

## АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ В РАМКАХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МНОГИХ ТЕЛ

*М. И. Шитов* \*, *С. П. Камерджиев*

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва

Представлен краткий обзор результатов самосогласованной теории ангармонических эффектов второго и третьего порядков по амплитуде рождения фононов, основанной на квантовой теории многих тел. Проведен численный (для эффектов второго порядка) и теоретический анализ новых, т. е. трех- и четырехквазичастичных, корреляций в основном состоянии (backward-going graphs) в магических ядрах и в ядрах со спариванием. Получена формула для вероятности перехода между однофононным и двухфононным состояниями, и выполнено ее сравнение с решением аналогичной задачи в рамках квазичастично-фононной модели. Показано, что использованный подход содержит ряд новых эффектов.

A short review of results of the self-consistent theory of second- and third-order anharmonic effects in phonon creation amplitude is given within the nuclear quantum many-body approach. A quantitative (for second-order effects) and general analysis of new, i.e. three- and four-quasiparticle correlations in the ground state (backward-going graphs) is performed for nuclei with and without pairing. The expression for the probability of transition between two-phonon and one-phonon states is derived and a comparison with the analogous formula obtained within the quasiparticle-phonon model is performed. It is shown that the approach under consideration contains new effects.

PACS: 44.25.+f; 44.90.+c

### ВВЕДЕНИЕ

Ангармонические эффекты, которые количественно изучались в ядерной физике низких энергий, т. е. при энергиях возбуждения до 30–40 МэВ, можно разделить на два вида: эффекты второго и третьего порядков по амплитуде рождения фонона  $g$ , если предполагается относительно слабый ангармонизм, когда существует малый параметр по амплитуде рождения фонона  $g$  (в дальнейшем эффекты  $g^2$  и  $g^3$ ). Указанный параметр существует для магических ядер [1] и полумагических ядер [2].

---

\*E-mail: Shitov\_MI@nrcki.ru

Ангармонические поправки  $g^2$  для магических ядер изучались давно в рамках теории ядерных полей (ТЯП) [1, 3], метода функций Грина (ФГ) [4]. Для ядер со спариванием они рассматривались в рамках ТЯП [5], метода ФГ [6, 7] и квазичастично-фононной модели (КФМ) [8, 9] (подробнее см. [7]).

В [7] впервые было сказано о новом эффекте трехквазичастичных корреляций в основном состоянии (КОС), которые, как оказалось, велики (в отличие от двухквазичастичных КОС, имеющих в стандартном (квазичастичном) методе хаотических фаз ((К)МХФ)) и объясняют половину эффекта. Следует отметить, что эти новые КОС в  $g^2$ -подходе фактически учитывались в рамках ТЯП [5] и метода ФГ [6, 10], но количественно они не выделялись и не назывались.

Большую роль в изучении эффектов второго и третьего порядков сыграла работа [11] для магических ядер, основанная на методе ФГ и теории конечных ферми-систем (ТКФС) [12] и использующая условия согласования между средним полем и эффективным ядерным взаимодействием, что позволило избежать введения новых параметров. Исходным положением здесь является использование МХФ (точнее, приближения Бора–Моттельсона для расчета амплитуды  $g$ ) и эффектов так называемого фононного тэдпола (tadpole), который по определению содержит величину  $\delta_{1g_2} \equiv g_{12}$ , где  $\delta_{1g_2}$  есть вариация амплитуды рождения фонона 2 в поле фонона 1 (подробнее см. [13]).

## 1. АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**1.1. Общие соотношения.** Мы используем факт существования малого параметра

$$\alpha = \frac{|\langle 1 || g_s || 2 \rangle|^2}{(2j_1 + 1)\omega_s^2} \ll 1 \quad (1)$$

для магических и полумагических ядер, где  $\langle 1 || g_s || 2 \rangle$  — приведенный матричный элемент амплитуды рождения фонона с энергией  $\omega_s$ . Учет всех  $g^2$ -членов обеспечивается использованием метода фононного тэдпола, т. е. за счет учета неполюсных поправок к массовому оператору рождения фонона.

Основные уравнения ТКФС, описывающие, соответственно, поляризуемость ядра и амплитуду рождения фонона, имеют следующий символический вид:

$$\widehat{V} = \widehat{V}_0 + \widehat{F}\widehat{A}\widehat{V}, \quad (2)$$

$$\widehat{g}_L = \widehat{F}\widehat{A}\widehat{g}, \quad (3)$$

где все члены уравнения являются матрицами.

Неполюсная диаграмма (так называемый тэдпол) есть свертка ФГ с величиной  $\delta_{1g_2} \equiv g_{12}$ . Эта величина определяется вариацией уравнения (3)

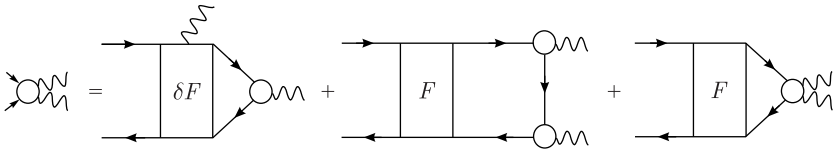


Рис. 1. Уравнения (4) для  $g_{12}$  в диаграммном виде

в поле фонона 1 и удовлетворяет интегральному уравнению, графически представленному на рис. 1:

$$g_{12} = \delta_1 F A g_2 + F(\delta_1 A) g_2 + F A g_{12}. \tag{4}$$

Во всех расчетах используется метод энергетического функционала плотности, в рамках которого ядерное среднее поле рассчитывается как первая производная по плотности от энергетического функционала, а эффективная амплитуда взаимодействия  $F$  рассчитывается как вторая вариационная производная. Используется хорошо известный набор параметров функционала Фаянса DF3-а.

В качестве примера в табл. 1 приведены результаты самосогласованных расчетов характеристик первых  $3^-$ -фононов в изотопах олова. Как видно, получено достаточно разумное описание энергий первых  $3^-$ -фононов и, что особенно важно для  $g^2$ -эффектов, хорошее описание приведенных вероятностей  $B(E3)$ .

Таблица 1. Энергии  $\omega_3$  и вероятности  $B(E3) \uparrow (e^2 b^3)$  для первых  $3^-$ -состояний изотопов олова (приводятся только ядра, для которых есть экспериментальные данные, подробнее см. [14])

$A$	$\omega_3$ , МэВ	$\omega_3^{\text{exp}}$	$B(E3)$	$B(E3)^{\text{exp}}$
112	3,221	2,355	0,102	0,087(12)
114	3,157	2,275	0,106	0,100(12)
116	3,100	2,266	0,106	0,127(17)
118	3,072	2,325	0,106	0,115(10)
120	3,069	2,401	0,112	0,115(15)
122	3,112	2,493	0,107	0,092(10)
124	3,208	2,614	0,103	0,073(10)

**1.2. Квадрупольные моменты в однофононном состоянии.** В рамках самосогласованной ТКФС [13] статический электромагнитный момент однофононного состояния с моментом  $L$  выражается через диагональный матричный элемент  $M_{LL}$ :

$$M_{LL} = V G g_L G g_L G + V G G \delta_L F G G g_L. \tag{5}$$

Для ядер со спариванием необходимо использовать четыре ФГ

$$G_1(\varepsilon) = G_1^h(-\varepsilon) = \frac{u_1^2}{\varepsilon - E_1 + i\delta} + \frac{v_1^2}{\varepsilon + E_1 - i\delta}, \quad (6)$$

$$F_1^{(1)}(\varepsilon) = F_1^{(2)}(\varepsilon) = -\frac{\Delta_1}{2E_1} \left[ \frac{1}{\varepsilon - E_1 + i\delta} + \frac{1}{\varepsilon + E_1 - i\delta} \right], \quad (7)$$

где  $E_1 = \sqrt{(\varepsilon_1 - \mu)^2 + \Delta_1^2}$ ,  $u_1^2 = (E_1 + \varepsilon_1 - \mu) / 2E_1 = 1 - v_1^2$ . В этом случае получается восемь амплитуд, две из которых показаны на рис. 2. Расчеты в [7] показали, что вклад слагаемых с  $\delta F$  и  $\delta F^\xi$  мал.

После отделения угловых переменных и вычисления интегралов от трех ФГ получается следующее окончательное выражение для амплитуды перехода:

$$M_{LL} = \sum_{123} (-1)^{L+1} \begin{pmatrix} I & L & L \\ 0 & L & -L \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I & L & L \\ j_3 & j_2 & j_1 \end{Bmatrix} V_{12} g_{31}^L g_{23}^L A_{123}^{(\text{pair})}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_{123}^{(\text{pair})} = & \left( \frac{1}{(\omega_L + E_{13})(\omega_L + E_{23})} + \frac{1}{(\omega_L - E_{13})(\omega_L - E_{23})} \right) \times \\ & \times \left[ u_1^2 u_2^2 u_3^2 - v_1^2 v_2^2 v_3^2 + \frac{\Delta_1 \Delta_2}{4E_1 E_2} (u_3^2 - v_3^2) + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta_1 \Delta_3}{4E_1 E_3} (u_2^2 - v_2^2) + \frac{\Delta_2 \Delta_3}{4E_2 E_3} (u_1^2 - v_1^2) \right] + \\ & + \frac{1}{E_{12}} \left[ \frac{2E_{23}(u_1^2 v_2^2 u_3^2 - v_1^2 u_2^2 v_3^2)}{E_{23}^2 - \omega_L^2} + \frac{2E_{13}(v_1^2 u_2^2 u_3^2 - u_1^2 v_2^2 v_3^2)}{E_{23}^2 - \omega_L^2} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\Delta_1 \Delta_2}{4E_1 E_2} (u_3^2 - v_3^2) + \frac{\Delta_1 \Delta_3}{4E_1 E_3} (u_2^2 - v_2^2) + \frac{\Delta_2 \Delta_3}{4E_2 E_3} (u_1^2 - v_1^2) \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{E_{13}}{E_{13}^2 - \omega_L^2} + \frac{E_{23}}{E_{23}^2 - \omega_L^2} \right) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

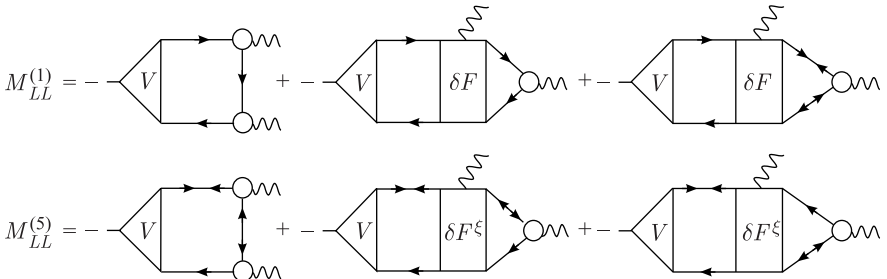


Рис. 2. Примеры графиков для амплитуд  $M_{LL}$  с учетом спаривания

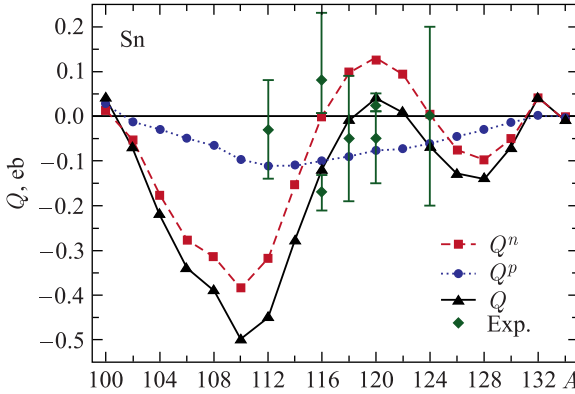


Рис. 3. Квадрупольные моменты первых  $2^+$ -состояний изотопов олова

Используя формулу  $Q = \sqrt{16\pi/5}M_{LL}$ , легко получить из этого выражения квадрупольный момент в однофоновом состоянии с моментом  $L$ . Вторая половина формулы (8), пропорциональная  $1/E_{12}$ , дает новые, так называемые трехквизачастичные КОС.

На рис. 3 представлены результаты самосогласованных расчетов квадрупольных моментов в первом  $2^+$ -состоянии для изотопов олова. Получено разумное согласие с имеющимися экспериментальными данными. Оказалось, что величина квадрупольного момента определяется суммой двух основных эффектов: эффекта КОС (дающего 50–60 % от полной величины) и эффекта поляризуемости ядра (порядка 40–50 %), которые имеют одинаковые знаки. Аналогичные результаты получены и для квадрупольных моментов первых  $3^-$ -состояний [16].

**1.3. Вероятности электромагнитных переходов.** В рамках аналогичного подхода можно рассчитать другой эффект второго порядка — вероятности  $EL$ -переходов между однофоновыми состояниями. В табл. 2 представлены результаты  $E1$ - и  $E2$ -переходов в дважды магических изотопах  $^{132}\text{Sn}$  и  $^{208}\text{Pb}$ . Расчеты показали хорошее согласие с экспериментом.

Таблица 2. Вероятности электромагнитных переходов  $B(EL)(e^2 fm^{2L})$

$EL$	Переход	Ядро	КОС = 0, $V = e_q V_0$	КОС = 0, $V_{\text{eff}}$	КОС $\neq$ 0, $V_{\text{eff}}$	Эксперимент
1	2	3	4	5	6	7
$E1 \downarrow$	$3_1^- \rightarrow 2_1^+$	$^{132}\text{Sn}$	$7,6 \cdot 10^{-4}$	$6,9 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$> 2,8 \cdot 10^{-4}$ $(7,9 \pm 2,7) \cdot 10^{-4}$
	$2_1^+ \rightarrow 3_1^-$	$^{208}\text{Pb}$	$2,45 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$9,5 \cdot 10^{-4}$	
$E2 \downarrow$	$5_1^- \rightarrow 3_1^-$	$^{132}\text{Sn}$	$3,28 \cdot 10^{-3}$	13,8	25,7	$24,3 \pm 1,2$
	$5_1^- \rightarrow 3_1^-$	$^{208}\text{Pb}$	19,35	46,0	18,8	$27,9 \pm 1,5$

Полная вероятность перехода, так же как и в случае с квадрупольными моментами, определяется двумя большими эффектами: КОС и ядерной поляризуемостью. Для наглядности в колонке 4 приведен результат для случая, когда оба эффекта отсутствуют, в колонке 5 не учитывается КОС, но включен эффект поляризуемости, в колонке 6 приведен результат с учетом всех эффектов. Интересно, что в отличие от  $E2$ -перехода и расчета квадрупольных моментов  $E1$ -переход определяется не суммой, а разностью двух эффектов. В то время как включение поляризуемости ядра уменьшает амплитуду перехода на порядок, включение КОС дает увеличение на порядок. Это подчеркивает важность использования самосогласованной схемы расчетов.

## 2. АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Амплитуда перехода для трех фононов во внешнем поле имеет следующий вид [11]:

$$M_{LL} = V_0GGg_1Gg_2Gg_3 + V_0GGg_{12}Gg_3 + V_0GGg_{123}. \quad (10)$$

Используя уравнение (рис. 4), полученное варьированием уравнения (4),

$$g_{123} = \delta_1\delta_2FGGg_3 + \delta_1FGg_2Gg_3G + \delta_1FGGg_{23} + FGg_{12}Gg_3G + FGg_1Gg_2Gg_3G + FGGg_{123}, \quad (11)$$

находим следующее выражение для  $M^{(3)}$ :

$$M^{(3)} = VGg_1Gg_2Gg_3G + VGg_{12}Gg_3G + VGG\delta_1FGGg_{12} + VGG\delta_1FGg_1Gg_2G + VG\delta_1\delta_2FGg_3G, \quad (12)$$

или в графическом виде — см. на рис. 5.

По аналогии с полученным в работе [7] результатом о малости вклада графиков с  $\delta F$  в полную величину амплитуды перехода можно считать, что

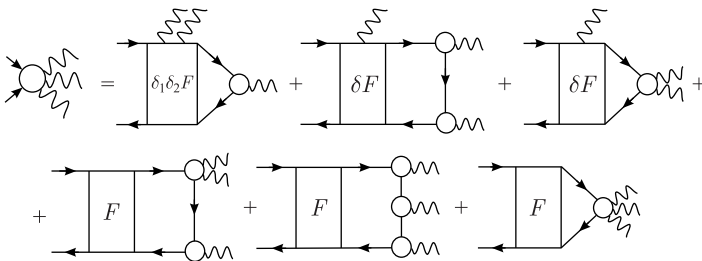


Рис. 4. Диаграммный вид уравнения (10) для  $g_{123}$

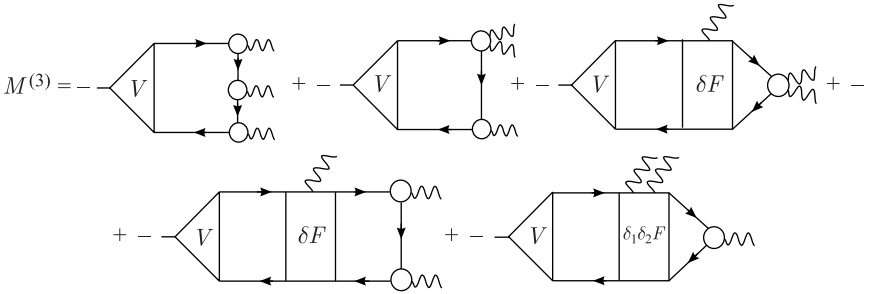


Рис. 5. Графическое выражение формулы (11) для  $M^{(3)}$

графики 3, 4 и 5 на рис. 5 дают малый вклад. Второй график на рис. 5 с  $g_{12}$  содержит эффекты тэдпола и трехквaziчастичных КОС. Графики такого типа нигде не рассматривались, и в этой работе они рассматриваться не будут. Поэтому обсуждаем только графики первого типа. Для ядер со спариванием следует рассмотреть восемь графиков, представленных на рис. 6. С учетом перестановок фононов это даст 48 графиков (шесть перестановок фононов для каждого из восьми графиков с различными ФГ на рис. 6) [15].

Формула для амплитуды перехода, квадрат которой определяет вероятность перехода, имеет следующий общий вид:

$$M^{(3)} = \sum_{i=1-48,1234} V_{12} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_2} g_{42}^{s_3} A_{1234}^{(i)}(\omega, \omega_{s_1}, \omega_{s_2}, \omega_{s_3}). \quad (13)$$

В этом выражении индекс 1 обозначает полный набор одночастичных квантовых чисел  $(n_1, j_1, l_1, m_1)$ ,  $A^i$  — интегралы от четырех ФГ, вершина  $V$  и амплитуда  $g^{s_i}$  удовлетворяют соответственно уравнениям (2) и (3), в которых следует уже учесть спаривание (см. [12]).

В результате интегрирования четырех ФГ  $G$

$$A_{1234}^{(1)} = \int G_1(\varepsilon) G_2(\varepsilon - \omega) G_3(\varepsilon - \omega_1) G_4(\varepsilon - \omega + \omega_2) d\varepsilon \quad (14)$$

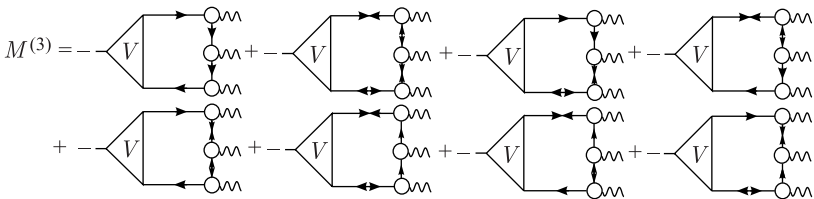


Рис. 6. Амплитуда перехода для ядер со спариванием  $M^{(3)}$

с законом сохранения  $\omega = \omega_1 + \omega_2 - \omega_4$  получаются 14 слагаемых (формула приводится впервые):

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{12} + \omega)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{12} - \omega)} \right) \times \\
 & \quad \times \left[ u_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234} \right] + \\
 & \quad + \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{34} + \omega_4)} + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{34} - \omega_4)} + \\
 & \quad + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{12} + \omega)} + \\
 & \left. + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{12} - \omega)} \right) \left[ u_1^2 v_2^2 u_3^2 v_4^2 + v_1^2 u_2^2 v_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
 & \quad + \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{24} + \omega_2)} + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{24} - \omega_2)} + \\
 & \quad + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{13} - \omega_1)} + \\
 & \left. + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{13} + \omega_1)} \right) \left[ u_1^2 u_2^2 v_3^2 v_4^2 + v_1^2 v_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
 & \quad + \left( \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{12} + \omega)(E_{13} + \omega_1)} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{12} - \omega)(E_{13} - \omega_1)} \right) \left[ u_1^2 v_2^2 v_3^2 v_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
 & \quad + \left( \frac{1}{(E_{12} + \omega)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{24} + \omega_2)} + \frac{1}{(E_{12} - \omega)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{24} - \omega_2)} \right) \times
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \times \left[ v_1^2 u_2^2 v_3^2 v_4^2 + u_1^2 v_2^2 u_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
 & + \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{23} + \omega_1 - \omega)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{23} - \omega_1 + \omega)(E_{34} - \omega_4)} \right) \times \\
 & \quad \times \left[ v_1^2 v_2^2 u_3^2 v_4^2 + u_1^2 u_2^2 v_3^2 u_4^2 + b_{1234} \right] + \\
 & + \left( \frac{1}{(E_{14} + \omega_2 - \omega)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{14} - \omega_2 + \omega)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} \right) \times \\
 & \quad \times \left[ v_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + u_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234} \right]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Представляет интерес рассмотреть конкретный случай перехода между двухфононным и однофононным состояниями, для которого имеются экспериментальные данные и расчеты в рамках других моделей. В частности, в работе [9] была рассмотрена задача о  $E1$ -переходе между конкретными двухфононным и однофононным состояниями в ядрах со спариванием. Авторы вывели формулу (10), рассчитали вероятность наблюдаемых  $E1$ -переходов между двухфононным  $1^-$ -состоянием, включающим низколежащие однофононные  $2^+$ - и  $3^-$ -состояния, и однофононным  $2^+$ -состоянием в трех ядрах Sn, Sm, Nd и получили хорошее согласие с экспериментом. По аналогии с [9] рассмотрим переход между конкретным двухфононным состоянием  $[1 \times 2] \rightarrow 4$  на однофононное состояние 4. В формулу (10) [9] входит общий множитель  $u_{12}^+ u_{13}^+ u_{24}^+ u_{43}^+$  ( $u_{12}^+ \equiv u_1 v_2 + v_1 u_2$ ), который происходит от множителя  $u_{12}^+$  в (10) [9] и содержится в определениях для трех амплитуд  $\psi$ ,  $\phi$  оператора рождения фонона, описываемого в рамках (К)МХФ. Соответствующее «приведение к квадратам» можно выполнить формулой  $u_{12}^+ u_{13}^+ u_{24}^+ u_{43}^+ = u_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234}$ , в которой выделены наиболее физически интересные для нас произведения слагаемых с четырьмя квадратами коэффициентов Боголюбова, а остальные части, содержащие по два квадрата коэффициентов Боголюбова и величины  $\Delta_i$ , обозначены через  $b_{1234}$ .

В формуле (15) шесть слагаемых содержат по два множителя вида  $u^2 u^2$  или  $v^2 v^2$  и в пределе отсутствия спаривания соответствуют случаю, когда две частицы (дырки) находятся выше поверхности Ферми, а две дырки (частицы) находятся ниже поверхности Ферми. Из них два слагаемых с числителями  $u_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2$  и  $v_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2$ , как будет показано далее, содержатся в формуле (10) [9]. Четыре слагаемых с иным набором коэффициентов Боголюбова, а именно  $[v_1^2 u_2^2 v_3^2 u_4^2 + u_1^2 v_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234}]$  и  $[v_1^2 v_2^2 u_3^2 u_4^2 + u_1^2 u_2^2 v_3^2 v_4^2 + b_{1234}]$ , отсутствуют в формуле (10) [9].

Кроме слагаемых типа  $u^2 u^2 v^2 v^2$  в результате интегрирования четырех ФГ  $G$  в формуле (15) содержатся восемь слагаемых другого типа, а именно:  $[v_1^2 u_2^2 u_3^2 u_4^2 + u_1^2 v_2^2 v_3^2 v_4^2 + b_{1234}]$ ,  $[u_1^2 v_2^2 u_3^2 u_4^2 + v_1^2 u_2^2 v_3^2 v_4^2 + b_{1234}]$ ,  $[v_1^2 v_2^2 u_3^2 v_4^2 +$

$u_1^2 u_2^2 v_3^2 u_4^2 + b_{1234}$ ] и  $[v_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + u_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234}]$ . В пределе отсутствия спаривания они соответствуют случаю, когда одна частица (дырка) находится выше поверхности Ферми и три дырки (частицы) находятся ниже поверхности Ферми, они также отсутствуют в формуле (10) [9].

Приведем полный вид полученного нами аналога формулы (10) [9] для амплитуды перехода из двухфононного состояния в однофононное. Только два из имеющихся у нас 14 слагаемых с коэффициентами Боголюбова входят в формулу (10) [9] — это слагаемые, не содержащие энергии  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \langle [s_1 \times s_2]_{I_3} \parallel M^{(3)} \parallel s_4 \rangle = & \sum_{1234} V_{12} g_{13}^{s_1} g_{34}^{s_2} g_{42}^{s_3} \times \\ & \times \sum_J (-1)^J \left( u_1^2 v_2^2 v_3^2 u_4^2 + v_1^2 u_2^2 u_3^2 v_4^2 + b_{1234} \right) \times \\ & \times \left[ \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} \right) \delta_{I_3, J} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{(E_{13} + \omega_1)(E_{24} - \omega_2)(E_{34} - \omega_4)} + \frac{1}{(E_{13} - \omega_1)(E_{24} + \omega_2)(E_{34} + \omega_4)} \right) \times \right. \\ & \left. \times (2J + 1) \begin{Bmatrix} L & I_4 & I_3 \\ I_1 & I_2 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & L \\ j_4 & j_3 & I_4 \\ I_2 & I_1 & J \end{Bmatrix} \right] + [GSC] + [uvvv]. \quad (16) \end{aligned}$$

Выписанная часть соответствует формуле (10) [9]. Невыписанные и значительно более длинные части, обозначенные как  $[GSC]$  и  $[uvvv]$ , соответствуют указанным выше КОС (четырем указанным слагаемым и восьми слагаемым с  $[uvvv]$  в интеграле (14)). Половина из них содержит знаменатели  $(E_{12} \pm \omega)$ , характерные для изученных ранее КОС второго порядка [7, 16].

Поскольку в [9] было получено хорошее описание экспериментальных данных для конкретного случая  $E1$ -переходов между двухфононным  $[2_1^+ \times 3_1^-]_{1-}$  и  $2_1^+$ -состояниями в трех ядрах со спариванием, нельзя исключить того, что будущие сложные расчеты для этого случая покажут, что все неучтенные эффекты компенсируют друг друга. С другой стороны, каждый из перечисленных выше пунктов имеет весьма общий характер по сравнению с примерами, рассмотренными в [9]. Поэтому каждый из них применим для многих других физических случаев — по мультипольности и энергии переходов, характеристикам фононов и т.п. Иначе говоря, появляется много новых физических вариантов изучения ангармонических эффектов третьего порядка. К этому следует добавить факт наличия в формулах (12), (16) и на рис. 5 вершины  $V$ , описывающей поляризуемость ядра под действием внешнего поля  $V_0$ , которая определяется эффективным взаимодействием нуклонов.

Как показано ранее [7, 14, 16], для случая эффектов второго порядка наблюдаемые данные объясняются *только при совместном учете* вкладов от КОС и ядерной поляризуемости. Можно считать, что то же самое вместе с вкладом от графиков с  $g_{12}$  будет важным и для ангармонических эффектов третьего порядка.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что квантовая теория многих тел в формализме ФГ предоставляет удобный и эффективный инструмент как для теоретического анализа, так и для самосогласованных расчетов ангармонических эффектов в магических и полумагических ядрах. Получено хорошее согласие расчетов эффектов второго порядка с экспериментальными данными, указано на большой вклад новых эффектов КОС в их величину. В рамках данной теории проведен анализ эффектов третьего порядка и впервые указано на существование ряда новых эффектов. В ближайшем будущем авторы надеются представить более подробный анализ эффектов третьего порядка.

Авторы выражают благодарность В.Ю. Пономареву и В.А. Ходелю за плодотворные обсуждения. Работа поддержана грантом РФФИ № 16-12-10155.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. Т. 2. М.: Мир, 1977. 663 с.
2. Авдеенков А.В., Камерджиев С.П. О механизмах сверхтекучести в атомных ядрах // ЯФ. 1999. Т. 62. С. 563–575 (Phys. At. Nucl. 1999. V. 62. P. 563–575).
3. Natamoto I. Particle Spectra and Particle-Vibration Coupling in the Pb Region // Phys. Rep. 1974. V. 10. P. 63–105.
4. Ring P., Speth J. Nuclear Structure Calculations with a Density-Dependent Force in  $^{208}\text{Pb}$  // Nucl. Phys. A. 1974. V. 235. P. 315–351.
5. Broglia R.A., Liotta R., Paar V. Quadrupole Moments of the  $21^+$  State of Proton-Closed-Shell Nuclei // Phys. Lett. B. 1972. V. 38. P. 480–484.
6. Birbrair B.L. Static Quadrupole Moments of First  $2^+$  States of Spherical Nuclei in a Schematic Model // Phys. Lett. B. 1970. V. 32. P. 165–168.
7. Voitenkov D., Kamerdzhiiev S. et al. Self-Consistent Calculations of Quadrupole Moments of the First  $2^+$ -States in Sn and Pb Isotopes // Phys. Rev. C. 2012. V. 85. P. 054319; arXiv:1112.6004.
8. Соловьев В.Г. Теория атомного ядра. Квазичастицы и фононы. М.: Энергоатомиздат, 1989. 304 с.
9. Ponomarev V. Yu., Stoyanov Ch., Tsoneva N., Grinberg M. Boson Forbidden Low-Energy  $E1$ -Transitions in Spherical Nuclei // Nucl. Phys. A. 1998. V. 635. P. 470–483.
10. Platonov A. P. // Sov. J. Nucl. Phys. 1982. V. 36. P. 491.
11. Ходель В. А. Исследование ангармонических эффектов в атомных ядрах в рамках квантовогидродинамического описания // ЯФ. 1976. Т. 24. С. 704–714 (Sov. J. Nucl. Phys. 1976. V. 24. P. 367–377).

12. Мигдал А. Б. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, 1983. 432 с.
13. Khodel V. A., Saperstein E. E. Finite Fermi Systems Theory and Self-Consistency Relations // Phys. Rep. 1982. V. 92. P. 183–337.
14. Камерджиев С. П., Войтенков Д. Ф., Саперштейн Э. Е., Толоконников С. В., Шитов М. И. Самосогласованное описание  $E\bar{L}$ -переходов между однофононными состояниями в магических ядрах // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 106. С. 132–137.
15. Камерджиев С. П., Шитов М. И. Ангармонические эффекты 3-го порядка в ядерной квантовой теории многих тел // Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 109. С. 65–71.
16. Камерджиев С. П., Войтенков Д. А., Саперштейн Э. Е., Толоконников С. В. Самосогласованные расчеты квадрупольных моментов первых  $3^-$ -состояний в изотопах Sn и Pb // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 108. С. 155–160.