

УДК 539.149

СУПЕРСИММЕТРИЯ В СТРУКТУРЕ ЯДЕР

*Р.В.Джолос**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	223
СУПЕРСИММЕТРИЯ И СПЕКТРЫ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР	228
МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ	233
МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ И ФЕРМИ- ОНОВ	237
ФОРМАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ СУПЕРСИММЕТРИИ В МО- ДЕЛИ ЯДЕРНОЙ СТРУКТУРЫ, БАЗИРУЮЩЕЙСЯ НА ГРУППЕ $U(6/2)$, И В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ	242
$U(1/2)$ -СУПЕРСИММЕТРИЯ БЕЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИМ- МЕТРИИ	250
НЕПОЛНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ В МОДЕЛИ ЧАСТИЦА- РОТОР	259
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	269
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	270

*E-mail: jolos@thsun1.jinr.ru

УДК 539.149

СУПЕРСИММЕТРИЯ В СТРУКТУРЕ ЯДЕР

*Р.В.Джолос**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Сделан обзор результатов применения идей суперсимметрии в теории структуры ядер. Приведены примеры спектров возбужденных состояний четно-четных и соседних нечетных ядер, иллюстрирующие приближенную суперсимметрию. Рассмотрен пример суперсимметричного гамильтониана ядра, основанного на градуированной алгебре $U(1/2)$, и сделан сравнительный анализ алгебраической структуры этой модели ядра и суперсимметричной модели квантовой теории поля. Приведен пример гамильтониана, часть собственных состояний которого, относящихся к четно-четным и соседним нечетным ядрам, характеризуется тождественными энергиями гамма-переходов, хотя этот гамильтониан не принадлежит ни к одному из известных пределов динамических симметрий. Показано, что описание некоторых ротационных полос в соседних четно-четных и нечетных ядрах в рамках модели частица—ротор может быть переформулировано как реализация частичной суперсимметрии.

The results of the applications of the supersymmetry ideas in nuclear structure are reviewed. The spectra of the excited states of the even-even and odd nuclei, which illustrate an approximate supersymmetry, are shown. The example of the supersymmetric nuclear Hamiltonian based on the $U(1/2)$ graded algebra is considered and a comparison of the algebraic structure of this model and of one of the quantum field theory supersymmetric models is made. The Hamiltonian is constructed, a part of whose eigenstates belonging to the even-even and odd neighboring nuclei has identical gamma-transition energies, although this Hamiltonian does not have dynamical symmetry. It is shown that description in the framework of the particle—rotor model of some rotational bands in the neighboring even-even and odd nuclei can be reformulated as a realization of the partial supersymmetry.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы идеи суперсимметрии стали предметом широкого обсуждения и последующего применения в различных областях физики. Суперсимметрия имеет долгую и интересную историю. Впервые она была введена в рассмотрение в квантовой теории поля [1–6], однако идеи суперсимметрии нашли интенсивное применение в теории ядерной структуры. Было показано, что объединенные алгебры бозонов и фермионов особенно полезны при описании свойств нечетных ядер: как спектров низколежащих возбужденных состояний, так и вероятностей электромагнитных переходов и соотношений между сечениями реакций однонуклонных передач. Кроме того,

*E-mail: jolos@thsun1.jinr.ru

была предпринята попытка классификации, в которой свойства нескольких ядер, включая четно-четные и нечетные, описывались одним и тем же эффективным гамильтонианом с теми же самыми параметрами, и были получены весьма интересные результаты [7–19].

Однако формальные методы, использованные для введения суперсимметрии в теорию структуры ядра и в физику частиц, различны. Это делает сопоставление подходов более трудным и ограничивает использование примеров, найденных в ядерной физике. Поэтому одна из целей данного обзора — сделать сравнительный анализ этих подходов. С одной стороны, это может способствовать проникновению в теорию структуры ядра тех математических разработок, которые имеются в квантовой теории поля. С другой стороны, это сделает более известными те примеры суперсимметрии, которые есть в ядерной физике. Именно в спектрах возбуждения четно-четных и нечетных ядер были обнаружены группы возбужденных состояний, характеризующиеся близкими по величине энергетическими интервалами, т.е. близкими энергиями гамма-переходов. Фактически, это единственные примеры проявления суперсимметрии в физике ядра и частиц.

Суперсимметрия предполагает совпадение масс частиц, бозонов и фермионов, или же спектров возбуждения бозонной и фермионной систем. В ядерной физике, говоря о суперсимметрии, надо иметь в виду, что четно-четные ядра, имеющие целочисленные угловые моменты стационарных состояний, являются бозонными системами, а нечетные ядра, с полуцелыми значениями угловых моментов собственных состояний — фермионными системами. Есть несколько примеров, когда спектры низколежащих возбужденных состояний четно-четных и соседних нечетных ядер совпадают с достаточно хорошей точностью, или же совпадают энергетические интервалы между какими-то определенными состояниями: например, энергии переходов в квазиротационных полосах, построенных на некоторых состояниях в четно-четных и соседних нечетных ядрах. При этом анализ показывает, что случай слабой связи нечетной частицы с четно-четным остовом не реализуется. Это видно из того, что не все возможные с геометрической точки зрения члены мультиплетта, образуемого в результате связи нечетной частицы, имеющей угловой момент j , с четно-четным остовом в состоянии с угловым моментом I , наблюдаются при той же энергии возбуждения, что и состояние остова, как это должно быть в случае слабой связи.

Есть и примеры несколько иного рода, когда угловые моменты состояний нечетного ядра можно интерпретировать как результат векторной связи углового момента четно-четного остова, который продолжает оставаться хорошим квантовым числом и в нечетном ядре, со спином (псевдоспином) нечетной частицы, хотя спектры возбуждения соседних четно-четных и нечетных ядер и не совпадают. В этом случае говорят о динамической суперсимметрии, когда дополнительное взаимодействие, не изменяющее волновых функций, изме-

няет энергетические интервалы между уровнями нечетного ядра по сравнению с соответствующими интервалами в четно-четном ядре.

В основном по этой причине в теории структуры ядра главное внимание уделялось построению гамильтонианов, демонстрирующих динамическую суперсимметрию. Такие гамильтонианы можно представлять в виде суммы операторов Казимира для соответствующей цепочки подгрупп базисной бозон-фермионной группы. Это были феноменологические гамильтонианы. Параметры таких гамильтонианов, число которых значительно меньше, чем экспериментальных данных, фиксировались так, чтобы одновременно описывать как четно-четные, так и нечетные ядра.

Симметрия является очень важной концепцией в физике вообще и в ядерной физике в частности. В конечных многочастичных системах она проявляется как инвариантность относительно обращения времени, отражения пространственных координат, вращения, но также и как внутренняя симметрия, связанная со структурой системы и характером взаимодействия ее элементов. Среди мезоскопических систем атомные ядра формируют, возможно, наилучшую основу для апробирования концепций симметрий, благодаря большому объему детальной спектроскопической информации, накопленной к настоящему времени. Концепция динамических симметрий играет важную роль в интерпретации свойств атомных ядер. Эта концепция базируется на предположении о существовании какой-то первичной симметрии с соответствующей ассоциированной алгеброй операторов, такой, что гамильтониан системы может быть выражен в терминах операторов этой алгебры. Однако в гамильтониане эта симметрия редуцируется до симметрии более низкого уровня (например, симметрии относительно вращения пространственных координат). Таким способом генерируется энергетический спектр возбужденных состояний системы. По этой причине динамические алгебры часто называют алгебрами, генерирующими спектр. Простейшим примером редукции симметрии может служить включение в ротационно-инвариантный гамильтониан взаимодействия с внешним магнитным полем фиксированной ориентации. В результате ротационная инвариантность гамильтониана нарушается, но угловой момент и его проекция на ось симметрии продолжают оставаться хорошими квантовыми числами. Собственные значения гамильтониана становятся функциями не только полного углового момента, но и его проекции. Вырожденный мультиплет состояний с одним и тем же полным угловым моментом расщепляется, тем самым генерируется спектр.

Атомные ядра характеризуются прежде всего числом протонов Z и нейтронов N . Соответственно различают четно-четные ядра (Z и N — четные числа), нечетные ядра (Z — четное, N — нечетное число, или наоборот) и нечетно-нечетные ядра (Z и N — нечетные числа). Собственные состояния соседних четно-четных ядер характеризуются целочисленными значениями углового момента. Возбужденные состояния — это двух-, четырех- и т.д. ква-

зичастичные состояния. Наиболее важные из них, оказывающие определяющее влияние на структуру атомных ядер, — это коллективные возбуждения. Поскольку коллективные возбуждения являются суперпозицией большого числа двухквизичастичных возбуждений, они могут многократно повторяться подобно бозонам. Поэтому для их описания используется алгебра бозонных операторов. Примером может служить модель взаимодействующих бозонов, гамильтониан которой строится с помощью операторов монополюсных и квадрупольных бозонов. Если ввести общее, не зависящее от мультипольности обозначение для бозонных операторов b_α^+ (оператор рождения бозона) и b_α (оператор уничтожения бозона), то преобразование одного коллективного состояния ядра в другое осуществляется с помощью генераторов $b_\alpha^+ b_\beta$. Здесь α, β — наборы квантовых чисел, характеризующих бозонное состояние.

При рассмотрении нечетных ядер необходимо явно вводить операторы рождения a_s^+ и уничтожения a_s фермионов, необходимые для описания нечетной частицы. Фермионные операторы необходимы также и для описания неколлективных возбуждений четно-четных ядер. Переходы между состояниями нечетного ядра описываются, наряду с операторами $b_\alpha^+ b_\beta$, еще и операторами $a_s^+ a_t$. Можно ввести в рассмотрение матрицу операторов, связывающих состояния четно-четных и состояния нечетных ядер:

$$\begin{pmatrix} b^+b & 0 \\ 0 & a^+a \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эти операторы позволяют рассматривать отдельно четно-четные и нечетные ядра. Однако, благодаря тому, что сейчас уже экспериментально исследовано большое число как четных, так и нечетных ядер, было бы интересно найти такую классификацию состояний ядер, в которой четно-четные и нечетные ядра рассматривались бы одновременно. Так как одни из этих ядер содержат четное число нуклонов, а другие — нечетное число нуклонов, то математические построения, необходимые для описания обоих типов ядер, должны включать операторы, изменяющие числа бозонов и фермионов:

$$a_s^+ b_\alpha, \quad b_\alpha^+ a_s. \quad (2)$$

Соответствующие математические конструкции называются градуированными алгебрами. Матрица, включающая все эти операторы, имеет вид

$$\begin{pmatrix} b^+b & b^+a \\ a^+b & a^+a \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Операторы b^+b и a^+a формируют ту или иную классическую алгебру Ли, замкнутую относительно коммутационных соотношений. Операторы, образующие матрицу (3), уже не образуют классической алгебры Ли. Для того

чтобы построить из них замкнутую алгебраическую структуру, необходимо ввести в рассмотрение, наряду с коммутаторами, также и антикоммутаторы. Результирующая алгебра называется градуированной алгеброй или супералгеброй. Схематично коммутационные и антикоммутационные соотношения между операторами (3) имеют следующий вид:

$$[b^+b, b^+b]_- = b^+b, \quad (4)$$

$$[a^+a, a^+a]_- = a^+a, \quad (5)$$

$$\{a^+b, b^+a\}_+ = a^+a - b^+b, \quad (6)$$

$$[a^+b, b^+b]_- = a^+b, \quad (7)$$

$$[a^+b, a^+a]_- = -a^+b. \quad (8)$$

Гамильтониан ядра строится в виде комбинации членов, линейных и квадратичных по операторам (3). Гамильтониан может коммутировать с некоторыми из операторов b^+b или a^+a . В этом случае говорят об инвариантности гамильтониана относительно тех или иных преобразований. Мы говорим также о симметрии относительно того или иного преобразования. Инвариантность означает, что есть набор собственных состояний ядра, имеющих одну и ту же энергию. Например, ротационная инвариантность гамильтониана означает, что состояния ядра с одним и тем же угловым моментом, но с разными значениями его проекции, характеризуются одним и тем же значением энергии возбуждения.

Как уже отмечалось выше, операторы типа a^+b принадлежат не классической алгебре Ли, а супералгебре. По аналогии в случае, если гамильтониан коммутирует с оператором типа a^+b , говорят о суперсимметрии гамильтониана. Так как оператор a^+b переводит состояния четно-четного ядра в состояния нечетного ядра, то суперсимметрия гамильтониана означает, что энергии состояний четно-четного и нечетного ядер совпадают. Поскольку в теории структуры ядер гамильтониан описывает только энергии возбуждения, то в случае суперсимметрии речь идет о совпадении энергий возбуждения четно-четных и нечетных ядер.

В дальнейшем обзор построен следующим образом. В разд. 2 приведены и обсуждаются примеры спектров состояний четно-четных и нечетных ядер, иллюстрирующих приближенную суперсимметрию. В разд. 3 кратко излагается аппарат модели взаимодействующих бозонов. В разд. 4 излагается аппарат модели взаимодействующих бозонов и фермионов. Разд. 5 посвящен формальному сравнению схем реализации идей суперсимметрии в теории структуры ядра и в квантовой теории поля. В разд. 6 рассматривается пример $U(1/2)$ -суперсимметрии в ядрах. В разд. 7 анализируется суперсимметрия в модели частица — ротор. Основные результаты обзора просуммированы в заключении.

2. СУПЕРСИММЕТРИЯ И СПЕКТРЫ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР

Прежде чем перейти к изложению теоретических результатов, полученных при исследовании проявлений суперсимметрии в спектрах атомных ядер, рассмотрим имеющиеся экспериментальные данные. Ниже приведены примеры спектров состояний четно-четных и нечетных ядер, относящихся к областям сферических, переходных, деформированных и супердеформированных ядер. Что можно было бы ожидать, исходя из общих соображений? Спектр низколежащих состояний ядер, удаленных от магических, определяется коллективными состояниями. При переходе от четно-четного к нечетному ядру к первому добавляется квазичастица. В простейшем случае, если она не взаимодействует с коллективными состояниями четно-четного остова, мы получаем модель невзаимодействующих квазичастицы и остова. Энергии гамма-переходов между состояниями четно-четного и нечетного ядер будут совпадать по тривиальной причине — отсутствие взаимодействия. При той же энергии, что и у состояния четно-четного ядра с угловым моментом I , мы будем иметь вырожденный мультиплет состояний с угловыми моментами $J = |I - j|, |I - j| + 1, \dots, I + j$, где j — угловой момент квазичастицы. Однако такая упрощенная картина не реализуется в ядрах. Даже если взаимодействие квазичастицы с остовом слабое, ее присутствие приводит к поляризации остова, что выражается, например, в «сжатии» спектра нечетного ядра. В случае деформированных ядер это проявляется в увеличении момента инерции нечетного ядра. Примером такой ситуации являются ядра ^{102}Ru и ^{103}Rh . Спектры низколежащих возбужденных состояний этих ядер приведены на рис. 1 [7]. Спектр ^{103}Rh выглядит как результат связи нечетного протона в состоянии $p_{1/2}$ с ядром ^{102}Ru . Другие одночастичные состояния отрицательной четности $p_{3/2}$ и $f_{5/2}$ удалены от $p_{1/2}$ на 1 МэВ и более. Видно, что спектр низколежащих состояний отрицательной четности состоит из дублетов: $3/2^-$ и $5/2^-$ при энергиях возбуждения 295 и 357 кэВ, $7/2^-$ и $9/2^-$ при энергиях 848 и 920 кэВ. Центр тяжести первого дублета близок к энергии возбуждения первого 2^+ -состояния ^{102}Ru 475 кэВ, а центр тяжести второго дублета близок к энергии возбуждения первого 4^+ -состояния ^{102}Ru 1106 кэВ. Коэффициент сжатия спектра ^{103}Rh относительно спектра ^{102}Ru составляет 0,7–0,8 и приближается к единице с ростом энергии возбуждения. Состояние $1/2^-$ при энергии возбуждения 803 кэВ соответствует $p_{1/2} \otimes 0_2^+$ (944 кэВ).

Следующим примером спектра нечетного ядра, который можно интерпретировать как результат связи нечетной частицы с $j^\pi = 1/2^-$ с низколежащими состояниями четно-четного остова, является ^{195}Pt (рис. 2) [20]. На рис. 2 приведены не все низколежащие возбужденные состояния ^{195}Pt , а только те из них, которые формируют дублеты на основе коллективных состояний ^{194}Pt . Расщепление дублетов в ^{195}Pt заметно меньше, чем в ^{103}Rh ,

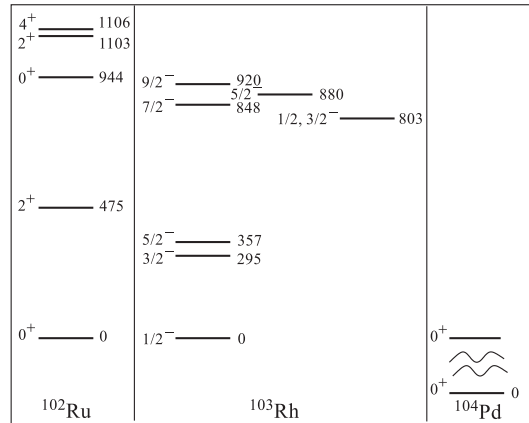


Рис. 1. Пример $U(6/2)$ -суперсимметрии в ядрах. Показана часть экспериментального спектра изотопов ^{102}Ru , ^{103}Rh и ^{104}Pd , образующих супермультиплет [7]. Энергии указаны в кэВ. Двухквaziчастичные состояния в ^{104}Pd не идентифицированы. Возможным кандидатом на место нижайшего возбужденного состояния ^{104}Pd , принадлежащего супермультиплету, является 0^+ (1793 кэВ)-уровень, наблюдавшийся при β^- -распаде ^{104}Rh с $\log ft = 5, 5$

SUSY	Экспер.	Экспер.	Расчет
$9/2^-$ $7/2^-$	4_1^+ — 812		
$5/2^-$ $3/2^-$	2_2^+ — 622	$9/2^-$ — 667 $7/2^-$ — 612 $5/2^-$ — 544 $3/2^-$ — 525	$9/2^-$ — 654 $7/2^-$ — 608 $5/2^-$ — 495 $3/2^-$ — 470
$5/2^-$ $3/2^-$	2_1^+ — 328	$5/2^-$ — 239 $3/2^-$ — 212	$5/2^-$ — 266 $3/2^-$ — 241
$1/2^-$	0^+ — 0	$1/2^-$ — 0	$1/2^-$ — 0
^{195}Pt	^{194}Pt	^{195}Pt	^{195}Pt

Рис. 2. Экспериментальный спектр низколежащих состояний ^{194}Pt и экспериментальный и теоретический спектры тех состояний ^{195}Pt , которые образуют супермультиплет вместе с приведенными на рисунке состояниями ^{194}Pt . Предсказания модели, основанной на точной суперсимметрии, приведены в левой колонке. Рассчитанный спектр ^{195}Pt получен в предположении, что собственные значения гамильтониана (116) для четно-четного изотопа ^{194}Pt совпадают с соответствующими экспериментальными энергиями. Результат расчета, выполненного с учетом сжатия спектра ^{195}Pt относительно ^{194}Pt и псевдоспин-орбитального расщепления дублетов, показан на рисунке справа

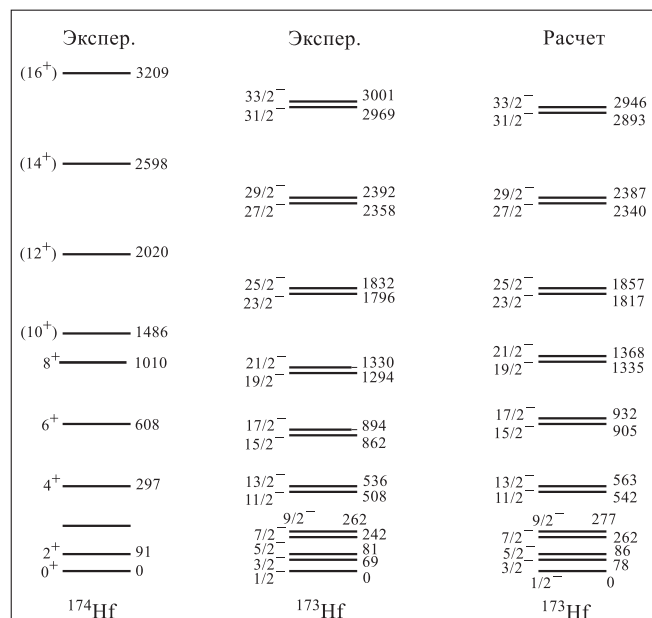
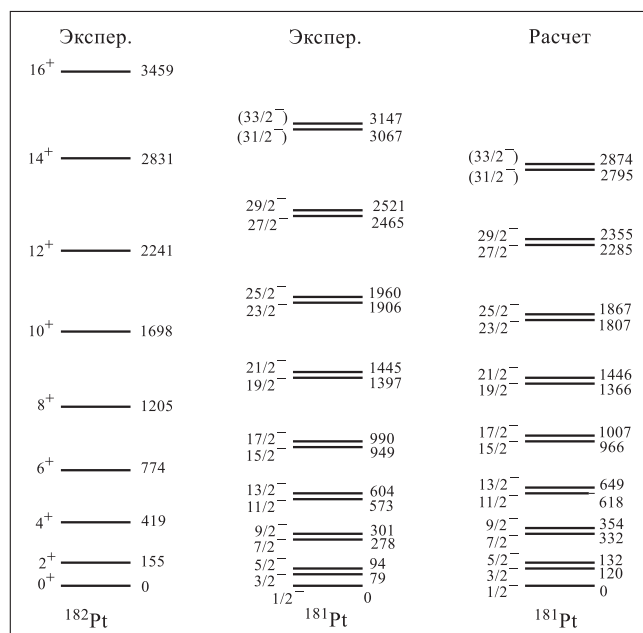


Рис. 3. Состояния основной полосы ¹⁷⁴Hf и те экспериментальные и рассчитанные уровни ¹⁷³Hf, которые формируют супермультиплет вместе с уровнями основной полосы ¹⁷⁴Hf. Энергии указаны в кэВ

но коэффициент сжатия спектра относительно соседнего четно-четного ядра такой же, как и в случае ¹⁰³Rh. В ядрах области Pt одночастичные уровни отрицательной четности $p_{1/2}$, $p_{3/2}$ и $f_{5/2}$ достаточно близки по энергии. Это подтверждается как экспериментальными данными по реакциям однонуклонных передач [21], так и присутствием других уровней отрицательной четности при небольших энергиях возбуждения в ¹⁹⁵Pt. Поэтому в этом случае уже нельзя говорить о слабой связи нечетной частицы и остова. В изотопах Pt суперсимметрия имеет более глубокие причины.

На рис. 3 и 4 [22–26] приведены спектры ротационных полос, основанных на состояниях с отрицательной четностью в деформированных или близких к деформированным ядрах. Основанием полос во всех случаях является состояние $1/2^-$. Видно, что полосы состоят из весьма слабо расщепленных дублетов, центр тяжести которых близок по энергии к соответствующим уровням соседних четно-четных ядер. Коэффициент сжатия спектра, например, в ¹⁷³Hf, составляет в среднем 0,9.


 Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для изотопов $^{181,182}\text{Pt}$

На рис. 5 и 6 [27] показаны уровни так называемых тождественных супердеформированных ротационных полос. Видно, что энергии гамма-переходов в четно-четном и соседнем нечетном ядрах совпадают с точностью до нескольких кэВ. К сожалению, в случае супердеформированных полос угловые моменты состояний, как правило, неизвестны или известны лишь ориентировочно. Не установлены надежно и четности состояний. Кроме того, не зафиксированы партнеры по сигнатуре, так что нельзя говорить о дублетах.

Тождественные ротационные полосы среди супердеформированных состояний — это исключительно интересное явление, обнаруженное в последнее десятилетие. Обнаружение в разных ядрах длинных цепочек гамма-переходов с одинаковыми энергиями было совершенно неожиданно. Наоборот, в течение более чем 50 лет предполагалось, что энергетический спектр однозначно характеризует ядро. Впервые тождественные ротационные полосы были обнаружены в ^{151}Tb и ^{152}Dy [28]. Совпадение с точностью до нескольких кэВ энергий гамма-переходов между уровнями ротационных полос разных ядер означает совпадение с точностью до нескольких десятых процента моментов инерции этих двух полос. Это заметно меньше, чем ожидаемое изменение порядка 1% твердотельного момента инерции, обусловленное из-

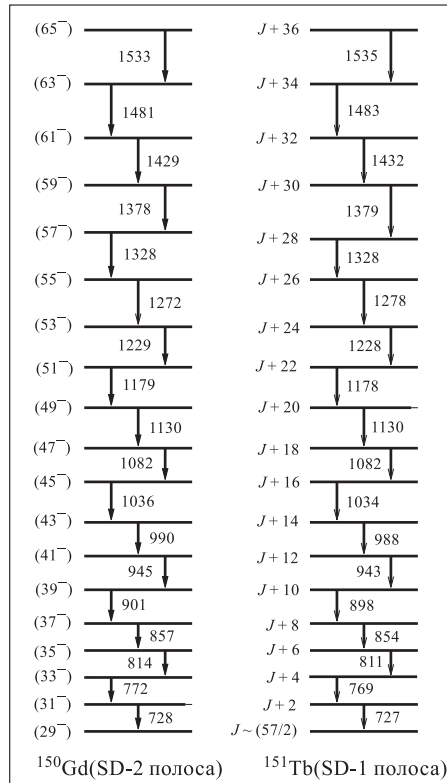


Рис. 5. Экспериментальные спектры тождественных супердеформированных полос ^{150}Gd и ^{151}Tb . Энергии указаны в кэВ

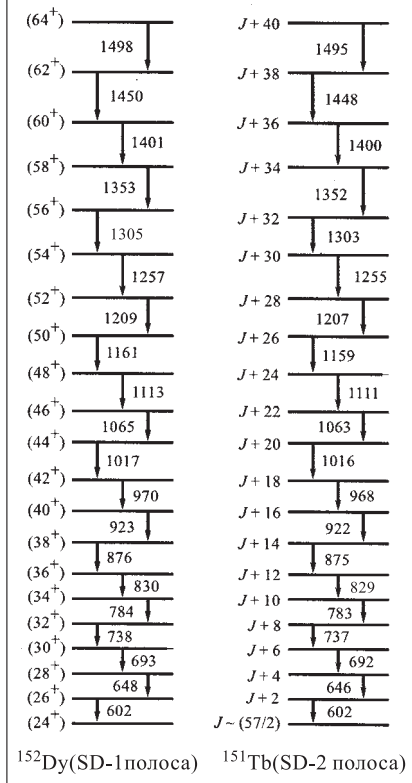


Рис. 6. Экспериментальные спектры тождественных супердеформированных полос ^{152}Dy и ^{151}Tb . Энергии указаны в кэВ

менением массы ядер. Позднее несколько других тождественных полос были найдены среди супердеформированных полос в области Dy и Hg. Несмотря на отсутствие полной экспериментальной информации представляется весьма заманчивым рассматривать тождественные супердеформированные полосы как пример проявления суперсимметрии в ядерных спектрах. Мы остановимся на этом вопросе подробнее в разд. 7.

Как видно из рис. 1–4, во всех случаях, когда энергии переходов в нечетных ядрах близки к энергиям переходов в четно-четных ядрах, основаниями полос являются состояния $1/2^-$, а возбужденные уровни полосы представляют собой слаборасщепленные дублеты: $(3/2^-, 5/2^-)$, $(7/2^-, 9/2^-)$ и т.д. Этот факт будет обсуждаться в последующих разделах.

3. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ

Анализ явления суперсимметрии в ядерной физике связан со сравнением спектров возбужденных состояний как нечетных, так и четно-четных ядер. При этом интерес представляют только низколежащие коллективные возбуждения четно-четных ядер. Для их описания была разработана модель взаимодействующих бозонов. Хотя эта модель достаточно подробно рассмотрена в литературе, мы посвятим данный раздел ее краткому описанию, с тем чтобы обзор содержал всю необходимую исходную информацию.

Модель взаимодействующих бозонов (МВБ) является приближением к описанию четно-четных ядер в рамках оболочечной модели ядра. Конфигурационное пространство состояний ядер, используемое в МВБ, составляет лишь небольшую часть конфигурационного пространства оболочечной модели, хотя и наиболее важную часть. Оно строится при помощи квадрупольных (d) и монопольных (s) бозонов, которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[d_\mu, d_\nu^+] = \delta_{\mu\nu}, \quad [d_\mu, d_\nu] = 0, \quad (9)$$

$$[s, s^+] = 1, \quad [s, d_\mu] = [s, d_\mu^+] = 0. \quad (10)$$

Здесь индексы μ, ν принимают значения $-2, -1, 0, 1, 2$. Таким образом, базисные векторы состояний могут быть охарактеризованы полным числом бозонов N , равным сумме чисел s - и d -бозонов, и числом d -бозонов. Рассмотрим набор билинейных комбинаций бозонных операторов

$$d_\mu^+ d_\mu, \quad d_\mu^+ s, \quad s^+ d_\mu, \quad s^+ s. \quad (11)$$

Всего в этом наборе 36 операторов. Коммутатор любых двух операторов из набора (11) является оператором из того же набора. Таким образом, 36 операторов (11) образуют алгебру. Это унитарная алгебра в шестимерном пространстве $U(6)$. Коллективный гамильтониан ядра может быть построен как сумма членов, линейных и квадратичных относительно операторов из (11), являющихся ротационными инвариантами.

Для построения базиса состояний, необходимого для диагонализации гамильтониана и классификации состояний, нужно выявить все подалгебры алгебры $U(6)$, т.е. все поднаборы операторов из (11), замкнутые относительно коммутационных соотношений. Это означает, что если операторы X и Y принадлежат такому поднабору, то их коммутатор $[X, Y]$ также принадлежит этому поднабору. Для использования в ядерной спектроскопии важно, чтобы эти цепочки подалгебр алгебры $U(6)$ включали $O(3)$ — алгебру трехмерных вращений, поскольку угловой момент является характеристикой состояний ядра.

Одну из подалгебр $U(6)$ образуют 25 операторов $d_\mu^+ d_\nu$. Это алгебра $U(5)$. Среди операторов этой алгебры 10 операторов

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 1\nu}^{2\mu'} d_\mu^+ d_{\mu'}, \quad \nu = -1, 0, 1 \quad (12)$$

и

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 3\nu}^{2\mu'} d_\mu^+ d_{\mu'}, \quad \nu = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \quad (13)$$

образуют подалгебру $U(5)$ — группу ортогональных преобразований в пятимерном пространстве $O(5)$. Три оператора (12) образуют подалгебру $O(5)$. Это алгебра $O(3)$. И, наконец, оператор

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 10}^{2\mu} d_\mu^+ d_\mu \quad (14)$$

генерирует алгебру $O(2)$ вращений вокруг оси z . Таким образом, мы получили первую из возможных цепочек подалгебр $U(6)$:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2). \quad (15)$$

Следующую цепочку подалгебр получить труднее, так как она включает линейные комбинации операторов из (11). Рассмотрим операторы

$$s^+ s + \sum_{\mu} d_\mu^+ d_\mu, \quad (16)$$

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 1\nu}^{2\mu'} d_\mu^+ d_{\mu'}, \quad (17)$$

$$d_\nu^+ s + s^+ (-1)^\nu d_{-\nu} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 2\mu'}^{2\nu} d_\mu^+ (-1)^{\mu'} d_{-\mu'}. \quad (18)$$

Используя коммутационные соотношения (9), (10), можно показать, что 9 операторов (16)–(18) формируют подалгебру. Это алгебра $U(3)$. Это утверждение справедливо для обоих знаков \pm в (18). Оператор (18) связан с квадрупольной деформацией ядра. Оператор (17) является оператором углового момента, а оператор (16) — оператором полного числа бозонов \hat{N} . Так как в МВБ полное число бозонов полагается равным половине числа валентных нуклонов, то N сохраняется. По этой причине удобнее рассматривать

не алгебру $U(3)$, а алгебру, которая не содержит оператор \hat{N} . Она состоит из восьми операторов (17), (18). Это алгебра $SU(3)$ — алгебра специальных унитарных преобразований в трех измерениях. Подалгебрами $SU(3)$ являются $O(3)$ и $O(2)$. Таким образом, вторая возможная цепочка подалгебр имеет вид

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2). \quad (19)$$

Рассмотрим теперь следующие 15 операторов:

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 1\nu}^{2\mu'} d_{\mu}^{+} d_{\mu'}, \quad (20)$$

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 3\nu}^{2\mu'} d_{\mu}^{+} d_{\mu'} \quad (21)$$

и

$$d_{\mu}^{+} s + s^{+} (-1)^{\mu} d_{\mu}. \quad (22)$$

Эти операторы образуют алгебру $O(6)$ — алгебру ортогональных преобразований в шестимерном пространстве. Без операторов (22) оставшиеся 10 операторов образуют, как и выше, алгебру $O(5)$, подалгебрами которой являются $O(3)$ и $O(2)$. Таким образом, третья цепочка подалгебр имеет вид

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2). \quad (23)$$

Можно показать, что цепочки подалгебр (15), (19) и (23) являются единственно возможными цепочками подалгебр, если мы хотим, чтобы алгебра трехмерных вращений $O(3)$ была включена в эти цепочки как подалгебра.

В заключение приведем все полученные цепочки подалгебр [29]:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{I}), \quad (24)$$

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{II}), \quad (25)$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{III}). \quad (26)$$

Перейдем к рассмотрению гамильтониана, который может быть построен в рамках модели взаимодействующих бозонов. В общем случае гамильтониан модели может быть диагонализирован только численно. Однако есть несколько специальных случаев, когда решение может быть получено аналитически.

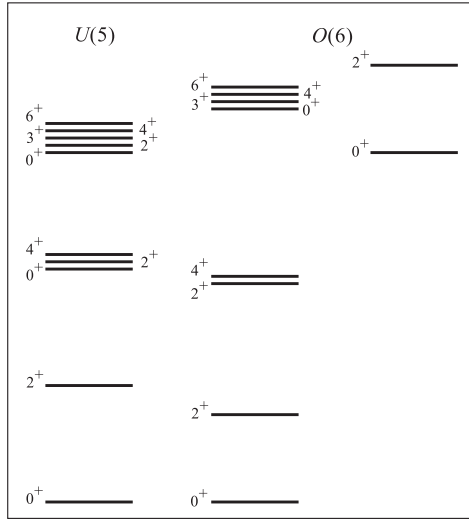


Рис. 7. Типичные спектры возбужденных состояний системы с $U(5)$ и $O(6)$ динамическими симметриями (редукционные цепочки I и III соответственно)

Это случаи динамических симметрий, которые играют важную роль в МВБ. Они возникают, когда гамильтониан может быть записан в виде линейной комбинации операторов Казимира одной из цепочек подалгебр, приведенных в (24)–(26). Так как операторы Казимира диагональны в заданной цепочке, их собственные значения определяют собственные значения гамильтониана.

Гамильтониан модели взаимодействующих бозонов наиболее общего вида, включающий и постоянные для данного ядра члены, влияющие только на энергию основного состояния, но не на спектр возбуждения, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H = e_0 + e_1 C_1(U(6)) + e_2 C_2(U(6)) + e_3 C_1(U(5)) + \\
 + e_4 C_2(U(5)) + e_5 C_2(O(5)) + e_6 C_2(O(3)) + \\
 + e_7 C_2(SU(3)) + e_8 C_2(O(6)), \quad (27)
 \end{aligned}$$

где $C_1(\dots)$ и $C_2(\dots)$ являются линейными и квадратичными, соответственно, операторами Казимира групп, указанных в скобках. Этот гамильтониан можно диагонализировать только численно, так как одни из операторов Казимира в (27) диагональны в одной цепочке подгрупп, другие — в другой. Приведем выражения для собственных значений операторов Казимира, используя квантовые числа цепочек подгрупп:

$$C_1(U(6)) = N, \quad (28)$$

$$C_2(U(6)) = N(N + 5), \quad (29)$$

$$C_1(U(5)) = n_d, \quad (30)$$

$$C_2(U(5)) = n_d(n_d + 4), \quad (31)$$

где N — полное число бозонов, а n_d — число квадрупольных (d) бозонов. Они принимают следующие значения:

$$N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

$$n_d = 0, 1, 2, \dots, N - 1, N, \quad (33)$$

$$C_2(O(6)) = 2\sigma(\sigma + 4), \quad (34)$$

$$C_2(O(5)) = 2\tau(\tau + 3), \quad (35)$$

$$C_2(O(3)) = 2L(L + 1), \quad (36)$$

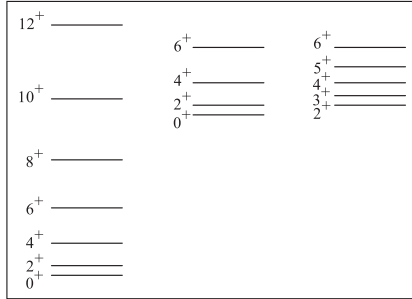


Рис. 8. Типичные спектры возбужденных состояний системы с $SU(3)$ динамической симметрией (редукционная цепочка II)

$$C_2(SU(3)) = \frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu), \quad (37)$$

где L — угловой момент,

$$\sigma = N, N - 2, \dots, 1 \text{ или } 0. \quad (38)$$

В редукционной цепочке I

$$\tau = n_d, n_d - 2, \dots, 1 \text{ или } 0. \quad (39)$$

В редукционной цепочке III

$$\tau = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0. \quad (40)$$

Квантовые числа λ и μ принимают значения

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu) = & (2N, 0), (2N - 4, 2), (2N - 8, 4), \dots \\ & (2N - 6, 0), (2N - 10, 2), \dots \\ & (2N - 12, 0), \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Типичные спектры, характерные для редукционных цепочек I–III, показаны на рис. 7, 8.

4. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ

В модели взаимодействующих бозонов и фермионов, предложенной для описания структуры нечетных ядер, наряду с бозонными операторами при построении гамильтониана используются и операторы рождения и уничтожения

фермионов: a_{jm}^+ и a_{jm} . Здесь j — это полный угловой момент фермиона, m — его проекция. Оператор уничтожения фермиона a_{jm} при вращении системы координат преобразуется не так, как оператор рождения фермиона a_{jm}^+ . Поэтому в рассмотрение вводится и оператор \tilde{a}_{jm} :

$$\tilde{a}_{jm} = (-1)^{j-m} a_{j-m}, \quad (42)$$

у которого трансформационные свойства те же, что и у оператора a_{jm}^+ .

Операторы a_{jm}^+ , a_{jm} удовлетворяют следующим коммутационным и антикоммутационным соотношениям:

$$\{a_{jm}^+, a_{j'm'}\} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \quad \{a_{jm}^+, a_{j'm'}^+\} = \{a_{jm}, a_{j'm'}\} = 0, \quad (43)$$

$$[d_\mu, a_{jm}^+] = [d_\mu, a_{jm}] = [s, a_{jm}^+] = [s, a_{jm}] = 0. \quad (44)$$

Оставшиеся соотношения можно получить с помощью операции эрмитова сопряжения.

Гамильтониан модели взаимодействующих бозонов и фермионов наиболее общего вида состоит из трех слагаемых, описывающих бозоны (H_B), фермионы (H_F) и их взаимодействие (V_{BF}):

$$H = H_B + H_F + V_{BF}. \quad (45)$$

Предполагается, что гамильтониан сохраняет как полное число бозонов, так и число фермионов. Различные части гамильтониана имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} H_B = & \epsilon_s s^+ s + \epsilon_d \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu} + \sum_{L,M} C_L (d^+ d^+)_{LM} (dd)_{LM} + \\ & + f ((d^+ d^+)_{00} s s + s^+ s^+ (dd)_{00}) + \\ & + g ((d^+ d^+)_{2\mu} d_{\mu} s + s^+ d_{\mu}^+ (dd)_{2\mu}), \end{aligned} \quad (46)$$

$$H_F = \sum_{jm} E_j a_{jm}^+ a_{jm} + \sum (j_1 j_2 | V_L | j'_1 j'_2) (a_{j_1}^+ a_{j_2}^+)_{LM} (a_{j'_1} a_{j'_2})_{LM}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} V_{BF} = & \sum v_{jj';J} (d^+ a_j^+)_{JM} (da_{j'})_{JM} + s^+ s \sum_{jm} \lambda_j a_{jm}^+ a_{jm} + \\ & + \sum \xi_{jj'} \left((d^+ a_j^+)_{j'm'} a_{j'm'} s + s^+ a_{j'm'}^+ (da_j)_{j'm'} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Рассмотрим набор билинейных фермионных операторов $a_{jm}^+ a_{j'm'}$. Эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[a_{jm}^+ a_{j'm'}, a_{in}^+ a_{i'n'}] = \delta_{j'i} \delta_{m'n} a_{jm}^+ a_{i'n'} - \delta_{i'j} \delta_{n'm} a_{in}^+ a_{j'm'} \quad (49)$$

вместе с соответствующими тождествами Якоби. Они являются генераторами унитарной алгебры размерности n : $U(n)$. Величина $n = \sum_j (2j_i + 1)$ может быть достаточно большой. Например, если нечетная частица занимает один из уровней нормальной четности, принадлежащий осцилляторной оболочке с главным квантовым числом $N = 4$, т.е. один из уровней $d_{5/2}, g_{7/2}, s_{1/2}$ и $d_{3/2}$, то $n = 20$. В случае осцилляторной оболочки с $N = 5$ имеем $n = 30$. Таким образом, набор билинейных фермионных операторов $a_{jm}^+ a_{j'm'}$ имеет достаточно сложную алгебраическую структуру. В теории ядерной структуры в рамках модели взаимодействующих бозонов и фермионов рассматриваются, в основном, два класса алгебраических структур.

В первом классе рассматриваются редукционные цепочки исходной алгебры $U(n)$, содержащие алгебру $SU(4)$, изоморфную спинорной алгебре $Spin(6)$. Например,

$$\begin{aligned} U(20) \supset Spin(6) &\approx O(6) \approx SU(4) \supset Spin(5) \\ &\supset Spin(3) \approx SU(2) \supset Spin(2) \approx O(2). \end{aligned} \quad (50)$$

В этом случае фермионная алгебра $Spin(6)$ может быть объединена с рассмотренной в предыдущем разделе бозонной алгеброй $O(6)$. В результате получается объединенная бозон-фермионная алгебра.

Второй класс представляет наибольший интерес с точки зрения последующего рассмотрения суперсимметрии. Этот класс можно получить следующим образом. Представим угловой момент фермиона \mathbf{j} в виде векторной суммы целочисленного псевдоорбитального момента \tilde{l} и псевдоспина $\tilde{s} = 1/2$ [30,31]. Почему в рассмотрение вводится псевдоорбитальный угловой момент, а не обычный угловой момент нуклона? Причина состоит в следующем. Спин-орбитальное взаимодействие нуклонов в ядрах весьма сильное. Поэтому в тяжелых ядрах спин-орбитальные дублеты расщеплены настолько, что принадлежат разным ядерным оболочкам. Например, одночастичный уровень $g_{9/2}$ принадлежит оболочке 28–50, а $g_{7/2}$ — оболочке 50–82. Другой пример: одночастичный уровень $h_{11/2}$ принадлежит оболочке 50–82, а $h_{9/2}$ входит в состав оболочки 82–126. В то же время уже давно было отмечено, что уровни преобладающей четности с l_1, j_1 и $l_2 = l_1 + 2, j_2 = j_1 + 1$ очень близки по энергии и их можно рассматривать как принадлежащие дублету с $\tilde{l} = l_1 + 1$ и $j_1 = \tilde{l} - 1/2$, а $j_2 = \tilde{l} + 1/2$. Примерами являются следующие дублеты. В оболочке 50–82: $d_{5/2}, g_{7/2}(\tilde{l} = 3), s_{1/2}, d_{3/2}(\tilde{l} = 1)$. В оболочке 82–126: $f_{7/2}, h_{9/2}(\tilde{l} = 4), p_{3/2}, f_{5/2}(\tilde{l} = 2)$ и псевдоорбитальный

синглет $p_{1/2}(\tilde{l} = 0)$. Малая величина расщепления псевдоорбитальных дублетов означает, что псевдоспин-орбитальное взаимодействие в отличие от обычного спин-орбитального взаимодействия является слабым.

Итак, операторы рождения (и, соответственно, уничтожения) фермионов могут быть представлены следующим образом:

$$a_{jm}^+ = \sum_{\mu, \sigma} C_{\tilde{l}\mu 1/2\sigma}^{jm} a_{\tilde{l}\mu, 1/2\sigma}^+ \quad (51)$$

В результате алгебра $U\left(n = \sum_{j_i} (2j_i + 1)\right)$ может быть представлена в виде прямого произведения

$$U\left(n = \sum_{j_i} (2j_i + 1)\right) \supset U\left(n_{\tilde{l}} = \sum_{\tilde{l}_i} (2\tilde{l}_i + 1)\right) \otimes U(2). \quad (52)$$

Например, если мы рассматриваем случай, когда j принимает значения $1/2$ и $3/2$, для построения базиса фермионных состояний мы можем использовать квантовые числа следующей редукционной цепочки алгебры $U\left(\sum_{j_i} (2j_i + 1)\right) = U(6)$:

$$U(6) \supset SU_{\tilde{l}}(3) \otimes SU_{\tilde{s}}(2) \supset O_{\tilde{l}}(3) \otimes SU_{\tilde{s}}(2) \supset SU_J(2) \supset O_J(2). \quad (53)$$

Индексы \tilde{l} , \tilde{s} и J в (53) указывают на то, что соответствующая группа преобразований связана с псевдоорбитальным моментом, псевдоспином или полным угловым моментом.

Сейчас мы можем перейти к рассмотрению связанных бозон-фермионных алгебр, которые используются для классификации состояний бозон-фермионных систем. Например, нечетных, нечетно-нечетных ядер или состояний четно-четных ядер с двумя и более квазичастицами. Состояния бозонной системы могут быть охарактеризованы квантовыми числами одной из редукционных цепочек алгебры $U^B(6)$. Состояния системы фермионов могут быть классифицированы с помощью квантовых чисел одной из редукционных цепочек алгебры $U^F(n_F)$, где $n_F = \sum_{j_i} (2j_i + 1)$. Алгебра, описывающая связанную систему бозонов и фермионов, является прямым произведением двух алгебр $U^B(6) \otimes U^F(n_F)$. Если какие-то из алгебр в двух редукционных цепочках совпадают или изоморфны, то они могут быть объединены и образуют общую бозон-фермионную алгебру. Если в общем случае бозоны характеризуются с помощью цепочки алгебр:

$$U^B(6) \supset G'^B \supset G''^B \supset \dots, \quad (54)$$

а фермионы с помощью другой цепочки

$$U^F(n_F) \supset G'^F \supset G''^F \supset \dots, \quad (55)$$

то связанная система может быть описана с помощью следующей решетки алгебр:

$$\begin{array}{ccccc}
 U^B(6) & & \otimes & & U^F(n_F) \\
 \downarrow & \searrow a & & a \swarrow & \downarrow \\
 G'^B & & G^{BF} & & G'^F \\
 \downarrow & \searrow b & & b \swarrow & \downarrow \\
 \dots & & G'^{BF} & & \dots \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \dots & &
 \end{array} \tag{56}$$

Часто существует несколько путей, на которых бозонная и фермионная алгебры связываются в единую бозон-фермионную алгебру при той же самой решетке алгебр. В (56) они обозначены индексами a, b, \dots .

В случае псевдоспиновой алгебры решетка алгебр выглядит несколько иначе, так как алгебра $U^F(n_F)$ расщепляется сначала на псевдоорбитальную и псевдоспиновую алгебры:

$$U^F(n_F) \supset U^F(1/2n_F) \otimes U^F(2). \tag{57}$$

Это ведет к следующей решетке алгебр:

$$\begin{array}{ccccc}
 U^B(6) & & \otimes & & U^F(n_F) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & & & U^F(1/2n_F) \otimes U^F(2) \\
 \downarrow & \searrow a & & a \swarrow & \downarrow \\
 G'^B & & G^{BF} & & G'^F \\
 \downarrow & \searrow b & & b \swarrow & \downarrow \\
 \dots & & G'^{BF} & & \dots \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \dots & &
 \end{array} \tag{58}$$

Генераторами связанных бозон-фермионных алгебр являются линейные комбинации генераторов соответствующих бозонных и фермионных алгебр.

Процедура объединения бозонной и фермионной алгебр является обобщением известной процедуры связи угловых моментов. Например, если сначала мы имеем бозонную алгебру $O^B(3)$, генераторами которой являются компоненты оператора углового момента L_μ , и фермионную алгебру $SU^F(2)$, генераторами которой являются компоненты оператора спинового момента S_μ , то можно сформировать объединенную алгебру $SU^{BF}(2)$, генераторами которой являются компоненты оператора полного углового момента J_μ :

$$J_\mu = L_\mu + S_\mu. \tag{59}$$

После того как алгебраическая структура (решетка алгебр) определена, можно построить соответствующий базис. Этот базис будет характеризоваться квантовыми числами, описывающими представления алгебр в цепи. Построенный таким образом базис может быть использован для численной диагонализации гамильтониана. Кроме того, этот базис является аналитическим решением в случаях, называемых динамическими симметриями, когда гамильтониан может быть записан в виде линейной комбинации операторов Казимира C тех алгебр, которые содержатся в редукционной цепочке исходной алгебры. Например, в случае редукционной цепочки b (56):

$$H = E_0 + \alpha C(U^B) + \beta C(U^F) + \alpha' C(G'^B) + \beta' C(G'^F) + \gamma C(C''^{BF}) + \dots \quad (60)$$

5. ФОРМАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ СУПЕРСИММЕТРИИ В МОДЕЛИ ЯДЕРНОЙ СТРУКТУРЫ, БАЗИРУЮЩЕЙСЯ НА ГРУППЕ $U(6/2)$, И В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Рассмотрим достаточно простую систему [32], состоящую из нечетного нуклона, взаимодействующего с бозонами. Несмотря на простоту, такая система, как это будет видно из приведенного ниже примера, описывает спектры низколежащих состояний некоторых ядер. Предположим, что нуклон может находиться только в состоянии с угловым моментом $j = 1/2$ (например, $p_{1/2}$). С учетом того, что четно-четный остов описывается гамильтонианом, основанным на алгебре $U(6)$, гамильтониан бозон-фермионной системы будет базироваться на алгебре $U(6/(2j+1)) = 2$. Для начала покажем, как пример, гамильтониан, имеющий более простую структуру, который можно рассматривать как введение для более сложного случая.

Простейший гамильтониан системы, состоящей из невзаимодействующих монополярных s -бозонов и фермиона со спином $1/2$ и спиральностью, являющейся хорошим квантовым числом, имеет вид

$$H = \epsilon(a_{\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}} + s^+ s). \quad (61)$$

Это стандартный пример из учебника [33], с помощью которого можно проиллюстрировать многие черты суперсимметрии. Однако этот гамильтониан не обладает вращательной симметрией и не реализуется в ядерной физике. Простейшее расширение такого гамильтониана, обладающее ротационной симметрией, имеет следующий вид:

$$H = \epsilon(a_{\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}} + a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + s^+ s). \quad (62)$$

Супероператорами, коммутирующими с гамильтонианом (62), являются операторы $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ s$ и $a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s$. Они преобразуют одни собственные состояния гамильтониана (62) в другие, которые имеют на один фермион больше, но ту же самую энергию возбуждения.

Сделаем еще один шаг и введем рассмотрение гамильтониан, используемый в ядерной физике. Этот гамильтониан содержит не только монополярные s -бозоны, но и квадрупольные d -бозоны. Будем рассматривать систему в пределе $U(5)$ динамической симметрии, когда числа s - и d -бозонов сохраняются по отдельности. В этом пределе гамильтониан имеет вид

$$H = \epsilon(N_F + N_s) + H_d, \quad (63)$$

где $N_s \equiv s^+ s$ и $N_F \equiv \sum_m a_{1/2m}^+ a_{1/2m}$ являются операторами числа s -бозонов и фермионов соответственно, и

$$H_d = \epsilon_d \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu} + \sum_{L=0,2,4} C_L (d^+ d^+)_{LM} (dd)_{LM}. \quad (64)$$

Супероператоры, коммутирующие с гамильтонианом (63), имеют вид

$$P_{1/2m} = a_{1/2m}^+ s, \quad P_{1/2m}^+ = s^+ a_{1/2m}, \quad (65)$$

$$[H, P_{1/2m}] = [H, P_{1/2m}^+] = 0. \quad (66)$$

Рассмотрим градуированную алгебру, содержащую операторы $P_{1/2m}$ и $P_{1/2m}^+$. Антиккоммутатор супероператоров имеет вид

$$\{P_{1/2m}, P_{1/2m'}^+\} = \delta_{mm'} (N_s + \frac{1}{2} N_F) - \sqrt{2} (-1)^{1/2+m'} C_{1/2m1/2-m'}^{1\eta} S_{1\eta}, \quad (67)$$

где $S_{1\eta}$ — оператор спина фермионов:

$$S_{1\eta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m,m'} C_{1/2m1\eta}^{1/2m'} a_{1/2m'}^+ a_{1/2m}, \quad (68)$$

а $C_{\beta\beta c\gamma}^{a\alpha}$ — коэффициент Клебша–Гордана. Остальные антикоммутаторы имеют вид

$$\{P_{1/2m}^+, P_{1/2m'}^+\} = \{P_{1/2m}, P_{1/2m'}\} = 0. \quad (69)$$

Операторы N_s и N_F коммутируют друг с другом и с $S_{1\eta}$. Оператор $S_{1\eta}$ удовлетворяет обычным коммутационным соотношениям для компонент оператора спина

$$[S_{1\eta}, S_{1\eta'}] = \sqrt{2} C_{1\eta'1\eta}^{1\eta''} S_{1\eta''}. \quad (70)$$

Наконец, рассмотрим коммутационные соотношения операторов N_s , N_F и $S_{1\eta}$ с супероператорами $P_{1/2m}$ и $P_{1/2m}^+$:

$$[P_{1/2m}, N_s] = P_{1/2m}, \quad (71)$$

$$[P_{1/2m}, N_F] = -P_{1/2m}, \quad (72)$$

$$[P_{1/2m}, S_{1\eta}] = \frac{\sqrt{3}}{2} C_{1/2m1\eta}^{1/2m'} P_{1/2m'}. \quad (73)$$

Операторы $P_{1/2m}$, $P_{1/2m}^+$, N_s , N_F и $S_{1\eta}$ образуют градуированную алгебру $U(1/2)$, и гамильтониан (63) отвечает следующей редукционной цепочке:

$$U(6/2) \supset U(5) \otimes U(1/2). \quad (74)$$

Мультиплеты собственных состояний гамильтониана (63) с одинаковой энергией возбуждения включают состояния с различными числами фермионов. По этой причине они называются супермультиплетами. С помощью супероператоров $P_{1/2m}$, $P_{1/2m}^+$ мы можем трансформировать один член супермультиплета в другой с иным числом фермионов. Все собственные состояния, принадлежащие одному и тому же супермультиплету, могут быть получены повторным применением супероператоров $P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ и $P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ к базисному состоянию $|n_s, n_d\rangle$, где n_s и n_d — числа s - и d -бозонов соответственно. Таким образом, супермультиплет включает следующие состояния:

$$\begin{aligned} |n_s, n_d\rangle &\equiv (s^+)^{n_s} \{(d^+)^{n_d}\}_{IM} |0\rangle, \\ &P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} |n_s, n_d\rangle, \\ &P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} |n_s, n_d\rangle, \\ &P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} |n_s, n_d\rangle. \end{aligned} \quad (75)$$

Выше состояние $|n_s, n_d\rangle$ является аналогом клиффордовского (фермионного) вакуума суперсимметричных моделей в квантовой теории поля. Примеры супермультиплетов приведены в табл. 1. Глядя на эти примеры, можно обнаружить интересное соотношение между полным числом бозонных состояний (которое включает по определению состояние без фермионов, а также состояния с четным числом фермионов) и полным числом фермионных состояний (т.е. состояний с нечетным числом фермионов) в супермультиплете. В супермультиплетах, включающих состояния с числом s -бозонов, равным или превышающим два, полное число фермионных состояний равно полному числу

Таблица 1. Волновые функции членов супермультиплетов с различными числами s - и d -бозонов. $P_{1/2m} = a_{1/2m}^+ s$

$N_s + N_F$	Бозонные	Фермионные	Бозонные
3	$s^+ s^+ s^+ 0\rangle$	<p>3s-бозонная система</p> $P_{\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ s^+ 0\rangle = 3a_{\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ 0\rangle$ $P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ s^+ 0\rangle = 3a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ 0\rangle$	$P_{\frac{1}{2}}^+ P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ s^+ 0\rangle = 6a_{\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ 0\rangle$
2	$s^+ s^+ 0\rangle$	<p>2s-бозонная система</p> $P_{\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}}^+ s^+ 0\rangle$ $P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ 0\rangle$	$P_{\frac{1}{2}}^+ P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ 0\rangle$
2	$s^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle$	<p>2s, 1d-бозонная система</p> $P_{\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle = 2a_{\frac{1}{2}}^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle$ $P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle = 2a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle$	$P_{\frac{1}{2}}^+ P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle = 2a_{\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ d_\mu^+ 0\rangle$
1	$s^+ 0\rangle$	<p>1s-бозонная система</p> $P_{\frac{1}{2}}^+ s^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}}^+ 0\rangle$ $P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ 0\rangle$	$P_{\frac{1}{2}}^+ P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ 0\rangle = 0$
1	$s^+ d_\mu^+ 0\rangle$	<p>1s, 1d-бозонная система</p> $P_{\frac{1}{2}}^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}}^+ d_\mu^+ 0\rangle$ $P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ d_\mu^+ 0\rangle$	$P_{\frac{1}{2}}^+ P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle = 0$
0	$ 0\rangle$	<p>0s-бозонная система</p> $P_{\frac{1}{2}}^+ 0\rangle = 0$ $P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ 0\rangle = 0$	

бозонных состояний (с учетом всех возможных проекций полного углового момента). В супермультиплете, включающем состояния с числом s -бозонов, равным единице, полное число фермионных состояний равно удвоенному числу бозонных состояний. Ниже будет приведено формальное доказательство этого соотношения.

Хорошо известный пример приближенной суперсимметрии в ядерной физике, соответствующий гамильтониану (63), приведен в [7]. Этот супермультиплет включает три ядра: ${}^{102}_{44}\text{Ru}_{58}$ ($N_s + N_d = 7, N_F = 0$), ${}^{103}_{45}\text{Rh}_{58}$ ($N_s + N_d = 6, N_F = 1$), а также двухквaziчастичные состояния ${}^{104}_{46}\text{Pd}_{58}$ ($N_s + N_d = 5, N_F = 2$). Однако экспериментальная информация о двухквaziчастичных состояниях в ${}^{104}\text{Pd}$ недостаточна. Возможным кандидатом на место низжайшего состояния ${}^{104}\text{Pd}$, принадлежащего супермультиплету, является состояние 0^+ (1793 кэВ), полученное при бета-распаде ${}^{104}\text{Ru}$ ($\log ft = 5, 5$). Эксперименты с использованием реакции ${}^{103}\text{Rh}(^3\text{He}, d)$ могли бы прояснить ситуацию. В этом примере нечетный протон заселяет одночастичное состояние $p_{1/2}$. Экспериментальные спектры показаны на рис.1. На этом рисунке двухквaziчастичное 0^+ возбужденное состояние ${}^{104}\text{Pd}$ помещено при той же энергии, что и основные состояния ${}^{102}\text{Ru}$ и ${}^{103}\text{Rh}$, так как в теории структуры ядра подход, основанный на суперсимметрии, имеет дело только с энергиями, отсчитанными относительно низжайшего состояния данного ядра, принадлежащего супермультиплету. По той же причине в (63) перед N_F и N_s стоит один и тот же коэффициент. Соответствующий полный гамильтониан, включающий полные энергии, имеет вид

$$\bar{H} = E_0 + \epsilon_F N_F + \epsilon_s N_s + H_d, \quad (76)$$

где E_0 — константа. Но если интересоваться только энергиями возбуждения, то \bar{H} эквивалентен (63). Это можно увидеть, переписав \bar{H} следующим образом:

$$\bar{H} = E_0 + (\epsilon_F - \epsilon_s) N_F + \epsilon_s (N_F + N_s) + H_d. \quad (77)$$

Первые два члена в (77) не влияют на энергии возбуждения, поскольку N_F постоянно для заданного ядра. Поэтому эти два слагаемых опущены в (63).

Из рис.1 видно, что в ${}^{102}\text{Ru}$ и ${}^{103}\text{Rh}$ суперсимметрия приближенная. Для лучшего описания экспериментальных данных необходимо включить в гамильтониан член, нарушающий суперсимметрию. Он может иметь следующий вид:

$$H_{\text{break}} = \alpha N_s \cdot N_F + \beta \mathbf{L}_d \cdot \mathbf{S}, \quad (78)$$

где $\mathbf{L}_d = \sqrt{10}(d^+ \tilde{d})_1$ — оператор орбитального момента бозонов.

Сравним теперь коммутационные и антикоммутационные соотношения операторов, формирующих алгебру $U(1/2)$, с соответствующими соотношениями операторов в суперсимметричных моделях квантовой теории поля. Это

сравнение продемонстрирует сходство между двумя наборами соотношений, но также и некоторое различие между ними. Сходство будет использовано в дальнейшем для получения формального соотношения между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплетах. В квантовой теории поля суперзаряды, аналогичные нашим операторам $P_{1/2m}$ и $P_{1/2m}^+$, обозначаются как Q_α^L и $(Q_\alpha^L)^+$, где α является спинорным индексом, а L связан с внутренней группой симметрии. Эти операторы коммутируют с четырехмерным лоренцевским импульсом P_μ :

$$[Q_\alpha^L, P_\mu] = [(Q_\alpha^L)^+, P_\mu] = 0 \quad (79)$$

и, следовательно, коммутируют с гамильтонианом, являющимся компонентой P_μ с $\mu = 0$.

Антикоммутатор суперзарядов

$$\{Q_\alpha^L, (Q_\beta^M)^+\} = 2\delta^{LM} \sum_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \quad (80)$$

где σ^μ — матрица Дирака. Второй антикоммутатор

$$\{Q_\alpha^L, Q_\beta^M\} = 0. \quad (81)$$

В дополнение к суперзарядам Q_α^L , $(Q_\alpha^L)^+$ и четырехмерному лоренцевскому импульсу P_μ суперсимметричные модели квантовой теории поля включают также бозонные операторы, формирующие алгебру Ли внутренней симметрии. Обозначим их B_l . Они удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$[B_l, B_m] = i \sum_k f_{lmk} B_k, \quad (82)$$

где f_{lmk} — структурные константы. Коммутационные соотношения операторов B_l и суперзарядов имеют вид

$$[Q_\alpha^L, B_l] = i \sum_M A_l^{LM} Q_\alpha^M. \quad (83)$$

Мы можем сравнить эти соотношения с теми, которые получены для операторов, формирующих алгебру $U(1/2)$ в теории структуры ядра. Это сделано ниже, где соответствующие соотношения связаны двухсторонними стрелками:

$$P_{1/2m} \iff Q_\alpha^L, H \iff P_\mu, \quad (84)$$

$$N_s - N_F, S_{1\eta} \iff B_l, \quad (85)$$

$$[P_{1/2m}, H] = 0 \iff [Q_\alpha^L, P_\mu] = 0, \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \{P_{1/2m'}, P_{1/2m}^+\} &= \delta_{mm'} \left(N_s + \frac{1}{2} N_F \right) + \sqrt{3} \sum_{\eta} C_{1/2m1\eta}^{1/2m'} S_{1\eta} \\ &\iff \{Q_\alpha^L, (Q_\beta^M)^+\} = 2\delta^{LM} \sum_{\mu} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu} P_{\mu}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\{P_{1/2m}, P_{1/2m'}\} = 0 \iff \{Q_\alpha^L, Q_\beta^M\} = 0, \quad (88)$$

$$[S_{1\eta}, S_{1\eta'}] = \sqrt{2} C_{1\eta'1\eta}^{1\eta''} S_{1\eta''} \iff [B_l, B_m] = i \sum_k f_{lmk} B_k, \quad (89)$$

$$\begin{aligned} [P_{1/2m}, N_s] &= P_{1/2m}, [P_{1/2m}, N_F] = -P_{1/2m}, \\ [P_{1/2m}, S_{1\eta}] &= -\frac{\sqrt{3}}{2} C_{1/2m1\eta}^{1/2m'} P_{1/2m'} \iff [Q_\alpha^L, B_l] = i \sum_M A_l^{LM} Q_\alpha^M. \end{aligned} \quad (90)$$

Легко увидеть сходство между аналогичными соотношениями в квантовой теории поля и в теории структуры ядра. Это сходство очевидно для соотношений (86) и (88)–(90). Отметим, однако, некоторое различие в структуре выражений антикоммуторов в (87). Оно обусловлено разной структурой бозонных алгебр в квантовой теории поля и в ядерном случае, которое отражается и в соотношении между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплетях. Как и в квантовой теории поля, это соотношение может быть получено умножением обеих частей антикоммутора (67) на $(-1)^{N_F}$ и взятием шпура. Слева мы получаем

$$\begin{aligned} &\text{Tr} \left((-1)^{N_F} P_{1/2m} P_{1/2m'}^+ + (-1)^{N_F} P_{1/2m'}^+ P_{1/2m} \right) = \\ &= \text{Tr} \left((-1)^{N_F} P_{1/2m} P_{1/2m'}^+ + P_{1/2m} (-1)^{N_F} P_{1/2m'}^+ \right) = \\ &= \text{Tr} \left((-1)^{N_F} P_{1/2m} P_{1/2m'}^+ - (-1)^{N_F} P_{1/2m} P_{1/2m'}^+ \right) = 0. \end{aligned} \quad (91)$$

Выше мы использовали инвариантность шпура относительно циклической перестановки операторов и коммутационные соотношения (71), (72). Так как соотношение (67) может быть записано

$$\{P_{1/2m}, P_{1/2m'}^+\} = \delta_{mm'} s^+ s + a_{1/2m}^+ a_{1/2m'}, \quad (92)$$

то, полагая $m = m'$ и суммируя по m , получаем

$$\text{Tr} \left((-1)^{N_F} (2\hat{N}_s + \hat{N}_F) \right) = 0. \quad (93)$$

Уравнение (93) содержит соотношение между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплете. Чтобы показать это, перепишем шпур в (93) в явном виде как сумму диагональных матричных элементов оператора в круглых скобках. Так как супероператор слева в (92) имеет ненулевые матричные элементы только между состояниями, принадлежащими одному и тому же супермультиплету, суммирование в (93) ограничивается только этими состояниями

$$\sum_{a \in \text{супермультиплет}} \langle a | (-1)^{N_F} (2\hat{N}_s + \hat{N}_F) | a \rangle = 0. \quad (94)$$

В (94) индекс a включает только бозонные состояния, т.е. состояния без фермионов или с двумя фермионами, и фермионные состояния, т.е. состояния с одним фермионом. Так как в нашем случае два фермиона могут иметь только нулевой полный угловой момент, то число состояний без фермионов равно числу состояний с двумя фермионами. Следовательно, каждое из этих чисел равно половине полного числа бозонных состояний в супермультиплете. Мы обозначим полное число бозонных состояний через n_B . Пусть n_F будет полным числом фермионных состояний в супермультиплете. Для супермультиплета с $N_s + N_F \equiv N_s^{\max} \geq 2$ мы получаем из (94)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n_B \cdot 2N_s^{\max} - n_F (2(N_s^{\max} - 1) + 1) + \frac{1}{2} n_B (2(N_s^{\max} - 2) + 2) = \\ = (n_B - n_F)(2N_s^{\max} - 1) = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Таким образом, для супермультиплетов с $N_s^{\max} \geq 2$ $n_B = n_F$. Выше N_s^{\max} является максимально возможным числом s -бозонов в состояниях, принадлежащих супермультиплету. Для супермультиплета с $N_s + N_F = 1$ из (94) следует

$$\frac{1}{2} n_B \cdot 1 - n_F = 0. \quad (96)$$

Итак, бозон-фермионное правило можно сформулировать следующим образом:

- в супермультиплетях, включающих состояния с $N_s + N_F \geq 2$, число бозонных состояний равно числу фермионных состояний;
- в супермультиплетях, содержащих состояния с $N_s + N_F = 1$, число фермионных состояний равно удвоенному числу бозонных состояний.

Таким образом, есть некоторое различие в соотношениях между числами бозонных и фермионных состояний в ядерном случае и в квантовой теории поля, где для всех супермультиплетов, исключая основное состояние, $n_F = n_B$. Это различие является следствием различия между антикоммутирующими (67) и (80).

Так как соотношение между числами бозонных и фермионных состояний является фундаментальным в квантовой теории поля, рассмотрим с этой точки зрения собственные состояния гамильтонианов (61), (62). Супермультиплеты собственных состояний гамильтониана (61) соответствуют супермультиплетам в квантовой теории поля с нулевой массой покоя клиффордовского (фермионного) вакуума. В этом случае спиральность является хорошим квантовым числом. Однофермионное состояние является, например, аналогом нейтрино, а состояние с одним s -бозоном — аналогом S -нейтрино. В случае гамильтониана (62) однофермионное состояние является аналогом электрона с двумя возможными значениями спина.

В рамках суперсимметричного подхода в квантовой теории поля было получено следующее соотношение для гамильтониана. Если умножить обе стороны соотношения (80) на $\sigma_{\alpha\beta}^0$ и просуммировать по α и β , то мы получим

$$H \equiv P_0 = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, L} \{Q_\alpha^L, (Q_\alpha^L)^+\}. \quad (97)$$

В ядерном случае соотношение, которое может быть получено аналогичным образом, имеет иной вид из-за различия в структуре антикоммутаторов (67) и (80):

$$H = \frac{1}{2} N_F + \frac{1}{2} \sum_m \{P_{1/2m}, P_{1/2m}^+\} + H_d, \quad (98)$$

которое эквивалентно, если интересоваться только энергиями возбуждения, следующему гамильтониану:

$$H = \frac{1}{2} \sum_m \{P_{1/2m}, P_{1/2m}^+\} + H_d. \quad (99)$$

Подведем итоги. Мы рассмотрели модель структуры ядра, основанную на $U(6/2)$ градуированной алгебре, и показали, что эта алгебра имеет градуированную подалгебру, генераторы которой коммутируют с модельным гамильтонианом. Таким образом, показано, что существуют супероператоры, преобразующие бозоны в фермионы и обратно, и коммутирующие с гамильтонианом. Мы получили также соотношение между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплетах.

6. $U(1/2)$ -СУПЕРСИММЕТРИЯ БЕЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Мы уже отмечали выше, что в теории ядерной структуры основное внимание уделялось исследованию моделей с гамильтонианами, которые можно представить в виде линейной комбинации операторов Казимира соответствующих

подгрупп редукционной цепочки $U(6/\Omega)$, где Ω — максимально возможное число фермионов в системе, а 6 есть число бозонных степеней свободы, необходимых для описания четно-четных ядер в модели взаимодействующих бозонов. Гамильтониан, построенный таким образом, использовался при фиксированных параметрах для описания как четно-четных, так и нечетных ядер. При этом, хотя для описания четно-четных и нечетных ядер использовались и тот же гамильтониан, и квантовые числа тех же подгрупп, в общем случае относительные энергии собственных состояний четно-четных и нечетных ядер были различны. Как правило, операторы, принадлежащие ферми-сектору градуированной алгебры Ли (супероператоры), т.е. операторы, трансформирующие бозоны в фермионы и обратно, не проявлялись явным образом в редукционных цепочках подгрупп. Цель этого раздела — дать пример гамильтониана, описывающего систему взаимодействующих бозонов и фермионов, который хотя и не обладает известными динамическими симметриями, но часть собственных состояний гамильтониана формирует бозон-фермионные мультиплеты, объединяющие состояния, принадлежащие разным ядрам [34]. В этом отношении система подобна тем, которые описываются неполными симметриями, введенными в рассмотрение и проанализированными в [35–41]. Гамильтониан, который рассматривается ниже, является достаточно общим гамильтонианом для четно-четных ядер. Он построен с использованием формализма «согласованных квадрупольных операторов» (CQF) модели взаимодействующих бозонов [42, 43]. Однако в отношении нечетных ядер этот гамильтониан имеет специальный вид. Мы покажем ниже, что существует супероператор, преобразующий бозоны в фермионы, который коммутирует с этим гамильтонианом. Этот супероператор образует вместе с эрмитово-сопряженным оператором и рядом других операторов, показанных ниже, подгруппу $U(1/2)$ группы $U(6/12)$, являющуюся группой инвариантности гамильтониана.

В предыдущем разделе было продемонстрировано тесное сходство между формой коммутационных и антикоммутационных соотношений операторов, формирующих алгебру $U(1/2)$, и операторов, формирующих суперсимметричную модель в квантовой теории поля. Благодаря отмеченной выше инвариантности среди собственных состояний, относящихся к нечетным ядрам, есть наборы состояний, характеризующихся теми же относительными энергиями, что и состояния четно-четных ядер. Конечно, не все состояния нечетных ядер имеют партнеров среди чисто бозонных состояний четно-четных ядер. Существуют также так называемые состояния смешанной симметрии, чьими партнерами являются двухквaziчастичные возбужденные состояния четно-четных ядер с тем же суммарным числом бозонов и фермионов. В общем случае этот гамильтониан не обладает динамической симметрией и не может быть представлен в виде суммы операторов Казимира какой-либо из цепочек подгрупп.

Ниже мы рассмотрим модель, основанную на градуированной алгебре $U(6/12)$. Эта модель описывает систему из s - и d -бозонов и фермионов, заселяющих одночастичные состояния с угловыми моментами $j = 1/2, 3/2$ и $5/2$. Есть несколько примеров нечетных ядер, низколежащие состояния которых можно приближенно описать в рамках данного подпространства одночастичных состояний. Например, изотопы Pt и W. Они были рассмотрены в [15, 44].

Как уже отмечалось выше, угловой момент фермиона j может быть разложен на псевдоорбитальную часть \tilde{l} с $\tilde{l} = 0, 2$ и псевдоспиновую часть s [30, 31] с $s = 1/2$ [7, 11, 13]. Поэтому оператор рождения фермиона с заданным угловым моментом можно представить как

$$a_{jm}^+ = \sum_{\mu, \sigma} C_{\tilde{l}\mu 1/2\sigma}^{jm} a_{\tilde{l}\mu, 1/2\sigma}^+ \quad (100)$$

Используя операторы $a_{\tilde{l}\mu, 1/2\sigma}^+$ и $a_{\tilde{l}\mu, 1/2\sigma}$, можно сконструировать другие операторы псевдоорбитального и псевдоспинового типа. Для последующего рассмотрения нам нужен оператор квадрупольного момента фермионов

$$Q_{2\mu}^F(\chi) = \sum_{\sigma} \left(a_{2\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{00, \frac{1}{2}\sigma} + a_{00, \frac{1}{2}\sigma}^+ (-1)^{\mu} a_{2-\mu, \frac{1}{2}\sigma} + \right. \\ \left. + \chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} a_{2\eta, \frac{1}{2}\sigma}^+ (-1)^{\eta'} a_{2-\eta', \frac{1}{2}\sigma} \right), \quad (101)$$

содержащий свободный параметр χ , а также операторы числа фермионов с псевдоорбитальным моментом $\tilde{l} = 0$:

$$\hat{N}^F(\tilde{l} = 0) = \sum_{\sigma} a_{00, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{00, \frac{1}{2}\sigma} \quad (102)$$

и $\tilde{l} = 2$:

$$\hat{N}^F(\tilde{l} = 2) = \sum_{\mu, \sigma} a_{2\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{2\mu, \frac{1}{2}\sigma}. \quad (103)$$

Соответствующими бозонными операторами являются оператор квадрупольного момента бозонов

$$Q_{2\mu}^B(\chi) = d_{\mu}^+ s + s^+ (-1)^{\mu} d_{-\mu} + \chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} d_{\eta}^+ (-1)^{\eta'} d_{-\eta'} \quad (104)$$

и операторы чисел s -бозонов $\hat{N}_s^B = s^+ s$ и d -бозонов $\hat{N}_d^B = \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu}$.

Объединенные бозон-фермионные операторы могут быть получены суммированием бозонных и псевдоорбитальных фермионных операторов

$$Q_{2\mu}(\chi) = Q_{2\mu}^B(\chi) + Q_{2\mu}^F(\chi), \quad (105)$$

$$\hat{N}(0) = \hat{N}_s^B + \hat{N}^F(\tilde{l} = 0), \quad (106)$$

$$\hat{N}(2) = \hat{N}_d^B + \hat{N}^F(\tilde{l} = 2). \quad (107)$$

Фермионный сектор градуированной алгебры $U(6/12)$ содержит операторы, преобразующие бозоны в фермионы и обратно. В общем случае они могут быть представлены следующим образом:

$$P_{jm} = x_j a_{jm}^+ s + \sum_{j'} y_{jj'} (a_{j'}^+ d)_{jm}. \quad (108)$$

В зависимости от значений коэффициентов x_j и $y_{jj'}$ эти операторы могут иметь различные тензорные свойства. Наиболее интересен для нас оператор $P_{1/2m}$:

$$P_{1/2m} = a_{00,1/2m}^+ s + \sum_{\mu} a_{2\mu,1/2m}^+ d_{\mu}, \quad (109)$$

который был введен в [13] в связи с рассмотрением реакций одноклонных передач, где было показано, что этот оператор преобразуется как скаляр при шестимерных вращениях под действием генераторов $SO^{BF}(6)$.

Рассмотрим коммутационные соотношения оператора $P_{1/2m}$ с бозонными и фермионными операторами, введенными выше. Они имеют вид

$$[P_{1/2m}, Q_{2\mu}^B(\chi)] = a_{2\mu,1/2m}^+ s + a_{00,1/2m}^+ \tilde{d}_{\mu} + \chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} a_{2\eta,1/2m}^+ \tilde{d}_{\eta'}, \quad (110)$$

$$[P_{1/2m}, Q_{2\mu}^F(\chi)] = -a_{2\mu,1/2m}^+ s - a_{00,1/2m}^+ \tilde{d}_{\mu} - \chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} a_{2\eta,1/2m}^+ \tilde{d}_{\eta'}, \quad (111)$$

$$[P_{1/2m}, \hat{N}_s^B] = a_{00,1/2m}^+ s, \quad (112)$$

$$[P_{1/2m}, \hat{N}^F(\tilde{l} = 0)] = -a_{00,1/2m}^+ s, \quad (113)$$

$$\left[P_{1/2m}, \hat{N}_d^B \right] = \sum_{\nu} a_{2\nu, 1/2m}^+ d_{\nu}, \quad (114)$$

$$\left[P_{1/2m}, \hat{N}^F(\tilde{l} = 2) \right] = - \sum_{\nu} a_{2\nu, 1/2m}^+ d_{\nu}. \quad (115)$$

Видно, что оператор $P_{1/2m}$ коммутирует с введенными выше объединенными бозон-фермионными операторами $Q_{2\mu}(\chi)$, $\hat{N}(0)$ и $\hat{N}(2)$. Это означает, что $P_{1/2m}$ коммутирует с гамильтонианом, имеющим достаточно общий вид:

$$H(\chi) = \epsilon_0 \hat{N}(0) + \epsilon_2 \hat{N}(2) - \kappa Q_2(\chi) \cdot Q_2(\chi). \quad (116)$$

Это наиболее общий гамильтониан модели взаимодействующих бозонов, построенный в формализме «согласованных квадрупольных операторов». Но он имеет достаточно специальный вид для нечетных ядер. Ограничения касаются фермионной подсистемы. Только три одночастичных уровня $p_{1/2}, p_{3/2}$ и $f_{5/2}$ введены в рассмотрение. Кроме того, предполагается, что $E_{p_{3/2}} = E_{f_{5/2}}$ и $E_{p_{3/2}} - E_{p_{1/2}} = \epsilon_d - \epsilon_s$. Обычно в модели взаимодействующих бозонов $\epsilon_d - \epsilon_s \geq 0$. В ядрах в области Pt фермионы являются дырками, и последнее неравенство корректно. Гамильтониан (116) не включает обменное взаимодействие. В конце раздела мы рассмотрим это ограничение более подробно.

Из того факта, что $[H(\chi), P_{1/2m}] = 0$, следует, что, хотя при произвольном χ мы получаем для четно-четных ядер спектр, не принадлежащий ни одному из пределов, отвечающих динамическим симметриям, однако в нечетных ядрах мы имеем набор собственных состояний, характеризующихся теми же относительными энергиями, что и коллективные состояния четно-четного ядра. Вместе с соответствующими состояниями четно-четного ядра они образуют суперсимметричные мультиплеты. Собственные векторы этих состояний можно построить, действуя оператором $P_{1/2m}$ на собственные состояния четно-четного ядра с разными значениями углового момента I . Так как оператор $P_{1/2m}$ имеет угловой момент, равный $1/2$, то мы получаем в нечетных ядрах дублеты состояний с угловыми моментами $J = I \pm \frac{1}{2}$. Формально спектр этих состояний выглядит так, как если бы нечетный фермион заселял одночастичное состояние $p_{1/2}$ и не взаимодействовал с бозонами. Однако этим набором не исчерпываются собственные состояния нечетного ядра. Есть и другие собственные состояния, которые в противоположность состояниям, рассмотренным выше, не симметричны относительно перестановки бозонных и фермионных орбитальных моментов. Они называются состояниями со смешанной симметрией. Присутствие этих состояний отличает систему с нечетной частицей в состоянии $p_{1/2}$, не взаимодействующую с четно-четным остовом, от системы с тремя одночастичными уровнями $p_{1/2}, p_{3/2}$ и $f_{5/2}$ и нечетной частицей, сильно связанной с бозонным остовом.

В противоположность полностью симметричным состояниям состояния со смешанной симметрией не могут быть получены действием оператора $P_{1/2m}$ на собственные состояния четно-четного остова. В пределе динамической симметрии $O(6)$ состояния со смешанной симметрией получаются действием операторов типа (108), не являющихся, однако, скалярами по отношению к $O(6)$ - и $O(5)$ -преобразованиям, на состояния четно-четного остова. Так как такие операторы не являются скалярами, то они изменяют квантовые числа состояний остова. Например, квантовые числа, характеризующие представления группы $O(6)$ $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, изменяются от $(\sigma, 0, 0)$ к $(\sigma \pm 1, 1, 0)$. Вместе с квантовыми числами изменяются собственные значения гамильтониана и разности собственных значений (т.е. энергии гамма-переходов). Если динамическая симметрия $O(6)$ нарушена, то эти операторы, в противоположность $P_{1/2m}$, перестают генерировать собственные моды гамильтониана.

Супероператоры $P_{1/2m}$ вместе с эрмитово-сопряженными им $P_{1/2m}^+$ и операторами $\hat{N}_B \equiv \hat{N}_s^B + \hat{N}_d^B$, $\hat{N}_F \equiv \hat{N}^F(\tilde{l} = 0) + \hat{N}^F(\tilde{l} = 2)$ и $\hat{S}_{1\eta} \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m,m'} C_{\frac{1}{2}m'1\eta}^{\frac{1}{2}m} \sum_{\tilde{l}=0,2;\mu} a_{i\mu,\frac{1}{2}m}^+ a_{i\mu,\frac{1}{2}m'}$ образуют градуированную алгебру $U(1/2)$. Соответствующие коммутационные и антикоммутационные соотношения аналогичны приведенным в предыдущем разделе.

Подчеркнем, что появление в нечетных ядрах состояний с теми же относительными энергиями, что и в четно-четных ядрах, обусловлено тем, что псевдоспин не связан динамически с псевдоорбитальным моментом фермионов и орбитальным моментом бозонов. То же самое отсутствие динамической связи псевдоспина с псевдоорбитальным моментом рассматривалось в [45,46] как одна из причин появления тождественных ротационных супердеформированных полос.

Супероператоры $P_{1/2m}$, $P_{1/2m}^+$, а также другие операторы этого типа, характеризующиеся другими трансформационными свойствами относительно $SO^{BF}(6)$ -преобразований, удобны для конструирования обменного взаимодействия. Простейшее обменное взаимодействие имеет вид

$$g \sum_m P_{1/2m} P_{1/2m}^+. \quad (117)$$

Покажем, что это взаимодействие не действует на состояния со смешанной симметрией, однако сдвигает на одну и ту же величину gN энергии полностью симметричных состояний, т.е. суперпартнеров коллективных состояний четно-четного остова. Оператор $P_{1/2m}$, будучи скаляром относительно преобразований группы $SO^{BF}(6)$, коммутирует со всеми генераторами этой группы. Этот генератор не изменяет квантовых чисел собственных состояний, действуя на чисто бозонные состояния остова.

Состояния со смешанной симметрией ортогональны полностью симметричным состояниям:

$$\langle \text{mixed.sym.} | P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle = 0. \quad (118)$$

Рассмотрим теперь действие обменного взаимодействия (117) на состояния со смешанной симметрией. Так как оператор $P_{1/2m}^+$, действуя на состояния со смешанной симметрией, уничтожает нечетный фермион, то в результате получается чисто бозонное состояние. Однако, как следует из (118), такое состояние ортогонально всем чисто бозонным состояниям. Следовательно,

$$g \sum_m P_{1/2m} P_{1/2m}^+ | \text{mixed.sym.} \rangle = 0. \quad (119)$$

Для полностью симметричных состояний имеем

$$\begin{aligned} & g \sum_{m'} P_{1/2m'} P_{1/2m'}^+ P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = g \sum_{m'} P_{1/2m'} \{ P_{1/2m'}^+, P_{1/2m} \} | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = g P_{1/2m} (\hat{N}_B + \frac{1}{2} \hat{N}_F) | N_F = 0, N_B = N \rangle + \\ & + g \sum_{m'} P_{1/2m'} \sqrt{2} (-1)^{1/2-m'} C_{1/2m, 1/2-m'}^{1\eta} \hat{S}_{1\eta} | N_F = 0, N_B = N \rangle. \end{aligned} \quad (120)$$

Так как операторы \hat{N}_F и $\hat{S}_{1\eta}$ дают нуль, действуя на чисто бозонные состояния, то

$$g \sum_{m'} P_{1/2m'} P_{1/2m'}^+ P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle = g N P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle. \quad (121)$$

Таким образом, взаимодействие (117) может использоваться, чтобы регулировать энергии полностью симметричных состояний относительно состояний со смешанной симметрией.

Состояния нечетных ядер, имеющие те же относительные энергии, что и четно-четные ядра, связаны $E2$ -переходами с приведенными вероятностями, совпадающими с точностью до геометрического фактора с вероятностями $E2$ -переходов между соответствующими состояниями четно-четного остова. Причиной этого является структура собственных векторов состояний, принадлежащих суперсимметричным мультиплетам.

Пусть $|JMN_F = 1, N_B = N - 1, Ln\rangle$ является нормированным собственным вектором нечетного ядра, построенным в результате действия оператора

$P_{1/2m}$ на нормированный собственный вектор $|Ln\mu N_F = 0, N_B = N\rangle$ четно-четного ядра:

$$\begin{aligned} & |JM N_F = 1, N_B = N - 1, Ln\rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m,\mu} C_{\frac{1}{2}mL\mu}^{JM} P_{1/2m} |Ln\mu N_F = 0, N_B = N\rangle. \end{aligned} \quad (122)$$

В общем случае оператор $E2$ -перехода может отличаться от бозон-фермионного оператора (105), который использовался выше при построении гамильтониана (116). Это может быть произвольная линейная комбинация бозонного (104) и фермионного (101) квадрупольных операторов. Для наших целей удобно представить оператор $E2$ -перехода в виде линейной комбинации квадрупольного оператора (105) и квадрупольного оператора с нулевыми матричными элементами между состояниями (122). Ниже показано [34], что такой оператор имеет следующую структуру:

$$Q_{2\mu}^B - (N - 1)Q_{2\mu}^F. \quad (123)$$

Рассмотрим оператор

$$Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F. \quad (124)$$

Используя приведенные выше коммутационные и антикоммутационные соотношения, а также двойной коммутатор

$$\begin{aligned} & \left[P_{1/2m'}^+, [Q_{2\mu}^B - Q_{2\mu}^F, P_{1/2m}] \right] = -2\delta_{mm'} Q_{2\mu}^B + 2a_{2\mu,1/2m}^+ a_{00,1/2m'} + \\ & + 2a_{00,1/2m}^+ (-1)^\mu a_{2-\mu,1/2m'} + 2\chi \sum_{\eta,\eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} a_{2\eta,1/2m}^+ (-1)^{\eta'} a_{2-\eta',1/2m'}, \end{aligned} \quad (125)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \langle N_F = 0, N_B = N | P_{1/2m'}^+ (Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F) P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = \langle N_F = 0, N_B = N | P_{1/2m'}^+ [Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F, P_{1/2m}] | N_F = 0, N_B = N \rangle + \\ & + \langle N_F = 0, N_B = N | P_{1/2m'}^+ P_{1/2m} (Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F) | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = \langle N_F = 0, N_B = N | \left[P_{1/2m'}^+, [Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F, P_{1/2m}] \right] | N_F = 0, N_B = N \rangle + \\ & + \langle N_F = 0, N_B = N | \left\{ P_{1/2m'}^+, P_{1/2m} \right\} (Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F) | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = \langle N_F = 0, N_B = N | - (1 - \beta) \delta_{mm'} Q_{2\mu}^B | N_F = 0, N_B = N \rangle + \\ & + \delta_{mm'} N \langle N_F = 0, N_B = N | Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = \delta_{mm'} ((N - 1) + \beta) \langle N_F = 0, N_B = N | Q_{2\mu}^B | N_F = 0, N_B = N \rangle = 0. \end{aligned} \quad (126)$$

Следовательно, $\beta = -(N - 1)$. Таким образом, квадрупольный оператор общего вида можно представить как

$$T_\mu(E2) = e_{\text{eff}} ((Q_{2\mu}^B + Q_{2\mu}^F) + \alpha(Q_{2\mu}^B - (N - 1)Q_{2\mu}^F)). \quad (127)$$

Параметр α в (127) несуществен для последующего рассмотрения. Однако этот параметр определяет интенсивности $E2$ -переходов между состояниями с полной и смешанной симметрией.

Приведенные матричные элементы оператора $T_\mu(E2)$, взятые между полностью симметричными состояниями нечетного ядра, могут быть выражены через матричные элементы квадрупольного бозонного оператора между соответствующими состояниями четно-четного ядра, а именно

$$\begin{aligned} \langle J', N_F = 1, N_B = N - 1, L'n' || T(E2) || J, N_F = 1, N_B = N - 1, L_n \rangle = \\ = (-1)^{L - \frac{1}{2} - J'} \sqrt{(2J + 1)(2J' + 1)} \begin{Bmatrix} 2 & L & L' \\ 1/2 & J' & J \end{Bmatrix} \times \\ \times \langle L'n' N_F = 0, N_B = N || Q_2^B || L_n N_F = 0, N_B = N \rangle. \end{aligned} \quad (128)$$

Из (128) следуют различные соотношения между величинами $B(E2)$ для нечетных и четно-четных ядер. Удобно рассматривать отношения $B(E2)$:

$$R_{\text{SUSY}}(J' L'n' \rightarrow J L_n) \equiv \frac{B(E2; J' L'n' \rightarrow J L_n)}{B(E2; L'n' \rightarrow L_n)}. \quad (129)$$

Из (128) следует, например, что

$$\begin{aligned} R_{\text{SUSY}}(J' = 9/2, L'_{n'} = 4_1 \rightarrow J = 5/2, L_n = 2_1) &= 1, \\ R_{\text{SUSY}}(J' = 7/2, L'_{n'} = 4_1 \rightarrow J = 3/2, L_n = 2_1) &= 0, 9, \\ R_{\text{SUSY}}(J' = 3/2, L'_{n'} = 2_2 \rightarrow J = 5/2, L_n = 2_1) &= 0, 3, \\ R_{\text{SUSY}}(J' = 5/2, L'_{n'} = 2_{n'} \rightarrow J = 1/2, L_n = 0_1) &= 1, \\ R_{\text{SUSY}}(J' = 3/2, L'_{n'} = 2_{n'} \rightarrow J = 1/2, L_n = 0_1) &= 1. \end{aligned} \quad (130)$$

В соотношении (130) для краткости опущены обозначения чисел бозонов и фермионов в характеристиках векторов состояний.

Примером приближенной суперсимметрии, соответствующим гамильтониану, рассмотренному в этом разделе, являются изотопы $^{194,195}\text{Pt}$ [7, 21] (рис. 2). Как видно из рисунка, суперсимметрия является приближенной. Согласие между теорией и экспериментом можно улучшить, преобразовав гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} \rightarrow (1 - a\hat{N}_B\hat{N}_F)\hat{H} + 2b\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \quad (131)$$

Это преобразование аналогично использованному в разд. 5, с той лишь разницей, что там хорошими квантовыми числами являлись как полное число

Таблица 2. Рассчитанные значения $B(E2)$ для изотопа ^{195}Pt (в e^2b^2). Экспериментальные данные для ^{195}Pt взяты из [20, 47]. Экспериментальные данные по $B(E2, L_i n_i \rightarrow L_f n_f)$ для ^{194}Pt взяты из [56]. Результаты, приведенные в третьей колонке, получены с учетом перенормировки эффективного заряда у ^{195}Pt : $n_{\text{ren}} \equiv e_{\text{eff}}(^{195}\text{Pt})/e_{\text{eff}}(^{194}\text{Pt}) = 0,67$

$J_i(L_i n_i) \rightarrow J_f(L_f n_f)$	$B(E2)_{\text{exp}}$ в ^{195}Pt	$B(E2; L_i n_i \rightarrow L_f n_f)$ $\times R_{\text{SUSY}} \times n_{\text{ren}}$	$B(E2; L_i n_i \rightarrow L_f n_f)$ $\times R_{\text{SUSY}}$	R_{SUSY}
$3/2^-(2_1) \rightarrow 1/2^-(0_1)$	0,190(10)	0,168(7)	0,374(16)	1
$5/2^-(2_1) \rightarrow 1/2^-(0_1)$	0,170(10)	0,168(7)	0,374(16)	1
$3/2^-(2_2) \rightarrow 1/2^-(0_1)$	0,017(1)	0,0006(1)	0,0014(2)	1
$5/2^-(2_2) \rightarrow 1/2^-(0_1)$	0,008(4)	0,0006(1)	0,0014(2)	1
$3/2^-(2_2) \rightarrow 5/2^-(2_1)$	$\leq 0,019$	0,076(9)	0,17(2)	0,3
$7/2^-(4_1) \rightarrow 3/2^-(2_1)$	0,17(7)	0,19(1)	0,42(3)	0,9
$9/2^-(4_1) \rightarrow 5/2^-(2_1)$	0,20(4)	0,21(1)	0,47(3)	1

бозонов, так и число s -бозонов. Гамильтониан (131) имеет тот же спектр возбуждений ^{194}Pt , что и гамильтониан (116). Но спектр возбужденных состояний ^{195}Pt сжат, а псевдоспин-орбитальные дублеты расщеплены. Это преобразование гамильтониана не изменяет волновых функций.

Если сравнить экспериментальные данные для $B(E2)$ в ^{195}Pt [20, 47] с теоретическими предсказаниями, следующими из (130) (табл. 2), то видно, что теоретические предсказания для сильных переходов систематически превышают экспериментальные данные. Согласие может быть улучшено, если эффективный заряд для оператора $E2$ -перехода сделать зависящим от числа фермионов, т.е. преобразовать оператор $E2$ -перехода так же, как и гамильтониан в (131).

Подведем итоги этого раздела. Анализируя гамильтониан, построенный с помощью генераторов градуированной алгебры $U(6/12)$, мы показали, что хотя этот гамильтониан и не обладает в общем случае динамической симметрией, тем не менее часть собственных состояний этого гамильтониана, относящихся к нечетному ядру, и коллективные состояния четно-четного ядра образуют супермультиплеты. Это связано с тем, что алгебра $U(6/12)$ содержит подалгебру $U(1/2)$, являющуюся группой симметрии рассматриваемого гамильтониана.

7. НЕПОЛНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ В МОДЕЛИ ЧАСТИЦА–РОТОР

Выше уже отмечалось, что в подходе, базирующемся на динамических симметриях, внимание уделялось описанию всего спектра состояний четно-четных и нечетных ядер с помощью единого гамильтониана с фиксирован-

ными параметрами взаимодействия. Как правило, тем группам состояний, которые характеризуются одинаковыми энергиями гамма-переходов как в четно-четных, так и в нечетных ядрах, специального внимания не уделялось. Однако именно эти случаи являются примерами точной суперсимметрии, и было бы полезно показать, что такое представляющее общий интерес явление, как суперсимметрия, реализуется в спектрах ядер [50]. Экспериментально известно несколько примеров ротационных полос, основания которых имеют угловой момент $J = 1/2$, почти вырожденных по сигнатуре, которые характеризуются энергиями гамма-переходов, очень близкими к энергиям соответствующих переходов в четно-четных ядрах. Среди этих примеров есть ядра, которые либо близки, либо принадлежат к области ядер со статической деформацией. В этих случаях основания ротационных полос интерпретируются как нильссоновские состояния с $K = 1/2$.

Обычно предполагается, что нечетная частица поляризует четно-четный остов, изменяя, например, момент инерции. Действительно, спектры ротационных и квазиротационных полос в нечетных ядрах с обычной деформацией, имеющих энергии гамма-переходов, близкие к соответствующим энергиям в соседних четно-четных ядрах, сжаты по сравнению со спектрами соседних четно-четных ядер. Коэффициент сжатия равен 0,8–0,9. Однако в случае супердеформированных ротационных полос были обнаружены практически тождественные энергии гамма-переходов, совпадающие с точностью до нескольких кэВ [28]. Чтобы объяснить наблюдаемое явление — тождественные супердеформированные ротационные полосы, было предложено несколько подходов. Первое объяснение основывалось на модели частица — ротор и на концепции псевдоспина, динамически не связанного с псевдоорбитальным моментом [46]. В этом подходе одночастичный угловой момент выражается в виде суммы псевдоорбитального момента и псевдоспина. Предполагается, что псевдоорбитальный момент фермиона сильно связан с угловым моментом остова, формируя полный орбитальный момент. Псевдоспин же добавляется к полному орбитальному моменту. В противоположность обычному кориолисову взаимодействию псевдокориолисово взаимодействие включает только псевдоспин, а не полный угловой момент нечетной частицы. Параметр развязывания a для ротационных полос с $K = 1/2$ в псевдоасимптотическом пределе равен $a = (-1)^{\tilde{N}} \delta_{\tilde{\Lambda}0}$, где \tilde{N} — полное псевдоосцилляционное квантовое число, а $\tilde{\Lambda}$ — проекция псевдоорбитального момента частицы на ось симметрии. В случае псевдоорбитального синглета ($\tilde{\Lambda} = 0$) и четного \tilde{N} $a = +1$, и энергии гамма-переходов в нечетных ядрах становятся тождественными энергиям гамма-переходов в соседних четно-четных ядрах.

В другом подходе, предложенном в [45], тождественные супердеформированные полосы анализировались в рамках формализма, использующего динамические суперсимметрии. Супералгебры, включающие как бозоны, так и

фермионы, позволяют описывать на основе единого гамильтониана как четно-четные, так и нечетные ядра. Как уже отмечалось выше, концепция псевдоспина естественным образом включается в формализм суперсимметрий. Однако в [45] суперсимметрия рассматривалась в контексте $U(6/12)$ динамической суперсимметрии с соответствующим ограничением конфигурационного пространства одночастичных состояний нечетного нуклона. В этом разделе мы рассмотрим суперсимметрию в рамках модели частица — ротор, имея в виду как ядра с обычной деформацией, так и супердеформированные ядра. В этой модели нечетная частица может заселять любое состояние основной для заданной ядерной оболочки четности. Цель этого раздела — показать, что описание вырожденных по сигнатуре ротационных полос с $K = 1/2$ с энергиями гамма-переходов, тождественными энергиям соответствующих переходов в соседних четно-четных ядрах, может быть переформулировано как проявление суперсимметрии.

Остановимся чуть подробнее на концепции псевдоспина. В тяжелых ядрах одночастичные орбиты, принадлежащие ядерной оболочке с главным осцилляторным квантовым числом N , формируют слабовырожденные дублеты с квантовыми числами $l_1, j_1 = l_1 + 1/2$ и $l_2 = l_1 + 2, j_2 = l_2 - 1/2 = j_1 + 1$. Состояния, принадлежащие дублетам, являются псевдоспин-орбитальными партнерами. Для практического применения этой концепции важно, что псевдоспин-орбитальное взаимодействие $\tilde{1}\tilde{s}$ существенно слабее, чем обычная спин-орбитальная связь $1s$.

Как и в предыдущем разделе, разложим угловой момент нечетной частицы на псевдоорбитальную и псевдоспиновую части:

$$a_{jm}^+ = \sum_{\mu, \sigma} C_{l_{\mu, \frac{1}{2}\sigma}}^{jm} a_{l_{\mu, \frac{1}{2}\sigma}}^+ \quad (132)$$

Используя операторы рождения и уничтожения фермиона $a_{l_{\mu, \frac{1}{2}\sigma}}^+$ и $a_{\tilde{l}_{\mu, \frac{1}{2}\sigma}}$ и предполагая, что матричные элементы r^2 не зависят от \tilde{l} [31], что выполняется приближенно, мы получим следующее выражение для оператора квадрупольного момента частицы:

$$q_{2\mu} = \langle r^2 \rangle \sum_{\tilde{l}, \tilde{l}', \nu, \nu', \sigma} \frac{\langle \tilde{l}' || Y_2 || \tilde{l} \rangle}{\sqrt{5}} C_{\tilde{l}' \nu' \tilde{l} \nu}^{2\mu} a_{\tilde{l}' \nu', \frac{1}{2}\sigma}^+ \tilde{a}_{\tilde{l} \nu, \frac{1}{2}\sigma}, \quad (133)$$

где $\langle r^2 \rangle$ задан в единицах $\frac{\hbar}{m\omega_0}$. Это предположение означает, например, что считаются равными как диагональные, так и недиагональные матричные элементы r^2 , не связанные с поворотом псевдоспина. В дальнейшем будем пренебрегать слабым псевдоспин-орбитальным взаимодействием. В псевдоспин-орбитальном представлении гамильтониан модели частица — ротор в лабо-

раторной системе координат имеет вид

$$H = \sum_{\tilde{l}, \nu, \sigma} E_{\tilde{l}} a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma} + \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} \mathbf{L}^2 - \hbar\omega_0 \sum_{\mu} (-1)^{\mu} q_{2\mu} Q_{2-\mu}^c. \quad (134)$$

Первый член в (134) представляет энергию невзаимодействующей частицы в сферически-симметричном потенциале. Второе слагаемое — это энергия вращения. В отличие от стандартной модели частица — ротор, здесь предполагается, что вращательный момент \mathbf{L} является векторной суммой момента остова \mathbf{R} и одночастичного псевдоорбитального момента $\tilde{\mathbf{I}}$ [36,42–44]:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{I}}. \quad (135)$$

Это очень важное предположение. Оно основывается на слабости псевдоспин-орбитального взаимодействия, благодаря которой псевдоорбитальный момент частицы оказывается сильно связанным с деформированным средним ядерным потенциалом. В результате $\tilde{\mathbf{I}}$ и \mathbf{R} оказываются связанными в полный угловой момент \mathbf{L} . Отметим также, что благодаря достаточно большому энергетическому разделению одночастичных состояний с $\tilde{\Lambda} = 1$ и $\tilde{\Lambda} = 0$, кориолисово взаимодействие, появляющееся, если заменить в (134) \mathbf{L}^2 на \mathbf{R}^2 , окажет слабое воздействие на псевдоорбитальный синглет. В этом случае эффект кориолисова взаимодействия в основном сведется к перенормировке момента инерции и фактора развязывания. Третий член в (134), где безразмерный оператор $Q_{2\mu}^c$ пропорционален квадрупольному моменту остова, описывает связь нечетной частицы с деформированным средним полем ядра. Так как в (134) приняты во внимание только ротационные возбуждения остова, то собственные векторы ротационной полосы, построенной на основном состоянии остова, можно представить следующим образом:

$$|R\nu\rangle = \sqrt{\frac{2R+1}{8\pi^2}} D_{\nu 0}^R. \quad (136)$$

Проекция углового момента \mathbf{R} для этой полосы принята равной нулю, в соответствии с предположением об аксиальной симметрии среднего поля. По той же причине оператор $Q_{2\mu}^c$ может быть представлен как

$$Q_{2\mu}^c = \beta D_{\mu 0}^2, \quad (137)$$

где β — параметр аксиальной деформации остова.

Операторы

$$a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{\tilde{l}'\mu', \frac{1}{2}\sigma'}, L_{\nu}, D_{M0}^L, \quad (138)$$

используемые при конструировании гамильтониана (134), формируют вместе с операторами

$$a_{\bar{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{m0}^l, \quad a_{\bar{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^- D_{m0}^l \quad (139)$$

градуированную алгебру Ли. Соответствующие коммутационные и антикоммутационные соотношения приведены ниже. Чтобы упростить обозначения, ниже опущен знак тильда:

$$[L_\mu, L_\nu] = \sqrt{2} C_{1\nu 1\mu}^{1\nu'} L_{\nu'}, \quad (140)$$

$$[L_\mu, D_{M0}^L] = \sqrt{L(L+1)} C_{LM1\mu}^{LM'} D_{M'0}^L, \quad (141)$$

$$\begin{aligned} [L_\mu, a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\nu', \frac{1}{2}\sigma'}] &= \sqrt{l(l+1)} C_{l\nu 1\mu}^{l\nu'} a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\nu', \frac{1}{2}\sigma'} - \\ &- \sqrt{l'(l'+1)} (-1)^\mu C_{l'\nu' 1-\mu}^{l'\nu'} a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\nu', \frac{1}{2}\sigma'}, \end{aligned} \quad (142)$$

$$[D_{M0}^L, D_{M'0}^{L'}] = 0, \quad (143)$$

$$[D_{M0}^L, a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\nu', \frac{1}{2}\sigma'}] = 0, \quad (144)$$

$$\begin{aligned} [a_{l_1\mu_1, \frac{1}{2}\sigma_1}^+ a_{l_2\mu_2, \frac{1}{2}\sigma_2}, a_{l'_1\mu'_1, \frac{1}{2}\sigma'_1}^+ a_{l'_2\mu'_2, \frac{1}{2}\sigma'_2}] &= \delta_{l'_1 l_2} \delta_{\mu'_1 \mu_2} \delta_{\sigma'_1 \sigma_2} a_{l_1\mu_1, \frac{1}{2}\sigma_1}^+ a_{l'_2\mu'_2, \frac{1}{2}\sigma'_2} - \\ &- \delta_{l_1 l'_2} \delta_{\mu_1 \mu'_2} \delta_{\sigma_1 \sigma'_2} a_{l'_1\mu'_1, \frac{1}{2}\sigma'_1}^+ a_{l_2\mu_2, \frac{1}{2}\sigma_2}, \end{aligned} \quad (145)$$

$$[a_{l\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\mu', \frac{1}{2}\sigma'}, a_{l_1\mu_1, \frac{1}{2}\sigma_1}^+ D_{M0}^L] = \delta_{l'l_1} \delta_{\mu'\mu_1} \delta_{\sigma'\sigma_1} a_{l_1\mu_1, \frac{1}{2}\sigma_1}^+ D_{M0}^L, \quad (146)$$

$$\begin{aligned} [L_\mu, a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M0}^L] &= \sqrt{l(l+1)} C_{l\nu 1\mu}^{l\nu'} a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M0}^L + \\ &+ \sqrt{L(L+1)} C_{LM1\mu}^{LM'} a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M'0}^L, \end{aligned} \quad (147)$$

$$[D_{M0}^L, a_{l\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M'0}^{L'}] = 0, \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \left\{ a_{l\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M0}^L, a_{l'\mu', \frac{1}{2}\sigma'}^+ D_{M'0}^{L'} \right\} &= \delta_{ll'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\sigma\sigma'} D_{M0}^L D_{M'0}^{L'} = \\ &= \delta_{ll'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\sigma\sigma'} \sum_{L''M''} C_{LM L' M'}^{L'' M''} C_{L0 L' 0}^{L'' 0} D_{M''0}^{L''}, \end{aligned} \quad (149)$$

$$\left\{ a_{l\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M0}^L, a_{l'\mu', \frac{1}{2}\sigma'}^+ D_{M'0}^{L'} \right\} = 0. \quad (150)$$

В (138) и (139) \tilde{l} принимает значения $\tilde{N}, \tilde{N} - 2, \dots, 1$ или 0 , где \tilde{N} — главное псевдоосцилляционное квантовое число. Мы можем ограничить набор возможных значений l в (139) только четными числами, беря $l = 0, 2, \dots, \tilde{N}$ или $\tilde{N} - 1$. Тогда L в (138) является четным числом, принимающим значения $L = 0, 2, \dots, 2l_{\max}$, где $l_{\max} = \tilde{N}$ или $\tilde{N} - 1$. В этой градуированной алгебре операторы (138) формируют бозе-сектор, а операторы (139) — ферми-сектор.

Наша цель — найти условия, при которых в спектре нечетного ядра появляются уровни, разделенные такими же энергетическими интервалами, что и соответствующие уровни в спектре соседнего четно-четного ядра, а затем построить оператор, принадлежащий ферми-сектору рассмотренной выше градуированной алгебры Ли, который генерирует соответствующие уровни нечетного ядра при действии на состояния четно-четного соседа. Если построение такого оператора возможно, то можно говорить о суперсимметрии в ядерных спектрах или, более точно, о неполной суперсимметрии, так как не все ротационные полосы нечетного ядра, являющиеся собственными состояниями гамильтониана (134), могут быть построены с помощью такого оператора. Этот оператор должен коммутировать с гамильтонианом или должен быть оператором, генерирующим собственные моды, т.е. его коммутатор с гамильтонианом должен быть равен ему же, помноженному на некоторую константу. В последнем случае уровни рассматриваемой ротационной полосы нечетного ядра будут сдвинуты относительно соответствующих уровней четно-четного соседа на одну и ту же величину. Однако энергетические разности (энергии гамма-переходов) будут теми же самыми в обоих ядрах. Формально, когда оператор, трансформирующий бозонную систему в фермионную, не коммутирует с гамильтонианом, это означает, что гамильтониан неинвариантен относительно преобразования, генератором которого является рассматриваемый оператор. Однако в ядерной спектроскопии можно говорить о суперсимметрии только в отношении спектров возбуждения, т.е. вычитая перед рассмотрением из полных энергий массы ядер. При сравнении энергетических интервалов в ротационных полосах нечетных ядер с основными ротационными полосами соседних четно-четных ядер энергии оснований ротационных полос должны быть вычтены из энергий возбуждения. В этом отношении ситуация аналогична той, которая возникает при рассмотрении изоспиновой симметрии, когда для проверки ее применимости необходимо вычитать кулоновские энергии из масс ядер.

Рассмотрим оператор

$$P_{\frac{1}{2}\sigma} \equiv \sum_{\tilde{l}, m} \chi_{\tilde{l}} C_{\tilde{l}m\tilde{l}-m}^{00} a_{\tilde{l}m, \frac{1}{2}\sigma}^+ \sqrt{2\tilde{l} + 1} D_{-m0}^{\tilde{l}} \quad (151)$$

и вычислим его коммутатор с гамильтонианом (134). Коэффициенты $\chi_{\tilde{l}}$ будут определены в дальнейшем. Видно, что каждое слагаемое в (151) имеет нулевой полный орбитальный момент и, следовательно, коммутирует с ротационным членом гамильтониана (134). Полный коммутатор оператора (151) с гамильтонианом равен

$$[H, P_{\frac{1}{2}\sigma}] = \sum_{\tilde{l}, \tilde{l}'} h_{\tilde{l}, \tilde{l}'} \chi_{\tilde{l}'} \sum_m C_{\tilde{l}m\tilde{l}-m}^{00} a_{\tilde{l}m, \frac{1}{2}\sigma}^+ \sqrt{2\tilde{l} + 1} D_{-m0}^{\tilde{l}}, \quad (152)$$

где

$$h_{\tilde{l}, \tilde{l}'} = E_{\tilde{l}} \delta_{\tilde{l}\tilde{l}'} - \hbar\omega_0 \beta \langle r^2 \rangle \langle \tilde{l}0 | Y_{20} | \tilde{l}'0 \rangle. \quad (153)$$

Здесь $h_{\tilde{l}, \tilde{l}'}$ — матричные элементы одночастичного гамильтониана Нильссона в псевдоосцилляторном базисе, вычисленные в предположении, что матричные элементы r^2 не зависят от \tilde{l}, \tilde{l}' . Более точно, матричные элементы $h_{\tilde{l}, \tilde{l}'}$ являются частью матрицы гамильтониана Нильссона, соответствующей одночастичным состояниям с нулевой проекцией псевдоорбитального момента на ось симметрии, т.е. с $\tilde{\Lambda} = 0$. Мы определим коэффициенты $\chi_{\tilde{l}}$ так, чтобы они удовлетворяли уравнению

$$\sum_{\tilde{l}'} h_{\tilde{l}, \tilde{l}'} \chi_{\tilde{l}'} = E_0 \chi_{\tilde{l}}. \quad (154)$$

Таким образом, $\chi_{\tilde{l}}$ — это коэффициенты, описывающие разложение нильссоновских одночастичных состояний в псевдоосцилляторном базисе, а E_0 — энергия нильссоновского состояния с $\tilde{\Lambda} = 0$. Окончательно мы получаем следующий результат:

$$[H, P_{\frac{1}{2}\sigma}] = E_0 P_{\frac{1}{2}\sigma}. \quad (155)$$

Из (155) следует, что $P_{\frac{1}{2}\sigma}$, действуя на состояния четно-четного ядра, порождает собственные состояния соседнего нечетного ядра с $\tilde{\Lambda} = 0$. Энергии этих состояний сдвинуты на величину E_0 относительно энергий соответствующих состояний четно-четного ядра. Однако энергии гамма-переходов будут теми же самыми как в четно-четном, так и в нечетном ядрах. Мы можем сказать также, что оператор $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ порождает ротационные состояния нечетного ядра с основанием полосы, имеющим $\tilde{\Lambda} = 0$, когда действует на состояния

четно-четного ядра. Выше этот оператор задан в лабораторной системе координат.

Как видно из выражения для оператора $P_{\frac{1}{2}\sigma}$, его полный орбитальный момент равен нулю. Поэтому $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ генерирует только состояния нечетного ядра с четным L и $\tilde{\Lambda} = 0$, когда действует на ротационную полосу, базирующуюся на основном состоянии четно-четного ядра. Из выражения для собственного вектора гамильтониана (134), имеющего $\tilde{\Lambda} = 0$:

$$|JM, L\tilde{\Lambda} = 0\rangle = \sum_{m,\sigma} C_{Lm\frac{1}{2}\sigma}^{JM} \sum_{R,l} (-1)^{\tilde{l}} C_{L0l0}^{R0} \chi_{\tilde{l}} \sum_{\eta,\nu} C_{l\eta R\nu}^{Lm} a_{l\eta,\frac{1}{2}\sigma}^+ |R\nu\rangle, \quad (156)$$

следует, что полный орбитальный момент L этих состояний должен удовлетворять условию

$$(-1)^{L+\tilde{l}} = +1. \quad (157)$$

Следовательно, оператор $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ будет генерировать собственные состояния нечетного ядра, только если \tilde{l} — четное число, т.е. принадлежит осцилляторной оболочке с четным \tilde{N} . Например, одночастичные состояния $p_{1/2}$, $(p_{3/2}, f_{5/2})$ и $(f_{7/2}, h_{9/2})$ характеризуются четными значениями псевдоорбитального момента. И в том случае, если соответствующая осцилляторная оболочка валентна, энергетические интервалы в ротационной полосе нечетного ядра, построенной на нильссоновском состоянии с $\tilde{\Lambda} = 0$, могут совпадать с соответствующими энергетическими интервалами в основной полосе четно-четного ядра. В противоположность рассмотренному выше примеру одночастичные состояния $(s_{1/2}, d_{3/2})$ и $(d_{5/2}, g_{7/2})$ имеют нечетные псевдоорбитальные моменты. Следовательно, согласно (157) в этом случае L — нечетное число, и собственные состояния нечетного ядра, базирующиеся на этих орбитах, не могут быть получены действием оператора $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ на полосу основного состояния четно-четного ядра. В принципе можно сконструировать соответствующий оператор. Однако такой оператор должен обладать ненулевым орбитальным моментом, и по этой причине он не будет коммутировать с ротационным членом гамильтониана (134). Поэтому такой коммутатор нельзя будет представить как (155). Такая ситуация иллюстрируется ротационными полосами основных состояний ^{171}Tm и ^{171}Yb . ^{171}Tm — это нечетно-протонное ядро, которое можно получить удалением протона (добавлением протонной дырки) из ^{172}Yb . Протонная дырка будет находиться в состоянии $[411]_{\frac{1}{2}}^+$, которое характеризуется $\tilde{\Lambda} = 0$ и $\tilde{N} = 3$. Так как \tilde{N} — нечетное число, то полный орбитальный момент нечетного ядра L будет принимать только нечетные значения. Как следствие, полоса, построенная на основном состоянии ^{171}Tm , угловые моменты состояний которой являются результатом векторного сложения полного орбитального момента L и псевдоспина, равного $1/2$, будет

состоять из почти вырожденных дублетов $(1/2^+, 3/2^+)$, $(5/2^+, 7/2^+)$ и т.д. Полоса основного состояния ^{171}Yb базируется на нильссоновском состоянии $[521]_{\frac{1}{2}}^-$, имеющем $\tilde{L} = 0$ и $\tilde{N} = 4$. В этом случае полный орбитальный момент состояний основной ротационной полосы нечетного ядра является четным. Как следствие, эта полоса будет состоять из синглета $1/2^-$ и дублетов $(3/2^-, 5/2^-)$, $(7/2^-, 9/2^-)$ и т.д. Энергетические интервалы в основной полосе ^{171}Yb близки к соответствующим интервалам в основной полосе ^{172}Yb , демонстрируя тем самым пример приближенной суперсимметрии в ядерном спектре. В полосе основного состояния ^{171}Tm энергетические интервалы отличаются от соответствующих разностей энергий в ^{172}Yb . Однако с хорошей точностью они следуют правилу $L(L+1)$ (L — нечетное число) с тем же моментом инерции, что и в четно-четном ядре.

Обычно модель частица — ротор включает парное взаимодействие, эффект которого учитывается в приближении среднего поля. Соответствующий член может быть включен и в гамильтониан (134) без существенного изменения полученных выше результатов. В этом случае супероператором становится линейная комбинация операторов $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ и $(-1)^{l+1/2-\sigma} P_{\frac{1}{2}-\sigma}^+$ с коэффициентами $u - v$ преобразования Боголюбова. При этом одночастичная энергия E_0 заменяется на одноквазичастичную энергию.

Вычислим для полноты картины антикоммутиатор

$$\{P_{\frac{1}{2}\sigma}, P_{\frac{1}{2}\sigma'}^+\} = \delta_{\sigma\sigma'} \sum_{\tilde{l}} |\chi_{\tilde{l}}|^2. \quad (158)$$

Нормируя коэффициенты $\chi_{\tilde{l}}$ следующим образом: $\sum_{\tilde{l}} |\chi_{\tilde{l}}|^2 = 1$, получаем

$$\{P_{\frac{1}{2}\sigma}, P_{\frac{1}{2}\sigma'}^+\} = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (159)$$

Из предыдущего рассмотрения следует, что суперпартнером ротационного состояния четно-четного ядра, а именно $|R\nu\rangle$, является нормированный вектор

$$|JM, R\rangle = \sum_{m,\nu} C_{\frac{1}{2}mR\nu}^{J,M} P_{\frac{1}{2}m} |R\nu\rangle. \quad (160)$$

Рассчитаем приведенные матричные элементы оператора $E2$ -перехода между состояниями мультиплета (160). В качестве оператора $E2$ -перехода возьмем квадрупольный оператор остова $Q_{2\mu}^c$. В результате получаем выражение для приведенного матричного элемента

$$\begin{aligned} \langle J'R' || Q_2 || JR \rangle &= \beta (-1)^{J'+1/2} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)(2R+1)} \times \\ &\times C_{R020}^{R'0} \left\{ \begin{array}{ccc} R & 1/2 & J \\ J' & 2 & R' \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (161)$$

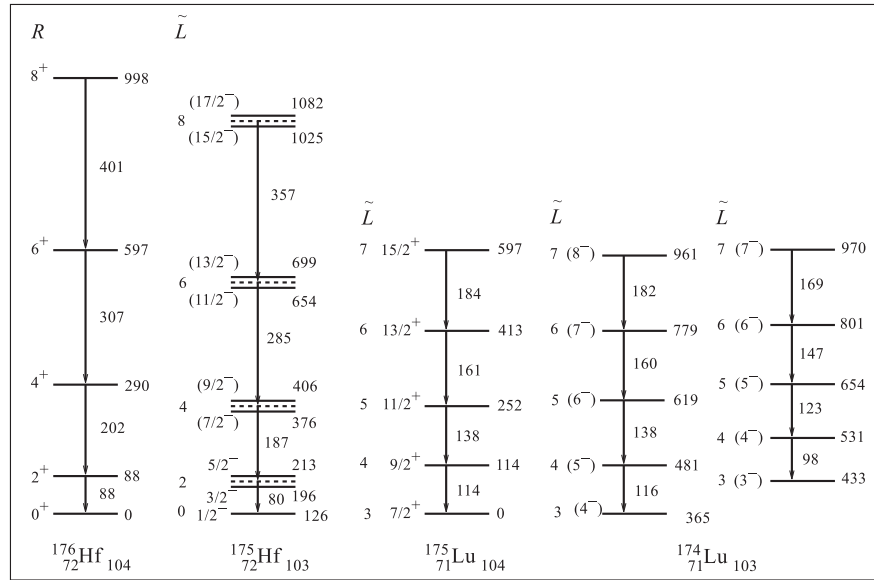


Рис. 9. Экспериментальные спектры состояний основных ротационных полос $^{175,176}\text{Hf}$ и ^{175}Lu и возбужденных ротационных полос ^{174}Lu . Энергии указаны в кэВ. Вместе со значениями полного углового момента приведены и значения псевдоорбитального момента \tilde{L}

которое может быть переписано следующим образом:

$$\langle J'R' || Q_2 || JR \rangle = \beta \sqrt{2J+1} C_{J1/220}^{J'1/2}. \quad (162)$$

Последнее выражение совпадает с известным результатом модели частица — ротор [51].

Есть несколько примеров приближенной суперсимметрии в спектрах ядер, описываемых гамильтонианом (134), например, $^{181,182}\text{Pt}$, $^{173,174}\text{Hf}$ и уже отмеченный выше $^{171,172}\text{Yb}$. На рис. 3 и 4 показаны низколежащие состояния четно-четных ядер и соответствующие состояния соседних нечетных ядер, являющиеся суперсимметричными партнерами состояний основной ротационной полосы четно-четного ядра. Видно, однако, что суперсимметрия не является точной. Как и в предыдущих разделах, согласие между теорией и экспериментом можно улучшить, преобразовав гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} \rightarrow (1 - a\hat{N}_F)\hat{H} + 2b\hat{L} \cdot \hat{S}, \quad (163)$$

где \hat{N}_F — оператор числа частиц, добавленных к коллективному остову.

Оператор $P_{1/2m}$, рождающий нейтронную дырку, может быть применен и к состояниям основной ротационной полосы нечетно-протонного ядра. В результате получится ротационная полоса нечетно-нечетного ядра с теми же энергетическими интервалами, что и в родительском нечетно-протонном ядре. Этот случай иллюстрируется спектрами $^{174,175}\text{Lu}$, показанными на рис. 9. Действуя оператором $P_{1/2m}$ на волновые векторы состояний основной ротационной полосы ^{175}Lu , которая базируется на состоянии $7/2^+$, мы получаем две ротационные полосы ^{174}Lu , в основании которых лежат состояния 4^- и 3^- . Энергии гамма-переходов в этих полосах близки к соответствующим энергиям ^{175}Lu . Это особенно верно для полосы, основанной на состоянии 4^- , где совпадение почти точное.

Таким образом, в данном разделе было показано, что суперсимметричными партнерами состояний основной ротационной полосы четно-четного ядра являются состояния ротационной полосы соседнего нечетного ядра, базирующейся на псевдосинглете, принадлежащем оболочке с четным псевдоосцилляторным главным квантовым числом \tilde{N} . Концепция псевдоспина сыграла ключевую роль при получении этого результата. Таким образом, существование суперсимметричных мультиплетов в ядерных спектрах основывается, частично, на псевдоспиновой симметрии, которая имеет, как это показано в [52–55], корни в релятивистской теории самосогласованного поля.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре показано, что спектры возбужденных состояний атомных ядер предоставляют интересный материал для исследования проявлений суперсимметрии. В атомных ядрах можно найти как примеры весьма близких по энергии гамма-переходов в соседних четно-четных и нечетных ядрах, так и примеры спектров с нарушенной суперсимметрией, хотя при этом как четно-четные, так и нечетные ядра описываются одним и тем же эффективным гамильтонианом с единым набором параметров. Суперсимметрия позволяет ввести для описания нечетных и нечетно-нечетных ядер квантовые числа, неизвестные в прежних моделях, использовавшихся для описания таких ядер. Новая схема классификации, основанная на суперсимметрии, позволяет понять природу наблюдаемых состояний ядер, особенно в тех случаях, когда не реализуется схема слабой связи, и стимулирует новые экспериментальные исследования ядерной структуры.

Мы провели формальное сравнение алгебраических структур суперсимметричных моделей, используемых в теории ядерной структуры и в квантовой теории поля. Это сравнение продемонстрировало сходство между двумя наборами коммутационных и антикоммутационных соотношений. Хотя имеется и некоторое различие между ними, обусловленное разной структурой бозонных

алгебр в теории ядра и в квантовой теории поля. Сходство было использовано затем для получения соотношения между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплетях.

В обзоре также показано, что существование суперсимметрии совсем не обязательно предполагает наличие какой-либо динамической симметрии для бозонной подсистемы. Гамильтониан, описывающий бозонную подсистему (четно-четное ядро), может иметь достаточно общий вид, и в то же время в спектре фермионной подсистемы (соседнее нечетное ядро) могут быть группы состояний с теми же энергетическими интервалами, т.е. с теми же энергиями переходов, что и в чисто бозонной подсистеме.

Большое внимание было уделено рассмотрению тех случаев, когда в соседних четно-четном и нечетном ядрах можно выделить группы уровней, характеризующихся весьма близкими по величине энергиями гамма-переходов. Такие примеры можно найти в спектрах ротационных полос деформированных и особенно супердеформированных ядер. Это примеры суперсимметрии, реализующейся с весьма высокой точностью. В обзоре показано, что описание таких ротационных полос в рамках модели частица — ротор может быть переформулировано как проявление суперсимметрии. При этом операторы, используемые при построении гамильтониана модифицированной модели частица — ротор, образуют вместе с рядом дополнительных операторов градуированную алгебру Ли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mayazawa H.** — Prog. Theor. Phys., 1966, v.36, p.1266.
2. **Neven A., Schwarz J.H.** — Nucl. Phys., 1971, v.B31, p.86.
3. **Gervais J.L., Sakita B.** — Nucl. Phys., 1971, v.B34, p.632.
4. **Gol'fand Yu.A., Likhtman E.P.** — JETP Lett., 1971, v.13, p.323.
5. **Volkov D.V., Akulov V.P.** — JETP Lett., 1972, v.16, p.438.
6. **Wess J., Zumino B.** — Nucl. Phys., 1974, v.B70, p.34.
7. **Iachello F., Van Isacker P.** — The Interacting Boson–Fermion Model, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
8. **Frank A., Van Isacker P.** — Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Physics, John Wiley & Sons, New York, 1994.
9. **Iachello F.** — Phys. Rev. Lett., 1980, v.44, p.772.
10. **Balantekin A.B., Bars I., Iachello F.** — Nucl. Phys., 1981, v.A370, p.284.
11. **Iachello F., Kuyucak S.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1981, v.136, p.19.
12. **Bijker R., Kota V.K.B.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1984, v.156, p.110.
13. **Bijker R., Iachello F.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1985, v.161, p.360.
14. **Bijker R., Kota V.K.B.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1988, v.187, p.148.

15. **Vervier J.** — *Revista Nuovo Cimento*, 1987, v.10, No.9, p.1.
16. **Vervier J.** — In: *Nuclear Structure, Reactions and Symmetries*, v.1, p.175, Dubrovnik, Yugoslavia, 1986, eds. R.A.Meyer and V.Paar, World Scientific, 1986.
17. **Cizewski J.A.** — In: *Nuclear Structure, Reactions and Symmetries*, v.1, p.181, Dubrovnik, Yugoslavia, 1986, eds. R.A.Meyer and V.Paar, World Scientific, 1986.
18. **Warner D.D., Casten R.F., Frank A.** — *Phys. Lett. B*, 1986, v.180, p.207.
19. **Vervier J., Van Isacker P., Jolie J. et al.** — *Phys. Rev. C*, 1985, v.32, p.1406.
20. **Mauthofer A., Stelzer K., Gerl J. et al.** — *Phys. Rev. C*, 1986, v.34, p.1958.
21. **Metz A., Jolie J., Graw G. et al.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1999, v.83, p.1542.
22. *Tables of Isotopes*. Eighth Ed., ed. by Firestone R.B. et al. Wiley, NY, 1996.
23. **Fabricius B. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1996, v.A523, p.426.
24. **Jett J.H., Lind D.A.** — *Nucl. Phys.*, 1970, v.A155, p.182.
25. **Voigt M.J.A. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1990, v.A507, p.447.
26. **Popesku D.G. et al.** — *Phys. Rev. C*, 1997, v.55, p.1175.
27. **Singh B., Firestone R.B., Chu S.Y.F.** — *Table of Superdeformed Nuclear Bands and Fission Isomers*, LBL-38004, UC-413, 1996.
28. **Byrski T. et al.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1990, v.64, p.1650.
29. **Arima A., Iachello F.** — *Interacting Boson Model*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
30. **Hecht K.T., Adler A.** — *Nucl. Phys.*, 1969, v.A 137, p.129.
31. **Arima A., Harvey M., Shimizu K.** — *Phys. Lett.*, 1969, v.30B, p.517.
32. **Jolos R.V., von Brentano P.** — *Phys. Rev. C*, 1999, v.60, p.064318.
33. **Kaku M.** — *Quantum Field Theory*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1993.
34. **Jolos R.V., von Brentano P.** — *Phys. Rev. C*, 2000, v.62, p.034310.
35. **Alhassid Y., Leviatan A. J.** — *Phys. A*, 1992, v.25, p.L1265.
36. **Leviatan A.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1996, v.77, p.818.
37. **Leviatan A., Sinai I.** — *Phys. Rev. C*, 1999, v.60, p.061301.
38. **Van Isacker P.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1999, v.83, p.4269.
39. **Talmi I.** — *Phys. Lett. B*, 1997, v.405, p.1.
40. **Leviatan A., Ginocchio J.N.** — *Phys. Rev. C*, 2000, v.61, p.24305.
41. **Escher J., Leviatan A.** — *Phys. Rev. Lett.*, 2000, v.84, p.1866.
42. **Warner D.D., Casten R.F.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1982, v.48, p.1385.
43. **Lipas P.O., Toivonen P., Warner D.D.** — *Phys. Lett.*, 1985, v.B 155, p.295.
44. **Warner D.D.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1984, v.52, p.259.
45. **Gelberg A., von Brentano P., Casten R.F.** — *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 1990, v.16, p.L143.
46. **Nazarewicz W., Fallon P., Twin P.J., Garrett J.D.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64, 1654.
47. **Bruce A.M., Gelletly W., Lukasiak J. et al.** — *Phys. Lett.*, 1985, v.165B, p.43.
48. **Bohr A., Hamamoto I., Mottelson B.R.** — *Phys. Scrip.*, 1982, v.26, p.267.
49. **Van Isacker P., Elliot J.P., Warner D.D.** — *Phys. Rev. C*, 1987, v.36, p.1229.
50. **Jolos R.V., von Brentano P.** — *Phys. Rev. C.*, in press.

51. **Bohr A., Mottelson B.R.** — Nuclear Structure, v.II, Benjamin, New York, 1975.
52. **Bahri C., Draayer J.P., Moszkowski S.A.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.68, p.2133.
53. **Ginocchio J.N.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.436.
54. **Meng J., Sugawara-Tanabe K., Yamaji S. et al.** — Phys. Rev. C, 1998, v.58, p.R632.
55. **Sugawara-Tanabe K., Arima A.** — Phys. Rev. C, 1998, v.58, p.R3065.
56. **Browne E., Singh B.** — Nucl. Data Sheets, 1996, v.79, p.277.