma ds_1 ds_2 \frac{dM_{3\pi}}{M_{3\pi}} dt,$$

так что процедура нормализации определяет нормализованную матрицу плотности  $\rho / \int WAd\tau$ .

Таким образом, число событий с данным набором квантовых чисел  $J^P M \eta l j$  и модой  $n$  есть

$$N |C^{J^P l j n}|^2 \rho_{J^P M \eta l' p' M' \eta'}$$

Основной особенностью фита данных является то обстоятельство, что элементы матрицы плотности в процессе фита не могут изменяться произвольно, а должны удовлетворять определенному требованию. Это требование состоит в том, что вероятность найти событие должна быть положительной, т. е.  $\rho$ -матрица должна быть положительно определена

$$|\rho_{J_1^P M_1 \eta J'_2 p'_2 M'_2 \eta}|^2 \leq \rho_{J_1^P M_1 \eta J'_1 p'_1 M'_1 \eta} \times \rho_{J_2^P M_2 \eta J'_2 p'_2 M'_2 \eta}.$$

Однако это условие нелинейно и, свою очередь, имеет трудности применения. Любую эрмитову матрицу (в нашем случае  $\rho$ -матрицу) можно описать ее  $N$  собственными значениями  $\lambda$  и  $N$  нормализованными собственными векторами  $\vartheta$ , т.е. любая эрмитова матрица может быть диагонализована унитарной матрицей, образованной из ее собственных векторов:

$$\rho_{ij} \equiv \lambda_1 \vartheta_i^1 \vartheta_j^1 + \dots + \lambda_N \vartheta_n^N \vartheta_j^N.$$

В этом случае условие положительно-определенной  $\rho$ -матрицы обеспечивается требованием, чтобы любое собственное значение  $\lambda > 0$ . Это условие накладывается на каждом шаге фита.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ПАРЦИАЛЬНО-ВОЛНОВОГО АНАЛИЗА

Определение набора парциальных волн, необходимых для описания данных, представляет собой итерационный процесс, так как даже при достаточно скромном ограничении величиной спина  $3\pi$ -системы  $J$ , орбитального момента дипиона относительно пиона  $l$  и магнитного числа  $M(J \leq 2, l \leq 2)$  необходимо 36 парциальных волн. Для  $3\pi$ -системы и неполяризованной мишени ранг  $\rho$ -матрицы равен 4, что соответствует амплитуде с переворотом спина и без переворота, и для двух значений  $\eta \pm 1$  оператора отражения. Вследствие этого вкладом волн меньше 1% с фактором когерентности  $> 0,6$  пренебрегали в окончательном фите данных. Вклад волн с  $\eta = -1$  был найден чрезвычайно малым и составлял менее 1%. Вклад волн с переворотом спина, для которых  $M \geq 1$ , оказался малым, за исключением нескольких волн, поэтому для обозначения  $3\pi$ -состояния примем  $J^P l$ , имея в виду, что  $M\eta = 0^+$ . Набор волн для описания данных существенно зависит от области масс  $3\pi$ -системы. Состояние  $1^+$  является доминирующим в области масс  $\leq 1,4$  ГэВ/с $^2$ , в которой дает основной вклад рождение  $a_1$ -резонанса. В области масс  $> 1,4$  ГэВ/с $^2$  основной вклад дает состояние  $2^-$  ( $\pi_2$ -резонанс).

В качестве дипионных резонансов были использованы  $1^-$  ( $\rho$ -мезон) и  $2^+$  ( $f$ -мезон). Что касается  $S$ -состояния дипионной системы, то ее параметризация была сделана как с  $\epsilon$ -резонансом ( $m_\epsilon = 0,77$  ГэВ/с $^2$ ,  $\Gamma_\epsilon = 0,4$  ГэВ), так и с фазой  $\pi^+ \pi^-$  и  $\pi^0 \pi^0$ -рассеяния [44]. Различная параметризация  $S$ -дипионной системы, главным образом, влияет на интенсивность интерференции между волнами  $1^+ S$  и  $1^+ P$  и практически не влияет на волны  $0^- S$ ,  $0^- P$ , где интерференция очень слабая. Использование фазы упругого  $\pi^+ \pi^-$ -рассеяния или  $\pi^0 \pi^0$ -рассеяния дает одинаковый результат, поэтому будем приводить результаты с одной из них, в частности, с фазой  $\pi^+ \pi^-$ -рассеяния. На рис.3 приведены интенсивности волн  $0^- S$ ,  $0^- P$  и  $1^+ S$  для различных параметризаций. Интенсивность  $0^- S$ -волны, как видно, не зависит от параметризации, в то время как интенсивность волны  $1^+ S$  для  $\pi\pi$ -параметризации больше  $\epsilon$ -параметризации, и интерференция имеет разные знаки. Так, для  $\epsilon$ -параметризации интерференция большая и отрицательная в области порога  $\rho\pi$ -системы, в области больше 1 ГэВ/с $^2$  становится положительной, а для  $\pi\pi$ -параметризации — везде малая и отрицательная.  $\epsilon$ -параметризация систематически дает большую величину функции максимального правдоподобия.

Результатом анализа являются относительные фазы волн и матрица плотности. Рассмотрим интерпретацию относительных фаз. Ясно, что если

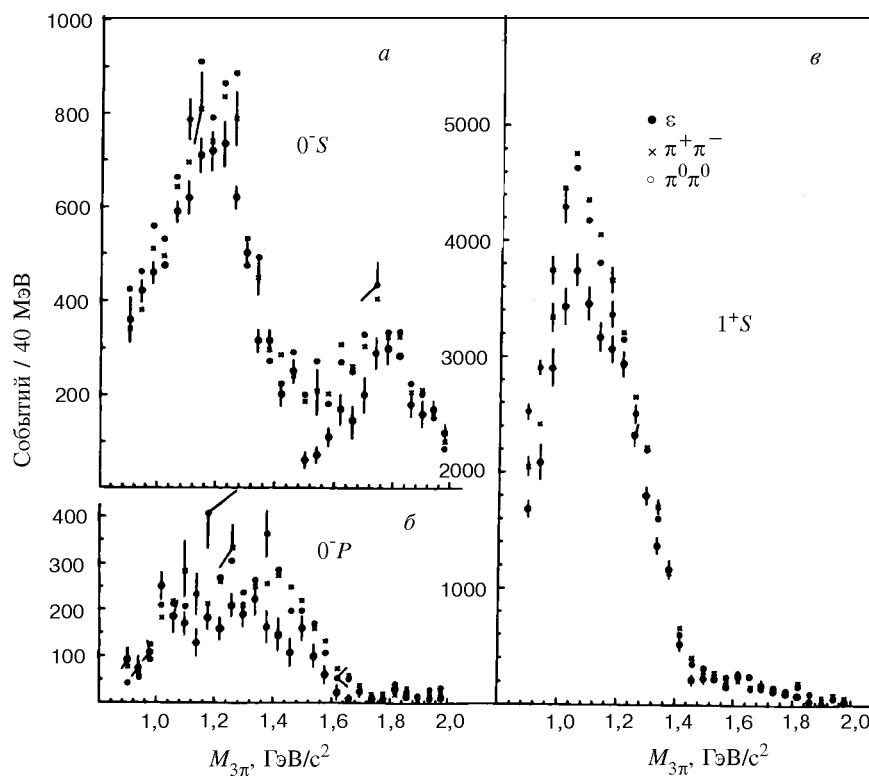


Рис.3. Интенсивность волн  $0^-S$ ;  $0^-P$  и  $1^+S$  для трех параметризаций дипионной амплитуды

волны когерентны, то относительная фаза двух нерезонансных волн не будет изменяться в зависимости от массы системы. Для резонансных волн, но и достаточно широких резонансов, относительная фаза также не будет изменяться. Присутствие резонансного состояния в одной из волн дает сильное движение относительной фазы (изменение на  $180^\circ$  на ширине резонанса). Существенно сложнее интерпретировать ход относительной фазы в случае присутствия нерезонансного фона в парциальной волне. Как показано в работе [45], скорость изменения резонансной фазы может сильно замедляться вблизи фоновой фазы, и ход относительной фазы может принимать ступенчатый характер. Присутствие нескольких фоновых вкладов сильно усложняет интерпретацию поведения относительной фазы.

Вследствие этого для визуализации резонансного поведения парциальных волн желательно найти опорную волну, которая когерентна с другими волнами и фаза которой слабо меняется в диапазоне  $3\pi$ -масс. Присутствие резонанса в данной парциальной волне устанавливается на основании всей совокупности результатов, т.е. принимается во внимание поведение относительно фаз и относительно других волн. В качестве такой опорной волны рассматривалась волна  $0^-P(\rho\pi)$ , которая имеет медленно меняющийся сигнал в широком интервале масс. Другим кандидатом была волна  $2^-P(\rho\pi)$ , но она ведет себя некогерентно в области масс до  $1,16 \text{ ГэВ}/c^2$ . В интервале  $1,16 \div 1,40 \text{ ГэВ}/c^2$  фаза  $0^-P$  медленно растет относительно  $2^-P (\sim 30^\circ)$ . Другой проверкой качества опорной волны является наблюдение резонансного характера хорошо установленного  $a_2$ -резонанса, волна которого  $2^+D1^+(\rho\pi)$  относительно  $0^-P$  имеет явное резонансное поведение. Фактор когерентности этих волн составляет величину 0,7.

В табл.1 представлены вклады основных волн для трех интервалов масс и групп ядер, но одного и того же диапазона передач ( $t' \leq 0,01 \text{ (ГэВ}/c)^2$ ). Из рис.4, где приведен процентный вклад волн, видно, что вклад  $0^-$  и  $2^-$  систематически уменьшается с атомным номером мишени, в то время как амплитуда  $1^+$  увеличивается.

**Таблица 1. Вклады основных волн для разных интервалов масс и групп ядер**

| $J^P l$                                | Be + C         | Al + Si        | Ti + Cu        | Ag + Ta + Pb   |
|--|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $0,9 < M_{3\pi} < 1,2 \text{ ГэВ}/c^2$ |                |                |                |                |
| $0^-S$                                 | $12,5 \pm 1,2$ | $12,5 \pm 0,7$ | $11,2 \pm 1,6$ | $9,6 \pm 1,0$  |
| $0^-P$                                 | $3,4 \pm 0,8$  | $2,3 \pm 0,3$  | $2,9 \pm 0,7$  | $2,0 \pm 0,4$  |
| $0^-$                                  | $17,8 \pm 1,7$ | $16,4 \pm 0,9$ | $15,8 \pm 2,1$ | $12,8 \pm 1,3$ |
| $1^+S$                                 | $64,4 \pm 3,4$ | $64,8 \pm 1,5$ | $68,8 \pm 3,6$ | $66,9 \pm 2,3$ |
| $1^+P$                                 | $10,0 \pm 1,2$ | $10,4 \pm 0,6$ | $8,2 \pm 1,2$  | $9,8 \pm 0,8$  |
| $1^+D$                                 | —              | —              | —              | —              |
| $1^+$                                  | $78,5 \pm 2,3$ | $80,9 \pm 1,1$ | $82,1 \pm 2,8$ | $85,3 \pm 1,8$ |
| $2^-P$                                 | $4,0 \pm 1,5$  | $3,0 \pm 0,7$  | $2,5 \pm 1,3$  | $2,1 \pm 1,0$  |
| $2^-S$                                 | —              | —              | —              | —              |
| $2^-$                                  | —              | —              | —              | —              |

| $J^P_l$                                | Be + C         | Al + Si        | Ti + Cu        | Ag + Ta + Pb   |
|--|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $1,2 < M_{3\pi} < 1,5 \text{ ГэВ/с}^2$ |                |                |                |                |
| $0^-S$                                 | $17,3 \pm 2,2$ | $14,4 \pm 1,0$ | $13,5 \pm 2,2$ | $9,4 \pm 1,3$  |
| $0^-P$                                 | $5,6 \pm 1,0$  | $5,4 \pm 0,5$  | $3,0 \pm 0,9$  | $3,8 \pm 0,7$  |
| $0^-$                                  | $23,1 \pm 2,7$ | $21,0 \pm 1,3$ | $16,9 \pm 2,6$ | $13,7 \pm 1,7$ |
| $1^+S$                                 | $38,3 \pm 3,1$ | $37,5 \pm 1,3$ | $43,7 \pm 3,1$ | $50,9 \pm 2,0$ |
| $1^+P$                                 | $10,7 \pm 1,7$ | $13,1 \pm 0,8$ | $11,5 \pm 1,6$ | $10,6 \pm 1,0$ |
| $1^+D$                                 | $3,5 \pm 0,8$  | $3,1 \pm 0,3$  | $4,4 \pm 1,0$  | $4,3 \pm 0,6$  |
| $1^+$                                  | $62,7 \pm 3,2$ | $66,8 \pm 1,5$ | $73,1 \pm 3,3$ | $79,7 \pm 2,2$ |
| $2^-P$                                 | $9,5 \pm 1,8$  | $7,9 \pm 0,8$  | $7,0 \pm 1,7$  | $3,4 \pm 0,9$  |
| $2^-S$                                 | $7,9 \pm 1,3$  | $4,3 \pm 0,5$  | $3,9 \pm 1,2$  | $2,3 \pm 0,6$  |
| $2^-$                                  | $13,5 \pm 1,9$ | $11,3 \pm 1,0$ | $9,9 \pm 2,1$  | $5,0 \pm 1,2$  |
| $1,5 < M_{3\pi} < 1,8 \text{ ГэВ/с}^2$ |                |                |                |                |
| $0^-S$                                 | $8,0 \pm 3,1$  | $10,5 \pm 1,6$ | $13,8 \pm 4,5$ | $13,3 \pm 2,8$ |
| $0^-P$                                 | $5,8 \pm 2,9$  | $2,1 \pm 0,6$  | $1,8 \pm 1,3$  | $2,3 \pm 1,1$  |
| $0^-$                                  | $14,6 \pm 4,0$ | $13,2 \pm 2,0$ | $16,0 \pm 5,2$ | $15,9 \pm 3,3$ |
| $1^+S$                                 | $13,5 \pm 2,8$ | $15,0 \pm 1,4$ | $12,1 \pm 3,2$ | $14,9 \pm 2,3$ |
| $1^+P$                                 | $13,3 \pm 2,6$ | $17,2 \pm 1,3$ | $13,3 \pm 2,9$ | $14,0 \pm 2,0$ |
| $1^+D$                                 | $11,1 \pm 2,3$ | $12,6 \pm 1,0$ | $14,6 \pm 2,8$ | $16,2 \pm 2,0$ |
| $1^+$                                  | $45,4 \pm 4,6$ | $52,2 \pm 2,2$ | $46,7 \pm 5,5$ | $53,1 \pm 3,7$ |
| $2^-P$                                 | $16,6 \pm 3,1$ | $12,2 \pm 1,3$ | $10,0 \pm 2,8$ | $10,0 \pm 2,0$ |
| $2^-S$                                 | $30,2 \pm 3,0$ | $28,0 \pm 1,4$ | $32,1 \pm 3,5$ | $26,1 \pm 2,3$ |
| $2^-$                                  | $39,9 \pm 3,9$ | $34,5 \pm 1,7$ | $37,2 \pm 4,2$ | $31,1 \pm 2,8$ |

Это обстоятельство непосредственно свидетельствует об  $A$ -зависимости вклада парциальных волн, обусловленных разным поглощением в ядре. С этой целью сечение когерентного образования различных парциальных волн, проинтегрированное по  $t'$  вплоть до  $0,01 \text{ (ГэВ/с)}^2$ , было профитировано с помощью формул теории многократного рассеяния. На рис.4 показано поведение парциального сечения образования волн  $0^-$ ,  $1^+$ ,  $2^-$  и полное сечение в диапазоне  $1 \div 1,2 \text{ ГэВ/с}^2$ .

Сечения поглощения волн  $0^-$  и  $2^-$  в пределах ошибок совпадают с сечением поглощения мезона нуклоном (24 мб), а сечение поглощения состояния  $1^+$  значительно меньше и составляет 15 мб. Как видно, поглощение парциальных волн в разных квантовых состояниях различно.

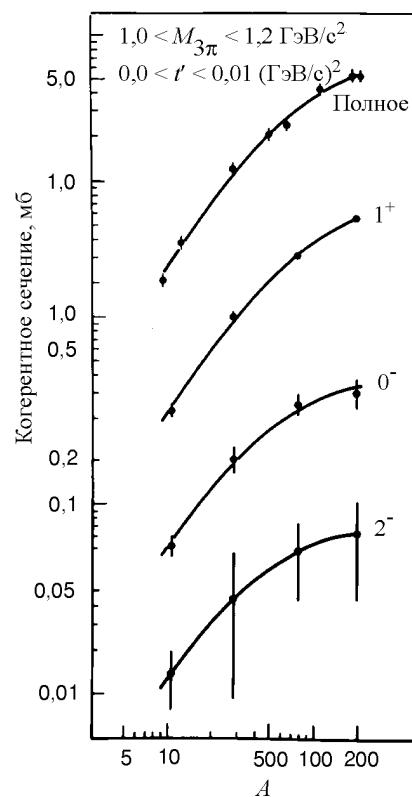


Рис. 4. Полное сечение рождения  $0^-$ ,  $1^+$ ,  $2^-$ -состояний

- а) Доминирующий вклад дают состояния  $0^-$ ,  $1^+$ ,  $2^-$ , которые рождаются за счет обмена натуральной серии по четности  $P = P_\pi(-1)^J$ , а вклад обмена ненатуральной серии ничтожно мал.
- б) Вклад состояний со значением  $\eta = -1$  оператора отражений ничтожно мал во всей области  $3\pi$ -масс.
- в) В  $t$ -канале когерентно образованная система имеет преимущественно минимальное значение третьей компоненты спина  $M = 0$ , которое разрешено для обмена ряда натуральной четности.
- г) Отсутствие состояний с  $\eta = -1$  и амплитуд с переворотом спина дает ранг  $\rho$ -матрицы не более 2, и высокая когерентность между волнами

Для того чтобы изучить вопрос о вкладе амплитуд с переворотом спина в поглощение данной парциальной волны, был исследован вклад волн с  $M \neq 1$ . Отметим, что волны с  $M > 1$  дают ничтожно малый вклад.

Парциально-волновой анализ был проведен для двух групп легких  $Be + C$  и тяжелых ядер  $Ag + Ta + Pb$  в широкой области масс для трех диапазонов  $0,9 \div 1,2$ ;  $1,2 \div 1,5$  и  $1,5 \div 1,8$  ГэВ/с<sup>2</sup>. В области малых  $t'$  вклад амплитуд составляет несколько процентов и имеет тенденцию к увеличению с ростом  $t'$ .

Так как состояние  $1^+$  доминирует в области масс  $< 1,5$  ГэВ/с<sup>2</sup>, то относительный вклад амплитуды  $1^+1^+$ , как следует из этих данных, составляет несколько процентов, т.е. состояние  $1^+$  практически рождается в чистом квантовом состоянии. Что касается волны  $2^-$ , то даже для малых  $t'$  относительный вклад состояний  $2^-1^+$  заметен и достигает 30%.

Таким образом, на основании исследования  $t'$ - и  $A$ -зависимости вклада парциальных волн можно сделать следующие заключения.

обеспечивает надежное определение относительных фаз между различными парциальными волнами.

- д) Вклад состояний  $1^+$  и  $0^-$  имеет разное поведение с изменением атомного номера мишени, при этом вклад состояния  $0^-$  не зависит от атомной массы мишени, а для состояния  $1^+$  растет.
- е) Поглощение состояния  $1^+$  в ядерной материи меньше, чем поглощении состояний  $0^-$  и  $2^-$ , т.е. поглощение в ядре различных спиновых состояний разное.

**Резонансные свойства состояния  $J^P LM\eta = 1^+ L 0^+$ ,  $a_1(1260)$ -мезон.**

Проблема существования  $a_1(1260)$ -резонанса относится к одному из давних вопросов в мезонной спектроскопии [45,47]: существует или нет этот резонанс с квантовыми числами  $1^+$  в канале распада на  $\rho\pi$ -систему? В кварковой модели это состояние есть  $P$ -волна в  $qq$ -системе  $I^G = 1^-, J^P = 1^+$ . Положительный по  $G$ -четности партнер  $a_1$ -мезона,  $b_1(1235)$ -мезон надежно установлен [47].  $b_1(1235)$ -мезон не рождается в дифракционных процессах (так как  $G = +1$ ) и распадается по каналу  $\omega\pi$ . Трудности установления резонансных свойств  $a_1(1260)$ -мезона в дифракционных процессах в основном связаны с тем, что падающий  $\pi$ -мезон диссоциирует в  $\rho\pi$ -систему в соответствии с механизмом Дрелла, Декка, Хида [49,48] и заселяет преимущественно  $1^+ S$  ( $\rho\pi$ )-волну. Вследствие этого большое число работ [51—54] по исследованию дифракции на водородной мишени не показывали существенного изменения фазы  $1^+ S$ -волны относительно других волн. Это интерпретировалось как указание против существования  $a_1$ -мезона.

Только исследования с большой статистикой на ядерных мишениях [45] и водородной мишени [50,49] позволили получить достоверные сведения о резонансе  $a_1$ .

Исследование резонансных свойств состояния  $1^+$  основано на волновом анализе данных в когерентной области, а также на  $t'$ - и  $A$ -зависимости относительных фаз.

В области масс  $3\pi$ -системы  $\leq 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$  набор волн следующий:  $0^- S$ ,  $0^- P$ ,  $1^+ S$ ,  $1^+ P$ ,  $2^- P$ ,  $2^- P1$ ,  $2^+ D1$ , кроме того, с  $M_{3\pi} = 1,12 \text{ ГэВ}/c^2$  включаясь волна  $1^+ D(\rho\pi)$ .

Сигнал  $0^- P$  значительно превышает волну  $2^+ D1$ . Волна  $2^-$  в этой области содержит большой вклад амплитуды  $2^- P1$ .  $t'$ -зависимость амплитуд  $1^+ S$  и  $2^- P$  для интервала масс  $1 \div 1,2 \text{ ГэВ}/c^2$  показана на рис.5. Наклон амплитуды  $1^+ S$  и высокая когерентность прямо связаны с дифракционным

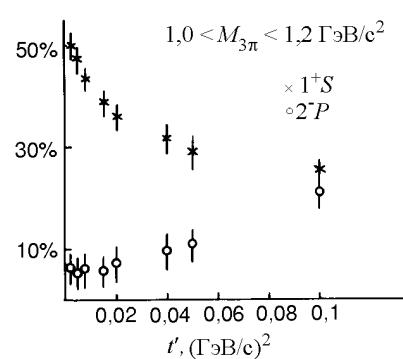


Рис.5.  $t'$ -зависимость  $1^+S$  и  $2^-P$  парциальных волн

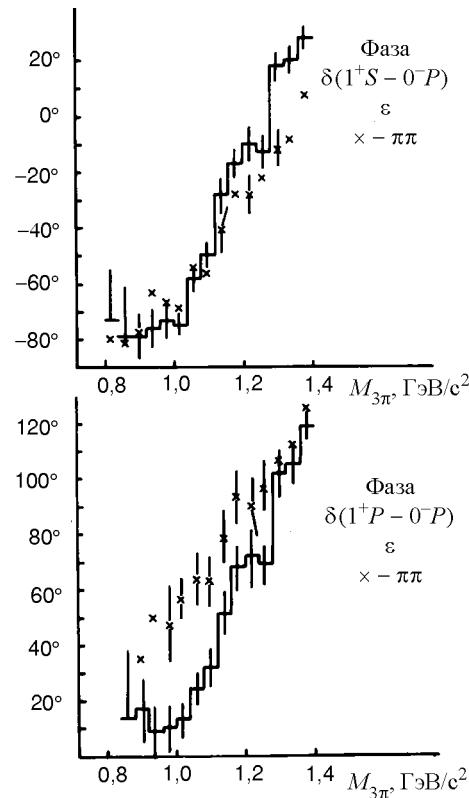


Рис.6. Фазы волн  $1^+S$  и  $1^+P$  относительно волны  $0^-P$  для  $\epsilon$ - и  $\pi\pi$ -параметризаций

механизмом рождения, в то время как волна  $2^-P$  имеет слабую когерентность и рождается недифракционно в области масс меньше  $1,2 \text{ ГэВ/с}^2$ . Относительные фазы волн  $\delta(1^+S - 0^-P)$ ,  $\delta(1^+P - 0^-P)$ ,  $\delta(1^+S - 0^-S)$  приведены на рис.6,7 для  $\pi\pi$ -параметризации и  $\epsilon$ -параметризации.  $1^+S$  изменяется на  $110^\circ$  и  $90^\circ$  относительно  $0^-P$  для двух параметризаций. Фаза  $1^+S$

относительно  $1^+P$  постоянная и составляет  $90^\circ$  во всей области масс, в то время как относительная фаза  $\delta(1^+P - 0^-P)$  показывает сильное изменение на ширине  $a_1$ -пика. Это обстоятельство свидетельствует о резонансном поведении двух волн, как  $1^+S$ , так и  $1^+P$ . Так как эти два состояния принадлежат одному и тому же  $J^P = 1^+$ , то следовало бы ожидать, что их относительная фаза будет равна  $0^\circ$  или  $180^\circ$ . Их относительная фаза зависит от параметризации диплонной амплитуды: для  $\epsilon$  она составляет  $90^\circ$ , а для  $\pi\pi$  —  $-120^\circ$ .

Хотя волны  $1^+S$  и  $1^+P$  могут принадлежать одному и тому же резонансу, но массовый спектр волны  $1^+P$  не имеет резонансного вида и не описывается функцией Брейта — Вигнера. Фаза  $1^+S$ -состояния относительно  $0^-S$  по-

тояна по области масс и равна  $-150^\circ$ , а волна  $0^-S$  относительно  $0^-P$ , как будет приведено ниже (рис.14), имеет сильное изменение фазы, что свидетельствует в пользу существования резонансных состояний в двух волнах  $1^+S$  и  $0^-S$ .

Для того чтобы понять поведение относительной фазы  $\delta(1^+S - 0^-P)$  в области масс  $0,8 \div 1,4$  ГэВ/с $^2$ , было предпринято изучение A- и  $t'$ - зависимостей этой фазы. Полное изменение фазы  $\delta(1^+S - 0^-P)$  увеличивается с ростом атомного номера мишени, составляя  $70^\circ$  для легких и  $\sim 130^\circ$  для тяжелых. Для легких ядер поведение разности фаз  $\delta(1^+S - 0^-P)$  одинаково как в когерентной, так и в некогерентной области, в то время как для тяжелых ядер эта фаза сильно меняется в области малых  $t'$ , а для больших  $t'$  изменение фазы имеет ту же величину, что и для легких ядер. Здесь целесообразно провести сравнение с данными, полученными на водородной мишени при  $64 \div 93$  ГэВ [30], и с данными на ядерных мишениях при 15 ГэВ [26]. Для водородной мишени изменение фазы составляет лишь  $65^\circ$  и совпадает с движением фазы  $(1^+S - 0^-P)$  для легких ядер, а также с изменением фазы в некогерентной области. Авторы [30] для получения сведений о резонансном характере  $1^+S$ -состояния привлекли расчеты по нерезонансной модели Декка.

Для определения параметров резонанса в состоянии  $1^+S$  был сделан анализ массового спектра  $1^+S$  в  $\epsilon$ -параметризации по формуле Брейта — Вигнера в предположении нерезонансного вклада механизма Декка. Так как массовый спектр  $1^+S$  зависит от параметризации дипионной амплитуды, то

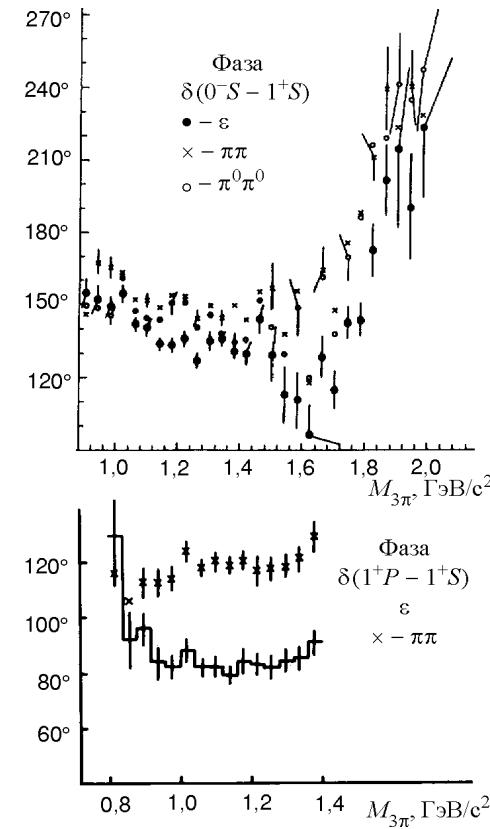


Рис.7. Относительные фазы  $(0^-S - 1^+S)$  и  $(1^+P - 1^+S)$

тем самым будут получены предварительные данные. Более аккуратный анализ с целью определения резонансных параметров дан ниже.

Массовый спектр  $1^+$  может быть описан выражением:

$$N_{1^+S} = A \exp(-BM^2) + C \frac{M_0 \Gamma}{(M^2 - M_0^2)^2 + M_0^2 \Gamma^2},$$

где первый член есть нерезонансный вклад, а второй член — релятивистская формула Брейта — Вигнера, в которой  $M_0$  — резонансная масса,

$\Gamma = \Gamma_0 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{2l+1} \frac{M_0}{M}$ ,  $q$  — импульс дипиона в  $3\pi$ -системе покоя,  $q_0$  — тот же импульс для резонанса,  $l$  — орбитальный момент в системе  $\rho\pi$ . На основании этого описания резонансный вклад составляет 29% в состоянии  $1^+S$ . Масса и ширина резонанса

$$M_{a_1} = (1,264 \pm 0,006) \text{ ГэВ/с}^2, \quad \Gamma_{a_1} = (244 \pm 14) \text{ МэВ.}$$

На основании изложенного можно сделать заключения.

а) Поведение относительной фазы волны  $1^+S$  и массовый спектр непосредственно свидетельствуют о резонансе в волне  $1^+S(\rho\pi)$  с квантовыми числами  $a_1(1260)$ -резонанса  $I^G J^P = 1^- 1^+$ . Что касается волны  $1^+P$ , то большая разница фаз ( $1^+P - 1^+S$ ), зависящая от параметризации дипионной амплитуды, по-видимому, указывает на значительный нерезонансный вклад в эту волну. Вклад резонанса в волне  $1^+P$  мал.

б) Когерентный механизм усиливает образование  $a_1$ -резонанса при малых  $t'$ .

в) Увеличение разности фаз состояний  $1^+S$  и  $0^-P$  с увеличением атомной массы ядра для малых  $t'$  свидетельствует об усилении селектирующей способности ядра и увеличении резонансного рождения.

г) Изменение относительной фазы ( $1^+S - 0^-P$ ) на легких ядрах и водородной мишени сравнимо, в то время как на тяжелых ядрах движение фазы систематически увеличивается с ростом  $A$ . В некогерентной области на ядрах движение относительной фазы сопоставимо с данными на водороде. Таким образом, проявление резонансных свойств  $a_1$ -сигнала сильно зависит от атомной массы ядра мишени. Так как ядро, как мы видели, по-разному поглощает состояния с разными значениями спина и четности, и эффект поглощения увеличивается с ростом атомной массы, то большее проявление резонансных свойств данного состояния, по-видимому, обусловлено тем, что ядерное поглощение в данном  $J^P$ -состоянии приводит к подавлению

вклада механизма, который нормально дает вклад в это состояние. Другими словами, нерезонансное состояние в данном  $J^P$  может сильнее поглощаться в ядерной материи, чем резонансное. Такая возможность рассматривалась в работах [55,60]. Вследствие этого малость сечения поглощения  $a_1$ -мезона и увеличение выхода с ростом атомной массы ядра, по-видимому, указывает на то, что в процессе дифракционного рождения  $a_1$ -резонанса на ядрах включается дополнительный механизм. Этот механизм может быть двухэтапным, вследствие того, что в адрон-ядерном дифракционном рассеянии рожденная система, прежде чем достигнуть конечного состояния, в течение переходного времени может существовать в другом состоянии и, взаимодействуя с нуклоном, переходить в конечное состояние, например,  $\pi \rightarrow \pi' \rightarrow a_1$ . Пространственно-временная картина этого процесса такова, что в системе в конечном состоянии остается малый шанс провзаимодействовать в ядерной материи. Этим можно объяснить малость сечения поглощения системы в конечном состоянии. Такая возможность рассматривалась в ряде теоретических работ [58,57]. Ясно, что вклад этого механизма зависит от импульса падающей частицы и передачи, и для доказательства его истинности необходимы экспериментальные данные на ядрах при нескольких значениях падающего пучка.

Заметим, что эти свойства рождения  $a_1$ -резонанса не могут быть объяснены, если принять во внимание электромагнитное рождение  $a_1$ -резонанса в кулоновском поле тяжелого ядра. Прямой вклад электромагнитного рождения сосредоточен в области чрезвычайно малых передач  $t' \leq 10^{-4}$  ( $\text{ГэВ}/c$ )<sup>2</sup>, полное сечение мало и на тяжелых ядрах равно 0,5 мб [57] (если принять  $\Gamma_{a_1 \rightarrow \pi\gamma} = 250$  кэВ). К тому же из-за разной поляризации  $a_1$ -состояния в ядерном и электромагнитном рождении интерференция между ними невозможна.

В свете указанных свойств  $a_1$ -резонанса теперь могут быть поняты многочисленные экспериментальные попытки обнаружения резонансных свойств  $1^+$ -состояния. Наблюдаемый пик в массовом спектре при  $1050 \text{ МэВ}/c^2$  во многих работах принимался за значение массы  $a_1$ -резонанса. Однако ход фазы волны не дает явного подтверждения резонанса при  $1,05 \text{ ГэВ}/c^2$ . Пик в спектре масс в значительной мере обусловлен вкладом механизма Декка с нерезонансным рождением  $\rho\pi$ -системы.

**Резонансные свойства состояния  $J^P LM\eta = 0^- S 0^+$ .  $\pi(1300)$ - и  $\pi(1770)$ -мезоны [1,2].** Значительный интерес представляет вклад состояния  $0^-$ , имеющего все квантовые числа  $\pi$ -мезона. Вклад этого состояния составляет

21% в области масс  $1 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$ . Массовый спектр  $0^-S$ -волны в области масс  $0,8 \div 2 \text{ ГэВ}/c^2$  представлен на рис.8 для  $\varepsilon$ -параметризации дипионной амплитуды. Как видно из табл.1, различная параметризация не влияет на интенсивность волны  $0^-S$ , как и на характер интерференции  $0^-SP$ . Интерференция между волнами  $0^-S$  и  $0^-P$  мала и положительна.

Относительная фаза  $\delta(0^-S - 0^-P)$  изменяется на  $85^\circ$  и  $75^\circ$  для  $\varepsilon$ - и  $(\pi\pi)$ -параметризаций соответственно. Относительная фаза  $\delta(0^-S - 1^+S)$  в этой же области масс постоянна и равна  $150^\circ$  (рис.7). Так как  $a_1$  есть резонанс, то характер изменения относительной фазы  $\delta(0^-S - 0^-P)$  и  $\delta(0^-S - 1^+S)$  свидетельствует о резонансе в волне  $0^-S$  [1,2]. В отличие от волны  $1^+S$  это состояние не показывает  $A$ -зависимости фазы  $\delta(0^-S - 0^-P)$ . Таким образом, свойства  $0^-S$ -состояния не изменяются с атомной массой мишени, и эти свойства подобны поведению  $\pi$ -мезона.

Описание массового спектра волны  $0^-S$  по релятивистской формуле Брейта — Вигнера с медленно меняющимся экспоненциальным фоном в области масс  $0,8 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$  позволило получить предварительные данные о положении и ширине резонанса:

$$M_{0^-S} = (1,205 \pm 0,07) \text{ ГэВ}/c^2, \quad \Gamma_{0^-S} = (0,32 \pm 0,035) \text{ ГэВ}.$$

Вопрос о положении резонанса мы рассмотрим подробнее ниже. Из сравнения изменения хода относительной фазы  $\delta(0^-S - 0^-P)$  на ядерной и водородной мишнях видно, что на водородной мишени изменение фазы составляет  $\sim 40^\circ$ , и в области  $M_{3\pi} < 1,1 \text{ ГэВ}/c^2$  относительная фаза на ядерной мишени существенно (на  $50^\circ$ — $60^\circ$ ) меньше фазы на водороде.

Следует заметить, что ход фазы претерпевает скачок в области масс  $\sim 1,16 \text{ ГэВ}/c^2$ , т.е. в той области, где ход фазы на водороде пересекается с ходом фазы на ядерных мишнях. Такой скачок имеется и в фазе  $\delta(1^+S - 0^-P)$ . Истинное движение фазы  $\delta(0^-S - 0^-P)$  значительно больше, чем  $85^\circ$ . Фаза волны  $0^-P$  не совсем постоянна. Ее фаза относитель-

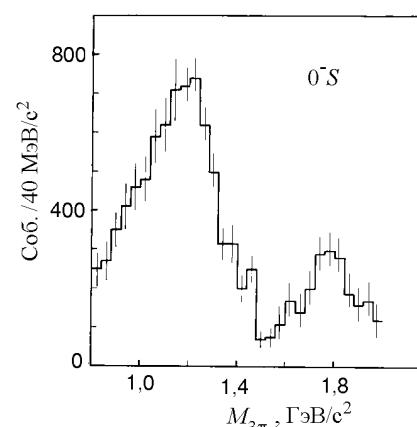


Рис.8. Спектр  $0^-S$  парциальной волны

но волны  $2^-P$  увеличивается на  $\sim 30^\circ$  в области масс  $1,1 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$  и продолжает расти в области масс  $1,4 \div 1,6 \text{ ГэВ}/c^2$  относительно волны  $1^+S$  также на  $\sim 30^\circ$ . Таким образом, значительное изменение относительной фазы  $\delta(0^-S - 0^-P)$  в области  $0,8 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$ , постоянство фазы волны  $0^-S$  относительно резонансной волны  $1^+S$  в этой же области масс, а также брейт-вигнеровская форма массового спектра непосредственно свидетельствуют о наблюдении резонанса  $0^-$  в системе  $(\pi^+\pi^-)_s + \pi^-$  с квантовыми числами пиона.

В области масс  $M_{3\pi} > 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$ , как видно из массового спектра  $0^-S$ -волны (рис.8), в спектре масс присутствует пик, имеющий брейт-вигнеровскую форму для всех параметризаций дипионной амплитуды. Так как сигнал волны  $0^-P$  становится малым в области  $M_{3\pi} > 1,6 \text{ ГэВ}/c^2$ , то в этой области волна  $1^+S$  является опорной. На рис.7 показано поведение фазы  $\delta(0^-S - 1^+S)$  в области масс  $1,4 \div 2 \text{ ГэВ}/c^2$ . Изменение фазы составляет  $\sim 120^\circ$  в этой области. Это состояние, так же, как и первое состояние, имеет квантовые числа пиона [61,60]. Его масса и ширина получены при описании массового спектра брейт-вигнеровской формулой с вкладом фона — полиномом второй степени. При этом  $M_{0^-S} = (1,77 \pm 0,03) \text{ ГэВ}/c^2$  и  $\Gamma_{0^-S} = (0,31 \pm 0,05) \text{ ГэВ}$  для всех трех параметризаций дипиона. Оба состояния в волне  $0^-S$ , имеющие квантовые числа пиона и распадающиеся по сильному каналу ( $\epsilon\pi$ ), в рамках кварк-модели представляют собой возбужденные по радиальному числу состояния  $qq'$ -системы и называются  $\pi'$  и  $\pi''$ . Сечение их образования равно\*

$$\sigma_{\pi \rightarrow \pi(1300)} = 54 \text{ мкб/нуклон},$$

$$\sigma_{\pi \rightarrow \pi(1770)} = 11 \text{ мкб/нуклон}.$$

**Определение параметров резонансов с помощью метода паде-аппроксимации.** Теперь мы обратимся к вопросу об установлении положения резонансов и их ширин. Различная параметризация дипионной амплитуды и вклад нерезонансного рождения приводят к тому, что массовый спектр волны не описывается чистой резонансной формулой Брейта — Вигнера, и такой анализ становится модельно-зависимым. К тому же, в таком анализе не используется вся информация об интенсивностях и относительных фазах результатов парциально-волнового анализа в данном интервале масс.

---

\*Величина погрешности в сечении составляет 7 и 12 % соответственно.

Для этих целей — определения резонансных параметров — применяется метод паде-аппроксимантов [42], в котором используется вся имеющаяся экспериментальная информация об интенсивностях и фазах. В противоположность брейт-вигнеровскому анализу этот метод не зависит от предположения о числе резонансов в данной парциальной волне, о постоянстве опорной волны. Кроме того, брейт-вигнеровская форма массового спектра может соответствовать резонансу в амплитуде  $F^2$ , но ту же зависимость дает и комплексно-сопряженная амплитуда  $\bar{F}^2$  без полюса в амплитуде.

Парциальная волна может быть представлена в форме

$$F_k = |F_k| \exp(i\delta_k), \quad k = 1, 2,$$

$F_1 = F_{1^+S}$  и  $F_2 = F_{0^-P}$ ; интенсивность парциальных волн  $|F_1|^2$  и  $|F_2|^2$ , их относительная фаза  $\phi = \delta_1 - \delta_2$ .

В методе, основанном на паде-аппроксимации аналитической комплексной функции, используется интерполяция Коши [62] для аналитической функции, экспериментально определенной для конечного числа значений функции. Аппроксимант парциальной волны может быть сконструирован следующим образом [63]:

$$f_i(x_i) \Rightarrow \tilde{f}(z) = \frac{P_N(z, f_i(x_i))}{Q_M(z, f_i(x_i))}.$$

Исследование особенностей полиномов  $P_N$  и  $Q_M$  позволяет найти нули и полюсы парциальной волны. Для лучшего описания данных используется метод минимизации средних квадратов, при этом свободными (искомыми) параметрами являются сами функции  $f(x)$ . Новый аппроксимант, полученный таким образом, есть паде-аппроксимант парциальной волны:

$$F_{J^p} = |a_{J^p}| \prod_{i=1}^n \frac{W - W_{z_i}^{J^p}}{W - W_{p_i}^{J^p}},$$

где  $a_{J^p}$  — комплексная константа, которая может быть определена с точностью до фазы из-за незнания индивидуальных фаз:  $W_{z_i}$  и  $W_{p_i}$  — значения массы  $M_{3\pi}$ , при которой амплитуда имеет нуль и полюс в комплексной энергетической плоскости.

Паде-аппроксимант парциальной волны сходится к функции Йоста с нулями для физических энергий, обусловленных резонансным или связанным состояниями. Таким образом, анализ сходимости паде-серии позволяет

получить информацию о существовании стабильных полюсов в нижней части комплексной энергетической плоскости. Истинный резонанс есть стабильный полюс, для которого  $\text{Im } W_p < 0$ , постоянен с увеличением степени аппроксиманта.

Для построения паде-аппроксимантов для произведения и отношения двух парциальных волн, имеющих одну и ту же относительную фазу, имеем

$$F_\alpha \bar{F}_\beta = |F_\alpha| |\bar{F}_\beta| e^{i\phi} = A \prod_{i=1}^n \frac{W - W_{z_i}^\alpha}{W - W_{p_i}^\alpha} \frac{W - \bar{W}_{z_i}^\beta}{W - \bar{W}_{p_i}^\beta}$$

и

$$\frac{F_\alpha}{F_\beta} = \left| \frac{F_\alpha}{F_\beta} \right| e^{i\phi} = B \prod_{i=1}^n \frac{W - W_{z_i}^\alpha}{W - W_{p_i}^\alpha} \frac{W - \bar{W}_{p_i}^\beta}{W - \bar{W}_{z_i}^\beta}.$$

Комплексные константы  $A$  и  $B$  определяют  $\alpha_{J_P}$ .

Массовые спектры парциальных волн  $1^+S$ ,  $0^-S$  и  $0^-P$  и их взаимные относительные фазы были использованы для построения паде-аппроксимантов для  $\varepsilon$ - и  $\pi\pi$ -параметризаций. Начальные параметры паде-аппроксимантов найдены для каждой пары волн. На втором этапе найденные параметры полиномов для каждой парциальной волны использованы как начальные параметры для поиска стабильных полюсов в совместном описании данных, как интенсивностей волн  $1^+S$ ,  $0^-S$ , так и их относительных фаз. На рис.9 показаны интенсивности волн и их относительные фазы, а также результат описания с помощью паде-аппроксимантов, отличающихся степенью полиномов. Специально [59] было исследовано влияние фона на результат поиска нулей и полюсов амплитуд. Экспоненциальный нерезонансный фон в парциальной волне ведет к увеличению степени полиномов, оставляя стабильным положение полюсов в пределах двух стандартных отклонений. Результаты определения положения и полуширина стабильных полюсов в волнах  $1^+S(a_1)$  и  $0^-S$  получены для различных типов паде-описания и двух параметризаций. Положение и ширина резонанса в  $1^+S$ -волне нечувствительны к параметризации, но проявляют чувствительность к фоновому члену, в то время как для  $0^-S$ -резонанса учет фона ведет к некоторому увеличению его ширины. Для резонанса  $0^-S$  был проделан также совместный фит массового спектра и фазы независимым образом. Результаты суммированы ниже [64—66]:

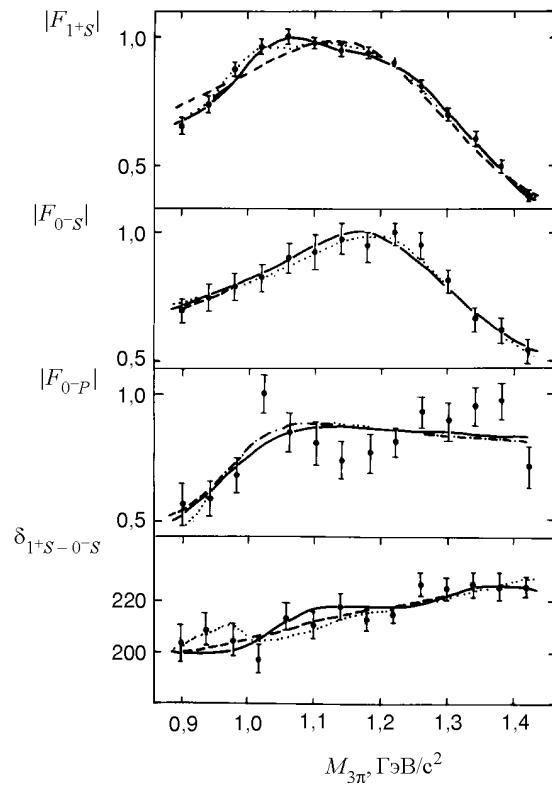


Рис.9. Описание интенсивностей и фаз с помощью паде-полиномов

$$M_{a_1} = (1255 \pm 23) \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{a_1} = (292 \pm 40) \text{ МэВ},$$

сечение рождения  $\sigma_{\pi \rightarrow a_1} = (430 \pm 27) \text{ мкб/нуклон}$ ,

$$M_{\pi(1300)} = (1240 \pm 30) \text{ МэВ}, \quad \Gamma = (360 \pm 120) \text{ МэВ},$$

сечение  $\sigma_{\pi \rightarrow \pi'} = (54 \pm 3,7) \text{ мкб/нуклон}$ ,

$$M_{\pi(1770)} = (1770 \pm 30) \text{ МэВ}, \quad \Gamma = (310 \pm 50) \text{ МэВ},$$

$\sigma = (11 \pm 1,32) \text{ мкб/нуклон}$ .

Из данных нельзя исключить возможность распада  $\pi(1300) \rightarrow \rho\pi$ . Если этот распад существует, то вклад его чрезвычайно мал. Что касается  $\pi(1770)$ , то его распад идет только в состояние  $(\varepsilon\pi)$ .

**Состояние  $J^P LM\eta = 2^- L 0^+$ .  $\pi_2(1600)$ -резонанс.** В области масс 3 $\pi$ -системы  $> 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$  вклад состояния  $2^-$  доминирует. До недавнего времени проблема существования  $\pi_2$ -резонанса не была разрешена в экспериментах [23,50] вследствие недостаточного разрешения и статистики. Анализ данных эксперимента на водородной мишени с большой статистикой позволил только в последнее время установить его основные свойства. Данные эксперимента непосредственно свидетельствуют о дифракционном образовании  $2^-$ -состояния, распадающегося по трем каналам  $2^-S(f_2\pi)$ ,  $2^-P(\rho\pi)$ ,  $2^-D(\varepsilon\pi)$  [66,70]. На рис.10 представлены интенсивности каналов  $2^-S$ ,  $2^-P$  и  $2^-D$  и фазы относительно волны  $1^+S$ , они имеют резонансную форму при  $\sim 1,65 \text{ ГэВ}/c^2$ . Волна  $2^-P$  имеет сильный вклад фона. В этой области масс волна  $2^-P$  имеет малый вклад спин-флиповой амплитуды  $2^-P1^+(\rho\pi)$ . Вклад волны  $2^-S1(f_2\pi)$  также мал. Форма массовых спектров не зависит от вида параметризации дипионной амплитуды, а интерференция между волнами мала. Три волны  $2^-S$ ,  $2^-P$  и  $2^-D$  относительно  $1^+S$  показывают существенное изменение относительной фазы. Максимальное изменение фазы для трех волн находится при массе  $1,65 \text{ ГэВ}/c^2$ . Фазы волн  $2^-S$ ,  $2^-P$ ,  $2^-D$  относительно волны  $0^-S$  также претерпевают заметное изменение и только в области масс, близких  $\pi(1770)$ -резонансу, относительные фазы выходят на плато. Взаимные относительные фазы  $2^-S$  относительно  $2^-P$  и  $2^-D$  составляют малую величину и

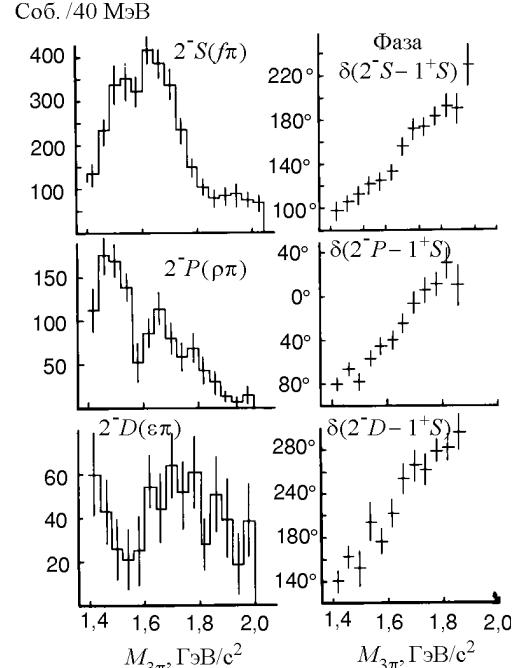


Рис.10. Интенсивности волн  $2^-$  и их фазы

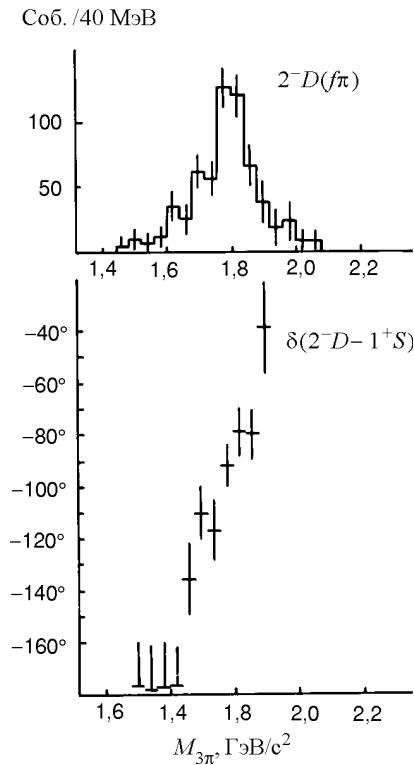


Рис.11. Интенсивность и фаза волны  $2^-D(f_2\pi)$

согласуются с представлением, что  $\pi_2$ -мезон связан с тремя каналами. Движение фазы волны  $2^-S$  относительно  $1^+S$  составляет  $\sim 120^\circ$  для двух параметризаций дипионной амплитуды. Аналогичное поведение имеют фазы волн  $2^-P$  и  $2^-D$ .

Значительное изменение относительных фаз волн  $2^-$  как относительно волны  $1^+S$ , так и  $0^-S$ , а также малая величина взаимных фаз свидетельствуют о резонансном характере этих волн и об их связи с состоянием  $2^-$ .

Для  $M_{3\pi} > 1,6$  ГэВ/с<sup>2</sup> заметный вклад дает состояние  $2^-D(f_2\pi)$ . Волна  $2^-D(f_2\pi)$  имеет характерный пик в области масс  $\sim 1,85$  ГэВ/с<sup>2</sup> (рис.11), ее фаза относительно  $1^+S$  приведена на рис.11. Фаза этой волны начинает нарастать только с  $M_{3\pi} = 1,65$  ГэВ/с<sup>2</sup>, и максимальный ход соответствует 1,85 ГэВ/с<sup>2</sup>. До области масс 1,7 ГэВ/с<sup>2</sup> относительная фаза постоянно и составляет  $70^\circ$ , и в области больших масс, как видно в двух параметризациях, относительная фаза  $\delta(2^-S - 2^-D(f_2\pi))$  падает, что обусловлено изменением фазы волны  $2^-D(f_2\pi)$ . Таким образом, поведение интенсивности и фазы волны  $2^-D(f_2\pi)$  указывает на присутствие резонансного состояния в этой волне с массой  $\sim 1,85$  ГэВ/с<sup>2</sup>. Подобные свойства этого состояния наблюдались также в работе [30]. Авторами этой работы на основании совместного описания всех состояний  $2^-S$ ,  $2^-P$ ,  $2^-D(\epsilon\pi)$  и  $2^-D(f_2\pi)$  сделан вывод о том, что волна содержит резонансы с массами  $\sim 1,7$  ГэВ/с<sup>2</sup> и 2,15 ГэВ/с<sup>2</sup>. Наблюданное поведение интенсивности и фазы волны

$2^-D(f_2\pi)$  объясняется за счет эффекта интерференции между волнами  $2^-S(f_2\pi)$  и  $2^-D(f_2\pi)$ . Данные работы [66] находятся в согласии с выводами работы [30].

Состояние с большей массой  $\sim 2,15 \text{ ГэВ}/c^2$  является возбужденным состоянием  $\pi_2$ -резонанса, а состояние с меньшей массой  $1,6 \div 1,7 \text{ ГэВ}/c^2$  — четвертым каналом распада состояния  $2^-$ .

Для определения резонансных параметров  $\pi_2(1600)$ -состояния осуществлено описание данных с помощью паде-аппроксимантов. Первый шаг состоял в совместном описании интенсивностей и фаз каждой из волн  $2^-$ -состояния и волн  $1^+S$  и  $0^-S$  в интервале масс  $1,4 \div 2,2 \text{ ГэВ}/c^2$ , а также в интервале масс  $0,8 \div 2,2 \text{ ГэВ}/c^2$ . Следующий шаг состоял в совместном описании трех каналов  $2^-S$ -,  $2^-P$ - и  $2^-D$  ( $\epsilon\pi$ )-состояний  $2^-$ .

Резонансные параметры  $\pi_2$ -состояния:

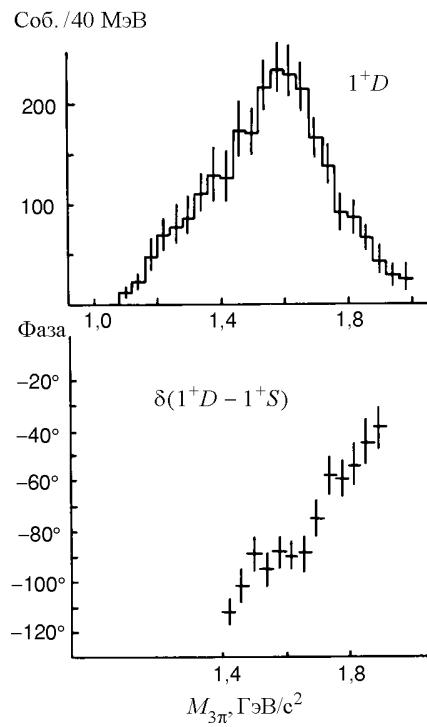
$$M_{2^-S} = (1624 \pm 21) \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{2^-S} = (304 \pm 22) \text{ МэВ},$$

$$M_{2^-P} = (1622 \pm 35) \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{2^-P} = (404 \pm 108) \text{ МэВ},$$

$$M_{2^-D(\epsilon\pi)} = (1693 \pm 28) \text{ МэВ}, \quad \Gamma_{2^-D} = (303 \pm 90) \text{ МэВ}.$$

Сечение образования состояния  $2^-$  составляет  $\sigma_{\pi \rightarrow \pi_2} = (37 \pm 5) \text{ мкб/нуклон}$ , а соотношение каналов 60, 30 и 10% соответственно для  $2^-S$ -,  $2^-P$ - и  $2^-D$ -состояний.

Состояние  $J^P LM\eta = 1^+D0^+$ . Амплитуда  $1^+S$  для масс  $> 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$  быстро падает и не имеет резонансного поведения в области больших масс. Волна  $1^+D(\rho\pi)$  в области масс  $< 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$  имеет малый сигнал ( $\sim 3\%$  от сигнала  $1^+S$ ), а в области больших масс растет и имеет пик в районе  $\sim 1,7 \text{ ГэВ}/c^2$ . Интенсивность  $1^+D$ -волны и ее фаза относительно  $1^+S$ -волны показаны на рис.12. Ее фаза изменяется на  $90^\circ$  в диапазоне масс  $1,4 \div 1,9 \text{ ГэВ}/c^2$ . Фаза  $1^+D$ -волны относительно  $0^-S$ -волны показывает изменение в начале интервала масс на  $40^\circ \div 50^\circ$ , после этого выходит на константу, так как обе волны резонируют, а в области более  $1,8 \text{ ГэВ}/c^2$  наблюдается движение фазы  $0^-S$ . Характер изменения относительной фазы указывает на резонансное поведение  $1^+D$ -амплитуды. Интенсивность волны  $1^+D$  достигает своего максимального вклада  $\sim 11\%$  в области масс

Рис.12. Интенсивность и фаза  $1^+D$ -волны

тостояния  $2^+$ , подобно  $a_2$ -мезону в области малых масс.

*Состояние  $J^P LM\eta = 3^+ L 0^+$ .* Как показано на рис.13, вклад волн со спином  $3^+$  показывает бесструктурное поведение. Измерение их относительных фаз представляет проблему, так как эти волны имеют малую когерентность с другими волнами. Уменьшение вклада этих состояний по сравнению со спином 2, точно так же, как вклад волн со спином 2 существенно меньше состояний со спином 1, как раз показывает, что в процессах дифракции основной вклад дают относительно малые орбитальные моменты. Характер поведения вклада больших моментов не противоречит экспоненциальному ослаблению вклада больших орбитальных моментов.

Таким образом, парциально-волновой анализ оказался мощным методом для определения вклада состояний с различными состояниями спина и четности. Проведенный анализ позволил установить резонансную природу  $a_1$ - и  $\pi_2$ -резонансов и получить указания на существование радиально-воз-

$1,5 \div 1,9 \text{ ГэВ}/c^2$ . Описание паде-аппроксимантами этих данных позволяет извлечь параметры этого состояния:

$$M_{1^+D} = (1,67 \pm 0,07) \text{ ГэВ}/c^2,$$

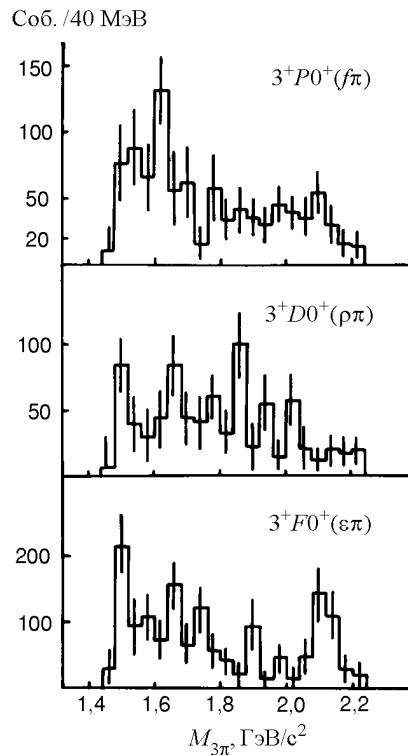
$$\Gamma_{1^+D} = (0,3 \pm 0,1) \text{ ГэВ}/c^2.$$

Эти результаты находятся в удовлетворительном согласии с данными работ [30,26] на ядерных мишенях и водороде. С точки зрения кварковой модели это состояние может являться радиально-возбужденным состоянием  $a_1(1260)$ -резонанса.

*Состояние  $J^P LM\eta = 2^+ P 1^+$ .* Амплитуда волны  $2^+ P 1(f_2\pi)$  в области больших масс показывает некоторую структуру с центром в области  $1,75 \text{ ГэВ}/c^2$ . Интенсивность ее мала, а значительное ( $\sim 140^\circ$ ) движение ее фазы относительно  $1^+S$  свидетельствует о резонансе. Этот результат только указывает на возможное существование второго со-

бужденных состояний  $a'_1$  и  $\pi'_2$ . При этом установлен неизвестный ранее эффект усиления проявления  $a_1'$ -резонанса на фоне нерезонансного образования системы ( $\rho\pi$ ) с увеличением атомной массы ядра мишени.

Наиболее важный результат анализа дифракционного образования  $3\pi$ -системы состоит в наблюдении двух резонансных состояний с массами 1,24 и 1,77 ГэВ/с<sup>2</sup> с квантовыми числами пиона. Эти резонансы, являясь радиальными возбуждениями пиона, служат прямым доказательством его кварковой структуры. Существование радиальных возбуждений динамических составных структур с необходимостью приводит к расширению теории универсальной симметрии, где, помимо вращательных степеней свободы составной системы, необходимо учитывать и колебательные степени свободы [70].

Рис.13. Интенсивность волн  $3^+$ 

**Таблица 2. Бозонные резонансные состояния, наблюдаемые в процессе  $\pi \rightarrow 3\pi$**

| Состояние     | $J^P$ | Масса, МэВ/с <sup>2</sup> | Ширина, МэВ | Канал распада            | Доля распада, % |
|---------------|-------|---------------------------|-------------|--------------------------|-----------------|
| $\pi(1300)$   | $0^-$ | 1240                      | 360         | $(\pi^+\pi^-)_s + \pi^-$ | 100             |
| $\pi(1770)$   | $0^-$ | 1770                      | 360         | $(\pi^+\pi^-)_s + \pi^-$ | 100             |
| $a_1$         | $1^+$ | 1255                      | 292         | $\rho\pi$                | 98              |
| $a'_1$        | $1^+$ | 1670                      | 300         | $\rho\pi$                | 100             |
| $\pi_2(1600)$ | $2^-$ | 1624                      | 304         | $f_2\pi$                 | 60              |
|               |       | 1622                      | 404         | $\rho\pi$                | 30              |
|               |       | 1693                      | 330         | $\varepsilon\pi$         | 10              |
| $\pi_2^1$     | $2^-$ | 2150                      | 300         | $f_2\pi$                 |                 |
| $A2$          | $2^+$ | 1320                      | 100         | $\rho\pi$                |                 |
| $A2^1$        | $2^+$ | 1750                      |             | $f_2\pi$                 |                 |

Другой возможной интерпретацией радиальных состояний  $\pi$ -мезона является когерентное образование этих резонансов при туннелировании  $\pi$ -мезона высокой энергии в ядерной материи. Эффект резонансного образования при малой диссипации в процессе туннелирования мезона может объяснить когерентное, но не дифракционное рождение  $\pi(1300)$  и  $\pi(1700)$ , по сравнению с когерентным и дифракционным рождением  $a_1(1260)$  и  $\pi_2(1600)$ , а также независимость фазы  $\pi(1300)$  и постоянство его выхода от атомного номера ядра. Фаза же резонансов  $a_1(1260)$  и  $\pi_2(1600)$  и их выход сильно зависят от атомного номера ядра. Для разделения этих альтернатив необходимы детальные экспериментальные исследования.

## 5. НЕРЕЗОНАНСНАЯ МОДЕЛЬ И ВОПРОСЫ МЕЗОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Трудность наблюдения резонансов в процессах дифракции мезонов заключается в наличии большого фона динамического происхождения, описываемого моделью Дрелла — Хиита — Декка [17,18], чаще называемой моделью Декка. В оригинальной формулировке модели предполагается, что в системе центра масс  $\rho\pi$ -система рождается вперед из-за дифракционного характера  $\pi N$ -рассеяния, и  $\rho$ -мезон также испускается в переднем направлении из-за пионного обмена. Нерезонансное рождение  $\rho\pi$ -системы вблизи  $1,1 \text{ ГэВ}/c^2$  во многих экспериментах принималось за рождение  $a_1(1260)$ -резонанса. Вклад нерезонансного процесса в сечение может достичь 70—80%. С целью описания экспериментальных данных по этой модели необходимо учесть эффекты ядерного перерассеяния и перерассеяния в конечном состоянии, а также прямое рождение резонансных состояний. Теоретические расчеты этих процессов были сделаны в работах [67—69].

Полюсная диаграмма Декка и ее амплитуда есть произведение трех факторов: амплитуды  $\pi\pi$ -рассеяния, реджизованного пионного пропагатора и  $\pi$ -ядерной амплитуды. Для  $\pi\pi$ -амплитуды использовались результаты фазового анализа, и амплитуда вычислялась для энергии и углов, определенных по кинематике на массовой поверхности. Пионный пропагатор содержал также реджевскую фазу  $\exp\left(-i \frac{\pi}{2} \alpha(t)\right)$ . Мезон-ядерная амплитуда была глауберовского типа.

Расчет диаграмм осуществлялся с применением метода Монте-Карло. Результатом расчета являлся вес данного события, пропорциональный квадрату матричного элемента. Сумма всех весов определяла сечение процесса. При этом усредненная амплитуда по интервалу масс и угловым переменным

распада описывала дифференциальное сечение процесса на ядре. После этого результаты расчета событий представляли собой вход для программы парциально-волнового анализа, и определялось волновое содержание и изменение относительных фаз. Результаты волнового анализа по модели сравнивались с данными эксперимента [1—3]. Конкретно расчеты выполнялись для ядра меди в области масс  $0,8 \div 1,4 \text{ ГэВ}/c^2$  и области передач  $0,004 \div 0,006 \text{ (ГэВ}/c)^2$ . Первым шагом в этих расчетах являлся расчет диаграмм с полюсным графиком (*a*) и с учетом ядерных перерассеяний (*b*, *c*).

Амплитуда процесса для графиков (*a*) + (*b*) + (*c*) имеет вид

$$A = T + C_{\rho\pi}(T_1 + T_2),$$

где  $T$  — амплитуда полюсного графика,  $T_1, T_2$  — амплитуды графиков перерассеяния. Параметр  $C_{\rho\pi}$  эффективно учитывает  $\rho A$ -перерассеяние. Этот параметр определялся по тому, как описывалось дифференциальное сечение на ядре по положению минимума и соотношению сечений в первых двух максимумах. Удовлетворительное согласие было найдено для  $C_{\rho\pi} = 0,8$  [68].

Амплитуда  $T$  может быть представлена в виде

$$T = A_{\pi A}(S_{\pi A}, q^2) A_{\pi\pi}(S_{\pi\pi}, t') \frac{F(t_\pi, S_{3\pi})}{t_\pi - \mu^2},$$

где  $A_{\pi A}$  и  $A_{\pi\pi}$  — амплитуды  $\pi A$ - и  $\pi\pi$ -рассеяния,  $F$  — формфактор, учитывающий поправки к амплитудам для кинематики вне массовой поверхности:

$$F = \exp \{[R^2 + \alpha'_\pi \ln S_{3\pi}/S_0 - i\pi\alpha'_\pi/2] (t_\pi - \mu^2)\},$$

где  $S_0 = 1 \text{ ГэВ}^2$ ,  $\alpha'_\pi = 0,7 \text{ ГэВ}^{-2}$  — наклон траектории Редже,  $R$  — параметр модели.

Значение  $R^2$ , найденное из условия наилучшего описания данных, оказалось равным  $0,8 \text{ ГэВ}^{-2}$ . Амплитуда  $T_1$  имеет вид

$$T_1 = \frac{i}{2} \int A_{\pi A}(S, q_1^2) T(S_{\pi\pi}, t', t_\pi, t...) \frac{dq_1^2 d\phi}{(4\pi)^2}$$

и

$$q^2 = q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos \phi.$$

Расчеты показали, что амплитуды  $T_1$  и  $T_2$  близки друг другу, поэтому  $A = T + 2CT_1$ . Ввиду сложности полной амплитуды, расчеты делались численно.

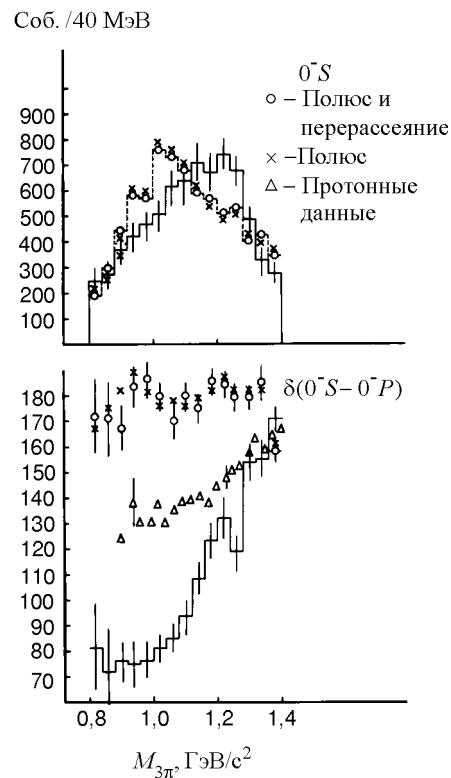


Рис.14. Сравнение с расчетом по модели интенсивности и фазы волны  $0^-S$

При этом вычисление интегралов для  $T_1$  с достаточной точностью, вследствие осциллирующей подынтегральной функции, требовало значительного машинного времени.

Модель правильно воспроизводит распределения по массе  $3\pi$ -системы и положение максимума в районе  $(1,0 + 1,1)$  ГэВ (так называемый «декковский» максимум, всегда присутствующий в моделях типа ДХД), но, естественно, не дает хорошего описания формы экспериментального спектра в области масс  $1,2 \div 1,4$  ГэВ, где проявляются вклады трехпионных резонансов ( $a_1$ - и  $\pi'$ -мезоны) [73].

Парциально-волновой анализ результатов расчета по амплитуде  $A$  и амплитуде  $T$ , учитывающей только полюсный член, приведен на рис.14,15 для основных волн  $0^-$  и  $1^+$  и их относительных фаз. Нормировка интенсивностей волн сделана по полному числу событий. Как амплитуда  $A$ , так и амплитуда  $T$  удовлетворительно передают форму интенсивностей волн  $0^-S$  и  $1^+S$  [73].

Сравнение относительных фаз показывает, что фаза  $\delta(1^+S - 0^-P)$  во всей области масс  $0,8 \div 1,4$  ГэВ/ $c^2$  практически постоянна и равна  $40^\circ$  и не воспроизводит данные опыта. Фаза состояний  $\delta(0^-S - 0^-P)$  также постоянна и равна  $180^\circ$ , в то время как на опыте наблюдается ее изменение от  $+70$  до  $+170^\circ$ . Разность фаз  $\delta(1^+S - 0^-S)$  для опыта и модели имеет разные знаки и составляет  $50^\circ$ . Сравнение результатов анализа для полной амплитуды и полюсного члена показывает, что вклад графиков с ядерным перерассеянием мал и его можно не учитывать в дальнейшем, по крайней мере, для области малых передач. Для того чтобы понять разницу фаз между моделью и опытом в области малых масс  $0,8 \div 1$  ГэВ/ $c^2$ , где вклад модели

доминирует, из пионного propagatora была выключена реджевская фаза без изменения квадрата амплитуды процесса. Это может привести к другому поведению относительных фаз. Результаты анализа для полюсного члена без реджевской фазы показали, что выключение реджевской фазы не приводит к изменению относительных фаз. Следует заметить, что, безотносительно к реджевской фазе, такой множитель в амплитуде может приводить к неоднозначности анализа. Выше мы обсуждали этот вопрос и показали, что из-за бозе-симметризации дипионной амплитуды в исследуемом процессе  $\pi \rightarrow 3\pi$  такая неоднозначность не имеет места. Этот результат непосредственно отражает это обстоятельство.

Результат парциально-волнового анализа данных по теоретической модели с полюсным графиком, как мы видели, неплохо воспроизводит поведение интенсивностей волн. Представляет интерес сделать анализ в комплексной энергетической плоскости этих данных. Для этих целей применен метод паде-аппроксимантов для поиска полюсов и нулей парциальных амплитуд. В этом анализе были использованы интенсивности волн  $1^+S$ ,  $0^-P$  и  $0^-S$  и их относительные фазы, полученные в анализе по модели Декка. Энергетический диапазон данных  $0,8 \div 1,4$  ГэВ/с<sup>2</sup>. При этом для каждой парциальной волны анализ сделан для разных типов аппроксимантов. В результате анализа было найдено, что для каждого типа паде-аппроксимантов существуют два решения. Основным свойством этих решений является

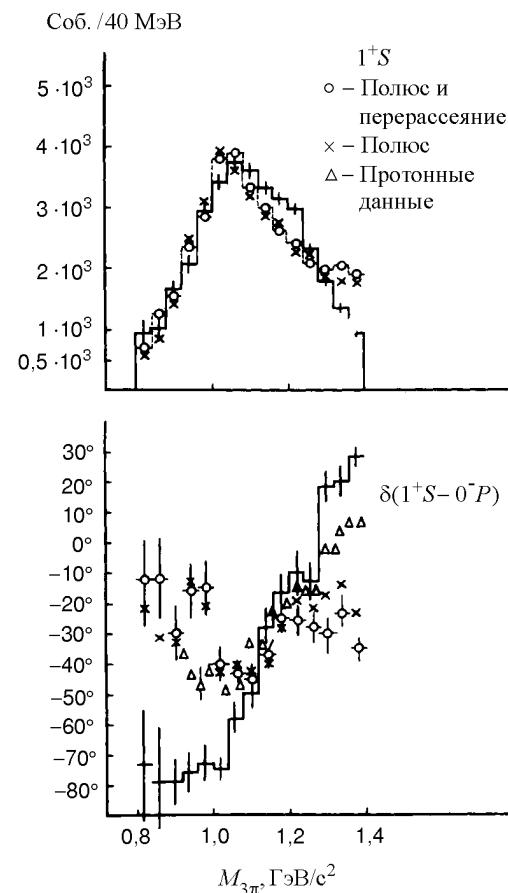


Рис.15. Сравнение с расчетом по модели интенсивности и фазы  $1^+S$

наличие стабильного полюса в районе  $\sim 1$  ГэВ для каждой парциальной волны. Это и является причиной существования двух решений. Одно решение (I) дает кластер эффективных полюсов в районе энергий  $(I - i 0,18)$  ГэВ и другое (II) —  $(I + i 0,18)$  ГэВ. Меньшее значение отношения  $\chi^2/NDF$  для всех типов полиномов для решения II, по-видимому, исключает резонансную интерпретацию полюсов в модели Декка. С увеличением степени полиномов полюсы группируются в районе  $M_{3\pi} \cong I + i 0,18$  и не показывают случайного распределения их в плоскости.

Таким образом, проведенный анализ позволяет эффективно описать данные по модели Декка с полюсом на верхнем листе. Этим можно объяснить эксперименты, в которых при ограниченной статистике наблюдалось резонансногоподобное поведение массовых спектров в районе  $\sim 1$  ГэВ/с<sup>2</sup>.

Полная амплитуда образования  $a_1$ -резонанса имеет вид

$$A1 = |T + R2|^2 + 2C_{a_1} \operatorname{Re} [(T + R2)^* D2] + C_{a_1}^2 |D2|^2,$$

где  $T$  — полюсный член,  $R2$  — амплитуда перерассеяния через  $a_1$ -резонанс,  $D2$  — амплитуда прямого рождения  $a_1$ -резонанса,  $C_{a_1}$  — константа, определяющая вклад прямого рождения. Эта константа была оценена по массовому спектру в области  $M_{3\pi} = 0,8 \div 1,4$  ГэВ/с<sup>2</sup>, и ее величина составила  $C_{a_1} = 15$ , что соответствует  $\sim 10\%$  вклада рождения  $a_1$ -резонанса.

Парциально-волновой анализ был сделан для этой амплитуды с  $C_{a_1} = 15$  и  $C_{a_1} = 25$ . Данные по поведению фаз лучше описываются для  $C_{a_1} = 25$  (28% вклада резонанса). В области масс  $< 1,1$  ГэВ/с<sup>2</sup> результаты повторяют основные черты анализа только с одним полюсным членом, в области  $> 1,1$  ГэВ/с<sup>2</sup>, где вклад резонанса существен, наблюдается движение резонансных фаз в соответствии с экспериментальными данными. Вклад  $\pi$ -резонанса небольшой, и поэтому полная амплитуда незначительно отличается от  $a_1$ -амплитуды. На основании сравнения результатов расчетов по модели с экспериментальными данными можно сделать заключение.

1. Вклад ядерных перерассеяний в области дифракции налетающей частицы для малых передач импульса несуществен.

2. Построенная модель с учетом перерассеяния в конечном состоянии удовлетворительно описывает ход фаз на водородной мишени и не описывает данные на ядре для масс  $< 1,1$  ГэВ/с<sup>2</sup>. По-видимому, в этой области масс на ядерной мишени включается дополнительный механизм.

3. Для описания экспериментальных данных вклад резонансного рождения должен составлять  $\sim 30\%$ . Сравнение опыта с моделью исключает деструктивную интерференцию резонансного рождения с полюсной амплитудой нерезонансного рождения. В образование  $a_1$ -резонанса дает вклад как прямое образование, так и перерассеяние в конечном состоянии.

**Мезонная спектроскопия.** Результаты исследований рождения бозонных систем на ядрах при  $40 \text{ ГэВ}/c$  [64—66] и  $25 \text{ ГэВ}/c$  [61] свидетельствуют о существовании резонансов  $a_1(1^+)$  и  $\pi_2(2^-)$ , дифракционно рожденных на ядрах, и указывают на возможное существование радиально-возбужденных состояний  $a'_1(1^+, 1,65)$  и  $\pi'_2(2^-)$ , а также свидетельствуют о существовании радиально-возбужденных состояний пиона  $\pi(0^-, 1,24)$  и  $\pi(0^-, 1,77)$ . Недавние исследования при более высоких энергиях в фермиевской лаборатории [74] и на установке VES в Протвино [75] надежно подтвердили приведенные данные о радиальных возбуждениях пиона.

Эти данные несовместимы с положением  $a_1(1260)$ -резонанса в области  $1 \text{ ГэВ}/c^2$  и находятся в полном согласии с данными опыта [30]. В эксперименте при  $8,45 \text{ ГэВ}$  [32] в процессе зарядовой перезарядки  $\pi^- n \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 n$  положение  $a_1(1260)$ -резонанса получено при  $1,15 \text{ ГэВ}$  и ширине  $300 \text{ МэВ}$ . Анализ [36] вклада фона дает положение полюса в  $1^+ S$ -волне в диапазоне масс  $1,23 \div 1,28 \text{ ГэВ}/c^2$ .  $a_1(1260)$ -мезон наблюдается в распадах  $\tau$ -лектона  $\tau \rightarrow a_1 + \nu_\tau$ .

Масса  $a_1(1260)$  в этом процессе полностью совпадает с данными, полученными в адронных процессах [76].

Принимая во внимание всю совокупность данных, пока, по-видимому, экспериментально нельзя исключить возможность того, что наблюдаются две разные частицы  $1^+$ , при этом наблюдаемые состояния могут быть смесью  $(q\bar{q})$ - и  $(qq\bar{q}\bar{q})$ -состояний [77].

Давняя проблема в мезонной спектроскопии, таким образом, разрешена, и нет с  $C = +1$  для  $P$ -волны в  $(q\bar{q})$ -системе завершен. Изоскалярными членами являются  $f_1(1,285)$  и  $f_1(1420)$ , представляющие собой смесь октетного и синглетного  $I = 0$  состояний. Используя полученное значение массы  $a_1(1260)$ -мезона и формулу Гелл-Манна — Юкубо, можно определить угол смешивания синглетов, который равен  $\approx 37^\circ$  и близок к идеальному смешиванию.  $\pi_2(1680)$ -мезон с квантовыми числами  $I^G J^{PC} = 1^- 2^- +$  наблюдается в каналах  $\varepsilon\pi$ ,  $\rho\pi$  и  $f\pi$ . В системе  $(q\bar{q})$  это состояние представляет синглетную  $D$ -волну  ${}^1D_2$ , состояние которой отщеплено от  $\rho_3$ -мезона спин-спиновым взаимодействием.

Массы  $a_1(1260)$ - и  $\pi_2(1600)$ -резонансов свидетельствуют о том, что эффекты спин-спинового и спин-орбитального взаимодействий в  $P$ - и  $D$ -волнах ( $q\bar{q}$ )-системы невелики, они того же порядка, что и радиальные возбуждения в этих системах. Для  $S$ -состояний  $q\bar{q}$ -системы спин-спиновое расщепление велико. С этой точки зрения интерпретация состояний  $0^+(a_0(980), f_0(975), f_0(1300))$  как триплет  $P$ -волновой конфигурации представляет очевидную трудность.

Наблюденные состояния  $\pi(1300)$  и  $\pi(1770)$  имеют все квантовые числа пиона  $I^G J^{pc} = 1^- 0^{-+}$  и сильную моду распада в  $(\epsilon\pi)$ -систему.

С точки зрения кварковой модели эти состояния характеризуются различным числом радиальных волновых функций  $q\bar{q}$ -систем.

Радиальные возбуждения состояний ( $q\bar{q}$ ) хорошо установлены для тяжелых кварков ( $c$  и  $b$ ). Для легких кварков экспериментальное обнаружение радиальных возбуждений и трудность их наблюдения обусловлены малой интенсивностью образования, большой шириной состояний и вкладом фоновых процессов. Наиболее надежный кандидат на радиальное возбуждение  $\rho$ -мезона  $1^{--}$ -изовекторный резонанс  $\rho(1600)$ .

В работе [78] на основе потенциального квантово-хромодинамического потенциала в нерелятивистском приближении рассчитан широкий спектр масс резонансных состояний и радиальных возбуждений. Первое радиальное возбуждение пиона равно 1,2 ГэВ, ширина 300 МэВ, что находится в согласии с экспериментальными данными. В работе [79] предсказание масс радиальных состояний в ( $q\bar{q}$ )-системе сделано на основе решения задачи на собственные значения линейного массового оператора с учетом спин-спинового взаимодействия. Положение первого радиального уровня предсказывается в интервале 1100  $\div$  1200 МэВ и второго 1300  $\div$  1500 МэВ. Что касается ширин этих состояний, то их предсказание сильно зависит от модельных представлений.

Из сравнения с экспериментом видно, что предсказание первого радиального уровня находится в согласии с опытом, а что касается второго уровня, то различие достаточно большое. Наличие узлов в волновой функции составной системы может приводить к малости перекрытия волновых функций начального и конечного состояний и к подавлению некоторых распадов радиальных состояний. Выводы этой работы о подавлении  $\rho\pi$ -распадов  $\pi(1300)$ -состояния и отсутствие этих распадов в  $\pi(1770)$ -системе находятся в согласии с опытом. В работе [80] получены предсказания массы  $\pi(1300)$ -состояния на основе симметрийных соотношений и показана возможность размещения  $\pi(1300)$ ,  $\eta(960)$  и  $\eta(1400)$  в одном радиально-возбужденном псевдоскалярном nonете. При этом по аналогии с основным nonetом, характеризующимся сильным смешиванием  $\eta - \eta^1$ , предложена естественное объяснение этого явления.

венная модель смешивания  $\eta_R - \eta'_R$ . Полученные массовые формулы позволили предсказать значение массы  $\pi(1300)$ -мезона 1,23 ГэВ, хорошо соглашающееся с данными эксперимента.

Для спектроскопии важно знать, является ли радиальное состояние  $\pi$ -мезона  $\pi(1300)$  первым, а  $\pi(1770)$  — вторым. В работе [81] предсказывается первое радиальное состояние с массой  $< 1$  ГэВ/с<sup>2</sup> и приводятся экспериментальные данные о возможности наблюдения узкого состояния  $J^P = 0^-$  с массой  $\sim 740$  МэВ и  $\Gamma \sim 40$  МэВ.

В заключение приведем график Чу—Фраучи [82], где показаны известные мезонные траектории и помечены установленные состояния (рис.16). Отметим, что  $\pi(1300)$  и  $\pi(1770)$  начинают новые траектории, и кандидатами для этих траекторий являются состояния  $a'_1$  и  $\pi'_2$ . Из-за  $G$ -четности состояний должно иметь место удвоение числа возможных состояний.

Важным является установление в дальнейшем свойств редже-траекторий, их линейности. Свойства радиальных состояний весьма чувствительны к соотношению между короткодействующей сингулярной частью квarkово-го взаимодействия и взаимодействием, обеспечивающим конфайнмент, поэтому их изучение дает информацию о динамике квarks. Спектроскопия

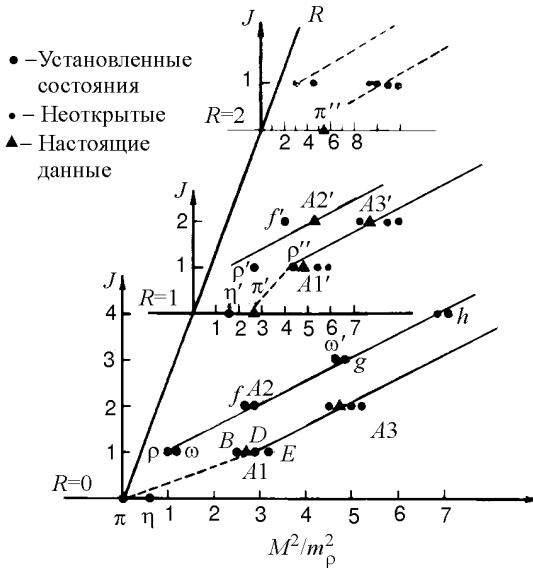


Рис.16. Трехмерный график резонансных состояний Чу—Фраучи

радиальных уровней может пролить свет на зависимость от расстояния потенциала сил, удерживающих кварки в адроне.

Таким образом, проведенными работами по изучению бозонных систем в процессах дифракции адронов и наблюдению радиальных состояний кварк-антикварковой системы положено начало исследованиям в новом направлении — спектроскопии радиальных состояний легких кварков, которое позволит создать экспериментальную основу для построения будущей хромодинамической теории квазисвязанных систем из легких кварков. Особенностью спектроскопии легких кварков является то, что это один из основных источников сведений о непертурбативных эффектах в квантовой хромодинамике. Экспериментальное изучение и теоретический анализ этих закономерностей является одной из важнейших задач физики высоких энергий.

## 6. КОГЕРЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Обсудим кратко роль когерентных процессов при высоких энергиях. Высокие энергии предоставляют ряд интересных аспектов в физике когерентных процессов элементарных частиц на ядрах. В первую очередь, рождение тяжелых резонансных структур происходит в соответствии с фундаментальным условием когерентности:

$$\frac{(M^2 \text{ резонанса} - M^2 \text{ падающей част.})}{2P \text{ падающей част.}} R \sim 1.$$

Это условие когерентности отражает основное свойство: ядро действительно остается в своем основном состоянии. При высоких энергиях амплитуда взаимодействия элементарных частиц преимущественно мнимая, а реальная часть амплитуды хотя и мала, но дает рассеяние также, как мнимая часть дает поглощение.

Для рождения известных резонансов ( $\sim 1 \text{ ГэВ}/c^2$ ) продольная передача становится очень малой. Это может означать, что реальная часть амплитуды должна быть все-таки принята во внимание, так как, хотя  $q_{||}$  очень мало, но реальная часть изменяет величину передачи на несколько МэВ.

При высоких энергиях возможно когерентное образование адронных резонансов лептонами, в которых виртуальный адрон когерентно рассеивается на массовой оболочке ядра. В случае электророждения  $\rho$ -мезона в реакции  $e + A \rightarrow e + \rho + A$  продольная передача

$$q_{||} = \frac{m_\rho^2 + |q^2|}{2E},$$

где  $q$  — 4-импульс фотона, и условие когерентности, как и ранее, будет  $q_{\parallel} R \leq 1$ .

Рождение  $\rho$ -мезона виртуальным фотоном в когерентном процессе электророждения примечательно еще тем, что рожденная система имеет квантовые числа фотона. Это обстоятельство является другим примечательным свойством когерентных процессов. В этом, по-видимому, состоит физическая сущность модели векторной доминантности в фотопроцессах. Фотообразование нестабильных частиц в кулоновском поле ядра (эффект Примакова) является когерентным процессом, идущим при малых продольных передачах. Практически регистрация этого процесса зависит от возможности отделения этого пика от фона из-за отсутствия интерференции с адронной когерентной амплитудой сильного взаимодействия.

В заключение рассмотрим нейтринный процесс в реакциях на ядрах за счет нейтрального тока:

$$\nu_{e, \mu} + A \rightarrow (e, \mu) + \begin{pmatrix} \pi \\ \rho \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} + A.$$

В этом когерентном процессе на ядре рожденная система в нижнем спиновом состоянии будет иметь квантовые числа нейтрино. Если возможно связанное состояние рожденной системы, то оно будет подобно нейтрино, а наблюдение радиальных возбуждений в этой системе непосредственно свидетельствовало бы о составной природе нейтрино. Таким образом, исследование когерентных процессов во взаимодействиях высокoenергетичных лептонов с ядрами предоставляет уникальную возможность почувствовать на опыте составную структуру лептонов.

Я глубоко признателен моей жене Людмиле за постоянную помощь и поддержку в работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bellini G., Di Corato M., Palombo F. et al. — Phys. Rev. Lett., 1982, v.48, p.1687.
2. Беллини Д., Василевский И., Венни Г., и др. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т.34, с.511.
3. Tyapkin A., Vasilevsky I., Vishniakov V. et al. — Nucl. Phys., 1992, v.B25, p.32.
4. Померанчук И.Я. — ЖЭТФ, 1958, т.7, с.499.
5. Фейнберг Е.Л., Померанчук И.Я. — Nuovo Cim., 1965, v.3, p.652.
6. Goldhaber A.S. et al. — Phys. Rev. Lett., 1960, v.22, p.802.
7. Good M.L., Walker W.D. — Phys. Rev., 1960, v.120, p.1857.
8. Bellini G. et al. — Nuovo Cim., 1963, v.29, p.896.

- 
9. Грибов В.Н. — Ядерная физика, 1967, т.5, с.197.
  10. Baldin A.M. — Part. and Nucl., 1977, v.8, p.429.
  11. Glauber R. — Lectures in Theoretical Physics. Interscience Publ., New York, 1959.
  12. Ситенко А.Г. — Укр. физ. журнал, 1959, т.4, с.152.
  13. Kolbig K.S., Margolis B. — Nucl. Phys., 1968, v.B6, p.85.
  14. Albrow M.G. et al. — Nucl. Phys., 1973, v.B51, p.388.
  15. Gell-Mann M., Oakes R.J. — Phys. Rev., 1968, v.175, p.2195.
  16. Пилькун Н. — Физика релятивистских частиц. М.: Мир, 1983.
  17. Drell S.D., Hiida K. — Phys. Rev. Lett., 1961, v.7, p.199.
  18. Deck R. — Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.1969.
  19. Зотов Н.П., Царев В.А. — ЭЧАЯ, 1978, т.9, с.650.
  20. Antipov Yu. et al. — Nucl. Phys., 1973, v.B63, p.153.
  21. Ascoli G. et al. — Phys. Rev., 1974, v.D9, p.1963.
  22. Ascoli G. et al. — Phys. Rev., 1975, v.D12, p.43.
  23. Ascoli G. et al. — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.669.
  24. Bowler M.G. et al. — Nucl. Phys., 1975, v.B97, p.227.
  25. Basdevant J.L., Berger E.L. — Phys. Rev., 1977, v.D16, p.657.
  26. Beusch W. et al. — Nucl. Phys., 1978, v.B134, p.436.
  27. Gavile P. et al. — Phys. Lett., 1977, v.B69, p.119.
  28. Mazzucato M. et al. — Nucl. Phys., 1979, v.B156, p.546.
  29. Dankowych J.A. et al. — Proc. of 20th Int. Conf. HEP-1980, 1980.
  30. Daum C. et al. — Phys. Lett., 1980, v.B89, p.281.
  31. Анджеяк Р. и др. — ОИЯИ, 13-3588, Дубна, 1967.
  32. Protopescu S.D. et al. — Phys. Rev., 1973, v.D7, p.1279.
  33. Gottfried K., Jakson J.D. — Nuovo Cim., 1964, v.33, p.309.
  34. Goldberger M.L., Treiman S.B. — Phys. Rev., 1958, v.111, p.355.
  35. Werle J. — Relativistic Theory of Reactions. North-Holland, Amsterdam, 1966.
  36. Cashmore R.J., Hey A.J.G. — Phys. Rev., 1972, v.D6, p.1303.
  37. Brockway P.V. — Ph.D. Thesis. University of Illinois, 1970.
  38. Ascoli G. et al. — Phys. Rev. Lett., 1970, v.25, p.962.
  39. Hansen J.D. et al. — Nucl. Phys., 1974, v.B81, p.403.
  40. Buchner K. et al. — Nucl. Phys., 1971, v.B74, p.293.
  41. Watson K.M. — Phys. Rev., 1952, v.38, p.1163.
  42. Никитин Ф. — ЭЧАЯ, 1981, т.12, с.805.
  43. Eden R.J. et al. — The Analytic S-Matrix. Cambridge Univ. Press, England, 1966.
  44. Orear J. — Notes on Statistics for Physicists. UCRL-8417, 1958.
  45. Cason N.M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1982, v.48, p.1316.
  46. Dalitz R.H., Moorhouse R.G. — Proc. Royal Soc. London F318, 1970, p.279.
  47. Particle Data Group. — Phys. Lett., 1982, v.B111.
  48. Мухин С.В., Царев В.А. — ЭЧАЯ, 1977, т.8, с.989.
  49. Aitchison I.J.R., Bowler M.G. — J. Phys., 1977, v.63, p.150.
  50. Bowler M.G., Game M.A.V. — Nucl. Phys., 1975, v.B97, p.227.
  51. Thompson G. et al. — Nucl. Phys., 1974, v.B69, p.381.
  52. Otter G. — Nucl. Phys., 1974, v.B80, p.1.
  53. Haber H.E. et al. — Nucl. Phys., 1977, v.D129, p.429.
  54. Roberts Th. et al. — Phys. Rev., 1978, v.D18, p.59.

55. **Веребрюсов В.С., Пономарев Л.А.** — Письма в ЖЭТФ, 1981, т.33, с.60.
56. **Замолодчиков А.Б. и др.** — ЖЭТФ, 1979, т.77, с.451.
57. **Faldt G., Osland P.** — Nucl. Phys., 1977, v.B126, p.221.
58. **Osland P., Treleani D.** — Nucl. Phys., 1976, v.B107, p.493.
59. **Займидорога О., Никитину Ф.** — ОИЯИ, Е1-82-120, Дубна, 1982.
60. **Беллини Д. и др.** — Труды 3-его симпозиума по физ. выс. энергий. Казимириж, 1980, с.111.
61. **Ананьев М. и др.** — Труды 21-й Межд. конф. по физике выс. энергий, Париж, 1982.
62. **Chew D.M.** — Phys. Rev., 1978, v.D18, p.2368.
63. **Gersten A.** — Nucl. Phys., 1969, v.B12, p.517.
64. **Bellini G. et al.** — Proc. of 4th Symposium on particle physics. Kasimir, 1981, p.47.
65. **Ananiev M. et al.** — Comm. Cern, Geneva, EP-81-110, EP-81-98, 1981.
66. **Беллини Д. и др.** — Ядерная физика, 1985, т.41, с.1213.
67. **Пономарев Л.** — Ядерная физика, 1978, т.27, с.1342.
68. **Камалов А., Пономарев Л.** — ИТЭФ-120, 1976.
69. **Займидорога О., Тарасов В.** — Ядерная физика, 1988, т.48, с.224.
70. **Bellini G. et al.** — Proc. 12th Intern. Conf. on Multiparticle Dynamics. France, Notre-Dame, 1982, p.110.
71. **Graham R.H.** — Phys. Rev., 1979, v.D19, p.284.
72. **Montanet L.** — Rapp. talk, Proc. 21 Intern. Conf. on High Energy Phys., Paris, 1982.
73. **Беллини Д. и др.** — ОИЯИ, Р1-83-606, Дубна, 1983.
74. **Zielinski M. et al.** — Phys. Rev., 1984, v.D30, p.1855.
75. **Bityukov S. et al.** — Proc. of Int. Conf. on Hadron Spectr. 1991, p.51.
76. **Besson D.** — Rapp. talk on HEP-97, Jerusalem, 1997.
77. **Jaffe R.L., Low F.E.** — Phys. Rev., 1979, v.D19, p.2105.
78. **Stanley D.P., Robinson D.** — Phys. Rev., 1980, v.21, p.3180.
79. **Герасимов С.Б., Говорков А.Б.** — ОИЯИ, Р2-81-538, Дубна, 1981.
80. **Филиппов А.Т.** — Письма в ЖЭТФ, 1982, т.36, с.96.
81. **Ivanshin Yu. et al.** — Dubna, JINR Papid Comm. P2-83-727, 1983; JINR Comm. Е1-93-155, 1993.
82. **Коккедэ Я.** — Теория кварков. М.: Мир, 1971.