

## ТРЕТИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ВСЕЛЕННОЙ

*П. Б. Иванов\**, *С. В. Чернов*

Астрокосмический центр ФИАН, Москва

Изучаются квантованные решения уравнения Уилера–де Витта, описывающие замкнутый мир Фридмана–Робертсона–Уокера с  $\Lambda$ -членом и набором безмассовых скалярных полей. Показано, что в случае, когда  $\Lambda \ll 1$  и рассматривается стандартное вакуумное  $\text{in}$ -состояние для квантованного решения, волновая функция Вселенной ведет себя как стохастическое квазиклассическое поле при достаточно больших значениях масштабного фактора  $a$ , когда  $1 \ll a \ll \exp(2/3\Lambda)$  [1].

We study quantized solutions of the Wheeler–DeWitt equation describing a closed Friedmann–Robertson–Walker universe with a  $\Lambda$  term and a set of massless scalar fields. We show that when  $\Lambda \ll 1$  in the natural units and the standard in-vacuum state is considered, wave function of the Universe,  $\Psi$ , behaves as a random quasi-classical field at sufficiently large values of  $a$ . It is realized when  $1 \ll a \ll \exp(2/3\Lambda)$ .

PACS: 03.65.Pm; 04.60.Ds

### ВВЕДЕНИЕ

Один из возможных методов квантования гравитации основывается на каноническом квантовании уравнений Эйнштейна и анализе свойств возникающего уравнения Уилера–де Витта (УдВ) для волнового функционала Вселенной,  $\Psi$  [2, 3]. Когда  $\Psi$  рассматривают как  $c$ -число, возникают некоторые проблемы. Например, затруднительна вероятностная интерпретация, а также существует фундаментальная неопределенность выбора начальных (или граничных) условий для решений УдВ. Наиболее популярные правила выбора граничных условий приводят либо к туннелирующей волновой функции Виленкина [4], либо к волновой функции Хартля–Хокинга «без граничных условий» [5].

---

\*E-mail: pbi20@cam.ac.uk

Некоторые проблемы можно устранить, рассматривая  $\Psi$  как оператор,  $\Psi \rightarrow \hat{\Psi}$ . Это рассмотрение основывается на том, что УдВ имеет структуру гиперболического уравнения с переменной, определяющей элемент объема на пространственной гиперповерхности, играющей роль «времени». Поэтому само УдВ может быть канонически квантовано. Эта процедура называется «третичным квантованием». Для моделей Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ) волновой функционал становится функцией, зависящей от масштабного фактора  $a$  и амплитуд содержащихся в ФРУ Вселенной полей. Само уравнение УдВ сводится к уравнению Клейна–Гордона с зависящим от масштабного фактора потенциалом, который исчезает вблизи сингулярности, при стремлении  $a$  к нулю. В связи с этим стандартное вакуумное состояние для безмассового скалярного поля обычно выбирается как квантовое состояние системы. Оно называется in-состоянием по аналогии с формализмом квантовых полей в искривленных пространствах-времени [6]. С другой стороны, существует естественное вакуумное out-состояние, которое связано с отсутствием квазиклассических решений УдВ при больших значениях  $a$ . Тот факт, что в некоторых моделях эти состояния не совпадают, интерпретируется как рождение вселенных из ничего.

В статье предлагается другая интерпретация появления «классических» свойств системы в рамках формализма третичного квантования. Рассмотрена модель ФРУ, содержащая  $\Lambda$ -член и  $n$  безмассовых скалярных полей,  $\varphi_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ . Показано, что в диапазоне достаточно больших масштабных факторов квантовая волновая функция ведет себя как стохастическая классическая переменная.

Везде ниже будем считать, что постоянная Планка, гравитационная постоянная и скорость света равны единице.

## 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ

В случае нашей модели уравнение УдВ принимает вид [8]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n + \frac{\Lambda}{3} \exp(6t) - \exp(4t) \right) \hat{\Psi} = 0, \quad (1)$$

где  $t = \ln a$  и  $a$  — масштабный фактор,  $\Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i^2}$  и  $\hat{\Psi}$  — волновая функция Вселенной. Согласно процедуре третичного квантования мы трактуем волновую функцию как оператор, подчиняющийся стандартным коммутационным соотношениям:

$$\left[ \hat{\Psi}(t, x), \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}^\dagger(t, x') \right] = i\delta^n(x - x'), \quad (2)$$

где  $[\dots]$  — коммутатор,  $x$  представляет  $n$ -мерный вектор с компонентами  $\varphi_i$ ,  $\delta^n(x)$  —  $n$ -мерная функция Дирака и знак « $\dagger$ » здесь и далее обозначает эрмитово сопряжение. Уравнение (1) представляет из себя уравнение Клейна–Гордона с потенциалом, зависящим от времени:

$$V(t) = \frac{\Lambda}{3} \exp(6t) - \exp(4t). \quad (3)$$

Решение уравнения (1) может быть представлено в стандартной форме

$$\hat{\Psi} = \int d^n k \left( U_\omega e^{ik \cdot x} \hat{a}_k + U_\omega^* e^{-ik \cdot x} \hat{b}_k^\dagger \right), \quad (4)$$

где  $k$  —  $n$ -мерный вектор;  $*$  — комплексное сопряжение и  $\omega = \sqrt{k \cdot k}$ . Функция  $U_\omega$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{U}_\omega + (\omega^2 + V)U_\omega = 0, \quad (5)$$

где точка означает дифференцирование по времениподобной переменной  $t$ . Очевидно, что  $U_\omega = U_{-\omega}$  и условия нормировки имеют вид

$$U_\omega \dot{U}_\omega^* - \dot{U}_\omega U_\omega^* = \frac{i}{(2\pi)^n}. \quad (6)$$

Операторы  $\hat{a}_k$  и  $\hat{b}_k$  подчиняются стандартным коммутационным соотношениям для операторов рождения и уничтожения

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta^n(k - k'), \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta^n(k - k'). \quad (7)$$

Остальные коммутационные соотношения равны нулю.

Напомним, что вблизи сингулярности, при  $t \rightarrow -\infty$ , потенциал  $V$  стремится к нулю и уравнение (1) формально описывает безмассовое скалярное поле в пространстве Минковского. Таким образом, когда  $U_\omega$  является собственной функцией времениподобного вектора Киллинга в эффективном  $(n + 1)$ -мерном пространстве-времени  $U_\omega \propto e^{-i\omega t}$ , вакуумное состояние  $|0\rangle$ , определенное таким способом, что  $\hat{a}_k|0\rangle = 0$  и  $\hat{b}_k|0\rangle = 0$  для всех  $k$ , является стандартным вакуумным состоянием для безмассового скалярного поля в этом пределе. Предполагается, что наша система находится в этом квантовом состоянии.

Также будем использовать другое представление для поля  $\hat{\Psi}$ , определенное с помощью преобразования Фурье:

$$\hat{\Psi} = \int d^n k e^{ik \cdot x} \hat{\Psi}_\omega, \quad \hat{\Psi}_\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( U_\omega (\hat{c}_{1,k} + i\hat{c}_{2,k}) + U_\omega^* (\hat{c}_{1,k}^\dagger + i\hat{c}_{2,k}^\dagger) \right), \quad (8)$$

где вводятся операторы рождения и уничтожения

$$\hat{c}_{1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k + \hat{b}_{-k}), \quad \hat{c}_{2,k} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{b}_{-k} - \hat{a}_k), \quad (9)$$

которые, очевидно, подчиняются стандартным коммутационным соотношениям.

Гамильтониан может быть выражен через  $\hat{\Psi}_\omega$  следующим образом:

$$\hat{H} = (2\pi)^n \int d^n k \left( \hat{P}_\omega \hat{P}_\omega^\dagger + (\omega^2 + V) \hat{\Psi}_\omega \hat{\Psi}_\omega^\dagger \right), \quad \hat{P}_\omega = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}_\omega^\dagger. \quad (10)$$

Разделим поле  $\hat{\Psi}_\omega$  на действительную и мнимую части:  $\hat{\Psi}_\omega = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^n}} \times (\hat{q}_{1,\omega} + i\hat{q}_{2,\omega})$ , где  $\hat{q}_{1,\omega}$  и  $\hat{q}_{2,\omega}$  — эрмитовы операторы, коммутирующие друг с другом. Тогда

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{2} \int d^n k \left( \hat{p}_{\alpha,\omega}^2 + (\omega^2 + V) \hat{q}_{\alpha,\omega}^2 \right), \quad \hat{p}_{\alpha,\omega} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{q}_{\alpha,\omega}. \quad (11)$$

Выражение (11) говорит нам о том, что задача может быть сформулирована посредством рассмотрения бесконечного набора осцилляторов с частотой, зависящей от времени. Основываясь на аналогии с осцилляторами, вводим новые, зависящие от времени «операторы рождения и уничтожения»,  $\hat{d}_k(t)$  и  $\hat{d}_k^\dagger(t)$ , согласно правилу

$$\hat{d}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\Omega(t_0)} \hat{q}_k + \frac{i}{\sqrt{\Omega(t_0)}} \hat{p}_k \right), \quad \Omega(t_0) = \sqrt{\omega^2 + V(t_0)}, \quad (12)$$

где потенциал  $V$  берется при фиксированном моменте времени,  $t_0$ , и, таким образом,  $\Omega(t_0)$  не зависит от времени  $t$ . Также, для простоты, везде далее мы берем  $t_0$  так, что  $\omega^2 + V(t_0) > 0$ , и, соответственно,  $\Omega(t_0)$  действительное. Операторы (12) подчиняются стандартным коммутационным соотношениям. Таким образом, они могут быть связаны с операторами  $\hat{c}_k$  посредством преобразования Боголюбова:

$$\hat{d}_k(t) = \alpha_\omega \hat{c}_k + \beta_\omega \hat{c}_k^\dagger, \quad |\alpha_\omega|^2 - |\beta_\omega|^2 = 1. \quad (13)$$

Явная форма коэффициентов Боголюбова имеет вид

$$\alpha_\omega = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{2}} \left( \sqrt{\Omega(t_0)} U_\omega + \frac{i\dot{U}_\omega}{\sqrt{\Omega(t_0)}} \right), \quad (14)$$

$$\beta_\omega = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{2}} \left( \sqrt{\Omega(t_0)} U_\omega^* + \frac{i\dot{U}_\omega^*}{\sqrt{\Omega(t_0)}} \right).$$

Новое вакуумное состояние определяется условием  $d_k(t_0)|0\rangle_{\text{ad}} = 0$ . Это так называемое адиабатическое вакуумное состояние  $|0\rangle_{\text{ad}}$  (см. [6]).

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ УДВ

В общем случае решение уравнения (5) может быть получено аналитически, только когда либо первый, либо второй член в выражении для потенциала  $V$  в уравнении (3) пренебрежим. Это соответствует пренебрежению влияния либо  $\Lambda$ -члена, либо пространственной кривизны. В общем случае решение может быть получено либо численно, либо приближенными методами. В пределе  $\Lambda \ll 1$  можно найти приближенные аналитические решения методом, основанным на ВКБ-приближении, которые используются ниже. Численные решения будут использоваться только для проверки справедливости наших аналитических методов.

Рассмотрим случай, когда частота  $\omega \ll \omega_{cr}$ , где  $\omega_{cr} = \sqrt{-V_{\min}(t_{\min})} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\Lambda}$ , и  $V_{\min}(t_{\min}) = -\frac{4}{3\Lambda^2}$  — минимальное отрицательное значение потенциала  $V$ , соответствующее времени  $t_{\min} = (1/2) \ln(2/\Lambda)$ . Используя ВКБ-приближение, получаем, что решение уравнения (5) пропорционально

$$\frac{1}{\sqrt{S}} e^{iS(t)}, \quad S = \pm \int dt \sqrt{\omega^2 + V}, \quad |S| \gg 1. \quad (15)$$

В запрещенной области фаза  $S$  мнимая, следовательно, решение имеет растущие и экспоненциально спадающие ветви. В разрешенной области фаза  $S$  действительная и решение имеет осциллирующее поведение. ВКБ-приближение нарушается, когда время  $t$  достаточно близко к моменту времени  $t_* = (1/2) \ln(3/\Lambda)$  так, что  $V(t_*) = 0$ . Однако в окрестности этого момента времени можно упростить уравнение (5) и найти соответствующее точное решение упрощенного уравнения.

Интервал  $-\infty < t < +\infty$  разделим на четыре перекрывающиеся области: 1) область малых  $t$ , где доминирует член с кривизной, 2) классически запрещенную область, 3) область в окрестности  $t = t_*$  и 4) классически разрешенную область. Эти области совместно с потенциалом показаны на рис. 1.

Рассмотрим решение в каждой области отдельно.

В области 1) решение может быть записано в виде

$$U_\omega \approx C_\omega I_{-i\frac{\omega}{2}} \left( \frac{e^{2t}}{2} \right), \quad C_\omega = 2^{-i\omega} \frac{\Gamma \left( 1 - \frac{i\omega}{2} \right)}{\sqrt{2(2\pi)^{n\omega}}}, \quad (16)$$

где  $I_\nu(x)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода;  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Рассматривая достаточно большие времена  $t$  и раскладывая

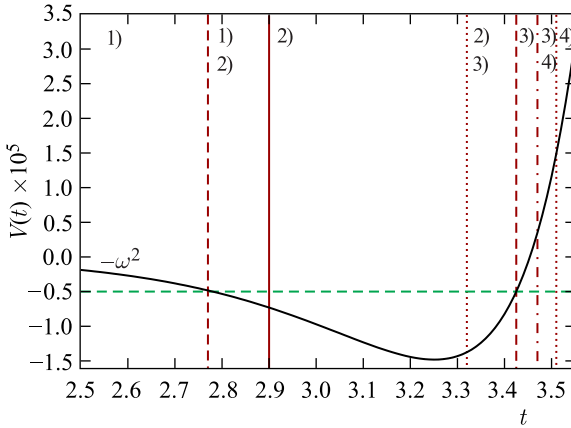


Рис. 1. График зависимости потенциала от времени при  $\Lambda = 3 \cdot 10^{-3}$ . Вертикальные сплошная, пунктирная, штриховая и штрихпунктирная линии показывают границы областей

функцию Бесселя в ряд, получаем из (16)

$$U_\omega \approx \frac{C_\omega}{\sqrt{\pi}} e^{-t} \left( \exp\left(\frac{e^{2t}}{2}\right) + i \sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \exp\left(-\frac{e^{2t}}{2}\right) \right). \quad (17)$$

Решение (17) может быть согласовано с ВКБ-решением (15) во временном интервале области 2), где время  $t$  меньше  $t < t_{\min}$ , но достаточно большое, чтобы выполнялось условие  $\omega \ll \sqrt{-V}$ .

Сшивая соответствующие решения, окончательно получаем решение в области 2)

$$U_\omega \approx \frac{C_\omega}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t}}{\phi_-^{1/4}} \left( \exp\left[\frac{1}{\Lambda}(1 - \phi_-^{3/2})\right] + i \sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \exp\left[-\frac{1}{\Lambda}(1 - \phi_-^{3/2})\right] \right), \quad (18)$$

где  $\phi_- = 1 - \frac{\Lambda^2 \omega^2}{9} - \frac{\Lambda}{3} e^{2t}$ .

Рассмотрим область 3), где  $t \sim t_*$ . Вводим новую переменную  $z = \frac{18^{1/3}}{\Lambda^{2/3}} \left( t_* - \frac{\omega^2 \Lambda^2}{18} - t \right)$  и после упрощения (5) получаем уравнение Эйри

$$\frac{d^2}{dz^2} U_k - z U_k = 0. \quad (19)$$

Решение уравнения (19) сшивается с (18) в области, где выполняются оба условия:  $\left(t_* - \frac{\omega^2 \Lambda^2}{18} - t\right) / t_* \ll 1$  и  $z \gg 1$ . Это дает решение в виде

$$U_\omega = C_\omega 2^{-1/6} \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/3} \left(2e^{\frac{1}{\Lambda}} Ai(z) + i \sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) e^{-\frac{1}{\Lambda}} Bi(z)\right), \quad (20)$$

где  $Ai(z)$  и  $Bi(z)$  — функции Эйри первого и второго рода соответственно.

Решение может быть аналитически продолжено в область  $z < 0$ . Допуская, что  $z_1 \equiv -z \gg 1$ , получаем

$$U_\omega = \frac{2^{-1/6} C_\omega}{\sqrt{\pi} z_1^{1/4}} \left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/3} \left(2e^{\frac{1}{\Lambda}} \sin\left(\frac{2}{3} z_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) e^{-\frac{1}{\Lambda}} \cos\left(\frac{2}{3} z_1^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (21)$$

Согласовывая решение (21) с решением (15) в классически разрешенной области 4), используя ту же самую технику, что и в (20) и (21), и принимая во внимание, что  $S = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\Lambda}{3} e^{2t} + \frac{\Lambda^2 \omega^2}{9} - 1\right)^{3/2}$ , получаем

$$U_\omega = \frac{C_\omega}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t}}{\phi_+^{1/4}} \left(2e^{\frac{1}{\Lambda}} \sin\left(\frac{\phi_+^{3/2}}{\Lambda} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) e^{-\frac{1}{\Lambda}} \cos\left(\frac{\phi_+^{3/2}}{\Lambda} + \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (22)$$

где  $\phi_+ \equiv -\phi_- = \frac{\Lambda}{3} e^{2t} + \frac{\Lambda^2 \omega^2}{9} - 1$ .

Выражения (16), (18), (20) и (22) представляют окончательные решения  $U_\omega$  в областях 1)–4) соответственно.

### 3. КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА НАШЕЙ МОДЕЛИ

В этом разделе мы явно вычислим коэффициент Боголюбова (14) в пределах  $t_0 \rightarrow \pm\infty$  и, следуя работе [9], функцию Вигнера нашего квантового состояния.

**3.1. Вычисление числа родившихся вселенных.** Количество вселенных, произведенных при временах  $t \rightarrow \infty$  с заданными интегралами движения, определяемыми величиной  $k$ , пропорционально квадрату коэффициента Боголюбова  $\beta$ ,

$$|\beta_\omega|^2 = \frac{(2\pi)^n}{2} \left( \Omega(t_0)U_\omega U_\omega^* + \Omega^{-1}(t_0)\dot{U}_\omega \dot{U}_\omega^* \right) - \frac{1}{2}, \quad (23)$$

где использовались (6) и (14).

Для того, чтобы получить  $|\beta|^2$  явно, предположим, что  $t = t_0 \rightarrow \infty$ . Тогда  $\Omega(t_0) \approx \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} e^{3t}$  и  $\phi_+ \approx \frac{\Lambda}{3} e^{2t}$ . Подставляя это в (22) и результат в (23), окончательно получаем

$$|\beta_\omega|^2 = \frac{1}{8 \sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \left( 2 e^{\frac{1}{\Lambda}} - \sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) e^{-\frac{1}{\Lambda}} \right)^2. \quad (24)$$

Уравнение (24) показывает, что  $|\beta_\omega|^2 \propto e^{\frac{2}{\Lambda}}$ , когда  $\omega \ll \omega_{cr}$ . Этот результат был получен в [7] качественными методами. На рис. 2 показан график зависимости  $|\beta_\omega|^2$  от частоты. Можно видеть хорошее согласие численных и аналитических результатов при малых  $\omega$ . Когда  $\omega \sim \omega_{cr}$ , численные и аналитические результаты отличаются на несколько порядков.

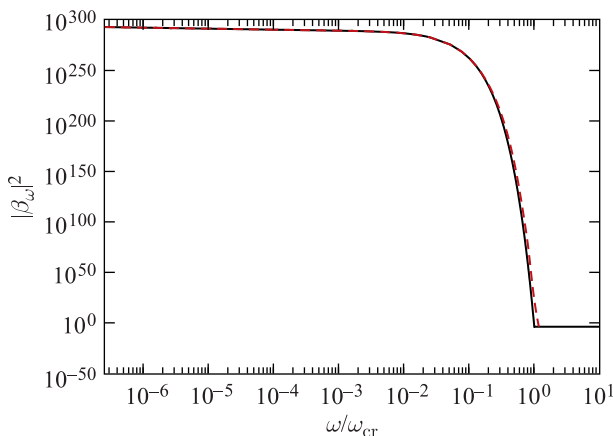


Рис. 2. Квадрат коэффициента Боголюбова  $\beta_\omega$  в зависимости от частоты  $\omega/\omega_{cr}$  для  $\Lambda = 3 \cdot 10^{-3}$ . Сплошная и штриховая линии показывают численные и аналитические (24) результаты соответственно



**3.2. Функция Вигнера.** Допустим, что квантовое поле  $\Psi^\dagger$  квантуется в ящике. Это допущение не влияет на выводы. Тогда выражение (11) показывает, что наша модель сводится к дискретному набору осцилляторов с частотой, зависящей от времени, и различными значениями  $k$  и  $\alpha$ . Функция Вигнера, соответствующая волновым функциям каждого из этих осцилляторов, имеет вид

$$W(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi_S^*(q + y) \Psi_S(q - y) e^{2ipy}, \quad (25)$$

где  $c$ -числа  $p$  и  $q$  являются канонически сопряженными импульсом и координатой. Отметим, что координата имеет физический смысл амплитуды отдельной гармоники квантованной волновой функции Вселенной.  $\Psi_S(q)$  — волновая функция отдельного осциллятора в представлении Шредингера, индексы  $k$ ,  $\alpha$  и  $\omega$  опущены.

Для того, чтобы найти эволюцию  $\Psi_S(q)$ , заметим, что в представлении Шредингера операторы  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$  имеют вид  $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial q}$  и  $\hat{q} = q$ . С другой стороны,  $\Psi_S(q)$  соответствует вакуумному состоянию и  $\hat{c}\Psi_S(q) = 0$ . Положив  $\Omega(t_0) = \omega$  в (12), (13), выразим  $\hat{c}$  через  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$ . В результате получаем

$$\left(\frac{d}{dq} + Dq\right) \Psi_S(q) = 0, \quad D = \omega \left(\frac{\alpha^* - \beta}{\alpha^* + \beta}\right). \quad (26)$$

То же самое уравнение было получено в [9]. Когда  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\Psi_S(q)$  стремится к вакуумному состоянию осциллятора с частотой  $\omega$ . Тогда

$$\Psi_S(q) = \left(\frac{K}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{Dq^2}{2}\right), \quad K = D + D^*, \quad (27)$$

и, подставляя (27) в (25), получаем

$$W(p, q) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-\left(\frac{Kq^2}{2} + \frac{(2p + Rq)^2}{2K}\right)\right], \quad R = i(D^* - D). \quad (28)$$

Когда  $K \rightarrow 0$ , распределения (28) имеют резкий пик возле  $2p + Rq = 0$ .

Можно показать, что для  $a \gg 1$  условие  $2p + Rq = 0$  приблизительно выполняется на классических уравнениях движения и, таким образом, функция Вигнера описывает пучок квазиклассических траекторий с распределенной по закону Гаусса координатой. Оказывается, что в случае  $1 \ll t \ll t_{cr}$  моды поля  $\Psi$  находятся, в основном, в режиме, в котором  $2p + Rq \cong 0$ , и, таким образом, представляют собой квазиклассические величины со случайным значением координаты, причем плотность вероятности нахождения определенного значения координаты подчиняется гауссовому закону.

#### 4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ВСЕЛЕННОЙ

Как обсуждалось в предыдущем разделе, когда  $1 \ll t \ll t_{cr}$ ,  $\hat{\Psi}$  может быть приблизительно представлена как случайное  $c$ -число:

$$\Psi_{qc} = \int d^n k (U_\omega e^{ik \cdot x} a_k + U_\omega^* e^{-ik \cdot x} b_k^*), \quad (29)$$

где все величины являются  $c$ -числами. Величины  $a_k$  и  $b_k$  являются случайными, они имеют гауссово распределение со статистическими средними

$$\langle a_k a_{k'}^* \rangle = \delta^n(k - k'), \quad \langle b_k b_{k'}^* \rangle = \delta^n(k - k'), \quad (30)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначает статистически среднее, а все остальные корреляторы равны нулю.

Вычислим статистическое среднее квадрата  $\Psi_{qc}$ ,  $\mathcal{P} = \langle \Psi_{qc} \Psi_{qc}^* \rangle$ :

$$\mathcal{P}_* = C_n \exp\left(\frac{2}{\Lambda} - 3t\right) \sin^2 \phi, \quad C_n = \frac{(2^n - 1)(n - 1)! \zeta(n)}{2^{n-3} \pi^{\frac{3}{2}n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{1/2}, \quad (31)$$

где  $\zeta(n)$  — дзета-функция Римана. Выражение (31) совпадает с квадратом модуля волновой функции замкнутой Вселенной, содержащей лямбда-член, полученной в подходе Харгля–Хокинга [5], см. [3].

В работе [1] показано, что задание стохастической волновой функции (29) формально эквивалентно описанию системы в терминах матрицы плотности, и, таким образом, в нашем подходе, при достаточно больших, но не экспоненциально больших значениях масштабного фактора состояние Вселенной описывается матрицей плотности с диагональными элементами, являющимися  $c$ -числами.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показали в рамках третичного квантования модели замкнутого мира ФРУ, содержащей малый лямбда-член и  $n$  безмассовых скалярных полей, что оператор волновой функции проявляет свойства классической случайной функции при  $a \gg 1$ , но  $a \ll \exp(2/3\Lambda)$ , при условии, что система находится в естественном вакуумном  $\text{in}$ -состоянии. Именно, когда  $1 \ll a \ll \exp(2/3\Lambda)$ , оператор волновой функции можно трактовать как классическое случайное поле со средней величиной, пропорциональной волновой функции Харгля–Хокинга. Отметим, что когда  $a \gg \exp(2/3\Lambda)$ , как классическое случайное поле можно трактовать производную волновой функции, см. [1].

Задание случайной волновой функции формально эквивалентно описанию системы в терминах матрицы плотности, и, таким образом, в отличие от предыдущих исследований, наш подход приводит к смешанному состоянию Вселенной.

Мы предполагаем, что сходные свойства будут проявлять решения третично квантованного УдВ в любой модели в мини-суперпространстве, для которой имеет место экспоненциально большое «рождение вселенных из ничего».

Работа была поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-6595.2016.2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ivanov P., Chernov S. V.* Stochastic Quasiclassical Wave Function of the Universe from the Third Quantization Procedure // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 92. 063507.
2. *DeWitt B. S.* Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory // *Phys. Rev.* 1967. V. 160. P. 1113.
3. *Kiefer C.* Quantum Gravity. 2nd Ed. Oxford Univ. Press, 2007.
4. *Vilenkin A.* Quantum Creation of Universes // *Phys. Rev. D.* 1984. V. 30. P. 509.
5. *Hartle J. B., Hawking S. W.* Wave Function of the Universe // *Phys. Rev. D.* 1983. V. 28. P. 2960.
6. *Birrell N. D., Davies P. C. W.* Quantum Fields in Curved Space. Chicago Univ. Press, 1982.
7. *Rubakov V. A.* On Third Quantization and the Cosmological Constant // *Phys. Lett. B.* 1988. V. 214. P. 503.
8. *Abe S.* Fluctuations around the Wheeler–DeWitt Trajectories in Third-Quantized Cosmology // *Phys. Rev. D.* 1993. V. 47. P. 718.
9. *Polarski D., Starobinsky A. A.* Semiclassicality and Decoherence of Cosmological Perturbations // *Class. Quant. Grav.* 1996. V. 13. P. 377.