

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.32

PART 5

Six issues per year

DUBNA 2001

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 32

ВЫПУСК 5

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 2001

Главный редактор

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

О.Н.КРОХИН,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

(зам. главного редактора),

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Зав. редакцией А.Н.Графова,

тел. (09621) 6-26-58;

E-mail: peran@jinr.ru

FAX +7(09621)6-73-19

ОИЯИ, «Физика элементарных частиц
и атомного ядра», 2001

УДК 539.12.01

НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ С ИЗМЕНЕНИЕМ АРОМАТА В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ РАСШИРЕНИЯХ С СИНГЛЕТНЫМИ КВАРКАМИ

В.А.Бейлин, Г.М.Верешков, В.И.Кукса

Научно-исследовательский институт физики
Ростовского государственного университета, Ростов-на-Дону

Обзор посвящен феноменологии синглетных кварков (СК), которые являются синглетами группы $SU(2)$, имеют гиперзаряды $Y = -1/3$ и массы $m > m_t$. В области ускорительных энергий эффекты существования СК в основном проявляются в нейтральных токах с изменением аромата (НТИА). Аналогичные процессы в стандартной модели (СМ), имеющие место только на петлевом уровне, рассматриваются как фон для выделения сигналов новой физики. Показано, что экспериментальные данные по редким процессам и соответствующие предсказания СМ допускают привлечение расширений СМ к анализу явлений, обусловленных НТИА. Построена обобщенная матрица смешивания стандартных кварков друг с другом и с СК, получены ограничения на углы смешивания и оценка нижней границы массы СК $m_D \gtrsim 0,5$ ТэВ. Обсуждаются перспективы повышения уровня достоверности гипотезы о существовании СК до их прямого наблюдения. Проанализированы сечения недиагонального рождения СК в паре со стандартным кварком в e^-e^+ -, ep - и $p\bar{p}$ -соударениях, описана уникальная сигнатура таких событий. Кратко обсуждается модель с верхним синглетным кварком с гиперзарядом $Y_U = 2/3$ и ее приложения к физике t -кварка.

The review is devoted to the phenomenology of singlet quarks, which are singlets with respect to the $SU(2)$, have hypercharges $Y = -1/3$ and masses $m > m_t$. In the range of energy, accessible at the present colliders, singlet quark existence mainly manifest itself in flavor changing neutral current (FCNC). The similar processes in the Standard Model (SM), appearing at the loop level only, are considered as being a background for the new physics signals. It is shown, that experimental data on rare processes and the corresponding theoretical predictions of SM allow to invoke the SM extentions for the analysis of the phenomena stimulated by FCNC. The extended matrix of standard and singlet quark mixing is constructed, the restriction on mixing angles and the estimate of the low bound of singlet quark mass $m_D \gtrsim 0.5$ TeV are obtained. Besides the direct observation, the perspectives to increase the confidence level of the singlet quark existence are discussed. The cross-sections of nondiagonal production of singlet quark in pair with standard one in e^-e^+ -, ep - and $p\bar{p}$ -collisions are analysed and the unique signature of such events is described. The model of up-singlet quark with the hypercharge $Y_U = 2/3$ and its applications to the physics of t -quark is also described.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нейтральные токи с изменением аромата (НТИА) — изменение ароматов кварков при излучении фотона, глюона или Z -бозона — представляют

собой редкие, но чрезвычайно важные явления для физики элементарных частиц. В стандартной модели (СМ) эти явления происходят на уровне электро-слабых радиационных поправок, оснащенных КХД-вкладами; тем самым они являются источниками информации о структуре пертурбативной компоненты вакуума СМ на малых пространственно-временных масштабах. Еще более важно, что эффекты НТИА оказываются весьма чувствительными к расширениям СМ — в калибровочном, фермионном и хиггсовском секторах теории. По этим причинам в настоящее время процессам, обусловленным НТИА, придается статус явлений, экспериментальные и теоретические исследования которых могут привести к обнаружению сигналов новой физики за пределами СМ.

Экспериментальные данные по НТИА в основном состоят из измерений относительных вероятностей (в дальнейшем—брэнчингов, от английского термина «branching ratio») некоторых редких лептонных, полулептонных и радиационных каналов распада мезонов, а также параметров смешивания в системах нейтральных мезонов. К сожалению, экспериментальные погрешности пока еще довольно велики, хотя уже позволяют говорить об установленном порядке величин. Большие погрешности обусловлены тем, что экспериментальные измерения редких распадов сводятся к выделению слабых сигналов из сильного фона. Теория НТИА условно состоит из двух разделов. Первый из них относится к разработке методов точного теоретического описания взаимодействий на малых расстояниях в рамках теории возмущений, дополненной процедурами ренормгруппового суммирования и операторных разложений. Второй раздел — анализ непертурбативных эффектов в процессах деадронизации и адронизации начальных и конечных состояний, между которыми и происходит пертурбативное включение НТИА на кварк-глюонном уровне. Решение задач второго типа необходимо для выделения пертурбативных эффектов НТИА из экспериментальных данных, после которого и появляется возможность сопоставления теории с экспериментом. Анализ современного состояния теории и эксперимента в области редких процессов показывает, что в ряде случаев, когда такое выделение удастся провести на контролируемом уровне точности, согласие теоретических предсказаний с экспериментальными данными является не вполне удовлетворительным. Противоречия теории с экспериментом сглаживаются только в случае апелляции к широкому интервалу погрешностей. Отметим, что речь идет не только об экспериментальных погрешностях, но и о погрешностях теоретических расчетов. Последние порождаются как недостаточной информацией о значениях ряда параметров, используемых при вычислениях НТИА, так и некоторой неоднозначностью процедуры фиксации пертурбативных КХД-вкладов.

Краткий анализ экспериментальных данных и предсказаний СМ по редким процессам приводится в разд. 2 настоящего обзора. Разделы 3 и 4 посвящены обсуждению редких процессов в одном из активно обсуждаемых

классов расширений СМ, содержащем, наряду с известными фермионами, дополнительные тяжелые синглетные кварки (СК). Название этих кварков обусловлено тем, что они являются синглетами группы $SU(2)$. Синглетные кварки имеют гиперзаряды $Y = -1/3$ или $2/3$ и массы $m > m_t$. Слабые взаимодействия таких СК есть результат их смешивания со стандартными кварками. Актуальность проблематики СК обусловлена тремя причинами. Во-первых, сигналы о существовании СК, если они будут обнаружены экспериментально, зафиксируют вполне конкретный вариант новой физики за пределами СМ. Во-вторых, на существующих ускорителях систематически изучается обширный класс явлений, способных косвенно свидетельствовать о существовании СК. В-третьих, не исключено, что на ускорителях нового поколения «Tevatron», SLC, LHC появится возможность прямой регистрации СК в продуктах e^-e^+ , $p\bar{p}$ - и $e p$ -соударений.

Синглетные кварки возникают в различных суперсимметричных и других высокоэнергетических расширениях СМ (см., например, [73, 76, 79, 81]). В разд. 3 указаны модели, содержащие СК, и место СК среди других новых частиц, предсказываемых расширениями СМ. В доступной сегодня области ускорительных энергий эффекты существования СК могут проявиться в виде новых, дополнительных к СМ вкладов в НТИА. В моделях с СК эффекты НТИА возникают уже на древесном уровне при смешивании СК с обычными кварками и интерферируют с аналогичными петлевыми процессами СМ. По причине высокой чувствительности редких процессов к дополнительным древесным вкладам появляется принципиальная возможность выделить эффекты, обусловленные существованием СК.

При описании слабых взаимодействий в модели с СК основным инструментом является обобщенная матрица смешивания стандартных кварков друг с другом и с СК. Эта матрица, представляющая собой обобщение матрицы Кобаяши–Маскавы, определяет структуру как заряженных, так и нейтральных токов. Изменения стандартных структур токов зависят от величин углов смешивания СК с обычными кварками и задают отклонения от предсказаний СМ. В разд. 3 показано, что ограничения на углы смешивания в обобщенной матрице удается получить на основе уже существующих экспериментальных данных.

В завершающей части разд. 3 описаны эффективные недиагональные вершины в однопетлевом приближении, которые содержат как вклады СМ, так и дополнительные вклады СК. Особое внимание уделено методам вычислений, не требующим введения симметрично не обусловленных контрчленов.

Систематическому описанию феноменологии СК посвящен разд. 4. Полученные здесь ограничения на дополнительные углы смешивания совместно с предположением о «seesaw»-механизме смешивания позволяют оценить нижнюю границу масс СК: для нижнего $m_D \gtrsim 0,5$ ТэВ, для верхнего $m_U \gtrsim 0,2$ ТэВ. Анализ низкоэнергетических проявлений СК через НТИА

позволил сделать вывод о том, что имеющиеся экспериментальные данные не исключают существования СК и допускают обусловленные ими заметные вклады в редкие процессы. Ожидаемый прогресс в области эксперимента позволяет надеяться, что в ближайшем будущем будет получена надежная оценка уровня достоверности гипотезы о существовании СК до его прямого наблюдения.

Для прогнозирования явлений в области высоких энергий, которые можно будет регистрировать на коллайдерах следующего поколения, существенное значение для их экспериментального обнаружения имеет тот факт, что сигнатуры некоторых процессов, порождаемых СК, качественно отличаются от стандартных. В разд. 4 проанализированы процессы недиагонального рождения синглетных и стандартных кварков в e^-e^+ -, $p\bar{p}$ - и $e p$ -соударениях. Показано, что e^-e^+ - и $p\bar{p}$ -соударения перспективны для наблюдений эффектов существования СК. Описана уникальная сигнатура события рождения СК в паре со стандартным кварком, имеющего наименьший энергетический масштаб из всех событий, в которых СК может наблюдаться непосредственно. Отмечено, что надежная идентификация этого события может быть проведена путем измерений поляризаций, асимметрии вперед-назад и энергетических характеристик адронных струй и лептонных пар.

Интерес к расширениям СМ, содержащим верхний СК, усилился в последнее время в связи с изучением свойств t -кварка. Большая масса последнего обуславливает его заметное смешивание с тяжелым верхним синглетным кварком, что, в свою очередь, приводит к проявлению во взаимодействиях t -кварка некоторых специфических особенностей. В разд. 4, в частности, рассмотрено аномальное усиление tcZ -вершины, которое может быть экспериментально зарегистрировано в реакции рождения недиагональных $\bar{t}c + t\bar{c}$ -пар в области энергий, доступных LEP2. В данном случае речь идет именно о процессе $e^+e^- \rightarrow \bar{t}c + t\bar{c}$ около порога рождения. Эта же особенность может проявиться в величине ширины распада $t \rightarrow cZ$. Анализируется также аномальная структура вершины $t\bar{t}Z$, которая определяет асимметрию вперед-назад.

2. НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ С ИЗМЕНЕНИЕМ АРОМАТА В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

2.1. Физическая природа и статус недиагональных нейтральных токов в стандартной модели. *Нейтральные токи с изменением аромата в стандартной модели возникают при совместном учете смешивания кварков и петлевых вкладов в амплитуды электромагнитных и слабых процессов.* Экспериментальное обнаружение эффектов НТИА имеет большое значение для оценки статуса теоретических концепций, положенных в основу СМ. Как из-

вестно, лагранжиан СМ состоит из четырех секторов: калибровочного, фермионного, хиггсовского и сектора юкавских связей.

Во втором (фермионном) секторе СМ обозначена проблема, выходящая за рамки СМ, но имеющая отношение к теме обзора: *проблема происхождения трех кварк-лептонных поколений и симметрии поколений по отношению к калибровочным взаимодействиям, так называемой фамилионной, или горизонтальной, симметрии*. Сложная группа калибровочной симметрии поколений фермионного сектора лагранжиана состоит из произведения пяти простых групп: трех кварковых и двух лептонных. (Независимым преобразованиям подвергаются правокиральные синглеты $u_{R(a)}$, $d_{R(a)}$, $l_{R(a)}$ и левокиральные $SU(2)$ -дублеты $q_{L(a)}$, $l_{L(a)}$.) В спектре масс кварков и лептонов указанная симметрия поколений сильно нарушена, что сразу свидетельствует о том, что *физический вакуум калибровочной симметрией поколений не обладает*. Теоретическая концепция вакуума вводится в третьем (хиггсовском) секторе СМ: вакуум есть бозе-конденсат голдстоуновских мод, существование которого спонтанно нарушает электрослабую калибровочную симметрию до электромагнитной. Обнаружение возбуждений этого конденсата — хиггсовских бозонов — является, как известно, основной экспериментальной проблемой СМ, решение которой планируется получить в ближайшие 3–5 лет.

Наиболее сложна для интерпретации ситуация в четвертом (юкавском) секторе СМ. Формальное предназначение этого сектора — генерация масс и смешивание фермионов. Происхождение кварк-лептонных поколений и механизм нарушения их калибровочной симметрии до сих пор не ясны. При отсутствии экспериментальных указаний на динамическую реализацию симметрии поколений и спонтанный характер ее нарушения от нее просто отказываются при задании юкавских связей кварков и лептонов с хиггсовскими полями. Наиболее общий вид этих связей допускает произвольный спектр масс и произвольное смешивание фермионов. Соответствующие параметры СМ подбираются из экспериментальных данных. Отметим, что в общем случае (при включении в СМ правокиральных нейтрино) речь идет о смешивании как кварковых, так и лептонных состояний. Преобразование фермионной части лагранжиана к физическому базису оставляет диагональными нейтральные фермионные токи, но делает недиагональными взаимодействия фермионов с заряженными $W^\pm$ -бозонами.

Смешивание в секторе кварков, которые являются существенно дираковскими частицами, обуславливает слабые распады адронов уже на древесном уровне лагранжиана СМ. Однако смешивание кварков необходимо учитывать и на уровне радиационных поправок. Именно в них содержится информация об эффектах поляризации физического вакуума, обладающего ненулевыми зарядами относительно калибровочной симметрии поколений. Следует, впрочем, отметить искусственный и феноменологический характер процедуры на-

деления вакуума этими зарядами в простейших версиях СМ. Поэтому согласие теории с экспериментами, чувствительными к радиационным поправкам, заранее не очевидно.

Выделенный статус редких процессов, порожденных НТИА, обусловлен тем, что для них взаимодействия кварков с поляризованным вакуумом не являются поправками к некоторым процессам, существующим и на древесном уровне. В данном случае сами процессы формируются именно и только петлевыми эффектами взаимодействия с вакуумом. По этой причине редкие процессы следует рассматривать как источник информации о внутренней достаточно нетривиальной структуре вакуума СМ, или — в случае разногласий теории с экспериментом — как источник сигналов новой физики. Важно и то, что редкие процессы весьма чувствительны к расширениям практически любого сектора СМ. В частности, явления, связанные с расширением фермионного сектора, будут обсуждаться в разд. 3 и 4.

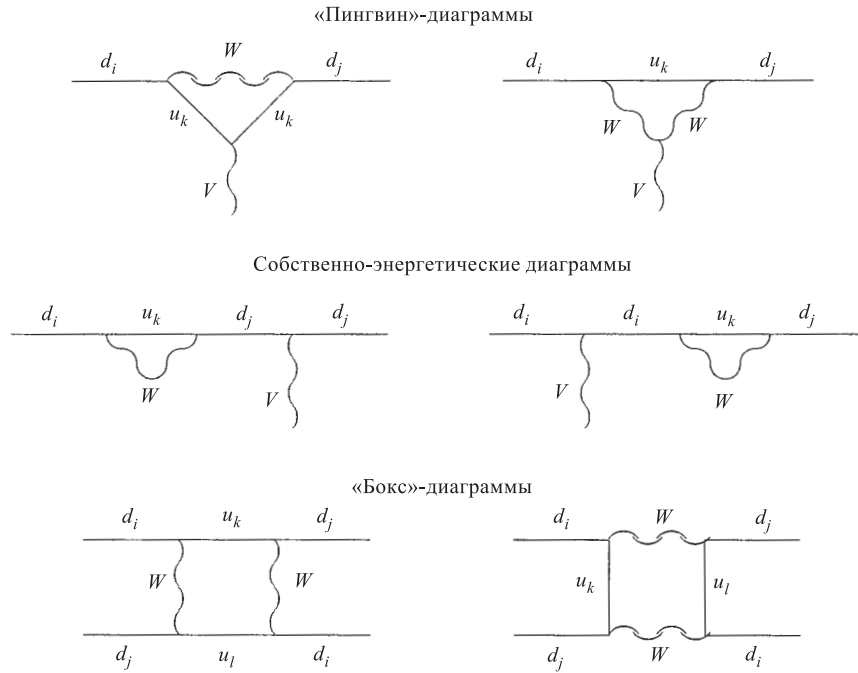


Рис. 1. Однопетлевые диаграммы, порождающие НТИА

В СМ нейтральные переходы с изменением аромата на фундаментальном уровне описываются тремя типами однопетлевых диаграмм (см. рис. 1), получивших стандартные названия «пингвин»-диаграммы (PD); «собственно-

энергетические» диаграммы (SED) и «бокс»-диаграммы (BD). На всех диаграммах $i \neq j$. На всех диаграммах может быть проведена замена $u_i \longleftrightarrow d_i$; при анализе любых физических процессов эти диаграммы учитываются совместно в суперпозициях. (Разделение диаграмм на PD- и SED-классы обусловлено различиями в математических структурах петлевых интегралов.) На диаграммах всех трех типов можно заменить векторные $W^\pm$ - и Z^0 -бозоны, соответственно, на заряженные $H^\pm$ и нейтральные H^0 хиггсовские бозоны. Подчеркнем, что появление хиггсовских бозонов в амплитудах редких процессов явно демонстрирует ранее высказанные утверждения о высокой чувствительности этих процессов к структуре вакуума СМ. Отметим также, что на BD-диаграммах кварковые линии можно заменить на лептонные, правда, в этом случае лептонный блок должен быть диагонален по аромату.

Уже на уровне однопетлевых PD+SED- и BD-диаграмм можно дать практически исчерпывающую классификацию физических процессов, порождаемых НТИА. PD+SED-диаграммы на массовой поверхности при $V = Z^0$ описывают недиагональные распады Z^0 -бозона, при $V = \gamma$ — редкие радиационные распады мезонов $M \rightarrow M'\gamma$. Эти же диаграммы совместно с BD-диаграммой вне массовой поверхности векторной частицы описывают недиагональное рождение пар $q_i\bar{q}_j$ и нейтральные переходы с изменением аромата $q_i \rightarrow q_j$ в e^-e^+ -, $p\bar{p}$ - и $e p$ -столкновениях. BD-диаграммы описывают смешивание в нейтральных системах мезонов $M^0-\bar{M}^0$. Совместно PD+SED- и BD-диаграммы используются при конструировании подпроцессов, соответствующих редким лептонным $M \rightarrow l^+l^-$, полулептонным $M \rightarrow M'l^+l^-$ и нелептонным $M \rightarrow M_1M_2$ распадам мезонов, а также при анализе эффектов CP -нарушения в распадах мезонов.

Интенсивность перечисленных процессов очень мала, что оправдывает их название «редкие процессы». Как правило, брэнчинги редких распадов, протекающих через НТИА, имеют значения в интервале $10^{-6} \div 10^{-12}$. Диаграммы, приведенные на рис. 1, соответствуют редким подпроцессам, происходящим на кварк-лептонном уровне. Расчет этих диаграмм является только первым и, можно сказать, подготовительным этапом теоретического исследования редких процессов. Для описания некоторых редких процессов может оказаться необходимым анализ двухпетлевых недиагональных диаграмм. Пример таких двухпетлевых диаграмм с промежуточным двухфотонным состоянием, имеющих отношение к редким лептонным распадам мезонов, приведен в п. 2.3. Так как во всех редких процессах обязательными участниками являются кварки, то на втором этапе исследования необходимо изучить пертурбативные КХД-поправки (так называемые эффекты малых расстояний — Short Distance, SD-эффекты). Полный же расчет редких процессов, содержащих вклады от диаграмм на рис. 1, предполагает третий этап исследования — учет дополнительных факторов, обеспечивающих перенос результатов на адронный уровень. К числу таких факторов относятся константы рас-

падов, формфакторы переходов, волновые функции мезонов, барионов и пр. Все эти факторы принято называть непертурбативными эффектами больших расстояний (Long Distance, LD-эффекты). На каждом из этапов возникают специфические теоретические проблемы, требующие детального обсуждения.

Некоторые конкретные процессы, наиболее интересные с точки зрения возможностей эксперимента, обсуждаются ниже.

2.2. Недиagonальные однопетлевые диаграммы. Как пример реального адронного процесса, рассмотрим смешивание нейтральных мезонов $M^0 - \bar{M}^0$. Соответствующий подпроцесс $q_i \bar{q}_j \longleftrightarrow \bar{q}_i q_j$ описывается «бокс»-диаграммами (рис. 1) и имеет очень малую амплитуду $\sim G_F^2$. Отсюда следует малость как смешивания, характеризуемого разностью масс Δm тяжелой и легкой компонент, так и связанных с ним осцилляций, которые также относят к редким процессам. Кроме того, диаграммы такого типа определяют не прямое CP -нарушение, а также дают вклад в редкие распады.

Впервые «бокс»-диаграммы были рассчитаны для описания системы $K^0 - \bar{K}^0$ в [1], где для случая нулевых внешних импульсов и малых по сравнению с m_W кварковых масс на внутренних линиях был получен эффективный гамильтониан. Для случая тяжелых ($m_q \sim m_W$) внутренних кварков расчет «бокс»-диаграмм проведен в [2], и соответствующая амплитуда перехода $d\bar{s} \longleftrightarrow \bar{d}s$ имеет достаточно простой вид:

$$F = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k F(x_j x_k). \quad (2.1)$$

Здесь $\lambda_j = U_{js}^* U_{jd}$, U_{ij} — элементы матрицы смешивания Кобаяши–Маскавы; $x_j = m^2(q_j)/m_W^2$; $F(x_j x_k)$ — некоторая вычисляемая функция.

Случай ненулевых внешних импульсов в «бокс»-диаграммах для процессов с тяжелым и легким внутренними кварками рассмотрен в работах [3–5]. Конечные массы внешних кварков учтены также в [6], где проанализирован калибровочно-инвариантный набор «бокс»-диаграмм для произвольной калибровки. При произвольных тяжелых кварках на внутренних и внешних линиях в [7] вычислена амплитуда в квадратурах. Соответствующее выражение не приводится явно, поскольку имеет весьма громоздкий и неудобный для конкретных приложений вид. Имеет смысл также привести точное аналитическое выражение для «бокс»-амплитуды переходов в системе псевдоскалярных мезонов $P^0 \rightarrow \bar{P}^0$ при произвольном импульсе одного из внешних кварков [8]:

$$M_{12} = \frac{G_F^2 m_W^2 B_P f_P^2 M_P}{12\pi^2} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j D(x_i, x_j). \quad (2.2)$$

Здесь, как и выше, $\lambda_i = U_{ih}^* U_{il}$, q_h , q_l — тяжелый и легкий внешние кварки соответственно; M_P — масса мезона $P^0 = q_h \bar{q}_l$; B_P , f_P — «bag»-фактор и

константа распада мезона P^0 . Явный вид $D(x_i, x_j)$ в квадратурах приведен в [5], а точное аналитическое выражение содержится в [8]. Ввиду его громоздкости приведем лишь выражение для последнего в приближении нулевых внешних импульсов при $x_i \ll 1$:

$$\begin{aligned} D(x_i, x_i) &\approx -\frac{3}{2} \left(\frac{x_i}{x_i - 1} \right)^3 \ln x_i - \frac{x_i}{4} \left[1 - \frac{9}{x_i - 1} - \frac{6}{(x_i - 1)^2} \right], \\ D(x_i, x_j) &\approx -\frac{x_i}{4} \left[1 - \frac{6}{x_i - 1} - \frac{3}{(x_i - 1)^2} \right] \ln x_i - \frac{3}{4} \frac{x_i x_j}{x_j - 1} + x_j \ln x_j, \\ D(x_j, x_j) &\approx x_j. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Последняя формула применима для расчета расщепления масс в системах $K^0-\bar{K}^0$ и $B^0-\bar{B}^0$. Для системы $D^0-\bar{D}^0$ следует учесть, что $m_c \gg m_s, m_d$ и $m_c \sim m_b$. В результате для $D(x_i, x_j)$ находим при $i = j = b$ [9]:

$$\begin{aligned} D(m_b) &= I_1^b + \frac{5}{8} I_2^b m_D^2, \\ I_1^b &= \frac{m_b^2}{2m_W^2} + \frac{m_c^2}{6m_W^2} \ln \frac{m_b^2}{m_c^2} - \frac{m_c^2}{6m_W^2}, \quad I_2^b = \frac{1}{3} m_W^2 \ln \frac{m_b^2}{m_c^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

На малых расстояниях «бокс»-диаграммы дают вклад как в расщепление масс Δm , так и в не прямое CP -нарушение. В частности, для $K^0-\bar{K}^0$ -системы $\Delta m_{SD} \approx 2\text{Re}(M_{12})$, а параметр CP -нарушения $\epsilon \sim \text{Im}(M_{12})/\text{Re}(M_{12})$, причем в модели Кобаяши–Маскавы он фиксируется величиной фазы.

Нужно отметить, что нахождение точных вкладов «бокс»-диаграмм в реальные физические процессы обычно представляет собой достаточно громоздкую вычислительную задачу, однако уже приведенные выше результаты показывают ее принципиальную выполнимость. Нетрудно убедиться в отсутствии расходимостей в таких диаграммах, поэтому в конкретных реакциях сумма «бокс»-вкладов является конечным выражением, для которого можно получить различные приближения в зависимости от процесса.

Вычисление BD+SED-диаграмм, приведенных на рис. 1, представляется более сложным, поскольку в этом случае необходимо тщательно проконтролировать сокращение расходимостей. В течение последних двух десятилетий расчет эффективных НТИА-вершин был проведен многими авторами с различной степенью точности. До начала 80-х годов были известны лишь приближенные вычисления этих вершин — в пренебрежении массами внешних кварков, внешними импульсами, и при учете только ведущих членов $\sim m_q/m_W$. Естественно, при этом исследовались и методологические аспекты таких вычислений. Первый детальный расчет и анализ эффективных вершин такого типа был проведен в работе [2] в приближении тяжелых внутренних линий.

Поскольку $m_t \gg m_s, m_b$, полученные результаты применимы практически ко всем процессам с участием K^- , B_d^- , B_s^- -мезонов и используются до настоящего времени, тем более что найденные формулы оказались компактными и удобными для расчетов.

На основе этих выражений для эффективных вершин были построены низкоэнергетические эффективные лагранжианы, описывающие распады $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$, $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$ и смешивание $K^0 - \bar{K}^0$. В работах [10–12] был осуществлен полный расчет эффективных вершин $\gamma q_i q_j$ и $G q_i q_j$ вне массовой поверхности в калибровке 'т Хофта–Фейнмана. При этом также была проанализирована процедура перенормировки и ее связь с выполнением тождеств Уорда–Такахаши для вершины с фотоном и тождеств Славнова–Тейлора для эффективной вершины с глюоном (или Z -бозоном). Структура полученных выражений довольно громоздка, поэтому авторами, как и в [2], было рассмотрено приближение тяжелых внутренних кварков. В дальнейшем полный анализ в квадратурах эффективных вершин $\gamma q_i q_j$ и $Z q_i q_j$ вне массовой поверхности проводился в работе [13]. В этом случае также использовалась калибровка 'т Хофта–Фейнмана. Для контроля результатов использовались тождества Уорда–Такахаши и Славнова–Тейлора (далее будем обозначать их УТСТ-тождества), причем показано точное сокращение расходимостей на массовой поверхности. Изучение аналитических выражений для эффективных вершин и их структуры продолжалось в [14], где дополнительно рассматривалось приближение тяжелых кварков на внутренних линиях. Аналогичные вычисления были проведены в [15], однако при этом выбиралась несколько иная аппроксимация, поэтому ответы не совпали. Важный результат был получен в [16], где прямым расчетом было доказано утверждение о том, что непосредственной причиной расхождения получаемых результатов может явиться выбор так называемой γ_5 -дефиниции, т.е. коммутационных свойств γ_5 и γ_i в n -мерном пространстве при использовании процедуры размерной регуляризации. В частности, обнаружено, что при расчете $Z b \bar{s}$ -вершины на массовой поверхности расхождение между результатами, полученными в рамках «наивной» схемы и схемы Брайтенлонера–Мэйзона (БМ-схемы), составляет около 43 %. При этом оказывается, что тождество Уорда–Такахаши выполняется лишь в «наивной» схеме. В силу этих причин ясно, что вопрос о выборе γ_5 -дефиниции при расчете эффективных вершин является весьма важным, как и всесторонняя проверка результатов вычислений.

Эти соображения использованы в работе [17], где изложена некоторая аргументация в пользу «наивной» схемы. Предпочтение такой схеме отдается в рамках обобщения бинарной структуры представлений полной группы Пуанкаре на случай n -мерного пространства и определения γ_5 -матрицы как компоненты оператора проектирования $\gamma_5 \Psi_{\pm} = \pm \Psi_{\pm}$. Отметим, что все ранее известные расчеты эффективных вершин проводились в нефизических калибровках, а это резко увеличивает число рассматриваемых диаграмм даже

в однопетлевом приближении. Вычисления же в [17] проведены в унитарной калибровке, и это, с одной стороны, уменьшает число учитываемых диаграмм (особенно существенным это может стать при работе в расширениях СМ), а с другой — в унитарной калибровке заметно упрощается структура УТСТ-тождеств. В последнем случае не требуется ренормировки вершин, и тождество проверяется непосредственно, причем выполняется оно независимо как для конечных, так и для расходящихся частей. Важно также и то, что вследствие компенсации ведущих членов на начальной стадии вычислений степень импульсной расходимости оказывается не намного выше, чем при использовании нефизических калибровок. Еще одним аргументом в пользу проведения расчетов эффективных вершин в унитарной калибровке послужила необходимость тщательной независимой проверки ранее полученных в СМ результатов.

В [17] получены точные выражения в квадратурах для вершин $Vq_i\bar{q}_j$, $V = \gamma, G, Z$. Для вершин $\gamma q_i\bar{q}_j$ и $Gq_i\bar{q}_j$ предложены удобные аппроксимации в приближении малых масс внешних кварков $m_{i,j} \ll m_W$. Во втором приближении по параметрам $\beta_{i,j} = m_{i,j}^2/m_W^2$ (первое приближение зануляется точно) эффективная вершина $\gamma q_i q_j$ имеет вид [17]:

$$\Gamma_\gamma^\mu(\beta) = \frac{eg^2 A_{ij}^k}{9 \cdot 2^7 \pi^2} \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{m_W} (\sqrt{\beta_i} R + \sqrt{\beta_j} L) A_\gamma(x_k), \quad (2.5)$$

$$A_\gamma(x_k) = 3x_k \left[\frac{7 - 5x_k - 8x_k^2}{(x_k - 1)^3} + \frac{6x_k(3x_k - 2)}{(x_k - 1)^4} \ln x_k \right] + A_\gamma(0), \quad (2.6)$$

где $x_k = m_k^2/m_W^2$, $k = u, c, t$; $A_{ij}^k = U_{kj}^* U_{ki}$; $A_\gamma(0) = 46$ — ГИМ-независимая часть, в рамках СМ не вносящая вклада в НТИА. Для полной глюонной вершины $Gq_i q_j$ аналогично находится выражение

$$\Gamma_G^\mu(\beta) = \frac{g_s g^2 A_{ij}^k}{3 \cdot 2^8 \pi^2} \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{m_W} (\sqrt{\beta_i} R + \sqrt{\beta_j} L) A_G(x_k) \lambda_n. \quad (2.7)$$

Здесь

$$A_G(x_k) = 3x_k \left[\frac{2 + 5x_k - x_k^2}{(x_k - 1)^3} - \frac{6x_k}{(x_k - 1)^4} \ln x_k \right].$$

Выражения (2.5) и (2.7) для эффективных вершин на массовой поверхности в унитарной калибровке совпадают с найденными ранее в фейнмановской и R_ξ -калибровках. Таким образом, расчеты в унитарной калибровке, помимо того, что они являются независимым тестом на правильность известных результатов, демонстрируют определенное техническое преимущество перед вычислениями в нефизических калибровках (детали приводятся в работе [17]).

Нужно отметить, что определенный интерес вызывают и НТИА, индуцируемые петлями и вершинами с участием хиггсовского бозона. Вершины типа bsH рассмотрены в работах [18–22], причем в последней работе также проанализированы результаты различных γ_5 -дефиниций и показано, что при корректном учете киральностей фермионов результаты для «наивной» и БМ-схем совпадают. Проиллюстрируем эффект хиггсовской частицы в НТИА, приведя полученное в [18] простое выражение для bsH -вершины в приближении $m_t, m_W \gg m_b, m_s$:

$$\Gamma(bsH) \approx \frac{3}{256\pi^2} g^3 U_{ts}^* U_{tb} (m_b m_t^2 / m_W^3) \bar{s}(1 + \gamma_5)b. \quad (2.8)$$

Поиск сигналов присутствия виртуального хиггсовского бозона в редких распадах B -мезонов, возможно, имеет некоторые перспективы.

2.3. Редкие распады мезонов

2.3.1. *Редкие лептонные распады.* Среди редких лептонных распадов мезонов выделен распад $K_L \rightarrow \mu^- \mu^+$, хорошо изученный экспериментально [23]:

$$Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{exp}} = (7,15 \pm 0,16) \cdot 10^{-9}. \quad (2.9)$$

Формирование конечного состояния в этом распаде следует обсуждать с учетом существования канала $K_L \rightarrow 2\gamma$, имеющего существенно большую относительную вероятность: $Br(K_L \rightarrow 2\gamma) = (5,92 \pm 0,15) \cdot 10^{-4}$. Действительно, лептонная пара может возникать как за счет эффекта НТИА (PD+SED- и BD-диаграммы, оснащенные КХД-вкладами), так и через промежуточные состояния, содержащие и реальные, $K_L \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-$, и виртуальные, $K_L \rightarrow \gamma^* \gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^-$, фотоны. Проблемы теоретического анализа этого явления возникают вследствие того, что промежуточные состояния формируются как на малых, так и на больших расстояниях.

Амплитуда обсуждаемого процесса содержит пять различных вкладов:

$$A(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-) = A_{R(\text{SD})}^{(0)} + A_{R(\text{SD})}^{(2\gamma^*)} + A_{R(\text{LD})}^{(2\gamma^*)} + i(A_{I(\text{SD})}^{(2\gamma)} + A_{I(\text{LD})}^{(2\gamma)}).$$

Здесь $A_{R(\text{SD})}^{(0)}$ — эффекты НТИА, описываемые PD+SED- и BD-диаграммами (рис. 2), оснащенные КХД-поправками (рис. 4); $A_{R(\text{SD})}^{(2\gamma^*)}$, $A_{I(\text{SD})}^{(2\gamma)}$ — реальная и мнимая части амплитуды, соответствующие промежуточным двухфотонным состояниям, возникающим на малых расстояниях за счет двухпетлевых эффектов (рис. 3); $A_{R(\text{SD})}^{(2\gamma^*)}$, $A_{I(\text{SD})}^{(2\gamma)}$ — аналогичные амплитуды, описывающие эффекты взаимодействий на больших расстояниях.

Теоретический анализ SD-вкладов позволил, во-первых, вычислить эффекты НТИА с КХД-поправками [24]:

$$A_{R(\text{SD})}^{(0)} \sim Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{theor}}^{\text{SD}(0)} = (1,2 \pm 0,6) \cdot 10^{-9}, \quad (2.10)$$

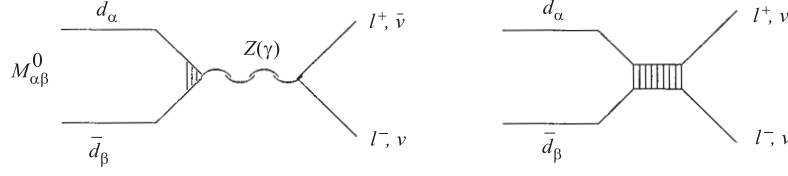


Рис. 2. Вклад PD+SED- и BD-диаграмм в редкие лептонные распады $M^0(d_\alpha \bar{d}_\beta) \rightarrow l^+ l^-, \nu \bar{\nu}$

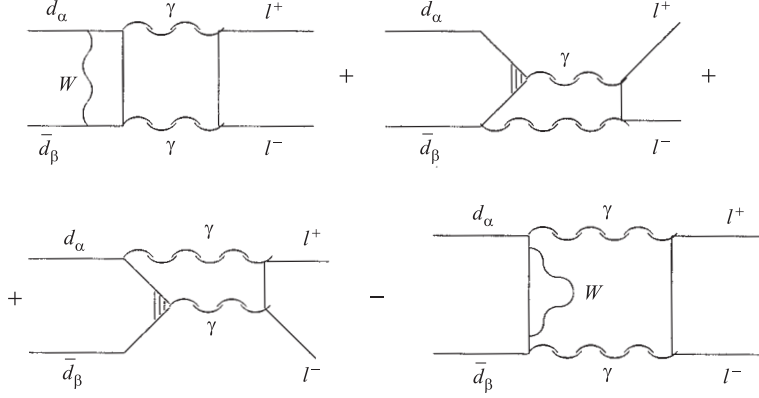


Рис. 3. Двухпетлевые диаграммы с промежуточным двухфотонным состоянием в переходе $d_\alpha \bar{d}_\beta \rightarrow \mu^+ \mu^-$

и, во-вторых, провести оценку двухпетлевых эффектов, изображенных на рис. 3. Величина $A_{R(SD)}^{2\gamma^*}$ оказалась малой ($\sim 10\%$) по сравнению с вкладами однопетлевых PD+SED- и BD-диаграмм; с учетом погрешности теоретического прогноза (2.10) ее можно исключить из обсуждения. Теория также надежно контролирует вклад суммарной абсорбционной части [25, 26]:

$$|A_{I(SD)}^{2\gamma} + A_{I(LD)}^{2\gamma}|^2 \sim Br(K_L \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-), \quad (2.11)$$

$$\frac{Br(K_L \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{Br(K_L \rightarrow \gamma\gamma)} = \alpha^2 \left(\frac{m_\mu}{m_K} \right)^2 \frac{1}{2\beta} \ln^2 \frac{1+\beta}{1-\beta},$$

где $\beta = (1 - 4m_\mu^2/m_K^2)^{1/2}$. Из соотношения (2.11) получается так называемый унитарный предел — ограничение снизу на относительную вероятность редкого лептонного распада:

$$Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{unit}} \gtrsim Br(K_L \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (7,07 \pm 0,18) \cdot 10^{-9}. \quad (2.12)$$

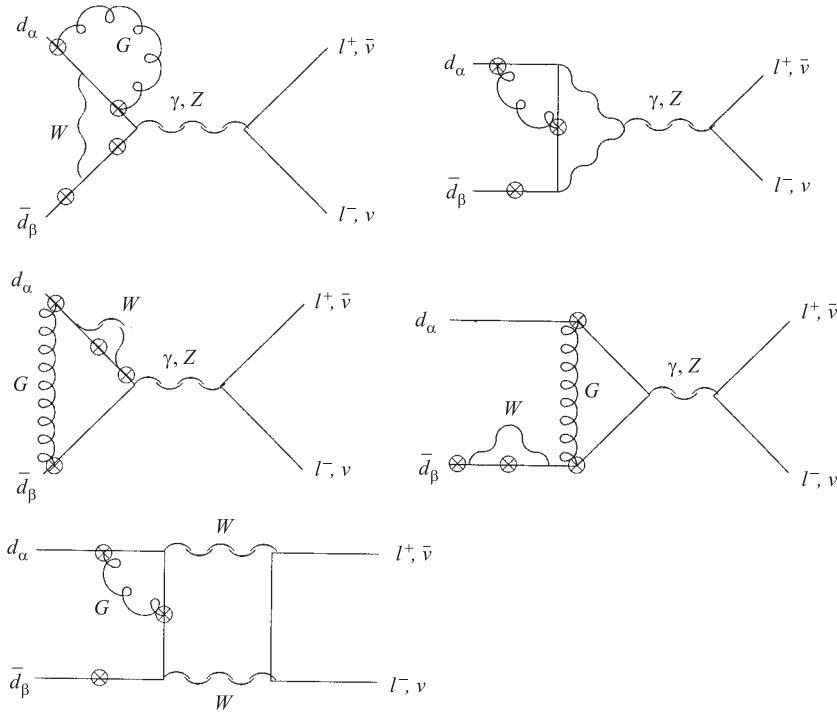


Рис. 4. КХД-поправки к недиагональным PD+SED- и BD-диаграммам в переходах $d_\alpha \bar{d}_\beta \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Сравнение (2.12) с экспериментальными данными (2.9) позволяет зафиксировать суммарный вклад реальной части амплитуды

$$Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_R = (0,13_{-0,13}^{+0,68}) \cdot 10^{-9}. \quad (2.13)$$

Ограничение сверху на величину (2.13) удастся получить непосредственно из экспериментальных данных [27]:

$$Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_R < 0,56 \cdot 10^{-9}. \quad (2.14)$$

Оценки (2.13), (2.14), полученные совершенно различными способами, тем не менее хорошо согласуются друг с другом; поэтому имеются основания утверждать, что величина дисперсионного вклада в обсуждаемый редкий распад известна достаточно надежно. Проблема, однако, состоит в том, чтобы выделить из (2.13) вклад НТИА. Чисто экспериментальным методом этого сделать не удастся. Если положиться на теоретическую оценку эффекта НТИА (2.10), то из (2.13) следует, что дисперсионная часть амплитуды формируется за счет деструктивной интерференции SD- и LD-вкладов — только в

этом случае предсказание СМ будет согласовываться с экспериментом. Более того, предположение о деструктивной интерференции без независимого анализа дисперсионного LD-вклада приводит к потере вообще каких-либо ориентиров относительно величины дисперсионного SD-вклада. С учетом этого обстоятельства в [28] предпринята попытка теоретического анализа дисперсионного LD-вклада с учетом полюсного и вектор-доминантного механизмов формирования промежуточного двухфотонного состояния. В результате в рамках предположения о деструктивной интерференции получено ограничение сверху на SD-вклад эффектов НТИА:

$$Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{SD}^{(0)} < 2,8 \cdot 10^{-9}, \quad (2.15)$$

что согласуется с теоретическим прогнозом (2.10).

Как видно из изложенного, ситуация с редким лептонным распадом $K_L \rightarrow \mu^- \mu^+$ не позволяет пока надежно зафиксировать эффект НТИА по экспериментальным данным и тем самым прецизионно протестировать СМ. Дальнейший прогресс требует не только уточнения экспериментальных данных, но и решения сложных теоретических вопросов об оценке дисперсионного LD-вклада и характере его интерференции с SD-вкладом.

Кратко опишем технологию теоретических расчетов эффектов НТИА в редких лептонных распадах. Основной вклад взаимодействий на малых расстояниях в эти процессы изображается диаграммами на рис. 2, где заштрихованные треугольник и четырехугольник обозначают, соответственно, PD+SED- и BD-диаграммы, оснащенные КХД-поправками.

Второй класс эффектов взаимодействий на малых расстояниях приводит к пертурбативному формированию промежуточного двухфотонного состояния [29]; соответствующие диаграммы изображены на рис. 3.

Разумеется, для описания распадов на адронном уровне необходимо составлять суперпозиции диаграмм для $M_{\alpha\beta}^0$ и $\bar{M}_{\alpha\beta}^0$, соответствующие тяжелой и легкой компонентам M^0 – $\bar{M}^0$ -системы.

Сравнительный анализ вкладов процессов, изображенных на рис. 2 и 3, без учета КХД-поправок проведен в [29], где, в частности, установлено, что на малых расстояниях доминируют взаимодействия, приводящие к промежуточному состоянию, состоящему из двух реальных фотонов. Отметим, однако, что с точки зрения проверки предсказаний СМ основной интерес представляют диаграммы, изображенные на рис. 2. Что же касается промежуточного двухфотонного состояния, то, как было показано выше, его количественный вклад удастся выразить через экспериментальные данные.

Поддиаграммный анализ КХД-поправок к интересующим нас процессам на рис. 2 проводился в работах [30, 31]; пять из двадцати четырех рассчитанных диаграмм изображены на рис. 4.

Кружки с крестами на кварковых линиях обозначают места возможных попарных соединений с глюонными линиями; на рис. 4 для иллюстрации выбраны произвольные пары таких мест. Анализ изображенных здесь КХД-вкладов получил развитие в работах [32–34]; в [35] дан обзор результатов. Эффективный гамильтониан, используемый для расчета SD-вкладов в редкий лептонный распад K_L -мезонов, имеет вид

$$H_{\text{eff}}(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{SD}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{2\alpha}{\pi \sin^2 \theta_W} (U_{cs}^* U_{cd} Y_{NL}(x_c) + \\ + U_{ts}^* U_{td} Y(x_t)) \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{\mu}_L \gamma^\mu \mu_L + \text{h.c.}, \quad (2.16)$$

где $x_{c,t} = m_{c,t}^2/m_W^2$. Вся информация об однопетлевых недиагональных вершинах и КХД-вкладах собрана в функциях $Y(x_t)$ и $Y_{NL}(x_c)$, явный вид которых приведен в [35]. КХД-поправки к вершинам, содержащим t -кварк, оказались малыми (порядка 1 %) из-за малости $\alpha_s(m_t)$; для их анализа достаточно использовать приближение лидирующих логарифмов. Напротив, КХД-вклады в вершины, содержащие c -кварк, весьма велики (порядка 200 %); их анализ проводится с учетом нелидирующих логарифмов и двухпетлевых выражений для хромодинамической константы связи. Отметим, что описанная ситуация является общей для всех редких процессов: КХД-вклады в вершины, содержащие c - и более легкие кварки, всегда оказываются существенными. В [35] проведен анализ и выписаны в явном виде эффективные гамильтонианы и для других редких распадов мезонов $K_L \rightarrow \nu \bar{\nu}$, $B_d \rightarrow l^+ l^-$, $B_s \rightarrow l^+ l^-$. Эти распады, однако, пока находятся за пределами возможностей эксперимента.

2.3.2. Редкие полулептонные распады. К настоящему времени основные экспериментальные результаты по редким полулептонным распадам получены для распадов K - и B -мезонов. Для сопоставления эксперимента с теорией наибольшее внимание привлекает распад $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$, относительная вероятность которого была недавно измерена [23]:

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})_{\text{exp}} = (1,5_{-1,2}^{+3,4}) \cdot 10^{-10}. \quad (2.17)$$

С точки зрения теории специфика этого распада состоит в том, что величина брэнчинга (2.17) практически полностью определяется эффектами взаимодействий на малых расстояниях. Действительно, в распаде $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ рождение нейтрино-антинейтринных пар заведомо происходит на очень малых расстояниях (в этом отличие обсуждаемого процесса от других редких полулептонных распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$, $\pi^+ \mu^+ \mu^-$). В этой ситуации есть основания ожидать, что вклад больших расстояний параметризуется фактором слабого распада, который, будучи одним и тем же для основных и редких каналов, сокращается в выражении для относительной вероятности.

Теория, обзор которой будет приведен ниже, предсказывает следующую величину брэнчинга [35]:

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})_{\text{theor}} = (0,82 \pm 0,32) \cdot 10^{-10}. \quad (2.18)$$

Как видно из (2.17) и (2.18), в пределах погрешностей теория не противоречит эксперименту. Можно, однако, отметить, что в экспериментальных данных явно прослеживается тенденция к превышению теоретического предсказания. Если эта тенденция при более точных измерениях станет экспериментальным фактом, то тогда можно будет говорить о сигнале новой физики, находящейся за рамками однодублетной версии СМ.

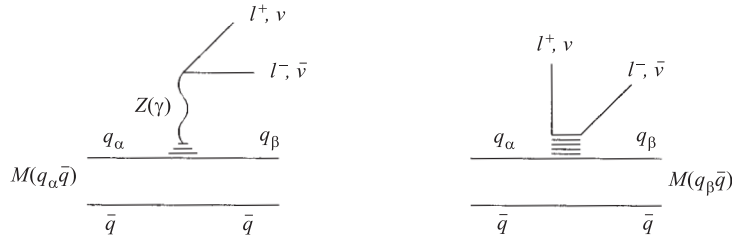


Рис. 5. Вклад PD+SED- и BD-диаграмм в распад $M(q_\alpha q) \rightarrow M(q_\beta q) l^+ l^-, (\nu \bar{\nu})$

Как уже отмечалось, в брэнчинг редкого полулептонного распада доминирующий вклад дают взаимодействия на малых расстояниях. Без учета КХД-поправок этот распад описывается диаграммами, изображенными на рис. 5, где заштрихованным треугольником и прямоугольником обозначены, соответственно, PD+SED- и BD-диаграммы.

Несвязанная кварковая линия соответствует так называемому спектаторному кварку. Специфика КХД-поправок к обсуждаемому процессу состоит в том, что эти поправки не только оснащают PD+SED- и BD-диаграммы (как это имело место в распаде $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$), но и описывают корреляцию спектаторного кварка с кварками, участвующими в НТИА. Самый простой подход к оценке КХД-вкладов — их поддиаграммный анализ; более строгий подход предполагает использование операторных разложений и ренормгрупповое ресуммирование высших глюонных поправок. Для редких полулептонных процессов базис операторного разложения довольно громоздок, так как он содержит, наряду с кварками, формирующими НТИА, еще и спектаторные кварки. Поэтому первый шаг разумно все же сделать в рамках анализа конкретных диаграмм. Такие диаграммы изображены на рис. 6, где явно показаны только спектаторные поправки, а все прочие возможные поправки получаются из приведенных диаграмм при попарном соединении глюонными линиями точек, обозначенных крестиками.

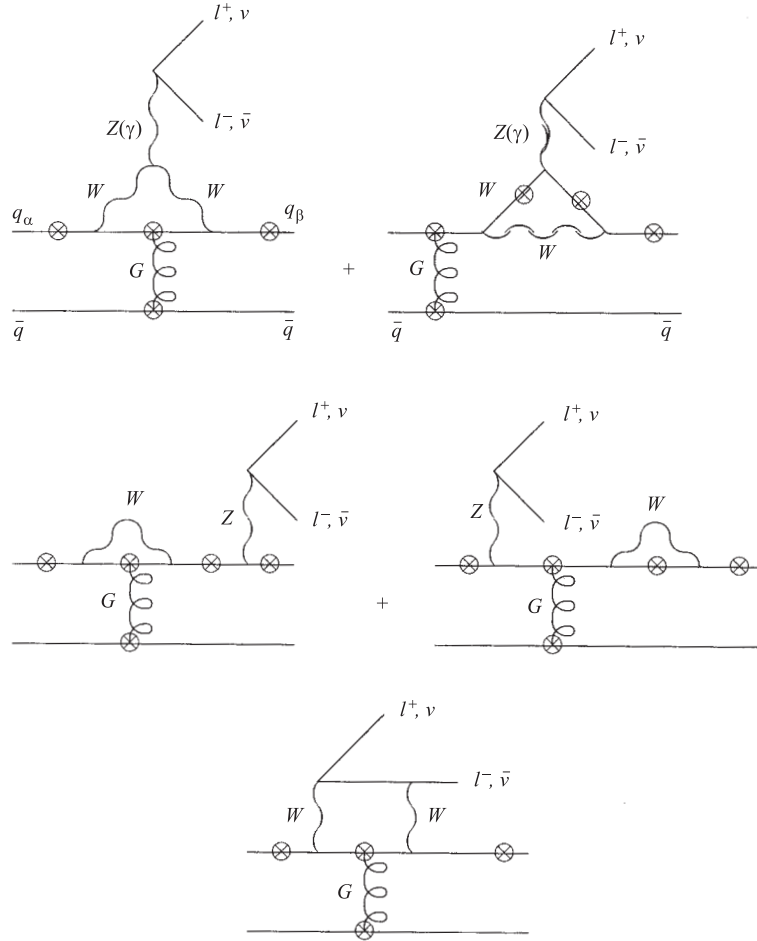


Рис. 6. Спектаторные КХД-поправки к SD-вкладам в распад $M(q_\alpha q) \rightarrow M(q_\beta q) l^+ l^-$, $(\nu \bar{\nu})$

Отметим, что в обсуждаемом случае мы имеем дело с суперпозицией КХД-поправок к недиагональным вершинам и корреляционных КХД-поправок. Учет корреляций со спектаторным кварком означает переход от описания элементарного кваркового подпроцесса $q_\alpha \rightarrow q_\beta l^+ l^-$ к описанию инклюзивного процесса на мезонном уровне: $M(q_\alpha q) \rightarrow X(q_\beta q) l^+ l^-$.

Расчет диаграмм, приведенных на рис.5 и 6, проводился в работах [30–35]; соответствующие низкоэнергетические эффективные гамильтонианы с учетом КХД-вкладов приведены в [35]. В частности, для распада

$K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ эффективный гамильтониан имеет вид

$$H_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{2\alpha}{\pi \sin^2 \Theta_W} \sum_{l=e,\mu,\tau} (U_{cs}^* U_{cd} X_{NL}^l(x_c) + U_{ts}^* U_{td} X(x_t)) \times \\ \times \bar{s} \gamma^\mu d_L \cdot \bar{\nu}^l \gamma^\mu \nu^l, \quad (2.19)$$

где $x_{c,t} = m_{c,t}^2/m_W^2$, а функции $X_{NL}^l(x_c)$ и $X(x_t)$ содержат КХД-вклады, которыми оснащаются PD+SED- и BD-диаграммы, а также учитывают дополнительные эффекты взаимодействий со спектаторным кварком. Последнее приводит к отличиям этих функций от аналогичных функций $Y_{NL}(x_c)$ и $Y(x_t)$, фигурирующих в эффективном гамильтониане (2.16) редкого лептонного распада. Явный вид этих функций содержится в [35].

Вычисления брэнчинга с использованием эффективного гамильтониана (2.19) позволили выяснить относительную роль недиагональных переходов через кварки различных ароматов и, кроме того, роль КХД-эффектов. На уровне электрослабых диаграмм, указанных на рис. 5, выясняется, что подавляющий вклад дают переходы через t -кварк (члены эффективного гамильтониана, пропорциональные $X(x_t)$). КХД-поправки несколько сглаживают ситуацию: к доминирующей вершине поправки малы (порядка нескольких процентов, что связано с малостью $\alpha_s(m_t)$); а к недоминирующей, которая пропорциональна X_{NL}^l и описывает переходы через c -кварк, они велики — порядка 100 %. В результате полный вклад от недоминирующей вершины в суммарный брэнчинг оказывается порядка 10 %. Численное теоретическое значение брэнчинга и перспективы его сравнения с экспериментом уже обсуждались выше. Добавим также, что определенный интерес представляет теоретическое ограничение, основанное на информации об элементах матрицы Кобаяши–Маскавы, извлекаемой из экспериментальных данных по осцилляциям B -мезонов — $\Delta M(B_d)$ и $\Delta M(B_s)$. В [35] получена оценка сверху

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})_{\text{theor}} \leq 1,67 \cdot 10^{-10}, \quad (2.20)$$

причем для центральных значений входящих в расчет параметров число 1,67 заменяется на 0,94, т.е. полученная оценка близка к результату (2.18). Это ограничение достаточно жесткое, чтобы допустить в будущем возможность конфликта с СМ, если дальнейшие измерения покажут, что $Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})_{\text{exp}} \geq 2 \cdot 10^{-10}$.

Кратко прокомментируем ситуацию с распадами $K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}, \pi^0 e^+ e^-$, $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$. Экспериментальные ограничения на относительную вероятность первого из этих распадов являются не очень жесткими [23]: $Br(K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu})_{\text{exp}} \leq 5,9 \cdot 10^{-7}$. Теоретические оценки дают значения на несколько порядков ниже: $Br(K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu})_{\text{theor}} = (3,1 \pm 1,3) \cdot 10^{-11}$. Это значение получено как результат непосредственного вычисления с использованием эффективного гамильтониана, учитывающего КХД-поправки и разброс в значениях

матричных элементов смешивания. Оценка сверху $Br(K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu})_{\text{theor}} < 6,7 \cdot 10^{-11}$ получается при учете дополнительной информации об углах смешивания, извлекаемой из экспериментальных данных по осцилляциям B -мезонов. Как видим, этот распад пока не актуален для сопоставления теории с экспериментом. Используя данные о параметрах CP -нарушения ϵ'/ϵ и $Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ для этого же распада, можно получить несколько худшую теоретическую оценку сверху, а для распада $K_L^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ найдено [27]: $Br(K_L^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-)_{\text{theor}} \leq 3,6 \cdot 10^{-11}$. Экспериментальная граница в этом случае лежит на два порядка выше: $Br(K_L^0 \rightarrow \pi^0 e^+ e^-)_{\text{exp}} < 4,3 \cdot 10^{-9}$, что также пока не дает возможности для проверки теории при ее сравнении с экспериментом.

Редкие полулептонные распады K^+ -мезонов с образованием пары заряженных лептонов изучены достаточно хорошо [23]:

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-)_{\text{exp}} = (2,88 \pm 0,13) \cdot 10^{-7},$$

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-)_{\text{exp}} = (7,6 \pm 2,1) \cdot 10^{-8}.$$

Однако использовать эти данные для сопоставления с теоретическими расчетами SD-эффектов НТИА представляется проблематичным. Дело в том, что образование заряженной лептонной пары происходит в том числе и через виртуальный фотон, который может сформироваться за счет непертурбативных эффектов взаимодействий на больших расстояниях. Излучение виртуальных фотонов может происходить в процессах деадронизации начального и адронизации конечного состояний, поэтому этот тип непертурбативных эффектов не исключается из выражений для брэнчингов путем сокращения формфакторов.

Наряду с распадом $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ хорошие перспективы для исследования НТИА предоставляют редкие полулептонные распады B -мезонов. Экспериментальное ограничение на полный брэнчинг инклюзивных распадов [36] выглядит оптимистично в сравнении с теоретическим предсказанием [37]:

$$Br(B \rightarrow X_S \nu \bar{\nu})_{\text{exp}} < 1,0 \cdot 10^{-3}, \quad Br(B \rightarrow X_S \nu \bar{\nu})_{\text{theor}} \leq 3,9 \cdot 10^{-4}.$$

Еще более удобными для исследования являются каналы распада тяжелых B -мезонов с образованием пары заряженных лептонов. Здесь, в отличие от аналогичных распадов легких K -мезонов, выделение пертурбативных эффектов в НТИА обеспечивается относительно малым значением $\alpha_s(m_b)$. Приведем экспериментальные [23] и теоретические [36, 38] результаты для инклюзивного канала:

$$Br(b \rightarrow se^+ e^-)_{\text{exp}} < 5,7 \cdot 10^{-5}, \quad Br(b \rightarrow se^+ e^-)_{\text{theor}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$$

и двух эксклюзивных распадов:

$$Br(B \rightarrow K^*(892)e^+ e^-)_{\text{exp}} < 2,9 \cdot 10^{-4},$$

$$Br(B \rightarrow K^*(892)e^+e^-)_{\text{theor}} \approx 5 \cdot 10^{-6},$$

$$Br(B \rightarrow Ke^+e^-)_{\text{exp}} < 6 \cdot 10^{-5}, \quad Br(B \rightarrow Ke^+e^-)_{\text{theor}} \approx 10^{-6}.$$

Обратим внимание, что в инклюзивном канале экспериментальное ограничение вплотную подошло к теоретической оценке, поэтому после уточнения экспериментальных данных по эксклюзивным процессам появится возможность детального сопоставления теории с экспериментом. Естественно, в этой ситуации появляются повышенные требования к теории. Используемая сегодня технология теоретических расчетов редких распадов B -мезонов включает вычисление эффективного гамильтониана (для учета SD-вкладов) и вычисления формфакторов переходов из мезонного состояния в кварковые (для аккумуляции LD-вкладов в расчетах эксклюзивных каналов). Построение эффективного гамильтониана осуществляется на основе разложения амплитуды процесса по локальным кварковым операторам, а вычисления формфакторов переходов проводятся как на основе релятивистской модели конститuentных кварков, так и с привлечением метода КХД-правил сумм и эффективной теории «heavy quark expansion» [39–42].

2.3.3. Радиационные распады. Среди множества радиационных распадов наибольшее внимание привлекают распады B -мезонов. Только для этих распадов имеются конкретные экспериментальные данные, причем как для инклюзивного распада ($Br(B \rightarrow X_s\gamma) \approx Br(b \rightarrow s\gamma)$) [43]:

$$Br(b \rightarrow s\gamma)_{\text{exp}} = (3,11 \pm 0,80 \text{ стат.} \pm 0,72 \text{ сист.}) \cdot 10^{-4}, \quad (2.21)$$

так и для эксклюзивного канала [44]:

$$Br(B \rightarrow K^*(892)\gamma)_{\text{exp}} = (4,3_{-1,0}^{+1,1} \pm 0,35) \cdot 10^{-5}. \quad (2.22)$$

Нетривиальное свойство радиационных распадов B -мезонов, осложняющее их теоретический анализ, состоит в том, что в разрешенной области кинематических переменных фотона имеется J/Ψ -резонанс. По этой причине необходим полный учет эффектов векторной доминантности в формировании радиационного перехода. Анализ этих эффектов, проведенный различными авторами, показывает, что их вклад в брэнчинг радиационного перехода может составлять от 10 [45] до 30 % [46]. Величина вклада является весьма чувствительной к виду волновой функции (формфактора) конечного состояния. Дополнительные эффекты векторной доминантности связаны с проекцией J/Ψ -резонанса на трехглюонное состояние. В этом случае один из трех глюонов, формирующих J/Ψ -резонанс, возникает в bsG -вершине, соответствующей однопетлевым недиагональным PD+SED-диаграммам; два других глюона имеют существенно пертурбативное происхождение и возникают, как правило, при адронизации конечного состояния. Полный анализ этого эффекта пока не проведен, известно, однако, что недиагональная

bsG -вершина усиливается КХД-поправками примерно в 2–3 раза [47,48]. Неясен также характер интерференции SD- и вектор-доминантных вкладов.

Теория надежно контролирует только пертурбативные эффекты взаимодействий на малых расстояниях. Оснащение недиагональной $bs\gamma$ -вершины КХД-вкладами систематически изучалось в работах [48–53]. При этом учитывались лидирующие логарифмы и часть нелидирующих логарифмических поправок. С целью снижения зависимости от шкалы ренормировки проводились расчеты и с учетом всех нелидирующих вкладов. Наиболее полно такие расчеты выполнены в работах [49,52,54–57]. Цель этих расчетов — построение эффективного гамильтониана. Это построение основано на процедуре операторного разложения, в рамках которого проводится интегрирование по внутренним линиям тяжелых частиц (по линиям t -кварка, W - и Z -бозонов). Этим осуществляется переход от полной $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ -теории к эффективной $U(1) \times SU(3)$, после чего эффективный гамильтониан записывается в виде операторного разложения по $Q_i(\mu)$ -локальным ренормированным операторам определенной размерности с коэффициентами разложения $C_i(\mu)$ (μ — масштаб ренормировки):

$$H_{\text{eff}}(b \rightarrow s\gamma) = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} U_{ts}^* U_{tb} \sum_i C_i(\mu) Q_i(\mu). \quad (2.23)$$

В работах [57,58] можно найти операторный базис в виде набора 14 операторов размерности 6 вне массовой поверхности. При спуске по ренормировочной шкале до масштаба адрона в коэффициентах операторного разложения производится эффективное ренормгрупповое суммирование ведущих и следующих за ними логарифмических вкладов (см., например, [58,60]). Теория также позволяет ответить на вопрос о роли спектаторного кварка в оснащении недиагональной $bs\gamma$ -вершины КХД-вкладами. В работе [61] показано, что КХД-вклады примерно в 3 раза усиливают $bs\gamma$ -взаимодействия, однако роль спектаторного кварка при этом не превышает 5%. Последнее обстоятельство позволяет из сопоставления теории с экспериментом получать информацию непосредственно о кварковой $bs\gamma$ -вершине.

Обзор теоретических исследований и обоснованные теоретические оценки представлены в [57,58]:

$$Br(B \rightarrow X_s \gamma)_{\text{theor}}^{\text{SD}} = (3,28 \pm 0,33) \cdot 10^{-4}; \quad (3,51 \pm 0,31) \cdot 10^{-4}, \quad (2.24)$$

что находится в соответствии с экспериментом. Попытка учесть в рамках эффективной теории тяжелых кварков распределение по импульсу b -кварка в B -мезоне, а также КЭД-поправки при анализе нелидирующих вкладов в $Br(B \rightarrow X_s \gamma)$ [59] привела к результату, заметно отличающемуся от последних экспериментальных данных CLEO и ALEPH.

Теоретический анализ SD-вкладов в эксклюзивный распад с использованием различных моделей формфакторов K^* -мезона с учетом КХД-поправок, но без учета эффектов векторной доминантности, проводился в [62, 63]. Соответствующие численные результаты имеют вид

$$\begin{aligned} Br(B \rightarrow K^*(892)\gamma)_{\text{theor}} &\approx 2,8 \cdot 10^{-5}, \\ Br(B \rightarrow K^*(892)\gamma)_{\text{theor}} &\approx (0,6 - 3,4) \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Как уже отмечалось, вклад векторной доминантности может увеличить эти числа на 30 % и более [46], что приведет к согласию теории с экспериментом (2.22). Надежность теоретического моделирования эксклюзивных каналов, однако, невысока, поэтому от общей оценки ситуации пока следует воздержаться. Во всяком случае, очевидно, что дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования редких радиационных распадов B -мезонов, имеющих самые высокие брэнчинги среди всех редких процессов, весьма перспективны для поиска сигналов новой физики.

2.4. Смешивание в системах нейтральных мезонов. Смешивание, осцилляции и сопряженные с ними эффекты CP -нарушения составляют отдельный класс явлений, обусловленных НТИА. Их важнейшей характеристикой является разность масс тяжелой и легкой компонент $M^0-\bar{M}^0$ -системы. Всего известны четыре такие системы, из которых наиболее детально изучены каоны [64]:

$$\Delta M_K = (3,4853 \pm 0,0130 \pm 0,0020) \cdot 10^{-12} \text{ МэВ}. \quad (2.26)$$

Для B_d^0 -системы разность масс также измерена с хорошей точностью, а для B_s^0 -системы имеется ограничение снизу [35, 65]:

$$\begin{aligned} \Delta M_{B_d^0} &= (3,100^{+0,513}_{-0,448} \pm 0,224) \cdot 10^{-10} \text{ МэВ}, \\ \Delta M_{B_s^0} &> 8,2 \cdot 10^{-9} \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Наиболее сложна для экспериментального исследования система D^0 -мезонов: ограничение сверху $\Delta M_D < 4,6 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ}$ [23] отстает от теоретически ожидаемого значения на 3–4 порядка.

Разность масс тяжелой и легкой компонент $M^0-\bar{M}^0$ -системы определяется удвоенным модулем амплитуды слабого перехода. В отличие от относительных вероятностей редких распадов, где в ряде случаев мы имели экспериментальные числа, слабо зависящие от LD-вкладов, в ΔM присутствуют и принципиально не исключаются факторы, численные значения которых формируются взаимодействиями на больших расстояниях. К этим факторам относятся константа слабого распада f_M и так называемый «bag»-фактор B_M , параметризующий приближение вакуумной доминантности:

$$\langle \bar{M}^0 | \bar{q}_L \gamma^\mu q_L \cdot \bar{q}_L \gamma^\mu q_L | M^0 \rangle \approx B_M \langle \bar{M}^0 | \bar{q}_L \gamma^\mu q_L | 0 \rangle \langle 0 | \bar{q}_L \gamma^\mu q_L | M^0 \rangle.$$

Величины f_M , B_M вычисляются в различных подходах: в релятивистской кварковой модели [66], КХД на решетке [67] и в феноменологических моделях [68]. Наиболее надежно расчеты проводятся в методе КХД-правил сумм и на решетке, однако при этом погрешность произведения параметров достигает 50 % [69]. Для мезонов $M_{\alpha\beta}^0 = M(d_\alpha \bar{d}_\beta)$, построенных из нижних кварков, выражение для разности масс тяжелой и легкой компонент имеет вид

$$\Delta M_{\alpha\beta} = \frac{1}{6\pi^2} G_F^2 f_M^2 B_M m_W^2 m_M [\eta_1 (A_{\alpha\beta}^c)^2 D(x_c) + \eta_2 (A_{\alpha\beta}^t)^2 D(x_t) + \eta_3 A_{\alpha\beta}^c A_{\alpha\beta}^t D(x_c, x_t)], \quad (2.28)$$

где $A_{\alpha\beta,q} = U_{q\alpha}^* U_{q\beta}$; $U_{q\alpha}$ — элементы матрицы Кобаяши–Маскавы; $\eta_{1,2,3}$ — мультипликативные факторы, параметризующие КХД-вклады; $D(x_c)$, $D(x_t)$, $D(x_c, x_t)$ — функции, структура которых полностью определяется ВД-диаграммами (см. (2.3)).

Для K -мезонов «bag»-фактор оценивается с погрешностью в 10–20 %: $B_K = 0,7 - 0,8$, а КХД-вклады фиксируются по результатам нескольких независимых вычислений, которые приведены в [70]: $\eta_1 = 1,1$, $\eta_2 = 0,57$, $\eta_3 = 0,36$. Как видим, неопределенность в значении «bag»-фактора гораздо выше, чем погрешности эксперимента. Это обстоятельство, а также погрешности в значениях элементов матрицы Кобаяши–Маскавы приводят к неопределенности теоретического предсказания

$$\Delta M_{K(\text{theor})} = (1,71_{-0,50}^{+0,61}) \cdot 10^{-12} \text{ МэВ}. \quad (2.29)$$

Сильное отличие (2.29) от экспериментального результата (2.26) принято объяснять тем, что в теоретическом результате не учтен большой вклад непертурбативных LD-эффектов, которые, как видно, могут достигать 50 %. Относительно природы этих эффектов полной ясности нет; возможно, значительную роль играют полюсные эффекты в переходах $K^0 - \bar{K}^0$ через промежуточные π^0 - и η -состояния. Заметим также, что в детальном исследовании нуждается и дополнительный SD-вклад через две эффективные sdG -вершины. Выше уже упоминалось о том, что вершины такого типа усиливаются КХД-вкладами в 2–3 раза и, кроме того, в двойном «пингвин»-переходе это усиление мультиплицируется комбинаторными факторами, пришедшими из интерференции PD + SED-диаграмм. С учетом всего сказанного следует признать, что вопрос о теоретическом описании величины Δm_K далек от завершения, что не позволяет использовать наиболее точные экспериментальные данные (2.26) для прецизионной проверки СМ.

Неопределенности возникают и в теоретических предсказаниях разностей масс для $B^0 - \bar{B}^0$ -систем [71]:

$$\begin{aligned} \Delta M_{B_d^0(\text{theor})} &= (3,0_{-2,7}^{+9,0}) \cdot 10^{-10} \text{ МэВ}, \\ \Delta M_{B_s^0(\text{theor})} &= (7,4_{-4,3}^{+8,6}) \cdot 10^{-9} \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Сравнение (2.30) с (2.27) демонстрирует способность СМ количественно интерпретировать эксперимент. Отметим, однако, что центральное значение теоретического прогноза для $\Delta M_{B_s^0}$ уже вышло за пределы экспериментального ограничения, т.е. непротиворечивость СМ обеспечивается только большим интервалом ошибок. Есть все основания предполагать, что в ближайшее время экспериментальное ограничение заменится конкретным числом и сопоставление теории с экспериментом можно будет провести более детально. В этой связи важно отметить, что измерение $\Delta M_{B_s^0}$ предоставит новые возможности для тестирования СМ по отношению

$$r_B = \frac{\Delta M_{B_d^0}}{\Delta M_{B_s^0}} \approx \frac{M_{B_d^0}}{M_{B_s^0}} \frac{|U_{td}|^2}{|U_{ts}|^2} \frac{f_{B_s}^2 B_{B_d}}{f_{B_s}^2 B_{B_d}}. \quad (2.31)$$

Предпочтительность подобного теста обусловлена тем, что отношение «bag»-факторов мезонов определяется со значительно меньшей погрешностью, чем сами величины «bag»-факторов [69, 72]. Анализ, проведенный в [35], привел к результату

$$\frac{f_{B_s} \sqrt{B_{B_s}}}{f_{B_d} \sqrt{B_{B_d}}} = 1,14 \pm 0,08.$$

Учитывая, что значения элементов матрицы Кобаяши–Маскавы U_{td} и U_{ts} будут достаточно точно установлены в процессе изучения t -кварка, можно предположить, что в ближайшее время мы будем иметь весьма точный прогноз для величины r_B и, тем самым, получим возможность прецизионного тестирования СМ по данным об осцилляциях в B^0 – $\bar{B}^0$ -системах.

С явлением смешивания в системах нейтральных мезонов тесно связан эффект CP -нарушения. В СМ эта связь является особенно жесткой из-за наличия всего лишь одного параметра (фазы в матрице Кобаяши–Маскавы), определяющего величину CP -нарушения. Прецизионная проверка СМ возможна по экспериментальным данным о CP -нарушении в системе B^0 -мезонов, однако экспериментальная программа этих исследований еще далека от завершения.

3. НЕДИАГОНАЛЬНЫЕ ТОКИ С ИЗМЕНЕНИЕМ АРОМАТА В МОДЕЛИ С СИНГЛЕТНЫМ КВАРКОМ

3.1. Экспериментальные и теоретические предпосылки существования синглетного кварка. Так как СМ имеет незамкнутую структуру, то актуальным является не только реализация возможных способов ее расширения, но и анализ вариантов экспериментального обнаружения сигналов новой физики. Поиск этих сигналов ведется по двум направлениям. Первое связано с ростом

доступных энергий, которые бы позволили непосредственно зарегистрировать высокоэнергетические эффекты (прямой путь). Второе связано с поиском низкоэнергетических проявлений расширений СМ и требует прецизионного тестирования (косвенный путь). Одна из наиболее обширных областей косвенного поиска этих сигналов — процессы, обусловленные НТИА. В разд. 3 и 4 будут подробно проанализированы эффекты НТИА, связанные с так называемым синглетным кварком. Остановимся на причинах выбора предметом изучения такого экзотического и незарегистрированного экспериментально объекта.

Рассмотрим классификацию возможных типов фермионов, порождаемую группой $SU(2)$. Согласно этой классификации все фермионы можно разделить на четыре класса [73].

I. Стандартные фермионы (последовательные, секвенциальные (sequential, usual, standard, ordinary)).

$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_L, \quad \{f_\alpha\}_R$ — левокиральные дублеты и правокиральные синглеты. Стандартные лептоны и кварки, описываемые группой $SU(2)_L$.

II. Зеркальные фермионы (mirror fermions).

$\{f_\alpha\}_L, \quad \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_R$ — левокиральные синглеты и правокиральные дублеты (т.е. зеркальное отражение стандартных фермионов).

III. Векторные дублеты (vector doublets, doublet fermions).

$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_L, \quad \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_R$ — левокиральные и правокиральные дублеты.

IV. Векторные синглеты (vector singlets, singlet fermions).

$\{f\}_L, \quad \{f\}_R$ — левокиральные и правокиральные синглеты.

Предметом нашего анализа является векторный синглет (IV) с квантовыми числами кварка. Такой фермион возникает в широком классе суперсимметричных расширений СМ. Название «векторный» связано с тем, что это поле имеет векторную связь с калибровочными бозонами. Рассмотрим некоторые варианты генезиса синглетного кварка.

Нижние синглетные кварки, т.е. векторные синглеты, имеющие остальные квантовые числа обычных кварков, возникают наряду с другими экзотическими частицами в суперсимметричных моделях. Наиболее популярной до настоящего времени является модель суперструны в 10-мерном пространстве, после компактификации 6 измерений которого в обычном 4-пространстве возникает мультиплет фермионных полей, который является фундаментальным 27-мерным представлением группы E_6 и содержит в себе мультиплеты

стандартного поколения кварковых и лептонных полей, синглетный кварк, новые лептоны и нейтрино. В табл. 1 иллюстрируется генезис стандартных и экзотических частиц при низкоэнергетической редукции $E_6 \rightarrow SO(10) \rightarrow SU(5) \rightarrow SU(2) \cdot U(1)$ [73].

Таблица 1. Генезис стандартных и экзотических частиц в E_6 -модели

$SO(10) \rightarrow$	$SU(5) \rightarrow$	$SU(2) \cdot U(1)$
16	5*	$\left\{ \begin{smallmatrix} \nu_e \\ e^- \end{smallmatrix} \right\}_L, d_L^c$
	10	$u_L^c, \left\{ \begin{smallmatrix} u \\ d \end{smallmatrix} \right\}_L, e_L^+$
	1	ν_{eL}^c
10	5	$D_L, \left\{ \begin{smallmatrix} E^+ \\ N^c \end{smallmatrix} \right\}_L$
	5*	$\left\{ \begin{smallmatrix} N \\ E^- \end{smallmatrix} \right\}_L, D_L^c$
1	1	S_L

Мультиплет $\{16\} \rightarrow \{5^*, 10, 1\}$ соответствует стандартному набору лептонов и кварков одного поколения, поля ν_{eL}^c , N_L и S_L — новые вейлевские нейтрино, E_L^- — новый заряженный лептон, а D_L — нижний синглетный кварк. Пара $\{D_L, D_L^c\}$ составляет векторный синглет согласно приведенной выше классификации фермионов группы $SU(2)$.

Во многих суперсимметричных расширениях СМ нижний синглетный кварк появляется в сопровождении довольно большого числа других экзотических частиц (в E_6 -модели, например, таких частиц 11), причем этот набор умножается числом поколений. Положение может осложняться еще и тем, что низкоэнергетическая редукция суперструны содержит дополнительную калибровочную группу $U'(1)$ и, следовательно, дополнительный Z' -бозон. Смешивание $Z-Z'$ усложняет феноменологию как синглетных кварков, так и других нестандартных частиц. В этой ситуации может представлять интерес другой, более простой и удобный для анализа вариант генезиса синглетного кварка, соответствующий редукции суперсимметричной $SU(5)$ -модели. Здесь синглетный кварк появляется как спинорная компонента с гиперзарядом $Y = -2/3$ в результате редукции хиггсовского супермультиплета в сопровождении хиггсина [74]:

$$\{5\}_{L,R} \rightarrow \{2 \otimes 1\}_{L,R} \oplus \{1 \otimes 3_{Y=-2/3}\}_{L,R}. \quad (3.1)$$

Таким образом, в этом случае мы имеем дело только с нижним синглетным кварком и хиггсино, т.е., по-существу, с кварком и лептоном. Возникновение и феноменология СК с $q = -1/3$ в МССМ рассмотрены в [75–77].

Отметим, что существование частиц с экзотическими квантовыми числами естественно для моделей великого объединения. Конечно, сами модели при этом накладывают на характеристики частиц определенные ограничения. Синглетные кварки, в частности, не порождая калибровочных аномалий, могут, однако, нарушить в рамках СМ сходжение бегущих констант. Причина в том, что при неизменном поведении $SU(2)$ -константы характер «бега» $SU(3)$ - и $U(1)$ -констант меняется. Тем не менее для нижних синглетных кварков унификация взаимодействий сохраняется при наиболее экономном введении СК в $5 + 5^*$ -мультиплетах $SU(5)$ или в рамках мультиплета 10 в $SO(10)$.

Верхний СК может появиться в качестве компоненты мультиплета присоединенного представления группы великого объединения. Заметим, что соответствующие представления слишком велики — 45 для $SO(10)$ или 78 для E_6 . Избежать этого, а заодно и нарушения асимптотического поведения сильной константы, можно, вводя дополнительные представления материальных полей. Например, в $SU(5)$ появление одного верхнего СК ассоциируется с дополнительными легкими $10 + 10^*$ -мультиплетами. Унификация калибровочных взаимодействий при этом также имеет место.

Более подробно исследование поведения бегущих констант в различных вариантах теории великого объединения, в том числе и суперсимметричных, на уровне одной и двух петель проведено в работе [84].

3.2. Обзор феноменологии синглетных кварков. Рассмотрим кратко основные проявления синглетных кварков, т.е. прямые и косвенные эффекты, обусловленные этими кварками. Для упрощения задачи мы опускаем всю остальную высокоэнергетическую надстройку, сопровождающую синглетный кварк.

Космологические ограничения на распространенность тяжелых частиц исключают возможность существования стабильных экзотических фермионов [78]. Наиболее естественный механизм распада таких частиц — слабое взаимодействие; но из-за синглетной природы такие фермионы, как векторные синглеты, не могут распадаться на обычные частицы. Слабый распад синглетного кварка может иметь место только при смешивании его со стандартными, имеющими тот же заряд. Основным следствием такого смешивания, определяющим практически всю низкоэнергетическую феноменологию синглетного кварка, является генезис НТИА на древесном уровне в секторе тех кварков, с которыми он смешивается. Появление недиагональных вершин вида $g_{ij} Z_\mu \bar{q}_i \Gamma^\mu q_j$ дает дополнительный вклад в такие процессы, как редкие лептонные и полулептонные распады мезонов, смешивание нейтральных мезонов вида $M^0 - \bar{M}^0$, CP -нарушение в распадах мезонов и недиагональ-

ное рождение пар кварков $d_i d_j$. Имеющиеся на сегодня экспериментальные ограничения на величину НТИА допускают недиагональные вершины с малыми константами g_{ij} . Так как величина последних пропорциональна углам смешивания синглетного кварка со стандартными q_i и q_j , то и смешивание допустимо довольно малое.

Смешивание синглетных фермионов с обычными и ограничения на его величину, вытекающие из эксперимента, рассмотрены в [79–85]. В этих работах кратко описан генезис синглетных кварков и изучен механизм их смешивания со стандартными. Для получения оценок величины смешивания используется, в частности, так называемый «seesaw»-механизм [73, 86]. На основе экспериментальных данных об интенсивности редких процессов получены ограничения на углы смешивания. Прямым следствием наличия недиагональных вершин $g_{ij} Z_\mu \bar{q}_i \Gamma^\mu q_j$ являются соответствующие распады $Z \rightarrow \bar{q}_i q_j$ на древесном уровне. Оценки брэнчингов недиагональных каналов распада Z -бозона, обусловленных синглетным кварком, сравнение их с петлевыми вкладами СМ и анализ информации об экспериментальных ограничениях на эти брэнчинги проведены в [87–91]. В этих работах рассмотрены также экспериментальные возможности регистрации рождения недиагональных пар и оценки сечений в процессах вида $e^+ e^- \rightarrow q_i \bar{q}_j$. Оценки соответствующих сечений c - и b -рождения в рамках СМ на $e^+ e^-$ -фабриках проведены в [91]. В работе [90] рассмотрены сопровождающие распад $Z \rightarrow d_i \bar{d}_j$ эффекты CP -нарушения в модели с синглетным кварком.

Смешивание в нейтральных мезонах $M^0 - \bar{M}^0$ является наиболее чувствительным к НТИА эффектом. В СМ такое смешивание протекает через «бокс»-диаграммы, т.е. интенсивность такого процесса $\sim G_F^2$. В модели с синглетным кварком смешивание происходит на древесном уровне, причем интенсивность $\sim G_F$, что и обуславливает его большую чувствительность к НТИА. Описание и сравнительный анализ $M^0 - \bar{M}^0$ -смешивания в СМ и модели с синглетным кварком проведены в работах [79, 81, 92–95]. Из существующих экспериментальных данных по величине смешивания в $K^0 - \bar{K}^0$ - и $B^0 - \bar{B}^0$ -системах, а также из экспериментальных нижних пределов на величину смешивания в $B_s^0 - \bar{B}_s^0$ - и $D^0 - \bar{D}^0$ -системах получены ограничения на углы смешивания синглетных и стандартных кварков. Редкие лептонные и полулептонные распады мезонов также чувствительны к наличию НТИА, обусловленных древесными недиагональными вершинами. Анализ и расчет таких распадов в СМ и модели с синглетным кварком проведены в работах [74, 79, 81, 96, 97]. Редкие распады мезонов несколько менее чувствительны к НТИА, нежели смешивание в $M^0 - \bar{M}^0$ -системах. Однако экспериментальный материал в первом случае гораздо богаче, что позволяет более полно исследовать эффекты синглетного кварка.

К низкоэнергетическим проявлениям синглетного кварка относится также и перестройка матрицы смешивания в структуре заряженных токов.

Матрица Кобаяши–Маскавы, описывающая эту структуру в СМ, при смешивании синглетного кварка с обычным изменяется. Это изменение в модели с нижним СК состоит в том, что (3×3) -матрица переходит в (3×4) -матрицу, причем стандартный (3×3) -блок не составляет унитарную матрицу, как в СМ, и не совпадает с матрицей Кобаяши–Маскавы. Подробно этот эффект рассматривается в [98], где построена так называемая обобщенная (4×4) -матрица смешивания, описывающая одновременно как структуру заряженных токов, так и структуру НТИА. Прямым следствием такой модификации матрицы смешивания является возникновение дополнительных эффектов CP -нарушения [9, 98, 99].

Анализ различий между проявлениями тяжелых кварков гипотетического четвертого поколения и синглетных кварков проведен в [100] для случая их генерации на $p\bar{p}$ -коллайдерах. Строительство и пуск в эксплуатацию коллайдеров, работающих в области энергий $\sim 10^2 \div 10^3$ ГэВ, вызывает интерес к исследованию возможностей рождения и регистрации экзотических тяжелых фермионов в e^+e^- , $p\bar{p}$ - и $e p$ -соударениях [79, 101–104]. Особенности экспериментального проявления таких фермионов в основном связаны со спецификой их распадов и асимметрией вперед-назад при их образовании в e^+e^- -аннигиляции [79, 105–108]. Оценка сечений недиагонального рождения синглетных и обычных кварков, а также описание сигнатуры событий рождения и последующего распада синглетного кварка проведены в [109].

Хромодинамические свойства синглетных кварков совпадают со стандартными, т.е. при достаточно больших временах жизни они могут образовывать связанные состояния как друг с другом, формируя новый тяжелый кварконий $H = (D\bar{D})$, так и с обычными кварками, образуя новые тяжелые мезоны ($H_q = D\bar{q}$), где D — синглетный кварк. Свойства тяжелого кваркония H и их отличия от свойств кваркония четвертого поколения рассмотрены в [110, 111]. В работах [112, 113] обсуждаются распадные свойства новых мезонов при условии, что масса D -кварка меньше массы W -бозона, причем в [112] отмечается наличие большого смешивания в нейтральной системе $H_d^0 - \bar{H}_d^0$. Свойства новых тяжелых мезонов H_q при условии $m_D > m_W$ рассмотрены в работе [114]. В этой работе использовалась оценка массы D -кварка, полученная на основе экспериментальных ограничений на величину его смешивания с обычными кварками в предположении «seesaw»-механизма смешивания. Это предположение использовалось также при реконструкции элементов обобщенной матрицы смешивания и оценки m_D в работе [115].

Экспериментальная регистрация t -кварка стимулировала в последние годы интерес к верхнему синглетному кварку. Во-первых, большая масса t -кварка может быть легко объяснена его смешиванием с тяжелым верхним синглетом. Во-вторых, предполагаемое большое смешивание t -кварка и синглетного кварка приведет к заметному отклонению его свойств от стандартных. Влияние верхнего синглетного кварка на формирование механизмов

редких процессов рассмотрено в работах [77,95,116], причем в [116] рассмотрены его возможные эффекты в регистрации t -кварка. Роль большой массы t -кварка в его смешивании с синглетным кварком и возможные аномальные свойства t -кварка рассмотрены в [117–124].

Подробный анализ феноменологии синглетных фермионов приводит к необходимости рассмотреть интерференцию петлевых вкладов СМ и дополнительных вкладов расширенных моделей в НТИА. Эта довольно трудоемкая задача осложняется необходимостью учета КХД-поправок, которые в некоторых процессах могут играть доминирующую роль. Впервые вышеуказанная интерференция на качественном уровне была рассмотрена в работе [125], а более полно в количественном отношении — в [115].

3.3. Низкоэнергетический лагранжиан модели с синглетным кварком.

Структура нейтральных и заряженных токов. Полный лагранжиан, описывающий синглетный кварк наряду с другими экзотическими частицами, определяется высокоэнергетической теорией, в которой он возникает. При низких энергиях (< 1 ТэВ) мы можем необходимую часть лагранжиана ввести в качестве феноменологического члена в СМ. Далее мы будем рассматривать модель с одним синглетным кварком, смешивание которого с обычными возникает при нарушении $SU(2)$ -симметрии в юкавских членах взаимодействия кварков с хиггсовским полем.

Лагранжиан модели с нижним синглетным кварком состоит из лагранжиана СМ, кинетического калибровочного члена для синглетного кварка, юкавских членов взаимодействия этого кварка с хиггсовским дублетом и массовых членов, допустимых $SU(2)$ -симметрией [98]:

$$L = L_{\text{SM}} + L'_{0D} + L'_{YD}, \quad (3.2)$$

где L_{SM} — лагранжиан СМ,

$$L'_{0D} = i\bar{D}'_L \hat{D} D'_L + i\bar{D}'_R \hat{D} D'_R + \mu_D \bar{D}'_L D'_R + \mu_\alpha \bar{D}'_L d'_{R\alpha} + \text{h.c.},$$

$$L'_{YD} = \lambda_\alpha \bar{q}'_{L\alpha} \phi D'_R + \text{h.c.}, \quad q'_\alpha = \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix},$$

$$i\bar{D}' \hat{D} D' = i\bar{D}' \gamma^\mu (\gamma_\mu + Y \frac{1}{2} g' B_\mu) D', \quad Y — \text{гиперзаряд поля } D'.$$

В (3.2) массовая часть L'_{0D} и член L'_{YD} являются феноменологическими, т.е. они имеют общий калибровочно-инвариантный вид с произвольными параметрами μ_D , μ_α и λ_α . В приведенной формуле для ковариантной производной опущен стандартный член цветового взаимодействия с глюонами, поскольку в данном разделе нас интересует только структура электрослабого взаимодействия.

В результате вакуумного сдвига в хиггсовском дублете ϕ в юкавских членах L'_{YD} появляются массовые формы кварковых полей d'_i и u'_α ; приведем

их наиболее общий вид [114]:

$$M(q) = \bar{d}'_L M(d) d'_R + \bar{u}'_L M(u) u'_R + \text{h.c.}, \quad (3.3)$$

где $d'_a = (d', s', b', D')_a$, $u'_a = (u', c', t')_a$ — кварковые поля в базисе слабого взаимодействия, $a = L, R$; $M(d)$, $M(u)$ — массовые матрицы. Диагонализация квадратичной формы (3.3) в общем случае проводится с использованием различных унитарных матриц для различных киральных составляющих кварковых полей:

$$d'_a = U_a(d) d_a, \quad u'_a = U_a(u) u_a, \quad a = L, R, \quad (3.4)$$

где $d_a = (d, s, b, D)_a$, $u_a = (u, c, t)_a$; $U_a(d)$, $U_a(u)$ — унитарные матрицы с размерностью 4×4 и 3×3 соответственно. В (3.4) поля d_a , u_a описывают нижние и верхние кварки, имеющие токовые массы. Так как верхние кварки не смешиваются с синглетным кварком, то массовая и диагонализующая матрицы для них те же, что и в СМ. Структуру диагонализующей матрицы нижних кварков $U_a(d)$ можно представить в виде

$$U_a(d) = \left(\frac{U_{\alpha\beta}}{\delta_\beta} \middle| \frac{\gamma_\alpha}{u_{44}} \right)_a; \quad a = L, R; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Здесь α, β — индексы ароматов, γ_α , δ_β — малые параметры, характеризующие малые, допустимые экспериментом величины смешивания D -кварка с обычными d -, s -, b -кварками. Величина $|u_{44}| \approx 1$ с точностью до членов второго порядка по малым параметрам γ_α^2 и δ_β^2 , что следует из унитарности $U_a(d)$. При этом (3×3) -матрица $U_{\alpha\beta}$ с той же точностью примерно совпадает со стандартной диагонализующей матрицей, т.е. с соответствующей матрицей в рамках СМ.

Рассмотрим структуру слабых токов в базисе токовых кварков $u_\alpha = u, c, t$ и $d_i = d, s, b, D$. Структура заряженного тока определяется (3×4) -матрицей V :

$$J_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} g \bar{u}_{L\alpha} \gamma^\mu V_{\alpha i} d_{Li}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.6)$$

В (3.6) матрица $V_{\alpha i} = \sum_\beta (U_L^*(u))_{\beta\alpha} (U_L(d))_{\beta i}$, т.е. как сама V , так и ее блок $V_{\alpha\beta}$ не унитарны, как в модели Кобаяши–Маскавы, однако отличие $V_{\alpha\beta}$ от $(U_{\text{КМ}})_{\alpha\beta}$ порядка малых параметров γ_α и δ_β в (3.5). Кроме того, элементы $V_{\alpha 4} \sim \gamma_\alpha$, т.е. заряженные переходы вида $D \rightarrow u_\alpha$ подавлены величиной углов смешивания D -кварка с обычными, что, естественно, сказывается на распадных свойствах D и его времени жизни.

Нейтральный ток можно представить в виде двух слагаемых:

$$J_\mu = J_\mu^{\text{st}} + \Delta J_\mu, \quad (3.7)$$

где J_μ^{st} — стандартный нейтральный ток с включением диагональных членов вида $\bar{D}_a \gamma_\mu D_a$, а ΔJ_μ — недиагональная добавка, обусловленная синглетным кварком и описывающая НТИА на древесном уровне:

$$\Delta J_\mu = g_{ik} \bar{d}_{Li} \gamma_\mu d_{Lk}. \quad (3.8)$$

В (3.8) недиагональные константы связи g_{ik} определяются выражениями

$$g_{ik} = \frac{1}{2} g_z (U_L)_{4i}^* (U_L)_{4k}, \quad g_z = \frac{g}{\cos \theta_W}, \quad (U_L) \equiv U_L(d). \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) и (3.5) следует, что переходы вида $d_\alpha \rightarrow d_\beta$ и $D \rightarrow d_\alpha$ при малых углах смешивания подавлены, соответственно, квадратично и линейно по малому параметру δ , а неподавленная добавка

$$\frac{1}{2} g_z |(U_L)_{44}|^2 \bar{D}_L \gamma^\mu D_L \approx \frac{1}{2} g_z \bar{D}_L \gamma^\mu D_L$$

приводит к резкому отличию $V-A$ -структуры вершины $Z_\mu \bar{D} \gamma^\mu (c_V + \gamma_5 c_A) D$ от стандартной вершины $Z_\mu \bar{d} \gamma^\mu (c_V^{\text{st}} + \gamma_5 c_A^{\text{st}}) d$:

$$\begin{aligned} c_V^{\text{st}} &= \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{4}{3} \cos^2 \theta_W \right), & c_A^{\text{st}} &= \frac{1}{4}; \\ c_V &\approx \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W, & c_A &\sim \delta^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отличие в структуре вершин может быть зарегистрировано в эксперименте по измерению асимметрии вперед-назад при рождении пар $\bar{D} D$.

Рассмотрим теперь лагранжиан модели с верхним синглетным кварком U . По аналогии с (3.2) его можно записать в виде

$$L = L_{\text{SM}} + L'_{0U} + L'_{YU}, \quad (3.11)$$

где L_{SM} — лагранжиан СМ;

$$\begin{aligned} L'_{0U} &= i \bar{U}'_L \hat{D} U'_L + i \bar{U}'_R \hat{D} U'_R + \mu_U \bar{U}'_L U'_R + \mu_\alpha \bar{U}'_L u'_{R\alpha} + \text{h.c.}; \\ L'_{YU} &= \lambda_\alpha \bar{q}'_{L\alpha} \phi^c U'_R + \text{h.c.}; \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \phi^c = -i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} -\phi^0 \\ \phi^- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отличие (3.11) от (3.2) заключается только в использовании сопряженного дублета ϕ^c хиггсовских полей и другой величины гиперзаряда Y в удлиненной производной $\hat{D}$, которая соответствует электрическому заряду $Q = 2/3$. После вакуумного сдвига возникают массовые формы кварковых полей (3.3), но теперь $d'_a = (d', s', b')_a$, $u'_a = (u', c', t', U')_a$, а $M(d)$ и $M(u)$ — эрмитовские (3×3) - и (4×4) -матрицы соответственно. Структура

диагонализующей матрицы $U_a(u)$ та же, что и в (3.5), где γ_α и δ_β — малые параметры.

Структура заряженного тока определяется (4×3) -матрицей V :

$$J^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} g \bar{u}_{Li} \gamma^\mu V_{i\alpha} d_{L\alpha}; \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.12)$$

Матрица V в (3.12) не унитарна, как и ее блок $V_{\alpha\beta}$, причем отличие $V_{\alpha\beta}$ от $(V_{\text{КМ}})_{\alpha\beta}$ порядка малых параметров γ_α и δ_β . Того же порядка элементы $V_{4\alpha}$, т.е. переходы вида $U \rightarrow d_\alpha$ подавлены.

Нейтральный ток можно представить в виде двух слагаемых:

$$J_\mu = J_\mu^{\text{st}} + \Delta J_\mu, \quad (3.13)$$

где J_μ^{st} — стандартный нейтральный ток с включением диагональных членов вида $\bar{U}_a \gamma_\mu U_a$, $a = L, R$. Недиагональная добавка ΔJ_μ определяется выражением

$$\Delta J_\mu = g_{ik} \bar{u}_{Li} \gamma_\mu u_{Lk}, \quad (3.14)$$

где

$$g_{ik} = -\frac{1}{2} g_z (U_L)_{4i}^* (U_L)_{4k}, \quad (U_L)_{4k} \equiv (U_L(u))_{4k}. \quad (3.15)$$

Нейтральные переходы с изменением аромата $u_\alpha \rightarrow u_\beta$ и $U \rightarrow u_\alpha$ подавлены квадратично и линейно по малому параметру, а добавка $-\frac{1}{2} g_z \bar{U}_L \gamma^\mu U_L$ в (3.14) к диагональной составляющей в J_μ^{st} приводит к отличию вершины $g_z Z_\mu \bar{U}_L (c_V + \gamma_5 c_A) U_L$ от стандартной:

$$\begin{aligned} c_V^{\text{st}} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W \right), & c_A^{\text{st}} &= -\frac{1}{4}; \\ c_V &\approx -\frac{2}{3} \sin^2 2\theta_W, & c_A &\sim \delta^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отметим также, что электромагнитное и хромодинамическое взаимодействия верхнего синглетного кварка такие же, как и у обычных кварков.

3.4. Обобщенная матрица смешивания. В модели с синглетным кварком матрица смешивания имеет тот же статус, что и в СМ, однако ее структура уже другая — она не унитарная и не квадратная. В феноменологическом подходе определения этой матрицы так же, как и в СМ, возникает задача выбора удобной параметризации. Сформулируем эту задачу следующим образом: на основе имеющейся экспериментальной информации об элементах матрицы V в (3.6) или (3.12) и величин смешивания синглетного кварка с обычными

восстановить структуру заряженных и нейтральных токов наиболее полным образом. Здесь имеется в виду, что эксперимент дает информацию только по некоторой части элементов, и надо, выбрав удобную параметризацию, определить остальную часть. Для выполнения этой задачи и анализа структуры токов с наиболее общих позиций удобно объединить матрицу $V(3 \times 4)$ в (3.6) и элементы $U_{4k}(d_L)$ в одну матрицу $U(4 \times 4)$, верхние три строки которой составляет матрица $V(3 \times 4)$, а четвертая строка определяется согласно равенству $U_{4k} = U_{4k}(d_L)$ [98]. Не имея конкретной информации о массовых формах кварков, мы не можем определить диагонализующие их матрицы $U_a(q)$, т.е. в конечном счете структуры токов. Однако мы можем учесть некоторые свойства объединяющей эти структуры матрицы $U(4 \times 4)$ и, наложив соответствующие условия, свести к минимуму количество свободных параметров. Легко показать, что $U(4 \times 4)$ — унитарная матрица. Действительно, по определению матрица $U(4 \times 4)$ имеет структуру

$$U(4 \times 4) = \left(\frac{V_{\alpha i}}{U_{4i}(d_L)} \right), \quad (3.17)$$

где $V_{\alpha i} = (U^+(u_L) \cdot U(d_L))_{\alpha i}$, причем $U(u_L)$ — матрица (3×3) , а $U(d_L)$ — матрица (4×4) . С учетом этого $U(4 \times 4)$ может быть представлена в виде произведения двух (4×4) -матриц $U'(u_L) \cdot U(d_L)$, где

$$U'(u_L) = \left(\frac{U^+(u_L) \mid 0}{0 \mid 1} \right).$$

Принимая во внимание унитарность диагонализующей матрицы верхних кварков $U(u_L)$, можно проверить, что $(U'(u_L))^+ U'(u_L) = 1$, т.е. $U'(u_L)$ — унитарная матрица. Так как, в свою очередь, диагонализующая матрица нижних кварков $U(d_L)$ тоже унитарна, то отсюда следует и унитарность $U = U'(u_L) \cdot U(d_L)$ как произведения двух унитарных матриц одного ранга. Таким образом, при анализе структуры токов мы можем, как и в СМ, использовать унитарность матрицы $U(4 \times 4)$. В отличие от СМ, эта матрица теперь описывает не только заряженные токи, но и недиагональную составляющую нейтральных токов, обусловленную смешиванием синглетного кварка с обычными, поэтому далее мы будем называть ее обобщенной матрицей смешивания.

По аналогии можно построить унитарную (4×4) -матрицу смешивания и в модели с верхним синглетным кварком. Специфика этого случая состоит в том, что ее структура определяется не согласно (3.17), а формулой

$$U(4 \times 4) = (V_{i\alpha} | U_{4i}^*(u_L)), \quad (3.18)$$

т.е. первые три столбца составляют матрицу V , а последний, четвертый столбец описывает недиагональные составляющие нейтрального тока (3.15).

Легко проверить, что

$$U(4 \times 4) = (U(u_L))^+ U'(d_L), \quad U'(d_L) = \left(\begin{array}{c|c} U^+(d_L) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad (3.19)$$

откуда по аналогии с предыдущим случаем доказывается унитарность $U(4 \times 4)$.

Таким образом, при анализе структур заряженного и нейтрального токов в моделях с нижним или верхним синглетным кварком можно использовать условие унитарности обобщенной матрицы смешивания. Кроме того, т.к. матрица U находится в «обкладках» кварковых полей $\bar{q}Uq$, то для уменьшения количества свободных параметров можно воспользоваться свободой выбора фаз кварковых полей, т.е. фазовой инвариантностью кварковых форм. Параметризация матриц, входящих в структуры вида (3.6), рассмотрена в работе [126], и эту информацию мы используем при выборе параметризации $U \equiv U(4 \times 4)$. В работе [98] проведен анализ параметризации обобщенной матрицы смешивания U и показано, что она может быть задана девятью параметрами, из которых шесть угловых δ_k и три фазовых φ_α :

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & \delta_1 & \delta_2 e^{-i\varphi_1} & \delta_3 e^{-i\varphi_2} \\ r_1 e^{i\alpha_1} & a_2 & \delta_4 & \delta_5 e^{-i\varphi_3} \\ r_2 e^{i\alpha_2} & r_3 e^{i\alpha_3} & a_3 & \delta_6 \\ r_4 e^{i\alpha_4} & r_5 e^{i\alpha_5} & r_6 e^{i\alpha_6} & a_4 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

В (3.20) переменные $a_1 - a_4$, $r_1 - r_6$ и $\alpha_1 - \alpha_6$ определяются как функции свободных параметров $\delta_1 - \delta_6$ и $\varphi_1 - \varphi_3$ с использованием свойств унитарности U . Процесс определения элементов матрицы через ее входные (свободные) параметры обычно называется в литературе реконструкцией матрицы.

В СМ для описания матрицы КМ, т.е. $U_{\text{KM}}(3 \times 3)$, в основном применяют два способа параметризации — метод эйлеровских углов и λ -параметризацию. В первом способе используются три угла смешивания кварковых поколений и одна фазовая переменная. Во втором способе вводится малый параметр λ , характеризующий феноменологическую иерархию величин смешивания различных поколений, и три подгоночных параметра. Широко употребляемыми примерами таких способов являются параметризация Кобаяши–Маскавы [127] и параметризация Вольфенштейна [128] соответственно. Отметим, что в последнее время используется также экспоненциальная параметризация [129] и метод унитарных треугольников [130, 131].

Для реконструкции матрицы смешивания (3.20) удобно использовать λ -параметризацию. С одной стороны, наличие малого параметра в матрице упрощает процесс выражения элементов матрицы через входные параметры, а с другой — использование λ -параметра позволяет естественным образом сохранить стандартную структуру (3×3) блока $U_{\alpha\beta}$. Кроме того, запись элементов (4×4) -матрицы в виде эйлеровских углов довольно громоздка. Так как

(3×3) -минор $U_{\alpha\beta}$ обобщенной матрицы смешивания приближенно должен совпадать со стандартной матрицей КМ, то соответствующие ему входные параметры определяются по аналогии с параметризацией Вольфенштейна:

$$\delta_1 = \lambda, \quad \delta_2 = A_1 \lambda^3, \quad \delta_4 = A_2 \lambda^2, \quad \text{где } \lambda \approx 0,22, \quad A_\alpha \sim 1. \quad (3.21)$$

В (3.21) мы не используем более точное значение λ , которое иногда употребляется в последнее время, т.к. в нашем случае точное определение λ отличается от стандартного и связано с процедурой фитирования элементов матрицы (3.20). Параметры δ_3 , δ_5 и δ_6 характеризуют величину смешивания синглетного кварка с обычными. Это смешивание может и не содержать в себе иерархии вида $\lambda : \lambda^2 : \lambda^3$, как в (3.21), т.е. в стандартной части, однако во избежание введения нового и неизвестного малого параметра в остальной части матрицы будет использоваться также параметр λ . Физическое оправдание такому приему можно найти в предположении о «seesaw»-механизме смешивания, когда угол смешивания легкого и тяжелого состояний $\theta_\alpha \sim \sqrt{m_\alpha/m_D}$. В этом случае отношения углов смешивания b -, s - и d -кварков с D -кварком должны составлять пропорцию

$$1 : \frac{\theta_s}{\theta_b} : \frac{\theta_d}{\theta_b} = 1 : \sqrt{\frac{m_s}{m_b}} : \sqrt{\frac{m_d}{m_b}}. \quad (3.22)$$

Подстановка в (3.22) средних значений масс токовых кварков $m_d = 6$ МэВ, $m_s = 120$ МэВ, $m_b = 4200$ МэВ [23] дает иерархию $1 : \lambda : \lambda^2$:

$$1 : \sqrt{\frac{m_s}{m_b}} : \sqrt{\frac{m_d}{m_b}} \approx 1 : \lambda : \lambda^2. \quad (3.23)$$

Реальная точность соотношений (3.23), конечно, ниже, т.к. в определении токовых масс кварков есть существенный произвол, т.е. конкретное совпадение цифр в (3.23) носит в какой-то степени случайный характер. Однако наличие иерархии в соотношении (3.22), по-видимому, не случайно. Приведем результат реконструкции обобщенной матрицы смешивания (3.20) с использованием λ -параметризации в физически важном случае, когда при смешивании тяжелого синглетного кварка с обычными имеет место иерархия (3.23). В этом случае задание входных параметров (3.21) дополняется выбором

$$\delta_3 = A_3 \lambda^3, \quad \delta_5 = A_4 \lambda^2, \quad \delta_6 = A_5 \lambda. \quad (3.24)$$

Согласно (3.23) получаем $A_3 \approx A_4 \approx A_5$, и можно использовать единый параметр A . Однако мы представим общий случай. Результаты расчета с

точностью до λ^3 включительно имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A_1 \lambda^3 e^{-i\varphi_1} & A_3 \lambda^3 e^{-i\varphi_2} \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A_2 \lambda^2 & A_4 \lambda^2 e^{-i\varphi_3} \\ \lambda^3(A_2 - A_1 e^{i\varphi_1}) & -\lambda^2(A_2 + A_4 A_5 \lambda e^{i\varphi_3}) & 1 - A_5^2 \lambda^2/2 & A_5 \lambda \\ \lambda^3(A_4 e^{i\varphi_3} - A_3 e^{i\varphi_2}) & -\lambda^2(A_4 e^{i\varphi_3} - \lambda A_2 A_5) & -\lambda A_5 & 1 - A_5^2 \lambda^2/2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Матрица смешивания (3.25) получена и использована для расчетов в [98], а фиксирование параметров A_i и φ_α из эксперимента было проведено в [115].

3.5. Эффективные вершины в модели с синглетным кварком. Полный расчет процессов с участием НТИА предполагает учет интерференции петлевых вкладов СМ и вкладов, обусловленных синглетным кварком. В п. 2.2 были рассмотрены эффективные НТИА-вершины $V q_i \bar{q}_j$, $V = \gamma, Z, G$ в СМ. Здесь мы получим эффективные вершины $\gamma q_i q_j$ и $G q_i q_j$ в модели с синглетным кварком. На древесном уровне эти величины отсутствуют, а при однопетлевом расчете эффективных вершин необходимо учитывать дополнительные диаграммы (рис. 7).

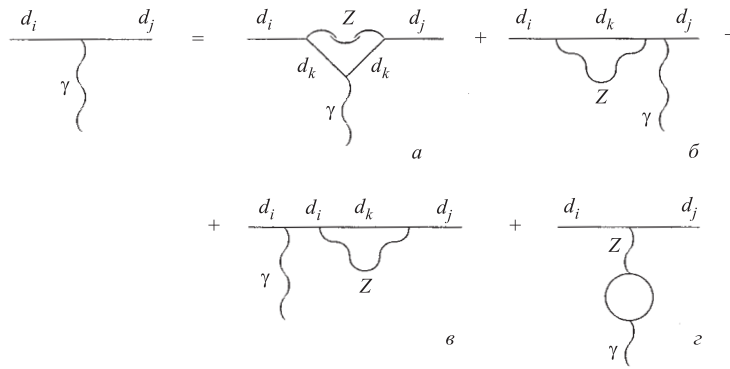


Рис. 7. Эффективная вершина $\gamma d_i d_j$ в модели с синглетным кварком

Дополнительные диаграммы на рис. 7 порождаются недиагональной вершиной $Z d_i d_k$ на древесном уровне. Аналогично выглядят дополнительные вклады и в вершину $G d_i d_j$. Вершина $Z d_i d_j$ в модели с синглетным кварком имеет более сложную структуру даже в однопетлевом приближении. В этом случае, однако, можно сделать качественный вывод о доминантности древесной вершины $Z d_i d_k$ над петлевыми, порожденными этой древесной вершиной.

Расчет выражений для эффективных вершин на рис. 7 проведен в [17]. Там же отмечено, что два вида диаграмм, не указанных на рис. 7, дают нулевой

вклад из-за фермионного «головастика» (tad-pole), а диаграмма (2) дает нулевой вклад на массовой поверхности. Таким образом, дополнительные вклады на массовой поверхности вносят диаграммы (a–e). Соответствующие им полные выражения громоздки и приведены в [17]. Рассмотрим аппроксимационные выражения для вершин как функций малых параметров $\beta_{i,j} = m_{i,j}^2/m_W^2$, где $m_{i,j}$ — массы внешних кварков.

Первое приближение для суммы $\Gamma^\mu = \Gamma_a^\mu + \Gamma_{b+e}^\mu$ на массовой поверхности, как и в СМ, равно нулю, а второе имеет вид

$$\Gamma^\mu(\beta) = \frac{eg^2 A_{ij}^D}{9 \cdot 2^8 \pi^2} \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{m_W} \left(\sqrt{\beta_i} R + \sqrt{\beta_j} L \right) \left[A(x_D) - (1+v)A(0) \right], \quad (3.26)$$

где $1+v = 2 - 4 \sin^2 \theta_W/3$,

$$A(x_D) = \frac{8 - 30x_D + 9x_D^2 - 5x_D^3}{(x_D - 1)^3} + \frac{18x_D^2}{(x_D - 1)^4} \ln x_D,$$

$$A(0) \approx -8, \quad A(x_D) \approx -5 \quad \text{при } x_D = m_D^2/m_W^2 \gg 1 \quad (m_D \geq 500 \text{ ГэВ}).$$

Таким образом, вклад синглетного кварка через дополнительные диаграммы рис. 7 определяется параметрами $A_{ij}^D = U_{Dj}^* U_{Di}$, т.е. величиной смешивания D -кварка с d_i и d_j .

При суммировании по аромату всех вкладов, как тех, что фигурируют в СМ, так и дополнительных, необходимо учитывать, что обычный ГИМ-механизм теперь не работает, т.е. не зависящие от x_k члены опускать нельзя, т.к. (3×3) -подматрица смешивания, как часть обобщенной (4×4) -матрицы, в модели с синглетным кварком не унитарна. С учетом этого для полной $d_i d_j \gamma$ -вершины, т.е. для суммы $\Gamma_\gamma^\mu(\beta)$ в СМ (2.5) и $\Gamma_\gamma^\mu(\beta)$, представленной (3.26), имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_\gamma^\mu(\beta) \approx & \frac{eg^2}{9 \cdot 2^7 \pi^2} \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{m_W} \left(\sqrt{\beta_i} R + \sqrt{\beta_j} L \right) \times \\ & \times \left[A_\gamma^W(x_k) A_{ij}^k + \frac{A_{ij}^D}{2} \{ A_\gamma^Z(x_D) - (1+v)A_\gamma^Z(0) \} \right], \end{aligned} \quad (3.27)$$

где A_γ^W и A_γ^Z определяют вклад СМ и дополнительный вклад соответственно; они определены в (2.6) и (3.26). Записав $A_\gamma^W(x_k) = A_\gamma^W(0) + \bar{A}_\gamma^W(x_k)$, где $\bar{A}_\gamma^W(x_k)$ определена в (2.6), и используя унитарность (4×4) -матрицы U_{ik} :

$$\sum_{k=1}^3 A_{ij}^k \equiv \sum_{k=1}^3 U_{kj}^* U_{ki} = -U_{Dj}^* U_{Di} = -A_{ij}^D, \quad (3.28)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_\gamma^\mu(\beta) \approx & \frac{eg^2}{9 \cdot 2^7 \pi^2} \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{m_W} \left(\sqrt{\beta_i} R + \sqrt{\beta_j} L \right) \left\{ A_{ij}^k \bar{A}_\gamma^W(x_k) + \right. \\ & \left. + A_{ij}^D \left[-A_\gamma^W(0) + \frac{1}{2} A_\gamma^Z(x_D) - \frac{1}{2} (1+v) A_\gamma^Z(0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Поскольку $A_\gamma^W(0) = 46$, $A_\gamma^Z(x_D) \approx -5$, $A_\gamma^Z(0) = -8$, то из (3.29) следует, что доминирующий вклад синглетного кварка обусловлен неунитарностью (3×3) -подматрицы смешивания U .

Глюонная вершина получается из (3.26) заменой $-e/3 \rightarrow (g_s/2)\lambda_n$. Полная вершина как сумма вкладов СМ и модели с СК имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_G^\mu(\beta) \approx & \frac{g_s g^2}{3 \cdot 2^8 \pi^2} \frac{i\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{m_W} \left(\sqrt{\beta_i} R + \sqrt{\beta_j} L \right) \left\{ \bar{A}_G^W(x_k) A_{ij}^k + \right. \\ & \left. + A_{ij}^D \left[-A_G^W(0) - \frac{1}{2} A_G^Z(x_D) + \frac{1}{2} (1+v) A_G^Z(0) \right] \right\} \lambda_n, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $A_G^W(0) = -A_G^W(0) = 8$, $A_G^Z(x_h) = A_G^Z(x_h) \approx -5$ при $x_D \gg 1$. Таким образом, для глюонной вершины все вклады синглетного кварка оказываются одного порядка. Выражения (3.29) и (3.30) совпадают с результатом в [132] в «стандартной» части, т.е. определяемой W -вкладом, но Z -вклады отличаются (заметим, что в работе [132] проводятся численные оценки Z -вкладов, основанные на качественных аргументах).

4. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ СИНГЛЕТНОГО КВАРКА

4.1. Ограничения на углы смешивания синглетного кварка с обычными. В разд. 3 описан генезис НТИА на древесном уровне, причем вершина имеет вид $g_{ik} \bar{q}_{iL} \gamma^\mu q_{kL}$. Интенсивность соответствующих редких процессов зависит от величин углов смешивания синглетного кварка с обычными, т.е. $g_{ik} \sim U_{Di}^* U_{Dk}$, и в силу чувствительности редких переходов к величинам U_{Dk} или U_{Uk} необходимость получения информации об этих параметрах из экспериментальных данных очевидна. Ниже мы оценим значения параметров смешивания из данных по редким распадам и смешиванию в мезонных системах.

На рис.8 приведена диаграмма, описывающая редкий лептонный распад нейтрального мезона $M_{\alpha\beta}^0$ с кварковым составом $q_\alpha\bar{q}_\beta$ на древесном уровне.

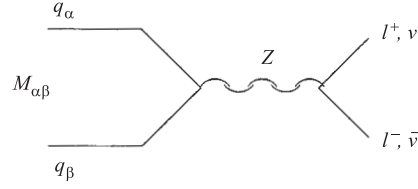


Рис. 8. Лептонный редкий распад $M_{\alpha\beta}^0 \rightarrow l^+ l^-$

Для получения верхних границ на параметры смешивания обычно ограничиваются только древесным вкладом в предположении его доминирования. Такой анализ лептонных распадов различных мезонов проводился в работах [79, 81, 97, 125]. Совместный учет петлевых вкладов СМ и древесных в модели с синглетным кварком рассмотрен в [115, 125].

Физическими состояниями нейтральной системы с кварковым составом $q_\alpha\bar{q}_\beta$ являются коротко- и долгоживущие компоненты $M_{S,L}^0(\alpha\beta) \approx (M^0(\alpha\beta) \pm \bar{M}^0(\alpha\beta))/\sqrt{2}$. Ширина лептонного распада этих компонент в модели с СК определяется выражением

$$\Gamma(M_{S,L}^0(\alpha\beta) \rightarrow l^+ l^-) = \frac{G_F^2 f_M^2}{16\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{\alpha\beta} \pm A_{\alpha\beta}^*) \right|^2 m_M m_l^2 \left(1 - 4 \frac{m_l^2}{m_M^2} \right)^{1/2}, \quad (4.1)$$

где f_M — константа распада M , $A_{\alpha\beta} = U_{4\alpha}^* U_{4\beta}$ для мезонов, составленных из нижних кварков и $A_{\alpha\beta} = U_{\alpha 4}^* U_{\beta 4}$ для мезонов из верхних кварков.

В расчетах часто используется известный прием, позволяющий избежать больших возможных погрешностей, порождаемых определением констант распада, а именно: выражение нормируется на ширину доминирующего лептонного канала:

$$\frac{Br(M_{S,L}^0 \rightarrow l^+ l^-)}{Br(M^+ \rightarrow l^+ \nu_e)} \approx \frac{\tau(M_{S,L}(\alpha\beta))}{\tau(M^+(\alpha\beta)) |U_{\alpha\beta}|^2} (\text{Re(Im)}(A_{\alpha\beta}))^2 \frac{(1 - 4m_l^2/m_{M^0}^2)^{1/2}}{(1 - m_l^2/m_{M^+}^2)^2}. \quad (4.2)$$

Здесь $U_{\alpha\beta}$ — элемент матрицы смешивания, соответствующий переходу $d_\alpha \rightarrow u_\beta$, $\text{Re(Im)}(A_{\alpha\beta})$ — реальная или мнимая часть $A_{\alpha\beta}$, $\tau(M)$ — время жизни мезона M .

При рассмотрении конкретного распада $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ амплитуда распада A_{tot} может быть представлена в виде суммы (см. п. 2.3.1):

$$A_{\text{tot}} = A^I + A_{\text{LD}}^R + A_{\text{SD}}^R, \quad (4.3)$$

где A^I — мнимая часть A_{tot} , обусловленная вкладом промежуточного двухфотонного состояния, A_{LD}^R — реальная часть A_{tot} , связанная с эффектами

больших (малых) расстояний. Вклад диаграммы, приведенной на рис. 8, определяет величину A_{SD}^R и используется для оценки верхней границы углов смешивания. В работе [27] с использованием экспериментального значения [23] $Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{exp}} = (7,15 \pm 0,16) \cdot 10^{-9}$ и теоретических оценок вкладов A_{LD}^I и A_{LD}^R найдено ограничение

$$Br(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{SD} < 2,8 \cdot 10^{-9}. \quad (4.4)$$

Учитывая, что распад $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ происходит без CP -нарушения (то есть распадается K_2 -компонента K_L , имеющая $CP = -1$, $(CP|K^0) = |\bar{K}^0\rangle$, $K_L \approx K_2$), из формулы (4.2) с учетом (4.4) находим ограничение

$$|\text{Im } A_{ds}| < 0,7 \cdot 10^{-5}, \quad A_{ds} = U_{Dd}^* U_{Ds}. \quad (4.5)$$

В этом случае предполагается, что доминирующий вклад в A_{SD}^R дается диаграммой рис. 8 и $|A_{SD}^R| \sim |\text{Im } A_{ds}|$.

В распадах D^0 - и B^0 -мезонов L - и S -компоненты не разделены, так что в (4.1) фигурирует величина $|A_{d\beta}|^2$, которая и подставляется в формулу вместо $2|\text{Re } A_{d\beta}|^2$ или $2|\text{Im } A_{d\beta}|^2$. Из эксперимента известны ограничения [23]:

$$Br(D^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{exp}} < 4,1 \cdot 10^{-6}, \quad Br(B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)_{\text{exp}} < 6,8 \cdot 10^{-7}, \quad (4.6)$$

откуда в предположении доминирования древесного SD-вклада следуют ограничения:

$$|A_{uc}| = |U_{uU}^*| |U_{cU}| \leq 5 \cdot 10^{-2}, \\ |A_{db}| = |U_{Dd}^*| |U_{Db}| \leq 7 \cdot 10^{-3}.$$

При выводе этих неравенств не учитываются дополнительные LD-вклады, а также КХД-поправки, поэтому в результате мы получаем лишь грубые оценки сверху.

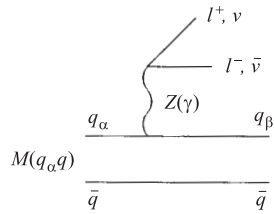


Рис. 9. Полулептонный редкий распад $M(q_\alpha q) \rightarrow M(q_\beta q) l^+ l^-$, $(\nu \bar{\nu})$ в модели с СК

Полулептонный распад в модели с синглетным кварком изображен диаграммой на рис. 9.

Напомним, что амплитуды редких полулептонных распадов $K_{L,S}^0$ -мезонов содержат заметные LD- и КХД-вклады. Кроме того, экспериментальные ограничения для ширин этих распадов довольно слабые, так что для дальнейших оценок удобнее пользоваться экспериментальными данными по распадам $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$ и $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$. Используя центральное экспериментальное значение (2.17) и теоретическую оценку, полученную в СМ (2.18), можно выделить величину

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}) \approx 0,68 \cdot 10^{-10}$$

и отнести ее на счет древесного вклада, обусловленного синглетным кварком. Нормируя древесный вклад на брэнчинг доминирующего канала, запишем:

$$\frac{Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})}{Br(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu)} \approx \frac{|A_{ds}|^2}{4|U_{us}|^2},$$

откуда с учетом значения $Br(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu)_{\text{exp}} = (4,82 \pm 0,06)\%$ и $|U_{us}| \approx 0,22$ находим оценку:

$$|A_{ds}| = |U_{Dd}^*| |U_{Ds}| \approx 1,7 \cdot 10^{-5}, \quad (4.7)$$

что по порядку величины согласуется с оценкой, приведенной выше.

Обратим внимание на обстоятельство, которое, возможно, имеет принципиальное значение. Из всех НТИА-эффектов, изучаемых экспериментально, только для редкого полуплептонного распада $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ имеются основания утверждать, что величина брэнчинга целиком формируется за счет взаимодействий на малых расстояниях. Сегодня именно этот распад характеризует возможности теории в описании редких процессов. Как уже отмечалось в п. 2.3.2, намечается некоторый конфликт между экспериментом и предсказанием СМ. В то же время расширение СМ с синглетным кварком несколько улучшает количественную интерпретацию этого распада — для этого необходимо лишь зафиксировать произведение элементов обобщенной матрицы смешивания (4.7).

В работе [84] приведены ограничения, полученные из экспериментальных данных по инклюзивному распаду $B \rightarrow X \mu^+ \mu^-$:

$$|A_{db}| \leq 10^{-3}, \quad |A_{sb}| \leq 10^{-3}.$$

Радационные распады протекают только на петлевом уровне и в модели с синглетным кварком, так что соответствующие вклады малы. По этой причине редкие радиационные распады слабо чувствительны к расширению модели с включением синглетного кварка, и из их рассмотрения практически невозможно в настоящее время получить надежные ограничения на параметры смешивания.

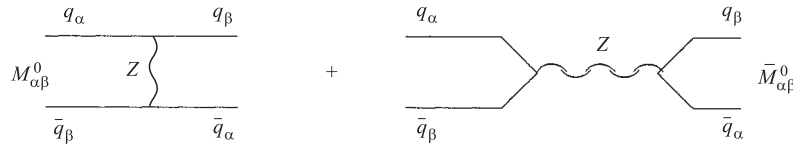


Рис. 10. Смешивание $M^0 - \bar{M}^0$ в модели с СК

Рассмотрим теперь ограничения на углы смешивания синглетного кварка со стандартными, вытекающие из эффектов смешивания в системах нейтральных мезонов. Механизм смешивания на древесном уровне в модели с синглетным кварком иллюстрируется двумя диаграммами на рис. 10.

Величина же смешивания, характеризующаяся расщеплением масс, связана с амплитудой перехода следующим образом: $\Delta m = 2|A(M^0 \rightarrow \bar{M}^0)|$. Вклад древесной составляющей, т.е. диаграмм на рис. 10, имеет вид

$$\Delta m_{\alpha\beta}^{\text{tr}} = \frac{\sqrt{2}}{3} G_F f_M^2 m_M B_M \eta_M |U_{4\alpha}^* U_{4\beta}|^2, \quad (4.8)$$

где m_M — масса мезона M^0 , B_M — «bag»-фактор, η_M — поправочный КХД-фактор. Таким образом, древесный вклад $\Delta m^{\text{tr}} \sim G_F$, в то время как стандартный петлевой вклад ВД-диаграмм $\Delta m^{\text{loop}} \sim G_F^2$, что и приводит к чрезвычайной чувствительности смешивания к вершине $q_\alpha q_\beta Z$. Отметим, что расчет описанных вкладов имеет смысл на малых расстояниях.

В табл. 2 приведены значения некоторых исходных параметров и рассчитанные с их использованием ограничения на величины $A_{\alpha\beta}$.

Таблица 2. Ограничения на углы смешивания СК с обычными

M	$\Delta m, \hbar s^{-1}$	$f_M \sqrt{B_M}, \text{ ГэВ}$	η_M	$A_{\alpha\beta}$
K^0	$0,53 \cdot 10^{10}$	0,16	0,76	$< 2,6 \cdot 10^{-4}$
B_d^0	$0,46 \cdot 10^{12}$	0,20	0,55	$\leq 7,0 \cdot 10^{-4}$
B_s^0	$> 9,1 \cdot 10^{12}$	$\approx 0,20$	$\approx 0,55$	$> 3,0 \cdot 10^{-3}$
D^0	$< 7 \cdot 10^{10}$	$\approx 0,18$	$\approx 1,0$	$< 3,8 \cdot 10^{-4}$

Численные значения входных параметров взяты из работ [23, 84, 95, 125]. Укажем, что ограничение на A_{ds} может быть усилено с учетом возможного повышения LD-вклада в K^0 – $\bar{K}^0$ -смешивание до 50 % [125]. Этот факт, а также то, что экспериментально для B_s^0 и D^0 имеются только ограничения, означает наличие значительных погрешностей в определении соответствующих $A_{\alpha\beta}$.

В [125] с использованием экспериментального значения параметра CP -нарушения $|\epsilon_K|$ в K^0 – $\bar{K}^0$ -системе получена оценка

$$|\text{Im}(A_{ds})|^2 < 9,2 \cdot 10^{-10},$$

которая по порядку величины согласуется с полученными ранее.

Из имеющихся оценок верхних границ на углы смешивания наиболее жесткой является оценка (4.5), однако оценка (4.7) более надежна для получения информации об абсолютной величине углов смешивания. Далее будем использовать оценку по порядку величины

$$|A_{ds}| = |U_{Dd}^*| \cdot |U_{Ds}| \leq 10^{-5}.$$

Используя это ограничение, получим оценку нижнего допустимого значения массы D -кварка. В предположении «seesaw»-механизма смешивания

$$|U_{D\alpha}|^2 \sim (m_\alpha/m_D)^p, \quad p = 1 \text{ или } 2. \quad (4.9)$$

При $p = 1$, $|U_{D\alpha}|^2 \sim (m_\alpha/m_D)$ (linear seesaw) и для средних значений токовых масс кварков $m_d \approx 10$ МэВ и $m_s \approx 200$ МэВ находим нижнюю границу $m_D \geq 0,5$ ТэВ.

Полагая $p = 2$, $|U_{D\alpha}|^2 \sim (m_\alpha/m_D)^2$ (quadratic seesaw), для тех же значений масс кварков получаем $m_D \geq 20$ ГэВ, что исключается экспериментом. Поэтому вариант с $p = 2$ в дальнейшем не рассматривается.

Отметим, что используя ограничение $|A_{uc}| \leq 3,8 \cdot 10^{-4}$, аналогично вышеизложенному можно оценить нижнюю границу массы верхнего синглетного кварка при $p = 1$: $m_U \geq 220$ ГэВ. Таким образом, из известных данных следует очень слабое ограничение на массу верхнего синглетного кварка, что обусловлено большим (на несколько порядков) расхождением экспериментальных ограничений и теоретических сведений о величине Δm_D .

4.2. Недиagonalные процессы рождения синглетных и обычных кварков в e^+e^- -, ep - и $p\bar{p}$ -реакциях. С ростом энергии коллайдеров становится актуальным прогноз возможных путей рождения и прямой идентификации синглетного кварка или других экзотических частиц. В литературе рассмотрены процессы парного рождения D -кварка и образование тяжелого кваркония $H = (D\bar{D})$ (см., например, [110, 111]). По оценке, полученной в п. 4.1, масса D -кварка $m_D > m_W$ и может быть ~ 1 ТэВ, т.е. парное рождение $D\bar{D}$ скорее всего возможно при энергиях > 1 ТэВ. В этой ситуации представляет интерес анализ энергетически более доступного, хотя и подавленного малым углом смешивания, процесса рождения пар вида $D\bar{d}_\alpha$, $\bar{D}d_\alpha$ [109].

Недиagonalные процессы рождения пар вида $d_i\bar{d}_k$ и $\bar{d}_i d_k$, где $d_i = d, s, b$, в СМ сильно подавлены, т.к. протекают на петлевом уровне. Их интенсивность сравнима с интенсивностью редких распадов, обусловленных теми же вершинами. В моделях с синглетным кварком эти процессы имеют место на древесном уровне, но подавлены малыми допустимыми углами смешивания D -кварка с обычными. В этом разделе мы получим оценки сечений недиagonalных процессов рождения пар кварков $d_i\bar{d}_k$ в e^+e^- -, ep - и $p\bar{p}$ -соударениях с использованием ограничений, полученных в п. 4.1.

Ограничения на U_{ki} необходимы для расчета сечений подпроцессов

$$\begin{aligned} a) & \quad e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow D\bar{d}_\alpha; d_\alpha\bar{d}_\beta, \\ б) & \quad ed \rightarrow Z \rightarrow eD, \\ в) & \quad eu \rightarrow W \rightarrow \nu D, \\ г) & \quad q\bar{q} \rightarrow Z \rightarrow Dd_\alpha. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Значения сечений подпроцессов служат основой для оценки сечений реальных процессов (см. рис. 11). На этом рисунке показаны реакции $e^+e^- \rightarrow$

2jet, $ep \rightarrow eF_D$, $ep \rightarrow \nu F'_D$, $p\bar{p} \rightarrow FF_D$, где F , F_D — обычный и тяжелый барионы. Струи порождаются недиагональной парой $d_\alpha \bar{d}_\beta$ или $D\bar{D}_\beta$. Каждому реальному процессу на рис. 11 соответствует один из подпроцессов (4.10). Реакция (4.10,a) является симметричной, что обычно указывается в форме $Z \rightarrow d_\alpha \bar{d}_\beta + \bar{d}_\alpha d_\beta$.

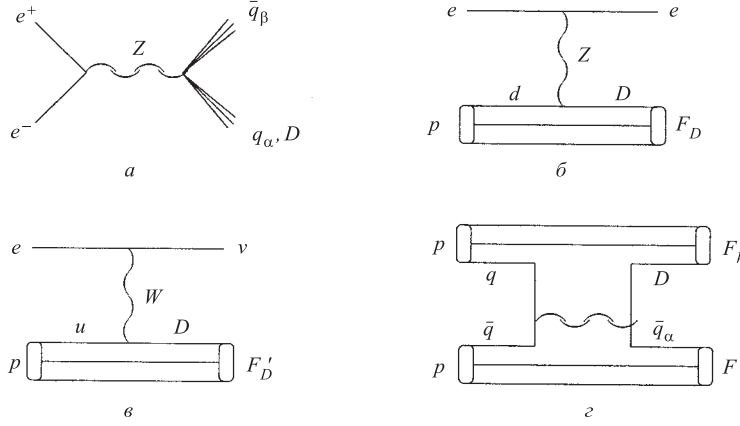


Рис. 11. Процессы недиагонального рождения h -кварка в e^+e^- -, ep - и $p\bar{p}$ -соударениях: а) $e^+e^- \rightarrow 2\text{jet}$; б) $ep \rightarrow eF_D$; в) $ep \rightarrow \nu F'_D$; г) $p\bar{p} \rightarrow FF_D$

Оценка сечения подпроцесса $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow D\bar{d}_\beta, \bar{D}d_\beta$ проведена в околопороговой области рождения D -кварка, т.е. при $\sqrt{s} \approx m_D$, причем энергия образовавшегося легкого кварка $E_d \approx \sqrt{s} - m_D$ удовлетворяет неравенствам $m(d_\alpha) \ll E_d \ll \sqrt{s}$. В этом случае основной вклад в интегральное сечение имеет вид

$$\sigma = A|U_{DD}^*U_{D\beta}|^2(1+a_e^2)\frac{m_D}{\sqrt{s}}\left(\frac{\sqrt{s}-m_D}{s-m_Z^2}\right)^2, \quad (4.11)$$

где $A = 3g_z^4/2^7\pi$, $a_e = 1 - 4\sin^2\theta_W$, $m_D \gtrsim 500$ ГэВ. Из (4.11) следует, что при $U_{Db} = \sqrt{m_b/m_D}$ и $m_D \sim 500$ ГэВ, т.е. при $U_{Db} \sim 0,1$ сечение в околопороговой области ~ 1 фб.

При образовании недиагональных пар обычных кварков сечение максимально при $\sqrt{s} = m_Z$ (низкоэнергетические резонансы не учитываются). Используя в пропагаторе Z -бозона брейт-вигнеровскую аппроксимацию с учетом неравенства $\Gamma_Z \ll m_Z$, запишем главный вклад в сечение в виде

$$\sigma = \frac{A}{6}|U_{D\alpha}^*U_{D\beta}|^2(1+a_e^2)s[(s-m_Z^2)^2 + \Gamma_Z^2 m_Z^2]^{-1}. \quad (4.12)$$

Согласно (4.12) при $|U_{D\alpha}| \sim \sqrt{m_\alpha/m_D}$ наиболее благоприятно рождение недиагональных пар $b\bar{s}$, $\bar{b}s$. При $\sqrt{s} = m_Z$ из (4.12) находим $\sigma \sim 10^2$ фб, что на два порядка выше, чем сечение рождения пар $D\bar{b}$, $\bar{D}b$.

Подпроцесс для реакции $p\bar{p} \rightarrow FF_D$ (см. рис. 11,з) изображается аналогичной s -канальной диаграммой. Соответствующее выражение для сечения $\sigma(d\bar{d} \rightarrow s\bar{b}, \bar{s}b)$ находится из (4.11) заменой величины $a_e \rightarrow a_d = 0,693$, характеризующей взаимодействие Z -бозона с первичными фермионами. Подстановка a_d в (4.11), (4.12) дает результаты, аналогичные вышеописанным (количественно сечения возрастают в 1,5 раза), т.е. подавление интенсивности рождения $D\bar{b}$ -пар на два порядка по сравнению с рождением $b\bar{s}$ -пар.

Для t -канальных реакций $e\bar{p} \rightarrow eF_D, \nu F'_D$ (рис. 11,б,в) главный вклад в сечение в околороговой области определяется формулой

$$\sigma \approx \frac{A}{12} |U_{DD}^* U_{Dd}|^2 (3 + 2a_e + 3a_e^2) \left[m_D \sqrt{s} \left(1 + \frac{m_Z^2}{m_D(\sqrt{s} - m_D)} \right) \right]^{-1}. \quad (4.13)$$

Для $\sigma(ed \rightarrow eD)$ в районе $\sqrt{s} \approx 500$ ГэВ находим $\sigma \sim 0,01$ фб, т.е. сильное дополнительное подавление перехода $d \rightarrow D$ вследствие малости величин U_{DD} , U_{Dd} , имеющих порядок 10^{-3} .

Сечения подпроцесса рождения обычных кварков в $e\bar{p}$ -соударениях описывается выражением

$$\sigma = \frac{A}{8} |U_{1D}^* U_{1\alpha}|^2 J(a, a_e)/s, \quad (4.14)$$

где

$$J(a, a_e) = \int d\theta [4(1 + a_e^2) + (1 - a_e)^2(1 - \cos\theta)^2] (a + \sin\theta)^{-2},$$

$$a = 1 + 2m_Z^2/s.$$

Простой анализ показывает, что при $\sqrt{s} \gg m_Z$ с учетом $a_e \ll 1$ формула (4.14) принимает вид

$$\sigma \approx \frac{A}{12m_Z^2} |U_{1D}^* U_{1\alpha}|^2. \quad (4.15)$$

При $\sqrt{s} \ll m_Z$ находим из (4.1)

$$\sigma \approx \frac{A s}{16m_Z^4} |U_{1D}^* U_{1\alpha}|^2. \quad (4.16)$$

Таким образом, при малых энергиях сечение растет пропорционально квадрату полной энергии s , а при больших энергиях имеет место насыщение.

Оценки величин сечения дают $\sigma \sim 10^{-6}$ фб при $\sqrt{s} = 10$ ГэВ и $\sigma \sim 10^{-3}$ фб при $\sqrt{s} \gg m_Z$, т.е. весьма малые значения. Для процесса $e p \rightarrow \nu F'_D$ результаты аналогичны; следовательно, $e p$ -соударения менее перспективны для фиксации вкладов синглетного кварка в сечения процессов недиагонального рождения пар.

Оценки, проведенные в предположении «seesaw»-механизма, показывают, что наиболее перспективными из рассмотренных процессов являются реакции с рождением пар $D\bar{b}$, $\bar{D}b$ и $b\bar{s}$, $\bar{b}s$ в e^+e^- -аннигиляции. Рассмотрим детальнее первую из них. Несмотря на малое сечение и большой фон, рождение пар $D\bar{b}$, $\bar{D}b$ можно зафиксировать при достаточно большой светимости коллайдера благодаря уникальной сигнатуре конечных состояний. Рождение кварка d_α ($\bar{d}_\alpha$) с малой энергией и медленного D -кварка приводит к образованию струи с малой полной энергией E_α и продуктов распада D -кварка, уносящих основную часть энергии. Основными каналами распада являются $D \rightarrow Wu_\beta$ и $D \rightarrow Zd_\beta$ с отношением вероятности $Br(WX)/Br(ZX) \approx 2$. Образовавшиеся кварки u_β , d_β порождают высокоэнергетические (по сравнению с E_α) струи с полной энергией $E_\beta \approx (m_D^2 - m_Z^2)/2m_D \approx m_D/2$. Промежуточные бозоны W и Z распадаются по лептонному и адронному каналам. Последний характерен рождением обычных струй с полной энергией $E \sim m_D/2$, ассоциированных с диагональной $q\bar{q}$ - или недиагональной $\bar{u}_i d_j$ -парами. Таким образом, общая картина процесса $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow D\bar{d}_\alpha, \bar{D}d_\alpha$ выглядит следующим образом: в лептонном канале распада W и Z образуются две струи с различными полными энергиями $E_\alpha \ll m_D$, $E_\beta \sim m_D/2$ (т.е. $E_\alpha \ll E_\beta$) и энергичная лептонная пара с суммарной энергией $E_l \sim m_D/2$; в адронном канале распада W и Z образуются две такие же несимметричные струи и две струи, порождаемые обычной парой кварков с полной энергией $\sim m_D/2$. Отношение вероятностей двухструйных и четырехструйных событий с учетом распадных свойств D -кварка оценивается по формуле

$$\frac{Br(2 \text{ jet}, l_1, l_2)}{Br(4 \text{ jet})} \approx \frac{3 - 2R_H^W - R_H^Z}{2R_H^W + R_H^Z}, \quad (4.17)$$

где R_H^W , R_H^Z — вероятности адронного канала распада W - и Z -бозонов соответственно. Подстановка экспериментальных значений $R_H^W \approx 0,7$, $R_H^Z \approx 0,7$ дает для отношения (4.17) значение, примерно равное 0,43.

Проанализируем теперь пространственную картину процесса $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow D\bar{d}_\alpha, \bar{D}d_\alpha$. Множество первоначальных направлений оси струи d_α и импульса D -кварка обладает приближенной сферической симметрией, так как нарушающий ее член в сечении мал. Интегральный эффект типа асимметрии вперед-назад заметен, однако он непосредственно не измерим вследствие быстрого распада D -кварка. С учетом этого диаграмму направлений разлета продуктов реакции удобно рассматривать при фиксированном (произвольным образом) направлении струи d_α — направление $\mathbf{p}_\alpha$ на рис. 12.

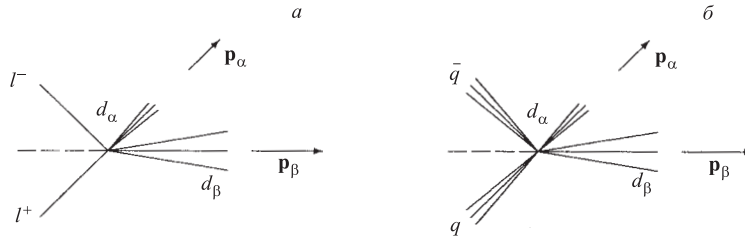


Рис. 12. Типичная пространственная картина разлета продуктов реакции $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow Dd_\alpha$ для двух- (а) и четырехструйных (б) событий

Наиболее характерной особенностью недиагонального адронного рождения в e^+e^- -реакциях при $\sqrt{s} \approx m_D$ является наличие двух струй, направленных под произвольным углом друг к другу, причем инвариантные массы этих струй сильно отличаются. Это должно проявляться в различных экспериментальных распределениях по быстротам частиц в струях. Такие несимметричные струи сопровождаются лептонной парой либо парой симметричных по энергии адронных струй с суммарной энергией $\approx m_D/2$. Обе пары группируются вдоль направления, противоположного импульсу высокоэнергетической струи $\mathbf{p}_\beta$, причем, так как $\mathbf{p}_\alpha$ мал по сравнению с $\mathbf{p}_\beta$, то суммарный импульс пары примерно равен $\mathbf{p}_\beta$, что иллюстрируется на рис. 12.

4.3. Свойства t -кварка в модели с верхним синглетным кварком. Исследование свойств t -кварка может сыграть важную роль в проверке стандартной модели. Благодаря большой массе кварка в процессах с его участием могут проявиться отклонения от секвенциальности, связанные с высокоэнергетическими расширениями СМ. Особый интерес вызывает процесс недиагонального рождения t -кварка вблизи порога, обусловленный НТИА, например, в реакции $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow t\bar{c} + \bar{t}c$. Кинематическая структура конечного состояния в этой реакции весьма характерна, так как инвариантная масса струи, порождаемой c -кварком, близка к нулю в этой энергетической области. Кроме того, в этом случае имеется уникальная возможность проверки предсказаний СМ на петлевом уровне на масштабе $\approx 2m_W$ [133].

В модели с верхним синглетным кварком величина массы t -кварка имеет особое значение. В такой модели на древесном уровне возникают НТИА

$$L_Z = \frac{g}{2 \cos \Theta_W} U_{U\alpha}^* U_{U\beta} \bar{q}_{\alpha L} \gamma^\mu q_{\beta L} Z_\mu, \quad (4.18)$$

которые означают наличие $U - u_\alpha$ -смешивания. Параметр $U_{U\alpha}$, описывающий смешивание, в предположении «seesaw»-механизма зависит от масс следующим образом: $U_{U\alpha} \approx (m_\alpha/m_U)^{1/2}$. В этом случае интенсивность tc -связи определяется константой $g_{tc} \sim \sqrt{m_t m_c}/m_U$, и на масштабе $m_U \leq 1$ ТэВ

древесная НТИА-вершина будет доминировать по сравнению со стандартной петлевой вершиной. Помимо этого большое t – U -смешивание приведет к заметным отклонениям свойств t -кварка от стандартных. Эти факты повышают интерес к поиску сигналов верхнего синглетного кварка, особенно после начала экспериментальных программ ЛНС и «Tevatron» и обработки результатов исследований e^+e^- -процессов на LEP2.

В п. 4.1 с использованием экспериментального ограничения на величину Δm_D и в предположении «seesaw»-механизма была получена нижняя оценка массы верхнего синглетного кварка $m_U \geq 220$ ГэВ; ограничения на элементы матрицы смешивания в этом случае таковы:

$$|U_{Uu}| \leq 10^{-3}, \quad |U_{Uc}| \leq 10^{-1}, \quad |U_{Ut}| \leq U_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.19)$$

Вышеприведенные оценки весьма приближенны, во-первых, потому, что получены с использованием не точно определенной величины Δm_D , во-вторых, поскольку велик разброс в массах токовых кварков. Однако из этих оценок следует, что константа взаимодействия $g_{tc} \sim U_{Ut}^* U_{Uc} \leq 10^{-1}$, а значит, может быть на несколько порядков выше эффективной константы связи на петлевом уровне. Отметим, что изучению феноменологии аномальной tc -связи в последнее время уделяется повышенное внимание [122, 123], а эксперимент пока дает весьма слабое ограничение [134]:

$$(Br(t \rightarrow cZ) + Br(t \rightarrow uZ))_{\text{exp}} < 0,33 \quad (95 \% \text{ c.l.}).$$

Ранее было показано, что (3×3) -матрица КМ в модели с синглетным кварком обобщается до унитарной (4×4) -матрицы, откуда в приближении малых U – u - и U – c -смешиваний следует

$$(|U_{tb}|^2 + |U_{tU}|^2)^{1/2} \approx 1, \quad (|U_{tU}|^2 + |U_{UU}|^2)^{1/2} \approx 1. \quad (4.20)$$

Отметим, что в СМ $|U_{tb}| \approx 1$, а в расширении с синглетным верхним кварком диапазон изменения параметров смешивания определяется величиной U_{Ut} . Экспериментальный результат [135]

$$Br(t \rightarrow bW)_{\text{exp}} = 0,87_{-0,30}^{+0,13+0,13}_{-0,11}$$

не дает дополнительной информации для ужесточения ограничений.

Основным следствием большого t – U -смешивания является значительное увеличение брэнчинга редкого (в СМ) канала распада $t \rightarrow cZ$:

$$\frac{Br(t \rightarrow cZ)}{Br(t \rightarrow bW)} \approx \frac{1}{2} \frac{1 - 3\alpha_Z^2 + 2\alpha_Z^3}{1 - 3\alpha_W^2 + 2\alpha_W^3} \frac{|U_{tU}^* U_{cU}|^2}{|U_{tb}|^2}. \quad (4.21)$$

В СМ на уровне петель $Br(t \rightarrow cZ)_{\text{theor}} \sim 10^{-13}$ [136, 137] в модели с двумя хиггсовскими дублетами без дискретной симметрии $Br(t \rightarrow cZ)_{\text{theor}} \sim 10^{-7}$ [133, 138]. В модели с верхним синглетным кварком при $m_U < 1$ ТэВ получаем результат на несколько порядков выше: $Br(t \rightarrow cZ)_{\text{theor}} \sim 10^{-4}-10^{-5}$. Экспериментальный предел для Ztc -связи $k_{Ztc}^2 < 0,533$ [139], где $k_{Ztc} = (g/2 \cos \theta_W)|U_{Ut}^* U_{Uc}|$, дополнительной информации не содержит.

Большое t - U -смешивание существенно изменяет также C_V - C_A -структуру вершин $\bar{t}tZ$ и $\bar{U}UZ$. В СМ для $\bar{t}tZ$ -вершин

$$C_V^{\text{SM}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \Theta_W \right), \quad C_A^{\text{SM}} = -\frac{1}{4}, \quad (4.22)$$

а при отсутствии смешивания для вершины $\bar{U}UZ$:

$$C_V^0 = -\frac{2}{3} \sin^2 \Theta_W, \quad C_A^0 = 0, \quad (4.23)$$

при смешивании U и t -кварков

$$\begin{aligned} a) C_V^t &= C_V^{\text{SM}} - \frac{1}{4}|U_{tU}|^2, & C_A^t &= C_A^{\text{SM}} + \frac{1}{4}|U_{tU}|^2, \\ b) C_V^U &= C_V^{\text{SM}} - \frac{1}{4}|U_{UU}|^2, & C_A^U &= C_A^{\text{SM}} + \frac{1}{4}|U_{UU}|^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Как видно, при большом смешивании U_{tU} отклонения величин C_V и C_A от их стандартных значений могут быть значительны, что может быть зарегистрировано в эксперименте при измерениях асимметрии вперед-назад в рождении $t\bar{t}$ - и $U\bar{U}$ -пар, поскольку $A_{FB} = f(C_V, C_A)$.

Аномально сильная tc -связь, обусловленная смешиванием t и c -кварков с синглетным кварком, может проявиться и в недиагональном рождении пар $\bar{t}c, t\bar{c}$ в e^+e^- -, ep -, $p\bar{p}$ -реакциях. Расчеты сечения e^+e^- -аннигиляции с образованием $\bar{t}c + t\bar{c}$ показывают, что сечение весьма мало [140]: $\sigma_{\text{max}} \approx 1-3$ фб. Сечение рождения $\bar{t}c + t\bar{c}$ в $p\bar{p}$ -реакции того же порядка, а в ep — еще на несколько порядков ниже. Планируемое ранее повышение светимости LEP2 до 500 пб^{-1} оставляло заметные шансы на обнаружение таких событий, тем более, что одиночное рождение t -кварка имеет уникальную сигнатуру конечного состояния. Полученные к настоящему времени теоретические результаты подтверждают актуальность продолжения экспериментальных программ на ускорителях типа LEP2 в будущем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментальное и теоретическое исследование НТИА является одним из важнейших разделов программы проверки существующей теории элементарных частиц. В процессе реализации этой программы выяснилось, что

эффекты НТИА чувствительны к расширениям СМ. В этой ситуации возникает задача систематизации возможных обобщений СМ и их проявлений в области редких процессов.

В качестве доминирующей концепции расширения СМ рассматривается так называемый суперструнный сценарий — в частности, модель суперструны в 10-мерном пространстве, которая последовательно редуцируется через E_6 до группы стандартной модели $U(1) \times SU_L(2) \times SU_c(3)$. Необходимо подчеркнуть, что обращение к этому сценарию с неизбежностью приводит к возможности существования синглетного кварка наряду с другими нестандартными частицами. Выделенность синглетного кварка по сравнению с другими новыми частицами состоит в том, что он обладает ненулевым барионным зарядом, это заставило сформировать отдельную программу его исследования. Космологические ограничения на существование новых стабильных сильно-взаимодействующих частиц исключают предположение о стабильности СК вне зависимости от его происхождения. Практически единственным способом обеспечить распад синглетного кварка является его смешивание с обычными кварками.

Смешивание СК со стандартными приводит к перестройке структуры как заряженных, так и нейтральных токов, которая теперь рассматривается с единых позиций с использованием так называемой обобщенной матрицы смешивания. Экспериментальные проявления синглетного кварка могут быть как прямыми (высокоэнергетическими, доступными коллайдерам будущих поколений), так и косвенными (в достигнутой области энергий). Величина этих эффектов и соответствующий энергетический диапазон зависят от массы синглетного кварка и величины его смешивания со стандартными. Имеющиеся экспериментальные данные по редким процессам и теоретические оценки как в рамках СМ, так и в модели с синглетным кварком не противоречат гипотезе о существовании синглетного кварка с массой 0,5–1,0 ТэВ. В настоящий момент определенным аргументом в пользу расширения СМ путем включения в нее СК является возможность количественной интерпретации редкого полуперитонного распада $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ в рамках расширенной модели. Более определенные выводы о статусе СК можно будет сделать после существенного уточнения данных по редким процессам с одновременным развитием теоретических технологий их анализа.

Ограничения на массу СК и углы его смешивания со стандартными кварками, полученные из экспериментальных данных по редким процессам, позволили оценить возможности регистрации не только косвенных (низкоэнергетических) эффектов, обусловленных СК, но и прямых эффектов, связанных с рождением этого кварка. Перспективным является поиск сигналов недиагонального рождения СК в паре со стандартными в e^+e^- - и $p\bar{p}$ -соударениях. Несмотря на малые сечения таких процессов, они являются энергетически

доступными в ближайшее время. Кроме того, такие события обладают уникальной сигнатурой, облегчающей их поиск.

Таким образом, редкие процессы, порожденные НТИА, с участием синглетного кварка имеют специфический статус явлений, связывающих между собой гипотетическую физику сверхвысоких энергий и физику коллайдерных энергий. В рамках сценария, привлекающего наибольшее внимание, эти явления связывают суперструнную парадигму с адронной феноменологией.

Авторы благодарны О.Лалакулич за помощь в работе над текстом обзора.

Работа выполнена при поддержке гранта «Исследование процессов, индуцированных НТИА, в СМ и ее расширениях» конкурсного Центра фундаментального естествознания Минобрнауки РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gaillard M.K., Lee B.W. // Phys. Rev. D. 1975. V.10. P.897.
2. Inami T., Lim C.S. // Progr. of Theor. Phys. 1981. V.65. P.297.
3. Hagelin J.S. // Nucl. Phys. 1981. V.B139. P.123.
4. Cheng H.Y. // Phys. Rev. D. 1982. V.26. P.143.
5. Buras A.J., Slominski W., Steger H. // Nucl. Phys. B. 1984. V.245. P.369.
6. Kemoku M., Miyazaki Y., Takasugi E. // Phys. Rev. D. 1988. V.37. P.812.
7. Nandi S., Zhang L. // Phys. Rev. D. 1990. V.41. P.240.
8. He X.-G. et al. // Phys. Rev. D. 1990. V.41. P.248.
9. Ray-Mukhopadhyaya A., Raychandhuri A. // Phys. Rev. D. 1988. V.37. P.807.
10. Deshpande N.G., Eilam G. // Phys. Rev. D. 1982. V.26. P.2463.
11. Deshpande N.G., Nazerimonfared M. // Nucl. Phys. B. 1983. V.213. P.390.
12. Chia S.-P. // Phys. Lett. B. 1983. V.130. P.315.
13. Soares J.M., Barroso A. // Phys. Rev. D. 1989. V.39. P.1973.
14. Barroso A. // Phys. Rev. D. 1990. V.42. P.901.
15. Hou W.-S. // Nucl. Phys. B. 1988. V.308. P.561.
16. Barroso A. et al. // Phys. Lett. B. 1991. V.261. P.123.
17. Бейлин В.А., Верешков Г.М., Кукса В.И. // ЯФ. 1998. Т.61. С.1649.
18. Willey R.S., Yu H.L. // Phys. Rev. D. 1982. V.26. P.3086.
19. Grzadkowski B., Krawczyk P. // Z. Phys. C. 1983. V.18. P.43.
20. Godbole R.M., Turke U., Wirbel M. // Phys. Lett. B. 1987. V.194. P.302.
21. Eilam G., Soni A. // Phys. Lett. B. 1988. V.215. P.171.
22. Korner J.G., Nasrallah N., Schilcher K. // Phys. Rev. D. 1990. V.41. P.888.
23. Groom D.E. et al. (Particle Data Group) // Europ. Phys. Journ. C. 2000. V.15. P.1.
24. Dumn D.G., Lich A. // Phys. Rev. Lett. 1998. V.80. P.4633.

25. *Seghal L.M.* // Phys. Rev. 1969. V.183. P.1511.
26. *Ritchie J.L., Wojcicki S.G.* // Rev. of Mod. Phys. 1993. V.65. P.1149.
27. *Buras A.J., Silvestrini L.* // Nucl. Phys. B. 1999. V.546. P.299.
28. *D'Ambrosio G., Isidore G., Portoles J.* // Phys. Lett. B. 1998. V.423. P. 385.
29. *Gvozdev A.A., Mikheev N.V., Vassilevskaya L.A.* // Phys. Lett. B. 1992. V.274. P.205.
30. *Buchalla G., Buras A.J.* // Nucl. Phys. B. 1993. V.398. P.285.
31. *Buchalla G., Buras A.J.* // Nucl. Phys. B. 1993. V.400. P.225.
32. *Buchalla G., Buras A.J.* // Nucl. Phys. B. 1994. V.412. P.106.
33. *Buchalla G., Buras A.J.* // Phys. Rev. D. 1996. V.54. P.6782.
34. *Buchalla G., Buras A.J., Lautenbacher M.E.* // Rev. Mod. Phys. 1996. V.68. P.1125.
35. *Buchalla G., Buras A.J.* // Nucl. Phys. B. 1999. V.548. P.309.
36. *Adam W. et al.* (DELPHI Collaboration). Preprint CERN-PPE/96-67. 1996.
37. *Grossman Y., Ligeti Z., Nardi E.* // Nucl. Phys. B. 1996. V.465. P.369.
38. *Colangelo P. et al.* // Phys. Rev. D. 1996. V.53. P.3672.
39. *Deshpande N.G., Trampetic J.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V.60. P.2583.
40. *Liu D.* // Phys. Rev. D. 1995. V.52. P.5056.
41. *Kim C.S., Morozumi T., Sanda A.I.* // Phys. Rev. D. 1997. V.56. P.7240.
42. *Buchalla G., Isidori G., Rey S.* // Nucl. Phys. B. 1998. V.511. P.594.
43. *Barate R. et al.* (ALEPH Collaboration). Preprint CERN-EP/98-044.
44. *Edwards K.W. et al.* (CLEO Collaboration). Preprint CLEO CONF95-6. 1995.
45. *Deshpande N.G., He X.-G., Trampetic J.* // Phys. Lett. B. 1996. V.367. P.362.
46. *Milana J.* // Phys. Rev. D. 1996. V.53. P.1403.
47. *Gao C.-S., Lu C.-D., Qiu Z.-M.* // Z. Phys. C. 1995. V.69. P.113.
48. *Ciuchini M. et al.* // Phys. Lett. B. 1994. V.334. P.137.
49. *Ali A., Greub C.* // Z. Phys. C. 1991. V.49. P.431.
50. *Ali A., Greub C.* // Z. Phys. C. 1993. V.60. P.433.
51. *Buras A.J. et al.* // Nucl. Phys. B. 1994. V.424. P.374.
52. *Ali A., Greub C.* // Phys. Lett. B. 1995. V.361. P.146.
53. *Dikeman R.D., Shifman M.A., Uraltsev R.G.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V.11. P.571.
54. *Greub C., Hurth T., Wyler D.* // Phys. Lett. B. 1996. V.380. P.385.
55. *Adel K., Yao Y.-P.* // Phys. Rev. D. 1994. V.49. P.4945.
56. *Pott N.* // Phys. Rev. D. 1996. V.54. P.938.
57. *Chetyrkin K., Misiyak M., Munz M.* // Phys. Lett. B. 1997. V.400. P.206.
58. *Ciuchini M. et al.* Preprint CERN-TH/97-279. 1997.
59. *Kagan A.L., Neubert M.* Preprint CERN-TH/98-99. 1998.
60. *Greub C., Hurth T.* // Phys. Rev. D. 1997. V.56. P.2934.
61. *Donoghue J.F., Petrov A.A.* // Phys. Rev. D. 1996. V.53. P.3664.
62. *Deshpande N.G., Lo P., Trampetic J.* // Z. Phys. C. 1988. V.40. P.369.

63. *Dariescu M.-A., Dariescu C.* // Phys. Lett. B. 1996. V.367. P.349.
64. *Angelopoulos A. et al.* (CLEAR Collaboration) // Phys. Lett. B. 1988. V.444. P.38.
65. *Trischuk W. et al.* (CDF Collaboration) // Phys. Rev. Lett. 1998. V.80. P.2057.
66. *Godfrey S.* // Phys. Rev. D. 1986. V.33. P.1391.
67. *Abada A. et al.* // Nucl. Phys. B. 1992. V.376. P.172.
68. *Ali A., Jarlskog C.* // Phys. Lett. B. 1984. V.144. P.266.
69. *Ali A., London D.* // Z. Phys. C. 1995. V.65. P.431.
70. *Buras A.J., Lautenbacher M.E., Ostermaier G.* // Phys. Rev. D. 1994. V.50. P.3433.
71. *Hewett J.L., Takenchi T., Thomas S.* SLAC-PUB-70568. 1996.
72. *Nir Y.* // Phys. Lett. B. 1994. V.327. P.85.
73. *Langacker P., London D.* // Phys. Rev. D. 1988. V.38. P.886.
74. *Бейлин В.А., Верешков Г.М., Кукса В.И.* // ЯФ. 1991. Т.53. С.237.
75. *Castano D.J., Martin S.P.* // Phys. Lett. B. 1994. V.340. P.67.
76. *Ma E.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V.57. P.535.
77. *Rattazzi R.* // Nucl. Phys. B. 1990. V.335. P.301.
78. *Nardi E., Roulet E.* // Phys. Lett. B. 1990. V.245. P.105.
79. *Barger V. et al.* // Phys. Rev. D. 1986. V.33. P.192.
80. *Ma E.* // Phys. Lett. B. 1987. V.191. P.287.
81. *Decker R.* // Z. Phys. C. 1987. V.35. P.537.
82. *Singh S., Nagawat A.K., Sharma N.K.* // Phys. Rev. D. 1990. V.41. P.1438.
83. *Nardi E., Roulet E.* // Phys. Lett. B. 1990. V.248. P.139.
84. *Barger V., Berger M.S., Phillips R.J.N.* // Phys. Rev. D. 1995. V.52. P.1663.
85. *Silverman D.* // Phys. Rev. D. 1998. V.58. P.095006.
86. *Davidson A., Ranfone S., Wali K.C.* // Phys. Rev. D. 1990. V.41. P.208.
87. *Eilam G., Rizzo T.G.* // Phys. Lett. B. 1987. V.188. P.91.
88. *Buchmüller W., Gronau M.* // Phys. Lett. B. 1989. V.220. P.641.
89. *Del Aguila F., Garrido L., Miquel R.* // Phys. Lett. B. 1990. V.242. P.503.
90. *Roldan J., Botella F.J., Vidal J.* // Phys. Lett. B. 1992. V.283. P.389.
91. *Sanchis M.A.* // Phys. Lett. B. 1992. V.280. P.299.
92. *Maalampi J., Roos M.* // Phys. Lett. 1987. V.188. P.487.
93. *Mukhopadhyaya B., Raychoudhuri A., Ray-Mukhopadhyaya A.* // Phys. Lett. B. 1987. V.190. P.93.
94. *Silverman D.* // Phys. Rev. D. 1992. V.45. P.1800.
95. *Branco G.C., Parada P.A., Rebello M.N.* // Phys. Rev. D. 1995. V.52. P.4217.
96. *Greub C., Ioannissian A., Wyler D.* // Phys. Lett. B. 1995. V.346. P.149.
97. *Верешков Г.М., Кукса В.И.* // ЯФ. 1991. Т.53. С.1352.
98. *Бейлин В.А., Верешков Г.М., Кукса В.И.* // ЯФ. 1993. Т.56. С.186.
99. *Kakebe I., Yamamoto K.* // Phys. Lett. B. 1998. V.416. P.184.

100. *Barger V., Phillips R.J.N.* // Phys. Rev. D. 1990. V.41. P.52.
101. *Hewett J.L.* // Phys. Lett. B. 1987. V.196. P.223.
102. *Godfrey S.* // Phys. Lett. B. 1987. V.195. P.78.
103. *Robinett R.W.* // Phys. Rev. D. 1988. V.37. P.1321.
104. *Rizzo T.G.* // Phys. Rev. D. 1989. V.40. P.754.
105. *Hewett J.L., Rizzo T.G.* // Phys. Rev. D. 1986. V.34. P.2790.
106. *Hewett J.L., Rizzo T.G.* // Z. Phys. C. 1987. V.34. P.49.
107. *Rizzo T.G.* // Phys. Rev. D. 1989. V.40. P.1424.
108. *Алиев Т.М., Халил-Заде Ф.Т.* // ЯФ. 1990. Т.51. С.253.
109. *Бейлин В.А., Верешков Г.М., Кукса В.И.* // ЯФ. 1995. Т.58. С.391.
110. *Hewett J.L., Rizzo T.G.* // Phys. Rev. D. 1987. V.35. No.7. P.2194.
111. *Eboli O.J.P., Natale A.A., Simao F.R.A.* // Phys. Rev. D. 1989. V.39. P.2668.
112. *Barger V., Phillips R.J.N., Whisnant K.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V.57. P.48.
113. *Engwist K., Maalampi J.* // Phys. Lett. B. 1986. V.176. P.396.
114. *Бейлин В.А., Верешков Г.М., Кукса В.И.* // ЯФ. 1992. Т.55. С.2186.
115. *Beilin V., Kuksa V., Vereshkov G.* // Proc. of III German-Russian Workshop «Heavy Quark Physics», Dubna, May 20–22, 1996. P.224.
116. *Barger V., Phillips R.J.N.* // Phys. Lett. B. 1994. V.335. P.510.
117. *Eilam G., Hewett J.L., Soni A.* // Phys. Rev. D. 1991. V.44. P.1473.
118. *Luke M., Savage M.J.* // Phys. Lett. B. 1993. V.307. P.387.
119. *Couture G., Hamzaoui C., König H.* // Phys. Rev. D. 1995. V.52. P.1713.
120. *Han T., Peccei R.D., Zhang X.* // Nucl. Phys. B. 1995. V.454. P.527.
121. *Han T. et al.* // Phys. Lett. B. 1996. V.385. P.311.
122. *Han T. et al.* // Phys. Rev. D. 1997. V.55. P.7241.
123. *Образцов В.Ф., Слабоспицкий С.Р., Ющенко О.П.* // ЯФ. 1999. Т.62. С.113.
124. *Yang J.M., Young B.-L., Zhang X.* // Phys. Rev. D. 1998. V.58. P.0550011.
125. *Choong W.-S., Silverman D.* // Phys. Rev. D. 1994. V.49. P.2322.
126. *Dunietz I.* // Annals of Physics. 1988. V.184. P.350.
127. *Kobayashi M., Maskawa T.* // Prog. Theor. Phys. Japan. 1973. V.49. P.652.
128. *Wolfenstein L.* // Phys. Rev. D. 1985. V.31. P.2381.
129. *Dattoli G., Sabia E., Torre A.* // Nuovo Cimento. 1996. V.109. P.1425.
130. *Jarlskog C., Stora R.* // Phys. Lett. B. 1988. V.208. P.268.
131. *Chernyak V.* // Nucl. Phys. B. 1995. V.457. P.96.
132. *Bhattacharyya G., Branco G.C., Choudhury D.* // Phys. Lett. B. 1994. V.336. P.487.
133. *Atwood D., Reina L., Soni A.* // Phys. Rev. D. 1996. V.53. P.1199.
134. *Abe F. et al.* (CDF Collaboration). Preprint FERMILAB-PUB-97/270-E. 1997.
135. *Incandela J. et al.* // Nuovo Cim. A. 1996. V.109. P.741.
136. *Grzegadowski B., Gunion J.F., Krawczyk P.* // Phys. Lett. B. 1991. V.44. P.1473.
137. *Eilam G., Hewett J.L., Soni A.* // Phys. Rev. D. 1991. V.44. P.1473.
138. *Luke M., Savage M.S.* // Phys. Lett. B. 1993. V.307. P.387.
139. *Abreu P. et al.* (DELPHI Collaboration). Preprint CERN-EP/98-177. 1998.
140. *Бейлин В.А., Кукса В.И.* // ЯФ (в печати).

УДК 539.12.01

BOUND $q\bar{q}$ SYSTEMS IN THE FRAMEWORK OF DIFFERENT VERSIONS OF 3D REDUCTIONS OF THE BETHE–SALPETER EQUATION

T. Kopaleishvili

HEPI, Tbilisi State University, University St. 9, 380086 Tbilisi, Georgia

Five different versions of the three-dimensional (3D) reduction of the Bethe–Salpeter (BS) equation in the instantaneous approximation for kernel of BS equation for the two-fermion systems are formulated. The normalization conditions for the bound-state wave function in all versions are derived. Further, the 3D reduction of BS equation without instantaneous approximation for the kernel of BS equation is formulated in the quasi-potential approach. Except for the Salpeter version, other four versions have the correct one-body limit (Dirac equation) when mass of one of constituent fermions tends to infinity. Application of these versions for investigation of the different properties of the $q\bar{q}$ bound systems are considered.

Сформулированы пять различных версий трехмерной редукции уравнения Бете–Солпитера (БС) для двухфермионной системы в одновременном приближении для ядра уравнения БС. Получены условия нормировки волновой функции связанного состояния для всех версий редукции. Сформулирована также трехмерная редукция уравнения БС в квазипотенциальном подходе без применения одновременного приближения для ядра уравнения БС. Все версии редукции имеют правильный одночастичный предел (уравнение Дирака), в котором масса одного из составляющих фермионов устремляется в бесконечность, за исключением версии Солпитера. Рассмотрено также применение этих версий для исследования различных свойств связанной $q\bar{q}$ -системы.

1. INTRODUCTION

After having firmly established the quark structure of mesons and baryons, there naturally arises the question: how to describe the properties of hadrons in terms of explicit quark and gluon degrees of freedom. The main feature of QCD at low energy — confinement of quarks and gluons into a colorless bound states — is still understood very little. For this reason, one has to resort to various kinds of QCD-inspired models. The simplest one is the so-called constituent quark model, where quarks have a given «constituent» mass, and the interactions between the «constituent» quarks within mesons $q\bar{q}$ and baryons qqq are described by «confining potentials», growing to infinity at the infinite quark separation. At the first stage, this intuitive picture has been implemented within the nonrelativistic approach. Despite the evident success of the nonrelativistic potential model, it has been understood long time ago, that one has to include the relativistic

effects, at least when describing hadrons consisting of light u, d, s quarks. Field-theoretical Bethe–Salpeter (BS) equation provides a natural basis for a relativistic generalization of the potential model, where both light u, d, s and the heavy quark c, b bound states can be treated on the equal footing. A more sophisticated approach is based on a coupled set of Dyson–Schwinger (DS) and BS equations, that can be derived at QCD level [1–3]. In such an approach, one uses a model gluon propagator that through the solution of the DS equation leads to the quark propagator which is an entire function in a complex p^2 plane and therefore is believed to correspond to the confined quark. A full content of underlying QCD symmetries which are important at low energy, can be consistently embedded within this approach. In particular, the Goldstone bosons are properly described, and in the limit of the vanishing quark masses, the masses of Goldstone bosons obtained through the solution of the coupled DS and BS equations, also vanish (note that it is not the case in the simple potential-type models with quarks having the constant «constituent» mass).

In the following, we shall review the potential model based solely on the BS equation, which is the subject of intensive investigations during last twenty years.

2. BETHE–SALPETER EQUATION FOR THE TWO-FERMION BOUND STATE

To set up the notation, in this section we give a brief survey of the covariant BS approach to the two-fermion (fermion-antifermion) bound states. In order to derive the BS equation for the two-fermion bound state, we consider the full 4-fermion Green function G which in the momentum space is given by

$$G(p_1, p_2; p'_1, p'_2) = i^2 \int dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2 - ip'_1 x'_1 - ip'_2 x'_2} \times \\ \times \langle 0 | T \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \bar{\psi}_1(x'_1) \bar{\psi}_2(x'_2) | 0 \rangle, \quad (2.1)$$

where, for simplicity, the fermions 1 and 2 are assumed to be distinguishable, and the spinor indices are suppressed.

The Green function satisfies the BS equation in the momentum space

$$G = G_0 + G_0 K G = G_0 + G K G_0, \quad (2.2)$$

where G_0 stands for the free 4-fermion Green function (the direct product of two fermion propagators), and K denotes the kernel of BS equation, given by the sum of all two-particle irreducible Feynman graphs.

In the momentum space, it is convenient to define the centre-of-mass (c.m.) and relative 4-momenta according to the following relations (with arbitrary α and β)*

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2, \quad p = \beta p_1 - \alpha p_2, \quad \alpha + \beta = 1, \\ \text{or} \quad p_1 &= \alpha P + p, \quad p_2 = \beta P - p. \end{aligned} \quad (2.3)$$

For the basis vectors in the momentum space, the following notation is used

$$|p_1\rangle \otimes |p_2\rangle = |p_1 p_2\rangle = |Pp\rangle = |P\rangle \otimes |p\rangle. \quad (2.4)$$

These vectors satisfy the completeness and orthonormality conditions

$$\begin{aligned} \int |p_i\rangle \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \langle p_i| &= \mathbf{1} \quad \text{for } i = 1, 2, \quad \int |P\rangle \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \langle P| = \mathbf{1}, \\ \int |p\rangle \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle p| &= \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \langle p_i | p'_j \rangle &= \delta_{ij} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p'_j), \\ \langle P | P' \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(P - P'), \quad \langle p | p' \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p - p'). \end{aligned} \quad (2.6)$$

In these notations, we can write

$$\begin{aligned} \langle Pp | \mathbf{O} | P'p' \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(P - P') [\langle p | \mathbf{O}(P) | p' \rangle \equiv \mathbf{O}(P; p, p')], \\ \mathbf{O} &= G, G_0, K. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Further,

$$\langle p | G_0(P) | p' \rangle \equiv G_0(P; p, p') = (2\pi)^4 \delta^4(p - p') G_0(P; p), \quad (2.8)$$

$$G_0(P; p) = S_1(p_1) \otimes S_2(p_2) = -(\not{p}_1 + m_1) \otimes (\not{p}_2 + m_2) g_0(P; p), \quad (2.9)$$

where $S_i(p_i) = i(\not{p}_i - m_i)^{-1}$ stands for the free fermion propagator with the mass m_i , and the quantity $g_0(P; p)$ is defined as follows

$$g_0(P; p) = \frac{1}{p_1^2 - m_1^2 + i0} \frac{1}{p_2^2 - m_2^2 + i0} = \frac{1}{p_{10}^2 - w_1^2 + i0} \frac{1}{p_{20}^2 - w_2^2 + i0}, \quad (2.10)$$

with $w_i = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}_i^2}$.

*We choose the system of units, where $\hbar = c = 1$. Any 4-vector has the components $a = (a_0, \mathbf{a})$, and the metric is $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

The stable bound state with the mass M_B in quantum field theory is described by the 1-particle state vector in the Fock space

$$\langle \mathbf{P}_B | \mathbf{P}'_B \rangle = (2\pi)^3 2w_B \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}'), \quad w_B = \sqrt{M_B^2 + \mathbf{P}^2}. \quad (2.11)$$

However, there is no interpolating field in the Lagrangian corresponding to the bound state particle. The completeness condition of the Fock-state vectors in the presence of bound states reads

$$1 = \int |\mathbf{P}_B\rangle \frac{d^3\mathbf{P}_B}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{P}_B| + \dots, \quad (2.12)$$

where dots stand for the contributions of the states with elementary particles and from the multiparticle scattering states.

Using the completeness condition (2.12), it is straightforward to single out the bound-state contribution to the Green function (2.1) when $P^2 \rightarrow M_B^2$ (equivalently $P_0^2 \rightarrow w_B^2$). The quantity $\langle p|G(P)|p'\rangle$ exhibits the pole behavior at this point

$$\langle p|G(P)|p'\rangle = i \frac{\langle p|\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle \langle \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}|p'\rangle}{P^2 - M_B^2} + \langle p|R(P)|p'\rangle, \quad (2.13)$$

where $\langle p|R(P)|p'\rangle$ denotes the regular remainder of $\langle p|G(P)|p'\rangle$ at the bound-state pole that emerges from the contribution of other states in the sum over Fock-space vectors. Further, $\langle p|\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle$ stands for the BS wave function of the bound state

$$\begin{aligned} \langle p|\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle &\equiv \Phi_{\mathbf{P}_B}(p) = \int dx e^{ipx} \langle 0|T\psi_1(\beta x)\psi_2(-\alpha x)|\mathbf{P}_B\rangle, \\ \langle \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}|p'\rangle &\equiv \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(p') = \int dx e^{-ip'x} \langle \mathbf{P}_B|T\bar{\psi}_1(\beta x)\bar{\psi}_2(-\alpha x)|0\rangle = \\ &= \Phi_{\mathbf{P}_B}^+(p') \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

The bound-state equation that can be derived for the state vector $|\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle$ by substituting Eq. (2.13) in the BS equation for the Green function (2.2), formally resembles the nonrelativistic Schrödinger equation for two fermions

$$\begin{aligned} G^{-1}(P_B)|\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle &= 0, \quad \langle \bar{\Psi}_{\mathbf{P}_B}|G^{-1}(P_B) = 0, \\ \text{with } G_0^{-1}(P) - G^{-1}(P) &= K(P), \end{aligned} \quad (2.15)$$

or

$$|\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle = G_0(P_B)K(P_B)|\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle, \quad \langle \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}| = \langle \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}|K(P_B)G_0(P_B). \quad (2.16)$$

Here $P_B = (w_B, \mathbf{P}_B)$. Explicitly, in the momentum space, we arrive at the following equation for the bound-state wave function [4]

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{P}_B}(p) &= G_0(P; p) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} K(P; p, p') \Phi_{\mathbf{P}_B}(p'), \\ \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(p) &= \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(p') K(P; p', p) G_0(P; p).\end{aligned}\quad (2.17)$$

This equation should be solved in order to obtain the mass M_B of the bound state. It is obvious that both equations: for $\Phi_{\mathbf{P}_B}(p)$, and for its conjugate $\bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(p)$, lead to the same bound-state spectrum.

Next, we derive the normalization condition for the BS wave function. To this end, it is useful to start from the following identity

$$G(P)G^{-1}(P)G(P) = G(P) \Rightarrow G(P)(G_0^{-1}(P) - K(P))G(P) = G(P). \quad (2.18)$$

If P^2 is close to M_B^2 , one can neglect the contribution from $R(P)$ in Eq. (2.13). We substitute the latter into Eq. (2.18), and perform the integration along the closed contour C that encircles only the bound-state pole at $P_0 = w_B$, in the complex P_0 plane.

$$\begin{aligned}& i \int_C |\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle \langle \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}| \frac{(G_0^{-1}(P) - K(P)) dP_0}{(P_0 + w_B - i0)^2 (P_0 - w_B + i0)^2} |\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle \langle \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}| = \\ &= \int_C |\Phi_{\mathbf{P}_B}\rangle \frac{dP_0}{(P_0 + w_B - i0)(P_0 - w_B + i0)} \langle \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}|.\end{aligned}\quad (2.19)$$

From the Cauchy's theorem, one has

$$\int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_S)^n} = \pm 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z) \Big|_{z=z_S}, \quad (2.20)$$

where the function $f(z)$ is analytic inside the contour C , and the choice of the $\pm$ sign depends on whether one integrates counterclockwise (+) or clockwise (−) along the contour. With the use of the above formula, from Eq. (2.19) one readily obtains the normalization condition for the BS wave function

$$\begin{aligned}i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(p) \left[\frac{\partial}{\partial P_0} (G_0^{-1}(P; p, p') - K(P; p, p')) \right]_{P_0=w_B} \times \\ \times \Phi_{\mathbf{P}_B}(p') = 2w_B.\end{aligned}\quad (2.21)$$

The equations (2.17), together with the normalization condition (2.21), completely determine the BS mass spectrum and the BS wave function.

At the end of this section, we shall consider in some detail the spin content of the BS wave function. In particular, we shall demonstrate that one can rewrite this equation in terms of «fermion-antifermion» rather than «two-fermion» wave function.

We work with the following representation of Dirac γ matrices

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma = \gamma^0 \left[\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \right] = -\alpha \gamma^0. \quad (2.22)$$

The free two-fermion Green function given by Eqs. (2.9), (2.10), can be written as

$$G_0(P; p) = \begin{pmatrix} G_{aa}(p_1) & G_{ab}(p_1) \\ G_{ba}(p_1) & G_{bb}(p_1) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} G_{aa}(p_2) & G_{ab}(p_2) \\ G_{ba}(p_2) & G_{bb}(p_2) \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

where $G_{uv}(p_i)$, $u, v = a, b$ is the 2×2 matrix (operator) in the spin space of the i -th particle. Further, the BS wave function of the two-fermion system can be written as a column

$$\Phi_{\mathbf{P}_B}(p) = \begin{pmatrix} \Phi_{aa}(P; p) \\ \Phi_{ab}(P; p) \\ \Phi_{ba}(P; p) \\ \Phi_{bb}(P; p) \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

where, again, the components $\Phi_{uv}(P; p)$, $u, v = a, b$ are the 2×2 matrices in the spin space of two fermions.

Now, it is straightforward to ensure that the BS equation (2.17) can be rewritten in terms of «fermion-antifermion» wave function $\Psi_{\mathbf{P}_B}(p)$

$$\Psi_{\mathbf{P}_B}(p) = S^{(1)}(p_1) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} K(P; p, p') \Psi_{\mathbf{P}_B}(p') S^{(2)}(-p_2). \quad (2.25)$$

The wave functions $\Psi_{\mathbf{P}_B}(p)$ and $\Phi_{\mathbf{P}_B}(p)$ are related by (see [5])

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{P}_B}(p) &= \begin{pmatrix} \Phi_{aa}(P; p) & \Phi_{ab}(P; p) \\ \Phi_{ba}(P; p) & \Phi_{bb}(P; p) \end{pmatrix} C = \\ &= -i \begin{pmatrix} \Phi_{ab}(P; p) \sigma_2 & \Phi_{aa}(P; p) \sigma_2 \\ \Phi_{bb}(P; p) \sigma_2 & \Phi_{ba}(P; p) \sigma_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

where

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

denotes the charge conjugation matrix.

3. THREE-DIMENSIONAL REDUCTIONS OF THE BS EQUATION

One of the reasons why the three-dimensional ($3D$) reduction of the BS equation is necessary, is the absence of the usual quantum-mechanical probability interpretation for the wave function $\Phi_{\mathbf{P}_B}(p)$ due to the dependence of the latter on the 0-th component of the relative 4-momentum. Further, in the presence of the confining interactions, it is extremely difficult to construct a «reasonable» kernel K in four dimensions that describes these interactions — we are not aware of any, completely successful attempt. On the other hand, the concept of static ($3D$) confining kernels that corresponds to an intuitively clear picture of infinitely rising potentials in the coordinate space, has been extremely useful in many semiphenomenological applications to study, e.g., the characteristics of heavy quarkonia, etc.

For this reason, below we shall mainly consider the static BS kernels (i.e., the kernels which do not depend on the c.m. momentum P and on the 0-th components of the relative momenta p_0, p'_0)

$$K(P; p, p') \rightarrow K_{\text{st}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \equiv -iV(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (3.1)$$

In this approximation, there are still different versions of the $3D$ equations for the bound-state wave function. Below, we shall consider these versions in detail.

3.1. The Salpeter Equation [6]. In the approximation (3.1), from Eq. (2.17) it is straightforwardly obtained

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{P}_B}(p) &= G_0(P; p) \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} K_{\text{st}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}'), \\ \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(p) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}') K_{\text{st}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) G_0(P; p), \end{aligned} \quad (3.2)$$

and

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}) &= \tilde{G}_0(P; \mathbf{p}) \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}'), \\ \tilde{\bar{\Phi}}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \tilde{\bar{\Phi}}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}') V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \tilde{G}_0(P; \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}) &= \int \frac{dp_0}{2\pi} \Phi_{\mathbf{P}_B}(p), \quad \tilde{\bar{\Phi}}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi} \bar{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(p), \\ \tilde{G}_0(P; \mathbf{p}) &= \int \frac{dp_0}{2\pi i} G_0(P; p). \end{aligned} \quad (3.4)$$

At the next step, we introduce the projection operators

$$\Lambda_i^{(\pm)}(\mathbf{p}_i) = \frac{w_i \pm h_i(\mathbf{p}_i)}{2w_i}, \quad h_i(\mathbf{p}_i) = \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \mathbf{p}_i + m_i \gamma_0^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

with the properties

$$\sum_{\alpha_i=\pm} \Lambda_i^{(\alpha_i)} = 1, \quad \Lambda_i^{(\alpha_i)} \Lambda_i^{(\alpha'_i)} = \delta_{\alpha_i \alpha'_i} \Lambda_i^{(\alpha_i)}, \quad h_i(\mathbf{p}_i) \Lambda_i^{(\pm)} = \pm w_i \Lambda_i^{(\pm)}. \quad (3.6)$$

With the use of the following identity

$$\not{p}_i + m_i = \left\{ (p_{i0} + w_i) \Lambda_i^{(+)}(\mathbf{p}_i) + (p_{i0} - w_i) \Lambda_i^{(-)}(\mathbf{p}_i) \right\} \gamma_0^{(i)}, \quad (3.7)$$

it is straightforward to obtain

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(P; \mathbf{p}) &= \left\{ \frac{\Lambda_{12}^{(++)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{P_0 - w_1 - w_2 + i0} - \frac{\Lambda_{12}^{(--)}}{P_0 + w_1 + w_2} \right\} \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} = \\ &= [P_0 - h_1(\mathbf{p}_1) - h_2(\mathbf{p}_2)]^{-1} (\Lambda_{12}^{(++)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \Lambda_{12}^{(--)}) \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

where $\Lambda_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \Lambda_1^{(\alpha_1)}(\mathbf{p}_1) \otimes \Lambda_2^{(\alpha_2)}(\mathbf{p}_2)$.

Now the Salpeter equation (3.3) in the c.m. frame ($\mathbf{P}_B = \mathbf{0}$) can be written as

$$\begin{aligned} [P_0 - h_1(\mathbf{p}_1) - h_2(\mathbf{p}_2)] \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) &= \\ = \Pi(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (3.9)$$

where

$$\Pi(\mathbf{p}) = (\Lambda_{12}^{(++)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) - \Lambda_{12}^{(--)}) = \frac{h_1(\mathbf{p})}{2w_1} + \frac{h_2(-\mathbf{p})}{2w_2}. \quad (3.10)$$

Introducing the «frequency components» of the wave function according to

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}), \quad \tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}) = \Lambda_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \tilde{\Phi}_{\mathbf{P}_B}(\mathbf{p}), \quad (3.11)$$

the Eq. (3.9) can be reduced to the following system of equations

$$\begin{aligned} [M_B \mp (w_1 + w_2)] \tilde{\Phi}_{M_B}^{(\pm \pm)}(\mathbf{p}) &= \\ = \pm \Lambda_{12}^{(\pm \pm)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (3.12)$$

with additional conditions

$$\tilde{\Phi}_{M_B}^{(\pm \mp)}(\mathbf{p}) = 0, \quad \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) = \tilde{\Phi}_{M_B}^{(++)}(\mathbf{p}) + \tilde{\Phi}_{M_B}^{(--)}(\mathbf{p}). \quad (3.13)$$

The normalization condition can be readily obtained from Eq. (2.21) by using the approximation (3.1) for the kernel, the relation between $4D$ and $3D$ wave functions (3.2), and the decomposition of the wave function (3.11), (3.13)

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \{ |\tilde{\Phi}_{M_B}^{(++)}(\mathbf{p})|^2 - |\tilde{\Phi}_{M_B}^{(--) }(\mathbf{p})|^2 \} = 2M_B. \quad (3.14)$$

Note that the wave function $\tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p})$ can be represented in a form analogous to (2.24)

$$\tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{aa}(\mathbf{p}) \\ \tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{p}) \\ \tilde{\Phi}_{ba}(\mathbf{p}) \\ \tilde{\Phi}_{bb}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

The constraints (3.13) can be considered as equations for the components $\tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{p})$ and $\tilde{\Phi}_{ba}(\mathbf{p})$. The solution of these equations gives

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{ab} &= (m_1 w_2 + m_2 w_1)^{-1} \{ w_1(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}_2)\tilde{\Phi}_{aa} - w_2(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}_1)\tilde{\Phi}_{bb} \}, \\ \tilde{\Phi}_{ba} &= (m_1 w_2 + m_2 w_1)^{-1} \{ w_2(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}_1)\tilde{\Phi}_{aa} - w_1(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}_2)\tilde{\Phi}_{bb} \}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

For the «frequency components» $\tilde{\Phi}_{xy}^{(\alpha_1\alpha_2)} = \Lambda_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})\tilde{\Phi}_{xy}(\mathbf{p})$, $x, y = a, b$, we obtain the following relations

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{aa}^{(\pm\pm)} &= \pm(2(m_1 w_2 + m_2 w_1))^{-1} \times \\ &\times \{ (w_1 \pm m_1)(w_2 \pm m_2)\tilde{\Phi}_{aa} - (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}_2)\tilde{\Phi}_{bb} \}, \\ \tilde{\Phi}_{bb}^{(\pm\pm)} &= \pm(2(m_1 w_2 + m_2 w_1))^{-1} \times \\ &\times \{ (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}_1)(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}_2)\tilde{\Phi}_{aa} - (w_1 \mp m_1)(w_2 \mp m_2)\tilde{\Phi}_{bb} \}, \\ \tilde{\Phi}_{ab}^{(\pm\pm)} &= \pm(2(m_1 w_2 + m_2 w_1))^{-1} \times \\ &\times \{ (w_1 \pm m_1)(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}_2)\tilde{\Phi}_{aa} - (w_2 \mp m_2)(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}_1)\tilde{\Phi}_{bb} \}, \\ \tilde{\Phi}_{ba}^{(\pm\pm)} &= \pm(2(m_1 w_2 + m_2 w_1))^{-1} \times \\ &\times \{ (w_2 \pm m_2)(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}_1)\tilde{\Phi}_{aa} - (w_1 \mp m_1)(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}_2)\tilde{\Phi}_{bb} \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

The normalization condition (3.14) can be rewritten as

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{2w_1 w_2}{m_1 w_2 + m_2 w_1} \{ |\tilde{\Phi}_{aa}(\mathbf{p})|^2 - |\tilde{\Phi}_{bb}(\mathbf{p})|^2 \} = 2M_B. \quad (3.18)$$

At the end of this subsection, we shall consider the existence of the one-body limit in the Salpeter equation. From the physical point of view, it is clear that if the mass of one of the particles in the two-particle bound state tends to infinity, the equation for the wave function should reduce to Dirac equation for the light particle with a given interaction potential. Let us check this property for the Salpeter equation assuming, e.g., that the mass of the first particle tends to infinity. In this limit:

$$m_1 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad w_1 \rightarrow m_1, \quad \gamma_0^{(1)} \rightarrow 1, \quad h_1 \rightarrow m_1. \quad (3.19)$$

Then, the Salpeter equation for the bound-state vector $|\tilde{\Phi}_{MB}\rangle$ is reduced to ($E_2 \equiv M_B - m_1$)

$$(E_2 - h_2) |\tilde{\Phi}_{E_2}\rangle = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_2}{w_2} \right) \gamma_0^{(2)} |\tilde{\Phi}_{E_2}\rangle. \quad (3.20)$$

Due to the presence of the prefactor $(1 + h_2/w_2)/2$, this equation differs from the Dirac equation for the particle 2 moving in the potential V — that is, the Salpeter equation does not possess the correct one-body limit.

Now there arises an important problem to solve. We are willing to obtain the 3D reduction of the BS equation in the static approximation, that correctly reproduces the dynamics of the system in the one-body limit — this property might be important for the description, e.g., the heavy-light $q\bar{q}$ bound states.

Below, we shall consider several versions of the 3D reduction procedure, which lead to the correct one-body limit.

3.2. The Gross Equation [7]. In the derivation of the Gross equation, first we assign $\alpha = 0$ and $\beta = 1$, in the definition of the c.m. and relative momentum variables (2.3). Physically, this means that the whole c.m. momentum is carried by the particle 2. The free Green function has the form

$$\begin{aligned} G_0(P; p) &= -(\not{p} + m_1) \otimes (\not{P} - \not{p} + m_2) g_0(P; p), \\ g_0(P; p) &= \frac{1}{p^2 - m_1^2 + i0} \frac{1}{(P - p)^2 - m_2^2 + i0}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

The first propagator can be rewritten as

$$\frac{1}{p^2 - m_1^2 + i0} = P \frac{1}{p^2 - m_1^2} - i\pi \delta(p^2 - m_1^2), \quad (3.22)$$

where the symbol P stands for the principal-value prescription. The approximation that leads to the Gross equation, consists in the substitution

$$\frac{1}{p^2 - m_1^2 + i0} \Rightarrow -2\pi i \frac{\delta(p_0 - w_1)}{2w_1}. \quad (3.23)$$

This approximation is called the «spectator approximation». Note that in this approximation it is not only the principal-value term in the propagator of the first particle that is neglected, but also the term containing $\delta(p_0 + w_1)$ that emerges from $\delta(p^2 - m_1^2)$. Consequently, in this approximation the particle 1 always stays on its mass shell defined by the equation $p_0 = w_1$. In a result of this approximation, the free Green function in the c.m. frame ($P_\mu = (P_0, \mathbf{0})$) can be rewritten in the following form

$$G_0^{\text{GR}}(P_0; p) = 2\pi i \delta(p_0 - w_1) \tilde{G}_0^{\text{GR}}(P_0; \mathbf{p}) = 2\pi i \delta(p_0 - w_1) \times \\ \times \left\{ \frac{\Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \otimes \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p})}{P_0 - w_1 - w_2 + i0} + \frac{\Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \otimes \Lambda_2^{(-)}(-\mathbf{p})}{P_0 - w_1 + w_2 + i0} \right\} \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}, \quad (3.24)$$

where the functions $G_0^{\text{GR}}(P_0; p)$ and $\tilde{G}_0^{\text{GR}}(P_0; \mathbf{p})$ are related by Eq. (3.4).

After substituting Eq. (3.24) into (2.16) and integrating over the variable p_0 , in the c.m. frame (now $P^\mu = (M_B, \mathbf{0})$) we arrive at the Gross equation for the 3D bound-state wave function

$$\tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) = \tilde{G}_0^{\text{GR}}(M_B; \mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}'), \\ \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}') V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \tilde{G}_0^{\text{GR}}(M_B; \mathbf{p}). \quad (3.25)$$

Now, using again (3.24) together with (3.6), we arrive at

$$[M_B - h_1(\mathbf{p}) - h_2(-\mathbf{p})] \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) = \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_1}{w_1} \right) \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}'), \quad (3.26)$$

which has the correct one-body limit when $m_1 \rightarrow \infty$.

The normalization condition for the 3D wave function that satisfies the Gross equation, cannot be obtained in a standard manner, by using Eq. (2.21). In order to demonstrate this, note that according to Eqs. (2.16), (3.24), and (3.25), 4D and 3D wave functions are related by

$$\Phi_{M_B}(p) = 2\pi \delta(p_0 - w_1) \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}), \quad \bar{\Phi}_{M_B}(p) = 2\pi \delta(p_0 - w_1) \tilde{\bar{\Phi}}_{M_B}(\mathbf{p}). \quad (3.27)$$

Now if in the normalization condition (2.21) with the static kernel (3.1), the relation (3.27) between the 4D and 3D wave functions is substituted, one arrives at the ill-defined expression containing the product of δ functions with the same argument. For this reason, instead of the rigorous derivation, from the analogy with the Salpeter equation, one merely assumes that the solutions of the Gross equation satisfy the following normalization condition

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \{ |\tilde{\Phi}_{M_B}^{(++)}(\mathbf{p})|^2 + |\tilde{\Phi}_{M_B}^{(+-)}(\mathbf{p})|^2 \} = 2M_B. \quad (3.28)$$

3.3. The Mandelzweig–Wallace Equation [8]. In the derivation of the Mandelzweig–Wallace (MW) equation, the parameters α and β in the expression of the c.m. and relative momenta (2.3) are defined according to Wightmann and Garding

$$\alpha = \alpha(s) = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2s}, \quad \beta = \beta(s) = \frac{s - m_1^2 + m_2^2}{2s}, \quad s = P^2 = P_0^2 - \mathbf{P}^2. \quad (3.29)$$

In the c.m. frame, from Eqs. (2.3) and (3.29) it follows

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1 + p_0, \mathbf{p}), \quad p_2 = (E_2 - p_0, -\mathbf{p}), \\ E_1 &= \frac{M_B^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M_B}, \quad E_2 = \frac{M_B^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M_B}, \\ E_1 + E_2 &= M_B, \quad E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M_B}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Further, we define in the c.m. frame

$$\tilde{G}_0^{\text{MW}}(M_B; \mathbf{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi i} [G_0(p_1, p_2) + G_0(p_1, p_2^{\text{cr}})], \quad p_2^{\text{cr}} = (E_2 + p_0, -\mathbf{p}), \quad (3.31)$$

where $G_0(p_1, p_2)$ is given by Eqs. (2.8), (2.9), and (2.10). After integrating over p_0 , we obtain

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0^{\text{MW}}(M_B; \mathbf{p}) &= \left\{ \frac{\Lambda_{12}^{++}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})}{E_1 + E_2 - w_1 - w_2 + i0} + \frac{\Lambda_{12}^{+-}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})}{-E_1 + E_2 + w_1 + w_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Lambda_{12}^{-+}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})}{E_1 - E_2 + w_1 + w_2} - \frac{\Lambda_{12}^{--}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})}{E_1 + E_2 + w_1 + w_2} \right\} \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

The MW equation is obtained from the BS equation in the static approximation, by using the combination $G_0(p_1, p_2) + G_0(p_1, p_2^{\text{cr}})$ instead of $G_0(p_1, p_2)$ alone. Unlike the Salpeter version, now all four possible projection operators $\Lambda_{12}^{(++)}$, $\Lambda_{12}^{(+-)}$, $\Lambda_{12}^{(-+)}$, $\Lambda_{12}^{(--)}$, enter the expression of $\tilde{G}_0^{\text{MW}}(M_B; \mathbf{p})$, Eq. (3.32). For this reason, the inverse operator for the free Green function in the 3D space exists. Further, in analogy with Eq. (2.15), we can define the inverse of the full Green function in 3D space according to

$$[\tilde{G}_0^{\text{MW}}]^{-1}(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') - [\tilde{G}_0^{\text{MW}}]^{-1}(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = V(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad (3.33)$$

where

$$\tilde{G}_0^{\text{MW}}(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \tilde{G}_0^{\text{MW}}(M_B; \mathbf{p}). \quad (3.34)$$

The MW equation for the bound-state vector $|\tilde{\Phi}_{MB}\rangle$ is given by

$$[\tilde{G}^{\text{MW}}]^{-1}|\tilde{\Phi}_{MB}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad |\tilde{\Phi}_{MB}\rangle = \tilde{G}_0^{\text{MW}}V|\tilde{\Phi}_{MB}\rangle. \quad (3.35)$$

Note that we can rewrite the inverse of the free Green function in the MW equation as

$$[\tilde{G}_0^{\text{MW}}]^{-1} = \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \left[(E_1 - h_1) \otimes \frac{h_2}{w_2} + \frac{h_1}{w_1} \otimes (E_2 - h_2) \right]. \quad (3.36)$$

With the use of this identity, one can rewrite the MW equation as

$$\left[(E_1 - h_1) \otimes \frac{h_2}{w_2} + \frac{h_1}{w_1} \otimes (E_2 - h_2) \right] |\tilde{\Phi}_{MB}\rangle = \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} V |\tilde{\Phi}_{MB}\rangle. \quad (3.37)$$

Let us now consider the limit of this equation when $m_1 \rightarrow \infty$ (3.19). In this limit, according to Eq. (3.30), $E_1 \rightarrow m_1$, $E_2 \rightarrow M_B - m_1$, and the equation (3.37) simplifies to the Dirac equation

$$[E_2 - h_2] |\tilde{\Phi}_{MB}\rangle = \gamma_0^{(2)} V |\tilde{\Phi}_{MB}\rangle. \quad (3.38)$$

Consequently, the MW equation has the correct one-body limit.

3.4. The Cooper–Jennings Equation [9]. The parameters $\alpha(s)$ and $\beta(s)$ in the Cooper–Jennings (CJ) version are chosen as

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \frac{\alpha_1(s)}{\alpha_1(s) + \alpha_2(s)}, & \beta(s) &= \frac{\alpha_2(s)}{\alpha_1(s) + \alpha_2(s)}, \\ \alpha_1(s) &= \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, & \alpha_2(s) &= \frac{s - m_1^2 + m_2^2}{2\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

The free Green function for the CJ equation is given by

$$G_0^{\text{CJ}}(P; p) = -(\not{p}_1 + m_1) \otimes (\not{p}_2 + m_2) g_0^{\text{CJ}}(P; p), \quad (3.40)$$

where $g_0^{\text{CJ}}(P; p)$ is constrained by the elastic unitarity and can be written in the following form

$$\begin{aligned} g_0^{\text{CJ}}(P; p) &= 2\pi i \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} \frac{ds' f(s, s')}{s' - s - i0} \delta^+[(\alpha(s')P' + p)^2 - m_1^2] \times \\ &\times \delta^+[(\beta(s')P' - p)^2 - m_2^2]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Here $\delta^+(x^2 - a^2) = (2a)^{-1}\delta(x - a)$, $P' = \sqrt{s'/s}P$, and the function $f(s, s')$ satisfies the condition $f(s, s) = 1$.

After integration, the expression (3.41) yields

$$g_0^{\text{CJ}}(P; p) = -2\pi i \frac{\delta(2Pp)}{s - s_p} \sqrt{ss_p} \frac{f(s, s_p)}{\alpha_1(s_p) \alpha_2(s_p)}, \quad (3.42)$$

where $s_p = (\sqrt{m_1^2 - p^2} + \sqrt{m_2^2 - p^2})^2$.

Choosing the function $f(s, s_p)$ in the form

$$f(s, s_p) = \frac{4s \alpha_1(s_p) \alpha_2(s_p)}{ss_p - (m_1^2 - m_2^2)^2} \quad (3.43)$$

we arrive at the following expression for $g_0^{\text{CJ}}(P; p)$

$$g_0^{\text{CJ}}(P; p) = -2\pi i \frac{2s}{(s - (w_1 + w_2)^2 + i0)(s - (w_1 - w_2)^2)} \frac{2\sqrt{s} \delta(2Pp)}{w_1 + w_2}. \quad (3.44)$$

Note, that in the c.m. frame, $2\sqrt{s} \delta(2Pp) = \delta(p_0)$. Because of the presence of the δ function, one can rewrite the free Green function from (3.40) in the following form (again, in the c.m. frame)

$$G_0^{\text{CJ}}(M_B; p) = -(\not{\tilde{p}}_1 + m_1) \otimes (\not{\tilde{p}}_2 + m_2) g_0^{\text{CJ}}(M_B; p),$$

$$\tilde{p}_1 = (E_1, \mathbf{p}), \quad \tilde{p}_2 = (E_2, -\mathbf{p}), \quad (3.45)$$

where E_1 and E_2 are given by Eq. (3.30). The free Green function for the CJ equation in 3D space is related to 4D Green function according to

$$G_0^{\text{CJ}}(M_B; p) = 2\pi i \delta(p_0) \tilde{G}_0^{\text{CJ}}(M_B; \mathbf{p}), \quad (3.46)$$

where $\tilde{G}_0^{\text{CJ}}(M_B; \mathbf{p})$ is given by

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0^{\text{CJ}}(M_B; \mathbf{p}) &= \frac{1}{2(w_1 + w_2)} \frac{(\not{\tilde{p}}_1 + m_1) \otimes (\not{\tilde{p}}_2 + m_2)}{E_1^2 - w_1^2} = \\ &= \frac{1}{2(w_1 + w_2)} \frac{(\not{\tilde{p}}_1 + m_1) \otimes (\not{\tilde{p}}_2 + m_2)}{E_2^2 - w_2^2} = \\ &= \frac{1}{2(w_1 + w_2)} \frac{\not{\tilde{p}}_1 + m_1}{\not{\tilde{p}}_2 - m_2} = \frac{1}{2(w_1 + w_2)} \frac{\not{\tilde{p}}_2 + m_2}{\not{\tilde{p}}_1 - m_1}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

In the limit, when one of the masses tends to infinity,

$$\frac{\not{\tilde{p}}_i + m_i}{2(w_1 + w_2)} \rightarrow 1 \quad \text{at} \quad m_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2. \quad (3.48)$$

Consequently, the CJ equation has the correct one-body limit.

Note that, using the properties of the projection operators, the free Green function in the $3D$ space can be rewritten in the following form

$$\begin{aligned}\tilde{G}_0^{\text{CJ}}(M_B; \mathbf{p}) = & \frac{1}{2(w_1 + w_2)a} [(w_1 + E_1)(w_2 + E_2)\Lambda_{12}^{(++)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) - \\ & -(w_1 + E_1)(w_2 - E_2)\Lambda_{12}^{(+-)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) - (w_1 - E_1)(w_2 + E_2)\Lambda_{12}^{(-+)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) + \\ & + (w_1 - E_1)(w_2 - E_2)\Lambda_{12}^{(--)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})] \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)},\end{aligned}\quad (3.49)$$

where

$$\begin{aligned}a = E_1^2 - w_1^2 = E_2^2 - w_2^2 &= \frac{1}{4} [M_B^2 + b_0^2 - 2(w_1^2 + w_2^2)], \\ b_0 = E_1 - E_2 &= \frac{m_1^2 - m_2^2}{M_B}.\end{aligned}\quad (3.50)$$

3.5. The Maung–Norbury–Kahana Equation [10,11]. The free Green function for the Maung–Norbury–Kahana (MNK) equation is again given by Eq. (3.40), but with

$$\begin{aligned}g_0^{\text{MNK}}(P; p) = \\ = -2\pi i \frac{\delta^+ \left\{ [(\alpha(s)P + p)^2 - m_1^2]^{\frac{1+y}{2}} - [(\beta(s)P - p)^2 - m_2^2]^{\frac{1-y}{2}} \right\}}{[(\alpha(s)P + p)^2 - m_1^2] + [(\beta(s)P - p)^2 - m_2^2] + i0},\end{aligned}\quad (3.51)$$

with $y = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$. This Green function, of course, satisfies the unitarity condition in the elastic channel. In addition, it has the property that the particles 1 and 2 in the intermediate states are now allowed to go off mass shell inverse proportionally to their masses — so that, if one of the particles becomes infinitely massive, it is automatically kept on its mass shell.

After some transformations, the Green function from Eq. (3.51) in the c.m. frame can be rewritten as

$$\begin{aligned}g_0^{\text{MNK}}(M_B; p) &= -2\pi i \frac{\delta(p_0 - p_0^+)}{2R(p_0^+ p_0^- + a)}, \\ p_0^+ &= \frac{R - b}{2y}, \quad p_0^- = p_0^+ + b_0, \\ R &= \sqrt{b^2 - 4y^2 a}, \quad b = M_B + b_0 y,\end{aligned}\quad (3.52)$$

and b_0 is given by Eq. (3.50). By using the above expression, we obtain

$$\tilde{G}_0^{\text{MNK}}(M_B, \mathbf{p}) = \frac{(\tilde{p}_1^+ + m_1)(\tilde{p}_2^+ + m_2)}{2R(p_0^+ p_0^- + a)},$$

$$\tilde{p}_1^+ = (E_1 + p_0^+, \mathbf{p}), \quad \tilde{p}_2^+ = (E_2 - p_0^+, -\mathbf{p}). \quad (3.53)$$

The relation between the 4D and 3D free Green functions in the MNK version is given by

$$G_0^{\text{MNK}}(M_B; p) = 2\pi i \delta(p_0 - p_0^+) \tilde{G}_0^{\text{MNK}}(M_B, \mathbf{p}). \quad (3.54)$$

Using the properties of the projection operators, the free Green function of the MNK equation can be recast in the following form

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0^{\text{MNK}}(M_B, \mathbf{p}) = & \frac{1}{2R(p_0^+ p_0^- + a)} \left\{ [(w_1 + E_1)(w_2 + E_2) \Lambda_{12}^{(++)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) - \right. \\ & - (w_1 + E_1)(w_2 - E_2) \Lambda_{12}^{(+-)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) - (w_1 - E_1)(w_2 + E_2) \Lambda_{12}^{(-+)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) + \\ & + (w_1 - E_1)(w_2 - E_2) \Lambda_{12}^{(--)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})] - \\ & - [p_0^+ p_0^- + (w_1 - w_2) p_0^+ (\Lambda_{12}^{(++)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) - \Lambda_{12}^{(--)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p})) + \\ & + (w_1 + w_2) p_0^+ (\Lambda_{12}^{(+-)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) - \Lambda_{12}^{(-+)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}))] \left. \right\} \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}. \quad (3.55) \end{aligned}$$

In the limit when $m_1 \rightarrow \infty$, the function $g_0^{\text{MNK}}(P; p)$ from Eq. (3.51) is reduced to

$$g_0^{\text{MNK}}(P; p) \Big|_{m_1 \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{-2\pi i}{p_2^2 - m_2^2} \frac{\delta(p_0)}{2m_1}. \quad (3.56)$$

From Eq. (3.40) we can evaluate $G_0^{\text{MNK}}(P; p)$ in this limit:

$$G_0^{\text{MNK}}(P; p) \Big|_{m_1 \rightarrow \infty} \rightarrow 2\pi i \delta(p_0) \frac{(\tilde{p}_1 + m_1) \otimes (\tilde{p}_2 + m_2)}{2m_1(\tilde{p}_2^2 - m_2^2)}, \quad (3.57)$$

where $\tilde{p}_1$ and $\tilde{p}_2$ are defined by Eq. (3.45). Integrating this relation over p_0 , for the 3D free Green function in the c.m. frame we obtain

$$\tilde{G}_0^{\text{MNK}}(M_B; \mathbf{p}) \Big|_{m_1 \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\tilde{p}_1 + m_1}{2m_1} \otimes \frac{\tilde{p}_2 + m_2}{\tilde{p}_2^2 - m_2^2}. \quad (3.58)$$

Since the factor $(\tilde{p}_1 + m_1)/(2m_1)$ tends to unity in the limit $m_1 \rightarrow \infty$, one concludes that the MNK equation has the correct one-body limit.

3.6. The Normalization Condition for the Wave Function in MW, CJ and MNK Versions. The 3D free Green function in either of MW, CJ, or MNK versions, in the c.m. frame can be rewritten in terms of the projection operators:

$$\tilde{G}_0(M_B, \mathbf{p}) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2 = \pm} \frac{D^{(\alpha_1 \alpha_2)}(M_B; p)}{d(M_B; p)} \Lambda_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)},$$

$$p = |\mathbf{p}|, \quad (3.59)$$

where

$$\begin{aligned} \text{MW} \quad & D^{(\alpha_1 \alpha_2)} = \frac{(-)^{(\alpha_1 + \alpha_2)/2}}{(w_1 + w_2) - (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2)}, \quad d = 1, \\ \text{CJ} \quad & D^{(\alpha_1 \alpha_2)} = (E_1 + \alpha_1 w_1)(E_2 + \alpha_2 w_2), \quad d = 2(w_1 + w_2)a, \\ \text{MNK} \quad & D^{(\alpha_1 \alpha_2)} = (E_1 + \alpha_1 w_1)(E_2 + \alpha_2 w_2) - \\ & - \frac{R - b}{2y} \left(\frac{R - b}{2y} + (E_1 + \alpha_1 w_1) - (E_2 + \alpha_2 w_2) \right), \\ & d = 2RB, \quad B = \frac{R - b}{2y} \left(\frac{R - b}{2y} + b_0 \right) + a, \end{aligned} \quad (3.60)$$

with E_1 , E_2 , a , b_0 , R , b , y defined above.

The equation for the bound-state wave function frequency components (3.11) can be directly obtained from Eq. (3.3) by substituting the above expression for the free 3D Green function and using the properties of the projection operators

$$\begin{aligned} [M_B - (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)] \tilde{\Phi}_{M_B}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}) &= A^{(\alpha_1 \alpha_2)}(M_B; p) \Lambda_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) \times \\ &\times \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \sum_{\alpha'_1 \alpha'_2} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Phi}_{M_B}^{(\alpha'_1 \alpha'_2)}(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (3.61)$$

where, for the different versions

$$\begin{aligned} \text{MW} \quad & A^{(\pm\pm)} = 1, \quad A^{(\pm\mp)} = \frac{M_B}{w_1 + w_2}, \\ \text{CJ} \quad & A^{(\alpha_1 \alpha_2)} = \frac{M_B + (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)}{2(w_1 + w_2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{MNK} \quad : \quad A^{(\alpha_1 \alpha_2)} &= \frac{1}{2RB} \left\{ a[M_B + (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)] - \right. \\
&\quad - [M_B - (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)] \frac{R-b}{2y} \times \\
&\quad \left. \times \left(\frac{R-b}{2y} + (E_1 + \alpha_1 w_1) - (E_2 + \alpha_2 w_2) \right) \right\}. \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Thus, the MW, CJ and MNK equations couple all four frequency components of the wave function: $\tilde{\Phi}_{M_B}^{(++)}$, $\tilde{\Phi}_{M_B}^{(+-)}$, $\tilde{\Phi}_{M_B}^{(-+)}$, and $\tilde{\Phi}_{M_B}^{(--)}$. One can formally extend these notations for the Salpeter (SAL) and Gross (GR) versions, defining

$$\begin{aligned}
\text{SAL} \quad : \quad A^{(\pm\pm)} &= \pm 1, \quad A^{(\pm\mp)} = 0, \\
\text{GR} \quad : \quad A^{(+\pm)} &= +1, \quad A^{(-\mp)} = 0. \quad (3.63)
\end{aligned}$$

It is immediately seen that Salpeter and Gross equations couple only two frequency components of the wave function, other two being equal to 0.

For the derivation of the wave function normalization condition in MW, CJ and MNK versions, let us consider the full 3D Green function that obeys the equation

$$\tilde{G}^i = \tilde{G}_0^i + \tilde{G}_0^i V \tilde{G}^i = \tilde{G}_0^i + \tilde{G}^i V \tilde{G}_0^i, \quad i = \text{MW, CJ, MNK}. \quad (3.64)$$

In analogy with Eq. (2.13), this Green function develops a bound-state pole(s)

$$\langle \mathbf{p} | \tilde{G}(P) | \mathbf{p}' \rangle = \sum_B \frac{\langle \mathbf{p} | \tilde{\Phi}_{M_B} \rangle \langle \tilde{\Phi}_{M_B} | \mathbf{p}' \rangle}{P^2 - M_B^2} + \langle \mathbf{p} | \tilde{R}(P) | \mathbf{p}' \rangle. \quad (3.65)$$

This leads to the normalization condition in MW, CJ and MNK versions in analogy with Eq. (2.21)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{M_B}^i(\mathbf{p}) \left\{ \frac{\partial}{\partial M_B} \left((\tilde{G}_0^i(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}'))^{-1} - V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \right) \right\} \times \\
&\times \tilde{\Phi}_{M_B}^i(\mathbf{p}') = 2M_B. \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Now using the relation

$$(\tilde{G}_0^i(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}'))^{-1} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (\tilde{G}_0^i(M_B; \mathbf{p}))^{-1}, \quad (3.67)$$

and the fact that $V(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ does not depend on M_B , the normalization condition can be rewritten as

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{M_B}^i(\mathbf{p}) \left\{ \frac{\partial}{\partial M_B} (\tilde{G}_0^i(M_B; \mathbf{p}))^{-1} \right\} \tilde{\Phi}_{M_B}^i(\mathbf{p}) = 2M_B. \quad (3.68)$$

If now one substitutes here the expression for the free Green function given by Eq. (3.59), one obtains (below, we drop the superscript «i» labeling various versions)

$$\sum_{\alpha_1\alpha_2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{M_B}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p}) f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B; p) \tilde{\Phi}_{M_B}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p}) = 2M_B, \quad (3.69)$$

where

$$f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B; p) = \frac{\partial}{\partial M_B} \left(\frac{d(M_B; p)}{D^{\alpha_1\alpha_2}(M_B; p)} \right). \quad (3.70)$$

By using the explicit expressions for $D^{(\alpha_1\alpha_2)}$ and d given by Eq. (3.60), we obtain

$$\begin{aligned} \text{MW} : f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)} &= \frac{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}{M_B}, \\ \text{CJ} : f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)} &= \frac{2(w_1 + w_2)}{M_B} \frac{\alpha_1 w_1 E_1 + \alpha_2 w_2 E_2}{(E_1 + \alpha_1 w_1)(E_2 + \alpha_2 w_2)}, \\ \text{MNK} : f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)} &= \frac{2}{D^{(\alpha_1\alpha_2)}} \left\{ \left[\frac{M_B B}{R} (1 - y^2) + \frac{M_B^2}{2} - 2 \left(\frac{R - M_B}{2y} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B}{D^{(\alpha_1\alpha_2)}} \left[\left(M_B + \frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}{2} \right) R - \frac{M_B^2}{2} + 2 \left(\frac{R - M_B}{2y} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2) \left(\frac{R - M_B}{2y} + \frac{M_B y}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Let us note that the normalization condition (3.69) is valid for the Salpeter and Gross versions as well, provided we choose

$$\begin{aligned} \text{SAL} : f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)} &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \\ \text{GR} : f_{12}^{(+\pm)} &= 1, \quad f_{12}^{(-\pm)} = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Let us emphasize that the Salpeter, MW, CJ and MNK equations can be used for the bound systems with the equal masses of the constituents, whereas the Gross equation cannot — the particle «1» (spectator) should be heavier than the particle «2». This is due to the approximation (3.23) that was done in the free Green function of the Gross equation. Further, it is directly seen from Eqs. (3.62) and (3.63), that the Salpeter and Gross equations are linear eigenvalue equations for determining M_B (the functions $A^{(\alpha_1\alpha_2)}$ do not depend on M_B), whereas

MW, CJ and MNK equations are not, and M_B enters the right-hand side of these equations as well.

Let us now concentrate on the properties of the coefficient functions in detail. In the case of the equal-mass constituents $m_1 = m_2 = m$ and $w_1 = w_2 = w$, we obtain

$$\begin{aligned} \text{MW} \quad &: \quad A^{(\pm\pm)} = 1, \quad A^{(\pm\mp)} = \frac{M_B}{2w}, \\ \text{CJ} \quad &: \quad A^{(\pm\pm)} = \frac{M_B \pm 2w}{4w}, \quad A^{(\pm\mp)} = \frac{M_B}{4w}, \\ \text{MNK} \quad &: \quad A^{(\pm\pm)} = \frac{M_B \pm 2w}{2M_B}, \quad A^{(\pm\mp)} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

It is immediately seen that in the equal-mass case, the M_B drops out from the equations for mixed components $\tilde{\Phi}_{M_B}^{(\pm\mp)}$ in the MW and CJ versions — that is, these components are redundant and can be eliminated in this case.

The functions $f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}$ in the equal-mass case are given by

$$\begin{aligned} \text{MW} \quad &: \quad f_{12}^{(\pm\pm)} = \pm 1, \quad f_{12}^{(\pm\mp)} = 0, \\ \text{CJ} \quad &: \quad f_{12}^{(\pm\pm)} = \pm \frac{16w^2}{(M_B \pm 2w)^2}, \quad f_{12}^{(\pm\mp)} = 0, \\ \text{MNK} \quad &: \quad f_{12}^{(\pm\pm)} = \frac{2((M_B \pm 2w)^2 - 8w^2)}{(M_B \pm 2w)^2}, \quad f_{12}^{(\pm\mp)} = 2. \end{aligned} \quad (3.74)$$

From these expressions, we immediately see that in the CJ and MNK versions the function $f_{12}^{(--)}$ has the second-order pole at

$$M_B - 2w(p_s) = 0, \quad p_s = \frac{1}{2} \sqrt{M_B^2 - 4m^2}. \quad (3.75)$$

It can be shown that in the nonequal mass case in the CJ and MNK versions the function $f_{12}^{(--)}$ has the second-order pole at

$$E_i^2 - w_i^2(p_s) = 0, \quad p_s = \frac{1}{2} \sqrt{M_B^2 + \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{M_B} \right)^2 - 2(m_1 + m_2)^2}, \quad (3.76)$$

while the other components $f_{12}^{(++)}$, $f_{12}^{(+-)}$ and $f_{12}^{(-+)}$ do not have any poles.

3.7. Logunov–Tavkhelidze Quasi-Potential Approach [12]. There exists the theoretical possibility to construct the 3D analogue of the BS equation without

using the instantaneous approximation. To this end, one may use the Logunov–Tavkhelidze quasi-potential approach formulated in Ref. 12 for the case of two spinless particles, and generalized in Ref. 13 to the case of two fermions.

We introduce the following definition, for any operator $A(P)$ in the momentum space,

$$\langle \mathbf{p} | \tilde{A}(P) | \mathbf{p}' \rangle = \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{dp'_0}{2\pi} \langle p | A(P) | p' \rangle. \quad (3.77)$$

Then, from Eq. (2.2) one obtains

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 + \widetilde{G_0 K G}, \quad (3.78)$$

where $\tilde{G}_0$ is given by Eq. (3.8).

Due to the fact that the operator Π defined by Eq. (3.10) cannot be inverted, the inverse operator of $\tilde{G}_0$ does not exist as well. As a result, one cannot define the interaction potential by the formula analogous to Eq. (3.33). In order to overcome this problem, it is convenient to introduce the Green function $\underline{\tilde{G}}_0$ defined by

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{G}}_0(P; \mathbf{p}) &= i [P_0 - h_1(\mathbf{p}_1) - h_2(\mathbf{p}_2)]^{-1} \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}, \\ \tilde{G}_0(P; \mathbf{p}, \mathbf{p}') &= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \underline{\tilde{G}}_0(P; \mathbf{p}) \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \hat{\Pi}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

where $\hat{\Pi} = \Pi \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}$.

Now, the inverse of the operator $\underline{\tilde{G}}_0(P; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \underline{\tilde{G}}_0(P; \mathbf{p})$ exists, and one may define

$$\underline{\tilde{G}} = \underline{\tilde{G}}_0 + \widetilde{\underline{\tilde{G}}_0 K G}, \quad (3.80)$$

from which follows that

$$\underline{\tilde{G}} = \tilde{G} + \underline{\tilde{G}}_0 (1 - \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \hat{\Pi}). \quad (3.81)$$

It is clear, that near the bound-state pole the Green functions $\tilde{G}$ and $\underline{\tilde{G}}$ differ only by the regular term, since $\underline{\tilde{G}}_0$ is regular in the vicinity of the pole. Consequently, in order to derive the bound-state equation, one may use $\underline{\tilde{G}}$ instead of $\tilde{G}$, and define the interaction potential according to

$$[\underline{\tilde{G}}_0]^{-1} - [\underline{\tilde{G}}]^{-1} = \underline{\tilde{V}}, \quad (3.82)$$

from which it follows that

$$\underline{\tilde{G}} = \underline{\tilde{G}}_0 + \underline{\tilde{G}}_0 \underline{\tilde{V}} \underline{\tilde{G}}, \quad (3.83)$$

and

$$\tilde{V} = [\tilde{G}_0]^{-1} \widetilde{G_0 K G} [\tilde{G}]^{-1}. \quad (3.84)$$

For any given kernel $K(P; p, p')$ the interaction potential can be constructed by using Eq. (3.84). The equation for the bound-state wave function in the c.m. frame can be obtained directly from Eq. (3.82)

$$\tilde{G}^{-1}(M_B) |\tilde{\Phi}_{M_B}\rangle = 0, \quad |\tilde{\Phi}_{M_B}\rangle = \tilde{G} \tilde{V} |\tilde{\Phi}_{M_B}\rangle. \quad (3.85)$$

Defining the quasi-potential as

$$V_q(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = i\gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \tilde{V}(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad (3.86)$$

we obtain

$$\left[M_B - h_1(\mathbf{p}) - h_2(-\mathbf{p}) \right] \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} V_q(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}'). \quad (3.87)$$

Note that in the instantaneous approximation (3.1), the interaction potential reduces to

$$\tilde{V}(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \Pi(\mathbf{p}) \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} K_{\text{st}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (3.88)$$

As a result, the quasi-potential equation reduces to the Salpeter equation.

The first-order quasi-potential is defined by Eqs. (3.82) and (3.86), if in the former the full Green function G is substituted by the free Green function G_0

$$V_q^{(1)}(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = i\gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} \langle \mathbf{p} | [\tilde{G}_0]^{-1} \widetilde{G_0 K G_0} [\tilde{G}_0]^{-1} | \mathbf{p}' \rangle \quad (3.89)$$

from which, in the static approximation one obtains

$$V_q^{(1)}(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \Pi(\mathbf{p}) \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} iK_{\text{st}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \Pi(\mathbf{p}). \quad (3.90)$$

It is seen that, unlike the full quasi-potential equation, the first-order equation does not reduce to the Salpeter equation in the static limit. Only when one may neglect the negative-frequency component of the bound-state wave function, the first-order equation again reduces to the Salpeter equation in the static limit. Here we note, that the first-order quasi-potential equation was used in Ref. 14 in order to evaluate the dynamical retardation effect in the $q\bar{q}$ bound system mass spectrum (i.e., the effect that stems from the deviation of the BS kernel from the static one).

In the rest of this subsection, we consider the normalization condition for the quasi-potential bound-state wave function. Near the bound-state pole, the 3D Green function $\tilde{G}(P)$ develops a pole (3.65). Using the fact that in the vicinity

of the bound-state pole the Green functions $\tilde{G}(P)$ and $\tilde{\underline{G}}(P)$ coincide up to the regular term, it is straightforward to obtain the normalization condition

$$i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) \left[\frac{\partial}{\partial M_B} \left((\tilde{\underline{G}}_0(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}'))^{-1} - \tilde{V}(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \right) \right] \times \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}') = 2M_B. \quad (3.91)$$

From this equation, using the definition of the conjugate wave function (2.14) and Eqs. (3.79), (3.86), we obtain

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}_{M_B}^+(\mathbf{p}) \left[1 - \frac{\partial}{\partial M_B} \left(V_q(M_B; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \right) \right] \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}') = 2M_B. \quad (3.92)$$

As is seen from Eq. (3.92), in the static limit the above normalization condition reduces to the normalization condition for the Salpeter wave function only if one neglects the contribution from the negative-energy component of the wave function.

4. MESON SPECTROSCOPY

4.1. Partial-Wave Decomposition. The properties of the $q\bar{q}$ bound systems in the $3D$ formalism obtained from the BS equation in the static approximation, were studied in Refs. 11,15–35, without making any additional assumptions. Note that these $3D$ equations can be written either, as in Eq. (3.9), for the 2-fermion bound-state wave function [11, 15–19, 21–23, 26, 27, 33, 35], or for the fermion-antifermion bound-state wave function [20, 24, 25, 28–32, 34] (the latter is obtained from Eq. (2.25) in the static approximation). Further, one may write down these equations in terms of either the frequency components of the $3D$ wave functions $\tilde{\Phi}_{M_B}^{(\pm\pm)}(\mathbf{p})$ and $\tilde{\Psi}_{M_B}^{(\pm\pm)}(\mathbf{p})$ (the latter denotes the frequency components of the fermion-antifermion wave function), or in terms of their linear combinations $\tilde{\Phi}_{aa}(\mathbf{p})$, $\tilde{\Phi}_{bb}(\mathbf{p})$, etc., $\tilde{\Psi}_{aa}(\mathbf{p})$, $\tilde{\Psi}_{bb}(\mathbf{p})$, etc., see Eqs. (2.24), (2.26). Below, we shall use the form of the $3D$ equations given by (3.61)–(3.63), with the normalization condition given by (3.69)–(3.72) [11, 26, 35].

In order to rewrite the equations explicitly in either of the forms above, one has to specify the explicit spin structure of the interaction potential. This potential consists of several parts. First, there is the one-gluon (OG) exchange piece dominating at short distances. In the Feynman gauge, the spin structure of this piece is given by $\gamma_\mu^{(1)} \otimes \gamma^{(2)\mu} = \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} - \gamma^{(1)} \otimes \gamma^{(2)}$. In accordance with the static approximation, however, we neglect the second term in this expression [5]. In addition, there is the confinement (C) piece in the potential that dominates at large distances and leads to the formation of the $q\bar{q}$ bound states. The spin

structure of this piece is not known *a priori*. We choose it to be the mixture of a scalar and the zeroth component of a vector. Further, sometimes an additional «instanton-induced» piece, corresponding to the t'Hooft interaction, is included in the potential [25]. The spin structure of this term is given by the equal mixture of scalar and pseudoscalar parts. The rationale for including the latter piece is the following. In the absence of the proper treatment of the Goldstone nature of light pseudoscalar bosons that is due to the spontaneous breaking of chiral symmetry in QCD, the t'Hooft interaction mimics this effect, leading to the large mass splitting between the pseudoscalar and vector mesons. Note that the chiral symmetry can be consistently incorporated in the 3D framework (see, e.g., [20]), albeit at a cost of the more involved formalism. For example, in this case the Hamiltonian of the free quark is replaced by

$$h_i(\mathbf{p}_i) = \alpha^{(i)} \mathbf{p}_i + m_i \gamma_0^{(i)} \rightarrow B_i(\mathbf{p}_i) \alpha^{(i)} \mathbf{p}_i + A_i(\mathbf{p}_i) \gamma_0^{(i)}, \quad (4.1)$$

where $A_i(\mathbf{p}_i)$ and $B_i(\mathbf{p}_i)$ are determined by solving the gap equation for the quark propagator with the static potential. Below, however, we do not consider this approach.

Thus, the spin structure of the static potential we shall be using, is given by

$$\begin{aligned} V = & \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} V_{\text{OG}}(r) + (x \gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} + (1-x) I^{(1)} \otimes I^{(2)}) V_{\text{C}}(r) + \\ & + (I^{(1)} \otimes I^{(2)} + \gamma_5^{(1)} \otimes \gamma_5^{(2)}) V_{\text{T}}(r), \end{aligned} \quad (4.2)$$

where the last term corresponds to the t'Hooft interaction, all potentials are assumed to be local, and $0 \leq x \leq 1$.

Let us now turn to the wave function. It is possible to «solve» the constraints imposed on the frequency components, defining

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{M_B}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}) &= \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) \left(\frac{1}{\alpha_1(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \mathbf{p})} \right) \otimes \left(\frac{1}{-\alpha_2(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \mathbf{p})} \right), \\ \chi_{M_B}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{aa}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}) \\ \tilde{\Phi}_{ab}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}) \\ \tilde{\Phi}_{ba}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}) \\ \tilde{\Phi}_{bb}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

where

$$\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) = \sqrt{\frac{w_1 + \alpha_1 m_1}{2w_1}} \sqrt{\frac{w_2 + \alpha_2 m_2}{2w_2}} = \mathcal{N}_1^{(\alpha_1)}(p) \mathcal{N}_2^{(\alpha_2)}(p), \quad (4.4)$$

and $\chi_{M_B}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})$ is the unconstrained Pauli 2×2 spinor. For this spinor, the following system of equations is obtained

$$\begin{aligned} & [M_B - (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)] \chi_{M_B}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p}) = \\ & = A^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B; p) \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} V_{\text{eff}}^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \chi_{M_B}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (4.5)$$

where

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) (V_1(\mathbf{p} - \mathbf{p}') B_1^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \\ &+ V_2(x; \mathbf{p} - \mathbf{p}') B_2^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \\ &+ V_T(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (B_1^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - B_2^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') - \\ &- B_3^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}(p') \end{aligned} \quad (4.6)$$

and

$$\begin{aligned} B_1^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= 1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2 (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}')}{(w_1+\alpha_1m_1)(w_2+\alpha_2m_2)(w'_1+\alpha'_1m_1)(w'_2+\alpha'_2m_2)}, \\ B_2^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{\alpha_1\alpha'_1 (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}')}{(w_1+\alpha_1m_1)(w'_1+\alpha'_1m_1)} + \frac{\alpha_2\alpha'_2 (\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}')}{(w_2+\alpha_2m_2)(w'_2+\alpha'_2m_2)}, \\ B_3^{(\alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{\alpha_1\alpha_2 (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p})}{(w_1+\alpha_1m_1)(w_2+\alpha_2m_2)} + \frac{\alpha'_1\alpha'_2 (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}')}{(w'_1+\alpha'_1m_1)(w'_2+\alpha'_2m_2)} - \\ &- \frac{\alpha_1\alpha'_2 (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p}')}{(w_1+\alpha_1m_1)(w'_2+\alpha'_2m_2)} - \frac{\alpha'_1\alpha_2 (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{p})}{(w'_1+\alpha'_1m_1)(w_2+\alpha_2m_2)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$V_1 = V_{\text{OG}} + V_C, \quad V_2(x) = V_{\text{OG}} + (2x - 1)V_C. \quad (4.8)$$

The functions $V_{\text{OG}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, $V_C(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ and $V_T(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ are the Fourier-transform of the local potentials $V_{\text{OG}}(r)$, $V_C(r)$ and $V_T(r)$, respectively.

The normalization condition for the Pauli spinors $\chi_{M_B}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})$ follows from (3.69)

$$\sum_{\alpha_1\alpha_2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \chi_{M_B}^{+(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p}) f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) \chi_{M_B}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p}) = 2M_B. \quad (4.9)$$

The partial-wave expansion of the Pauli spinor $\chi_{M_B}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})$ is given by

$$\chi_{M_B}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p}) = \sum_{LSJM_J} \chi_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p}) = \sum_{LSJM_J} \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{p}, \quad (4.10)$$

where $R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p)$ denote the radial wave functions, and L, S, J, M_J stand for the total orbital angular momentum, total spin, total angular momentum, and the projection of the total angular momentum of the $q\bar{q}$ system, respectively.

The partial-wave expansion of the potentials reads as

$$V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = (2\pi)^3 \sum_{\bar{L}\bar{S}\bar{J}\bar{M}_{\bar{J}}} \langle \mathbf{n} | \bar{L}\bar{S}\bar{J}\bar{M}_{\bar{J}} \rangle V_{\bar{I}}^{\bar{L}}(p, p') \langle \bar{L}\bar{S}\bar{J}\bar{M}_{\bar{J}} | \mathbf{n}' \rangle, \quad (4.11)$$

$\bar{I} = \text{OG, C, T},$

where

$$V_{\bar{I}}^{\bar{L}}(p, p') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty r^2 dr j_{\bar{L}}(pr) V_{\bar{I}}(r) j_{\bar{L}}(p'r), \quad (4.12)$$

$j_{\bar{L}}$ being the spherical Bessel function.

Using the fact that for the spherical potentials $V_{\bar{I}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = V_{\bar{I}}(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|)$, one may write

$$V_{\bar{I}}^{\bar{L}}(p, p') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^1 dz P_{\bar{L}}(z) V_{\bar{I}}\left(\sqrt{p^2 + p'^2 - 2pp'z}\right), \quad (4.13)$$

where $P_{\bar{L}}(z)$ denotes the Legendre polynomial. The above form is convenient when the function $V_{\bar{I}}(p, p'; z)$ can be written in the analytic form.

In order to carry out the partial-wave expansion in the bound-state equation, it is convenient to introduce the operators $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)})$, $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)})$, instead of the individual spin operators $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$, $i = 1, 2$. At the next step, one uses the known values of matrix elements of the operators $\mathbf{S}\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$, and the tensor operators

$$S_{12} = 3(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\mathbf{n}) - (\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) = 6(\mathbf{S}\mathbf{n})^2 - 2\mathbf{S}^2, \quad (4.14)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) = 2\mathbf{S}^2 - 3$$

between the different spin-angular momentum states

$$\begin{aligned} \langle LSJM_J | \begin{pmatrix} \mathbf{S}\mathbf{n} \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \end{pmatrix} | L'S'J'M_{J'} \rangle = \\ = \delta_{JJ'} \delta_{M_J M_{J'}} \langle L || \mathbf{n} || L' \rangle \langle S || \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} || S' \rangle \times W(LL'SS'; 1J) (-1)^{S'+L-J}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle L||\mathbf{n}||L'\rangle &= \sqrt{2L'+1} \langle L'100|L0\rangle, \\
\langle S||\mathbf{S}||S'\rangle &= \delta_{SS'}\sqrt{(2S+1)S(S+1)}, \\
\langle S||\boldsymbol{\sigma}||S'\rangle &= (-1)^{S+1}\sqrt{3}\delta_{S|S'-1|},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\langle LSJM_J|\hat{S}_{12}|L'S'J'M_{J'}\rangle &= \delta_{JJ'}\delta_{M_JM_{J'}} \frac{\langle LSJ||\hat{S}_{12}||L'S'J'\rangle}{\sqrt{2J+1}} = \\
&= (-1)^{L-L'}\delta_{S1}\delta_{SS'}\sqrt{120(2L'+1)}\langle L'200|L0\rangle W(LJ21';1L'),
\end{aligned}$$

where W stand for the conventional Racah coefficients. The bound-state equations for the radial wave functions $R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p)$ are then obtained straightforwardly

$$\begin{aligned}
&[M_B - (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)] R_{J\left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) = A^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B; p) \sum_{\alpha_1\alpha_2} \int_0^\infty p'^2 dp' \times \\
&\times \left\{ \left[\left(\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}(p') + \alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) \times \right. \right. \right. \\
&\times \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1-\alpha'_2)}(p')) V_1^J(p, p') + \\
&+ (\alpha_1\alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1\alpha'_2)}(p') + \alpha_2\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1-\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1-\alpha'_2)}(p')) \times \\
&\times V_{2\oplus J}^{\left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)}(x; p, p') \Big) R_{J\left(\begin{smallmatrix} \alpha'_1\alpha'_2 \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)_J}(p') - \\
&- (\alpha_1\alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1\alpha'_2)}(p') - \alpha_2\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1-\alpha_2)}(p) \times \\
&\times \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1-\alpha'_2)}(p')) V_{2\ominus J}(x; p, p') R_{J\left(\begin{smallmatrix} \alpha'_1\alpha'_2 \\ & 0 \end{smallmatrix}\right)_J}(p') \Big] + \\
&+ \left[\left(\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}(p') + \alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1-\alpha'_2)}(p') \right) \pm \right. \\
&\pm (\alpha_1\alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) + \alpha'_1\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1-\alpha'_2)}(p')) V_T^J(p, p') - \\
&- (\alpha_1\alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1\alpha'_2)}(p') + \alpha_2\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1-\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1-\alpha'_2)}(p') \pm \\
&\pm (\alpha_1\alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) + \alpha'_1\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1-\alpha'_2)}(p')) V_{T\oplus J}^{\left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)}(p, p') \Big) R_{J\left(\begin{smallmatrix} \alpha'_1\alpha'_2 \\ & 0 \end{smallmatrix}\right)_J}(p') + \\
&+ \left((\alpha_1\alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1\alpha'_2)}(p') - \alpha_2\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1-\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1-\alpha'_2)}(p') \mp \right. \\
&\mp (\alpha_1\alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) - \alpha'_1\alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1-\alpha'_2)}(p')) V_{T\ominus J}(p, p') \Big) R_{J\left(\begin{smallmatrix} \alpha'_1\alpha'_2 \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)_J}(p') \Big] \Big\}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[M_B - (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \right] R_{J\pm 11J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) = A^{(\alpha_1 \alpha_2)}(M_B; p) \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \int_0^\infty p'^2 dp' \times \\
& \times \left\{ \left[\left(\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') V_1^{J\mp 1}(p, p') + \alpha_1 \alpha_2 \alpha'_1 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \times \right. \right. \right. \\
& \times \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p') V_{1(J\pm 1)J}(p, p') + (\alpha_1 \alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') + \\
& + \alpha_2 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p')) V_2^J(x; p, p') \Big) R_{J\pm 11J}^{(\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') + \\
& + \left(\alpha_1 \alpha_2 \alpha'_1 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p') \frac{2}{2J+1} V_{1\ominus J}(p, p') \right) R_{J\mp 11J}^{(\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') \Big] + \\
& + \left[\left(\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') \pm (\alpha_1 \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 - \alpha_2)}(p) + \alpha'_1 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p')) \times \right. \right. \\
& \times \frac{1}{2J+1} V_T^{J\pm 1}(p, p') + \alpha_1 \alpha_2 \alpha'_1 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p') \times \\
& \times V_{T(J\pm 1)J}(p, p') - (\alpha_1 \alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') + \\
& + \alpha_2 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p') \pm (\alpha_1 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p') + \\
& + \alpha_2 \alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 \alpha'_2)}(p')) \frac{1}{2J+1} V_T^J(p, p') \Big) R_{J\pm 11J}^{(\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') + \\
& + \left(\alpha_1 \alpha_2 \alpha'_1 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p') \frac{2}{2J+1} V_{T\ominus J}(p, p') - \right. \\
& - (\alpha_1 \alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') + \alpha_2 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \times \\
& \times \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p')) \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_T^{J\mp 1}(p, p') \mp (\alpha_1 \alpha'_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(\alpha'_1 - \alpha'_2)}(p') + \\
& + \alpha_2 \alpha'_1 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha'_1 \alpha'_2)}(p')) \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_T^J(p, p') \Big) R_{J\mp 11J}^{(\alpha'_1 \alpha'_2)}(p') \Big] \Big\}, \\
& \tag{4.17}
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
V_{A\oplus J}^{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}(p, p') &= \frac{1}{2J+1} \left[\left(\begin{smallmatrix} J \\ J+1 \end{smallmatrix} \right) V_A^{J-1}(p, p') + \left(\begin{smallmatrix} J+1 \\ J \end{smallmatrix} \right) V_A^{J+1}(p, p') \right], \\
V_{A\ominus J}(p, p') &= \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} \left[V_A^{J-1}(p, p') - V_A^{J+1}(p, p') \right], \\
V_{A(J\pm 1)J}(p, p') &= \frac{1}{(2J+1)^2} \left[V_A^{J\pm 1}(p, p') + 4J(J+1) V_A^{J\mp 1}(p, p') \right],
\end{aligned}$$

$$A = 1, 2, T. \tag{4.18}$$

The normalization condition in terms of radial wave functions has a particularly simple form

$$\sum_{LS} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} f_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(M_B; p) \left[R_{LSJ}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) \right]^2 = 2M_B, \quad (4.19)$$

where $LS = J0, J1$ or $J \pm 11$ corresponding to the system of equations (4.16) and (4.17).

4.2. Dynamical Input. For solving the bound-state equation, one needs further to specify the interquark potentials V_{OG} , V_C , V_T , introduced above. Let us start from the confining part of the potential. It is believed that the explicit form of this potential (i.e., its dependence on the interquark distance) is in principle, derivable from QCD. At present, however, the only tangible theoretical constraint on the form of this potential is the linear growth at large distances obtained within the quenched lattice QCD [36]. Less compelling arguments based on the background field technique, were provided to justify the harmonic oscillator-type ($\sim r^2$) behavior of the confining potential at small distances. With no rigorous solution of the problem in sight, one may use the potential that interpolates between the «known» behavior of the potential in different limiting situations [38, 39] (for a slightly modified version, see [26])

$$V_C(r) = \frac{4}{3} \alpha_S(m_{12}^2) \left(\frac{\mu_{12} \omega_0^2 r^2}{2\sqrt{1 + A_0 m_1 m_2 r^2}} - V_0 \right), \quad (4.20)$$

$$\alpha_S = \frac{12\pi}{33 - 2n_f} \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)^{-1}, \quad m_{12} = m_1 + m_2, \quad \mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_{12}}, \quad (4.21)$$

where Q^2 is the momentum transfer squared, and the factor $\frac{4}{3}$ comes from the color-dependent part of the $q\bar{q}$ interaction. n_f is the number of flavors ($n_f = 3$ for u, d, s quarks; $n_f = 4$, for u, d, s, c quarks; $n_f = 5$, for u, d, s, c, b quarks). ω_0 , V_0 , A_0 , Λ_{QCD} are considered to be the free parameters of the model. The potential given by Eq. (4.20), effectively reduces to the harmonic oscillator potential for the light quarks u, d, s , and to the linear potential for the heavy b, c quarks, that meets our expectations. In these limiting cases, the potential takes the form

$$\begin{aligned} \text{LINEAR} \quad : \quad V_C(r) &= \frac{4}{3} \alpha_S(m_{12}^2) \left(\frac{\omega_0^2}{2m_{12}} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{A_0}} r - V_0 \right) \equiv a_1 + b_1 r, \\ \text{HARMONIC} \quad : \quad V_C(r) &= \frac{4}{3} \alpha_S(m_{12}^2) \left(\frac{\mu_{12} \omega_0^2}{2} r^2 - V_0 \right) \equiv a_2 + b_2 r^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

The one-gluon exchange potential is given by the standard expression [26]

$$V_{\text{OG}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S(m_{12}^2)}{r} \equiv b_{-1} r^{-1}. \quad (4.23)$$

Noting that

$$r^n = \lim_{\eta \rightarrow 0} (-)^n \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} \left(\frac{e^{-\eta r}}{r} \right), \quad (4.24)$$

one can rewrite the potentials in the momentum space

$$\begin{aligned} \text{LINEAR} \quad : \quad V_{\text{C}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') &= a_1 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \\ &+ b_1 \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{4\pi}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 + \eta^2} \right), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\text{HARMONIC} \quad : \quad V_{\text{C}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \left(a_2 - b_2 \Delta_{\mathbf{p}'} \right) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (4.26)$$

$$\text{ONE-GLUON} \quad : \quad V_{\text{C}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = b_{-1} \frac{4\pi}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2}. \quad (4.27)$$

In order to investigate the properties of the $q\bar{q}$ bound systems, the linear potential was used both in the configuration space [15, 20, 23, 31], and in the momentum space [21, 22, 33, 40]. In the latter case, a special numerical algorithm based on the regularization (4.25), was utilized [22, 40]. In Refs. 25, 28–30, 32, the matrix elements of $V_{\text{C}}(r)$ were calculated in the configuration-space basis, in order to encompass the difficulties related to the singular character of the linear potential in the momentum space.

The investigation of the $q\bar{q}$ systems in the framework of Salpeter equation was carried out [17–20, 26], using the harmonic confining potential. MW, CJ and MNK equations with the harmonic confinement were considered in Refs. 11, 35.

Some mathematical problems arise if the one-gluon exchange potential with the *fixed* coupling constant b_{-1} is used for the calculation of the characteristics of $q\bar{q}$ bound systems. Namely, as it was shown in Ref. 28, 20, in this case the Salpeter wave function is divergent at $r \rightarrow 0$. For the running coupling constant this divergence is less pronounced but still present — now, the problem occurs in the decay observables which depend on the value of the wave function at $r \rightarrow 0$. In order to cure this divergence, in Refs. 28, 30 the following regularization was proposed

$$\begin{aligned} V_{\text{OG}}(r) &= -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S(r)}{r}, & \text{for } r > r_0, \\ V_{\text{OG}}(r) &= a_g r^2 + b_g, & \text{for } r < r_0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

where

$$\alpha_S(r) = \frac{A}{2 \ln(e^{-(\gamma+\mu a)}/a + e^{A/(2\alpha_{\text{sat}})})} \left[1 - B \frac{\ln(2 \ln(e^{-\tilde{\mu}a}/a + e^{1/2}))}{2 \ln(e^{-\tilde{\mu}a}/a + e^{B/2})} \right], \quad (4.29)$$

where $a = \Lambda_{\text{QCD}} r$, $\gamma = 0.577215\dots$ is the Euler-Mascheroni constant, and $\alpha_{\text{sat}} = 0.4$, $\mu = 4$, $\tilde{\mu} = 20$. Further,

$$A = \frac{12\pi}{33 - 2n_f}, \quad B = \frac{6(153 - 19n_f)}{(33 - 2n_f)^2}. \quad (4.30)$$

Note, that in Ref. 23, the choice $B = 0$ is adopted. The constants a_g and b_g from Eq. (4.28) are determined from matching of the potential and its first derivative at $r = r_0$. It turns out that the dependence of the $q\bar{q}$ system mass spectrum on the regularization parameter r_0 is very weak provided the latter is chosen to be sufficiently small.

4.3. t'Hooft Interaction. The t'Hooft interaction is used in the form suggested in Ref. 25. The point-like potential in the configuration space would lead to the divergences. For this reason, the following regularization of the potential is considered

$$V_T(r) \rightarrow 4\hat{g}V_{T,\text{reg}}(r; \Lambda), \quad V_{T,\text{reg}}(r; \Lambda) = \frac{1}{(\Lambda\sqrt{\pi})^3} \exp\left(-\frac{r^2}{\Lambda^2}\right). \quad (4.31)$$

In the momentum space, we have

$$V_{T,\text{reg}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'; \Lambda) = \exp\left(-\frac{\Lambda^2(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{4}\right). \quad (4.32)$$

Now, using the following representation of the Legendre polynomials

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n, \quad (4.33)$$

with the use of the identity

$$\int e^{az} z^n dz = \frac{\partial^n}{\partial a^n} \int e^{az} dz, \quad (4.34)$$

after the partial-wave expansion of the t'Hooft potential we obtain

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} V_{T,\text{reg}}^{\bar{L}}(p, p'; \Lambda) = \delta_{\bar{L}0} V_{T,\text{reg}}^0(p, p'; 0), \quad (4.35)$$

that reflects the point-like character of the t'Hooft interaction. Here,

$$V_{T,\text{reg}}^0(p, p'; \Lambda) = \frac{\exp(-\Lambda^2(p^2 + p'^2)/4)}{4\pi^2} \frac{4}{\Lambda^2 p p'} \sinh \frac{\Lambda^2 p p'}{2}. \quad (4.36)$$

In accordance with the Eq. (4.35), all partial waves except $\bar{L} = 0$ in the partial-wave expansion of the t'Hooft potential are neglected even at nonzero Λ .

As was mentioned above, the t'Hooft interaction was introduced in order to provide the mass splitting between the pseudoscalar and vector octets within the framework of the constituent quark model, which in QCD is due to the spontaneous breaking of chiral symmetry. The quantity $\hat{g}$ that appears in Eq. (4.31), is the matrix in the flavor space. The matrix elements of this matrix between various meson states

$$\pi, \rho, K, \omega = \eta_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), \quad \Phi = \eta_s = s\bar{s} \quad (4.37)$$

are [25]

$$\begin{aligned} \langle \pi | \hat{g} | \pi \rangle &= -g = \langle \rho | \hat{g} | \rho \rangle, \quad \langle K | \hat{g} | K \rangle = -g', \\ \langle \eta_s | \hat{g} | \eta_s \rangle &= 0, \quad \langle \eta_n | \hat{g} | \eta_n \rangle = g, \quad \langle \eta_n | \hat{g} | \eta_s \rangle = \sqrt{2}g' \langle \eta_s | \hat{g} | \eta_n \rangle, \end{aligned} \quad (4.38)$$

where g and g' are two independent coupling constants that are considered to be the free parameters of the model.

The η and η' mesons are the superpositions of η_n and η_s . In order to take the mixing into account, we introduce the matrix notations

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{M_B}(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{n,M_B}(\mathbf{p}) \\ \tilde{\Phi}_{s,M_B}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \tilde{G}_0(M_B; \mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \tilde{G}_{n,0}(M_B; \mathbf{p}) & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{s,0}(M_B; \mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ V_A(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} V_{n,A}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') & 0 \\ 0 & V_{s,A}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \end{pmatrix}, \quad A = C, OG, \\ V_T(\mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} V_{nn,T}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') & V_{ns,T}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \\ V_{sn,T}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') & V_{ss,T}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

The radial wave functions $R_{f,000}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p)$, $f = n, s$ describing the η and η' mesons, obey the following system of equations

$$\begin{aligned} [M_B - (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)] R_{f,000}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) &= A_f^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B; p) \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} \int_0^\infty p'^2 dp' \times \\ &\times \left\{ \left[(\mathcal{N}_{f,12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{f,12}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}(p') + \alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2 \mathcal{N}_{f,12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{f,12}^{(-\alpha'_1-\alpha'_2)}(p')) \times \right. \right. \\ &\quad \times V_1^0(p, p') + (\alpha_1\alpha'_1 \mathcal{N}_{f,12}^{(-\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{f,12}^{(-\alpha'_1\alpha'_2)}(p') + \\ &\quad \left. \left. + \alpha_2\alpha'_2 \mathcal{N}_{f,12}^{(\alpha_1-\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{f,12}^{(\alpha'_1-\alpha'_2)}(p')) V_2^1(p, p') \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times R_{f,000}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}(p') + \sum_{f'} \left[\mathcal{N}_{f,12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{f',12}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}(p') + \right. \\
& + \alpha_1\alpha_2\alpha'_1\alpha'_2 \mathcal{N}_{f,12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) \mathcal{N}_{f',12}^{(-\alpha'_1-\alpha'_2)}(p') + \\
& + \alpha_1\alpha_2 \mathcal{N}_{f,12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) + \alpha'_1\alpha'_2 \mathcal{N}_{f',12}^{(-\alpha'_1-\alpha'_2)}(p') \left. \right] \times \\
& \times V_{T,\text{reg}}^0(p, p'; \Lambda) \langle \eta_f | 4\hat{g} | \eta_{f'} \rangle \left. \right] R_{f',000}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}(p') \Big\}. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

The functions $R_{f,000}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p)$, $f = n, s$ satisfy the normalization condition

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha_1\alpha_2} \left[f_{n,12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B, p) \left(R_{n,000}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) \right)^2 + \right. \\
& \left. + f_{s,12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B, p) \left(R_{s,000}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) \right)^2 \right] = 2M_B, \quad (4.41)
\end{aligned}$$

where M_B is either M_η or $M_{\eta'}$.

The equations for other mesonic states can be obtained, replacing $\langle \eta_f | 4\hat{g} | \eta_{f'} \rangle$, $f, f' = n, s$ by the corresponding matrix elements from Eq. (4.38).

Note that the mixing in $\Phi - \omega$ and $\eta - \eta'$ systems has been recently also investigated in Refs. [41] within the Nambu–Jona-Lasinio (NJL) model, with an account of the relativistic confinement potential (Lorentz vector structure only) and the t'Hooft interaction.

4.4. Solution of the Equations. One has to specify the numerical procedure for the solution of the system of radial equations (4.16)–(4.17). A possible algorithm looks as follows. One chooses the known basis functions denoted by $R_{nL}(p)$. The radial wave functions are expanded in the linear combinations of the basis functions

$$\begin{aligned}
R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) &= \sqrt{2M_B(2\pi)^3} \bar{R}_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) = \\
&= \sqrt{2M_B(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} c_{nLSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)} R_{nL}(p), \quad (4.42)
\end{aligned}$$

where $c_{nLSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}$ are the coefficients of the expansion. The integral equation for the radial wave functions is then transformed into the system of linear equations for these coefficients. If the truncation is carried out, the finite system of equations is obtained that can be solved by using conventional numerical methods. The convergence of the whole procedure, with more terms taken into account in the expansion (4.42), depends on the successful choice of the basis. In

Refs. 24, 25, 28–32, 34, where the linear confining potential is assumed, the basis functions are chosen in the following manner

$$R_{nL}(y) = N_{nL} y^L L_n^{2L+2}(y) e^{-y/2}, \quad y = \beta p, \quad (4.43)$$

where $L_n^{2L+2}(y)$ are the Laguerre polynomials, and β is the free parameter. In Refs. 15, 27, 33, the nonrelativistic oscillator wave functions (again containing the free parameter), were used in spite of the fact that the linear confining potential was assumed. In Refs. 11, 17–19, 21, 35, the same basis functions were used, but without the free parameter, due to the fact that the confining potential was taken in the harmonic form, with the parameters already fixed. Finally, in Ref. 26, the harmonic oscillator basis was used, whereas the confining potential had the general form given by Eq. (4.20).

To clarify the choice of the basis functions, let us consider the nonrelativistic limit of the equations (3.61). In this limit, one can replace $\gamma_0 \rightarrow 1$, $\gamma_5 \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 0$. Consequently,

$$V \rightarrow V_{\text{OG}} + V_{\text{C}} + V_{\text{T}}. \quad (4.44)$$

Further, to derive the nonrelativistic limit of the equations, we expand the kinetic term $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ in Eq. (3.61), retaining terms up to (including) $O(\mathbf{p}^2/m_i^2)$. In the right-hand side of this equation, the function $A^{(\alpha_1 \alpha_2)}(M_B; p)$ can be replaced by its value at $p = 0$. In the result, we obtain

$$\tilde{\Phi}_{M_B;NR}^{(\pm\mp)}(\mathbf{p}) = 0, \quad \tilde{\Phi}_{M_B;NR}^{(--)}(\mathbf{p}) = 0, \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \left[\varepsilon_B - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_{12}} \right] \tilde{\Phi}_{\varepsilon_B;NR}^{(++)}(\mathbf{p}) &= A^{(++)}(M_B; 0) \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} [V_{\text{OG}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \\ &+ V_{\text{C}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + V_{\text{T}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')] \tilde{\Phi}_{\varepsilon_B;NR}^{(++)}(\mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (4.46)$$

where $\varepsilon_B = M_B - m_{12}$, and

$$\begin{aligned} \text{SAL, GR, MW} &: A^{(++)}(M_B; 0) = 1, \\ \text{CJ} &: A^{(++)}(M_B; 0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M_B}{m_{12}} \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

The nonrelativistic limit in the MNK version is more tricky. For a general M_B , there emerges an arbitrary function of the ratio M_B/m_{12} . However, if one uses the nonrelativistic approximation also for the bound-state mass $M_B = m_{12}$, then $A^{(++)}(M_B; 0) = 1$ for both the CJ and MNK versions. Below, we shall use this approximation.

Since in the nonrelativistic limit (see Eq. (4.3))

$$\tilde{\Phi}_{\varepsilon_B;NR}^{(++)}(\mathbf{p}) = \chi_{\varepsilon_B;NR}^{(++)}(\mathbf{p}), \quad (4.48)$$

the nonrelativistic limit of Eq. (3.61) with the harmonic confinement potential (4.22) only, is given by

$$\left[\varepsilon_B - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_{12}} + \frac{4}{3}\alpha_S(m_{12}^2) \left(\frac{\mu_{12}\omega_0^2}{2} \Delta_{\mathbf{p}} + V_0 \right) \right] \chi_{\varepsilon_B;NR}^{(++)}(\mathbf{p}) = 0. \quad (4.49)$$

Performing the partial-wave expansion of Eq. (4.49), we obtain the equation for the radial wave functions

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} - \frac{L(L+1)}{z^2} - z^2 + \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{3}{4\alpha_S(m_{12}^2)}} \left(\varepsilon_B^{(n)} + \frac{4}{3}\alpha_S(m_{12}^2)V_0 \right) \right] \times \\ \times R_L(z) = 0, \quad (4.50)$$

where $z = p/\bar{p}$, and $\bar{p} = \sqrt{\mu_{12}\omega_0 \sqrt{\frac{4}{3}\alpha_S(m_{12}^2)}}$. The solutions of this equation with the energy spectrum

$$\varepsilon_B^{(n)} = -\frac{4}{3}\alpha_S(m_{12}^2)V_0 + \sqrt{\frac{4}{3}\alpha_S(m_{12}^2)}\omega_0 \left(2n + L + \frac{3}{2} \right), \quad (4.51)$$

are the well-known harmonic oscillator wave functions

$$R_{nL}(p) = \bar{p}^{-3/2} R_{nL}(z), \\ R_{nL}(z) = c_{nL} z^L \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, L + \frac{3}{2}, z^2\right), \\ c_{nL} = \sqrt{\frac{2\Gamma(n+L+3/2)}{\Gamma(n+1)}} \frac{1}{\Gamma(L+3/2)}, \quad (4.52)$$

where ${}_1F_1$ denotes the confluent hypergeometric function.

The functions $R_{nL}(p)$ can be used as a basis for the expansion in the general case (4.42). The system of equations for the coefficients is given by

$$M_B c_{nLSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)} = \sum_{\alpha'_1\alpha'_2} \sum_{L'S'} \sum_{n'} H_{LSJn;L'S'J'n'}^{(\alpha_1\alpha_2;\alpha'_1\alpha'_2)}(M_B) c_{n'L'S'J'}^{(\alpha'_1\alpha'_2)}, \quad (4.53)$$

where the matrix $H(M_B)$ is given by the convolution of the potential and various kinematic factors that appear in Eqs. (4.16)–(4.17), with the wave functions of

the basis. From Eq. (4.53) it is immediately seen that, in general, the eigenvalue equation for M_B is not a linear one, and should be solved, e.g., by iterations.

In order to actually solve the system of equations (4.53), one has to truncate it at some fixed $n = N_{\max}$. Then, $c_{LSJn}^{(\alpha_1\alpha_2)}$ are determined from the system of $4(N_{\max} + 1)(2(N_{\max} + 1))$ in Salpeter and Gross versions) linear equations. This procedure determines the eigenvalue M_B as well, either directly, when the matrix $H(M_B)$ does not depend on M_B , or by using the iterative procedure. Having solved the eigenvalue problem at a fixed value of $N_{\max}$, one has then to check the stability with respect to the change of $N_{\max}$ — if the calculated eigenvalues do not converge with the increase of $N_{\max}$, the original system of integral equations is declared to have no solutions.

Note that the system of equations (4.53) is homogeneous in $c_{LSJn}^{(\alpha_1\alpha_2)}$. This means that the solution of the eigenvalue problem determines these coefficients up to an overall factor that can be fixed from the normalization condition

$$\sum_{LS} \sum_{\alpha_1\alpha_2} \sum_{nn'} c_{LSJn}^{(\alpha_1\alpha_2)} c_{LSJn'}^{(\alpha_1\alpha_2)} \int_0^\infty p^2 dp f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B; p) R_{nL}(p) R_{n'L}(p) = 1. \quad (4.54)$$

In the CJ and MNK versions, the function $f_{12}^{(-)}(M_B; p)$ has the second-order pole, so in the normalization condition one encounters singular integrals of the following type

$$I(x_0) = \int_0^\infty \frac{f(x)dx}{(x - x_0)^2}, \quad (4.55)$$

where $f(x)$ is the regular function that obeys the conditions $f(0) = f(\infty) = 0$. The integral in (4.55) can be regularized according to

$$\int_0^\infty \frac{f(x)dx}{(x - x_0)^2} = \int_0^{2x_0} \frac{(f'(x) - f'(x_0))dx}{x - x_0} + \int_{2x_0}^\infty \frac{f'(x)dx}{x - x_0}. \quad (4.56)$$

The first question, which one may be willing to investigate, is the manifestation of the Lorentz structure of the confining interaction in the bound-state mass spectrum, especially in the case of light quarks. This question was addressed, e.g., in Ref. 18, where the scalar, timelike vector, and their equal-weight mixture were studied on the basis of Salpeter equation (this corresponds to the choice $x = 0; 1; 0.5$ in Eq. (4.2), respectively). It was demonstrated that the stable solutions of the Salpeter equation in the light quark sector do not exist for the scalar confining potential $x = 0$, and do exist for $x = 0.5$ and $x = 1$. Further, in Ref. 18, the structure $\gamma_\mu^{(1)} \otimes \gamma^{\mu(2)}$ was considered as well — it was demonstrated that in the case the stable solutions do not exist. In Ref. 21, more general conclusion was obtained — it was demonstrated that the stable solutions in the light

quark sector exist for any x from the interval $0.5 \leq x \leq 1$. This result was confirmed in Refs. 27, 31. Further, in Ref. 19, it was shown that in the heavy quark sector nothing really depends on the mixing parameter x — the solutions exist everywhere and practically do not change when x varies in the whole interval $0 \leq x \leq 1$. This result is easy to understand. Indeed, the projection operator $(\Lambda_{12}^{(++)} - \Lambda_{12}^{(--)})\gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}$, that is present in the Salpeter equation, in the heavy quark limit is equal to $\frac{1}{2}(\gamma_0^{(1)} + \gamma_0^{(2)})\gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)}$, so that the confining interaction in this limit equals

$$\begin{aligned} (\Lambda_{12}^{(++)} - \Lambda_{12}^{(--)})\gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} [x\gamma_0^{(1)} \otimes \gamma_0^{(2)} + (1-x)I^{(1)} \otimes I^{(2)}] V_C(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2}(\gamma_0^{(1)} + \gamma_0^{(2)})V_C(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (4.57) \end{aligned}$$

at $m_1, m_2 \rightarrow \infty$, and does not depend on x at all. Note that in the literature we encounter the different choice of the parameter x : $x = 1$ [15, 20, 27], $x = 0.5$ [28, 30, 32], $x = 0$ [20, 25, 28]. Note also, that, as it was shown in Ref. 26, the nonexistence of the stable solutions at small x in the light-quark sector is related to the presence of the «negative-energy» component in the Salpeter wave function.

The same question can be studied in other — GR, MW, CJ and MNK — versions that, unlike the Salpeter equation, have the correct one-body limit. For the MW and CJ versions the investigations were carried out in Ref. 23. Here, the problem was studied in the configuration space, and for the confining potential the following Lorentz structure was assumed: $V_C(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = [x\gamma_\mu^{(1)} \otimes \gamma^{\mu(2)} + (1-x)I^{(1)} \otimes I^{(2)}] V_C(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, where for $V_C(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ a linear form was chosen. It was demonstrated that this potential should be «more scalar than vector» in order to provide the existence of the stable solutions. More detailed study of MW, CJ and MNK versions in the momentum space was carried out in Refs. 11, 35, where the harmonic confining potential was used, with the Lorentz structure given by Eq. (4.2). The following states $d\bar{s}$: $^1S_0, ^3S_1, ^1P_1, ^3P_0, ^3P_1, ^3P_2, ^1P_2, ^3D_1, ^3D_3$, $c\bar{u}$ and $c\bar{s}$: $^1S_1, ^1P_1, ^3P_2$, were considered. It was demonstrated, that in all versions the solutions always exist at $x = 0$, whereas for $x = 1$ for the majority of the states there is no solution. This is just the opposite to the Salpeter equation case (see above) — there, at $x = 1$, there are the solutions, whereas at $x = 0$, the solutions for majority of states cease to exist. Put differently, the existence/nonexistence of the solutions depends critically on the value of x , and the criteria vary from version to version. In addition, the criteria depend on the details of the potential — in particular, on the strength parameter ω_0 introduced in Eq. (4.22). Note that the instability mentioned, is now caused by the admixture of the mixed $(+-), (-+)$ frequency components in the bound-state wave function. One may look for the admissible window in the parameter

space, where the solutions of all versions simultaneously exist and approximately coincide. In this way, one may judge on the Lorentz structure — assuming that the whole physical picture of the $q\bar{q}$ bound states based on the $3D$ reduction of the BS equation, is viable. From this study, one has to reject the MW version that poorly agrees either with other versions or with data. Further, on the basis of SAL, CJ and MNK versions, one can determine the acceptable interval for the mixing parameter x : $0.3 \leq x \leq 0.6$.

Both the fine structure (P -wave splitting), and the hyperfine structure ($^3S_1 - ^3D_1$ splitting) of the $q\bar{q}$ states depends on the value of the mixing parameter x . As was shown in Refs. 25,33 on the basis of Salpeter equation, the spin-orbit splitting in the light quarkonia can only be described by the mixture of scalar and timelike vector confinement. However, as was shown in Ref. 33, the fine structure and the hyperfine structure cannot be simultaneously described by simply varying the value of the mixing parameter. Finally, in Ref. 35, more general — and pessimistic — conclusion was drawn: neither of the versions — SAL, MW, CJ or MNK — with the dynamical input specified above, does not describe even qualitative features of the whole mass spectrum of $q\bar{q}$ bound states with x inside the interval $0.3 \leq x \leq 0.6$. Clearly, the problem calls for the further investigation. Note that some aspects of the dependence on x the existence of stable solutions of the different three-dimensional relativistic equations is studied in Refs.44,45.

5. DECAYS OF THE MESONS IN THE C.M. FRAME

Further information about the bound $q\bar{q}$ systems may be gained, investigating their decays. Below, we consider exclusively the decays that proceed into the c.m. frame of the bound state*. These are: the weak decays of the pseudoscalar mesons $P \rightarrow \mu\bar{\nu}$, the leptonic decays of the neutral vector mesons $V \rightarrow e^+e^-$, and the two-photon decays $M \rightarrow \gamma\gamma$. The corresponding characteristics are: the weak decay constant f_P , the leptonic decay width $\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)$ (or the leptonic constant f_V), and the two-photon decay width $\Gamma(M \rightarrow \gamma\gamma)$.

The expressions for the quantities f_P and $\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)$ were obtained in Refs. 18,25,28,29 in the framework of Salpeter equation, directly in terms of $\tilde{\Phi}^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \tilde{\Phi}_{aa}(\mathbf{p}) \pm \tilde{\Phi}_{bb}(\mathbf{p})$, or $\tilde{\Psi}_{aa}(\mathbf{p}) = \tilde{\Phi}^{(++)}(\mathbf{p})$, $\tilde{\Psi}_{bb}(\mathbf{p}) = \tilde{\Phi}^{(--)}(\mathbf{p})$ (see above). In Ref. 35, these quantities were evaluated in the framework of SAL, CJ and MNK versions written in the form (4.5)–(4.1), that corresponds to the

*The treatment of the decays which cannot be confined to the c.m. frame, implies the specification of the Lorentz-transformation rules for the instantaneous potentials and $3D$ wave functions. Due to the Lorentz covariance, the dependence on the 0-th component of the relative momentum emerges into the transformed wave functions, that renders the problem extremely complicated, and the further assumptions are necessary. We do not consider such processes here.

representation of the wave function in the form (4.3)–(4.4). The main conclusion that comes from this investigation, is that the results do not depend much on the choice of the different 3D reduction scheme. The quantity $\Gamma(M \rightarrow \gamma\gamma)$ was evaluated in Refs. 28, 29, 32, 34 for the systems (π, η, η') . Below, we shall follow the derivation presented in Ref. 35.

For the calculation of the quantities listed above, we need the wave function $\tilde{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})$ which, according to Eq. (4.3), is expressed via $\tilde{\chi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})$. The partial-wave expansion for the components of the wave function reads

$$\begin{aligned} [\tilde{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})]_{aa} &= \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p), \\ [\tilde{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})]_{ab} &= -(\mathbf{sn} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle \frac{\alpha_2 p \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p)}{w_2 + \alpha_2 m_2} R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p), \\ [\tilde{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})]_{ba} &= (\mathbf{sn} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle \frac{\alpha_1 p \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p)}{w_1 + \alpha_1 m_1} R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p), \\ [\tilde{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})]_{bb} &= -\frac{\mathbf{S}_{12} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}}{3} \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle \times \\ &\quad \times \frac{\alpha_1 \alpha_2 p^2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p)}{(w_1 + \alpha_1 m_1)(w_2 + \alpha_2 m_2)} R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p), \end{aligned} \quad (5.1)$$

where $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)})$, $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)})$, and the operators $\mathbf{S}_{12}$ and $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ are given by Eq. (4.14).

Using now the identity which is valid for any operator $\hat{\mathbf{O}}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{O}}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \mathbf{n}) \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle &= \\ &= \sum_{L'S'J'M_{J'}} \langle \mathbf{n} | L'S'J'M_{J'} \rangle \langle L'S'J'M_{J'} | \hat{\mathbf{O}} | LSJM_J \rangle, \end{aligned} \quad (5.2)$$

and the expressions for the matrix elements of the operators $\mathbf{Sn}$, $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$, $\mathbf{S}_{12}$ (4.15), from Eq. (5.1) it is straightforward to obtain

$$\begin{aligned} [\tilde{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})]_{aa} &= \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p) R_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p), \\ [\tilde{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\mathbf{p})]_{ab} &= \\ &= \left[\mp \sqrt{\frac{\binom{J+1}{J}}{2J+1}} \langle \mathbf{n} | J+11JM_J \rangle + \sqrt{\frac{\binom{J}{J+1}}{2J+1}} \langle \mathbf{n} | J-11JM_J \rangle \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) R_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p), \\
& [\tilde{\Phi}_{J \pm 11 J M_J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p})]_{ab} = \\
& = \left[\sqrt{\frac{\binom{J}{J+1}}{2J+1}} \langle \mathbf{n} | J 1 J M_J \rangle \mp \sqrt{\frac{\binom{J+1}{J}}{2J+1}} \langle \mathbf{n} | J 0 J M_J \rangle \right] \times \\
& \quad \times \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) R_{J \pm 11 J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p), \\
& [\tilde{\Phi}_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J M_J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p})]_{ba} = \\
& = \left[-\sqrt{\frac{\binom{J+1}{J}}{2J+1}} \langle \mathbf{n} | J + 11 J M_J \rangle \pm \sqrt{\frac{\binom{J}{J+1}}{2J+1}} \langle \mathbf{n} | J - 11 J M_J \rangle \right] \times \\
& \quad \times \alpha_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2)}(p) R_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p), \\
& [\tilde{\Phi}_{J \pm 11 J M_J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p})]_{ba} = \\
& = \left[-\sqrt{\frac{\binom{J}{J+1}}{2J+1}} \langle \mathbf{n} | J 1 J M_J \rangle \mp \sqrt{\frac{\binom{J+1}{J}}{2J+1}} \langle \mathbf{n} | J 0 J M_J \rangle \right] \times \\
& \quad \times \alpha_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2)}(p) R_{J \pm 11 J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p), \\
& [\tilde{\Phi}_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J M_J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p})]_{bb} = \pm \langle \mathbf{n} | J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J M_J \rangle \alpha_1 \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 - \alpha_2)}(p) R_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p), \\
& [\tilde{\Phi}_{J \pm 11 J M_J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p})]_{bb} = \\
& = \left[\pm \frac{1}{2J+1} \langle \mathbf{n} | J \pm 11 J M_J \rangle - \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} \langle \mathbf{n} | J \mp 11 J M_J \rangle \right] \times \\
& \quad \times \alpha_1 \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 - \alpha_2)}(p) R_{J \pm 11 J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

With the use of these expressions, we can explicitly calculate the quantity

$$[\hat{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p})]_{ij} = [\tilde{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p})]_{ij}(-i\sigma_y), \quad i, j = a, b, \tag{5.4}$$

as a 2×2 matrix in the fermion spin space. To this end, we explicitly introduce the fermion spin coordinates σ_1 and σ_2 ($\sigma_i = \pm 1/2$, $i = 1, 2$). Then, we have

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle \equiv \langle \mathbf{n} \sigma_1 \sigma_2 | LSJM_J \rangle = \\
& = \sum_{m_L m_S} \langle L S m_L m_S | JM_J \rangle \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma_1 \sigma_2 | S m_S \rangle \langle \mathbf{n} | L m_L \rangle.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Further, with the account of the following relations

$$\begin{aligned}
 \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma_1 \sigma_2 | 00 \rangle (-i\sigma_y) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I \equiv \hat{\varphi}_0, \\
 \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma_1 \sigma_2 | 10 \rangle (-i\sigma_y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z \equiv \hat{\varphi}_{10}, \\
 \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sigma_1 \sigma_2 | 1 \pm 1 \rangle (-i\sigma_y) &= \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} (\mp \sigma_x - i\sigma_y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{\pm} \equiv \hat{\varphi}_{1\pm 1},
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

it follows that

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{n} | LSJM_J \rangle &= \sum_{m_L m_S} \langle LS m_L m_S | JM_J \rangle \langle \mathbf{n} | L m_L \rangle \hat{\varphi}_{S m_S} \equiv \\
 &\equiv (\langle \mathbf{n} | L \rangle \otimes \hat{\varphi}_S)^{JM_J}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

For the quantity $\hat{\Phi}_{LSJM_J}(\mathbf{p}) = \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \hat{\Phi}_{LSJM_J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(\mathbf{p})$ we obtain

$$\begin{aligned}
 [\hat{\Phi}_{LSJM_J}(\mathbf{p})]_{aa} &= (\langle \mathbf{n} | L \rangle \otimes \hat{\varphi}_S)^{JM_J} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) R_{LSJ}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p), \\
 [\hat{\Phi}_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} JM_J}(\mathbf{p})]_{ab} &= \left[\mp \sqrt{\frac{\begin{pmatrix} J \\ J+1 \end{pmatrix}}{2J+1}} (\langle \mathbf{n} | J+1 \rangle \otimes \hat{\varphi}_1)^{JM_J} + \right. \\
 &+ \left. \sqrt{\frac{\begin{pmatrix} J+1 \\ J \end{pmatrix}}{2J+1}} (\langle \mathbf{n} | J-1 \rangle \otimes \hat{\varphi}_1)^{JM_J} \right] \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) R_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p), \\
 [\hat{\Phi}_{J \pm 11 JM_J}(\mathbf{p})]_{ab} &= \left[\sqrt{\frac{\begin{pmatrix} J \\ J+1 \end{pmatrix}}{2J+1}} (\langle \mathbf{n} | J \rangle \otimes \hat{\varphi}_1)^{JM_J} \mp \right. \\
 &\mp \left. \sqrt{\frac{\begin{pmatrix} J+1 \\ J \end{pmatrix}}{2J+1}} (\langle \mathbf{n} | J \rangle \otimes \hat{\varphi}_0)^{JM_J} \right] \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 - \alpha_2)}(p) R_{J \pm 11 J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p), \\
 [\hat{\Phi}_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} JM_J}(\mathbf{p})]_{ba} &= \left[-\sqrt{\frac{\begin{pmatrix} J+1 \\ J \end{pmatrix}}{2J+1}} (\langle \mathbf{n} | J+1 \rangle \otimes \hat{\varphi}_1)^{JM_J} \pm \right. \\
 &\pm \left. \sqrt{\frac{\begin{pmatrix} J+1 \\ J \end{pmatrix}}{2J+1}} (\langle \mathbf{n} | J-1 \rangle \otimes \hat{\varphi}_1)^{JM_J} \right] \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \alpha_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2)}(p) R_{J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} J}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\Phi}_{J\pm 11JM_J}(\mathbf{p})]_{ba} &= \left[-\sqrt{\frac{\binom{J}{J+1}}{2J+1}} (\langle \mathbf{n}|J\rangle \otimes \hat{\varphi}_1)^{JM_J} \mp \right. \\
&\quad \left. \mp \sqrt{\frac{\binom{J+1}{J}}{2J+1}} (\langle \mathbf{n}|J\rangle \otimes \hat{\varphi}_0)^{JM_J} \right] \sum_{\alpha_1\alpha_2} \alpha_1 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1\alpha_2)}(p) R_{J\pm 11J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p), \\
[\hat{\Phi}_{J\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)JM_J}(\mathbf{p})]_{bb} &= \left[\pm \left(\langle \mathbf{n}|J\rangle \otimes \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_0 \\ \hat{\varphi}_1 \end{pmatrix} \right)^{JM_J} \right] \times \\
&\quad \times \sum_{\alpha_1\alpha_2} \alpha_1 \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) R_{J\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p), \\
[\hat{\Phi}_{J\pm 11JM_J}(\mathbf{p})]_{bb} &= \left[\pm \frac{1}{2J+1} (\langle \mathbf{n}|J\pm 1\rangle \otimes \hat{\varphi}_1)^{JM_J} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (\langle \mathbf{n}|J\mp 1\rangle \otimes \hat{\varphi}_1)^{JM_J} \right] \sum_{\alpha_1\alpha_2} \alpha_1 \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(p) R_{J\pm 11J}^{(\alpha_1\alpha_2)}(p).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

In order to evaluate the constants f_P and f_V , we need the bound-state wave function of the $q\bar{q}$ state at $\mathbf{r} = 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{LSJM_J}(\mathbf{r} = 0) &\equiv \tilde{\Psi}_{LSJM_J}(\mathbf{r} = 0, \sigma_1, \sigma_2) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}_{LSJM_J}(\mathbf{p}) \equiv \\
&\equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}_{LSJM_J}(\mathbf{p}, \sigma_1\sigma_2),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

where, according to Eqs. (2.26), (5.7) and (5.8)

$$\tilde{\Psi}_{LSJM_J}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} (\hat{\Phi}_{LSJM_J}(\mathbf{p}))_{ab} & (\hat{\Phi}_{LSJM_J}(\mathbf{p}))_{aa} \\ (\hat{\Phi}_{LSJM_J}(\mathbf{p}))_{bb} & (\hat{\Phi}_{LSJM_J}(\mathbf{p}))_{ba} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

The decay constants f_P and f_V for the pseudoscalar ($L = S = J = 0$) and vector ($L = 0, S = J = 1$) mesons, respectively, are given by [46]

$$\begin{aligned}
\delta_{\mu 0} M_B f_P &= \sqrt{3} \operatorname{tr} [\tilde{\Psi}_{0000}(\mathbf{r} = 0) \gamma^\mu (1 - \gamma^5)], \\
f_V(\lambda) &= \sqrt{3} \operatorname{tr} [\tilde{\Psi}_{011\lambda}(\mathbf{r} = 0) \gamma^\mu] \varepsilon_\mu(\lambda), \quad \lambda = \pm 1, 0,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

where the factor $\sqrt{3}$ stems from the color part of the wave function, and $\varepsilon_\mu(\lambda)$ is the polarization vector of the vector meson [47]

$$\varepsilon_\mu(\lambda = \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0), \quad \varepsilon_\mu(\lambda = 0) = (0, 0, 0, 1), \quad \text{in c.m. frame.} \tag{5.12}$$

Now, using the equations (5.9)–(5.11), we obtain

$$f_P = \frac{\sqrt{24\pi}}{M_B} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} [\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) - \alpha_1 \alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2 - 2)}(p)] R_{000}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p),$$

$$f_V(\lambda) = -\delta_{\lambda 0} \sqrt{24\pi} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} \left[\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{3} \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1 \alpha_2 - 2)}(p) \right] \times$$

$$\times R_{011}^{(\alpha_1 \alpha_2)}(p) \equiv \delta_{\lambda 0} f_V. \quad (5.13)$$

The leptonic decay width of the vector mesons (ρ^0, ω, Φ) is given by

$$\Gamma(V \rightarrow e^+ e^-) = 4\pi \frac{\alpha_{\text{eff}}^2}{M_B^3} \frac{1}{3} \sum_{\lambda=\pm 1, 0} |f_V(\lambda)|^2 = \frac{4\pi \alpha_{\text{eff}}^2 |f_V|^2}{3M_B^3}, \quad (5.14)$$

where

$$\alpha_{\text{eff}}^2 = \alpha^2 \bar{e}_q^2, \quad \bar{e}_q = e_q/e, \quad \bar{e}_q^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{18}, \frac{1}{9} \right) \quad (5.15)$$

for ρ^0, ω, Φ mesons, respectively. Here, $\bar{e}_q$ denotes the expectation value of the quark charge in the units of the elementary charge e .

In order to explain the reason, why the quantity $\bar{e}_q$ appears in the expression (5.14), let us note that the leptonic decay of the vector meson in the lowest order in e is described by the diagram depicted in Fig. 1. Taking into account the flavor structure of the wave functions

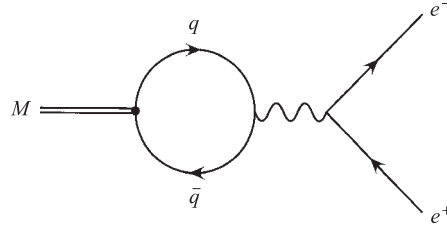


Fig. 1. Decay of the meson into electron-positron pair

$$\rho^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}), \quad \omega \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}), \quad \Phi \sim s\bar{s}, \quad (5.16)$$

we obtain, that the transition amplitudes of the vector mesons into the photon are proportional to

$$(\rho^0 \rightarrow \gamma) \sim \frac{e}{\sqrt{2}}, \quad (\omega \rightarrow \gamma) \sim \frac{e}{3\sqrt{2}}, \quad (\Phi \rightarrow \gamma) \sim -\frac{e}{3}, \quad (5.17)$$

from which the Eq. (5.15) follows directly.

Further, taking into account Eqs. (4.42), (4.52) and (4.54), we can express the quantity f_P and the leptonic decay width in terms of the dimensionless wave functions $\bar{R}_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(z)$

$$f_P = \frac{\sqrt{6}\bar{p}^{3/2}}{\pi\sqrt{M_B}} \left| \sum_{\alpha_1\alpha_2} \int_0^\infty z^2 dz \left[\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\bar{p}, z) - \alpha_1\alpha_2 \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(\bar{p}, z) \right] \bar{R}_{000}^{(\alpha_1\alpha_2)}(z) \right|,$$

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = \frac{8\alpha_{\text{eff}}^2 \bar{p}^3}{\pi M_B^2} \left| \sum_{\alpha_1\alpha_2} \int_0^\infty z^2 dz \times \right.$$

$$\left. \times \left[\mathcal{N}_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(\bar{p}, z) + \frac{\alpha_1\alpha_2}{3} \mathcal{N}_{12}^{(-\alpha_1-\alpha_2)}(\bar{p}, z) \right] \bar{R}_{011}^{(\alpha_1\alpha_2)}(z) \right|^2, \quad (5.18)$$

where the functions

$$\bar{R}_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(z) = \sum_{n=0}^\infty C_{LSJn}^{(\alpha_1\alpha_2)} \bar{R}_{nL}(z) \quad (5.19)$$

satisfy the normalization condition

$$\sum_{LS} \sum_{\alpha_1\alpha_2} \int_0^\infty z^2 dz f_{12}^{(\alpha_1\alpha_2)}(M_B; \bar{p}, z) \left[\bar{R}_{LSJ}^{(\alpha_1\alpha_2)}(z) \right]^2 = 1. \quad (5.20)$$

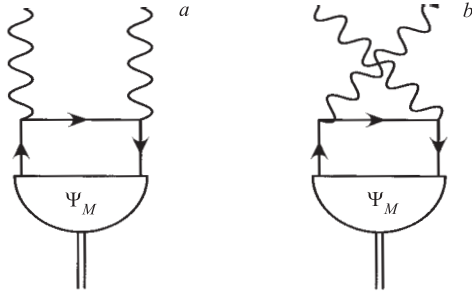


Fig. 2. Two-photon decay of the meson

Next, we consider the two-photon decays of the neutral mesons. The amplitude of the two-photon decay of the $q\bar{q}$ bound state with equal-mass quarks in the lowest order in the coupling constant e is given by the diagrams depicted in Fig. 2. In the c.m. frame, where $P = (M_B, \mathbf{0})$, this amplitude is equal to [24]

$$T(\lambda_1\lambda_2) = i\sqrt{3}e_q^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left\{ \Psi_{M_B}(p) \left[\not{\epsilon}_1 S \left(\frac{P}{2} + p - k_1 \right) \not{\epsilon}_2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \not{\epsilon}_2 S \left(\frac{P}{2} + p - k_2 \right) \not{\epsilon}_1 \right] \right\}, \quad (5.21)$$

where $\Psi_{M_B}(p)$ is the BS amplitude of the $q\bar{q}$ bound state which satisfies Eq. (2.25) and is written in the form (2.26). Further, $k_1 = (M_B/2, \mathbf{k})$ and

$k_2 = (M_B/2, -\mathbf{k})$, where $\mathbf{k}$ is the relative 3-momentum of photons in the c.m. frame directed along the z axis, and $\epsilon_i \equiv \epsilon(\lambda_i)$ are the polarization vectors for the emitted photons. Due to the fact that the emitted physical photons are transversely polarized, one needs to consider only the values $\lambda_i = \pm 1$ for which

$$\epsilon(\lambda_1 = \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0), \quad \epsilon(\lambda_2 = \pm 1) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \mp i, 0), \quad (5.22)$$

and

$$\not{\epsilon}(\lambda_1 = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm \gamma_x + i \gamma_y), \quad \not{\epsilon}(\lambda_2 = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp \gamma_x + i \gamma_y). \quad (5.23)$$

Further, one may rewrite the expression, entering the integrand in Eq. (5.21) in the following manner (below, we follow the derivation given in Ref. 48)

$$\begin{aligned} f_M(p, \mathbf{k}) &= -i \not{\epsilon}_1 S \left(\frac{P}{2} + p - k_1 \right) \not{\epsilon}_2 - i \not{\epsilon}_2 S \left(\frac{P}{2} + p - k_2 \right) \not{\epsilon}_1 = \\ &= \frac{a_{12}^{(+)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{p_0 - w(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + i0} + \frac{a_{12}^{(-)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{p_0 + w(\mathbf{p} - \mathbf{k}) - i0} + \\ &+ \frac{a_{21}^{(+)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{p_0 - w(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + i0} + \frac{a_{21}^{(-)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{p_0 + w(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - i0}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

where $w(\mathbf{p} \pm \mathbf{k}) = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p} \pm \mathbf{k})^2}$, and

$$a_{12}^{(\alpha)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = \not{\epsilon}_1 \Lambda^{(\alpha)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \gamma_0 \not{\epsilon}_2, \quad a_{21}^{(\alpha)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) = \not{\epsilon}_2 \Lambda^{(\alpha)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \gamma_0 \not{\epsilon}_1. \quad (5.25)$$

Note that, of course, the relation of the BS amplitude $\Psi_{M_B}(p)$ and the 3D amplitude $\tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p})$ is different in different versions of the 3D reduction. In particular, in the Salpeter version,

$$\Psi_{M_B}(p) = S \left(\frac{P}{2} + p \right) \Gamma(\mathbf{p}) S \left(-\frac{P}{2} + p \right), \quad (5.26)$$

where, taking into account Eq. (2.26), we have

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{p}) &= -i \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}'), \\ \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}') &= -i \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{ab}(\mathbf{p}') \sigma_y & \tilde{\phi}_{aa}(\mathbf{p}') \sigma_y \\ \tilde{\phi}_{bb}(\mathbf{p}') \sigma_y & \tilde{\phi}_{ba}(\mathbf{p}') \sigma_y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

On the other hand, from Eq. (5.26) one may obtain

$$\begin{aligned}
 \Psi_{M_B}(p) = & -\frac{\Gamma^{(+-)}(\mathbf{p})}{M_B - 2w + i0} \left(\frac{1}{p_0 - \frac{M_B}{2} + w - i0} - \frac{1}{p_0 + \frac{M_B}{2} - w + i0} \right) + \\
 & + \frac{\Gamma^{(-+)}(\mathbf{p})}{M_B + 2w} \left(\frac{1}{p_0 - \frac{M_B}{2} + w - i0} - \frac{1}{p_0 + \frac{M_B}{2} - w + i0} \right) + \\
 & + \frac{\Gamma^{(++)}(\mathbf{p})}{M_B} \left(\frac{1}{p_0 - \frac{M_B}{2} - w + i0} - \frac{1}{p_0 + \frac{M_B}{2} - w + i0} \right) + \\
 & + \frac{\Gamma^{(--)}(\mathbf{p})}{M_B} \left(\frac{1}{p_0 - \frac{M_B}{2} + w - i0} - \frac{1}{p_0 + \frac{M_B}{2} + w + i0} \right), \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

where

$$\Gamma^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}) = \Lambda^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \gamma_0 \Gamma(\mathbf{p}) \gamma_0 \Lambda^{(\beta)}(-\mathbf{p}). \quad (5.29)$$

After integrating Eq. (5.28) over p_0 , we obtain the Salpeter equation for the equal-time amplitude

$$\tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}) = -\frac{i\Gamma^{(+-)}(\mathbf{p})}{M_B - 2w + i0} + \frac{i\Gamma^{(-+)}(\mathbf{p})}{M_B + 2w}. \quad (5.30)$$

Now, substituting (5.28) into the expression of the two-photon decay amplitude (5.21) and integrating over p_0 , we obtain: $T(\pm\mp) = 0$ and

$$\begin{aligned}
 T(\pm\pm) = & i\sqrt{3}e_q^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{4}M_B^2 - (w + w(\mathbf{p} - \mathbf{k}))^2} \times \right. \\
 & \times \text{tr} \left[\frac{1}{2} (\Gamma^{(++)}(\mathbf{p}) - \Gamma^{(--)}(\mathbf{p})) (\gamma_0 \mp \gamma_5 \gamma_z) + \right. \\
 & + \left(\frac{1}{2} (\Gamma^{(++)}(\mathbf{p}) - \Gamma^{(--)}(\mathbf{p})) + \left(\frac{M_B}{M_B + 2w} \Gamma^{(-+)}(\mathbf{p}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + i \left(\frac{M_B}{2} + w + w(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \right) \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}) \right) \right] \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{w(\mathbf{p} - \mathbf{k})} \left((1 \pm \gamma_5 \gamma_0 \gamma_z) m + (\gamma_z \mp \gamma_5 \gamma_0)(p_z - k) \right) \Big] + \\
& + \frac{1}{\frac{1}{4} M_B^2 - (w + w(\mathbf{p} + \mathbf{k}))^2} \text{tr} \left[\frac{1}{2} (\Gamma^{(++)}(\mathbf{p}) - \Gamma^{(--)}(\mathbf{p})) (\gamma_0 \mp \gamma_5 \gamma_z) + \right. \\
& + \left(\frac{1}{2} (\Gamma^{(++)}(\mathbf{p}) + \Gamma^{(--)}(\mathbf{p})) + \left(\frac{M_B}{M_B + 2w} \Gamma^{(-+)}(\mathbf{p}) + \right. \right. \\
& + \left. \left. i \left(\frac{M_B}{2} + w + w(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \right) \right) \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}) \right) \times \\
& \times \frac{1}{w(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \left((1 \mp \gamma_5 \gamma_0 \gamma_z) m + (\gamma_z \mp \gamma_5 \gamma_0)(p_z + k) \right) \Big] \Big\}. \quad (5.31)
\end{aligned}$$

For the further transformation of this expression, one may use the fact that the static potential $V(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ has the Lorentz structure given by Eq. (4.2). Then,

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}') &= V_{\text{OG}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \gamma_0 \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}') \gamma_0 + V_{\text{C}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \\
&\times \left(x \gamma_0 \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}') \gamma_0 + (1 - x) \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}') \right) + \\
&+ V_{\text{T}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') 4\hat{g}(\text{tr}(\tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}')) + \gamma_5 \text{tr}(\tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}') \gamma_5)). \quad (5.32)
\end{aligned}$$

From this, one can directly obtain

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}) &= -i\Lambda^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \left[V_{\text{OG}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{ab}(\mathbf{p}') & \hat{\phi}_{aa}(\mathbf{p}') \\ \hat{\phi}_{bb}(\mathbf{p}') & \hat{\phi}_{ba}(\mathbf{p}') \end{pmatrix} + \right. \\
&+ V_{\text{C}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{ab}(\mathbf{p}') & (2x - 1) \hat{\phi}_{aa}(\mathbf{p}') \\ (2x - 1) \hat{\phi}_{bb}(\mathbf{p}') & \hat{\phi}_{ba}(\mathbf{p}') \end{pmatrix} + \\
&+ V_{\text{T}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') 4\hat{g} \begin{pmatrix} \text{tr}(\hat{\phi}_{ab}(\mathbf{p}') + \hat{\phi}_{ba}(\mathbf{p}')) & -\text{tr}(\hat{\phi}_{aa}(\mathbf{p}') + \hat{\phi}_{bb}(\mathbf{p}')) \\ -\text{tr}(\hat{\phi}_{aa}(\mathbf{p}') + \hat{\phi}_{bb}(\mathbf{p}')) & \text{tr}(\hat{\phi}_{ab}(\mathbf{p}') + \hat{\phi}_{ba}(\mathbf{p}')) \end{pmatrix} \Big] \times \\
&\times \Lambda^{(\beta)}(-\mathbf{p}), \quad (5.33)
\end{aligned}$$

where

$$\hat{\phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = -i\tilde{\phi}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})\sigma_y \quad (5.34)$$

are the components of the meson amplitude in the spin space. After performing the partial-wave decomposition of these amplitudes, the expression for the quantity

$T(\lambda_1 \lambda_2)$ takes the form (note that we have replaced t'Hooft interaction by its regularized version).

1S_0 **state:**

$$\begin{aligned}
T(\pm\pm) = & \pm \frac{\sqrt{3}e_q^2}{(\sqrt{2\pi})^5} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{w^2} \int p'^2 dp' \left\{ \left[\left(\frac{2mw}{M_B(M_B + 2w)} J_0(M_B; p) + \right. \right. \right. \\
& + \frac{2mw}{M_B p} I_1(M_B; p) + \frac{2mw^2}{M_B^2 p} I_2(M_B; p) \Big) V_C^1(p, p') R_{000(ab+ba)}(p') - (2x-1) \times \\
& \times \left(\left(\frac{p}{M_B} + \frac{m^2}{p(M_B + 2w)} \right) J_0(M_B; p) + \frac{2w}{M_B} I_1(M_B; p) + \frac{2w^2}{M_B^2} I_2(M_B; p) \right) \times \\
& \times V_C^0(p, p') R_{000(aa-bb)}(p') + \\
& + (2x-1) \frac{mw}{p(M_B + 2w)} J_0(M_B; p) V_C^0(p, p') R_{000(aa+bb)}(p') \Big] + [x=1, V_C \rightarrow V_{OG}] + \\
& + 4\hat{g} \left[\frac{2mw}{p(M_B + 2w)} J_0(M_B; p) V_{T, \text{reg}}^0(p, p'; \Lambda) R_{000(aa-bb)}(p') \right] + \\
& + \frac{4w^2}{M_B} \left[-\frac{m}{p} I_3(M_B; p) R_{000(ab+ba)}(p) + \left(\frac{M_B}{2p} I_3^0(M_B; p) \right) + \right. \\
& \left. + I_3(M_B; p) \right) R_{000(aa-bb)}(p) \Big] \Big\}, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

3P_0 **state:**

$$\begin{aligned}
T(\pm\pm) = & \pm \frac{\sqrt{3}e_q^2}{(\sqrt{2\pi})^5} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{w^2} \int p'^2 dp' \left\{ \left[\left(\frac{2m}{M_B} \left(\frac{m^2}{pM_B} + \frac{p}{M_B + 2w} \right) J_0(M_B; p) + \right. \right. \right. \\
& + \frac{2mw}{M_B p} I_1^0(M_B; p) + \frac{2mw}{M_B(M_B + 2w)} I_2(M_B; p) + \frac{mp}{M_B^2} I_2^2(M_B; p) \Big) \times \\
& \times V_C^0(p, p') R_{110(ab+ba)}(p') - (2x-1) \left(\frac{4m^2 w}{M_B^2(M_B + 2w)} J_0(M_B; p) + \right. \\
& \left. + \frac{2w}{M_B} I_1^0(M_B; p) + \left(\frac{p}{M_B} + \frac{m^2}{p(M_B + 2w)} \right) I_2(M_B; p) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\left(\frac{p^2}{M_B^2} + \frac{m^2}{M_B(M_B + 2w)}\right)I_2^2(M_B; p)\Big)V_C^1(p, p')R_{110(aa-bb)}(p') - (2x - 1)\times \\
& \times\left(\frac{M_B}{M_B + 2w} \frac{2mw}{M_B^2}(J_0(M_B; p) - I_2^2(M_B; p)) - \frac{mw}{M_B p} I_2(M_B; p)\right)\times \\
& \times V_C^1(p, p')R_{110(aa+bb)}(p')\Big] + [x = 1, V_C \rightarrow V_{OG}] + \\
& + 8\hat{g}\left[4\left(\frac{mw}{M_B p} I_1^0(M_B; p) + \frac{m^3}{M_B^2 p} J_0(M_B; p) + \frac{m}{2M_B} I_2(M_B; p) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{mp}{M_B^2} I_2^2(M_B; p)\right) + \frac{4M_B}{M_B + 2w}\left(\frac{mp}{M_B^2} J_0(M_B; p) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{m}{M_B} I_2(M_B; p) - \frac{mp}{M_B^2} I_2^2(M_B; p)\right)\right]\times \\
& \times V_{T, \text{reg}}^0(p, p'; \Lambda)R_{110(ab+ba)}(p') + \frac{4w^2}{M_B}\left[-\frac{m}{p} I_3^0(M_B; p)R_{110(ab+ba)}(p) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{M_B}{2p} I_3(M_B; p) - I_3^2(M_B; p)\right)R_{110(aa-bb)}(p)\right]\Big\}, \quad (5.36)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
R_{LSJ(aa+bb)}(p) &= R_{LSJ}^{(++)}(p) + R_{LSJ}^{(--)}(p), \quad (5.37) \\
R_{LSJ(aa-bb)}(p) &= \frac{m}{w}(R_{LSJ}^{(++)}(p) - R_{LSJ}^{(--)}(p)) + \frac{p}{w}(R_{LSJ}^{(+-)}(p) + R_{LSJ}^{(-+)}(p)), \\
R_{LSJ(ab+ba)}(p) &= \frac{p}{w}(R_{LSJ}^{(++)}(p) - R_{LSJ}^{(--)}(p)) + \frac{m}{w}(R_{LSJ}^{(+-)}(p) + R_{LSJ}^{(-+)}(p)),
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
J_0 &= \ln \frac{2(w + w_+) - M_B}{2(w + w_+) + M_B} - \ln \frac{2(w + w_-) - M_B}{2(w + w_-) + M_B}, \\
J &= \ln \frac{2w(w + w_+) + M_B p}{2w(w + w_-) - M_B p}, \\
I_1^0 &= \frac{1}{2} J - \frac{w}{M_B} J_0, \\
I_1 &= 1 - \frac{4w}{w_+ + w_-} + \frac{w^2}{M_B p} J - \frac{w}{2p} J_0, \\
I_2 &= \frac{2M_B}{w_+ + w_-} - \frac{w}{p} J, \\
I_2^2 &= -\frac{2w}{p} + \frac{2}{3} \frac{5w^2 - \frac{1}{4} M_B^2 + w_+ w_-}{p(w_+ + w_-)} + \frac{w^2}{p^2} J_0, \\
I_3^0 &= \ln \frac{2(w + w_+) - M_B}{2(w + w_-) - M_B}, \\
I_3 &= 1 + \frac{M_B - 2w}{w_+ + w_-} - \frac{w}{p} I_3^0, \\
I_3^2 &= \frac{w}{p} + \frac{(M_B - 2w)(w^2 + \frac{1}{4} M_B^2 - w_+ w_- + 3M_B w)}{3M_B p(w_+ + w_-)} + \frac{w^2}{p^2} I_3^0,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

with $w_{\pm} = \sqrt{w^2 + \frac{1}{4} M_B^2 \pm M_B p}$.

Now, we consider other versions of the $3D$ equations. Since we consider the equal-mass case, the Gross equation cannot be used. For this reason, we shall restrict ourselves to the study of two-photon decay processes in CJ and MNK versions. In these versions, there exists a relation between $4D$ and $3D$ free Green functions given by Eqs. (3.46) and (3.54). This relation can be immediately translated into the relation between the $4D$ and $3D$ wave functions

$$\Psi_{M_B}(p) = 2\pi i \delta(p_0) \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}), \tag{5.39}$$

where for the MNK version the equality $p_0^+ = 0$ holds for the equal-mass case. As to the MW version, here the relation between $\Psi_{M_B}(p)$ and $\tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p})$ does not exist due to the definition of $\tilde{G}_0^{\text{MW}}(M_B, \mathbf{p})$ (3.31). For the above reasons, below we restrict ourselves to the CJ and MNK versions only. Substituting the

expression (5.39) into Eq. (5.21), with an account of (5.24) one obtains

$$T(\lambda_1 \lambda_2) = i\sqrt{3}e_q^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{tr} \left\{ \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}) \left[\frac{a_{12}^{(+)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{w(\mathbf{p} - \mathbf{k})} - \frac{a_{12}^{(-)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})}{w(\mathbf{p} - \mathbf{k})} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_{21}^{(+)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{w(\mathbf{p} + \mathbf{k})} - \frac{a_{21}^{(-)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{w(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \right] \right\}. \quad (5.40)$$

From this equation one readily obtains

$$T(\pm, \pm) = \pm i\sqrt{3}e_q^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{tr} \left\{ \tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p}) \times \right. \\ \times \left[\frac{(1 \pm \gamma_5 \gamma_0 \gamma_z)m + (\gamma_z \mp \gamma_5 \gamma_0)(p_z - k)}{w^2(\mathbf{p} - \mathbf{k})} + \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 \mp \gamma_5 \gamma_0 \gamma_z)m + (\gamma_z \pm \gamma_5 \gamma_0)(p_z + k)}{w^2(\mathbf{p} + \mathbf{k})} \right] \right\}. \quad (5.41)$$

Substituting $\tilde{\Psi}_{M_B}(\mathbf{p})$ in the matrix form given by Eq. (5.10), we finally obtain for the CJ and MNK versions

1S_0 state:

$$T(\pm\pm) = \pm i e_q^2 \frac{2}{(2\pi)^{5/2}} \int_0^\infty p dp \left[\left(-2 + \frac{w^2 + \frac{1}{4}M_B^2}{M_B p} \tilde{J}(M_B; p) \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{m}{M_B} R_{000(ab+ba)}(p) + \left(\frac{2p}{M_B} - \frac{w^2 - \frac{1}{4}M_B^2}{2M_B^2} \tilde{J}(M_B; p) \right) R_{000(aa-bb)}(p) \right], \quad (5.42)$$

3P_0 state:

$$T(\pm\pm) = -i\sqrt{3}e_q^2 \frac{2}{(2\pi)^{5/2}} \int_0^\infty p dp \left[\tilde{J}(M_B; p) \frac{m}{M_B} R_{110(ab+ba)}(p) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{w^2 - \frac{1}{4}M_B^2}{M_B^2} - \frac{w^4 - \frac{1}{16}M_B^4}{2M_B^3 p} \tilde{J}(M_B; p) \right) R_{110(aa-bb)}(p) \right], \quad (5.43)$$

where

$$\tilde{J}(M_B; p) = \ln \frac{w^2 + \frac{1}{4}M_B^2 + M_B p}{w^2 + \frac{1}{4}M_B^2 - M_B p}. \quad (5.44)$$

It is important to note that in the Salpeter version the two-photon decay amplitude depends on the potential both directly and indirectly, through the radial wave functions, whereas in CJ and MNK versions this dependence enters only through the radial wave functions.

For a given meson, the two-photon decay amplitude can be rewritten as

$$T(\lambda_1 \lambda_2) = e^2 \tilde{e}_{q,\text{eff}}^2 \sqrt{3} \tilde{T}(\lambda_1 \lambda_2; LSJM_J). \quad (5.45)$$

The decay width is given by

$$\Gamma(\text{meson} \rightarrow \gamma\gamma) = 3\pi \frac{\alpha^2}{M_B} \frac{1}{2(2J+1)} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 M_J} \left| \tilde{e}_{q,\text{eff}}^2 \tilde{T}(\lambda_1 \lambda_2; LSJM_J) \right|^2, \quad (5.46)$$

where $\tilde{e}_{q,\text{eff}}^2$ depends on the choice of the meson flavor wave function. If this function has a simple form $q\bar{q}$, then $\tilde{e}_{q,\text{eff}}^2 = \tilde{e}_q^2$. However, if the meson wave function is made up of different flavor states $\alpha q_1 \bar{q}_1 + \beta q_2 \bar{q}_2$, the expression for $\tilde{e}_{q,\text{eff}}^2$ is more complicated. Consider as an example calculation of this factor for π^0 and η_n states. The flavor structure of the wave functions is given by

$$\pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d}), \quad \eta_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}). \quad (5.47)$$

It follows then straightforwardly that $\tilde{e}_{q,\text{eff}}^2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ and $\tilde{e}_{q,\text{eff}}^2 = \frac{5}{9\sqrt{2}}$ for π^0 and η_n states, respectively. Further, the decay amplitudes for the physical η and η' mesons are the linear superposition of the ones corresponding to η_n and $\eta_s \sim s\bar{s}$ states.

Note that the two-photon decays of π^0 , η , η' mesons were also studied in the NJL model, taking into account the relativistic confinement and the t'Hooft interaction [42].

Acknowledgements. The author thanks T.Babutsidze and A.Rusetsky for useful discussions.

REFERENCES

1. Roberts C.D., Williams A.G. // Prog. Part. Nucl. Phys. 1994. V.33. P.477.
2. Tandy P. // Prog. Part. Nucl. Phys. 1997. V.39. P.117.
3. Maris P., Roberts C.D. // Phys. Rev. C. 1997. V.5. P.3369;
Şavkli Ç., Tabakin F. // Nucl. Phys. A. 1998. V.628. P.645;
Ivanov M.A. et al. // Phys. Rev. C. 1998. V.57. P.1991;
Meissner T., Kisslinger L.S. // Phys. Rev. C. 1999. V.59. P.986.
4. Salpeter E.E., Bethe H.A. // Phys. Rev. 1951. V.84. P.1232.

5. Itzykson C., Zuber J.B. // Quantum Field Theory. New-York, 1980. V.2. Ch.10.
6. Salpeter E.E. // Phys. Rev. 1952. V.87. P.328.
7. Gross F. // Phys. Rev. 1969. V.186. P.1448; Phys. Rev. C. 1982. V.26. P.2203, 2226.
8. Mandelzweig V.B., Wallace S.J. // Phys. Lett. B. 1987. V.174. P.469.
9. Cooper E.D., Jennings B.K. // Nucl. Phys. A. 1989. V.500. P.551.
10. Maung K.M., Norbury J.W., Kahana D.E. // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 1996. V.22. P.315.
11. Babutsidze T., Kopaleishvili T., Rusetsky A. // Phys. Lett. B. 1998. V.426. P.139.
12. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. // Nuovo Cim. 1963. V.29. P.380.
13. Khelashvili A.A. JINR Preprint P2-4327. Dubna, 1969. (in Russian).
14. Kopaleishvili T., Rusetsky A. // Nucl. Phys. A. 1995. V.587. P.758; Phys. Atom. Nuclei. 1996. V.59. P.875.
15. Long C. // Phys. Rev. D. 1984. V.30. P.1970.
16. Archvadze A., Chachkhunashvili M., Kopaleishvili T. Preprint ITP-85-131-E9. Kiev, 1985.
17. Chachkhunashvili M., Kopaleishvili T. // Proc. of the IVth Intern. Symp. «Mesons and Light Nuclei». V.II. Czech J. Phys. B. 1989. V.39. P.30.
18. Chachkhunashvili M., Kopaleishvili T. // Few-Body Syst. 1989. V.6. P.1.
19. Archvadze A., Chachkhunashvili M., Kopaleishvili T. // Sov. J. Nucl. Phys. 1991. V.54. P.672.
20. Lagaë L.-F. // Phys. Rev. D. 1992. V.45. P.305, 317.
21. Archvadze A., Chachkhunashvili M., Kopaleishvili T. // Few Body Syst. 1993. V.14. P.53.
22. Spence J.R., Vary J.P. // Phys. Rev. C. 1993. V.47. P.1282.
23. Tiemeijer P.C., Tjon J.A. // Phys. Rev. C. 1993. V.48. P.896; 1994. V.49. P.494.
24. Resag J. et al. // Nucl. Phys. A. 1994. V.578. P.397.
25. Münz C.R. et al. // Nucl. Phys. A. 1994. V.578. P.418.
26. Archvadze A. et al. // Nucl. Phys. A. 1995. V.581. P.460.
27. Parramore J., Piekarewicz J. // Nucl. Phys. A. 1995. V.585. P.705.
28. Resag J., Münz C.R. // Nucl. Phys. A. 1995. V.590. P.735.
29. Münz C.R. et al. // Phys. Rev. C. 1995. V.52. P.2100.
30. Zöller G. et al. // Z. Phys C. 1995. V.68. P.103.
31. Olsson M.G., Veseli Siniča // Phys. Rev. D. 1995. V.52. P.5141.
32. Klempt E. et al. // Phys. Lett. B. 1995. V.361. P.160.
33. Parramore J., Jean H.-C., Piekarewicz J. // Phys. Rev. C. 1996. V.53. P.2449.
34. Münz C.R. // Nucl. Phys. A. 1996. V.609. P.364.
35. Babutsidze T., Kopaleishvili T., Rusetsky A. // Phys. Rev. C. 1999. V.59. P.976.
36. Wilson K. // Phys. Rev. D. 1974. V.10. P.2445.
37. Mathur Y.K., Mitra A.N. // Yad. Fiz. 1989. V.49. P.3361.
38. Mittal A., Mitra A.N. // Phys. Lett. 1986. V.57. P.290.
39. Gupta K.K., Mitra A.N., Singh N.N. // Phys. Rev. D. 1990. V.42. P.1604.
40. Spence J., Vary J. // Phys. Rev. D. 1987. V.35. P.2191.

41. *Bo Huang, Xiang-Dong Li, Shakin C.M.* // Phys. Rev. C. 1998. V.58. P.3648;
Celenza L.S., Bo Huang, Shakin C.M. // Phys. Rev. C. 1999. V.59. P.1030.
42. *Celenza L.S., Bo Huang, Shakin C.M.* // Phys. Rev. C. 1999. V.59. P.1700, 2814.
43. *Marota T.* // Prog. Theor. Phys. 1983. V.69. P.181, 1498.
44. *Uzzo M., Gross F.* // Phys. Rev. C. 1999. V.59. P.1009.
45. *Ortolano M. et al.* // Phys. Rev. C. 1999. V.59. P.1708.
46. *Van Royen R., Weisskopf V.F.* // Nuovo Cim. A. 1967. V.50. P.617.
47. *Helzen F., Martin A.D.* // Quarks and Leptons. New-York; Chicago; Brisbane; Toronto; Singapore, 1984. Ch.6.
48. *Babutsidze T., Kopaleishvili T., Rusetsky T.* In preparation.

УДК 539.12.01

СВОЙСТВА АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ АДРОНОВ В РАМКАХ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Ю.С.Вернов*

Институт ядерных исследований РАН, Москва

М.Н. Мнацаканова**

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Обзор посвящен следствиям аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии для процессов рассеяния элементарных частиц при высоких, но конечных энергиях. Классические теоремы, справедливые при асимптотических энергиях, получаются автоматически при соответствующем предельном переходе. Рассмотрены различные правила сумм и показана их эквивалентность интегральным соотношениям между реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния. Единным образом изучена связь реальной и мнимой частей как симметричной, так и антисимметричной амплитуды рассеяния. Исследована зависимость между поведением модуля амплитуды рассеяния и ее фазой. Показано, что отсутствие сильных осцилляций у амплитуды рассеяния дает возможность аппроксимации дисперсионных соотношений их локальными аналогами. Проанализированы свойства осциллирующих амплитуд рассеяния. Рассмотрены верхние границы на полное сечение и амплитуду упругого рассеяния. Найдены абсолютные ограничения сверху для упругого $\pi^0\pi^0$ -рассеяния, справедливые при произвольных физических энергиях.

Consequences of analyticity, unitarity and crossing symmetry for elementary particles scattering are considered at high, but finite energies. Classical results, which are valid at asymptotic energies, are reproduced by the corresponding passage to the limit. Different sum rules are considered, their equivalence to integral relations between real and imaginary parts of functions in question is shown. Connection between real and imaginary parts of symmetric as well as of antisymmetric amplitudes is considered uniformly. The dependence between the behavior of modulus and phase of scattering amplitude is investigated. It is shown, that approximation of dispersion relations by their local analogous is possible in case the scattering amplitude has no strong oscillations. Properties of oscillating amplitudes are analyzed. Upper bounds on total cross section and elastic scattering amplitude are considered. Absolute upper bounds for $\pi^0\pi^0$ elastic scattering, which are valid at arbitrary physical energies, are obtained.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткий исторический экскурс. В 1956 г. Н.Н.Боголюбов доказал [1], что дисперсионные соотношения (ДС) для амплитуды упругого рассея-

* E-mail: vernov@ms2.inr.ac.ru

**E-mail: mnatsak@theory.sinp.msu.ru

ния π -мезонов на нуклонах, полученные в работах [2–6], являются строгим следствием основных постулатов локальной теории поля. Аналитичность амплитуд рассеяния наряду с унитарностью и перекрестной симметрией дала возможность выявить ряд существенных свойств этих амплитуд, вытекающих непосредственно из аксиом квантовой теории поля. Это направление в квантовой теории поля естественно назвать аксиоматической теорией рассеяния.

Аналитические свойства амплитуд рассеяния были доказаны также в работах [7–10]. Подробное доказательство ДС содержится в монографии [11].

В дальнейшем ДС были получены для целого ряда процессов [12–24], в том числе и для процессов $2 \rightarrow n$. Аналитические свойства амплитуд для процессов $3 \rightarrow 3$ и $n \rightarrow m$ исследовались в работах [25–27]. Для амплитуд некоторых процессов, в частности для pp -рассеяния, аналитичность была доказана в более узкой области значений энергий, чем для πp -рассеяния [28, 29]. Такая аналитичность влечет за собой существование так называемых квазидисперсионных соотношений.

Оме [30] было доказано, что при достаточно общих предположениях аналитичность амплитуды рассеяния адронов сохраняет силу и в квантовой хромодинамике. Вместе с тем тот факт, что адроны не являются элементарными частицами, может означать существование определенных трудностей при описании их в терминах локальных операторов, необходимом для стандартного доказательства аналитичности. Поэтому очень важно иметь экспериментально проверяемые следствия локальности при высоких, но конечных энергиях.

Амплитуды рассеяния аналитичны не только в s -, но и в t -плоскости, s, t, u — обычные инвариантные переменные. Аналитичность по t в некоторой области была доказана Леманом [10] — эллипс Лемана. Затем Мартен установил, что аналитичность в s -плоскости позволяет (при $s \rightarrow \infty$) расширить эту область [31]. Окончательно область аналитичности в t -плоскости была найдена в работах [32, 33] и получила название эллипса Мартена.

Тот факт, что амплитуды рассеяния обладают свойством аналитичности, означает, что они принадлежат к достаточно узкому классу функций. Это обстоятельство приводит к существованию ряда нетривиальных ограничений на возможное поведение амплитуд рассеяния. Подчеркнем, что, помимо аналитичности, при выводе таких ограничений существенно используются свойства перекрестной симметрии и унитарности.

В 1958 г. Померанчук доказал [34], что при достаточно общих предположениях полные сечения рассеяния частицы и античастицы на одной и той же мишени асимптотически совпадают. Этот результат породил цепь работ, в которых была исследована связь амплитуд упругого рассеяния частицы и античастицы при высоких энергиях ([35–47] и др.; в [48] соответствующие результаты были обобщены на некоторые неупругие процессы). Заметим, что учет условия унитарности приводит к принципиально новым соотношениям такого рода [40, 42, 59]. В частности, Волковым, Логуновым и Мествири-

швили [42], было доказано, что из неограниченного возрастания (падения) одного из связанных условием кроссинг-симметрии сечений следует неограниченное возрастание (падение) другого.

Очень существенный шаг в понимании связи процессов рассеяния частиц и античастиц был сделан в работах Логунова, Нгуен Ван Хьеу, Тодорова и Хрусталева [49], Меймана [50], ван Хова [51]. В них было доказано равенство дифференциальных сечений частицы и античастицы при некоторых естественных предположениях. Для рассеяния вперед это равенство справедливо без каких-либо дополнительных предположений [52, 53].

В 1965 г. в работах Хури и Киношиты [54] было выяснено, что поведение самой амплитуды и поведение отношения ее вещественной части к мнимой тесно связаны между собой. Эти результаты были усилены в работах Вита [55], Вернова [56], Джина и МакДауэлла [57], Логунова, Мествиришвили, Хрусталева [58] и ряда других авторов [46, 47, 59]. Наиболее естественный путь изучения этой связи — исследование логарифмических дисперсионных соотношений (ЛДС) или соотношений, основанных на использовании свойства аналитичности логарифма амплитуды рассеяния [60, 47]. Подчеркнем, что аналитичность логарифма амплитуды рассеяния имеет более ограниченный характер, нежели аналитичность самой амплитуды. Фактически она имеет место лишь в случае, когда число нулей амплитуды рассеяния конечно, ибо в этом случае можно выделить множители, связанные с нулями, и построить функции с тем же свойством аналитичности, что и сама амплитуда рассеяния. (Строго говоря, при определенных условиях такая процедура может быть проведена и при бесконечном числе нулей у амплитуды рассеяния.) В работах Джина и Мартена [61] было установлено, что амплитуда упругого рассеяния вперед может иметь не более двух нулей. Это обстоятельство позволяет исследовать зависимость между поведением фазы указанной амплитуды и дифференциальным сечением вперед. ЛДС были получены в работах Джина и МакДауэлла [57], Одорико [62], МакКлюре и Джорна [63].

В 1961 г. Фруассар [64], исходя из представления Мандельстама, получил известное ограничение на максимально возможный рост полных сечений в асимптотике (неравенство Фруассара). Мартен показал [65], что в действительности для справедливости границы Фруассара достаточно аналитичности по t амплитуды упругого рассеяния в существенно более узкой области, чем та, что используется при написании представления Мандельстама. После доказательства Мартеном существования такой аналитичности [31] стало ясно, что неравенство Фруассара, часто называемое неравенством Фруассара–Мартена, является строгим следствием квантовой теории поля.

Помимо строгого ограничения сверху на полное сечение были получены также верхние границы на дифференциальное сечение как для рассеяния вперед, так и на произвольный угол. Оптимальные ограничения такого рода были получены Сингхом и Роем [66]. Ссылки на более ранние результаты

можно найти там же. Отметим, что учет факторов, которые лишь в исключительных случаях равны единице, таких, например, как $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$, позволяет получить более точные границы для полного сечения (см. [66]).

Для вывода точных ограничений сверху была использована оптимизационная процедура, см. работу Эйнхорна и Бланкенбеклера [67].

В 1964 г. Мартен получил [68] абсолютные (численные) неравенства для амплитуды упругого $\pi^0\pi^0$ -рассеяния в нефизической по s и t области ($|s| < 4m_\pi^2$, $|t| < 4m_\pi^2$, где m_π — масса π -мезона). Этот результат был затем усилен в ряде работ [69–74]. В [75] было доказано, что такие ограничения влекут за собой «почти локальное» ограничение на полное сечение $\pi^0\pi^0$ -рассеяния при произвольных физических энергиях (абсолютное неравенство Фруассара–Мартена).

В 1970 г. Индурайн получил для полного сечения πN -рассеяния численные ограничения сверху, используя, помимо общих теоретических представлений, экспериментальные данные при сверхнизких энергиях, а именно данные о второй парциальной волне в t -канале [76]. Результат Индурайна был усилен и обобщен в работах [77, 78]. Конечноеэнергетические верхние границы были получены также в работах [79, 80]. В [81] аналогичный результат был получен в аналитическом виде, который воспроизвел неравенство Фруассара–Мартена, но без неопределенных констант.

Помимо дисперсионных соотношений из аналитичности следует ряд точных равенств между различными интегралами от амплитуды рассеяния. Первым и важным примером таких соотношений являются конечноеэнергетические правила сумм, выведенные Логуновым, Соловьевым и Тавхелидзе [82]. Весьма полезными оказались также борелевские правила сумм, полученные Вайнштейном, Захаровым и Шифманом [83]. Конечноеэнергетические и борелевские правила сумм нашли широкое применение в квантовой хромодинамике [83–91], см. также обзор [92]. Правила сумм, содержащие весовые функции, убывающие быстрее экспоненты, были получены в [90, 93]. Свойства этих правил сумм были изучены в работе [94]. Особенности борелевских правил сумм рассматривались в [95, 96].

Другим интересным следствием аналитичности являются интегральные соотношения между реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния. Различные соотношения такого рода были получены Мнацакановой [97], Верновым [60], Трюонгом и Ламом, Грюнбергом и Трюонгом [59]. Различные интегралы от амплитуды рассеяния рассматривались в [98, 47, 99] и др.

В работе Бронсдана [100] были найдены локальные аналоги ДС. Эти аналоги содержат, однако, бесконечный ряд по производным от амплитуды рассеяния и не являются строгими следствиями аксиом квантовой теории поля [101, 102]. Свойства этих соотношений подробно исследованы в [103]. Недавно такого рода соотношения рассматривались в работе [104]. Как доказали Фишер и Коларж [105], при асимптотических энергиях, при некото-

рых дополнительных предположениях справедливо локальное соотношение, содержащее только первую производную (оно эквивалентно соотношению Бронсдана, если в последнем отбросить высшие члены разложения). В работе [106] было доказано, что это соотношение следует из ДС (при асимптотических энергиях), если амплитуда рассеяния не имеет сильных осцилляций.

Очень важным шагом в исследовании адронных амплитуд на основе аксиоматической теории рассеяния явилось распространение ее методов на инклюзивные процессы, проведенное в цикле работ Логунова, Мествиришвили, Петрова и их учеников. Обзор результатов этого направления дан в [107].

В рамках аксиоматической теории рассеяния были найдены также ограничения снизу на амплитуду упругого рассеяния [61, 108], ограничение на ширину дифракционного пика (см. обзор [109]) и ряд других следствий общих принципов теории. Изложение ряда результатов этого подхода можно найти в обзорах [58, 107, 110, 111].

Отметим одно принципиальное обстоятельство.

Свойства амплитуды упругого рассеяния $F(s, t)$, используемые при выводе строгих ограничений, справедливы при всех физических энергиях, и поэтому не может быть физического критерия для энергии, начиная с которой должны выполняться асимптотические ограничения*. Если применяемые при их выводе методы основаны на свойствах функций при $s \rightarrow \infty$, то распространение этих ограничений на современные физические энергии является только актом веры, поскольку, строго говоря, практически любое поведение $F(s, t)$ при конечных энергиях совместимо с требуемыми асимптотическими свойствами. Более того, совершенно неясно, как можно расшифровать при конечных энергиях, например, такой результат, как $\Delta \sigma_{\text{tot}}(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, $\Delta \sigma_{\text{tot}}(s)$ — разность полных сечений частицы и античастицы на одной и той же мишени. Можно, разумеется, увидеть в наблюдающемся убывании $\Delta \sigma_{\text{tot}}(s)$ проявление асимптотической теоремы, но из теории этот вывод никак не следует. В обзоре будет показано, что на самом деле аналитические свойства симметричной и антисимметричной амплитуд рассеяния (полусуммы и полуразности амплитуд рассеяния частицы и античастицы на одной и той же мишени) $F_{s,a}(s, t)$ приводят к корреляциям поведения реальной и мнимой частей этих функций при всех энергиях. Эти корреляции, однако, не носят локального характера, а являются корреляциями между поведением интегралов от реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния. Можно так выбрать интегральные соотношения между $\text{Im } F(s, t)$ и $\text{Re } F(s, t)$, чтобы существенную роль в каждом из них играл некоторый, в общем случае достаточно большой промежуток (s_1, s_2) . В том случае, когда осцилляции $\text{Im } F(s, t)$

*Поскольку в обзоре речь, в основном, будет идти об амплитуде упругого рассеяния, то слово «упругое», как правило, будет опускаться.

и $\operatorname{Re} F(s, t)$ малы (точное условие малости осцилляций сформулировано в разд. 5), интегральные соотношения дают «почти локальную» связь между поведением $\operatorname{Im} F(s, t)$ и $\operatorname{Re} F(s, t)$.

В настоящем обзоре мы исходим из следующей постановки вопроса. Допустим, что, начиная с некоторой энергии $s = \tilde{s}$, поведение $\operatorname{Im} F(s, t)$ или $\operatorname{Re} F(s, t)$ ограничено каким-либо условием. Это условие порождает ограничения на поведение $\operatorname{Re} F(s, t)$ или $\operatorname{Im} F(s, t)$ соответственно. При этом важно отметить, что поведение амплитуды рассеяния при энергиях, существенно больших, чем рассматриваемые, может быть произвольным, разумеется, в рамках общих аксиоматических ограничений, а именно неравенства Фруассара–Мартена и его конечноэнергетических аналогов.

Развитый в данной работе метод позволяет получить взаимозависимость между поведением реальной и мнимой частей $F_{s,a}(s, t)$ при конечных энергиях. При этом асимптотические соотношения получаются автоматически при $s \rightarrow \infty$.

Подчеркнем, что можно построить сильно осциллирующие функции, удовлетворяющие необходимым условиям аналитичности, кроссинг-симметрии и полиномиального роста. Для этих функций обычное соответствие между высокоэнергетическим поведением $\operatorname{Im} F(s, t)$ и $\operatorname{Re} F(s, t)$ выполняется только «в среднем».

1.2. План обзора. Обзор посвящен результатам аксиоматической теории рассеяния при высоких, но конечных энергиях. В рамках используемого метода классические асимптотические ограничения получаются автоматически путем предельного перехода.

Единым образом будут описаны различные правила сумм, а также симметричная и антисимметричная амплитуды рассеяния.

В разд. 2 рассмотрены различные точные соотношения, вытекающие из аналитичности амплитуды рассеяния в s -плоскости. Дан вывод правил сумм произвольного вида (конечноэнергетические, борелевские или быстро сходящиеся), показано, что любое правило сумм эквивалентно некоторому интегральному соотношению между реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния. В этом же разделе выведены интегральные соотношения, которые используются далее в обзоре для вывода различных ограничений. Вследствие аналитичности есть возможность делать предсказания о поведении амплитуды рассеяния при энергиях, которые в настоящее время недоступны для эксперимента. Удобным инструментом для такого рода предсказаний являются интегральные соотношения. В обзоре рассмотрены два класса таких соотношений — быстро и медленно сходящиеся. Затем результаты этого раздела обобщаются на процессы, для которых справедливы только квазидисперсионные соотношения. Следуя работе Вернова и Чубарова [112], мы воспользуемся тем, что для таких процессов всегда существует функция, аналитическая в той же области, что и функция, удовлетворяющая ДС, и

сколь угодно точно аппроксимирующая амплитуду рассеяния в физической области.

В разд. 3 единым образом будет рассмотрена связь между реальной и мнимой частями как симметричной, так и антисимметричной амплитуды. В этом разделе будут воспроизведены как классические асимптотические результаты, например теорема Померанчука, так и их обобщение на конечные энергии. Смысл полученных результатов в том, что если, начиная с некоторой энергии, реальная (мнимая) часть амплитуды рассеяния удовлетворяет тем или иным неравенствам сверху или снизу, то и мнимая (реальная) часть подчиняется соответствующим ограничениям. При этом существенно, что соответствие между поведением реальной и мнимой частей амплитуды справедливо на определенном интервале энергий и практически не зависит от поведения амплитуды рассеяния при энергиях, существенно больших, чем рассматриваемые. Это означает независимость полученных результатов от асимптотического поведения амплитуды рассеяния. Подчеркнем, что полученные ограничения являются оптимальными, т.е. существуют кроссинг-симметричные и кроссинг-антисимметричные аналитические функции, для которых эти неравенства переходят в равенства.

Отметим, что проведенное рассмотрение раскрывает точный смысл различных вариантов теоремы Померанчука. Теорема Померанчука и ее обобщения являются теоремами о зависимости между поведением мнимой и реальной частей антисимметричной амплитуды.

Далее приводятся аналогичные результаты для симметричной амплитуды, которые демонстрируют тот факт, что два типа результатов — теоремы типа теорем Померанчука и теоремы о связи реальной и мнимой части симметричной амплитуды, по сути дела, отражают одну и ту же взаимосвязь между поведением реальной и мнимой части амплитуды рассеяния, только в антисимметричном случае реальная и мнимая часть меняются ролями. Это связано с тем, что произвольная кроссинг-симметричная функция может быть построена из кроссинг-антисимметричной, причем при больших s $F_s(s, t) \cong i F_a(s, t)$ (см. разд. 3).

Возможность использования ДС для логарифма симметричной амплитуды приводит к соотношениям, связывающим интегралы от модуля амплитуды рассеяния и от ее фазы. Характерная особенность этих соотношений — их слабая зависимость от поведения амплитуды рассеяния при энергиях более высоких, чем рассматриваемые. Затем выводятся интегральные соотношения для $\ln \frac{F_+(s, t)}{F_-(s, t)}$, из которых, в частности, следует теорема Померанчука для дифференциальных сечений вперед. При этом для наиболее вероятного поведения амплитуд рассеяния вперед при высоких энергиях удастся доказать, что «почти всегда» отношение полных сечений частицы и античастицы стремится к единице. Исключительным является случай, когда рассматриваемые ампли-

туды становятся чисто вещественными при высоких энергиях. В последнем случае отношение реальных частей амплитуд упругого рассеяния частицы и античастицы вперед стремится к -1 .

Из интегральных соотношений следует существование ограничений на поведение амплитуды рассеяния «в среднем».

В разд. 4 рассматриваются амплитуды, возможные осцилляции которых ограничены дополнительным условием. Такое условие не вытекает из общих принципов теории, поскольку можно построить осциллирующие функции, удовлетворяющие необходимым требованиям. Тем не менее при высоких энергиях, точнее, при энергиях, существенно превышающих значения масс резонансов, в эксперименте наблюдается плавное поведение амплитуд рассеяния. Такое поведение позволяет построить функции, медленно меняющиеся с энергией. Оказывается, что для таких функций ДС могут быть аппроксимированы их локальными аналогами, причем при асимптотических энергиях погрешность такой аппроксимации становится произвольно малой.

В разд. 5 построен пример осциллирующей амплитуды рассеяния и показано, что в этом случае связь реальной и мнимой частей амплитуды носит качественно иной характер.

Раздел 6 посвящен ограничениям сверху на амплитуду рассеяния. Сначала выводится оптимальное ограничение сверху на $A(s, t) \equiv \text{Im } F(s, t)$, вытекающее из ограничения на $A(s, t_0)$, $0 < t_0 \leq 4m_\pi^2$, $t < t_0$. При асимптотических энергиях и $t = 0$ эти ограничения аналогичны оптимальному ограничению Фруассара–Мартена [66, 69]. Затем выводятся, следуя работам Вернова и Мнацакановой [75, 81], аналогичные ограничения при произвольных физических энергиях. При этом в случае $\pi^0\pi^0$ -рассеяния получаемые ограничения имеют смысл абсолютной верхней границы для полного сечения. В случае πN -рассеяния такие ограничения зависят от порогового поведения амплитуды рассеяния, точнее, от величины D -волны в t -канале. Далее с помощью ЛДС выводятся аналогичные ограничения на модуль и мнимую часть амплитуды рассеяния при физических s и $t > 0$ (t — внутри эллипса Мартена). Характерной чертой этих ограничений является их практическая независимость от поведения амплитуды рассеяния при энергиях больших, чем рассматриваемые.

В случае $\pi^0\pi^0$ -рассеяния выводятся также абсолютные ограничения на парциальные волны (при физических энергиях) и, соответственно, на эффективный радиус взаимодействия адронов, т.е. на величину, определяемую соотношением $\sigma_{\text{tot}}(s) = \pi R^2$. Важной чертой получаемых ограничений является их слабая (при сверхвысоких энергиях — сверхслабая) зависимость от исходных параметров, т.е. от абсолютных ограничений при нефизических s и t ($\pi^0\pi^0$ -рассеяние) или величины D -волны (πN -рассеяние).

В приложении А приведен вывод нижних границ для $|F_\pm(s, t)|$ и вытекающих из них ограничений на число нулей этих функций.

2. АНАЛИТИЧНОСТЬ В S -ПЛОСКОСТИ И СТРОГИЕ СООТНОШЕНИЯ

2.1. Дисперсионные соотношения и правила сумм. Рассмотрим $F(s, t)$ — амплитуду упругого рассеяния частиц с массами m и M . Прежде всего, чтобы не усложнять вычислений, не будем учитывать полюсные члены или, как говорят, рассмотрим амплитуду рассеяния с вычтенными полюсными членами. Подчеркнем, что учет этих членов существен только при низких энергиях, а нас будет интересовать поведение $F(s, t)$ при высоких. Как известно, для ряда процессов, например, для πN -рассеяния, доказана аналитичность $F(s, t)$ по s , если $-t_1 < t < 4m_\pi^2$ (для πN -рассеяния $t_1 \cong (32m_\pi^2)/3$), а именно: $F(s, t)$ аналитична всюду, за исключением правого $((m+M)^2, \infty)$ и левого $(-\infty, (M-m)^2 - t)$ разрезов. Удобно, следуя Мартену, перейти от переменной s к $\omega \equiv s - m^2 - M^2 + t/2$. Функция $F(\omega, t)$ имеет симметричные разрезы $(-\infty, -\omega_0)$, (ω_0, ∞) ; $\omega_0 = 2mM + t/2$.

Сначала рассмотрим случай, когда m — нейтральная частица, например, π^0 -мезон. Хорошо известно, что

$$F(\omega^*, t) = F^*(\omega, t), \quad (2.1)$$

$$F(-\omega, t) = F(\omega, t). \quad (2.2)$$

Если частица с массой m не нейтральна, например π^+ -мезон, то соотношение (2.2) переходит в

$$F_+(-\omega, t) = F_- (\omega, t), \quad (2.3)$$

где $F_\pm(\omega, t)$ — амплитуды рассеяния частицы и античастицы на одной и той же мишени. Очевидно, что $F_s(\omega, t)$ имеет то же свойство перекрестной симметрии, что и $F(\omega, t)$. Ниже мы, как правило, опускаем значок s у $F_s(\omega, t)$.

Согласно результату Джина и Мартена [61], при любом $t \in (-t_1, 4m_\pi^2)$

$$\frac{F_\pm(\omega, t)}{\omega^2} \rightarrow 0, \quad |\omega| \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

В некоторых случаях, прежде всего при $t < 0$, возможно выполнение более сильного неравенства:

$$\frac{F_\pm(\omega, t)}{\omega} \rightarrow 0, \quad |\omega| \rightarrow \infty. \quad (2.4')$$

По теореме Фрагмена–Линделефа (см., например, [37]), условия (2.4) и (2.4') эквивалентны аналогичным условиям при $\omega \rightarrow \infty$, если только $|F_\pm(\omega, t)| < \exp(\varepsilon|\omega|)$, $|\omega| \rightarrow \infty$.

Подчеркнем одно обстоятельство. Хотя мы все время говорим об амплитуде упругого рассеяния, однако на самом деле в этом параграфе мы используем только аналитичность и условия (2.1)–(2.4). Кроме того, (2.4) легко может быть заменено более общим условием. Поэтому проводимое рассмотрение применимо к любой функции, удовлетворяющей условиям аналитичности и перекрестной симметрии.

Из условий (2.1), (2.2) и (2.4) следует справедливость ДС с двумя вычитаниями:

$$F(\omega, t) = F(0, t) + \frac{2\omega^2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}, \quad \text{Im } \omega \neq 0, \quad (2.5)$$

где $A(\omega, t) \equiv \text{Im } F(\omega, t)$.

Заметим, что можно построить функцию $F(\omega, t)$, обладающую требуемыми свойствами аналитичности и перекрестной симметрии и чисто мнимую в физической области, такой функцией будет $F(\omega, t) = C(t) \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$, $C(t) \in \mathbb{R}$. Это обстоятельство означает, что реально связаны между собой $\text{Im } F(\omega, t)$ и $\text{Re } F(\omega, t) - F(0, t)$. Учитывая это, а также ради упрощения формул, ниже мы под $F(\omega, t)$ будем, как правило, понимать $F(\omega, t) - F(0, t)$. $F(\omega, t)$ может быть выражена через интеграл не только от $A(\omega, t)$, но и от $R(\omega, t) \equiv \text{Re } F(\omega, t)$. Для этого достаточно написать ДС для функции $\frac{F(\omega, t)}{\omega \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$.

В результате приходим к так называемым «обратным» ДС (ОДС):

$$F(\omega, t) = \frac{2\omega^2 \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{i\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{R(\omega', t) d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2} \omega' (\omega'^2 - \omega^2)}, \quad \text{Im } \omega \neq 0. \quad (2.6)$$

Обычно под ДС и ОДС понимают пределы соотношений (2.5) и (2.6) при $\text{Im } \omega \rightarrow 0$. В этом пределе они связывают $R(\omega, t)$ и $A(\omega, t)$ с интегралами в смысле главного значения от $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$ соответственно.

Из ДС следуют различные правила сумм и интегральные соотношения между $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$.

Для вывода правил сумм нам удобно перейти к переменной $z = \omega^2$. В этом случае соотношения (2.5) и (2.6) принимают вид

$$F(z, t) = \frac{z}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \frac{A(z', t) dz'}{z'(z' - z)}, \quad z_0 = \omega_0^2, \quad \text{Im } z \neq 0; \quad (2.7)$$

$$F(z, t) = \frac{z \sqrt{z - z_0}}{i\pi} \int_{z_0}^{\infty} \frac{R(z', t) dz'}{\sqrt{z' - z_0} z'(z' - z)}, \quad \text{Im } z \neq 0. \quad (2.8)$$

Очевидно, что у $F(z, t)$ есть только правый разрез и $F(z^*, t) = F^*(z, t)$.

Правило сумм общего вида, в частных случаях сводящееся к конечно-энергетическим или борелевским правилам сумм, может быть получено следующим образом.

Пусть $\rho(z, t)$ — некоторая целая функция, которую удобно выбрать так, что $\text{Im } \rho(z, t) = 0$, если $\text{Im } z = 0$. Рассматривая $\int_C F(z', t) \rho(z', t) dz'$, где контур C состоит из отрезка $(-R, R)$ и полуокружности в верхней полуплоскости радиуса R , и используя теорему Коши, получим

$$\int_{z_0}^R \rho(z', t) \text{Im } F(z', t) dz' = - \text{Im} \int_{\cap_R} F(z', t) \rho(z', t) dz'. \quad (2.9)$$

Выбор $\rho(z, t) = z^n$ приводит к конечноэнергетическим правилам сумм, выбор $\rho(z, t) = \exp\left(-\frac{z}{\tilde{z}}\right)$ ($\tilde{z}$ — некоторый параметр) — к борелевским, точнее, к их конечноэнергетическому аналогу. Борелевские правила сумм соответствуют случаю $R \rightarrow \infty$. Если $\rho(z, t) = \exp\left(-\frac{z}{\tilde{z}}\right)^n$, $n > 1$, то мы приходим к быстро сходящемуся правилу сумм. Отметим, что переход к $R \rightarrow \infty$ возможен всегда, когда сходится интеграл в левой части соотношения (2.9), поскольку такая сходимость обеспечивает и сходимость интеграла по полуокружности.

Покажем теперь, что любое правило сумм эквивалентно некоторому равенству между интегралами от $A(z, t)$ и $R(z, t)$.

Для этого заметим, что если $\text{Im } z = 0$, то, согласно (2.6) и (2.7),

$$R(z, t) = \frac{z}{\pi} P \int_{z_0}^{\infty} \frac{A(z', t) dz'}{z'(z' - z)}; \quad (2.10)$$

$$A(z, t) = -\frac{z\sqrt{z - z_0}}{\pi} P \int_{z_0}^{\infty} \frac{R(z', t) dz'}{z' \sqrt{z' - z_0} (z' - z)}. \quad (2.11)$$

Согласно (2.10)

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \rho(z', t) R(z', t) dz' &= \frac{1}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} z'' \rho(z'', t) dz'' \int_{z_0}^{\infty} \frac{A(z', t) dz'}{z'(z' - z'')} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \frac{A(z', t) dz'}{z'} \chi(z', z_1, z_2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\chi(z', z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho(z'', t) z'' dz''}{z' - z''}.$$

Аналогично, согласно (2.11),

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho(z', t) A(z', t) dz' = \int_{z_0}^{\infty} \frac{R(z', t) dz'}{z' \sqrt{z' - z_0}} \chi_1(z', z_1, z_2), \quad (2.13)$$

где

$$\chi_1(z', z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho(z'', t) z'' \sqrt{z'' - z_0} dz''}{z'' - z'}.$$

Положив в (2.13) $z_1 = z_0$, $z_2 = R$, придем к равенству, совпадающему с правилом сумм (2.9).

Интересное интегральное соотношение между $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$ получается, если приравнять (2.5) и (2.6) в точке $i\omega$, $\omega > 0$:

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A(\omega', t) d\omega'}{\omega' (\omega'^2 + \omega^2)} = \sqrt{\omega'^2 + \omega^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{R(\omega', t) d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2} \omega' (\omega'^2 + \omega^2)}. \quad (2.14)$$

Последнее равенство оказывается чрезвычайно удобным для исследования связи между $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$, которое мы проведем в следующем разделе.

Аналогичные соотношения могут быть получены и для антисимметричной амплитуды $F_a(\omega, t) = \frac{1}{2}(F_+(\omega, t) - F_-(\omega, t))$. Согласно (2.1), (2.3) и (2.4)

$$F_a(\omega, t) - \omega F_a'(0, t) = \frac{2\omega^3}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A_a(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 (\omega'^2 - \omega^2)}; \quad A_a(\omega, t) \equiv \text{Im } F_a(\omega, t). \quad (2.15)$$

Отметим, что условие действительности (2.1) справедливо и для каждой амплитуды $F_{\pm}(\omega, t)$.

Если $\frac{F_a(\omega, t)}{\omega} \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, то равенство (2.15) заменяется на

$$F_a(\omega, t) = \frac{2\omega}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A_a(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (2.16)$$

Выражая $F_a(\omega, t)$ через интеграл от $R_a(\omega, t)$ ($R_a(\omega, t) \equiv \text{Re } F_a(\omega, t)$), получим

$$F_a(\omega, t) = \frac{2\omega\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{i\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{R_a(\omega', t) d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 - \omega^2)}. \quad (2.17)$$

Подчеркнем, что с помощью ДС $F(0, t)$ и $F'_a(0, t)$ выражаются через значения в физических точках амплитуд $F(\omega, t)$ и $F_a(\omega, t)$ соответственно и быстро сходящиеся интегралы.

Приравнявая выражения (2.15) и (2.17) в чисто мнимой точке и подразумевая под $F_a(\omega, t)$ функцию $F_a(\omega, t) - \omega F'_a(0, t)$, получим

$$-\omega^2 \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A_a(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2(\omega'^2 + \omega^2)} = \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{R_a(\omega', t) d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 + \omega^2)}. \quad (2.18)$$

Заметим, что если $\omega \gg \omega_0$ (это условие выполнено уже при $\omega \approx 10 \text{ ГэВ}^2$), то соотношения (2.14) и (2.18) могут быть записаны единым образом:

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_1(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_2(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)}, \quad (2.19)$$

где в случае симметричной амплитуды

$$\varphi_1(\omega, t) = \frac{A(\omega, t)}{\omega}, \quad \varphi_2(\omega, t) = \frac{R(\omega, t)}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}, \quad (2.20)$$

а в случае антисимметричной

$$\varphi_1(\omega, t) = \frac{R_a(\omega, t)}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}, \quad \varphi_2(\omega, t) = -\frac{A_a(\omega, t)}{\omega}. \quad (2.21)$$

Соотношение (2.19) дает возможность единым образом изучать связь между реальной и мнимой частями как симметричной, так и антисимметричной амплитуды (что и будет сделано ниже).

Напишем теперь аналогичные соотношения в случае, когда $F_{s,a}(\omega, t)$ удовлетворяет ДС с одним вычитанием, т.е. когда $\frac{F_{s,a}(\omega, t)}{\omega} \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. В этом случае соотношение (2.6) заменяется на

$$F(\omega, t) = \frac{2\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{i\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{R(\omega', t) \omega' d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 - \omega^2)}, \quad \text{Im } \omega \neq 0. \quad (2.6')$$

Сравнивая соотношения (2.6') и (2.5) или (2.16) и (2.17) при $\omega \gg \omega_0$, приходим к равенству

$$-\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_1(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_2(\omega', t) \omega' d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2}, \quad (2.19')$$

где $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$ по-прежнему определяются формулами (2.20) и (2.21).

2.2. Логарифмические дисперсионные соотношения. Перейдем теперь к аналитическим свойствам $\ln F(\omega, t)$. Очевидно, что для того чтобы $\ln F(\omega, t)$ имел те же аналитические свойства, что и $F(\omega, t)$, необходимо, чтобы $F(\omega, t)$ не имела нулей. В общем случае это не так, однако если $t \geq 0$, то $F(\omega, t)$ не может иметь более двух нулей в области аналитичности [61]. Это связано с условием (2.4) и положительностью $A(\omega, t)$, которая следует из условия унитарности для парциальных амплитуд:

$$a_l(\omega) \geq a_l(\omega)^2 + r_l(\omega)^2, \quad a_l(\omega) \equiv \operatorname{Im} f_l(\omega), \quad r_l(\omega) \equiv \operatorname{Re} f_l(\omega). \quad (2.22)$$

Из неравенства (2.22) следует, что

$$0 \leq a_l(\omega) \leq 1. \quad (2.23)$$

Воспользовавшись разложением $A(\omega, t)$ в ряд по полиномам Лежандра, который при $\omega \gg \omega_0$ имеет вид

$$A(\omega, t) = 2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(\omega) P_l(\cos \theta), \quad (2.24)$$

видим, что, если $P_l(\cos \theta) > 0$, то $A(\omega, t) > 0$. Условие $P_l(\cos \theta) > 0$ выполняется, если $\cos \theta \geq 1$, т.е., если $t \geq 0$. Строго говоря, оно выполняется и для малых отрицательных t $\left(-t \sim \frac{C}{\ln \omega}\right)$. Отметим, что условие $P_l(\cos \theta) > 0$ является достаточным для положительности $A(\omega, t)$, которая, следовательно, может иметь место и в более широком интервале t . Для удобства читателя мы приводим в приложении А доказательство существования у $F(\omega, t)$ не более двух нулей в случае, когда $A(\omega, t) \geq 0$.

Здесь мы отметим, что нули в физической области могут быть исключены даже в рамках чисто теоретического подхода, т.е. когда мы не исключаем возможность (физически, разумеется, крайне маловероятную) того, что $A(\omega, t)=0$ при некоторых значениях ω . Для этого достаточно перейти к функции

$$\tilde{F}(\omega, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{\omega}^{\omega+\Delta} F(\omega', t) d\omega'.$$

Очевидно, что если Δ достаточно мало, то физически $\tilde{F}(\omega, t)$ и $F(\omega, t)$ неразличимы. Более того, строго говоря, $F(\omega, t)$ является обобщенной функцией и реально можно измерить только $\tilde{F}(\omega, t)$. Если $\tilde{A}(\omega, t) = 0$, то $A(\omega', t) = 0 \forall \omega' \in (\omega, \omega + \Delta)$. Согласно условию (2.22), тогда и $F(\omega', t) = 0 \forall \omega' \in (\omega, \omega + \Delta)$. По известному свойству аналитических функций это означает, что $F(\omega, t) \equiv 0$.

Как и раньше, под $F(\omega, t)$ будем подразумевать функцию $F(\omega, t) - F(0, t)$. Согласно условию перекрестной симметрии (2.2)

$$F(\omega, t) = \omega^2 f(\omega, t) \quad (2.25)$$

и, согласно сказанному выше, $f(\omega, t)$ не имеет нулей. Покажем, что $\ln f(\omega, t)$ обладает теми же свойствами действительности и кроссинг-симметрии, что и $F(\omega, t)$. Справедливость условия кроссинг-симметрии очевидна. Для проверки условия действительности заметим, что мы рассматриваем такие t , что $A(\omega, t) \geq 0$. В таком случае $\delta(\omega, t)$ — фаза функции $f(\omega, t)$ — удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \leq \delta(\omega, t) \leq \pi. \quad (2.26)$$

Покажем, что $\delta(\omega_0, t) = 0$. Для этого достаточно проверить, что $f(\omega_0, t) > 0$. Действительно, $f(\omega, t) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$ и, следовательно, удовлетворяет ДС без вычитаний. Но тогда

$$f(0, t) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\omega', t) d\omega'}{\omega'} > 0.$$

Следовательно, $f(\omega_0, t) > 0$, поскольку у $f(\omega, t)$ нет нулей. Требуемое условие

$$\delta(\omega - \epsilon, t) = -\delta(\omega + \epsilon, t) \quad (2.27)$$

следует из условия (2.1) и непрерывности $\delta(\omega, t)$ в окрестности точки ω_0 . В результате ДС для $\ln f(\omega, t)$ имеют тот же вид, что и для $F(\omega, t)$, т.е.

$$\ln \frac{f(\omega, t)}{f(0, t)} = \frac{2\omega^2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}. \quad (2.28)$$

Аналогичным образом можно написать и ОДС для $\ln f(\omega, t)$:

$$\ln f(\omega, t) = \frac{2\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{i\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' \ln |f(\omega', t)| d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 - \omega^2)}. \quad (2.29)$$

Приравнивая выражения (2.28) и (2.29) в мнимой точке $i\omega$ и понимая под $f(\omega, t)$ функцию $\frac{f(\omega, t)}{f(0, t)}$, придем к соотношению, аналогичному (2.19') для $F(\omega, t)$ ($\omega \gg \omega_0$):

$$-\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} = \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' \ln |f(\omega', t)| d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 + \omega^2)}. \quad (2.30)$$

Аналогичное соотношение может быть написано и непосредственно для $F(\omega, t)$, точнее, для функции $F(\omega, t) - F(\omega_0, t) - \varepsilon$, которая не имеет нулей (доказательство см. в приложении А). Необходимо только учесть, что поскольку $F(\omega_0, t) < 0$, то

$$\delta(\omega - i\varepsilon) = -\delta(\omega + i\varepsilon) + 2\pi. \quad (2.31)$$

Равенство (2.31) легко выводится с помощью тех же рассуждений, что и (2.26). В результате (2.30) заменяется на

$$-\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\tilde{\delta}(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} = \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' \ln |F(\omega', t)| d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 + \omega^2)}, \quad (2.30')$$

где $\tilde{\delta}(\omega, t) = \delta(\omega, t) - \pi$. Разумеется, $\delta(\omega, t)$ — фаза функции $F(\omega, t)$ — удовлетворяет двойному неравенству (2.26).

Физические следствия из соотношения (2.30') будут рассмотрены в разд. 4.

Другой симметричной комбинацией амплитуд, которую удобно исследовать с помощью ЛДС, является $\Phi(\omega, t) \equiv F_+(\omega, t)F_-(\omega, t)$. Функции $F_{\pm}(\omega, t)$ могут иметь как один ноль в области аналитичности, если $F_{\pm}(\omega_0, t)$ имеют разные знаки, так и два, если $F_{\pm}(\omega_0, t) > 0$. Если же $F_{\pm}(\omega_0, t) < 0$, то у $F_{\pm}(\omega, t)$ нет нулей (доказательства этих утверждений см. в приложении А). При исследовании функций $F_+(\omega, t)F_-(\omega, t)$ удобно избавиться от нулей, переходя к функциям $F_{\pm}(\omega, t) - F_{\pm}(\omega_0, t) - \varepsilon$. Ниже под $F_{\pm}(\omega, t)$ подразумеваются именно эти функции. Подчеркнем, что при высоких энергиях они практически не отличаются от $F_{\pm}(\omega, t)$.

Дисперсионные соотношения для $\ln \Phi(\omega, t)$ имеют тот же вид, что и (2.28), только необходимо учесть, что поскольку $F_{\pm}(\omega_0, t) < 0$, то

$$\delta^+(\omega - i\varepsilon) = -\delta^+(\omega + i\varepsilon) + 4\pi; \quad \delta^+(\omega, t) = \delta_+(\omega, t) + \delta_-(\omega, t). \quad (2.31')$$

Следовательно, получаем

$$\ln \frac{\Phi(\omega, t)}{\Phi(0, t)} = \frac{2\omega^2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\tilde{\delta}^+(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}; \quad \tilde{\delta}^+(\omega, t) = \delta_+(\omega, t) + \delta_-(\omega, t) - 2\pi. \quad (2.32)$$

Рассматривая функцию $\frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)}$, приходим к соотношению

$$\ln \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} = \frac{2\omega}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta^-(\omega', t)}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'; \quad \delta^-(\omega, t) = \delta_+(\omega, t) - \delta_-(\omega, t). \quad (2.33)$$

Наряду с ДС для функции $\ln \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)}$ справедливы и ОДС, которые имеют вид, аналогичный (2.17):

$$\ln \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} = \frac{2\omega \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{i\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 - \omega^2)}. \quad (2.34)$$

Отметим, что поскольку $A_{\pm}(\omega, t) > 0$, то $\delta_{\pm}(\omega, t)$ удовлетворяют ограничению, аналогичному (2.26), т.е.

$$0 \leq \delta_{\pm}(\omega, t) \leq \pi. \quad (2.35)$$

Как мы увидим далее, из этого, обусловленного только унитарностью условия следует, что $|F_+(\omega, t)/F_-(\omega, t)| \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow \infty$. Поскольку в нашем обзоре предельный переход подразумевает, что $\omega \rightarrow \infty$, ниже мы, как правило, будем опускать это условие.

2.3. Быстро и медленно сходящиеся интегральные соотношения. Целью этого пункта будет вывод ряда соотношений, которые могут быть полезны при исследовании амплитуд рассеяния. Общим для этих соотношений является то, что они содержат интегралы от $R(\omega, t)$.

Начнем с соотношения, связывающего быстро сходящиеся интегралы от реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния. Смысл такого рода результатов прозрачен. Они, в принципе, т.е. при наличии достаточно хороших измерений $R(\omega, t)$, дают возможность получить экспериментально наблюдаемые следствия аналитичности, в минимальной степени зависящие от асимптотического поведения $F(\omega, t)$.

Ограничимся рассмотрением симметричного случая и перейдем к переменной $z = \omega^2$ (см. (2.6) и (2.7)). Поступим так же, как и при выводе правила сумм (2.9), но выберем в качестве $\rho(z, t)$ функцию

$$\rho(z, t) = \exp \left[\left(-\frac{z}{\tilde{z}} \right)^{\alpha} \exp(-i\pi\alpha) \right]; \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $\rho(z, t) \in \mathbb{R}$ при $z < 0$ и что $\rho(z, t)z^n \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$, получим искомое соотношение:

$$\int_{\omega_0}^{\infty} A(z, t) \text{Re } \rho(z, t) dz = - \int_{\omega_0}^{\infty} R(z, t) \text{Im } \rho(z, t) dz. \quad (2.36)$$

Поскольку $|\rho(z, t)| \sim \exp \left[\left(-\frac{z}{\bar{z}} \right)^\alpha \cos \pi \alpha \right]$, интегралы в обеих частях равенства (2.36) быстро сходятся.

Рассмотрим теперь прямо противоположную задачу: найти соотношения, которые сильнее зависят от асимптотики, чем ДС, и которые, следовательно, могут быть удобным источником информации о поведении $F(\omega, t)$ и, в частности, полных сечений $\sigma_\pm(\omega)$ при тех энергиях, которые в настоящее время недоступны эксперименту. Следует отметить, что обычно одна из связанных условием перекрестной симметрии амплитуд известна при более высоких энергиях, чем другая. Поэтому здесь мы рассмотрим не симметричную амплитуду, а сами амплитуды $F_\pm(\omega, t)$. Основной интерес эти соотношения представляют, разумеется, при $t = 0$.

Пусть $F_\pm(\omega, t)$ измерены вплоть до энергий $\omega_\pm$ соответственно, а мы хотим получить информацию об их поведении при более высоких энергиях. Для этого найдем соотношения, связывающие медленно сходящиеся интегралы от $F_\pm(\omega, t)$.

Рассмотрим $\text{Im} \int_C \frac{F_+(\omega', t) d\omega'}{\omega'^{2+\alpha}}$, где контур C состоит из интервалов $(-\infty, -\omega_1)$, (ω_1, ∞) , полуокружности радиуса ω_1 с центром в начале координат ($\omega_0 < \omega_1 < \omega_\pm$) и бесконечной полуокружности, интеграл по которой, согласно неравенству Фруассара–Мартена (см. ниже (5.1)), равен нулю.

Воспользовавшись соотношениями (2.3) и теоремой Коши, получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{A_+(\omega', t) d\omega'}{\omega'^{2+\alpha}} = \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{A_-(\omega', t) \cos \pi \alpha + R_-(\omega', t) \sin \pi \alpha}{\omega'^{2+\alpha}} d\omega' + \\ + \text{Re} \int_0^\pi \frac{F_+(\omega_1 e^{i\varphi}, t) d\varphi}{(\omega_1 e^{i\varphi})^{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Последний интеграл с помощью ДС (2.5) может быть сведен к достаточно быстро сходящемуся интегралу от $A_\pm(\omega, t)$. Соотношение (2.37) может быть полезным инструментом для того, чтобы «увидеть», как ведут себя (естественно, в среднем) полные сечения при энергиях, недоступных современным ускорителям. Отметим, что такие соотношения демонстрируют важность измерения реальной части амплитуды рассеяния.

2.4. Квазидисперсионные соотношения и практическая аналитичность.

Как уже отмечалось, аналитичность $F_\pm(\omega, t)$ доказана не для всех t и не для всех процессов. Важным примером являются амплитуды упругого pp - и $p\bar{p}$ -рассеяния. Причина отсутствия обычных аналитических свойств у этих амплитуд (даже при $t = 0$) связана с тем, что в то время как физическая

область $p\bar{p}$ -рассеяния начинается с $s_1 = 4M^2$, разрез в s -плоскости начинается с $s_0 = 4m^2$ (вследствие виртуальной аннигиляции). Для таких амплитуд доказано [28, 29] более слабое условие аналитичности, а именно: $F(\omega, t)$ аналитична в верхней полуплоскости всюду, за исключением полукруга некоторого радиуса ω_1 с центром в $\omega = 0$.

В данном случае естественно работать непосредственно в переменных s, t, u . Мы же сохраняем обозначение ω для удобства сравнения квазидисперсионных и дисперсионных соотношений.

Чтобы получить соотношения, аналогичные исследованным ранее, рассмотрим

$$\int_C \frac{F(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 (\omega' + i\omega)} = 0, \quad \omega > 0, \quad (2.38)$$

где C — контур в верхней полуплоскости, состоящий из отрезков $(-\infty, -\omega_1)$, (ω_1, ∞) и полукругов с центром в начале координат с радиусами ω_1 и ∞ .

Простые вычисления приводят к равенству, аналогичному (2.19):

$$\int_{\omega_1}^{\infty} \frac{A(\omega', t) d\omega'}{\omega' (\omega'^2 + \omega^2)} = \omega \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{R(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 (\omega'^2 + \omega^2)} + \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \frac{F(\omega_1 e^{i\varphi}, t) d\varphi}{\omega_1 e^{i\varphi} (\omega_1 e^{i\varphi} + i\omega)}. \quad (2.39)$$

Если же справедливы условия (2.4'), то тем же способом (рассматривая $\int_C \frac{F(\omega', t) d\omega'}{\omega' (\omega' + i\omega)}$) получим равенство, аналогичное (2.19'):

$$-\omega \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{A(\omega', t) d\omega'}{\omega' (\omega'^2 + \omega^2)} = \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{R(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} + \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \frac{F(\omega_1 e^{i\varphi}, t) d\varphi}{\omega_1 e^{i\varphi} + i\omega}. \quad (2.40)$$

Отметим, что условие

$$F(-\omega^*, t) = F^*(\omega, t); \quad \operatorname{Im} \omega > 0 \quad (2.41)$$

по-прежнему имеет место, если $|\omega| > \omega_1$. (В случае обычных ДС (2.41) есть непосредственное следствие условий (2.1) и (2.2).) С помощью соотношений (2.39) и (2.40) асимптотические результаты легко переносятся на функции, которые удовлетворяют квазидисперсионным соотношениям.

Кроме того, можно построить функции, сколь угодно точно аппроксимирующие амплитуду рассеяния при физических энергиях и аналитические всюду в верхней полуплоскости [112]. Идея состоит в том, чтобы подобно тому, как это делается для доказательства ДС вперед (см. [113], § 57), заменить

в редукционных формулах $F^{\text{ret}}(x)$ на $F_{\varepsilon}^{\text{ret}}(x) = \exp(-\varepsilon |x|^2) F^{\text{ret}}(x)$. Построенная в результате такой замены регуляризованная амплитуда рассеяния будет обладать требуемыми аналитическими свойствами, но снятие регуляризации возможно только в том случае, когда у амплитуды рассеяния нет нефизической области. Однако очевидно, что, по крайней мере для любой конечной физической области энергий, регуляризованная амплитуда близка к истинной, если ε достаточно мало. (Доказательство возможности равномерной и сколь угодно точной аппроксимации амплитуды в физической области см. в [112].)

Таким образом, заменив точную амплитуду ее регуляризованной аппроксимацией, мы можем теперь выбрать ω_1 так, чтобы интервалы (ω_1, ∞) и $(-\infty, -\omega_1)$ были интервалами физических энергий в s - и u -каналах соответственно.

Отметим, что при $\omega \gg \omega_1$ последний интеграл в (2.39) сводится к $\frac{C(\omega_1, t)}{\omega}$, где

$$C(\omega_1, t) = \text{Im} \int_0^{\pi} \frac{F(\omega_1 e^{i\varphi}, t) d\varphi}{\omega_1 e^{i\varphi}}.$$

$C(\omega_1, t)$ можно оценить, используя экспериментальные данные и аналитические свойства $F(\omega, t)$.

Таким образом, при высоких, но конечных энергиях, все отличие от πp -рассеяния, например, pp -рассеяния, состоит в том, что, по существу, $C(\omega_1, t)$ играет роль $F(0, t)$ в ДС.

3. СВЯЗЬ РЕАЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ СИММЕТРИЧНОЙ И АНТИСИММЕТРИЧНОЙ АМПЛИТУД УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Перейдем теперь к физическим следствиям аналитичности амплитуды рассеяния по энергии.

Как уже отмечалось, аналитичность означает существование тесной связи между поведением реальной и мнимой частей как симметричной, так и антисимметричной амплитуды. Удобный способ исследования этой связи состоит в использовании интегральных соотношений (2.19) и (2.19').

Отметим, что соотношения (2.19) и (2.19') — следствия только аналитичности, кроссинг-симметрии и ограничений на рост амплитуды рассеяния (см. (2.4) и (2.4')). Унитарность в явном виде не используется.

Возможность единого описания симметричной и антисимметричной амплитуд рассеяния связана с тем, что при $\omega \gg \omega_0$ $F_a(\omega, t)$ может быть записана в виде $F_a(\omega, t) = \frac{i\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} F_s(\omega, t)$. Подчеркнем, что здесь

$F_s(\omega, t)$ — произвольная кроссинг-симметричная функция, т.е. $\text{Im } F_s(\omega, t)$ может иметь любой знак.

Прежде всего продемонстрируем, что известные асимптотические результаты, в частности, теорема Померанчука для полных сечений (в ее наиболее общей формулировке), легко могут быть получены из анализа равенства (2.19). Точнее, будут найдены конечноэнергетические аналоги этих классических результатов, из которых последние следуют, когда $\omega \rightarrow \infty$.

Предположим, что

$$\varphi_1(\omega, t) < C (\ln \omega)^\gamma, \quad \omega > \tilde{\omega}; \quad \gamma > 0, \quad (3.1)$$

и докажем, что тогда

$$\varphi_2(\omega, t) < C' (\ln \omega)^{\gamma-1}, \quad C' = \frac{\pi}{2} \gamma C, \quad \omega \gg \tilde{\omega}. \quad (3.2)$$

Разумеется, если $t \leq 0$, то, согласно неравенству Фруассара–Мартена (6.1), $\gamma \leq 2$. Условие $\omega \gg \tilde{\omega}$ будет расшифровано ниже. Чтобы не усложнять формулы, мы пишем их так, словно ω безразмерна, этого всегда можно добиться, положив, например, $m_\pi^2 = 1$.

Сделаем два замечания.

1. Если нас интересуют соотношения в асимптотической области, то можно взять $\tilde{\omega}$ произвольно большой, что немедленно даст возможность применить рассматриваемый метод к амплитудам, аналитичным в верхней полуплоскости только вне полукруга с некоторым радиусом ω_1 .

2. Неравенство (3.2), строго говоря, должно быть справедливо для некоторых $\omega > \tilde{\omega}$. Его точный смысл в том, что противоположное неравенство не может быть выполнено при всех $\omega > \tilde{\omega}$. В асимптотике неравенство (3.2) заведомо выполняется на некоторой последовательности энергий ω_i ($\omega_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$).

Подчеркнем, что этот факт имеет принципиальный характер и не связан с применяемым методом. Он обусловлен тем, что существуют осциллирующие и вместе с тем удовлетворяющие необходимым требованиям функции (см. пункт 5.2).

Для доказательства неравенства (3.2) достаточно предположить, что при $\omega > \tilde{\omega}$

$$\varphi_2(\omega, t) > C' (\ln \omega)^{\gamma-1}, \quad (3.3)$$

и оценить соответствующие интегралы.

Прежде всего рассмотрим вклад области $\omega' < \tilde{\omega}$ в соотношение (2.19). Если $\omega \gg \tilde{\omega}$, то

$$\int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \frac{\varphi_1(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} \cong \frac{C_1(\tilde{\omega}, t)}{\omega^2}, \quad C_1(\tilde{\omega}, t) = \int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \varphi_1(\omega', t) d\omega'; \quad (3.4)$$

$$\omega \int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \frac{\varphi_2(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} \cong \frac{C_2(\tilde{\omega}, t)}{\omega}, \quad C_2(\tilde{\omega}, t) = \int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}} \frac{\varphi_2(\omega', t) d\omega'}{\omega'}. \quad (3.5)$$

Как будет видно ниже, этот вклад несуществен, если $\omega \gg \tilde{\omega}$, т.е. последнее условие как раз и означает возможность пренебречь им в соотношении (2.19). Заметим, что интегралы по интервалу $(\omega_0, \tilde{\omega})$ могут быть вычислены на основе экспериментальных данных.

Перейдем теперь к интервалу $(\tilde{\omega}, \infty)$.

Из условия (3.1) следует, что

$$\int_{\tilde{\omega}}^{\infty} \frac{\varphi_1(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} < C \int_{\tilde{\omega}}^{\infty} \frac{(\ln \omega')^\gamma d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2} C \frac{(\ln \omega)^\gamma}{\omega} (1 + \varepsilon_1(\omega, t)), \quad (3.6)$$

где $\varepsilon_1(\omega, t) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Формула (3.6), так же, как и (3.7), следует из результатов разд. 5 (формулы (5.8) и (5.7)).

С другой стороны, из (3.3) следует, что

$$\omega \int_{\tilde{\omega}}^{\infty} \frac{\varphi_2(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} > C' \omega \int_{\tilde{\omega}}^{\infty} \frac{(\ln \omega')^{\gamma-1} d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} = \frac{C'}{\omega^\gamma} (\ln \omega)^\gamma (1 + \varepsilon_2(\omega, t)), \quad (3.7)$$

$\varepsilon_2(\omega, t) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Сделанное утверждение непосредственно вытекает из (3.3) и (3.6).

Отметим одно важное обстоятельство. Условие (3.3) мы использовали лишь на интервале $(\tilde{\omega}, \omega)$, на интервале (ω, ∞) достаточно только предположить, что $\varphi_2(\omega', t) > 0$. При этом предположении доказано, что ограничение (3.2) справедливо уже на интервале $(\tilde{\omega}, \omega)$. Разумеется, учет всех членов может несколько изменить результат. Существенно, однако, что получено конечноэнергетическое неравенство. Правда, наше исходное условие (3.1) предполагалось справедливым при всех $\omega' > \tilde{\omega}$.

Покажем, что результат в действительности не зависит от поведения $\varphi_i(\omega', t)$ при $\omega' \gg \omega$. Заметим, что для ряда процессов справедливы конечноэнергетические аналоги ограничения Фруассара–Мартена (см. разд. 6). Пользуясь методом работы [114], можно найти строгие верхние оценки вкладов в соотношение (2.19) от интервала (ω_2, ∞) , где $\omega_2 \gg \omega$. Несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что при $\omega' > \omega_2$

$$|\varphi_i(\omega', t)| < \tilde{C} (\ln \omega')^2, \quad (3.8)$$

где $\tilde{C}$ — известная константа. Тогда

$$\int_{\omega_2}^{\infty} \frac{|\varphi_1(\omega', t)| d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} < \tilde{C} \frac{(\ln \omega_2)^2}{\omega_2}, \quad (3.9)$$

$$\int_{\omega_2}^{\infty} \frac{|\varphi_2(\omega', t)| d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} < \tilde{C} \frac{(\ln \omega_2)^2}{2\omega_2^2}. \quad (3.10)$$

Оценки (3.9) и (3.10) демонстрируют, что область энергий, существенно больших, чем ω , не влияет на полученные результаты.

Покажем теперь, что из соотношения (2.19) легко выводятся известные асимптотические формулы.

Прежде всего отметим, что при $t \leq 0$ неравенство (3.2) означает, что из ограничения Фруассара–Мартена вытекают следующие неравенства:

$$\operatorname{Re} F(\omega, t) < C\omega \ln \omega; \quad \operatorname{Im} F_a(\omega, t) < C\omega \ln \omega. \quad (3.11)$$

Таким образом, в то время как $\sigma_{\pm}(\omega)$ могут возрасти как $(\ln \omega)^2$, их разность может расти не быстрее, чем $\ln \omega$. Следовательно, если $\frac{\sigma_+(\omega)}{\ln \omega} \rightarrow \infty$, то $\frac{\sigma_+(\omega)}{\sigma_-(\omega)} \rightarrow 1$. Этот результат следует непосредственно из аналитичности $F_a(\omega, t)$ и ограничения Фруассара–Мартена. Учет унитарности позволяет распространить этот результат на произвольные, неограниченно растущие сечения [40, 42, 58, 59].

Если $\gamma < 1$, то из (3.2) следует, что $\Delta \sigma_{\text{tot}}(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. На самом деле, справедливо более сильное утверждение. А именно докажем, что если

$$\frac{\varphi_1(\omega, t)}{\ln \omega} \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

то

$$\varphi_2(\omega, t) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Напомним, что условие (3.13) понимается в том смысле, что $\exists \omega_i$ такое, что $\varphi_2(\omega_i, t) \rightarrow 0$, $\omega_i \rightarrow \infty$. Для доказательства заметим, что если $\varphi_2(\omega, t)$ обращается в нуль бесконечное число раз, то требуемое условие (3.13) заведомо выполнено. Следовательно, осталось рассмотреть случай, когда $\varphi_2(\omega, t)$ имеет определенный знак при $\omega \rightarrow \infty$. Пусть, например, $\varphi_2(\omega, t) > 0$.

Предположим, что справедливо условие, противоположное (3.13), т.е. что $\varphi_2(\omega, t) > \Delta$, начиная с некоторого $\omega = \tilde{\omega}$, при этом, согласно (3.12), $\varphi_1(\omega, t) \ln \omega < \delta$, где $\delta \ll \Delta$ ($\omega > \tilde{\omega}$). Результат следует непосредственно из оценок (3.6) и (3.7). Итак, утверждение доказано.

Для случая антисимметричной амплитуды оно означает, что $\Delta \sigma_{\text{tot}}(\omega) \rightarrow 0$, если $\frac{\operatorname{Re} F_a(\omega, 0)}{\omega \ln \omega} \rightarrow 0$ (теорема Померанчука, содержащая только необходимые условия). Действительно, из приведенного рассмотрения непосредственно следует, что если $\frac{\operatorname{Re} F_a(\omega, 0)}{\omega \ln \omega} > \varepsilon_0$, $\omega \rightarrow \infty$, где ε_0 — некоторое

число, то условие $\Delta \sigma_{\text{tot}}(\omega) \rightarrow 0$ не может быть выполнено, по крайней мере, для всех асимптотических энергий.

В случае симметричной амплитуды полученный результат означает, что $\frac{\text{Re } F(\omega, t)}{\omega} \rightarrow 0$, если $\frac{\text{Im } F(\omega, t)}{\omega \ln \omega} \rightarrow 0$.

Отметим, что из приведенного рассмотрения видно, что теорема Померанчука является, по сути дела, частным случаем утверждения: верхняя граница для $\text{Im } F_a(\omega, 0)$, грубо говоря, в $\ln \omega$ раз меньше, чем верхняя граница для $\text{Re } F_a(\omega, t)$. Ниже мы увидим, что это утверждение остается справедливым и при $\gamma < 0$ в (3.1). Условие $\Delta \sigma(\omega) \rightarrow 0$ нетривиально лишь для весьма узкого и ничем не выделенного с теоретической точки зрения класса антисимметричных амплитуд, а именно амплитуд, удовлетворяющих условиям

$$\left| \frac{F_a(\omega, t)}{\omega} \right| > C; \quad \frac{|F_a(\omega, t)|}{\omega \ln \omega} \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Поскольку $A_a(\omega, t)/\omega \rightarrow 0$, когда $R_a(\omega, t)/\omega \ln \omega \rightarrow 0$, то второе условие в (3.14) эквивалентно требованию $R_a(\omega, t)/\omega \ln \omega \rightarrow 0$.

Связь между асимптотиками $\sigma_+(\omega)$ и $\sigma_-(\omega)$ естественней характеризовать отношением $\sigma_-(\omega)/\sigma_+(\omega)$.

Как будет показано в следующем разделе, $\sigma_-(\omega)/\sigma_+(\omega) \rightarrow 1$, если только $\sigma_-(\omega) > \omega^{-\varepsilon}$, а $|R_-(\omega, t)/A_-(\omega, t)| \not\rightarrow \infty$. Замечательно, что последнее условие вытекает из унитарности, если $\sigma_-(\omega) \rightarrow \infty$ (см. [58]).

Фактически мы нашли связь верхних границ $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$, поскольку как неравенство (3.2) следует из неравенства (3.1), так и наоборот. Далее, если изменить знак неравенства в (3.1), то и знак в неравенстве (3.2) также изменится на противоположный, т.е. соотношение (2.19) устанавливает также связь между нижними границами $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$.

Иными словами, если

$$C_2 (\ln \omega)^{\gamma_2} < \varphi_1(\omega, t) < C_1 (\ln \omega)^{\gamma_1}, \quad (3.15)$$

то

$$C'_2 (\ln \omega)^{\gamma_2-1} < \varphi_2(\omega, t) < C'_1 (\ln \omega)^{\gamma_1-1}, \quad (3.16)$$

где $C'_i = \frac{\pi \gamma}{2} C_i$.

Таким образом, если $\varphi_1(\omega, t) \sim (\ln \omega)^\gamma$, то $\varphi_2(\omega, t) \sim (\ln \omega)^{\gamma-1}$. Ниже мы увидим, что это остается справедливым и при $\gamma < 0$.

Рассмотрим теперь связь $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$ для другого поведения этих функций. Найдем сначала следствия степенного роста $\varphi_i(\omega, t)$, который возможен при $t > 0$. В этом случае ограничение Фруассара–Мартена заменяется более слабым условием (6.17). Но во всех случаях, согласно (2.4), $\varphi_i(\omega, t)/\omega \rightarrow 0$. Докажем, что если

$$\varphi_1(\omega, t) > C \omega^\alpha; \quad \alpha > 0, \quad \omega \gg \tilde{\omega}, \quad (3.17)$$

то

$$\varphi_2(\omega, t) > C' \omega^\alpha; \quad \omega \gg \tilde{\omega}, \quad C' = C \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2}. \quad (3.18)$$

Чтобы не усложнять формулы, ограничимся случаем, когда вклад области $(\omega_0, \tilde{\omega})$ в рассматриваемые интегралы несуществен.

Как обычно, предположим существование неравенства, противоположного (3.18):

$$\varphi_2(\omega, t) < C' \omega^\alpha; \quad \omega > \tilde{\omega}, \quad (3.19)$$

и оценим интегралы в (2.19). Для этого достаточно заметить, что, поскольку вклад интервала $(\omega_0, \tilde{\omega})$ в рассматриваемые интегралы несуществен, то можно считать, что неравенства (3.17) и (3.19) справедливы при $\omega > \omega_0$.

Пользуясь известными формулами (ф-ла (3.24) в [115]), получим

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_1(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} > C_1 \frac{\pi}{2\omega^{1-\alpha}} \frac{1}{\cos \frac{\pi \alpha}{2}}, \quad (3.20)$$

$$\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_2(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} < C_2 \frac{\pi}{2\omega^{1-\alpha}} \frac{1}{\sin \frac{\pi \alpha}{2}}. \quad (3.21)$$

Доказываемое неравенство (3.18) непосредственно следует из (3.20) и (3.21).

Теперь перейдем к изучению связи между $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$ в случае, когда $\varphi_i(\omega, t) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Такое поведение $\varphi_i(\omega, t)$ для симметричной амплитуды ожидается при $t < 0$, а для антисимметричной весьма вероятно и при $t = 0$. В этом случае естественно воспользоваться равенством (2.19'). Рассмотрим сначала следствия из неравенства (3.1), только теперь, разумеется, $\gamma < 0$. Тогда, как это следует из (2.19'), $\varphi_2(\omega, t) < 0$ при $\omega > \tilde{\omega}$, а $|\varphi_2(\omega, t)|$ удовлетворяет неравенству (3.2).

Оценка интегралов в равенстве (2.19') аналогична оценке (3.4):

$$\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\varphi_1(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} < \frac{\pi}{2} C (\ln \omega)^\gamma (1 + \varepsilon_1(\omega, t)), \quad (3.22)$$

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' |\varphi_2(\omega', t)| d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} > \frac{C'}{\gamma} (\ln \omega)^\gamma (1 + \varepsilon_2(\omega, t)), \quad (3.23)$$

$\varepsilon_i(\omega, t) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Сравнение неравенств (3.22) и (3.23) сразу приводит к сделанному утверждению. Таким же образом может быть проанализирована и связь нижних

границ $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$ и получены неравенства, противоположные (3.1) и (3.2).

В заключение рассмотрим следствия из степенного падения $\varphi_i(\omega, t)$. Пусть, например,

$$\varphi_1(\omega, t) < C_1 \omega^\alpha, \quad \alpha < 0. \quad (3.24)$$

Тогда $\varphi_2(\omega, t) < 0$ и

$$|\varphi_2(\omega, t)| < C_2 \omega^\alpha; \quad C_2 = C_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi \alpha}{2}. \quad (3.25)$$

Этот результат получается так же, как и неравенство (3.18). При исследовании связи $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$ не было сделано каких-либо предположений об отсутствии осцилляций у $\varphi_i(\omega, t)$. В разд. 5 будет показано, что такого рода предположения приводят к существованию «почти локальной» связи между $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$. Предположения об отсутствии осцилляций весьма естественны, поскольку осцилляции не наблюдались в эксперименте. Одновременно в разд. 5 будут приведены примеры осциллирующих функций, для которых характерна совершенно иная зависимость между поведением $\varphi_1(\omega, t)$ и $\varphi_2(\omega, t)$.

В заключение отметим, что из соотношений (2.19) и (2.19') следуют определенные выводы о знаке $R(\omega, t)$, а именно: из соотношения (2.19) следует, что если $A(\omega, t) > 0$, то «в среднем» $R(\omega, t) - R(0, t) > 0$, при этом если $A(\omega, t)/\omega \rightarrow \infty$, то $R(\omega, t) > 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Если же $A(\omega, t)/\omega \rightarrow 0$ и $A(\omega, t) > 0$, то из соотношения (2.19') следует, что $R(\omega, t) < 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Изменение знака $R(\omega, t)$ при переходе от $t = 0$ к $t < 0$ было установлено в недавней работе Мартена [116].

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ФАЗОЙ И МОДУЛЕМ АМПЛИТУД УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

4.1. Симметричная амплитуда. Начнем с изучения зависимости между фазой и модулем симметричной амплитуды (совершенно аналогично рассматривается связь между $F_+(\omega, t)F_-(\omega, t)$ и $\delta_+(\omega, t) + \delta_-(\omega, t)$).

Воспользуемся соотношением (2.30'). Удобно записать $\delta(\omega, t)$ в виде

$$\delta(\omega, t) = \frac{\pi}{2} + \gamma(\omega, t). \quad (4.1)$$

После элементарных вычислений получим, что соотношение (2.30') принимает вид ($\omega \gg \omega_0$):

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\ln |F(\omega', t)| d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2\omega} \ln \frac{\omega}{\omega_0} - \omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)}. \quad (4.2)$$

Соотношение (4.2) удобно переписать в виде

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F(\omega', t) \omega_0}{\omega} \right| \frac{d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = -\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega' (\omega'^2 + \omega^2)}. \quad (4.3)$$

Интеграл в левой части соотношения (4.3) при достаточно высоких энергиях определяется, в основном, интервалом $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$. Слова «достаточно высокие энергии» означают одновременное выполнение двух условий: $\alpha \ll 1$ и $\alpha\omega \gg \omega_0$. В этом случае, используя теорему о среднем и пренебрегая высшими поправками по α , получим оценки

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\ln \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} [\ln \varphi(\bar{\omega}, t) + \alpha (\ln \varphi(\bar{\omega}_1) + \ln \varphi(\bar{\omega}_2) - 2 \ln \varphi(\bar{\omega}))];$$

$$\varphi(\omega', t) = \left| \frac{F(\omega', t) \omega_0}{\omega} \right|; \quad (4.4)$$

$$\omega_0 \leq \bar{\omega}_1 \leq \alpha\omega; \quad \alpha\omega \leq \bar{\omega} \leq \alpha^{-1}\omega; \quad \alpha^{-1}\omega \leq \bar{\omega}_2 < \infty.$$

Поскольку $\ln \varphi(\omega, t)$ естественно считать медленно меняющейся функцией, второй член в (4.4) должен быть малым по сравнению с первым, т.к. $\alpha \ll 1$. Кроме того, для наблюдаемых амплитуд весьма вероятно, что $\varphi(\omega, t)$ монотонна на достаточно большом интервале энергий. Так, при $t = 0$ рост полных сечений означает, что $|\varphi(\omega, 0)|$ — монотонно растущая функция (учет реальной части не меняет этого вывода). Очевидно, что монотонность $\varphi(\omega, t)$ вносит дополнительную малость в поправочный член.

Рассмотрим теперь правую часть равенства (4.3).

Прежде всего отметим, что этот интеграл быстро сходится, поскольку, вследствие условия (2.26),

$$-\frac{\pi}{2} \leq \gamma(\omega, t) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.5)$$

Поэтому

$$\left| \omega \int_{\alpha^{-1}\omega}^{\infty} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega' (\omega'^2 + \omega^2)} \right| \leq \frac{\pi \alpha^2}{4\omega}. \quad (4.6)$$

Далее покажем, что оставшийся интеграл с точностью до функции, не влияющей существенно на функциональную зависимость $F(\omega, t)$, при высоких энергиях может быть записан в очень простом виде, а именно

$$\omega \int_{\omega_0}^{\alpha^{-1}\omega} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega' (\omega'^2 + \omega^2)} \cong \frac{1}{\omega} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'}. \quad (4.7)$$

Для вывода (4.7) сначала заметим, что

$$\omega \int_{\omega_0}^{\alpha \omega} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega_0}^{\alpha \omega} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'} + d(\omega), \quad (4.8)$$

$$d(\omega) = -\frac{1}{\omega} \frac{\alpha^2}{2} \gamma(\bar{\omega}_1), \quad \omega_0 \leq \bar{\omega}_1 \leq \alpha \omega,$$

и, согласно (4.5), $|d(\omega)| < (\pi \alpha^2)/(4\omega)$. Оставшийся интеграл с помощью теоремы о среднем легко записать в виде

$$\omega \int_{\alpha \omega}^{\alpha^{-1} \omega} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega} \left[\int_{\alpha \omega}^{\omega} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'} + [\gamma(\bar{\omega}_3) - \gamma(\bar{\omega}_2)] \frac{\ln 2}{2} + O(\alpha^2) \right], \quad (4.9)$$

$$\alpha \omega < \bar{\omega}_2 < \omega, \quad \omega < \bar{\omega}_3 < \alpha^{-1} \omega.$$

Отбрасываемый член мал, если $\gamma(\omega, t)$ медленно меняется при высоких энергиях (что соответствует экспериментальным данным) и в любом случае ограничен величиной $(\pi \ln 2)/2$. Окончательно приходим к равенству

$$-\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'} = \frac{\pi}{2} \ln \varphi(\bar{\omega}, t) (1 + O(\alpha) + D(\omega)); \quad (4.10)$$

$$|D(\omega)| < \frac{\pi \ln 2}{2} (1 + O(\alpha^2)).$$

Равенство (4.10) устанавливает связь между поведением $\gamma(\omega, t)$ и $|F(\omega, t)|$, иными словами, между $|F(\omega, t)|$ и $\xi(\omega, t) \equiv \frac{\operatorname{Re} F(\omega, t)}{\operatorname{Im} F(\omega, t)}$.

Прежде всего заметим, что поскольку

$$\xi(\omega, t) = -\operatorname{tg} \gamma(\omega, t), \quad (4.11)$$

то $\gamma(\omega, t) < 0$, если $\operatorname{Re} F(\omega, t) > 0$, и $\gamma(\omega, t) > 0$, если $\operatorname{Re} F(\omega, t) < 0$. Таким образом, рост $|F(\omega, t)/\omega|$, а следовательно, и рост полных сечений возможен, только если $\operatorname{Re} F(\omega, t) > 0$.

Проанализируем теперь, к каким следствиям приводят те или иные ограничения на $\gamma(\omega, t)$.

Подчеркнем, что согласно (4.6) поведение $\gamma(\omega', t)$ при $\omega' > \alpha^{-1} \omega$ практически не влияет на $\varphi(\bar{\omega}, t)$. Подчеркнем также, что фактически $|F(\omega, t)|$ является монотонно возрастающей функцией $\xi(\omega, t)$. Точный смысл этого утверждения в том, что, согласно (4.3), замена $\gamma(\omega', t)$ на $\gamma(\omega', t) - \Delta(\omega', t)$ приводит согласно (4.10) к росту $\varphi(\bar{\omega}, t)$, причем существенно поведение $\gamma(\omega', t)$ только при $\omega' < \alpha^{-1} \omega$.

Перейдем теперь к более конкретным оценкам.

Пусть, начиная с некоторого $\omega = \bar{\omega}$, выполняется неравенство

$$\xi(\omega, t) \geq \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2}; \quad 0 < \alpha < 1, \quad \text{т.е.} \quad \gamma(\omega, t) \leq -\frac{\pi \alpha}{2}. \quad (4.12)$$

Оценивая левую часть равенства (4.10) и опуская поправочные члены, имеем

$$\left| \frac{F(\bar{\omega}, t) \omega_0}{\bar{\omega}} \right| \geq \omega^\alpha D'(\omega, t), \quad (4.13)$$

где $D'(\omega, t)$ — ограниченная функция, очевидным образом связанная с $D(\omega, t)$ и $\int_{\omega_0}^{\bar{\omega}} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'}$. Если же

$$\xi(\omega, t) \leq \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2}; \quad -1 < \alpha < 0, \quad \text{т.е.} \quad \gamma(\omega, t) \geq -\frac{\pi \alpha}{2}, \quad (4.14)$$

то

$$\left| \frac{F(\bar{\omega}, t) \omega_0}{\bar{\omega}} \right| \leq \omega^\alpha D'(\omega, t). \quad (4.15)$$

Неравенства (4.12) и (4.15) показывают, что, если $\xi(\omega, t) \not\rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, то, в зависимости от знака $\operatorname{Re} F(\omega, t)$, $\varphi(\omega, t)$ либо возрастает степенным образом, если $\operatorname{Re} F(\omega, t) > 0$, либо падает, если $\operatorname{Re} F(\omega, t) < 0$. (Напомним, что мы рассматриваем область значений t , для которых $A(\omega, t) > 0$.) Первый случай может осуществляться только при $t > 0$. При этом, если $F(\omega, t)$ возрастает максимальным образом (насыщает ограничение Фруассара), то при $\omega \rightarrow \infty$ $F(\omega, 4m^2) > \omega^{2-\varepsilon}$. В таком случае $\xi(\omega, 4m^2) \rightarrow \infty$. Одновременно в этом случае $\xi(\omega, 0) \rightarrow 0$. Из этого факта можно сделать одно любопытное заключение. Рассматривая разложение $F(\omega, t)$ в ряд по полиномам Лежандра (2.24), мы видим, что одновременное выполнение условий $\xi(\omega, 4m^2) \rightarrow \infty$ и $\xi(\omega, 0) \rightarrow 0$ возможно только в том случае, если для некоторых l $r_l(\omega)/a_l(\omega) \rightarrow 0$, а для других $r_l(\omega)/a_l(\omega) \rightarrow \infty$. Вследствие условия унитарности (2.22) последнее возможно, только если $a_l(\omega) \rightarrow 0$. Поскольку мы рассматриваем случай максимально быстрого роста сечений, такие парциальные волны не вносят существенного вклада в $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$, однако только благодаря им возникает самосогласованная картина, т.е. только благодаря им $F(\omega, 4m^2)$ удовлетворяет требованиям, вытекающим из условий перекрестной симметрии и аналитичности.

Случай степенного падения функции $\varphi(\omega, t)$ наблюдается при $t < 0$. В этом случае $\operatorname{Re} \varphi(\omega, t) < 0$, пока $\varphi(\omega, t) > \omega^{-1+\varepsilon}$ (конечно, если для этих t выполнено условие $A(\omega, t) > 0$).

Рассмотрим теперь подробнее случай $t = 0$. Обратимся сначала к асимптотическим энергиям. Из неравенства Фруассара–Мартена и равенства (4.10)

сразу следует абсолютное ограничение на $\xi(\omega, 0)$:

$$\xi(\omega, 0) < \frac{\pi}{\ln \omega}. \quad (4.16)$$

Далее, очевидно, что случай асимптотически постоянного полного сечения возможен только в случае сходимости $\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\gamma(\omega', t) d\omega'}{\omega'}$.

Если $(\ln \omega)^{\gamma_1} < |\varphi(\omega, 0)| < (\ln \omega)^{\gamma_2}$, то

$$\frac{\pi \gamma_1}{2 \ln \omega} < \xi(\omega, 0) < \frac{\pi \gamma_2}{2 \ln \omega}. \quad (4.17)$$

Таким образом, только в случае асимптотически постоянных полных сечений $\xi(\omega, 0)$ может быстро (быстрее, чем $1/((\ln \omega)^{1+\varepsilon})$) стремиться к нулю.

Подчеркнем, что мы говорим об асимптотическом поведении, по существу, лишь для простоты. На самом деле все эти закономерности проявляются при конечных энергиях, важно лишь, чтобы соответствующие ограничения на $\xi(\omega, t)$ (или $|\varphi(\omega, t)|$) выполнялись на достаточно большом интервале энергий.

Из (4.3) можно получить равенство, связывающее интегралы от $\gamma(\omega, t)$ и $\frac{d \ln \varphi(\omega, t)}{d \omega}$. Поскольку вывод этого соотношения полностью аналогичен выводу (5.13), выпишем его сразу ($\omega \gg \omega_0$):

$$-2\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\gamma(\omega', t) \omega' d\omega'}{(\omega'^2 + \omega^2)^2} = \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{d \ln |\varphi(\omega', t)|}{d \ln \omega'} \frac{d\omega'}{(\omega'^2 + \omega^2)}. \quad (4.18)$$

Теперь в обоих интегралах основную роль играет интервал $(\alpha \omega, \alpha^{-1} \omega)$. Воспользуемся оценками (5.8) и (5.14). При этом, как и раньше, с помощью условия (4.5) можно получить абсолютные оценки на вклады интервалов $(\omega_0, \alpha \omega)$ и $(\alpha^{-1} \omega, \infty)$ в интеграл в левой части. Опуская поправочные члены, имеем соотношение

$$\gamma(\bar{\omega}_1, t) = -\frac{\pi}{2} \frac{d \ln |\varphi(\bar{\omega}_2, t)|}{d \ln \bar{\omega}_2}, \quad \alpha \omega \leq \omega_i \leq \alpha^{-1} \omega, \quad i = 1, 2, \quad (4.19)$$

которое показывает, что, если «в среднем» в интервале $(\alpha \omega, \alpha^{-1} \omega)$, $\gamma(\omega, t) < 0$, т.е. $\operatorname{Re} F(\omega, t) > 0$, то «в среднем» $|\varphi(\omega, t)|$ возрастает в этом интервале.

Из результатов п. 5.1, следует, что если $F(\omega, t)$ не имеет сильных осцилляций, то равенство (4.19) сводится к

$$\gamma(\omega, t) = -\frac{\pi}{2} \frac{d \ln |\varphi(\omega, t)|}{d \ln \omega} (1 + \varepsilon(\omega, t)), \quad (4.19')$$

где $\varepsilon(\omega, t) \ll 1$, если малы осцилляции $F(\omega, t)$ на интервале $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$, где $\alpha \ll 1$. В асимптотической области $\varepsilon(\omega, t) \rightarrow 0$, если выполнены соответствующие ограничения на осцилляции $F(\omega, t)$ (см. разд. 5).

В заключение отметим, что соотношения (4.3), (4.19) и (4.19') могут быть полезны для определения $\gamma(\omega, t)$, т.е. $\xi(\omega, t)$, непосредственно из экспериментов по измерению дифференциальных сечений при малых физических t .

4.2. Соотношения между дифференциальными сечениями частицы и античастицы на одной и той же мишени. Чрезвычайно интересен тот факт, что унитарность и аналитичность приводят к равенству дифференциальных сечений вперед частицы и античастицы на одной и той же мишени при высоких энергиях. Этот результат остается справедливым для $t > 0$, а также для тех физических t , при которых $A(\omega, t) > 0$. Однако при весьма либеральных условиях он обобщается и на произвольные t . Мы начнем, естественно, с тех t , при которых у $F_{\pm}(\omega, t)$ нет нулей. В этом случае справедливы соотношения (2.33) и (2.34). Приравнявая их в чисто мнимой точке, придем к соотношению ($\omega \gg \omega_0$):

$$\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 + \omega^2)} = \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta^-(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2}. \quad (4.20)$$

Для оценки правой части соотношения (4.20) разобьем весь интервал, как обычно, на интервалы $(\omega_0, \alpha\omega)$, $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$, $(\alpha^{-1}\omega, \infty)$ и, пользуясь теоремой о среднем, получим

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta^-(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\pi}{2} \delta^-(\bar{\omega}, t) + \alpha (\delta^-(\bar{\omega}_1, t) + \delta^-(\bar{\omega}_2, t) - 2\delta^-(\bar{\omega}, t)) \right], \quad (4.21)$$

$$\omega_0 \leq \bar{\omega}_1 \leq \alpha\omega; \quad \alpha\omega \leq \bar{\omega} \leq \alpha^{-1}\omega; \quad \alpha^{-1}\omega \leq \bar{\omega}_2 < \infty.$$

Учитывая, что, согласно (2.35), $|\delta^-(\omega, t)| < \pi$, имеем абсолютную оценку на рассматриваемый интеграл

$$\left| \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta^-(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} \right| < \frac{\pi^2}{2\omega}. \quad (4.22)$$

Вследствие неравенства (4.22) определенные ограничения на поведение отношения дифференциальных сечений частицы и античастицы существуют при всех энергиях. При асимптотических энергиях

$$\left| \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| \rightarrow 1 \quad (4.23)$$

хотя бы на последовательности энергий ω_i такой, что $\omega_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Действительно, легко видеть, что в противоположном случае, т.е. если $\left| \ln \left| \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| \right| > C$, начиная с некоторого $\omega = \tilde{\omega}$, то интеграл в левой части удовлетворяет неравенству:

$$\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 + \omega^2)} > \frac{1}{\omega} \left[C \ln \frac{\omega}{\tilde{\omega}} + A(\omega_1, t) \right], \quad (4.24)$$

где $A(\omega_1, t)$ — вклад интервала $(\omega_0, \tilde{\omega})$ в рассматриваемый интеграл. Для определенности считаем, что $\left| \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| > 1$, если $\omega > \tilde{\omega}$. Очевидно, что неравенство (4.24) противоречит ограничению (4.22).

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Согласно (4.21) интеграл в правой части равенства (4.20) в основном определяется поведением $\delta(\omega, t)$ в интервале $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$.

Рассмотрим теперь следствия из равенства (4.21). Начнем с асимптотических энергий. Выбирая α таким образом, чтобы $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha\omega \rightarrow \infty$, получим

$$\omega^2 \int_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 + \omega^2)} = \frac{\pi}{2} \delta^-(\bar{\omega}, t) (1 + \varepsilon(\omega, t)), \quad (4.25)$$

$$\bar{\omega} \rightarrow \infty, \quad \varepsilon(\omega, t) \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Таким образом, если $\delta^-(\omega, t) \rightarrow 0$, то, объединяя (4.25) с условием $\ln \left| \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| \rightarrow 0$, найдем, что

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}} \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad \delta^-(\bar{\omega}, t) \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

Чтобы убедиться в справедливости (4.26), достаточно оценить интеграл в левой части соотношения (4.25) тем же способом, каким мы оценивали интеграл в правой части равенства (4.3). В результате получим

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_{\omega_0}^{\infty} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 + \omega^2)} = \\ = \int_{\omega_0}^{\omega} \ln \left| \frac{F_+(\omega', t)}{F_-(\omega', t)} \right| \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}} + \end{aligned}$$

$$+ \ln 2 \left(\ln \frac{F_+(\bar{\omega}_1, t)}{F_-(\bar{\omega}_1, t)} - \ln \frac{F_+(\bar{\omega}_2, t)}{F_-(\bar{\omega}_2, t)} \right) + O(\alpha); \quad (4.27)$$

$$\alpha \omega \leq \bar{\omega}_1 \leq \omega; \quad \omega \leq \bar{\omega}_2 \leq \alpha^{-1} \omega.$$

Условие $\delta^-(\omega, t) \rightarrow 0$ довольно естественно при любом асимптотическом поведении полных сечений, за исключением их быстрого (степенного) падения, т.е. оно справедливо, когда

$$\sigma_{\text{tot}}(\omega) > \omega^{-\varepsilon}, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

В этом случае, как было показано выше, $\xi(\omega, t) \rightarrow 0$. Если, кроме того, $F_a(\omega, t)/F(\omega, t) \rightarrow 0$ (это условие выполняется в рамках существующих моделей), то и $R_{\pm}(\omega, t)/A_{\pm}(\omega, t) \rightarrow 0$, т.е. $\delta^-(\omega, t) \rightarrow 0$.

Отметим, что вследствие оценок (4.21) и (4.25) легко получить обобщение (4.25) на конечные энергии, а именно: интеграл в левой части этого соотношения должен быть мал, если $\delta^-(\omega', t) \ll 1$ и $|F_+(\omega, t)/F_-(\omega, t)| \approx 1$ при $\omega' > \omega$.

В том случае, когда выполнено неравенство (4.28) (этот случай должен иметь место, если поведение сечений при более высоких энергиях не будет кардинально отличаться от наблюдаемого при современных энергиях), мы можем доказать более сильное утверждение, чем равенство дифференциальных сечений вперед при асимптотических энергиях [117]. Можно доказать, что также

$$\frac{\sigma_+(\omega)}{\sigma_-(\omega)} \rightarrow 1, \quad (4.29)$$

если только

$$\left| \frac{R_+(\omega, 0)}{A_+(\omega, 0)} \right| < \infty. \quad (4.30)$$

Если, кроме того,

$$\left| \frac{R_+(\omega, 0)}{A_+(\omega, 0)} \right| > C, \quad (4.31)$$

то

$$\frac{\gamma_+(\omega, 0)}{\gamma_-(\omega, 0)} \rightarrow -1, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\sigma_+(\omega)}{\sigma_-(\omega)} \rightarrow 1, \quad \frac{R_+(\omega, 0)}{R_-(\omega, 0)} \rightarrow -1, \quad (4.32)$$

$\gamma_{\pm}(\omega, t)$ связаны с $\delta_{\pm}(\omega, t)$ так же, как $\gamma(\omega, t)$ связана с $\delta(\omega, t)$ (см. (4.1)).

Ясно, что достаточно доказать соотношение (4.32), поскольку если $\frac{R_{\pm}(\omega, 0)}{A_{\pm}(\omega, 0)} \rightarrow 0$, то (4.29) — следствие условия (4.23).

Для доказательства (4.32) воспользуемся соотношением, аналогичным (4.3), но для $F_+(\omega, t)F_-(\omega, t)$. Оно имеет тот же вид с очевидными заменами:

$$\gamma(\omega, t) \rightarrow \gamma_+(\omega, t) + \gamma_-(\omega, t), \quad \varphi(\omega, t) \rightarrow \tilde{\varphi}(\omega, t) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} F_+(\omega, t)F_-(\omega, t).$$

Если (4.32) не имеет места, т.е. если существует константа C такая, что $|\gamma_+(\omega, 0) + \gamma_-(\omega, 0)| > C$, то, оценивая соответствующий интеграл, получим, что либо $F_\pm(\omega, 0)$ возрастают степенным образом в противоречии с неравенством Фруассара–Мартена, либо падают таким же образом в противоречии с исходным предположением.

Таким образом, во всех случаях, когда полные сечения не падают быстро, что наиболее вероятно с физической точки зрения, «почти всегда» $\sigma_+(\omega)/\sigma_-(\omega) \rightarrow 1$. Единственное исключение составляет случай асимптотически чисто вещественных амплитуд $\left(\left| \frac{R_\pm(\omega, 0)}{A_\pm(\omega, 0)} \right| \rightarrow \infty \right)$. В этом случае выполнено второе из соотношений в (4.32).

В заключение коротко рассмотрим случай произвольных t . В этом случае нет никаких ограничений на число нулей амплитуды рассеяния. Однако, следуя Мейману [37], мы можем исключить из рассмотрения эти нули, воспользовавшись условиями кроссинг-симметрии и действительности. Представим $F_\pm(\omega, t)$ в виде

$$F_\pm(\omega, t) = \prod_{i=1}^{\infty} (\omega \mp \omega_i) (\omega \mp \omega_i^*) f_\pm(\omega, t). \quad (4.33)$$

Можно показать [37], что при достаточно общих предположениях $|\prod_{i=1}^{\infty} (\omega \mp \omega_i) (\omega \mp \omega_i^*)| < \infty$, и, следовательно, формула (4.33) имеет смысл. Очевидно,

$$\left| \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| = \left| \frac{f_+(\omega, t)}{f_-(\omega, t)} \right|, \quad \text{если } \omega \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

К функции $|f_+(\omega, t)/f_-(\omega, t)|$ мы уже можем применить проведенное рассмотрение и получить для нее равенство, аналогичное (4.20). Однако теперь мы уже не имеем ограничений на $\delta^-(\omega, t)$. Тем не менее можно легко доказать, сравнивая левую и правую части равенства (4.20), что

$$\left| \frac{F_+(\omega, t)}{F_-(\omega, t)} \right| \rightarrow 1, \quad \text{если } \frac{|\tilde{\delta}_+(\omega, t) - \tilde{\delta}_-(\omega, t)|}{\ln \omega} \rightarrow 0, \quad (4.35)$$

где $\tilde{\delta}_\pm(\omega, t)$ — фазы функций $f_\pm(\omega, t)$. Напомним, что доказательство соотношения (4.23) для произвольных t при довольно общих условиях было получено в работах [49–51].

5. ЛОКАЛЬНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

5.1. Неосциллирующие или слабо осциллирующие амплитуды рассеяния. В этом разделе будет изучена возможность замены ДС их локальными

аналогами. Сначала мы покажем, что отсутствие при высоких энергиях сильных осцилляций у $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$ приводит к существованию «почти» локальных дисперсионных соотношений. Далее будут построены сильно осциллирующие функции и показано, что для них связь между $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$ носит принципиально иной характер, чем в случае отсутствия осцилляций.

Если у $F_{s,a}(\omega, t)$ нет сильных осцилляций, то их можно записать в виде

$$F_{s,a}(\omega, t) = \Psi_{s,a}(\omega) \varphi(\omega, t),$$

$\Psi_{s,a}(\omega)$ — функции, обладающие обычными свойствами аналитичности, действительности, перекрестной симметрии, такие, что при $\omega \gg \omega_0$

$$\Psi_{s,a}(\omega) \cong \omega^\beta C_{s,a}(\beta), \quad (5.1)$$

где

$$C_s(\beta) = -\exp\left(\frac{-i\pi\beta}{2}\right); \quad C_a(\beta) = i C_s(\beta),$$

$\varphi(\omega, t)$ — медленно меняющаяся при высоких энергиях функция (условие (5.3)).

Легко видеть, что $\varphi(\omega, t)$ обладает таким же, как и симметричная амплитуда, свойством перекрестной симметрии (2.2). Мы выбираем β так, чтобы $\varphi(\omega, t)$ удовлетворяла условию (2.4').

Тогда интегралы от $\text{Im } \varphi(\omega, t)$ и $\text{Re } \varphi(\omega, t)$ связаны между собой равенством, аналогичным (2.19'), т.е.

$$-\omega^2 \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\text{Im } \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} = \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\text{Re } \varphi(\omega', t) \omega' d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}(\omega'^2 + \omega^2)}. \quad (5.2)$$

В действительности мы перешли к функции $\varphi(\omega, t) - \varphi(0, t)$, как обычно, не изменяя обозначений.

Предположим, что внутри интервала $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$ функция $\varphi(\omega', t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{Im } \varphi(\omega', t) - \text{Im } \varphi(\omega, t)}{\text{Im } \varphi(\omega, t)} \right| &\ll 1, & \left| \frac{\text{Re } \varphi(\omega', t) - \text{Re } \varphi(\omega, t)}{\text{Re } \varphi(\omega, t)} \right| &\ll 1, \\ \left| \frac{\text{Im } \varphi(\omega', t)}{\text{Re } \varphi(\omega', t)} \right| &\ll 1, & \alpha\omega < \omega' < \alpha^{-1}\omega. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Оценим теперь интегралы в (5.2). Сначала оценим вклад интервала (ω_0, ω) в интеграл в левой части (5.2). Очевидно, что

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\text{Im } \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\text{Im } \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'} - \frac{1}{\omega^2} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\text{Im } \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\omega^2} (I_1 - I_2). \quad (5.4)$$

Для оценки I_2 разделим интервал (ω_0, ω) на два: $(\omega_0, \alpha\omega)$ и $(\alpha\omega, \omega)$. Затем, используя теорему о среднем, получим, пренебрегая членом, пропорциональным ω_0^2/ω^2 :

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\operatorname{Im} \varphi(\omega_1, t) \ln(1 + \alpha^2) + \operatorname{Im} \varphi(\omega_2, t) \ln \frac{2}{1 + \alpha^2} \right], \quad (5.5)$$

$$\omega_0 < \omega_1 < \alpha\omega, \quad \alpha\omega < \omega_2 < \omega.$$

Для оценки интеграла по интервалу (ω, ∞) разделим его на интегралы по интервалам $(\omega, \alpha^{-1}\omega)$ и $(\alpha^{-1}\omega, \infty)$. Снова пользуясь теоремой о среднем, получим

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} = \frac{1}{2\omega^2} \left[\operatorname{Im} \varphi(\omega_3, t) \ln \frac{2}{1 + \alpha^2} + \operatorname{Im} \varphi(\omega_4, t) \ln(1 + \alpha^2) \right],$$

$$\omega < \omega_3 < \alpha^{-1}\omega, \quad \alpha^{-1}\omega < \omega_4 < \alpha^{-2}\omega. \quad (5.6)$$

Отметим, что вследствие быстрой сходимости интеграла, можно заменить $(\alpha^{-1}\omega, \infty)$ на интервал $(\alpha^{-1}\omega, \alpha^{-2}\omega)$.

Итак, согласно (5.4)–(5.6),

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'(\omega'^2 + \omega^2)} =$$

$$= \frac{1}{\omega^2} \left[\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'} + (\operatorname{Im} \varphi(\omega_3, t) - \operatorname{Im} \varphi(\omega_2, t)) \ln 2 + O(\alpha^2) \right]. \quad (5.7)$$

Оценим теперь интеграл в правой части. Чтобы не усложнять формулы, рассмотрим достаточно большие ω . Реально это означает, что одновременно $\alpha \ll 1$ и $\alpha\omega \gg \omega_0$. В этом случае $\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} \cong \omega$, а рассматриваемый интеграл можно заменить на $\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2}$. Осталось разбить область интегрирования на три: $(\omega_0, \alpha\omega)$, $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$ и $(\alpha^{-1}\omega, \infty)$ и воспользоваться теоремой о среднем. В результате имеем (с точностью до высших поправок по α):

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{Re} \varphi(\bar{\omega}, t) + \alpha (\operatorname{Re} \varphi(\bar{\omega}_1, t) + \operatorname{Re} \varphi(\bar{\omega}_2, t) - 2 \operatorname{Re} \varphi(\bar{\omega}, t)) \right]; \quad (5.8)$$

$$\omega_0 < \bar{\omega}_1 < \alpha\omega, \quad \alpha\omega < \bar{\omega} < \alpha^{-1}\omega, \quad \alpha^{-1}\omega < \bar{\omega}_2 < \infty.$$

Таким образом, согласно (5.3), (5.7) и (5.8),

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\operatorname{Im} \varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'} = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Re} \varphi(\omega, t) [1 + \varepsilon(\omega, t)], \quad (5.9)$$

где $\varepsilon(\omega, t) \ll 1$.

В наиболее важном случае рассеяния вперед экспериментальные данные говорят о том, что поправочные члены должны быть малы при энергиях современных ускорителей.

Действительно, мы можем записать

$$F(\omega, 0) = i\omega \varphi(\omega, 0). \quad (5.10)$$

Очевидно,

$$\frac{\operatorname{Im} \varphi(\omega, 0)}{\operatorname{Re} \varphi(\omega, 0)} = -\frac{R(\omega, 0)}{A(\omega, 0)}.$$

Последняя величина имеет порядок 0,12–0,15. Кроме того, поправка в (5.7) является разностью значений медленно меняющейся функции $R(\omega, 0)/\omega$. Далее, $\operatorname{Re} \varphi(\omega, 0) \sim \sigma_{\text{tot}}(\omega)$. Малость поправочного члена в (5.8) определяется не только медленным изменением полных сечений, но и тем фактом, что $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$ монотонно возрастает при $\omega > 100 \text{ ГэВ}^2$.

Предположим теперь, что при $\omega \rightarrow \infty$ функция $\varphi(\omega, t)$ в интервале $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$ удовлетворяет условиям, которые могут быть получены из условий (5.3) естественной заменой знака $\ll$ на $\rightarrow 0$. Тогда из равенств (5.7) и (5.8) непосредственно следует, что в (5.9) $\varepsilon(\omega, t) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Отметим, что если

$$\omega^{-\varepsilon} < |\varphi(\omega, t)| < \omega^{\varepsilon}, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (5.11)$$

то существует последовательность ω_i такая, что $\forall \nu |\varphi(\nu\omega_i, t)/\varphi(\omega_i, t)| \rightarrow 1$ при $\omega \rightarrow \infty$. Действительно, легко видеть, что если $|\varphi(\nu\omega, t)/\varphi(\omega, t)| > 1 + \Delta$ или $|\varphi(\nu\omega, t)/\varphi(\omega, t)| < 1 - \Delta$, где $\Delta > 0$ — некоторое фиксированное число, то $\varphi(\omega, t)$ растет или падает степенным образом.

Далее из соотношения (5.11) с помощью вычислений, аналогичных проведенным в разд. 3, легко заключить, что существует последовательность ω_i такая, что $\operatorname{Im} \varphi(\omega_i, t)/\operatorname{Re} \varphi(\omega_i, t) \rightarrow 0$ при $\omega_i \rightarrow \infty$.

Таким образом, при $\omega_i \rightarrow \infty$ смысл сделанных предположений в том, что рассмотренные выше следствия условий (5.11) выполнены при всех асимптотических энергиях. Вместе с тем проведенное рассмотрение показывает, что достаточно выполнения требуемых условий внутри интервала $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$. При $\omega \rightarrow \infty$ α может быть взято произвольно малым и $\varepsilon(\omega, t) \rightarrow 0$.

Если предположить, что $\frac{d\varepsilon(\omega, t)}{d\omega} \ll \frac{d\operatorname{Re}\varphi(\omega, t)}{d\omega}$, то из (5.9) следует, что

$$\operatorname{Im}\varphi(\omega, t) = -\frac{\pi}{2} \frac{d\operatorname{Re}\varphi(\omega, t)}{d\ln\omega}. \quad (5.12)$$

Равенство (5.12) совпадает с локальными ДС, если в них ограничиться первым членом (см., например, [103]).

Естественно найти условия, при которых при дифференцировании (5.9) можно пренебречь $\frac{d\varepsilon(\omega, t)}{d\omega}$. Для этой цели найдем соотношение, связывающее интегралы от $\frac{d\operatorname{Re}\varphi(\omega, t)}{d\omega}$ и $\operatorname{Im}\varphi(\omega, t)$.

Рассмотрим случай $\omega \gg \omega_0$, это означает, что (5.2) можно заменить соотношением

$$-\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{C(\omega_0, \omega_1, t)}{\omega^2} + \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\varphi(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2}, \quad (5.2')$$

$$C(\omega_0, \omega_1, t) = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\omega' \operatorname{Re}\varphi(\omega', t) d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - \omega_0^2}}, \quad \omega_0 \ll \omega_1 \ll \omega.$$

Ниже мы пренебрегаем членами $\sim \omega_1/\omega$, результаты не зависят от выбора точки ω_1 . Не учитывая, ввиду ее малости, производную от члена $\frac{C(\omega_0, \omega_1, t)}{\omega^2}$, после дифференцирования и интегрирования по частям интеграла от $\operatorname{Re}\varphi(\omega', t)$ придем к соотношению

$$-2\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im}\varphi(\omega', t) d\omega'}{(\omega'^2 + \omega^2)^2} = \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{\psi(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2}, \quad (5.13)$$

где $\psi(\omega, t) = \omega \frac{d\operatorname{Re}\varphi(\omega, t)}{d\omega}$.

Соотношение (5.13) замечательно тем, что интегралы как в левой, так и в правой части определяются поведением $\varphi(\omega, t)$ и $\psi(\omega, t)$ в интервале $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$, если $\alpha \ll 1$. Действительно, оценивая, как обычно, отдельно интегралы по интервалам $(\omega_0, \alpha\omega)$, $(\alpha\omega, \alpha^{-1}\omega)$ и $(\alpha^{-1}\omega, \infty)$, имеем

$$\begin{aligned} & -2\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im}\varphi(\omega', t) d\omega'}{(\omega'^2 + \omega^2)^2} = \\ & = -\frac{1}{\omega} [\operatorname{Im}\varphi(\omega_2, t) + \alpha^2 (\operatorname{Im}\varphi(\omega_1, t) + \operatorname{Im}\varphi(\omega_3, t) - 2\operatorname{Im}\varphi(\omega_2, t))], \\ & \quad \omega_0 < \omega_1 < \alpha\omega, \quad \alpha\omega < \omega_2 < \alpha^{-1}\omega, \quad \alpha^{-1}\omega < \omega_3 < \infty. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Для оценки интеграла в правой части (5.13) достаточно воспользоваться формулой (5.8). С точностью до поправочных членов имеем

$$\operatorname{Im} \varphi(\omega_2, t) = -\frac{\pi}{2} \frac{d \operatorname{Re} \varphi(\omega, t)}{d \ln \omega} \Big|_{\omega=\omega_4}, \quad \alpha \omega < \omega_4 < \alpha^{-1} \omega. \quad (5.15)$$

Согласно (5.10), равенство (5.15) означает, что если $R(\omega, 0) > 0$ в интервале $(\alpha \omega, \alpha^{-1} \omega)$, то $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$ в этом интервале должно возрасть (по крайней мере, при некоторых ω , принадлежащих данному интервалу).

Предположим теперь, что $\operatorname{Im} \varphi(\omega, t)$ и $\psi(\omega, t)$ медленно меняются в рассматриваемом интервале, т.е. что

$$\frac{\operatorname{Im} \varphi(\omega', t) - \operatorname{Im} \varphi(\omega, t)}{\operatorname{Im} \varphi(\omega, t)} \ll 1; \quad \frac{\psi(\omega', t) - \psi(\omega, t)}{\psi(\omega, t)} \ll 1; \quad (5.16)$$

$$\alpha \omega < \omega' < \alpha^{-1} \omega.$$

Тогда, очевидно, можно в формуле (5.15) положить $\omega_2 = \omega_4 = \omega$ и прийти к равенству (5.12).

Приведем теперь более тонкую оценку, рассмотрев отдельно интегралы по интервалам $(\alpha \omega, \omega)$ и $(\omega, \alpha^{-1} \omega)$. Опуская члены, пропорциональные α , имеем

$$\begin{aligned} & -2\omega \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im} \varphi(\omega', t) d\omega'}{(\omega'^2 + \omega^2)^2} = \\ & = -\frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \varphi(\omega, t) \left(1 + \frac{\operatorname{Im} \varphi(\bar{\omega}_1, t) + \operatorname{Im} \varphi(\bar{\omega}_2, t) - 2 \operatorname{Im} \varphi(\omega, t)}{2 \operatorname{Im} \varphi(\omega, t)} \right); \\ & \alpha \omega < \bar{\omega}_1 < \omega, \quad \omega < \bar{\omega}_2 < \alpha^{-1} \omega, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\psi(\omega', t) d\omega'}{\omega'^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2\omega} \psi(\omega, t) \left(1 + \frac{\psi(\bar{\omega}_3, t) + \psi(\bar{\omega}_4, t) - 2 \psi(\omega, t)}{2 \psi(\omega, t)} \right), \\ & \alpha \omega < \bar{\omega}_3 < \omega, \quad \omega < \bar{\omega}_4 < \alpha^{-1} \omega. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Очевидно, что если $\varphi(\omega, t)$ и $\psi(\omega, t)$ — монотонные функции в интервале $(\alpha \omega, \alpha^{-1} \omega)$, то поправочные члены в (5.17) и (5.18) приобретают дополнительную малость.

Итак, мы убедились в том, что если осцилляции амплитуды рассеяния, причем как ее реальной, так и мнимой части, малы, то при высоких энергиях ДС сводятся к «почти локальным» соотношениям между $A(\omega, t)$ и $R(\omega, t)$.

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о возможности использования локальных ДС для определения $F_-(\omega, 0)$ из экспериментальных данных

по $A_+(\omega, 0)$ и $R_+(\omega, 0)$. Представим $F_{\pm}(\omega, 0)$ в виде

$$F_{\pm}(\omega, 0) = \frac{1}{2} (F_s(\omega, 0) \pm F_a(\omega, 0)).$$

Поскольку $\sigma_+(\omega)$ возрастает при высоких энергиях, то $F_s(\omega, 0) \sim \omega \varphi_s(\omega, 0)$, где $\varphi_s(\omega, 0)$ — медленно растущая функция. Это означает, что $\frac{R_s(\omega, 0)}{A_s(\omega, 0)} \ll 1$. Если осцилляции $R_s(\omega, 0)$ малы, то $R_s(\omega, 0)$ может быть определена из соотношения (5.12). Сравнивая $R_s(\omega, 0)$ и $R_+(\omega, 0)$, можем найти $R_-(\omega, 0)$. Отметим, что, если $F_a(\omega, 0)$ вносит заметный вклад в $F_{\pm}(\omega, 0)$, то это, в основном, вклад в $R_{\pm}(\omega, 0)$. Действительно, если $F_a(\omega, 0) \sim \omega \varphi_a(\omega, 0)$, где $\varphi_a(\omega, 0)$ — медленно растущая или падающая функция, то $\frac{R_a(\omega, 0)}{A_a(\omega, 0)} \gg 1$. Таким образом, сравнение вычисленной из локальных ДС $R_s(\omega, 0)$ с экспериментально наблюдаемой величиной $R_+(\omega, 0)$ даст возможность судить о величине вклада $F_a(\omega, 0)$ в $F_{\pm}(\omega, 0)$.

Аналогичное рассмотрение может быть проведено и при $t < 0$, если $|t|$ достаточно мал. В этом случае весьма вероятно, что $|F_+(\omega, t)| \cong A_+(\omega, t)$.

5.2. Сильно осциллирующие амплитуды рассеяния. Рассмотрим теперь пример сильно осциллирующей амплитуды рассеяния. Рассмотрим свойства таких функций, которые при $\omega \gg \omega_0$ имеют вид

$$F_{s,a}(\omega, t) = \omega^{\beta} C_{s,a}(\beta) \varphi(\omega, t) \left[a + b \sin \left(\ln \omega - \frac{i\pi}{2} \right) \right], \quad (5.19)$$

где $C_{s,a}(\beta)$ те же, что и в (5.1).

Разумеется, $F_{s,a}(\omega, t)$ могут быть линейными комбинациями функций типа (5.19). В частности, легко построить такую линейную комбинацию, что $A(\omega_i, t) \sim \omega_i^{\beta_1}$, $A(\tilde{\omega}_i, t) \sim \tilde{\omega}_i^{\beta_2}$. Ниже мы рассмотрим только простейший вариант осциллирующей амплитуды: пусть при $\omega \gg \omega_0$

$$F(\omega, 0) = i\omega \left[a + b \sin \left(\ln \omega - \frac{i\pi}{2} \right) \right], \quad a > 0, \quad a > b \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}. \quad (5.19')$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} A(\omega, 0) &= \omega \left(a + b \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \cdot \sin \ln \omega \right), \\ R(\omega, 0) &= -b\omega \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \ln \omega, \\ \xi(\omega, 0) &= -\frac{b \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \ln \omega}{a + b \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \cdot \sin \ln \omega}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Мы видим, что $\xi(\omega, 0)$ — осциллирующая функция. Далее, очевидно,

$$\frac{d}{d \ln \omega} \frac{A(\omega, 0)}{\omega} = - \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \frac{R(\omega, 0)}{\omega}. \quad (5.21)$$

Различие в формулах (5.12) и (5.21) демонстрирует тот факт, что, в отличие от ДС, для справедливости локальных ДС необходимы дополнительные условия.

Рассмотрим теперь пример амплитуды, являющейся суммой монотонной и осциллирующей функций:

$$F(\omega, 0) = i\omega \left[\left(\ln \omega - \frac{i\pi}{2} \right)^\gamma + b \sin \left(\ln \omega - \frac{i\pi}{2} \right) \right], \quad \gamma > 0. \quad (5.22)$$

Очевидно, что при $\omega \rightarrow \infty$ осцилляции $A(\omega, 0)$ малы. Однако если $\gamma < 1$, то $R(\omega, 0)$ осциллирует сильно и соотношение (5.12) не имеет места. Таким образом, для справедливости локальных ДС необходимо отсутствие сильных осцилляций как у $A(\omega, 0)$, так и у $R(\omega, 0)$.

6. СТРОГИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ СВЕРХУ НА ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ И НА АМПЛИТУДУ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

6.1. Асимптотические и конечноэнергетические верхние границы. Одним из важнейших результатов аксиоматической теории рассеяния является неравенство Фруассара–Мартена [69]:

$$A(\omega, 0) \leq \frac{\omega}{8m_\pi^2} \ln^2 \frac{\omega}{\omega_u}. \quad (6.1)$$

Согласно оптической теореме, это неравенство эквивалентно ограничению на полное сечение:

$$\sigma_{\text{tot}}(\omega) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \ln^2 \frac{\omega}{\omega_u}. \quad (6.2)$$

Ниже мы положим $m_\pi^2 = 1$. В общем случае ω_u — неопределенный параметр и поэтому неравенство (6.2) справедливо только при асимптотических энергиях. Строго говоря, в этой области справедливо более сильное неравенство (см. в [111] ф-лу (3.12b)):

$$A(\omega, 0) \leq \frac{\omega}{8m_\pi^2} \ln^2 \frac{\omega}{(\ln \omega)^{3/2}}. \quad (6.1')$$

Неравенства (6.1) и (6.1'), вообще говоря, не ограничивают поведение полных сечений при конечных энергиях.

Однако для некоторых процессов мы можем получить такие ограничения. Из абсолютных ограничений на амплитуду $\pi^0 \pi^0$ -рассеяния в нефизической области, полученных Мартеном [68] и далее усиленных в ряде работ [69–74], вытекают неравенства, при конечных энергиях аналогичные (6.1). Фактически в этом случае численные ограничения на амплитуду рассеяния существуют при всех физических энергиях. Если же $\omega \gg \omega_0$ (реально $\omega > 1 \text{ ГэВ}^2$), то эти ограничения имеют тот же функциональный вид, что и (6.1). Учитывая, что вследствие кварковой структуры полные сечения $\pi^0 \pi^0$ -; πN -; NN -рассеяний имеют один и тот же порядок (в простых моделях можно написать соотношения между этими сечениями, которые выполняются с хорошей степенью точности), верхняя граница для $\pi^0 \pi^0$ -рассеяния может служить указанием на абсолютные верхние границы для других адронных амплитуд. В случае πN -рассеяния для вывода конечноэнергетических аналогов неравенства Фруассара–Мартена могут быть использованы экспериментальные данные при низких энергиях. В частности, для этой цели используется информация о поведении D -волны в t -канале. Первое неравенство такого рода было получено в [76], дальнейшее развитие это направление получило в работах [77–81].

Все ограничения сверху на $F(\omega, t)$ связаны с существованием тех или иных верхних границ на $A(\omega, t_0)$ при $t_0 > t$ ($0 < t_0 \leq 4m_\pi^2$). Схема получения таких ограничений является общей для асимптотических и конечных энергий.

Начнем с ограничения на $A(\omega, t_0)$, вытекающего из того факта, что $A(\omega, t_0)$, согласно результатам работы [61], удовлетворяет ДС с двумя вычитаниями.

Итак, пусть

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A(\omega', t_0) d\omega'}{\omega'^3} < \infty, \quad 0 < t_0 \leq 4m_\pi^2. \quad (6.3)$$

Условие (6.3), разумеется, не ограничивает поведение $A(\omega, t_0)$ при конечных энергиях. Соответствующее ограничение существует, если

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A(\omega', t_0) d\omega'}{\omega'^3} < d, \quad 0 < t_0 \leq 4m_\pi^2, \quad (6.3')$$

где d — некоторая известная константа. Подчеркнем, что, согласно (2.23) и (2.24), $A(\omega, t_0) > 0$, если $t_0 > 0$, поскольку $P_l(x) > 1$ при $x > 1$.

Если выполнено условие (6.3), то при $\omega \rightarrow \infty$

$$A(\omega, t_0) < \frac{\omega^2}{\ln \omega}. \quad (6.4)$$

Строго говоря, неравенство (6.4) может быть справедливо не при всех асимптотических энергиях, но, так как $A(\omega, t_0) > 0$, то при «почти всех». Из условия (6.3'), вследствие положительности $A(\omega, t_0)$, следует аналогичное условие для интеграла по любому интервалу $(\omega, \nu\omega)$. Применив теорему о среднем, получим, что

$$A(\bar{\omega}, t_0) < \bar{\omega}^2 d \ln \nu. \quad (6.4')$$

Найдем теперь $\max A(\omega, t)$ ($\max A(\bar{\omega}, t)$) для $t < t_0$, если выполнено условие (6.4) ((6.4')).

Поскольку искомый максимум тем меньше, чем слабее исходное неравенство для $A(\omega, t_0)$, при выводе абсолютного ограничения нужно заменить (6.4) ((6.4')) соответствующим равенством.

Рассмотрим теперь следующую задачу: при фиксированном значении $A(\omega, t_0)$ найти $a_l(\omega)$, реализующие максимум ряда

$$B(\omega, t) = 2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(\omega) B_l(x), \quad x = 1 + \frac{2t}{\omega},$$

где функции $B_l(x) > 0$ и удовлетворяют условию

$$\frac{B_{l_2}(x)}{B_{l_1}(x)} < \frac{P_{l_2}(x_0)}{P_{l_1}(x_0)}, \quad l_2 > l_1. \quad (6.5)$$

Докажем, что этот максимум реализуется, если

$$a_l(\omega) = \begin{cases} 1 & l \leq L, \\ \eta \leq 1 & l = L+1, \\ 0 & l \geq L+2. \end{cases} \quad (6.6)$$

Для доказательства достаточно заметить, что в противном случае всегда можно так изменить $a_l(\omega)$, что $B(\omega, t)$ увеличится при неизменной $A(\omega, t_0)$. Действительно, если (6.5) не имеет места, то всегда найдутся $a_{l_1}(\omega)$ и $a_{l_2}(\omega)$, $l_2 > l_1$, такие, что $a_{l_1}(\omega) < 1$, $a_{l_2}(\omega) > 0$. Заменяя $a_{l_1}(\omega)$ на $a_{l_1}(\omega) + \Delta_1$, а $a_{l_2}(\omega)$ на $a_{l_2}(\omega) - \Delta_2$, $\Delta_i > 0$, получим, что поскольку

$$\Delta_1 - \Delta_2 \frac{P_{l_2}(x_0)}{P_{l_1}(x_0)} = 0,$$

то вследствие (6.5) $\Delta B(\omega, t) > 0$.

При $t \geq 0$ положим $B(\omega, t) = A(\omega, t)$. Условие (6.5) выполнено как следствие известных свойств полиномов Лежандра. При $t < 0$ мажорируем $A(\omega, t)$ рядом

$$B(\omega, t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sin \theta} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l+1)}{\sqrt{l}} a_l(\omega), \quad (6.7)$$

т.к. при $|\cos \vartheta| < 1$ имеем $|P_l(\cos \vartheta)| < [2/(\pi l \sin \theta)]^{1/2}$. (Очевидно, что вклад волны с $l = 0$ пренебрежимо мал.)

Осталось найти величину L . Для этого заметим, что вкладом парциальной волны с $l = L + 1$ можно пренебречь и с помощью известной рекуррентной формулы

$$(2l + 1) P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

просуммировать ряд по полиномам Лежандра для $A(\omega, t_0)$ (см. (2.24)). Чтобы не усложнять формулы, считаем, что $\omega \gg \omega_0$. Тогда $L \cong L + 1$, $\cos \vartheta \cong 1 + (2t)/\omega$. В результате получаем уравнение для определения L :

$$A(\omega, t) = P'_{L+1}(x) + P'_L(x) \cong 2P'_L(x). \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) легко решается методом последовательных приближений. Нам удобнее вычислить $\gamma_0 = 2L \sqrt{t_0/\omega}$, поскольку, как было нами показано в [81] (ф-ла (15)),

$$P'_l\left(1 + \frac{2t}{\omega}\right) \cong \frac{e^\gamma \sqrt{\gamma}}{4\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{t}, \quad \gamma = 2L \sqrt{\frac{t}{\omega}}, \quad \gamma > 1. \quad (6.9)$$

Величина γ_0 удовлетворяет последнему условию при всех рассматриваемых нами энергиях. Согласно (6.8) и (6.9) γ_0 находится из уравнения

$$e^{\gamma_0} \sqrt{\gamma_0} = B\omega, \quad (6.10)$$

где B определяется из неравенств (6.4) или (6.4'). В результате имеем

$$\gamma_0^{(1)} = \ln(B\omega), \quad \gamma_0^{(n+1)} = \ln \frac{B\omega}{\sqrt{\gamma_0^n}}. \quad (6.11)$$

При $t = 0$ согласно оптической теореме получим

$$\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}} \cong \frac{32\pi}{\omega} \sum_{l=0}^L l \cong \frac{16\pi}{\omega} L^2 = \frac{4\pi}{t_0} \gamma_0^2. \quad (6.12)$$

Учитывая неравенство (6.11), видим, что (6.12) воспроизводит неравенство (6.1'). Конечнoэнергетический аналог этого неравенства следует из (6.4') и имеет вид

$$\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}(\bar{\omega}) < \frac{4\pi}{t_0} \ln^2(\bar{\omega} d \ln \nu). \quad (6.13)$$

В случае πN -рассеяния d выражается через вторую парциальную волну в t -канале [76], значение которой определяется из эксперимента. Заметим, что в действительности в ограничение (6.13) входит не константа d , а

$$\tilde{d} = d - \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{A(\omega', t_0) d\omega'}{\omega'^3} - \int_{\nu\omega}^{\infty} \frac{A(\omega', t_0) d\omega'}{\omega'^3}.$$

Режим парциальных волн (6.6) соответствует минимальному значению $A(\omega, t_0)$ при заданном значении $A(\omega, 0)$. Это дает возможность, пользуясь экспериментальными данными, оценить минимальные значения интегралов, входящих в формулу для $\tilde{d}$.

Сделаем два замечания.

1. Вследствие условия унитарности (2.22) режим парциальных волн (6.6) означает, что $a_l(\omega) = f_l^2(\omega)$. Тем самым рассеяние сводится к упругому: $\sigma_{\text{tot}}(\omega) = \sigma_{\text{el}}(\omega)$. Последнее не имеет места при современных энергиях, когда $\sigma_{\text{el}}(\omega)/\sigma_{\text{tot}}(\omega) \sim 1/3 - 1/5$.

Очевидно, что естественно рассмотреть верхнюю границу для $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$, учитывающую фактор $\sigma_{\text{el}}(\omega)/\sigma_{\text{tot}}(\omega)$. Впервые это было сделано в работе [118]. Точная оценка при асимптотических энергиях была получена в [66], а при конечных — в [119]. Не останавливаясь на деталях, заметим только, что реально оценка улучшается на фактор $\sigma_{\text{el}}(\omega)/\sigma_{\text{tot}}(\omega)$, т.е.

$$\sigma_{\text{tot}}(\omega) \leq \frac{\sigma_{\text{el}}(\omega)}{\sigma_{\text{tot}}(\omega)} \sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}(\omega), \quad (6.14)$$

где $\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}(\omega)$ определяется неравенствами (6.1') или (6.13).

2. Рассмотрим величину, называемую шириной дифракционного пика $\Gamma \equiv dA(\omega, t)/dt|_{t=0}$. Пользуясь разложением $A(\omega, t)$ в ряд по полиномам Лежандра и учитывая, что

$$\left. \frac{dP_l(1 + (2t)/\omega)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{l(l+1)}{\omega}, \quad (6.15)$$

получим, что

$$\Gamma = \frac{2}{\omega} \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)(2l+1)a_l(\omega). \quad (6.16)$$

Из доказанного нами утверждения непосредственно следует, что режим парциальных волн (6.6) соответствует максимуму $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$ при заданном значении Γ и, следовательно, минимуму Γ при фиксированном значении $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$.

Учет экспериментально наблюдаемого значения $\Gamma/A(\omega, 0)$ может быть существен для нахождения более точных верхних границ для $\sigma_{\text{tot}}(\omega)$. Эта проблема, однако, выходит за рамки настоящего обзора. Ряд результатов этого направления приведен в [109]. Условие (5.3') приводит также к численным ограничениям на различные интегралы вида

$$\int_{\omega_1}^{\infty} \rho(\omega', t) A(\omega', t) d\omega', \quad t < t_0,$$

ω_1 — произвольная физическая энергия, $\rho(\omega, t)$ — некоторая весовая функция. При $t = 0$ мы имеем верхние границы для различных интегралов от

полного сечения [114]. Такие границы, в частности, дают строгие ограничения на вклад в ДС интегралов по той области энергий, которая недоступна эксперименту.

При $t > 0$ ограничимся случаем, когда γ удовлетворяет условию (6.9). Используя (6.8) и связь γ и γ_0 , после простых выкладок приходим к неравенству

$$\frac{A(\bar{\omega}, t)}{\bar{\omega}} < \frac{\sqrt{\gamma_0} e^{\gamma_0} \sqrt{t/t_0}}{2\sqrt{2\pi} t^{3/4} (t_0)^{1/4}}. \quad (6.17)$$

При $t < 0$, воспользовавшись равенством (6.7), после простых вычислений имеем оценку:

$$A(\bar{\omega}, t) < \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi \sin \theta}} L^{3/2} = \frac{2}{3\sqrt{\pi \sin \theta}} \gamma_0^{3/2} \left(\frac{\bar{\omega}}{t_0}\right)^{3/4}. \quad (6.18)$$

Мы не останавливаемся на более тонких оценках $P_l(\cos \vartheta)$, чем (6.7), поскольку, в отличие от рассеяния вперед, строгие ограничения при $t < 0$ с неизбежностью являются довольно слабыми. Дело в том, что при $t < 0$ $P_l(\cos \vartheta)$ осциллируют при больших l , что приводит к сокращению вкладов в $F(\omega, t)$ от различных l . Учет этого эффекта невозможен без дополнительных предположений о поведении $a_l(\omega)$. Некоторого продвижения можно достичь, если использовать предположение об аналитичности амплитуды рассеяния по t в более широкой области, чем эллипс Мартена, например, в круге с центром в $t = -\omega/2$ (рассеяние под углом $\pi/2$) и крайне правой точкой $t = t_0$. Такая аналитичность существенна и для получения оценок на характеристики неупругих процессов [58, 120].

Перейдем теперь к рассмотрению абсолютных ограничений на $F(\omega, t)$.

6.2. Абсолютные ограничения на полное сечение и мнимую часть амплитуды упругого $\pi^0\pi^0$ -рассеяния при произвольных энергиях. В настоящем пункте выводятся абсолютные ограничения сверху на $A(\omega, t_0)$, $0 < t_0 < 4m_\pi^2$. Воспользуемся ДС (2.5). Нам потребуется следующая разность:

$$F(\omega_2, t_0) - F(\omega_1, t_0) = \frac{2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{A(\omega', t_0) \omega' d\omega'}{(\omega'^2 - \omega_1^2)(\omega'^2 - \omega_2^2)}. \quad (6.19)$$

Пусть $0 < \omega_i < \omega_0$, $i = 1, 2$ и $\omega_2 > \omega_1$. Тогда при любом $\nu > 1$, поскольку $A(\omega', t_0) > 0$ (см. формулы (2.23), (2.24)),

$$\int_{\omega}^{\nu\omega} \frac{A(\omega', t_0) \omega' d\omega'}{(\omega'^2 - \omega_1^2)(\omega'^2 - \omega_2^2)} < \frac{\pi}{2} \frac{F(\omega_2, t_0) - F(\omega_1, t_0)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (6.20)$$

Согласно теореме о среднем

$$\int_{\omega}^{\nu\omega} \frac{A(\omega', t_0) d\omega'}{\omega'^3} = \frac{A(\bar{\omega}, t_0)}{\bar{\omega}} \frac{1}{\omega} \frac{\nu - 1}{\nu},$$

следовательно,

$$\frac{A(\bar{\omega}, t_0)}{\bar{\omega}} < \frac{\nu}{\nu - 1} \omega C(\omega_1, \omega_2, t_0), \quad (6.20')$$

где

$$C(\omega_1, \omega_2, t_0) = \frac{\pi}{2} \frac{F(\omega_2, t_0) - F(\omega_1, t_0)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

Отметим, что, согласно (6.19), $\min C(\omega_1, \omega_2, t_0)$ достигается, когда $\omega_i \rightarrow 0$. Как уже отмечалось, $F(\omega, t_0)$ удовлетворяет абсолютным ограничениям, если $|\omega| < \omega_0$. Мы воспользуемся результатами Лопеца и Меннезиера (вторая ссылка в [74]):

$$|F(1, 3, 0)| < 3,3; \quad |F(2, 3, -1)| < 14,5; \quad m_\pi^2 = 1.$$

В переменных ω, t имеем

$$\left| F\left(\frac{3}{2}, 3\right) - F\left(\frac{1}{2}, 3\right) \right| < 17,8. \quad (6.21)$$

Согласно (6.20') и (6.21)

$$\frac{A(\bar{\omega}, t_0)}{\bar{\omega}} < 28 \frac{\nu}{\nu - 1} \omega. \quad (6.22)$$

Неравенство (6.22) является абсолютным ограничением сверху на $A(\bar{\omega}, t_0)$ при $\omega > \omega_0$. Ниже мы увидим, как из него следуют абсолютные ограничения сверху при $t < t_0$ на $A(\bar{\omega}, t)$ и другие физические величины.

Ради упрощения формул, как обычно, ограничимся случаем $\omega \gg \omega_0$. Так как $\omega_0 < 4$ для любого $t_0 \in (0, 4)$, то $\frac{\omega}{\omega_0} > 10$, если $\sqrt{s} > 1$ ГэВ, т.е. реально все энергии, большие 1 ГэВ, удовлетворяют требуемому условию.

Найдем теперь абсолютное ограничение сверху на $A(\bar{\omega}, t)$ при $t < t_0$. Для этого воспользуемся выводом формулы (6.6). Единственное отличие состоит в том, что в случае $\pi^0 \pi^0$ -рассеяния $a_{2l+1}(\omega) = 0$. Это вносит очевидные изменения в режим парциальных волн (6.6). Уравнение для γ_0 совпадает с (6.10), только теперь

$$B = \frac{2t_0 \sqrt{2\pi} \nu}{\nu - 1} C(\omega_1, \omega_2, t_0).$$

Если используется неравенство (6.21), то

$$B = 210 \frac{\nu}{\nu - 1}. \quad (6.23)$$

Максимумы $A(\omega, t)$ уменьшаются в два раза по сравнению с формулами (6.13), (6.17) и (6.18). Более точное ограничение на $\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}(\omega)$ имеет вид

$$\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}} \leq \frac{2\pi}{t_0} \ln^2 \left(\frac{B \omega}{\sqrt{\xi(\omega)}} \right), \quad \xi(\omega) = \ln \left(\frac{B \omega}{\sqrt{\ln(B \omega)}} \right). \quad (6.24)$$

Переходя к обычным единицам, запишем $\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}$ в виде

$$\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}} = \sigma_0 \gamma_0^2, \quad \sigma_0 = \frac{2\pi}{t_0 m_\pi^2} = 42 \text{ мб}. \quad (6.25)$$

Численные результаты представлены в следующей таблице.

	$\nu = 1,1$			$\nu = 2$			$\nu = 10$		
$\sqrt{s}$, ГэВ	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2
1	134	107	108	100	78	79	88	68	69
10	261	218	219	220	182	183	194	159	160
100	431	370	372	367	312	314	345	293	294
10^4	899	800	802	805	713	715	772	682	684
10^6	1536	1396	1397	1410	1277	1279	1398	1266	1268
10^8	2343	2159	2160	2190	2014	2016	2135	1962	1964
10^{12}	4465	4190	4191	4250	3982	3984	4176	3911	3913
10^{16}	7267	6893	6895	7000	6635	6637	6534	6184	6186
10^{20}	10750	10274	10276	10400	9934	9936	10300	9836	9839

Сделаем несколько замечаний.

1. Полученные ограничения слабо зависят от ν , особенно при высоких энергиях. Следовательно, мы получили «почти» локальные верхние границы для полных сечений.

2. Найденные верхние границы медленно увеличиваются с ростом s . Действительно, когда $\sqrt{s}$ меняется в 10^{20} раз, $\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}$ изменяется только в 125 раз. Это изменение особенно мало при высоких энергиях. Например, в интервале $10^6 < \sqrt{s} < 10^{20}$ ГэВ $\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}$ меняется лишь в 7 раз.

3. На первый взгляд, полученные ограничения должны быть грубыми. Действительно, они насыщаются, если только $A(\omega, t_0) = 0$ (а следовательно, и $A(\omega, t) = 0 \forall t$) всюду, за исключением интервала $(\omega, \nu \omega)$. Очевидно, что такое поведение $A(\omega, t)$ не соответствует реальной физической ситуации. Однако замечателен тот факт, что вследствие крайне слабой зависимости $\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}$

от $A(\omega, t_0)$, особенно при высоких энергиях, полученное ограничение не может быть существенно усилено даже в том случае, если удастся получить более сильное ограничение на $A(\omega, t_0)$. Действительно, поскольку γ_0 определяется величиной $B\omega$, то замена B на κB , $\kappa < 1$, эквивалентна замене ω на $\kappa\omega$. Это дает возможность оценить соответствующий эффект непосредственно из таблицы. Сравнивая, например, $\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}$ при $\sqrt{s} = 10^6$ и 10^8 ГэВ, мы видим, что замена B на $10^{-4}B$ приводит к усилению ограничения лишь в 1,5 раза, если $\sqrt{s} = 10^8$ ГэВ.

Отметим также, что, как будет видно из полученных ниже ограничений на $|F(\omega, t_0)|$, лишь поведение $A(\omega', t_0)$ при $\omega' < \nu\omega$ существенно влияет на верхнюю границу для $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})$.

4. Некоторое усиление найденного ограничения (на фактор $\approx 3/4$) может быть достигнуто, если использовать в качестве исходных ограничения при нефизических s и $t \approx 4$. Однако, вследствие отсутствия таких ограничений, невозможно оценить, при каких именно энергиях это приведет к улучшению результата. Строго говоря, для каждого s существует свое оптимальное t_0 . Подобный анализ выходит за рамки данного обзора.

5. $\sigma_{\text{tot}}^{\text{max}}$ достигается в том случае, когда $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}}$. Используя результаты статьи [119], легко убедиться, что найденное нами ограничение при дополнительном условии

$$\frac{\sigma_{\text{el}}(\bar{\omega})}{\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})} \leq b$$

имеет вид

$$\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega}) \leq b \frac{2\pi}{t_0} \ln^2 \left(\frac{B}{b} \bar{\omega} \right). \quad (6.26)$$

6.3. Абсолютные ограничения на парциальные амплитуды. Неравенство (6.20) означает существование абсолютных ограничений на парциальные амплитуды, что дает возможность получить верхнюю границу не только для

$$\sigma_{\text{tot}}(\omega), \text{ но и для } \sigma_{\text{tot}}^L(\omega) \equiv \frac{16\pi}{\omega} \sum_{l=L}^{\infty} (2l+1) a_l(\omega).$$

Поскольку $a_l(\omega) \geq 0$, то из (2.24) следует, что

$$4l a_l(\omega) P_l \left(1 + \frac{2t_0}{\omega} \right) < A(\omega, t_0). \quad (6.27)$$

Если $\gamma_0 \equiv 2l \sqrt{t_0/\bar{\omega}} > 1$, то $P_l(x_0)$ ($x_0 = 1 + 2t_0/\bar{\omega}$) хорошо описывается следующей формулой ((14) в [81]):

$$P_l(x_0) \cong \frac{e^{\gamma_0}}{\sqrt{2\pi\gamma_0}}. \quad (6.28)$$

Согласно (6.27)

$$a_{l+L}(\bar{\omega}) < \exp\left(-2l\sqrt{t_0/\bar{\omega}}\right), \quad (6.29)$$

где L определяется равенством

$$4L P_L(x_0) = A(\bar{\omega}, t_0). \quad (6.30)$$

Воспользовавшись неравенством (6.20) и теоремой о среднем, имеем

$$A(\bar{\omega}, t_0) < \frac{\nu^2}{2(\nu^2 - 1)} \omega^2 C(\omega_1, \omega_2, t_0) \equiv \omega^2 \tilde{C}^2. \quad (6.31)$$

Из уравнения (6.30) и неравенства (6.31) следует, что

$$L < \sqrt{\bar{\omega}/t_0} \ln(\tilde{C}\omega). \quad (6.32)$$

Ограничение (6.32) соответствует первому приближению при решении уравнения (6.30) и может быть несколько улучшено.

Если $l < L$, то неравенство (6.27) не ограничивает $a_l(\bar{\omega})$. Величина L фактически имеет смысл радиуса взаимодействия, т.е. $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega}) \approx L^2$, разумеется, в предположении, что $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})$ не падает быстро при больших ω . Точный смысл сделанного нами утверждения состоит в том, что, вследствие (6.28), реалистическое поведение $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})$ несовместимо с существенным вкладом в $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})$ парциальных сечений при $l \gg L$. Действительно, легко получить следующую оценку максимально возможной величины $\sigma_{\text{tot}}(\bar{\omega})^{L(1+\alpha)}$, $\alpha > 0$:

$$\sigma_{\text{tot}}^{L(1+\alpha)}(\bar{\omega}) \leq \frac{8\pi(1+\alpha)}{t_0} (\tilde{C}\omega)^{-2\alpha} \ln(\tilde{C}\omega). \quad (6.33)$$

6.4. Абсолютные ограничения сверху на $|F(\omega, t)|$. Докажем существование абсолютных ограничений не только на $A(\omega, t)$, но и на $|F(\omega, t)|$ при $\omega > \omega_0$, $0 < t < 4$.

Воспользуемся тем, что $F(\omega, t)$ не может иметь более двух нулей в области аналитичности. (Доказательство см. в приложении А.) Что касается нулей на разрезе, то, как уже отмечалось в разд. 2, достаточно усреднить $F(\omega, t)$ по бесконечно малому интервалу $(\omega, \omega + \Delta)$, чтобы получить функцию, физически не отличимую от $F(\omega, t)$ и не имеющую нулей на разрезе. Если $F(\omega, t) = 0$ при $\omega = \tilde{\omega}$, то, учитывая условие перекрестной симметрии (2.2), можем записать $F(\omega, t)$ в виде

$$F(\omega, t) = (\omega^2 - \tilde{\omega}^2) f(\omega, t), \quad (6.34)$$

где $f(\omega, t)$ уже не имеет нулей; $\tilde{\omega}$ — или действительное (в этом случае $|\tilde{\omega}| < \omega_0$), или мнимое число. Напомним, что у $F(\omega, t)$ не может быть комплексных нулей.

Разумеется, у $F(\omega, t)$ может не быть нулей. Забегая вперед, отметим, что этот случай соответствует более сильному, т.е. не абсолютному ограничению сверху на $|F(\omega, t)|$.

Согласно равенству (2.29), используя переменную $z = \omega^2$, получим

$$\ln \left| \frac{f(z, t)}{f(z_i, t)} \right| = \frac{z - z_i}{\pi} P \int_{z_0}^{\infty} \frac{\delta(z', t)}{(z' - z)(z' - z_i)} dz', \quad i = 1, 2. \quad (6.35)$$

Если у $F(z, t)$ нет нулей и $F(z_0, t) > 0$, то $F(z, t)$ удовлетворяет (6.35). Если $F(z_0, t) < 0$, то, согласно (2.31), в равенстве (6.35) надо $\delta(z', t)$ заменить на $\tilde{\delta}(z', t) = \delta(z', t) - \pi$. Очевидно,

$$-\pi \leq \tilde{\delta}(z', t) \leq 0. \quad (6.36)$$

Для вывода абсолютных ограничений на $|F(z, t)|$ проинтегрируем обе части равенства (6.35) по интервалу $(z, \mu z)$ с некоторой положительной функцией $\rho(z)$, нормированной условием $\int_z^{\mu z} \rho(z') dz' = 1$, $\mu > 1$, а в остальном произвольной. Изменив порядок интегрирования и воспользовавшись теоремой о среднем, придем к соотношению

$$\ln \left| \frac{\varphi(\bar{z}, t)}{\varphi(z_i, t)} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \frac{\delta(z', t)}{(z' - z_i)} dz' P \int_z^{\mu z} \frac{(z'' - z_i) \rho(z'')}{z' - z''} dz''. \quad (6.37)$$

Ограничения на $f(\bar{z}, t)$ зависят от выбора весовой функции $\rho(z)$. Поэтому мы решим задачу о нахождении абсолютного ограничения на $|f(\bar{z}, t)|$ для следующего достаточно широкого класса весовых функций:

$$\rho(z') = C_\alpha(z) (z')^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$C_\alpha(z) = \frac{\alpha}{(\mu^\alpha - 1) z^\alpha}, \quad \alpha \neq 0,$$

$$C_\alpha(z) = (\ln \mu)^{-1}, \quad \alpha = 0.$$

Мы получим формулы для верхней границы $f(\bar{z}, t)$ при произвольном α , из которых следует, что каждому значению μ соответствует свой выбор α , при котором искомая граница является оптимальной.

Только ради упрощения формул ограничимся случаем $z \gg z_0$. Отметим, что уже при $s = 1$ ГэВ² $z/z_0 > 100$. Учитывая неравенство (2.26), получим

$$\ln \left| \frac{\varphi(\bar{z}, t)}{\varphi(z_i, t)} \right| \leq \int_{\bar{z}_\alpha}^{\infty} \frac{dz'}{z'} \Phi_\alpha(z'), \quad \text{где } \Phi_\alpha(z') = C_\alpha \int_z^{\mu z} \frac{(z'')^\alpha}{z' - z''} dz''. \quad (6.38)$$

Мы пренебрегаем членами $\sim z_0/z$. Точка $\tilde{z}_\alpha$ определена условием $\Phi_\alpha(\tilde{z}_\alpha)=0$. При этом $\forall \alpha \quad \Phi_\alpha(z') > 0, z' > \tilde{z}_\alpha; \Phi_\alpha(z') < 0, z' < \tilde{z}_\alpha$. Легко доказать, что такая точка существует и единственна, поскольку $\tilde{z}_\alpha$ — монотонно возрастающая функция α . Очевидно, что $z < \tilde{z}_\alpha < \mu z$.

Для вычисления интеграла в (6.38) поменяем местами порядок интегрирования и после элементарных выкладок найдем, что

$$I_\alpha = \ln \tilde{u}_\alpha - \frac{\alpha}{\mu^\alpha - 1} \int_1^\mu y^{\alpha-1} \ln |\tilde{u}_\alpha - y| dy, \quad \tilde{u}_\alpha = \frac{\tilde{z}_\alpha}{z}, \quad \alpha \neq 0.$$

Интегрируя оставшийся интеграл по частям и учитывая, что $\Phi_\alpha(\tilde{u}_\alpha) = 0$, после простых вычислений получим

$$I_\alpha = \ln \frac{\tilde{u}_\alpha}{\mu - \tilde{u}_\alpha} + \frac{1}{\mu^\alpha - 1} \ln \frac{\tilde{u}_\alpha - 1}{\mu - \tilde{u}_\alpha}, \quad \alpha \neq 0. \quad (6.39)$$

Если $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\tilde{u}_\alpha$ вычисляется из уравнения (Б.2). Если $\alpha \in \mathbb{Z}_\pm$, то простые вычисления дают

$$\Phi_n(\tilde{u}_n) = \tilde{u}_n \ln \frac{\tilde{u}_n - 1}{\mu - \tilde{u}_n} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - \mu^k}{k} (\tilde{u}_n)^{-k}, \quad (6.40)$$

$$\Phi_{-n}(\tilde{u}_{-n}) = \ln \frac{\mu(\tilde{u}_{-n} - 1)}{\mu - \tilde{u}_{-n}} + \sum_{k=1}^n (\tilde{u}_{-n})^k \left(1 - \frac{1}{\mu^k}\right). \quad (6.40')$$

Поскольку $\Phi_\alpha(\tilde{u}_\alpha) = 0$, то (6.40) и (6.40') являются уравнениями для определения $\tilde{u}_\alpha$. Если $\mu \gg 1$, то (с точностью до малых поправок) $\mu/\tilde{u}_n$, и $\tilde{u}_{-n}$ определяются из уравнений

$$\ln \left(\frac{\mu}{\tilde{u}_n} - 1 \right) = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{\mu}{\tilde{u}_n} \right)^k, \quad (6.41)$$

$$\ln(\tilde{u}_{-n} - 1) = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \tilde{u}_{-n}^k. \quad (6.41')$$

Отметим, что

$$\tilde{u}_0 = \frac{1 + \mu}{2}. \quad (6.42)$$

Получим I_0 , рассмотрев $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_\alpha$. Для этого найдем приближенное выражение для I_α при $\mu^\alpha - 1 \ll 1$. В этом случае условие $\Phi_\alpha(\tilde{u}_\alpha) = 0$ означает, что

$$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\tilde{u}_\alpha - 1}{\mu - \tilde{u}_\alpha} \cong P \int_1^\mu \frac{\ln y}{\tilde{u}_\alpha - y} dy. \quad (6.43)$$

Вычисляя этот интеграл, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\tilde{u}_\alpha - 1}{\mu - \tilde{u}_\alpha} &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} (\ln^2 \mu + \ln^2 \tilde{u}_\alpha) + \\ &+ \ln \mu \cdot \ln (\mu - \tilde{u}_\alpha) - Li_2 \left(\frac{1}{\tilde{u}_\alpha} \right) - Li_2 \left(\frac{\tilde{u}_\alpha}{\mu} \right), \quad \alpha \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6.44)$$

где

$$Li_2(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Из (6.39) и (6.44) следует, что

$$I_0 = \frac{1}{\ln \mu} \left[\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\mu}{\tilde{u}_0} - Li_2 \left(\frac{1}{\tilde{u}_0} \right) - Li_2 \left(\frac{\tilde{u}_0}{\mu} \right) \right]. \quad (6.45)$$

Итак, для произвольного α получено явное выражение для I_α и уравнение для $\tilde{u}_\alpha$, которое может быть решено в численном виде, что дает возможность для любого заданного μ найти оптимальное ограничение в классе используемых весовых функций, т.е. найти α_{opt} , соответствующее наилучшему выбору весовой функции. Проведем теперь качественный анализ соотношения (6.39), который покажет, что при достаточно больших μ $\alpha_{\text{opt}} \approx 0$. Рассмотрим (при заданном μ) набор чисел α , удовлетворяющих условиям: $\mu^\alpha - 1 \gg 1$, $\alpha > 0$; $\mu^\alpha \ll 1$, $\alpha < 0$. Тогда

$$I_\alpha \cong \ln \frac{\tilde{u}_\alpha}{\mu - \tilde{u}_\alpha}, \quad \alpha > 0; \quad I_\alpha \cong \ln \frac{\tilde{u}_\alpha}{\tilde{u}_\alpha - 1}, \quad \alpha < 0. \quad (6.46)$$

Из определения $\tilde{u}_\alpha$ непосредственно видно, что $\tilde{u}_\alpha$ — монотонно возрастающая функция α . Следовательно, из равенств (6.46) следует, что (при выполнении выписанных выше дополнительных условий) I_α монотонно падает при $\alpha > 0$ и монотонно возрастает при $\alpha < 0$. Таким образом, $\alpha_{\text{opt}} \approx 0$ при достаточно больших μ , поскольку требуемые условия выполняются при малом $|\alpha|$. Отметим, что поскольку $z \approx s^2$, то условие $\mu \gg 1$ еще не означает, что соответствующий интервал велик с физической точки зрения. В заключение этого качественного анализа отметим, что $\alpha_{\text{opt}} \neq 0$ при любом μ . Действительно, равенство (6.45) справедливо и при $\alpha \rightarrow 0$ (с естественной заменой $\tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}_\alpha$). Дифференцируя, получим

$$I'_\alpha = \frac{1}{\ln \mu} \frac{\tilde{u}'_\alpha}{\tilde{u}_\alpha} \ln \frac{\mu - \tilde{u}_\alpha}{\tilde{u}_\alpha - 1}, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Из (6.42) следует, что $I'_0 = 0$. Поскольку $\tilde{u}'_\alpha > 0$, то $I'_\alpha > 0$, $\alpha < 0$; $I'_\alpha < 0$, $\alpha > 0$, т.е. при $\alpha = 0$ реализуется локальный $\max I_\alpha$. Таким образом,

каждому значению μ соответствует свой выбор α_{opt} . Как уже отмечалось, если $\mu \gg 1$, достаточно хорошим будет выбор $\alpha = 0$. В этом случае согласно (6.42) и (6.45):

$$I_0 \cong \frac{1}{\ln \mu} \left\{ \frac{\pi^2}{3} - \frac{\ln^2 2}{2} - Li_2 \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{2}{\mu} \left[1 - \ln 2 + \frac{1}{2} Li_1 \left(\frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (6.45')$$

Нам осталось рассмотреть случай, когда у $F(z, t)$ нет нулей. Мы получим требуемый ответ, решив более общую задачу, а именно найдя абсолютное ограничение сверху на функцию

$$\psi_{\beta}^i(z, t) = \left(\frac{z - z_0}{z_0 - z_i} \right)^{\beta} f(z, t); \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (6.47)$$

Поскольку

$$\ln \frac{z - z_0}{z_0 - z_i} = -(z - z_i) \int_{z_0}^{\infty} \frac{dz'}{(z' - z_i)(z' - z)},$$

ЛДС для $\psi_{\beta}^i(z, t)$ имеют тот же вид, что и для $f(z, t)$ (см. (6.35)) с той лишь разницей, что $\delta(z, t)$ заменяется на $\delta_{\beta}(z, t) = \delta(z, t) - \beta\pi$.

Аналогично изменяется и соотношение (6.37). Заметим, что при $\beta=1$ мы имеем соотношение, аналогичное ЛДС для $F(z, t)$ в случае, когда $F(z_0, t) < 0$. Если $F(z_0, t) > 0$ и у $F(z, t)$ нет нулей, найденные нами ограничения на $f(z, t)$ непосредственно применимы к $F(z, t)$. Очевидно, что в этом случае $|F(z, t)| < \infty$ при $z \rightarrow \infty$.

Ниже мы увидим, что ограничения для произвольного β непосредственно получаются из ограничений при $\beta = 0$ и $\beta = 1$. Поэтому фактически нам осталось рассмотреть случай $\beta = 1$. Согласно условиям (2.26), (2.31) $-\pi \leq \delta_1(z, t) \leq 0$. Поступая так же, как при выводе неравенства (6.38), получим

$$\ln \left| \frac{\psi_1(\bar{z}, t)}{\psi_1(z_i, t)} \right| \leq \int_{z_0}^{\bar{z}_{\alpha}} \frac{dz'}{z' - z_i} \Phi_{\alpha}(z') \equiv \ln \frac{z}{z_0 - z_i} + \tilde{I}_{\alpha}. \quad (6.48)$$

Как и раньше, мы пренебрегаем членами $\sim z_0/z$.

Вычисление $\tilde{I}_{\alpha}$ аналогично вычислению I_{α} , поэтому сразу приведем результаты:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\alpha} &= I_{\alpha} + \frac{\mu^{\alpha} \ln \mu}{\mu^{\alpha} - 1} - \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \\ \tilde{I}_0 &= I_0 + \frac{\ln \mu}{2}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что в общем случае необходимое ограничение является очевидной комбинацией формул (6.38) и (6.48). В частности, если $\beta \in (0, 1)$, то, поскольку $-\pi\beta \leq \delta_\beta(z, t) \leq \pi(1 - \beta)$,

$$\ln \left| \frac{\psi_\beta(\bar{z}, t)}{\psi_\beta(z_i, t)} \right| \psi_\beta(\bar{z}, t) \leq (1 - \beta) I_\alpha + \beta \left(\ln \frac{z}{z_0 - z_i} + \tilde{I}_\alpha \right). \quad (6.49)$$

Для вывода численных ограничений воспользуемся, как и раньше, неравенствами (6.21). Если у $F(z, t)$ нет нулей, то

$$|F(\bar{z}, t)| < 3,3 z \exp \tilde{I}_\alpha. \quad (6.50)$$

Если у $F(z, t)$ есть нуль $\tilde{z}$ в интервале (z_1, z_2) , то

$$|F(\bar{z}, t)| < \bar{z} \frac{3,3}{\tilde{z} - (1/4)} \exp I_\alpha, \quad (6.51)$$

$$|F(\bar{z}, t)| < \bar{z} \frac{14,5}{(9/4) - \tilde{z}} \exp I_\alpha. \quad (6.52)$$

Очевидно, что абсолютное ограничение соответствует равенству правых частей в неравенствах (6.51), (6.52). В этом случае

$$|F(\bar{z}, t)| < 8,92 \bar{z} \exp I_\alpha. \quad (6.53)$$

Легко видеть, что если у $F(z, t)$ есть нуль на отрицательной оси, то мы приходим к более сильному ограничению, чем (6.53) (в этом случае самое слабое ограничение соответствует $\tilde{z} = 0$). Существенной чертой абсолютных ограничений на $|F(\bar{z}, t)|$ является их слабая зависимость от поведения $|F(z', t)|$ при $z' > \mu z$ (фактически ограничение определяется поведением $\delta(z', t)$ при $z' < z$). Чтобы продемонстрировать этот факт, заметим, что если у $F(z, t)$ нет нулей, то максимально возможное усиление ограничения за счет поведения $F(z', t)$ при $z' > \tilde{z}_\alpha$ достигается, если $\delta(z', t) = \pi$ при таких z' . Очевидно, тогда неравенство (6.50) заменится на

$$|F(\bar{z}, t)| < 3,3 z \exp(\tilde{I}_\alpha - I_\alpha).$$

Соответствующее усиление неравенства (6.53) получается, когда $\delta(z', t) = 0$ при $z' > \tilde{z}_\alpha$, т.е. теперь

$$|F(\bar{z}, t)| < 8,92 \bar{z}. \quad (6.53')$$

В заключение рассмотрим ограничение на $A(\bar{z}, t)$, вытекающее из ЛДС. Заметим, что теперь неравенство (6.38) заменится на неравенство

$$\ln \frac{\operatorname{Im} f(\bar{z}, t)}{|f(z_i, t)|} \leq \int_{\mu z}^{\infty} \frac{dz'}{z'} \Phi_\alpha(z') +$$

$$+ \max_z \int_z^{\mu z} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\delta(z', t)}{z'} \Phi_\alpha(z') - \frac{\rho(z')}{2} \ln(1 + \cot^2 \delta(z', t)) \right] dz'. \quad (6.54)$$

Используя известный вариационный принцип, легко получить, что $\delta(z', t)$, реализующее искомый максимум, определяется из уравнения

$$\cot \delta(z', t) = - \frac{1}{\pi \rho(z')} \frac{\Phi_\alpha(z')}{z'}. \quad (6.55)$$

Мы ограничимся этим общим рассмотрением, поскольку изменение поведения $\delta(z', t)$ на интервале $(z, \mu z)$ может привести лишь к дополнительному множителю (не зависящему от z) в полученных ранее ограничениях на $|F(\bar{z}, t)|$.

Отметим, что ограничение на $A(\bar{z}, t)$ (как и ограничение на $|F(\bar{z}, t)|$) слабо зависит от поведения амплитуды рассеяния при энергиях больших, чем рассматриваемые.

Заметим, что из полученных нами абсолютных ограничений следуют абсолютные ограничения и на другие физические величины, например, на дифференциальное сечение при физических s и t .

Авторы благодарны Александру Михайловичу Балдину, чей интерес к рассматриваемым в обзоре проблемам послужил толчком к его написанию.

7. ПРИЛОЖЕНИЕ А

Ограничения снизу и число нулей амплитуды рассеяния. Приведем доказательство того, что у симметричной амплитуды рассеяния может быть не более двух нулей, если $A(\omega, t) > 0$ и $\frac{A(\omega, t)}{\omega^2} \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Мы следуем доказательству в [121]. Ограничение на число нулей амплитуды рассеяния вытекает из того факта, что условие $A(\omega, t) > 0$ означает, что $\max_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 F(\omega, t) \not\rightarrow 0$. Действительно, если $\omega^2 F(\omega, t) \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$, то, согласно теореме Фрагмена–Линделефа, это соотношение выполнено во всей верхней полуплоскости. Рассматривая $\int_C \omega' F(\omega', t) d\omega'$, где контур C состоит из отрезка $(-R, R)$ и полуокружности в верхней полуплоскости, видим, что условие $\omega^2 F(\omega, t) \rightarrow 0$ эквивалентно $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\omega_0}^R A(\omega', t) \omega' d\omega' = 0$,

т.е. условию $A(\omega, t) = 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Если $F(\omega, t)$ имеет нули в действительных точках α и β , то, согласно условию кроссинг-симметрии, она имеет нули также и в точках $-\alpha$ и $-\beta$, т.е. $F(\omega, t) = (\omega^2 - \alpha^2)(\omega^2 - \beta^2)\varphi(\omega, t)$. Поскольку $A(\omega, t) > 0$, то и

$\operatorname{Im} \varphi(\omega, t) > 0$ и, следовательно, $\max \varphi(\omega, t) \omega^2 \not\rightarrow 0$, в противоречии с условием $\frac{F(\omega, t)}{\omega^2} \rightarrow 0$.

Доказательство тривиальным образом распространяется на тот случай, когда $F(\omega, t)$ имеет мнимые нули или комбинацию действительных и мнимых нулей. Отметим, что вследствие условия действительности у $F(\omega, t)$ не может быть менее двух нулей. Существование комплексных нулей запрещено, так как, вследствие действительности и кроссинг-симметрии, их число должно быть не меньше четырех. Далее, если $F(\omega, t) = (\omega^2 \pm \alpha^2) \varphi(\omega, t)$, то $\varphi(\omega_0, t) > 0$ (см. доказательство формулы (2.27)). Это означает, что $F(\omega, t)$ не имеет нулей, если $F(\omega, t_0) < 0$. Если $F(\omega_0, t) > 0$, то у амплитуды есть два нуля или нет ни одного. Отметим, что в последнем случае сама $F(\omega, t)$ удовлетворяет соотношению, аналогичному (2.30), из анализа которого легко получить, что вследствие (2.26) $|F(\omega, t)| < C$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Для доказательства того, что аналогично также $\max F_{\pm}(\omega, t) \omega^2 \not\rightarrow 0$, достаточно в рассматриваемом интеграле заменить $F(\omega, t)$ на $F_{\pm}(\omega, t)$. С помощью проведенных рассуждений легко исключить возможность существования у $F_{\pm}(\omega, t)$ трех и более нулей. Следовательно, у $F_{\pm}(\omega, t)$ есть один действительный ноль в том случае, когда $F_{+}(\omega_0, t)$ и $F_{-}(\omega_0, t)$ имеют разные знаки. Если же $F_{+}(\omega_0, t)$ и $F_{-}(\omega_0, t)$ имеют один и тот же знак, то существование нулей зависит от того, какой это знак. Так же, как и в симметричном случае, если $F_{\pm}(\omega_0, t) < 0$, то у них нет нулей. Если $F_{\pm}(\omega_0, t) > 0$, то возможно как существование двух нулей у $F_{\pm}(\omega, t)$, так и их отсутствие. Из соотношения (2.5) легко заключить, что у $F(\omega, t)$ нет мнимых нулей, если $F(0, t) \leq 0$. Аналогично, если $F_{\pm}(0, t) \leq 0$, то у $F_{\pm}(\omega, t)$ нет мнимых нулей.

Ограничения снизу важны для доказательства ЛДС, поскольку благодаря им $\ln F(\omega, t)$, или $\ln \varphi(\omega, t)$ в случае существования нулей у $F(\omega, t)$ удовлетворяет условию (2.4').

В заключение заметим, что для ряда процессов, например, πN -рассеяния, использование экспериментальных данных дает возможность получить существенно более сильное ограничение снизу:

$$|F_{\pm}(\omega, t)| > C, \quad \omega \rightarrow \infty,$$

где

$$C = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^R \frac{A(\omega', t) d\omega'}{\omega'} - F(0, t), \quad R - \text{любое.}$$

Доказательство проводится от противного. Заметим, что если $|F_{\pm}(\omega, t)| < C$, $\omega \rightarrow \infty$, то согласно теореме Фрагмена–Линделефа $|F_{\pm}(\omega, t)| < C$ всюду в верхней полуплоскости. Осталось рассмотреть $\int_C \frac{F_{\pm}(\omega, t) d\omega}{\omega}$, где контур C

состоит из отрезков $(-R, -\varepsilon)$, (ε, R) и двух полуокружностей с центром в начале координат с радиусами ε и R соответственно. Требуемое неравенство непосредственно следует из оценки интеграла по полуокружности радиуса R . Оно нетривиально, если из эксперимента следует существование R такого, что $C > 0$.

Это неравенство демонстрирует неочевидную связь строгих асимптотических оценок снизу с поведением амплитуды рассеяния при конечных энергиях.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Уравнение для $\tilde{u}_\alpha$ при произвольном α . Найдем уравнения для $\tilde{u}_\alpha$ в случае, когда $\alpha \notin \mathbb{N}$. Для этого заметим, что условие $P \int_1^\mu \frac{y^\alpha dy}{\tilde{u}_\alpha - y} = 0$, очевидно, есть условие

$$\int_1^{\tilde{u}_\alpha - \varepsilon} \frac{y^\alpha dy}{\tilde{u}_\alpha - y} = \int_{\tilde{u}_\alpha + \varepsilon}^\mu \frac{y^\alpha dy}{\tilde{u}_\alpha - y}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (\text{Б.1})$$

Интегралы легко вычислить, заменяя $(\tilde{u}_\alpha - y)^{-1}$ рядами по $y/\tilde{u}_\alpha$ и $\tilde{u}_\alpha/y$ соответственно. В результате элементарных выкладок приходим к уравнению

$$\begin{aligned} (2\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n - \alpha)(n + \alpha + 1)} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n - \alpha} \left(\frac{\tilde{u}_\alpha}{\mu} \right)^{n - \alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{u}_\alpha^{n+1}(n + \alpha)}. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Отметим, что

$$(2\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n - \alpha)(n + \alpha + 1)} = \psi(\alpha + 1) - \psi(\alpha),$$

где $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogoliubov N.N. Lecture at Intern. Congress on Theoretical Physics, Seattle, 1956 (unpublished).
2. Gell-Mann M., Goldberger M.L., Thirring W.E. // Phys. Rev. 1954. V.95. P.1612.

3. *Goldberger M.L.* // Phys. Rev. 1955. V.99. P.979.
4. *Goldberger M.L., Miyazawa H., Oehme R.* // Phys. Rev. 1955. V.99. P.986.
5. *Oehme R.* // Phys. Rev. 1955. V.100. P.1503; 1956. V.102. P.1174.
6. *Goldberger M.L., Nambu Y., Oehme R.* // Ann. Phys. (New York). 1956. V.2. P.226.
7. *Oehme R.* // Nuovo Cim. 1958. V.10. P.1316.
8. *Symanzik K.* // Phys. Rev. 1957. V.105. P.743.
9. *Bremermann H.J., Oehme R., Taylor J.G.* // Phys. Rev. 1958. V.109. P.2178.
10. *Lehmann H.* // Nuovo Cim. 1958. V.10. P.579.
11. *Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958.
12. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* // Докл. Акад. Наук СССР. 1957. Т.113. С.529.
13. *Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., Soloviev L.D.* // Nucl. Phys. 1957. V.4. P.427.
14. *Logunov A.A., Tavkhelidze A.N.* // Nuovo Cim. 1958. V.10. P.943.
15. *Logunov A.A., Soloviev L.D.* // Nucl. Phys. 1959. V.10. P.60.
16. *Logunov A.A., Bilenkij S.M., Tavkhelidze A.N.* // Nuovo Cim. 1958. V.10. P.953.
17. *Okubo S.* // Prog. Theor. Phys. 1958. V.19. P.43.
18. *Поливанов М.К.* // Докл. Акад. наук СССР. 1958. Т.118. С.679.
19. *Chew G. et al.* // Phys. Rev. 1957. V.106. P.1337.
20. *Jin Y.S.* // Nuovo Cim. 1959. V.12. P.445.
21. *Todorov I.T.* // Acta Phys. Hung. 1960. V.19. P.199.
22. *Goldberger M.L., Treiman S.B.* // Phys. Rev. 1958. V.110. P.1178.
23. *Todorov I.T., Khrustalev O.A.* // Nucl. Phys. 1959. V.13. P.675.
24. *Логунов А.А.* // Докл. Акад. наук СССР. 1958. Т.120. С.501.
25. *Логунов А.А. и др.* // ТМФ. 1977. Т.33. С.149.
26. *Логунов А.А. и др.* // ТМФ. 1979. Т.40. С.179.
27. *Медведев Б.В. и др.* // ТМФ. 1982. Т.52. С.163.
28. *Hepp K.* // Helv. Phys. Acta. 1964. V.37. P.639.
29. *Bros J., Epstein H., Glaser V.* // Nuovo Cim. 1964. V.31. P.1264; Comm. Math. Phys. 1965. V.1. P.240.
30. *Oehme R.* // Mod. Phys. Lett. 1993. V.13. P.1533; πN -Newsletter. 1992. V.7. P.1.
31. *Martin A.* // Nuovo Cim. 1966. V.42. P.930.
32. *Sommer G.* // Nuovo Cim. 1967. V.52. P.373; 1967. V.52. P.850.
33. *Bessis J.D., Glaser V.* // Nuovo Cim. A. 1967. V.50. P.568.
34. *Померанчук И.Я.* // ЖЭТФ. 1958. Т.34. С.725.
35. *Sugawara M., Kanazawa A.* // Phys. Rev. 1961. V.123. P.1995.
36. *Weinberg S.* // Phys. Rev. 1961. V.124. P.2049.
37. *Мейман Н.Н.* // ЖЭТФ. 1962. Т.43. С.2277; 1975. Т.68. С.791.
38. *Amati D., Fierz M., Glaser V.* // Phys. Rev. Lett. 1960. V.4. P.89.

39. *Martin A.* // Nuovo Cim. 1965. V.39. P.704.
40. *Eden R.J.* // Phys. Rev. Lett. 1966. V.16. P.39.
41. *Wit R.* // Acta Phys. Slov. 1973. V.23. P.203.
42. *Волков Г.Г., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* // ТМФ. 1970. Т.4. С.196.
43. *Roy S.M., Singh V.* // Phys. Lett. B. 1970. V.32. P.50.
44. *Вернов Ю.С., Мнацаканова М.Н.* // ТМФ. 1978. Т.34. С.153.
45. *Truong T.N., Lam W.S.* // Phys. Rev. D. 1972. V.6. P.2875.
46. *Ломсадзе Ю.М., Аграновский Б.А.* // ЯФ. 1979. Т.30. С.754.
47. *Fischer J., Kolář P.* // Phys. Rev. D. 1978. V.17. P.2168;
Fischer J. et al. // Phys. Rev. D. 1976. V.13. P.133.
48. *Cornille H., Martin A.* // Phys. Lett. B. 1972. V.40. P.671; Nucl. Phys. B. 1972. V.49. P.413.
49. *Logunov A.A. et al.* // Phys. Lett. 1963. V.7. P.69; 252;
Логунов А.А. и др. // ЖЭТФ. 1964. Т.46. С.1079;
Логунов А.А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И.Т. // УФН. 1966. Т.88. С.51.
50. *Мейман Н.Н.* // ЖЭТФ. 1964. Т.46. С.1039.
51. *van Hove L.* // Phys. Lett. 1964. V.3. P.63.
52. *Kinoshita T.* // Phys. Rev. D. 1970. V.2. P.2346.
53. *Вернов Ю.С.* // ТМФ. 1970. Т.4. С.3.
54. *Khuri N.N., Kinoshita T.* // Phys. Rev. B. 1965. V.137. P.720; Phys. Rev. B. 1965. V.140. P.706.
55. *Wit R.* // Phys. Lett. 1965. V.15. P.350; Jagellonian University, TPJU-20/65 Cracow, Poland.
56. *Вернов Ю.С.* // ЖЭТФ. 1966. Т.50. С.672; 1967. Т.53. С.191; Тр. ФИАН им. Лебедева. 1971. Т.53. С.102.
57. *Jin Y.S., McDowell S.W.* // Phys. Rev. B. 1965. V.138. P.1279.
58. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Хрусталева О.А.* // ТМФ. 1971. Т.9. С.153; ЭЧАЯ. 1972. Т.3. P.3; 515.
59. *Truong Tran N., Lam W.S.* // Phys. Rev. D. 1972. V.6. P.2875;
Grunberg G., Truong Tran N. // Phys. Rev. D. 1974. V.9. P.2874; Phys. Rev. Lett. 1973. V.31. P.63.
60. *Вернов Ю.С.* // ЭЧАЯ. 1975. Т.6. С.601.
61. *Jin Y.S., Martin A.* // Phys. Rev. B. 1964. V.135. P.1369.
62. *Odorico R.* // Nuovo Cim. A. 1968. V.54. P.96.
63. *McClure J.A., Jorna S.* // Nuovo Cim. A. 1970. V.67. P.667.
64. *Froissart M.* // Phys. Rev. 1961. V.123. P.1053.
65. *Martin A.* // Phys. Rev. 1963. V.129. P.1432.
66. *Singh V., Roy S.M.* // Ann. of Phys. 1970. V.57. P.461.
67. *Einhorn M., Blankenbecler R.* // Ann. of Phys. 1971. V.67. P.480.
68. *Martin A.* // High-Energy Physics and Elementary Particles. Vienna, 1965. P.165.
69. *Lukashuk L., Martin A.* // Nuovo Cim. A. 1967. V.52. P.122.
70. *Bonnier B., Vinh-Mau R.* // Phys. Rev. 1968. V.165. P.1923.

71. Healy J.B. // Phys. Rev. D. 1973. V.8. P.1904.
72. Auberson G. et al. // Nucl. Phys. B. 1974. V.73. P.314; 1975. V.94. P.311.
73. Lopez C. // Nucl. Phys. B. 1975. V.88. P.358; Nuovo Cim. Lett. 1975. V.13. P.69.
74. Lopez C., Mennessier G. // Nucl. Phys. B. 1975. V.96. P.515; 1977. V.118. P.426.
75. Mnatsakanova M.N., Vernov Yu.S. // Proc. of the XI Workshop on HEP&QFT. Moscow, 1997. P.385; Proc. of the X Intern. Seminar «Quarks-98», Moscow, 1999. V.1. P.238.
76. Ynduráin F.J. // Phys. Lett. B. 1970. V.31. P.368.
77. Common A.K. // Nuovo Cim. A. 1970. V.69. P.115.
78. Common A.K., Ynduráin F.J. // Nucl. Phys. B. 1971. V.26. P.167.
79. Blankenbecler R., Savit R. // Phys. Rev. D. 1972. V.5. P.2757.
80. Grassberger P., Kühnelt H. // Nucl. Phys. B. 1972. V.53. P.125;
Grassberger P., Schwela D., Kühnelt H. // Nucl. Phys. B. 1973. V.57. P.317.
81. Вернов Ю.С., Мнацаканова М.Н. // ТМФ. 1982. Т.52. С.199.
82. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., Soloviev L.D. // Nucl. Phys. 1957. V.4. P.427.
83. Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I. // Nucl. Phys. B. 1979. V.147. P.388; 448; 519.
84. Кузьмин В.А., Тавхелидзе А.Н., Четыркин К.Г. // Письма в ЖЭТФ. 1977. Т.25. С.456.
85. Kuzmin V.A. // Proc. of the Intern. Conf. on High Energy Physics. Tbilisi, 1976. P.108.
86. Chetyrkin K.G., Krasnikov N.V., Tavkhelidze A.N. // Phys. Lett. B. 1978. V.76. P.83.
87. Krasnikov N.V., Pivovarov A.A., Tavkhelidze A.N. Preprint CERN TH-3422. Geneva, 1982.
88. Ignatiev A.Yu. et al. // Proc. of the Intern. Seminar «Quarks-82». Sukhumi, 1982. P.28.
89. Voloshin M.B. // Nucl. Phys. B. 1979. V.154. P.365.
90. Bertlmann R.A., Launer G., de Rafael E. // Nucl. Phys. B. 1985. V.250. P.61.
91. Narison S., de Rafael E. Preprint CPT 81/p 1287. 1981.
92. Reinders L.J. et al. // Phys. Rep. 1985. V.127. P.1.
93. Vernov Yu.S. // Proc. of the Conf. «Hadron Structure-83». Smolenice, 1983. P.523.
94. Fischer J., Kolář P. Preprint BUTP-86/10. 1986.
95. Mnatsakanova M.N., Vernov Yu.S. // Proc. of the Intern. Seminar «Quarks-88». Tbilisi, 1988. P.201.
96. Jenkovszky L.L., Struminski B.V. // Proc. of the VI Seminar on Problems of High Energy Physics and Quantum Field Theory. Protvino, 1983. V.2. P.127.
97. Мнацаканова М.Н. // ТМФ. 1973. Т.14. С.192.
98. Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N. // Czech. J. Phys. B. 1976. V.26. P.105.
99. Lomsadze Yu.M., Lomsadze Sh.Yu. Proc. of the III Seminar on Problems of High Energy Physics and Quantum Field Theory. Protvino, 1980. V.1. P.73.
100. Bronzan J.B. // Argonne Nat. Lab. Report. 1973. №ANL/HEP 7327;
Bronzan J.B., Kane G.L., Sukhatme H.P. // Phys. Lett. B. 1974. V.49. P.272.
101. Eichman G.K., Dronhersh Y. // Phys. Lett. B. 1974. V.52. P.428.
102. Heidrich J., Kares E. // Lett. al. Nuovo Cim. 1975. V.12. P.365.
103. Fischer J., Kolář P. // J. Math. Phys. 1984. V.25. P.2538; Czech. J. Phys. B. 1987. V.37. P.297.

104. *Menon M.J., Motter A.E., Pimentel B.M.* // Phys. Lett. B. 1999. V.451. P.207;
Martini A.F. et al. Preprint Unicamp, IFGW ABSTRACTA A 008-9. 1999.
105. *Fischer J., Kolář P.* // Phys. Lett. B. 1976. V.64. P.45.
106. *Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N.* // Proc. of the XII Intern. Seminar on High Energy Physics and Quantum Field Theory, Protvino. M., 1990. P.259.
107. *Лозунов А.А., Мествиришвили М.А., Петров В.А.* // Общие принципы квантовой теории поля и их следствия. / Под ред. В.А.Мещерякова. М., 1977. С.183.
108. *Bum P.* // ЖЭТФ. 1965. Т.49. С.538.
109. *Valin P.* // Phys. Rep. 1991. V.203. P.233.
110. *Fischer J.* // Phys. Rep. 1981. V.76. P.157.
111. *Roy S.M.* // Physics Reports. 1972. V.5C. P.125.
112. *Вернов Ю.С., Чубаров М.С.* // ТМФ. 1989. Т.79. С.416.
113. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
114. *Вернов Ю.С., Мнацаканова М.Н., Чубаров М.С.* // ТМФ. 1984. Т.59. С.233.
115. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
116. *Martin A.* // Phys. Lett. B. 1997. V.404. P.137.
117. *Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N.* // Proc. of the XIII Intern. Seminar on High Energy Physics and Quantum Field Theory, Protvino. M., 1991. P.205.
118. *Martin A.* // Nuovo Cim. 1963. V.29. P.993.
119. *Chubarov M.S., Mnatsakanova M.N., Vernov Yu.S.* // Acta Physica Polonica B. 1982. V.13. P.428.
120. *Kinoshita T., Loeffel J.J., Martin A.* // Phys. Rev. B. 1964. V.135. P.1464.
121. *Вернов Ю.С.* // ТМФ. 1973. Т.17. С.199.

УДК 530.1;075.8

НОВЫЙ ПОДХОД К СООТНОШЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ*

А.Д. Суханов

Российский университет дружбы народов, Москва

Рассматриваются неклассические физические теории, в которых учитываются неконтролируемые (квантовое и/или тепловое) воздействия, приводящие к флуктуациям физических характеристик. Сформулирована концепция универсальности соотношений неопределенности (СН), согласно которой произведение флуктуаций сопряженных величин связано с их обобщенным коррелятором, учитывающим корреляции двух различных типов. Показано, что указанной концепции удовлетворяют СН Шредингера, частными реализациями которых являются СН Гейзенберга в традиционной квантовой динамике и СН Эйнштейна в статистической термодинамике и теории броуновского движения. Сделан существенный шаг в исследовании СН энергия–время. На основе СН Шредингера предложено обобщение понятия «неопределенность времени» Мандельштама–Тамма, которое обладает свойством однозначности и не приводит к сингулярностям. На этой основе введено обобщенное СН энергия–время и определена эффективная частота как универсальная временная характеристика открытой микросистемы в целом, заданная макроскопическими внешними условиями. Эффективность предложенного обобщения СН энергия–время продемонстрирована на типичных моделях финитного и инфинитного движений в микромире. Показано, что в случае когерентных состояний эффективная частота микросистемы флуктуирует, что позволяет перейти от обобщенного СН энергия–время к эквивалентному СН энергия–обратная эффективная частота. Установлено, что характер корреляции флуктуаций в этом СН совпадает с принятым в статистической термодинамике, но качественно отличается от корреляции флуктуаций в СН Гейзенберга. Полученные результаты открывают перспективы дальнейшего использования универсальных СН Шредингера в целостной теории неклассической физики.

Non-classical physical theories are considered, where non-controllable (quantum and/or thermal) influences are taken into account. These influences lead to the fluctuations of the physical characteristics of the object and its state. The conception of the uncertainties relations (UR) universality is formulated, according to which the product of conjugated physical quantities fluctuations is related with their generalized correlator. This correlator accounts for the correlation of two different types. It is shown this conception is satisfied with the UR in the Schroedinger's form. UR in the Heisenberg's form in the traditional quantum dynamics and UR in the Einstein's form in the statistical thermodynamics and Brownian motion theory are the specific realizations of these UR. The significant progress in the investigation of the UR energy–time is achieved. On the grounds of the Schroedinger's UR the generalization of the concept «uncertainty of the time», introduced by Mandelstam and Tamm, is suggested. The generalized version of this concept is unambiguity and doesn't lead to singularities. Starting from this concept the generalized UR energy–time is introduced and some effective frequency is determined. This frequency serves as the universal time characteristic for the open microsystem as

*Расширенный вариант доклада на Боголюбовской конференции «Проблемы теоретической и математической физики» (Дубна, ОИЯИ, сентябрь 1999 г.).

a whole and is determined by macroscopic external conditions. The effectiveness of the suggested generalization UR energy–time is demonstrated on the typical models of finite and infinite motions in the microworld. It is shown in the case of coherent quantum states the effective frequency of the microsystem fluctuates. This allows to accomplish the transition from the generalized UR energy–time to the equivalent UR energy–inverse effective frequency. It is stated the nature of the fluctuation correlation in this type of UR coincide with the one accepted in the statistical thermodynamics, but qualitatively differs with the correspondent quantity if the UR in the Heisenberg’s form are used. The results so far obtained open good perspectives for further exploitation of the universal UR in the Shroedinger’s form by the construction of the unified theory of non-classical physics as a whole.

*Светлой памяти
Бориса Валентиновича Медведева
посвящается*

ВВЕДЕНИЕ. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ СЕМЬДЕСЯТ ЛЕТ СПУСТЯ

Понятие «соотношение неопределенностей» (СН) вошло в язык науки после того, как Гейзенберг [1] впервые написал в 1927 г. СН координата–импульс

$$\delta q \delta p \gtrsim \hbar. \quad (1)$$

Общепринято считать, что это понятие — важнейший элемент математического и концептуального аппарата квантовой динамики [2]. Как известно, в течение длительного времени его физическая и методологическая интерпретации находились в центре дискуссии ведущих ученых. Сегодня, более семидесяти лет спустя после опубликования формулы (1) и выдвижения Бором принципа дополнительности [3], появилась возможность подвести некоторые итоги этой дискуссии, взглянув на данную проблему по-новому.

Во-первых, за эти годы в рамках квантовой динамики появились многочисленные обобщения СН (1), большая часть которых была подробно проанализирована в обзоре [4]. В нем в центре внимания находятся математические вопросы, связанные с возможностью обобщения СН и приложениями к практическим задачам, в которых используются популярные ныне когерентные, коррелированные, сжатые и т.п. состояния. В то же время вопросам физической интерпретации полученных обобщений уделено недостаточное внимание.

Во-вторых, на протяжении многих лет ряд ученых (см., например, [5]) ставили своей целью вообще обойти принципиальные проблемы, связанные с СН (1), с тем чтобы низвести квантовую динамику до уровня тривиальной статистической теории. Сторонники этого направления стремились доказать, что в квантовой динамике отсутствуют характерные черты, присущие всякой

динамической теории. Несмотря на остроту дискуссии и глубину аргументов, сегодня это направление не пользуется популярностью у большинства физиков. Более того, в конечном итоге в рамках концепции ансамблей [6, 7] сформировался подход [8–10], позволяющий трактовать единообразно и квантовую, и классическую динамику.

С этой точки зрения обе теории можно считать одинаково «статистическими», так что предмет дискуссии, по существу, исчез. Состояния классической динамики имеют вид дельта-функций, так что по отношению к состояниям квантовой динамики они являются вырожденными. Последнее проявляется в том, что физические величины в этих состояниях не испытывают флуктуаций.

В-третьих, развитие теории вероятностей привело к тому, что математический аппарат квантовой динамики, в том числе СН, удалось включить в ее рамки [11, 12] как специфическую статистическую модель. В то же время при интерпретации этих результатов все внимание было сосредоточено на специфике квантовой динамики, связанной с отличием ее статистической модели от традиционных моделей классической теории вероятностей, а наличие общих черт у таких моделей оказалось в тени.

В-четвертых, за последние пятьдесят лет был исследован ряд физических явлений [13–15] (эффекты Казимира, Хокинга, Унру), в которых квантово-динамическое и термодинамическое описания приводят к одинаковым результатам. Эти факты можно трактовать как косвенное указание на возможность существования СН не только в квантовой динамике, но и вне ее. Более того, СН типа (1) в теории броуновского движения известно с 1933 г. [16, 17]. До сих пор большинство физиков относилось к нему не более как к курьезу [18], и серьезный интерес к СН в статистической термодинамике появился лишь недавно [19].

В-пятых, существует проблема незавершенности квантовой динамики, связанная с отсутствием последовательной теории измерений. Многие исследователи (см., например, [20]) считают, что решение этой проблемы требует выхода за рамки традиционной квантовой динамики и использования в этих целях идей термодинамики и теории информации. Существует мнение, что для этого может потребоваться обобщение и самой термодинамики [21].

Наконец, в-шестых, и это самое главное. К концу XX века выкристаллизовался новый взгляд на структуру физики в целом. Он опирается на современные методологические представления о стратегиях естественно-научного мышления [22, 23]. Согласно этому взгляду [24, 25] деление физики в целом на классическую и современную (или неклассическую) физику целесообразно производить вовсе не по хронологическому признаку. Предлагается исходить из того, существенно ли в данном разделе физики неконтролируемое и неустранимое воздействие на материальные объекты со стороны внешнего окружения, включающего и самого исследователя.

С нашей точки зрения, к неклассической физике следовало бы относить любую физическую теорию, учитывающую неконтролируемое воздействие и вызываемые им флуктуации физических характеристик как самих материальных объектов, так и их состояний [26]. К таким теориям, наряду с квантовой динамикой, следует, безусловно, отнести и равновесную статистическую термодинамику, поскольку о неустранимости неконтролируемого (теплового) воздействия в ней хорошо известно со времени опубликования работ Эйнштейна и Смолуховского по броуновскому движению [27]. В связи с этим вопрос о нахождении универсальных СН, которые были бы применимы не только в квантовой динамике, но и во всей неклассической физике, приобретает сегодня принципиальное значение [28].

Что же препятствовало до сих пор установлению универсального характера СН и их распространению из квантовой динамики на другие теории неклассической физики? Все дело в том, что изначально было принято считать, что СН типа (1) — это специфическая особенность квантовой динамики, воплощающая в себе так называемый «корпускулярно-волновой дуализм» и жестко привязанная к математическому аппарату преобразований Фурье. Довольно скоро, однако, стало ясно, что в квантовой динамике СН связывают многие пары физических характеристик, которым сопоставляются некоммутирующие эрмитовские операторы [4]. Как заметил Вигнер, это означает, что «этот последний дуализм есть только часть более общего плюрализма».

Сегодня можно утверждать, что это обстоятельство в концентрированном виде отражает фундаментальный факт наличия в природе двух качественно различных, но равноправных и неразрывных сторон физической реальности, воплощенных в физических характеристиках объектов и их состояний. При наличии неконтролируемого (либо квантового, либо теплового) воздействия окружения физические характеристики в произвольном микросостоянии можно описывать лишь средними значениями и отклонениями от них (флуктуациями). Флуктуации характеристик объектов и их состояний не являются независимыми друг от друга. Они связаны между собой соответствующими СН, отражающими наличие корреляции между ними.

В свою очередь, традиционно было принято считать, что между квантовой динамикой и равновесной статистической термодинамикой существуют непреодолимые концептуальные различия. Их обычно связывают с тем, что в термодинамике физическим характеристикам или макропараметрам сопоставляются не операторы, а c -числовые функции. Между тем, как следует из воспоминаний Гейзенберга [29], еще в 1930 г. Бор высказывался в пользу возможности сближения исходных положений этих теорий на основе последовательного применения принципа дополнительности. К сожалению, реализация этой идеи несколько затянулась. Последнее обстоятельство, по-видимому, обусловлено как техническими причинами (использование в термодинамике

вместо операторов s -чисел), так и чересчур прямолинейной трактовкой принципа дополнителности.

В свете сказанного выше особое значение приобретает вопрос о СН энергия–время. С одной стороны, подобное СН важно потому, что оно устанавливает взаимосвязи между важнейшими величинами — энергетической и временной характеристиками микросистемы в целом. С другой стороны, сам факт его существования демонстрирует, что и в самой квантовой динамике наличие СН не всегда связано с операторным описанием физических величин. В частности, СН «энергия–время» в форме

$$\delta\varepsilon \delta t \gtrsim \hbar \quad (2)$$

активно используется в различных целях с конца 20-х годов, хотя скольконибудь разумный с физической точки зрения оператор времени пока неизвестен. Тот факт, что оба СН (1) и (2) формально связаны с одним и тем же неконтролируемым воздействием, определяемым постоянной Планка $\hbar$, и в то же время обладают совершенно различным статусом, до сих пор не нашел должного объяснения.

Иными словами, логично исходить из того, что СН (2) интересно не только с прагматической точки зрения. Его анализ мог бы сыграть важную роль в выяснении места СН в неклассической физике в целом, что весьма существенно для дальнейшего обобщения теории [26, 28]. Мы считаем, что подобный анализ следует осуществить с новых позиций, исходя из *концепции универсальности* СН в неклассической физике.

Порядок изложения в обзоре таков. В разд. 1 сформулирована концепция универсальности соотношений неопределенностей, позволяющая применять СН как в квантовой динамике, так и вне ее. В разд. 2, исходя из этой концепции, постулируется обобщенное СН энергия–время и демонстрируется его эффективность. В разд. 3 установлено, что в случае когерентных состояний обобщенное СН энергия–время адекватно СН энергия–обратная эффективная частота. Показано, что его интерпретация аналогична интерпретации СН энергия–обратная температура в статистической термодинамике, но отлична от интерпретации СН Гейзенберга. В заключении приведен ряд соображений о роли СН Шредингера в дальнейшем объединении квантовой динамики и статистической термодинамики в рамках целостной теории неклассической физики.

1. КОНЦЕПЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ СООТНОШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1.1. Прообразы СН в классической физике. В абсолютном большинстве монографий и учебников происхождение СН в квантовой динамике связыва-

ется преимущественно с анализом характеристик классических волн в рамках теории преобразований Фурье (исключение составляет [30]). Отсюда, по-видимому, произошел и сам термин «корпускулярно-волновой дуализм». Имея в виду поиск концепции универсальности СН в неклассической физике, естественно было бы проанализировать возможные прообразы СН еще в рамках классической физики.

Таких прообразов на самом деле не один, как это принято считать, а два — теория преобразований Фурье и классическая теория вероятностей. Согласно теории преобразований Фурье для одной переменной [31], изменения любой финитной функции* $f(t)$ и ее фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ в процессе «сжатия» функции f оказываются взаимосвязанными. Рассмотрим в этой связи семейство функций

$$f_\mu(t) = \sqrt{\mu} f(\mu t), \quad (3)$$

где μ — вещественный параметр. Функцию $f_\mu(t)$ принято называть сжатой относительно $f(t)$, если $\mu > 1$, и растянутой, если $\mu < 1$. Для фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$ из (3) следует, что

$$\tilde{f}_\mu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{\mu}\right), \quad (4)$$

так что функция $\tilde{f}_\mu(\omega)$ при изменении μ ведет себя обратным образом по отношению к $f_\mu(t)$.

При этом следует подчеркнуть, что в классической физике в качестве функции f можно выбрать любую физическую величину, непрерывно зависящую от временного или пространственного аргумента. (Математические ограничения на финитные функции f в физике обычно выполнены.) Тем самым излагаемая здесь теория применима к фурье-анализу не только характеристик колебаний или волн, но и любых непрерывных физических величин.

Для удобства сравнения «ширин» различных функций f целесообразно ввести какую-либо меру. Выбор подобной характеристики для «ширины» достаточно произволен и физически ничем не выделен. Однако, имея в виду необходимость сопоставления в дальнейшем некоторых результатов теории преобразований Фурье и классической теории вероятностей, в качестве достаточно удобных характеристик произвольной финитной функции $f(t)$ можно ввести моменты первого и второго порядков квадрата модуля этой функции:

$$m_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int t |f(t)|^2 dt; \quad (5)$$

*Под финитной функцией здесь понимается функция, практически равная нулю вне ограниченной области [2].

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (t - m_f)^2 |f(t)|^2 dt. \quad (6)$$

Соответственно для характеристик фурье-образа $\tilde{f}(\omega)$, называемого спектром функции $f(t)$, целесообразно также ввести моменты первого и второго порядков

$$m_{\tilde{f}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \omega |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega; \quad (7)$$

$$\sigma_{\tilde{f}}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\omega - m_{\tilde{f}})^2 |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (8)$$

Величины σ_f и $\sigma_{\tilde{f}}$ действительно характеризуют «ширины» функции f и ее спектра $\tilde{f}$. В частности, при переходе от функции $f(t)$ к функции $f_\mu(t)$ согласно (3) величина σ_f^2 заменяется на σ_f^2/μ^2 , а величина $\sigma_{\tilde{f}}^2$ — на $\mu^2\sigma_{\tilde{f}}^2$. Вместе с тем нет никаких оснований называть величины σ_f и $\sigma_{\tilde{f}}$ мерами флуктуаций физических величин, ибо здесь отсутствует случайный выбор, оправдывающий применение классической теории вероятностей. Иначе говоря, функции f и $\tilde{f}$ — это некие однозначно заданные физические величины, зависящие от своих непрерывных аргументов, а вовсе не распределения вероятностей возможных значений этих аргументов, наблюдаемых на опыте. С этой точки зрения величины σ_f^2 и $\sigma_{\tilde{f}}^2$ — это не какие-либо «неопределенности» значений аргументов t или ω , а «размытости» или «ширины» наблюдаемых на опыте вполне определенных функций $f(t)$ и $\tilde{f}(\omega)$.

Именно для этих величин имеет место полезная взаимосвязь, которую иногда некорректно называют СН в классической волновой теории. В общем случае она такова [31]:

$$\sigma_f^2 \sigma_{\tilde{f}}^2 \geq \frac{1}{4} \int dt |f(t)|^2 \equiv \frac{C}{4}. \quad (9)$$

Если, как это обычно удается сделать, функцию f нормировать, положив $C \equiv 1$, то взаимосвязь (9) для линейных величин принимает вид

$$\sigma_f \sigma_{\tilde{f}} \equiv \delta t \delta \omega \geq \frac{1}{2}, \quad (10)$$

где δt и $\delta \omega$ — это просто удобные обозначения «ширин» σ_f и $\sigma_{\tilde{f}}$, учитывающие соображения размерности. Знак равенства в (10) достигается только для функции f , имеющей форму гауссовой кривой. (Аналогичную форму по свойству интеграла Фурье имеет и фурье-образ $\tilde{f}$.)

Итак, в классической физике не только для амплитуды или интенсивности какой-либо волны, но и для любой физической величины f , являющейся

непрерывной финитной функцией своего аргумента, и ее фурье-образа $\tilde{f}$ справедливо неравенство (10), связывающее характерные «ширины» функции f и ее спектра $\tilde{f}$. Его важной особенностью является то, что слева в него входит произведение физических величин — «ширин» функций, тогда как справа стоит число, задаваемое условием нормировки. Как и следовало ожидать, если неконтролируемое воздействие отсутствует, то никаких неопределенностей, по существу, нет, а следовательно, не существует оснований трактовать (10) как некое СН. Поэтому соотношение (10) в классической физике было бы более естественно называть «соотношением ширин» (СШ).

Обычно в качестве прообраза СН в классической физике ограничиваются лишь формулой (10), причем ее применяют не в общем случае, а только тогда, когда f — амплитуда или интенсивность классической волны. Между тем другим независимым прообразом СН в классической физике может служить классическая теория вероятностей в случае применения ее к анализу результатов измерений любых физических величин [32]. Согласно этой теории при измерении некой физической величины A на опыте получается совокупность значений этой величины из некоторого интервала и распределение вероятностей этих значений $\rho(A)$. По этим данным можно вычислить среднее значение искомой величины

$$\bar{A} = \int A \rho(A) dA \quad (11)$$

и среднеквадратичное отклонение (дисперсию)

$$\sigma_A^2 \equiv (\Delta A)^2 = \int (A - \bar{A})^2 \rho(A) dA, \quad (12)$$

где $\rho(A)$ — плотность вероятности, нормированная условием

$$\int \rho(A) dA = 1. \quad (13)$$

Аналогично можно ввести распределение вероятностей $\rho(B)$ физической величины B , ее среднее значение $\bar{B}$ и дисперсию σ_B^2 . Наконец, если производится одновременное измерение двух величин A и B , то результат существенно зависит от того, являются ли эти величины статистически независимыми или нет. В общем случае разброс результатов измерений определяется совместной плотностью вероятности $\rho(A, B)$, нормированной условием

$$\int \rho(A, B) dA dB = 1. \quad (14)$$

Согласно классической теории вероятностей [32] признаком статистической зависимости величин A и B может служить отличие от нуля коррелятора

флуктуаций ΔA и ΔB :

$$\sigma_{AB} \equiv \overline{(\Delta A \Delta B)} = \int (A - \bar{A})(B - \bar{B})\rho(A, B) dA dB = \overline{AB} - \bar{A}\bar{B}, \quad (15)$$

где, например, $\bar{A}$ определяется формулой (11).

Если совместная плотность вероятности удовлетворяет условию статистической независимости

$$\rho(A, B) = \rho(A)\rho(B), \quad (16)$$

то коррелятор σ_{AB} (15) всегда обращается в нуль.

Очевидно, что величины σ_A , σ_B и σ_{AB} , используемые в классической теории вероятностей, являются моментами второго порядка для функции распределения вероятностей. С физической точки зрения они имеют смысл характерных разбросов ΔA и ΔB значений измеряемых величин A и B и коррелятора $(\Delta A \cdot \Delta B)$ этих разбросов. Вследствие неравенства Коши–Буняковского–Шварца между ними существует стандартная взаимосвязь

$$\sigma_A \sigma_B \equiv \Delta A \Delta B \geq \sigma_{AB} = \overline{(\Delta A \Delta B)}, \quad (17)$$

которую можно рассматривать в качестве еще одного прообраза СН в классической физике.

Заметим, однако, что если последовательно придерживаться классической стратегии мышления, то взаимосвязь вида (17) между дисперсиями и коррелятором в классической физике появляется только на промежуточном этапе, когда разбросы в значениях величин A и B и корреляция этих разбросов зависят от недостаточного мастерства экспериментатора или наличия контролируемых внешних помех. Принято считать, что в идеале эти причины появления разброса значений при измерениях физических величин в классической физике можно устранить, ибо предполагается, что неконтролируемое внешнее воздействие в данном случае отсутствует. Тем самым, во-первых, должно выполняться условие статистической независимости (16), что приводит к обращению в нуль коррелятора σ_{AB} в правой части (17). Во-вторых, каждая из дисперсий σ_A и σ_B в левой части (17) независимо также может обратиться в нуль. Это и означает, что в классической физике имеются лишь прообразы СН, но сами СН отсутствуют.

1.2. Универсальные СН Шредингера в неклассической физике. Установление СН в квантовой динамике можно было бы начать, опираясь на формулы либо (9), либо (17), известные из классической физики. Однако исторически это произошло путем трансформации и переинтерпретации только формулы (9). Формула (17), как возможный прообраз СН, изначально востребована не была. Следствием этого явилась неуниверсальность СН, введенных Гейзенбергом.

Для подтверждения этого тезиса обратимся к интуитивному обоснованию вывода простейшего СН координата–импульс. С этой целью в качестве функции f достаточно выбрать «классическую волновую функцию» $\psi_{\text{кл}}(q)$, распространяющуюся вдоль оси q (при $t = \text{const}$). Тогда согласно (9) «ширины» $\sigma_{\psi_{\text{кл}}}$ и $\sigma_{\tilde{\psi}_{\text{кл}}}$ функции $\psi_{\text{кл}}(q)$ и ее спектра $\tilde{\psi}_{\text{кл}}(k)$ связаны соотношением

$$\sigma_{\psi_{\text{кл}}} \sigma_{\tilde{\psi}_{\text{кл}}} \equiv \delta q \delta k \geq \gamma. \quad (18)$$

Здесь по соображениям размерности δq и δk — интервалы изменения аргументов q и k функций $\psi_{\text{кл}}$ и $\tilde{\psi}_{\text{кл}}$ соответственно, k — волновое число, а γ — постоянная, значение которой зависит от определения «ширин» функций $\psi_{\text{кл}}$ и $\tilde{\psi}_{\text{кл}}$ и от их нормировки. В частности, в классической теории дифракции за «ширину» $\delta\psi_{\text{кл}} \equiv \delta q$ функции $\psi_{\text{кл}}(q)$ часто выбирают расстояние между первыми минимумами дифракционной картины, что соответствует выбору $\gamma = 2\pi$.

Дальнейший ход рассуждений довольно прост. В квантовой динамике микрочастице при одномерном движении сопоставляется квантовая волновая функция $\psi_{\text{кв}}(q)$ (при $t = \text{const}$). Все соображения, изложенные в п.1.1, вполне относятся и к ней, так что соотношение (18) справедливо и в этом случае. При этом смысл величин, входящих в левую часть (18), как неких «ширин» функций $\psi_{\text{кв}}$ и $\tilde{\psi}_{\text{кв}}$ сохраняется.

Если далее воспользоваться формулой де Бройля $p = \hbar k$ и просто домножить неравенство (18) на постоянную Планка $\hbar$, то полученное соотношение

$$\delta q \delta p \gtrsim \gamma \hbar \quad (19)$$

станет внешне похожим на СН Гейзенберга (1). Однако физический смысл (19) как соотношения «ширин» останется прежним, т.е., по существу, классическим.

Решающий шаг, позволяющий прийти к нетривиальным СН в квантовой динамике, связан с осознанием того, что волновая функция $\psi_{\text{кв}}$ в отличие от $\psi_{\text{кл}}$ имеет смысл комплексной амплитуды вероятности. Это позволяет переинтерпретировать величины в левой части (18) и связать их с теорией измерений соответствующих характеристик микрочастиц и их состояний.

С этой целью наблюдаемым q и p сопоставляются эрмитовские операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$, после чего по определенным правилам вычисляются их средние значения $\bar{q}$ и $\bar{p}$ и средние квадратичные отклонения от этих значений (дисперсии) Δq и Δp . Если теперь в левой части (19) вместо δq и δp подставить дисперсии Δq и Δp , то оно превратится в СН Гейзенберга вида

$$\Delta q \Delta p \gtrsim \gamma \hbar, \quad (20)$$

в котором осталось только уточнить постоянную γ .

Это означает, что в случае волновой функции $\psi_{\text{кв}}(q)$ «ширинам» σ_f и $\sigma_{\hat{f}}$, типичным для фурье-анализа, удастся придать смысл среднеквадратичных флуктуаций ΔA и ΔB , используемых в классической теории вероятностей. С учетом условия нормировки минимальное значение γ , достигаемое для гауссова волнового пакета, равно $1/2$, так что окончательно СН Гейзенберга координата–импульс принимает вид

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (21)$$

Если сравнить эту формулу с классическими соотношениями (9) и (17), то нетрудно видеть, что, начав с формулы (9) из фурье-анализа, мы пришли к тому, что левая часть СН (21) совпадает с левой частью формулы (17) из классической теории вероятностей. В то же время правая часть СН (21) скорее похожа на правую часть формулы (9) из фурье-анализа.

Проведенное обсуждение показывает, что подход к выводу СН в квантовой динамике только на основе результатов фурье-анализа фактически является непоследовательным. На этом пути остается открытым вопрос, насколько является общим и универсальным выражение, стоящее в правой части СН (21).

Ответ на него был получен в ходе распространения понятия СН на другие наблюдаемые микрочастиц [33, 4]. В результате СН (21) было обобщено на любые наблюдаемые A и B , которым сопоставляются эрмитовы операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Оно приняло вид

$$\Delta B \Delta A \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \equiv c_{AB}. \quad (22)$$

Здесь ΔB и ΔA — среднеквадратичные отклонения величин B и A в данном состоянии, а c_{AB} — половина среднего модуля коммутатора этих операторов, отражающая своеобразную корреляцию между флуктуациями наблюдаемых B и A . В частном случае, когда $\hat{B} = \hat{q}$ и $\hat{A} = \hat{p}$, правая часть (21) равна

$$c_{pq} = \frac{1}{2} |\langle [\hat{p}, \hat{q}] \rangle| = \frac{\hbar}{2}. \quad (23)$$

Формулу (22) принято называть *соотношением неопределенностей Гейзенберга* для произвольных наблюдаемых. Входящие в него слева и справа величины, в отличие от величин в формуле (1), имеют строгий математический смысл. Общепринятая физическая трактовка СН (22) соответствует, как известно, традиционной интерпретации квантовой динамики [2].

Однако нетрудно видеть, что СН Гейзенберга (22), хотя и устанавливают некую корреляцию между флуктуациями наблюдаемых B и A , вряд ли являются универсальными. В них вклад коммутатора c_{AB} обращается в нуль не

только тогда, когда хотя бы одной из наблюдаемых сопоставляется c -число. То же самое имеет место в состояниях, в которых при $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ среднее от коммутатора обращается в нуль. В то же время теория измерений, основанная на классической теории вероятностей, демонстрирует возможность корреляции между флуктуациями и тем самым существования своеобразного СН вида (17) даже для c -числовых физических величин, связанных какой-либо статистической зависимостью.

Учитывая продолжающееся становление единого неклассического взгляда на природу и наличие общих черт в СН (22) и (17), мы выдвигаем *концепцию универсальности* соотношений неопределенностей в неклассической физике. Согласно этой концепции в произвольном состоянии системы пары взаимозависимых физических характеристик A и B определяются лишь с точностью до флуктуаций, ограниченных обобщенными корреляциями между этими флуктуациями. Последние отражают наличие того или иного неконтролируемого воздействия на систему со стороны окружения. Универсальность СН означает, что они в равной мере возникают в любой теории неклассической физики, независимо от того, описываются ли входящие в них величины операторами или c -числами. Различие между этими случаями может быть связано только с тем, какого типа корреляции определяют правую часть соответствующих СН.

Как мы сейчас покажем, указанной концепции полностью удовлетворяют *обобщенные СН Шредингера* [34], полученные им еще в 1930 г. С современной точки зрения это обобщение СН Гейзенберга (22) выглядит совершенно естественным, являясь реализацией в наиболее общей форме неравенства Коши–Буняковского–Шварца («неравенства треугольника», ведущего происхождения от теоремы Пифагора).

Простейшим примером такого неравенства может служить соотношение между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ трехмерного евклидова пространства:

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \leq (\mathbf{ab})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \varphi. \quad (24)$$

В квантовой динамике аналогичное неравенство [35]

$$\langle A|A \rangle \langle B|B \rangle \geq |\langle A|B \rangle|^2 \equiv (\operatorname{Re} \langle A|B \rangle)^2 + (\operatorname{Im} \langle A|B \rangle)^2 \quad (25)$$

связывает произвольные векторы гильбертова пространства $|A\rangle = \hat{A}|\rangle$ и $|B\rangle = \hat{B}|\rangle$.

Нетрудно показать, что формула (25) является прямым следствием положительной определенности длины вектора в гильбертовом пространстве с обычной метрикой

$$\langle C|C \rangle \equiv \langle \lambda A + B | \lambda A + B \rangle, \quad (26)$$

где λ — произвольное комплексное число. Раскрывая левую часть неравенства (26), получим

$$|\lambda|^2 \langle A|A \rangle + (\lambda^* \langle A|B \rangle + \lambda \langle B|A \rangle) + \langle B|B \rangle \geq 0. \quad (27)$$

Учитывая, что $\langle B|A \rangle = \langle A|B \rangle^*$ и выбирая фазу числа λ так, чтобы $\lambda^* \langle A|B \rangle = |\lambda| \cdot |\langle A|B \rangle|$, из (27) получим

$$|\lambda|^2 \langle A|A \rangle + 2|\lambda| \langle A|B \rangle + \langle B|B \rangle \geq 0. \quad (28)$$

Тогда условие неотрицательности длины вектора $\langle C|C \rangle$ сводится к условию отрицательности дискриминанта квадратного трехчлена (28) относительно $|\lambda|$, что и дает неравенство (25).

Чтобы получить, опираясь на неравенство (25), универсальное СН Шредингера, в качестве операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, порождающих векторы гильбертова пространства, достаточно использовать операторы

$$\Delta \hat{A} = \hat{A} - \bar{A}; \quad \Delta \hat{B} = \hat{B} - \bar{B}, \quad (29)$$

совпадающие с прежними при $\bar{A} = \langle |\hat{A}| \rangle = 0$ и $\bar{B} = \langle |\hat{B}| \rangle = 0$. Тогда вместо (25) получим неравенство

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \equiv (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq R_{AB}^2 \equiv |\langle \Delta A | \Delta B \rangle|^2, \quad (30)$$

имеющее смысл универсального СН Шредингера. В нем

$$(\Delta A)^2 \equiv \langle |(\Delta \hat{A})^2| \rangle; \quad (\Delta B)^2 \equiv \langle |(\Delta \hat{B})^2| \rangle \quad (31)$$

суть дисперсии величин A и B , а

$$R_{AB}^2 = \sigma_{AB}^2 + c_{AB}^2 = \frac{1}{4} \langle |\{\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}\}|^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle |[\hat{A}, \hat{B}]|^2 \rangle \quad (32)$$

является обобщенной характеристикой корреляции этих величин. Последняя включает вклады антикоммутатора $\{\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}\}$ и коммутатора $[\hat{A}, \hat{B}]$ соответствующих операторов.

Иными словами, левые части СН Шредингера (30) и СН Гейзенберга (22) совпадают. В то же время в правую часть СН (30) в качестве обобщенного коррелятора R_{AB}^2 входит квадрат модуля амплитуды перехода между состояниями $|\Delta A\rangle$ и $|\Delta B\rangle$. Поскольку произведение эрмитовых операторов $\Delta \hat{A}$ и $\Delta \hat{B}$ в общем случае является неэрмитовым, в правую часть СН (30), в отличие от правой части СН (22), входят вклады как эрмитовой (σ_{AB}), так и антиэрмитовой (c_{AB}) частей этого произведения. Как мы увидим ниже, они соответствуют различным типам корреляции между взаимозависимыми величинами ΔA и ΔB .

Отметим, что потребность в более подробном доказательстве неравенства (25) вызвана тем, что даже в современных монографиях и учебниках [2, 9, 30] доказательства СН Шредингера (30) и СН Гейзенберга (22) приводятся независимо друг от друга без какого-либо сравнительного анализа. При этом в ходе доказательства СН Гейзенберга (22), сходного с изложенным выше, вместо комплексного числа λ выбирается чисто мнимое число $(-i)|\lambda|$, что приводит к замене второго члена слева в неравенстве (28) на $2|\lambda| \operatorname{Im} \langle A|B \rangle$.

Довольно удивительно, что никто до сих пор не заметил, что выбор в качестве λ в том же доказательстве вещественного числа $|\lambda|$ автоматически приводит к замене того же члена слева в неравенстве (28) на $2|\lambda| \operatorname{Re} \langle A|B \rangle$.

Тем самым один и тот же прием доказательства способен привести как к универсальным СН (30), так и к их частным реализациям — СН (22) или СН вида

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \sigma_{AB}^2, \quad (33)$$

напоминающим формулу (17) в классической теории вероятностей.

Отметим, что последнее СН непосредственно следует из квазитермодинамической теории флуктуаций, предложенной А. Эйнштейном [36] в 1910 г. в рамках статистической термодинамики. Фактически аналогичные СН можно было бы получить еще раньше из его же теории броуновского движения [27]. В связи с этим вполне обоснованно называть формулы (33) или (17) *соотношением неопределенностей Эйнштейна*.

Таким образом, универсальные СН Шредингера (30) известны 70 лет. Однако до сих пор они оставались, по существу, не востребованными. Правда, в последние десятилетия они получили некоторое практическое применение в связи с эффективным использованием когерентных, коррелированных и сжатых состояний в квантовой оптике, теориях сверхтекучести и сверхпроводимости и других подобных задачах [4]. Однако концептуальный характер и универсальность СН Шредингера при этом оставались в тени. В частности, в тех случаях, когда вводились как СН Шредингера (30), так и СН Гейзенберга (22), обычно делалось утверждение о том, что отбрасывание члена σ_{AB}^2 в правой части СН (30), т.е. формальный переход к СН (22), только усиливает соответствующее неравенство. Между тем такое усиление неравенства, т.е. переход от СН (30) к СН, похожим на СН (22), но с заменой знака $\geq$ на знак сильного неравенства $>$ делает применение последних достаточно бесперспективным.

На самом деле картина такова. Универсальные СН Шредингера (30) могут вырождаться в свои частные случаи — СН Гейзенберга (22) и СН Эйнштейна (33) — только при выполнении определенных условий. Если $c_{AB} = 0$, то СН (30) сводятся к СН (33). Если же $\sigma_{AB} = 0$, то СН (30) сводятся к СН (22). В общем случае справедливы лишь универсальные СН (30).

Важно отметить, что в квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ или в случаях, когда одна из двух величин A и B (или они обе одновременно) являются c -числами, член c_{AB}^2 в правой части СН (30) исчезает. В то же время член σ_{AB}^2 (при наличии статистической зависимости) переходит в квадрат коррелятора $\overline{(\Delta A \Delta B)}^2$ между флуктуациями ΔA и ΔB , входящий в формулу (17) из классической теории вероятностей. Более того, и при $\hbar \neq 0$, т.е. в квантовой динамике, может случиться так, что $\sigma_{AB} \gg c_{AB}$. Тогда правую часть СН (30) определяет вклад антикоммутатора операторов $\Delta \hat{B}$ и $\Delta \hat{A}$, отражающий качественно иной тип корреляции этих величин. В частности, это имеет место, когда коммутатор $[\hat{A}, \hat{B}]$ равен нулю.

Величина R_{AB}^2 в правой части универсальных СН Шредингера (30) объединяет два качественно различных типа корреляции, представленных слагаемыми σ_{AB}^2 и c_{AB}^2 . Один тип корреляции, характерный для СН Гейзенберга, можно назвать *корреляцией «в противофазе»*, ибо в нем $\Delta A \sim \frac{1}{\Delta B}$. Другой тип корреляции, характерный для СН Эйнштейна, можно назвать *корреляцией «в фазе»*, потому что в нем $\Delta A \sim \Delta B$. Величина R_{AB}^2 в целом имеет физический смысл меры обобщенной корреляции между флуктуациями величин B и A и является целостной характеристикой неконтролируемого воздействия окружения, инвариантной относительно унитарных преобразований в гильбертовом пространстве. Разумеется, входящие в R_{AB}^2 слагаемые σ_{AB}^2 и c_{AB}^2 по отдельности этими качествами не обладают, кроме тех случаев, когда либо при $\hbar \neq 0$ вклад коммутатора c_{AB}^2 обращается в нуль или пренебрежимо мал, либо при $\hbar \rightarrow 0$ вклад антикоммутатора σ_{AB}^2 , переходящий в квадрат коррелятора $\overline{(\Delta A \Delta B)}^2$, отличен от нуля.

1.3. Флуктуации макропараметров и СН Эйнштейна в статистической термодинамике. Универсальные СН Шредингера (30) расширяют класс теорий, в которых между флуктуациями физических величин имеются нетривиальные корреляции, на всю неклассическую физику. Последнее особенно существенно для анализа СН энергия–время, поскольку одна из двух входящих в него величин — время является c -числом. Прежде чем перейти к этому анализу, целесообразно обсудить более подробно ситуацию с флуктуациями и их корреляцией в статистической термодинамике, в которой все физические величины описываются c -числами.

Интересно отметить, что СН Эйнштейна (33) могли бы стать полезным инструментом исследования в статистической термодинамике, по крайней мере, с 1910 г. Тот факт, что этого не произошло, можно объяснить скорее всего психологическими причинами. С одной стороны, имеет значительное распространение [37] убежденность в том, что сам факт наличия СН между двумя физическими величинами принципиально связан с их операторным описанием, характерным для квантовой динамики. С этой точки зрения ни о

каких СН в статистической термодинамике говорить не приходится. С другой стороны, даже те авторы [16, 17, 38, 39], кто имел дело с частными случаями СН в статистической термодинамике, испытывали серьезные трудности при попытках их истолкования в духе традиционной квантовой динамики [2]. Природу этих трудностей можно понять, поскольку характер корреляции между c -числовыми величинами A и B в статистической термодинамике совершенно иной.

Чтобы в этом разобраться, ограничимся здесь рассмотрением только равновесной статистической термодинамики. Как известно [40, 41], в ней имеются три уровня теоретического описания. На первом из них — в феноменологической термодинамике — все макропараметры, определяющие макросостояния системы, типа внутренней энергии $\mathcal{E}$, температуры T , объема V , давления P и т.п., равноправны и однозначно фиксированы (не испытывают флуктуаций).

На следующем уровне — в термодинамике, основанной на статистической механике Гиббса, если для простоты ограничиться только величинами $\mathcal{E}$ и T , равноправие энергии и температуры нарушается. Что касается энергии системы как макропараметра, то она характеризуется средним значением $\bar{\mathcal{E}}$ и флуктуацией $\Delta\mathcal{E}$, которые могут быть найдены по распределению Гиббса. В то же время температура, будучи модулем этого распределения, остается жестко фиксированной. Фактически она является температурой термостата T_0 и, как и на первом уровне, переносится на систему с помощью феноменологического нулевого начала термодинамики: $T \equiv T_0$. Разумеется, говорить о СН энергия–температура на этих уровнях описания не приходится.

Наконец, на третьем, наиболее фундаментальном уровне — в собственно статистической термодинамике — принимаются во внимание как флуктуации температуры ΔT , так и коррелятор флуктуаций энергии и температуры системы $\overline{\Delta\mathcal{E}\Delta T}$, отражающий наличие неконтролируемого (теплового) воздействия на систему со стороны окружения (термостата). Они могут быть вычислены в рамках квазиротационной теории флуктуаций Эйнштейна [36, 40, 41]. При этом температура термостата, имеющая физический смысл средней температуры системы $\bar{T} = T_0$, остается неизменной ($\Delta T_0 = 0$). В то же время температура системы флуктуирует ($\Delta T \neq 0$), так что в теории Эйнштейна понятие *теплового равновесия* (*нулевого начала* термодинамики) *обобщается*, принимая динамический характер. Тем самым, в статистической термодинамике вполне может быть справедливо СН энергия–температура, аналогичное по форме СН Эйнштейна (33).

Рассмотрим достаточно общую модель — произвольную макросистему в условиях теплового равновесия с термостатом, когда одновременно возможны флуктуации экстенсивных макропараметров — энергии $\mathcal{E}$ и объема V — и интенсивных макропараметров — температуры T и давления P . Ограничиваясь

сначала флуктуациями только энергии $\Delta\mathcal{E}$ и температуры ΔT , имеем [41]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathcal{E}}^2 &= -(k_B T) \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right]^2 + \\ &+ C_V k_B T^2 = f(V, T) + C_V k_B T^2;\end{aligned}\quad (34)$$

$$\sigma_T^2 = \frac{k_B T^2}{C_V}; \quad \sigma_{\mathcal{E}T} = k_B T^2, \quad (35)$$

где C_V — теплоемкость при постоянном объеме, k_B — постоянная Больцмана. Подставляя далее формулы (34) и (35) в СН Эйнштейна (33), получим СН энергия–температура

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 \sigma_T^2 \equiv (\Delta\mathcal{E})^2 (\Delta T)^2 \geq R_{\mathcal{E}T}^2 \equiv \sigma_{\mathcal{E}T}^2 = (k_B T^2)^2, \quad (36)$$

где равенство достигается, например, при $V = \text{const}$.

Прежде всего, поясним смысл флуктуации температуры как характеристики макросистемы в целом. Напомним, что в основе феноменологической термодинамики лежит постулат, называемый обычно нулевым началом. Он подразумевает, что при тепловом равновесии температуры любых двух макроскопических систем (здесь — системы и термостата) совпадают, так что какие-либо флуктуации их температур не предполагаются. В теории Эйнштейна [36] предполагается, что термостат, обладающий бесконечным числом степеней свободы ($C_V \rightarrow \infty$), согласно (35) имеет жестко фиксированную температуру $T_0 = \text{const}$, которая входит в качестве модуля распределения во все формулы равновесной статистической термодинамики. В то же время любая макроскопическая система с конечным числом степеней свободы имеет температуру T , флуктуирующую относительно температуры термостата:

$$T_0 - \Delta T \leq T \leq T_0 + \Delta T. \quad (37)$$

Здесь

$$(\Delta T)^2 = \frac{T_0^2}{\alpha N}, \quad (38)$$

N — число частиц в системе, α — постоянная, связанная с числом степеней свободы частицы. Тем самым в теории Эйнштейна, в отличие от теорий Клаузиуса или Гиббса, понятие теплового равновесия приобретает динамический характер.

Обратим внимание на то, что внешний вид полученного СН энергия–температура в равновесной статистической термодинамике не вызывает особых ассоциаций с каким-либо СН в квантовой динамике. Ситуация, однако,

меняется, если в нем перейти от температуры T к обратной температуре $1/T$. Тогда, поскольку

$$\Delta(1/T) = \frac{\Delta T}{T^2}, \quad (39)$$

вместо (36) получим СН энергия–обратная температура в виде

$$\Delta \mathcal{E} \Delta(1/T) \geq k_B, \quad (40)$$

открывающем более широкие возможности для физической интерпретации.

Следует отметить, что очень часто постоянную Больцмана k_B считают чисто технической величиной. Очевидно, что в СН Эйнштейна (40) она явно играет роль фундаментальной константы, аналогичную роли постоянной $\hbar$ в квантовой динамике. Поскольку принято считать, что минимальное изменение энтропии $\Delta S_{\min} \sim k_B$, постоянную Больцмана k_B следует трактовать как минимальную меру «неупорядоченности», передаваемую системе термостатом в условиях теплового равновесия. Тем самым она в той же мере характеризует минимальное неконтролируемое тепловое воздействие, в какой постоянная Планка $\hbar$ — минимальное неконтролируемое квантовое воздействие.

Другое СН в равновесной статистической термодинамике, у которого есть аналог среди СН в квантовой динамике, можно получить для флуктуаций объема V , давления P и их коррелятора $\overline{(\Delta V)(\Delta P)}$. Следуя вновь [41], имеем

$$\sigma_V^2 = -(k_B T) \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T; \quad (41)$$

$$\sigma_P^2 = -(k_B T) \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \frac{k_B T^2}{C_V}; \quad (42)$$

$$\sigma_{VP} = -(k_B T). \quad (43)$$

Отсюда следует, что в данном случае справедливо СН объем–давление:

$$\sigma_V^2 \sigma_P^2 \equiv (k_B T)^2 \left[1 - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \frac{T}{C_V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \right] \geq (k_B T)^2 \quad (44)$$

или для линейных величин

$$\Delta V \Delta(P/T) \geq k_B, \quad (45)$$

где равенство достигается, например, при $V = \text{const.}$

Поскольку нас интересует аналогия с квантовой динамикой, дадим СН (44) своеобразную «микроскопическую» трактовку, воспользовавшись моделью невырожденного идеального газа. С этой целью будем рассматривать газ в сосуде в целом как своеобразную «квазичастицу», флуктуация координаты которой Δq связана с флуктуацией объема $\Delta V = \Delta q S$, где S — площадь поршня, перпендикулярного оси q . Соответственно, флуктуацию давления ΔP выразим через флуктуацию импульса Δp «квазичастицы» по формуле

$$\Delta P = \frac{\Delta F}{S} = \frac{\Delta p \nu}{S}, \quad (46)$$

где ΔF — флуктуация силы, действующей на поршень в отсутствие внешних полей (при $U(q) = 0$), ν — число ударов частиц о поршень в единицу времени.

Подставляя формулы, выражающие ΔV и ΔP через Δq и Δp в СН (45), получим

$$\Delta V \Delta P = (\Delta q S) \left(\frac{\Delta p \nu}{S} \right) \geq k_B T. \quad (47)$$

Тем самым окончательно СН координата–импульс в равновесной статистической термодинамике принимает вид

$$\Delta q \Delta p \geq k_B \frac{T}{\omega_{\text{эфф}}}. \quad (48)$$

Здесь $\omega_{\text{эфф}} \equiv \nu$ — эффективная частота для данной системы — невырожденного идеального газа в сосуде при отсутствии внешних воздействий. Она играет роль временной характеристики системы в целом. СН Эйнштейна, аналогичное СН (48), с $\omega_{\text{эфф}} \equiv 1/\tau$, где τ — время релаксации, связывает флуктуации координаты и импульса броуновской частицы [14].

Нетрудно понять, что СН Эйнштейна (48) в равновесной статистической термодинамике для своеобразной «квазичастицы» в тепловом равновесии внешне похоже на СН Гейзенберга (22) в квантовой динамике, ибо в его правой части стоит характерная комбинация размерности действия. Вместе с тем СН (48) близко по форме и к СН энергия–температура (40) или (36), также содержащим постоянную k_B и температуру T . Это лишний раз подчеркивает существенную роль неконтролируемого (теплового) воздействия на систему, которое одинаково сказывается на корреляциях флуктуаций разных взаимозависимых физических характеристик.

1.4. Современный статус СН энергия–время. Как уже отмечалось выше, несмотря на внешнее сходство, статус СН энергия–время (2) принципиально отличается от статуса СН координата–импульс (21). Существует несколько различных физических задач, в которых может идти речь о СН типа (2) [4].

Однако в каждом конкретном случае физический смысл и математическое определение входящих в левую часть величин оказываются весьма различными, на что обращалось внимание еще в работе [42]. Не меньше вопросов связано с истолкованием и правой части СН типа (2). Дело в том, что в квантовой динамике энергия является наблюдаемой, которой сопоставляется эрмитов оператор, а время — c -числовым параметром.

Наиболее просто можно получить некое СН энергия–время, если следовать тому пути, что был изложен в начале п. 1.3. Если вместо волновых функций $\psi_{\text{кл}}(q)$ и $\tilde{\psi}_{\text{кл}}(q)$ (при $t = \text{const}$) выбрать, соответственно, волновые функции $\psi_{\text{кл}}(t)$ и $\tilde{\psi}_{\text{кл}}(\omega)$ (при $q = \text{const}$), то согласно фурье-анализу «ширины» этих функций будут связаны аналогичным неравенством:

$$\sigma_{\psi_{\text{кл}}} \sigma_{\tilde{\psi}_{\text{кл}}} \equiv \delta t \delta \omega \gtrsim \gamma. \quad (49)$$

Записывая формулу, аналогичную (49), для $\psi_{\text{кв}}(t)$ и $\tilde{\psi}_{\text{кв}}(\omega)$, домножая полученное неравенство на постоянную Планка и используя формулу Эйнштейна $\varepsilon = \hbar\omega$, получим

$$\delta t \delta \varepsilon \gtrsim \gamma \hbar, \quad (50)$$

где при некоторой нормировке $\gamma = 1/2$. В итоге получается соотношение «ширин» (СШ)

$$\delta t \delta \varepsilon \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (51)$$

полностью аналогичное формуле (19). Поэтому его физический смысл остается тем же, что и в классической физике.

Однако здесь уже невозможно сделать шаги, которые ранее привели нас от формулы (19) к формуле (21), принципиально изменив смысл входящих в эти неравенства величин. Время в квантовой динамике, как известно [2, 4], не является наблюдаемой, которой сопоставляется эрмитов оператор. Поэтому для времени микросистемы не имеет смысла вводить в рассмотрение квантово-динамическое среднее и его флуктуацию. Соответственно правую часть СН (51) невозможно трактовать как меру корреляции флуктуаций энергии и времени.

В этих условиях остается, конечно, другая возможность — использовать классическую по физическому смыслу формулу (51) и в квантовой динамике, что фактически было предложено в [43]. Но тогда, разумеется, мы будем иметь дело не с СН энергия–время, а с СШ энергия–время. С практической точки зрения это означает, что в условиях, когда «ширины» δt и $\delta \varepsilon$ и постоянная γ не имеют строгого математического определения и ясной физической трактовки, главной заботой оказывается удобный выбор конкретных значений этих величин.

В частности [4], для весьма важных с экспериментальной точки зрения распадных состояний с экспоненциальным законом распада

$$\rho(t) \equiv |\psi_{\text{кв}}(t)|^2 = \exp(-t/\tau) \quad (52)$$

распределение по энергиям является лоренцевым:

$$\rho(\varepsilon) = |\tilde{\psi}_{\text{кв}}(\varepsilon)|^2 = \frac{\Gamma/2\pi}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (53)$$

«Ширина» этого распределения $\delta\varepsilon \equiv \Gamma = \hbar/\tau$ определяется из условия $|\tilde{\psi}_{\text{кв}}(\varepsilon)|^2 = (1/2)|\tilde{\psi}_{\text{кв}}(0)|^2$.

Если принять среднее время жизни состояния $\delta t \equiv \tau$ за «ширину» распределения $\rho(t)$, то из формул (52) и (53) следует СШ энергия–время

$$\delta t \delta \varepsilon \equiv \tau \Gamma = \hbar. \quad (54)$$

Нетрудно заметить, что в данном случае за «ширину» распределения $\rho(\varepsilon)$ достаточно произвольно принимается ширина уровня Γ , а отнюдь не дисперсия $\Delta\varepsilon$. Последнее проявляется в том, что, изменяя вид функции распределения по энергии на ее «хвосте» (при $|\varepsilon - \varepsilon_0| \gg \Gamma$), можно сильно изменить величину дисперсии $\Delta\varepsilon$. Между тем среднее время жизни τ , а значит, и величина Γ останутся практически неизменными [42].

Из сказанного выше следует, что трактовка СШ энергия–время (51) является, в сущности, классической и потому не связанной с наличием флуктуаций и их корреляцией, т.е. с теорией измерений [2]. Таким образом, хотя формулы вида (2) в той или иной мере используются в квантовой динамике с конца 20-х годов, вопрос о математическом смысле и физической трактовке входящих в них слева и справа величин в общем случае остается все еще открытым. Используемые на практике формулы типа (51) имеют смысл СШ, отличный от смысла СН энергия–время.

Указанная ситуация заставляет продолжать поиски СН энергия–время, сопоставимого по своему физическому смыслу и математическому определению с другими СН в неклассической физике. Они ведутся в двух главных направлениях. На первом пути предпринимаются усилия, чтобы сопоставить времени разумный с физической точки зрения эрмитов оператор и тем самым поднять статус времени до статуса квантово-динамической наблюдаемой. В этом случае предполагается придать величинам слева и справа в СН вида (2) математический смысл и физическую трактовку, аналогичные тому, что имеют место для величин в СН Гейзенберга (22) для произвольных наблюдаемых A и B . Соответствующие попытки пока не увенчались успехом [4].

На втором пути предлагается в условиях отсутствия оператора времени придать сколько-нибудь разумный смысл понятию «неопределенность време-

ни» самому по себе, формально не выходя за рамки квантовой физики и сохраняя, в частности, операторное описание для энергии. Наиболее успешная попытка такого рода была предпринята Л.Мандельштамом и И.Таммом [44].

Сегодня подход к СН энергия–время Мандельштама–Тамма получил наибольшее распространение в современных учебниках и монографиях по квантовой механике [2, 9]. Он основан на использовании СН энергия–произвольная наблюдаемая и определении неопределенности времени через его правую часть. При этом исходят из СН Гейзенберга (22) с $\hat{B} \equiv \hat{H}$:

$$\Delta\varepsilon\Delta A \geq c_{AH} = \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{H}]\rangle|, \quad (55)$$

где $\hat{A}$ — оператор, соответствующий наблюдаемой A , $\hat{H}$ — гамильтониан, а $\Delta\varepsilon$ и ΔA — дисперсии величин ε и A . Правую часть СН (55) можно преобразовать, воспользовавшись для оператора $\hat{A}$ уравнением Гейзенберга $d\hat{A}/dt = (i/\hbar)[\hat{A}, \hat{H}]$. Тогда получим, что

$$c_{AH} \equiv \frac{\hbar}{2}|\langle\frac{d\hat{A}}{dt}\rangle|. \quad (56)$$

«Неопределенностью времени», исходя из правой части СН (55), Мандельштам и Тамм называли величину

$$\Delta t_A \equiv \frac{\Delta A}{(2/\hbar)c_{AH}} = \frac{\Delta A}{|\langle d\hat{A}/dt \rangle|.} \quad (57)$$

Определение (57) обладает тем преимуществом, что придает величине Δt_A разумный физический смысл промежутка времени, в течение которого среднее значение $\bar{A}$ изменяется на величину среднеквадратичного отклонения ΔA . Вместе с тем ему присущ и ряд существенных недостатков. Во-первых, оно не является однозначным, ибо позволяет для одной и той же микросистемы вводить несколько промежутков времени Δt_{A_i} применительно к разным наблюдаемым A_i . Во-вторых, оно теряет смысл тогда, когда при $\Delta\varepsilon \neq 0$ и $\Delta A \neq 0$ либо сам коммутатор $[\hat{A}, \hat{H}]$, либо среднее от него обращаются в нуль.

Для преодоления первого из указанных недостатков до сих пор предлагались следующие решения. Наиболее распространенный подход [2, 9] состоит в том, что за характерный промежуток времени микросистемы в целом предлагается выбирать минимальную из всех возможных величин Δt_{A_i} . Однако такой выбор является достаточно произвольным, поскольку он существенно зависит от того микросостояния, по которому происходит усреднение в формуле (57).

В другом подходе [4] для придания определению (57) однозначности и универсальности в качестве величины, представляющей микросистему в

целом, предлагается выбирать матрицу плотности $\hat{\rho}$. Однако чтобы избежать последствий второго недостатка, определение (57) в этом случае приходится применять только к нестационарным смешанным состояниям, когда $d\hat{\rho}/dt \neq 0$. Этим сразу исключаются из рассмотрения как чистые квантовые состояния, так и смешанные состояния в равновесной статистической термодинамике, что значительно ограничивает область применения величины Δt_A (57).

Однако главная проблема, связанная с подходом Мандельштама–Тамма к СН энергия–время, вовсе не в этом. Напомним, что целью введения величины Δt_A (57) была возможность придать СН (55) после перехода от ΔA к Δt_A форму, внешне сходную с СН (2) или СН (51), но содержащую строго определенные величины:

$$\Delta \varepsilon \Delta t_A \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (58)$$

При этом не был учтен тот факт, что СН Гейзенберга (55) справедливо, если вклад антикоммутатора $\sigma_{AH} = 0$. Последнее, если и возможно, то только в достаточно экзотических ситуациях. В связи с этим можно утверждать, что даже в тех случаях, когда определение величины Δt_A лишено указанных выше недостатков, оно неэффективно, ибо основанное на нем СН энергия–время (58) справедливо только как чистое неравенство.

В данной работе, следуя [26, 28], мы развиваем подход Мандельштама–Тамма к СН энергия–время. Вместо СН Гейзенберга (55) мы предлагаем использовать универсальное СН Шредингера энергия–произвольная наблюдаемая. Исходя из его правой части, мы дадим обобщение понятия неопределенности времени, свободное от перечисленных выше недостатков определения Мандельштама–Тамма. На его основе будет введено обобщенное СН энергия–время и определена эффективная частота открытой микросистемы в целом. Дальнейший анализ этого СН в случае когерентных состояний позволит придать ему форму СН энергия–обратная эффективная частота, интерпретация которого близка к интерпретации СН энергия–обратная температура в статистической термодинамике. Тем самым будет показано, что, по крайней мере для когерентных состояний, обобщенное СН энергия–время соответствует концепции универсальности соотношений неопределенностей в неклассической физике.

2. ОБОБЩЕННОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ

2.1. Обобщение понятия неопределенности времени Мандельштама–Тамма. В данной работе мы остаемся в рамках подхода Мандельштама–Тамма

к СН энергия–время, но вместо СН Гейзенберга (22), а точнее, его частного случая (55), при определении неопределенности времени мы предлагаем использовать универсальное СН Шредингера (30), положив в нем $\hat{B} \equiv \hat{H}$. Тогда вместо формул (30) и (32) получим

$$\Delta\varepsilon\Delta A \geq R_{AH}, \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} R_{AH}^2 &\equiv |\langle \Delta A | \Delta H \rangle|^2 = |\langle [\Delta \hat{A} \Delta \hat{H}] \rangle|^2 = \sigma_{AH}^2 + c_{AH}^2 = \\ &= \frac{1}{4} \langle \{ \Delta \hat{A}, \Delta \hat{H} \} \rangle^2 + \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle|^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Обобщим теперь формулу Мандельштама–Тамма (57) и определим «неопределенность времени» формулой

$$\Delta t_A^* \equiv \frac{\Delta A}{(2/\hbar)R_{AH}}. \quad (61)$$

Тогда обобщенное СН энергия–время вместо (58) примет вид

$$\Delta\varepsilon\Delta t_A^* \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (62)$$

Ниже нами рассмотрены две достаточно общие модели микросистем, совершающих финитное и инфинитное движения. Их общей особенностью является то, что соответствующие микросистемы рассматриваются в нестационарных базисных состояниях, когда флуктуации энергии системы $\Delta\varepsilon \neq 0$. Прежде всего мы покажем, что введенное здесь определение Δt_A^* (61), во-первых, однозначно (не привязано к какой-либо одной наблюдаемой) и, во-вторых, лишено сингулярности при обращении вклада коммутатора c_{AH} в нуль. Выбор универсальной временной характеристики открытой микросистемы в целом будет дан в п. 2.4.

2.2. Финитное движение: квантовый осциллятор в когерентном состоянии. В качестве модели финитного движения микросистемы рассмотрим квантовый гармонический осциллятор с частотой $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$, находящийся в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Напомним, что эти состояния являются собственными состояниями оператора уничтожения [45, 4]:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle; \quad \langle\alpha|\hat{a}^+ = \langle\alpha|\alpha^*; \quad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, \quad (63)$$

где α — произвольное комплексное число. Как известно, когерентные состояния выделяются среди других нестационарных состояний тем, что они неортогональны. Кроме того, они наиболее близки к классическим состояниям осциллятора.

В данном случае среднее значение энергии и ее дисперсия имеют вид

$$\bar{\varepsilon} \equiv \langle \alpha | \hat{H} | \alpha \rangle = \hbar \omega_0 \langle \alpha | \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) | \alpha \rangle = \hbar \omega_0 \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right), \quad (64)$$

$$(\Delta \varepsilon)^2 \equiv \langle \alpha | (\Delta \hat{H})^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | (\hat{H}^2 - \bar{\varepsilon}^2) | \alpha \rangle = \hbar^2 \omega_0^2 \bar{n}, \quad (65)$$

где $\bar{n} = |\alpha|^2$ — среднее число квантов возбуждения («фононов») в состоянии $|\alpha\rangle$.

Для дальнейшего необходимо вычислить дисперсии $(\Delta A_i)^2$ различных величин в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. В данном случае у системы имеются только две существенные физические характеристики* — координата q и импульс p . Последующие расчеты проще всего проводить, выразив операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ через операторы $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ согласно

$$\hat{q} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{\sqrt{2}} l_0; \quad \hat{p} = (-i) \frac{\hat{a} - \hat{a}^+}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{l_0}, \quad (66)$$

где $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$ — амплитуда нулевых колебаний. Тогда [4]

$$\bar{q} = \sqrt{2} l_0 \operatorname{Re} \alpha; \quad \bar{p} = \sqrt{2} \frac{\hbar}{l_0} \operatorname{Im} \alpha; \quad (67)$$

$$(\Delta q)^2 = l_0^2/2; \quad (\Delta p)^2 = \hbar^2/2l_0^2. \quad (68)$$

Для получения выражений неопределенностей времени Δt_A или Δt_A^* необходимо вычислить средние от коммутаторов и антикоммутаторов операторов $\Delta \hat{q} = \hat{q} - \bar{q}$ и $\Delta \hat{H} = \hat{H} - \bar{\varepsilon}$, с одной стороны, и $\Delta \hat{p} = \hat{p} - \bar{p}$ и $\Delta \hat{H}$ — с другой. Нетрудно убедиться в том, что

$$c_{qH} = \frac{1}{2} |\langle \alpha | [\hat{q}, \hat{H}] | \alpha \rangle| = \frac{l_0}{\sqrt{2}} (\hbar \omega_0) \operatorname{Im} \alpha, \quad (69)$$

$$c_{pH} = \frac{1}{2} |\langle \alpha | [\hat{p}, \hat{H}] | \alpha \rangle| = \frac{\hbar}{\sqrt{2} l_0} (\hbar \omega_0) \operatorname{Re} \alpha, \quad (70)$$

причем вклады от $\bar{q}$, $\bar{p}$ и $\bar{\varepsilon}$ из ответа выпадают. Несколько более громоздкие вычисления дают

$$\sigma_{qH} = \frac{1}{2} \langle \alpha | \{ \Delta \hat{q}, \Delta \hat{H} \} | \alpha \rangle = \frac{l_0}{\sqrt{2}} (\hbar \omega_0) \operatorname{Re} \alpha, \quad (71)$$

*Что касается энергии, то для $\hat{A} \equiv \hat{H}$ формулы (59) и (62) обращаются в тождества.

$$\sigma_{pH} = \frac{1}{2} \langle \alpha | \{ \Delta \hat{p}, \Delta \hat{H} \} | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2} l_0} (\hbar \omega_0) \neq 0. \quad (72)$$

Определение неопределенности времени Δt_A (57) согласно исходной процедуре Мандельштама–Тамма приводит, как и следовало ожидать, к двум разным выражениям:

$$\Delta t_q \equiv \frac{\Delta q}{|\langle \alpha | d\hat{q}/dt | \alpha \rangle|} = \frac{1}{2\omega_0 \operatorname{Im} \alpha}, \quad (73)$$

$$\Delta t_p \equiv \frac{\Delta p}{|\langle \alpha | d\hat{p}/dt | \alpha \rangle|} = \frac{1}{2\omega_0 \operatorname{Re} \alpha}, \quad (74)$$

что и демонстрирует его неоднозначность. Понятно, что ответ на вопрос о том, которая из величин, Δt_q или Δt_p , является минимальной и тем самым может служить характеристикой неопределенности времени для микросистемы в целом, зависит от выбора конкретного когерентного состояния, фиксируемого комплексным числом α . Более того, поскольку здесь вклады антикоммутаторов σ_{qH} и σ_{pH} отличны от нуля, СН (58) вообще не выполняются. В свою очередь, предложенное выше обобщение понятия неопределенности времени Δt_A^* (61) приводит к следующим выражениям:

$$\Delta t_q^* \equiv \frac{\Delta q}{(2/\hbar) R_{qH}} = \frac{l_0/\sqrt{2}}{\sqrt{2} l_0 \omega_0 \{ (\operatorname{Re} \alpha)^2 + (\operatorname{Im} \alpha)^2 \}^{1/2}} = \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\bar{n}}}, \quad (75)$$

$$\Delta t_p^* \equiv \frac{\Delta p}{(2/\hbar) R_{pH}} = \frac{\hbar/\sqrt{2} l_0}{\sqrt{2} (\hbar/l_0) \omega_0 \{ (\operatorname{Im} \alpha)^2 + (\operatorname{Re} \alpha)^2 \}^{1/2}} = \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\bar{n}}}. \quad (76)$$

Очевидно, что для данной системы обобщение понятия неопределенности времени является однозначным:

$$\Delta t^* = \Delta t_q^* = \Delta t_p^* = \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\bar{n}}}, \quad (77)$$

причем величина Δt^* зависит от физически разумных величин — частоты ω_0 , фиксированной внешними макроусловиями, и среднего числа квантов возбуждения $\bar{n}$ в данном когерентном микросостоянии $|\alpha\rangle$.

Наконец, нетрудно убедиться в том, что обобщенное СН энергия–время вида (62) минимизируется когерентными состояниями квантового осциллятора $|\alpha\rangle$. С учетом формул (65) и (77) имеем

$$\Delta \varepsilon \Delta t^* = (\hbar \omega_0 \sqrt{\bar{n}}) \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\bar{n}}} = \frac{\hbar}{2} \quad (78)$$

независимо от значения $\bar{n}$. Полученные в этом пункте результаты можно распространить и на все другие микросистемы, совершающие финитное движение в условиях, когда их можно моделировать квантовым осциллятором в когерентном состоянии.

2.3. Инфинитное движение микросистемы: свободная микрочастица в состоянии гауссова волнового пакета. В качестве модели инфинитного движения микросистемы рассмотрим одномерное движение со скоростью v_0 свободной микрочастицы с массой m , начальное состояние которой задается в q -представлении гауссовым волновым пакетом шириной $\Delta q(0) = b$. Гауссова форма волнового пакета сохраняется и в p -представлении, в связи с чем вычисления удобно проводить в обоих представлениях.

Волновая функция микрочастицы в произвольный момент времени в q -представлении имеет вид

$$\psi(q, t) = |\psi(q, t)| \exp \{i\varphi(q, t)\}. \quad (79)$$

Здесь

$$|\psi(q, t)| = [2\pi(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{(q - v_0 t)^2}{4(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)} \right\}, \quad (80)$$

$$\varphi(q, t) = \frac{mv_0}{\hbar} q - \frac{mv_0^2}{2\hbar} t + \frac{(q - v_0 t)^2 (\tilde{v} t)}{4b(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)} - \varphi_0(t), \quad (81)$$

где $\varphi_0(t) = \frac{1}{2} \arctg \frac{\tilde{v} t}{b}$ — несущественная постоянная, а

$$\tilde{v} = \frac{\hbar}{2mb} \quad (82)$$

есть скорость «расплывания» пакета, происходящего (см. ниже (94)) по закону $[\Delta q(t)]^2 = b^2 + \tilde{v}^2 t^2$. Ее значение, как показано ниже в (90), соответствует минимально возможному значению, предписываемому СН Гейзенберга (21) в начальный момент времени:

$$\Delta p = m\tilde{v} = \frac{\hbar}{2\Delta q(0)} = \frac{\hbar}{2b}. \quad (83)$$

Соответственно в p -представлении имеем

$$\tilde{\psi}(p, t) = |\tilde{\psi}(p, t)| \exp \{i\tilde{\varphi}(p, t)\}, \quad (84)$$

где

$$|\tilde{\psi}(p, t)| = [2\pi m^2 \tilde{v}^2]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{(p - mv_0)^2}{4m^2 \tilde{v}^2} \right\}, \quad (85)$$

$$\tilde{\varphi}(p, t) = -\frac{p^2}{2m\hbar} t. \quad (86)$$

Среднее значение энергии и ее дисперсию проще вычислить в p -представлении. Тогда

$$\bar{\varepsilon} \equiv \langle |\hat{H}| \rangle = \int dp \frac{p^2}{2m} |\tilde{\psi}(p, t)|^2 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\tilde{v}^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8mb^2}; \quad (87)$$

$$\begin{aligned} (\Delta\varepsilon)^2 &\equiv \langle |(\Delta\hat{H})^2| \rangle = \int dp \left[\left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 - (\bar{\varepsilon})^2 \right] |\tilde{\psi}(p, t)|^2 = \\ &= (mv_0^2)(m\tilde{v}^2) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^2}{v_0^2} \right) = \frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{v_0}{b} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^2}{v_0^2} \right). \end{aligned} \quad (88)$$

В данном случае операторы энергии и проекции импульса коммутируют, так что определение Мандельштама–Тамма (57) неопределенности времени Δt_p , вытекающее из СН (22), некорректно. Поэтому ниже изначально будем исходить из определения неопределенности времени Δt_A^* (61), которое по предположению однозначно и не содержит сингулярности.

Для получения величины Δt_p^* необходимо вычислить $\bar{p}$ и $(\Delta p)^2$, а также среднее от антикоммутатора операторов $\Delta\hat{p}$ и $\Delta\hat{H}$. Используя волновую функцию в p -представлении вида (84), получим

$$\bar{p} = \int dp p |\tilde{\psi}(p, t)|^2 = mv_0, \quad (89)$$

$$(\Delta p)^2 = \int dp [p^2 - (\bar{p})^2] |\tilde{\psi}(p, t)|^2 = (m\tilde{v})^2 = \frac{\hbar^2}{4b^2}, \quad (90)$$

$$\sigma_{pH} = \frac{1}{2} \langle |\{\Delta\hat{p}, \Delta\hat{H}\}| \rangle = \int dp \left[\frac{p^3}{2m} - \bar{p}\bar{\varepsilon} \right] |\tilde{\psi}(p, t)|^2 = (m\tilde{v})^2 v_0. \quad (91)$$

Окончательно величина неопределенности времени Δt_p^* имеет вид

$$\Delta t_p^* \equiv \frac{\Delta p}{(2/\hbar)R_{pH}} = \frac{m\tilde{v}}{(2/\hbar)\{\sigma_{pH}^2 + 0\}^{1/2}} = \frac{m\tilde{v}}{(2/\hbar)(m\tilde{v})^2 v_0} = \frac{b}{v_0}. \quad (92)$$

Интересно отметить, что ни одна из величин в формуле (92) и тем самым Δt_p^* в целом не зависит от времени. Следует также подчеркнуть, что здесь весь результат определяется вкладом антикоммутатора σ_{pH} , входящим в определение Δt_A^* (61).

Соответственно для получения величины Δt_q^* вычислим $\bar{q}$ и $(\Delta q)^2$, используя волновую функцию в q -представлении вида (79):

$$\bar{q} = \int dq q |\psi(q, t)|^2 = v_0 t, \quad (93)$$

$$(\Delta q)^2 = \int dq [q^2 - (\bar{q})^2] |\psi(q, t)|^2 = b^2 + \tilde{v}^2 t^2 = b^2 + \frac{(\Delta p)^2}{m^2} t^2. \quad (94)$$

Тем самым при $t = 0$ среднее значение координаты $\bar{q}(0) = 0$.

В свою очередь, средние от коммутатора и антикоммутатора операторов $\Delta \hat{q}$ и $\Delta \hat{H}$ проще вычислить, воспользовавшись p -представлением. В результате получим

$$\begin{aligned} c_{qH} &= \frac{1}{2} \langle [\hat{p}, \hat{H}] \rangle = \frac{\hbar}{2m} \bar{p} = \frac{\hbar v_0}{2}, \quad (95) \\ \sigma_{qH} &= \frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{q}, \Delta \hat{H} \} \rangle = \frac{1}{2} \langle \{ \hat{q}, \hat{H} \} \rangle - \bar{q} \bar{e} = \\ &= - \left(\frac{\hbar}{2i} \right) \int dp \tilde{\psi}^*(p, t) \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p, t) \right] + \frac{p^2}{2m} \frac{\partial \tilde{\psi}(p, t)}{\partial p} \right\} - \bar{q} \bar{e} = \\ &= \frac{1}{2} (v_0 t) (m v_0^2 + 3 m \tilde{v}^2) - (v_0 t) \left(\frac{m v_0^2}{2} + \frac{m \tilde{v}^2}{2} \right) = (v_0 t) (m \tilde{v}^2). \quad (96) \end{aligned}$$

Таким образом, величина неопределенности времени Δt_q^* с учетом формулы (82) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta t_q^* &\equiv \frac{\Delta q}{(2/\hbar) R_{qH}} = \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{1/2}}{\frac{2}{\hbar} \left\{ (v_0 t) (m \tilde{v}^2)^2 + \frac{\hbar^2 v_0^2}{4} \right\}^{1/2}} = \\ &= \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{1/2}}{\left\{ \frac{4}{\hbar^2} (m \tilde{v}^2) (\tilde{v}^2 t^2) v_0^2 + v_0^2 \right\}^{1/2}} = \\ &= \frac{(b^2 + \tilde{v}^2 t^2)^{1/2}}{\left\{ \frac{1}{b^2} (\tilde{v}^2 t^2) v_0^2 + v_0^2 \right\}^{1/2}} = \frac{\Delta q(0)}{v_0} = \frac{b}{v_0}. \quad (97) \end{aligned}$$

В данном случае и числитель и первое слагаемое в знаменателе (97) зависят от времени. Однако величина Δt_q^* в целом от времени не зависит. При $t \neq 0$ результат существенно зависит от вклада антикоммутатора σ_{qH} , который при $t \rightarrow \infty$ становится определяющим. В то же время при $t = 0$ этот вклад обращается в нуль, и тот же результат b/v_0 для Δt_q^* получается только за счет вклада коммутатора c_{qH} .

Важнейшим итогом проведенных вычислений является то, что и для данной системы обобщенная временная характеристика

$$\Delta t^* = \Delta t_q^* = \Delta t_p^* = \frac{b}{v_0} \quad (98)$$

однозначна, не зависит от времени и существенно зависит от суммы вкладов антикоммутатора и коммутатора соответствующих операторов. Она полностью фиксирована внешними макроусловиями, определяющими формирование состояния при $t = 0$. Тем самым явно продемонстрирована принципиальная важность введенного нами обобщенного СН энергия–время (62).

В связи с этим напомним, что в случае осциллятора в когерентном состоянии в п. 2.2 задача изначально была симметрична по отношению к операторам $\hat{q}$ и $\hat{p}$. Поэтому знаменатели в формулах (75) и (76) для величин Δt_q^* и Δt_p^* отличались только взаимными перестановками коммутатора и антикоммутатора. В данном случае это явно не так. Поэтому тот факт, что и в этой модели введенное выше определение неопределенности времени Δt_A^* (61) приводит к обобщенной временной характеристике, выглядит весьма убедительным. Заметим, кстати, что согласно формуле (57) для неопределенности времени Мандельштама–Тамма величина $\Delta t_q = (\Delta q(t))/v_0$ здесь также определена. Однако вследствие того, что вклад антикоммутатора $\sigma_{qH} \neq 0$, в СН энергия–время (58) сохраняется только знак неравенства.

Вернемся теперь к обобщенному СН энергия–время (62), включающему обобщенную временную характеристику Δt^* . Прежде всего проанализируем полученное выше выражение (87) для средней энергии $\bar{\varepsilon}$. Нетрудно видеть, что эта величина отличается от выражения $(mv_0^2)/2$ для энергии свободной микрочастицы в состоянии плоской волны де Бройля с постоянной амплитудой. В нее входит вклад, учитывающий характерную ширину пакета при $t = 0$ и практически не отличающийся от энергии микрочастицы в основном состоянии бесконечно глубокой потенциальной ямы $\varepsilon_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$, где L — ширина ямы. Тем самым формирование гауссова волнового пакета определенной ширины b с точки зрения внешних макроусловий эквивалентно помещению микрочастицы в своеобразную потенциальную яму заданной ширины $L = 2\pi b$ и бесконечной глубины.

С учетом полученных формул (88) и (98) предложенное выше обобщенное СН энергия–время (62) в данном случае принимает вид

$$\Delta \varepsilon \Delta t^* = \left[\frac{\hbar}{2} \left(\frac{v_0}{b} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^2}{v_0^2} \right)^{1/2} \right] \frac{b}{v_0} = \frac{\hbar}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}^2}{v_0^2} \right)^{1/2} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (99)$$

Отметим, что минимизация этого неравенства достигается лишь для таких состояний, для которых отношение $\tilde{v}/v_0 = \hbar/(2mbv_0)$ стремится к нулю, т.е. в квазиклассическом пределе.

2.4. Эффективная частота как универсальная временная характеристика открытой микросистемы в целом. Выше на двух довольно общих моделях открытых микросистем, в которых флуктуация энергии $\Delta\varepsilon \neq 0$, было показано, что предложенное обобщение (61) понятия неопределенности времени лишено недостатков, присущих исходному определению Мандельштама–Тамма (57). Вместе с тем обобщенное СН энергия–время (62), формально основанное на этом понятии, по-прежнему нуждается в интерпретации.

Прежде всего, величину Δt^* в нем нельзя истолковать как флуктуацию времени, ибо остается неясным, в каком микросостоянии и относительно какого среднего времени микросистемы $\bar{t}$ имеет место подобная флуктуация. Но самое главное состоит в том, что правая часть СН (62) только внешне напоминает знакомую правую часть СН Гейзенберга (21) для флуктуаций координаты и импульса, содержащую постоянную $\hbar/2$. В условиях отсутствия оператора времени СН (62) демонстрирует качественно иной характер корреляции величин ε и t^* . В самом деле, среди рассмотренных модельных микросостояний нет таких, которые были бы взаимно дополнительны в духе традиционной интерпретации квантовой динамики [2], поскольку в рассмотренных выше моделях открытых микросистем всегда $\Delta t^* \neq 0$ и $\Delta\varepsilon \neq 0$.

Чтобы продвинуться дальше в интерпретации СН (62), прежде всего, было бы желательно отделить нахождение среднего значения подходящей временной характеристики открытой микросистемы от нахождения флуктуаций этой величины. С этой целью, когда это возможно, перейдем к переменным действие–угол [46] и вместо промежутка времени введем обратную ему величину — *эффективную частоту*

$$\omega_{\text{эфф}} \equiv \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial J_{\text{эфф}}}, \quad (100)$$

где $\bar{\varepsilon}$ — средняя энергия открытой микросистемы, а $J_{\text{эфф}}$ — ее эффективное действие. Как следует из приведенных ниже примеров, эта величина играет роль универсальной временной характеристики открытой микросистемы, зависящей от макроскопических параметров, фиксирующих ее микросостояние в квазиклассическом пределе.

Очевидно, что определение (100) эффективной частоты пригодно для всех открытых микросистем, средняя энергия которых представима в эквивалентных формах: либо

$$\bar{\varepsilon} = \frac{J_{\text{эфф}}^2}{2I_{\text{эфф}}} = \frac{(N_{\text{эфф}}\hbar)^2}{2I_{\text{эфф}}}, \quad (101)$$

либо

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar}{2} \frac{J_{\text{эфф}}}{I_{\text{эфф}}} \frac{J_{\text{эфф}}}{\hbar} = \frac{\hbar\omega_{\text{эфф}}}{2} N_{\text{эфф}}. \quad (102)$$

Здесь $I_{\text{эфф}} = J_{\text{эфф}}/\omega_{\text{эфф}}$ — эффективный момент инерции,

$$N_{\text{эфф}} \equiv \frac{J_{\text{эфф}}}{\hbar} \frac{m\omega_{\text{эфф}}}{\hbar} \frac{I_{\text{эфф}}}{m} = \frac{1}{l_0^2} \frac{I_{\text{эфф}}}{m} \quad (103)$$

есть эффективное число квантов действия $\hbar$, причем $N_{\text{эфф}} \gg 1$, а $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_{\text{эфф}}}$ — амплитуда квантовых нулевых колебаний с частотой $\omega_{\text{эфф}}$.

Чтобы в этом убедиться, сопоставим определения (100) и (103) с параметрами рассмотренных выше моделей открытых микросистем. Так, для осциллятора в когерентном состоянии

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{(mv)d}{md^2} = \omega_0; \quad N_{\text{эфф}} = \frac{(mv)d}{\hbar} = \frac{d^2}{l_0^2} = 2\bar{n}, \quad (104)$$

где

$$I_{\text{эфф}} = md^2; \quad J_{\text{эфф}} = (mv)d; \quad v = \omega_0 d. \quad (105)$$

Здесь d — классическая амплитуда колебаний в квазиклассическом микросостоянии с $n \approx \bar{n} \gg 1$, определяемая из условия

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m\omega_0^2 d^2}{2} \approx \hbar\omega_0 \bar{n}. \quad (106)$$

Соответственно, для свободной микрочастицы в состоянии гауссова волнового пакета

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{(mv_0)b}{mb^2} = \frac{v_0}{b}; \quad N_{\text{эфф}} = \frac{(mv_0)b}{\hbar} = \frac{b^2}{l_0^2}, \quad (107)$$

где

$$I_{\text{эфф}} = mb^2; \quad J_{\text{эфф}} = (mv_0)b. \quad (108)$$

Продemonстрируем теперь возможность нахождения выражений для $\omega_{\text{эфф}}$ и $N_{\text{эфф}}$ в других известных задачах. Например, для микрочастицы в бесконечной прямоугольной потенциальной яме шириной L энергию можно записать в виде

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2} \equiv \frac{J_{\text{эфф}}^2}{2I_{\text{эфф}}}, \quad (109)$$

где $I_{\text{эфф}} = mL^2$, $J_{\text{эфф}} = \pi \hbar n$. Тогда согласно определениям (100) и (103)

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{\pi \hbar n}{mL^2}; \quad N_{\text{эфф}} = \frac{\pi \hbar n}{\hbar} = \pi n = \frac{L^2}{l_0^2}, \quad (110)$$

где $n \gg 1$, так что в пределе $\hbar \rightarrow 0$ величина $\pi\hbar n$ является макроскопической.

Аналогичные выкладки можно осуществить и для электрона в атоме водорода. Учтем, что в этом случае энергия имеет вид

$$|\varepsilon_n| = \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (111)$$

Выбирая в качестве эффективного размера микросистемы при $n \gg 1$ радиус n -й боровской орбиты

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}, \quad (112)$$

получим

$$|\varepsilon_n| = \frac{\hbar^2 n^2}{2mr_n^2} \equiv \frac{J_{\text{эфф}}^2}{2I_{\text{эфф}}}, \quad (113)$$

где $I_{\text{эфф}} = mr_n^2$, $J_{\text{эфф}} = \hbar n$. Тогда согласно определениям (100) и (103)

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{\hbar n}{mr_n^2} = \frac{e^2}{\hbar n}; \quad N_{\text{эфф}} = \frac{\hbar n}{\hbar} = n = \frac{r_n^2}{l_0^2}, \quad (114)$$

где при $n \gg 1$ в пределе $\hbar \rightarrow 0$ величина $\hbar n$ также является макроскопической.

Покажем теперь на примере осциллятора в когерентном состоянии, что введение эффективной частоты позволяет продвинуться в интерпретации СН энергия–время (62). Вполне естественно допустить, что эффективная частота имеет смысл средней частоты осциллятора как открытой микросистемы:

$$\omega_{\text{эфф}} \equiv \bar{\omega} = \omega_0. \quad (115)$$

Что касается флуктуации обратной эффективной частоты $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$, то ее можно было бы связать с неопределенностью времени Δt^* в каком-либо конкретном когерентном состоянии. Дело в том, что левая часть СН энергия–время (62) удовлетворяет требованию масштабной инвариантности:

$$\Delta\varepsilon\Delta t^* = \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{\mu}}\right)(\sqrt{\mu}\Delta t^*) \equiv \Delta\varepsilon_\mu\Delta t_\mu^*, \quad (116)$$

где μ — любое положительное число. Изменение масштаба величин $\Delta\varepsilon$ и Δt^* (их своеобразная «перенормировка») соответствует, как известно [4], переходу от исходных состояний микросистемы к так называемым сжатым состояниям.

Тем самым вместо единственной величины Δt^* (61) фактически мы всегда имеем дело с совокупностью неопределенностей времени $\Delta t_\mu^* = \sqrt{\mu}\Delta t$,

причем каждый член этой совокупности, вообще говоря, зависит от характеристик микросостояния при фиксированных макроскопических условиях задачи. В этой ситуации выбор постоянной μ можно сделать физически осмысленным, связав ее с характеристиками конкретного микросостояния.

Один вариант выбора постоянной μ выделен тем, что в нем зависимость Δt_μ^* от характеристики микросостояния — среднего числа квантов возбуждения $\bar{n}$ — полностью исчезает. Его можно назвать *оптимально сжатым* когерентным микросостоянием. В результате соответствующая неопределенность времени становится универсальной, поскольку зависит только от макроскопических условий задачи. Для квантового осциллятора в когерентном состоянии ее можно получить из формулы (77), положив $\mu = 4\bar{n}$. Тогда $\Delta t_{4\bar{n}}^* = 1/\omega_0$, что совпадает, как и следовало ожидать, с обратной эффективной частотой осциллятора. Выбор другого варианта постоянной μ , позволяющий фиксировать флуктуацию эффективной частоты относительно ее среднего значения $\bar{\omega} = \omega_0$, требует привлечения дополнительных физических соображений.

3. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ОБРАТНАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ ЧАСТОТА

3.1. Соотношение неопределенностей энергия–обратная температура как аналог обобщенного соотношения неопределенностей энергия–время. Для открытой микросистемы введение средней эффективной частоты, относительно которой происходят ее флуктуации, позволяет в принципе связать величины Δt^* и $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ в некотором микросостоянии. Однако трудности, возникшие выше с интерпретацией СН (62), при этом автоматически не исчезнут. Они связаны с тем, что СН (62), в котором только одна из величин — энергия описывается оператором, принято сопоставлять с СН Гейзенберга (22), связывающим флуктуации двух квантово-динамических наблюдаемых с вкладом их коммутатора c_{AB} . Если же с самого начала учесть, что обратная эффективная частота $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ — это c -числовая величина, то ее коммутатор с гамильтонианом, очевидно, обращается в нуль, так что формула (22) в этом случае теряет смысл соотношения неопределенностей.

Следовательно, единственная возможность истолковать обобщенное СН энергия–время (62) в рамках квантовой динамики — это каким-то образом сопоставить его с универсальным СН Шредингера (30). Из последнего следует, что если одна из двух физических величин B и A является c -числом, то в правой части СН (30) остается только вклад σ_{AB} , который в квазиклассическом пределе переходит в коррелятор $(\Delta A \Delta B)$. При этом само СН (30) принимает форму СН Эйнштейна (33), хорошо известную из классической теории вероятностей [32].

Итак, по нашему мнению, аналогию для обобщенного СН (62) нет смысла искать в ортодоксальной квантовой динамике, основанной на СН Гейзенберга (22). Ее можно было бы найти в физической теории, в которой физическим величинам сопоставлялись бы не операторы, а c -числа, но при этом статус энергии был бы равноправен со статусом других физических величин, способных флуктуировать вместе с нею. Как следует из п. 1.3, подобную аналогию можно обнаружить в равновесной статистической термодинамике [40, 41]. С этой целью ниже мы ограничимся рассмотрением только вопроса о физическом смысле СН энергия–температура. Подобный выбор подсказан тем, что в квантовой динамике температуре, как и времени, невозможно сопоставить операторы.

Нетрудно понять, что такие физические величины, как энергия и температура для макросистемы в термостате вполне пригодны для получения СН, которое могло бы послужить аналогом обобщенного СН энергия–время (62). Во-первых, для их описания не используются операторы. Во-вторых, по определенным правилам мы можем вычислить их средние значения $\bar{\mathcal{E}}$ и $\bar{T} \equiv T_0$ и дисперсии $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT , а также коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}$. В-третьих, и это самое главное, в статистической термодинамике энергия и температура системы имеют равноправный статус, а коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}$ в правой части СН отражает корреляцию флуктуаций энергии и температуры, характер которой качественно отличен от корреляции флуктуаций наблюдаемых A и B в СН Гейзенберга (22), когда величины ΔA и ΔB обратно пропорциональны друг другу (корреляция «*в противофазе*»).

Действительно, полученное в п. 1.3 СН энергия–температура (36) для линейных величин принимает вид

$$\Delta\mathcal{E}\Delta T \geq \overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)} = k_B T^2. \quad (117)$$

Как и следовало ожидать, трактовка СН (117) качественно отличается от трактовки СН (22). Здесь флуктуации $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT прямо пропорциональны друг другу (корреляция «*в фазе*»), так что любая из этих флуктуаций и их коррелятор $\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}$ совместно обращаются в нуль при $T \rightarrow 0$. Тем самым внешний вид СН (117) в статистической термодинамике исходно не вызывает особых ассоциаций с обобщенным СН энергия–время (62).

Ситуация, однако, формально меняется, если в правой части СН (117) оставить только постоянную k_B . Разделив обе части неравенства (117) на один и тот же множитель T^2 и учитывая выражение (35) для коррелятора $\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}$, получим СН Эйнштейна энергия–обратная температура

$$\Delta\mathcal{E} \frac{k_B \Delta T}{\overline{(\Delta\mathcal{E}\Delta T)}} \equiv \Delta\mathcal{E} \Delta \left(\frac{1}{T} \right) \geq k_B, \quad (118)$$

которое уже практически не отличается по форме от СН (62). Самая существенная его особенность состоит в том, что, будучи внешне похожим на

СН Гейзенберга (21) с постоянной $\hbar/2$ в правой части, оно в *скрытой* форме отвечает качественно иному типу корреляции между флуктуациями энергии и температуры (корреляция «в фазе»), отличному от корреляции между флуктуациями наблюдаемых q и p в СН Гейзенберга (21) (корреляция «в противофазе»). *Явная* форма корреляции «в фазе» отражена в СН (117).

Таким образом, поставленная цель достигнута и СН (118), которое может служить аналогом СН энергия–время (62), построено. Входящие в СН (117) и (118) величины $\Delta\mathcal{E}$ и ΔT имеют физический смысл мер флуктуаций относительно средних значений $\bar{\mathcal{E}}$ и $\bar{T}$. В статистической термодинамике величины $\mathcal{E}$ и T , меры флуктуаций которых связаны СН Эйнштейна (33), полностью равноправны, но при этом корреляция в СН (117) энергия–температура качественно отличается от корреляции в СН Гейзенберга (22). Наконец, СН энергия–обратная температура (118) связывает меры флуктуаций энергии системы и ее обратной температуры с постоянной Больцмана k_B , служащей характеристикой неконтролируемого теплового воздействия. Указанные особенности позволяют использовать СН (118) в качестве прообраза адекватной формы обобщенного СН энергия–время.

3.2. Флуктуация эффективной частоты квантового осциллятора в когерентном состоянии. Перед нами стоит задача — выбрать наиболее адекватную форму обобщенного СН энергия–время в квантовой динамике. В ней хотелось бы сохранить зависимость от постоянной $\hbar/2$, но при этом дать ей трактовку, аналогичную трактовке СН энергия–обратная температура в статистической термодинамике. Чтобы решить эту задачу, будем впредь напрямую сопоставлять входящие в СН (62) величины с аналогичными величинами в СН (118).

Очевидно, что флуктуации энергии ε в микросистеме и энергии $\mathcal{E}$ в макросистеме качественно близки друг к другу, отличаясь лишь способом вычисления. Входящие справа в (62) и (118) фундаментальные постоянные $\hbar/2$ и k_B также аналогичны по физическому смыслу, ибо отражают наличие того или иного типа неконтролируемого воздействия на систему со стороны окружения. В этих формулах, по существу, нужно найти аналогию лишь между величинами Δt^* и $\Delta(1/T)$.

Напомним, что входящая в СН (118) величина $\Delta(1/T)$ — это мера флуктуации обратной температуры относительно ее среднего значения $(\overline{T^{-1}}) = T_0^{-1}$, где T_0 — температура термостата. Она, так же как и мера флуктуации энергии макросистемы, соответствует *единственному* макросостоянию — *состоянию теплового равновесия* и вычисляется в рамках квазитермодинамической теории флуктуаций Эйнштейна [36].

В то же время величина Δt^* , входящая в СН (62), фактически обозначает целую совокупность величин Δt_μ^* , зависящих, как и соответствующая совокупность величин $\Delta\varepsilon_\mu$, от выбора конкретного микросостояния и связанных условием (116). В общем случае произвольный член совокупности

Δt_μ^* не может быть истолкован как мера флуктуации какой-либо временной характеристики. Более того, как было показано в п.2.4, при специфическом выборе оптимально сжатого микросостояния величина Δt_μ^* фиксирована и равна $\overline{(\omega^{-1})} = \omega_0^{-1}$.

Таким образом, для выбора конкретного значения Δt_μ^* необходимо понять, как среди всех возможных микросостояний найти специфическое микросостояние с фиксированным μ , в котором величина Δt_μ^* была бы аналогом $\Delta(1/T)$. В этом случае мы сможем ее истолковать как меру флуктуации обратной эффективной частоты $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ открытой микросистемы в целом относительно ее среднего значения. Прежде чем сделать этот выбор в общем случае, проиллюстрируем существо идеи на модели квантового осциллятора в когерентном состоянии.

Для этого воспользуемся полуклассической трактовкой когерентного микросостояния как *нестационарного*. Тот факт, что в этом состоянии квантовый осциллятор не имеет фиксированной энергии, а характеризуется средней энергией $\bar{\varepsilon}$ вида (64) и ее флуктуацией $\Delta\varepsilon$ вида (65), можно истолковать как наличие *слабого затухания*, приводящего к уширению его частотного спектра.

Естественно предположить, что квантовый гармонический осциллятор в когерентном состоянии эквивалентен затухающему классическому осциллятору. Его частота ω отличается от среднего значения частоты $\bar{\omega} \equiv \omega_0$, жестко фиксированного внешними макроусловиями, так что

$$\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega, \quad (119)$$

где $\Delta\omega \ll \omega_0$ — мера флуктуации частоты ω относительно ее среднего значения ω_0 .

Чтобы представить себе дальнейшую логику рассуждений, запишем, прежде всего, выражения для средней энергии $\bar{\varepsilon}$ осциллятора и совокупности величин $\Delta\varepsilon_\mu = (1/\sqrt{\mu})\Delta\varepsilon$, удовлетворяющих условию (116) с $\Delta\varepsilon$, определяемой формулой (65):

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{\hbar\omega_0}{2} N_{\text{эфф}}; \quad \Delta\varepsilon_\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \sqrt{N_{\text{эфф}}}, \quad (120)$$

где $N_{\text{эфф}} = 2\bar{n} \gg 1$. Далее, в качестве условия, позволяющего фиксировать параметр микросостояния μ , потребуем аналогии между флуктуацией частоты ω данной микросистемы и флуктуацией температуры T модельной макросистемы в статистической термодинамике. В качестве таковой рассмотрим одномерную цепочку упруго связанных классических осцилляторов. Для нее [41]

$$\bar{\varepsilon} = (k_B T_0) N; \quad \Delta\varepsilon = (k_B T_0) \sqrt{N}, \quad (121)$$

где N — число осцилляторов в цепочке.

Сравнивая формулы (120) и (121), нетрудно убедиться в том, что выражения для средней энергии и меры ее флуктуации в этих двух моделях совпадают, если только в качестве единственного микросостояния выбрать когерентное состояние с $\mu = 2$ и заменить $k_B T_0$ на $\frac{\hbar\omega_0}{2}$, а N — на $N_{\text{эфф}}$. Подобное микросостояние мы будем называть *симметричным* когерентным микросостоянием. В нем характеристики осциллятора имеют макроскопический смысл, ибо условие $N_{\text{эфф}} \gg 1$ соответствует квазиклассическому пределу.

В данном микросостоянии (при $\mu = 2$) величина Δt_2^* может быть истолкована как мера флуктуации *обратной эффективной частоты* $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ относительно ее среднего значения $(\omega^{-1}) = \omega_0^{-1}$:

$$\Delta t_2^* \equiv \Delta \left(\frac{1}{\omega_{\text{эфф}}} \right) \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2}. \quad (122)$$

Сравнивая это определение с выражением $\Delta t_2^* = 1/(\omega_0 \sqrt{N_{\text{эфф}}})$, полученным из выражения для Δt_μ^* при $\mu = 2$ и формулы (77), имеем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{N_{\text{эфф}}}}, \quad (123)$$

откуда следует, что

$$\Delta\omega = \omega_0 / \sqrt{N_{\text{эфф}}}. \quad (124)$$

Заметим, что выражение (124) полностью аналогично выражению для меры флуктуации температуры в одномерной цепочке упруго связанных классических осцилляторов в состоянии теплового равновесия, когда

$$\Delta T = T_0 / \sqrt{N}. \quad (125)$$

Если сравнить формулу (124) для флуктуации частоты $\Delta\omega$ с аналогичной формулой для затухающего классического осциллятора [47]

$$\Delta\omega_{\text{кл}} = \omega_0 / (2Q_{\text{кл}}) \quad (126)$$

с теми же параметрами $\varkappa$ и m и добротностью $Q_{\text{кл}}$, то станет очевидно, что при $N_{\text{эфф}} \gg 1$ аналогия с таким классическим осциллятором вполне оправданна.

Из проведенного анализа следует, что для квантового осциллятора в когерентном состоянии величина Δt_μ^* имеет ясный физический смысл только в симметричном когерентном состоянии (с $\mu = 2$). В этом случае обобщенное СН энергия–время (62) переходит в СН энергия–обратная эффективная

частота

$$\Delta\varepsilon\Delta\left(\frac{1}{\omega_{\text{эфф}}}\right) = \Delta\varepsilon\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2} \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (127)$$

аналогичное СН энергия–обратная температура (118) в статистической термодинамике. Входящие в СН (127) величины $\Delta\varepsilon$ и $\Delta\omega$, определяемые формулами (65) и (124) соответственно, зависят от состояния микросистемы, а среднее значение эффективной частоты $\bar{\omega} = \omega_0$, подобно средней температуре $\bar{T} = T_0$, задается только окружающей макрообстановкой.

Иными словами, в этом фиксированном микросостоянии СН энергия–время принимает форму, в которой величины $\Delta\varepsilon$ и $\Delta(1/\omega_{\text{эфф}})$ имеют ясный математический и физический смысл. Статус величин $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\omega}$ как макропараметров микросистемы равноправен, а трактовка СН энергия–обратная эффективная частота (127) совпадает с трактовкой СН Эйнштейна (118) или (33) в статистической термодинамике, но принципиально отличается от трактовки СН Гейзенберга (22) или (21) в квантовой динамике.

3.3. Соотношение неопределенностей энергия–обратная эффективная частота для открытой микросистемы. Распространим теперь полученные результаты на более широкий класс микросистем. Ограничимся рассмотрением микросистем, которые в квазиклассическом пределе могут быть аппроксимированы квантовым осциллятором. Для них обобщенное СН энергия–время (62) в симметричном когерентном микросостоянии можно трактовать аналогично п. 3.2. Это означает, что для всех подобных микросистем справедливо СН энергия–обратная эффективная частота (127). Оно в скрытой форме учитывает корреляцию «в фазе» между энергией и эффективной частотой микросистемы подобно тому, как СН (118) учитывает корреляцию «в фазе» между энергией и температурой в статистической термодинамике.

Указанную корреляцию можно сделать явной, если от СН (127) перейти к СН энергия–эффективная частота, что соответствует переходу от СН (118) к СН (117) в статистической термодинамике. В качестве первого шага для этого достаточно домножить обе части формулы (127) на $\omega_{\text{эфф}}^2 \approx \omega_0^2$:

$$\Delta\varepsilon\Delta\omega \geq \frac{\hbar}{2}\omega_{\text{эфф}}^2, \quad (128)$$

после чего остается лишь истолковать правую часть этого СН.

С этой целью по аналогии со статистической термодинамикой будем исходить из наиболее общей зависимости $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\omega_{\text{эфф}})$ средней энергии микросистемы от эффективной частоты. Тогда ее приращение можно записать в виде

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial\omega_{\text{эфф}}}\delta\omega \equiv \rho_{\omega}\delta\omega. \quad (129)$$

Здесь ρ_ω — спектральная плотность энергии, служащая квантово-динамическим аналогом теплоемкости $C_V = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} \Big|_V$ в статистической термодинамике. Тогда по аналогии с выводом формул (34) и (35) нетрудно получить дисперсию энергии и коррелятор флуктуаций энергии и эффективной частоты

$$(\Delta \varepsilon)^2 = \rho_\omega^2 (\Delta \omega)^2; \quad (130)$$

$$\overline{(\Delta \varepsilon \Delta \omega)} = \rho_\omega (\Delta \omega)^2, \quad (131)$$

где $(\Delta \varepsilon)^2 \equiv \overline{(\delta \varepsilon)^2}$, $(\Delta \omega)^2 \equiv \overline{(\delta \omega)^2}$. Сделаем допущение, что в достаточно общем случае дисперсия эффективной частоты имеет вид

$$(\Delta \omega)^2 = \frac{\hbar/2}{\rho_\omega} \omega_{\text{эфф}}^2. \quad (132)$$

Тогда из формул (130) и (131) получим

$$(\Delta \varepsilon)^2 = \frac{\hbar}{2} \rho_\omega \omega_{\text{эфф}}^2; \quad (133)$$

$$\overline{(\Delta \varepsilon \Delta \omega)} = \frac{\hbar}{2} \omega_{\text{эфф}}^2, \quad (134)$$

что вполне аналогично формулам (34) и (35) в статистической термодинамике. Разумеется, в рассматриваемых моделях, для которых

$$\rho_\omega = \frac{\hbar}{2} N_{\text{эфф}}, \quad (135)$$

выражение (132) для дисперсии эффективной частоты оказывается справедливым. В итоге СН (128) с учетом выражений (130)–(132) можно представить в виде

$$\Delta \varepsilon \Delta \omega \geq \frac{\hbar}{2} \omega_{\text{эфф}}^2 = \rho_\omega \left(\frac{\hbar/2}{\rho_\omega} \omega_{\text{эфф}}^2 \right) = (\rho_\omega / \Delta \omega)^2 = \overline{(\Delta \varepsilon \Delta \omega)}, \quad (136)$$

аналогичном СН (116) энергия–температура, в котором корреляция между флуктуациями энергии и эффективной частоты микросистемы является явной и отвечает трактовке корреляций в статистической термодинамике.

Следует также заметить, что в полученных формулах наряду с самой эффективной частотой $\omega_{\text{эфф}}$ (100) существенная роль принадлежит ее дисперсии $\Delta \omega$, которую впредь удобнее записывать в виде

$$\Delta \omega = \sqrt{\omega_{\text{эфф}} \bar{\omega}}, \quad (137)$$

где, в частности, в рассматриваемых моделях

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar}{I_{\text{эфф}}} = \frac{J_{\text{эфф}}}{I_{\text{эфф}} N_{\text{эфф}}} = \frac{\omega_{\text{эфф}}}{N_{\text{эфф}}}. \quad (138)$$

В каком-то смысле можно считать, что $\tilde{\omega}$ является своеобразным «квантом» эффективной частоты, ибо

$$\omega_{\text{эфф}} = N_{\text{эфф}} \tilde{\omega}, \quad (139)$$

а $N_{\text{эфф}}$ имеет смысл числа таких «квантов». В частности, для таких микросистем, как микрочастица в бесконечно глубокой прямоугольной яме или электрон в атоме водорода, «квант» частоты $\tilde{\omega}$ с точностью до множителя порядка единицы совпадает с частотой ω_1 волны де Бройля для основного микросостояния.

Нетрудно видеть, что в проведенном анализе флуктуация эффективной частоты ω играет фундаментальную роль. Как и флуктуация температуры в статистической термодинамике, она определяет условия динамического равновесия открытой микросистемы с ее окружением. От нее зависит как флуктуация энергии $\Delta\varepsilon$, так и коррелятор между флуктуациями энергии и эффективной частоты $(\Delta\varepsilon\Delta\omega)$. При этом если $\Delta\omega \rightarrow 0$, обе последние величины также стремятся к нулю. Как и в статистической термодинамике, в СН (136) имеет место неравенство, если средняя энергия зависит не только от эффективной частоты, но и от других характеристик. В противном случае СН (136) представляет собой равенство, как это можно было предвидеть для симметричных когерентных микросостояний.

Таким образом, адекватная форма СН энергия–время для *симметричных* когерентных микросостояний может быть записана в двух вариантах. Это может быть либо СН энергия–обратная эффективная частота (127), где корреляция «в фазе» является *скрытой*, либо СН энергия–эффективная частота (136), где того же типа корреляция является *явной*. Очевидно, что вариант с явной корреляцией удобнее для физической интерпретации. В то же время вариант со скрытой корреляцией удобнее для формального сопоставления с СН Гейзенберга (22) и установления взаимосвязи между квантовой динамикой и статистической термодинамикой.

Сравнение формул (127) и (136) с формулами (118) и (117) показывает, что аналогия между СН энергия–время и СН энергия–температура в данном случае является полной. Это подтверждает предположение о том, что обобщенное СН энергия–время (62), в сущности, находится за рамками традиционной трактовки квантовой динамики, несмотря на наличие в нем постоянной Планка. Его следует рассматривать в качестве существенного элемента макроописания микросистемы, аналогичного описанию, принятому в статистической термодинамике для макросистемы в тепловом равновесии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.
ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СН
ШРЕДИНГЕРА В ЦЕЛОСТНОЙ ТЕОРИИ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

Проведенное исследование показало, что концепция универсальности соотношений неопределенностей позволяет обобщить понятие неопределенности времени Мандельштама–Тамма и получить физически осмысленное и математически корректное обобщенное СН энергия–время. При должном выборе состояния открытой микросистемы оно адекватно СН энергия–обратная эффективная частота, физическая интерпретация которого наиболее проста. Входящие в него величины — энергию и обратную эффективную частоту — можно рассматривать как c -числа, имеющие макроскопический смысл и аналогичные энергии и обратной температуре в статистической термодинамике.

Отмеченная аналогия, по-видимому, неслучайна. Она соответствует мнению, получившему распространение в последние годы [20, 21, 26, 28, 48], о необходимости обобщения понятия теплоты на микросистемы, находящиеся при $T = 0$. В частности, из нашего анализа следует, что для открытых микросистем в симметричном когерентном состоянии вполне возможно введение макроописания, если в стандартных формулах термодинамики одновременно произвести замены $N \rightarrow N_{\text{эфф}}$ и

$$k_B T \rightarrow \frac{\hbar \omega_{\text{эфф}}}{2} \equiv k_B T_{\text{эфф}}, \quad (140)$$

где $T_{\text{эфф}}$ — эффективная температура, впервые введенная аналогичной формулой в термодинамике черных дыр [14].

Конечно, можно рассматривать СН энергия–обратная эффективная частота и СН энергия–обратная температура как совершенно независимые неравенства, обладающие лишь внешней аналогией. Вместе с тем оба указанных соотношения являются следствиями универсальных СН Шредингера (30), полученных в квантовой динамике, но справедливых и в пределе $\hbar \rightarrow 0$, т.е., по-видимому для всей неклассической физики. В связи с этим можно высказать *эвристическую гипотезу о глобальной взаимосвязи между квантовой динамикой и равновесной статистической термодинамикой* [26] на основе теории флуктуаций.

Согласно этой гипотезе, в будущей целостной теории неклассической физики роль *обобщенной температуры* $T^{\text{об}}$ должна играть величина

$$T^{\text{об}} \equiv \frac{1}{k_B} \Theta(T_{\text{эфф}}, T) = \frac{1}{k_B} \left[\frac{\hbar \omega_{\text{эфф}}}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega_{\text{эфф}}}{2 k_B T} \right] = T_{\text{эфф}} \operatorname{cth} \left(\frac{T_{\text{эфф}}}{T} \right), \quad (141)$$

где эффективная частота $\omega_{\text{эфф}}$ и эффективная температура $T_{\text{эфф}}$ связаны формулой (140). Как следует из определения обобщенной температуры (141), при низких температурах $T^{\text{об}}$ переходит в $T_{\text{эфф}}$, а при высоких — в T .

Очевидно также, что при $T \rightarrow 0$ обобщенная температура $T^{\text{об}}$ стремится к ненулевому предельному значению — эффективной температуре $T_{\text{эфф}}$:

$$T^{\text{об}} \rightarrow T_{\text{эфф}} = \frac{\hbar\omega_{\text{эфф}}}{2k_{\text{В}}T} \neq 0. \quad (142)$$

Поскольку предельное значение $T_{\text{эфф}}$ связано с энергией нулевых колебаний, имеющих эффективную частоту $\omega_{\text{эфф}}$, оно никогда не обращается в нуль. Такой вывод из сформулированной гипотезы может придать новый смысл термодинамическому постулату о «недостижимости» абсолютного нуля температуры (теореме Нернста) [50], который ныне активно обсуждается в связи с термодинамикой черных дыр [51].

Входящая в определение (141) величина $\Theta(T_{\text{эфф}}, T)$ совпадает со средней энергией квантового осциллятора, обладающего эффективной частотой $\omega_{\text{эфф}}$. Ее естественно назвать *функцией Планка*. Она в концентрированном виде отражает одновременное существование квантового и теплового воздействий и имеет смысл целостной энергетической характеристики неконтролируемого воздействия окружения на систему, к которой применима модель осциллятора. Недаром эта функция появилась еще в первой фундаментальной работе Планка [51] о равновесном тепловом излучении, в котором такое целостное неконтролируемое воздействие действительно имеет место. За прошедшие сто лет функция $\Theta(T_{\text{эфф}}, T)$ вошла во многие формулы, весьма далекие от проблем теплового излучения. Однако ее роль как универсальной целостной характеристики неконтролируемого воздействия подчеркивалась до сих пор недостаточно.

Исходя из сформулированной гипотезы и проведенного выше анализа, можно предположить, что для развития будущей целостной теории окажется существенным СН энергия–обратная обобщенная температура вида

$$\Delta\mathcal{E}\Delta\left(\frac{1}{T^{\text{об}}}\right) \geq k_{\text{В}}, \quad (143)$$

охватывающее как квантовую динамику, так и статистическую термодинамику. Как нетрудно видеть, оно переходит при $T_{\text{эфф}} \ll T$ в термодинамическую формулу (118), а при $T_{\text{эфф}} \gg T$ — в квантово-динамическую формулу (127).

Разумеется, построение полной теории, объединяющей квантовую динамику и равновесную статистическую термодинамику, еще впереди. Вместе с тем потребность в ней возрастает с каждым днем, особенно в связи с активным изучением мезоскопических и низкоразмерных объектов, в которых квантовые и тепловые флуктуации могут проявляться одновременно [52]. Все это делает актуальным создание единой теории флуктуаций, дальнейшее развитие макроописания открытых микросистем и его объединение с традиционной термодинамикой в рамках обобщенной статистической термодинамики.

По нашему мнению, на этом пути существенную роль могут сыграть дальнейшие применения универсальных СН Шредингера, которые позволяют органически учесть наличие в природе различных типов корреляции физических величин.

Автор выражает глубокую благодарность руководству ОИЯИ и Лаборатории теоретической физики за многократно предоставленную возможность обсуждения полученных в данной работе результатов, и особую признательность — М.И. Широкову за тщательное рецензирование статьи и конструктивную критику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heisenberg W.Z.* // *Physik*. 1927. V.43. P.172. Перевод: УФН. 1977. Т.122, №4. С.657.
2. *Мессиа А.* Квантовая механика. М.: Наука, 1978. Т.1.
3. *Bohr N.* // *Nature*. 1928. V.121. P.580.
4. *Додонов В.В., Манько В.И.* // *Тр. ФИАН*. 1987. Т.183. С.5.
5. *Терлецкий Я.П.* // *Тр. УДН*. 1974. Т.70, сер. «Физика». С.8, 3.
6. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.
7. *Блохинцев Д.И.* Принципиальные вопросы квантовой механики. М.: Наука, 1966.
8. *Ballentine L.* // *Rev. Mod. Phys.* 1970. V.42. P.352.
9. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.* Лекции по квантовой механике. Л.: Из-во ЛГУ, 1980.
10. *Horne D., Whitaker M.* // *Phys. Report*. 1992. V.210, No.4. P.224.
11. *Холеев А.С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980.
12. *Холеев А.С.* Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры. М.: Знание, 1985.
13. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Энергоатомиздат, 1980.
14. *Новиков И.Д., Фролов В.П.* Физика черных дыр. М.: Наука, 1981.
15. *Фролов В.П.* Гравитация, ускорение, кванты. М.: Знание, 1988.
16. *Furth R.* // *Z. Physik*. 1933. V.81. P.143.
17. *Guth E.* // *Adv. in Chem. Phys.* 1969. V.15. P.363.
18. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
19. *Uffink J., van Lith J.* // *J. Found. Phys.* 1998. V.28. P.323.
20. *Кадошцев Б.Б.* Динамика и информация. М., 1997.
21. *Киржниц Д.А.* // *Соросовский образовательный журнал*. 1997. Т.6. С.84.
22. *Мамардашвили М.К.* Классический и неклассический идеалы рациональности. М.: Лабиринт, 1995.
23. *Степин В.С.* Философская антропология и философия науки. М.: Наука, 1992.

24. *Tisza L.* // *Rev. Mod. Phys.* 1963. V.35, No.1. P.151.
25. *Суханов А.Д., Голубева О.Н.* // Тр. XI Междунар. конф. по логике, методологии и философии науки. Обнинск, 1995. Т.VIII. С.160.
26. *Sukhanov A.D.* On the Global Interrelation between Quantum Dynamics and Thermodynamics // *Proc. of XI Intern. Conf. «Problems of Quantum Field Theory»*, 1998. Dubna, 1999. P.232.
27. *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Броуновское движение. М.: ОНТИ, 1936.
28. *Суханов А.Д.* // *ТМФ.* 2000. Т.125, вып.2. С.221.
29. *Гейзенберг В.* Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука, 1989. 227 с.
30. *Бом Д.* Квантовая теория. М.: Физматлит, 1961.
31. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
32. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1971.
33. *Robertson H.P.* // *Phys. Rev.* 1929. V.34. P.163.
34. *Шредингер Э.* Избранные труды по квантовой механике. М., 1976. 210 с.
35. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
36. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр. Т.3. М., 1966. С.216.
37. *Мюнстер А.* Термодинамика необратимых процессов. М., 1962. С.36
38. *Rosenfeld L.* // *Proc. of E. Fermi School of Physics.* N.Y., 1962. V.14. P.1.
39. *Mandelbrot B.* // *J. Math. Phys.* 1964. V.5. P.164.
40. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.5: Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
41. *Ансельм А.И.* Основы статистической физики и термодинамики. М.: Наука, 1973.
42. *Крылов Н.С., Фок В.А.* // *ЖЭТФ.* 1947. Т.17, вып.2. С.93.
43. *Wigner E.P.* Aspects of Quantum Theory / Eds. A.Salam, E.P.Wigner. Cambridge, 1972. P.237.
44. *Мандельштам Л.И., Тамм И.Е.* // *Известия АН СССР, сер. физ.* 1945. Т.9, вып.1/2. P.122.
45. *Шифф Л.* Квантовая механика. М.: Мир, 1959.
46. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975.
47. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. М.: Физматлит, 1959.
48. *Башикиров А.Г., Суханов А.Д.* // *ТМФ.* 2000. Т.123, вып.1. С.107.
49. *Bashkirov A.G., Sukhanov A.D.* // *Physica A.* 2001 (in press).
50. *Israel W.* // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V.57. P.397.
51. *Планк М.* Избранные труды. М., 1975. С.251.
52. *Цуи Д.* // *УФН.* 2000. Т.170, №3. С.320.

УДК 51-7:39.12; 539.12.01

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Е.И.Бухбиндер, Б.А.Оврут

Пенсильванский университет, Филадельфия, США

И.Л.Бухбиндер

Томский государственный педагогический университет, Томск

Е.А.Иванов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С.М.Кузенко

Западно-Австралийский университет, Недландс, Австралия

Дается обзор нового подхода к нахождению эффективного действия в $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметричных полевых теориях. Подход основан на формулировке этих теорий в терминах не подчиненных связей суперполей в гармоническом суперпространстве. Обсуждается построение суперполевых моделей $N = 2$ суперсимметричной теории поля (гипермультиплет, $N = 2$ суперсимметричная теория поля Янга–Миллса). Излагается $N = 2$ метод фонового поля. Рассматривается пертурбативное нахождение голоморфного эффективного потенциала в $N = 2$ моделях и нахождение неголоморфного эффективного потенциала в $N = 4$ теории поля Янга–Миллса, определяющего точное низкоэнергетическое эффективное действие в этой теории. Обсуждаются возможные приложения низкоэнергетического эффективного действия в суперсимметричных теориях и некоторые открытые проблемы. Проводится сравнение данного подхода с другими.

Review of new approach to finding effective action in $N = 2$ and $N = 4$ supersymmetric theory is given. The approach is based on the formulation of these theories in terms of unconstrained superfields in harmonic superspace. Construction of superfield models of $N = 2$ supersymmetric field theory (hypermultiplet, $N = 2$ supersymmetric Yang–Mills theory) is discussed. $N = 2$ background field method is considered. Perturbative holomorphic effective potential in $N = 2$ models and non-holomorphic effective potential in $N = 4$ Yang–Mills field theory, defining exact low-energy effective action in this theory, are studied. Possible applications of low-energy effective action in supersymmetric theories and some open problems are discussed. Comparison of given approach with others is performed.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективное действие является одним из центральных объектов квантовой теории поля, определяющим квантовое поведение полевых моделей вне массовой оболочки. Проблема нахождения эффективного действия тесно связана с решением таких фундаментальных задач квантовой теории поля, как определение структуры вакуума, нахождение квантовых поправок к классическим уравнениям движения, исследование фазовых переходов и динамического нарушения симметрии, изучение квантовой динамики в сильных фоновых полях. Понятие эффективного действия является чрезвычайно удобным для рассмотрения многих аспектов квантования и перенормировки калибровочных теорий, включая вопросы аномалий. При этом оказывается, что построение эффективного действия в различных полевых моделях для решения различных задач основывается на использовании ряда общих или аналогичных методов. По этой причине проблема нахождения эффективного действия в настоящее время рассматривается как самостоятельное направление в рамках квантовой теории поля (обсуждение проблем эффективного действия см., например, в книгах [1–6]).

Точное нахождение эффективного действия означает точное решение в соответствующей модели квантовой теории поля и в общем случае невозможно. В связи с этим для изучения эффективного действия используются различные приближенные подходы, из которых мы отметим петлевое разложение и разложение по производным. В последнем случае эффективное действие ищется в виде ряда по пространственно-временным производным своих функциональных аргументов. Такое разложение тесно связано с понятием низкоэнергетического эффективного действия. Этот объект используется для описания физических явлений, в которых основную роль играют частицы и поля с массами, энергиями и импульсами, ограниченными сверху некоторым характерным масштабом. Примером подобной ситуации служит система взаимодействующих полей разных масс, легких и тяжелых полей. Тогда для описания квантовых аспектов легких полей достаточно рассмотреть эффективное действие, зависящее только от этих полей, а роль масштаба играют массы тяжелых полей. Поскольку разложение по производным физически означает учет все более высоких степеней энергии-импульса, то наличие обрезającego масштаба накладывает ограничение сверху на количество членов разложения эффективного действия по производным. При этом в ведущем низкоэнергетическом приближении эффективное действие содержит только первые не исчезающие члены в указанном разложении. Это могут быть члены вообще без производных, а если по каким-либо причинам они отсутствуют, то члены разложения с низшими производными. Очевидно, что именно низкоэнергетическое эффективное действие позволяет исследовать структуру вакуума полевой модели и динамику ее низколежащих возбуждений.

Изучение феноменологических и формальных аспектов суперсимметричных полевых теорий занимает значительное место в современных работах по теоретической физике высоких энергий. Интерес к суперсимметрии в теории поля обусловлен многими причинами, из которых мы отметим три:

1. Суперсимметрия обеспечивает естественный механизм объединения бозонов и фермионов и, следовательно, должна рассматриваться как составной элемент любой теории, претендующей на роль объединенной теории фундаментальных взаимодействий (формулировка суперсимметричных теорий дана, например, в книгах [7–9]).

2. Суперсимметрия решает ряд проблем стандартной модели большого объединения, таких как, например, проблема иерархий, проблема строгого пересечения трех калибровочных бегущих констант связи в одной точке, проблема времени жизни протона (см. обсуждение феноменологических аспектов суперсимметрии в [10,11]).

3. По современным представлениям объединенной теорией всех фундаментальных взаимодействий, включая гравитационное, является теория суперструн. В этой теории суперсимметрия играет ключевую роль, обеспечивая отсутствие тахионов в спектре струны. Характерная энергетическая шкала теории суперструн задается планковской энергией. При переходе к энергиям, много меньшим планковской, мы получаем эффективную (низкоэнергетическую с точки зрения теории суперструн) суперсимметричную теорию поля (см. вывод суперсимметричной теории поля из теории суперструн в книге [12]).

Конечно, на доступных в настоящее время энергиях суперсимметрия не проявляет себя, что может означать ее нарушение на некотором масштабе. В связи с этим изучение именно низкоэнергетических квантовых аспектов суперсимметричных полевых моделей должно представлять особый интерес с точки зрения нахождения возможных феноменологических следствий существования суперсимметрии. Оказывается, что в $N = 2$ и $N = 4$ расширенных суперсимметричных теориях Янга–Миллса низкоэнергетическое эффективное действие может быть установлено точно.

В теориях, обладающих глобальными или калибровочными симметриями, не нарушенными аномалиями, эффективное действие, в частности низкоэнергетическое эффективное действие, также должно обладать симметриями. При этом возникает проблема развития методов построения эффективного действия, явно обеспечивающих наличие симметрий на всех этапах исследования. Хорошо известно, что адекватная и простая формулировка четырехмерных $N = 1$ суперсимметричных теорий поля достигается в терминах суперполей. Соответствующая квантовая формулировка, обеспечивающая явную $N = 1$ суперсимметрию, построена достаточно давно и широко используется (см., например, [7–9]).

В теориях с $N = 1$ суперсимметрией, таких как модель Весса–Зумино, $N = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса, структура эффективного действия изучена достаточно подробно (см., например, книги [7–9]). В частности, в работах [13–15] был найден суперполевым эффективным потенциал и эффективный потенциал вспомогательных полей в модели Весса–Зумино, в [16–18] был найден киральный эффективный потенциал в той же теории, а в [19] был развит метод фонового поля для $N = 1$ теории Янга–Миллса, который в дальнейшем был использован для исследования ренормализационных свойств и нахождения эффективного действия [20–24]. Методы нахождения эффективного действия в $N = 1$ моделях были усовершенствованы в недавних работах [92–96, 104].

Однако уже в теориях с $N = 2$ суперсимметрией (и вообще в теориях с расширенной суперсимметрией) возникают существенные проблемы с построением квантовой теории. В компонентных формулировках это выражается в том, что алгебра суперсимметрии является замкнутой с точностью до уравнений движения. В суперполевом подходе требование неприводимости суперполевым представлений алгебры $N = 2$ суперсимметрии приводит к дифференциальным условиям на суперполя (связям). В итоге $N = 2$ суперсимметричные теории поля формулируются в стандартном $N = 2$ суперпространстве в терминах подчиненных связей суперполей (о $N = 2$ суперсимметрии см. книгу [8] и обзор [25]). Проблемы с решением связей через неограниченные суперполя (препотенциалы) приводят к трудностям в построении теории возмущений и исследовании эффективного действия. Для специального мультиплета материи («ослабленного» гипермультиплета Хау–Стелла–Таунсенда [26]) и калибровочного мультиплета соответствующие связи были решены в [26–29]. Однако найденные в этих работах формулировки слишком громоздки для использования в непосредственных вычислениях на квантовом уровне.

Значительными достоинствами обладает подход к суперполевному описанию $N = 2$ суперсимметричных теорий, основанный на идее гармонического суперпространства [30–34]. Связи для гипермультиплетов материи и $N = 2$ калибровочной теории оказывается возможным решить в гармоническом суперпространстве. Это приводит к тому, что $N = 2$ суперсимметричные теории поля могут быть сформулированы в гармоническом суперпространстве в терминах суперполей, не подчиненных связям. Основная идея этого подхода заключается в добавлении к стандартному $N = 2$ суперпространству сферы $SU(2)/U(1)$ и выделении замкнутого относительно преобразований $N = 2$ суперсимметрии аналитического подпространства, параметризуемого меньшим числом антикоммутирующих переменных по сравнению со стандартным $N = 2$ суперпространством. Подход гармонического суперпространства показал, что для описания мультиплетов материи с замкнутой алгеброй $N = 2$ суперсимметрии вне массовой оболочки необходимо включение бесконечного

числа вспомогательных полей, а для описания калибровочного мультиплетта необходимо включение бесконечного числа чисто калибровочных степеней свободы. Несмотря на то, что гармоническое суперпространство имеет более сложную структуру по сравнению со стандартным $N = 2$ суперпространством, этот подход оказывается удобным для исследования квантовых эффектов в $N = 2$ суперсимметричных теориях [32].

Одним из основных свойств низкоэнергетического эффективного действия в суперсимметричной теории поля является голоморфность (см., например, обзоры [35, 36]). Оно заключается в том, что в суперсимметричных теориях с комплексными суперполями, определенными на некотором подпространстве полного суперпространства, квантовые поправки к эффективному действию часто возникают в виде голоморфных функций от этих суперполей, интегрируемых по соответствующему подпространству. Примером голоморфности в $N = 1$ суперсимметрии является уже упоминавшийся киральный потенциал [16–18]. Гораздо более важную роль играет голоморфность в $N = 2$ суперсимметрии. Опираясь на утверждение, что низкоэнергетическое эффективное действие в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса является голоморфной функцией $N = 2$ напряженности W (его структура была предложена в [37]), Зайберг и Виттен смогли точно найти его с учетом непертурбативных вкладов в случае теории с калибровочной группой $SU(2)$, спонтанно нарушенной до $U(1)$, используя идею дуальности [38] (см. также обзоры [39–43]). Работа [38] стимулировала интерес к изучению эффективного действия в $N = 2$ суперсимметрии. Полученные Зайбергом и Виттеном результаты были обобщены на другие калибровочные группы и на теории с материей [44–59]. Было предпринято детальное исследование утверждения о голоморфности низкоэнергетического эффективного действия и вычисление первых неведущих вкладов на основе $N = 1$ суперполевых формулировок $N = 2$ суперсимметричных теорий [51–54]. Другим примером голоморфности в $N = 2$ суперсимметрии является аналитический эффективный потенциал, интегрируемый по аналитическому подпространству гармонического суперпространства [55]. Важно отметить, что как голоморфные, так и аналитические члены в эффективном действии возникают только в теориях с центральными зарядами.

Исключительное место в квантовой теории поля занимает $N = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса. Это связано с тем, что она является максимально суперсимметричной, ультрафиолетово-конечной, конформно-инвариантной теорией [23, 56–59]. Кроме того, имеются сильные аргументы в пользу того, что она самодуальна относительно непертурбативных $SL(2, Z)$ -преобразований [60, 61]. $N = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса может быть записана в терминах $N = 2$ суперполей в гармоническом суперпространстве. Для этого необходимо к действию $N = 2$ теории Янга–Миллса прибавить действие гипермультиплетта. Полученная теория обладает

дополнительной $N = 2$ суперсимметрией и инвариантна относительно преобразований $N = 4$ суперсимметрии [32]. Эффективное действие в такой теории является суперфункционалом как $N = 2$ напряженности W , так и гипермультиплета. В работе [62] Дайном и Зайбергом было показано, что в $N = 4, SU(2)$ калибровочной теории в кулоновской фазе низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N = 2$ векторного мультиплета, имеет вид

$$\Gamma[W, \bar{W}] = \int d^4x d^8\theta \mathcal{H}(W, \bar{W}),$$

$$\mathcal{H}(W, \bar{W}) = c \ln \frac{W^2}{\Lambda^2} \ln \frac{\bar{W}^2}{\Lambda^2}.$$

Здесь Λ — произвольный масштаб, c — произвольная константа. Существуют сильные указания в пользу того, что $\mathcal{H}(W, \bar{W})$ возникает в теории возмущений исключительно как однопетлевой эффект [62, 63], причем непертурбативные поправки вообще отсутствуют [64, 65]. Низкоэнергетическое эффективное действие $\Gamma[W, \bar{W}]$ не зависит от масштаба Λ , то есть инвариантно относительно замены $\Lambda \rightarrow \Lambda' = \Lambda\alpha$. Это проявление конформной инвариантности теории. Коэффициент c был найден в работах [66–68], он равен $1/4(4\pi)^2$. Таким образом, низкоэнергетическое эффективное действие в данной теории найдено точно!

В последнее время выяснилось, что проблема низкоэнергетического эффективного действия в $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса тесно связана с современным развитием теории струн. Мы остановимся здесь на двух аспектах.

Теория струн предсказывает существование нового типа протяженных объектов, так называемых D-бран [106] (см. также обзоры [107, 108]), причем низкоэнергетическая динамика p -мерных D-бран описывается $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теорией поля в пространстве размерности $p + 1$. Отсюда вытекает, что взаимодействие трехмерных D-бран, называемых D3-бранами, может быть изучено в рамках четырехмерной $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса. Система из n параллельных D3-бран отвечает теории поля с калибровочной группой $[U(1)]^n$ [108]. Поэтому динамика такой системы должна определяться низкоэнергетическим эффективным действием $N = 4$ теории поля Янга–Миллса, в которой калибровочная группа спонтанно нарушена до $[U(1)]^n$. Рассмотрение в рамках теории струн указывает на то, что в статическом пределе взаимодействие D-бран описывается лагранжианом Борна–Инфельда (см., например, [109]) и, как предполагается, этот лагранжиан может быть выведен из низкоэнергетического эффективного действия $N = 4$ теории поля Янга–Миллса. В настоящее время установлено, что неголоморфный эффективный потенциал в $N = 4$ теории поля Янга–Миллса воспроизводит члены четвертого порядка по напряженности абелева

векторного поля в разложении лагранжиана Борна–Инфельда в ряд по степеням напряженности (см., например, [102]). Общий вывод лагранжиана Борна–Инфельда из эффективного действия $N = 4$ теории поля Янга–Миллса является открытой проблемой.

Исследование D3-бран в теории струн привело к представлению об определенной эквивалентности четырехмерной $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(n)$ и теории суперструн типа ПВ (см. классификацию суперструн, например, в [12]), компактифицированной на многообразии $AdS_5 \times S^5$, где S^5 — пятимерная сфера, AdS_5 — пятимерное пространство «анти де Ситтера» [110] (см. также обзоры [111–114]). Эта эквивалентность позволяет использовать методы $N = 4$ суперсимметричной теории поля для изучения вопросов теории струн, а также использовать методы теории струн для изучения эффективного действия в теории поля. В обоих случаях проблема нахождения эффективного действия в $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса играет важную роль.

В предлагаемом обзоре излагается общий подход к вычислению низкоэнергетического эффективного действия в $N = 2$, $SU(2)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в кулоновской фазе, в теории массивного гипермультиплета во внешнем абелевом калибровочном суперполе, а также в $N = 4$, $SU(n)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой, нарушенной до максимального тора, на основе метода гармонического суперпространства. Тем самым мы охватываем все основные задачи, поставленные и изучаемые в современной литературе по $N = 2$ суперсимметричной квантовой теории поля. Под низкоэнергетическим эффективным действием понимается вклад в эффективное действие, локальный по пространственно-временным переменным и содержащий наименьшее возможное число производных в компонентах. В указанных выше теориях с $N = 2$ суперсимметрией, как показано в работе, низкоэнергетическое эффективное действие определяется голоморфной функцией. Формализм гармонического суперпространства гарантирует наличие явной $N = 2$ суперсимметрии на каждом этапе вычислений. В случае теории с $N = 4$ суперсимметрией низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N = 2$ векторного мультиплета, является вещественной функцией.

Авторы обзора ставили своей целью продемонстрировать эффективность метода гармонического суперпространства в $N = 2$ суперсимметричной квантовой теории поля. Мы разрабатываем технику работы с $N = 2$ гармоническими суперграфами и показываем, что в $N = 2$ полевых моделях она обладает теми же преимуществами и достоинствами перед другими методами, что и техника $N = 1$ суперграфов в $N = 1$ полевых моделях. При этом мы сознательно уделяем достаточно большое внимание изложению многих деталей вычислений, во-первых, потому, что в них используются новые нетривиальные приемы и, во-вторых, чтобы показать, как реально применяется

метод гармонического суперпространства в $N = 2$ квантовой теории поля, и привлечь внимание к богатым потенциальным возможностям этого метода.

В первом разделе дан подробный обзор формулировок $N = 2$ суперсимметричных теорий поля в гармоническом суперпространстве. Хорошо известно, что основными мультиплетами, обеспечивающими неприводимое представление $N = 2$ суперсимметрии вне массовой поверхности, являются гипермультиплет, объединяющий скалярные и спинорные поля, и $N = 2$ векторный мультиплет, содержащий векторное поле и соответствующие суперпартнеры (см., например, [7, 8, 11]). Гипермультиплет аналогичен скалярному киральному мультиплету в $N = 1$ суперсимметрии и используется для описания $N = 2$ материи, а $N = 2$ векторный мультиплет применяется для формулировки $N = 2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса. Все перенормируемые $N = 2$ модели строятся только из двух этих мультиплетов. Построение $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса в терминах $N = 2$ суперполей требует использования как $N = 2$ векторного мультиплета, так и $N = 2$ гипермультиплета в присоединенном представлении. В последующих разделах данной работы рассматриваются квантовые аспекты моделей, содержащих все указанные мультиплеты.

Второй раздел посвящен методу фонового поля для $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса и нахождению общей структуры эффективного действия. Основное достоинство метода фонового поля заключается в том, что он позволяет сохранять явно как $N = 2$ суперсимметрию, так и калибровочную инвариантность на каждом этапе вычислений.

Третий раздел посвящен непосредственному вычислению голоморфного эффективного действия массивного абелева гипермультиплета и $N = 2$, $SU(2)$ калибровочной теории в кулоновской фазе. Рассматриваемая здесь модель является простейшей $N = 2$ теорией, иллюстрирующей основные свойства более общих теорий. Показано, что причина появления в них голоморфных вкладов заключается в наличии в этих теориях центрального заряда.

Четвертый раздел посвящен вычислению низкоэнергетического эффективного действия в $N = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(n)$, спонтанно нарушенной до максимальной коммутативной подгруппы $[U(1)]^{n-1}$. Показано, что низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N = 2$ калибровочного мультиплета, является вещественной функцией. Ответ легко обобщается на случай произвольной полупростой калибровочной группы.

Представленный материал основан на работах [63, 68–79].

1. $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Гармоническое суперпространство. Гармоническое суперпространство [30,31] получается добавлением к стандартному $N = 2$ суперпростран-

ству с координатами $(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i})$ сферы $S^2 \sim SU(2)/U(1)$. Группа $SU(2) \sim S^3$ параметризуется изоспинорными гармониками $u_i^\pm$:

$$\begin{aligned} u^{+i} u_i^- &\equiv (u^+ u^-) = 1, \leftrightarrow u_i^+ u_j^- - u_j^+ u_i^- = \epsilon_{ij}, \\ u_i^- &= \overline{u^{+i}}, \quad u_i^\pm = \epsilon_{ij} u^{\pm j}, \quad \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}, \quad \epsilon_{12} = 1; i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Функции на сфере S^2 можно описывать как функции на сфере S^3 с фиксированным $U(1)$ -зарядом [80], поэтому гармоническое суперпространство можно параметризовать координатами $(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}, u_i^\pm)$, при условии, что суперполя на нем переносят фиксированный $U(1)$ -заряд. Например, суперполе $\Phi^{(q)}$ с зарядом q имеет следующее гармоническое разложение

$$\Phi^{(q)}(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}, u_i^\pm) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(i_1 \dots i_{n+q} j_1 \dots j_n)}(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}) u_{i_1}^+ \dots u_{i_{n+q}}^+ u_{j_1}^- \dots u_{j_n}^-. \quad (1.1.2)$$

Коэффициенты в (1.1.2) представляют собой обычные u -независящие суперполя, реализующие неприводимые представления группы $SU(2)$.

Обычное комплексное сопряжение переводит функции с зарядом q в функции с зарядом $-q$, поэтому на множестве заряженных (супер)полей нельзя определить вещественные (супер)поля в обычном смысле. Однако можно ввести вещественные суперполя относительно обобщенного сопряжения $\sim$, которое определяется следующим образом:

$$\widetilde{u^{\pm i}} = -u_i^\pm, \quad \widetilde{u_i^\pm} = u^{\pm i}. \quad (1.1.3)$$

Интеграл по S^2 определяется следующим образом:

$$\int du \, 1 = 1, \quad \int du \, u_{(i_1}^+ \dots u_{i_n}^+ u_{j_1}^- \dots u_{j_m}^-) = 0, \quad n + m > 0, \quad (1.1.4)$$

при этом, в силу сохранения $U(1)$ заряда на S^2 , интеграл от любой заряженной (супер)функции равен нулю.

Далее, на S^3 можно определить $SU(2)$ -ковариантные производные, согласованные с условиями (1.1.1):

$$D^{++} = u^{+i} \frac{\partial}{\partial u^{-i}}, \quad D^{--} = u^{-i} \frac{\partial}{\partial u^{+i}}, \quad D^0 = u^{+i} \frac{\partial}{\partial u^{+i}} - u^{-i} \frac{\partial}{\partial u^{-i}}. \quad (1.1.5)$$

Эти производные сами образуют алгебру Ли группы $SU(2)$:

$$[D^{++}, D^{--}] = D^0, \quad [D^0, D^{++}] = 2D^{++}, \quad [D^0, D^{--}] = 2D^{--}. \quad (1.1.6)$$

Они имеют простую интерпретацию как генераторы правых $SU(2)$ вращений по отношению к зарядовым индексам $(+, -)$:

$$D^{\pm\pm}u^{\pm i} = 0, \quad D^{\pm\pm}u^{\mp i} = u^{\pm i}, \quad D^0u^{\pm i} = \pm u^{\pm i}. \quad (1.1.7)$$

Наряду со стандартным (или центральным) базисом $(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}, u_i^\pm)$ в гармоническом суперпространстве можно ввести аналитический базис $(x_A^\mu, \theta_\alpha^\pm, \bar{\theta}_\alpha^\pm, u_i^\pm)$:

$$x_A^\mu = x^\mu - 2i\theta^{(i}\sigma^\mu\bar{\theta}^{j)}u_i^+u_j^-, \quad \theta_\alpha^\pm = \theta_\alpha^i u_i^\pm, \quad \bar{\theta}_\alpha^\pm = \bar{\theta}_\alpha^i u_i^\pm. \quad (1.1.8)$$

Преобразования $N = 2$ суперсимметрии в аналитическом базисе имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta x_A^\mu &= -2i(\epsilon^i\sigma^\mu\bar{\theta}^+ + \theta^+\sigma^\mu\bar{\epsilon}^i)u_i^-, & \delta\theta_\alpha^+ &= \epsilon_\alpha^i u_i^+, & \delta\bar{\theta}_\alpha^+ &= \bar{\epsilon}_\alpha^i u_i^+, \\ \delta\theta_\alpha^- &= \epsilon_\alpha^i u_i^-, & \delta\bar{\theta}_\alpha^- &= \bar{\epsilon}_\alpha^i u_i^-, & \delta u_i^\pm &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Здесь ϵ_α^i — антикоммутирующий параметр.

Важнейшее свойство состоит в том, что координаты $\zeta_A^M = (x_A^\mu, \theta_\alpha^+, \bar{\theta}_\alpha^+)$, $u_i^\pm$ образуют подпространство, замкнутое относительно преобразований $N = 2$ суперсимметрии. Оно называется аналитическим суперпространством и играет фундаментальную роль в $N = 2$ суперсимметрии, подобную роли кирального суперпространства в $N = 1$ суперсимметрии.

На аналитическом подпространстве можно определить аналитические суперполя. Они не зависят от θ_α^- и $\bar{\theta}_\alpha^-$, т.е. удовлетворяют условию

$$D_\alpha^+\Phi^{(q)}(\zeta_A^M, u_i^\pm) = \bar{D}_\alpha^+\Phi^{(q)}(\zeta_A^M, u_i^\pm) = 0. \quad (1.1.10)$$

Здесь

$$D_\alpha^+ = D_\alpha^i u_i^+ = \frac{\partial}{\partial\theta^-_\alpha}, \quad \bar{D}_\alpha^+ = \bar{D}_\alpha^i u_i^+ = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^-_\alpha}, \quad (1.1.11)$$

и D_α^i , $\bar{D}_\alpha^i$ — спинорные ковариантные производные в стандартном суперпространстве. Их явный вид приведен в приложении. Там же дана алгебра спинорных и гармонических ковариантных производных.

Условия аналитичности (1.1.10) порождают связи на компоненты суперполя $\Phi^{(q)}$, заданного гармоническим разложением (1.1.2). Рассмотрим условие аналитичности

$$D_\alpha^+\Phi^{(q)}(\zeta_A^M, u_i^\pm) = 0.$$

Представляя D_α^+ в виде $D_\alpha^i u_i^+$ и используя определение гармоник (1.1.1), можно показать, что это условие эквивалентно следующему бесконечному набору условий на обычные $N = 2$ суперполя в разложении (1.1.2):

$$D_\alpha^{(i}\Phi^{i_1\dots i_{2n+q})} = \frac{n+1}{2n+q+3}D_{\alpha l}\Phi^{(ii_1\dots i_{2n+q}l)}. \quad (1.1.12)$$

Для $\bar{D}_\alpha^+$ имеет место аналогичное соотношение.

Формула (1.1.12) показывает, как аналитическое суперполе, записанное в центральном базисе, превращается в бесконечную пирамиду обычных суперполей, подчиненных связям.

В заключение этого раздела мы введем гармонические δ -функции и распределения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Гармоническая δ -функция (δ -функция на S^2) определяется условием

$$\int du_2 \delta^{(q,-q)}(u_1, u_2) \Phi^{(p)}(u_2) = \Phi^{(q)}(u_1) \delta^{pq} \quad (1.1.13)$$

и удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} \delta^{(q,-q)}(u_1, u_2) &= \delta^{(-q,q)}(u_2, u_1), \\ (u_1^+ u_2^+) \delta^{(q,-q)}(u_1, u_2) &= (u_1^- u_2^-) \delta^{(q,-q)}(u_1, u_2) = 0, \\ \delta^{(q,-q)}(u_1, u_2) &= (u_1^+ u_2^-) \delta^{(q-1,-q+1)}(u_1, u_2), \\ \Phi^{(p)}(u_2) \delta^{(q,-q)}(u_1, u_2) &= \Phi^{(p)}(u_1) \delta^{(q-p,p-q)}(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Гармонические распределения $\frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^n}$, $n > 0$, задаются соотношениями:

$$(u_1^+ u_2^+)^k \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^n} = \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^{n-k}}, \quad (1.1.15)$$

$$\frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^n} = (-1)^n \frac{1}{(u_2^+ u_1^+)^n}, \quad (1.1.16)$$

$$D_1^{-} \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^n} = -n \frac{(u_1^- u_2^+)}{(u_1^+ u_2^+)^{n+1}}, \quad (1.1.17)$$

$$D_1^{++} \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^n} = \frac{1}{(n-1)!} (D_1^{-})^{n-1} \delta^{(n,-n)}(u_1, u_2), \quad (1.1.18)$$

$$D_1^0 \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^n} = -n \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^n}. \quad (1.1.19)$$

Наконец, введем δ -функцию в аналитическом суперпространстве — аналитическую δ -функцию:

$$\int d\zeta_2^{(-4)} du_2 \delta_A^{(q,4-q)}(\zeta_1, u_1 | \zeta_2, u_2) \Phi^{(p)}(\zeta_2, u_2) = \delta^{qp} \Phi^{(p)}(\zeta_1, u_1). \quad (1.1.20)$$

Выразим ее через δ -функцию полного гармонического суперпространства, определенную следующим образом:

$$\int d^{12} z_2 du_2 \delta^{12}(z_1 - z_2) \delta^{(q,-q)}(u_1, u_2) \Phi^{(p)}(z_2, u_2) = \delta^{qp} \Phi^{(p)}(z_1, u_1), \quad (1.1.21)$$

где $\delta^{12}(z_1 - z_2) = \delta^4(x_1 - x_2)\delta^8(\theta_1 - \theta_2)$. Рассматривая аналитическое суперполе как функцию координат полного (z^M, u) суперпространства, т.е. $\Phi^{(p)} = \Phi^{(p)}(\zeta^M(z, u), u)$, можно написать

$$\begin{aligned} & \int d^{12}z_2 du_2 \delta^{12}(z_1 - z_2) \delta^{(q, -q)}(u_1, u_2) \Phi^{(p)}(\zeta(z_2, u_2), u_2) = \\ & = \delta^{qp} \Phi^{(p)}(\zeta(z_1, u_1), u_1). \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

После выделения из $d^{12}z$ аналитической меры

$$d^{12}z = d\zeta^{(-4)} \frac{1}{16} (D^{+\alpha} D_{\alpha}^+) (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{D}^{+\dot{\alpha}}) \equiv d\zeta^{(-4)} (D^+)^4 \quad (1.1.23)$$

соотношение (1.1.22) перепишется в виде

$$\begin{aligned} & \int d\zeta_2^{(-4)} du_2 [(D_2^+)^4 \delta^{12}(z_1 - z_2)] \delta^{(q, -q)}(u_1, u_2) \Phi^{(p)}(\zeta_2, u_2) = \\ & = \delta^{qp} \Phi^{(p)}(\zeta_1, u_1). \end{aligned} \quad (1.1.24)$$

Здесь использована аналитичность $\Phi^{(p)}$ (1.1.10). Сравнивая (1.1.24) и (1.1.20), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} \delta_A^{(q, 4-q)}(\zeta_1, u_1 | \zeta_2, u_2) &= (D_2^+)^4 \delta^{12}(z_1 - z_2) \delta^{(q, -q)}(u_1, u_2) = \\ &= (D_1^+)^4 \delta^{12}(z_1 - z_2) \delta^{(q-4, 4-q)}(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Выражение (1.1.25) аналитично по обоим аргументам.

1.2. Безмассовые гипермультиплеты. Гипермультиплет в его комплексной форме [81] описывается в гармоническом суперпространстве комплексным аналитическим суперполем $q^+(\zeta, u)$ без каких-либо дополнительных связей сверх условий аналитичности

$$D_{\alpha}^+ q^+ = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ q^+ = 0. \quad (1.2.1)$$

Соответствующее свободное действие и уравнение движения имеют вид

$$S = - \int d\zeta^{-4} du \tilde{q}^+ D^{++} q^+, \quad (1.2.2)$$

$$D^{++} q^+ = 0. \quad (1.2.3)$$

Перепишем суперполе q^+ в центральном базисе:

$$q^+[\zeta(z, u), u] = q^i(z) u_i^+ + q^{(ijk)}(z) u_i^+ u_j^+ u_k^- + \dots \quad (1.2.4)$$

Как следует из формулы (1.1.12), суперполя $q^i(z)$, $q^{(ijk)}(z)$ и т.д. не являются произвольными, они подчинены следующим условиям:

$$D_{\alpha}^{(i} q^{j)} = \frac{1}{4} D_{\alpha k} q^{(ijk)}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(i} q^{j)} = \frac{1}{4} \bar{D}_{\dot{\alpha} k} q^{(ijk)} \dots \quad (1.2.5)$$

Нетрудно видеть, что из (1.2.3) следует

$$q^{(ijk)}(z) = q^{(ijkl)}(z) = \dots = 0.$$

Иными словами, на уравнениях движения

$$q^+[\zeta(z, u), u] = q^i(z) u_i^+. \quad (1.2.6)$$

С учетом (1.2.6) связи (1.2.5) принимают вид

$$D_{\alpha}^{(i} q^{j)} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(i} q^{j)} = 0. \quad (1.2.7)$$

В итоге получаем формулировку гипермультиплета Файе–Сониуса в обычном суперпространстве [81], приводящую к свободным уравнениям движения для компонентных полей.

Важно подчеркнуть, что в гармоническом суперпространстве стандартные гипермультиплетные суперполевые связи (1.2.7) эквивалентны одновременному наложению двух типов связей: условий грассмановой аналитичности (1.2.1) и условия «гармонической аналитичности» (1.2.3). Первый тип связей можно явно решить переходом в аналитический базис, где они просто означают независимость суперполя q^+ от половины нечетных координат, т.е. $\theta_{\alpha}^{-}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^{-}$, не приводя к уравнениям движения для компонентных полей. Иными словами, они являются чисто кинематическими. Уравнения движения содержатся в связи (1.2.3), которая теперь получается варьированием действия (1.2.2). Таким образом, гармоническое суперпространство дает уникальную возможность описать гипермультиплет вне массовой оболочки, возможность, которая отсутствует в стандартном описании (не существует суперполевого действия, из которого связи (1.2.7) следовали бы как уравнения движения). Это позволяет, в частности, построить самодействие гипермультиплета и его взаимодействия с другими $N = 2$ мультиплетами вне массовой оболочки посредством добавления подходящих лагранжианов взаимодействия (с гармоническим $U(1)$ зарядом $+4$) к свободному суперполевному лагранжиану в (1.2.2). Платой за такое «расщепление» стандартных связей является присутствие бесконечного числа вспомогательных полей в аналитическом q^+ , возникающих из его разложения по гармоникам. На массовой поверхности, т.е. при наложении уравнения (1.2.3) (или его обобщений на случай с взаимодействием), эти поля обращаются в нуль (или выражаются через физические поля). Однако они присутствуют в действии, обеспечивая его суперсимметрию вне массовой поверхности. В дальнейшем мы будем использовать суперполевой язык,

автоматически принимающий во внимание эти бесконечные наборы вспомогательных полей.

Имея лагранжево описание q^+ гипермультиплета, легко построить для него функцию Грина, пропагатор

$$G_0^{(1,1)}(\zeta_1, u_1 | \zeta_2, u_2) = \langle \tilde{q}^+(\zeta_1, u_1) q^+(\zeta_2, u_2) \rangle,$$

который подчиняется уравнению, отвечающему вставке подходящей δ -функции в правую часть свободного уравнения (1.2.3):

$$D_1^{++} G_0^{(1,1)}(1|2) = \delta_A^{(3,1)}(1|2). \quad (1.2.8)$$

Здесь $(1|2) \equiv (\zeta_1, u_1 | \zeta_2, u_2)$ и аналитическая δ -функция $\delta_A^{(3,1)}(1|2)$ определена соотношением (1.2.15). Подействуем оператором $(D_1^{--})^2$ на обе части равенства (1.2.8) и воспользуемся тем фактом, что D^{++} и $(D^{--})^2$ коммутируют при действии на (супер)поля заряда $+1$ (см. алгебру гармонических ковариантных производных (1.1.6)). Получим

$$D_1^{++} (D_1^{--})^2 G_0^{(1,1)}(1|2) = (D_1^{--})^2 \delta_A^{(3,1)}(1|2). \quad (1.2.9)$$

Воспользовавшись выражением для аналитической δ -функции (1.1.25), а также (1.1.18), (1.2.9) можно переписать в виде

$$D_1^{++} \left[(D_1^{--})^2 G_0^{(1,1)}(1|2) - 2(D_2^+)^4 \frac{\delta^{12}(z_1 - z_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3} \right] = 0. \quad (1.2.10)$$

Уравнение

$$D^{++} \Phi^{(q)} = 0 \quad (1.2.11)$$

имеет в случае заряда $q < 0$ только тривиальное решение [30]

$$\Phi^{(q)} = 0. \quad (1.2.12)$$

С учетом вышесказанного из (1.2.10) следует, что

$$(D_1^{--})^2 G_0^{(1,1)}(1|2) = 2(D_2^+)^4 \left[\frac{\delta^{12}(z_1 - z_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3} \right]. \quad (1.2.13)$$

Подействуем теперь на обе части (1.2.13) оператором $(D_1^+)^4$ и воспользуемся тем фактом, что

$$(D_1^+)^4 (D^{--})^2 \Phi(\zeta, u) = -2\Box \Phi(\zeta, u) \quad (1.2.14)$$

для любого аналитического суперполя $\Phi(\zeta, u)$. В результате получаем следующее выражение для пропагатора:

$$G_0^{(1,1)}(1|2) = -\frac{1}{\square_1}(D_1^+)^4(D_2^+)^4 \left[\frac{\delta^{12}(z_1 - z_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3} \right]. \quad (1.2.15)$$

Заметим, что получившаяся функция Грина антисимметрична относительно одновременной перестановки аргументов и внешних $U(1)$ зарядов

$$G_0^{(1,1)}(1|2) = -G_0^{(1,1)}(2|1). \quad (1.2.16)$$

Перейдем к описанию вещественной формы гипермультиплета, введенной в работе Хау–Стелла–Таунсенда [26]. В гармоническом суперпространстве эта разновидность гипермультиплета описывается неограниченным вещественным (в смысле операции $\sim$) аналитическим суперполем ω со следующим действием и уравнением движения:

$$S = - \int d\zeta^{(-4)} du D^{++} \omega D^{++} \omega, \quad (1.2.17)$$

$$(D^{++})^2 \omega = 0. \quad (1.2.18)$$

Как и в предыдущем случае, перепишем ω в стандартном базисе:

$$\omega[\zeta(z, u), u] = \omega(z) + \omega^{(ij)}(z) u_i^+ u_j^- + \omega^{(ijkl)}(z) u_i^+ u_j^+ u_k^- u_l^- + \dots \quad (1.2.19)$$

Суперполя $\omega(z)$, $\omega^{(ij)}(z)$ и т.д. подчинены связям в соответствии с формулой (1.1.12). Уравнение движения (1.2.18) зануляет все суперполя в (1.2.19), начиная с $\omega^{(ijkl)}(z)$. Оставшиеся суперполя удовлетворяют связям

$$D_\alpha^i \omega = \frac{1}{3} D_{\alpha k} \omega^{(ik)}, \quad D_\alpha^{(i} \omega^{jk)} = 0, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^i \omega = \frac{1}{3} \bar{D}_{\dot{\alpha} k} \omega^{(ik)}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(i} \omega^{jk)} = 0. \quad (1.2.20)$$

Связи (1.2.20) полностью определяют гипермультиплет Хау–Стелла–Таунсенда на массовой поверхности и совпадают со связями из [26].

Пропагатор теории

$$G_0^{(0,0)}(1|2) = \langle \omega(1) \omega(2) \rangle$$

подчиняется неоднородному уравнению

$$(D_1^{++})^2 G_0^{(0,0)}(1|2) = \delta_A^{(4,0)}(1|2). \quad (1.2.21)$$

Оно может быть решено тем же способом, что и (1.2.8):

$$G_0^{(0,0)}(1|2) = -\frac{1}{\square_1}(D_1^+)^4(D_2^+)^4 \left[\frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} \delta^{12}(z_1 - z_2) \right]. \quad (1.2.22)$$

Заметим, что $G_0^{(0,0)}(1|2) = G_0^{(0,0)}(2|1)$.

1.3. N=2 суперсимметричная теория Янга–Миллса. В этом разделе мы введем $N = 2$ калибровочный потенциал как компенсирующее суперполе, а также покажем, что подход гармонического суперпространства позволяет решить связи для $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса.

В действии (1.2.2)

$$S = - \int d^4x d^4\theta^+ du \tilde{q}^+ D^{++} q^+$$

q^+ — гипермультиплет можно поместить в некоторое комплексное представление группы внутренней симметрии: действие очевидным образом инвариантно относительно глобальных преобразований

$$q^{+'} = e^{i\lambda} q^+, \quad (1.3.1)$$

где вещественный константный параметр λ принимает значения в алгебре группы. Требование локализации преобразований (1.3.1) в аналитическом подпространстве (чтобы сохранить аналитичность q^+), т.е. замена $\lambda \rightarrow \lambda(\zeta, u) = \tilde{\lambda}(\zeta, u)$, влечет необходимость введения калибровочного суперполя V^{++} с законом преобразования

$$V^{++'} = -ie^{i\lambda} D^{++} e^{-i\lambda} + e^{i\lambda} V^{++} e^{-i\lambda} \quad (1.3.2)$$

и ковариантной производной

$$\mathcal{D}^{++} = D^{++} + iV^{++}(x_A, \theta^+, u). \quad (1.3.3)$$

При этом V^{++} является вещественным суперполем

$$\tilde{V}^{++} = V^{++}$$

и аналитическим. В результате мы приходим к калибровочно-инвариантному действию

$$S = - \int d^4x d^4\theta^+ du \tilde{q}^+ (D^{++} + iV^{++}) q^+. \quad (1.3.4)$$

Калибровочный закон (1.3.2) позволяет перейти в калибровку Весса–Зумино, в которой V^{++} содержит конечное число полей:

$$\begin{aligned} V^{++} = & -(\theta^+)^2 \bar{\phi}(x_A) - (\bar{\theta}^+)^2 \phi(x_A) + i\theta^+ \sigma^\mu \bar{\theta}^+ A_\mu(x_A) + \\ & + (\bar{\theta}^+)^2 \theta^{+\alpha} \psi_\alpha^i(x_A) u_i^- + (\theta^+)^2 \bar{\theta}_\alpha^+ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}i}(x_A) u_i^- + \\ & + (\theta^+)^2 (\bar{\theta}^+)^2 F^{(ij)}(x_A) u_i^- u_j^-. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Здесь $\phi(x_A)$ — комплексный скаляр, $A_\mu(x_A)$ — калибровочное поле, $\psi_\alpha^i(x_A)$ и $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}i}(x_A)$ образуют дублет майорановских спиноров, $F^{(ij)}(x_A)$ — триплет

вспомогательных полей. Все поля находятся в присоединенном представлении калибровочной группы. Этот набор полей в точности соответствует стандартному $N = 2$ калибровочному мультиплету вне массовой поверхности (см., например, книгу [8]).

Покажем теперь, что V^{++} естественным образом возникает как решение связей в геометрической формулировке $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Эти связи имеют вид [82] (см. также [8]):

$$\{\mathcal{D}_{\alpha i}, \mathcal{D}_{\beta j}\} = 2i\epsilon_{ij}\epsilon_{\alpha\beta}\bar{W}, \quad (1.3.6)$$

$$\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^i, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}^j\} = 2i\epsilon^{ij}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}W, \quad (1.3.7)$$

$$\{\mathcal{D}_{\alpha i}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}^j\} = -2i\delta_i^j\mathcal{D}_{\alpha\dot{\beta}}. \quad (1.3.8)$$

Умножая (1.3.6)–(1.3.8) на $u_i^+ u_j^+$, находим

$$\{\mathcal{D}_{\alpha}^+, \mathcal{D}_{\beta}^+\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}^+\} = \{\mathcal{D}_{\alpha}^+, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}^+\} = 0. \quad (1.3.9)$$

Антикоммутиационные соотношения (1.3.9) можно рассматривать как условия интегрируемости для существования ковариантно-аналитических суперполей

$$\mathcal{D}_{\alpha}^+ \Phi(z, u) = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+ \Phi(z, u) = 0. \quad (1.3.10)$$

Решения условий (1.3.9) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha}^+ &= e^{-iv} D_{\alpha}^+ e^{iv} = D_{\alpha}^+ + e^{-iv} (D_{\alpha}^+ e^{iv}), \\ \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+ &= e^{-iv} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ e^{iv} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ + e^{-iv} (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ e^{iv}). \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Суперполе $v = v(z, u)$ называется мостом. Без потери общности его можно считать вещественным:

$$\tilde{v}(z, u) = v(z, u). \quad (1.3.12)$$

$\mathcal{D}_{\alpha}^+$ и $\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^+$ являются ковариантными производными относительно преобразований с параметром, не зависящим от u . Это означает, что мост претерпевает калибровочные преобразования вида

$$e^{iv'} = e^{i\lambda} e^{iv} e^{-i\tau}. \quad (1.3.13)$$

Здесь $\lambda = \lambda(x_A, \theta^+, u)$ — аналитический параметр, вещественный в смысле сопряжения $\sim$, $\tau = \tau(z)$ — вещественный u -независимый параметр. С помощью моста мы можем определить новый базис в пространстве представления Φ , такой, что аналитичность становится в нем явной (λ -базис):

$$\Phi \Rightarrow \Psi(z, u) = e^{iv} \Phi(z, u).$$

Суперполе $\Psi(z, u)$ является аналитическим в обычном смысле:

$$D_{\alpha}^{+}\Psi(z, u) = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+}\Psi(z, u) = 0.$$

Другими словами, в λ -базисе ковариантные производные $\mathcal{D}_{\alpha, \dot{\alpha}}^{+}$ превращаются в обычные

$$(\mathcal{D}_{\alpha}^{+})_{\lambda} = D_{\alpha}^{+}, \quad (\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{+})_{\lambda} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+}. \quad (1.3.14)$$

Далее, ковариантные производные $\mathcal{D}_{\alpha, \dot{\alpha}}^{+}$ имеют вид

$$\mathcal{D}_{\alpha, \dot{\alpha}}^{+} = u_i^{+} \mathcal{D}_{\alpha, \dot{\alpha}}^i.$$

Этот факт может быть сформулирован как дополнительная связь

$$[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}_{\alpha, \dot{\alpha}}^{+}] = 0. \quad (1.3.15)$$

Рассмотрим (1.3.15) в τ -базисе, т.е. исходном базисе, в котором суперполя преобразуются с u -независимым параметром. В этом базисе, очевидно, $(\mathcal{D}^{++})_{\tau} = D^{++}$ и (1.3.15) принимает вид

$$[D^{++}, \mathcal{D}_{\alpha, \dot{\alpha}}^{+}] = 0. \quad (1.3.16)$$

Из (1.3.16) немедленно следует, что

$$D^{++}(e^{-iv} \mathcal{D}_{\alpha, \dot{\alpha}}^{+} e^{iv}) = -e^{-iv} [D_{\alpha, \dot{\alpha}}^{+}(e^{iv} D^{++}(e^{-iv}))] e^{iv} = 0. \quad (1.3.17)$$

Введем суперполе

$$V^{++} = -ie^{iv} D^{++} e^{-iv} = \tilde{V}^{++}, \quad (1.3.18)$$

являющееся в силу (1.3.17) аналитическим:

$$D_{\alpha}^{+} V^{++} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+} V^{++} = 0. \quad (1.3.19)$$

Чтобы показать, что так определенное V^{++} совпадает с введенным ранее, рассмотрим $\mathcal{D}^{++}$ в λ -базисе:

$$(\mathcal{D}^{++})_{\lambda} = e^{iv} D^{++} e^{-iv} = D^{++} + e^{iv} (D^{++} e^{-iv}) = D^{++} + iV^{++}. \quad (1.3.20)$$

Видно, что V^{++} является связностью в ковариантной производной $\mathcal{D}^{++}$, как и компенсирующее суперполе в действии (1.3.4). Преобразования моста (1.3.13) порождают для V^{++} как раз калибровочное преобразование с аналитическим параметром (1.3.2).

Покажем, как в этом подходе строится ковариантная суперполевая напряженность. Ее удобно выразить через новое неаналитическое суперполе

V^{--} , связность для несохраняющей аналитичность гармонической производной D^{--} [83]. Рассмотрим D^{--} в λ -базисе

$$D^{--} = D^{--} + iV^{--}, \quad V^{--} = -ie^{iv} D^{--} e^{-iv} = \tilde{V}^{--} \quad (1.3.21)$$

и потребуем, чтобы для ковариантизованных гармонических производных выполнялось первое из «плоских» соотношений (1.1.6)

$$[D^{++}, D^{--}] = D^0. \quad (1.3.22)$$

Производная D^0 не ковариантизуется, так как мы рассматриваем только суперполя с фиксированным $U(1)$ -зарядом. Связь (1.3.22) можно переписать в виде уравнения на V^{--} :

$$D^{++}V^{--} - D^{--}V^{++} + i[V^{++}, V^{--}] = 0. \quad (1.3.23)$$

Решение этого уравнения дается следующим рядом:

$$V^{--}(x, \theta, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \int du_1 \dots du_n \frac{(-i)^{n+1} V^{++}(x, \theta, u_1) \dots V^{++}(x, \theta, u_n)}{(u^+ u_1^+)(u_1^+ u_2^+) \dots (u_n^+ u^+)}. \quad (1.3.24)$$

Действительно, для $n > 0$ производная D^{++} , действуя на n -й член в (1.3.24), дает

$$\begin{aligned} D^{++}V_{(n)}^{--} &= D^{++} \int du_1 \dots du_n \frac{(-i)^{n+1} V^{++}(x, \theta, u_1) \dots V^{++}(x, \theta, u_n)}{(u^+ u_1^+)(u_1^+ u_2^+) \dots (u_n^+ u^+)} = \\ &= \int du_1 \dots du_n (-i)^{n+1} V^{++}(x, \theta, u_1) \dots V^{++}(x, \theta, u_n) \times \\ &\times \left[\delta(u, u_1) \frac{1}{(u_1^+ u_2^+) \dots (u_n^+ u^+)} - \delta(u, u_n) \frac{1}{(u^+ u_1^+) \dots (u_{n-1}^+ u_n^+)} \right] = \\ &= iV_{(n-1)}^{--} V^{++} - iV^{++} V_{(n-1)}^{--} = -i[V^{++}, V_{(n-1)}^{--}], \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

При $n = 1$ имеем

$$D^{++}V_{(1)}^{--} = D^{++} \int du_1 \frac{V^{++}(u_1)}{(u^+ u_1^+)^2} = D^{--}V^{++}. \quad (1.3.26)$$

Объединяя (1.3.25) и (1.3.26), получаем (1.3.23).

Перейдем теперь к нахождению выражения для напряженности. Умножим (1.3.6) на $u^{+i} u^{-j}$:

$$\{(\mathcal{D}_\alpha^+)_\tau, (\mathcal{D}_\beta^-)_\tau\} = -2i\epsilon_{\alpha\beta} \bar{W}_\tau. \quad (1.3.27)$$

Индекс τ означает, что соответствующий объект является тензором относительно τ -преобразований. Перепишем (1.3.27) в λ -базисе:

$$\{D_\alpha^+, (\mathcal{D}_\beta^-)_\lambda\} = -2i\epsilon_{\alpha\beta}\bar{W}_\lambda. \quad (1.3.28)$$

Здесь, в соответствии с (1.3.14), производная D_α^+ не ковариантизуется, $\bar{W}_\lambda$ является тензором λ -группы:

$$\bar{W}'_\lambda = e^{i\lambda}\bar{W}_\lambda e^{-i\lambda}.$$

Учитывая, что

$$(\mathcal{D}_\alpha^-)_\lambda = [(\mathcal{D}^{--})_\lambda, D_\alpha^+] = D_\alpha^- - iD_\alpha^+ V^{--}, \quad (1.3.29)$$

из (1.3.28), пользуясь алгеброй плоских ковариантных производных (см. приложение), находим

$$\bar{W}_\lambda = -\frac{i}{4}\{D^{+\alpha}, (\mathcal{D}_\alpha^-)_\lambda\} = -\frac{1}{4}D^{+\alpha}D_\alpha^+ V^{--}, \quad (1.3.30)$$

$$W_\lambda = -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{D}^{+\dot{\alpha}} V^{--}. \quad (1.3.31)$$

Переходя в τ -базис, получаем

$$\bar{W}_\tau = -\frac{1}{4}e^{-iv}(D^{+\alpha}D_\alpha^+ V^{--})e^{iv}, \quad W_\tau = -\frac{1}{4}e^{-iv}(\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{D}^{+\dot{\alpha}} V^{--})e^{iv}. \quad (1.3.32)$$

Полученные напряженности обладают следующими свойствами:

$$\mathcal{D}_\alpha^i \bar{W} = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^i W = 0, \quad (1.3.33)$$

$$\mathcal{D}^{\alpha i} \mathcal{D}_\alpha^j W = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^i \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha} j} \bar{W}, \quad (1.3.34)$$

$$\mathcal{D}^{++} W = \mathcal{D}^{++} \bar{W} = \mathcal{D}^{--} W = \mathcal{D}^{--} \bar{W} = 0. \quad (1.3.35)$$

Соотношения (1.3.33)–(1.3.35) справедливы как в λ -, так и τ -базисах. Условие (1.3.35) в τ -базисе означает, что W_τ не зависит от u .

Действие $N = 2$ теории Янга–Миллса имеет вид ([8])

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta W_\tau^2 = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta W_\lambda^2 = \\ &= -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} \bar{W}_\tau^2 = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} \bar{W}_\lambda^2 \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

(g — константа связи). С учетом (1.3.31) и (1.3.24) его можно переписать в виде интеграла по гармоническому суперпространству [83]:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^{12}z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} \times \\ &\times \int du_1 du_2 \dots du_n \frac{V^{++}(z, u_1) V^{++}(z, u_2) \dots V^{++}(z, u_n)}{(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u_3^+) \dots (u_n^+ u_1^+)}. \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

В абелевом случае выражения для V^{--} , напряженностей и действия выглядят особенно просто:

$$V^{--}(z, u) = \int du_1 \frac{V^{++}(z, u_1)}{(u+u_1^+)^2}, \quad (1.3.38)$$

$$W(z) = -\frac{1}{4} \int du \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- \bar{D}^{-\dot{\alpha}} V^{++}(z, u), \quad (1.3.39)$$

$$\bar{W}(z) = -\frac{1}{4} \int du D^{-\alpha} D_{\alpha}^- V^{++}(z, u), \quad (1.3.40)$$

$$S = \frac{1}{2g^2} \int d^4x d^8\theta du V^{++}(z, u) V^{--}(z, u). \quad (1.3.41)$$

W_{λ} и W_{τ} в абелевом случае совпадают.

1.4. Массивный гипермультиплет. В этом разделе мы покажем, как в гармоническом суперпространстве можно ввести массовый член для гипермультиплета [69, 55, 70].

Рассмотрим взаимодействие q^+ -гипермультиплета с абелевым полем специального вида:

$$V_0^{++} = -(\theta^+)^2 \bar{a} - (\bar{\theta}^+)^2 a. \quad (1.4.1)$$

Здесь $a, \bar{a} = \text{const}$. Напряженности, вычисленные с помощью (1.3.39) и (1.3.40), совпадают с этими константами:

$$W_0 = a = \text{const}, \quad \bar{W}_0 = \bar{a} = \text{const}.$$

Поэтому V_0^{++} можно переписать в виде

$$V_0^{++} = -(\theta^+)^2 \bar{W}_0 - (\bar{\theta}^+)^2 W_0. \quad (1.4.2)$$

Действие гипермультиплета и его уравнения движения на таком внешнем фоне имеют вид

$$S = - \int d^4x d^4\theta^+ du \tilde{q}^+ (D^{++} + iV_0^{++}) q^+, \quad (1.4.3)$$

$$\begin{aligned} (D^{++} + iV_0^{++} I) q^+ &\equiv \mathcal{D}_0^{++} q^+ = 0, \\ (D^{++} + iV_0^{++} I) \tilde{q}^+ &\equiv \mathcal{D}_0^{++} \tilde{q}^+ = 0, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

где I — генератор фазовых $U(1)$ -преобразований q^+ :

$$I q^+ = q^+, \quad I \tilde{q}^+ = -\tilde{q}^+.$$

Поддействуем на (1.4.4) оператором $(\mathcal{D}_0^{--})^2$. Воспользовавшись коммутационным соотношением (1.3.22), получим

$$\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}_0^{--})^2 q^+ = 0 \Rightarrow (\mathcal{D}_0^{--})^2 q^+ = 0 \quad (1.4.5)$$

(второе соотношение следует из первого после перехода в τ -базис и учета того свойства, что уравнение $D^{++}f^q = 0$ при $q < 0$ имеет только тривиальное решение $f^q = 0$). Применяя теперь $(D^+)^4$ и пользуясь алгеброй ковариантных производных, приходим к уравнению

$$(\square + W_0 \bar{W}_0) q^+ = 0. \quad (1.4.6)$$

Оно означает, что суперполе q^+ реализует неприводимое представление супергруппы Пуанкаре с массой $m = \sqrt{W_0 \bar{W}_0}$. Таким образом, действие (1.4.3) описывает свободный массивный гипермультиплет.

Важным является тот факт, что действие (1.4.3) инвариантно относительно $N = 2$ суперсимметрии с центральным зарядом. Действительно, ковариантные спинорные производные, соответствующие фоновому калибровочному суперполю V_0^{++} (1.4.2)

$$\mathcal{D}_\alpha^i = D_\alpha^i + i\theta_\alpha^i \bar{W}_0 I, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}i} = \bar{D}_{\dot{\alpha}i} - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}i} W_0 I, \quad (1.4.7)$$

антикоммутируют не с генераторами обычной $N = 2$ суперсимметрии, а с генераторами, которые содержат добавку, зависящую от константных напряженностей:

$$Q_\alpha^i = i \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha^i} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta_\alpha^i \bar{W}_0 I, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}i} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}} - \theta_i^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}} - \theta_{\dot{\alpha}i} W_0 I. \quad (1.4.8)$$

Эти генераторы образуют $N = 2$ супералгебру с центральными зарядами

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2i\epsilon_{ij}\epsilon_{\alpha\beta} \bar{W}_0 I, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^j\} = 2i\epsilon^{ij}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} W_0 I, \\ \{Q_{\alpha i}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^j\} = -2i\delta_i^j \partial_{\alpha\dot{\beta}}. \quad (1.4.9)$$

Используя ковариантность (1.4.9) относительно преобразований глобальной группы $U(1)$ автоморфизмов $N = 2$ супералгебры (R -симметрии), действующей как фазовые преобразования генераторов Q , $\bar{Q}$, можно выбрать «калибровку», в которой $W_0 = \bar{W}_0$ (или, альтернативно, $W_0 = -\bar{W}_0$). Таким образом, в данном случае мы в действительности имеем теорию с одним центральным зарядом. Он пропорционален генератору I фазовых глобальных $U(1)$ преобразований суперполя q^+ , которые оставляют инвариантным действие (1.4.3). Рассмотренный механизм генерации массы q^+ и возникновения центрального заряда является частным случаем механизма Шерка–Шварца [84],

в котором массы возникают из высших измерений отождествлением генераторов трансляций по дополнительным координатам (в нашем случае центрального заряда, который можно рассматривать как генератор трансляций по некоторой дополнительной координате x^5) с генераторами внутренних симметрий (в нашем случае с $U(1)$ -генератором I).

Пропагатор массивного гипермультиплета удовлетворяет уравнению

$$D_0^{++} G_0^{(1,1)}(1|2) = \delta_A^{(3,1)}(1|2) \quad (1.4.10)$$

и имеет вид

$$G_0^{(1,1)}(1|2) = -\frac{1}{\square + W_0 \bar{W}_0} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \left(\frac{e^{iv_0(1)} e^{-iv_0(2)}}{(u_1^+ u_2^+)^3} \delta^{12}(z_1 - z_2) \right). \quad (1.4.11)$$

В отличие от безмассового случая пропагатор не обладает свойством антисимметрии относительно перестановки аргументов.

2. МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ

В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

2.1. Идея метода. Поясним формализм фонового поля на примере обычной теории Янга–Миллса, для которой он был впервые введен в [85] (см. также [86]).

Действие теории суть функционал от векторного потенциала со значениями в алгебре Ли $\tilde{A}_\mu$, который запишем в виде двух слагаемых

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + a_\mu. \quad (2.1.1)$$

Поле A_μ назовем фоновым, а поле a_μ — квантовым. Классическое действие $S[A_\mu + a_\mu]$ содержит вершины, включающие как квантовые, так и фоновые поля. Идея метода фонового поля заключается в том, чтобы построить теорию возмущений, в которой диаграммы Фейнмана содержали бы только внешние A_μ -линии и внутренние a_μ -линии. Это достигается следующим образом. Калибровочное преобразование поля $\tilde{A}_\mu$, оставляющее инвариантным действие, имеет вид

$$\delta \tilde{A}_\mu = \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda + [\tilde{A}_\mu, \Lambda]. \quad (2.1.2)$$

Здесь g — константа связи, Λ — бесконечно малый параметр. Выразим это преобразование в терминах полей A_μ и a_μ . Эта процедура является неоднозначной. Рассматривают два вида калибровочных преобразований.

1) Фоновые преобразования:

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda + [A_\mu, \Lambda] \equiv D_\mu \Lambda, \quad \delta a_\mu = [a_\mu, \Lambda]. \quad (2.1.3)$$

2) Квантовые преобразования:

$$\delta A_\mu = 0, \quad \delta a_\mu = D_\mu \Lambda + [a_\mu, \Lambda]. \quad (2.1.4)$$

Квантовые поправки вычисляются с использованием действия $S[A_\mu + a_\mu]$, но квантуется только поле a_μ , поле A_μ считается внешним. Поэтому необходимо выбрать калибровку так, чтобы фиксация калибровки нарушала только квантовую калибровочную инвариантность, но сохраняла при этом фоновую. Например, наложим калибровку

$$F = D^\mu a_\mu = \frac{1}{g} \partial^\mu a_\mu + [A^\mu, a_\mu] = 0. \quad (2.1.5)$$

Проверим, что она ковариантно преобразуется при фоновых калибровочных преобразованиях. При преобразованиях (2.1.3) имеем

$$\delta F = \frac{1}{g} [\partial_\mu a^\mu, \Lambda] + \frac{1}{g} [a^\mu, \partial_\mu \Lambda] + [D^\mu \Lambda, a_\mu] + [A^\mu, [a_\mu, \Lambda]]. \quad (2.1.6)$$

С помощью тождества Якоби эту вариацию можно переписать в виде

$$\delta F = \left[\frac{1}{g} \partial_\mu a^\mu + [A^\mu, a_\mu], \Lambda \right] = [F, \Lambda]. \quad (2.1.7)$$

Таким образом, F преобразуется как тензор относительно фоновых калибровочных преобразований. Закон преобразований (2.1.7) легко обобщить на случай конечных преобразований:

$$F' = e^{-\Lambda} F e^{\Lambda}. \quad (2.1.8)$$

Согласно общей схеме квантования калибровочных теорий (см., например, книги [1,87]) член фиксации калибровки в лагранжиане пропорционален $\text{tr } F^2$. Равенство (2.1.8) показывает, что член фиксации калибровки является инвариантным относительно фоновых калибровочных преобразований. С другой стороны, выражение $\text{tr } F^2$ неинвариантно относительно квантовых калибровочных преобразований, как и должно быть.

Действие духов Фаддеева–Попова вводится точно так же, как и в обычном формализме квантования калибровочных теорий. Найдем вариацию калибровки при квантовых калибровочных преобразованиях

$$\delta F = D^\mu (D_\mu \Lambda + [a_\mu, \Lambda]). \quad (2.1.9)$$

В итоге действие духов имеет вид

$$S_{gh} = \int d^4x \bar{c} D^\mu (D_\mu c + [a_\mu, c]). \quad (2.1.10)$$

Это действие, так же как и член фиксации калибровки, инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований, поскольку оно построено исключительно из тензоров фоновых преобразований, и неинвариантно относительно квантовых калибровочных преобразований.

Описанная процедура гарантирует калибровочную инвариантность эффективного действия.

2.2. Квантово-фоновое разделение. Закон преобразования $N = 2$ калибровочного суперполя имеет вид (1.3.2):

$$V^{++'} = e^{i\lambda} V^{++} e^{-i\lambda} - i e^{i\lambda} D^{++} e^{-i\lambda}.$$

Разобьем V^{++} на квантовую и фоновую части:

$$V^{++} \rightarrow V^{++} + g v^{++}, \quad (2.2.1)$$

где V^{++} — фоновое суперполе, v^{++} — квантовое суперполе. Квантовые и фоновые калибровочные преобразования определяются по аналогии с (2.1.3), (2.1.4).

1) Фоновые преобразования:

$$V^{++'} = e^{i\lambda} V^{++} e^{-i\lambda} - i e^{i\lambda} D^{++} e^{-i\lambda}, \quad v^{++'} = e^{i\lambda} v^{++} e^{-i\lambda}. \quad (2.2.2)$$

2) Квантовые преобразования:

$$V^{++'} = V^{++}, \quad v^{++'} = e^{i\lambda} \left(\frac{1}{g} V^{++} + v^{++} \right) e^{-i\lambda} - \frac{1}{g} i e^{i\lambda} D^{++} e^{-i\lambda}. \quad (2.2.3)$$

Найдем коэффициенты в разложении действия $N = 2$ теории Янга–Миллса в ряд по квантовому супер полю v^{++} :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \text{tr} \int d^{12} z_1 du_1 \dots d^{12} z_n du_n \frac{g^n}{n!} \frac{\delta^n S}{\delta v^{++}(1) \dots \delta v^{++}(n)} \Big|_{v^{++}=0} \times \\ \times v^{++}(1) \dots v^{++}(n). \quad (2.2.4)$$

Вариация действия $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

$$S = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} \bar{W}_\lambda^2$$

дается выражением:

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} \bar{W}_\lambda \delta \bar{W}_\lambda = \\ &= -\frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} du \left(-\frac{1}{4} \right) [D^{+\alpha} D_\alpha^+ \delta V^{--}] \bar{W}_\lambda, \quad (2.2.5)\end{aligned}$$

где $\bar{W}_\lambda$ выражена через V^{--} по формуле (1.3.30). Для дальнейших преобразований представим V^{--} в виде (см. (1.3.21))

$$V^{--} = -ie^{iv} [D^{--} e^{-iv}], \quad (2.2.6)$$

учтем киральность $\bar{W}_\lambda$ (условие (1.3.33)) и независимость $\bar{W}_\tau = e^{-iv} \bar{W}_\lambda e^{iv}$ от гармоник, а также воспользуемся тождеством

$$e^{-iv} \delta [e^{iv} D^{--} e^{-iv}] e^{iv} = -D^{--} (e^{-iv} \delta e^{iv}). \quad (2.2.7)$$

Вариацию (2.2.5) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{i}{g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} du \left(-\frac{1}{4} \right) (D^{+\alpha} D_\alpha^+) (e^{-iv} \delta [e^{iv} D^{--} e^{-iv}] e^{iv} \bar{W}_\tau) = \\ &= -\frac{i}{g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} du \left(-\frac{1}{4} \right) (D^{+\alpha} D_\alpha^+) D^{--} [e^{-iv} \delta e^{iv}] \bar{W}_\tau = \\ &= -\frac{i}{g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} du \left(-\frac{1}{4} \right) (D^{+\alpha} D_\alpha^+) D^{--} [e^{-iv} \delta e^{iv} \bar{W}_\tau]. \quad (2.2.8)\end{aligned}$$

Используя тождество

$$(D^+)^2 D^{--} + (D^-)^2 D^{++} = D^{--} (D^+)^2 + D^{++} (D^-)^2, \quad (2.2.9)$$

опуская члены с полными гармоническими производными под интегралом и вспоминая, что $e^{iv} D^{++} e^{-iv} = iV^{++}$, окончательно находим

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} du \left(-\frac{1}{4} \right) (D^{-\alpha} D_\alpha^-) \delta V^{++} \bar{W}_\lambda = \\ &= \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\bar{\theta} du \left(-\frac{1}{4} \right) (D^{-\alpha} D_\alpha^-) (D^{+\alpha} D_\alpha^+) \delta V^{++} V^{--} = \\ &= \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^4x d^8\theta du \delta V^{++} V^{--}. \quad (2.2.10)\end{aligned}$$

Здесь мы восстановили полную грассманову меру и перешли к интегрированию по полному суперпространству. Сравнивая (2.2.10) с (2.2.4), находим,

что член, линейный по квантовому суперполю v^{++} , имеет вид

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{g} \text{tr} \int d^4x d^8\theta du v^{++} V^{--} = \\ &= -\frac{1}{4g} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du v^{++} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{D}^{+\dot{\alpha}} \bar{W}_{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Этот член в дальнейшем не понадобится, так как для вычисления эффективного действия в петлевом разложении используется конструкция

$$\Delta S[\psi, \phi] = S[\psi + \phi] - S[\psi] - S'[\psi]\phi,$$

где линейный член отсутствует (см., например, книгу [2]). Здесь ψ означает множество полей теории, $\psi \rightarrow \psi + \phi$ есть квантово-фоновое разделение с фоновым полем ψ и квантовым ϕ .

Для вычисления второй вариации действия S снова представим V^{--} в виде (2.2.6) и в очередной раз воспользуемся тождеством (2.2.7):

$$\begin{aligned} \delta^2 S &= -\frac{i}{g^2} \text{tr} \int d^{12}z du \delta V^{++} \delta(e^{iv} D^{--} e^{-iv}) = \\ &= -\frac{i}{g^2} \text{tr} \int d^{12}z du e^{-iv} \delta V^{++} e^{iv} e^{-iv} \delta(e^{iv} D^{--} e^{-iv}) e^{iv} = \\ &= \frac{i}{g^2} \text{tr} \int d^{12}z du e^{-iv} \delta V^{++} e^{iv} D^{--} (e^{-iv} \delta e^{iv}). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Вариация суперполя V^{++} является λ -тензором*:

$$(\delta V^{++})' = e^{i\lambda} \delta V^{++} e^{-i\lambda}. \quad (2.2.13)$$

Объект

$$\delta V_{\tau}^{++} \equiv e^{-iv} \delta V^{++} e^{iv} \quad (2.2.14)$$

является тензором τ -группы:

$$\delta V_{\tau}^{++} = e^{i\tau} e^{-iv} e^{-i\lambda} e^{i\lambda} \delta V^{++} e^{-i\lambda} e^{i\lambda} e^{iv} e^{-i\tau} = e^{i\tau} \delta V_{\tau}^{++} e^{-i\tau}, \quad (2.2.15)$$

где был использован закон преобразования моста (1.3.13). Найдём $e^{-iv} \delta e^{iv}$. Вариацию δV^{++} можно представить в виде

$$\delta V^{++} = i e^{iv} D^{++} (e^{-iv} \delta e^{iv}) e^{-iv}$$

*Хотя калибровочное поле тензором не является, его вариация — тензор.

или

$$\delta V_{\tau}^{++} = iD^{++}(e^{-iv}\delta e^{iv}). \quad (2.2.16)$$

Уравнение (2.2.16) решается относительно $e^{-iv}\delta e^{iv}$ следующим образом:

$$e^{-iv}\delta e^{iv} = -i \int du_1 \frac{(u_1^+ u_1^-)}{(u_1^+ u_1^+)} \delta V_{\tau}^{++}(z, u_1). \quad (2.2.17)$$

Чтобы убедиться, что это действительно общее решение, достаточно подействовать на обе части (2.2.17) оператором D^{++} и использовать выражения (1.1.7), (1.1.18) и свойства гармонических δ -функций (1.1.13), (1.1.14). После подстановки (2.2.17) в формулу (2.2.12) вторая вариация действия принимает вид

$$\delta^2 S = \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^{12} z du_1 du_2 \delta V_{\tau}^{++}(1) D_1^{-} - \frac{(u_1^+ u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)} \delta V_{\tau}^{++}(2). \quad (2.2.18)$$

Здесь $\delta V_{\tau}^{++}(1)$ и $\delta V_{\tau}^{++}(2)$ зависят от одного x и от разных u . Поскольку

$$D_1^{-} - \frac{(u_1^+ u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)} = \frac{1}{(u_1^+ u_2^+)^2} \quad (2.2.19)$$

в силу (1.1.17), (1.1.7) и тождества

$$(u_1^+ u_2^+)(u_1^- u_2^-) - (u_1^+ u_2^-)(u_1^- u_2^+) = 1, \quad (2.2.20)$$

то для второй вариации действия получаем окончательный ответ в виде

$$\delta^2 S = \frac{1}{g^2} \int d^{12} z \frac{du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^2} \delta V_{\tau}^{++}(1) \delta V_{\tau}^{++}(2). \quad (2.2.21)$$

Обозначим мост, зависящий от фонового суперполя V^{++} , через V , т.е. $V = v|_{v^{++}=0}$. В результате действие во втором порядке по квантовому суперполю дается выражением

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \text{tr} \int d^{12} z \frac{du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^2} e^{-iV(1)} v^{++}(1) e^{iV(1)} e^{-iV(2)} v^{++}(2) e^{iV(2)} = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \int d^{12} z \frac{du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^2} v_{\tau}^{++}(1) v_{\tau}^{++}(2), \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

где мы ввели

$$v_{\tau}^{++} = e^{-iV} v^{++} e^{iV}. \quad (2.2.23)$$

Относительно фоновых калибровочных преобразований (2.2.2) v^{++} является λ -тензором. Это значит, что v_τ^{++} является τ -тензором.

Перейдем к нахождению третьей вариации действия S . Имеем

$$\delta^3 S = \frac{2}{g^2} \text{tr} \int d^{12} z \frac{du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^2} \delta[\delta V_\tau^{++}(1)] \delta V_\tau^{++}(2). \quad (2.2.24)$$

Вычислим $\delta[\delta V_\tau^{++}(1)]$:

$$\begin{aligned} \delta[\delta V_\tau^{++}(1)] &= \delta[e^{-iv(1)} \delta V^{++}(1) e^{iv(1)}] = \\ &= \delta e^{-iv(1)} \delta V^{++}(1) e^{iv(1)} + e^{-iv(1)} \delta V^{++}(1) \delta e^{iv(1)} = \\ &= [\delta V_\tau^{++}(1), e^{-iv(1)} \delta e^{iv(1)}]. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Выражение для $e^{-iv(1)} \delta e^{iv(1)}$ дается соотношением (2.2.17). Подставляя (2.2.25) с учетом (2.2.17) в (2.2.24), получим следующее выражение для третьей вариации

$$\delta^3 S = \frac{2i}{g^2} \text{tr} \int d^{12} z \frac{du_1 du_2 du_3}{(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u_3^+)(u_1^+ u_3^+)} \delta V_\tau^{++}(1) \delta V_\tau^{++}(2) \delta V_\tau^{++}(3). \quad (2.2.26)$$

При выводе (2.2.26) мы воспользовались тождеством

$$\frac{(u_2^+ u_3^-)}{(u_2^+ u_3^+)} - \frac{(u_1^+ u_3^-)}{(u_1^+ u_3^+)} = \frac{(u_1^+ u_2^+)}{(u_2^+ u_3^+)(u_1^+ u_3^+)}. \quad (2.2.27)$$

Сравнивая (2.2.26) с (2.2.4), заключаем, что действие в третьем порядке по квантовому суперполю имеет вид

$$S_3 = \frac{i}{3} g \text{tr} \int d^{12} z \frac{du_1 du_2 du_3}{(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u_3^+)(u_1^+ u_3^+)} v_\tau^{++}(1) v_\tau^{++}(2) v_\tau^{++}(3). \quad (2.2.28)$$

Аналогично можно найти действие в произвольном n -м порядке по квантовому суперполю v^{++} . Запишем окончательный ответ:

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{(-ig)^{n-2}}{n} \text{tr} \int d^{12} z \frac{du_1 du_2 \dots du_n}{(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u_3^+) \dots (u_n^+ u_1^+)} \times \\ &\times v_\tau^{++}(1) v_\tau^{++}(2) \dots v_\tau^{++}(n). \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Здесь v_τ^{++} определено соотношением (2.2.23).

2.3. Фиксация калибровки и процедура Фаддеева–Попова. Следующий шаг состоит в закреплении квантовой калибровочной инвариантности. Выберем калибровку для квантового суперполя в виде

$$F_{\tau}^{(4)} = D^{++} v_{\tau}^{++}. \quad (2.3.1)$$

$F_{\tau}^{(4)}$ можно переписать как

$$F_{\tau}^{(4)} = e^{-iV} F^{(4)} e^{iV}, \quad F^{(4)} = D^{++} v^{++} + i[V^{++}, v^{++}] = \mathcal{D}^{++} v^{++}. \quad (2.3.2)$$

Доказательство проводится непосредственно

$$\begin{aligned} e^{iV} (D^{++} v_{\tau}^{++}) e^{-iV} &= e^{iV} D^{++} (e^{-iV} v_{\tau}^{++} e^{iV}) e^{-iV} = \\ &= D^{++} v^{++} + [(e^{iV} D^{++} e^{-iV}), v^{++}] = \mathcal{D}^{++} v^{++}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

где учтено выражение для V^{++} (1.3.18). Представление (2.3.2) позволяет проверить, что калибровка (2.3.1) преобразуется ковариантно при фоновых калибровочных преобразованиях:

$$F_{\tau}^{(4)'} = D^{++} v_{\tau}^{++'} = D^{++} (e^{i\tau} v_{\tau}^{++} e^{-i\tau}) = e^{i\tau} F_{\tau}^{(4)} e^{-i\tau}. \quad (2.3.4)$$

Чтобы фиксировать калибровку в функциональном интеграле, необходимо, согласно процедуре Фаддеева–Попова, вставить в него единицу, представленную в виде

$$1 = \Delta_{\text{FP}}^{-1} \delta[F^{(4)} - f^{(4)}]. \quad (2.3.5)$$

После этого функциональный интеграл переписывается как

$$Z = N \int \mathcal{D}v^{++} e^{iS} \Delta_{\text{FP}}^{-1} \delta[F^{(4)} - f^{(4)}], \quad (2.3.6)$$

где N — нормировочный множитель, Δ_{FP}^{-1} — детерминант Фаддеева–Попова, $f^{(4)}$ — аналитическое суперполе со значениями в алгебре Ли калибровочной группы, не содержащее зависимости от фонового суперполя V^{++} , $\delta[F^{(4)}]$ — функциональная δ -функция. Чтобы найти детерминант Фаддеева–Попова, необходимо найти вариацию калибровки при квантовых калибровочных преобразованиях. С учетом (2.2.3)

$$\delta F_{\tau}^{(4)} = e^{-iV} (\mathcal{D}^{++} \delta v^{++}) e^{iV} = -\frac{1}{g} e^{-iV} \{ \mathcal{D}^{++} (\mathcal{D}^{++} + ig[v^{++}, \lambda]) \} e^{iV}. \quad (2.3.7)$$

В результате детерминант Фаддеева–Попова имеет вид

$$\Delta_{\text{FP}} = \text{Det} [\mathcal{D}^{++} (\mathcal{D}^{++} + igv^{++})]. \quad (2.3.8)$$

Величина Δ_{FP}^{-1} представляется в виде функционального интеграла по аналитическим фермионным суперполям со значениями в алгебре Ли — духам Фаддеева–Попова:

$$\Delta_{\text{FP}}^{-1} = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c e^{iS_{gh}[b,c,v^{++},V^{++}]}, \quad (2.3.9)$$

где

$$S_{gh} = \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du b\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}^{++} + ig[v^{++}, c]). \quad (2.3.10)$$

Нетрудно проверить, что действие (2.3.10) инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований.

Далее, вставим в функциональный интеграл (2.3.6) единицу в виде

$$1 = \Delta \int \mathcal{D}f^{(4)} \exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 f_{\tau}^{(4)}(1) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} f_{\tau}^{(4)}(2) \right\}, \quad (2.3.11)$$

где α — калибровочный параметр, Δ — детерминант Нильсена–Каллош, $f_{\tau}^{(4)} = e^{-iV} f^{(4)} e^{iV}$. Выражение, стоящее в правой части (2.3.11), требует специального комментария. Мы обязаны в нем писать $f_{\tau}^{(4)}$, а не $f^{(4)}$, так как в противном случае показатель экспоненты в (2.3.11) не будет инвариантен относительно фоновых калибровочных преобразований. Величина

$$\text{tr} [f^{(4)}(z, u_1) f^{(4)}(z, u_2)]$$

не является калибровочно-инвариантной в силу нелокальности по гармоническим переменным, тогда как величина

$$\text{tr} [f_{\tau}^{(4)}(z, u_1) f_{\tau}^{(4)}(z, u_2)]$$

является калибровочно-инвариантной, так как $f_{\tau}^{(4)}$ — тензор τ -группы, параметры которой не зависят от гармоник. Нелокальность по u также является вынужденным шагом, иначе нельзя сделать заряд равным нулю под интегралом. Обратим внимание на то, что

$$\text{tr} [f_{\tau}^{(4)}(z, u_1) f_{\tau}^{(4)}(z, u_2)] = \text{tr} [e^{-eV(1)} f^{(4)}(z, u_1) e^{eV(1)} e^{-eV(2)} f^{(4)}(z, u_2) e^{eV(2)}]$$

зависит от фонового суперполя V^{++} . Следовательно, детерминант Δ также включает зависимость от V^{++} , что означает присутствие третьего духа Нильсена–Каллош.

Второй множитель в (2.3.11) ведет к действию фиксации калибровки. Проинтегрировав по $f^{(4)}$ с помощью стоящей в (2.3.6) функциональной δ -функции, получим

$$Z = N \int \mathcal{D}v^{++} \mathcal{D}b\mathcal{D}c \Delta e^{i(S+S_{gh}+S_{gf})}, \quad (2.3.12)$$

где действие фиксации калибровки дается выражением

$$S_{gh} = \frac{1}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 D^{++} v_{\tau}^{++}(1) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} D^{++} v^{++}(2). \quad (2.3.13)$$

Использование выражений (1.1.7), (1.1.14), (1.1.17) позволяет привести действие (2.3.13) к виду

$$\begin{aligned} S_{gf} &= \frac{1}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 \frac{v_{\tau}^{++}(1) v_{\tau}^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} - \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du \frac{1}{2} [(D^{--})^2 v_{\tau}^{++}] v_{\tau}^{++}. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

В результате $S_2 + S_{gf}$ записывается как

$$\begin{aligned} \hat{S}_2 = S_2 + S_{gf} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 \frac{v_{\tau}^{++}(1) v_{\tau}^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} - \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du \frac{1}{2} [(D^{--})^2 v_{\tau}^{++}] v_{\tau}^{++}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Выражение (2.3.15) показывает, что наиболее удачным выбором калибровочного параметра является $\alpha = -1$. При таком выборе

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{4} \text{tr} \int d^{12}z du [(D^{--})^2 v_{\tau}^{++}] v_{\tau}^{++}. \quad (2.3.16)$$

Действие (2.3.16) записано через τ -тензоры. Перейдем в λ -базис:

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{4} \text{tr} \int d^{12}z du v^{++} (\mathcal{D}^{--})^2 v^{++}, \quad (2.3.17)$$

где

$$\mathcal{D}^{--} v^{++} = D^{--} v^{++} + i[V^{--}, v^{++}]. \quad (2.3.18)$$

Действие (2.3.17) удобно переписать в виде интеграла по аналитическому подпространству

$$\begin{aligned} \hat{S}_2 &= \frac{1}{4} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du (D^+)^4 \{v^{++} (\mathcal{D}^{--})^2 v^{++}\} = \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du v^{++} \check{\square} v^{++}. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Оператор $\check{\square} = (D^+)^4 (\mathcal{D}^{--})^2$ переводит аналитические суперполя в аналитические и на их множестве имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \check{\square} &= \mathcal{D}^{\mu} \mathcal{D}_{\mu} - \frac{i}{2} (D^{+\alpha} W) \mathcal{D}_{\alpha}^{-} - \frac{i}{2} (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+} \bar{W}) \bar{\mathcal{D}}^{-\dot{\alpha}} + \\ &\quad + \frac{i}{4} (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{+} \bar{D}^{+\dot{\alpha}} \bar{W}) \mathcal{D}^{--} - \frac{i}{4} (\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{-} \bar{D}^{+\dot{\alpha}} \bar{W}) + \frac{1}{2} \{W, \bar{W}\}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Все ковариантные производные здесь записаны в λ -базисе. В этом базисе ковариантные производные $\mathcal{D}_\alpha^+$ и $\bar{\mathcal{D}}_\alpha^+$ совпадают с плоскими. Ковариантные производные $\mathcal{D}^{--}$ и $\mathcal{D}_{\alpha,\dot{\alpha}}^-$ даются выражениями (1.3.21), (1.3.29). Векторная производная $\mathcal{D}^\mu = -\frac{1}{2}(\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}$ находится из (1.3.8):

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{4}(\sigma_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}D_\alpha^+\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+V^{--}. \quad (2.3.21)$$

Во всех ковариантных производных связности зависят от фонового суперполя V^{++} . Подстановка явных выражений ковариантных производных в (2.3.20) приводит к следующему выражению для оператора $\check{\square}$:

$$\begin{aligned} \check{\square} = & \square + \frac{1}{4}D_\alpha^+\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\partial^{\alpha\dot{\alpha}}V^{--} + \frac{1}{4}D_\alpha^+\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+V^{--}\partial^{\alpha\dot{\alpha}} + \\ & + \frac{1}{4}(D^{+\alpha}\bar{D}^{+\dot{\alpha}}V^{--})(D_\alpha^+\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+V^{--}) - \frac{i}{2}(\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\bar{W})\bar{D}^{-\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}(D^{+\alpha}W)D_\alpha^- - \\ & - \frac{1}{2}(\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\bar{W})(\bar{D}^{+\dot{\alpha}}V^{--}) - \frac{1}{2}(D^{+\alpha}W)(D_\alpha^+V^{--}) + \\ & + \frac{i}{4}(\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\bar{D}^{+\dot{\alpha}}\bar{W})D^{--} - \frac{1}{4}(\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\bar{D}^{+\dot{\alpha}}\bar{W})V^{--} - \frac{i}{4}(\bar{D}_{\dot{\alpha}}^-\bar{D}^{+\dot{\alpha}}\bar{W}) - \\ & - \frac{1}{4}(\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+V^{--})(\bar{D}^{+\dot{\alpha}}\bar{W}) + \frac{1}{2}\{W, \bar{W}\}. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Действие (2.3.19) инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований (2.2.2). Оператор $\check{\square}$ является тензором относительно преобразований (2.2.2), так как построен из ковариантных производных. Поэтому

$$\begin{aligned} \hat{S}'_2 &= -\frac{1}{2}\text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du (e^{i\lambda}v^{++}e^{-i\lambda})(e^{i\lambda}\check{\square}e^{-i\lambda})(e^{i\lambda}v^{++}e^{-i\lambda}) = \\ &= -\frac{1}{2}\text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du v^{++}\check{\square}v^{++} = \hat{S}_2. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

С другой стороны, действие (2.3.19) очевидным образом неинвариантно относительно квантовых калибровочных преобразований (2.2.3).

Перейдем к вычислению Δ . Мы будем исходить из определения (2.3.11).

$$\begin{aligned} 1 &= \Delta \int \mathcal{D}f^{(4)} \exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \text{tr} \int d^{12}z du_1 du_2 f_\tau^{(4)}(1) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} f_\tau^{(4)}(2) \right\} \equiv \\ &\equiv \Delta \int \mathcal{D}f^{(4)} \exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \text{tr} \int d\zeta_1^{-4} du_1 d\zeta_2^{-4} du_2 f^{(4)}(1) A(1|2) f^{(4)}(2) \right\} = \\ &= \Delta \text{Det}^{-\frac{1}{2}} A. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Отсюда

$$\Delta = \text{Det}^{\frac{1}{2}} A. \quad (2.3.25)$$

Чтобы найти $\text{Det } A$, представим его в виде функционального интеграла по аналитическим суперполям

$$\text{Det}^{-1} A = \int \mathcal{D}\chi^{(4)} \mathcal{D}\rho^{(4)} \exp \left\{ i \text{tr} \int d\zeta_1^{-4} du_1 d\zeta_2^{-4} du_2 \chi^{(4)}(1) A(1|2) \rho^{(4)}(2) \right\} \quad (2.3.26)$$

и произведем в нем замену переменных

$$\rho^{(4)} = (\mathcal{D}^{++})^2 \sigma, \quad \text{Det} \left(\frac{\delta \rho^{(4)}}{\delta \sigma} \right) = \text{Det} (\mathcal{D}^{++})^2. \quad (2.3.27)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \text{tr} \int d\zeta_1^{-4} du_1 d\zeta_2^{-4} du_2 \chi^{(4)}(1) A(1|2) \rho^{(4)}(2) = \\ & = \text{tr} \int d^{12} z du_1 du_2 \chi_{\tau}^{(4)}(1) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} (D_2^{++})^2 \sigma_{\tau}(2) = \\ & = \frac{1}{2} \text{tr} \int d^{12} z du \chi_{\tau}^{(4)} (D^{--})^2 \sigma_{\tau} = -\text{tr} \int d^4 x d^4 \theta^+ du \chi_{\tau}^{(4)} \check{\square} \sigma_{\tau}. \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

В цепочке равенств (2.3.28) использованы определение оператора A (2.3.24), соотношения (1.1.7), (1.1.14), (1.1.18), а также правила перехода от τ -базиса к λ -базису аналогично тому, как это было сделано при преобразовании (2.3.16) к (2.3.17). Возникший оператор $\check{\square}$ дается выражением (2.3.20). Заметим, что операторы $\check{\square}$ в (2.3.19) и в (2.3.28) действуют в пространствах разных суперполей и имеют разные функции Грина. Поэтому оператор в действии (2.3.19) мы будем обозначать в дальнейшем $\check{\square}_{(2,2)}$, а оператор, стоящий в действии (2.3.28), будем обозначать $\check{\square}_{(4,0)}$. Функция Грина оператора $\check{\square}_{(2,2)}$ $G^{(2,2)}(1|2) = \langle v^{++}(1) v^{++}(2) \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\check{\square}_{(2,2)} G^{(2,2)}(1|2) = \delta_A^{(2,2)}(1|2), \quad (2.3.29)$$

в то время как функция Грина $G^{(4,0)}(1|2) = \langle \chi^{(4)}(1) \sigma(2) \rangle$ оператора $\check{\square}_{(4,0)}$ — уравнению

$$\check{\square}_{(4,0)} G^{(4,0)}(1|2) = \delta_A^{(4,0)}(1|2). \quad (2.3.30)$$

Функции Грина $G^{(2,2)}(1|2)$ и $G^{(4,0)}(1|2)$ различны.

В силу вышесказанного оператор Δ представляется следующим функциональным интегралом:

$$\Delta = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_{\text{НК}}[\phi, V^{++}]} \text{Det}^{\frac{1}{2}} \check{\square}_{(4,0)}, \quad (2.3.31)$$

где действие Нильсена–Каллош имеет вид

$$S_{\text{НК}}[\phi, V^{++}] = -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du \mathcal{D}^{++} \phi \mathcal{D}^{++} \phi. \quad (2.3.32)$$

Переменная интегрирования ϕ является бозонным аналитическим суперполем со значениями в алгебре Ли калибровочной группы и представляет собой дух Нильсена–Каллош. Нетрудно видеть, что действие (2.3.32) инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований.

Окончательное выражение для функционального интеграла можно записать в следующем виде:

$$Z = N \int \mathcal{D}v^{++} \mathcal{D}b \mathcal{D}c \mathcal{D}\phi e^{i(\hat{S}_2 + S_{gh} + S_{\text{НК}} + \tilde{S})} \text{Det}^{\frac{1}{2}} \check{\square}_{(4,0)}, \quad (2.3.33)$$

где действия $\hat{S}_2, S_{gh}, S_{\text{НК}}, \tilde{S}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \hat{S}_2 &= -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du v^{++} \check{\square} v^{++}, \\ S_{gh} &= \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du b \mathcal{D}^{++} (\mathcal{D}^{++} c + ig[v^{++}, c]), \\ S_{\text{НК}} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du \mathcal{D}^{++} \phi \mathcal{D}^{++} \phi, \\ \tilde{S} &= S[V^{++}] - \frac{1}{4g} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du v^{++} \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ \bar{D}^{+\dot{\alpha}} \bar{W}_{\lambda} - \\ &\quad - \text{tr} \int d^{12}z \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-ig)^{n-2}}{n} \frac{du_1 du_2 \dots du_n}{(u_1^+ u_2^+)(u_2^+ u_3^+) \dots (u_n^+ u_1^+)} \times \\ &\quad \times v_{\tau}^{++}(1) v_{\tau}^{++}(2) \dots v_{\tau}^{++}(n). \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Через $S[V^{++}]$ здесь обозначено действие $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (1.3.36), зависящее только от фонового суперполя V^{++} . Оно представляет собой константу, не зависящую от переменных интегрирования. Более того, в петлевом разложении оно вообще отсутствует (см. комментарий после выражения для линейного по квантовому супер полю члена (2.2.11)).

2.4. Общая структура эффективного действия. Выражения (2.3.33), (2.3.34) дают возможность исследовать петлевые поправки к эффективному

действию. Рассмотрим однопетлевое приближение, в котором эффективное действие имеет следующую структуру:

$$\Gamma[V^{++}] = S[V^{++}] + \Gamma^{(1)}[V^{++}] , \quad (2.4.1)$$

где $\Gamma^{(1)}[V^{++}]$ описывает однопетлевые квантовые поправки. Чтобы исследовать $\Gamma^{(1)}[V^{++}]$, необходимо удержать только квадратичную часть по квантовому суперполю v^{++} во всех действиях (2.3.34):

$$\begin{aligned} S_2[V^{++}, v^{++}, b, c, \phi] = & -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du v^{++} \check{\square} v^{++} + \\ & + \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du b (\mathcal{D}^{++})^2 c + \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du \phi (\mathcal{D}^{++})^2 \phi. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Кроме того, необходимо учесть детерминант оператора $\check{\square}_{(4,0)}$ в функциональном интеграле (2.3.33). В результате однопетлевое эффективное действие определяется выражением

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[V^{++}] &= -i \left[\text{Tr} \ln (\mathcal{D}^{++})^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\mathcal{D}^{++})^2 \right] + \\ &+ i \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(2,2)} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(4,0)} \right] = \\ &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\mathcal{D}^{++})^2 + i \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(2,2)} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(4,0)} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

В следующем разделе будет показано, что $\text{Tr} \ln \check{\square}$ не содержит голоморфных вкладов, поэтому однопетлевое эффективное действие определяется исключительно духами. Однопетлевое эффективное действие духов совпадает с точностью до коэффициента с эффективным действием ω гипермультиплета во внешнем калибровочном суперполе. Действие этого гипермультиплета получается заменой плоских производных в свободном действии (1.2.17) на ковариантные:

$$S_\omega = - \int d^4x d^4\theta^+ du (\mathcal{D}^{++}\omega)(\mathcal{D}^{++}\omega). \quad (2.4.4)$$

Эффективные действия q^+ - и ω -гипермультиплетов будут найдены в следующем разделе. Это заодно решит задачу о нахождении однопетлевого голоморфного эффективного действия в калибровочной теории.

Для изучения эффективного действия в более высоких порядках необходимо принять во внимание в действиях (2.3.34) члены третьего и более высоких порядков по квантовому суперполю. В работе [63] было показано

в контексте рассмотренного выше метода фонового поля, что, начиная с двух петель, голоморфные вклады отсутствуют. Поэтому выражение (2.4.3) содержит всю информацию о голоморфном эффективном действии $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса.

3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИИ

3.1. Эквивалентность q^+ - и ω -гипермультиплетов. В этом разделе, следуя [32], будет показано, что между двумя типами гипермультиплетов — q и ω , существует определенная связь, которая, по сути, приводит к тому, что достаточно изучать эффективное действие только q -гипермультиплета.

Рассмотрим действие комплексного ω -гипермультиплета в некотором представлении калибровочной группы:

$$\bar{S}_\omega = -\text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du (D^{++} - iV^{++})\tilde{\omega}(D^{++} + iV^{++})\omega. \quad (3.1.1)$$

Введем дублет q -гипермультиплетов типа q_i^+ , $i = 1, 2$ в том же представлении (индексы i не имеют отношения к калибровочной группе, на них реализована глобальная группа $SU(2)$, носящая название группы Паули–Гюрсси). Разложим этот комплексный дублет по гармоникам $u_i^\pm$, воспользовавшись свойством их полноты (см. определение (1.1.1)):

$$q_i^+ = u_i^+\omega + u_i^-f^{++}, \quad \tilde{q}^{+i} = u^{+i}\tilde{\omega} + u^{-i}\tilde{f}^{++}. \quad (3.1.2)$$

Подставим (3.1.2) в действие для гипермультиплета q_i^+ , имеющее вид (см. (1.3.4)):

$$S_q = -\text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du \tilde{q}^{+i}(D^{++} + iV^{++})q_i^+. \quad (3.1.3)$$

Получим

$$\begin{aligned} S_q = & -\text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du \{ f^{++}(D^{++} - iV^{++})\tilde{\omega} + \\ & + \tilde{f}^{++}(D^{++} + iV^{++})\omega + \tilde{f}^{++}f^{++} \}. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Мы видим, что суперполя f^{++} и $\tilde{f}^{++}$ являются вспомогательными. Если их исключить с помощью уравнений движения

$$(D^{++} - iV^{++})\tilde{\omega} = -\tilde{f}^{++}, \quad (D^{++} + iV^{++})\omega = -f^{++}, \quad (3.1.5)$$

то приходим к действию (3.1.1).

Рассмотрим теперь эффективное действие теории (3.1.3):

$$e^{i\Gamma_q[V^{++}]} = \int \mathcal{D}\tilde{q}^+ \mathcal{D}q^+ e^{iS_q[\tilde{q}^+, q_i^+, V^{++}]} . \quad (3.1.6)$$

Функциональный интеграл в правой части (3.1.6) после линейной замены переменных (3.1.2) (заметим, что якобиан этой замены является константой и может быть опущен) переходит в интеграл

$$\int \mathcal{D}\tilde{\omega} \mathcal{D}\omega \mathcal{D}\tilde{f}^{++} \mathcal{D}f^{++} e^{iS[\tilde{\omega}, \omega, \tilde{f}^{++}, f^{++}, V^{++}]} ,$$

где

$$S[\tilde{\omega}, \omega, \tilde{f}^{++}, f^{++}, V^{++}] = S_q[\tilde{q}^+, q_i^+, V^{++}] ,$$

при условии, что $q_i^+, \tilde{q}^+$ заменены на $\omega, \tilde{\omega}, f^{++}, \tilde{f}^{++}$ с помощью (3.1.2). На самом деле, $S[\tilde{\omega}, \omega, \tilde{f}^{++}, f^{++}, V^{++}]$ имеет вид (3.1.4), как уже было показано. Интегрируя по суперполям $\tilde{f}^{++}, f^{++}$ (то есть исключая их из действия $S[\tilde{\omega}, \omega, \tilde{f}^{++}, f^{++}, V^{++}]$ с помощью уравнений движения (3.1.5)), мы приходим к функциональному интегралу

$$\int \mathcal{D}\tilde{\omega} \mathcal{D}\omega e^{iS_\omega[\tilde{\omega}, \omega, V^{++}]} ,$$

где $S_\omega[\tilde{\omega}, \omega, V^{++}]$ имеет вид (3.1.1). В итоге получаем

$$\Gamma_q[V^{++}] = \Gamma_\omega[V^{++}] , \quad (3.1.7)$$

где

$$e^{\Gamma_\omega[V^{++}]} = \int \mathcal{D}\tilde{\omega} \mathcal{D}\omega e^{iS_\omega[\tilde{\omega}, \omega, V^{++}]} . \quad (3.1.8)$$

С другой стороны, очевидно,

$$\Gamma_q[V^{++}] = 2\Gamma[V^{++}] , \quad (3.1.9)$$

где

$$e^{i\Gamma[V^{++}]} = \int \mathcal{D}\tilde{q}^+ \mathcal{D}q^+ e^{iS[\tilde{q}^+, q^+, V^{++}]} , \quad (3.1.10)$$

а действие $S[\tilde{q}^+, q^+, V^{++}]$ есть действие одного q -гипермультиплета (1.3.4).

Проведенный анализ показывает, что между эффективными действиями одного комплексного q -гипермультиплетта и одного комплексного ω -гипермультиплетта имеет место следующая связь:

$$\Gamma_\omega[V^{++}] = 2\Gamma[V^{++}]. \quad (3.1.11)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать теорию возмущений и вычислять эффективное действие только q -гипермультиплетта. Соотношение (3.1.11) позволит обобщить полученные результаты на ω -гипермультиплет.

3.2. Голоморфность и центральный заряд. Прежде чем приступить к нахождению голоморфного эффективного действия, необходимо понять критерий его существования. Таким критерием является центральный заряд.

Алгебра $N = 2$ суперсимметрии согласно теореме Хаага–Лопушанского–Сониуса [88] в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} &= 2i\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ij}Z, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^j\} = 2i\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{ij}\bar{Z}, \\ \{Q_{\dot{\alpha}i}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^j\} &= 2i\delta_i^j P_{\alpha\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Здесь $Q_{\alpha i}$ и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^j$ — генераторы преобразований суперсимметрии, $P_{\alpha\dot{\alpha}}$ — генератор пространственно-временных трансляций, Z — комплексный оператор, коммутирующий со всеми генераторами супералгебры Пуанкаре, $\bar{Z}$ — центральный заряд. Алгебра (3.2.1) в общем случае обладает группой автоморфизмов $SU(2)_R \times U(1)_R$, где фактор $SU(2)_R$ осуществляет вращение по индексу i , а $U(1)_R$ — фазовые преобразования генераторов Q , $\bar{Q}$, Z , $\bar{Z}$. В частности,

$$Q_{\alpha i} \rightarrow e^{ib}Q_{\alpha i}, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i \rightarrow e^{-ib}\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, \quad (3.2.2)$$

где b — параметр преобразования. При этом

$$\begin{aligned} \theta_i^\alpha &\rightarrow e^{-ib}\theta_i^\alpha, \quad \bar{\theta}^{i\dot{\alpha}} \rightarrow e^{ib}\bar{\theta}^{i\dot{\alpha}}, \\ d^4\theta &\rightarrow e^{4ib}d^4\theta, \quad d^4\bar{\theta} \rightarrow e^{-4ib}d^4\bar{\theta}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

При обсуждении $N = 2$ калибровочной теории в предыдущих разделах, в частности, соответствующей дифференциальной геометрии в суперпространстве, мы исходили из $N = 2$ суперсимметрии без центральных зарядов. В этом случае из определения суперполевых напряженностей W , $\bar{W}$ (1.3.7), (1.3.6) следует, что они преобразуются в $U(1)_R$ по закону

$$W \rightarrow e^{-2ib}W, \quad \bar{W} \rightarrow e^{2ib}\bar{W}. \quad (3.2.4)$$

Единственный голоморфный суперфункционал, инвариантный относительно преобразований (3.2.3), (3.2.4), — само классическое действие $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

$$\text{tr} \int d^4x d^4\theta W^2. \quad (3.2.5)$$

Лагранжианы безмассовых q - и ω -гипермультиплетов, взаимодействующих с $N = 2$ калибровочным суперполем, инвариантны относительно $U(1)_R$ -преобразований, причем это свойство инвариантности выполняется в отдельности для кинетических членов и членов взаимодействия (то же справедливо и для самодействия калибровочного суперполя). Таким образом, в случае $N = 2$ суперсимметрии без центральных зарядов $U(1)_R$ является точной симметрией теории возмущений, из чего, в частности, следует отсутствие нетривиальных голоморфных вкладов в квантовое эффективное действие $N = 2$ калибровочной теории (поскольку единственный $U(1)_R$ инвариантный голоморфный функционал — классическое действие (3.2.5)).

Как мы видели в п. 1.4 на примере абелевой $N = 2$ теории, наличие нетривиального постоянного конденсата $a \equiv W_0 = \text{const}$, $\bar{a} \equiv \bar{W}_0$ в калибровочных напряженностях $W, \bar{W}$ радикально меняет свойства инвариантности теории, а именно: после отделения этого конденсата (включая выделение V_0^{++} (1.4.2) из V^{++}) кинетическая часть действия $q^+ - V^{++}$ (1.3.4) приобретает массовый член $\sim W_0, \bar{W}_0$ (см. (1.4.4), (1.4.6)), а ее симметрией становится $N = 2$ суперсимметрия с алгеброй (3.2.1), в которой

$$Z = \bar{W}_0 I, \quad \bar{Z} = W_0 I, \quad (3.2.6)$$

и I — генератор паули-гурсеевской $U(1)$ -симметрии, реализованной как фазовые преобразования суперполей $q^+, \tilde{q}^+$ (эта симметрия коммутирует с суперсимметрией и не имеет отношения к $U(1)_R$ -симметрии). Симметрия $U(1)_R$ в такой алгебре с необходимостью нарушена (из группы автоморфизмов выживает только $SU(2)_R$). Нет такой симметрии и у свободного действия массивного q -гипермультиплета (1.4.3). Действительно, член, содержащий V_0^{++} , явно нарушает эту инвариантность:

$$V_0^{++} \rightarrow -e^{-2ib}(\theta^+)^2 \bar{a} - e^{2ib}(\bar{\theta}^+)^2 a,$$

так как $a, \bar{a}$ — константы и не преобразуются при действии $U(1)_R$. В результате приходим к выводу, что в теории возмущений, соответствующей массивному q -гипермультиплету с массой, индуцированной ненулевым конденсатом скалярного поля $N = 2$ векторного мультиплета (первой компоненты в $W, \bar{W}$), $U(1)_R$ -симметрия с необходимостью нарушена, и поэтому оказываются допустимыми голоморфные вклады в эффективное действие, отличные от (3.2.5). Ясно, что эти вклады должны пропадать в пределе нулевого центрального заряда, т.е. нулевых $a, \bar{a}$.

Таким образом, критерием наличия голоморфных вкладов в эффективном действии, зависящем от V^{++} , является наличие в теории центрального заряда. Более того, в работе Зайберга [37] было показано, что голоморфное эффективное действие однозначно восстанавливается по нарушению $U(1)_R$ -автоморфизма, то есть по константному центральному заряду, который является мерой этого нарушения. Иными словами, существование голоморфных

квантовых вкладов есть проявление наличия в теории центрального заряда, индуцированного ненулевыми вакуумными средними скалярного поля в калибровочном $N = 2$ мультиплете.

Итак, мы выяснили, что голоморфные квантовые поправки следует искать только в теориях с индуцированным центральным зарядом. Заметим, что в неабелевом случае, т.е. в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, имеет место тот же механизм возникновения центральных зарядов за счет ненулевых вакуумных средних скалярных полей, как и в абелевом примере. При этом спонтанно нарушается и калибровочная симметрия, поскольку эти скаляры принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы [89] (см. также обзор [40]). Этим обусловлено наличие в этих теориях голоморфных вкладов, которые будут найдены в последующих разделах. Безмассовый q -гипермультиплет не имеет центрального заряда, вследствие чего в теории с такими гипермультиплетами голоморфные вклады не возникают.

3.3. Теория возмущений для массивного гипермультиплета. Массивный гипермультиплет во внешнем абелевом калибровочном суперполе V_1^{++} описывается действием

$$S = - \int d^4x d^4\theta^+ du \tilde{q}^+ (D^{++} + iV_0^{++} + iV_1^{++}) q^+. \quad (3.3.1)$$

Фоновое суперполе V_0^{++} определяет массовый член гипермультиплета и характеризуется тем, что соответствующие напряженности W_0 и $\bar{W}_0$ — константы. Оно нарушает $U(1)_R$ -автоморфизм $N = 2$ супералгебры. Его явный вид дан в (1.4.2). Таким образом, первые два члена в (3.3.1) есть свободное действие (1.4.3) массивного гипермультиплета с индуцированным центральным зарядом, а третий член — минимальное взаимодействие с внешним абелевым калибровочным суперполем V_1^{++} .

Функция Грина $G^{(1,1)}(1|2)$ гипермультиплета во внешнем суперполе V_1^{++} удовлетворяет уравнению

$$[D_1^{++} + iV_0^{++} + iV_1^{++}] G^{(1,1)}(1|2) = \delta_A^{(3,1)}(1|2). \quad (3.3.2)$$

Введем аналитическое суперядро $Q^{(3,1)}(1|2)$ по правилу

$$G_0^{(1,1)}(1|2) = \int d\zeta_3^{(-4)} du_3 G^{(1,1)}(1|3) Q^{(3,1)}(3|2), \quad (3.3.3)$$

где $G_0^{(1,1)}(1|2)$ — массивный пропагатор (1.4.11). Эффективное действие

$$\Gamma[V^{++}] = i \operatorname{Tr} \ln (D^{++} + iV_0^{++} + iV_1^{++}) = -i \operatorname{Tr} \ln G^{(1,1)} \quad (3.3.4)$$

определено с точностью до аддитивной константы; так как $Q^{(3,1)}(1|2)$ содержит всю информацию о взаимодействии, то определим эффективное действие как

$$\Gamma[V^{++}] = i \operatorname{Tr} \ln Q^{(3,1)}. \quad (3.3.5)$$

Операция Tr здесь понимается в смысле

$$\operatorname{Tr} \Phi^{(q,4-q)} = \int d\zeta_1^{(-4)} du_1 \Phi^{(q,4-q)}(1|1) \quad (3.3.6)$$

для любого аналитического суперядра $\Phi^{(q,4-q)}(1|2)$.

Поддействуем оператором $[D_1^{++} + iV_0^{++} + iV_1^{++}]$ на обе части (3.3.3). С учетом уравнений (3.3.2) и (1.4.10) имеем

$$Q^{(3,1)}(1|2) = \delta_A^{(3,1)}(1|2) + iV_1^{++}(1)G_0^{(1,1)}(1|2). \quad (3.3.7)$$

На языке диаграмм разложение выражения

$$\ln(\delta_A^{(3,1)}(1|2) + iV_1^{++}(1)G_0^{(1,1)}(1|2))$$

в ряд по степеням взаимодействия имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma[V^{++}] = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n[V^{++}] = & i^2 \text{ (diagram: circle with two external wavy lines) } - \frac{1}{2} i^3 \text{ (diagram: circle with three external wavy lines) } + \\ & + \frac{1}{3} i^4 \text{ (diagram: circle with four external wavy lines) } + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} i^{n+1} \text{ (diagram: circle with n+1 external wavy lines) } + \dots, \end{aligned}$$

где n -й член этого ряда $\Gamma_n[V^{++}]$ описывается суперграфом с n внешними линиями V^{++} . Уравнение (3.3.5) ведет к следующей структуре $\Gamma_n[V^{++}]$:

$$\Gamma_n[V^{++}] = i \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{Tr} (iV_1^{++} + G_0^{(1,1)})^n. \quad (3.3.8)$$

Вся зависимость от массового члена гипермультиплета V_0^{++} заключена в пропагаторе.

3.4. Вычисление низкоэнергетического эффективного действия векторного мультиплета. Первый член $\Gamma_1[V^{++}]$ в ряде теории возмущений равен нулю, так как он пропорционален $\delta^8(\theta_1 - \theta_2)|_{\theta_1=\theta_2} = 0$.

Эффективное действие во втором порядке имеет вид

$$\begin{aligned}\Gamma_2[V^{++}] &= -\frac{i^3}{2} \int d^4x_1 d^4\theta_1^+ du_1 d^4x_2 d^4\theta_2^+ du_2 V_1^{++}(1) V_1^{++}(2) \times \\ &\times \frac{1}{\square_1 + m^2} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \left(\frac{e^{iv_0(1)} e^{-iv_0(2)}}{(u_1^+ u_2^+)^3} \delta^{12}(z_1 - z_2) \right) \times \\ &\times \frac{1}{\square_2 + m^2} (D_2^+)^4 (D_1^+)^4 \left(\frac{e^{iv_0(2)} e^{-iv_0(1)}}{(u_2^+ u_1^+)^3} \delta^{12}(z_2 - z_1) \right), \quad (3.4.1)\end{aligned}$$

где мы воспользовались явным выражением для пропагатора (1.4.11), $m^2 = W_0 \bar{W}_0$. Мост v_0 связан с V_0^{++} соотношением (1.3.18). Восстановим в (3.4.1), по правилу (1.1.23), полную грассманову меру:

$$\begin{aligned}\Gamma_2[V^{++}] &= \frac{i^3}{2} \int d^4x_1 d^8\theta_1 du_1 d^4x_2 d^4\theta_2 du_2 \frac{V_1^{++}(1) V_1^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^6} \times \\ &\times e^{iv_0(1)} e^{-iv_0(2)} \frac{1}{\square_1 + m^2} [\delta^4(x_1 - x_2)] \delta^8(\theta_1 - \theta_2) \times \\ &\times \frac{1}{\square_2 + m^2} (D_2^+)^4 (D_1^+)^4 e^{iv_0(2)} e^{-iv_0(1)} [\delta^{12}(z_2 - z_1)]. \quad (3.4.2)\end{aligned}$$

Все восемь производных $(D_2^+)^4 (D_1^+)^4$ должны оказаться на грассмановой δ -функции, в противном случае получим нуль. Имеет место тождество

$$\delta^8(\theta_1 - \theta_2) (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \delta^{12}(z_2 - z_1) = (u_1^+ u_2^+)^4 \delta^4(x_2 - x_1) \delta^8(\theta_2 - \theta_1). \quad (3.4.3)$$

С учетом этого, и вспоминая связь между V^{++} и V^{--} (1.3.38), найдем

$$\begin{aligned}\Gamma_2[V^{++}] &= \frac{i^3}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 d^8\theta du \frac{1}{\square_1 + m^2} [\delta^4(x_1 - x_2)] \times \\ &\times \frac{1}{\square_2 + m^2} [\delta^4(x_2 - x_1)] V_1^{++}(x_1, \theta, u) V_1^{--}(x_2, \theta, u). \quad (3.4.4)\end{aligned}$$

Производя преобразование Фурье

$$\delta^4(x_1 - x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip(x_1 - x_2)}, \quad (3.4.5)$$

выражение (3.4.4) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\Gamma_2[V^{++}] &= \frac{i^3}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 (p^2 - m^2)^2} \int d^4x d^8\theta du \times \\ &\times V_1^{++}(x, \theta, u) V_1^{--}(x, \theta, u) = \frac{i^3}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 (p^2 - m^2)^2} \int d^4x d^4\theta W_1^2. \quad (3.4.6)\end{aligned}$$

Здесь W_1 — напряженность, построенная по суперполю V_1^{++} . Эффективное действие в n -м порядке имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_n[V^{++}] &= \frac{(-i)^n}{n} \int d^4x_1 d^4\theta_1^+ du_1 \dots d^4x_n d^4\theta_n^+ du_n \times \\ &\times \frac{-1}{\square_1 + m^2} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 [e^{iv_0(1)} e^{-iv_0(2)} \delta^{12}(z_1 - z_2)] \times \\ &\times \frac{-1}{\square_2 + m^2} (D_2^+)^4 (D_3^+)^4 [e^{iv_0(2)} e^{-iv_0(3)} \delta^{12}(z_2 - z_3)] \times \\ &\dots \dots \dots \\ &\times \frac{-1}{\square_n + m^2} (D_n^+)^4 (D_1^+)^4 [e^{iv_0(n)} e^{-iv_0(1)} \delta^{12}(z_n - z_1)] \times \\ &\times \frac{V_1^{++}(1) V_1^{++}(2) \dots V_1^{++}(n)}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_2^+ u_3^+)^3 \dots (u_n^+ u_1^+)^3}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

С помощью моста v_0 перейдем к τ -производным $\mathcal{D}^+$ по правилу (1.3.11), восстановим полную грассманову меру, интегрируя по $\theta_3, \dots, \theta_n$, и перейдем в импульсное представление. Выражение (3.4.7) примет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_n[V^{++}] &= \frac{(-i)^{n+1}}{n} \int \frac{d^4p_1 \dots d^4p_n d^8\theta_1 d^8\theta_2 du_1 \dots du_n}{(2\pi)^{4n} (p_1 - m^2) \dots (p_n^2 - m^2)} \times \\ &\times \frac{\delta^8(\theta_1 - \theta_2) V_1^{++}(\theta_1, u_1) V_1^{++}(\theta_2, u_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_2^+ u_3^+)^3 \dots (u_n^+ u_1^+)^3} [\mathcal{D}_1^+(\theta_1)]^4 \{V_1^{++}(\theta_1, u_n) \times \\ &\times [\mathcal{D}_2^+(\theta_2)]^4 \{V_1^{++}(\theta_2, u_3) [\mathcal{D}_3^+(\theta_2)]^4 \{V_1^{++}(\theta_2, u_4) \dots \times \\ &\times [\mathcal{D}_{n-1}^+(\theta_2)]^4 [\mathcal{D}_n^+(\theta_1)]^4 \delta^8(\theta_2 - \theta_1) \} \dots \} \}. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Здесь и далее зависимость от импульсов не выписывается. Теперь перейдем к локальному пределу. Суперполе V_1^{++} удобно выбрать в виде

$$V_1^{++} = -(\theta^+)^2 \bar{W}_1 - (\bar{\theta}^+)^2 W_1, \quad (3.4.9)$$

где $W_1, \bar{W}_1$ — константы. Это означает, что единственные члены, дающие вклад в низкоэнергетическое эффективное действие, имеют вид*

*Мы используем одно и то же обозначение как для полного эффективного действия, так и для его частей.

$$\begin{aligned}
\Gamma_n[V^{++}] &= \frac{(-i)^{n+1}}{n} \int \frac{d^4 p_1 \dots d^4 p_n d^8 \theta_1 d^8 \theta_2 du_1 \dots du_n}{(2\pi)^{4n} (p_1 - m^2) \dots (p_n^2 - m^2)} \times \\
&\times \frac{\delta^8(\theta_1 - \theta_2) V_1^{++}(\theta_1, u_1) V_1^{++}(\theta_2, u_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_2^+ u_3^+)^3 \dots (u_n^+ u_1^+)^3} [\bar{\mathcal{D}}_1^+(\theta_1)]^2 V_1^{++}(\theta_1, u_n) \times \\
&\times [\bar{\mathcal{D}}_2^+(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2, u_3) [\bar{\mathcal{D}}_3^+(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2, u_4) \dots \times \\
&\times [\bar{\mathcal{D}}_{n-2}^+(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2, u_{n-1}) \times \\
&\times [\mathcal{D}_2^+(\theta_2)]^2 [\mathcal{D}_3^+(\theta_2)]^2 \dots [\mathcal{D}_n^+(\theta_2)]^2 [\mathcal{D}_1^+(\theta_1)]^2 \times \\
&\times [\bar{\mathcal{D}}_{n-1}^+(\theta_1)]^2 [\bar{\mathcal{D}}_n^+(\theta_2)]^2 \delta^8(\theta_2 - \theta_1) + \text{к.с.}
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Для вычисления этого выражения прежде всего заметим, что

$$\mathcal{D}^{++} V_1^{++} = D^{++} V_1^{++},$$

поскольку V_1^{++} — инвариант относительно глобальной $U(1)$ -симметрии (действующей только на гипермультиплет) или, другими словами, инвариант относительно центрального заряда, который пропорционален генератору I этой симметрии (напомним (3.2.6)). Разложим производные по тем гармоникам, от которых зависят соответствующие суперполя. Например, рассмотрим $(\bar{D}_1^+)^2 V_1^{++}(u_n)$. Имеем [30]

$$\bar{D}_{1\dot{\alpha}}^+ = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^i u_{1i}^+ = \bar{D}_{n\dot{\alpha}}^-(u_n^+ u_1^+) - \bar{D}_{n\dot{\alpha}}^+(u_n^- u_1^+). \tag{3.4.11}$$

В силу аналитичности V_1^{++} (1.3.19) только один член в (3.4.11) существен:

$$(\bar{D}_1^+)^2 V_1^{++}(u_n) = (\bar{D}_n^-)^2 V_1^{++}(u_n) (u_1^+ u_n^+)^2. \tag{3.4.12}$$

Поэтому выражение (3.4.10) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
\Gamma_n[V^{++}] &= \frac{(-i)^{n+1}}{n} \int \frac{d^4 p_1 \dots d^4 p_n d^8 \theta_1 d^8 \theta_2 du_1 \dots du_n}{(2\pi)^{4n} (p_1 - m^2) \dots (p_n^2 - m^2)} \times \\
&\times \frac{\delta^8(\theta_1 - \theta_2) V_1^{++}(\theta_1, u_1) V_1^{++}(\theta_2, u_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_2^+ u_3^+) (u_3^+ u_4^+) \dots (u_{n-2}^+ u_{n-1}^+) (u_{n-1}^+ u_n^+)^3 (u_n^+ u_1^+)^3} \times \\
&\times [\bar{\mathcal{D}}_3^-(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2, u_3) [\bar{\mathcal{D}}_4^-(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2, u_4) \dots [\bar{\mathcal{D}}_n^-(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2, u_n) \times \\
&\times [\mathcal{D}_2^+(\theta_2)]^2 [\mathcal{D}_3^+(\theta_2)]^2 \dots [\mathcal{D}_n^+(\theta_2)]^2 [\mathcal{D}_1^+(\theta_1)]^2 \times \\
&\times [\bar{\mathcal{D}}_{n-1}^+(\theta_1)]^2 [\bar{\mathcal{D}}_n^+(\theta_2)]^2 \delta^8(\theta_2 - \theta_1) + \text{к.с.}
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Производные $\mathcal{D}^+$ могут быть исключены из цепочки производных, действующих на δ -функцию, с помощью тождества

$$\bar{\delta}^4(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)(\mathcal{D}_{n-1}^+)^2(\mathcal{D}_n^+)^2\bar{\delta}^4(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) = (u_{n-1}^+ u_n^+)^2\bar{\delta}^4(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2).$$

После ряда алгебраических преобразований (детали даны в [72]) эта цепочка сводится к оператору

$$\frac{(-1)^{n-2}i^{n-2}}{4^{n-1}}\bar{W}_0^{n-2}(u_2^+ u_3^+) \dots (u_{n-1}^+ u_n^+)(\mathcal{D}_2^{+\alpha}\mathcal{D}_{n\alpha_2}^+).$$

Так как

$$\delta^4(\theta_1 - \theta_2)\frac{1}{4}(\mathcal{D}_2^+\mathcal{D}_n^+)(\mathcal{D}_1^+)^2\delta^4(\theta_2 - \theta_1) = -(u_1^+ u_2^+)(u_n^+ u_1^+)\delta^4(\theta_1 - \theta_2),$$

то мы можем проинтегрировать в (3.4.13) по θ_2 . В итоге получим

$$\begin{aligned} \Gamma_n[V^{++}] &= \frac{(-i)(-1)^n}{n} \int \frac{d^4 p_1 \dots d^4 p_n d^8 \theta du_1 \dots du_n}{(2\pi)^{4n}(p_1 - m^2) \dots (p_n^2 - m^2)} \bar{W}_0^{n-2} \times \\ &\times \frac{V_1^{++}(1)V_1^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} (\bar{D}_3^-)^2 V_1^{++}(3) \dots (\bar{D}_n^-)^2 V_1^{++}(n) + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

В низкоэнергетическом пределе имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_n[V^{++}] &= \frac{(-i)(-1)^n}{n} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4(p_1 - m^2)^n} \int d^4 x d^8 \theta \frac{du_1 du_2}{(u_1^+ u_2^+)^2} \bar{W}_0^{n-2} \times \\ &\times V_1^{++}(1)V_1^{++}(2) \int du_3 (\bar{D}_3^-)^2 V_1^{++}(3) \int du_4 (\bar{D}_4^-)^2 V_1^{++}(4) \dots \times \\ &\times \int du_n (\bar{D}_n^-)^2 V_1^{++}(n) + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Учитывая (1.3.38), (1.3.39), выражение (3.4.15) можно переписать в явно калибровочно-инвариантном виде

$$\begin{aligned} \Gamma_n[V^{++}] &= \frac{(-i)}{n} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4(p_1 - m^2)^n} \int d^4 x d^8 \theta du V_1^{++} V_1^{--} \bar{W}_0^{n-2} W_1^{n-2} + \\ &+ \text{к.с.} = \frac{(-i)}{n} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4(p_1 - m^2)^n} \int d^4 x d^4 \theta \bar{W}_0^{n-2} W_1^n + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Таким образом, низкоэнергетическое эффективное действие представляет собой сумму голоморфного и антиголоморфного членов. Существенно, что эти члены отсутствуют в безмассовом случае $W_0 = 0$, отвечающем нулевому центральному заряду. Это согласуется с утверждением, что все голоморфные

вклады, кроме приводящих к перенормировке исходного классического действия, возникают исключительно за счет ненулевого индуцированного центрального заряда.

Выражение (3.4.16) позволяет заключить, что полное голоморфное эффективное действие массивного гипермультиплета во внешнем абелевом калибровочном суперполе имеет вид

$$\Gamma[W] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-i}{n} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 (p^2 - m^2)^n} \int d^4 x d^4 \theta \bar{W}_0^{n-2} W_1^n. \quad (3.4.17)$$

Добавляя к (3.4.17) интеграл от полной производной

$$-i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4 (p^2 - m^2)^n} \int d^4 x d^4 \theta \frac{W_1}{\bar{W}_0}$$

и совершая евклидов поворот, можно привести (3.4.17) к виду

$$\Gamma[W] = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4 x d^4 \theta \frac{1}{\bar{W}_0^2} \int dp^2 p^2 \ln \left(1 + \frac{W_1 \bar{W}_0}{p^2 + m^2} \right). \quad (3.4.18)$$

Регуляризованный импульсный интеграл

$$I = \int_0^A dp^2 p^2 \ln \left(1 + \frac{W_1 \bar{W}_0}{p^2 + m^2} \right), \quad (3.4.19)$$

где A — ультрафиолетовое обрезание, дается выражением

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} A^2 \ln \left(1 + \frac{W_1 \bar{W}_0}{A + m^2} \right) + \frac{1}{2} (W_1 \bar{W}_0 + m^2)^2 \ln \frac{W_1 \bar{W}_0 + m^2}{\mu} - \\ & - \frac{1}{2} (W_1 \bar{W}_0 + m^2)^2 \ln \frac{W_1 \bar{W}_0 + m^2 + A}{\mu} + \frac{W_1 \bar{W}_0}{2} A + \\ & + \frac{m^4}{2} \left(\ln \frac{A + m^2}{\mu} - \ln \frac{m^2}{\mu} \right), \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

где μ — произвольный параметр. Предпоследнее и последнее слагаемые представляют собой полную производную и константу и не дают вклада в (3.4.18). В пределе $A \rightarrow \infty$ первое слагаемое ведет себя как

$$\frac{1}{2} A^2 \ln \left(1 + \frac{W_1 \bar{W}_0}{A + m^2} \right) = \frac{1}{2} W_1 \bar{W}_0 - \frac{1}{4} (W_1 \bar{W}_0)^2 \Rightarrow -\frac{1}{4} \bar{W}_0^2 W_1^2. \quad (3.4.21)$$

Далее, учитывая, что $m^2 = W_0 \bar{W}_0$ (см. (1.4.6)), можно записать

$$W_1 \bar{W}_0 + m^2 = \bar{W}_0 W, \quad (3.4.22)$$

где

$$W = W_0 + W_1. \quad (3.4.23)$$

Выражение

$$-\frac{1}{2}W_0^2W^2\ln\frac{A^2}{\mu^2}$$

представляет собой логарифмическую расходимость и сокращается соответствующим контрчленом. В итоге перенормированное голоморфное эффективное действие имеет вид

$$\Gamma[W] = -\frac{1}{64\pi^2} \int d^4x d^4\theta \left(W^2 \ln \frac{W^2}{\mu^2} - W^2 \right), \quad (3.4.24)$$

где учтено, что

$$\int d^4x d^4\theta W_1^2 = \int d^4x d^4\theta W^2. \quad (3.4.25)$$

Ренормгрупповым произволом в выборе точки нормировки можно воспользоваться, чтобы привести (3.4.24) к окончательному виду

$$\begin{aligned} \Gamma[V^{++}] &= \int d^4x d^4\theta \mathcal{F}(W) + \text{к.с.}, \\ \mathcal{F}(W) &= -\frac{1}{64\pi^2} W^2 \ln \frac{W^2}{M^2}, \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

где M — точка нормировки.

Заметим, что в работе [70] это же эффективное действие было вычислено в рамках суперполевой теории возмущений с безмассовым гипермультиплетом посредством учета ненулевого вакуумного среднего калибровочного суперполя как дополнительного возмущения. В таком подходе остается завуалированным тот факт, что истинной симметрией теории является $N = 2$ суперсимметрия с центральным зарядом.

3.5. Голоморфное эффективное действие $N = 2$, $SU(2)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Рассмотрим $N = 2$ суперсимметричную неабелеву калибровочную теорию с группой $SU(2)$. Пусть третья компонента суперполя V^{++} обладает ненулевым вакуумным средним:

$$\mathcal{V}^{++} \equiv V^{++3} = V_0^{++3} + V_1^{++3}, \quad \langle \mathcal{V}^{++} \rangle = V_0^{++3}. \quad (3.5.1)$$

Это означает, что калибровочная симметрия $SU(2)$ спонтанно нарушена до $U(1)$ (о спонтанном нарушении симметрии в $N = 2$ суперсимметричных калибровочных теориях см. обзор [40]). Найдем голоморфное эффективное действие в этой теории.

Общее выражение для однопетлевого эффективного действия $N = 2$ калибровочной теории дается соотношением (2.4.3). Прежде всего, покажем, что

$$\Gamma_1^{(1)} = \text{Tr} \ln \check{\square}_{(2,2)} \quad (3.5.2)$$

не содержит голоморфных вкладов. Правую часть выражения (3.5.2) можно представить в виде

$$\text{Tr} \ln \check{\square}_{(2,2)} = -\mu^{2\epsilon} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1-\epsilon}} \text{Tr} e^{-s\check{\square}_{(2,2)}}, \quad (3.5.3)$$

где мы ввели параметры регуляризации μ и ϵ , $\epsilon \rightarrow 0$ в конце вычислений. Операция Tr определена следующим образом:

$$\text{Tr} e^{-s\check{\square}_{(2,2)}} = \text{tr} \int d^4x_1 d^4\theta_1^+ du_1 d^4x_2 d^4\theta_2^+ du_2 \delta_A^{(2,2)}(1|2) e^{-s\check{\square}} \delta_A^{(2,2)}(2|1). \quad (3.5.4)$$

Подставим в (3.5.4) явное выражение для аналитических δ -функций (1.1.25):

$$\begin{aligned} \text{Tr} e^{-s\check{\square}_{(2,2)}} &= \text{tr} \int d^4x_1 d^4\theta_1^+ du_1 d^4x_2 d^4\theta_2^+ du_2 \times \\ &\times (D_1^+)^4 [\delta^{12}(z_1 - z_2) \delta^{(-2,2)}(u_1, u_2)] \times \\ &\times e^{-s\check{\square}} (D_2^+)^4 [\delta^{12}(z_2 - z_1) \delta^{(-2,2)}(u_2, u_1)]. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Представляя первую аналитическую δ -функцию в виде [90]

$$\delta_A^{(2,2)}(1|2) = -\frac{1}{2\Box_1} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 [\delta^{12}(z_1 - z_2) (D_2^{--})^2 \delta^{(-2,2)}(u_1, u_2)], \quad (3.5.6)$$

можно восстановить полную грассманову меру в (3.5.5), учитывая аналитические свойства оператора $\check{\square}$:

$$\begin{aligned} \text{Tr} e^{-s\check{\square}_{(2,2)}} &= -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x_1 d^4\theta_1^+ du_1 d^4x_2 d^4\theta_2^+ du_2 \frac{1}{\Box_1} [\delta^4(x_1 - x_2)] \times \\ &\times \delta^8(\theta_1 - \theta_2) e^{-s\check{\square}} \left((D_2^+)^4 [\delta^{12}(z_1 - z_2)] \delta^{(-2,2)}(u_2, u_1) \right) \times \\ &\times (D_2^{--})^2 [\delta^{(-2,2)}(u_1, u_2)]. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

При вычислении голоморфных вкладов необходимо в выражении для оператора $\check{\square}$ (2.3.20) положить

$$W = W_0 + W_1, \quad \bar{W} = \bar{W}_0 + \bar{W}_1, \quad \bar{W}_1 = 0. \quad (3.5.8)$$

В результате оператор $\check{\square}$ принимает вид

$$\check{\square} = \mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu + (D^{+\alpha} W) \mathcal{D}_\alpha^- + \frac{1}{2} \{W, \bar{W}_0\}. \quad (3.5.9)$$

Для получения ненулевого ответа в (3.5.7) необходимо, чтобы в обкладках грассмановых δ -функций оказалось по четыре производных разной киральности. Однако оператор $\check{\square}$ (3.5.9) содержит только производные одной киральности. Поэтому выражение (3.5.7) при условии, что оператор $\check{\square}$ имеет вид (3.5.9), равно нулю. Это и доказывает отсутствие голоморфных вкладов в эффективном действии (3.5.2). Аналогичным образом можно доказать, что $\text{Tr} \ln \check{\square}_{(4,0)}$ также не содержит голоморфных вкладов. В результате голоморфное эффективное действие $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса определяется выражением

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\mathcal{D}^{++})^2. \quad (3.5.10)$$

Эффективное действие $\Gamma^{(1)}[V^{++}]$ запишем в виде

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}] = -\Gamma_\phi[V^{++}], \quad (3.5.11)$$

где $\Gamma_\phi[V^{++}]$ — эффективное действие вещественного ω -гипермультиплета в присоединенном представлении

$$\exp(i\Gamma_\phi[V^{++}]) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{i}{2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta^+ du \mathcal{D}^{++} \phi \mathcal{D}^{++} \phi \right\}. \quad (3.5.12)$$

В случае калибровочной группы $SU(2)$

$$\begin{aligned} \phi &= \phi^a \tau^a, \quad \mathcal{D}^{++} \phi = D^{++} \phi + i[V^{++}, \phi], \\ \tau^a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^a, \quad [\tau^a, \tau^b] = i\sqrt{2} \epsilon^{abc} \tau^c, \quad \text{tr}(\tau^a \tau^b) = \delta^{ab}. \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

При спонтанном нарушении $SU(2)$ до $U(1)$ эффективное действие есть функционал только абелева суперполя $\mathcal{V}^{++}$ (3.5.1). На таком фоне

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{++} \phi^1 &= D^{++} \phi^1 + \sqrt{2} \mathcal{V}^{++} \phi^2, \quad \mathcal{D}^{++} \phi^2 = D^{++} \phi^2 - \sqrt{2} \mathcal{V}^{++} \phi^1, \\ \mathcal{D}^{++} \phi^3 &= D^{++} \phi^3. \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

При функциональном интегрировании в (3.5.12) суперполе ϕ^3 полностью отщепляется. Суперполя ϕ^1 и ϕ^2 можно объединить в один комплексный ω -гипермультиплет $\omega = \phi^1 - i\phi^2$:

$$\mathcal{D}^{++} \omega = D^{++} \omega + i\sqrt{2} \mathcal{V}^{++} \omega, \quad (3.5.15)$$

где $U(1)$ -заряд суперполя ω равен $\sqrt{2}$. В п. 3.1. было показано, что эффективные действия заряженного ω -гипермультиплета и заряженного q -гипермультиплета во внешнем $U(1)$ калибровочном суперполе $\mathcal{V}^{++}$ связаны соотношением $\Gamma_\omega[\mathcal{V}^{++}] = 2\Gamma_q[\mathcal{V}^{++}]$. Эффективное действие $\Gamma_q[\mathcal{V}^{++}]$ определяется равенством (3.4.26), где $U(1)$ -заряд q -гипермультиплета положен равным 1. В случае $U(1)$ -заряда e

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) = -\frac{e^2}{64\pi^2} \mathcal{W}^2 \ln \frac{\mathcal{W}^2}{M^2}. \quad (3.5.16)$$

Эти соображения приводят к следующему выражению для голоморфного эффективного действия $N = 2$, $SU(2)$ калибровочной теории:

$$\Gamma_{SU(2)}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x d^4\theta \mathcal{W}^2 \ln \frac{\mathcal{W}^2}{M^2}. \quad (3.5.17)$$

Оно совпадает с эффективным действием, найденным Зайбергом [37] путем интегрирования $U(1)_R$ -аномалии.

Заметим, что то же выражение для однопетлевого эффективного действия $N = 2$, $SU(2)$ теории Янга–Миллса в кулоновской фазе было получено в работе [74] без использования формализма фонового поля, на основе теории возмущений, аналогичной той, которая была применена в п. 3.3. Голоморфный вклад возникает за счет учета во внутренних линиях заряженных недиагональных компонент калибровочного суперполя, которые при ненулевом центральном заряде приобретают массу по тому же механизму, как и заряженные гипермультиплеты. Вычисление было обобщено на случай произвольной полупростой калибровочной группы (см. также [75,105]) и было явно продемонстрировано, что в $N = 4$ теории Янга–Миллса этот вклад точно сокращает аналогичную поправку, возникающую за счет заряженных гипермультиплетов, в соответствии с утверждением об отсутствии нетривиального голоморфного эффективного действия в этой теории (см. разд. 4).

4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

4.1. Структура эффективного действия. $N = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса в гармоническом суперпространстве получается добавлением к действию $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса действия вещественного ω -гипермультиплета в присоединенном представлении калибровочной группы. Эквивалентность q - и ω -гипермультиплетов позволяет представить действие $N = 4$ теории Янга–Миллса в виде

$$S[V^{++}, q^+, \tilde{q}^+] = -\frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d^4x d^4\theta W^2 - \frac{1}{2g^2} \text{tr} \int d\zeta^{-4} du q^{+i} \mathcal{D} q_i^+, \quad (4.1.1)$$

где

$$q_i^+ = (q^+, \tilde{q}^+), \quad q^{+i} = \epsilon^{ij} q_j^+ = (\tilde{q}^+, -q^+). \quad (4.1.2)$$

Преобразования дополнительной $N = 2$ суперсимметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \delta V^{++} &= (\epsilon^{\alpha i} \theta_\alpha^+ + \bar{\epsilon}_\alpha^i \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}) q_i^+, \\ \delta q^{+i} &= -\frac{1}{4} \{ (D^+)^2 [(\epsilon^i \theta^-) W_\lambda] + (\bar{D}^+)^2 [(\bar{\epsilon}^i \bar{\theta}^-) \bar{W}_\lambda] \}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Однопетлевое эффективное действие в теории с действием (4.1.2) согласно (2.4.3) и (3.3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[V^{++}] &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\mathcal{D})^2 + i \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(2,2)} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(4,0)} \right] + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\mathcal{D})^2 = \\ &= i \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(2,2)} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(4,0)} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Как было показано в разд. 3, выражение $\text{Tr} \ln \check{\square}$ не содержит голоморфных вкладов, поэтому низкоэнергетическое эффективное действие является не голоморфной функцией напряженности W . Согласно [62, 63] не голоморфный вклад только однопетлевой и не содержит инстантонных вкладов. Поэтому не голоморфное эффективное действие полностью содержится в (4.1.4). Прямое исследование выражения $\text{Tr} \ln \check{\square}$ затруднено из-за наличия в нем гармонических сингулярностей вида $\delta(u_1, u_2)$. Однако, как будет показано в следующем разделе, разность $\text{Tr} \ln \check{\square}_{(2,2)} - \text{Tr} \ln \check{\square}_{(4,0)}$ несингулярна.

4.2. Устранение гармонических сингулярностей. Итак, однопетлевое эффективное действие в $N = 4$ теории Янга–Миллса имеет вид

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(2,2)} - \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \check{\square}_{(4,0)}, \quad (4.2.1)$$

где оператор $\check{\square}$ определен равенством (2.3.20).

Представим детерминанты операторов $\check{\square}$ в виде функциональных интегралов по бозонным суперполям без связей v^{++} , u^{++} и $\rho^{(+4)}$, σ :

$$\begin{aligned} (\text{Det} \check{\square}_{(2,2)})^{-1} &= \int \mathcal{D}v^{++} \mathcal{D}u^{++} \exp \left\{ -i \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du v^{++} \check{\square}_\lambda u^{++} \right\}, \\ (\text{Det} \check{\square}_{(4,0)})^{-1} &= \int \mathcal{D}\rho^{(+4)} \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ -i \text{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \rho^{(+4)} \check{\square}_\lambda \sigma \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Индекс λ у операторов $\check{\square}$ в правых частях равенств (4.2.2) означает, что в выражении для $\check{\square}$ все ковариантные производные и суперполя заданы в λ -представлении. Наша цель — найти низкоэнергетическое эффективное действие. Выберем фоновое поле, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{D}^{\alpha(i}\mathcal{D}_{\alpha}^{j)}W = 0. \quad (4.2.3)$$

При этих условиях операторы $\mathcal{D}^{++}$ и $\check{\square}$ коммутируют, поскольку

$$[\mathcal{D}^{++}, \check{\square}]\Phi^{(q)} = \frac{i}{4}(1-q)(\mathcal{D}^{+\alpha}\mathcal{D}_{\alpha}^{+}W)\Phi^{(q)} \quad (4.2.4)$$

для любого аналитического суперполя $\Phi^{(q)}$ с $U(1)$ -зарядом q . Выполним в (4.2.2) следующую невырожденную замену переменных:

$$\begin{aligned} v^{++} &= \mathcal{F}^{++} + \mathcal{D}^{++}\sigma, \\ u^{++} &= \mathcal{G}^{++} + \mathcal{D}^{++} \int d\tilde{\zeta}^{(-4)} \mathbf{G}^{(0,0)}(\zeta, \tilde{\zeta}) \rho^{(+4)}(\tilde{\zeta}), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

где v^{++} , u^{++} и σ , $\rho^{(+4)}$ являются общими аналитическими вещественными суперполями, тогда как $\mathcal{F}^{++}$ и $\mathcal{G}^{++}$ — аналитические вещественные суперполя, подчиненные связям

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{F}^{++} = 0, \quad \mathcal{D}^{++}\mathcal{G}^{++} = 0. \quad (4.2.6)$$

$\mathbf{G}^{(0,0)}(\zeta_1, \zeta_2)$ — функция Грина ω -гипермультиплета, взаимодействующего с $N = 2$ калибровочным суперполем. Она удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{D}_1^{++})^2 \mathbf{G}^{(0,0)}(1, 2) = \delta_A^{(4,0)}(1, 2) \quad (4.2.7)$$

и в τ -базисе имеет вид

$$\mathbf{G}_{\tau}^{(0,0)}(1, 2) = \frac{1}{\check{\square}_1} (\overrightarrow{\mathcal{D}_1^+})^4 \left\{ \delta^{12}(z_1 - z_2) \frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3} \right\} (\overleftarrow{\mathcal{D}_2^+})^4. \quad (4.2.8)$$

Чтобы найти якобиан J преобразования (4.2.5), выполним последнее в правой части тождества

$$1 = \int \mathcal{D}v^{++} \mathcal{D}u^{++} \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du v^{++} u^{++} \right\}. \quad (4.2.9)$$

Имеем

$$\begin{aligned} 1 &= J \int \mathcal{D}\rho^{(+4)} \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \rho^{(+4)} \sigma \right\} \times \\ &\times \int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \mathcal{G}^{++} \right\} = \\ &= J \int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \mathcal{G}^{++} \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

откуда

$$J = \left(\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \mathcal{G}^{++} \right\} \right)^{-1}. \quad (4.2.11)$$

Делая теперь замену переменных (4.2.5) в (4.2.2), получим

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{Det}_{(2,2)} \check{\square}_\lambda \right)^{-1} &= J \int \mathcal{D}\rho^{(+4)} \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \rho^{(+4)} \check{\square}_\lambda \sigma \right\} \times \\ &\times \int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \check{\square}_\lambda \mathcal{G}^{++} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \exp \{ 2i \Gamma_{N=4}^{(1)} \} &= \frac{[\operatorname{Det} \check{\square}_{(2,2)}]^{-1}}{[\operatorname{Det} \check{\square}_{(4,0)}]^{-1}} = \\ &= J \int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \check{\square}_{(4,0)} \mathcal{G}^{++} \right\} = \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \check{\square}_\lambda \mathcal{G}^{++} \right\}}{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp \left\{ -i \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \mathcal{G}^{++} \right\}}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Полученное выражение можно переписать в другом виде:

$$\exp \{ i \Gamma_{N=4}^{(1)} \} = \frac{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \exp \left\{ -i/2 \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \check{\square}_\lambda \mathcal{F}^{++} \right\}}{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \exp \left\{ -i/2 \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}^{++} \mathcal{F}^{++} \right\}}. \quad (4.2.14)$$

Оба функциональных интеграла в (4.2.14) берутся по суперполю $\mathcal{F}^{++}$, подчиненному нетривиально зависящей от V^{++} связи (4.2.6). Перейдем в (4.2.14) к τ -базису:

$$\exp \{ i \Gamma_{N=4}^{(1)} \} = \frac{\int \mathcal{D}\mathcal{F}_\tau^{++} \exp \left\{ -i/2 \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}_\tau^{++} \check{\square}_\tau \mathcal{F}_\tau^{++} \right\}}{\int \mathcal{D}\mathcal{F}_\tau^{++} \exp \left\{ -i/2 \operatorname{tr} \int d\zeta^{(-4)} du \mathcal{F}_\tau^{++} \mathcal{F}_\tau^{++} \right\}}. \quad (4.2.15)$$

Суперполе $\mathcal{F}_\tau^{++}$ подчинено связи

$$D^{++} \mathcal{F}_\tau^{++} = 0, \quad (4.2.16)$$

поскольку ковариантная производная D^{++} в τ -базисе совпадает с обычной. Связь (4.2.16) точно решается:

$$\mathcal{F}_\tau^{++}(z, u) = \mathcal{F}^{ij} u_i^+ u_j^+, \quad \bar{\mathcal{F}}^{ij} = \mathcal{F}_{ij}. \quad (4.2.17)$$

Из условия аналитичности следует (см. п. 1.1.):

$$\mathcal{D}_\alpha^{(i}\mathcal{F}^{jk)} = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{(i}\mathcal{F}^{jk)} = 0. \quad (4.2.18)$$

Поскольку в выбранном нами фоне (4.2.3) оператор $\bar{\square}$ коммутирует с $\mathcal{D}^{++}$, он переводит пространство таких суперполей само в себя:

$$\begin{aligned} \bar{\square} \mathcal{F}^{ij} = & \left(\mathcal{D}^a \mathcal{D}_a + \frac{1}{2} \{W, \bar{W}\} \right) \mathcal{F}^{ij} + \\ & + \frac{i}{3} \mathcal{D}^{\alpha(i} W \mathcal{D}_{\alpha k} \mathcal{F}^{j)k} + \frac{i}{3} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}^{(i} \bar{W} \bar{\mathcal{D}}_{\dot{k}}^{\dot{j})} \mathcal{F}^{jk)}. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Далее будет удобно перейти к $N = 1$ суперполевному формализму.

4.3. Переход к $N = 1$ суперполям. Введем грассмановы координаты $N = 1$ суперпространства $(\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ как часть координат $(\theta_i^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^j)$, параметризующих его $N = 2$ расширение

$$\theta^\alpha = \theta_1^\alpha, \quad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^1, \quad (4.3.1)$$

и определим $N = 1$ проекции $N = 2$ суперполей по правилу

$$U| = U(x^m, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^j)|_{\theta_2=\bar{\theta}^2=0}. \quad (4.3.2)$$

$N = 1$ калибровочные ковариантные производные имеют вид

$$\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\alpha^1| = D_\alpha^1 + i \mathcal{A}_\alpha^1|, \quad \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} = \bar{\mathcal{D}}_1^{\dot{\alpha}}| = \bar{D}_1^{\dot{\alpha}} + i \bar{\mathcal{A}}_1^{\dot{\alpha}}|. \quad (4.3.3)$$

Ковариантно-киральная $N = 2$ напряженность W порождает два ковариантно-киральных $N = 1$ суперполя

$$\begin{aligned} \Phi = W|, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0, \\ 2i W_\alpha = \mathcal{D}_\alpha^2 W|, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} W_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

причем W_α удовлетворяет тождеству Бианки

$$\mathcal{D}^\alpha W_\alpha = \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}. \quad (4.3.5)$$

Алгебра $N = 1$ производных имеет вид

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\} = -2i \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ [\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}, \mathcal{D}_\beta] = -2i \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{W}_{\dot{\alpha}}, \quad [\mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\beta}}] = -2i \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} W_\alpha. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Определим $N = 1$ проекции суперполя $\mathcal{F}^{ij}$:

$$\Psi = \mathcal{F}^{22}|, \quad \bar{\Psi} = \mathcal{F}^{11}|, \quad F = \bar{F} = -2i \mathcal{F}^{12}|. \quad (4.3.7)$$

Тот факт, что $\mathcal{F}^{ij}$ подчинен связям (4.3.7), означает, что $\Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{F}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Psi = 0, \quad -\frac{1}{4}\bar{D}^2 F + [\Phi, \Psi] = 0. \quad (4.3.8)$$

Таким образом, Ψ — ковариантно-киральное суперполе, а F подчинено модифицированному условию линейности.

Переход в (4.2.15) к $N = 1$ суперполям осуществляется по следующей схеме. Пусть $L^{(+4)}(\zeta)$ — калибровочно-ковариантное вещественное аналитическое суперполе, удовлетворяющее связи

$$D^{++}L^{(+4)} = 0 \quad (4.3.9)$$

(условию аналитичности по гармоникам). Такая связь точно решается:

$$L^{(+4)}(\zeta) = L^{ijkl}(z)u_i^+u_j^+u_k^+u_l^+. \quad (4.3.10)$$

Грассманова гармоническая аналитичность суперполя $L^{(+4)}(\zeta)$ тогда эквивалентна следующим связям для обычных $N = 2$ суперполей L^{ijkl} :

$$D_{\alpha}^{(i_1}L^{i_2\cdots i_5)} = \bar{D}_{\alpha}^{(i_1}L^{i_2\cdots i_5)} = 0. \quad (4.3.11)$$

Отсюда следует, что

$$\int d\zeta^{(-4)}duL^{(+4)} = 6 \int d^8z L^{1122}|, \quad d^8z = d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}. \quad (4.3.12)$$

В качестве $L^{(+4)}$ выберем

$$L^{(+4)} = \text{tr}(\mathcal{F}^{++}\mathcal{F}^{++}) = \text{tr}(\mathcal{F}_{\tau}^{++}\mathcal{F}_{\tau}^{++}). \quad (4.3.13)$$

Тогда получим

$$\text{tr} \int d\zeta^{(-4)}du\mathcal{F}_{\tau}^{++}\mathcal{F}_{\tau}^{++} = \text{tr} \int d^8z (2\mathcal{F}^{11}|\mathcal{F}^{22}| + 4\mathcal{F}^{12}|\mathcal{F}^{12}|). \quad (4.3.14)$$

Аналогично

$$\text{tr} \int d\zeta^{(-4)}du\mathcal{F}_{\tau}^{++}\check{\square}_{\tau}\mathcal{F}_{\tau}^{++} = \text{tr} \int d^8z (2\mathcal{F}^{11}|(\check{\square}\mathcal{F}^{22})| + 4\mathcal{F}^{12}|(\check{\square}\mathcal{F}^{12})|). \quad (4.3.15)$$

Следуя [68], сравним результат для однопетлевого эффективного действия $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теории в $N = 2$ суперпространстве с результатом, полученным в рамках метода фонового поля в $N = 1$ суперпространстве [19]. Для этого положим

$$\Phi = 0. \quad (4.3.16)$$

Выражение (4.2.19) принимает вид

$$\left(\tilde{\square} \mathcal{F}^{ij} \right) | = \tilde{\square} \mathcal{F}^{ij} |, \quad \tilde{\square} = \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a - W^\alpha \mathcal{D}_\alpha + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}. \quad (4.3.17)$$

Как видно, оператор $\tilde{\square}$ не перемешивает компоненты $\mathcal{F}^{ij}$. Оператор $\tilde{\square}$ является в точности тем оператором, который входит в квадратичную по квантовому калибровочному суперполю часть действия в $N = 1$ методе фонового поля [19]. Эффективное действие в этом случае определяется выражением

$$\exp \{ i \Gamma_{N=4}^{(1)} \} = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}F \exp \left\{ i \operatorname{tr} \int d^8 z \left(-\bar{\Psi} \tilde{\square} \Psi + \frac{1}{2} F \tilde{\square} F \right) \right\}}{\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}F \exp \left\{ i \operatorname{tr} \int d^8 z \left(-\bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{2} F^2 \right) \right\}}. \quad (4.3.18)$$

Из (4.3.8) при $\Phi = 0$ следует, что F — ковариантно-линейное суперполе.

В рамках $N = 1$ метода фонового поля [19]:

$$\exp \{ i \Gamma_{N=4}^{(1)} \} = \int \mathcal{D}U \exp \left\{ \frac{i}{2} \operatorname{tr} \int d^8 z U \tilde{\square} U \right\}, \quad (4.3.19)$$

где U является общим $N = 1$ суперполем. Представим его в виде суммы кирального, антикирального и линейного суперполей:

$$U = \Psi + \bar{\Psi} + F, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \Psi = 0, \quad \bar{\mathcal{D}}^2 F = 0. \quad (4.3.20)$$

Якобиан J такого преобразования определяется из соотношения

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}U \exp \left\{ \frac{i}{2} \operatorname{tr} \int d^8 z U^2 \right\} = \\ &= J \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}F \exp \left\{ i \operatorname{tr} \int d^8 z \left(\bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{2} F^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Если выполнить замену переменных (4.3.20) в (4.3.19) и учесть якобиан, то мы получим в точности (4.3.18).

До этого момента $N = 2$ суперполевая напряженность была подчинена связи (4.2.3). Теперь потребуем, чтобы W лежала в подалгебре Картана:

$$[W, \bar{W}] = 0. \quad (4.3.22)$$

Заметим, что неголоморфное эффективное действие

$$\int d^4 x d^8 \theta \mathcal{H}(W, \bar{W})$$

хорошо определено, если W лежит в подалгебре Картана. В противном случае, тождество

$$\{ \mathcal{D}_\alpha^i, \mathcal{D}_\beta^j \} W = 2i \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ij} [\bar{W}, W] \quad (4.3.23)$$

означает, что члены с производными могут давать вклад в $\mathcal{H}(W, \bar{W})$.

Дополнительно потребуем

$$\mathcal{D}_\alpha \Phi = 0, \quad \mathcal{D}_\alpha W_\beta = 0. \quad (4.3.24)$$

Такой выбор достаточен для вычисления $\mathcal{H}(W, \bar{W})$ в силу равенства

$$\int d^4x d^8\theta \mathcal{H}(W, \bar{W}) = \int d^8z \mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha \bar{\mathcal{W}}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{W}}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial^4 \mathcal{H}(\Phi, \bar{\Phi})}{\partial \Phi^2 \partial \bar{\Phi}^2} + \text{производные}. \quad (4.3.25)$$

Для нахождения $\mathcal{H}(W, \bar{W})$ достаточно найти первый член в правой части (4.3.25). Остальные члены восстанавливаются по суперсимметрии. В выбранном фоне

$$(\check{\square} \mathcal{F}^{ij})| = \Delta(\mathcal{F}^{ij}|), \quad (4.3.26)$$

где

$$\Delta = \mathcal{D}^m \mathcal{D}_m - W^\alpha \mathcal{D}_\alpha + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \{\Phi, \bar{\Phi}\}. \quad (4.3.27)$$

С учетом (4.3.14), (4.3.15), выражение для эффективного действия сведется к следующему функциональному интегралу по $N = 1$ суперполям:

$$\exp \{i \Gamma_{N=4}^{(1)}\} = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}F \exp \{i \operatorname{tr} \int d^8z (-\bar{\Psi} \Delta \Psi + \frac{1}{2} F \Delta F)\}}{\int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}F \exp \{i \operatorname{tr} \int d^8z (-\bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{2} F^2)\}}. \quad (4.3.28)$$

Выражение (4.3.28) выведено из представления для эффективного действия (4.2.15), которое явно $N = 2$ суперсимметрично и инвариантно относительно $SU(2)_R$ -автоморфизмов $N = 2$ супералгебры. Мы вправе использовать любую технику для вычисления специальных вкладов в $\Gamma^{(1)}$, в частности, редуцировать $\Gamma^{(1)}$ к $N = 1$ суперполям. В этом состоит отличие от случая, когда $N = 2$ или $N = 4$ теории формулируются с самого начала в $N = 1$ суперполях. В последнем случае только $N = 1$ суперсимметрия реализована вне массовой оболочки.

Следующий шаг состоит в вычислении правой части (4.3.28) в низкоэнергетическом пределе в случае $SU(n)$ калибровочной группы, спонтанно нарушенной до максимального тора $[U(1)]^{n-1}$.

4.4. Вычисление низкоэнергетического эффективного действия в теории с калибровочной группой $SU(n)$. До этого момента калибровочная группа не фиксировалась. Теперь в качестве калибровочной группы выберем $SU(n)$. Введем базис Вейля в ее алгебре Ли [91]:

$$(e_{kl})_{pq} = \delta_{kp} \delta_{lq}, \quad k, l, p, q = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.1)$$

Произвольный элемент $a \in su(n)$ выглядит следующим образом:

$$a = \sum_{k=1}^n a^k e_{kk} + \sum_{k \neq l} a^{kl} e_{kl}, \quad a^{kl} = \overline{a^{lk}}, \quad \sum_{k=1}^n a^k = 0, \quad (4.4.2)$$

где a^i вещественны. Элемент r подалгебры Картана является диагональной матрицей с нулевым следом:

$$r = \sum_{k=1}^n r^k e_{kk} = \text{diag}(r^1, r^2, \dots, r^n), \quad \sum_{i=1}^n r^i = 0. \quad (4.4.3)$$

Для любых элементов базиса Вейля имеем

$$\text{tr}(e_{pq}e_{kl}) = 2n \text{tr}_F(e_{pq}e_{kl}) = 2n \delta_{pl} \delta_{qk}. \quad (4.4.4)$$

Здесь tr_F означает след в фундаментальном представлении. Отсюда вытекает важное следствие

$$\text{tr}(e_{kl}e_{lk}) = 2n; \quad \text{tr}(e_{pq}e_{kl}) = 0, \quad p \neq l, q \neq k. \quad (4.4.5)$$

Коммутатор элемента r из подалгебры Картана с базисным элементом имеет вид

$$[r, e_{kl}] = (r^k - r^l)e_{kl}. \quad (4.4.6)$$

Величина $(r^k - r^l)$ представляет собой корень алгебры $su(n)$.

Для выбранной калибровочной группы напряженности $W, \bar{W}$ лежат в подалгебре Картана алгебры $su(n)$

$$W = \text{diag}(W^1, W^2, \dots, W^n), \quad \sum_{k=1}^n W^k = 0. \quad (4.4.7)$$

Так как нас интересует случай, когда калибровочная группа $SU(n)$ нарушена до максимального тора $[U(1)]^{n-1}$, мы должны потребовать $W^k - W^l \neq 0$ для $k \neq l$. В случае, когда некоторые собственные значения W^k совпадают, уже некоторая неабелева подгруппа $H \in SU(n)$ остается ненарушенной. Вводя $N = 1$ проекции $\Phi = W|$ и $W_\alpha = -\frac{i}{2} \mathcal{D}_\alpha^2 W|$, ассоциированные с W , мы находим $N = 1$ суперполевые корни $\Phi^k - \Phi^l$ и $W_\alpha^k - W_\alpha^l$. Ограничения на W^k , сформулированные выше, эквивалентны условиям $\Phi^k - \Phi^l \neq 0$ для $k \neq l$.

Вернемся к выражению (4.3.28). Так как суперполя Φ и W_α принадлежат подалгебре Картана, компоненты квантовых суперполей $\bar{\Psi}, \Psi, F$, которые лежат в подалгебре Картана, не взаимодействуют с фоновыми суперполями

и, следовательно, отщепляются. Заметим, что связи (4.3.8) на компоненты суперполей $\Phi, \bar{\Phi}, F$, которые лежат в подалгебре Картана, превращаются, соответственно, в обычные условия (анти)киральности и линейности. С другой стороны, связи (4.3.28) позволяют выразить компоненты Ψ и $\bar{\Psi}$, лежащие вне подалгебры Картана, через F :

$$\Psi^{kl} = \frac{\bar{\mathcal{D}}^2 F^{kl}}{4(\Phi^k - \Phi^l)}, \quad \bar{\Psi}^{kl} = \frac{\mathcal{D}^2 F^{kl}}{4(\bar{\Phi}^k - \bar{\Phi}^l)}. \quad (4.4.8)$$

Эти соотношения можно трактовать как определение кирального и антикирального суперполей Φ^{kl} и $\bar{\Phi}^{kl}$ в терминах суперполей без связей

$$V^{kl} \equiv F^{kl}, \quad \bar{V}^{kl} \equiv F^{lk}, \quad k < l. \quad (4.4.9)$$

В итоге функциональные интегралы в (4.3.28) сводятся к интегралам по суперполям без связей $V^{kl}, \bar{V}^{kl}$.

С учетом (4.4.5), (4.4.8) и (4.4.9) получаем

$$\text{tr} \int d^8 z \left(-\bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{2} F^2 \right) = 2n \int d^8 z \sum_{k < l} \bar{V}^{kl} B_{kl} V^{kl}, \quad (4.4.10)$$

где

$$B_{kl} = \frac{1}{16} \frac{\{\bar{\mathcal{D}}^2, \mathcal{D}^2\}}{|\Phi^k - \Phi^l|^2} + 1. \quad (4.4.11)$$

Заметим, что суммирование в (4.4.10) идет только по положительным корням. В результате

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}F \exp \left\{ i \text{tr} \int d^8 z \left(-\bar{\Psi} \Psi + \frac{1}{2} F^2 \right) \right\} = \\ & = \int \mathcal{D}\bar{V}^{kl} \mathcal{D}V^{kl} \exp \left\{ 2n i \int d^8 z \sum_{k < l} \bar{V}^{kl} B_{kl} V^{kl} \right\} = \prod_{k < l} \text{Det}^{-1}(B_{kl}). \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Перейдем теперь к числителю в (4.3.28). Прежде всего найдем действие Δ (4.3.27) на суперполя F^{kl} . Результат имеет вид

$$\Delta(F^{kl} e_{kl}) = (\Delta_{kl} F^{kl}) e_{kl} \quad (\text{нет суммирования}), \quad (4.4.13)$$

где

$$\Delta_{kl} = \mathcal{D}^m \mathcal{D}_m - (W^{k\alpha} - W^{l\alpha}) \mathcal{D}_\alpha + (\bar{W}_\alpha^k - \bar{W}_\alpha^l) \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} + |\Phi^k - \Phi^l|^2. \quad (4.4.14)$$

В результате получаем

$$\text{tr} \int d^8 z \left(\frac{1}{2} F \Delta F - \bar{\Psi} \Delta \Psi \right) = 2n \int d^8 z \sum_{k < l} \bar{V}^{kl} B_{kl} \Delta_{kl} V^{kl}, \quad (4.4.15)$$

где B_{kl} определен в (4.4.11). Тогда ответ для функционального интеграла в (4.3.28) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}F \exp \left\{ i \operatorname{tr} \int d^8 z \left(-\bar{\Psi} \Delta \Psi + \frac{1}{2} F \Delta F \right) \right\} = \\ & = \int \mathcal{D}\bar{V}^{kl} V^{kl} \exp \left\{ 2n i \int d^8 z \sum_{k < l} \bar{V}^{kl} B_{kl} \Delta_{kl} V^{kl} \right\} = \\ & = \prod_{k < l} \operatorname{Det}^{-1}(B_{kl}) \operatorname{Det}^{-1}(\Delta_{kl}). \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Окончательно

$$e^{i\Gamma^{(1)}} = \prod_{k < l} \operatorname{Det}^{-1}(\Delta_{kl}). \quad (4.4.17)$$

Однопетлевая квантовая поправка $\Gamma^{(1)}$ определяется функциональным детерминантом оператора (4.4.14) в пространстве $N = 1$ суперполей, не подчиненных связям. Равенство (4.4.17) можно переписать в следующем виде:

$$\Gamma_{N=4}^{(1)} = \sum_{k < l} \Gamma_{kl}, \quad \Gamma_{kl} = i \operatorname{Tr} \ln \Delta_{kl}. \quad (4.4.18)$$

Теперь необходимо вычислить $\operatorname{Tr} \ln \Delta_{kl}$ при фиксированных k и l . Представим Γ_{kl} как

$$\Gamma_{kl} = -i \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-i|\Phi^k - \Phi^l|^2 s} \int d^8 z \mathcal{U}(z, z|s), \quad (4.4.19)$$

где $\mathcal{U}(z, z'|s)$ представляет собой швингеровское ядро [9]:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(z, z'|s) &= \exp \left\{ -is(\mathcal{D}^a \mathcal{D}_a - (W^{\alpha k} - W^{\alpha l}) \mathcal{D}_\alpha + (\bar{W}_\alpha^k - \bar{W}_\alpha^l) \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}) \right\} \times \\ &\times \delta^8(z - z'). \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Для вычисления неголоморфного вклада достаточно использовать приближение

$$\mathcal{U}(z, z'|s) \approx \exp \left\{ is[(W^{\alpha k} - W^{\alpha l}) \mathcal{D}_\alpha - (\bar{W}_\alpha^k - \bar{W}_\alpha^l) \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}] \right\} \mathcal{U}_0(z, z'|s), \quad (4.4.21)$$

где $\mathcal{U}_0(z, z'|s)$ — свободное швингеровское ядро [9]:

$$\mathcal{U}_0(z, z'|s) = e^{-is\partial^a \partial_a} \delta^8(z - z') = \frac{i}{(4\pi i s)^2} \delta^4(\theta - \theta') e^{-i(x-x')^2/4s}. \quad (4.4.22)$$

В силу тождества

$$\frac{1}{16} D^2 \bar{D}^2 \delta^4(\theta - \theta') = 1$$

находим

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^8 z W^{\alpha kl} W_{\alpha}^{kl} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^{kl} \bar{W}^{\dot{\alpha} kl} \int_0^{\infty} ds s e^{-s |\Phi^{kl}|^2}, \quad (4.4.23)$$

где

$$W_{\alpha}^{kl} = W_{\alpha}^k - W_{\alpha}^l, \quad \Phi^{kl} = \Phi^k - \Phi^l. \quad (4.4.24)$$

Вычисляя интеграл по s в (4.4.23), окончательно получаем

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^8 z \frac{W^{\alpha kl} W_{\alpha}^{kl} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^{kl} \bar{W}^{\dot{\alpha} kl}}{(\Phi^{kl})^2 (\bar{\Phi}^{kl})^2}. \quad (4.4.25)$$

Выражение (4.4.25) определяет неголоморфный потенциал $\mathcal{H}(W, \bar{W})$ в $N = 4$ теории Янга–Миллса в терминах $N = 1$ проекций W и $\bar{W}$. Из равенств (4.3.25), (4.4.18), (4.4.24) и (4.4.25) можно восстановить $\mathcal{H}(W, \bar{W})$:

$$\Gamma^{(1)} = \int d^4 x d^8 \theta \mathcal{H}(W, \bar{W}),$$

$$\mathcal{H}(W, \bar{W}) = \frac{1}{(8\pi)^2} \sum_{k < l} \ln \left(\frac{\bar{W}^k - \bar{W}^l}{\Lambda} \right)^2 \ln \left(\frac{W^k - W^l}{\Lambda} \right)^2, \quad (4.4.26)$$

где напряженности W^k принадлежат подалгебре Картана (4.4.7) и $W^k - W^l \neq 0$ при $k \neq l$. Выражение (4.4.26) представляет собой низкоэнергетическое эффективное действие в $N = 4$ калибровочной теории с калибровочной группой $SU(n)$, спонтанно нарушенной до $[U(1)]^{n-1}$. Неголоморфная функция $\mathcal{H}(W, \bar{W})$, как и голоморфный эффективный потенциал в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [44–46], строится из корней группы $SU(n)$ и инвариантна относительно группы Вейля.

В случае теории с калибровочной группой $SU(2)$ имеем

$$W = \text{diag}(W^1 = \mathcal{W}, W^2 = -\mathcal{W}). \quad (4.4.27)$$

Единственный положительный корень равен $2\mathcal{W}$, и функция $\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}})$, согласно (4.4.26), имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathcal{W}, \bar{\mathcal{W}}) = \frac{1}{(8\pi)^2} \ln \left(\frac{\bar{\mathcal{W}}}{\Lambda} \right)^2 \ln \left(\frac{\mathcal{W}}{\Lambda} \right)^2, \quad (4.4.28)$$

что совпадает с найденной в [66–68].

Описанный выше метод вычисления неголоморфного эффективного потенциала $\mathcal{H}(W, \bar{W})$ пригоден для произвольной полупростой группы. В произвольной полупростой калибровочной группе G ранга r введем базис Вейля $\{h_i, e_{+\hat{\alpha}}, e_{-\hat{\alpha}}\}$, где элементы h_i принадлежат подалгебре Картана, $\hat{i} = 1, \dots, r$, $\pm\hat{\alpha}$ — положительные (отрицательные) корни. Когда калибровочная группа нарушена до максимального тора $U(1)^r$, $N = 2$ напряженность имеет вид $W = \sum W_i h_i$, $[W, e_{+\hat{\alpha}}] = W_{+\hat{\alpha}} e_{+\hat{\alpha}}$, и все $W_{+\hat{\alpha}}$ — ненулевые. Неголоморфный эффективный потенциал

$$\mathcal{H}(\bar{W}, W) = \frac{1}{(8\pi)^2} \sum_{+\hat{\alpha}} \ln \left(\frac{\bar{W}_{+\hat{\alpha}}}{\Lambda} \right)^2 \ln \left(\frac{W_{+\hat{\alpha}}}{\Lambda} \right)^2, \quad (4.4.29)$$

где сумма берется по положительным корням.

Соотношение (4.4.26) было также получено другими методами в работах [98, 99]. Ведущая бозонная компонента в выражении (4.4.26) найдена в работе [97]. Вывод соотношения (4.4.28), не апеллирующий к $N = 1$ суперполям, предложен в недавней работе [103]. В работах [62, 99, 100] приведены аргументы в пользу того, что в $N = 4$, $SU(2)$ теории поля Янга–Миллса любые пертурбативные и непертурбативные поправки к низкоэнергетическому эффективному действию (4.4.28) отсутствуют, и однопетлевой неголоморфный эффективный потенциал представляет собой точное низкоэнергетическое эффективное действие. Аналогичные аргументы в $N = 4$, $SU(n)$ теории ($n > 2$) привели к заключению [99, 100] о том, что в высших петлях возможны нелогарифмические вклады в неголоморфный эффективный потенциал. Однако прямые вычисления [101] не показали наличие таких вкладов в трех- и четырехпетлевом приближении.

Интересно выписать ведущую бозонную компоненту в суперполе в эффективном потенциале (4.4.28). Ее легко найти, если рассмотреть выражение (4.4.28) для группы $SU(2)$. Это ведет к ведущей бозонной компоненте в форме $\frac{F^4}{|\varphi|^2}$, где F_{mn} — обычная абелева напряженность, а φ — скалярная компонента, входящие в суперполе в $N = 2$ напряженность $\mathcal{W}$. Отметим, что в недавней работе [102] удалось построить обобщение эффективного потенциала (4.4.28), содержащее точную зависимость от постоянной напряженности F_{mn} и обладающее явной $N = 2$ суперсимметрией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем основное содержание обзора.

1. Изложен метод фонового поля в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в гармоническом суперпространстве. Показано, что однопетлевое эффективное действие определяется функциональным интегралом

по квантовому калибровочному суперполю, фермионным духам Фаддеева–Попова и бозонному духу Нильсена–Каллош. Обсуждена общая структура однопетлевого эффективного действия и показано, что голоморфные квантовые поправки в калибровке Фейнмана обусловлены исключительно вкладом духов, причем однопетлевое эффективное действие духов совпадает с точностью до коэффициента с эффективным действием ω -гипермультиплета.

2. Построен массивный гипермультиплет, в котором масса генерируется через взаимодействие с абелевым калибровочным суперполем постоянной напряженности. Такая связь нарушает $U(1)_R$ -автоморфизм $N = 2$ супералгебры и ведет к появлению центрального заряда. В неабелевой калибровочной $N = 2$ теории аналогичный механизм возникновения центрального заряда за счет ненулевых вакуумных значений суперполевых напряженностей, принадлежащих картановской подалгебре, помимо нарушения $U(1)_R$ приводит к спонтанному нарушению калибровочной группы до подгруппы Картана.

3. В теории массивного q -гипермультиплета, взаимодействующего с абелевым калибровочным суперполем, построена теория возмущения для вычисления эффективного действия калибровочного суперполя в гармоническом суперпространстве в кулоновской фазе. В ее рамках вычислено низкоэнергетическое эффективное действие абелева калибровочного суперполя. Показано, что оно является голоморфным.

4. Описан $N = 2$ суперполевой метод вычисления голоморфного эффективного действия Зайберга в $N = 2$, $SU(2)$ калибровочной теории в кулоновской фазе на основе метода фонового поля в гармоническом суперпространстве.

5. Найдено низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N = 2$ векторного мультиплета, в $N = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(n)$, спонтанно нарушенной до максимального тора $[U(1)]^{n-1}$. В отличие от рассмотренных ранее теорий с $N = 2$ суперсимметрией оно является негломорфным и строится в терминах корней группы $SU(n)$. Полученный результат может быть обобщен на случай произвольной полупростой группы Ли.

Авторы признательны С.Дж.Гэйтсу, М.Грисару, Б.де Виту, Н.Драгону, Б.М.Зупнику, Д.Люсту, Э.Сокачеву, С.Тайзену, А.А.Цейтлину за обсуждение проблем, рассмотренных в обзоре. Исследования И.Л.Б. и С.М.К. были частично поддержаны РФФИ, проект No 99-02-16617, и грантовым центром МО РФ, проект № 97-6.2-43; исследования И.Л.Б., Е.А.И. и С.М.К. были частично поддержаны совместным грантом РФФИ-DFG, проект № 99-02-04022; исследования Е.И.Б., И.Л.Б., Е.А.И. и С.М.К. были частично поддержаны грантом ИНТАС, INTAS-96-0308; исследования Б.А.О. были частично поддержаны грантом Министерства энергетики США, контракт № DE-AC02-76-ER-03072; исследования Е.А.И. были частично поддержаны РФФИ, проект № 99-02-18417.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгебра ковариантных производных. Стандартное $N = 2$ суперпространство параметризуется координатами $(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i})$. Ковариантные производные, антикоммутирующие с генераторами преобразований суперсимметрии, имеют вид

$$D_\alpha^i = \frac{\partial}{\partial \theta_i^\alpha} + i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}i} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}} - i\theta_i^\alpha\partial_{\alpha\dot{\alpha}}$$

и удовлетворяют алгебре

$$\{D_\alpha^i, \bar{D}_{\dot{\alpha}j}\} = -2i\delta^i_j\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \{D_\alpha^i, D_\beta^j\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}j}, \bar{D}_{\dot{\beta}j}\} = 0.$$

Их можно разложить на гармонические проекции $D_\alpha^\pm$ и $\bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm$:

$$D_\alpha^i = u^{+i}D_\alpha^- - u^{-i}D_\alpha^+, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}i} = u_i^+\bar{D}_{\dot{\alpha}}^- - u_i^-\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+,$$

$$D_\alpha^\pm = D_\alpha^i u_i^\pm, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^i u_i^\pm.$$

Единственные ненулевые антикоммутаторы этих проекций

$$\{D_\alpha^+, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^-\} = -2i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \{D_\alpha^-, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\} = 2i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}.$$

Коммутаторы спинорных и гармонических производных

$$[D^{\pm\pm}, D_\alpha^\pm] = [D^{\pm\pm}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm] = 0, \quad [D^{\pm\pm}, D_\alpha^\mp] = D_\alpha^\pm, \quad [D^{\pm\pm}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\mp] = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ицксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля: В 2 т. М.: Мир, 1984.
2. Buchbinder I.L., Odintsov S.D., Shapiro I.L. Effective Action in Quantum Gravity. Bristol; Philadelphia: IOP Publishing, 1992.
3. Henneaux M., Teitelboim C. Quantization of Gauge Systems. Princeton Univ. Press, 1992.
4. Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1994.
5. Weinberg S. The Quantum Theory of Fields. V.II: Modern Applications. Cambridge Univ. Press, 1996.
6. Bertlmann R.A. Anomalies in Quantum Field Theory. Oxford: Clarendon Press, 1996.
7. Gates S.J., Grisaru M.T., Roček M., Siegel W. Superspace. Benjamin: Cummings, 1983.
8. Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989.
9. Buchbinder I.L., Kuzenko S.M. Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity. IOP Publishing, 1995.

10. *Mohapatra R.N.* Unification and Supersymmetry. Springer, 1992.
11. *D'Hoker, Phong D.H.* Lectures on Supersymmetric Yang–Mills Theory and Integrable Systems. hep-th/9912271.
12. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Е.* Теория суперструн. В 2 т. М.: Мир, 1990.
13. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Yarevskaya J.* // Nucl. Phys. B. 1994. V.411. P.665–692.
14. *Бухбиндер И.Л., Кузенко С.М., Яревская Ж.В.* // ЯФ. 1993. Т.56. С.202–216.
15. *Pickering A., West P.* // Phys. Lett. B. 1996. V.383. P.54–62.
16. *West P.* // Phys. Lett. B. 1991. V.261. P.396–401.
17. *Jack I., Jones D.R.T., West P.* // Phys. Lett. B. 1991. V.258. P.383–386.
18. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Petrov A.Yu.* // Phys. Lett. B. V.321. P.372–377.
19. *Grisaru M.T., Roček M., Siegel W.* // Nucl. Phys. B. 1979. V.159. P.429–451.
20. *Grisaru M.T., Milewski B., Zanon D.* // Phys. Lett. B. 1985. V.155. P.357–367.
21. *Grisaru M.T., Riva F., Zanon D.* // Nucl. Phys. B. 1982. V.214. P.465–486.
22. *Grisaru M.T., Siegel W.* // Nucl. Phys. B. 1981. V.187. P.149–183.
23. *Grisaru M.T., Siegel W.* // Nucl. Phys. B. 1982. V.201. P.293–314.
24. *Grisaru M.T., Zanon D.* // Nucl. Phys. B. 1985. V.252. P.587–620.
25. *Sohnius M.* // Phys. Rept. 1985. V.128. P.39–204.
26. *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K.* // Nucl. Phys. B. 1983. V.214. P.519–531.
27. *Мезинческу Л.* О суперполево́й формулировке $O(2)$ -суперсимметрии. Препринт ОИЯИ P2-12572. Дубна, 1979.
28. *Siegel W., Gates S.J.* // Nucl. Phys. B. 1981. V.189. P.295–316.
29. *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K.* // Nucl. Phys. B. 1984. V.236. P.125–166.
30. *Galperin A. et al.* // Class. Quant. Grav. 1984. V.1. P.469–498.
31. *Galperin A. et al.* // Class. Quant. Grav. 1985. V.2. P.601–616.
32. *Galperin A. et al.* // Class. Quant. Grav. 1985. V.2. P.617–630.
33. *Sokatchev E.* Harmonic Superspace and its Application in Extended Supersymmetry // Supersymmetry and Applications: Superstrings, Anomaly and Supergravity. Cambridge University Press, 1986. P.283–309.
34. *Ivanov E.* // Chinese J. of Phys. 1996. V.34. P.862–873.
35. *Seiberg N.* The Power of Holomorphy: Exact Results in 4D SUSY Field Theories. hep-th/9408013.
36. *Shifman M.* // Prog. Part. Nucl. Phys. 1997. V.39. P.1–116.
37. *Seiberg N.* // Phys. Lett. B. 1988. V.206. P.75–80.
38. *Seiberg N., Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1994. V.426. P.19–52.
39. *Bilal A.* Duality in $N = 2$ SUSY $SU(2)$ Yang–Mills Theory. hep-th/9601007.
40. *Alvarez-Gaume L., Hassan S.F.* // Fortsch. Phys. 1997. V.45. P.159–236.
41. *Gomez C., Hernandez R.* Electric-Magnetic Duality and Effective Field Theories. hep-th/9510023.
42. *Di Vecchia P.* Duality in $N = 2, 4$ Supersymmetric Gauge Theories. hep-th/9803026.
43. *Lerche W.* // Fortsch. Phys. 1997. V.45. P.293–340.

44. Klemm A. *et al.* // Phys. Lett. B. 1995. V.344. P.169–175.
45. Klemm A., Lerche W., Theisen S. // Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V.11. P.1929–1974.
46. Argyres P., Faraggi A. // Phys. Rev. Lett. 1995. V.74. P.3931–3934.
47. Douglas M.R., Shenker S.H. // Nucl. Phys. B. 1995. V.447. P.271–296.
48. Danielsson U.H., Sundborg B. // Phys. Lett. B. 1995. V.358. P.273–280.
49. Brandhuber A., Landsteiner K. // Phys. Lett. B. 1995. V.358. P.73–80.
50. Seiberg N., Witten E. // Nucl. Phys. B. 1994. V.431. P.484–550.
51. de Wit B., Grisaru M.T., Roček M. // Phys. Lett. B. 1996. V.374. P.297–303.
52. Grisaru M.T., Roček M., von Unge R. // Phys. Lett. B. 1996. V.383. P.415–421.
53. Lindström U. *et al.* // Phys. Lett. B. 1996. V.374. P.297–303.
54. Clark T.E., Love S.T. // Phys. Lett. B. 1996. V.388. P.577–580.
55. Ivanov E., Ketov S., Zupnik B. // Nucl. Phys. B. 1997. V.509. P.53–82.
56. Howe P.S., Stelle K.S., West P.S. // Phys. Lett. B. 1983. V.144. P.55–58.
57. Brink L., Lindgren O., Nilsson B. // Phys. Lett. B. 1983. V.123. P.323–328.
58. Mandelstam S. // Phys. Lett. B. 1983. V.213. P.149–168.
59. Sohnius M., West P. // Phys. Lett. B. 1981. V.100. P.245–256.
60. Montonen C., Olive D. // Phys. Lett. B. 1977. V.72. P.117–127.
61. Osborn H. // Phys. Lett. B. 1979. V.83. P.321–330.
62. Dine M., Seiberg N. // Phys. Lett. B. 1997. V.409. P.239–244.
63. Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Ovrut B.A. // Phys. Lett. B. 1998. V.433. P.335–345.
64. Dorey N. *et al.* // Phys. Lett. B. 1997. V.408. P.213–221.
65. Bellisai D. *et al.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V.56. P.5218–5232.
66. Gonzalez-Rey F., Roček M. // Phys. Lett. B. 1998. V.434. P.303–311.
67. Periwai V., von Unge R. // Phys. Lett. B. 1998. V.430. P.71–76.
68. Buchbinder I.L., Kuzenko S.M. // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V.13. P.1623–1635.
69. Buchbinder I.L., Kuzenko S.M. // Class. Quant. Grav. 1998. V.14. P.L157–L162.
70. Buchbinder I.L. *et al.* // Phys. Lett. B. 1997. V.412. P.309–319.
71. Buchbinder I.L. *et al.* // Phys. Lett. B. 1998. V.417. P.61–71.
72. Buchbinder E.I. *et al.* // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V.13. P.1071–1082.
73. Buchbinder E.I., Buchbinder I.L., Kuzenko S.M. // Phys. Lett. B. 1999. V.446. P.216–223.
74. Eremin S., Ivanov E. // Mod. Phys. Lett. A. 2000. V.15. P.1859–1878.
75. Buchbinder I.L., Samsonov I.B. // Mod. Phys. Lett. A. 1999. V.14. P.2537–2544.
76. Buchbinder E.I. Holomorphic Effective Action in Massive Hypermultiplet Theory // Proc. of the 2nd Intern. Conf. «Quantum Field Theory and Gravity», July 28 – Aug. 2, 1997. Tomsk, 1997. P.159–163.
77. Buchbinder I.L. Effective Action of $N = 2$ Supersymmetric Field Theories in Harmonic Superspace Approach // Proc. of the 2nd Intern. Conf. «Quantum Field Theory and Gravity», July 28 – Aug. 2, 1997. Tomsk, 1997. P.41–52.

78. *Buchbinder I.L., Ovrut B.A.* Background Field Method and Structure of Effective Action in $N = 2$ Super Yang–Mills Theories // Proc. of the 31st Intern. Symp. «Theory of Elementary Particles», Ahrenshoop, Sept. 2–6, 1997. Buckow; Berlin; Weinheim; New York; Chichester; Brisbane; Singapore; Toronto, 1998. P.33–39.
79. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Ovrut B.A.* Covariant Harmonic Supergraphity for $N = 2$ Super Yang–Mills Theories // Proc. of the Intern. Sem. Dedicated to the Memory of V.I.Ogievetsky, «Supersymmetries and Quantum Symmetries», Dubna, Russia, July 22–26, 1997. Springer, 1999. P.21–36.
80. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
81. *Sohnius M.* // Nucl. Phys. B. 1978. V.138. P.109–121.
82. *Grimm R., Sohnius M., Wess J.* // Nucl. Phys. B. 1978. V.133. P.275–295.
83. *Zupnik B.* // Phys. Lett. B. 1987. V.183. P.175–176.
84. *Scherk J., Schwarz J.* // Nucl. Phys. B. 1979. V.153. P.61–88.
85. *Де Вумм Б.С.* Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
86. *Арефьева И.Я., Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* // ТМФ. 1974. Т.21. С.311–321.
87. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
88. *Haag R., Lopuszanski J.T., Sohnius M.* // Nucl. Phys. B. 1975. V.88. P.257–274.
89. *Witten E., Olive D.* // Phys. Lett. B. 1978. V.78. P.97–106.
90. *Galperin A., Ky N.A., Sokatchev E.* // Mod. Phys. Lett. A. 1987. V.2. P.33–36.
91. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. В 2 т. М.: Мир, 1980.
92. *McArthur I.N., Gargett T.D.* // Nucl. Phys. B. 1997. V.479. P.525.
93. *Pletnev N.G., Banin A.T.* // Phys. Rev. D. 1999. V.60. P.105017.
94. *Buchbinder I.L., Petrov A.Yu., Cvetic M.* // Mod. Phys. Lett. A. 2000. V.15. P.783.
95. *Buchbinder I.L., Petrov A.Yu., Cvetic M.* // Nucl. Phys. B. 2000. V.571. P.358.
96. *Banin A.T., Buchbinder I.L., Pletnev N.G.* // Nucl. Phys. B. 2001. V.598. P.371.
97. *Chepelev I., Tseytlin A.A.* // Nucl. Phys. B. 1998. V.511. P.629.
98. *Gonzalez-Rey F. et al.* // Nucl. Phys. B. 1999. V.544. P.218.
99. *Love D.A., von Unge R.* // JHEP. 1998. V.9811. P.014.
100. *Dine M., Gray J.* // Phys. Lett. B. 2000. V.481. P.427.
101. *Buchbinder I.L., Petrov A.Yu.* // Phys. Lett. B. 2000. V.482. P.429.
102. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Tseytlin A.A.* // Phys. Rev. D. 2000. V.62. P.045001.
103. *Kuzenko S.V., McArthur I.N.* Effective Action of $N = 4$ Super Yang–Mills: $N = 2$ Superspace Approach. hep-th/0101127.
104. *Бухбиндер И.Л., Кузенко С.М., Петров А.Ю.* // ЯФ. 1996. Т.59. С.157.
105. *Бухбиндер И.Л., Самсонов И.Б.* // ТМФ. 2000. Т.122. С.444.
106. *Polchinski J.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V.75. P.4724.
107. *Polchinski J.* Tasi Lectures on D -Branes. hep-th/9611050.
108. *Taylor W.* Lectures on D -Branes, Gauge Theory and M(atrices). hep-th/9801182.
109. *Tseytlin A.A.* Born–Infeld Action, Supersymmetry and String Theory. hep-th/9908105.

- 110. *Maldacena J.* // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V.2. P.231.
- 111. *Akhmetov E.T.* Introduction to the AdS/CFT Correspondence. hep-th/9911095.
- 112. *Petersen J.L.* Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT. hep-th/9902131.
- 113. *Aharony O. et al.* // Phys. Rept. 2000. V.323. P.183.
- 114. *Di Vecchia P.* Large N Gauge Theories and AdS/CFT Correspondence. hep-th/9908148.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.12.01

Нейтральные токи с изменением аромата в стандартной модели и ее расширениях с синглетными кварками. Бейлин В.А., Верешков Г.М., Кукса В.И. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2001. Т. 32, вып. 5. С. 1005.

Обзор посвящен феноменологии синглетных кварков (СК), которые являются синглетами группы $SU(2)$, имеют гиперзаряды $Y_h = -1/3$ и массы $m_h > m_t$. В области ускорительных энергий эффекты существования СК в основном проявляются в нейтральных токах с изменением аромата (НТИА). Аналогичные процессы в стандартной модели (СМ), имеющие место только на петлевом уровне, рассматриваются как фон для выделения сигналов новой физики. Показано, что экспериментальные данные по редким процессам и соответствующие предсказания СМ допускают привлечение расширений СМ к анализу явлений, обусловленных НТИА. Построена обобщенная матрица смешивания стандартных кварков друг с другом и с СК, получены ограничения на углы смешивания и оценка нижней границы массы СК $m_h \geq 0,5$ ТэВ. Обсуждаются перспективы повышения уровня достоверности гипотезы о существовании СК до их прямого наблюдения. Проанализированы сечения недиагонального рождения СК в паре со стандартным кварком в e^-e^+ -, ep - и $p\bar{p}$ -соударениях, описана уникальная сигнатура таких событий. Кратко обсуждается модель с верхним синглетным кварком с гиперзарядом $Y_U = 2/3$ и ее приложения к физике t -кварка.

Табл. 2. Ил. 12. Библиогр.: 140.

УДК 539.12.01

Связанные $q\bar{q}$ -системы в рамках различных версий трехмерной редукции уравнения Бете–Солпитера. Копалейшвили Т. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2001. Т. 32, вып. 5. С. 1061.

Сформулированы пять различных версий трехмерной редукции уравнения Бете–Солпитера (БС) для двухфермионной системы в одновременном приближении для ядра уравнения БС. Получены условия нормировки волновой функции связанного состояния для всех версий редукции. Сформулирована также трехмерная редукция уравнения БС в квазипотенциальном подходе без применения мгновенного приближения для ядра уравнения БС. Все версии редукции имеют правильный одночастичный предел (уравнение Дирака), когда масса одного из составляющих фермионов устремляется в бесконечность, за исключением версии Солпитера. Рассмотрено также применение этих версий для исследования различных свойств $q\bar{q}$ связанной системы.

Ил. 2. Библиогр.: 48.

УДК 539.12.01

Свойства амплитуд рассеяния адронов в рамках аксиоматического подхода. Вернов Ю.С., Мнацаканова М.Н. Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2001. Т. 32, вып. 5. С. 1115.

Обзор посвящен следствиям аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии для процессов рассеяния элементарных частиц при высоких, но конечных энергиях. Классические теоремы, справедливые при асимптотических энергиях, получаются автоматически при соответствующем предельном переходе. Рассмотрены различные правила сумм и показана их эквивалентность интегральным соотношениям между

реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния. Единым образом изучена связь реальной и мнимой частей как симметричной, так и антисимметричной амплитуд рассеяния. Исследована зависимость между поведением модуля амплитуды рассеяния и ее фазой. Показано, что отсутствие сильных осцилляций у амплитуды рассеяния дает возможность аппроксимации дисперсионных соотношений их локальными аналогами. Проанализированы свойства осциллирующих амплитуд рассеяния. Рассмотрены верхние границы на полное сечение и амплитуду упругого рассеяния. Найдены абсолютные ограничения сверху для упругого $\pi^0\pi^0$ -рассеяния, справедливые при произвольных физических энергиях.

Табл. 1. Библиогр.: 121.

УДК 530.1;075.8

Новый подход к соотношению неопределенностей энергия–время. *Суханов А.Д.* Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2001. Т. 32, вып. 5. С. 1177.

Приведен обзор литературных данных и результатов оригинальных исследований автора по соотношениям неопределенностей, включая соотношение энергия–время. Сформулирована концепция универсальности соотношений неопределенности (СН). На основе СН Шредингера предложено обобщение понятия «неопределенность времени» Мандельштама–Тамма, которое обладает свойством однозначности и не приводит к сингулярностям. Введено обобщенное СН энергия–время и эквивалентное ему СН энергия–обратная эффективная частота. Установлено, что характер корреляции флуктуаций в этом СН совпадает с принятым в статистической термодинамике, но качественно отличается от корреляции флуктуаций в СН Гейзенберга.

Библиогр.: 52.

УДК 51-7: 39.12; 539.12.01

Низкоэнергетическое эффективное действие в $N=2$ суперсимметричных теориях поля. *Бухбиндер Е.И., Оврут Б.А., Бухбиндер И.Л., Иванов Е.А., Кузенко С.М.* Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2001. Т. 32, вып. 5. С. 1222.

Излагается новый подход к вычислению низкоэнергетического квантового эффективного действия в $N=2$ и $N=4$ суперсимметричных калибровочных теориях на основе метода гармонического суперпространства. Его характерная черта — сохранение явной $N=2$ суперсимметрии вне массовой оболочки на всех этапах вычислений. Существенной частью формализма является $N=2$ суперполево обобщение метода фонового поля. В качестве конкретных примеров вычислены однопетлевые эффективные действия для $N=2$, $SU(2)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в кулоновской фазе, теории массивного гипермультиплета во внешнем абелевом калибровочном суперполе, а также для $N=4$, $SU(n)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой, нарушенной до максимального тора. В теориях с $N=2$ суперсимметрией ведущий вклад в низкоэнергетическое эффективное действие определяется голоморфной функцией, исчезающей в пределе нулевого центрального заряда в алгебре $N=2$ суперсимметрии. В $N=4$ калибровочной теории низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N=2$ векторного мультиплета, является вещественной функцией. Голоморфные вклады в этом случае отсутствуют. Проведено сравнение с другими подходами.

Библиогр.: 114.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бейлин В.А., Верешков Г.М., Кукса В.И.</i> Нейтральные токи с изменением аромата в стандартной модели и ее расширениях с синглетными кварками	1005
<i>Копалешвили Т.</i> Связанные $q\bar{q}$ системы в рамках различных версий трехмерной редукции уравнения Бете–Солпитера	1061
<i>Вернов Ю.С., Мнацаканова М.Н.</i> Свойства амплитуд рассеяния адронов в рамках аксиоматического подхода	1115
<i>Суханов А.Д.</i> Новый подход к соотношению неопределенностей энергия–время ..	1177
<i>Бухбиндер Е.И., Оврут Б.А., Бухбиндер И.Л., Иванов Е.А., Кузенко С.М.</i> Низкоэнергетическое эффективное действие в $N = 2$ суперсимметричных теориях поля	1222

CONTENTS

<i>Beylin V.A., Vereshkov G.M., Kuksa V.I.</i> Flavour Changing Neutral Currents in the Standard Model and Its Extensions with Singlet Quarks	1005
<i>Kopaleishvili T.</i> Bound $q\bar{q}$ Systems in the Framework of Different Versions of 3D Reductions of the Bethe–Salpeter Equation	1061
<i>Vernov Yu.S., Mnatsakanova M.N.</i> Hadron Scattering Amplitude Properties in the Framework of Axiomatic Approach	1115
<i>Sukhanov A.D.</i> New Approach to the Uncertainties Relation Energy–Time	1177
<i>Buchbinder E.I., Ovrut B.A., Buchbinder I.L., Ivanov E.A., Kuzenko S.M.</i> Low-Energy Effective Action in $N = 2$ Supersymmetric Field Theories ..	1222

УДК 539.12.01

НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ С ИЗМЕНЕНИЕМ АРОМАТА В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ РАСШИРЕНИЯХ С СИНГЛЕТНЫМИ КВАРКАМИ

В.А.Бейлин, Г.М.Верешков, В.И.Кукса

Научно-исследовательский институт физики
Ростовского государственного университета, Ростов-на-Дону

ВВЕДЕНИЕ	1005
НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ С ИЗМЕНЕНИЕМ АРОМАТА В СТАН- ДАРТНОЙ МОДЕЛИ	1008
Физическая природа и статус недиагональных нейтраль- ных токов в стандартной модели	1008
Недиагональные однопетлевые диаграммы.	1012
Редкие распады мезонов	1016
Смешивание в системах нейтральных мезонов	1027
НЕДИАГОНАЛЬНЫЕ ТОКИ С ИЗМЕНЕНИЕМ АРОМАТА В МОДЕЛИ С СИНГЛЕТНЫМ КВАРКОМ	1029
Экспериментальные и теоретические предпосылки суще- ствования синглетного кварка	1029
Обзор феноменологии синглетных кварков	1032
Низкоэнергетический лагранжиан модели с синглетным кварком. Структура нейтральных и заряженных токов	1035
Обобщенная матрица смешивания	1038
Эффективные вершины в модели с синглетным кварком	1042
ФЕНОМЕНОЛОГИЯ СИНГЛЕТНОГО КВАРКА	1044
Ограничения на углы смешивания синглетного кварка с обычными.	1044
Недиагональные процессы рождения синглетных и обыч- ных кварков в e^+e^- -, ep - и $p\bar{p}$ -реакциях	1049
Свойства t -кварка в модели с верхним синглетным квар- ком	1053
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1055
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1057

УДК 539.12.01

BOUND $q\bar{q}$ SYSTEMS IN THE FRAMEWORK
OF DIFFERENT VERSIONS OF 3D REDUCTIONS
OF THE BETHE–SALPETER EQUATION

T. Kopaleishvili

HEPI, Tbilisi State University, University St. 9, 380086 Tbilisi, Georgia

INTRODUCTION	1061
BETHE–SALPETER EQUATION FOR THE TWO-FERMION BOUND STATE	1062
THREE-DIMENSIONAL REDUCTIONS OF THE BS EQUATION	1067
The Salpeter Equation [6]	1067
The Gross Equation [7]	1070
The Mandelzweig–Wallace Equation [8]	1072
The Cooper–Jennings Equation [9]	1073
The Maung–Norbury–Kahana Equation [10,11]	1075
The Normalization Condition for the Wave Function in MW, CJ and MNK Versions	1077
Logunov–Tavkhelidze Quasi-Potential Approach [12]	1080
MESON SPECTROSCOPY	1083
Partial-Wave Decomposition	1083
Dynamical Input	1089
t'Hooft Interaction	1091
Solution of the Equations	1093
DECAYS OF THE MESONS IN THE C.M. FRAME	1098
REFERENCES	1112

УДК 539.12.01

СВОЙСТВА АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ АДРОНОВ В РАМКАХ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

*Ю.С.Вернов**

Институт ядерных исследований РАН, Москва

*М.Н.Мнацаканова***

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

ВВЕДЕНИЕ	1115
Краткий исторический экскурс	1115
План обзора	1120
АНАЛИТИЧНОСТЬ В S -ПЛОСКОСТИ И СТРОГИЕ СООТНО- ШЕНИЯ	1123
Дисперсионные соотношения и правила сумм	1123
Логарифмические дисперсионные соотношения	1128
Быстро и медленно сходящиеся интегральные соотношения	1131
Квазидисперсионные соотношения и практическая ана- литичность	1132
СВЯЗЬ РЕАЛЬНОЙ И МНИМОЙ ЧАСТЕЙ СИММЕТРИЧНОЙ И АНТИСИММЕТРИЧНОЙ АМПЛИТУД УПРУГОГО РАССЕЯ- НИЯ	1134
СВЯЗЬ МЕЖДУ ФАЗОЙ И МОДУЛЕМ АМПЛИТУД УПРУ- ГОГО РАССЕЯНИЯ	1140
Симметричная амплитуда	1140
Соотношения между дифференциальными сечениями ча- стицы и античастицы на одной и той же мишени	1145
ЛОКАЛЬНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ	1148
Неосциллирующие или слабо осциллирующие амплитуды рассеяния	1148
Сильно осциллирующие амплитуды рассеяния	1154

*E-mail: vernov@ms2.inr.ac.ru

**E-mail: mnatsak@theory.sinp.msu.ru

СТРОГИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ СВЕРХУ НА ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ И НА АМПЛИТУДУ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ	1155
Асимптотические и конечноэнергетические верхние гра- ницы	1155
Абсолютные ограничения на полное сечение и мнимую часть амплитуды упругого $\pi^0 + \pi^0$ -рассеяния при произ- вольных энергиях	1160
Абсолютные ограничения на парциальные амплитуды	1163
Абсолютные ограничения сверху на $ F + (\omega, t) $	1164
ПРИЛОЖЕНИЕ А	1170
Ограничения снизу и число нулей амплитуды рассеяния	1170
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	1172
Уравнение для $\tilde{u}_\alpha$ при произвольном α	1172
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1172

УДК 530.1;075.8

НОВЫЙ ПОДХОД К СООТНОШЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ*

А.Д. Суханов

Российский университет дружбы народов, Москва

ВВЕДЕНИЕ. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ СЕМЬДЕСЯТ ЛЕТ СПУСТЯ	1178
КОНЦЕПЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ СООТНОШЕНИЙ НЕ- ОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ	1181
Прообразы СН в классической физике	1181
Универсальные СН Шредингера в неклассической физике	1185
Флуктуации макропараметров и СН Эйнштейна в статисти- ческой термодинамике	1191
Современный статус СН энергия–время	1195
ОБОБЩЕННОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ВРЕМЯ	1199
Обобщение понятия неопределенности времени Ман- дельштама–Тамма	1199
Финитное движение: квантовый осциллятор в когерент- ном состоянии	1200
Инфинитное движение микросистемы: свободная микро- частица в состоянии гауссова волнового пакета	1203
Эффективная частота как универсальная временная ха- рактеристика открытой микросистемы в целом	1207
СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ЭНЕРГИЯ–ОБ- РАТНАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ ЧАСТОТА	1210
Соотношение неопределенностей энергия–обратная тем- пература как аналог обобщенного соотношения неопре- деленностей энергия–время	1210
Флуктуация эффективной частоты квантового осцилля- тора в когерентном состоянии	1212

*Расширенный вариант доклада на Боголюбовской конференции «Проблемы теоретической и математической физики» (Дубна, ОИЯИ, сентябрь 1999 г.).

Соотношение неопределенностей энергия–обратная эффективная частота для открытой микросистемы	1215
ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СН ШРЕДИНГЕРА В ЦЕЛОСТНОЙ ТЕОРИИ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	1218
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1220

УДК 51-7:39.12; 539.12.01

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ
ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ
В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Е.И.Бухбиндер, Б.А.Оврут

Пенсильванский университет, Филадельфия, США

И.Л.Бухбиндер

Томский государственный педагогический университет, Томск

Е.А.Иванов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С.М.Кузенко

Западно-Австралийский университет, Недландс, Австралия

ВВЕДЕНИЕ	1223
$N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ	1229
Гармоническое суперпространство	1229
Безмассовые гипермультиплеты	1233
$N = 2$ суперсимметричная теория Янга–Миллса	1237
Массивный гипермультиплет	1242
МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА	1244
Идея метода	1244
Квантово-фоновое разделение	1246
Фиксация калибровки и процедура Фаддеева–Попова	1251
Общая структура эффективного действия	1256
НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИИ	1258
Эквивалентность q^+ - и ω -гипермультиплетов	1258
Голоморфность и центральный заряд	1260

Теория возмущений для массивного гипермультиплета	1262
Вычисление низкоэнергетического эффективного действия векторного мультиплета	1263
Голоморфное эффективное действие $N = 2$, $SU(2)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса	1269
НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА	1272
Структура эффективного действия	1272
Устранение гармонических сингулярностей	1273
Переход к $N = 1$ суперполям	1276
Вычисление низкоэнергетического эффективного действия в теории с калибровочной группой $SU(n)$	1279
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1284
ПРИЛОЖЕНИЕ	1286
Алгебра ковариантных производных	1286
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1286