ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 611–620

БЕЗМАССОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО СПИНА

И. Л. Бухбиндер [1,*], *А. П. Исаев* [2,3,4,**], *С. Федорук* [2,***]

[1] Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

[2] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[3] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

[4] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

Представлена новая твисторная формулировка безмассовой частицы бесконечного спина. Найдено твисторное поле бесконечного спина, и получено твисторное полевое преобразование для пространственно-временной полевой формулировки. Представлен $\mathcal{N} = 1$ супермультиплет бесконечного спина, образованный полями бесконечного целого и полуцелого спинов.

We derive a new twistorial field formulation of a massless infinite spin particle. We construct a twistorial infinite spin field and derive twistor field transform for obtaining the space-time field formulation. We represent the $\mathcal{N} = 1$ infinite spin supermultiplet by the infinite integer-spin field and infinite half-integer-spin field.

PACS: 03.65.-w; 02.20.-a

ВВЕДЕНИЕ

В современной физике высоких энергий физические состояния элементарных частиц определяются как векторы в пространствах унитарных неприводимых представлений групп симметрий, среди которых основополагающую роль играет группа Пуанкаре $ISO^{\uparrow}(1,3)$ или ее накрывающая группа $ISL(2,\mathbb{C})$. Неприводимые представления группы Пуанкаре задаются собственными значениями двух операторов Казимира $P^m P_m$ и $W^m W_m$ алгебры Пуанкаре $iso(1,3)$, где $W_m = (1/2)\varepsilon_{mnkl} M^{nk} P^l$ — компоненты псевдовектора Паули–Любанского, тогда как образующие P_m и M_{mn} алгебры $iso(1,3)$

*E-mail: joseph@tspu.edu.ru
**E-mail: isaevap@theor.jinr.ru
***E-mail: fedoruk@theor.jinr.ru

генерируют соответственно трансляции и лоренцевы вращения в четырехмерном пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. В нашем рассмотрении метрический тензор пространства $\mathbb{R}^{1,3}$ равен $||\eta_{mk}|| = \mathrm{diag}\,(+1,-1,-1,-1)$.

Среди унитарных неприводимых представлений $ISO^{\uparrow}(1,3)$, классификация которых дана в [1–3], важную роль играют безмассовые представления, для которых оператор Казимира второго порядка равен нулю:

$$P^m P_m = 0. \tag{1}$$

Если (в дополнение к условию (1)) оператор Казимира четвертого порядка также равен нулю, $W^m W_m = 0$, то эти светоподобные векторы пропорциональны: $W_m = \Lambda \cdot P_m$. Коэффициент пропорциональности Λ называется оператором спиральности и является центральным элементом алгебры Пуанкаре, а его собственные значения в случае неприводимого представления равны одному из значений $\Lambda = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \ldots$ Такие безмассовые представления с фиксированной спиральностью хорошо изучены и являются базовыми при построении теории высших спинов.

Другой тип унитарных неприводимых безмассовых представлений имеет место в случае нулевого собственного значения оператора Казимира (1) и при ненулевых собственных значениях второго оператора Казимира

$$W^m W_m = -\mu^2 \neq 0, \tag{2}$$

где μ — произвольное вещественное число. Состояния, на которых операторы Казимира алгебры Пуанкаре принимают значения (1) и (2), описывают безмассовые неприводимые представления бесконечного спина *.

Безмассовые частицы бесконечного спина не изучались достаточно детально в XX в. из-за специфических особенностей их спектра (по этой проблеме выделяется работа [4]). Именно, в отличие от безмассовых неприводимых спиральных состояний в случае безмассовых неприводимых представлений бесконечного спина оператор спиральности $\Lambda = W_0/P_0$ принимает бесконечное число значений для всех целых или полуцелых спиральностей. То есть число состояний в теории бесконечного спина и в теории высших спинов, мотивированной исследованиями [5, 6], фактически совпадает. По сути, единственным, но важным отличием является источник перемешивания состояний с разными спиральностями: в неприводимом представлении бесконечного спина это осуществляется преобразованиями Пуанкаре $ISO^{\uparrow}(1,3)$, тогда как в теории высших спинов для этого надо привлекать дополнительные преобразования симметрии высших спинов, например преобразования $Sp(8)$, не входящие в $ISO^{\uparrow}(1,3)$. Данное соответствие с теорией высших спинов,

*В ряде работ такие представления называют представлениями непрерывного спина из-за присутствия в (2) произвольной вещественной константы μ, не подчиненной каким-либо условиям квантования.

которая сейчас занимает важное место в теоретической физике частиц, инициировало различные квантово-механические и полевые описания безмассовых бесконечномерных представлений бесконечного спина (в последнее время на эту тему появилось значительное число работ; см., например, [7–21] и ссылки там).

Данный доклад посвящен некоторым новым аспектам теории безмассовых унитарных неприводимых представлений бесконечного спина группы $ISL(2,\mathbb{C})$, которые обсуждались в наших недавних работах [22, 23].

Свойство бесконечномерности неприводимого представления бесконечного спина предполагает использование дополнительных координат при ковариантном описании таких представлений с помощью производящих функций. В отличие от большинства работ по частицам бесконечного спина в наших работах [22, 23] в качестве дополнительных координат использовался вейлевский спинор. Это позволило описать единообразно безмассовые частицы бесконечного спина как с целыми, так и с полуцелыми спиральностями. Рассматривая модель только со спинорными фазовыми переменными, мы построили новую модель частицы бесконечного спина, которая является битвисторным обобщением стандартной твисторной формулировки [24] безмассовой частицы с фиксированной спиральностью на случай безмассовых представлений бесконечного спина. Квантование этой модели, описываемой только связями первого рода, приводит к полям бесконечного спина, которые раскладываются в бесконечную сумму состояний со всеми спиральностями. Полевое твисторное преобразование сопоставляет полученным твисторным полям в импульсном представлении пространственно-временные поля бесконечного спина, зависящие от 4-вектора в $\mathbb{R}^{1,3}$ и от дополнительного вейлевского спинора. Мы вывели уравнения движения для полей бесконечного спина с целыми или полуцелыми спиральностями в пространственно-временном спинорном описании. Эти поля образуют $\mathcal{N}=1$ супермультиплет бесконечных спинов [7, 15].

1. ФОРМУЛИРОВКА ВИГНЕРА–БАРГМАНА И ТВИСТОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЧАСТИЦЫ БЕСКОНЕЧНОГО СПИНА

Как было показано в [1–3], безмассовые неприводимые представления группы Пуанкаре бесконечного целого спина реализуются в пространстве скалярных полей $\Phi(x,y)$, зависящих от двух 4-векторных переменных $x^m\in\mathbb{R}^{1,3}$, $y^m\in\mathbb{R}^{1,3}$ и удовлетворяющих уравнениям Вигнера–Баргмана

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial x_m}\,\Phi=0,\qquad \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial y_m}\,\Phi=0,\\ \frac{\partial}{\partial y^m}\frac{\partial}{\partial y_m}\,\Phi=\mu^2\,\Phi,\qquad -i\,y^m\,\frac{\partial}{\partial x^m}\,\Phi=\Phi.\end{gathered}\tag{3}$$

Представления бесконечного полуцелого спина описываются полями $\Phi_A(x,y)$ с внешним дираковским индексом $A{=}1,2,3,4$, которые удовлетворяют условиям (3) по каждой компоненте и дополнительному уравнению Дирака [1–3]

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\gamma^m\right)_A{}^B\,\Phi_B=0, \tag{4}$$

где γ^m — матрицы Дирака в $\mathbb{R}^{1,3}$.

Пространственно-временная формулировка Вигнера–Баргмана [1–3] для неприводимого безмассового представления бесконечного целого спина может быть получена как результат квантования модели частицы со следующим лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{\text{sp.-time}}=p_m\dot{x}^m+q_m\dot{y}^m+ep_mp^m+e_1p_mq^m+ \\ +e_2(q_mq^m+\mu^2)+e_3(p_my^m-1), \tag{5}$$

где $\dot{x}_k(\tau):=\partial_\tau x_k(\tau)$, τ — параметр эволюции и $p_n(\tau)$, $q_n(\tau)$ — импульсы, канонически сопряженные координатам $x_n(\tau)$, $y_n(\tau)$. Ненулевые канонические скобки Пуассона этих переменных равны

$$\{x^m,p_n\}=\delta^m_n,\qquad \{y^m,q_n\}=\delta^m_n.$$

Функции $e(\tau)$, $e_1(\tau)$, $e_2(\tau)$, $e_3(\tau)$ в (5) являются множителями Лагранжа для связей первого рода

$$\begin{aligned} &T:=p_mp^m\approx 0, &&T_1:=p_mq^m\approx 0,\\ &T_2:=q_mq^m+\mu^2\approx 0, &&T_3:=p_my^m-1\approx 0, \end{aligned} \tag{6}$$

ненулевые скобки Пуассона которых имеют вид $\{T_1,T_3\}=-T$, $\{T_2,T_3\}=-2T_1$.

После канонического квантования связи (6) дают уравнения Вигнера–Баргмана (3) для полей бесконечного целого спина $\Phi(x,y)$. Для описания частиц бесконечного полуцелого спина в формализме классической механики требуется расширить модель (5) дополнительными векторными грассмановыми переменными и дополнительной связью, генерирующей (после квантования) уравнение Дирака (4) для спинорной волновой функции.

Иным способом описания спиновых состояний является твисторный формализм [24].

В [22, 23] нами предложена твисторная формулировка частицы с бесконечным (непрерывным) спином, в которой динамическими переменными являются коммутирующие спиноры Вейля* π_α, $\bar{\pi}_{\dot\alpha}:=(\pi_\alpha)^*$, ρ_α, $\bar{\rho}_{\dot\alpha}:=(\rho_\alpha)^*$

*Мы используем общепринятые вейлевские спинорные соглашения, в которых связь между 4-векторными и спинорными величинами дается выражениями $A_{\alpha\dot\beta}=(1/\sqrt{2})A_m(\sigma^m)_{\alpha\dot\beta}$, так что $A^mB_m=A_{\alpha\dot\beta}B^{\dot\beta\alpha}$.

и канонически сопряженные к ним спиноры ω^α, $\bar\omega^{\dot\alpha} := (\omega^\alpha)^*$, η^α, $\bar\eta^{\dot\alpha} := (\eta^\alpha)^*$, ненулевые скобки Пуассона которых имеют вид

$$\{\omega^\alpha, \pi_\beta\} = \{\eta^\alpha, \rho_\beta\} = \delta^\alpha_\beta, \quad \{\bar\omega^{\dot\alpha}, \bar\pi_{\dot\beta}\} = \{\bar\eta^{\dot\alpha}, \bar\rho_{\dot\beta}\} = \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}.$$

Лагранжиан частицы с бесконечным (непрерывным) спином в твисторной формулировке записывается следующим образом [22, 23]:

$$\mathcal{L}_{\rm twistor} = \pi_\alpha\dot\omega^\alpha + \bar\pi_{\dot\alpha}\dot{\bar\omega}^{\dot\alpha} + \rho_\alpha\dot\eta^\alpha + \bar\rho_{\dot\alpha}\dot{\bar\eta}^{\dot\alpha} + l\,\mathcal{M} + k\mathcal{U} + \ell\,\mathcal{F} + \bar\ell\,\bar{\mathcal{F}}, \tag{7}$$

где $l(\tau)$, $k(\tau)$, $\ell(\tau)$, $\bar\ell(\tau)$ — лагранжевы множители, отвечающие связям

$$\mathcal{M} := \pi^\alpha\rho_\alpha\,\bar\rho_{\dot\alpha}\bar\pi^{\dot\alpha} - \mu^2/2 \approx 0, \tag{8}$$

$$\mathcal{F} := \eta^\alpha\pi_\alpha - 1 \approx 0, \quad \bar{\mathcal{F}} := \bar\pi_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha} - 1 \approx 0, \tag{9}$$

$$\mathcal{U} := \frac{i}{2}(\omega^\alpha\pi_\alpha - \bar\pi_{\dot\alpha}\bar\omega^{\dot\alpha} + \eta^\alpha\rho_\alpha - \bar\rho_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\alpha}) \approx 0. \tag{10}$$

Можно показать, что связи первого рода (8), (9), (10) генерируют абелеву группу Ли.

Пространственно-временная модель Вигнера–Баргмана (5) и твисторная модель (7) частицы бесконечного спина эквивалентны на классическом уровне. Эта эквивалентность устанавливается с помощью обобщенных соотношений Картана–Пенроуза [24–27]

$$p_{\alpha\dot\beta} = \pi_\alpha\bar\pi_{\dot\beta}, \quad q_{\alpha\dot\beta} = \pi_\alpha\bar\rho_{\dot\beta} + \rho_\alpha\bar\pi_{\dot\beta} \tag{11}$$

и следующих обобщенных соотношений инцидентности [24–27]:

$$\omega^\alpha = \bar\pi_{\dot\alpha}x^{\dot\alpha\alpha} + \bar\rho_{\dot\alpha}y^{\dot\alpha\alpha}, \quad \bar\omega^{\dot\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha}\pi_\alpha + y^{\dot\alpha\alpha}\rho_\alpha, \tag{12}$$

$$\eta^\alpha = \bar\pi_{\dot\alpha}y^{\dot\alpha\alpha}, \qquad \bar\eta^{\dot\alpha} = y^{\dot\alpha\alpha}\pi_\alpha. \tag{13}$$

Доказательство этого утверждения было дано в [22, 23].

Отметим, что используемые нами спиноры образуют следующие твисторы Пенроуза [24]:

$$\begin{aligned} Z_A &:= \big(\pi_\alpha, \bar\omega^{\dot\alpha}\big), \quad \bar Z^A := \begin{pmatrix} \omega^\alpha \\ -\bar\pi_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \\ Y_A &:= \big(\rho_\alpha, \bar\eta^{\dot\alpha}\big), \quad \bar Y^A := \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ -\bar\rho_{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

То есть мы используем битвисторный формализм, в котором связь (13) имеет вид $\mathcal{U} = (i/2)(\bar Z^A Z_A + \bar Y^A Y_A) \approx 0$. Следовательно, оператор спиральности, который в твисторном формализме равен оператору $\Lambda = (i/2)\bar Z^A Z_A$, не принимает фиксированное значение в рассматриваемой модели частицы бесконечного спина.

Следует также отметить, что, хотя системы (5) и (7) эквивалентны на классическом уровне, их квантовые аналоги оказываются существенно разными моделями. Как мы увидим в следующем разделе, твисторная система (7) имеет более богатый квантовый спектр из-за присутствия спинорных переменных и наличия связи (13). А именно, квантовая твисторная система (7) может описывать частицы бесконечного спина с полуцелыми спиральностями.

2. ТВИСТОРНЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ПОЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО СПИНА

Квантование системы со связями (8), (9), (10) было выполнено в [22, 23]. Для нахождения общего решения соответствующих квантовых связей удобно использовать координаты двумерной аффинной плоскости и координаты фактор-пространства $SL(2,\mathbb{C})/B_+(2,\mathbb{C})$, где $B_+(2,\mathbb{C})$ — подгруппа Бореля накрывающей группы Лоренца. Восстанавливая обратную зависимость волновой функции от твисторных переменных, мы находим, что твисторное поле представляется в виде

$$\Psi^{(c)}(\pi,\bar\pi;\xi,\bar\xi) = \delta\left((\pi\xi)(\bar\xi\bar\pi) - M\right)\,\exp\left(\frac{-iq_0}{p_0}\right)\hat\Psi^{(c)}(\pi,\bar\pi;\xi,\bar\xi), \qquad (15)$$

где введен безразмерный спинор

$$\xi_\alpha := M^{-1/2}\rho_\alpha, \qquad \bar\xi_{\dot\alpha} := M^{-1/2}\bar\rho_{\dot\alpha},$$

$M := \mu/\sqrt{2}$ и использованы краткие обозначения $(\pi\xi) := \pi^\beta\xi_\beta$, $(\bar\xi\bar\pi) := \bar\xi_{\dot\beta}\bar\pi^{\dot\beta}$. Кроме того, величина p_0/q_0 в (15) выражается посредством обобщенных соотношений Картана–Пенроуза (11) в терминах спиноров как $q_0/p_0 = \sqrt{M}\sum\limits_{\alpha=\dot\alpha}(\pi_\alpha\bar\xi_{\dot\alpha} + \xi_\alpha\bar\pi_{\dot\alpha})\Big/\sum\limits_{\beta=\dot\beta}\pi_\beta\bar\pi_{\dot\beta}$. Зависимость поля $\Psi^{(c)}$ от константы c в (15) возникает в результате неоднозначности упорядочения операторов в квантовом аналоге связи (10).

В выражении (15) факторизованное твисторное поле $\hat\Psi^{(c)}(\pi,\bar\pi;\xi,\bar\xi)$ представляется в виде бесконечного ряда

$$\hat\Psi^{(c)}(\pi,\bar\pi;\xi,\bar\xi) = \psi^{(c)}(\pi,\bar\pi) + \sum_{k=1}^{\infty}(\bar\xi\bar\pi)^k\,\psi^{(c+k)}(\pi,\bar\pi) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}(\pi\xi)^k\,\psi^{(c-k)}(\pi,\bar\pi), \qquad (16)$$

в котором коэффициентные функции $\psi^{(c\pm k)}(\pi,\bar{\pi})$ подчиняются условию

$$\Lambda \cdot \psi^{(c\pm k)}(\pi,\bar{\pi}) = -(c\pm k)\,\psi^{(c\pm k)}(\pi,\bar{\pi}), \tag{17}$$

где $\Lambda = (-1/2)(\pi_\alpha(\partial/\partial\pi_\alpha) - \bar{\pi}_{\dot{\alpha}}(\partial/\partial\bar{\pi}_{\dot{\alpha}}))$ — оператор спиральности. Далее константу c мы называем зарядом. Таким образом, твисторное поле (15) описывает все целые (при целом c) или все полуцелые (при полуцелом c) спиральности, лежащие в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Кроме того, твисторная волновая функция (15) $\Psi^{(c)}(\pi,\bar{\pi};\rho,\bar{\rho})$ описывает безмассовые частицы с бесконечным (непрерывным) спином, поскольку

$$W^{\alpha\dot{\gamma}}W_{\alpha\dot{\gamma}} \cdot \Psi^{(c)} = -\mu^2\,\Psi^{(c)}, \tag{18}$$

где $W_{\alpha\dot{\beta}} = (1/\sqrt{2})W_m(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}$ — оператор Паули–Любанского, определенный в твисторном пространстве.

В силу условия (17) для описания бозонного представления бесконечного спина, связанного со всеми целочисленными спиральностями, мы полагаем $c=0$ и поэтому рассматриваем твисторное поле $\Psi^{(0)}(\pi,\bar{\pi};\xi,\bar{\xi})$. В этом случае пространственно-временная волновая функция определяется с помощью интегрального преобразования Фурье

$$\Phi(x;\xi,\bar{\xi}) = \int d^4\pi\, \mathrm{e}^{i\pi_\alpha\bar{\pi}_{\dot{\alpha}}x^{\dot{\alpha}\alpha}}\,\Psi^{(0)}(\pi,\bar{\pi};\xi,\bar{\xi}), \tag{19}$$

где мы использовали представление $p_{\alpha\dot{\alpha}} = \pi_\alpha\bar{\pi}_{\dot{\alpha}}$ и выполнили интегрирование по мере $d^4\pi := (1/2)d\pi_1 \wedge d\pi_2 \wedge d\bar{\pi}_{\dot{1}} \wedge d\bar{\pi}_{\dot{2}} = d\phi\, d^4p\,\delta(p^2)$ (здесь ϕ является общей фазой в π_α, которая не присутствует в $p_{\alpha\dot{\alpha}} = \pi_\alpha\bar{\pi}_{\dot{\alpha}}$). Как доказано в [22,23], поле $\Phi(x;\xi,\bar{\xi})$, определяемое в координатном представлении интегральным преобразованием (19), удовлетворяет четырем уравнениям движения

$$\begin{gathered}
\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\,\Phi(x;\xi,\bar{\xi}) = 0, \quad \left(i\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}} - M\right)\Phi(x;\xi,\bar{\xi}) = 0, \\
\left(i\xi^\alpha\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} + M\right)\Phi(x;\xi,\bar{\xi}) = 0, \quad \left(\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha} - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}}\right)\Phi(x;\xi,\bar{\xi}) = 0.
\end{gathered} \tag{20}$$

Точно так же, чтобы описать представление бесконечного спина, связанное с полуцелыми спиральностями, мы выбираем $c = -1/2$. Ввиду условия (17) соответствующая волновая функция $\Psi^{(-1/2)}(\pi,\bar{\pi};\xi,\bar{\xi})$ содержит в своем разложении только полуцелые спиральности. Комплексно-сопряженное поле $\bar{\Psi}^{(+1/2)}(\pi,\bar{\pi};\xi,\bar{\xi})$ обладает зарядом $c = +1/2$. В частности, компонентные поля $\bar{\psi}^{(1/2-k)}(\pi,\bar{\pi})$ твисторного поля $\bar{\Psi}^{(+1/2)}$ являются комплексным сопряжением компонентных полей $\psi^{(-r)}(\pi,\bar{\pi})$ поля $\Psi^{(-1/2)}$, т. е. $(\psi^{(-1/2+k)})^* = \bar{\psi}^{(1/2-k)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

В случае полуцелых спинов мы используем стандартный рецепт для введения с помощью твисторов пространственно-временных полей с ненулевыми спиральностями [24]. А именно, мы должны вставить твисторную компоненту π_α в подынтегральное выражение для преобразования Фурье:

$$\Phi_\alpha(x;\xi,\bar{\xi}) = \int d^4\pi\, \mathrm{e}^{i\pi_\beta\bar{\pi}_{\dot{\beta}}x^{\dot{\beta}\beta}}\,\pi_\alpha\, \Psi^{(-1/2)}(\pi,\bar{\pi};\xi,\bar{\xi}). \tag{21}$$

Таким способом мы зарабатываем для пространственно-временного поля внешний спинорный индекс α. Комплексно-сопряженное твисторное поле с зарядом $c = +1/2$ определяется аналогично:

$$\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}(x;\xi,\bar{\xi}) = \int d^4\pi\, \mathrm{e}^{-i\pi_\beta\bar{\pi}_{\dot{\beta}}x^{\dot{\beta}\beta}}\,\bar{\pi}_{\dot{\alpha}}\, \bar{\Psi}^{(+1/2)}(\pi,\bar{\pi};\xi,\bar{\xi}). \tag{22}$$

Пространственно-временные поля $\Phi_\alpha(x;\xi,\bar{\xi})$ и $\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}(x;\xi,\bar{\xi})$, соответствующие состояниям с полуцелыми спиральностями, удовлетворяют безмассовым уравнениям Дирака–Вейля

$$\partial^{\dot{\alpha}\alpha}\,\Phi_\alpha(x;\xi,\bar{\xi}) = 0, \quad \partial^{\dot{\alpha}\alpha}\,\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}(x;\xi,\bar{\xi}) = 0 \tag{23}$$

и уравнениям

$$\begin{gathered}
\Big(i\xi^\beta\partial_{\beta\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}} + M\Big)\Phi_\alpha(x;\xi,\bar{\xi}) = 0, \qquad \Big(i\xi^\beta\partial_{\beta\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}} - M\Big)\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}(x;\xi,\bar{\xi}) = 0,\\
\left(i\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\partial_{\beta\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_{\dot{\beta}}} - M\right)\Phi_\alpha(x;\xi,\bar{\xi}) = 0, \quad \left(i\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\partial_{\beta\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_{\dot{\beta}}} + M\right)\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}(x;\xi,\bar{\xi}) = 0,\\
\left(\xi_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta} - \bar{\xi}_{\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_{\dot{\beta}}}\right)\Phi_\alpha(x;\xi,\bar{\xi}) = 0, \qquad \left(\xi_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta} - \bar{\xi}_{\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_{\dot{\beta}}}\right)\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}(x;\xi,\bar{\xi}) = 0,
\end{gathered} \tag{24}$$

справедливым также в случае целочисленных спиральностей. Как показано в [23], выполнение уравнений (23), (24) следует из вида интегральных преобразований (21), (22) и уравнений движения твисторного поля при $c = \pm 1/2$.

Подчеркнем, что, хотя твисторные поля $\Psi^{(-1/2)}(\pi,\bar{\pi};\xi,\bar{\xi})$ и $\bar{\Psi}^{(+1/2)}(\pi,\bar{\pi};\xi,\bar{\xi})$ имеют ненулевые заряды $c = \mp 1/2$, их интегральные преобразования $\Phi_\alpha(x;\xi,\bar{\xi})$ и $\bar{\Phi}_{\dot{\alpha}}(x;\xi,\bar{\xi})$, заданные в (21) и (22), имеют нулевой $U(1)$-заряд, как и скалярное поле $\Phi(x;\xi,\bar{\xi})$. Как мы увидим ниже, этот факт является ключевым при построении супермультиплета бесконечного спина.

3. СУПЕРМУЛЬТИПЛЕТ БЕСКОНЕЧНОГО СПИНА

Пространственно-временные поля $\Phi(x;\xi,\bar{\xi})$ и $\Phi_\alpha(x;\xi,\bar{\xi})$ содержат бозонные $\psi^{(k)}(\pi,\bar{\pi})$ и фермионные $\psi^{(k-1/2)}(\pi,\bar{\pi})$ компонентные поля ($k \in \mathbb{Z}$)

соответственно с целыми и полуцелыми спинами. Естественно ожидать, что отдельные компоненты $\psi^{(k)}(\pi,\bar\pi)$ и $\psi^{(k-1/2)}(\pi,\bar\pi)$ этих полей должны образовывать $\mathcal{N}=1$ спиновые супермультиплеты на массовой поверхности. Следовательно, бозонные (четные) $\Phi(x;\xi,\bar\xi)$ и фермионные (нечетные) $\Phi_\alpha(x;\xi,\bar\xi)$ поля должны образовывать на массовой поверхности $\mathcal{N}=1$ супермультиплет бесконечного спина, содержащий бесконечное число обычных супермультиплетов.

Аналогично тому, как делается при построении супермультиплета Весса–Зумино [28], объединим поля $\Phi(x;\xi,\bar\xi)$ и $\Phi_\alpha(x;\xi,\bar\xi)$ с целыми и полуцелыми спиральностями в один мультиплет, а суперсимметричные преобразования полей Φ и Φ_α представим в виде

$$\delta\,\Phi=\varepsilon^\alpha\Phi_\alpha,\quad \delta\,\Phi_\alpha=2i\bar\varepsilon^{\dot\beta}\partial_{\alpha\dot\beta}\Phi, \tag{25}$$

где ε_α, $\bar\varepsilon_{\dot\alpha}$ являются постоянными нечетными вейлевскими спинорами. Коммутаторы этих преобразований равны

$$\begin{aligned}(\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)\,\Phi&=-2ia^{\beta\dot\beta}\partial_{\beta\dot\beta}\Phi,\\ (\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)\,\Phi_\alpha&=-2ia^{\beta\dot\beta}\partial_{\beta\dot\beta}\Phi_\alpha+2ia_{\alpha\dot\beta}\partial^{\dot\beta\beta}\Phi_\beta,\end{aligned} \tag{26}$$

где $a_{\alpha\dot\beta}:=\varepsilon_{1\alpha}\bar\varepsilon_{2\dot\beta}-\varepsilon_{2\alpha}\bar\varepsilon_{1\dot\beta}$. Из (26) видно, что супералгебра преобразований (25) замкнута на генератор

$$P_{\beta\dot\beta}=-i\partial_{\beta\dot\beta}$$

на массовой поверхности, т. е. при выполнении уравнений Дирака–Вейля (23). Более того, легко показать, что полная система уравнений движения (20), (23), (24) инвариантна относительно преобразований суперсимметрии (25).

Используя обратные интегральные преобразования Фурье, представим соотношения (25) в виде преобразований суперсимметрии для твисторных полей $\Psi^{(0)}(\pi,\bar\pi;\xi,\bar\xi)$, $\Psi^{(-1/2)}(\pi,\bar\pi;\xi,\bar\xi)$ в импульсном представлении:

$$\delta\,\Psi^{(0)}=\varepsilon^\alpha\pi_\alpha\Psi^{(-1/2)},\quad \delta\,\Psi^{(-1/2)}=-2\,\bar\varepsilon^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}\Psi^{(0)}. \tag{27}$$

В терминах бозонных $\psi^{(k)}(\pi,\bar\pi)$ и фермионных $\psi^{(-1/2+k)}(\pi,\bar\pi)$ твисторных компонент эти соотношения при всех $k\in\mathbb{Z}$ имеют вид

$$\delta\,\psi^{(k)}=\varepsilon^\alpha\pi_\alpha\,\psi^{(-1/2+k)},\quad \delta\,\psi^{(-1/2+k)}=-2\,\bar\varepsilon^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}\,\psi^{(k)}. \tag{28}$$

Бозонное поле $\psi^{(k)}$ и фермионное поле $\psi^{(-1/2+k)}$ при фиксированных $k\in\mathbb{Z}$ описывают безмассовые состояния со спиральностями $(-k)$ и $(1/2-k)$ соответственно. Таким образом, супермультиплет бесконечного спина расслаивается на бесконечное число уровней с парами полей $\psi^{(k)}$, $\psi^{(-1/2+k)}$ при фиксированном $k\in\mathbb{Z}$. Суперсимметрия преобразует бозонные и фермионные поля друг в друга внутри данного уровня k, тогда как бусты группы Пуанкаре преобразуют уровни с разными значениями k и, следовательно, смешивают поля с разными значениями спиральности.

В заключение отметим, что суперполевое описание супермультиплета бесконечного спина было представлено в недавней работе [29].

Благодарности. Авторы благодарят за частичную поддержку Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FEWF-2020-0003. И. Л. Бухбиндер выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований, грант № 18-02-00153. А. П. Исаев благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований, грант № 18-52-05002-(арм-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wigner E. P.* // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149.
2. *Wigner E. P.* // Z. Phys. 1947. V. 124. P. 665.
3. *Wigner E. P., Bargmann V.* // Proc. Nat. Acad. Sci. US. 1948. V. 34. P. 211.
4. *Iverson G. J., Mack G.* // Ann. Phys. 1971. V. 64. P. 253.
5. *Fradkin E. S., Vasiliev M. A.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 189. P. 89.
6. *Vasiliev M. A.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 243. P. 378.
7. *Brink L., Khan A. M., Ramond P., Xiong X.-Z.* // J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 6279.
8. *Bekaert X., Mourad J.* // JHEP. 2006. V. 0601. P. 115.
9. *Schuster P., Toro N.* // JHEP. 2013. V. 1309. P. 104.
10. *Bengtsson A. K. H.* // Ibid. V. 1310. P. 108.
11. *Schuster P., Toro N.* // Phys. Rev. D. 2015. V. 91. P. 025023.
12. *Rivelles V. O.* // Ibid. P. 125035.
13. *Bekaert X., Najafizadeh M., Setare M. R.* // Phys. Lett. B. 2016. V. 760. P. 320.
14. *Metsaev R. R.* // Phys. Lett. B. 2017. V. 767. P. 458.
15. *Zinoviev Yu. M.* // Universe. 2017. V. 3. P. 63.
16. *Bekaert X., Skvortsov E. D.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 2017. V. 32. P. 1730019.
17. *Khabarov M. V., Zinoviev Yu. M.* // Nucl. Phys. B. 2018. V. 928. P. 182.
18. *Alkalaev K., Grigoriev M.* // JHEP. 2018. V. 1803. P. 030.
19. *Buchbinder I. L., Krykhtin V. A., Takata H.* // Phys. Lett. B. 2018. V. 785. P. 315.
20. *Alkalaev K., Chekmenev A., Grigoriev M.* // JHEP. 2018. V. 1811. P. 050.
21. *Metsaev R. R.* // Phys. Lett. B. 2019. V. 793. P. 134.
22. *Buchbinder I. L., Fedoruk S., Isaev A. P., Rusnak A.* // JHEP. 2018. V. 1807. P. 031.
23. *Buchbinder I. L., Fedoruk S., Isaev A. P.* // Nucl. Phys. B. 2019. V. 945. P. 114660.
24. *Penrose R.* // J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 345.
25. *Eisenberg Y., Solomon S.* // Nucl. Phys. B. 1988. V. 309. P. 709.
26. *Sorokin D. P., Tkach V. I., Volkov D. V.* // Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 3. P. 901.
27. *Plyushchay M. S.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 240. P. 133.
28. *Wess J., Zumino B.* // Phys. Lett. B. 1974. V. 49. P. 52.
29. *Buchbinder I. L., Gates S. J., Koutrolikos K.* // Phys. Lett. B. 2019. V. 793. P. 445.