ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2011. Т. 42. ВЫП. 3

ГАМИЛЬТОНОВА РЕДУКЦИЯ $SU(2)$-ГЛЮОДИНАМИКИ

А. М. Хведелидзе

Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2011. Т. 42. ВЫП. 3

ГАМИЛЬТОНОВА РЕДУКЦИЯ $SU(2)$-ГЛЮОДИНАМИКИ

А. М. Хведелидзе

Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Изложена гамильтонова редукция теории Янга–Миллса со структурной группой $SU(2)$ к нелокальной модели самодействующего неотрицательно-определенного симметрического 3×3 матричного поля. Дается анализ его трансформационных свойств относительно преобразований Пуанкаре. Показано, что в пределе сильной константы связи классическая динамика редуцированной системы может быть описана в рамках локальной теории взаимодействующих полей нерелятивистских спина 0 и спина 2. Предложена теория возмущений по обратным степеням константы связи $g^{-2/3}$, позволяющая рассчитывать поправки к ведущему длинноволновому приближению.

The Hamiltonian reduction of Yang–Mills theory with the structure group $SU(2)$ to a nonlocal model of self-interacting 3×3 positive semidefinite matrix field is presented. Analysis of the field's transformation properties under the Poincare group action is given. It is shown that in the limit of a strong coupling the classical dynamics of the reduced system can be described within the local theory of interacting nonrelativistic spin-0 and spin-2 fields. A perturbation theory in powers of the inverse coupling constant $g^{-2/3}$, which allows one to calculate corrections to the leading long-wave approximation, is suggested.

PACS: 11.15.-q; 11.10.Ef; 11.10.-z; 11.25.Me; 12.38.Aw

Памяти А. Н. Тавхелидзе

1. ЛОКАЛЬНОСТЬ VS. НЕЛОКАЛЬНОСТЬ

> Принцип понимания внешнего мира на основе его поведения в бесконечно малом — ведущий теоретико-познавательный мотив как физики близкодействия, так и римановой геометрии...
>
> *Г. Вейль* [1]

Интуитивное представление о локальной природе фундаментальных взаимодействий как альтернатива действий на расстоянии ньютоновской механики формализуется в классической теории поля в виде *принципа локальности взаимодействия*. В своей математической формулировке этот принцип диктует вид лагранжиана полевой системы как функции точки пространства-времени: лагранжиан в любой *локальной* теории поля зависит лишь от значения поля в ее бесконечно малой окрестности, т. е. определяется полем и конечным числом его производных [2]. Это означает, что динамика классических полей задается дифференциальными уравнениями в частных производных конечного порядка, которые в соответствии с другим базовым положением теории поля, *принципом классического детерминизма*, должны быть гиперболического типа [3]. В релятивистской квантовой теории поля эти аксиомы локальной теории классических полей, дополненные общими принципами квантовой механики и теории относительности, определяют локальный характер взаимодействия квантов фундаментальных полей, преобразующихся по неприводимым представлениям группы Пуанкаре [4]. Однако реализация подобных представлений в моделях теории поля, обладающих внутренними симметриями, сталкивается с рядом противоречий. В этом случае оказывается, что как оба принципа, локальности и классического детерминизма, так и метод описания частиц посредством состояний Фока требуют уточнения и существенной модификации. В процессе преодоления этих трудностей и была сформулирована концепция неабелевых калибровочных полей*, а в конечном итоге и современная теория электрослабых и сильных взаимодействий (см., например, [6–9]).

Конфликт между изотопической симметрией и локальностью демонстрируется следующими наглядными соображениями [5]. С одной стороны, произвольность ориентации изотопического спина, в силу изотопической симметрии, означает неразличимость состояний «протона» и «нейтрона» в любой точке пространства-времени. С другой стороны, поскольку изотопический заряд сохраняется, то, определив, что есть «протон» в некой точке, мы тем самым уничтожаем свободу выбора между «протоном» и «нейтроном» в любом другом месте. Возможность такой корреляции в *локальной* полевой системе очевидно противоречит принципу близкодействия. Разрешение этого парадокса Янг и Миллс нашли в электродинамике. Здесь фаза локального поля электрона, несущего заряд, также является произвольной, но сразу же после ее определения в одной-единственной точке она фиксируется в силу сохранения электрического заряда во всем пространстве-времени. Как известно, в этом случае противоречие между инвариантностью и локальностью снимается существованием *электромагнитного поля,* которое коррелирует относительные фазы поля электрона в любых точках пространства. Иными словами, глобальная $U(1)$-симметрия сосуществует с локальностью за счет локаль-

*Аннотацию своей знаменитой работы [5] 1954 г. Ч. Янг и Р. Миллс начинают с утверждения: «It is pointed that the usual concept of invariance under isotopic spin rotations is not consistent with the concept of localized fields».

ной, *калибровочной* инвариантности. В полной аналогии с этим локальность фундаментального поля, описывающего протон и нейтрон, приводит к необходимости существования *неабелева калибровочного* поля. На этот раз локальность полей оказывается совместимой с наличием изотопических зарядов благодаря расширению глобальной инвариантности до калибровочной $SU(2)$-симметрии.

Введение калибровочного поля, разрешив конфликт между локальностью и существованием внутренней симметрии, приводит, однако, к новому противоречию, на этот раз с *принципом классического детерминизма*. Оказывается, что, хотя уравнения Эйлера–Лагранжа для калибровочных полей и представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка, не все из них являются гиперболическими. В силу калибровочной симметрии лишь часть уравнений определяют эволюцию, а оставшиеся задают связи, ограничения на полевые конфигурации. Более того, согласно анализу задачи Коши ее решение содержит произвольные функции, что делает эволюцию полевой системы непредсказуемой [10–12]. Выход из создавшегося конфликта состоит в ослаблении требований детерминизма. Вводится новый постулат, согласно которому лишь эволюция *калибровочно-инвариантных величин*, так называемых *наблюдаемых*, подлежит однозначному определению из полевых уравнений.

Подобное ограничение сферы действия принципа классического детерминизма сектором наблюдаемых подразумевает определение полного набора калибровочно-инвариантных переменных, а также установление их динамических уравнений. Именно в этом и состоит суть задачи *редукции* в калибровочной теории.

При теоретико-возмущенческом рассмотрении калибровочных полей считается, что в результате редукции теория может быть переформулирована в терминах «редуцированных» полей, удовлетворяющих все тем же аксиомам локальности, детерминизма и допускающих интерпретацию элементарных полевых возбуждений в виде наблюдаемых частиц. Наиболее успешный подход к подобному построению квантовой теории калибровочных полей [13] основан на применении метода функционального интеграла, обобщенного на случай гамильтоновых систем со связями [14]. Этот подход прекрасно зарекомендовал себя там, где методы теории возмущений по степеням малости константы взаимодействия работают. Однако сегодня, несмотря на более чем полувековой период изучения полей Янга–Миллса, подобная программа вне пределов теории возмущений не имеет удовлетворительной реализации. Существует большое число направлений, в которых идет поиск решения этой задачи. Приведем заведомо неполный список публикаций, в которых обсуждаются различные редуцированные формы теории полей Янга–Миллса, отличные от ее пертурбативной формулировки [15–35]. В настоящем обзоре мы ограничимся одним из таких подходов, инициированным более тридцати лет назад известной работой Голдстоуна и Джакива [15] и развитым в виде различных модификаций [17, 21, 31–33, 36]. Данный подход предполагает выделение калибровочно-инвариантных переменных и явное разрешение связей теории. Далее мы детально изложим одну из версий подобной редукции, которая оказывается приспособленной к расчетам в режиме, альтернативном стандартной теории возмущений. Предлагаемый подход к проблеме основан на классическом методе гамильтоновой редукции [37, 38], распространенном на вырожденные динамические системы (см. обзор [39] и цитированную там литературу). С его помощью будет получено представление теории полей Янга–Миллса в форме полевой модели, в которой фундаментальным полем является самодействующее матричное поле. Данное поле не ограничено связями, и решения соответствующих классических уравнений движения уже не содержат произвольных функций. Однако при этом классическое действие редуцированной теории является *нелокальным*!

Восстанавливая в правах «классический детерминизм», мы пришли к нелокальности взаимодействия. Как следствие, помимо математических сложностей технического характера при работе с такой теорией возникает проблема интерпретации самого редуцированного матричного поля в смысле выявления фундаментальных частиц, коим оно соответствует. Тем самым мы сталкиваемся с необходимостью ответить на вопрос: *работает ли, и если да, то как, сама вигнеровская интерпретация частиц в случае редуцированного поля?**

Как будет показано ниже, в силу нелокальности взаимодействия редуцированное матричное поле обладает сложными, нелинейными трансформационными свойствами по отношению к преобразованиям из группы Пуанкаре. Однако вычисления показывают, что в приближении сильной константы связи эти законы преобразования линеаризируются. В этом пределе матричное поле ведет себя как тензор второго ранга по отношению к пространственным вращениям, оставаясь инвариантом по отношению к лоренцевским бустам. Такое поведение позволяет говорить о том, что *длинноволновое приближение $SU(2)$-глюодинамики* соответствует *локальной модели взаимодействующих полей спина 0 и спина 2***.

План дальнейшего изложения таков. После введения основных определений и обозначений лагранжевой теории полей Янга–Миллса конспективно приведены необходимые формулы из ее обобщенной гамильтоновой формули-

---

*Здесь невольно вспоминается история с настойчивым вопросом Паули: «What is the mass of this field B_μ?», заданным Янгу на семинаре в феврале 1954 г. в Принстоне (см. комментарий Ч. Янга к [5] в [40]).

**Как следует из дальнейшего анализа, интересующие нас ряды по обратным степеням константы связи соответствуют разложению по степеням пространственных производных полевых переменных. Поэтому термины «разложение сильной связи» и «длинноволновое приближение» будут употребляться как синонимы.

ровки. Далее будет изложена гамильтонова редукция $SU(2)$-глюодинамики к матричной нелокальной модели симметрического 3×3 матричного поля. Параллель с методом редукции путем фиксации калибровки обсуждается в п. 2.3, где показано, что полученная редуцированная теория соответствует редукции в некой калибровке, названной «симметрической калибровкой». Формальное доказательство корректности «симметрической калибровки» в рамках теории возмущений по степеням обратной константы связи дано в приложении А. В следующем разделе дан анализ трансформационных свойств матричного поля и в длинноволновом приближении показана возможность его интерпретации как симметрического тензора третьего ранга. На основании этого вывода в разд. 4 длинноволновое приближение $SU(2)$-глюодинамики представлено в виде локальной модели взаимодействующего триплета скалярных полей и векторного реперного поля. В разд. 5 работы анализируется зависимость полученной модели от вакуумного угла θ.

Далее, в разд. 6 изучен специальный случай пространства так называемых приводимых калибровочных потенциалов ранга один и найдена соответствующая редуцированная гамильтонова система. Эта система описывает взаимодействие скалярного поля с трехмерным вектором единичной длины. При этом интересно, что вклад от θ-зависимого члена в исходном лагранжиане Янга–Миллса сводится к инварианту Хопфа отображения $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$. Чтобы подытожить полученные результаты, в разд. 7 приведены некоторые комментарии и замечания к процедуре квантования предложенной редуцированной формы $SU(2)$-глюодинамики.

В приложениях Б и В собраны формулы, касающиеся спинового содержания редуцированного поля и его приведения к главным осям.

2. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМУЛИРОВКА

Обобщенная гамильтонова формулировка полей Янга–Миллса хорошо известна (см., например, [8,10–12]), поэтому мы лишь конспективно приведем необходимые формулы.

2.1. Определения и обозначения. Конфигурационным пространством модели является пространство связностей $\mathcal{A}$ главного расслоения $P(M_4, G)$ со структурной группой $G = SU(2)$ и базой в виде компактифицированного пространства Минковского M_4 . Во всем последующем изложении будем считать, что расслоение $P(M_4, G)$ является тривиальным со связностью A, хорошо определенной во всем пространстве-времени*. Это предположение позволяет

*Заметим: тривиальность конечномерного расслоения $P(M_4, G)$ еще не говорит о тривиальности бесконечномерного главного расслоения $P(\mathcal{A}, \mathcal{G})$ со структурной калибровочной группой $\mathcal{G}$.

отождествить конфигурационную динамическую переменную с 1-формой A, принимающей значения в алгебре $\mathfrak{su}(2)$.

Классическая динамика A заключена в функционале действия, который строится посредством соответствующей 2-формы кривизны:

$$F = \mathrm{d}A + A \wedge A.$$

Лагранжиан модели

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g^2}\,\mathrm{tr}\, F \wedge * F - \frac{\theta}{8\pi^2\, g^2}\,\mathrm{tr}\, F \wedge F \tag{1}$$

зависит от двух констант, «константы взаимодействия» g и «вакуумного угла» θ. Дуальная форма $*\, F$ в лагранжиане (1) задается операцией Ходжа с полностью антисимметрическим псевдотензором Леви-Чивиты $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, нормированным соглашением $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$.

Компоненты 1-формы A и кривизны F в координатном базисе $\{\mathrm{d}x^\mu\}$, $\mu = 1, 2, 3, 4$, определены следующим образом:

$$A = g\, \tau^a A^a_\mu\, \mathrm{d}x^\mu, \tag{2}$$

$$F = \frac{1}{2}\, g\, \tau^a\, F^a_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \wedge\, \mathrm{d}x^\nu, \tag{3}$$

где антиэрмитовый базис $\tau^a = \sigma^a/2i$, $a = 1, 2, 3$, построен из матриц Паули σ^a.

2.2. Обобщенная гамильтонова динамика. Лагранжиан полей Янга–Миллса (1) вырожден. Импульс, канонически сопряженный к полевой переменной A_{0a}, тождественно равен нулю и является первичной связью:

$$\Pi_a := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{a0}} = 0. \tag{4}$$

Импульс, сопряженный к A_{ai}, дается выражением

$$\Pi_{ai} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{ai}} = \dot{A}_{ai} - \left(D_i(A)\right)_{ac} A_{c0} + \frac{\theta}{8\,\pi^2}\, B_{ai}, \tag{5}$$

в котором $\left(D_i(A)\right)_{ac}$ — ковариантная производная в присоединенном представлении:

$$\left(D_i(A)\right)_{ac} = \delta_{ac}\partial_i + g\, \varepsilon_{abc} A_{bi}. \tag{6}$$

В определении (5) B_{ai} — хромомагнитное поле

$$B^a_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\, F^a_{jk} = \varepsilon_{ijk}\left(\partial_j A_{ak} + \frac{g}{2}\, \varepsilon_{abc}\, A_{bj}\, A_{ck}\right), \tag{7}$$

удовлетворяющее в силу конструкции тождествам Бианки:

$$(D_i(A))_{ab}\, B_{bi}(A) = 0. \tag{8}$$

Следуя формализму обобщенной гамильтоновой динамики [10–12], определим полный гамильтониан системы:

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\Pi_{ai} - \frac{\theta}{8\pi^2} B_{ai} \right)^2 + \frac{1}{2} B_{ai}^2 - A_{a0}\, (D_i(A))_{ac}\, \Pi_{ci} + \lambda_a\, \Pi_a \right]. \tag{9}$$

Гамильтониан (9) содержит вклад от первичных связей (4) в виде их линейной комбинации с произвольными функциями $\lambda_a(x)$. Сохранение первичных связей во времени порождает три вторичных связи в виде неабелева закона Гаусса

$$(D_i(A))_{ac}\, \Pi_{ci} = 0. \tag{10}$$

Уравнения (9), (10) задают обобщенную гамильтонову систему со связями. Полевые переменные (A_{a0}, Π_a) и (A_{ai}, Π_{ai}) при этом удовлетворяют каноническим скобкам Пуассона

$$\{A_{ai}(t, \mathbf{r})\, , \Pi_{bj}(t, \mathbf{r}')\} = \delta_{ab}\, \delta_{ij}\, \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{11}$$

$$\{A_{a0}(t, \mathbf{r})\, , \Pi_{b}(t, \mathbf{r}')\} = \delta_{ab}\, \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{12}$$

Отступление о константах g и θ. До проведения редукции системы (9), (10) к модели, не содержащей переменных, ограниченных связями, сделаем небольшое отступление о двух константах, g и θ, классической теории полей Янга–Миллса.

Теория полей Янга–Миллса зависит от константы g посредством коэффициента перед CP-четным членом $F \wedge *F$ в лагранжиане (1). А поскольку классическая динамика определяется экстремумом действия, а не его значением, то константа g выпадает из классических уравнений движения.

Угол θ фиксирует в лагранжиане (1) коэффициент перед CP-нечетной плотностью индекса Понтрягина

$$Q = -\frac{1}{8\pi^2}\, \mathrm{tr}\, F \wedge F. \tag{13}$$

Аналогично константе g параметр θ также не входит в лагранжевы уравнения движения, на этот раз в силу самой конструкции (13). Действительно, плотность индекса Понтрягина, будучи замкнутой формой, т. е. $\mathrm{d}\, Q = 0$, является локально точной:

$$Q = \mathrm{d}\, C, \tag{14}$$

с 3-формой Черна

$$C = -\frac{1}{8\pi^2}\,\mathrm{tr}\left(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3}\,A \wedge A \wedge A\right). \tag{15}$$

Поэтому при независимых вариациях классического действия форма Q не дает вклада в лагранжевы уравнения движения, которые тем самым оказываются θ-независимыми.

Таким образом, с точки зрения классических уравнений движения можно было бы ограничиться выбором констант $g = 1$ и $\theta = 0$. Однако при квантовании теории ситуация меняется. В квантовом случае уже и само значение функционала действия, а не только его экстремум, определяет динамику процессов. Тем самым в квантовой теории константы g и θ обретают фундаментальный характер. Хотя в настоящей работе мы ограничимся вопросами классической динамики калибровочных полей, эти константы не будут зафиксированы ввиду дальнейшего приложения полученных результатов для квантования редуцированной теории.

Кроме того, вычисления с произвольными константами мотивированы и практическими соображениями. В процессе редукции глюодинамики их присутствие оказывается полезным для ряда технических приемов. Так, в выбранной нами нормировке компонент связности (2) константа $1/g$ будет играть роль вспомогательного параметра, позволяющего записать разложение нелокальных функционалов по степеням производных полей. Присутствие угла θ также оказывается важным для контроля корректности процедуры редукции. Дело в том, что форма (15) не является калибровочно-инвариантной. Поэтому при избавлении от чисто калибровочных степеней свободы не исключена ситуация, когда возникает так называемая «проблема дивергенции». В рамках гамильтоновой формулировки теории гравитации эта проблема была поставлена в [41] в виде следующего утверждения: *«...член, который в лагранжиане (или гамильтониане) модели является полной дивергенцией, может перестать быть дивергенцией после устранения нефизических переменных и, следовательно, может давать вклад в уравнения движения, полученные из редуцированного лагранжиана (или гамильтониана)»* [41]*.

Далее будет показано, что при наличии в действии глюодинамики вакуумного угла «наивное» разложение по степеням производных действительно приводит к «проблеме дивергенции»; редуцированные классические уравнения движения оказываются θ-зависимыми. Для устранения такого непри-

---

*В [41] дан пример модели, в которой среди переменных есть две переменные χ и Φ, связанные уравнением $\nabla^2\Phi - \chi^2 = 0$. Член $\nabla^2\Phi$ в лагранжиане, будучи полной дивергенцией, не влияет на классические уравнения, тогда как после проекции на поверхность данной связи он перестает быть таковой.

емлемого дефекта нам придется модифицировать разложение с учетом дуальной симметрии между хромомагнитным и хромоэлектрическим полями. Забегая вперед, заметим, что, сохранив ненулевой вакуумный угол θ для контроля корректности процедуры редукции, удается выразить топологический инвариант в виде дивергенции от некоторого калибровочно-инвариантного, но *нелокального* векторного тока [33].

2.3. Редукция к нелокальной гамильтоновой системе. Прежде чем перейти к непосредственному описанию редукции $SU(2)$-глюодинамики, сделаем один комментарий по поводу свободы выбора переменных в гамильтоновом формализме калибровочных теорий. Здесь помимо хорошо известной свободы канонических преобразований добавляется произвол, вызванный существованием локальной симметрии, калибровочной инвариантности классического действия полей. Для полей Янга–Миллса со структурной группой $SU(2)$ калибровочные преобразования

$$A^{\omega}_{ai}(x)\tau_a = U^{+}(\omega)\left(A_{ai}(x)\tau_a + \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)U(\omega) \tag{16}$$

задаются матрицей $U(\omega) \in SU(2)$ с тремя функциями $\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)$, произвольно зависящими от точки пространства-времени. Преобразования (16) образуют так называемую калибровочную группу $\mathcal{G}_{SU(2)}$. Группа $\mathcal{G}_{SU(2)}$, действуя в пространстве связностей $\mathcal{A}$, задает на нем отношение эквивалентности и тем самым определяет пространство орбит $\mathcal{O} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_{SU(2)}$*. Пространство орбит $\mathcal{O}$ является конфигурационным пространством редуцированной теории, и основной вопрос состоит в разработке корректного и эффективного способа его «координатизации». Известный и наиболее применяемый способ, состоящий в наложении дополнительных условий, *калибровок*, на компоненты A^{ω}_{ai}, заключается в выборе того или иного представителя орбит $\mathcal{O}$. При этом существует множество типов калибровок, которые с успехом используются при изучении различных аспектов калибровочных моделей**.

Что является побудительным мотивом при выборе той или иной калибровки?

Очевидно, сама изучаемая проблематика подсказывает и наиболее приемлемый ее вид. Так, формулировка теории Янга–Миллса в калибровке Лоренца, приводящая, соответственно, к теории возмущений с поперечными глюонами и полями духов, хорошо описывает высокоэнергетическую физику

---

*Изложенные здесь определения, безусловно, страдают отсутствием математической корректности и требуют точной характеристики пространства функций, определяющих как связности, так и элементы группы $\mathcal{G}$. Для уточнения всех используемых определений отсылаем к соответствующей литературе [42, 43].

**Сошлемся на прекрасные обзоры [44, 45], посвященные истории и проблеме калибровок в теории калибровочных полей.

калибровочных полей, но оказывается неадекватной в области полей, имеющих достаточно большую амплитуду [46, 47]. Поэтому, не рассчитывая на универсальность описания, можно предположить существование некой альтернативной калибровки и, соответственно, таких переменных, которые наиболее приспособлены для описания процессов низкоэнергетической физики. Предполагая, что в отличие от высокоэнергетических процессов, где преобладают эффекты быстро осциллирующих полей, в области низких энергий существенная роль отводится медленно меняющимся полям, попытаемся определить калибровку, адаптированную к этому режиму. Поскольку нас интересуют конфигурации полей, слабо меняющиеся в трехмерном пространстве, предварительно рассмотрим предельный случай пространственно-однородного поля $A_{ai}(t)$ [31, 48, 49]. Калибровочное преобразование (16) с калибровочными функциями $\omega(t)$, зависящими лишь от времени, преобразует его однородным образом:

$$A^{\omega}_{ai}(t) = O^{T}_{ab}(\omega(t))A_{bi}(t). \tag{17}$$

Если теперь вспомнить, что произвольную действительную $n \times n$ матрицу A можно представить в так называемом полярном виде [50]

$$A = RS \tag{18}$$

с ортогональной матрицей $R \in O(n)$ и неотрицательно-определенной симметрической матрицей

$$S = S^T, \quad S \geqslant 0,$$

то становится очевидным, что для пространственно-однородных конфигураций полей неотрицательно-определенные симметрические поля $S_{ai}(t) = S_{ia}(t)$ могут быть выбраны в качестве представителя орбит калибровочной группы. В приложении А дается анализ того, насколько подобная параметризация пространства орбит симметрическими матрицами может быть обобщена и использована и для неоднородных полей. Более точно, в приложении А найдены алгебраические условия на конфигурации полей, при которых «симметрическая» калибровка [21, 32]

$$\chi_a(S) := \varepsilon_{abc} S_{bc} = 0 \tag{19}$$

является корректной*.

2.3.1. Преобразование к адаптированным переменным. Произведем, следуя [32], точечное, т. е. не зависящее от импульсов, преобразование

$$A_{ai}\,(q, S) = O_{ak}(q)\, S_{ki} + \frac{1}{2g}\, \varepsilon_{abc}\, \left(\partial_i O(q)\, O^T(q)\right)_{bc}. \tag{20}$$

---

*Заметим, что подобное условие на напряженность хромоэлектрического поля $\varepsilon_{abc}\, E_{bc} = 0$ было использовано в работах [15, 17].

Будем рассматривать (20) как переход от девяти компонент калибровочного поля $A_{ai}(x)$ к новому набору из трех полей $q_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, параметризующих ортогональную 3×3 матрицу $O(q)$, и шести полей

$$S_{ik}(x), \quad i < k, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

являющихся элементами неотрицательно-определенной симметрической 3×3 матрицы $S(x)$. Как доказано в приложении А, преобразование (20) является хорошо определенным для невырожденных матриц A_{ai}, оно может быть проинтерпретировано как калибровочное преобразование к полевой конфигурации $S(x)$, удовлетворяющей «симметрической» калибровке (19).

Поскольку (20) точечное преобразование, то индуцированное им каноническое преобразование является линейным по импульсам $p_i(x)$ и $P_{ij}(x)$, сопряженным соответственно к переменным $q_i(x)$ и $S_{ij}(x)$. Их выражения через исходные канонические переменные $A_{ai}(x), \Pi_{ai}(x)$ могут быть получены из условия инвариантности симплектической 1-формы

$$\sum_{i,a=1}^{3} \Pi_{ai}\, \mathrm{d}A_{ai} = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij}\, \mathrm{d}S_{ij} + \sum_{i=1}^{3} p_i\, \mathrm{d}q_i. \tag{21}$$

При этом удобно воспользоваться производящей функцией

$$F_3\,[\Pi; q, S] := \int d^3z\ \Pi_{ai}(z) A_{ai}\left(q(z), S(z)\right), \tag{22}$$

$$p_j(x) : = \frac{\delta F_3}{\delta q_j(x)} = -\frac{1}{g}\Omega_{jr}\left(D_i(S) O^T \Pi\right)_{ri}, \tag{23}$$

$$P_{ik}(x) : = \frac{\delta F_3}{\delta S_{ik}(x)} = \frac{1}{2}\left(\Pi^T O + O^T \Pi\right)_{ik}, \tag{24}$$

где

$$\Omega_{ni}(q) := -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{nbc}\,\left(O^T(q)\,\frac{\partial O(q)}{\partial q_i}\right)_{bc}. \tag{25}$$

Из (23) и (24) следует

$$\Pi_{ai} = O_{ak}(q)\Big[P_{ki} + \varepsilon_{kin}\mathcal{E}_n\Big], \tag{26}$$

где неизвестные величины $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ удовлетворяют системе неоднородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{1}{g}\epsilon_{ijk}\partial_j\mathcal{E}_k + \gamma_{ik}\,\mathcal{E}_k = \mathcal{S}_k - \mathcal{J}_k, \tag{27}$$

$$\gamma_{ik} := S_{ik} - \delta_{ik}\,\mathrm{tr}\,S. \tag{28}$$

Правая часть (27) представляет собой сумму плотностей спина $\mathcal{S}_k$ и изоспина $\mathcal{J}_k$ калибровочного поля, записанных в новых переменных:

$$\mathcal{S}_k = -\frac{1}{g}\,(D_j(S))_{kn}P_{nj}, \tag{29}$$

$$\mathcal{J}_k = \Omega^{-1}_{ik}(q)\,p_i. \tag{30}$$

Если в качестве параметризации ортогональной матрицы $O \in SO(3)$ в (20) использовать углы Эйлера

$$O(q) = \mathrm{e}^{q_3 J_3}\,\mathrm{e}^{q_2 J_1}\,\mathrm{e}^{q_3 J_3},$$

то компоненты вектора изоспина (30) даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= p_1\,\frac{\sin q_3}{\sin q_2} + p_2\,\cos q_3 - p_3\,\cot q_2 \sin q_3,\\
\mathcal{J}_2 &= p_1\,\frac{\cos q_3}{\sin q_2} - p_2\,\sin q_3 - p_3\,\cot q_2 \cos q_3,\\
\mathcal{J}_3 &= p_3.
\end{aligned}$$

Преимущество новых переменных S_{ij} и q_i становится очевидным при анализе связей (10). Неабелев закон Гаусса в новых переменных означает зануление компонент изоспина в «подвижной системе»:

$$O_{as}(q)\mathcal{J}_s = 0. \tag{31}$$

Из (31) следует, что три канонические пары q_i, p_i являются чисто калибровочными степенями свободы, в то время как переменные S_{ij}, P_{ij} представляют собой калибровочно-инвариантные поля.

Учитывая представление для изоспина (30) и предполагая невырожденность матрицы $\Omega_{ni}(q)^*$, приходим к набору абелевых связей, эквивалентных неабелеву закону Гаусса:

$$p_i = 0. \tag{32}$$

Абелева форма связей в новых переменных позволяет легко выразить редуцированный гамильтониан, определенный как проекция полного гамильтониана (9) на поверхность всех связей:

$$H = H_T\Big|_{\mathrm{constraints}}, \tag{33}$$

---

*Заметим, что $\det\Omega$ пропорционален мере Хаара на группе и в силу нетривиальности многообразия $SU(2)$ имеет координатные сингулярности. Учет данных особенностей и многие другие вопросы, связанные с глобальной структурой редуцированной теории, остаются за пределами настоящего изложения. Сошлемся лишь на некоторые важные работы в этом направлении [51–56].

в терминах канонической пары переменных S_{ij} и P_{ij}. Действительно, в силу калибровочной инвариантности редуцированный гамильтониан (33) не зависит от координат q_i, канонически сопряженных к импульсам p_i, и, следовательно, является функцией только калибровочно-инвариантных переменных S_{ij} и P_{ij}:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(P_{ai} - \frac{\theta}{8\pi^2}\, B^{(+)}_{ai}(S)\right)^2 + \left(\mathcal{E}_a - \frac{\theta}{8\pi^2}\, B^{(-)}_{a}(S)\right)^2 + \frac{1}{2}\, V(S)\right]. \tag{34}$$

В выражении для гамильтониана (34) выделены симметрическая и антисимметрическая части

$$B^{(+)}_{ai}(S) := \frac{1}{2}\,(B_{ai}(S) + B_{ia}(S)), \quad B^{(-)}_{a}(S) := \frac{1}{2}\,\varepsilon_{abc}\, B_{bc}(S) \tag{35}$$

«редуцированного хромомагнитного поля»

$$B_{ai}(S) = \varepsilon_{ijk}\, \left(\partial_j S_{ak} + \frac{g}{2}\,\varepsilon_{abc}\, S_{bj}\, S_{ck}\right). \tag{36}$$

Редуцированное «хромомагнитное поле» является тем же функционалом от симметрического поля S, что и стандартное $B_{ai}(A)$ от A. Если сопоставить полю S 1-форму связности:

$$S = g\tau_k\, S_{kl}\, \mathrm{d}x_l, \quad k, l = 1, 2, 3, \tag{37}$$

то потенциал $V(S)$ может быть записан в виде

$$V(S) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, * F^{(3)}\, \wedge\, F^{(3)} \tag{38}$$

с 2-формой кривизны в 3-мерном евклидовом пространстве

$$F^{(3)} = \mathrm{d}S + S\, \wedge\, S. \tag{39}$$

Таким образом, $SU(2)$-глюодинамика, в которой исключены все чисто калибровочные степени свободы, представима в гамильтоновой форме с гамильтонианом (34), зависящим от шести пар переменных S_{ij}, P_{ij}, $i < j$. С учетом симметрии следующие фундаментальные скобки Дирака

$$\{S_{ij}(t, \mathbf{r}), P_{kl}(t, \mathbf{r}')\} = \frac{1}{2}\, \left(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\right) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{40}$$

задают симплектическую структуру редуцированной теории.

2.3.2. О структуре нелокального взаимодействия. Гамильтониан (34), определяющий динамику переменных S_{ij} и P_{ij}, содержит *нелокальный* вклад в виде функционала $\mathcal{E}_k[S,P]$. Согласно (27) величины $\mathcal{E}_k$ заданы посредством линейного дифференциального уравнения первого порядка, решение которого формально может быть записано как

$$\mathcal{E}_k[S,P] = {}^*D^{-1}_{kl}(S)\mathcal{S}_l, \tag{41}$$

с оператором ${}^*D^{-1}$, обратным к матричному дифференциальному оператору*

$${}^*D_{kl}(S) = \varepsilon_{ljc}\left(D_j(S)\right)_{kc}. \tag{42}$$

Рассмотрим альтернативные представления решения (41) в виде формальных степенных рядов: по степеням константы g либо по степеням ее обратной $1/g$.

Начнем с разложения по степеням g. Предположим, что каждая из компонент $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ допускает разложение вида

$$\mathcal{E}_i = \sum_{n=0}^{\infty} g^n a_i^{(n)}. \tag{43}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях g в уравнении (27), находим, что коэффициенты ряда (43) должны удовлетворять уравнениям**

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}^{(n)} = \boldsymbol{\Omega}^{(n)}. \tag{44}$$

В уравнениях (44) «векторы завихренности» $\boldsymbol{\Omega}^{(n)}$ являются известными функциями. Для каждого $n > 1$ они заданы через решения предшествующего члена разложения:

$$\Omega_i^{(n)} = -\gamma^{-1}_{ik} a_k^{(n-1)}, \tag{45}$$

причем для векторов $\boldsymbol{\Omega}^{(0)}$ и $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}$ имеем

$$\Omega_i^{(0)} = \partial_k P_{ik}, \tag{46}$$

$$\Omega_i^{(1)} = \epsilon_{inm}\left(PS\right)_{nm} - \gamma^{-1}_{ik} a_k^{(0)}. \tag{47}$$

---

*Следует отметить, что ${}^*D_{kl}(S)$ представляет собой известный оператор Фаддеева–Попова [13], определенный как матрица скобок Пуассона закона Гаусса (10) и условий симметрической калибровки (19):

$$\{D_i(S)\Pi(x)_{ki}, \chi_l(y)\} = {}^*D_{kl}(S)\delta^3(x-y).$$

**Интересно, что подобное уравнение, $\operatorname{rot}\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}$, играет важную роль в механике жидкостей и газов, где оно определяет поле скоростей $\mathbf{V}$ вокруг заданной системы вихрей $\boldsymbol{\Omega}$ [57].

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (44). Его решение, при условии непрерывности и зануления $\mathbf{a}^{(n)}$ на пространственной бесконечности, дается хорошо известным интегральным представлением

$$\mathbf{a}^{(n)}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{\Omega}^{(n)}(t,\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{\Omega}^{(n)}(t,\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\mathbf{r}'^2}. \quad (48)$$

Перейдем к разложению по степеням $1/g$. Запишем формальный ряд

$$\mathcal{E}_i = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{g}\right)^n \mathcal{E}_i^{(n)}, \quad (49)$$

который совпадает с разложением $\mathcal{E}_i$ по «степеням производных». Действительно, подставляя (49) в уравнение (27) и сравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях $1/g$, находим коэффициент при нулевой степени, не содержащий производных:

$$\mathcal{E}_i^{(0)} = \gamma_{ik}^{-1}\,\epsilon_{klm}(PS)_{lm}. \quad (50)$$

Все последующие коэффициенты $\mathcal{E}_i^{(n)}$ зависят от производных полей и/или их импульсов, полный порядок которых равен числу n. Для коэффициента, линейного по производным, имеем

$$\mathcal{E}_i^{(1)} = \gamma_{ik}^{-1}\,\left[(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(0)})_k - \partial_s P_{ks}\right], \quad (51)$$

а коэффициенты $\mathcal{E}_i^{(n)}$ с $n>1$ связаны простым рекуррентным правилом

$$\mathcal{E}_i^{(n)} = \gamma_{ik}^{-1}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(n-1)})_k. \quad (52)$$

В силу этих соотношений нелокальный член взаимодействия в редуцированном гамильтониане (34) может быть приближен локальным выражением, содержащим конечное число производных полей и импульсов. В оставшейся части работы мы ограничимся анализом ведущего порядка разложения (49) и сформулируем соответствующую локальную модель второго порядка по производным полей.

3. ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

В предыдущих разделах гамильтонова динамика полей Янга–Миллса была представлена в форме нелокальной теории самодействующего матричного поля $S(x)$. Прежде чем переходить к дальнейшим техническим вопросам, хотелось бы понять его природу и, в частности, ответить на вопрос, каким частицам оно соответствует. Если следовать стандартной интерпретации квантовой теории в духе Вигнера, то необходимо выяснить трансформационные свойства поля $S(x)$ относительно действия группы Пуанкаре. Как отмечалось выше, поле $S(x)$ является представителем орбиты действия калибровочной группы, заданным симметрической калибровкой (19). Симметрическая калибровка не является ковариантной; конфигурация поля вида $A_0^a = 0$, $A_{ai} = A_{ia}$ перестает быть симметрической при преобразованиях Лоренца к новой системе отсчета. При этом симметрия может быть восстановлена соответствующим калибровочным преобразованием, зависящим как от лоренц-параметров, так и от самой конфигурации поля*. По этой причине трансформационные характеристики поля $S(x)$ при преобразованиях Лоренца оказываются нелинейными и, как следствие, вигнеровская интерпретация квантов этого поля в терминах частиц становится проблематичной. Однако, как будет показано ниже, при $g \gg 1$ спиновые свойства характеристики редуцированного поля S линеаризуются, что и позволяет в пределе сильной связи говорить о стандартном спиновом содержании редуцированной теории.

3.1. Генераторы группы Пуанкаре. Лагранжиан полей Янга–Миллса является скаляром относительно преобразований из группы Пуанкаре

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{53}$$

a^μ — произвольные константы, Λ^μ_ν — элементы постоянной матрицы, удовлетворяющей условиям

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \tag{54}$$

В силу данной инвариантности имеют место следующие 10 уравнений непрерывности:

$$\partial^\mu T_{\nu\mu} = 0, \quad \partial^\mu M_{\nu\mu\lambda} = 0. \tag{55}$$

В дифференциальных уравнениях сохранения (55) декартовы компоненты канонического тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ определены согласно теореме Нетер:

$$T_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}\,\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu A^a_\sigma\right)}\partial_\nu A^a_\sigma \tag{56}$$

и

$$M_{\mu\nu\lambda} = x_\mu\, T_{\lambda\nu} - x_\mu\, T_{\lambda\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu A^a_\rho\right)}\,\left(\Sigma_{\mu\nu}\right)_{\rho\lambda}\, A^a_\lambda. \tag{57}$$

В (57) оператор $\Sigma_{\mu\nu}$ — поляризационный тензор поля спина 1

$$\left(\Sigma_{\mu\nu}\right)_{\rho\lambda} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda}. \tag{58}$$

*Подобная ситуация имеет место и в электродинамике при наложении условий Кулона (см. [58, 59]).

Уравнения непрерывности (55), дополненные условиями обнуления полей на пространственной бесконечности, определяют 10 сохраняющихся в процессе эволюции величин P_μ и $M_{\mu\nu}$. Они могут быть заданы интегралами по произвольной пространственноподобной поверхности σ:

$$P_\mu = \int\limits_\sigma d\sigma^\lambda T_{\mu\lambda}, \quad M_{\mu\nu} = \int\limits_\sigma d\sigma^\lambda\, M_{\mu\nu\lambda}. \tag{59}$$

Величины P_μ и $M_{\mu\nu}$ являются генераторами группы Пуанкаре, определяющими трансформационные свойства полей, их квантов и, в итоге, наблюдаемых частиц. Так, спиновые характеристики глюонного поля заключены в следующих скобках Пуассона:

$$\{M_{\mu\nu}, A_\rho(0)\} = (\Sigma_{\mu\nu})_{\rho\lambda}\, A_\lambda(0). \tag{60}$$

Отметим, что, хотя плотности (56) и (57) не являются калибровочно-инвариантными величинами, сами генераторы P_μ и $M_{\mu\nu}$ являются таковыми, поэтому они могут быть выражены в терминах калибровочно-инвариантных переменных S и P^*.

Как показывает расчет, в мгновенной форме динамики с гиперплоскостью одновременных событий $t = \mathrm{const}$ генераторы трехмерных вращений, $J_i = \epsilon_{ijk} M_{jk}$,

$$J_i = \epsilon_{ijk} \int d^3x \, \left(E_{aj} A^a_k + x_k E_{al} \frac{\partial A_{al}}{\partial x^j} \right) \tag{61}$$

и генераторы лоренцевских бустов, $K_i = M_{0i}$,

$$K_i = t \int d^3x \, \epsilon_{ijk} E^a_i B^a_j - \frac{1}{2} \int d^3x\, x_i \left(E_i^{a\,2} + B_i^{a\,2} \right) \tag{62}$$

после редукции к переменным S и P принимают следующий вид:

$$J_i = \int d^3x\, \epsilon_{ijk} \left((PS)_{jk} + x_k \mathrm{tr}\,(P \partial_j S) \right), \tag{63}$$

$$K_i = t \int d^3x\, \epsilon_{ijk} \left(P_{jl} + \epsilon_{jln} \mathcal{E}_n \right) B_{lk}(S) - \int d^3x\, x_i\, \mathcal{H}, \tag{64}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — нелокальная часть плотности импульса взаимодействия, определенная в (41); $\mathcal{H}$ — плотность редуцированного гамильтониана (33).

Далее на основе этих представлений для генераторов группы Пуанкаре будут проанализированы трансформационные свойства редуцированного поля.

*При выводе этих представлений, как и при исключении чисто калибровочных степеней свободы, предполагалось обнуление всех поверхностных интегралов.

В следующем пункте начнем с ряда замечаний о согласованности требований ковариантности Пуанкаре с локальной аппроксимацией нелокальной редуцированной теории, полученной в результате разложения по обратным степеням константы связи и зависящей лишь от полевых производных фиксированного порядка.

3.2. Контракция алгебры Пуанкаре в пределе сильной связи. В мгновенной форме динамики генераторы эволюции, т. е. гамильтониан H и K_i, зависят от константы g, а генераторы трехмерных сдвигов и вращений являются чисто кинематическими, не зависящими от g. Такой характер зависимости и структура группы Пуанкаре накладывают сильные ограничения на возможные теоретико-возмущенческие конструкции. Ниже мы воспользуемся возможностью представления генераторов в виде разложения по обратным степеням константы связи и сформулируем условия согласованности схемы приближения с релятивистской ковариантностью. В частности, убедимся, что в пределе сильной связи $g \to \infty$ имеет место контракция алгебры группы Пуанкаре в алгебру группы Галилея.

Алгебра Ли группы Пуанкаре задается следующими соотношениями:

$$\{J_i, J_j\} = \epsilon_{ijk}\, J_k, \quad \{J_i, K_j\} = \epsilon_{ijk}\, K_k, \tag{65}$$

$$\{K_i, K_j\} = \epsilon_{ijk}\, J_k, \quad \{J_i, P_j\} = \epsilon_{ijk}\, P_k, \tag{66}$$

$$\{K_i, P_j\} = -\delta_{ij} H, \quad \{K_i, H\} = -P_i, \tag{67}$$

$$\{J_i, H\} = \{P_i, H\} = 0. \tag{68}$$

Заметим, что в результате масштабного преобразования канонических переменных

$$S(x) \to g^{-1/3}\, S(x), \quad P(x) \to g^{1/3}\, P(x) \tag{69}$$

генераторы вращений J_i остаются неизменными, а оставшиеся генераторы группы Пуанкаре представим в виде следующих разложений по степеням* $\lambda := g^{-2/3}$:

$$H \to H = g^{2/3} \left[H^{(0)} + \lambda\, H^{(1)} + \ldots \right], \tag{70}$$

$$P_i \to P_i = g^{2/3} \left[P^{(0)} + \lambda\, P^{(1)} \ + \ldots \right], \tag{71}$$

$$K_i \to K_i = g^{2/3} \left[K^{(0)} + \lambda\, K^{(1)} + \ldots \right]. \tag{72}$$

Определим $\overline{H} = \lambda H$, $\overline{K_i} = \lambda K_i$, $\overline{P_i} = \lambda P_i$ и предварительно выясним, какую алгебру в пределе $g \to \infty$ эти элементы образуют совместно с генераторами вращений J_i.

*Преобразование (69) приводит к фактору λ перед каждой пространственной производной полей.

Переходя к формальному пределу $g \to \infty$, имеем

$$\{J_i, J_j\} = \epsilon_{ijk}\, J_k, \quad \{J_i, \overline{K}_j\} = \epsilon_{ijk}\, \overline{K}_k, \quad \{J_i, \overline{P}_j\} = \epsilon_{ijk}\, \overline{P}_k, \tag{73}$$

в то время как

$$\{\overline{K}_i, \overline{K}_j\} = \lambda^2\, \epsilon_{ijk}\, J_k \to 0, \tag{74}$$

$$\{\overline{K}_i, \overline{P}_j\} = -\lambda\, \delta_{ij} \overline{H} \to 0, \tag{75}$$

$$\{\overline{K}_i, \overline{H}\} = -\lambda\, \overline{P}_i \to 0. \tag{76}$$

Т. е., согласно (73)–(76), алгебра Пуанкаре (65)–(68) в пределе сильной связи сужается до алгебры группы Галилея.

Алгебра Пуанкаре накладывает сильные ограничения на алгебру элементов разложений (70)–(72). Соотношения (73)–(76) при конечных значениях константы g являются условиями согласованности аппроксимации разложений с релятивистской инвариантностью. Так, уравнения (73) в силу линейности по членам разложения есть простое требование о трехмерном векторном характере каждого члена разложения. Уравнения (74)–(76) в силу нелинейного характера накладывают более изощренные требования. Приведем эти условия согласования для 0-го, 1-го и 2-го порядков приближения по степеням λ:

• порядок λ^0

$$\{K_i^{(0)}, K_j^{(0)}\} = 0, \tag{77}$$

$$\{K_i^{(0)}, P_j^{(0)}\} = 0, \tag{78}$$

$$\{K_i^{(0)}, H^{(0)}\} = 0; \tag{79}$$

• порядок λ^1

$$\{K_{[i}^{(0)}, K_{j]}^{(1)}\} = 0, \tag{80}$$

$$\{K_i^{(0)}, P_j^{(1)}\} + \{K_i^{(1)}, P_j^{(0)}\} = -\delta_{ij} H^{(0)}, \tag{81}$$

$$\{K_i^{(0)}, H^{(1)}\} + \{K_i^{(1)}, H^{(0)}\} = -P_i^{(0)}; \tag{82}$$

• порядок λ^2

$$\{K_{[i}^{(0)}, K_{j]}^{(2)}\} + \{K_i^{(1)}, K_j^{(1)}\} = \epsilon_{ijk}\, J_k, \tag{83}$$

$$\{K_i^{(0)}, P_j^{(2)}\} + \{K_i^{(2)}, P_j^{(0)}\} + \{K_i^{(1)}, P_j^{(1)}\} = -\delta_{ij} H^{(1)}, \tag{84}$$

$$\{K_i^{(0)}, H^{(2)}\} + \{K_i^{(2)}, H^{(0)}\} + \{K_i^{(1)}, H^{(1)}\} = -P_i^{(1)}. \tag{85}$$

Таким образом, при аппроксимации нелокальной теории некой локальной моделью ее релятивистская ковариантность выражается не в форме стандартной алгебры Пуанкаре между локальными аппроксимациями соответствующих нетеровских генераторов, а в виде нетривиальных алгебраических соотношений типа (77)–(85). При этом примечательно, что в пределе $g \to \infty$ релятивистская симметрия модели сужается до симметрии Галилея ее локального приближения.

3.3. Спиновые свойства редуцированного поля. Выясним спиновые свойства поля S. Для этого будем действовать по аналогии с (60). Начнем с трехмерных вращений $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = R(\omega)\mathbf{r}$, генерируемых (63). Расчет соответствующего инфинитезимального изменения поля показывает, что

$$\{J_i, S_{jk}(0)\} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{imn}\,(\delta_{mj}\delta_{ks} + \delta_{mk}\delta_{js})\,S_{sn}(0). \tag{86}$$

Иными словами, инфинитезимальные пространственные вращения $\delta_\omega x_n = \omega_{nm}x_m$ индуцируют преобразования поля S следующего вида:

$$\delta_\omega S_{ij} = \epsilon_{smn}\omega_{mn}\{S_{ij}, J_s\} = \omega_{mn}\,(\Sigma^{mn}S)_{ij} + \text{orbital part} \tag{87}$$

с матрицей Σ^{mn}:

$$(\Sigma)^{mn}_{(il)(sj)} := (\delta_{il}\delta^m_k\delta^n_s + \delta^m_i\delta^n_l\delta_{sj}) - (m \leftrightarrow n). \tag{88}$$

Матрица Σ^{mn} в (88) представляет собой инфинитезимальную поляризационную матрицу $O(3)$ вращений трехмерного тензора второго ранга

$$S'_{ik}(0) = R_{il}(\omega)R_{km}(\omega)S_{lm}(0). \tag{89}$$

Переходя к лоренцевским бустам, генерируемым K_i, заметим, что в силу представления (64) спиновые трансформационные свойства определяются интегралом

$$\{K_i, S_{jk}(0)\} = \int d^3x_i\,\frac{\delta\mathcal{E}_s}{\delta P_{jk}}\mathcal{E}_s. \tag{90}$$

Используя разложение (49) по обратным степеням g, убеждаемся, что правая часть равенства (90) является нелинейным функционалом полей S и P. Однако в пределе сильной связи $g \gg 1$ с точностью $O(1/g)$ имеем

$$\{K_i, S_{jk}(0)\} = 0 + O(1/g). \tag{91}$$

Соотношения (91) совместно с уравнением (89) позволяют говорить, что в пределе сильной связи поле S обладает спиновыми свойствами трехмерного тензора второго ранга. Т. е. $SU(2)$-глюодинамика при $g \gg 1$ допускает представление в виде модели взаимодействующих полей спина 0 и спина 2.

4. ЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ В ПРЕДЕЛЕ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

В настоящем разделе будет подробно описана локальная модель, получаемая из нелокальной редуцированной теории в пределе $g \to \infty$.

После масштабирования (69) хромомагнитное поле B содержит ведущий вклад и лишь линейную по $\lambda = g^{-2/3}$ поправку

$$B_{ai} = g^{1/3}\epsilon_{ijk}\left[\frac{1}{2}\,\epsilon_{abc}\,S^a_j S^b_k + \lambda\,\partial_j S^a_k\right]. \tag{92}$$

В противоположность этому хромоэлектрическое поле дается бесконечным рядом

$$E_{ai} = g^{1/3}\,\left[E^{(0)}_{ai} + \lambda E^{(1)}_{ai} + \lambda^2 E^{(2)}_{ai} + \ldots\right], \tag{93}$$

в котором, согласно анализу, проведенному в п. 2.3.2, коэффициенты разложения могут быть найдены из простых рекуррентных соотношений

$$E^{(n)}_{ij} = \epsilon_{ijk}\gamma^{-1}_{kl}\nabla_s\,E^{(n-1)}_{sl}, \quad n \geqslant 1, \tag{94}$$

с нулевым членом разложения вида

$$E^{(0)}_{ij} = P_{ij} + \epsilon_{ijk}\gamma^{-1}_{kl}\epsilon_{lmn}\,(PS)_{mn}\,. \tag{95}$$

Далее, на основе этих разложений по степеням $\lambda = g^{-2/3}$ в приближении сильной связи будет сформулирована модель взаимодействующих локальных полей спина 0 и спина 2:

$$H := g^{1/3}\,\left[H^{(0)} + \lambda\,H^{(1)} + \lambda^2\,H^{(2)} + \ldots\right]. \tag{96}$$

Начнем с ведущего порядка, λ^0, соответствующего пределу $g \to \infty$. Как было показано в предыдущем разделе, матричное поле S в пределе сильной связи может быть проинтерпретировано как поле, представляющее смесь полей нерелятивистских спина 0 и спина 2. В соответствии с этим переформулируем гамильтонову систему (34) непосредственно в терминах этих полей. Для этого разложим поле S на неприводимые компоненты по отношению к группе $O(3)$:

$$S_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_A(x)\;T^A_{ij} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Phi(x)\;I_{ij}. \tag{97}$$

В (97) поле $\Phi(x)$, пропорциональное следу тензора S, соответствует спину 0, а 5-мерный вектор $\mathbf{Y}(x)$ имеет компоненты Y_A, пронумерованные значениями проекций спина 2 на ось z, $A = \pm 2, \pm 1, 0$. $\mathbf{T}^A$ — элементы базиса разложения бесследового тензора, явный вид которых приведен в приложении Б.

Импульсы $P_A(x)$ и $P_\Phi(x)$, канонически сопряженные полям $Y_A(x)$ и $\Phi(x)$, даются соответствующим разложением матричного поля P:

$$P_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} P_A(x)\ T^A_{ij} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, P_\Phi(x)\, I_{ij}. \tag{98}$$

Приведем также заключение относительно трансформационных свойств переменных $\mathbf{Y}$ и Φ. Для этого запишем генератор трехмерных вращений (63) непосредственно в терминах полей спина 0 и спина 2:

$$J_i = S_i + \epsilon_{ijk} \int d^3x\ x_j (P_\Phi \partial_k \Phi + P_A \partial_k Y^A) \tag{99}$$

со спиновой частью

$$S_i = i(\mathbf{J}_i)_{AB}\, Y^A P^B. \tag{100}$$

В выражении (100) для спина поля $\mathbf{Y}$ антисимметрические 5×5 матрицы $\mathbf{J}^k$ реализуют 5-мерное представление $o(3)$-алгебры*. При инфинитезимальных трехмерных вращениях $\delta x_i = \epsilon_{ijk}\omega_k x_j$ поле $\mathbf{Y}$ преобразуется как 5-вектор

$$\delta_\omega Y^A = \omega_k \{Y^A, S_k\} = -i\omega_k (\mathbf{J}^k)_{AB} Y^B. \tag{101}$$

Из вида (99) непосредственно следует, что при конечных вращениях $x^i = R^i_j(\omega) x^j$ 5-вектор испытывает вращения вида

$$Y'_A(0) = D_{AB}(\omega) Y_B(0) \tag{102}$$

с 5×5 матрицей D-функции спина 2, связанной с 3×3 ортогональной матрицей $R(\omega)$ соотношением

$$D_{AB}(\omega) = \operatorname{tr}\left(R(\omega)\mathbf{T}_A R^T(\omega)\mathbf{T}_B\right). \tag{103}$$

Заметим, что магнитное поле B может быть записано аналогично разложениям (97) и (98) в виде декомпозиции по неприводимым компонентам:

$$B_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, H_A(x)\ T^A_{ij} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, h_\alpha(x)\, J^\alpha_{ij} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, b(x)\ I_{ij}, \tag{104}$$

где

$$H_A := \frac{1}{2}\, c^{(2)}_{A\beta B}\, \partial_\beta Y^B + \frac{g}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{Y} \vee \mathbf{Y} - \Phi \mathbf{Y}\right)_A, \tag{105}$$

$$h_\alpha := \frac{1}{2}\, d^{(1)}_{\alpha B\gamma}\, \partial_\gamma Y^B + \sqrt{\frac{2}{3}}\, \partial_\alpha \Phi, \tag{106}$$

$$b := \frac{g}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\, \mathbf{Y}^2 - \Phi^2\right). \tag{107}$$

*Явный вид матриц $\mathbf{J}^k$ дан в приложении Б.

В (105) обозначение

$$(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y})_C := d^{(2)}_{CAB} X^A Y^B \tag{108}$$

соответствует известной алгебраической операции [60], сопоставляющей двум 5-векторам другой 5-мерный вектор с помощью симметрических констант $d^{(2)}_{CAB}$ алгебры матриц спина 2. Константы $c^{(2)}_{A\beta B}$, $d^{(1)}_{\alpha B\gamma}$, $d^{(2)}_{CAB}$ определены в приложении Б. С учетом этого замечания легко убедиться, что коэффициенты (105)–(107) разложения магнитного поля B_{ij} представляют собой соответственно: $\mathbf{H}$ — 5-вектор; $\mathbf{h}$ — 3-вектор и b — скаляр относительно трехмерных пространственных вращений.

4.1. Гамильтониан полей спина 2 и спина 0. Начнем с более простого случая теории полей Янга–Миллса с нулевым вакуумным углом θ. В этом случае расчет гамильтониана в терминах полей спина 0 и спина 2 в ведущем приближении сильной связи после масштабирования (69) дает следующий результат:

$$H^{(0)} = \int d^3x \left(P_\Phi^2 + \mathbf{P}_Y^2 + \mathcal{I}_{ij}\, \mathcal{S}_i \mathcal{S}_j + V^{(0)} \right), \tag{109}$$

где $\mathcal{S}_i$ — векторы спина (100); $\mathcal{I}_{ij}$ — тензор «моментов инерции»:

$$\mathcal{I}_{ij} = \frac{1}{\det\gamma} \left[(\mathbf{Y}^2 + \Phi^2)^2\, \delta_{ij} + (\mathbf{Y}^2 + \Phi^2)\, d^{(1)}_{ijA} Z_A + \mu^{AB}_{ij}\, Z_A Z_B \right], \tag{110}$$

$$\mu^{AB}_{ij} := d^{(1)}_{Aik} d^{(1)}_{Bjk} + c^{(2)}_{ADi} c^{(2)}_{BDj}. \tag{111}$$

В выражениях (110) и (111) $c^{(2)}_{A\beta C}$ и $d^{(1)}_{\alpha B\gamma}$ — структурные константы алгебры матриц спина 2 (детали см. в приложении Б). Специальный 5-вектор $\mathbf{Z}$ в определении тензора момента инерции (110) задан в виде

$$\mathbf{Z} := \frac{1}{2\sqrt{6}} \mathbf{Y} \vee \mathbf{Y} + \frac{2}{\sqrt{3}}\, \Phi\, \mathbf{Y}. \tag{112}$$

Детерминант γ в (110) в переменных $\mathbf{Y}$ и Φ дается полиномом:

$$\det\gamma = \frac{1}{3\sqrt{6}}\, \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} \vee \mathbf{Y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, \Phi\, \mathbf{Y}^2 - \frac{8}{3\sqrt{3}}\, \Phi^3. \tag{113}$$

Потенциальный член $V^{(0)}$ в гамильтониане (109) не зависит от производных полей и имеет следующую форму:

$$V^{(0)} := \frac{1}{3} \left[\Phi^4 + \frac{1}{4}\, \mathbf{Y}^4 + \frac{1}{2}\, (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Y})^2 - \sqrt{2}\, \Phi\, \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} \vee \mathbf{Y} \right]. \tag{114}$$

Как было отмечено выше, полевая переменная $\mathbf{Y}$ при трехмерных вращениях преобразуется по представлению группы $O(3)$ с ортогональной 5×5

матрицей, определенной в (103). При этом поскольку орбиты общего положения группы $O(3)$, действующей в 5-мерном линейном пространстве (пространстве невырожденных симметрических матриц с нулевым следом), двухмерные, то вектор $\mathbf{Y}$ может быть приведен к виду

$$Y_A = D(R(\chi))_{AB} M_B, \tag{115}$$

где специальный вектор $\mathbf{M}$ параметризован двумя инвариантами, длиной вектора ρ и углом α:

$$\mathbf{M} = \rho \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\alpha, 0, \cos\alpha, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\alpha \right). \tag{116}$$

В терминах этих $O(3)$-инвариантов для потенциала взаимодействия (114) имеем

$$V^{(0)} := \frac{1}{3} \left[\Phi^4 + \frac{3}{4} \rho^4 - \sqrt{2}\, \Phi \rho^3 \cos 3\alpha \right]. \tag{117}$$

В записи (115) оставшиеся три угла χ_1, χ_2, χ_3 характеризуют ротационные степени свободы. Для анализа свойств модели (109) представляет интерес явное выделение этих степеней свободы. Поэтому далее гамильтониан (109) будет переписан в терминах новых полей, скаляров группы пространственных вращений и, соответственно, трех угловых полевых переменных.

4.2. Гамильтониан в терминах скаляров и углов. Параметризацию (115) в терминах углов и инвариантов можно привести в соответствие с хорошо известной процедурой приведения симметрического 3×3 тензора S к главным осям:

$$S(x) = R^T(\chi(x)) \begin{pmatrix} \phi_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3(x) \end{pmatrix} R(\chi(x)). \tag{118}$$

Диагональные переменные ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 в (118) связаны с инвариантами Φ, ρ и α известными соотношениями:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right), \tag{119}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3} \right), \tag{120}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \cos\alpha. \tag{121}$$

Поскольку для якобиана преобразования (118) имеем

$$J\left(\frac{S_{ij}[\phi,\chi]}{\phi_k,\chi_l}\right) \propto \prod_{i\neq j} |\phi_i(x) - \phi_j(x)|, \tag{122}$$

то (118) можно рассматривать как корректную замену переменной S тремя скалярными полями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 и тремя углами χ_1, χ_2, χ_3 лишь при условии невырожденности спектра матрицы: все собственные значения матрицы S должны быть различны. Примем, без ограничения общности, следующее упорядочение*:

$$\phi_1(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x). \tag{123}$$

Формулы перехода к новым парам (ϕ_i, π_j) и (χ_j, p_{χ_i}), удовлетворяющим каноническим скобкам Пуассона

$$\{\phi_i(x), \pi_j(y)\} = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{124}$$

$$\{\chi_i(x), p_{\chi_j}(y)\} = \delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{125}$$

приведены в приложении В. С учетом этих формул в ведущем приближении для плотности гамильтониана (109) в терминах канонических переменных (ϕ_i, π_j) и (χ_j, p_{χ_i}) окончательно получим

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3}\pi_i^2 + \sum_{\mathrm{cyclic}} \xi_i^2 \frac{\phi_j^2+\phi_k^2}{(\phi_j^2-\phi_k^2)^2} + V^{(0)}(\phi)\right], \tag{126}$$

где ξ_i — реализация правоинвариантных векторных полей на группе $SO(3)$ в терминах углов χ_i и сопряженных им импульсов p_{χ_i}:

$$\xi_i = M^{-1}_{ji} p_{\chi_j}, \quad M_{ji} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{jab}\left(\frac{\partial R}{\partial \chi_i}\,R^T\right)_{ab}, \tag{127}$$

и вклад от магнитного поля B^2 в гамильтониан (126) представлен в виде однородного потенциала четвертого порядка

$$V^{(0)}(\phi) := \phi_1^2\phi_2^2 + \phi_1^2\phi_3^2 + \phi_2^2\phi_3^2. \tag{128}$$

---

*Конфигурации (123) описывают так называемые регулярные орбиты группы $O(3)$ на пространстве симметрических матриц, тогда как матрицы с совпадающими собственными значениями формируют вырожденные орбиты [61]. Как будет показано ниже, вырожденные сингулярные орбиты играют особую роль в режиме сильной связи ввиду того, что ведущая часть хромомагнитного поля (128), не зависящая от производных полей, обнуляется на поверхностях, задаваемых двукратно вырожденными матрицами, $\phi_i = \phi_j = 0$, $i \neq j$.

5. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ, КВАДРАТИЧНАЯ ПО ПРОИЗВОДНЫМ

В предыдущем разделе в приближении ведущего порядка разложения по константе сильной связи была получена модель локального взаимодействия нерелятивистских полей, соответствующих частицам со спином 0 и спином 2. Лагранжиан, соответствующий (126), зависит от временных производных полей квадратичным образом и не содержит их пространственных производных. Таковые появляются при переходе к поправкам к ведущему приближению как для хромомагнитного (92), так и для хромоэлектрического поля (93). Что касается линейных и квадратичных поправок к ведущему приближению хромомагнитного поля, то они приводят к стандартному квадратичному по первым производным полей вкладу в редуцированный лагранжиан. В то же время уже в линейном по λ приближении для хромоэлектрического поля возникает нестандартная ситуация. Действительно, уже линейные по λ члены в (93) и (92) дают вклад в плотность гамильтониана следующего типа:

$$H^{(1)} := E^{(0)}_{ij}\epsilon_{ijk}\gamma^{-1}_{kl}\nabla_s E^{(0)}_{sl} + B^{(0)}_{ij}B^{(1)}_{ij}. \qquad (129)$$

Поскольку $E^{(0)}_{ij} = P_{ij} + \epsilon_{ijn}\gamma_{nk}\epsilon_{klm}\,(PS)_{lm}$ зависит от импульсов P, то это приводит к появлению в гамильтониане структур, которые условно запишем

$$\mathcal{H} := \frac{1}{2}\left[P^2 + \lambda\, P\, [F(S,\partial S) + \mathcal{K}(S,\partial)]\, P\right], \qquad (130)$$

с ядром $\mathcal{K}(S,\partial)$ в виде дифференциального оператора. Как следствие, соответствующая функция Лагранжа оказывается нелокальной

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\dot{S}\,\frac{1}{1+\lambda\,[F(S,\partial S)+\mathcal{K}(S,\partial)]}\,\dot{S}, \qquad (131)$$

а ее локальное приближение (порядка λ)

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2}\left[\dot{S}^2 - \lambda\,\dot{S}\,[F(S,\partial S)+\mathcal{K}(S,\partial)]\,\dot{S}\right] \qquad (132)$$

не только содержит вторые производные полей, но и зависит от первых производных полей кубичным образом*. Поэтому, несмотря на то, что степень малости (по λ) подобных членов такого же порядка, что и от поправок к ведущему члену хромомагнитного поля (92), мы далее проигнорируем поправки хромоэлектрического поля (93), ограничивая себя моделью с лагранжианом, квадратичным по первым производным полей.

---

*Заметим, что конечномерная аппроксимация (132) будет описывать взаимодействующие моды типа

$$\mathcal{L}_{\rm finite} = \frac{1}{2}\sum_k \left[a_k\dot{S}^2_k - \lambda\, b_k\dot{S}_k\dot{S}_{k+1}\right].$$

5.1. Ведущее приближение хромоэлектрического поля. Случай $\theta = 0$. Как показывает расчет, если ограничиться ведущим приближением хромоэлектрического поля $E^{(0)}_{ij}$ и точным выражением для магнитного поля (92), то при нулевом вакуумном угле гамильтониан модели в терминах углов и скалярных переменных запишется в виде

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3}\pi_i^2 + \sum_i k_i\xi_i^2 + V(\phi,\chi)\right], \tag{133}$$

где

$$k_i = \frac{\phi_j^2+\phi_k^2}{(\phi_j^2-\phi_k^2)^2} \quad \text{(циклические перестановки } i\neq j\neq k) \tag{134}$$

и вклад от магнитного поля B^2 представлен в виде потенциала

$$V(\phi,\chi) = \sum_{i\neq j}^{3}\lambda^2\left(\Gamma_{iij}(\phi_i-\phi_j) - X_j\phi_i\right)^2 + \\ + \sum_{\text{cyclic}}\left(\lambda\left(\Gamma_{ijk}(\phi_i-\phi_k) - \Gamma_{ikj}(\phi_i-\phi_k)\right) - \phi_j\phi_k\right)^2, \tag{135}$$

описывающего как самодействие триплета скалярных полей (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3), так и их взаимодействие с триплетом реперных векторных полей

$$X_i = R_{ij}(\chi)\partial_j,$$

зависящих от трех углов χ_1,χ_2,χ_3. Функции Γ в (135) зависят только от этих угловых переменных

$$\Gamma^b{}_{ia} := \left(RX_iR^T\right)_{ab} \tag{136}$$

и могут быть представлены в терминах компонент 1-форм Маурера–Картана

$$\omega^s = \omega^s_i \mathrm{d}\chi_i,$$

дуальных векторным полям ξ_i:

$$\Gamma^b{}_{ia} = i\epsilon_{abs}R_{ij}\omega^s_j. \tag{137}$$

Используя представление (133), получим соответствующую функцию Лагранжа. Легко увидеть, что обратное преобразование Лежандра

$$\dot\phi_i = \pi_i, \tag{138}$$
$$\dot\chi_a = G_{ab}p_{\chi_b} \tag{139}$$

определяет лагранжиан второго порядка следующего вида:

$$L^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x \sum_{i=1}^{3} \dot{\phi}_i^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \dot{\chi}_i G_{ij}^{-1} \dot{\chi}_j - V(\phi, \chi), \tag{140}$$

где 3×3 матрица G в (139) подобна диагональной матрице $\mathfrak{I}^{-1} = \mathrm{diag}\|k_1, k_2, k_3\|$ с элементами, заданными в (134):

$$G = M^{-1} \mathfrak{I}^{-1} M^{-1^T}, \tag{141}$$

и матрица M задана в (127).

В каких случаях подобное «хромоэлектрическое приближение» является корректным, требует отдельного рассмотрения. Здесь же отметим, что нарушение дуальности между хромоэлектрическими и магнитными полями может приводить к ошибочным результатам. Такой настораживающий пример, в котором имеет место нарушение данной симметрии, дает теория Янга–Миллса с ненулевым вакуумным углом. В этом можно убедиться уже на уровне выражения (34). Как показывает расчет, приведенный в работе [33], при ведущем «хромоэлектрическом приближении» использование точного выражения для хромомагнитного поля $B_{ai}^{(-)}$ в случае $\theta \neq 0$ приводит к отмеченной выше «проблеме дивергенции»: 4-дивергенция с учетом закона Гаусса перестает быть дивергенцией.

5.2. Ведущее приближение хромоэлектрического поля. Случай $\theta \neq 0$. Решение указанной проблемы состоит в необходимости согласования схемы приближения с дуальной хромо/магнитоэлектрической симметрией. Как хорошо известно, закон Гаусса является уравнением для компонент хромоэлектрического поля, а соответствующее дуальное условие на магнитное поле есть уравнения Бианки*. Используя приближенные выражения для электрических полей, необходимо в каждом порядке разложения проверять справедливость соответствующих приближений для магнитного поля. В духе данных соображений ниже будет представлен вариант разложения обоих уравнений, закона Гаусса и тождеств Бианки, который сохраняет дуальную симметрию и гарантирует θ-независимость классических уравнений движения редуцированной системы полей в каждом порядке теории возмущений.

5.2.1. «Проблема дивергенции» и тождества Бианки. Следуя намеченной выше программе, воспользуемся дуальностью между неабелевым законом Гаусса и уравнениями Бианки. Представим уравнения (27), определяющие нелокальный член $\mathcal{E}_a$, в виде

$$^*D_{ks}(S)\,\mathcal{E}_s = (D_i(S))_{kl}\, P_{lk} \tag{142}$$

*Надо сказать, что данные уравнения Бианки, обычно называемые тождествами, являются таковыми лишь после представления магнитного поля через калибровочный потенциал.

и перепишем тождества Бианки (8), следуя разбиению (35) хромомагнитного поля на симметрическую $B_s^{(+)}$ и антисимметрическую $B_s^{(-)}$ части, в форме уравнения

$$ {}^*D_{ks}(S)\, B_s^{(-)} = (D_i(S))_{kl}\, B_{li}^{(+)}. \tag{143} $$

Рассматривая теперь (143) как уравнения, определяющие антисимметрическую часть хромомагнитного поля $B_s^{(-)}$ по известной функции $B_{bc}^{(+)}$, убеждаемся в полной аналогии тождеств Бианки с уравнениями (142), определяющими антисимметрическую часть хромоэлектрического поля.

С учетом этих уравнений и того обстоятельства, что в редуцированном гамильтониане (34) вся зависимость от $\mathcal{E}_s$ входит в комбинации с антисимметрической частью хромомагнитного поля, а именно в виде $\mathcal{E}_s - \left(\theta/8\pi^2\right) B_s^{(-)}$, рассмотрим вместо (27) уравнение, определяющее непосредственно данную комбинацию:

$$ {}^*D_{ks}(S)\, \left[\mathcal{E}_s - \frac{\theta}{8\pi^2}\, B_s^{(-)}\right] = (D_i(S))_{kl}\, \left[P_{li} - \frac{\theta}{8\,\pi^2}\, B_{li}^{(+)}\right]. \tag{144} $$

Тогда, используя соответствующее решение в виде $1/g$ разложения

$$ \mathcal{E}_s - \frac{\theta}{8\,\pi^2}\, B_s^{(-)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1/g)^n\, a_s^{(n)} \left(S, P - \frac{\theta}{8\pi^2}\, B^{(+)}\right), \tag{145} $$

представим плотность редуцированного гамильтониана в виде нелокального функционала от комбинации полей $P_{ai} - \left(\theta/8\,\pi^2\right) B_{ai}^{(+)}$:

$$ \begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{1}{2}\, \left(P_{ai} - \frac{\theta}{8\pi^2}\, B_{ai}^{(+)}\right)^2 &+ \\ &+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{g^n}\, a_i^{(n)} \left(S, P - \frac{\theta}{8\pi^2}\, B^{(+)}\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\, V(S). \end{aligned} \tag{146} $$

Такая форма зависимости гарантирует отсутствие параметра θ в классических уравнениях Эйлера–Лагранжа. Действительно, напомним, что в обобщенной гамильтоновой формулировке глюодинамики существует каноническое преобразование к новым переменным A_{ai} и E_{bj}:

$$ \begin{aligned} &A_{ai}(x) \longmapsto A_{ai}(x), \\ &\Pi_{bj}(x) \longmapsto E_{bj} = \Pi_{bj}(x) - \frac{\theta}{8\pi^2}\, B_{bj}(x), \end{aligned} \tag{147} $$

в которых зависимость полного гамильтониана (9) от угла θ полностью исчезает с учетом тождества Бианки (8)*.

Подобно изложенному выше введем [33,62] в редуцированной теории (146) отображение

$$\begin{aligned} &S_{ai}(x) \longmapsto S_{ai}(x), \\ &P_{bj}(x) \longmapsto \mathcal{E}_{bj}(x) := P_{bj}(x) - \frac{\theta}{8\,\pi^2} B^{(+)}_{bj}(x). \end{aligned} \tag{150}$$

Можно проверить, что это преобразование к новым переменным $(S_{ai}, \mathcal{E}_{bj})$ является каноническим. С учетом тождеств Бианки в преобразованных переменных $(S_{ai}, \mathcal{E}_{bj})$ гамильтониан (34) описывает редуцированную гамильтонову систему с нулевым углом θ. Спроектированное каноническое преобразование (150), исключающее θ-зависимость редуцированного гамильтониана (34), также может быть записано в форме

$$\mathcal{E}_{bj}(x) = P_{bj}(x) - \theta\,\frac{\delta}{\delta S_{bj}} W[S]. \tag{151}$$

Представление (151) имеет вид (148), в котором девять калибровочных полей $A_{ik}(x)$ заменены шестью физическими полями $S_{ik}(x)$.

5.2.2. Гамильтониан в ведущем хромоэлектрическом приближении. Для плотности редуцированного гамильтониана (146) в ведущем хромоэлектрическом приближении, в терминах скалярных и угловых переменных, имеем

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\pi_i - \frac{\theta}{8\pi^2}\,\beta_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{\rm cyclic} k_i\left(\xi_i + \frac{\theta}{8\pi^2}\,(\phi_j-\phi_k)\,b_i\right)^2 + V(\phi,\chi), \tag{152}$$

где введены следующие обозначения:

$$\beta_i = \phi_j\phi_k - \lambda\left[(\phi_i-\phi_j)\Gamma_{ikj} + (\phi_i-\phi_k)\Gamma_{ijk}\right], \tag{153}$$

$$2\,b_i = \lambda\left[X_i(\phi_j-\phi_k) - (\phi_i-\phi_j)\Gamma_{ijj} + (\phi_i-\phi_k)\Gamma_{ikk}\right]. \tag{154}$$

---

*Отметим также, что каноническое преобразование (147) может быть записано в виде

$$E_{ai} = \Pi_{ai} - \theta\frac{\delta}{\delta A_{ai}} W[A] \tag{148}$$

с функционалом $W[A] = \int d^3x\, K^0[A]$, определенным через нулевую компоненту 4-тока Черна–Саймонса

$$K^\mu[A] = -\frac{1}{16\,\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\,{\rm tr}\left(F_{\alpha\beta}\,A_\gamma - \frac{2}{3}\,A_\alpha\,A_\beta\,A_\gamma\right). \tag{149}$$

Выражение (152) подсказывает вид канонического преобразования

$$\begin{aligned} \pi_i &\longmapsto \pi_i + \frac{\theta}{8\pi^2}\,\beta_i, \quad \phi_i \longmapsto \phi_i, \\ \xi_i &\longmapsto \xi_i - \frac{\theta}{8\pi^2}\,(\phi_j - \phi_k)\,b_i, \end{aligned} \tag{155}$$

поглощающего θ-зависимость и устанавливающего эквивалентность с гамильтонианом (126) с нулевым вакуумным углом.

Возможность исключения θ-зависимости редуцированного гамильтониана означает, что соответствующий лагранжиан содержит θ-вклад в виде 4-дивергенции, несущей информацию о глобальных, топологических характеристиках модели. Далее будет построен соответствующий локальный лагранжиан и получено выражение для плотности топологического заряда. В частности, будут найдены полевые конфигурации, в которых топологический инвариант Понтрягина редуцируется до инварианта Хопфа отображения 3-сферы $\mathbb{S}^3$ в 2-сферу $\mathbb{S}^2$.

5.2.3. Редуцированный ток Черна–Саймонса. Лагранжиан, соответствующий гамильтониану (152), является функцией, зависящей от первых производных полей квадратичным образом. Ее явный вид легко устанавливается с помощью обратного преобразования Лежандра (ср. с (138) и (157))

$$\dot{\phi}_i = \pi_i - \frac{\theta}{8\pi^2}\beta_i, \tag{156}$$

$$\dot{\chi}_a = G_{ab}\Big(p_{\chi_b} - \frac{\theta}{8\pi^2}\sum_{\text{cyclic}} M^T_{bi}(\phi_j - \phi_k)\,b_i\Big). \tag{157}$$

Результирующий лагранжиан второго порядка имеет следующий вид:

$$L^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^3x \sum_{i=1}^{3}\dot{\phi}_i^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\dot{\chi}_i G^{-1}_{ij}\dot{\chi}_j - V(\phi,\chi) - \theta\int d^3x\, Q^{(2)}(\phi,\chi). \tag{158}$$

Вся θ-зависимость в (158) сосредоточена в коэффициенте перед

$$Q^{(2)} = \frac{1}{8\pi^2}\sum_{a=1}^{3}\left(\dot{\phi}_a\beta_a + \sum_{\text{cyclic}}^{i,j,k}\dot{\chi}_a M^T_{ai}(\phi_j - \phi_k)\,b_i\right). \tag{159}$$

Как показывает анализ, выражение (159) является дивергенцией:

$$Q^{(2)} = \partial^\mu K^{(2)}_\mu \tag{160}$$

от 4-вектора $K^{(2)\mu}$ с компонентами

$$K_0^{(2)} = \frac{1}{16\pi^2}\big[\lambda((\phi_2-\phi_3)^2\Gamma_{213}+(\phi_3-\phi_1)^2\Gamma_{321}+(\phi_1-\phi_2)^2\Gamma_{132})-2\,\phi_1\phi_2\phi_3\big],$$
$$K_i^{(2)} = \lambda\,\frac{1}{16\pi^2}\left[R_{i1}^T(\phi_2-\phi_3)^2\Gamma_{203}+R_{i2}^T(\phi_3-\phi_1)^2\Gamma_{301}+R_{i3}^T(\phi_1-\phi_2)^2\Gamma_{102}\right]. \tag{161}$$

Чтобы выяснить смысл полученного θ-зависимого вклада в локальном лагранжиане, рассмотрим интеграл

$$p_1 = \int d^4x\, Q^{(2)}(\phi,\chi). \tag{162}$$

Если предположить обнуление $K_i^{(2)}$ на пространственной бесконечности, интеграл в (162) сводится к разности двух поверхностных интегралов

$$W_\pm = \int d^3x\, K_0^{(2)}\,(t\to\pm\infty,\,\mathbf{x}), \tag{163}$$

которые суть топологический заряд физического поля S при $t\to\pm\infty$ соответственно. В этом можно убедиться, заметив, что $K_0^{(2)}(\phi,\chi)$ совпадает с исходным выражением (149) для временной компоненты тока, $K_0[S[\phi,\chi]]$.

Таким образом, интеграл (162) задает индекс Понтрягина редуцированной теории, а $K_\mu^{(2)}$ представляет собой аналог тока Черна–Саймонса, не содержащий, однако, калибровочных степеней свободы. Выражения (161), линейные по производным, соответствуют ведущему порядку разложения нелокального функционала по степеням производных.

6. СИСТЕМА НА СИНГУЛЯРНЫХ ОРБИТАХ

В основе всего предыдущего рассмотрения лежало предположение о невырожденности матричного поля, $\det S \neq 0$. В данном разделе мы откажемся от этого ограничения и рассмотрим вырожденные конфигурации, образованные сингулярными матрицами с $\operatorname{rank} S = 1$.

Важность такого типа конфигураций в режиме сильной связи видна из следующих соображений. Ведущий вклад при $g \gg 1$ в магнитное поле определяет однородный потенциал (128)

$$V^{(0)}(\phi) := \phi_1^2\phi_2^2+\phi_2^2\phi_3^2+\phi_3^2\phi_1^2. \tag{164}$$

Стационарные точки (164) суть три полевые конфигурации

$$\phi_i=\phi_j=0, \quad \phi_k \text{ — произвольное}, \quad i\neq j\neq k, \tag{165}$$

каждая из которых образует «долину» вырожденных абсолютных минимумов. Иными словами, условие минимума однородного потенциала реализуется именно на подпространстве сингулярных симметрических матриц минимального ранга*

$$\operatorname{rank} S = 1. \tag{166}$$

Выясним теперь, что происходит с полями (166) в процессе динамики. Для ее определения воспользуемся нашим предыдущим анализом пространства регулярных матриц и попытаемся предельным переходом в выражении (126) к вырожденным конфигурациям определить гамильтониан системы на сингулярных орбитах.

Подпространство вырожденных матриц ранга один имеет размерность 3, соответственно, фазовое пространство шестимерно. Напомним, что в регулярном случае гамильтонова система (126) имеет размерность 12. Поэтому предельный переход к динамике сингулярных матриц помимо условий (165) с необходимостью включает в себя учет дополнительных связей на другие переменные. Вывод этих условий подробно рассмотрен в работах [63–65], специально посвященных анализу динамики на пространстве матриц. Здесь только сформулируем идею и приведем результат. Дополнительные связи в фазовом пространстве возникают из требования инвариантности подпространства: т. е. к уравнениям (165) следует добавить все их динамические следствия. В интересующем нас случае следующий набор условий гарантирует подобную инвариантность подпространства сингулярных матриц с $\operatorname{rank} S = 1$:

$$\phi_i = 0, \quad \phi_j = 0, \quad \pi_i = 0, \quad \pi_j = 0, \quad \xi_k = 0, \quad i \neq j \neq k. \tag{167}$$

Теперь, имея явный вид всех связей, определяющих интересующее нас подпространство, мы в состоянии произвести формальный предельный переход в (126) и установить гамильтониан, генерирующий эволюцию сингулярных конфигураций.

6.1. Лагранжиан сингулярных конфигураций. Заметим, что на поверхности любой тройки связей (167) плотность гамильтониана (126) регулярна и допускает предельный переход к инвариантному многообразию сингулярных орбит. Опуская детали расчета, приведем явный вид соответствующего лагранжиана. Зафиксируем одну из циклических конфигураций минимума потенциала (164), например, занулим ϕ_1 и ϕ_2, оставив ϕ_3 произвольным, тогда потенциальный член в гамильтониане (152) сводится к выражению

$$\begin{aligned} V^{(2)} = \lambda^2 \big[\phi_3^2\big[(\Gamma_{213})^2 + (\Gamma_{223})^2 + (\Gamma_{233})^2 + (\Gamma_{311})^2 + (\Gamma_{321})^2 + (\Gamma_{331})^2 + \\ + (\Gamma_{3[12]})^2\big] + \big[(X_1\phi_3)^2 + (X_2\phi_3)^2\big] + 2\phi_3\big[\Gamma_{331}X_1\phi_3 + \Gamma_{332}X_2\phi_3\big]\big], \end{aligned} \tag{168}$$

*Сингулярные конфигурации $\operatorname{rank} S = 1$ обладают нетривиальной группой изотропии, т. е. являются приводимыми.

которое может быть переписано как [32]

$$V^{(2)} = (\nabla\phi_3)^2 + \phi_3^2\left[(\partial_i\mathbf{n})^2 + (\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n})^2\right] - (\mathbf{n}\cdot\nabla\phi_3)^2 + ([\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n}]\cdot\nabla\phi_3^2), \tag{169}$$

где единичный вектор $n_i(x)$ определен как

$$n_i(x) := R_{3i}(\chi(x)). \tag{170}$$

Следовательно, для редуцированного лагранжиана второго порядка по производным полей (158) имеем

$$L^{(2)}_{\rm sing} = L^{(0)}_{\rm sing} - \lambda^2\, L^{(2)}_{\rm sing}, \tag{171}$$

где

$$L^{(0)}_{\rm sing} = \frac{1}{2}\int d^3x(\partial_t\phi_3)^2 + \phi_3^2(\partial_t\mathbf{n})^2 \tag{172}$$

и

$$L^{(2)}_{\rm sing} = \frac{1}{2}\int d^3x\Big[(\nabla\phi_3)^2 + \phi_3^2\left[(\nabla\mathbf{n})^2 + (\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n})^2\right] - (\mathbf{n}\cdot\nabla\phi_3)^2 + \\ + ([\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n}]\cdot\nabla\phi_3^2)\Big] + \theta\int d^3x\, Q^{(2)}. \tag{173}$$

Здесь еще раз отметим, что при ограничении ведущим порядком приближения сильной связи лагранжиан (172) является инвариантным относительно группы Галилея, в то время как в порядке λ^2 алгебра симметрии системы сводится к (85).

При этом интересно, что лагранжиан (173) по структуре напоминает выражение свободной энергии для жидких кристаллов (см., например, [66]). В этой теории единичный вектор $\mathbf{n}(x)$ определяет анизотропию среды и величины типа $\operatorname{div}\mathbf{n}$, $\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n}$ или $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n}$ описывают ее *поперечный изгиб, кручение* или *продольный изгиб*.

6.2. От индекса Понтрягина к индексу зацепления. Функция $Q^{(2)}$ в (171), которая есть плотность индекса Понтрягина для сингулярных конфигураций (167), может быть представлена как дивергенция

$$Q^{(2)} = \partial^\mu K^{(2)}_\mu \tag{174}$$

от 4-вектора

$$K^{(2)\mu} = \frac{1}{16\pi^2}\phi_3^2\Big((\mathbf{n}(x)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n}(x)),\ [\mathbf{n}(x)\times\dot{\mathbf{n}}(x)]\Big). \tag{175}$$

Если теперь предположить, что поле $\mathbf{n}$ на пространственной бесконечности не зависит от времени, то трехмерная компонента вектора (175) не дает вклад в интеграл от $Q^{(2)}$. Поэтому редуцированная форма топологического инварианта Понтрягина p_1 сводится к разности

$$p_1 = n_+ - n_- \tag{176}$$

поверхностных интегралов

$$n_\pm = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \left(\mathbf{V}_\pm(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V}_\pm(\mathbf{x})\right), \tag{177}$$

в которых поля $\mathbf{V}_\pm(\mathbf{x})$ определяются асимптотическими значениями:

$$\mathbf{V}_\pm(\mathbf{x}) := \lim_{t\to\pm\infty} \phi_3(x)\, \mathbf{n}. \tag{178}$$

Далее покажем, что каждый из поверхностных интегралов (177) представляет собой топологический инвариант, а точнее, инвариант Хопфа для отображения 3-сферы $\mathbb{S}^3$ в единичную 2-сферу $\mathbb{S}^2$, записанный в интегральной форме Уайтхеда [67].

Действительно, пусть задано расслоение Хопфа $N : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$. Рассмотрим прообразы двух произвольных точек на сфере $\mathbb{S}^2$, которые суть одномерные замкнутые кривые в $\mathbb{S}^3$. Коэффициент зацепления Q_H этих кривых является гомотопическим инвариантом отображения N. Согласно Уайтхеду [67] этот инвариант представим в форме следующего интеграла от 3-формы на $\mathbb{S}^3$:

$$Q_H = \frac{1}{32\pi^2} \int\limits_{S^3} w^1 \wedge w^2. \tag{179}$$

В уравнении (179) компоненты 2-формы кривизны

$$w^2 = H_{ij}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

выражаются в терминах отображения N:

$$H_{ij} = \varepsilon_{abc}\, N_a \left(\partial_i N_b\right) \left(\partial_j N_c\right), \tag{180}$$

а 1-форма w^1 такова, что $w^2 = dw^1$.

Для того, чтобы выяснить связь интегралов (177) с коэффициентом зацепления Q_H, заметим, что так как 2-форма кривизны w^2 замкнута, $\mathrm{d}w^2 = 0$, то

$$\varepsilon_{ijk}\, \partial_i\, H_{jk} = 0. \tag{181}$$

Далее, поскольку группа когомологии $H^2(\mathbb{S}^3, \mathbb{R})$ тривиальна, то согласно теореме де Рама на всей сфере $\mathbb{S}^3$ существует векторное поле $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ такое, что $w^1 = \mathcal{A}_i\, \mathrm{d}x_i$. Это означает, что

$$H_{ij} = \partial_i \mathcal{A}_j - \partial_j \mathcal{A}_i, \quad i,j = 1,2,3, \tag{182}$$

и тем самым инвариант Хопфа принимает вид

$$Q_H = \frac{1}{16\pi^2} \int d^3x \, (\boldsymbol{\mathcal{A}} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{A}}) \,. \tag{183}$$

Сравнивая это представление с (177), убеждаемся в правоте сделанного предположения.

В теории калибровочных полей инвариант (183) принято называть 3-мерным абелевым инвариантом Черна–Саймонса*. Тем самым убеждаемся в том, что редуцированная форма топологического заряда $Q^{(2)}$ для сингулярных конфигураций ранга один совпадает с числом зацепления или же 3-мерным абелевым инвариантом Черна–Саймонса, в котором роль «калибровочного потенциала» играет потенциал $\mathbf{V}$, генерирующий «магнитное поле» $\operatorname{rot} \mathbf{V}$.

7. КОММЕНТАРИИ К КВАНТОВАНИЮ

В данном обзоре мы ограничили себя рассмотрением классической теории. Однако в заключение уместно сделать короткий комментарий к ее квантованию. Это связано с нетривиальной структурой конфигурационного пространства самой классической редуцированной модели.

Как показал анализ, редуцированное матричное поле S

— не является элементом векторного пространства в силу своей неотрицательной определенности;

— преобразуется по нелинейному представлению группы Пуанкаре;

— обладает нелокальным самодействием.

Каждое из этих свойств делает процедуру квантования очень трудной задачей и вместе с тем позволяет выдвинуть предположение о нетривиальности ее физических следствий.

Неотрицательность матричного поля S не является артефактом предложенной схемы редукции, она находится в соответствии с общим утверждением о том, что пространство орбит $\mathcal{O} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ может быть описано как полуалгебраическое многообразие [77, 78]. Это обстоятельство принципиально меняет схему квантования редуцированной теории. Действительно, в силу неотрицательной определенности S каждое поле из триплета скаляров

*Инварианты типа (183) возникают в различных областях физики. В механике жидкостей под названием «fluid helicity», в физике плазмы и магнитогидродинамике — «magnetic helicity» [68–71]. В теории Янга–Миллса абелевы поля с ненулевой спиральностью рассматривались в контексте неабелевых вакуумных конфигураций [72, 73]. Важность числа зацеплений для устойчивости солитонов также хорошо известна [74]. Инвариант Хопфа появляется в [75] как топологическая характеристика конфигураций глюонных полей при низких энергиях [76], а квадрат кривизны (180) обеспечивает устойчивость солитонных решений.

$\phi_i \geqslant 0$ принимает значения, условно говоря, на полуоси $\mathbb{R}^+$. Данное ограничение должно быть учтено на квантовом уровне либо в форме граничных условий на волновые функционалы, либо прямо на уровне самосопряженных расширений операторов. В результате в квантовой теории может возникнуть новый параметр, не имеющий классического соответствия. Одна из таких возможностей — это присутствие ненулевого вакуумного среднего $\langle \phi_i^2(x) \rangle$. Как показал анализ, в упрощенной, конечномерной модели, так называемой механике Янга–Миллса, такая возможность действительно реализуется [79, 80].

В завершение в связи с метаморфозами локальности–нелокальности, с которыми мы столкнулись в теории неабелевых полей, приведем следующее замечание: *«The laws of physics have local and nonlocal consequences. Historically, physicists, in general have readily recognized the local consequences... But they have been relatively slow in recognizing the nonlocal or global consequences, which even after they are discovered, are often subject to controversy»* [81].

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 3810.2010.2) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00200).

Приложение А

О СУЩЕСТВОВАНИИ «СИММЕТРИЧЕСКОЙ КАЛИБРОВКИ»

Выясним условия, при которых «симметрическая калибровка»

$$\chi_a(A) = \varepsilon_{abi}\, A_{bi}(x) = 0 \tag{184}$$

правильно выделяет представителя орбит в четырехмерной калибровочной теории со структурной группой $SU(2)$.

Согласно стандартному определению (см. [8]) калибровка $\chi_a(A) = 0$ является хорошо определенной, если уравнение

$$\chi_a(A^\omega) = 0, \tag{185}$$

в котором A^ω — калибровочное поле $A(x)$, подверженное преобразованию

$$A^\omega_{ai}\tau_a = U^+(\omega)\left(A_{ai}\tau_a + \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)U(\omega), \tag{186}$$

имеет единственное решение для трех функций $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\omega_3(x)$. Калибровочное преобразование (186) предполагается гладким и представимым в экспоненциальном виде

$$U(\omega) = \exp\left(i\omega_a(x)\tau^a\right).$$

Условие (185), записанное в явной форме, имеет следующий матричный вид:

$$O^T(\omega)A - A^T O(\omega) = \frac{1}{g}\left(\Sigma(\omega) - \Sigma^T(\omega)\right), \tag{187}$$

где ортогональная 3×3 матрица задана преобразованием из группы $SU(2)$

$$O_{ab}(\omega) = -2\mathrm{tr}\left(U^{+}(\omega)\tau_a U(\omega)\tau_b\right) \tag{188}$$

и 3×3 матрица Σ определена как

$$\Sigma_{ai}(\omega) := -\frac{1}{4i}\varepsilon_{amn}\left(O^T(\omega)\frac{\partial O(\omega)}{\partial x_i}\right)_{mn}. \tag{189}$$

Если (187) рассматривать как систему уравнений, определяющих ортогональную матрицу $O(\omega)$, то оказывается верным следующее утверждение.

Теорема. *Для произвольной невырожденной матрицы A уравнение (187) допускает единственное решение относительно ортогональной матрицы $O(\omega)$, представимое в виде формального ряда по степеням $1/g$:*

$$O(\omega) = O^{(0)}\left[1\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{g}\right)^n X^{(n)}\right], \tag{190}$$

где $O^{(0)}$ — ортогональная матрица, фигурирующая в полярном разложении матрицы A,

$$A = O^{(0)}S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \sqrt{AA^T},$$

а коэффициенты $X^{(n)}$ определяются из системы рекуррентных алгебраических уравнений.

При этом матрица $S(x) := A^{\omega}$, полученная в результате «симметризирующего» преобразования, представима в виде разложения:

$$S(x) = S^{(0)}(x)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{g}\right)^n Y^{(n)}(x)\right]. \tag{191}$$

Доказательство. Подставляя разложение (190) в уравнение (187) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $1/g$, находим, что ортогональная матрица $O^{(0)}$ должна удовлетворять уравнению

$$O^{(0)T}A - A^T O^{(0)} = 0, \tag{192}$$

а коэффициенты $X^{(n)}$ уравнениям

$$\begin{aligned}
&{X^{(1)}}^T {O^{(0)}}^T A - A^T O^{(0)} X^{(1)} = \Sigma^{(0)} - \Sigma^{(0)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\
&{X^{(n)}}^T {O^{(0)}}^T A - A^T {O^{(0)}}^T X^{(n)} = \Sigma^{(n-1)} - {\Sigma^{(n-1)}}^T,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{193}$$

Матрицы $\Sigma^{(n)}$ в правой части данных уравнений являются коэффициентами соответствующего разложения матрицы

$$\Sigma(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{g}\right)^n \Sigma^{(n)}, \tag{194}$$

причем матрица n-го порядка $\Sigma^{(n)}$ определяется через $O^{(0)}$ и $X^{(a)}$ с $a = 1, \ldots, n-1$.

Отметим также, что требование ортогональности матрицы $O(\omega)$ накладывает следующие условия на коэффициенты разложения $X^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
&X^{(1)} + {X^{(1)}}^T = 0,\\
&X^{(2)} + {X^{(2)}}^T + X^{(1)} {X^{(1)}}^T = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\
&X^{(n)} + {X^{(n)}}^T + \sum_{i+j=n} X^{(i)} {X^{(j)}}^T = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{195}$$

Структура уравнений (192), (193) и (195) такова, что система (187) сводится к алгебраической. Действительно, решение однородного уравнения (192) есть не что иное, как полярное разложение матрицы A:

$$O^{(0)} = A S^{(0)-1}, \quad S^{(0)} = \sqrt{AA^T}. \tag{196}$$

Это решение единственно тогда и только тогда, когда $\det \|A\| \neq 0$ [50].

С учетом этого решения и условий (195) для X уравнения (193) записываются в виде

$$\begin{aligned}
&X^{(1)} S^{(0)} + S^{(0)} X^{(1)} = C^{(0)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\
&X^{(n)} S^{(0)} + S^{(0)} X^{(n)} = C^{(n-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned} \tag{197}$$

где коэффициент n-го порядка $C^{(n)}$ задан в терминах $O^{(0)}$ и $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n-1)}$.

Таким образом, коэффициенты $X^{(n)}$ определяются рекурсивно как решения матричных уравнений типа

$$XS^{(0)} + S^{(0)}X = C$$

с известной симметрической положительно-определенной матрицей $S^{(0)}$ и матрицей C, построенной алгебраическим образом посредством предыдущих коэффициентов разложения $X^{(a)}$, $a = 1, \ldots, n-1$. Согласно теории подобных алгебраических уравнений [50, 82] (см., например, теорему 8.5.1 в [82]) решение матричного уравнения $XA + BX = C$ для матрицы X существует и оно единственно тогда и только тогда, когда заданные матрицы A и $-B$ не имеют общих собственных значений. На основании этой теоремы заключаем, что решение уравнений (193) и, значит, основной задачи (187) существует и единственно для произвольной невырожденной матрицы A.

Теперь для обоснования корректности замены переменных (20) осталось доказать, что результирующая матрица, S,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{g}\right)^n S^{(n)}(x) \tag{198}$$

будет знакоопределенной. Неотрицательность ведущего члена гарантирована полярным разложением $S^{(0)} = \sqrt{AA^T}$. Представив S в виде $S = S^{(0)} + 1/gS'$, можно заключить, что достаточно малая $1/g$ будет положительно-определенной, если S' симметрическая. Справедливость последнего непосредственно следует из конструкции членов разложения матрицы S в (198).

Приложение Б

АЛГЕБРА СОСТОЯНИЙ СПИНА 1 И СПИНА 2

Трехмерное представление группы $O(3)$, соответствующее спину 1, дается генераторами

$$J^1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

образующими алгебру $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}\, J_k$.

Собственные функции $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ и J_3

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{199}$$

ортогональны в метрике $\eta_{\alpha\beta} := (-1)^{\alpha}\delta_{\alpha,-\beta}$

$$(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta}, \tag{200}$$

и удовлетворяют условию полноты

$$e^i_\alpha e^j_\beta \eta^{\alpha\beta} = \delta^{ij}. \tag{201}$$

Разложение Клебша–Гордона для тензорного произведения $3 \otimes 3 = 0 \oplus 1 \oplus 2$ дает соответственно:

спин 0

$$I_0 := \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_{-1} - \mathbf{e}_{-1} \otimes \mathbf{e}_1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

спин 1

$$\begin{aligned} J^+ &= \mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_0, \\ J^- &= \mathbf{e}_{-1} \otimes \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_{-1}, \\ J^0 &= \mathbf{e}_{-1} \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_{-1}, \end{aligned}$$

или в явном виде

$$J^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

спин 2

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_2 = \sqrt{2}\left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\right), \quad \mathbf{T}_1 := \left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_1\right), \\ &\mathbf{T}_{-2} = \sqrt{2}\left(\mathbf{e}_{-1} \otimes \mathbf{e}_{-1}\right), \quad \mathbf{T}_{-1} := \left(\mathbf{e}_{-1} \otimes \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_{-1}\right), \\ &\mathbf{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_{-1} + 2\mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_{-1} \otimes \mathbf{e}_1\right), \end{aligned}$$

или в явном виде

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Базисные состояния удовлетворяют следующим ортогональным условиям:

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{T}_A \mathbf{T}_B) = 2\eta_{AB}, \quad \mathrm{tr}\,(\mathbf{T}_A J_\alpha) = 0, \quad \mathrm{tr}\,(J_\alpha J_\beta) = 2\eta_{\alpha\beta}.$$

Условия полноты имеют вид

$$\frac{1}{10} \sum_A (\mathbf{T}_A)_{il} (\mathbf{T}_A)_{km} + (I_0)_{il} (I_0)_{km} = \frac{1}{4} \left(\delta_{im}\delta_{lk} + \delta_{il}\delta_{mk} \right).$$

Алгебра коммутаторов и антикоммутаторов такова:

$$[\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B]_+ = \frac{4}{\sqrt{3}}\, \eta_{AB} I_0 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, d^{(2)}_{ABC}\, \mathbf{T}^C, \tag{202}$$

$$[\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B]_- = c^{(2)}_{AB\gamma} J^\gamma, \tag{203}$$

$$[J_\alpha, J_\beta]_+ = \frac{4}{\sqrt{3}}\, \eta_{\alpha\beta}\, I_0 + d^{(1)}_{\alpha\beta C}\, \mathbf{T}^C, \tag{204}$$

$$[J_\alpha, J_\beta]_- = c^{(1)}_{\alpha\beta\gamma} J^\gamma, \tag{205}$$

$$[J_\alpha, \mathbf{T}_B]_+ = d^{(1)}_{\alpha\gamma B} J^\gamma, \tag{206}$$

$$[J_\alpha, \mathbf{T}_B]_- = c^{(2)}_{BD\alpha} \mathbf{T}^D. \tag{207}$$

Коэффициенты $c^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}$ полностью антисимметричны с нормировкой $c^{(1)}_{-+0} = 1$.

Коэффициенты $d^{(1)}_{\alpha\beta C}, d^{(2)}_{ABC}$ и $c^{(2)}_{AB\gamma}$ приведены в табл. 1–3.

Таблица 1. **Коэффициенты** $d^{(1)}_{\alpha\beta C}$

α	–1	–1	–1	0	0	0	1	1	1
β	1	0	–1	1	0	–1	1	0	–1
C	0	1	2	–1	0	1	–2	–1	0
$d^{(1)}_{\alpha\beta C}$	$-1/\sqrt{3}$	1	$-\sqrt{2}$	1	$-2/\sqrt{3}$	1	$-\sqrt{2}$	1	$-1/\sqrt{3}$

Отметим, что

$$d^{(1)}_{\alpha\beta A} = (\mathbf{T}_A)^{ij}\, e^i_\alpha e^j_\beta.$$

Таблица 2. **Коэффициенты** $c^{(2)}_{AB\gamma}$

A	–2	–2	–1	–1	–1	0	0	1	1	1	2	2
B	2	1	2	1	0	1	–1	0	–1	–2	–1	–2
γ	0	1	–1	0	1	–1	1	–1	0	1	–1	0
$c^{(2)}_{AB\gamma}$	–2	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	–1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2

Заметим, что коэффициенты $c^{(2)}_{AB\gamma}$ определяются 5-мерными генераторами представления $SO(3)$, приведенными ниже:

$$c^{(2)}_{AB\gamma} = i(\mathbf{J}^{\gamma})_{AB}. \tag{208}$$

Таблица 3. **Коэффициенты** $d^{(2)}_{ABC}$

A	B	C	$d^{(2)}_{ABC}$
-2	2	0	-1
-2	1	1	$\sqrt{3/2}$
-2	0	2	-1
-1	2	-1	$\sqrt{3/2}$
-1	1	0	$-1/2$
-1	0	1	$-1/2$
-1	-1	2	$\sqrt{3/2}$

A	B	C	$d^{(2)}_{ABC}$
1	1	-2	$\sqrt{3/2}$
1	0	-1	$-1/2$
1	-1	0	$-1/2$
1	-2	1	$\sqrt{3/2}$
2	0	-2	-1
2	-1	-1	$\sqrt{3/2}$
2	-2	0	-1

A	B	C	$d^{(2)}_{ABC}$
0	2	-2	-1
0	1	-1	$-1/2$
0	0	0	1
0	-1	1	$-1/2$
0	-2	2	-1

В тексте были использованы следующие генераторы 5-мерного представления $O(3)$:

$$\left(\mathbf{J}^{+}\right)_A^{\ B} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\mathbf{J}^{-}\right)_A^{\ B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\mathbf{J}^0\right)_A^{\ B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Декартовы компоненты $\left(\mathbf{J}^i\right)_A^{\ B} := \eta^{\alpha\beta} e^i_\alpha \left(\mathbf{J}_\beta\right)_A^{\ B}$ удовлетворяют $SO(3)$-алгебре:

$$[\mathbf{J}_a, \mathbf{J}_b] = i\epsilon_{abc}\mathbf{J}_c \tag{209}$$

и генерируют конечные вращения в 5-мерном пространстве с помощью оператора

$$D(\psi, \theta, \phi) = \mathrm{e}^{-i\psi \mathbf{J}_3}\, \mathrm{e}^{-i\theta \mathbf{J}_1}\, \mathrm{e}^{-i\phi \mathbf{J}_3}. \tag{210}$$

Приложение В

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ

Каноническое преобразование к диагональным и угловым переменным. Пусть реальный симметрический тензор $S_{ij} = S_{ji}$ приведен к главным осям симметрии

$$S = R^T(\chi)\, \mathrm{diag}\, ||\, \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3\, ||\, R(\chi) \tag{211}$$

ортогональной матрицей $R \in SO(3)$, параметризованной углами Эйлера χ_1, χ_2, χ_3. Рассмотрим (211) как точечное преобразование от шести независимых переменных $S_{ij}, i < j$, к собственным значениям ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 матрицы S и углам χ_1, χ_2, χ_3. Выражения для соответствующих канонически сопряженных импульсов π_1, π_2, π_3 и $p_{\chi_1}, p_{\chi_2}, p_{\chi_3}$ находим с помощью производящей функции

$$F_3(P, \phi, \chi) = \int d^3x\, \mathrm{tr}\, \left[P\, S(\chi, \phi)\right]. \tag{212}$$

В результате импульс матричного поля P_{ij} может быть представлен в следующей удобной для расчетов матричной форме:

$$P(x) = R^T(x) \left(\sum_{s=1}^{3} \pi_s(x)\, \overline{\alpha}_s + \sum_{s=1}^{3} \mathcal{P}_s(x)\, \alpha_s \right) R(x). \tag{213}$$

В (213) введено обозначение

$$\mathcal{P}_i(x) = -\frac{1}{2} \frac{\xi_i(x)}{\phi_j(x) - \phi_k(x)} \quad \text{(циклические перестановки } i \neq j \neq k) \tag{214}$$

и использован ортогональный базис $\alpha_A = (\overline{\alpha}_i,\ \alpha^i)$ разложения симметрических матриц следующего вида:

$$\overline{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы α_A удовлетворяют условиям ортонормальности:

$$\operatorname{tr}(\overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_j) = \delta_{ij}, \quad \operatorname{tr}(\alpha_i\alpha_j) = 2\delta_{ij}, \quad \operatorname{tr}(\overline{\alpha}_i\alpha_j) = 0. \tag{215}$$

Величины ξ_i в (214) соответствуют правоинвариантным векторным полям на группе $SO(3)$. В терминах канонических переменных, углов χ_i и сопряженных им импульсов p_{χ_i}, имеем

$$\xi_1^R = -\sin\chi_1 \cot\chi_2\, p_{\chi_1} + \cos\chi_1\, p_{\chi_2} + \frac{\sin\chi_1}{\sin\chi_2}\, p_{\chi_3}, \tag{216}$$

$$\xi_2^R = \cos\chi_1 \cot\chi_2\, p_{\chi_1} + \sin\chi_1\, p_{\chi_2} - \frac{\cos\chi_1}{\sin\chi_2}\, p_{\chi_3}, \tag{217}$$

$$\xi_3^R = p_{\chi_1}. \tag{218}$$

Магнитное поле в терминах диагональных и угловых переменных. Переход к главным осям (211) симметрического поля S соответствует выбору неголономного базиса

$$S = \sum_{a=1}^{3} e_a\, \phi_a\, \omega_a, \tag{219}$$

в котором 1-формы ω_i

$$\omega_i := R_{ij}\,(\chi(x))\, \mathrm{d}x_j, \quad i = 1, 2, 3, \tag{220}$$

и базисные элементы e_a алгебры $su(2)$

$$e_a := R_{ab}(\chi(x))\, \tau_b, \quad a = 1, 2, 3, \tag{221}$$

определены в терминах ортогональной матрицы R_{ij}, приводящей S к диагональному виду. Векторные поля $X_i := R_{ij}\, \partial_j$, дуальные к 1-формам (220) $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$, действуя на элементы базиса e_a

$$X_i\, e_a = -\Gamma_{bia}\, e_b, \tag{222}$$

определяют 1-форму связности Γ

$$\Gamma_{aib} := \left(X_i R\, R^T\right)_{ab}. \tag{223}$$

В базисе (219) для компонент 2-формы кривизны $F^{(3)} = \mathrm{d}S + S \wedge S$ имеем

$$F^{(3)}_{aij} = \delta_{aj}\, X_i\, \phi_j - \delta_{ai}\, X_j\, \phi_i + \phi_i\, \Gamma_{aji} - \phi_j\, \Gamma_{aij} + \Gamma_{a[ij]}\, \phi_a + g\varepsilon_{aij}\, \phi_i\, \phi_j \quad \text{(нет сум.)}.$$

С помощью этих формул находим представление для симметрической

$$B^{(+)} = R^T(\chi) \sum_{i=1}^{3} (\beta_i \overline{\alpha}_i + b_i \alpha_i)\, R(\chi) \tag{224}$$

и антисимметрической

$$B^{(-)}_a = \frac{1}{2} R^T_{ai} \left(X_i(\phi_j + \phi_k) + (\phi_j - \phi_i)\Gamma_{ijj} + (\phi_k - \phi_i)\Gamma_{ikk}\right) \tag{225}$$

частей редуцированного хромомагнитного поля, где

$$\beta_i = g\phi_j\phi_k - (\phi_i - \phi_j)\Gamma_{ikj} + (\phi_i - \phi_k)\Gamma_{ijk}, \tag{226}$$

$$2\, b_i = X_i(\phi_j - \phi_k) - (\phi_i - \phi_j)\Gamma_{ijj} + (\phi_i - \phi_k)\Gamma_{ikk}. \tag{227}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* Пространство, время, материя / Пер. с нем. В. П. Визгина. М., 1996. С. 112.
2. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
3. *Вайнберг С.* Квантовая теория поля. Т. 1: Пер. с англ. / Под ред. В. Ч. Жуковского. М.: Физматлит, 2003.
4. *Wigner E. P.* On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149.
5. *Yang C. N., Mills R. L.* Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 192–195.
6. *Jackiw R.* Introduction to the Yang–Mills Theory // Rev. Mod. Phys. 1980. V. 52. P. 661–673.
7. *Ченг Т. П., Ли Л.-Ф.* Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М.: Мир, 1987.
8. *Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
9. *Рубаков В.* Калибровочные поля. М.: УРСС, 1999.

10. *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
11. *Sundermeyer K.* Constrained Dynamics. Lecture Notes in Physics. V. 169. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1982.
12. *Henneaux M., Teitelboim C.* Quantization of Gauge Systems. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1992.
13. *Faddeev L. D., Popov V. N.* Feynman Diagrams for the Yang–Mills Field // Phys. Lett. B. 1967. V. 25. P. 29–30.
14. *Фаддеев Л. Д.* Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов // ТМФ. 1969. Т. 1. С. 3–18.
15. *Goldstone J. Jackiw R.* Unconstrained Temporal Gauge for Yang–Mills Theory // Phys. Lett. B. 1978. V. 74. P. 81–84.
16. *Baluni V., Grossman B.* QCD without Gauge Field Constraints // Phys. Lett. B. 1978. V. 78. P. 226–230.
17. *Izergin A. G. et al.* On Gauge Fixing Conditions in the Yang–Mills Theory // Theor. Math. Phys. 1979. V. 38. P. 1–9.
18. *Das A., Kaku M., Townsend P. K.* Gauge Fixing Ambiguities, Flux Strings, and the Unconstrained Yang–Mills Theory // Nucl. Phys. B. 1979. V. 149. P. 109–122.
19. *Creutz M., Muzinich I. J., Tudron T. N.* Gauge Fixing and Canonical Quantization // Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 531–539.
20. *Christ N. H., Lee T. D.* Operator Ordering and Feynman Rules in Gauge Theories // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 939–958.
21. *Simonov Yu.* Gauge Invariant Formulation of $SU(2)$ Gluodynamics // Sov. J. Nucl. Phys. 1985. V. 41. P. 1014–1019.
22. *Simonov Yu.* QCD Hamiltonian in the Polar Representation // Sov. J. Nucl. Phys. 1985. V. 41. P. 835–841.
23. *Vlasov V. V. et al.* Canonical Quantization of Gauge Theories with Scalar Condensate and the Problem of Spontaneous Symmetry Breaking // Part. Nucl. 1987. V. 18. P. 5–38.
24. *Haller K.* Yang–Mills Theory and Quantum Chromodynamics in the Temporal Gauge // Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 1839–1845.
25. *Anishetty R.* Local Dynamics on Gauge Invariant Basis of Nonabelian Gauge Theories // Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1895–1896.
26. *Newman E. T., Rovelli C.* Generalized Lines of Force As the Gauge Invariant Degrees of Freedom for General Relativity and Yang–Mills Theory // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 1300–1303.
27. *Bauer M., Freedman D. Z., Haagensen P. E.* Spatial Geometry of the Electric Field Representation of Nonabelian Gauge Theories // Nucl. Phys. B. 1994. V. 428. P. 147–168;
    Haagensen P. E., Bauer M., Johnson K. Yang–Mills Fields and Riemannian Geometry // Nucl. Phys. B. 1995. V. 439. P. 597–616.

28. *Lunev F. A.* Four-Dimensional Yang–Mills Theory in Local Gauge Invariant Variables // Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 2281–2292.
29. *Lavelle M., McMullan D.* Constituent Quarks from QCD // Phys. Rep. 1997. V. 279. P. 1–65.
30. *Horan R., Lavelle M., McMullan D.* Charges in Gauge Theories // Pramana. 1998. V. 51. P. 317–355.
31. *Gogilidze S. A. et al.* Hamiltonian Reduction of $SU(2)$ Dirac–Yang–Mills Mechanics // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 7488–7500.
32. *Khvedelidze A. M., Pavel H.-P.* Unconstrained Hamiltonian Formulation of $SU(2)$ Gluodynamics // Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 105017.
33. *Khvedelidze A. M., Pavel H.-P., Röpke G.* Unconstrained $SU(2)$ Yang–Mills Theory with Topological Term in the Long-Wavelength Approximation With // Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 105013.
34. *Majumdar P., Sharatchandra H. S.* $(3+1)$-Dimensional Yang–Mills Theory As a Local Theory of Evolution of Metrics on Three Manifolds // Phys. Lett. B. 2001. V. 491. P. 199–202.
35. *Salmela A.* Function Group Approach to Unconstrained Hamiltonian Yang–Mills Theory // J. Math. Phys. 2005. V. 46. P. 102302.
36. *Khvedelidze A. M.* On the Hamiltonian Formulation of Gauge Theories in Terms of Physical Variables // J. Math. Sci. 2004. V. 119. P. 513–555.
37. *Уиттекер Э. Т.* Аналитическая динамика. М.: Гл. ред. техн.-теор. лит., 1937.
38. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
39. *Гогилидзе С. А., Первушин В. Н., Хведелидзе А. М.* Редукция в системах с локальной симметрией // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 1. С. 160–209.
40. *Yang C. N.* Selected Papers, 1945–1980. San Francisco: W. H. Freeman, 1982.
41. *Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.* Consistensy of the Canonical Reduction of General Relativity // J. Math. Phys. 1960. V. 1. P. 434–439.
42. *Narasimhan M. S., Ramadas T. R.* Geometry of $SU(2)$ Gauge Fields // Commun. Math. Phys. 1979. V. 67. P. 121–136.
43. *Mitter P. K.* Geometry of the Space of Gauge Orbits and the Yang–Mills Dynamical System // Lectures Given at Cargese Summer Inst. on Recent Developments in Gauge Theories, Cargese, France, Aug. 26 – Sept. 8, 1979 / Ed. 't Hooft G. N. Y., 1980.
44. *Прохоров Л. В.* Калибровочные условия и калибровочные преобразования // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27, вып. 3. С. 1397–1468.
45. *Jackson J. D., Okun L. B.* Historical Roots of Gauge Invariance // Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 663–680.
46. *Gribov V. N.* Quantization on Nonabelian Gauge Theories // Nucl. Phys. B. 1978. V. 139. P. 1–19.

47. *Singer I. M.* Some Remarks on the Gribov Ambiguity // Commun. Math. Phys. 1978. V. 60. P. 7–12.

48. *Матинян С. Г., Саввиди Г. К., Тер-Арутунян-Саввиди Н. Г.* Классическая механика Янга–Миллса. Нелинейные колебания цвета // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 830–838.

49. *Asatryan H. M., Savvidy G. K.* Configuration Manifold of Yang–Mills Classical Mechanics // Phys. Lett. A. 1981. V. 99. P. 290–292.

50. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

51. *Arms J. M.* Linearization Stability of Gravitational and Gauge Fields // J. Math. Phys. 1979. V. 20. P. 443.

52. *Moncrief V.* Reduction of the Yang–Mills Equations // Springer Lecture Notes in Math. 1980. V. 836. P. 276–291.

53. *Arms J. M.* Symmetry and Solution Set Singularities in Hamiltonian Field Theories // Acta Phys. Polon. B. 1986. V. 17. P. 499–523.

54. *Emmrich C., Romer H.* Orbifolds As Configuration Spaces of Systems with Gauge Symmetries // Commun. Math. Phys. 1990. V. 129. P. 69–94.

55. *Rudolph G., Schmidt M., Volobuev I. P.* On the Gauge Orbit Space Stratification: A Review // J. Phys. A. 2002. V. 35. P. R1–R50.

56. *Fuchs J., Schmidt M. G., Schweigert C.* On the Configuration Space of Gauge Theories // Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 107.

57. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.

58. *Zumino B.* Gauge Properties of Propagators in Quantum Electrodynamics // J. Math. Phys. 1960. V. 1. P. 1–7.

59. *Бьеркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистские квантованные поля. М.: Наука, 1978.

60. *Michel L., Radicati L.* The Geometry of the Octet // Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. 1973. V. 18. P. 185–214.

61. *O'Raifeartaigh L.* Group Structure of Gauge Theories. Cambridge.: Cambridge Univ. Press, 1986.

62. *Khvedelidze A. M. et al.* On Unconstrained $SU(2)$ Gluodynamics with Theta Angle // Eur. Phys. J. C. 2002. V. 24. P. 137–141.

63. *Khvedelidze A. M., Mladenov D. M.* Euler–Calogero–Moser System from $SU(2)$ Yang–Mills Theory // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 125016.

64. *Khvedelidze A. M., Mladenov D. M.* Generalized Calogero–Sutherland Models from Geodesic Motion on $GL(n, R)$ Group Manifold // Phys. Lett. A. 2002. V. 299. P. 522–530.

65. *Khvedelidze A. M., Mladenov D. M.* Classical mechanics on $GL(n, R)$ Group and Euler–Calogero–Sutherland Model // Yad. Fiz. 2002. V. 65. P. 1–6.

66. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.

67. *Whitehead J. H. C.* An Expression of Hopf's Invariant As an Integral // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1947. V. 33. P. 117–123.

68. *Woltjer L.* A Theorem on Force-Free Magnetic Fields // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1958. V. 44. P. 489–491.

69. *Moffat H.* The Degree of Knottedness of Tangled Vortex Lines // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. P. 117–129.

70. *Kuznetsov E. A., Mikhailov A. V.* On the Topological Meaning of Canonical Clebsch Variables // Phys. Lett. A. 1980. V. 77. P. 37–38.

71. *Saffman P. G.* Vortex Dynamics. Cambrigde: Cambridge Univ. Press, 1992.

72. *Jackiw R., Pi S. Y.* Creation and Evolution of Magnetic Helicity // Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 105015.

73. *Jackiw R., Nair V. P., Pi S. Y.* Chern–Simons Reduction and Non-Abelian Fluid Mechanics // Ibid. V. 62. P. 085018.

74. *Battye R. A., Sutcliffe P.* Solitons, Links and Knots // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1999. V. 455. P. 4305–4331.

75. *Faddeev L., Niemi A. J.* Partially Dual Variables in $SU(2)$ Yang–Mills Theory // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 1624–1627.

76. *Langmann E., Niemi A. J.* Towards a String Representation of Infrared $SU(2)$ Yang–Mills Theory // Phys. Lett. B. 1999. V. 463. P. 252–256.

77. *Procesi C., Schwarz G. W.* The Geometry of Orbit Spaces and Gauge Symmetry Breaking in Supersymmetric Gauge Theories // Phys. Lett. B. 1985. V. 161. P. 117–121.

78. *Procesi C., Schwarz G. W.* Inequalities Defining Orbit Space // Invent. Math. 1985. V. 81. P. 539–554.

79. *Khvedelidze A. M., Pavel H.-P.* On the Ground State of Yang–Mills Quantum Mechanics // Phys. Lett. A. 2000. V. 267. P. 96–100.

80. *Khvedelidze A. M., Pavel H.-P., Röpke G.* Unconstrained $SU(2)$ Yang–Mills Quantum Mechanics with Theta Angle // Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 025017.

81. *Anandan J., Aharonov Y.* Geometric Quantum Phase and Angles // Phys. Rev. D. 1988. V. 38. P. 1863–1870.

82. *Lancaster P.* Theory of Matrices. N. Y.; London: Acad. Press, 1969.