

## ТЕРАГЕРЦОВЫЕ СОЛИТОНЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

*А. Н. Бугай* \*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	185
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ	187
Оптическое выпрямление лазерных импульсов	187
Моделирование генерации терагерцовых импульсов	190
Оптико-терагерцовые солитоны	197
ДЕФОРМАЦИИ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ	202
Акустика пикосекундных импульсов	202
Структурные переходы в цепи ДНК	210
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	218
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	219

---

\*E-mail: bugay@jinr.ru

## ТЕРАГЕРЦОВЫЕ СОЛИТОНЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

*А. Н. Бугай* \*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Проведен обзор теоретических моделей, описывающих формирование и распространение электромагнитных и акустических широкополосных импульсов солитонной природы в конденсированных средах в терагерцовом диапазоне частот. Проанализированы различные типы солитонов, а также способы управления их параметрами за счет модификации нелинейной среды. Рассмотрены нелинейные молекулярные возбуждения в биополимерах, частоты которых попадают в терагерцовый диапазон. Обсуждается механизм их взаимодействия с внешними полями резонансной частоты.

The theoretical models describing the formation and propagation of electromagnetic and acoustic broadband pulses of soliton nature in condensed media in the terahertz frequency range are reviewed. Various types of solitons are analyzed, as well as ways to control their parameters by modifying a nonlinear medium. Nonlinear molecular excitations in biopolymers whose frequencies fall into the terahertz range are considered. The mechanism of their interaction with external fields of the resonant frequency is discussed.

PACS: 05.45.Yv; 07.57.Hm; 42.50.Md; 43.35.+d; 63.20.-e; 87.15.ht

### ВВЕДЕНИЕ

Излучение терагерцового диапазона частот сегодня находит множество применений в спектроскопии и диагностике материалов, обнаружении взрывчатых веществ, астрономии, системах связи и обработки изображений, биологии и медицине [1]. Следует отметить, что диапазон волн с частотами 0,1–10 ТГц, т.е. длинами волн порядка 0,01–1 мм, оставался сравнительно малоизученным в связи с трудностью его получения. Это связано с тем, что традиционные источники когерентных ИК-излучения (лазеры) и микроволнового излучения (вакуумная электроника) плохо подходят для генерации электромагнитных волн в данном диапазоне. В случае лазеров это связано со

---

\*E-mail: bugay@jinr.ru

сложностью поддержания инверсии квантовых уровней из-за тепловых эффектов (кванту 1 ТГц соответствует температура примерно 47 К), а в случае электронных приборов — с ограничением на время пролета электронов.

Использование релятивистских электронов в ускорительных системах позволяет решить последнюю проблему. Генерация наиболее интенсивных терагерцовых импульсов в большинстве установок [2–4] происходит по следующему принципу. Фемтосекундный лазерный импульс запускают в мишень для генерации сверхкороткого электронного пучка. После ускорения до релятивистской скорости электронный пучок тормозится в металлической мишени или подается в накопитель с магнитным полем, что и приводит к генерации когерентного терагерцового излучения тормозной или синхротронной природы соответственно.

В последние годы намечился существенный прогресс в создании компактных источников, основанных на использовании нелинейных схем преобразования частоты излучения мощных фемтосекундных лазеров видимого и ИК-диапазонов [5, 6]. Одним из ключевых нелинейных эффектов здесь является оптическое выпрямление [7]. Сущность данного явления состоит в возникновении в квадратично-нелинейной среде при прохождении через нее интенсивного оптического импульса нелинейной поляризации, повторяющей форму огибающей интенсивности данного импульса [8]. Частота излучения в таком случае будет определяться длительностью всплеска поляризации. Таким образом, лазерный импульс длительностью  $\sim 100$  фс способен породить излучение с частотой  $\sim 1$  ТГц, т. е. на разности крайних частот своего широкого спектра.

Прогресс в лазерной технике в последние годы привел к развитию пикосекундной акустики. При поглощении интенсивного ультракороткого лазерного импульса металлической пленкой, помещенной на исследуемый образец, часть переданной энергии идет на формирование в нем импульса упругой деформации (см. обзор [9]). В последние годы получены широкополосные акустические импульсы со столь малыми длительностями как 200 фс, что соответствует пространственному масштабу 3 нм [10]. Ясно, что характерная спектральная ширина таких сигналов захватывает терагерцовую область частот. Это открывает новые возможности по исследованию наноструктурированных материалов [11–13], осуществлению магнитного переключения [14, 15], а также управлению динамикой носителей заряда [16, 17]. Отметим также, что воздействие терагерцовых волн электромагнитной или акустической природы на биополимеры не только представляет интерес с точки зрения изучения их функционирования, но и поднимает вопрос о безопасности соответствующих воздействий [18–20].

Пиковые величины электромагнитных полей в терагерцовых импульсах приближаются к внутримолекулярным полям [21], а упругие деформации в пикосекундных акустических сигналах близки к переходу к пластическим [10].

Все это, несомненно, открывает возможности для наблюдения нелинейных явлений. Среди них в первую очередь представляет интерес формирование солитонов. Термин солитон в строгом смысле обозначает некоторое несингулярное решение нелинейного полевого уравнения (системы уравнений), плотность энергии которого локализована и конечна, а также обладает свойством восстановления своей первоначальной формы и скорости при столкновениях [22]. Именно последнее свойство структурной устойчивости отличает солитоны от более широкого класса уединенных нелинейных волн. Кроме того, отличительной особенностью солитонных уравнений является их интегрируемость, т. е. возможность найти точное аналитическое решение задачи Коши. В реальных физических системах наблюдаются скорее уединенные волны, чем истинные солитоны, хотя привлекательность последнего термина привела к распространению его на оба класса решений. Наиболее детально изучены солитонные явления в теории волн на воде [23], физике плазмы [24], нелинейной волоконной оптике [25].

Целью настоящей работы является обсуждение солитонных эффектов, возникающих в ходе генерации и распространения интенсивных терагерцовых волн электромагнитной и акустической природы в конденсированных средах.

## 1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

**1.1. Оптическое выпрямление лазерных импульсов.** Достигнутый в последние десятилетия прогресс в генерации интенсивного терагерцового излучения путем взаимодействия лазерных импульсов видимого и ИК-диапазонов с веществом позволяет говорить о терагерцовой нелинейной оптике. Естественно ожидать, что формирование солитонов из исходного сигнала может начаться уже на стадии его генерации. В связи с этим рассмотрим более детально особенности упоминавшегося выше явления оптического выпрямления лазерных импульсов.

Условие для эффективного протекания рассматриваемого процесса нетрудно получить из законов сохранения энергии и импульса для элементарных процессов взаимодействия соответствующих частиц (фотонов, фононов) в нелинейной диспергирующей среде. Пусть закон дисперсии для оптической компоненты задается зависимостью  $\omega(\mathbf{k})$ , где  $\omega$  — частота, а  $\mathbf{k}$  — соответствующий данной частоте волновой вектор. Частоту и волновой вектор терагерцового сигнала обозначим соответственно  $\omega_T(\mathbf{q})$  и  $\mathbf{q}$ . Тогда закон сохранения энергии-импульса запишется в виде

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \omega_T(\mathbf{q}). \quad (1)$$

Поскольку  $\mathbf{q} \ll \mathbf{k}$  и  $\omega_T \ll \omega$ , то

$$\omega(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \approx \omega(\mathbf{k}) - \mathbf{q} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \omega(\mathbf{k}) - \mathbf{q} \mathbf{v}_g, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}_g \equiv \partial \omega / \partial \mathbf{k}$  — вектор групповой скорости коротковолнового сигнала с волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Введя угол  $\theta$  между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{v}_g$ , получим из (1), (2)

$$v_{\text{ph}} = v_g \cos \theta, \quad (3)$$

где  $v_{\text{ph}} = \omega_T / q$  — величина фазовой скорости длинноволнового сигнала.

Полученное соотношение в теории нелинейных волн часто называют условием резонанса Захарова–Бенни (РЗБ) [26, 27]. Среди первых физических систем, где был выявлен подобный эффект, можно отметить взаимодействие между ленгмюровскими осцилляциями и ионным звуком в плазме [26], взаимодействие капиллярных мод с гравитационными в теории волн на воде [27], взаимодействие электронных и акустических возбуждений полимеров в модели  $\alpha$ -спирали [28].

В лазерной физике и нелинейной оптике для (3) обычно используют термин условие синхронизма. Кроме того, для характеристики выполнения условия (3) также оценивают эффективную длину когерентности [29]

$$L_{\text{coh}} = \frac{\pi c}{\omega |n_g - n_T|}, \quad (4)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $n_g$  — групповой показатель преломления лазерного импульса накачки с частотой  $\omega$ ;  $n_T$  — показатель преломления в терагерцовом диапазоне.

Из (3) следует, что когда групповая скорость лазерного импульса превышает фазовую скорость света в терагерцовом диапазоне, порождаемое нелинейной поляризацией излучение имеет черенковскую природу [30]. Именно в данном приближении была разработана теория [31] и выполнены первые эксперименты [32, 33] по генерации терагерцового излучения методом оптического выпрямления. Несмотря на трудность сбора сгенерированного излучения в данной геометрии использование слоистых метаматериалов позволяет достичь достаточно высокой энергетической эффективности преобразования  $10^{-3}$  [34].

Отметим, что удовлетворить условию РЗБ (3) при коллинеарном распространении импульсов излучения и накачки удается лишь в области прозрачности некоторых полупроводниковых (ZnTe, GaAs, GaSe, GaP, ZnGeP<sub>2</sub> и др.) или органических (DAST, HMQ-T, OH1) кристаллов, существенными недостатками которых являются низкий порог пробоя (в полупроводниках), а также затухание импульса накачки (в органике). Рекордные величины энергетической эффективности преобразования (для кристаллов DAST) достигают  $2,2 \cdot 10^{-2}$  [21].

В случаях малой длины когерентности используют два принципиально различных способа реализации условия синхронизма. Первый из них (квазисинхронизм) [35] основан на модификации нелинейной среды путем периодической инверсии нелинейной восприимчивости второго порядка, пространственный период которой не превышает величины  $L_{\text{coh}}$ . Тогда перекачка энергии в терагерцовое излучение будет происходить в фазе на каждом таком участке, а результирующее излучение станет квазимонохроматическим. Максимально достижимая эффективность преобразования оказывается сравнительно низкой ( $\sim 10^{-4}$ ) [36].

Другим популярным способом является формирование оптического импульса с фронтом интенсивности [37], скошенным под углом относительно фазового фронта, по нормали к которому происходит распространение. Таким образом, проекция групповой скорости на направление генерации становится достаточной для удовлетворения условия (3) и генерации широкополосного терагерцового импульса с квазиплоским фронтом вдоль нормали к фронту интенсивности. Использование данного метода в кристаллах с большой нелинейной восприимчивостью при низких температурах позволило достичь рекордной эффективности генерации  $3,8 \cdot 10^{-2}$  [38].

Отметим, что дальнейшее развитие метода оптического выпрямления, по-видимому, лежит в области создания новых материалов, а также комбинации различных схем генерации. Помимо дальнейшего совершенствования традиционных слоистых сред [34–36] также анализируются материалы с отрицательным показателем преломления [39]. Манипулирование как свойствами среды (периодом инверсии), так и параметрами лазерного импульса (угол наклона фронта, фазовая и амплитудная модуляции) позволяет получать источники терагерцового излучения с высокой степенью перестраивания [40–42].

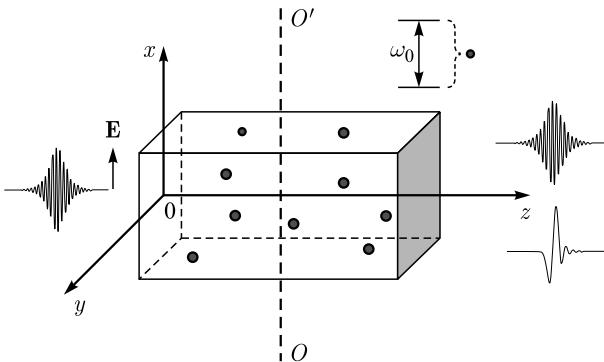


Рис. 1. Схема генерации терагерцовых импульсов при оптическом выпрямлении в нелинейном кристалле с одноосной анизотропией (ось  $OO'$ ) и резонансными центрами (точки) с характерной частотой перехода  $\omega_0$

Следует отметить, что параметрическое преобразование квантов в традиционной схеме оптического выпрямления (рис. 1) подразумевает нерезонансный режим взаимодействия с нелинейной диспергирующей средой. Если же имеет место резонансное поглощение/рождение квантов, то рассматриваемые на приведенной схеме элементарные взаимодействия уже нельзя считать независимыми [43] ввиду появления квантовой интерференции. Ряд теоретических работ, выполненных в этом направлении [44–47], показывает, что помимо повышения эффективности преобразования следует ожидать и модификации условия (3).

**1.2. Моделирование генерации терагерцовых импульсов.** Рассмотрим более детально модельные подходы, применяемые при описании генерации терагерцовых импульсов методом оптического выпрямления. Поскольку характер взаимодействия электромагнитных полей падающего лазерного излучения со средой и с порождаемым терагерцовым импульсом является нелинейным, соответствующая модель должна быть самосогласованной. Для рассматриваемой задачи уравнения Максвелла в нелинейном диэлектрике можно свести к векторному уравнению для электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - 4\pi \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{P}$  — поляризация среды;  $c$  — скорость света в вакууме. Отметим, что эффект оптического выпрямления проявляется только в нецентросимметричных средах. Для определенности рассмотрим нелинейную среду с одноосной анизотропией. В нее подается лазерный импульс, распространяющийся вдоль оси  $z$ , перпендикулярной оптической оси  $x$ . Тогда необыкновенная компонента электрического поля импульса  $E_e$  будет параллельна оси  $x$ , а обыкновенная  $E_o$  параллельна оси  $y$ . В такой геометрии продольными компонентами поля в кристалле можно пренебречь [48]. Кроме того, симметрия нелинейного поляризационного отклика накладывает такое ограничение, что обыкновенная волна может породить необыкновенную, а обратный процесс запрещен. В большинстве интересных нас материалов пространственная дисперсия пренебрежимо мала, что позволяет опустить последнее слагаемое в (5). Все это дает возможность перейти от уравнения (5) к простому скалярному волновому уравнению для компоненты поля  $E_e$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta_{\perp} E, \quad (6)$$

где  $E \equiv E_x$ ,  $P \equiv P_x$ , а также выделено приоритетное направление распространения лазерных импульсов (ось  $z$ );  $\Delta_{\perp}$  — лапласиан по поперечным координатам. В дальнейшем изложении нас будут интересовать в основном квазиодномерные режимы распространения волн, поэтому последнее слагаемое в (6) предполагается малым.

При исследовании нелинейных волн в средах, не являющихся оптически плотными, часто используют так называемое приближение медленно меняющегося профиля импульса [49]. В соответствии с данным приближением профиль импульса медленно меняется в системе отсчета, движущейся в направлении оси  $z$  со скоростью, близкой к скорости света в среде  $c/n$ , где  $n$  — линейный безынерционный показатель преломления в рассматриваемой области спектра. Тогда  $E = E(\tilde{\tau}, \zeta)$ , где  $\tilde{\tau} = t - nz/c$  — «локальное время»,  $\zeta = \epsilon z$  — «медленная координата», а вспомогательный малый безразмерный параметр  $\epsilon$  учитывает влияние слагаемых в правой части (6). Переходя к новым независимым переменным, запишем

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{n}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\tau}^2} - \frac{2n\epsilon}{c} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \tilde{\tau}},$$

где в последнем выражении опущен член, пропорциональный  $\epsilon^2$ . Тогда после интегрирования по  $\tilde{\tau}$  с учетом нулевых значений поля и его производных на бесконечности и возвращения к исходным независимым переменным  $z, t$  приведем волновое уравнение к виду

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{n^2 + 1}{2nc} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi}{nc} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{c}{2n} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^t E dt'. \quad (7)$$

В поляризационном отклике выделим три основные компоненты

$$P = \int_0^{\infty} \chi_l(t - \tau) E(\mathbf{r}, \tau) d\tau + \iint_0^{\infty} \chi_{nl}(t - \tau_1, t - \tau_2) E(\mathbf{r}, \tau_1) E(\mathbf{r}, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + P_R, \quad (8)$$

где два первых слагаемых учитывают нерезонансную часть поляризационного отклика в спектральном диапазоне, прозрачном для рассматриваемых излучений, а третье описывает вклад примесных центров с концентрацией  $N$  в структуре среды, характерная частота  $\omega_0$  которых находится в резонансе со спектром лазерного импульса.

При выводе явных выражений для нерезонансной части поляризации обычно используют линейные  $\chi_l$  и нелинейные  $\chi_{nl}$  восприимчивости [50]. Вместо временного представления удобно задавать соответствующие частотные зависимости в фурье-пространстве  $\hat{\chi}_l(\omega)$  и  $\hat{\chi}_{nl}(\omega_1, \omega_2)$ , определяющие временную дисперсию. Данные функции находят либо из экспериментальных данных [51], либо на основе теоретических моделей динамики среды: как классических [52–55], обобщающих осциллятор Лоренца, так и квантовых [48, 56, 57], учитывающих энергетическую структуру атомов. В области прозрачности среды оба теоретических подхода дают эквивалентные результаты.



Линейная восприимчивость на оптических частотах  $\omega$  может быть с хорошей степенью точности задана в виде разложения

$$\hat{\chi}_0(\omega) = a_0 + a_1\omega^2 - \frac{a_2}{\omega^2}, \quad (9)$$

где первое слагаемое определяет безынерционную часть отклика, второе слагаемое соответствует вкладам в дисперсию электронно-оптических переходов, частоты которых много больше  $\omega$ , а третье слагаемое — вкладам фоннных мод с много меньшими частотами  $\omega$ .

Аналогичное выражение можно записать и для терагерцовых частот  $\omega_T$ :

$$\hat{\chi}_T(\omega_T) = b_0 + b_1\omega_T^2. \quad (10)$$

Здесь второе слагаемое соответствует вкладам фоннных мод, характерные частоты которых, как правило, находятся выше верхней границы спектра генерируемого излучения. Следует также отметить, что уровень частотно-зависимых потерь во многих материалах в терагерцовом диапазоне может быть выше, чем в оптике. Поэтому в данном выражении иногда удерживают еще мнимую добавку, которой мы здесь пренебрегаем.

Дисперсией нелинейных восприимчивостей в каждом из рассматриваемых спектральных диапазонов по отдельности можно пренебречь. Различия возникают лишь между безынерционными частями соответствующих выражений [55].

Для резонансной части поляризации воспользуемся так называемым полуклассическим подходом, когда динамика электрических полей все еще рассматривается на основе классических уравнений, а для состояния среды используется квантово-механическое описание. Это отражено в выражении для резонансного поляризационного отклика

$$P_R = N \text{Tr} [\hat{\rho}\boldsymbol{\mu}], \quad (11)$$

в котором компоненты матрицы плотности  $\hat{\rho}$ -состояний примесных центров удовлетворяют уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial t} = -i\omega_{jk}\rho_{jk} - \frac{i}{\hbar} [\hat{V}, \hat{\rho}]_{jk}, \quad (12)$$

где  $\hat{V} = -\hat{\boldsymbol{\mu}}E$  — оператор взаимодействия в электродипольном приближении;  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  — оператор дипольного момента;  $\omega_{jk}$  — частота перехода;  $\hbar$  — постоянная Планка.

Для простоты рассмотрим системы, обладающие всего двумя квантовыми уровнями. За квантовый переход ответственны компоненты матричного оператора дипольного момента с различающимися индексами, в то время как диагональные соответствуют постоянным дипольным моментам (ПДМ). Последние отличны от нуля только при отсутствии центра инверсии. Стационарные

состояния при этом не обладают определенной четностью. Типичными примерами двухуровневых систем, которые обладают ПДМ, являются примесные ионы [58], полярные молекулы [59], несимметричные наноструктуры [60,61]. Для определенности далее введем асимметрию таким образом, чтобы направление оси анизотропии примесных центров совпадало с оптической осью основной среды. Тогда для резонансной части поляризации получим

$$P_R = N(2dU + DW), \quad (13)$$

а состояние среды от (12) опишем уравнениями типа системы Блоха:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\omega_0 \left( 1 - \frac{DE_e}{\hbar\omega_0} \right) V, \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \omega_0 \left( 1 - \frac{DE_e}{\hbar\omega_0} \right) U + \frac{2dE_e}{\hbar} W, \quad (15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{2dE_e}{\hbar} V, \quad (16)$$

где  $V \equiv (\rho_{12} - \rho_{21})/2i$ ,  $U \equiv (\rho_{21} + \rho_{12})/2$  — безразмерный дипольный момент;  $W \equiv (\rho_{22} - \rho_{11})/2$  — инверсия населенностей квантовых уровней;  $d \equiv \mu_{12} = \mu_{21}$  — дипольный момент перехода;  $D \equiv \mu_{22} - \mu_{11}$  — величина ПДМ;  $\omega_0 \equiv \omega_{12}$ . Для фемтосекундных длительностей лазерных импульсов релаксационными членами в данной системе пренебрегаем.

Представим электрическое поле в виде

$$E = \frac{1}{2}(\psi e^{i(\omega t - kz)} + \psi^* e^{-i(\omega t - kz)}) + \varepsilon, \quad (17)$$

где учтено, что входной лазерный импульс с комплексной огибающей  $\psi$  имеет четко выраженную несущую частоту  $\omega$  и волновое число  $k$ . Электрическое же поле  $\varepsilon$  терагерцового импульса выделено в отдельное слагаемое. В общем случае в нелинейной среде могут возникать и спектральные компоненты на кратных  $\omega$  частотах (например, известный эффект генерации второй гармоники). Однако для эффективного протекания таких процессов необходимо выполнение условий синхронизма, несовместимых с (3), в связи с чем ими можно пренебречь.

Как отмечалось выше, лазерный импульс с характерной временной длительностью  $\tau_p \sim 100$  фс и спектральной шириной  $\delta\omega \sim 1/\tau_p \sim 1$  ТГц хорошо подходит для реализации оптического выпрямления. С другой стороны, центральная частота его спектра  $\omega \sim 100$  ТГц, т.е.  $\omega \gg \delta\omega$ . Отсюда следует выполнение условия квазимонохроматичности

$$\omega\tau_p \gg 1. \quad (18)$$

Данное соотношение позволяет в дальнейшем воспользоваться приближением медленно меняющихся огибающих:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| \ll \omega |\psi|, \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \ll k |\psi|. \quad (19)$$

В отличие от оптического импульса для терагерцового справедлива оценка

$$\omega_T \tau_p \sim 1. \quad (20)$$

По сложившейся терминологии сигналы, параметры которых удовлетворяют (20), называют предельно короткими импульсами [57, 62, 63].

Суммарный поляризационный отклик  $P$  разделится теперь еще и по спектральному составу:

$$P = \left[ \chi_0(\omega)\psi - i\chi_0'(\omega)\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}\chi_0''(\omega)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\chi_2(\omega, 0)\varepsilon\psi + N dR \right] e^{i(\omega t - kz)} + \text{с. с.} + \chi_T(0)\varepsilon - \frac{1}{2}\chi_T''(0)\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \chi_2(0, 0)\varepsilon^2 + 2\chi_2(\omega, -\omega)|\psi|^2 + NDW, \quad (21)$$

где с. с. означает комплексно-сопряженные слагаемые;  $\chi_2$  — частотные компоненты нелинейной восприимчивости;  $R = \rho_{12} e^{-i(\omega t - kz)}$ .

Подставляя (21) в (7), (14)–(16) с учетом (17), (19), приходим к системе уравнений [45]

$$i\frac{\partial \psi}{\partial z} + i\delta_T \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \beta_2 \varepsilon \psi - \alpha R = \frac{c}{2n_0 \omega} \Delta_{\perp} \psi, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \mu_T \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \tau^3} + \beta_T \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \beta_0 \frac{\partial}{\partial \tau} (|\psi|^2) + \gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{c}{2n_T} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} \varepsilon d\tau', \quad (23)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = i \left( \Delta - \frac{D\varepsilon}{\hbar} \right) R + i \frac{2d\psi W}{\hbar}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = i \frac{d}{\hbar} (\psi^* R - \psi R^*), \quad (25)$$

где  $\tau = t - n_T/c$ ;  $n_0$  — оптический показатель преломления; коэффициенты  $k_2 = 4\pi(3a_1\omega - a_2/\omega^3)/(cn_0)$  и  $\mu_T = 2\pi b_1/(n_T c)$  определяют дисперсию на оптических и терагерцовых частотах соответственно;  $\delta_T = (n_g - n_T)/c$  — расстройка скоростей, наличие которой отражает нарушение условия (3). Величины  $\beta_2 = 4\pi\omega\chi_2(\omega, 0)/(cn_0)$ ,  $\beta_0 = 4\pi\chi_2(\omega, -\omega)/(cn_T)$ ,  $\beta_T = 4\pi\chi_2(0, 0)/(cn_T)$  определяют вклады нерезонансной квадратичной нелинейности среды.

Взаимодействие с резонансными центрами учитывается с помощью параметров  $\alpha = 2\pi\omega_0 dN/(cn_0)$ ,  $\gamma = 2\pi DN/(n_T c)$ , а эволюция безразмерной огибающей резонансной поляризации  $R$  и разности населенностей  $W$  квантовых уровней подчиняются уравнениям Блоха (24), (25), где  $\Delta$  — отстройка от резонанса.

Для описания процесса оптического выпрямления в общем случае систему (22)–(25) приходится решать численно. Рассмотрим протекание процесса генерации при  $\delta_T = 0$ . Качественное поведение системы в нерезонансном и резонансном случаях оказывается сходным, в особенности в начале генерации. Однако в последнем случае этот процесс протекает более эффективно (ср. рис. 2, *а, б*) [45, 64].

При подаче в среду интенсивного лазерного импульса на малых дистанциях его распространения можно приближенно считать его поле заданным. Характерный масштаб изменения импульса в этом случае удобно задавать в единицах длин дисперсионного распывания  $L_d \sim \tau_p^2/|k_2|$ . Пренебрегая дисперсией и собственной нелинейностью терагерцового сигнала при  $z \ll L_d$ ,

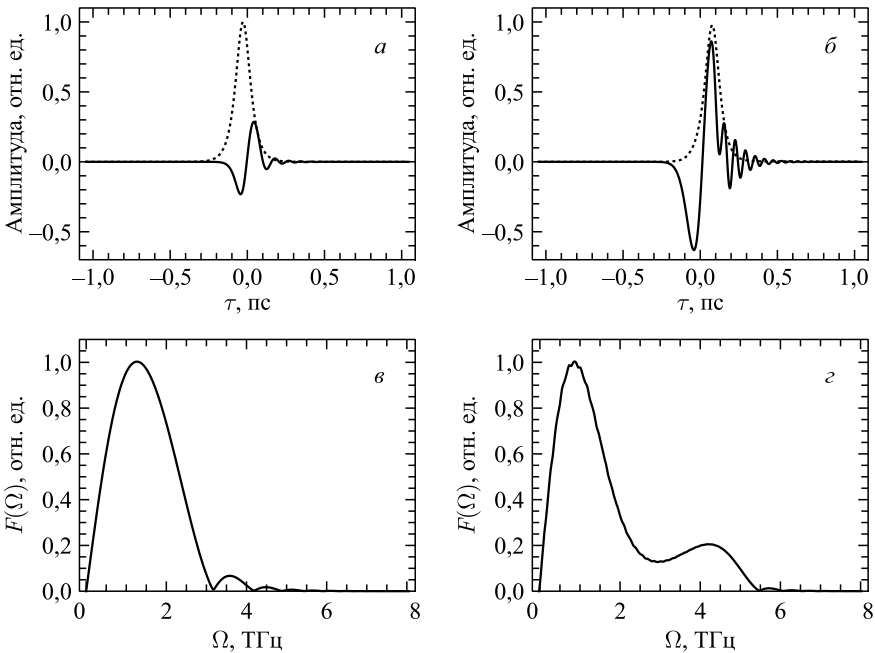


Рис. 2. *а, б*) Переходная стадия генерации терагерцовых импульсов. Сравнение огибающей лазерного импульса (пунктирная кривая) и поля терагерцового импульса (сплошная кривая) в ходе нерезонансного (*а*) и резонансного (*б*) оптического выпрямления. *в, г*) Соответствующие спектры генерируемых широкополосных сигналов

из (23) получим

$$\varepsilon \approx -\beta_0 z \frac{\partial}{\partial \tau} |\psi|^2.$$

Полагая  $\psi = A \operatorname{sech}(\tau/\tau_p)$ , где  $\tau_p$  — длительность импульса, а  $A$  — его амплитуда, находим

$$\varepsilon \approx \frac{2\beta_0 z A^2}{\tau_p} \tanh\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right).$$

Таким образом, поле терагерцового импульса на начальной стадии его генерации растет пропорционально квадрату амплитуды входного лазерного импульса и дистанции пробега в нелинейной среде. Профиль же полученного сигнала представляет собой практически одноволновый всплеск поля. Пример численного расчета процесса генерации приведен на рис. 2, а, б.

Спектр терагерцового импульса имеет вид

$$|F(\Omega, z)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(z, \tau) e^{i\Omega\tau} d\tau \right| \approx \frac{2}{\pi} \beta_0^2 A^2 z^2 \frac{\eta^2}{\sinh \eta}, \quad (26)$$

где  $\eta = \pi\tau_p\Omega/2$ . Характерная ширина спектра  $\delta\Omega$  по порядку величины обратно пропорциональна его длительности  $1/\tau_p$ , а его максимум соответствует частоте  $\Omega_m = 1,04/\tau_p$ . Тогда  $\delta\Omega \sim \Omega_m$ , т. е. спектр предельно короткого импульса обладает свойством суперконтинуума. Спектры импульсов, рассчитанные с помощью численного моделирования, приведены на рис. 2, в, г.

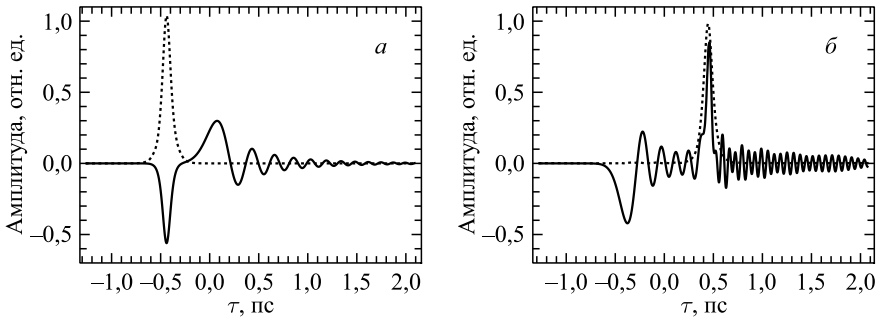


Рис. 3. Асимптотическая стадия генерации и формирование оптико-терагерцовых солитонов в ходе нерезонансного (а) и резонансного (б) оптического выпрямления. Обозначения соответствуют рис. 2

Описанную стадию генерации биполярного импульса с точки зрения формирования солитонов можно назвать переходной. При переходе к асимптотической стадии происходит разбиение терагерцового импульса на солитонную часть, связанную с лазерным импульсом, и модулированный несолитонный сигнал (рис. 3). При этом спектр входного импульса накачки испытывает непрерывное смещение в красную область [65], что вызвано саморассеянием на сгенерированном излучении [66]. Свойства образующихся солитонов будут описаны более детально в п. 1.3.

**1.3. Оптико-терагерцовые солитоны.** Система уравнений (22)–(25) в общем случае, конечно, не обладает свойством интегрируемости. Однако она допускает целый ряд частных случаев, приводящих к известным видам солитонных уравнений. Большинство из них описывает пространственно-одномерные системы ( $\Delta_{\perp} = 0$ ), поэтому рассмотрим сначала именно такие ситуации.

Пусть в материале отсутствуют резонансные центры  $\alpha = \gamma = 0$ , что соответствует типичной схеме оптического выпрямления в коллинеарной геометрии при выполнении условия  $\delta_T = 0$ . Как отмечалось выше, эффективности преобразования в таком случае обычно невелики, поэтому нелинейность терагерцового отклика можно не учитывать ( $\beta_T = 0$ ). Если спектр генерируемого излучения лежит далеко от частот фононных мод кристалла, то можно дополнительно пренебречь дисперсией на терагерцовых частотах ( $\mu_T = 0$ ). Тогда придем к интегрируемому варианту данных уравнений [67]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \beta_2 \varepsilon \psi = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \beta_0 \frac{\partial}{\partial \tau} (|\psi|^2) = 0. \quad (28)$$

Полученную систему в литературе обычно называют уравнениями длинно-коротковолнового резонанса согласно терминологии, пришедшей из физики плазмы [26, 27]. Ее солитонное решение имеет вид

$$\psi = \frac{|k_2|}{\tau_p} \sqrt{\frac{\Omega}{\beta_0 \beta_2}} \operatorname{sech} \left( \frac{\tau + k_2 \Omega}{\tau_p} \right) \exp \left[ -i \Omega \tau - \frac{i k_2}{2} \left( \Omega^2 - \frac{1}{\tau_p^2} \right) z \right], \quad (29)$$

$$\varepsilon = - \frac{k_2}{\beta_2 \tau_p^2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\tau + k_2 \Omega}{\tau_p} \right). \quad (30)$$

Здесь присутствуют два положительно определенных параметра  $\tau_p$  и  $\Omega$ , соответствующие длительности солитона и сдвигу частоты его оптической составляющей в красную область. Отметим, что солитонная часть сигнала испытывает положительную или отрицательную задержку (как на рис. 3, *a*), определяемую знаком коэффициента групповой дисперсии  $k_2$ , а также величиной сдвига частоты  $\Omega$ .

Если же расстройка скоростей отлична от нуля ( $\delta_T \neq 0$ ) (отсутствует синхронизм), то порождаемый терагерцовый сигнал оказывается очень слабым, и его самостоятельной эволюцией можно пренебречь. Тогда, воспользовавшись приближением адиабатического следования, полагая  $\partial\varepsilon/\partial z \approx 0$ , найдем из (27)  $\varepsilon = -\beta_0|\psi|^2/\delta_T$ , что при подстановке в (27) приведет в нелинейному уравнению Шредингера (НУШ)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \beta|\psi|^2\psi = 0, \quad (31)$$

где  $\eta = \tau - \delta_T z$ ,  $\beta = \beta_0\beta_2/\delta_T$ .

Функциональный вид солитонного решения НУШ в этом случае несколько напоминает (29):

$$\psi = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{k_2\delta_T}{\beta_0\beta_2}} \operatorname{sech}\left(\frac{t - n_g z/c}{\tau_p}\right) \exp\left[\frac{ik_2 z}{2\tau_p^2}\right], \quad (32)$$

где должно выполняться  $k_2(n_g - n_T) > 0$ .

Отметим, что скорость данного солитона не зависит от его амплитуды. Свойства солитонов НУШ в нелинейной оптике лазерных импульсов хорошо изучены [25], в связи с чем они нашли практическое применение в высокоскоростных оптических линиях связи.

Пусть теперь взаимодействие со средой происходит по резонансному механизму, а влиянием нерезонансных эффектов можно пренебречь ( $k_2 = 0$ ,  $\mu_T = 0$ ,  $\beta_2 = 0$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_T = 0$ ). Тогда при выполнении условия синхронизма (3) придем к системе

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{n_T}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\alpha R, \quad (33)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} + \frac{n_T}{c}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = -\gamma\frac{\partial W}{\partial t}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = i\left(\Delta - \frac{D\varepsilon}{\hbar}\right)R + i\frac{2d\psi W}{\hbar}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = i\frac{d}{\hbar}(\psi^* R - \psi R^*). \quad (36)$$

Данные уравнения также могут быть проинтегрированы методом обратной задачи рассеяния [68, 69].

Солитонное решение (33)–(36) для оптической и терагерцовой составляющих имеет вид [69]

$$\psi = \frac{\hbar}{d\tau_p} \left( \frac{2g}{\sqrt{1 + (g-f)^2} \operatorname{ch} 2\zeta + g-f} \right)^{1/2} \exp[-iqz - i \operatorname{arctg}(s \operatorname{th} \zeta)], \quad (37)$$

$$\varepsilon = -\frac{\hbar}{D\tau_p} \frac{4}{\sqrt{1+(g-f)^2} \operatorname{ch} 2\zeta + g - f}, \quad (38)$$

где  $g = 2\omega_0\tau_p d^2/D^2$ ,  $f = \Delta\tau_p$ ,  $s = (\sqrt{1+(g-f)^2} + g - f)^{-1}$ ,  $\zeta = (t - z/v_s)/\tau_p$ ,  $1/v_s = n_T/c + q/\Delta$ ,  $q = -2d\alpha W_\infty \Delta\tau_p^2/(\hbar(1+f^2))$ . Из выражений для скорости солитона видно, что она зависит от амплитуды, причем тем сильнее, чем меньше отстройка от резонанса. На рис. 3 видно, что скорость солитона, формируемого при наличии резонансных центров (рис. 3, б), отличается от скорости солитона в нерезонансном случае (рис. 3, а) при одинаковых начальных условиях для подаваемого в среду импульса. Кроме того, оптическая составляющая в отличие от решений уравнений длинно-коротковолнового резонанса имеет нелинейную частотную модуляцию. Детальный анализ параметров решения (37), (38) проведен в работе [69].

Инверсия населенностей среды при прохождении солитона меняется по закону

$$W = W_\infty \left( 1 - \frac{2d^2\tau_p^2|\psi|^2}{\hbar^2(1+(\Delta\tau_p)^2)} \right), \quad (39)$$

где  $W_\infty$  определяет инверсию населенностей до воздействия лазерного импульса. В случае нахождения среды в основном состоянии  $W_\infty = -1/2$ .

В отсутствие асимметрии резонансных центров ( $D = 0$ ) терагерцовый компоненты в среде нет, а частотной модуляцией можно пренебречь. При этом возникает известная в оптике интегрируемая система уравнений Максвелла–Блоха [70]. В частном случае точного резонанса  $\Delta = 0$  фазовая модуляция пренебрежимо мала. Тогда путем преобразования  $|\psi| = \partial\Theta/\partial t$ ,  $W = -0,5 \cos \Theta$ ,  $\operatorname{Im}(R) = -0,5 \sin \Theta$  из (33)–(36) получаем знаменитое солитонное уравнение синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial \tau} = -\frac{\alpha}{2} \sin \Theta. \quad (40)$$

Отметим, что список интегрируемых уравнений, возникающих при когерентном взаимодействии излучения с двухуровневыми системами, может быть довольно обширен. Более детально данные вопросы изложены в специализированных обзорах [57, 71].

Наконец, обратимся к рассмотрению установившегося режима распространения интенсивного терагерцового импульса, когда оптическая волна в среде отсутствует  $\psi = 0$ . В этом случае необходимо учесть дисперсию и нелинейность на терагерцовых частотах, а также дифракцию. Если последняя действует только по одной поперечной координате  $x$  (например, планарный диэлектрический волновод), то от (23) придем к уравнению Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \beta_T \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \mu_T \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \tau^3} \right) = \frac{c}{2n_T} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}. \quad (41)$$



Нетрудно видеть, что в пространственно-одномерном варианте из (41) получается известное уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ).

В иерархии уравнений КП выделяют случаи КП-I и КП-II [24], что соответствует знакам коэффициента дисперсии в терагерцовом диапазоне:  $\mu_T < 0$  (аномальная дисперсия) и  $\mu_T > 0$  (нормальная дисперсия) в (41). Как в первом, так и во втором случае можно получить солитонное решение, локализованное лишь в одном пространственном направлении (фактически это солитон КдФ):

$$\varepsilon = -\frac{12\mu_T}{\beta_T\tau_p^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{t-z/v}{\tau_p}\right), \quad (42)$$

где

$$\frac{1}{v} = \frac{n_T}{c} - \frac{4\mu_T}{\tau_p^2}.$$

В первом случае возможна и полная локализация, что приводит к решению типа лампа (от англ. «lump» — сгусток):

$$\varepsilon = -\frac{24\mu_T}{\beta_T\tau_p^2} \frac{1 - (t-z/v)^2/\tau_p^2 + x^2/R^2}{[1 + (t-z/v)^2/\tau_p^2 + x^2/R^2]^2}, \quad (43)$$

где

$$R^2 = \frac{3c\tau_p^2}{2|\mu_T|n_T}, \quad \frac{1}{v} = \frac{n_T}{c} - \frac{3\mu_T}{\tau_p^2}.$$

Униполярные решения типа одиночного всплеска электромагнитного поля (42), (43) весьма затруднительно получить в лазерной физике [72]. В отличие от обычных биполярных импульсов они обладают уникальным свойством однонаправленного действия на электрические заряды. Если в биполярном импульсе первая полуволна поля выводит заряд из положения равновесия и ускоряет его, то вторая полуволна заряд останавливает, и передаваемый ему суммарный механический импульс практически равен нулю. В случае же униполярных импульсов отсутствие второй полуволны позволило бы эффективно передавать механический импульс заряженной частице, что открывает возможности для управления движением носителей заряда в веществе, ускорения заряженных частиц и т. д. Таким образом, описанное в данном разделе оптическое выпрямление служит одним из способов генерации униполярных солитонных импульсов в терагерцовом диапазоне частот.

Большинство рассмотренных здесь солитонных решений, за исключением (43), описывает пространственно-одномерные структуры поля. Естественно, возникает вопрос о существовании и устойчивости подобных образований в условиях ограниченной апертуры импульса. Вопросы устойчивости солитонов по отношению к поперечным возмущениям подробно описаны в монографиях [23, 24] и методических обзорах [73, 74]. В нерезонансных средах полностью локализованные в пространстве решения, которые могли бы

послужить аналогами длинно-коротковолновых солитонов, неустойчивы, в связи с чем в модели требуется учет дополнительных эффектов высшего порядка малости [75].

Иная ситуация наблюдается в резонансном случае. В ходе численного моделирования уравнений (22)–(25) выявлено [46], что помимо генерации терагерцового импульса с широкой апертурой из нескольких колебаний поля, который постепенно выходит из синхронизма с оптическим импульсом, возможно образование локализованных связанных состояний электромагнитного поля оптических и терагерцовых частот — оптико-терагерцовых пуль (рис. 4). Образование пуль происходит в режиме филаментации. Вследствие нелинейной саморефракции импульсный фронт искажается, в результате чего начинается развитие поперечной модуляционной неустойчивости. Далее происходит отрыв впереди идущих центральных участков импульса от отстающих

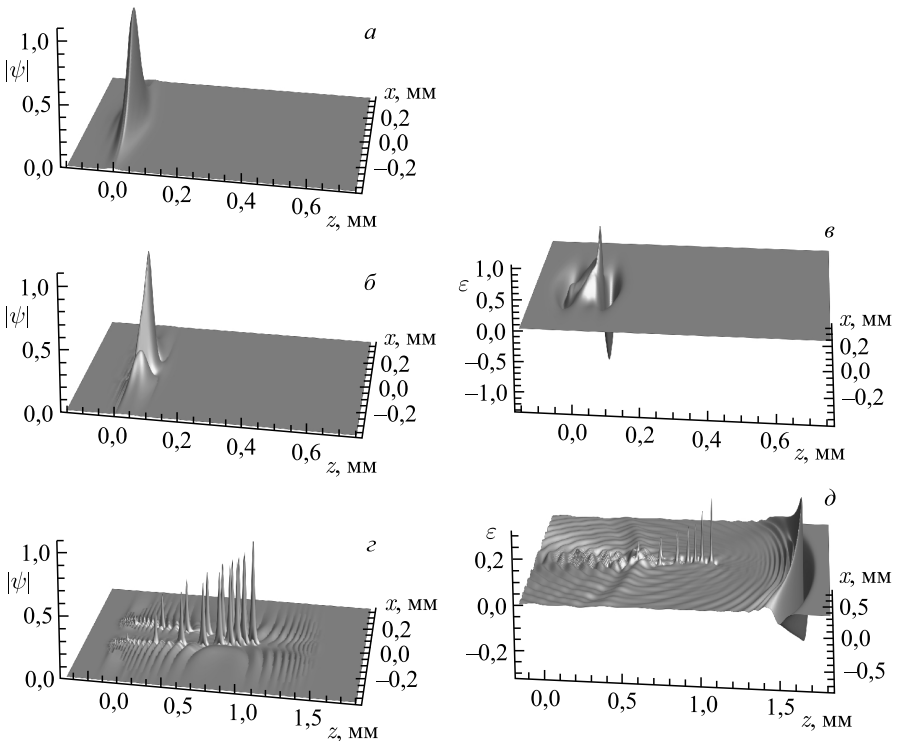


Рис. 4. Эволюция оптической и терагерцовой компонент при генерации солитонов в процессе филаментации в объеме резонансной среды: *а*) оптический импульс до подачи в среду; *б, в*) на переходной стадии генерации; *г, д*) на асимптотической стадии генерации. Приведены нормированные распределения полей в плоскости  $xz$

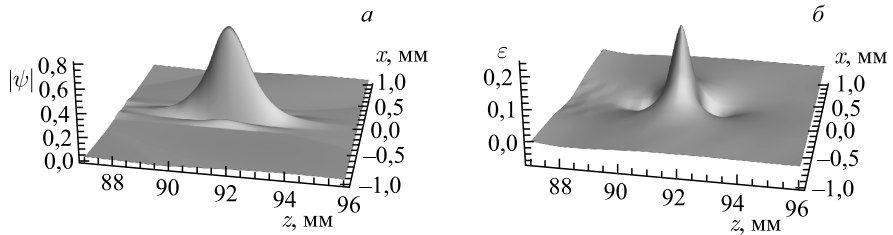


Рис. 5. Структура неоднородного солитона (оптико-терагерцовой пули), сформированного из распределения поля, приведенного на рис. 4,  $z$ ,  $d$

периферийных участков и развивается мелкомасштабная самофокусировка (см. рис. 4). Такая динамика сопровождается образованием множества филаментов в поперечном сечении лазерного импульса (рис. 5), все более замедляющихся по мере своей удаленности от поперечного центра симметрии. Структура каждой пули такова, что продольный размер терагерцовой компоненты меньше соответствующего размера оптической составляющей, а поперечные размеры примерно одинаковы. Разность населенностей уровней в резонансной среде в области пули близка к максимальной. В численных расчетах оптико-терагерцовые пули демонстрируют структурную стабильность при распространении и взаимодействии, хотя еще предстоит выяснить, являются ли они или их близкие аналоги солитонами в строгом смысле.

## 2. ДЕФОРМАЦИИ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

**2.1. Акустика пикосекундных импульсов.** Поиск взаимных аналогий в оптике и акустике является довольно плодотворным (см. обзор [76]). Широко известны такие нелинейные эффекты, как параметрическое рассеяние звука на звуке, генерация второй акустической гармоники. Это справедливо и для когерентных эффектов, таких как фоннное эхо [77], акустическая самоиндуцированная прозрачность [78].

В последние годы бурное развитие нелинейной оптики сверхкоротких импульсов породило аналогичные исследования по акустическим сигналам [9]. Это пробудило интерес к исследованию различных режимов взаимодействия акустических сигналов с наноструктурированными материалами [11–13]. В отличие от электромагнитных импульсов широкополосные акустические сигналы можно применять для спектроскопии проводящих сред. Появилась возможность осуществлять магнитное переключение [14, 15], а также управлять динамикой носителей заряда [16, 17].

При значительном уменьшении длительности импульсного акустического сигнала вплоть до пикосекунд становятся существенными эффекты пространственной дисперсии, связанные с проявлением дискретной структуры кри-

сталла. Очевидно, что спектр такого сигнала, характерная ширина которого обратно пропорциональна его длительности, достигает терагерцового диапазона частот. Если же величина относительной деформации достаточно велика, то за счет ангармонизма атом-атомного взаимодействия возможно ожидать формирования терагерцовых солитонов акустической природы [9]. Такие солитоны исследовались теоретически [79–86], а также неоднократно наблюдались в образцах  $\text{Al}_2\text{O}_3$  [10],  $\text{MgO}$  [87, 88],  $\text{GaAs}$  [89] и других кристаллах.

Следуя вышеприведенному тезису об оптоакустических аналогиях, рассмотрим нелинейную среду, подобную описанной в разд. 1. В данном случае роль электромагнитного поля будут играть продольные упругие волны в кристалле, помещенном в постоянное магнитное поле, а роль примесных центров — парамагнитные ионы, обладающие спином  $S = 1$  (ионы  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Ni}^{2+}$ ). Спин-фононное взаимодействие в данном случае проявится намного сильнее, чем для частиц спина  $S = 1/2$ . При этом локальные деформации создают градиенты внутрикристаллического электрического поля, которые, в свою очередь, вызывают электроквадрольные переходы между зеемановскими подуровнями (механизм Ван Флека) [90, 91]. Данный механизм не способен проявиться для частиц  $S = 1/2$ , где взаимодействие обусловлено модуляцией спин-орбитальной связи [91], т. е. является релятивистским эффектом, что дает более слабую связь с колебаниями кристалла.

Введем декартову систему координат, оси которой  $(x, y, z)$  параллельны осям симметрии четвертого порядка кубического кристалла. Внешнее постоянное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направлено перпендикулярно оси  $z$ , вдоль которой распространяется импульс продольной деформации. В кристаллах в общем случае не существует сугубо продольных или сугубо поперечных упругих волн, поэтому для простоты будем считать, что кристалл обладает свойством упругой изотропии [92]. В случае кубических кристаллов фактор анизотропии определяется следующим образом:  $A_{44}/(c_{11} - c_{12})$ , где  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  — упругие константы второго порядка. Например, для кристалла  $\text{MgO}$   $A = 1,48$ . В таком случае с неплохой точностью можно рассматривать отдельно только продольную или только поперечную волны, причем их скорости практически не зависят от направления распространения.

Очевидно, что при сильном искривлении волнового фронта сугубо продольного акустического импульса могут возникнуть и поперечные компоненты деформации. Данные поперечные возмущения учтем в параксиальном приближении, согласно которому  $\partial u/\partial z \gg |\nabla_{\perp} u|$ , где  $\nabla_{\perp}$  — поперечный градиент, а  $u$  — поле локальных смещений кристалла вдоль оси  $z$ .

Аналогично рассмотренной ранее оптической задаче используем полуклассический подход, согласно которому система парамагнитных ионов описывается квантово-механически, а акустическое поле — классическим образом.

Гамильтониан акустического поля

$$H_a = \int \mathcal{H}_a d^3 \mathbf{r} \quad (44)$$

определим через соответствующую плотность  $\mathcal{H}_a$  вида [93]

$$\mathcal{H}_a = \frac{p^2}{2\rho_m} + \frac{c_{11}}{2} E_{zz}^2 + 2c_{44}(E_{zy}^2 + E_{zx}^2) + \frac{c_{111}}{6} E_{zz}^3 + \frac{c_{1111}}{24} E_{zz}^4, \quad (45)$$

где  $p$  — плотность импульса локальных смещений кристалла;  $\rho_m$  — средняя плотность среды;  $c_{111}$ ,  $c_{1111}$  — нелинейные модули упругости третьего и четвертого порядков соответственно.

Компоненты тензора деформации имеют вид

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Выражение для  $\mathcal{H}_a$  имеет характер разложения по порядкам ангармонизма. В силу этого (а также принятого здесь параксиального приближения) в (45) оставим только члены, содержащие  $\partial u/\partial z$ , а слагаемые с  $\partial u/\partial x$  и  $\partial u/\partial y$  отбросим. Тогда

$$\begin{aligned} E_{zz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \\ E_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ E_{zy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом описании не учитываются дополнительные эффекты пространственной акустической дисперсии, связанной с дискретностью кристалла. Для расчета вклада данного эффекта воспользуемся альтернативным выражением для  $\mathcal{H}_a$ , которое можно получить исходя из дискретной теории колебаний узлов кристаллической решетки в приближении ближайших соседей [94]. В силу параксиальности учтем только производные типа  $\partial^2 u/\partial z^2$ , для простоты рассмотрим одномерную модель. Для определенности используем аппроксимацию Морзе потенциала атом-атомного взаимодействия:

$$\Pi = \Pi_0 (e^{-r/r_0} - 1)^2,$$

где  $r = u_{j+1} - u_j$  — относительное смещение узлов;  $r_0$  и  $\Pi_0$  — эффективная ширина и глубина потенциала соответственно.

Переходя к пределу непрерывной среды, запишем

$$u_{n+1} \rightarrow u(z+h) \approx u(z) + h \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3},$$

где  $h$  — постоянная кристаллической решетки.

В окрестности минимума потенциал Морзе можно представить в виде разложения

$$\Pi \approx \Pi_0 \left[ \frac{h^2}{r_0^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{h^3}{r_0^3} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 - \frac{h^4}{12r_0^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{7h^4}{12r_0^4} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 \right], \quad (46)$$

где опущены члены со степенями  $h$  выше четвертого порядка, а также слабые, дающие при интегрировании нулевой вклад в гамильтониан (44).

Упрощая (45) с учетом дополнительных членов, возникающих в (46), получим окончательное выражение для плотности гамильтониана акустического поля в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a = & \frac{p^2}{2\rho_m} + \frac{c_{11}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{c_{44}}{2} (\nabla_{\perp} u)^2 - \frac{c_{11}h^2}{24} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{6} (3c_{11} + c_{111}) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 + \frac{1}{24} (3c_{11} + 6c_{111} + c_{1111}) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь учтено, что  $\Pi_0 h^2 / r_0^2 = 2c_{11}$ .

Для гамильтонова оператора взаимодействия акустического поля с парамагнитными ионами, следуя [78, 95], запишем

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_j G_{\parallel} \hat{S}_z^{(j)2} (u_{j+1} - u_j),$$

где  $G_{\parallel} = 3G_{11}/2$  — компонента тензора спин-фононного взаимодействия, связывающая парамагнитные ионы с продольной деформацией кристалла;  $\hat{S}_{x,y,z}^{(j)}$  — трехрядные спиновые матрицы [91], соответствующие спину  $S = 1$  на  $j$ -м сайте. Переходя к непрерывному пределу, получим

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int n_s G_{\parallel} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right) \hat{S}_z^2 d^3 \mathbf{r}, \quad (48)$$

где  $n_s$  — концентрация примесных парамагнитных ионов. Выражение в круглых скобках учитывает пространственную нелокальность спин-фононного взаимодействия [82], существенную для пикосекундных акустических импульсов.

Дополним (47) и (48) оператором взаимодействия эффективного спина с внешним магнитным полем

$$\hat{H}_s = \int n_s \hbar \omega_Z \hat{S}_z d^3 \mathbf{r}, \quad (49)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка;  $\omega_Z = g\mu_B B_0/\hbar$  — частота расщепления внутри зеемановского триплета,  $g \equiv g_{||}$  — продольная компонента тензора Ланде,  $\mu_B$  — электронный магнетон Бора.

Согласно полуклассическому подходу запишем для поля импульса уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta u}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad (50)$$

где  $H = H_a + \langle \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_s \rangle$ ,  $\langle \hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_s \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho}(\hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_s))$  — квантовое среднее,  $\hat{\rho}$  — оператор матрицы плотности эффективного спина, который для рассматриваемой здесь трехуровневой квантовой системы можно записать в энергетическом представлении:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{32} & \rho_{31} \\ \rho_{23} & \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{13} & \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix}.$$

Волновое уравнение (50) необходимо дополнить материальными уравнениями для матрицы плотности

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_{\text{int}} + \hat{H}_s, \hat{\rho}]. \quad (51)$$

Преобразовывая (50), приходим к следующему волновому уравнению для поля упругой деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} &= -b_2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}^2}{\partial z^2} + b_3 \frac{\partial^2 \mathcal{E}^3}{\partial z^2} + b \frac{\partial^4 \mathcal{E}}{\partial z^4} + \\ &+ \frac{n_s G_{||}}{2\rho_m} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\hbar^2}{6} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) U + a_{\perp}^2 \Delta_{\perp} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (52)$$

где  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{zz} = \partial u/\partial z$  — продольная компонента тензора деформации;  $a \equiv a_{||} = \sqrt{c_{11}/\rho_m}$  и  $a_{\perp} = \sqrt{c_{44}/\rho_m}$  — линейные скорости продольного и поперечного звуков соответственно; слагаемое с  $U$  в правой части (52) учитывает спин-фононное взаимодействие; вклады квадратичной и кубической акустических нелинейностей, обусловленных ангармонизмом колебаний узлов кристаллической решетки, учитываются параметрами  $b_2 J^2 \Gamma$ ,  $b_3 = 112 \Gamma^2 a^2/9$ ,

где  $\Gamma = -3(1 + c_{111}/3c_{11})/2$  — постоянная Грюнайзена; слагаемое с коэффициентом  $b = a^2\hbar^2/12$  учитывает пространственную акустическую дисперсию, вызванную дискретной структурой кристалла.

Система материальных уравнений (51) с учетом (48), (49) и явных выражений для матриц  $\hat{S}_{x,y,z}$ , как и в предыдущем разделе, приводится к уравнениям Блоха:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -2\omega_Z V, \quad (53)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 2\omega_Z U - \Omega W, \quad (54)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \Omega V, \quad (55)$$

где  $U = \rho_{13} + \rho_{31}$ ,  $V = i(\rho_{31} - \rho_{13})$ ,  $W = \rho_{33} - \rho_{11}$ ,

$$\Omega = \frac{G_{||}}{\hbar} \left( \mathcal{E} + \frac{\hbar^2}{6} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \right).$$

Как видно, при распространении перпендикулярно направлению магнитного поля акустический импульс способен возбудить только переходы между крайними уровнями зеемановского триплетта.

В состоянии термодинамического равновесия

$$W(t = -\infty) \equiv W_\infty = -\frac{1}{2} \tanh \left( \frac{\hbar\omega_Z}{2k_B T} \right),$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана. Таким образом, для того чтобы существовала заметная разность населенностей  $W$  квантовых уровней внутри зеемановского триплетта, абсолютная температура  $T$  должна удовлетворять условию  $T \ll \hbar\omega_Z/k_B$ . При частоте расщепления  $\omega_Z \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$  температура должна быть порядка нескольких кельвинов, что хорошо выполняется для условий жидкого гелия.

Аналогично оптической задаче воспользуемся приближением медленно меняющегося профиля, введя медленную координату  $\zeta = \mu z$  ( $\mu \ll 1$ ) и быструю координату  $\tilde{t} = t - z/a$ . Тогда, пренебрегая членом порядка  $\mu^2$ , интегрируя по  $\tilde{t}$  с учетом нулевых значений поля и его производных на бесконечности и возвращаясь к исходным независимым переменным, приведем уравнение (52) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{b_2}{a^3} \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \frac{3b_3}{2a^3} \mathcal{E}^2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \frac{b}{2a^5} \frac{\partial^3 \mathcal{E}}{\partial t^3} = \\ = \frac{n_s G_{||}}{4a^3 \rho_m} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{6a^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) U + \frac{a_\perp^2}{2a} \Delta_\perp \int_{-\infty}^t \mathcal{E} dt'. \quad (56) \end{aligned}$$



Выражения (53)–(56) дают замкнутую нелинейную систему уравнений, описывающую самосогласованную динамику импульса и квантовых состояний парамагнитных ионов.

Зададимся целью исключить из данной системы материальные переменные, выразив их через поле импульсной деформации. В условиях, когда спектр импульса не содержит частот, резонансных квантовому переходу, можно воспользоваться так называемым приближением волновой прозрачности  $(2\omega_Z\tau_p)^2 \gg 1$  [81, 96]. Если длительность импульса  $\tau_p \sim 2$  пс, то при частоте зеemanовского расщепления  $\omega_Z \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$  данное условие удовлетворяется. Вследствие нерезонансности взаимодействия нелинейные и дисперсионные эффекты являются относительно малыми и могут быть учтены аддитивно [82].

Величина  $\Omega$ , присутствующая в правой части системы (53)–(55), имеет смысл акустической частоты Раби и обратно пропорциональна характерному времени взаимодействия  $\tau_p$ . Следовательно, уравнения для элементов матрицы плотности можно решать методом последовательных приближений по малому параметру  $(2\omega_Z\tau_p)^{-2} \ll 1$ . Выражения для материальных переменных ищем в виде разложений по степеням и производным малого параметра  $\Omega/\omega_Z$ . При этом ограничимся третьей степенью параметра  $\Omega/\omega_Z$  и его производными до второго порядка включительно.

Так, в нулевом приближении из (53), (54) получим

$$V^{(0)} = -\frac{1}{2\omega_Z} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial t}, \quad U^{(0)} = \frac{W_\infty \Omega}{2\omega_Z}. \quad (57)$$

Подставляя данные выражения в (55) и интегрируя по времени, найдем выражения для разностей населенностей

$$W = W_\infty \left[ 1 - \frac{\Omega^2}{8\omega_Z^2} \right]. \quad (58)$$

Дальнейшая подстановка полученных соотношений и нахождение поправок более высокого порядка малости приводит к следующему выражению для отклика системы парамагнитных примесей  $U$ , аддитивно учитывающему нелинейность и временную дисперсию:

$$U = \frac{W_\infty}{4} \frac{\Omega}{\omega_Z} - \frac{W_\infty}{32} \left( \frac{\Omega}{\omega_Z} \right)^3 - \frac{W_\infty}{16\omega_Z^3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}. \quad (59)$$

Подстановка (59) в (56) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \beta_s \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \gamma_s \varepsilon^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \mu_s \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \tau^3} = \frac{a_1^2}{2a} \Delta_\perp \int_{-\infty}^t \varepsilon d\tau', \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= t - \frac{z}{a_s}, \quad a_s = \frac{a}{1 - \eta_s W_\infty}, \quad \eta_s = \frac{n_s G_{||}^2}{8a^2 \rho_m \hbar \omega_Z}, \\ \mu_s &= \frac{1}{6a\omega_D^2} [1 - 8W_\infty \eta_s (\Lambda_s - 1)], \quad \Lambda_s = \frac{3\omega_D^2}{16\omega_Z^2}, \\ \beta_s &= \frac{\Gamma}{a}, \quad \gamma_s = \frac{56\Gamma^2}{3a} \left( 1 - \frac{9W_\infty \eta_s G_{||}^2}{7(8\Gamma \hbar \omega_Z)^2} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что вследствие перенормировки коэффициентов при нелинейных и дисперсионных слагаемых возникает их зависимость от частоты зеемановского расщепления, т.е. от величины приложенного внешнего магнитного поля. Слагаемое с отрицательным знаком в выражении в круглых скобках для  $\mu_s$  ответственно за пространственную нелокальность спин-фононного взаимодействия, а величина  $\eta_s \Lambda_s$ , куда входит дебаевская частота  $\omega_D = 2a/h$ , характеризует соотношение между пространственной и временной дисперсиями. Полученное уравнение справедливо и в случае, когда импульс деформации распространяется под произвольным углом к направлению магнитного поля [85]. При этом в параметрах  $a_s$ ,  $\mu_s$ ,  $\beta_s$  и  $\gamma_s$  возникают дополнительные зависимости от соответствующего угла.

Несмотря на то, что нелинейные слагаемые в (60) формально имеют характер разложения по степеням ангармонизма в тензоре деформации, перенормировка кубично-нелинейного члена за счет взаимодействия с парамагнитными примесями, находящимися в основном энергетическом состоянии ( $W_\infty = -1$ ), приводит к его росту. В связи с этим данные слагаемые могут иметь сравнимые порядки для интенсивных импульсов деформации.

В пространственно-одномерном случае (60) называют уравнением Гарднера [97]. Оно также относится к интегрируемым системам и имеет семейство солитонных решений вида

$$\varepsilon_\pm = \frac{\pm 6\mu_s / b_s \tau_s^2}{\sqrt{1 + 6\gamma_s \mu_s / (\beta_s \tau_s)^2} \cosh((\tau + \mu_s z / \tau_s^2) / \tau_s) \mp 1}, \quad (61)$$

где  $\tau_s$  имеет смысл длительности импульса, знак «+» соответствует деформации растяжения, «-» — деформации сжатия.

Решение (61) стремится к солитону КдФ вида (42) с учетом замены  $\mu_s \rightarrow \mu_T$ ,  $\beta_s \rightarrow \beta_T$ ,  $\tau_p \rightarrow \tau_s/2$  и  $\gamma_s \rightarrow 0$ . Это будет солитон, соответствующий деформации сжатия. Когда внешнее магнитное поле отсутствует, оценки параметров показывают, что амплитуда импульсов растяжения превосходит порог перехода упругой деформации в пластическую, в связи с чем их существование невозможно. При приложении внешнего магнитного поля и поддержании в системе квантовых уровней инверсии населенностей  $W_\infty = 1$

(например возбуждением с помощью электромагнитных волн терагерцовой частоты) коэффициенты перед слагаемыми, соответствующими дисперсии и кубичной нелинейности, могут изменить знак. Так как длительности возбуждаемых в среде импульсов гораздо меньше времен энергетической и фазовой релаксации, среда не успеет релаксировать. При таком когерентном взаимодействии становится возможным существование солитонов обеих полярностей. Так, при длительности импульса 2 пс его пиковая амплитуда без приложения магнитного поля составит  $\varepsilon_m = -10^{-5}$ . При создании зеемановского расщепления с частотой  $\omega_z = 1,75$  ТГц сформируются солитоны с той же пиковой амплитудой, но обратной полярности  $\varepsilon_m = 10^{-5}$ . Таким образом, речь идет фактически о своеобразном метаматериале с управляемыми свойствами для сверхкоротких упругих волн.

В отличие от уравнения КП уравнение Гарднера (60) в пространственно-неодномерном случае, по-видимому, не обладает свойством интегрируемости. В случае солитонов чисто акустической природы локализованные по всем пространственным переменным решения неустойчивы, что подтверждают эксперименты [87]. Следует отметить, что устойчивые решения могут возникнуть при нахождении системы парамагнитных ионов в возбужденном состоянии, когда коэффициент дисперсии  $\mu_s < 0$ . Действительно, в этом случае численное моделирование предсказывает формирование структур, напоминающих «лампы» уравнения КП (рис. 6).

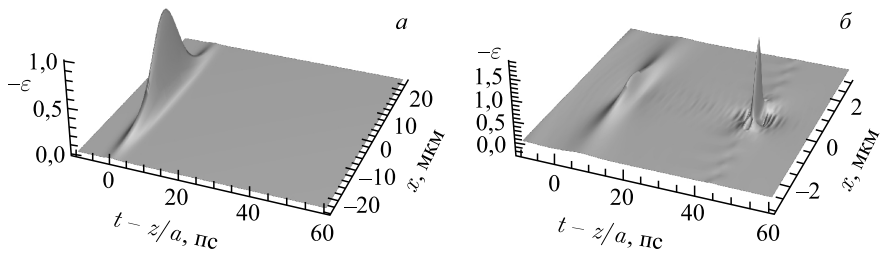


Рис. 6. Формирование неодномерных акустических солитонов в среде с инверсией населенностей квантовых уровней: *а*) импульс на входе в среду; *б*) при пробеге в кристалле 3 мм. Приведены распределения поля деформаций в плоскости  $xz$ , нормированные на величину  $\varepsilon_m = 10^{-5}$

**2.2. Структурные переходы в цепи ДНК.** Молекула ДНК является неотъемлемой частью живых организмов. В последние годы был выполнен целый ряд попыток моделирования функционирования ДНК [98] и белков [99] в рамках нелинейных динамических систем. Значительные усилия в этой области были применены для описания конформационных переходов в ходе процессов транскрипции [100–107], тепловой денатурации [108–110], переходов между формами А-В и В-З [111, 112], а также при приложении внешнего механического напряжения [113, 114].

Еще в самом начале исследований интегрируемых нелинейных систем были предсказаны различные типы солитонов в ДНК, в том числе конформационные солитоны [100], электросолитоны [28] и некоторые другие. Нас будет интересовать первый тип. В нелинейных моделях ДНК обычно учитывается ограниченное число степеней свободы. В основном эти степени свободы включают поперечные движения, такие как растяжение водородной связи [108, 109, 115], а также вращение и кручение оснований или остова [100–105] и продольные деформации [116].

В то время как в большинстве моделей учитывается только одна степень свободы, геликоидальная модель раскрытия скручивания ДНК [106] включает в себя как растяжение водородных связей, так и скручивание сахарофосфатного остова, чтобы сохранить геометрическую структуру спирали. Она была успешно применена для описания транскрипции [107, 117] и процесса денатурации [110, 113]. В последнем случае исходная модель была расширена для лучшего воспроизведения экспериментальных результатов.

Было продемонстрировано существование в этой модели солитонов НУШ [106, 118], а также открытых состояний ДНК [107, 117], которые не обладают свойством сохранения формы после столкновений. В связи со сложностью данной модели можно предположить наличие в ней других типов солитонов.

Конформационные модели ДНК описывают движения больших групп атомов, поэтому соответствующее описание часто строится с применением аппарата классической механики. Так, в геликоидальной модели ДНК [106] пара оснований, прикрепленная к сахарному кольцу, моделируется как точечная масса. Фосфатный остов между двумя парами оснований моделируется как упругий стержень. В модели учитываются только симметричные поперечные движения пар оснований по отношению к оси молекулы, поэтому используется полярная система координат. Радиальное положение  $n$ -го основания в паре характеризуется  $R_n$ , а угол поворота обозначается  $\theta_n$  (рис. 7). Расстояние  $h$  между двумя соседними парами оснований считается постоянным. Все пары нуклеотидов имеют примерно одинаковую приведенную массу  $m$ .

Лагранжиан системы имеет вид [106]

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_n [m(\dot{R}_n^2 + R_n^2 \dot{\theta}_n^2) - 2D(e^{-a(R_n - R_0)} - 1)^2 - K(L_{n,n+1} - L_0)^2 - C(R_{n+1} - R_n)^2 e^{-b(R_{n+1} + R_n - 2R_0)} - G(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n)^2], \quad (62)$$

где длина цепи остова равна

$$L_{n,n+1} = [h^2 + R_n^2 + R_{n+1}^2 - 2R_n R_{n+1} \cos(\theta_{n+1} - \theta_n)]^{1/2}.$$

Первый член в (62) соответствует кинетической энергии, а следующий — описывает водородные связи, связывающие основания в паре. Связь между

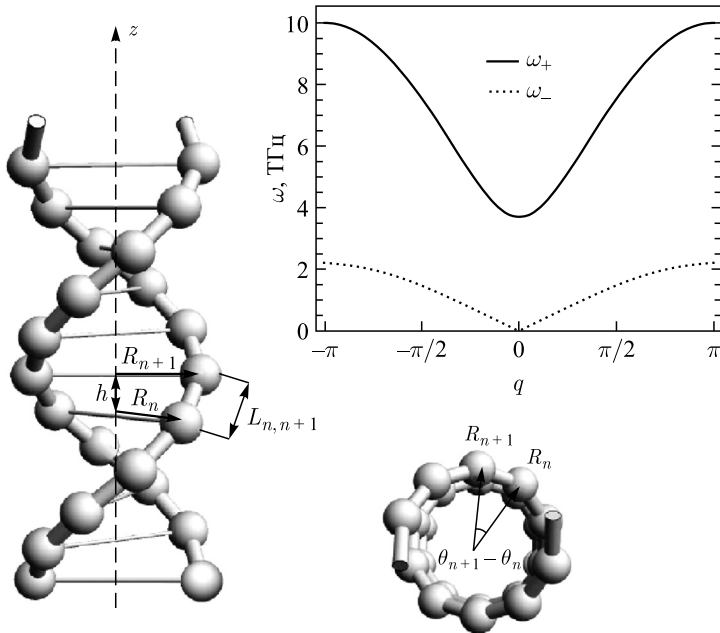


Рис. 7. Геликоидальная модель спирали ДНК и соответствующий закон дисперсии

комплементарными основаниями представляет собой хорошо известный потенциал Морзе, где  $D$  обозначает энергию диссоциации,  $a$  задает пространственный масштаб потенциала,  $R_0$  — равновесное расстояние между двумя основаниями в паре. Следующий член моделирует взаимодействия в укладке соседних пар оснований (стекинг-взаимодействие). Его эффект заключается в уменьшении жесткости открытых частей цепи относительно замкнутых и стабилизации по отношению к денатурации одной пары оснований. Выражение данного типа было введено в расширенной версии геликоидальной модели [110, 113], чтобы правильно описывать кооперативные эффекты, близкие к переходу плавления [109]. Здесь  $C$  — энергия стекинг-взаимодействия с соответствующим пространственным масштабом  $b$ . Следующее слагаемое представляет собой упругую энергию стержней основной цепи между соседними парами оснований на каждой нити с константой связи  $K$ . Поскольку равновесная длина остова  $L_0 = \sqrt{h^2 + 4R_0^2 \sin^2(\theta_0/2)}$  больше  $h$ , необходим наклон каждой нити для минимизации энергии в типичной геликоидальной структуре. Равновесный угол скручивания  $\theta_0$  между двумя соседними парами оснований соответствует структуре В-DNA. Также введен учет кривизны с константой связи  $G$ , чтобы предотвратить вырожденное поведение, позволяющее ДНК вместо спирали переходить в зигзагообразную структуру.

Записывая уравнения движения, соответствующие (62), и выполняя их линеаризацию с подстановкой анзаца типа плоской волны  $R_n, \theta_n \sim e^{i(\omega t - qn)}$  с частотой  $\omega$  и волновым числом  $q$ , можно получить закон дисперсии  $\omega(q)$  в следующем виде:

$$\omega_{\pm}^2(q) = C_1 + C_2 \pm \sqrt{(C_1 - C_2)^2 + C_3^2}, \quad (63)$$

где

$$C_1 = \frac{\omega_0^2}{2} + 2 \left( \sigma - 4\kappa \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \right) \sin^2 \frac{q}{2},$$

$$C_2 = 2\kappa \sin^2 \theta_0 \sin^2 \frac{q}{2} + 8g \sin^4 \frac{q}{2},$$

$$C_3 = 4\kappa \sin \theta_0 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin q.$$

В этих уравнениях  $\kappa = Ks/m$ ,  $s = R_0^2/L_0^2$ ,  $\sigma = C/m$ ,  $g = G/m$ , а  $\omega_0 = \sqrt{2Da^2/m + 16\kappa \sin^4(\theta_0/2)}$  — наименьшая частота оптической ветви дисперсии, оптические и акустические ветви обозначены знаками «+» и «-» соответственно.

Значения параметров возьмем для В-формы ДНК. В этом случае  $R_0 = 10 \text{ \AA}$ ,  $h = 3,4 \text{ \AA}$ ,  $\theta_0 = \pi/5$ ,  $m = 300 \text{ а. е. м.}$  [118]. Энергетические константы взаимодействия структурных элементов ДНК могут различаться в разных исследованиях. Здесь мы принимаем следующие значения:  $a = 4 \text{ \AA}^{-1}$ ,  $D = 0,05 \text{ эВ}$ ,  $C = 0,65 \text{ эВ} \cdot \text{\AA}^{-2}$ ,  $K = 0,04 \text{ эВ} \cdot \text{\AA}^{-2}$  и  $b = 0,15 \text{ \AA}^{-1}$ ,  $G = 0,14 \text{ эВ}$ . При таком подборе параметров частоты поперечных мод попадают в терагерцовую область (см. рис. 7), что согласуется с экспериментальными наблюдениями [119].

В дальнейшем нас будут интересовать только низкоамплитудные локализованные гладкие решения, соответствующие солитонным возбуждениям системы. Чтобы найти решение с малой амплитудой, нужно выполнить пертурбативное разложение системы уравнений движения с частотой одной из нормальных мод. Изучая деформации ДНК под действием тепловых флуктуаций, авторы предыдущих работ исследовали поведение локализованной радиальной деформации водородных связей. В этом случае в качестве несущей волны нужно выбрать возбуждение на оптической ветви с ненулевой частотой  $\omega_+ \geq \omega_0$  с небольшим волновым числом, что соответствует малым радиальным колебаниям. Это приводит к малоамплитудным бризерным решениям, описываемым НУШ [106]. Здесь мы рассмотрим ранее не изученные нелинейные модели, в которых происходит возбуждение и акустической ветви колебаний  $\omega_-(q)$ . С биологической точки зрения такие модели могут быть более важны, так как в них учитывается раскручивание спирали ДНК, которое имеет место, например, в ходе процесса транскрипции.

Введем следующие безразмерные переменные:

$$u_n = \frac{R_n}{R_0 - 1}, \quad \phi_n = \theta_n - n\theta_0.$$

Очевидно, что в равновесном состоянии ДНК  $u$  и  $\phi$  стремятся к нулю.

Удобно также ввести вспомогательную переменную

$$\varphi_n = \theta_n - \theta_{n-1} - \theta_0 = \phi_n - \phi_{n-1},$$

которая характеризует относительное отклонение от равновесного угла закручивания двойной спирали  $\theta_0$ .

Для описания гладких локализованных деформаций перейдем от дискретных величин  $u_n, \phi_n$  к непрерывным  $u(z, t), \phi(z, t)$  в соответствии со следующими выражениями:

$$u_{n\pm 1}(t) \rightarrow \left(1 \pm h \frac{\partial}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots\right) u(z, t), \quad (64)$$

$$\phi_{n\pm 1}(t) \rightarrow \left(1 \pm h \frac{\partial}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots\right) \phi(z, t). \quad (65)$$

Здесь  $z$  — координата вдоль оси симметрии спирали ДНК.

В результате уравнения, описывающие динамику цепи ДНК, примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & (1+u)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \omega_0^2 u + a_2 u^2 - a_3 u^3 - a_{uf} h \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3}\right) + \\ & + \left(\sigma - \frac{a_u}{4}\right) h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right) - 2a_{2uf} h u \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_{2f} h^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 - \\ & - a_{uu} h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - 2(a_{uu} + 2\beta\sigma) h^2 u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = & -2(1+u) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + a_{uf} h \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right) + a_f h^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \\ & + (a_f - g) \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + a_{2uf} h u \frac{\partial u}{\partial z} + a_{2f} h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + u \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right), \quad (67) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$a_u = 16\kappa s \sin^4 \frac{\theta_0}{2}, \quad a_f = \kappa s \sin^2 \theta_0, \quad a_{uf} = 4\kappa s \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \theta_0,$$

$$\begin{aligned}
 a_{2u} &= 2\kappa s \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \left( 1 - 4s \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right), \\
 a_{2uf} &= 4\kappa s \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0 \left( 5 - 12s \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right), \\
 a_{2f} &= 2\kappa s \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \left( 5 - 6(1+s) \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + 6s \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \right), \\
 a_2 &= \left( \frac{3\alpha(\omega_0^2 - a_u)}{2} - a_{2u} \right), \\
 a_{uu} &= 2\kappa s \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \left( 2 - (4 - 6s) \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + 6s \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \right), \\
 a_3 &= 7\alpha^2 (\omega_0^2 - a_u)^2 / 6.
 \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было проделано в разд. 1, выделим частотные компоненты

$$u = u_0 + u_1 e^{i(\omega t - kz)} + u_2 e^{2i(\omega t - kz)} + \text{с. с.}, \quad (68)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 e^{i(\omega t - kz)} + \phi_2 e^{2i(\omega t - kz)} + \text{с. с.} \quad (69)$$

Анализ условий синхронного взаимодействия показывает, что эффективное взаимодействие между колебаниями оптической и акустической мод полимера можно, например, осуществить при выполнении синхронизма длинных и коротких волн, т. е. когда  $\partial\omega_+/\partial k = \omega_-/k$ . В этом случае лидирующий вклад в решение дает взаимодействие компонент  $u_1$  и  $\phi_0$ .

Подстановка (68) и (69) в (66), (67) с применением приближений медленно меняющихся огибающих и адиабатического следования приводит к следующим соотношениям для компонент решения:

$$u_2 = -Q_{2u} u_1^2, \quad \phi_2 = iQ_{2f} u_1^2, \quad (70)$$

$$u_0 = -\frac{a_{uf} h}{\omega_0^2} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial z} + h^2 \left( \sigma - \frac{a_u}{4} \right) \frac{\partial^3 \phi_0}{\partial z^3} \right) + Q_{0u} |u_1|^2 u_1, \quad (71)$$

$$\phi_1 = iq_{0f} u_1 - q_{1f} \frac{\partial u_1}{\partial z} + iq_{2f} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + iQ_{0f} u_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} + iQ_{1f} |u_1|^2 u_1, \quad (72)$$

а искомые величины  $u_1$  и  $\phi_0$  удовлетворяют уравнениям длинно-коротковолнового резонанса

$$i \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{q_{2u}}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} - Q_{1u} \varphi u_1 = 0, \quad (73)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + Q_{0f} \frac{\partial}{\partial \zeta} (|u_1|^2) = 0, \quad (74)$$



где  $\varphi = \partial\phi_0/\partial z$ ,  $\zeta = z - v_g t$ ,  $v_g = \partial\omega_+/\partial k$ . При их выводе были опущены слагаемые с нелинейностями выше второго порядка, а также члены со степенями  $h$  выше второй, а к уравнению (67) применялось приближение медленно меняющегося профиля. Детальные выражения для коэффициентов  $q_{ij}$ ,  $Q_{ij}$  вследствие их громоздкости не приводятся.

В случае, когда  $\partial\omega_+/\partial k \neq \omega_-/k$ , из (69) следует

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial z} = -\frac{Q_{0f}}{\Delta}, \quad (75)$$

где  $\Delta = v_g - \omega_-/k$  — соответствующая расстройка скоростей.

Тогда вместо системы (73), (74) из (66), (67) с учетом (71), (72), (75) получим НУШ

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{q_{2u}}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} - Q|u_1|^2 u_1 = 0. \quad (76)$$

Данное уравнение было выведено в оригинальных работах [106, 118, 120].

Можно показать [121], что возбуждения, принадлежащие только акустической моде, также удовлетворяют известному солитонному уравнению. Зануляя осциллирующие слагаемые в (68) и (69) и подставляя (71) в (67) с применением приближения медленно меняющегося профиля, снова придем к уравнению КдФ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \beta_f\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \mu_f\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi^3} = 0, \quad (77)$$

где  $\xi = z - v_0 t$ ,  $v_0 = \omega_-/k$ . Коэффициенты при нелинейном и дисперсионном слагаемом не приводятся вследствие излишней громоздкости.

В отличие от предыдущего рассмотрения данные уравнения строго одномерные, а дисперсия в них является пространственной, что отражает структуру полимера. Иллюстрации солитонных решений приведены на рис. 8 и 9. Отметим, что решение КдФ соответствует относительно сильному кручению двойной спирали, вследствие чего его можно назвать крутильным солитоном. В случае же длинно-коротковолновых солитонов основной вклад вносят осцилляции нуклеотидов. Оценки параметров и численное моделирование показывают, что крутильные солитоны медленнее солитонов, принадлежащих оптической моде. Их характерные групповые скорости составляют  $v = 0,31$  и  $v_g = 1,1$  км/с соответственно.

Ясно, что в реальных условиях эффекты диссипации (трение) приводят к ограниченному времени жизни молекулярных солитонов, что затрудняет их экспериментальное обнаружение, а также выявление их потенциальных биологических функций. С другой стороны, внешнее воздействие с помощью электромагнитных или акустических волн на резонансной частоте может привести к эффективному взаимодействию с молекулярными солитонами и повышению времени их жизни. Электромагнитные поля терагерцовых частот

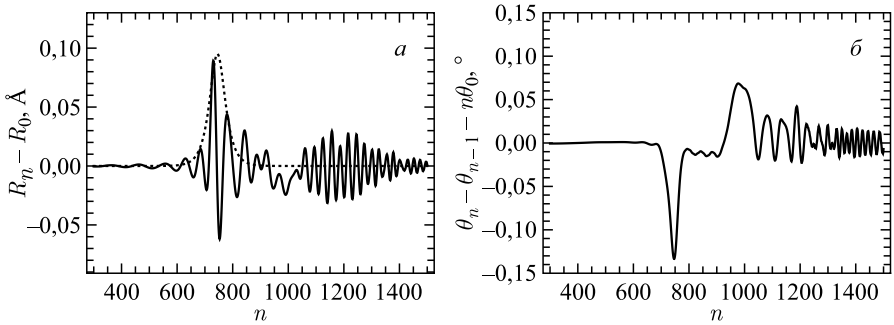


Рис. 8. Распространение связанного состояния деформации связей между основаниями (а) и раскручивание цепи ДНК (б) при выполнении условия синхронизма длинных и коротких волн

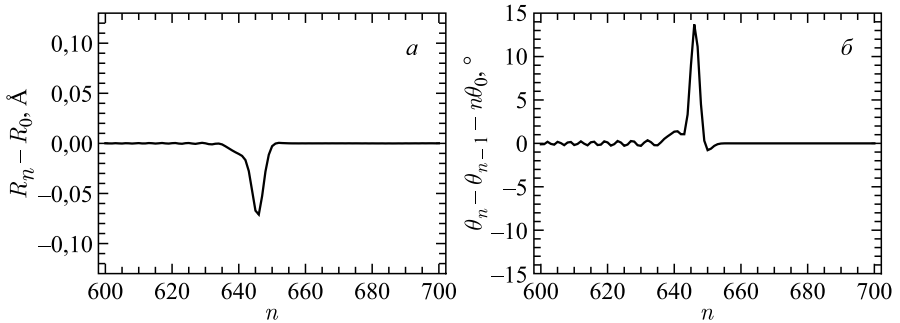


Рис. 9. Распространение крутильного солитона в ДНК. Сильное перекручивание двойной спирали (б) сопровождается малой компрессией связей между основаниями (а)

на масштабе участка ДНК в несколько десятков нуклеотидов можно считать пространственно-однородными. Это значит, что их пространственная фазовая синхронизация возможна только с солитоном с нулевой групповой скоростью. Кроме того, молекула ДНК хорошо заэкранирована от внешних электрических полей. Таким образом, эффективное взаимодействие следует ожидать по параметрическому механизму, когда в молекулярной цепи уже присутствует возбуждение — солитон. С учетом сказанного придем к простейшей модели такого взаимодействия [122, 123]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{q_{2u}}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - Q |\psi|^2 \psi = -\frac{i\gamma}{2} \psi + \frac{\varepsilon_0}{2} \psi^* e^{i\delta t}, \quad (78)$$

где постоянная  $\gamma$  пропорциональна коэффициенту трения,  $\varepsilon_0$  пропорционально величине амплитуды внешнего электрического поля, а  $\delta$  характеризует отстройку его частоты  $\omega_0$  от частоты оптической моды колебаний  $\omega_+$ . Отме-

тим, что угловая компонента деформации здесь не испытывает синхронизма с поперечными осцилляциями ( $v_g = 0$ ), вследствие чего базовой моделью является НУШ (76).

Решение (78) в виде диссипативного солитона может быть получено методами солитонной теории возмущений [124]:

$$u_s = i\sqrt{\frac{q_{2u}}{Q}}\rho \operatorname{sech}[\rho z] e^{i\Phi}, \quad (79)$$

$$\Phi_{\text{ph}\pm}(t) = \frac{1}{2} \left( \delta t \mp \arccos \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \right), \quad (80)$$

$$\rho_{\pm} = \sqrt{\frac{\delta}{q_{2u}} \pm \frac{2\varepsilon_0}{q_{2u}} \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)^2}}. \quad (81)$$

Его амплитуда и фаза зависят только от параметров среды и внешнего воздействия, а на величину внешнего воздействия накладывается пороговое ограничение  $\varepsilon_0 > \gamma$ . Естественно предположить, что описанный эффект может прямо или косвенно участвовать в ответе живых организмов на терагерцовое излучение.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современное развитие техники генерации когерентных колебаний электромагнитной и акустической природы позволило, наконец, перекрыть брешь в области терагерцовых частот. Приведенный обзор лишь нескольких активно развивающихся областей свидетельствует о богатом спектре нелинейных явлений солитонной природы в конденсированных средах в данной спектральной области. Так, уже в ходе процесса нелинейно-оптической генерации терагерцовых импульсов последние могут сформировать солитоны, которые представляют собой широкополосные сигналы вплоть до половины колебания электромагнитного поля. Не отстает от нелинейной оптики и акустика ультракоротких импульсов, шагнувшая в пикосекундный диапазон. Проведение взаимных аналогий является весьма перспективным в данных областях. Как обсуждается в последнем разделе обзора, развитие терагерцовой техники в принципе может позволить наблюдать быстропротекающие процессы типа внутримолекулярных структурных переходов в биомолекулах, а в перспективе и осуществлять управление ими. Примечательно, что и здесь соответствующие нелинейные процессы могут быть связаны с динамикой солитонов.

Высокая структурная стабильность солитонных решений делает их перспективным инструментом для исследования конденсированных сред и их модификации. Весьма актуальной задачей является управление свойствами образцов, в которых происходит формирование терагерцовых солитонов. Так,

например, допирование акустических кристаллов парамагнитными центрами, а также использование несимметричных наноструктур или полярных молекул в нелинейно-оптических композитных материалах может позволить как более эффективно генерировать солитонные импульсы, так и перестраивать параметры последних в широких пределах.

**Благодарности.** Автор выражает глубокую признательность С. В. Сазонову за многолетнее сотрудничество и помощь. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-02-00453).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lee Yun-Shik*. Principles of Terahertz Science and Technology. New York: Springer, 2009.
2. *Carr G. L., Martin M. C., McKinney W. R. et al.* // Nature. 2002. V. 420. P. 153–156.
3. *Kulipanov G. N., Gavrilov N. G., Knyazev B. A. et al.* // Terahertz Science and Technol. 2008. V. 1. P. 107–125.
4. *Yuzhen Shen, Xi Yang, Carr G. L. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. P. 204801.
5. *Kitaeva G. Kh.* // Laser Phys. Lett. 2008. V. 5, No. 8. P. 559–576.
6. *Hoffmann M. C., Fulop J. A.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2011. V. 44, No. 8. P. 083001.
7. *Bass M., Franken P. A., Ward J. F., Weinreich G.* // Phys. Rev. Lett. 1962. V. 9, No. 11. P. 446–448.
8. *Морозов Б. Н., Айвазян Ю. М.* // Квантовая электроника. 1980. Т. 7, вып. 1. С. 5–33.
9. *Ахманов С. А., Гусев В. Э.* // УФН. 1992. Т. 162, вып. 3. С. 3–87.
10. *van Capel P. J. S., Dijkhuis J. I.* // Phys. Rev. B. 2010. V. 81, No. 14. P. 144106.
11. *Matsuda O., Larciprete M. C., Voti R. L., Wright O. B.* // Ultrasonics. 2015. V. 56. P. 3.
12. *van Capel P. J. S., Peronne E., Dijkhuis J. I.* // Ibid. P. 36.
13. *Czerniuk T., Ehrlich T., Wecker T. et al.* // Phys. Rev. Appl. 2017. V. 7. P. 014006.
14. *Casiraghi A., Walker P., Akimov A. V. et al.* // Appl. Phys. Lett. 2011. V. 99, No. 26. P. 262503.
15. *Bombeck M., Jager J. V., Scherbakov A. V. et al.* // Phys. Rev. B. 2013. V. 87, No. 6. P. 060302.
16. *Scherbakov A. V., van Capel P. J. S., Akimov A. V. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99, No. 5. P. 057402.
17. *Young E. S. K., Akimov A. V., Henini M. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108, No. 22. P. 226601.
18. *Fedorov V. I. et al.* // Biophysics. 2001. V. 46, No. 2. P. 293–297.
19. *Alexandrov B. S. et al.* // Phys. Lett. A. 2010. V. 374, No. 10. P. 1214–1217.
20. *Bock J. et al.* // PLoS Biol. 2010. V. 5, No. 12. P. e15806.
21. *Hauri C. P., Ruchert C., Vicario C., Ardana F.* // Appl. Phys. Lett. 2011. V. 99, No. 16. P. 161116.

22. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
23. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
24. Инфельд Э., Роуландс Дж. Нелинейные волны, солитоны и хаос. М.: Физматлит, 2006.
25. Кившарь Ю. С., Агравал Г. П. Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит, 2005.
26. Захаров В. Е. // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, вып. 5. С. 1745–1759.
27. Benney D. J. // Stud. Appl. Math. 1977. V. 56, No. 1. P. 81–94.
28. Давыдов А. С., Кислюха Н. И. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, вып. 3. С. 1090–1098.
29. Nahata A., Welington A. S., Heinz T. F. // Appl. Phys. Lett. 1996. V. 69, No. 16. P. 2321–2323.
30. Аскарьян Г. А. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42, вып. 5. С. 1360–1364.
31. Абдуллин У. А., Ляхов Г. А., Руденко О. В., Чиркин А. С. // ЖЭТФ. 1974. Т. 66, вып. 4. С. 1295–1304.
32. Багдасарян Д. А., Макарян А. О., Погосян П. С. // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37, вып. 10. С. 498–500.
33. Auston D. H., Cheung K. P., Valdmanis J. A., Kleinman D. A. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53, No. 16. P. 1555–1558.
34. Bodrov S. B., Stepanov A. N., Bakunov M. I. et al. // Opt. Express. 2009. V. 17, No. 3. P. 1871–1879.
35. Lee Y. S., Meade T., Perlin V. et al. // Appl. Phys. Lett. 2000. V. 76, No. 18. P. 2505–2507.
36. Vodopyanov K. L., Fejer M. M., Yu X. et al. // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 89, No. 14. P. 141119.
37. Hebling J., Almasi G., Kozma I. Z., Kuhl J. // Opt. Express. 2002. V. 10, No. 21. P. 1161–1166.
38. Huang S. W., Granados E., Huang W. R. et al. // Opt. Lett. 2013. V. 38, No. 5. P. 796–798.
39. Chowdhury A., Tataronis J. A. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100, No. 15. P. 153905.
40. Ahn J., Efimov A. V., Averitt R. D., Taylor A. J. // Opt. Express. 2003. V. 11, No. 20. P. 2486–2496.
41. Vidal S., Degert J., Oberle J., Freysz E. // J. Opt. Soc. Am. B. 2010. V. 27, No. 5. P. 1044–1050.
42. Zhang C., Avetisyan Y., Glosser A. et al. // Opt. Express. 2012. V. 20, No. 8. P. 8784–8790.
43. Попов А. К., Мысливец С. А., Тиман Е. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69, вып. 12. С. 862–866.
44. Bugay A. N., Sazonov S. V. // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 1093–1096.
45. Бугай А. Н., Сазонов С. В. // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 92, вып. 4. С. 260–266.
46. Бугай А. Н., Сазонов С. В. // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 98, вып. 10. С. 713–719.
47. Gaizauskas E., Vaicaitis V., Fedotova O., Khasanov O. // Opt. Mater. Express. 2015. V. 5, No. 3. P. 623–628.

48. Сазонов С. В., Соболевский А. Ф. // ЖЭТФ. 2003. Т. 123, вып. 6. С. 1–19.
49. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
50. Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988.
51. Nikogosyan D. N. Nonlinear Optical Crystals: A Complete Survey. New York: Springer, 2005.
52. Boyd G. D., Pollack M. A. // Phys. Rev. B. 1973. V. 7, No. 12. P. 5345–5359.
53. Козлов С. А., Сазонов С. В. // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, вып. 2. С. 404–418.
54. Kazantseva E. V., Maimistov A. I., Caputo J. G. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 056622.
55. Dolgaleva K., Materikina D. V., Boyd R. W., Kozlov S. A. // Phys. Rev. A. 2015. V. 92. P. 023809.
56. Сазонов С. В. // ЖЭТФ. 2001. Т. 119, вып. 3. С. 419–433.
57. Leblond H., Mihalache D. // Phys. Rep. 2013. V. 523. P. 61–126.
58. Vogt H. // Phys. Rev. B. 1998. V. 58, No. 15. P. 9916.
59. Yang W., Gong S., Li R., Xu Z. // Phys. Rev. A. 2006. V. 74, No. 1. P. 013407.
60. Kocinas M., Iconic Z., Milanovic V. // Opt. Commun. 1997. V. 140. P. 89–92.
61. Warburton R. J., Schulhauser C., Haft D. et al. // Phys. Rev. B. 2006. V. 65, No. 11. P. 113303.
62. Brabec T., Krausz F. // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72, No. 2. P. 545–591.
63. Маймистов А. И. // Квант. электрон. 2000. Т. 30, вып. 4. С. 287–304.
64. Бугай А. Н., Сазонов С. В. // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87, вып. 8. С. 470–476.
65. Степанов А. Г., Мельников А. А., Компанец В. О., Чекалин С. В. // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т. 85, вып. 5. С. 279–282.
66. Сазонов С. В., Соболевский А. Ф. // Квантовая электроника. 2005. Т. 35, вып. 11. С. 1019–1026.
67. Yajima N., Oikawa M. // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 56, No. 6. P. 1719–1739.
68. Заболотский А. А. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, вып. 11. С. 33–45.
69. Сазонов С. В., Устинов Н. В. // ЖЭТФ. 2005. Т. 127, вып. 2. С. 289–307.
70. Лэм Л. Дж. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983.
71. Sazonov S. V. // Roman. Rep. Phys. 2018. V. 70, No. 1. P. 401.
72. Архипов Р. М., Пахомов А. В., Архипов М. В. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 105, вып. 6. С. 388–400.
73. Сазонов С. В. // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. С. 1409.
74. Сазонов С. В. // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. С. 145.
75. Bugay A. N., Sazonov S. V. // Phys. Rev. E. 2006. V. 74, No. 6. P. 066608-1–066608-8.
76. Бункин Ф. В., Кравцов Ю. А., Ляхов Г. А. // УФН. 1986. Т. 149, вып. 3. С. 391–411.
77. Нагибаров В. Р., Коввиллем У. Х. // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, вып. 4. С. 936–942.
78. Shiren N. S. // Phys. Rev. B. 1970. V. 2. P. 2471–2487.
79. Sazonov S. V. // J. Phys. Condens. Matter. 1992. V. 4, No. 30. P. 6485–6490.

80. *Sazonov S. V., Yakupova L. S.* // J. Phys. Cond. Matter. 1992. V. 4, No. 30. P. 6479–6484.
81. *Sazonov S. V.* // J. Phys. Condens. Matter. 1994. V. 6. P. 6295–6304.
82. *Сазонов С. В.* // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. С. 20–35.
83. *Zabolotskii A. A.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 066606.
84. *Бугай А. Н., Сазонов С. В.* // ФТТ. 2005. Т. 47, вып. 10. С. 1839–1845.
85. *Бугай А. Н., Сазонов С. В.* // ФТТ. 2007. Т. 49, вып. 1. С. 113–120.
86. *Сазонов С. В., Устинов Н. В.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 129, вып. 5. С. 849–862.
87. *НАО Н.-У., Марис Н. J.* // Phys. Rev. B. 2001. V. 64. P. 064302.
88. *Singhsomroje W., Maris H. J.* // Phys. Rev. B. 2004. V. 69, No. 17. P. 174303.
89. *Peronne E., Chuecos N., Thevenard L., Perrin B.* // Phys. Rev. B. 2017. V. 95. P. 064306.
90. *Голенищев-Кутузов В. А., Самарцев В. В., Соловаров Н. К., Хабибулин Б. М.* Марнитная квантовая акустика. М.: Наука, 1977.
91. *Такер Дж., Рэмттон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. М.: Мир, 1975.
92. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Физматгиз, 1963.
93. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.
94. *Браун О. М., Кившарь Ю. С.* Модель Френкеля–Конторовой. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008.
95. *Jacobsen E. H., Stevens K. W. H.* // Phys. Rev. 1963. V. 129. P. 2036.
96. *Беленов Э. М., Назаркин А. В., Уцятовский В. А.* // ЖЭТФ. 1991. Т. 100, вып. 3. С. 762–775.
97. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
98. *Якушевич Л. В.* Нелинейная физика ДНК. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2007.
99. *Давыдов А. С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наук. думка, 1984.
100. *Englander S. W., Kallenbach N. R., Heeger A. J. et al.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1980. V. 77, No. 12. P. 7222–7226.
101. *Yomosa S.* // Phys. Rev. A. 1983. V. 27, No. 4. P. 2120–2125.
102. *Takeno S., Homma S.* // Prog. Theor. Phys. 1983. V. 70. P. 308–311.
103. *Fedyanin V. K., Lisy V.* // Stud. Biophys. 1986. V. 116. P. 65–77.
104. *Yakushevich L. V.* // Phys. Lett. A. 1989. V. 136. P. 413–417.
105. *Yakushevich L. V., Savin A. V., Manevitch L. I.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 016614.
106. *Barbi M., Cocco S., Peyrard M.* // Phys. Lett. A. 1999. V. 253. P. 358–369.
107. *Campa A.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 021901.
108. *Peyrard M., Bishop A. R.* // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62, No. 23. P. 2755–2758.
109. *Dauxois T., Peyrard M., Bishop A. R.* // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. R44.
110. *Barbi M., Lepri S., Peyrard M., Theodorakopoulos N.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 061909.
111. *Volkov S. N.* // J. Theor. Biol. 1990. V. 143. P. 485.

112. *Lim W.* // *Phys. Rev. E.* 2007. V.75. P.031918.
113. *Cocco S., Monasson R.* // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V.83. P.5178.
114. *Kumar S., Li M.S.* // *Phys. Rep.* 2010. V.486. P.1.
115. *Zdravkovic S.* // *J. Nonlin. Math. Phys.* 2011. V.18. P.463.
116. *Christiansen P.L., Lomdahl P.S., Muto V.* // *Nonlinearity.* 1991. V.4. P.447.
117. *Gaeta G., Venier L.* // *Phys. Rev. E.* 2008. V.78. P.011901.
118. *Tabi C.B.* // *J. Phys. Condens. Matter.* 2010. V.22. P.414107.
119. *Powell J.W., Edwards G.S., Genzel L. et al.* // *Phys. Rev. A.* 1987. V.35. P.3929.
120. *Tabi C.B., Mohamadou A., Kofane T.C.* // *Phys. Lett. A.* 2009. V.373. P.2476.
121. *Bugay A.N., Aru G.F.* // *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* 2014. V.17, No.1. P.1–9.
122. *Бугай А. Н.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2011. Т.75, вып.12. С.1681–1683.
123. *Bugay A.N.* // *Nanosystems: Phys. Chem. Math.* 2012. V.3, No.1. P.51–55.
124. *Gronbech-Jensen N., Kivshar Yu.S., Samuelsen M.R.* // *Phys. Rev. B.* 1991. V.43, No.7. P.5698.