

НЕСТАНДАРТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ

*В. А. Загребнов **

Институт математики Марселя, Центр математики и информатики, Марсель, Франция

Данная статья представляет собой обзор результатов, касающихся сопоставления механизмов нестандартной динамической конденсации и стандартной конденсации Бозе–Эйнштейна, включая случай обобщённого конденсата ван ден Берга–Льюиса–Пуле. Обзор основан на детальном обсуждении двух моделей: простой игрушечной модели и боголюбовской модели слабо неидеального бозе-газа, которая была построена для объяснения сверхтекучести жидкого ^4He и которая также полезна при анализе нестандартной конденсации в связи с некоторыми недавними интерпретациями экспериментальных данных.

The paper presents a review of results concerning the non-conventional dynamical condensation versus conventional Bose–Einstein condensation, including the case of generalized van den Berg–Lewis–Pulé condensate. The review is based on detailed discussion of two models: a simple toy model and the Bogoliubov Weakly Imperfect Bose-Gas model, which was invented for explanation of superfluidity of liquid ^4He , but which is also instructive for analysis of non-conventional condensation regarding some recent interpretations of experimental data.

PACS: 03.75.Lm; 03.75.Nt

Памяти Вячеслава Борисовича Приезжева

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Если кратко резюмировать математические результаты, полученные за последние полвека относительно того, что называется конденсацией Бозе–Эйнштейна (БЭК), то необходимо разграничить две различные области исследований по этой тематике. Это относительно недавняя область деятельности, связанная с искусственными бозонными системами в магнитооптических *ловушках* [1], и другая, которая является традиционным исследованием *однородных* бозонных систем [2].

*E-mail: [Valentin.Zagrebnov\(at\)univ-amu.fr](mailto:Valentin.Zagrebnov(at)univ-amu.fr)

Последнее направление восходит к предсказанию Эйнштейном в 1925 г. образования конденсата в идеальном бозе-газе (ИБГ, или IBG) [3], затем, после критики в 1927 г. [4], поддержанному Ф. Лондоном [5] после обнаружения сверхтекучести [6, 7], и, наконец, серьёзно подкреплённому экспериментальным наблюдением [8–10] конденсата в сверхтекучей фазе жидкого гелия ^4He . Самым впечатляющим было довольно точное совпадение критической температуры конденсации T_c и температуры T_λ точки сверхтекучести (см. [10, 11] и [12, 13]). Хотя эти данные великолепно подтверждают теорию сверхтекучести жидкого гелия ^4He Боголюбова–Ландау, которая основана на гипотезе БЭК, математическая теория этого явления ещё далека от завершения.

Хотя БЭК, или *обобщённая БЭК* (оБЭК) [16] в ИБГ, изучена в мельчайших подробностях, анализ конденсата во взаимодействующем бозе-газе является более сложной задачей. Напомним, что эффективное квантовое притяжение между бозонами, стоящее за БЭК в ИБГ, делает эту систему нестабильной в отношении любого прямого *притягивающего* взаимодействия между частицами. Поэтому обсуждения вокруг вопроса: «Почему конденсируются взаимодействующие бозоны?» были по существу сосредоточены вокруг *отталкивающего* взаимодействия между частицами. Изучение стабильности стандартного БЭК (или оБЭК) в неидеальном бозе-газе (НБГ) с прямым быстроубывающим отталкивающим двухчастичным взаимодействием всё ещё продолжается [17–20]. В то же время, если уравновесить прямое притягивающее взаимодействие отталкиванием, стабилизирующим бозонную систему, это притяжение может быть источником нового механизма конденсации, называемого *нестандартной* конденсацией. Неявно этот тип конденсации впервые введён в [21] на основе тщательного анализа бозе-конденсации в модели Хуанга–Янга–Латтингера (HYL) [22].

Отметим, что это был Таулес [23], сделавший простые поучительные вычисления, которые утверждают, что новый тип бозе-конденсации может происходить в HYL-модели бозе-газа твёрдых шаров [22]. Через десять лет после [21] нестандартная конденсация была также обнаружена в боголюбовском слабо неидеальном бозе-газе (СНБГ), см. [24, 25, 26] и обзор [47].

Разница между *стандартной* и *нестандартной* конденсациями отражается в отличии механизмов их образования. *Обычная* конденсация является следствием баланса между *энтропией* и *кинетической энергией*, тогда как *нетрадиционная* конденсация возникает из баланса между *энтропией* и *энергией взаимодействия*. Эта разница влечёт важное следствие: стандартная конденсация имеет место, если она происходит в ИБГ, в то время как нестандартная конденсация возникает *из-за взаимодействия*. Благодаря этому факту предлагается другое название: *динамическая* конденсация [24, 25]. Как следствие, динамическая конденсация может возникать в *маломерных* бозонных системах, а также демонстрировать фазовый переход *первого рода*. Обе и HYL- и СНБГ-модели обладают этими свойствами.

В.2. Цель статьи — введение в теорию нестандартной динамической конденсации для однородных бозонных систем.

Для этого мы сначала введем в разд. 1 простую *игрушечную* модель, которая демонстрирует изложенные выше особенности конденсата этого типа. Свойства этой модели и описание конденсатов различных типов представлены в разд. 2 и 3. Разд. 4 предназначен для комментариев и заключительных замечаний.

Разд. 5 посвящён квантово-механическому происхождению *эффективного недиагонального* взаимодействия в гамильтониане боголюбовского СНБГ. Это важный шаг в понимании происхождения нестандартной конденсации в этой модели. Более подробная информация представлена в разд. 6–10.

Цель разд. 7–10 двоякая: во-первых, продемонстрировать, что фазовая диаграмма в модели Боголюбова достаточно нетривиальна, а во-вторых, точно вычислить соответствующее давление в большом каноническом ансамбле в области, в которой оно не совпадает с давлением в идеальном бозе-газе. В частности (см. разд. 10), мы доказываем, что при высоких плотностях частиц в СНБГ наблюдается стандартная (*обобщённая*) бозе-конденсация. Поэтому СНБГ демонстрирует *два* различных типа бозе-конденсации: нестандартную и обычную.

Несколько итоговых замечаний собрано в заключении.

1. ИГРУШЕЧНАЯ МОДЕЛЬ

1.1. Напомним, что с момента первого описания Эйнштейном [3] в 1925 г. известно, что *стандартная* конденсация Бозе–Эйнштейна с макроскопическим заполнением одного уровня представляет собой очень сложный вопрос. Например, величина заполнения уровня сильно зависит от формы сосуда или способа достижения термодинамического предела (см., например, [16, 27] и п. 4.1). Как было показано Казимиром [28], в длинной призме возможна конденсация в идеальном бозе-газе (ИБГ) скорее в *узкой зоне*, чем на одном уровне. Это был пример *обобщённого* БЭК (оБЭК) — концепции, введённой ранее Жирардо [29]. Первое строгое рассмотрение этого наблюдения для ИБГ, проведённое в серии статей [30–32] и [16], принадлежит ван ден Бергу, Льюису и Пуле.

Они предложили классификацию *типов* оБЭК. Согласно ей конденсат *на одном* уровне (или *на нескольких* уровнях) — это оБЭК типа I. Кроме того, есть ещё два варианта: оБЭК типа II, когда макроскопически занято *бесконечное* число уровней, или оБЭК типа III, когда *ни один* уровень макроскопически не занят (*неэкстенсивная* конденсация), см. п. 4.1.

Особенностью стандартного БЭК (обобщённого или нет) является то, что он появляется в невзаимодействующей системе бозонов, как только полная плотность частиц становится больше некоторого *критического* значе-

ния. Следовательно, за обычным БЭК стоит *механизм насыщения*, связанный с бозе-статистикой частиц. В работе [33] продемонстрировано, что в точности тот же механизм отвечает за БЭК в системе бозонов со среднеполювым отталкивающим взаимодействием, обычно называемым средним полем неидеального бозе-газа. Более того, в работе [42] показано, что вместо выбора геометрии сосуда разумный выбор отталкивающего взаимодействия может превратить первоначальную одноуровневую конденсацию (тип I) в *неэкстенсивную* (тип III) конденсацию, когда *никакие* уровни не являются макроскопически занятыми. Поэтому концепция стандартного оБЭК, обусловленного механизмом насыщения, хорошо соответствует бозонам с отталкивающим взаимодействием.

Поскольку бозоны очень чувствительны к притяжению, существует нетрадиционная динамическая конденсация, индуцированная этим взаимодействием [25, 34, 35, 26]. Опять же, такая конденсация возникает, когда общая плотность частиц (или химический потенциал) становится больше некоторого *критического* значения, однако именно притягивающее взаимодействие (а не просто бозе-статистика) определяет величину динамического конденсата и его поведение. Для того чтобы избежать коллапса, притягивающее взаимодействие в бозонной системе должно быть стабилизировано отталкиванием. Поэтому стандартная и нестандартная конденсации могут *сосуществовать*.

Наша игрушечная модель обладает этими двумя видами конденсации. Нестандартный тип связан с *притягивающим членом* в гамильтониане модели. Эта конденсация формируется на одном, самом низком уровне при умеренных плотностях (отрицательные химические потенциалы) и насыщается после некоторой *критической* плотности. Именно после этого порога появляется стандартная БЭК для того, чтобы абсорбировать растущую общую плотность частиц (механизм насыщения). На самом пороге эти два вида конденсатов сосуществуют. Более того, отталкивающее взаимодействие в нашей модели таково, что стандартная БЭК превращается в *неэкстенсивную*, т. е. в оБЭК типа III.

Поскольку известные бозе-системы, демонстрирующие конденсацию (например, сверхтекучий ^4He), далеко не идеальны, мы надеемся, что наша игрушечная модель поможет лучше понять возможные сценарии конденсации в реальных системах. Например, в конденсате атомов натрия в ловушке взаимодействие предположительно преобладает над кинетической энергией [36]. Следовательно, конденсация в щелочных разреженных газах в ловушках [37, 38] может быть комбинацией *нестандартной* и *стандартной* БЭК.

1.2. Чтобы зафиксировать обозначения и определения, сначала напомним модель Среднего поля (СП) для неидеального бозе-газа, предложенную Хуангом [39, гл. 5.2.6]. Это система идентичных бозонов массы m , заключённых в куб $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ объемом $V = |\Lambda|$ с центром в начале координат, определяемая

гамильтонианом:

$$H_{\Lambda}^{\text{MF}} = \sum_{k \in \Lambda^*} \varepsilon_k a_k^* a_k + \frac{\lambda}{2V} N_{\Lambda}^2, \quad \varepsilon_k := \hbar^2 k^2 / 2m, \quad \lambda > 0, \quad (1.1)$$

где $N_{\Lambda} = \sum_{k \in \Lambda^*} a_k^* a_k \equiv \sum_{k \in \Lambda^*} N_k$ — оператор числа частиц и ε_k соответствуют одночастичной кинетической энергии. Здесь $\{a_k^{\#}\}_{k \in \Lambda^*}$ являются операторами рождения/уничтожения в пространстве Фока \mathcal{F}_{Λ} над $L^2(\Lambda)$, соответствующего вторичному квантованию в ящике $\Lambda = \prod_{\alpha=1}^d L$ с периодическими граничными условиями, дуальным которого является множество

$$\Lambda^* = \left\{ k \in \mathbb{R}^d : k_{\alpha} = \frac{2\pi n_{\alpha}}{L}, n_{\alpha} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \alpha = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

Тогда при $d > 2$, заданной температуре $\theta := \beta^{-1}$ и общей плотности частиц $\rho > \rho_c^P(\theta)$ (здесь $\rho_c^P(\theta) := \rho^P(\theta^{-1}, \mu = 0)$, где $\rho^P(\beta, \mu)$ есть плотность частиц в большом каноническом ансамбле ИБГ), СП-модель демонстрирует *стандартную* обЭК типа I [33, 40, 41], т.е. макроскопическое заполнение только одночастичного основного состояния $k = 0$. См. в п. 4.1 классификацию *стандартных* БЭК.

Однако в работе [42] было показано, что СП-модель (1.1), возмущённая *отталкивающим* диагональным взаимодействием

$$\tilde{U}_{\Lambda} = \frac{\lambda}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*} N_k^2, \quad \lambda > 0, \quad (1.2)$$

демонстрирует БЭК, которая имеет место при плотностях $\rho > \rho_c^P(\theta)$ (или $\mu > \lambda \rho_c^P(\theta) =: \mu_c^{\text{MF}}(\theta)$), но теперь она переходит в обЭК типа III. Это *неэкстенсивная* конденсация, при которой *ни один* из одночастичных уровней макроскопически не заполнен (ср. с п. 4.1). Эта модель при $\lambda > 0$ была предложена в работе [43], и мы называем ее моделью Михозля–Шрёдера–Вербе́ра (МШВ):

$$H_{\Lambda}^{\text{MSV}} \equiv H_{\Lambda}^{\text{MF}} + \tilde{U}_{\Lambda}. \quad (1.3)$$

Тогда стандартная обЭК типа III означает, что

$$\lim_{\Lambda} \frac{\langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}^{\text{MSV}}}}{V} = 0, \quad k \in \Lambda^*,$$

для любых ρ , в то время как двойной предел

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, 0 \leq \|k\| \leq \delta\}} \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}^{\text{MSV}}} = \rho - \rho_c^P(\theta) > 0$$

при $\mu > \mu_c^{\text{MF}}(\theta)$. Здесь мы обозначили $\langle - \rangle_{H_\Lambda^{\text{MSV}}}(\beta, \mu)$, $\beta \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}^1$, гиббсовское состояние большого канонического ансамбля для гамильтониана H_Λ^{MSV} .

Обратим внимание, что гамильтониан $H_\Lambda^{\text{MF}} - \tilde{U}_\Lambda/2$ совпадает при $\lambda = 2a$ с гамильтонианом H_Λ^{HYL} для НУЛ-модели, которая была математически строго изучена в работе [21]. В ней было показано, что в НУЛ-модели имеет место нестандартная конденсация типа I, возникающая только на нулевой моде $k = 0$.

Тот факт, что слабое отталкивающее взаимодействие может вызвать обобщённую неэкстенсивную БЭК без какого-либо изменения соответствующего давления, был установлен в статье [34]. Это было сделано в рамках следующей модели:

$$H_\Lambda^0 = \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \varepsilon_k a_k^* a_k + \varepsilon_0 a_0^* a_0 + \frac{g_0}{2V} a_0^* a_0^* a_0 a_0, \quad (1.4)$$

с $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_{k=0}$ (определенной в (1.1)) $\in \mathbb{R}^1$ и $g_0 > 0$, возмущённой взаимодействием

$$U_\Lambda = \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} g_k(V) a_k^* a_k^* a_k a_k, \quad 0 < g_- \leq g_k(V) \leq \gamma_k V^{\alpha_k}, \quad (1.5)$$

с $\alpha_k \leq \alpha_+ < 1$ и $0 < \gamma_k \leq \gamma_+$. Возмущение U_Λ (аналогичное взаимодействию \tilde{U}_Λ с $g_k = \lambda$) приводит к гамильтониану

$$H_\Lambda^{\text{BZ}} := H_\Lambda^0 + U_\Lambda. \quad (1.6)$$

В отличие от МШВ-модели давление в большом каноническом ансамбле для (1.6):

$$p_\Lambda^{\text{BZ}}(\beta, \mu) = p_\Lambda [H_\Lambda^{\text{BZ}}] := \frac{1}{\beta V} \ln \text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda} e^{-\beta(H_\Lambda^{\text{BZ}} - \mu N_\Lambda)} \quad (1.7)$$

определяется в термодинамическом пределе только в области $Q = \{\mu \leq 0\} \times \{\theta \geq 0\}$, и оно равно

$$p^{\text{BZ}}(\beta, \mu) := \lim_\Lambda p_\Lambda^{\text{BZ}}(\beta, \mu) = p^P(\beta, \mu) - \inf_{\rho_0 \geq 0} \left[(\varepsilon_0 - \mu) \rho_0 + \frac{g_0 \rho_0^2}{2} \right], \quad (1.8)$$

см. [34]. Здесь $p^P(\beta, \mu)$ обозначает давление ИБГ в термодинамическом пределе. Заметим, что давление (1.8) не зависит от параметров $\{g_k(V)\}_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}}$, т. е. взаимодействия (1.5).

Замечание 1.1. Пусть область D_{ε_0} определяется так:

$$D_{\varepsilon_0} := \{(\theta, \mu) \in Q : p^P(\beta, \mu) < p^{\text{BZ}}(\beta, \mu)\}. \quad (1.9)$$

Тогда термодинамический предел (1.8) показывает, что для обеспечения $D_{\varepsilon_0} \neq \{\emptyset\}$ параметр ε_0 должен быть отрицательным, т. е.

$$D_{\varepsilon_0} = \{(\theta, \mu) \in Q : \varepsilon_0 < \mu \leq 0\}. \quad (1.10)$$

Ниже мы рассмотрим только случай $\varepsilon_0 < 0$ и $d > 2$.

Обозначим $\rho_{\Lambda}^{\text{BZ}}(\beta, \mu)$ общую плотность частиц в большом каноническом ансамбле для модели H_{Λ}^{BZ} :

$$\rho_{\Lambda}^{\text{BZ}}(\beta, \mu) := \left\langle \frac{N_{\Lambda}}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}^{\text{BZ}}}(\beta, \mu). \quad (1.11)$$

Тогда $\rho^{\text{BZ}}(\beta, \mu) := \lim_{\Lambda} \rho_{\Lambda}^{\text{BZ}}(\beta, \mu)$ есть давление в соответствующем термодинамическом пределе, которое согласно [34] равно

$$\rho^{\text{BZ}}(\beta, \mu) = \rho^P(\beta, \mu) \quad (1.12)$$

для $(\theta, \mu \leq \varepsilon_0)$ и

$$\rho^{\text{BZ}}(\beta, \mu) = \rho^P(\beta, \mu) + \frac{\mu - \varepsilon_0}{g_0} \quad (1.13)$$

для $(\theta, \varepsilon_0 < \mu < 0)$. Заметим, что при $d > 2$ в этой модели существует конечная критическая плотность

$$\rho_c^{\text{BZ}}(\theta) := \sup_{\mu \leq 0} \rho^{\text{BZ}}(\theta^{-1}, \mu) = \rho^{\text{BZ}}(\theta^{-1}, \mu = 0) = \rho_c^P(\theta) - \frac{\varepsilon_0}{g_0} < +\infty. \quad (1.14)$$

Предложение 1.2 [34]. Пусть $\rho > \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$ ($d > 2$) и $0 < g_- \leq g_k(V) \leq \gamma_k V^{\alpha_k}$ для $k \in \Lambda^* \setminus \{0\}$, с $\alpha_k \leq \alpha_+ < 1$ и $0 < \gamma_k \leq \gamma_+$. Тогда для любого $\varepsilon_0 < 0$ мы имеем:

1) конденсацию на моде $k = 0$ (даже при $d < 3$), т. е.

$$\rho_0^{\text{BZ}}(\theta, \mu) := \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}^{\text{BZ}}} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } (\theta, \mu) \in Q \setminus D_{\varepsilon_0} \\ \left(\frac{\mu - \varepsilon_0}{g_0} \right) & \text{при } (\theta, \mu) \in D_{\varepsilon_0} \end{array} \right\}; \quad (1.15)$$

2) для любого $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^1$

$$\lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_k^* a_k}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}^{\text{BZ}}} = 0, \quad k \in \Lambda^* \setminus \{0\}, \quad (1.16)$$

т. е. имеет место микроскопическое заполнение мод $k \neq 0$, но мы имеем неэкстенсивную БЭК:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: 0 < \|k\| < \delta\}} \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}^{\text{BZ}}} = \rho - \rho_c^{\text{BZ}}(\theta) > 0. \quad (1.17)$$

При $\varepsilon_0 < 0$ эта оБЭК типа III сосуществует с нестандартной динамической БЭК типа I на моде $k = 0$, если $(\theta, \mu) \in D_{\varepsilon_0}$.

Поэтому предложение 1.2 демонстрирует для плотностей $\rho > \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$ сосуществование двух типов конденсатов в модели (1.6):

— нестандартной БЭК на единственной моде $k = 0$, возникающей благодаря члену $(\varepsilon_0 a_0^* a_0)$, который имитирует для $\varepsilon_0 < 0$ притяжение во внешнем потенциале [44], приводящее к нестандартной конденсации типа I (ср. с п. 4.1);

— стандартной БЭК, вызванной насыщением общей плотности частиц, для которой (аналогично МШВ-модели) тип III этой конденсации возникает благодаря упругому взаимодействию U_{Λ} (1.5) бозонов на модах $k \neq 0$.

Следовательно, взаимодействие (1.5) является решающим для формирования неэкстенсивной оБЭК в модели (1.6), в то время как оно не влияет на значение давления (1.8).

Ниже мы изучаем *игрушечную модель*, которая является модификацией модели (1.6). Она, как и (1.3), стабилизируется СП-взаимодействием (1.1):

$$H_{\Lambda} = \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \varepsilon_k a_k^* a_k + \varepsilon_0 a_0^* a_0 + \frac{g_0}{2V} N_0^2 + \frac{\lambda}{2V} N_{\Lambda}^2 + \frac{g}{2V} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} N_k^2. \quad (1.18)$$

Здесь $\lambda > 0$, $g_0 > 0$, $g > 0$, а $\varepsilon_0 < 0$. Отметим, что игрушечная модель H_{Λ} для $\varepsilon_0 = 0$ и $\lambda = g = g_0$ совпадает с МШВ-моделью (1.3), в то время как для $\varepsilon_0 = 0$ и $g_0 = g = -a$, $\lambda = 2a > 0$ получаем

$$H_{\Lambda}^{\text{HYL}} = \sum_{k \in \Lambda^*} \varepsilon_k a_k^* a_k + \frac{a}{2V} N_{\Lambda}^2 + \frac{a}{2V} \left\{ N_{\Lambda}^2 - \sum_{k \in \Lambda^*} N_k^2 \right\}. \quad (1.19)$$

Замечание 1.3. Заметим, что в игрушечной модели (1.18) эффект, способствующий нестандартной конденсации бозонов на нулевой моде, возникает благодаря члену кинетической энергии, который усилен членом энергии «взаимодействия» при $\varepsilon_0 < 0$, см. разд. 3. С другой стороны, модель Хуанга–Янга–Латтинжера (1.19) представляет собой СП бозе-газ (1.1) (который демонстрирует обычную БЭК на нулевой моде), возмущённый энергией взаимодействия, см. последний член в (1.19). Тогда эффект, способствующий скоплению частиц на нулевой моде, вызванный членом кинетической энергии, усилен указанным членом энергии взаимодействия, поскольку он имеет

наименьшее значение, когда все бозоны занимают один и тот же уровень энергии. Поэтому он вызывает нестандартную динамическую БЭК на нулевой моде, см. [21].

2. ПЛОТНОСТЬ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ И ДАВЛЕНИЕ

2.1. Сначала мы рассмотрим игрушечную модель (1.18) в каноническом ансамбле (β, ρ) . Это существенно упрощает изучение термодинамического предела модели. Пусть $f_\Lambda(\beta, \rho = n/V)$ — соответствующая плотность свободной энергии:

$$f_\Lambda(\beta, \rho) := -\frac{1}{\beta V} \ln \text{Tr} \mathcal{H}_{\Lambda, S}^n(e^{-\beta H_\Lambda}), \quad (2.1)$$

где $\mathcal{H}_{\Lambda, S}^n := S\left(\bigotimes_{i=1}^n L^2(\Lambda)\right)$ обозначает симметризованное n -частичное пространство Гильберта.

Теорема 2.1. Пусть $\lambda > 0, g > 0, g_0 > 0$ и $\varepsilon_0 < 0$. Тогда

$$f(\beta, \rho) := \lim_\Lambda f_\Lambda(\beta, \rho) = \frac{\lambda}{2} \rho^2 + \inf_{\rho_0 \in [0, \rho]} \left\{ \varepsilon_0 \rho_0 + \frac{g_0}{2} \rho_0^2 + f^P(\beta, \rho - \rho_0) \right\} \quad (2.2)$$

не зависит от g при условии, что $g > 0$. Здесь $f^P(\beta, \rho)$ обозначает свободную энергию ИБГ-модели в термодинамическом пределе

$$f^P(\beta, \rho) := \lim_\Lambda f_\Lambda^P(\beta, \rho), \quad (2.3)$$

где

$$f_\Lambda^P(\beta, \rho) := -\frac{1}{\beta V} \ln \sum_{\{n_k=0,1,2,\dots\}_{k \in \Lambda^*}} \exp \left[-\beta \left(\sum_{k \in \Lambda^*} \varepsilon_k n_k \right) \right] \delta_{\sum_{k \in \Lambda^*} n_k = [\rho V]}, \quad (2.4)$$

и $[x]$ обозначает целую часть $x \geq 0$.

Доказательство. Согласно (1.18) и (2.1) мы получаем

$$f_\Lambda(\beta, \rho) = -\frac{1}{\beta V} \ln \left\{ \sum_{n_0=0}^{[\rho V]} \exp \left[-\beta V h \left(\rho, \frac{n_0}{V} \right) \right] \right\} + \frac{\lambda}{2} \rho^2, \quad (2.5)$$

где

$$h_{\Lambda}(\rho, \rho_0) := \varepsilon_0 \rho_0 + \frac{g_0}{2} \rho_0^2 - \frac{1}{\beta V} \ln \sum_{\{n_k=0,1,2,\dots\}_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}}} \times \\ \times \exp \left[-\beta \left(\sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \left[\varepsilon_k n_k + \frac{g}{2V} n_k^2 \right] \right) \right] \delta_{\sum_{k \neq 0} n_k = [\rho V] - [\rho_0 V]}. \quad (2.6)$$

В соответствии с (2.5) можно получить оценку

$$\frac{\lambda}{2} \rho^2 + \inf_{\rho_0 \in [0, \rho]} h_{\Lambda}(\rho, \rho_0) - \frac{1}{\beta V} \ln([\rho V] + 1) \leq f_{\Lambda}(\beta, \rho) \leq \frac{\lambda}{2} \rho^2 + \\ + \inf_{\rho_0 \in [0, \rho]} h_{\Lambda}(\rho, \rho_0),$$

которая в термодинамическом пределе даёт

$$f(\beta, \rho) := \lim_{\Lambda} f_{\Lambda}(\beta, \rho) = \frac{\lambda}{2} \rho^2 + \lim_{\Lambda} \inf_{\rho_0 \in [0, \rho]} h_{\Lambda}(\rho, \rho_0). \quad (2.7)$$

Заметим, что выражение (2.6) может быть переписано как

$$h_{\Lambda}(\rho, \rho_0) = \varepsilon_0 \rho_0 + \frac{g_0}{2} \rho_0^2 - \frac{1}{\beta V} \ln \left\langle \exp \left(-\frac{\beta g}{2V} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} n_k^2 \right) \right\rangle_{\tilde{H}_{\Lambda}^P}(\beta, \rho - \rho_0), \quad (2.8)$$

где $\langle - \rangle_{\tilde{H}_{\Lambda}^P}(\beta, \rho - \rho_0)$ является каноническим состоянием Гиббса для ИБГ-модели с *исключённой* модой $k = 0$ для плотности $\rho - \rho_0$ с соответствующей плотностью свободной энергии $\tilde{f}_{\Lambda}^P(\beta, \rho)$, определённой в (2.4) для $k \in \Lambda^* \setminus \{0\}$. Поскольку

$$\lim_{\Lambda} \tilde{f}_{\Lambda}^P(\beta, \rho) = \lim_{\Lambda} f_{\Lambda}^P(\beta, \rho),$$

неравенство Йенсена

$$\left\langle \exp \left(-\frac{\beta g}{2V} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} n_k^2 \right) \right\rangle_{\tilde{H}_{\Lambda}^P} \geq \exp \left(-\frac{\beta g}{2V} \left\langle \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} n_k^2 \right\rangle_{\tilde{H}_{\Lambda}^P} \right)$$

и (2.8) обеспечивают оценку

$$\lim_{\Lambda} h_{\Lambda}(\rho, \rho_0) \leq \varepsilon_0 \rho_0 + \frac{g_0}{2} \rho_0^2 + f^P(\beta, \rho - \rho_0). \quad (2.9)$$

Более того, поскольку

$$\exp\left(-\frac{\beta g}{2V}n_k^2\right) \leq 1,$$

по определению (2.6) мы имеем

$$h_\Lambda(\rho, \rho_0) \geq \varepsilon_0 \rho_0 + \frac{g_0}{2} \rho_0^2 + f_\Lambda^P(\beta, \rho - \rho_0),$$

что совместно с (2.9) даёт (2.2).

Замечание 2.2. Обозначим $f_\Lambda^{\text{BZ}}(\beta, \rho)$ плотность свободной энергии, соответствующую H_Λ^{BZ} (1.6) с $g_k(V) = g/2$, т. е.

$$f_\Lambda^{\text{BZ}}(\beta, \rho) := -\frac{1}{\beta V} \ln \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\Lambda,S}^n} \left(e^{-\beta H_\Lambda^{\text{BZ}}} \right).$$

Тогда формулы (1.6), (1.18) и (2.1) приводят к

$$f_\Lambda(\beta, \rho) = \frac{\lambda}{2} \rho^2 + f_\Lambda^{\text{BZ}}(\beta, \rho),$$

откуда, с помощью теоремы 2, мы выводим

$$f^{\text{BZ}}(\beta, \rho) := \lim_{\Lambda} f_\Lambda^{\text{BZ}}(\beta, \rho) = \inf_{\rho_0 \in [0, \rho]} \left\{ \varepsilon_0 \rho_0 + \frac{g_0}{2} \rho_0^2 + f^P(\beta, \rho - \rho_0) \right\} \quad (2.10)$$

и

$$f(\beta, \rho) = \frac{\lambda}{2} \rho^2 + f^{\text{BZ}}(\beta, \rho). \quad (2.11)$$

Явными вычислениями можно проверить выпуклость $f^{\text{BZ}}(\beta, \rho)$ как функции ρ . Поэтому то же самое верно для $f(\beta, \rho)$, см. (2.2) и (2.11).

Замечание 2.3. Поскольку давление $p^{\text{BZ}}(\beta, \mu)$ является преобразованием Лежандра соответствующей плотности свободной энергии $f^{\text{BZ}}(\beta, \rho)$, из равенства (2.10) мы получаем, что

$$\begin{aligned} p^{\text{BZ}}(\beta, \mu) &= \sup_{\rho \geq 0} \{ \mu \rho - f^{\text{BZ}}(\beta, \rho) \} = \\ &= \sup_{\rho_0 \geq 0} \left\{ \sup_{\rho \geq \rho_0} \left\{ \mu \rho - \varepsilon_0 \rho_0 - \frac{g_0}{2} \rho_0^2 + \mu(\rho - \rho_0) - f^P(\beta, \rho - \rho_0) \right\} \right\} = \\ &= \sup_{\rho_0 \geq 0} \left\{ p^P(\beta, \mu) - (\varepsilon_0 - \mu) \rho_0 - \frac{g_0}{2} \rho_0^2 \right\}, \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (1.8), полученным в [34].

2.2. Теперь мы рассмотрим нашу модель (1.18) в *большом каноническом ансамбле* (β, μ) . Пусть

$$p_{\Lambda}(\beta, \mu) := \frac{1}{\beta V} \ln \text{Tr}_{\mathcal{F}_{\Lambda}} e^{-\beta(H_{\Lambda} - \mu N_{\Lambda})}$$

— давление в большом каноническом ансамбле, соответствующем гамильтониану (1.18).

Теорема 2.4. Пусть $\lambda > 0$, $g_0 > 0$, $g > 0$ и $\varepsilon_0 < 0$, тогда:

1) область стабильности H_{Λ} , т. е.

$$\tilde{Q} := \left\{ (\theta \geq 0, \mu \in \mathbb{R}^1) : \lim_{\Lambda} p_{\Lambda}(\beta, \mu) < +\infty \right\}, \quad (2.12)$$

имеет форму $\tilde{Q} = \{\theta \geq 0\} \times \{\mu \in \mathbb{R}^1\}$;

2) в термодинамическом пределе получается

$$p(\beta, \mu) := \lim_{\Lambda} p_{\Lambda}(\beta, \mu) = \inf_{\alpha \leq 0} \left\{ p^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} \right\} \quad (2.13)$$

при $(\theta, \mu) \in \tilde{Q}$, где $p^{\text{BZ}}(\beta, \mu)$ есть давление, определённое в (1.8). Поэтому давление (2.13) не зависит от параметра g при условии, что этот параметр положителен.

Доказательство.

1) Заметим, что гамильтониан H_{Λ} (1.18) сверхустойчив, т. е. существуют $B = -\varepsilon_0$ и $C = \lambda/2$ такие, что

$$H_{\Lambda} \geq -N_{\Lambda} B + \frac{C}{V} N_{\Lambda}^2 \quad (2.14)$$

для любого сосуда Λ . Поэтому, благодаря неравенству (2.14), мы приходим к выводу, что предел бесконечного объема (2.13) существует для любого $\mu \in \mathbb{R}^1$.

2) Поскольку давление $p(\beta, \mu)$ фактически является преобразованием Лежандра от соответствующей плотности свободной энергии $f(\beta, \rho)$ (2.2) или (2.11), по теореме 3.1 мы получаем

$$p(\beta, \mu) = \sup_{\rho \geq 0} \{\mu\rho - f(\beta, \rho)\} = \sup_{\rho \geq 0} \left\{ \mu\rho - \frac{\lambda}{2}\rho^2 - f^{\text{BZ}}(\beta, \rho) \right\} \quad (2.15)$$

с $f^{\text{BZ}}(\beta, \rho)$, определённой в (2.10). Прямые вычисления показывают, что

$$\inf_{\alpha \leq 0} \left\{ \alpha\rho + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} - f^{\text{BZ}}(\beta, \rho) \right\} = \mu\rho - \frac{\lambda}{2}\rho^2 - f^{\text{BZ}}(\beta, \rho)$$

и, таким образом, выражение (2.15) принимает вид

$$p(\beta, \mu) = \sup_{\rho \geq 0} \left\{ \inf_{\alpha \leq 0} \left\{ \alpha \rho + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} - f^{\text{BZ}}(\beta, \rho) \right\} \right\}. \quad (2.16)$$

Отметим, что в общем случае \sup и \inf не коммутируют. Однако выпуклость плотности свободной энергии $f^{\text{BZ}}(\beta, \rho)$ (ср. с замечанием 2.2) гарантирует, что величина

$$F(\rho, \alpha) := \alpha \rho + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} - f^{\text{BZ}}(\beta, \rho) \quad (2.17)$$

— строго вогнутая функция ρ и строго выпуклая функция α . Этот факт обеспечивает единственность стационарной точки $(\tilde{\rho}, \tilde{\alpha})$, соответствующей

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F(\tilde{\rho}, \tilde{\alpha}) &= 0, \\ \partial_\rho F(\tilde{\rho}, \tilde{\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$F(\tilde{\rho}, \tilde{\alpha}) = \sup_{\rho \geq 0} \left\{ \inf_{\alpha \leq 0} \{F(\rho, \alpha)\} \right\} = \inf_{\alpha \leq 0} \left\{ \sup_{\rho \geq 0} \{F(\rho, \alpha)\} \right\}. \quad (2.18)$$

Поскольку

$$\sup_{\rho \geq 0} F(\rho, \alpha) = \left\{ \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} + p^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) \right\},$$

равенства (2.16)–(2.18) влекут (2.13).

3. БОЗЕ-КОНДЕНСАТЫ

3.1. Пусть $\rho_\Lambda(\beta, \mu)$ обозначает общую плотность частиц в большом каноническом ансамбле модели (1.18), т. е.

$$\rho_\Lambda(\beta, \mu) := \left\langle \frac{N_\Lambda}{V} \right\rangle_{H_\Lambda} = \partial_\mu p_\Lambda(\beta, \mu), \quad (3.1)$$

где $\langle - \rangle_{H_\Lambda}(\beta, \mu)$ обозначает гиббсовское состояние большого канонического ансамбля для гамильтониана H_Λ (1.18).

Теорема 3.1. Для $(\theta, \mu) \in \tilde{Q}$ (2.12) имеем равенство

$$\rho(\beta, \mu) := \lim_{\Lambda} \rho_\Lambda(\beta, \mu) = \rho^{\text{BZ}}(\beta, \tilde{\alpha}(\beta, \mu)). \quad (3.2)$$

Здесь $\hat{\alpha}(\beta, \mu) \leq 0$ — единственное решение уравнения

$$\rho^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) + \frac{(\alpha - \mu)}{\lambda} = 0, \quad (3.3)$$

при $\mu \leq \mu_c^{\text{BZ}}(\theta) := \lambda \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$, в то время как при $\mu > \mu_c^{\text{BZ}}(\theta)$ имеем

$$\rho(\beta, \mu) := \lim_{\Lambda} \rho_{\Lambda}(\beta, \mu) = \frac{\mu}{\lambda}. \quad (3.4)$$

Здесь $\rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$ — плотность, определённая выше в (1.14).

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}(\beta, \mu) \leq 0$ определено с помощью соотношения (2.13), т. е.

$$p(\beta, \mu) = \inf_{\alpha \leq 0} \left\{ p^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} \right\} = p^{\text{BZ}}(\beta, \tilde{\alpha}(\beta, \mu)) + \frac{(\mu - \tilde{\alpha}(\beta, \mu))^2}{2\lambda}. \quad (3.5)$$

Поскольку

$$\partial_{\alpha} \left[p^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} \right] = \rho^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) + \frac{(\alpha - \mu)}{\lambda}, \quad (3.6)$$

то при $\mu \leq \mu_c^{\text{BZ}}(\theta) = \lambda \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$ (ср. с (1.14)) существует единственное решение $\hat{\alpha}(\beta, \mu) \leq 0$ уравнения (3.3), которое совпадает с $\tilde{\alpha}(\beta, \mu)$ в (2.13). Поскольку $\{p_{\Lambda}(\beta, \mu)\}_{\Lambda}$ являются выпуклыми функциями $\mu \in \mathbb{R}^1$, то комбинируя (3.1) и (3.5) с леммой Гриффитса [45] (разд. 4.2, лемма 4.1), мы получаем общую плотность частиц в термодинамическом пределе

$$\rho(\beta, \mu) = \partial_{\mu} p(\beta, \mu) = \frac{(\mu - \tilde{\alpha}(\beta, \mu))}{\lambda}.$$

Совместно с (3.3) это даёт (3.2).

Теперь пусть $\mu > \mu_c^{\text{BZ}}(\theta)$. Тогда по определению $\mu_c^{\text{BZ}}(\theta)$ и $\rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$ (см. (1.14)) получаем

$$\partial_{\alpha} \left[p^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} \right] = \rho^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) + \frac{(\alpha - \mu)}{\lambda} \leq 0.$$

Это приводит к

$$p(\beta, \mu) = \inf_{\alpha \leq 0} \left\{ p^{\text{BZ}}(\beta, \alpha) + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} \right\} = p^{\text{BZ}}(\beta, 0) + \frac{\mu^2}{2\lambda}, \quad (3.7)$$

т. е. $\tilde{\alpha}(\beta, \mu) = 0$. Поэтому по лемме 4.1 и (3.1), (3.7) мы получаем (3.4).

Теорема 3.2. Пусть $\varepsilon_0 < 0$. Тогда мы имеем

$$\rho_0(\theta, \mu) := \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}}(\beta, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{при } (\theta, \mu) \in \tilde{Q} \setminus \tilde{D}_{\varepsilon_0}, \\ \left(\frac{\tilde{\alpha}(\beta, \mu) - \varepsilon_0}{g_0} \right) & \text{при } (\theta, \mu) \in \tilde{D}_{\varepsilon_0}, \end{cases} \quad (3.8)$$

с $\tilde{\alpha}(\beta, \mu)$ — определённой из равенства (3.5). Здесь область $\tilde{D}_{\varepsilon_0}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{D}_{\varepsilon_0} = \left\{ (\theta, \mu) \in \tilde{Q} : \varepsilon_0 < \tilde{\alpha}(\beta, \mu) \right\} = \left\{ (\theta, \mu) \in \tilde{Q} : \tilde{\mu}_0(\theta) < \mu \right\}, \quad (3.9)$$

где мы обозначили $\tilde{\mu}_0(\theta)$ единственное решение уравнения

$$\tilde{\alpha}(\beta, \mu) = \varepsilon_0. \quad (3.10)$$

Доказательство. Поскольку $\{p_{\Lambda}(\beta, \mu)\}_{\Lambda}$ — выпуклые функции параметра $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^1$, то, благодаря

$$\left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}}(\beta, \mu) = -\partial_{\varepsilon_0} p_{\Lambda}(\beta, \mu) \quad (3.11)$$

и лемме 4.1, мы приходим к выводу, что

$$\lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}}(\beta, \mu) = -\partial_{\varepsilon_0} p(\beta, \mu). \quad (3.12)$$

При $\mu \leq \mu_c^{\text{BZ}}(\theta) = \lambda \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$ существует единственное значение $\tilde{\alpha}(\beta, \mu) \leq 0$, определённое в (3.5), которое удовлетворяет уравнению (3.3), в то время как при $\mu > \mu_c^{\text{BZ}}(\theta)$, согласно (3.7), мы получаем $\tilde{\alpha}(\beta, \mu) = 0$. Отметим, что, благодаря соотношению (1.8), при $\mu \leq \varepsilon_0$, мы имеем

$$p^{\text{BZ}}(\beta, \mu) = p^P(\beta, \mu).$$

Поэтому, благодаря (3.9), (3.12), из соотношений (3.5) и (3.7) можно увидеть, что

$$\lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}}(\beta, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tilde{\alpha}(\beta, \mu) \leq \varepsilon_0 < 0, \\ \left(\frac{\tilde{\alpha}(\beta, \mu) - \varepsilon_0}{g_0} \right) & \text{при } \varepsilon_0 \leq \tilde{\alpha}(\beta, \mu), \end{cases}$$

т. е. утверждение (3.8).

Следовательно, по теореме 3.2 область $\tilde{D}_{\varepsilon_0}$ (3.9) может быть описана следующим образом:

$$\tilde{D}_{\varepsilon_0} = \left\{ (\theta, \mu) \in \tilde{Q} : \rho_0(\theta, \mu) := \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}} > 0 \right\}. \quad (3.13)$$

Заметим, что в отличие от D_{ε_0} , см. (1.9), (1.10), область $\tilde{D}_{\varepsilon_0}$ имеет границу, зависящую от температуры, и она сохраняется для положительных μ . Описанное макроскопическое заполнение моды $k = 0$ (3.8) соответствует *нестандартной* бозе-конденсации, имеющей место в модели (1.18) благодаря *притягивающему* члену $\varepsilon_0 a_0^* a_0$, при $\varepsilon_0 < 0$ (ср. с п. 4.1). Это *аналогично* первому этапу конденсации, демонстрируемой моделью H_{Λ}^{BZ} (1.6) с $g_k(V) = g/2$, хотя в последнем случае это возможно только при $\mu \leq 0$, см. [34]. В частности, мы опять имеем насыщение плотности конденсата в моде $k = 0$:

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}^1} \rho_0(\theta, \mu) = \rho_0(\theta, \mu \geq \mu_c^{\text{BZ}}(\theta)) = -\frac{\varepsilon_0}{g_0}, \quad (3.14)$$

ср. (1.15). Заметим, что при любом μ

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \tilde{\alpha}(\beta, \mu) = -\infty.$$

Таким образом, в отличие от модели (1.6) (с $g_k(V) = g/2$), нестандартная конденсация в модели (1.18) зависит от температуры. Существует $\theta_0(\mu)$ (решение уравнения $\tilde{\alpha}(\theta^{-1}, \mu) = \varepsilon_0$, (3.10)) такое, что

$$\rho_0(\theta, \mu) = \frac{\tilde{\alpha}(\beta, \mu) - \varepsilon_0}{g_0} > 0 \quad (3.15)$$

при $\theta \leq \tilde{\theta}_0(\mu)$ и

$$\rho_0(\theta, \mu) = 0 \quad (3.16)$$

при $\theta > \tilde{\theta}_0(\mu)$. Это другой способ описания фазовой диаграммы модели (1.18): $\tilde{\theta}_0(\mu)$ просто является обратной функцией к $\tilde{\mu}_0(\theta)$.

3.2. Подобно (1.6), в модели (1.18) при $d > 2$ при больших значениях общей плотности частиц возникает *другой тип* конденсации: стандартная *неэкстенсивная* (т. е. типа III) оБЭК вблизи значения $k = 0$ (см. п. 4.1). Для понимания этой конденсации мы вводим вспомогательный гамильтониан

$$H_{\Lambda, \gamma} := H_{\Lambda} - \gamma \sum_{\{k \in \Lambda^* : \|k\| \geq \delta\}} a_k^* a_k \quad (3.17)$$

для фиксированного $\delta > 0$ и полагаем

$$p_{\Lambda}(\beta, \mu, \gamma) := \frac{1}{\beta V} \ln \text{Tr}_{\mathcal{F}_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda, \gamma}(\mu)}. \quad (3.18)$$

Замечание 3.3. Пусть $\gamma < \varepsilon_{\delta} := \varepsilon_{\|k\|=\delta}$. Тогда система с гамильтонианом $H_{\Lambda, \gamma}$ имеет те же самые свойства, что и модель H_{Λ} по модулю преобразования спектра свободных частиц:

$$\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_{k, \gamma} := \varepsilon_k - \gamma \cdot \chi_{[\delta, +\infty)}(\|k\|), \quad (3.19)$$

где $\chi_A(x)$ обозначает характеристическую функцию области A . В частности, результаты теорем 2.1 и 2.4 остаются без изменений. При $(\theta, \mu) \in \tilde{Q}$ и $\gamma < \varepsilon_\delta$ мы имеем

$$p(\beta, \mu, \gamma) := \lim_{\Lambda} p_{\Lambda}(\beta, \mu, \gamma) = \inf_{\alpha \leq 0} \left\{ p^{\text{BZ}}(\beta, \alpha, \gamma) + \frac{(\mu - \alpha)^2}{2\lambda} \right\}, \quad (3.20)$$

где $p^{\text{BZ}}(\beta, \mu, \gamma)$ обозначает давление (1.8), но спектр свободных частиц имеет вид (3.19):

$$\begin{aligned} p^{\text{BZ}}(\beta, \mu, \gamma) &= p^P(\beta, \mu, \gamma) - \inf_{\rho_0 \geq 0} \left[(\varepsilon_0 - \mu) \rho_0 + \frac{g_0 \rho_0^2}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{\beta(2\pi)^d} \int_{k \in \mathbb{R}^d} \ln \left[(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k, \gamma - \mu)})^{-1} \right] d^d k - \inf_{\rho_0 \geq 0} \left[(\varepsilon_0 - \mu) \rho_0 + \frac{g_0 \rho_0^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Теорема 3.4. Для любых $(\theta, \mu) \in \tilde{Q}$ мы имеем

$$\lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_k^* a_k}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}} = 0, \quad k \in \Lambda^* \setminus \{0\}, \quad (3.22)$$

т. е. нет макроскопического заполнения мод $k \neq 0$, в то время как при $\mu > \mu_c^{\text{BZ}}(\theta) = \lambda \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$ модель H_{Λ} (1.18) демонстрирует обобщённую (неэкстенсивную) БЭК для этих мод:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: 0 < \|k\| < \delta\}} \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}} = \rho(\beta, \mu) - \rho_c^{\text{BZ}}(\theta) = \frac{1}{\lambda} (\mu - \mu_c^{\text{BZ}}(\theta)) > 0. \quad (3.23)$$

Здесь функция $\rho(\beta, \mu)$ определена в (3.4). Если $\varepsilon_0 < 0$, то эта конденсация сосуществует вместе с нестандартной конденсацией на моде $k = 0$ (см. теорему 3.2).

Доказательство. Пусть $g > 0$ и $\Delta g > 0$ принимают такие значения, что $g - \Delta g > 0$. Тогда, по неравенству выпуклости Боголюбова (см., например, [46]), получаем

$$0 \leq \frac{\Delta g}{2V^2} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \langle N_k^2 \rangle_{H_{\Lambda}} \leq p_{\Lambda} \left[H_{\Lambda} - \frac{\Delta g}{2V} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} N_k^2 \right] - p_{\Lambda} [H_{\Lambda}]. \quad (3.24)$$

Отметим, что по теоремам 2.1 и 2.4 термодинамические пределы давлений в двух моделях (1.18) с параметрами $g > 0$ и $g - \Delta g > 0$ совпадают с (2.13),

т. е. имеем

$$\lim_{\Lambda} \left\{ p_{\Lambda} \left[H_{\Lambda} - \frac{\Delta g}{2V} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} N_k^2 \right] - p_{\Lambda} [H_{\Lambda}] \right\} = 0. \quad (3.25)$$

Поскольку для произвольного $k \in \Lambda^* \setminus \{0\}$ мы имеем оценку

$$0 \leq \left(\frac{\langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}}}{V} \right)^2 \leq \frac{\langle N_k^2 \rangle_{H_{\Lambda}}}{V^2} \leq \frac{1}{V^2} \sum_{k \in \Lambda^* \setminus \{0\}} \langle N_k^2 \rangle_{H_{\Lambda}},$$

её комбинация с (3.24) и (3.25) даёт (3.22).

Пусть $\delta > 0$, тогда

$$\frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: 0 < \|k\| < \delta\}} \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}} = \rho_{\Lambda}(\beta, \mu) - \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}} - \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: \|k\| \geq \delta\}} \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}}. \quad (3.26)$$

Теперь мы можем следовать тем же самым аргументам, что и в доказательствах теорем 3.1 и 3.2: мы имеем множество $\{p_{\Lambda}(\beta, \mu, \gamma)\}_{\Lambda}$ выпуклых функций $\gamma \in (-\infty, \varepsilon_{\delta}]$: с

$$\frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: \|k\| \geq \delta\}} \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda, \gamma}} = \partial_{\gamma} p_{\Lambda}(\beta, \mu, \gamma),$$

которое по лемме 4.1 и (3.20), (3.21) даёт для $\gamma = 0$:

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: \|k\| \geq \delta\}} \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}} = \partial_{\gamma} p(\beta, \mu, \gamma = 0). \quad (3.27)$$

Тогда по определениям (3.19), (3.20) и теореме 3.1, см. (3.2), (3.4), вместе с явной формулой (1.13) мы получаем при $\mu < \mu_c^{BZ}(\theta)$:

$$\partial_{\gamma} p(\beta, \mu, \gamma = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\|k\| \geq \delta} \frac{d^d k}{e^{\beta(\varepsilon_k - \bar{\alpha}(\beta, \mu))} - 1} \quad (3.28)$$

и

$$\partial_{\gamma} p(\beta, \mu, \gamma = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\|k\| \geq \delta} \frac{d^d k}{e^{\beta \varepsilon_k} - 1} \quad (3.29)$$

при $\mu \geq \mu_c^{BZ}(\theta)$. Теперь, пользуясь соотношениями (3.4), (3.14) и определением (1.14), мы получаем утверждение (3.23) из равенств (3.26), (3.27) и (3.29) переходом сначала к термодинамическому пределу и затем к пределу по параметру $\delta \rightarrow +0$.

4. КОММЕНТАРИИ

Мы представили новую точно решаемую модель (1.18), которая мотивирована МШВ-моделью [42] и нашей моделью [34]. Благодаря *притягивающему* типу взаимодействия в моде $k = 0$ она принадлежит семейству моделей, которые проявляют два вида конденсаций: *нестандартную* в моде $k = 0$ и *стандартную* (обобщённую) БЭК в модах $k \neq 0$. Эти конденсации сосуществуют для больших значений общей плотности частиц $\rho > \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$, или $\mu \geq \mu_c^{\text{BZ}}(\theta) = \lambda \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$. Эта модель демонстрирует богатство понятия бозе-конденсации. Это также даёт лучшее понимание разницы между *нестандартными* и *стандартными* конденсациями.

Во-первых, несмотря на сверхустойчивость модели, которая подразумевает, что

$$\sup_{\mu \in \mathbb{R}^1} \rho(\beta, \mu) = +\infty,$$

стандартная конденсация происходит благодаря механизму насыщения. Поскольку после насыщения нестандартной конденсации плотность кинетической энергии достигает своего максимального значения при критической плотности $\rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$, дальнейший рост плотности полной энергии для $\rho > \rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$ вызывается макроскопическим количеством частиц с почти нулевым импульсом.

Вторая важная особенность моделей (1.18) (аналогичная [34] и в противоположность [25]) состоит в том, что отталкивание между бозонами с $k \neq 0$ достаточно сильно, чтобы породить БЭК обобщённого типа III (т. е. неэкстенсивную БЭК). Обращаем внимание, что в боголюбовском слабо неидеальном бозе-газе [25, 26] возникает БЭК типа I.

4.1. Классификация типов бозе-конденсации.

4.1.1. *Классификация ван ден Берга–Льюиса–Пуле: конденсаты типа I, II и III.* Для удобства читателя мы напоминаем классификацию (обобщённых) конденсатов Бозе–Эйнштейна согласно [16]:

- конденсация относится к *типу I*, когда макроскопически заполнено конечное число одночастичных уровней;
- она *типа II*, когда макроскопически заполнено бесконечно много уровней;
- она относится к *типу III* или *неэкстенсивной* конденсации, когда ни один из уровней макроскопически не заполнен, тогда как

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, 0 < \|k\| \leq \delta\}} \langle N_k \rangle = \rho - \rho_c(\theta).$$

Примеры этих различных конденсаций приведены в работе [30]. В этой работе показано, что три типа БЭК могут быть реализованы в случае ИБГ в *анизотропном* прямоугольном ящике $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ объема $V = |\Lambda| = L_x \cdot L_y \cdot L_z$ и с граничными условиями Дирихле. Пусть $L_x = V^{\alpha_x}$, $L_y = V^{\alpha_y}$, $L_z = V^{\alpha_z}$

при $\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = 1$ и $\alpha_x \leq \alpha_y \leq \alpha_z$. Если $\alpha_z < 1/2$, то при достаточно большой плотности ρ имеем БЭК типа I в основной моде $k = (2\pi/L_x, 2\pi/L_y, 2\pi/L_z)$. При $\alpha_z = 1/2$ получается конденсация типа II, характеризующаяся макроскопическим заполнением бесконечного набора мод $k = (2\pi/L_x, 2\pi/L_y, 2\pi n/L_z)$, $n \in \mathbb{N}$, тогда как при $\alpha_z > 1/2$ мы получаем конденсат типа III. В работе [32] было показано, что конденсат типа III может быть образован в ИБГ благодаря слабому внешнему потенциалу или (см. [31]) специфическому выбору граничных условий и геометрии. Ещё один пример *неэкстенсивной* конденсации приведён в работах [34, 42] для бозонов в *изотропном* ящике Λ с *отталкивающими взаимодействиями*, которые преобразуют *стандартный* БЭК типа I в обобщённый бозе–эйнштейновский конденсат типа III.

4.1.2. Сопоставление нестандартной и стандартной бозе-конденсации. Здесь мы классифицируем бозе-конденсаты по механизмам их образования. В большинстве работ (ср. [30–32, 42]) конденсация объясняется *насыщением* общей плотности частиц, первоначально предсказанным Эйнштейном [3] в бозе-газе без взаимодействия (ИБГ). Мы называем его *стандартным* БЭК [27].

Существование конденсатов, индуцированных *взаимодействием*, было замечено в статьях [25, 26, 34]. Это имеет также место в модели Хуанга–Янга–Латтинжера [21], поскольку она содержит притягивающее взаимодействие. В частности, это происходит в боголюбовском слабо неидеальном бозе-газе [25]. Мы называем этот случай *нестандартной* бозе-конденсацией.

1) Как показано выше, нестандартная конденсация не исключает появления стандартной БЭК при росте общей плотности частиц и превышения некоторого предела насыщения $\rho_c^{\text{BZ}}(\theta)$.

2) Чтобы оценить понятие нестандартной конденсации, заметим, что в моделях (1.6) и (1.18) при $d = 1, 2$ существует только один вид конденсата, а именно *нестандартный*.

Замечание 4.1. *Нестандартный БЭК всегда можно охарактеризовать его типом. Поэтому формально получаем шесть видов конденсации: нестандартные и, соответственно, стандартные конденсаты типа I, II или III.*

4.2. Лемма Гриффитса.

Лемма 4.1 [45]. Пусть $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ будет последовательностью выпуклых функций на компактном интервале $I \subset \mathbb{R}$. Если существует поточечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in I, \quad (4.1)$$

то

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \partial_x f_n(x-0) &\geq \partial_x f(x-0), \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \partial_x f_n(x+0) &\leq \partial_x f(x+0). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Доказательство. По условию выпуклости имеем

$$\begin{aligned} \partial_x f_n(x+0) &\leq \frac{1}{l} [f_n(x+l) - f_n(x)], \\ \partial_x f_n(x-0) &\geq \frac{1}{l} [f_n(x) - f_n(x-l)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

при $l > 0$. Тогда, перейдя к пределу $n \rightarrow \infty$ в (4.3), благодаря (4.1), мы получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \partial_x f_n(x+0) &\leq \frac{1}{l} [f(x+l) - f(x)], \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \partial_x f_n(x-0) &\geq \frac{1}{l} [f(x) - f(x-l)]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Перейдя теперь к пределу $l \rightarrow +0$ в (4.4), получаем (4.2).

Замечание 4.2. В частности, если $x_0 \in I$ таково, что $\partial_x f_n(x_0 - 0) = \partial_x f_n(x_0 + 0)$ и $\partial_x f(x_0 - 0) = \partial_x f(x_0 + 0)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial_x f_n(x_0) = \partial_x f(x_0).$$

5. СЛЕДСТВИЯ НЕДИАГОНАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СЛАБО НЕИДЕАЛЬНОМ БОЗЕ-ГАЗЕ

Обратим внимание, что ни в игрушечной модели (1.18), ни в НУЛ-модели (1.19) не существует двухчастичного потенциала в координатном конфигурационном пространстве, ответственного за притяжение между бозонами. Вместо этого неустойчивость, вызываемая притяжением, имитируется потенциалами в дуальном (импульсном) пространстве. Они благоприятствуют накоплению бозонов в нулевой моде $k = 0$, усиливая механизм, связанный с энтропией/кинетической энергией, который существовал для обычного БЭК в идеальном бозе-газе.

В этом разделе мы представляем аргументы из квантовой механики, необходимые для объяснения условий на двухчастичный потенциал взаимодействия, которые обеспечивают нетривиальное термодинамическое поведение и нестандартный (динамический) БЭК, проявляющийся в слабо неидеальном бозе-газе (СНБГ). Они основаны на преобразовании Фрѐлиха редуцированного гамильтониана Боголюбова (известного также как модель СНБГ [47]), который предназначен для частичной диагонализации гамильтониана.

5.1. В работах [48, 49] Боголюбов предложил модель описания слабо неидеального бозе-газа путём редуцирования полного гамильтониана бозонов с двухчастичным взаимодействием. В большом каноническом ансамбле эта редукция имеет вид

$$H_\Lambda^B(\mu) = T_\Lambda(\mu) + U_\Lambda^D + U_\Lambda, \tag{5.1}$$

где

$$T_{\Lambda}(\mu) = \sum_{k \in \Lambda^*} (\varepsilon_k - \mu) a_k^* a_k,$$

$$U_{\Lambda}^D = \frac{v(0)}{V} a_0^* a_0 \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} a_k^* a_k + \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k) a_0^* a_0 (a_k^* a_k + a_{-k}^* a_{-k}) + \frac{v(0)}{2V} a_0^{*2} a_0^2,$$

$$U_{\Lambda} = \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k) (a_k^* a_{-k}^* a_0^2 + a_0^{*2} a_k a_{-k}),$$

где μ — химический потенциал. Здесь $\{a_k^{\#}\}_{k \in \Lambda^*}$ — операторы рождения и уничтожения бозонов, соответствующие вторичному квантованию в кубическом ящике $\Lambda = L \times L \times L \subset \mathbb{R}^3$ с периодическими граничными условиями на $\partial\Lambda$, $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$,

$$\Lambda^* = \left\{ k \in \mathbb{R}^3 : \alpha = 1, 2, 3, k_{\alpha} = \frac{2\pi n_{\alpha}}{L} \text{ и } n_{\alpha} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\},$$

фурье-преобразование $v(k) := \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varphi(x) e^{-ikx}$ и $V = L^3$. Отметим, что

$H_{\Lambda}^B(\mu)$ определяется в бозонном пространстве Фока над $L^2(\Lambda)$, $\mathcal{F}_{\Lambda} \approx \mathcal{F}_{0\Lambda} \otimes \mathcal{F}'_{\Lambda}$, где $\mathcal{F}_{0\Lambda}$ и \mathcal{F}'_{Λ} — бозонные пространства Фока, построенные из $\mathcal{H}_{0\Lambda}$ (одномерное подпространство, порождённое вектором $\psi_{k=0}$) и его ортогонального дополнения $\mathcal{H}_{0\Lambda}^{\perp}$ соответственно. Заметим, что для комплексного $c \in \mathbb{C}$ мы можем определить в $\mathcal{F}_{0\Lambda}$ когерентный вектор

$$\psi_{0\Lambda}(c) = e^{-V|c|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sqrt{V}c)^k (a_0^*)^k \Omega_0, \quad (5.2)$$

где Ω_0 является вакуумом \mathcal{F}_{Λ} , и тогда $a_0 \psi_{0\Lambda}(c) = c \sqrt{V} \psi_{0\Lambda}(c)$.

Ниже мы предполагаем, что:

- парный потенциал $\varphi(x)$ абсолютно интегрируем (для обеспечения существования $v(k)$);
- фурье-преобразование $v(k)$ таково, что $0 \leq v(k) = v(-k) \leq v(0)$ и $v(0) > 0$.

5.2. Известно [50], что СНБГ является термодинамически устойчивым: давление $p^B(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} p_{\Lambda} [H_{\Lambda}^B]$ ограничено только при $\mu \leq 0$. Если рассмотреть только диагональную часть гамильтониана Боголюбова $H_{\Lambda}^{BD}(\mu) = T_{\Lambda}(\mu) + U_{\Lambda}^D$, то можно показать (ср. [24]), что

$$p^{BD}(\beta, \mu \leq 0) = \lim_{\Lambda} p_{\Lambda} [H_{\Lambda}^{BD}] = p^{PBG}(\beta, \mu \leq 0), \quad (5.3)$$

т. е. что термодинамика диагональной части боголюбовского гамильтониана и модели ИБГ совпадает, включая бозе-конденсацию, имеющую место при $k = 0$. Это означает, в частности, что термодинамическая неэквивалентность между гамильтонианом Боголюбова и ИБГ, т. е.

$$p^B(\beta, \mu \leq 0) \neq p^{PBG}(\beta, \mu \leq 0), \tag{5.4}$$

происходит благодаря *недиагональным* членам взаимодействия U_Λ . Формальное доказательство (5.4) дано в разд. 7, лемма 7.3, ср. с [25, 26].

Отметим, что U_Λ соответствует взаимодействию между бозонами в моде $k = 0$ и в модах с $k \neq 0$. Мы хотим привести аргументы, что это именно эффективное притяжение между частицами с $k = 0$ ответственно за нестандартную (*динамическую*) конденсацию частиц для $k = 0$ при $\mu_0 < \mu < 0$, открытую в работе [24].

5.3. *Недиагональная* часть U_Λ гамильтониана Боголюбова (5.1) может быть описана в терминах диаграмм (рис. 1). Для того чтобы понять роль недиагональной части боголюбовского гамильтониана, необходимо вычислить *эффективные* взаимодействия, индуцированные U_Λ , между частицами *в* нулевой моде $k = 0$ и частицами *вне* нулевой моды $k \neq 0$ (рис. 2 и 3). Простейший способ расчёта соответствующих констант парного взаимодействия $g_{\Lambda,pq}$ и $g_{\Lambda,00}$ состоит в использовании преобразования Фрѐлиха [51], изначально предложенного для вывода взаимодействия в модели Бардина–Купера–Шриффера–Боголюбова (БКШ–Боголюбова) в теории сверхпроводимости [52, 53]. Это унитарное преобразование гамильтониана H :

$$\tilde{H} = e^{-iS} H e^{iS}, \tag{5.5}$$

с самосопряжённым генератором $S = S^*$. Разлагая e^{iS} и e^{-iS} в ряды, получаем коммутаторную сумму:

$$\tilde{H} = H + i[H, S] - \frac{1}{2} [[H, S], S] + \dots \tag{5.6}$$

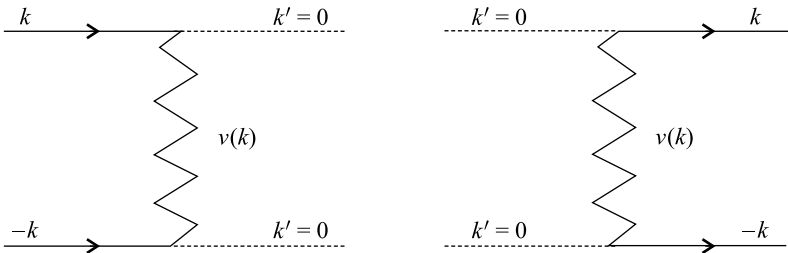


Рис. 1. Вершины, соответствующие недиагональной части U_Λ гамильтониана Боголюбова для СНБГ

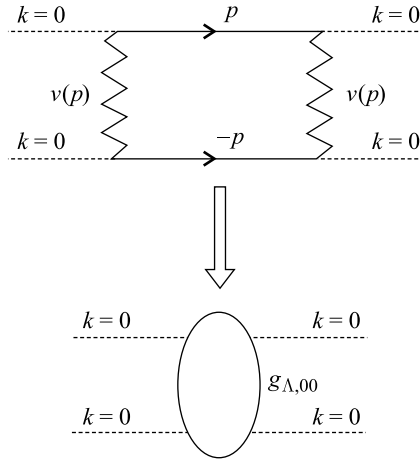


Рис. 2. Иллюстрация к вопросу эффективной вершины, генерированной U_{Λ} , для взаимодействия между частицами в конденсате (нулевая мода)

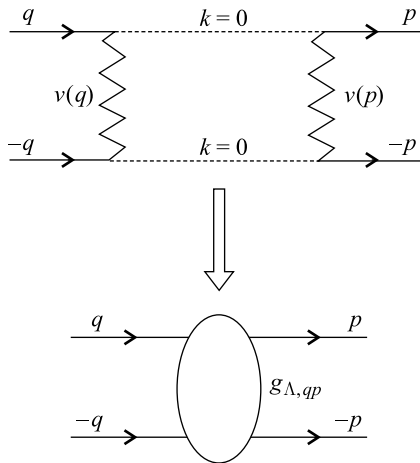


Рис. 3. Иллюстрация к вопросу эффективной вершины, генерированной U_{Λ} , для взаимодействия между частицами вне конденсата в нулевой моде

В случае гамильтониана Боголюбова $H_{\Lambda}^B(\mu)$ нам необходимо поискать такой оператор S , что недиагональная часть U_{Λ} сократится, с заменой её на двухчастичные члены с вершинами вида

$$\frac{g_{\Lambda,00}}{V} a_0^* a_0^* a_0 a_0 \quad \text{и} \quad \frac{g_{\Lambda,pq}}{V} a_p^* a_{-p}^* a_{-q} a_q. \tag{5.7}$$

С учётом сказанного выше мы определим самосопряжённый оператор S следующим образом:

$$S := \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} (\Phi(k) a_k^* a_{-k}^* a_0^2 + \overline{\Phi(k)} a_0^{*2} a_k a_{-k}), \quad (5.8)$$

где $\Phi(k)$ необходимо выбрать так, чтобы сократить U_Λ . Поэтому, по аналогии с теорией возмущений, для определения $g_{\Lambda,00}$ и $g_{\Lambda,kq}$ необходимо вычислить (5.6) с точностью до второго порядка по $v(k)$.

5.4. В результате получаем

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\Lambda^B &= e^{-iS} H_\Lambda^B(\mu) e^{iS} = \tilde{H}_{\Lambda,1}^B + \tilde{H}_{\Lambda,2}^B + \dots = \\ &= H_\Lambda^B(\mu) + i[H_\Lambda^B(\mu), S] - \frac{1}{2}[[H_\Lambda^B(\mu), S], S] + \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь член *первого порядка* по $v(k)$ равен

$$\tilde{H}_{\Lambda,1}^B = U_\Lambda^D + U_\Lambda + i[T_\Lambda(\mu), S]. \quad (5.10)$$

Для вычисления $\Phi(k)$ мы имеем уравнение

$$U_\Lambda + i[T_\Lambda(\mu), S] = 0. \quad (5.11)$$

После прямых расчётов можно получить

$$i[T_\Lambda(\mu), S] = 2i \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \left\{ \varepsilon_k \Phi(k) a_{-k}^* a_k^* a_0^2 - \varepsilon_k \overline{\Phi(k)} a_0^{*2} a_{-k} a_k \right\}.$$

Для удовлетворения уравнению (5.11) необходимо определить $\Phi(k)$ как

$$\Phi(k) := \frac{iv(k)}{4V\varepsilon_k} \quad (5.12)$$

для всех $k \in \Lambda^*, k \neq 0$.

Согласно (5.9) и (5.12), член *второго порядка* по $v(k)$ равен

$$\tilde{H}_{\Lambda,2}^B = i \left[U_\Lambda^D + U_\Lambda + \frac{i}{2} [T_\Lambda(\mu), S], S \right]. \quad (5.13)$$

Пользуясь уравнением (5.11), получаем

$$U_\Lambda + \frac{i}{2} [T_\Lambda(\mu), S] = \frac{1}{2} U_\Lambda,$$

и, следовательно, (5.13) даёт

$$\tilde{H}_{\Lambda,2}^B = i[U_\Lambda^D, S] + \frac{i}{2} [U_\Lambda, S]. \quad (5.14)$$

Заметим, что прямые вычисления позволяют проверить, что $i[U_\Lambda^D, S]$ не содержит каких-либо вершин вида (5.7) при $p, q \in \Lambda^* \setminus \{0\}$, что неудивительно. Действительно, можно видеть, что вершины, соответствующие диагональному взаимодействию U_Λ^D и S , не могут произвести члены такого вида.

С другой стороны, прямое вычисление члена второго порядка в (5.14) даёт

$$\frac{i}{2}[U_\Lambda, S] = \sum_{\substack{k \in \Lambda^*, k \neq 0 \\ q \in \Lambda^*, q \neq 0}} \frac{iv(q)}{4V} \{ \Phi(k)[a_0^{*2} a_q a_{-q}, a_k^* a_{-k}^* a_0^2] + \\ + \overline{\Phi(k)}[a_{-q}^* a_q^* a_0^2, a_0^{*2} a_{-k} a_k] \} \quad (5.15)$$

с коммутатором

$$[a_0^{*2} a_{-q} a_q, a_k^* a_{-k}^* a_0^2] = 2a_0^{*2} a_0^2 (1 + a_{-k}^* a_{-k} + a_k^* a_k) \delta_{q,k} - \\ - 2(1 + 2a_0^* a_0) a_k^* a_{-k}^* a_{-q} a_q = -[a_{-q}^* a_q^* a_0^2, a_0^{*2} a_{-k} a_k]^*. \quad (5.16)$$

Поэтому соотношения (5.15) и (5.16) дают только одну вершину типа (5.7) для эффективного взаимодействия бозонов $\tilde{H}_{\Lambda,2}^{B,I}$, находящихся в нулевой моде:

$$\tilde{H}_{\Lambda,2}^{B,I} = -\frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \frac{[v(k)]^2}{4V \varepsilon_k} a_0^{*2} a_0^2. \quad (5.17)$$

Таким образом, константа взаимодействия $g_{\Lambda,00}$, соответствующая эффективной вершине рис. 2, отрицательна и равна

$$g_{\Lambda,00} = - \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \frac{[v(k)]^2}{4V \varepsilon_k}, \quad (5.18)$$

или, в термодинамическом пределе,

$$g_{00} := \lim_{\Lambda} g_{\Lambda,00} = -\frac{1}{4(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \frac{[v(k)]^2}{\varepsilon_k} < 0. \quad (5.19)$$

С другой стороны, коммутатор (5.15) содержит также члены, соответствующие эффективной вершине для бозонов, взаимодействующих вне нулевой моды:

$$\tilde{H}_{\Lambda,2}^{B,II} = \frac{1}{V} \sum_{\substack{k \in \Lambda^*, k \neq 0 \\ q \in \Lambda^*, q \neq 0}} \frac{v(k)v(q)}{8} \left(\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_q} \right) \frac{(1 + 2a_0^* a_0)}{V} a_k^* a_{-k}^* a_{-q} a_q. \quad (5.20)$$

Напомним, что для того чтобы найти эффективное БКШ-взаимодействие между электронами, обменивающимися фононами, необходимо проецировать результат преобразования Фрелиха на квантовое состояние, являющееся вакуумным для фононов, т. е. на *фундаментальное* фононное состояние (см., например, [54, гл. 5, §1], [55, гл. XI, §88]). Поскольку эффективное взаимодействие между бозонами с $k, p \neq 0$ обеспечивается обменом через конденсат в нулевой моде (см. рис. 3), мы проецируем $\tilde{H}_{\Lambda,2}^{B,\Pi}$ на когерентное состояние для моды $k = 0$, т. е. на когерентное состояние $|C\rangle := \psi_0(c) \otimes \psi'$ с заданным количеством конденсата, где $\psi_0(c) \in \mathcal{F}_{0\Lambda}$ определено в (5.2) и $\psi' \in \mathcal{F}'_{\Lambda}$. Тогда для плотности конденсата $|c|^2 := \langle a_0^* a_0 \rangle_{\psi_0(c)} / V$ оператор эффективного двухчастичного взаимодействия бозонов вне конденсата определяется в \mathcal{F}'_{Λ} полуторалинейными формами, параметризованными с

$$\begin{aligned} \langle C_1 | \tilde{H}_{\Lambda,2}^{B,\Pi} | C_2 \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\substack{k \in \Lambda^*, k \neq 0 \\ q \in \Lambda^*, q \neq 0}} \frac{v(k)v(q)}{8} \left(\frac{1}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_q} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\left(1 + 2 \langle a_0^* a_0 \rangle_{\psi_0(c)} \right)}{V} \left(\psi'_1, a_k^* a_{-k}^* a_{-q} a_q \psi'_2 \right). \end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем, что константа взаимодействия $g_{\Lambda,pq}$, соответствующая эффективному взаимодействию, представленному на рис. 3, равна

$$g_{\Lambda,pq} = \frac{1}{8V} v(p)v(q) \left(\frac{1}{\varepsilon_p} + \frac{1}{\varepsilon_q} \right) \left(1 + 2 \langle a_0^* a_0 \rangle_{\psi_0(c)} \right). \quad (5.21)$$

Поскольку для гиббсовского состояния, соответствующего гамильтониану H_{Λ}^B , в общем

$$\rho_0^B(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} \frac{\langle a_0^* a_0 \rangle_{H_{\Lambda}^B}}{V} \quad (5.22)$$

является плотностью конденсата в моде $k = 0$, мы видим, что эффективный потенциал между частицами вне нулевой моды пропорционален плотности (5.22) и он является отталкивающим, если $v(k) \geq 0$:

$$g_{pq} := \lim_{\Lambda} g_{\Lambda,pq} = \frac{v(p)v(q)}{4} \rho_0^B \left(\frac{1}{\varepsilon_p} + \frac{1}{\varepsilon_q} \right) \geq 0. \quad (5.23)$$

Замечание 5.1. Напомним, что есть другой способ редуцировать полный гамильтониан (6.2), который менее кардинален, чем анзац Боголюбова, который приводит к СНБГ-модели (5.1). Такой тип редукации был предложен Зубаревым и Церковниковым в [56]. Они были движимы идеей обобщения СНБГ-гамильтониана Боголюбова и исследованиями модели БКШ–Боголюбова, в которой создание куперовских пар играет центральную роль.

Для этого, вместо эффективного спаривания (5.20) за счёт недиагонального взаимодействия в СНБГ-модели, модель Зубарева–Церковникова учитывает прямое парное взаимодействие. Позднее эта идея была развита в нескольких статьях (см., например, [57, 58, 60] и обзор [59] с приведёнными в них ссылками).

Напомним, что гамильтониан, редуцированный согласно анзацу Зубарева–Церковникова известен как *парный гамильтониан*. Он имеет вид

$$H_{\Lambda}^{\text{pair}} = T_{\Lambda} + U_{\Lambda}^{\text{pair D}} + U_{\Lambda}^{\text{pair N}} \equiv T_{\Lambda} + U_{\Lambda}^{\text{pair}}. \quad (5.24)$$

Здесь $U_{\Lambda}^{\text{pair D}}$ является *диагональной* частью взаимодействия в $H_{\Lambda}^{\text{pair}}$:

$$U_{\Lambda}^{\text{pair D}} = \frac{1}{2V} \sum_{k_1, k_2 \in \Lambda^*} v(0) a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_2} a_{k_1} + \\ + \frac{1}{2V} \sum_{k_1 \in \Lambda^*, k_2 \in \Lambda^* \setminus \{\pm k_1\}} v(k_1 - k_2) a_{k_2}^* a_{k_2} a_{k_1}^* a_{k_1}, \quad (5.25)$$

и $U_{\Lambda}^{\text{pair N}}$ является соответствующей *недиагональной* частью:

$$U_{\Lambda}^{\text{pair N}} = \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k' \in \Lambda^* \setminus \{k\}} v(k - k') a_k^* a_{-k}^* a_{-k'} a_{k'}. \quad (5.26)$$

Из выражений (5.25) и (5.26) ясно, что полное взаимодействие U_{Λ} в (6.2) редуцировано следующим образом: во-первых, положим $q = 0$ и $q = k_1 - k_2$, а затем $k_1 = k'$, $k_2 = -k'$, $q = k - k'$. Другое очевидное замечание состоит в том, что взаимодействие $U_{\Lambda}^{\text{pair}}$ содержит боголюбовские члены взаимодействия U_{Λ}^{BD} и U_{Λ}^{B} , см. (5.1). Чтобы получить U_{Λ}^{BD} , необходимо оборвать обе суммы в (5.25) с помощью ограничений: $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$ или $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$. Аналогично можно получить U_{Λ}^{B} обрывом (5.26) с помощью условий $k = 0$, $k' \neq 0$ или $k \neq 0$, $k' = 0$.

Существует несколько строгих результатов о модели $H_{\Lambda}^{\text{pair}}$ (5.24) (см., например, [58–60] и ссылки, приведённые в них). Движимые успехом строгого анализа модели БКШ–Боголюбова, в статьях [56–58, 60] авторы использовали либо вариационный принцип БКШ–Боголюбова, либо метод аппроксимирующего гамильтониана.

Важный вывод из строгого анализа состоял в том, что если $U_{\Lambda}^{\text{pair N}}$ содержит умеренное притягивающее взаимодействие, уравновешенное для устойчивости отталкиванием в $U_{\Lambda}^{\text{pair D}}$, то модель (5.24) демонстрирует обычную конденсацию и конденсацию бозонных пар, которые могут сосуществовать. С другой стороны, в работе [58, разд. 3.C], было доказано, что подгонкой параметров притяжения и отталкивания можно добиться режима, в котором возможен *только* парный конденсат, который, аналогично конденсату

в модели СНБГ, появляется со скачком, как фазовый переход первого рода. Этот сценарий сильно отличается от поведения конденсатов в СНБГ-модели, см. разд. 9 и 10, где обычная конденсация всегда следует *после* динамической конденсации, см. рис. 4 и 5.

5.5. Таким образом, недиагональная часть U_Λ гамильтониана Боголюбова *сама* создаёт эффективное *притяжение* между частицами *в* моде $k = 0$ и эффективное *отталкивание* частиц *вне* конденсата моды $k = 0$. Следовательно, U_Λ способствует возникновению нестандартной конденсации бозонов в моде $k = 0$ из-за эффективного притяжения между ними. Мы называем этот механизм нестандартной *динамической* конденсацией, в отличие от обычной (стандартной) бозе-конденсации, которая происходит из-за простого насыщения чисел заполнения в модах $k \neq 0$.

Чтобы оценить эффективное двухчастичное взаимодействие в нулевой моде СНБГ-модели H_Λ^B , необходимо учесть помимо (5.17) также и прямое отталкивание, соответствующее последнему члену в диагональной части U_Λ^D , см. (5.10). Таким образом, мы должны для $v(k) \geq 0$ и $d = 3$ определить знак

$$\left(\frac{v(0)}{2} + g_{00}\right) = \frac{v(0)}{2} - \frac{1}{4(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{[v(k)]^2}{\varepsilon_k}. \quad (5.27)$$

В следующих разд. 7 и 9 мы показываем, что неравенство

$$\left(\frac{v(0)}{2} + g_{00}\right) < 0 \quad (5.28)$$

является достаточным условием для существования в СНБГ-модели нестандартной динамической конденсации в нулевой моде, ср. [61].

Фактически в разд. 7–9 мы строго покажем, что условие (5.28) (интерпретируемое здесь как конкуренция между U_Λ^D и U_Λ) достаточно и необходимо для неэквивалентности СНБГ- и ИБГ-моделей и что при условии (5.28) (при размерностях $d \geq 1$) нестандартная конденсация $\rho_0^B \neq 0$ происходит для $k = 0$ в СНБГ-модели при отрицательных химических потенциалах $\mu \in (\mu_0, 0)$. Обратим внимание, что если

$$\rho_0^B(\beta, \mu) = 0, \quad (5.29)$$

то $g_{pq} = 0$ (5.23), а недиагональная часть U_Λ , похоже, не имеет влияния на термодинамику СНБГ. Фактически мы покажем, что условие (5.29) влечет термодинамическую эквивалентность между СНБГ и ИБГ.

В разд. 9 показано, что в пределе $\mu \rightarrow 0$ для плотностей $\rho > \rho_c^B(\beta) := \rho^B(\beta, \mu = 0)$ (где $\rho^B(\beta, \mu)$ — плотность частиц в СНБГ) наблюдается стандартная (*обобщённая*) бозе-конденсация. Следовательно, СНБГ демонстрирует *два* различных типа бозе-конденсации:

— во-первых, при $\mu_0 < \mu < 0$, за счёт притяжения между бозонами в моде $k = 0$ (нестандартная динамическая конденсация);

— во-вторых, при $\mu = 0$, за счёт обычного механизма насыщения *обобщённая* бозе-конденсация по ван дер Бергу–Льюису–Пуле [16]. Более того, в этом режиме высокой плотности нестандартный конденсат и стандартный БЭК в СНБГ *сосуществуют*.

Впервые это было установлено в работе [25, теорема 4.9], [26, замечание 2.5]. Эти результаты были представлены в обзоре [47].

5.6. В заключение этого раздела отметим, что недавно притяжение (5.27) и нестандартная динамическая конденсация обсуждались в рамках *анзаца* образования в конденсате связанных пар атомов гелия [62].

Во-первых, такая идея спаривания позволяет избежать расхождения между оценкой g_{00} , полученной с помощью экспериментальных данных в [13], и расчётами на основе формулы (5.19). Перенормированное (благодаря спариванию) подынтегральное выражение в (5.20) даёт правильную оценку для энергии связи (5.27).

Во-вторых, спаривание вызвало увеличение массы «атома» гелия вдвое: $m \rightarrow 2m$, в структурном факторе *ван Хова*, что хорошо согласуется с экспериментальными данными. Формула Фейнмана демонстрирует отличное согласие с экспериментально наблюдаемыми элементарными возбуждениями боголюбовского спектра [13]. Отметим, что подход *квантовой гидродинамики* Ландау–Халатникова к анализу фононной части спектра возбуждений восходит к статьям [14, 15].

В-третьих, *сосуществование* динамического конденсата и обычного БЭК в СНБГ-модели подтверждает основное предположение работы [62] о том, что атомы гелия участвуют как в одиночном атом-атомном, так и в парно-парном движении, тем самым обладают независимыми временами релаксации в основном состоянии жидкого гелия.

Подчеркнём, что динамический конденсат *насыщается* до значения $\rho_0^B(\beta, 0)$ при $\mu = 0$ (см. рис. 4) и критической полной плотности частиц $\rho = \rho_c^B(\beta) := \rho_c^{\text{PBG}}(\beta) + \rho_0^B(\beta, 0)$ (см. рис. 5). После этого дальнейшее увеличение плотности частиц приводит к стандартному БЭК: $\rho - \rho_c^B(\beta) > 0$ (см. [26, замечание 2.5 и следствие 2.6]). Следовательно, при нулевой температуре все частицы находятся в конденсате, который представляет собой *смесь* динамического и обычного конденсатов, подобно сценарию, принятому в [62].

Мы вернемся к обсуждению этих свойств конденсата в СНБГ-модели ниже, в разд. 9 и 10.

Насколько мне известно, первая попытка понять возможную роль, которую играет нестандартный конденсат в сверхтекучем ^4He , восходит к полномасштабному обзору [63]. В отличие от микроскопических (ср. с *куперовскими парами* в теории сверхпроводимости БКШ–Боголюбова, *бозонным*

спариванием в замечании 5.1 или в СНБГ [62]) авторы заявили о бозонном солитон-солитонном спаривании в СНБГ с помощью мезоскопического описания Гросса–Питаевского. Это может быть интересным направлением в понимании разницы одночастичного и парного конденсатов, что могло бы быть полезным для анализа бозонов в ловушке, но это выходит за рамки данной статьи.

6. СЛАБО НЕИДЕАЛЬНЫЙ БОЗЕ-ГАЗ: ОПИСАНИЕ ПРОБЛЕМЫ

6.1. Прагматичный подход к описанию свойств сверхтекучих жидкостей, например получению экспериментально наблюдаемых спектров, был начат в классических работах Боголюбова [48, 49], в которых он рассматривал гамильтониан с редуцированным взаимодействием, определяющий то, что будет позже называться гамильтонианом Боголюбова для слабо неидеального бозе-газа (СНБГ) [47].

Рассмотрим систему бозонов массы m в кубическом ящике $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ объема $V = L^3$ с *периодическими граничными условиями* на $\partial\Lambda$. Если обозначить $\varphi(x)$ интегрируемый двухчастичный потенциал взаимодействия и

$$v(q) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \varphi(x) e^{-iqx}, \quad q \in \mathbb{R}^3, \quad (6.1)$$

то вторично-квантованный гамильтониан этой системы, действующий в бозонном пространстве Фока \mathcal{F}_Λ , может быть записан как

$$H_\Lambda = \sum_k \varepsilon_k a_k^* a_k + \frac{1}{2V} \sum_{k_1, k_2, q} v(q) a_{k_1+q}^* a_{k_2-q}^* a_{k_1} a_{k_2}, \quad (6.2)$$

где все суммы берутся по множеству Λ^* , определяемому как

$$\Lambda^* = \left\{ k \in \mathbb{R}^3 : \alpha = 1, 2, 3, k_\alpha = \frac{2\pi n_\alpha}{L} \text{ при } n_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}. \quad (6.3)$$

Здесь $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ обозначает кинетическую энергию, а $a_k^\# = \{a_k^*, a_k\}$ являются обычными операторами рождения и уничтожения в одночастичных состояниях $\{\psi_k(x) = e^{ikx} / \sqrt{V}\}_{k \in \Lambda^*, x \in \Lambda}$:

$$a_k^* := a^*(\psi_k) = \int_\Lambda dx \psi_k(x) a^*(x),$$

где $a^\#(x)$ — базовые бозонные операторы в пространстве Фока над $L^2(\mathbb{R}^3)$. Если ожидать, что БЭК, который имеет место в идеальном бозе-газе при

$k = 0$, сохраняется при слабом взаимодействии $\varphi(x)$ — то, по Боголюбову, в (6.2) должны быть наиболее важны те члены, в которых имеются хотя бы два оператора a_0^* , a_0 . Таким образом, мы приходим к рассмотрению следующего редуцированного гамильтониана (гамильтониана Боголюбова для СНБГ, см. уравнение (3.81) в [64, ч. 3]):

$$H_\Lambda^B = T_\Lambda + U_\Lambda^D + U_\Lambda, \quad (6.4)$$

где

$$T_\Lambda = \sum_{k \in \Lambda^*} \varepsilon_k a_k^* a_k, \quad (6.5)$$

$$U_\Lambda^D = \frac{v(0)}{V} a_0^* a_0 \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} a_k^* a_k + \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k) a_0^* a_0 (a_k^* a_k + a_{-k}^* a_{-k}) + \frac{v(0)}{2V} a_0^{*2} a_0^2, \quad (6.6)$$

$$U_\Lambda = \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k) a_k^* a_{-k}^* a_0^2 + a_0^{*2} a_k a_{-k}. \quad (6.7)$$

$H_\Lambda^{\text{BD}} := (T_\Lambda + U_\Lambda^D)$ представляет диагональную часть боголюбовского гамильтониана H_Λ^B , в то время как U_Λ представляет недиагональную часть.

Замечание 6.1. *Ниже мы подразумеваем, что потенциал взаимодействия φ удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^3)$ и $\varphi(x) = \varphi(\|x\|)$;
- 2) отображение $k \mapsto v(k) \in \mathbb{R}$ непрерывное такое, что $v(0) > 0$ и $0 \leq v(k) \leq v(0)$ при $k \in \mathbb{R}^3$.

Известно [47], что при этих (и, на самом деле, более слабых) условиях парный потенциал φ *сверхустойчив* и, следовательно, статистическая сумма большого канонического ансамбля, связанная с полным гамильтонианом (6.2),

$$\Xi_\Lambda(\beta, \mu) = \text{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda} \left(e^{-\beta(H_\Lambda - \mu N_\Lambda)} \right) \quad (6.8)$$

и давление в конечном объеме

$$p_\Lambda[H_\Lambda] := p_\Lambda(\beta, \mu) = \frac{1}{\beta V} \ln \Xi_\Lambda(\beta, \mu) \quad (6.9)$$

конечны для всех действительных μ и всех $\beta > 0$.

Однако это *не так* для гамильтониана Боголюбова (6.4).

Предложение 6.2 [50]. *Пусть $\Xi_\Lambda^B(\beta, \mu)$ — статистическая сумма большого канонического ансамбля, связанная с гамильтонианом (6.4). Тогда:*

а) боголюбовская модель СНБГ стабильна ($\Xi_{\Lambda}^B(\beta, \mu) < +\infty$) при $\mu \leq 0$ и нестабильна при $\mu > 0$.

б) при $\mu \leq \mu^* = (-1/2)\varphi(0)$ давление

$$p^B(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} p_{\Lambda} [H_{\Lambda}^B] \quad (6.10)$$

совпадает с давлением в идеальном бозе-газе (ИБГ)

$$p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} p_{\Lambda} [T_{\Lambda}]. \quad (6.11)$$

Заметим, что доказательство является следствием (7.6) и (7.10), тогда как доказательство б) следует из замечания 7.4 и следствия 7.5. Более того, в работе [50] сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 6.3. Гамильтониан Боголюбова H_{Λ}^B является точно решаемым в том смысле, что он термодинамически эквивалентен, в большом каноническом ансамбле, ИБГ для всех химических потенциалов $\mu \leq 0$; что в точности означает

$$p^B(\beta, \mu \leq 0) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu \leq 0). \quad (6.12)$$

6.2. Следующие разд. 7–10 имеют двоякую цель:

— во-первых, показать, что фазовая диаграмма модели Боголюбова (6.4) является не такой тривиальной, как это предполагается в гипотезе 6.3;

— во-вторых, точно вычислить давление $p^B(\beta, \mu)$ в области, в которой оно не совпадает с $p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$.

Результаты разд. 7–10 организованы так: в следующем разд. 7 мы показываем, что

$$p^{\text{BD}}(\beta, \mu \leq 0) = \lim_{\Lambda} p_{\Lambda} [H_{\Lambda}^{\text{BD}}] = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu \leq 0), \quad (6.13)$$

т. е. что термодинамики диагональной части гамильтониана Боголюбова и идеального газа совпадают, включая бозе-конденсацию, имеющую место при $k = 0$. Это означает, в частности, что термодинамическая неэквивалентность боголюбовского гамильтониана и ИБГ происходит из-за недиагональных членов взаимодействия (6.7). Более того, в этом разделе мы изучаем гипотезу 6.3. Мы показываем, что для любого взаимодействия, удовлетворяющего условиям а) и б), существует область Γ в фазовой диаграмме (в области стабильности $Q = (\mu \leq 0, \theta = \beta^{-1} \geq 0)$), в которой действительно

$$p^B(\beta, \mu \leq 0) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu \leq 0). \quad (6.14)$$

Затем мы сформулируем достаточное условие на взаимодействия $v(k)$, обеспечивающее существование области $D_0 \subset Q$, в которой

$$p^B(\beta, \mu) \neq p^{\text{PBG}}(\beta, \mu). \quad (6.15)$$

На самом деле мы покажем, что это условие эквивалентно утверждению, что система H_Λ^B демонстрирует в этой области бозе-конденсацию.

Давление в термодинамическом пределе (6.10) для системы H_Λ^B в области $D \supseteq D_0$, определяемое как

$$p^B(\beta, \mu) \neq p^{\text{PBG}}(\beta, \mu), \quad (6.16)$$

изучается в разд. 8. Мы приводим точную формулу для $p^B(\beta, \mu)$, показывающую её связь с концепцией боголюбовской аппроксимации по типу Жинибра [67]. Как следствие, мы приходим к выводу, что $D = D_0$. В разд. 9 мы изучаем нарушение калибровочной симметрии и поведение бозе-конденсата, т. е. фазовую диаграмму СНБГ. Разд. 10 предназначен для обсуждения и заключительных замечаний.

7. СОПОСТАВЛЕНИЕ БОГОЛЮБОВСКОГО СЛАБО НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА И ИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

7.1. Диагональная часть боголюбовского гамильтониана. Диагональная часть боголюбовского гамильтониана $H_\Lambda^{\text{BD}} = (T_\Lambda + U_\Lambda^D)$ (6.5), (6.6) может быть переписана с использованием операторов чисел заполнения для мод $k \in \Lambda^*$, $n_k = a_k^* a_k$. Так, гамильтониан $H_\Lambda^{\text{BD}}(\mu) := H_\Lambda^{\text{BD}} - \mu N_\Lambda$ имеет вид

$$\begin{aligned} H_\Lambda^{\text{BD}}(\mu) = & \sum_{k \in \Lambda^*} (\varepsilon_k - \mu) a_k^* a_k + \frac{v(0)}{V} a_0^* a_0 \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} a_k^* a_k + \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k) a_0^* a_0 (a_k^* a_k + a_{-k}^* a_{-k}) + \frac{v(0)}{2V} a_0^{*2} a_0^2, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $N_\Lambda = \sum_{k \in \Lambda^*} a_k^* a_k$. Если $v(k)$ удовлетворяет условию 2), то тогда очевидно:

$$\begin{aligned} H_\Lambda^{\text{BD}}(\mu) = & \sum_{k \in \Lambda^*} (\varepsilon_k - \mu) n_k + \frac{v(0)}{V} n_0 N_\Lambda - \frac{v(0)}{2V} (n_0^2 + n_0) + \\ & + \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k) n_0 n_k \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\geq T_\Lambda(\mu) := T_\Lambda - \mu N_\Lambda. \quad (7.3)$$

Теорема 7.1. Пусть $v(k)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), замечание 6.1. Тогда

а) для любых $\mu \leq 0$ и $\beta > 0$ имеем

$$p^{\text{BD}}(\beta, \mu) := \lim_{\Lambda} p_\Lambda[H_\Lambda^{\text{BD}}] = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu), \quad (7.4)$$

б) для любых $\beta > 0$ имеем

$$p^{\text{BD}}(\beta, \mu > 0) = +\infty.$$

Доказательство. а) Благодаря представлению (7.2) и неравенству (7.3) мы получаем статистическую сумму

$$\Xi_{\Lambda}^{\text{BD}}(\beta, \mu) = \text{Tr}_{\mathcal{F}_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda}^{\text{BD}}(\mu)} \leq \text{Tr}_{\mathcal{F}_{\Lambda}} e^{-\beta T_{\Lambda}(\mu)} = \Xi_{\Lambda}^{\text{PBG}}(\beta, \mu).$$

Следовательно, для любых $\mu < 0$

$$p_{\Lambda}[H_{\Lambda}^{\text{BD}}] \leq p_{\Lambda}[T_{\Lambda}]. \quad (7.5)$$

Согласно (7.2) мы можем вычислить $\text{Tr}_{\mathcal{F}_{\Lambda}}$ в базисе операторов чисел заполнения:

$$\begin{aligned} \Xi_{\Lambda}^{\text{BD}}(\beta, \mu) = & \sum_{n_0=0}^{\infty} \left\{ \exp[-\beta(v(0)(n_0^2 - n_0)/2V - \mu n_0)] \times \right. \\ & \left. \times \prod_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} (1 - \exp[-\beta(\varepsilon_k - \mu + [v(0) + v(k)]n_0/V)])^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

что приводит к оценке

$$\Xi_{\Lambda}^{\text{BD}}(\beta, \mu) \geq \prod_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} (1 - e^{[-\beta(\varepsilon_k - \mu)]})^{-1}.$$

Поэтому

$$p_{\Lambda}[H_{\Lambda}^{\text{BD}}] \geq \widehat{p}_{\Lambda}^{\text{PBG}}(\beta, \mu) := \frac{1}{\beta V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \ln \left[\left(1 - e^{[-\beta(\varepsilon_k - \mu)]} \right)^{-1} \right]. \quad (7.6)$$

Заметим, что $\widehat{p}_{\Lambda}^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$ есть давление в идеальном бозе-газе с исключённой модой $k = 0$ и $\widehat{p}_{\Lambda}^{\text{PBG}}(\beta, \mu) < +\infty$ при $\mu < \inf_{k \neq 0} \varepsilon_k$. Следовательно, для любых $\mu < 0$ имеем

$$\lim_{\Lambda} \widehat{p}_{\Lambda}^{\text{PBG}}(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} p_{\Lambda}[T_{\Lambda}] = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu). \quad (7.7)$$

Поэтому, перейдя к термодинамическому пределу в (7.5), (7.6), благодаря (7.7), мы получаем (7.4) при $\mu < 0$. Затем, перейдя к пределу $\mu \rightarrow -0$, получаем (7.4) при $\mu = 0$.

Утверждение б) следует прямо из оценки (7.6).

Следствие 7.2. Поскольку функции $\{p_\Lambda^{\text{BD}}(\beta, \mu) := p_\Lambda[H_\Lambda^{\text{BD}}]\}_{\Lambda \subset \mathbb{R}^d}$ выпуклые при $\mu \leq 0$ и предельная функция $p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$ дифференцируема при $\mu < 0$, лемма 4.1 даёт

$$\lim_{\Lambda} \partial_\mu p_\Lambda^{\text{BD}}(\beta, \mu) = \partial_\mu p^{\text{PBG}}(\beta, \mu),$$

т. е. плотность частиц для системы (7.1) совпадает с плотностью для идеального газа:

$$\rho^{\text{BD}}(\beta, \mu) := \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{N}{V} \right\rangle_{H_\Lambda^{\text{BD}}}(\beta, \mu) = \partial_\mu p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) := \rho^{\text{PBG}}(\beta, \mu). \quad (7.8)$$

Здесь $\langle - \rangle_{H_\Lambda}(\beta, \mu)$ соответствует большому каноническому состоянию Гиббса для гамильтониана H_Λ . Перейдя в равенстве (7.8) к пределу $\mu \rightarrow -0$, мы обобщаем его на случаи $\mu \in (-\infty, 0]$.

Опираясь на (7.4) и (7.8), мы видим, что диагональная часть боголюбовского гамильтониана H_Λ^{BD} является термодинамически эквивалентной T_Λ . Бозе-конденсат в системе (7.1) имеет те же самые свойства, что и в ИБГ. Ниже мы покажем, что именно недиагональное взаимодействие (6.7) приводит к существенной разнице между H_Λ^{B} и T_Λ .

7.2. Область Γ : $p^{\text{B}}(\beta, \mu) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$. Подобно ИБГ, боголюбовский СНБГ существует только при $\mu \leq 0$, см. предложение 6.2. На самом деле мы делаем более сильное утверждение.

Лемма 7.3. Для любых $\mu \leq 0$ верно

$$p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) \leq p^{\text{B}}(\beta, \mu). \quad (7.9)$$

Доказательство. Благодаря боголюбовскому неравенству выпуклости (см., например, [46]) справедливы неравенства

$$\frac{1}{V} \langle U_\Lambda \rangle_{H_\Lambda^{\text{B}}} \leq p_\Lambda[H_\Lambda^{\text{BD}}] - p_\Lambda[H_\Lambda^{\text{B}}] \leq \frac{1}{V} \langle U_\Lambda \rangle_{H_\Lambda^{\text{BD}}}. \quad (7.10)$$

Поскольку $\langle U_\Lambda \rangle_{H_\Lambda^{\text{BD}}} = 0$, комбинируя (7.6), (7.7) и (7.10), мы получаем термодинамический предел (7.9).

Замечание 7.4. Пусть $v(k)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), замечание 6.1. Тогда, перегруппировав члены в (6.6) и (6.7), получаем

$$H_\Lambda^{\text{B}} = \tilde{H}_\Lambda + \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k) (a_0^* a_k + a_{-k}^* a_0)^* (a_0^* a_k + a_{-k}^* a_0) \geq \tilde{H}_\Lambda, \quad (7.11)$$

где

$$\tilde{H}_\Lambda = \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \left(\varepsilon_k - \frac{v(k)}{2V} + \frac{v(0)}{V} n_0 \right) n_k + \frac{v(0)}{2V} n_0^2 - \frac{1}{2} \varphi(0) n_0. \quad (7.12)$$

Следовательно, благодаря неравенству Боголюбова, для соотношения (7.11) и диагональной части гамильтониана (7.12) мы получаем в термодинамическом пределе при $\mu \leq 0$

$$p^B(\beta, \mu) \leq \lim_{\Lambda} p_{\Lambda} [\tilde{H}_{\Lambda}] = \sup_{\rho_0 \geq 0} G(\beta, \mu; \rho_0). \tag{7.13}$$

Здесь

$$G(\beta, \mu; \rho_0) := \left[-\frac{v(0)}{2} \rho_0^2 + \left(\mu + \frac{1}{2} \varphi(0) \right) \rho_0 + p^{\text{PBG}}(\beta, \mu - v(0) \rho_0) \right]. \tag{7.14}$$

Следствие 7.5 [50]. Если $\mu \leq (-1/2)\varphi(0)$, тогда $\sup_{\rho_0 \geq 0} G(\beta, \mu; \rho_0) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$. Поэтому, пользуясь леммой 7.3 и неравенством (7.13), мы получаем

$$p^B(\beta, \mu) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) \text{ для } \Gamma_{\mu_*} = \left\{ \theta \geq 0, \mu \leq -\frac{1}{2} \varphi(0) := \mu_* \right\}. \tag{7.15}$$

Следующее утверждение расширяет область Γ_{μ_*} .

Теорема 7.6. Пусть $v(k)$ удовлетворяет условиям а) и б) и пусть

$$h(z, \beta) := z + \frac{v(0)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k (e^{\beta(\varepsilon_k + z)} - 1)^{-1} \tag{7.16}$$

при $d = 3$. Тогда мы имеем

$$p^B(\beta, \mu) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) \text{ для } (\theta, \mu) \in \Gamma, \tag{7.17}$$

где

$$\Gamma = \left\{ (\theta, \mu) : \frac{1}{2} \varphi(0) \leq \inf_{z \geq -\mu} h(z, \beta) \right\} \subset Q. \tag{7.18}$$

Доказательство. Благодаря неравенствам (7.9) и (7.13), а также определению (7.14) равенство (7.17) обеспечивается соотношением

$$\sup_{\rho_0 \geq 0} G(\beta, \mu; \rho_0) = G(\beta, \mu; \rho_0 = 0). \tag{7.19}$$

Если $\partial_{\rho_0} G(\beta, \mu; \rho_0) \leq 0$ или, эквивалентно, $(1/2)\varphi(0) \leq h(v(0)\rho_0 - \mu, \beta)$ при $\rho_0 \geq 0$, то достаточное условие (7.18) гарантирует (7.19) и, следовательно, (7.17).

Следствие 7.7. Поскольку $h(z, \beta)$ является выпуклой функцией $z \geq 0$ и $h(z, \beta) \geq z$, то по определению (7.16) мы получаем

$$\lambda(\theta) \leq \inf_{z \geq -\mu} h(z, \beta), \tag{7.20}$$

где

$$\lambda(\theta) := \inf_{z \geq 0} h(z, \beta). \tag{7.21}$$

Поэтому из неравенства (7.20) мы получаем достаточное условие, не зависящее от $\mu \leq 0$ (высокотемпературная область):

$$\Gamma_{\theta_*} = \left\{ (\theta, \mu \leq 0) : \frac{1}{2}\varphi(0) \leq \lambda(\theta) \right\}, \tag{7.22}$$

что обеспечивает (7.17).

Замечание 7.8. Заметим, что неравенство $h(z, \beta) \geq z$ и (7.18) при $-\mu \geq (1/2)\varphi(0)$ влекут (7.15), т. е. $\Gamma_{\mu_*} \subset \Gamma$. С другой стороны, (7.18) при $\mu = 0$ приводит к (7.22), т. е. $\Gamma_{\theta_*} \subset \Gamma$.

Замечание 7.9. Поскольку $\partial_{v(0)}\lambda(\theta) \geq 0$, можно всегда обеспечить (7.22) для фиксированной температуры θ путём увеличения $v(0)$ без изменения $\varphi(0)$.

Замечание 7.10. Отметим, что $p^{\text{PBG}}(\beta = +\infty, \mu) = 0$ и $\lambda(\theta = 0) = 0$. Поэтому при нулевой температуре достаточное условие (7.18) сводится к (7.15). На самом деле, эта часть Γ известна из статьи [50]. Теорема 7.6 показывает, что гипотеза 6.3, сформулированная в этой работе, может быть расширена по крайней мере на область Γ (7.18).

Ниже мы показываем, что эта гипотеза неверна для дополнения $Q \setminus \Gamma$.

7.3. Область D : $p^B(\beta, \mu) \neq p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$. Пусть $\mathcal{H}_{0\Lambda} \subset L^2(\Lambda)$ обозначает одномерное подпространство, порождённое $\psi_{k=0}$, см. п. 7.1. Тогда $\mathcal{F}_\Lambda \approx \mathcal{F}_{0\Lambda} \otimes \mathcal{F}'_\Lambda$, где $\mathcal{F}_{0\Lambda}$ и \mathcal{F}'_Λ являются бозонными пространствами Фока, сконструированными из $\mathcal{H}_{0\Lambda}$ и его ортогонального дополнения $\mathcal{H}_{0\Lambda}^\perp$ соответственно. Для любых комплексных $c \in \mathbb{C}$ мы можем определить в $\mathcal{F}_{0\Lambda}$ когерентный вектор

$$\psi_{0\Lambda}(c) = e^{-V|c|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sqrt{V}c)^k (a_0^*)^k \Omega_0, \tag{7.23}$$

где Ω_0 обозначает вакуум \mathcal{F}_Λ . Тогда $a_0\psi_{0\Lambda}(c) = c\psi_{0\Lambda}(c)$.

Определение 7.11. Боголюбовская аппроксимация гамильтониана $H_\Lambda(\mu) := H_\Lambda - \mu N_\Lambda$ в \mathcal{F}_Λ задаётся оператором $H_\Lambda(c^\#, \mu)$, определённым в \mathcal{F}'_Λ её полуторалинейной формой:

$$(\psi'_1, H_\Lambda(c^\#)\psi'_2)_{\mathcal{F}'_\Lambda} = (\psi_{0\Lambda}(c) \otimes \psi'_1, H_\Lambda\psi_{0\Lambda}(c) \otimes \psi'_2)_{\mathcal{F}_\Lambda} \tag{7.24}$$

для векторов $\psi_{0\Lambda}(c) \otimes \psi'_{1,2}$, лежащих в области формы $H_\Lambda(\mu)$, где $c^\# = (c, \bar{c})$.

Эта формулировка боголюбовской аппроксимации [25,47] предоставляет оценку на давление $p_\Lambda [H_\Lambda^B]$ снизу, что позволяет уточнить неравенство (7.9).

Предложение 7.12 [50]. Для любых $(\theta, \mu) \in Q$ верно

$$\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#) \leq p_\Lambda[H_\Lambda^B], \quad (7.25)$$

где

$$\tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#) := \frac{1}{\beta V} \ln \text{Tr}_{\mathcal{F}'_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda^B(c^\#, \mu)}. \quad (7.26)$$

Замечание 7.13. По определению (7.11) мы имеем из равенств (6.4)–(6.7), что

$$\begin{aligned} H_\Lambda^B(c^\#, \mu) &= \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} [\varepsilon_k - \mu + v(0)|c|^2] a_k^* a_k + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k)|c|^2 [a_k^* a_k + a_{-k}^* a_{-k}] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} v(k) [c^2 a_k^* a_{-k}^* + \bar{c}^2 a_k a_{-k}] - \\ &- \mu |c|^2 V + \frac{1}{2} v(0) |c|^4 V. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Поэтому после диагонализации можно вычислить (7.26) в явном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#) &= \xi_\Lambda(\beta, \mu; x) + \eta_\Lambda(\mu; x), \\ \xi_\Lambda(\beta, \mu; x) &= \frac{1}{\beta V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \ln(1 - e^{-\beta E_k})^{-1}, \\ \eta_\Lambda(\mu; x) &= -\frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} (E_k - f_k) + \mu x - \frac{1}{2} v(0) x^2, \end{aligned} \quad (7.28)$$

где E_k и f_k являются функциями $x = |c|^2 \geq 0$ и $\mu \leq 0$:

$$\begin{aligned} f_k &= \varepsilon_k - \mu + x[v(0) + v(k)], \\ h_k &= xv(k), \quad E_k = \sqrt{f_k^2 - h_k^2}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Теперь стратегия определения области D становится понятной: благодаря (7.9) и (7.25) необходимо рассмотреть множество аргументов $(\theta, \mu) \in Q$ такое, что

$$p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) < \lim_\Lambda \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#) \right]. \quad (7.30)$$

Предложение 7.14 [50]. Пусть $v(k)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и

$$v(0) \geq \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \frac{[v(k)]^2}{\varepsilon_k}. \quad (7.31)$$

Тогда, ср. (7.6),

$$\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#) = \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; 0) = \tilde{p}_\Lambda^{\text{PBG}}(\beta, \mu).$$

Поэтому в термодинамическом пределе (см. (7.7)) мы получаем

$$\lim_\Lambda \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#) \right] = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu). \quad (7.32)$$

Лемма 7.15. Пусть $v(k)$ удовлетворяет 1), 2) и

$$3): v(0) < \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{[v(k)]^2}{\varepsilon_k}. \quad (7.33)$$

Тогда существует значение $\mu_0 < 0$ такое, что

$$\lim_\Lambda \left(\sup_{x \geq 0} \eta_\Lambda(\mu; x) \right) = \eta(\mu; \bar{x}(\mu) > 0) > 0 \quad \text{для } \mu \in (\mu_0, 0). \quad (7.34)$$

Доказательство. Благодаря явным формулам (7.28) и (7.29), мы легко получаем, что при $\mu \leq 0$:

- а) $\eta_\Lambda(\mu; x = 0) = 0$ и $\eta_\Lambda(\mu; x) \leq \text{const} - v(0)x^2/2$;
 б) $\partial_x \eta_\Lambda(\mu; x = 0) = \mu$ и

$$\partial_x^2 \eta_\Lambda(\mu; x = 0) = \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \frac{[v(k)]^2}{(\varepsilon_k - \mu)} - v(0).$$

Так как

$$\lim_\Lambda \frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \frac{[v(k)]^2}{(\varepsilon_k - \mu)} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{[v(k)]^2}{(\varepsilon_k - \mu)},$$

условие (7.33) обеспечивает существование $\tilde{\mu}_0 < 0$ такого, что

$$\lim_\Lambda \partial_x^2 \eta_\Lambda(\mu > \tilde{\mu}_0; x = 0) > 0.$$

Благодаря а), б) и $\lim_\Lambda \partial_x \eta_\Lambda(\mu = 0; x = 0) = 0$ это означает, что

$$\lim_\Lambda \left(\sup_{x \geq 0} \eta_\Lambda(\mu = 0; x) \right) = \eta(\mu = 0; \bar{x}(\mu = 0) > 0) > 0. \quad (7.35)$$

Поэтому из непрерывности (7.35) на интервале $(\tilde{\mu}_0, 0]$ следует существование μ_0 : $\tilde{\mu}_0 \leq \mu_0 < 0$ такого, что верно (7.34).

Теорема 7.16. Пусть $v(k)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3). Тогда для любого $\mu \in (\mu_0, 0]$ существует $\theta_0(\mu) > 0$ такое, что верно (см. рис. 4):

$$p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) < p^B(\beta, \mu), \quad \text{в } D_0 = \{(\theta, \mu) : \mu_0 < \mu \leq 0, 0 \leq \theta < \theta_0(\mu)\}, \quad (7.36)$$

где μ_0 определено в лемме 7.15, и область D_0 на самом деле совпадает с

$$D_0 := \left\{ (\theta, \mu) : \limsup_{\Lambda} \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu; c^{\#}) > p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) \right\}.$$

Доказательство. Сначала мы заметим, что согласно (7.28), (7.29) верны равенства $\xi_{\Lambda}(\beta, \mu; x=0) = \tilde{p}_{\Lambda}^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$ и

$$\begin{aligned} 1) \quad \partial_x \xi_{\Lambda}(\beta, \mu; x) \leq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \xi_{\Lambda}(\beta, \mu; x) = 0 \quad \text{для любых } \Lambda; \\ 2) \quad \partial_{\theta} \xi_{\Lambda}(\beta, \mu; x) \geq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \xi_{\Lambda}(\beta, \mu; x) = 0 \quad \text{для любых } \Lambda. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Следующее: по лемме 7.3 при $\mu = \mu_0 < 0$ мы имеем

$$\lim_{\Lambda} \left(\sup_{x \geq 0} \eta_{\Lambda}(\mu_0; x) \right) = \eta(\mu_0; 0) = \eta(\mu_0; \bar{x}(\mu_0) > 0) = 0. \quad (7.38)$$

Следовательно, согласно (7.37) и (7.38):

$$\begin{aligned} 3) \quad \theta > 0 : \lim_{\Lambda} \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu_0; c^{\#}) \right] &= \sup_{x \geq 0} [\xi(\beta, \mu_0; x) + \eta(\mu_0; x)] = \\ &= \tilde{p}^B(\beta, \mu_0; c^{\#} = 0) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu), \end{aligned} \quad (7.39)$$

из неравенств (7.37), 2) и (7.38) получаем

$$\begin{aligned} 4) \quad \theta = 0 : \lim_{\Lambda} \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta = \infty, \mu_0; c^{\#}) \right] &= \tilde{p}^B(\beta = \infty, \mu_0; c^{\#} = 0) = \\ &= \tilde{p}^B(\beta = \infty, \mu_0; c^{\#})|_{|c|^2 = \bar{x}(\mu_0) > 0} = 0. \end{aligned}$$

Из соотношений (7.28), (7.37) и леммы 7.15 следует, что при $\mu_0 < \mu \leq 0$

$$\lim_{\Lambda} \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu > \mu_0; c^{\#}) \right] \geq \eta(\mu > \mu_0; \bar{x}(\mu) > 0) > 0. \quad (7.40)$$

Так как согласно неравенству (7.37), 2) давление $p^{\text{PBG}}(\beta, \mu \leq 0)$ монотонно убывает при $\theta \searrow 0$, существует температура $\theta_0(\mu)$ такая, что при $\theta < \theta_0(\mu > \mu_0)$ из неравенств (7.40) мы получаем

$$\begin{aligned} p^{\text{PBG}}(\beta > \beta_0(\mu), \mu > \mu_0) &< \eta(\mu > \mu_0; \bar{x}(\mu) > 0) < \\ &< \lim_{\Lambda} \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta > \beta_0(\mu), \mu > \mu_0; c^{\#}) \right]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Тогда неравенства (7.25) и (7.41) дают (7.36) при $(\theta, \mu) \in D_0$.

Следствие 7.17. Пусть

$$D := \{(\theta, \mu) : p^B(\beta, \mu) > p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)\}. \tag{7.42}$$

Тогда, благодаря утверждениям (7.25) и (7.36), очевидным образом получается

$$D \supseteq D_0 = \{(\theta, \mu) : \mu_0 < \mu \leq 0, 0 \leq \theta < \theta_0(\mu)\}.$$

Здесь $\mu_0 < 0$ определено в лемме 7.15 и $\theta_0(\mu)$ в теореме 7.16.

Замечание 7.18. Условие (7.33) является достаточным для гарантирования того, что $\mu_0 < 0$, т. е. $D \supseteq D_0 \neq \{\emptyset\}$. С другой стороны, противоположное условие (7.31) влечет только тривиальность (7.32) нижней грани (7.25) для давления $p^B(\beta, \mu)$, но не $D = \{\emptyset\}$, см. лемму 7.3.

Поэтому в данный момент мы не знаем, является ли условие 3) в (7.33) необходимым для того, чтобы $D \neq \{\emptyset\}$. Мы откладываем рассмотрение этого вопроса до разд. 3. Здесь же мы обсуждаем связь условий (7.31), (7.33), вытекающих из относительно ограниченного анализа выпуклости и монотонности $\tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#)$ в окрестности $x = 0$, и условия (7.15), определяющего тривиальность верхней границы (7.13) при $p^B(\beta, \mu)$ для всех температур.

Замечание 7.19. Пусть $v(k)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3). Тогда существует $\tilde{\mu}_0 < 0$ такое, что при $\mu \leq \tilde{\mu}_0$ верно

$$v(0) \geq \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{[v(k)]^2}{(\varepsilon_k - \mu)} d^3k, \tag{7.43}$$

и, как следствие, $\partial_x^2 \eta(\mu \leq \tilde{\mu}_0; x = 0) \leq 0$, см. лемму 7.15. Неравенство (7.43) можно представить в виде

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v(k) \left\{ \frac{v(k)}{2(\varepsilon_k - \mu)} - \frac{v(0)}{\varphi(0)} \right\} \leq 0. \tag{7.44}$$

Поскольку, благодаря требованиям 2) и $\mu \leq 0$:

$$\frac{v(k)}{2(\varepsilon_k - \mu)} \leq \frac{v(0)}{(-2\mu)},$$

условие $\mu < (-1/2)\varphi(0) := \mu_*$ (7.15) влечет (7.44), т. е. $\mu_* \leq \tilde{\mu}_0$. Поэтому локальное условие выпуклости (7.43) неразрывно связано с условием, обеспечивающим $p^B(\beta, \mu) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$. В частности, необходимо отметить, что при условии (7.31) неравенство (7.43) выполняется для любых $\mu < 0$.

Мы завершаем этот раздел новой простой и важной для дальнейшего изложения характеристикой области D (ср. (7.42)).

Теорема 7.20. Пусть

$$\rho_0^B(\beta, \mu) := \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}^B}(\beta, \mu) \quad (7.45)$$

обозначает плотность бозе-конденсата для боголюбовского гамильтониана (6.4). Тогда

$$D = \{(\theta, \mu) \in Q : \rho_0^B(\beta, \mu) > 0\}. \quad (7.46)$$

Доказательство. Положим

$$\widehat{H}_{\Lambda}^B := H_{\Lambda}^B + \frac{1}{2} \varphi(0) a_0^* a_0. \quad (7.47)$$

Тогда согласно замечанию 7.4 мы получаем

$$\lim_{\Lambda} p_{\Lambda} \left[\widehat{H}_{\Lambda}^B \right] \leq \sup_{\rho_0 \geq 0} \left\{ G(\rho_0, \mu) - \frac{1}{2} \varphi(0) \rho_0 \right\} = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu). \quad (7.48)$$

Благодаря неравенству Боголюбова для H_{Λ}^B и \widehat{H}_{Λ}^B имеем

$$p_{\Lambda} \left[H_{\Lambda}^B \right] - \frac{\varphi(0)}{2} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}^B} \leq p_{\Lambda} \left[\widehat{H}_{\Lambda}^B \right]. \quad (7.49)$$

Теперь, используя (7.9), (7.48) и (7.49), мы получаем в термодинамическом пределе

$$p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) - \frac{\varphi(0)}{2} \rho_0^B(\beta, \mu) \leq p^B(\beta, \mu) - \frac{\varphi(0)}{2} \rho_0^B(\beta, \mu) \leq p^{\text{PBG}}(\beta, \mu).$$

Поэтому $p^B(\beta, \mu) = p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$ тогда и только тогда, когда $\rho_0^B(\beta, \mu) = 0$, что даёт (7.46).

Замечание 7.21. Сам факт, что $p^B(\beta, \mu) \neq p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$ только при $\rho_0^B(\beta, \mu) \neq 0$, очень похож на то, что известно ещё со времён боголюбовской модели сверхтекучести [47], п. 1.2. Существенная разница состоит в том, что в боголюбовской модели бесщелевой спектр имеет место при положительном химическом потенциале $\mu = v(0) \rho$, при котором система, соответствующая боголюбовскому гамильтониану для СНБГ, является неустойчивой. Дальнейшие обсуждения см. в работах [47, 65, 66] и разд. 10.

8. ТОЧНОСТЬ БОГОЛЮБОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Поскольку $p^B(\beta, \mu) \neq p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$ только в области D , в которой бозе-конденсат $\rho_0^B(\beta, \mu) > 0$, цель настоящего раздела состоит в вычислении $p^B(\beta, \mu)$ в этой области. Ниже мы покажем, что

$$p^B(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu; c^{\#}) \right] = \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^{\#}) \quad (8.1)$$

и что на самом деле (ср. (7.36), (7.42)) верно

$$D = D_0. \quad (8.2)$$

По этой причине условие 3) (7.33) — необходимо для $D \neq \{\emptyset\}$, ср. с замечанием 7.18. По определению $\tilde{p}^B(\beta, \mu; c^{\#})$, см. (7.25)–(7.28), утверждение (8.1) означает, что боголюбовское приближение для СНБГ является точным. Так как $\tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu; c^{\#})$ явно известно, утверждение (8.1) даёт точное решение этой модели на уровне термодинамики.

Согласно результатам разд. 7 именно недиагональная часть U_{Λ} (6.7) гамильтониана Боголюбова (6.4) приводит к $p^B(\beta, \mu) \neq p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$ в области $D \neq \{\emptyset\}$ для (7.33). Так как при условии 3) (7.33) известно, что взаимодействие U_{Λ} эффективно является притягивающим (5.28), чтобы доказать равенство (8.1), мы используем метод аппроксимирующего гамильтониана, изначально изобретённого для квантовых систем с притягивающими взаимодействиями (см., например, [46]).

Замечание 8.1. Этот метод был использован Жинибром [67] для доказательства точности приближения Боголюбова для неидеального бозе-газа (6.2) со сверхустойчивым взаимодействием, что имеет место, если $v(q)$ удовлетворяет условию 2). Однако после редукции (6.2) гамильтониан H_{Λ}^B (6.4) больше не является сверхустойчивым. Система (6.4) неустойчива при $\mu > 0$, предложение 6.2. Ниже мы следуем методу аппроксимирующего гамильтониана по Жинибру, приспособленному к СНБГ-модели.

Поскольку в приближающем гамильтониане $H_{\Lambda}^B(c^{\#}, \mu)$ (7.27) калибровочная симметрия нарушена, мы вводим

$$\begin{aligned} H_{\Lambda}^B(\nu^{\#}) &= H_{\Lambda}^B - \sqrt{V}(\bar{\nu}a_0 + \nu a_0^*), \\ H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^{\#}) &= H_{\Lambda}^B(\nu^{\#}) - \mu N_{\Lambda} \end{aligned} \quad (8.3)$$

с источниками $\nu \in \mathbb{C}$, нарушающими симметрию H_{Λ}^B , здесь $\nu^{\#} = (\nu, \bar{\nu})$. Тогда, согласно предложению 7.12 и боголюбовскому неравенству для гамильтонианов $H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^{\#})$ и $H_{\Lambda}^B(c^{\#}, \mu, \nu^{\#})$, получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Delta_{\Lambda}(\beta, \mu; c^{\#}, \nu^{\#}) := p_{\Lambda}[H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})] - \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu; c^{\#}, \nu^{\#}) \leq \\ &\leq \frac{1}{V} \langle H_{\Lambda}^B(c^{\#}, \mu, \nu^{\#}) - H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^{\#}) \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Пусть $A := a_0 - \sqrt{V}c$, $A^* := a_0^* - \sqrt{V}\bar{c}$. Тогда разложение Тейлора около $a_0^\#$ даёт

$$\begin{aligned} H_\Lambda^B(c^\#, \mu, \nu^\#) - H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#) &= -A^*[a_0, H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)] + \text{h. c.} + \\ &+ \frac{1}{2}A^{*2}[a_0, [a_0, H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)]] + \text{h. c.} + A^*[a_0, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), a_0^*]]A - \\ &- \frac{1}{2}A^{*2}[a_0, [a_0, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), a_0^*]]]A + \text{h. c.} + \\ &+ \frac{1}{4}A^{*2}[a_0, [a_0, [[H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), a_0^*], a_0^*]]]A^2. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Замечание 8.2. Явные оценки показывают, что члены третьего и четвёртого порядков в (8.5) ограничены сверху:

$$\begin{aligned} -\frac{v(0)}{\sqrt{V}}(\bar{c}A^*AA + cA^*A^*A) - \frac{v(0)}{2V}A^{*2}A^2 &= 2v(0)|c|^2A^*A - \\ -\frac{v(0)}{2V}(A^2 + 2\sqrt{V}cA)^*(A^2 + 2\sqrt{V}cA) &\leq 2v(0)|c|^2A^*A. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Замечание 8.3. После элементарных преобразований члены первого и второго порядков в (8.5) могут быть скомбинированы:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}[A^*A, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A^*A]] + 2A^*[A, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A^*]]A - \\ -\frac{3}{2}A^*[A, H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)] - \frac{3}{2}[H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A^*]A. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Лемма 8.4. Имеет место следующее неравенство:

$$\langle [A^*A, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A^*A]] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \geq 0. \quad (8.8)$$

Доказательство. Обозначим $(\cdot, \cdot)_{H_\Lambda}$ положительно определённое скалярное произведение Боголюбова–Дюамеля для гамильтониана H_Λ :

$$(X, Y)_{H_\Lambda} := \frac{1}{\beta \Xi_\Lambda(\beta, \mu)} \int_0^\beta d\tau \operatorname{Tr}_{\mathcal{F}_\Lambda} (e^{-(\beta-\tau)H_\Lambda(\mu)} X^* e^{-\tau H_\Lambda(\mu)} Y). \quad (8.9)$$

Тогда $(\mathbf{1}, Y)_{H_\Lambda} = \langle Y \rangle_{H_\Lambda}$ и

$$\beta([X, H_\Lambda(\mu)], [X, H_\Lambda(\mu)])_{H_\Lambda} = \langle [X, [H_\Lambda(\mu), X^*]] \rangle_{H_\Lambda}. \quad (8.10)$$

Применяя (8.10) к $H_\Lambda(\mu) = H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)$ и $X = A^*A$, можно получить неравенство (8.8).

Лемма 8.5. *Имеет место следующая оценка:*

$$-2\langle A^*[A, H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \leq \langle [A^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A]] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} + \\ + \langle [A^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A]]^* \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} + 2\beta^{-1} \langle \{A, A^*\} \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)}, \quad (8.11)$$

где $\{X, Y\} = XY + YX$.

Доказательство. Пользуясь спектральным разложением гамильтониана $(H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)\psi_n = E_n\psi_n)$, получаем

$$\langle \{A^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A]\} \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} = \\ = \frac{1}{\Xi_\Lambda^B(\beta, \mu, \nu^\#)} \sum_{m,n} |(\psi_m, A\psi_n)|^2 (E_m - E_n) (e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}). \quad (8.12)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2}(e^x + e^y) - \frac{1}{2}|e^x - e^y| \leq \frac{e^x - e^y}{x - y} \leq \frac{1}{2}(e^x + e^y), \quad (8.13)$$

имеем

$$\beta(E_m - E_n)(e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}) \leq \\ \leq 2(e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}) + \beta(E_m - E_n)|e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}| \leq \\ \leq 2(e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m}) + \beta(E_m - E_n)(e^{-\beta E_n} - e^{-\beta E_m}). \quad (8.14)$$

Подставив оценку (8.14) в (8.12), мы получаем

$$\langle \{A^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A]\} \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \leq \\ \leq 2\beta^{-1} \langle AA^* + A^*A \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} + \langle [A^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A]] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)}. \quad (8.15)$$

Заметим, что

$$-2\langle A^*[A, H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} = \\ = \langle [A^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A]] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} + \langle \{A^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A]\} \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)}. \quad (8.16)$$

Тогда, комбинируя соотношения (8.15) и (8.16), получаем (8.11).

Следствие 8.6. *Поскольку*

$$\langle A^*[A, H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} = \langle [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A^*]A \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)},$$

то благодаря неравенству (8.11) среднее значение двух последних членов в выражении (8.7) ограничено сверху:

$$-3 \langle A^* [A, H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#)] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \leq \frac{3}{2} \langle [A^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A]] + \text{h. c.} \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} + 3\beta^{-1} \langle AA^* + A^*A \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)}. \quad (8.17)$$

Так как мы ищем оценку выражения (8.5) (и, следовательно, (8.7)) сверху, неравенства (8.8) и (8.17) показывают, что остается оценить среднее значение только второго члена в (8.7). Здесь мы формулируем только результат, см. доказательство в работе [25, приложение А].

Теорема 8.7. Пусть $(\theta, \mu) \in D$. Тогда в D существуют неотрицательные функции

$$\begin{aligned} a &= a(\theta, \mu, \nu^\#), \\ b &= b(\theta, \mu, \nu^\#), \end{aligned} \quad (8.18)$$

такие, что при $|\nu| \leq r_0, r_0 > 0$, справедливо неравенство

$$\langle A^* [A, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), A^*]] A \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \leq a \langle A^* A \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} + b. \quad (8.19)$$

Теперь, для того чтобы доказать основное утверждение этого раздела (теорема 8.14), нам ещё необходимы следующие две леммы.

Лемма 8.8. При $(\theta, \mu) \in Q$ и $\nu \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} p_\Lambda [H_\Lambda^B(\nu^\#)] &\leq \tilde{p}_\Lambda^{\text{PBG}}(\beta, \mu) + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\beta V} \sum_{n_0=0}^\infty \exp \left\{ \frac{\beta}{2} [(\varphi(0) + 2)n_0 - v(0)n_0^2/V] \right\} \right\} + |\nu|^2. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Доказательство. Благодаря неравенству

$$-\sqrt{V}(\bar{\nu}a_0 + \nu a_0^*) \geq -a_0^*a_0 - |\nu|^2 V,$$

это утверждение немедленно следует из оценки (ср. (7.11), (7.12))

$$\begin{aligned} H_\Lambda^B(\nu^\#) - \mu N_\Lambda &\geq \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} \left(\varepsilon_k - \mu - \frac{v(k)}{2V} \right) n_k + \\ &+ \frac{v(0)}{2V} n_0^2 - \left(\mu + \frac{1}{2} \varphi(0) + 1 \right) n_0 - |\nu|^2 V. \end{aligned}$$

Следствие 8.9. Благодаря оценке (8.20), в термодинамическом пределе имеем

$$p^B(\beta, \mu; \nu^\#) \leq p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) + \frac{1}{2} \sup_{\rho \geq 0} [(\varphi(0) + 2)\rho - v(0)\rho^2] + |\nu|^2 \quad (8.21)$$

при $(\theta, \mu) \in Q, \nu \in \mathbb{C}$.

Лемма 8.10. Для любых $\mu < 0$ и $\nu \in \mathbb{C}$ имеет место оценка

$$\left\langle \frac{N_\Lambda}{V} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \leq g_\Lambda(\beta, \mu; \nu^\#) < \infty. \quad (8.22)$$

Доказательство. Для любых $\mu < 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\mu + \delta < 0$. Тогда, исходя из боголюбовского неравенства (выпуклости), мы получаем

$$\delta \left\langle \frac{N_\Lambda}{V} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \leq p_\Lambda[H_\Lambda^B(\nu^\#) - \delta N_\Lambda] - p_\Lambda[H_\Lambda^B(\nu^\#)]. \quad (8.23)$$

Поэтому, благодаря лемме 8.8, имеем (8.22) для

$$g_\Lambda(\beta, \mu; \nu^\#) := \frac{1}{\delta} (p_\Lambda^B(\beta, \mu + \delta; \nu^\#) - p_\Lambda^B(\beta, \mu; \nu^\#)). \quad (8.24)$$

Следствие 8.11. В термодинамическом пределе соотношение (8.22) даёт

$$\begin{aligned} \rho^B(\beta, \mu; \nu^\#) = \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{N_\Lambda}{V} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} &\leq \frac{1}{\delta} (p^B(\beta, \mu + \delta; \nu^\#) - \\ &- p^B(\beta, \mu; \nu^\#)) := g(\beta, \mu; \nu^\#). \end{aligned} \quad (8.25)$$

В самом деле, согласно лемме 4.1 (разд. 4.2), в области D мы имеем

$$\rho^B(\beta, \mu; \nu^\#) = \partial_\mu p^B(\beta, \mu; \nu^\#), \quad \mu < 0, \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (8.26)$$

Следствие 8.12. Благодаря оценке (8.22) очевидным образом имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} &\leq g_\Lambda(\beta, \mu; \nu^\#), \\ \left| \left\langle \frac{a_0^*}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \right| &= \left| \left\langle \frac{a_0^*}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \right| \leq \sqrt{g_\Lambda(\beta, \mu; \nu^\#)}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Замечание 8.13. Для оптимизации оценки (8.4) нам необходимо оценить значение $\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#)$. Так как по определению 7.11 и (8.3)

$$H_\Lambda^B(c^\#, \mu, \nu^\#) = H_\Lambda^B(c^\#, \mu) - V(\nu \bar{c} + \bar{\nu} c) \geq H_\Lambda^B(c^\#, \mu) - V(|\nu|^2 |c|^2 + 1), \quad (8.28)$$

по формулам (7.28) мы приходим к выводу, что для любых $(\theta, \mu) \in Q$ и для фиксированных $\nu^\#$ существует $A \geq 0$ такое, что

$$\tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \leq A - \frac{1}{2} v(0) |c|^4. \quad (8.29)$$

Поэтому оптимальное значение $|c|$ ограничено положительной постоянной $M < \infty$.

Теперь мы в состоянии доказать основное утверждение этого раздела (см. (8.1)) о точности боголюбовской аппроксимации для СНБГ.

Теорема 8.14. Пусть $(\theta, \mu) \in D$. Тогда

$$\lim_{\Lambda} \left\{ p_{\Lambda}^B(\beta, \mu, \nu^{\#}) - \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu; c^{\#}, \nu^{\#}) \right\} = 0 \quad (8.30)$$

при $|\nu| \leq r_0, r_0 > 0$.

Доказательство. Согласно неравенству (8.4) имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{c \in \mathbb{C}} \Delta_{\Lambda}(\beta, \mu; c^{\#}, \nu^{\#}) := \Delta_{\Lambda}(\beta, \mu; \hat{c}_{\Lambda}^{\#}(\beta, \mu, \nu^{\#}), \nu^{\#}) \leq \\ &\leq \frac{1}{V} \langle H_{\Lambda}^B(c^{\#}, \mu, \nu^{\#}) - H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^{\#}) \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Благодаря (8.5)–(8.7), оценкам (8.6), (8.8), (8.11), (8.17), (8.19) и замечанию 8.13, существуют положительные постоянные u и w , не зависящие от объёма V , такие, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \langle H_{\Lambda}^B(c^{\#}, \mu, \nu^{\#}) - H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^{\#}) \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})} &\leq \\ &\leq u + \frac{w}{2} \langle \{(a_0^* - \sqrt{V}c^*), (a_0 - \sqrt{V}c)\} \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Положим $c = \langle a_0 / \sqrt{V} \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})}$, что является ограниченной величиной, см. (8.27). Тогда

$$\Delta_{\Lambda}(\beta, \mu; \hat{c}_{\Lambda}^{\#}, \nu^{\#}) \leq \Delta_{\Lambda}(\beta, \mu; \langle a_0^{\#} / \sqrt{V} \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})}, \nu^{\#}),$$

и оценки (8.31), (8.32) дают

$$0 \leq \inf_{c \in \mathbb{C}} \Delta_{\Lambda}(\beta, \mu; c^{\#}, \nu^{\#}) \leq \frac{u}{V} + \frac{w}{2V} \langle \{(a_0^* - \langle a_0^* \rangle), (a_0 - \langle a_0 \rangle)\} \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})}, \quad (8.33)$$

где для краткости принято обозначение $\langle a_0^{\#} \rangle := \langle a_0^{\#} \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})}$. Пусть $\delta a_0^{\#} := a_0^{\#} - \langle a_0^{\#} \rangle$. Тогда, пользуясь неравенством Харриса [68], получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \{\delta a_0^*, \delta a_0\} \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})} &\leq \\ &\leq (\delta a_0^*, \delta a_0)_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})} + \frac{\beta}{12} \langle [\delta a_0^*, [H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^{\#}), \delta a_0]] \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^{\#})}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Так как благодаря условию 2) на взаимодействие и лемме 8.10 мы имеем

$$\langle [\delta a_0^*, [H_\Lambda^B(\mu, \nu^\#), \delta a_0]] \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} = \left\langle \frac{v(0)}{V} N_\Lambda - \mu + \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*} v(k) a_k^* a_k \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \leq 2v(0) g_\Lambda(\beta, \mu; \nu^\#) - \mu, \tag{8.35}$$

то согласно оценке (8.25) и равномерной ограниченности $g_\Lambda(\beta, \mu; \nu^\#)$ постоянной g_0 на D при $|\nu| \leq r_0$, оценка (8.33) на этом компактном множестве принимает вид

$$0 \leq \inf_{c \in \mathbb{C}} \Delta_\Lambda(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \leq \frac{1}{V} [\tilde{u} + w(\delta a_0^*, \delta a_0)_{H_\Lambda^B(\nu^\#)}]. \tag{8.36}$$

Теперь мы можем следовать стандартным аргументам метода аппроксимирующего гамильтониана [46]. Прежде всего отметим, что

$$(\delta a_0^*, \delta a_0)_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} = \frac{1}{\beta} \partial_\nu \partial_{\bar{\nu}} p_\Lambda [H_\Lambda^B(\nu^\#)]. \tag{8.37}$$

Используя (каноническое) калибровочное преобразование $a_0 \rightarrow a_0 e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg \nu$, можно на самом деле увидеть, что

$$p_\Lambda [H_\Lambda^B(\nu^\#)] = p_\Lambda^B(\beta, \mu; |\nu| := r).$$

Тогда, переходя в (8.37) к полярным координатам (r, φ) , мы получаем

$$(\delta a_0^*, \delta a_0)_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} = \frac{1}{4\beta r} \partial_r (r \partial_r p_\Lambda^B). \tag{8.38}$$

Пусть $c = |c| e^{i\psi}$, $\psi = \arg c$. Тогда, благодаря (8.3), (8.4), имеем

$$\begin{aligned} \inf_{c \in \mathbb{C}} \Delta_\Lambda(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) &= \inf_{|c|, \psi} \Delta_\Lambda(\beta, \mu; |c| e^{\pm i\psi}, r e^{\pm i\varphi}) = \\ &= \inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(\beta, \mu; |c| e^{\pm i\varphi}, r) := \inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(r). \end{aligned} \tag{8.39}$$

Поэтому согласно оценке (8.36)

$$\int_R^{R+\varepsilon} r \inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(r) dr \leq \frac{1}{V} \left\{ \tilde{u} \frac{(R+\varepsilon)^2 - R^2}{2} + \frac{w}{4\beta} (r \partial_r p_\Lambda^B) \Big|_R^{R+\varepsilon} \right\} \tag{8.40}$$

для $[R, R + \varepsilon] \subset [0, r_0]$. Заметим, что благодаря оценке (8.27), мы имеем

$$\partial_r p_\Lambda^B = 2 \left| \langle a_0 / \sqrt{V} \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \right| \leq 2g_0^{1/2}, \quad (\theta, \mu) \in D, \quad |\nu| \leq r_0. \tag{8.41}$$

Поэтому неравенство (8.40) принимает вид

$$\int_R^{R+\varepsilon} r \inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(r) dr \leq \frac{1}{V} \left\{ \tilde{u} \frac{(R+\varepsilon)^2 - R^2}{2} + \frac{w}{2\beta} g_0^{1/2} (2R+\varepsilon) \right\}. \quad (8.42)$$

Так как согласно следствию 8.12 и замечанию 8.13

$$|\partial_r \inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(r)| \leq 2g_\Lambda^{1/2} + 2|\widehat{c}_\Lambda| \leq 2(g_0^{1/2} + M),$$

для $r \in [R, R+\varepsilon]$ мы получаем

$$\inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(R) \leq \inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(r) + 2(r-R)(g_0^{1/2} + M).$$

Следовательно,

$$\inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(R) \frac{(R+\varepsilon)^2 - R^2}{2} \leq \int_R^{R+\varepsilon} r \inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(r) dr + 2(g_0^{1/2} + M) \left(\frac{r^3}{3} - R \frac{r^2}{2} \right) \Big|_R^{R+\varepsilon}.$$

Тогда из неравенства (8.42) получаем

$$\inf_{|c|} \tilde{\Delta}_\Lambda(R) \leq \frac{1}{V} \left\{ \tilde{u} + \frac{w}{\beta} g_0^{1/2} \varepsilon^{-1} \right\} + (g_0^{1/2} + M) \varepsilon \frac{R + \frac{2}{3}\varepsilon}{R + \frac{1}{2}\varepsilon}. \quad (8.43)$$

Заметим, что $\varepsilon > 0$ все ещё остается произвольным. Минимизируя правую часть (8.43), можно увидеть, что для больших V оптимальное значение $\varepsilon \sim 1/\sqrt{V}$. Следовательно, при $V \rightarrow \infty$ из (8.43) получаем асимптотическую оценку

$$0 \leq \inf_{c \in \mathbb{C}} \Delta_\Lambda(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \leq \delta_\Lambda = \text{const} \frac{1}{\sqrt{V}}, \quad (8.44)$$

справедливую при $(\theta, \mu) \in D$ и $|\nu| \leq r_0$.

Следствие 8.15. Так как вариационное давление $\tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#)$ известно в явном виде (см. (7.27)):

$$\tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) = \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#) + 2|\nu||c|, \quad (8.45)$$

мы приходим к выводу, что существуют термодинамические пределы

$$\begin{aligned} \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) &= \lim_\Lambda \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#), \\ \tilde{p}^B(\beta, \mu; \widehat{c}^\#(\beta, \mu; \nu^\#), \nu^\#) &= \lim_\Lambda \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_\Lambda^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \right] = \\ &= \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#). \end{aligned} \quad (8.46)$$

Тогда, пользуясь равномерной оценкой (8.44), мы получаем

$$p^B(\beta, \mu; \nu^\#) = \lim_{\Lambda} p_{\Lambda} [H_{\Lambda}^B(\nu^\#)] = \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \quad (8.47)$$

при $(\theta, \mu) \in D$, $|\nu| \leq r_0$ и (ср. (8.1)) предел $|\nu| \rightarrow 0$:

$$p^B(\beta, \mu) = \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^\#). \quad (8.48)$$

Следствие 8.16. Неравенства (7.25) и (7.30) дают

$$p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) \leq \lim_{\Lambda} \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu; c^\#) \right] \leq p^B(\beta, \mu).$$

Тогда определения (7.36), (7.42) обеспечивают включение $D_0 \subseteq D$, в то время как (8.30) гарантирует, что $D_0 = D$, что доказывает (8.2). Следовательно, мы имеем

$$p^B(\beta, \mu) = \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^\#) \quad \text{при} \quad (\theta, \mu) \in Q \setminus \partial D. \quad (8.49)$$

Замечание 8.17. Поскольку формулы (7.28) устанавливают, что

$$\tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu; c^\# = 0) = p_{\Lambda}^{\text{PBG}}(\beta, \mu), \quad (8.50)$$

пользуясь неравенствами (7.36), (7.46) и (8.2), мы получаем

$$D_0 = \{(\theta, \mu) : |\hat{c}(\beta, \mu; \nu)| > 0\} = \{(\theta, \mu) : \rho_0^B(\beta, \mu) > 0\} = D. \quad (8.51)$$

Поэтому (см. замечание 7.18, условие 3), (7.33), является достаточным и необходимым для $D \neq \{\emptyset\}$.

9. НЕСТАНДАРТНЫЙ КОНДЕНСАТ В СЛАБО НЕИДЕАЛЬНОМ БОЗЕ-ГАЗЕ

Так как давление \tilde{p}_{Λ}^B (7.28) и $\lim_{\Lambda} \tilde{p}_{\Lambda}^B = \tilde{p}^B$ известны в явном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) &= \frac{1}{\beta (2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \ln(1 - e^{-\beta E_k(|c|^2)})^{-1} - \\ &- \frac{1}{\beta (2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left[E_k(|c|^2) - f_k(|c|^2) \right] + \mu |c|^2 - \frac{1}{2} v(0) |c|^4 + (\nu \bar{c} + \bar{\nu} c), \end{aligned} \quad (9.1)$$

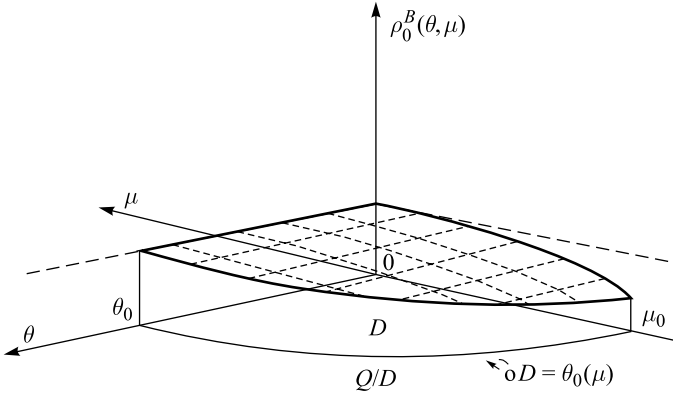


Рис. 4. Плотность нестандартного динамического конденсата $\rho_0^B(\theta, \mu)$ как функция химического потенциала μ и температуры θ для СНБГ

теорема 8.14 и следствия 8.15, 8.16 дают точное решение модели (6.4) на уровне термодинамики. Поэтому равенство (8.49) позволяет определить термодинамические свойства слабо неидеального бозе-газа для всех $(\theta, \mu) \in Q$, за исключением линии переходов ∂D (рис. 4).

Целью настоящего раздела является обсуждение термодинамических свойств модели (6.4) и, в частности, бозе-конденсата, возникающего в области D . Первое утверждение касается нарушения калибровочной симметрии в области D .

Теорема 9.1. Пусть $D \neq \{\emptyset\}$. Тогда квазисредние

$$\lim_{\{\nu \rightarrow 0: \arg \nu = \varphi\}} \lim_{\Lambda} \langle a_0^\# / \sqrt{V} \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^\#)} = e^{\pm i\varphi} |\hat{c}(\beta, \mu)| = \begin{cases} \neq 0, & (\theta, \mu) \in D \\ = 0, & (\theta, \mu) \notin D \end{cases}. \tag{9.2}$$

Доказательство. Так же как и в доказательстве теоремы 8.14 с помощью калибровочного преобразования

$$\mathcal{U}_\varphi a_0 \mathcal{U}_\varphi^* = a_0 e^{-i\varphi} = \tilde{a}_0, \quad \varphi = \arg \nu$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\Lambda}^B(\mu, r) &= \mathcal{U}_\varphi H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^\#) \mathcal{U}_\varphi^* = \tilde{H}_{\Lambda}^B - \mu \tilde{N}_{\Lambda} - \sqrt{V} r (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_0^*), \\ p_{\Lambda} [H_{\Lambda}^B(\nu^\#)] &= p_{\Lambda} [\mathcal{U}_\varphi H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^\#) \mathcal{U}_\varphi^*] = p_{\Lambda}^B(\beta, \mu; r = |\nu|). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Благодаря равенствам

$$0 = \left\langle \left[\tilde{H}_{\Lambda}^B(\mu, r), \tilde{N}_{\Lambda} \right] \right\rangle_{\tilde{H}_{\Lambda}^B(r)} = r \sqrt{V} \langle \tilde{a}_0 - \tilde{a}_0^* \rangle_{\tilde{H}_{\Lambda}^B(r)}$$

и (ср. (8.10))

$$0 \leq \left\langle \left[\tilde{N}_\Lambda, \left[\tilde{H}_\Lambda^B(\mu, r), \tilde{N}_\Lambda \right] \right] \right\rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)} = r\sqrt{V} \langle \tilde{a}_0 + \tilde{a}_0^* \rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)},$$

закключаем, что

$$\langle \tilde{a}_0 \rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)} = \langle \tilde{a}_0^* \rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)} \geq 0. \tag{9.4}$$

Так как (ср. (8.9))

$$\begin{aligned} \partial_r^2 p_\Lambda^B(\beta, \mu; r) &= \\ &= \beta \left(\{(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_0^*) - \langle \tilde{a}_0 + \tilde{a}_0^* \rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)}\}, \{(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_0^*) - \langle \tilde{a}_0 + \tilde{a}_0^* \rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)}\} \right)_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)} \geq \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{9.5}$$

по теореме 8.14 и следствию 8.15 последовательность выпуклых (при $r \geq 0$) функций $\{p_\Lambda^B(\beta, \mu; r)\}_\Lambda$ сходится к (выпуклой функции)

$$\begin{aligned} \tilde{p}^B(\beta, \mu; r) &:= \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) = \sup_{\substack{|c| \geq 0 \\ \psi = \arg c}} \tilde{p}^B(\beta, \mu; |c|e^{\pm i\psi}, |\nu|e^{\pm i\varphi}) = \\ &= \tilde{p}^B(\beta, \mu; |\hat{c}(\beta, \mu; r)|e^{\pm i\varphi}, |\nu|e^{\pm i\varphi}) \end{aligned} \tag{9.6}$$

(см. (8.38) и (9.1)), равномерно на $D \times [0, r_0]$. Проведя явные вычисления, можно показать, что производные

$$\begin{aligned} 0 \leq \partial_r \tilde{p}^B(\beta, \mu; r) &= 2|\hat{c}(\beta, \mu; r)| \leq C_1, \\ 0 \leq \partial_r^2 \tilde{p}^B(\beta, \mu; r) &= 2\partial_r |\hat{c}(\beta, \mu; r)| \leq C_2 \end{aligned} \tag{9.7}$$

непрерывны и ограничены в $D \times [0, r_0]$. Поэтому по лемме 4.1

$$\lim_\Lambda \partial_r p_\Lambda \left[\tilde{H}_\Lambda^B(r) \right] = \lim_\Lambda \left\langle \frac{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_0^*}{\sqrt{V}} \right\rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)} = 2|\hat{c}(\beta, \mu; r)|$$

или по формуле (9.4):

$$\begin{aligned} \lim_\Lambda \langle \tilde{a}_0 / \sqrt{V} \rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)} &= |\hat{c}(\beta, \mu; r)|, \\ \lim_\Lambda \langle \tilde{a}_0^* / \sqrt{V} \rangle_{\tilde{H}_\Lambda^B(r)} &= |\hat{c}(\beta, \mu; r)|. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Возвращаясь в (9.8) к оригинальным операторам рождения и уничтожения, получаем

$$\begin{aligned} \lim_\Lambda \langle a_0 / \sqrt{V} \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} &= e^{+i\varphi} |\hat{c}(\beta, \mu; r)|, \\ \lim_\Lambda \langle a_0^* / \sqrt{V} \rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} &= e^{-i\varphi} |\hat{c}(\beta, \mu; r)|. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Тогда первая часть утверждения (9.2) следует из (9.9) и непрерывности решения $\widehat{c}(\beta, \mu; r)$ в точке $r = 0$, в то время как вторая часть следует из (8.51).

Следствие 9.2. *Заметим, что согласно калибровочной инвариантности*

$$\left\langle \frac{a_0^\#}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#=0)} = 0. \tag{9.10}$$

Поэтому мы имеем нарушение калибровочной инвариантности:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^\#}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \neq \lim_{\Lambda} \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\langle \frac{a_0^\#}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)}, \tag{9.11}$$

как только образуется бозе-конденсат $\rho_0^B(\beta, \mu) \neq 0$.

Следствие 9.3. *Так как согласно соотношениям (9.5), (9.7)*

$$\partial_r^2 \left(\inf_{|c|} \widetilde{\Delta}_\Lambda(r) \right) = \partial_r^2 (p_\Lambda^B(\beta, \mu; r) - \widehat{p}^B(\beta, \mu; r)) \geq -C_2,$$

лемма Колмогорова [69] гарантирует, что

$$\left| \left\langle \frac{\widetilde{a}_0}{\sqrt{V}} \right\rangle_{\widetilde{H}_\Lambda^B(r)} - |\widehat{c}_\Lambda(\beta, \mu; r)| \right| \leq 2\sqrt{\delta_\Lambda C_2} \tag{9.12}$$

при $r \in [l_\Lambda, r_0 - l_\Lambda]$, $l_\Lambda = 2\sqrt{\delta_\Lambda/C_2}$, см. (8.44) и (9.8).

Отметим, что неравенство Коши–Шварца приводит к

$$\left\langle \frac{a_0^*}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \left\langle \frac{a_0}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} \leq \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)}.$$

Следовательно, из формул (7.45) и (9.2) вытекает

$$|\widehat{c}_\Lambda(\beta, \mu)|^2 \leq \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_\Lambda^B(\nu^\#)} = \rho_0^B(\beta, \mu), \tag{9.13}$$

что находится в соответствии с определениями областей D_0 и D , ср. с теоремой 7.16 и следствием 7.17. Для доказательства равенства в (9.13) мы будем действовать следующим образом.

Теорема 9.4. *Пусть*

$$\begin{aligned} H_{\Lambda, \alpha}^B &= H_\Lambda^B + \alpha a_0^* a_0, \\ H_{\Lambda, \alpha}^B(\nu^\#) &= H_{\Lambda, \alpha}^B - \sqrt{V}(\nu a_0^* + \bar{\nu} a_0) \end{aligned} \tag{9.14}$$

при $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Тогда

$$p_\alpha^B(\beta, \mu; \nu^\#) = \lim_\Lambda p_\Lambda [H_{\Lambda, \alpha}^B(\nu^\#)] = \lim_\Lambda \left[\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda, \alpha}^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \right] \quad (9.15)$$

при $|\nu| \leq r_0, r_0 > 0$ и $(\theta, \mu) \in Q \setminus \partial D_\alpha$, где область

$$D_\alpha := \{(\theta, \mu) : p_\alpha^B(\beta, \mu; \nu^\# = 0) > p^{\text{PBG}}(\beta, \mu)\}. \quad (9.16)$$

Замечание 9.5. Так как $H_{\Lambda, \alpha = \varphi(0)/2}^B = \hat{H}_\Lambda^B$, см. (7.47), пользуясь теоремой 7.20, мы приходим к выводу, что $D_{\alpha = \varphi(0)/2} = \{\emptyset\}$.

Ниже наша стратегия состоит в переносе некоторых результатов разд. 7 и 8 на возмущённый гамильтониан $H_{\Lambda, \alpha}^B$ при малых α .

Лемма 9.6. Если потенциал $v(k)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), то

$$D_{0\alpha} := \left\{ (\theta, \mu) : \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_\alpha^B(\beta, \mu; c^\#) > p^{\text{PBG}}(\beta, \mu) \right\} \neq \{\emptyset\} \quad (9.17)$$

при $\alpha < -\mu_0$, где μ_0 определено в лемме 7.15.

Доказательство. Так как $\eta_{\Lambda, \alpha}(\mu; x)$ для гамильтониана (9.14) (ср. (7.28)) имеет форму

$$\eta_\Lambda(\mu; x) = -\frac{1}{2V} \sum_{k \in \Lambda^*, k \neq 0} (E_k - f_k) + (\mu - \alpha)x - \frac{1}{2}v(0)x^2, \quad (9.18)$$

можно последовать аргументам леммы 7.15 и теоремы 7.16 для того, чтобы доказать (9.17) при $\mu \leq 0$ таким, что $(\mu - \alpha) > \mu_0$. Поэтому значение $\mu_0 + \alpha$ должно быть отрицательным.

Из непрерывности (9.18) по параметру α очевидно вытекает $\lim_{\alpha \rightarrow 0} D_{0\alpha} = D_0$. Теперь вернемся к

Доказательству теоремы 9.4.

1) Так как аппроксимация Боголюбова (7.24) даёт оценку давления $p_\Lambda [H_{\Lambda, \alpha}^B(\nu^\#)]$ снизу (см. предложение 7.12):

$$\sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda, \alpha}^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \leq p_\Lambda [H_{\Lambda, \alpha}^B(\nu^\#)],$$

из неравенства Боголюбова мы получаем (ср. (8.4))

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Delta_{\Lambda, \alpha}(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) := p_\Lambda [H_{\Lambda, \alpha}^B(\nu^\#)] - \tilde{p}_{\Lambda, \alpha}^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \leq \\ &\leq \frac{1}{V} \langle H_{\Lambda, \alpha}^B(\tilde{c}^\#, \mu, \nu^\#) - H_{\Lambda, \alpha}^B(\mu, \nu^\#) \rangle_{H_{\Lambda, \alpha}^B(\nu^\#)}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

2) Для операторов $A^\# := a_0^\# - \sqrt{V}c^\#$ и разложения в ряд Тейлора для $H_{\Lambda,\alpha}^B(\widehat{c}^\#, \mu, \nu^\#)$ около $a_0^\#$ можно получить оценку

$$0 \leq \inf_{c \in \mathbb{C}} \Delta_{\Lambda,\alpha}(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) = \Delta_{\Lambda,\alpha}(\beta, \mu; \widehat{c}_{\Lambda,\alpha}^\#(\beta, \mu; \nu^\#), \nu^\#) \leq u_\alpha + \frac{w_\alpha}{2} \langle \{ (a_0^* - \sqrt{V}\bar{c}), (a_0 - \sqrt{V}c) \} \rangle_{H_{\Lambda}^B(\nu^\#)} \quad (9.20)$$

путём дословного повторения аргументов, приведённых, начиная с замечания 8.2 и заканчивая замечанием 8.13. Единственная разница со случаем $\alpha = 0$ простекает из равенства

$$[A, [H_{\Lambda,\alpha}^B(\mu, \nu^\#), A^*]] = [A, [H_{\Lambda}^B(\mu, \nu^\#), A^*]] + \alpha,$$

ср. (8.35) и замечания, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha = u$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 0} w_\alpha = w$.

3) Пусть $c^\# = \langle a_0^\# / \sqrt{V} \rangle_{H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\#)}$ в левой части равенства (9.20). Те же самые аргументы, что и в теореме 8.14 дают асимптотическую оценку

$$0 \leq \inf_{c \in \mathbb{C}} \Delta_{\Lambda,\alpha}(\beta, \mu; c^\#, \nu^\#) \leq \delta_{\Lambda,\alpha} = \text{const} \frac{1}{\sqrt{V}}, \quad (9.21)$$

справедливую при $(\theta, \mu) \in Q \setminus \partial D_\alpha$, $|\alpha| < -\mu_0$ и $|\nu| \leq r_0$, что обеспечивает доказательство (9.15) для $D_\alpha \neq \{\emptyset\}$.

Следствие 9.7. *Поскольку*

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^2 p_\Lambda [H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\#)] &= \\ &= \frac{\beta}{V} ((a_0^* a_0 - \langle a_0^* a_0 \rangle_{H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\#)}), (a_0^* a_0 - \langle a_0^* a_0 \rangle_{H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\#)}))_{H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\#)} \geq 0, \end{aligned}$$

функции $\{p_\Lambda [H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\# = 0)]\}_\Lambda$ являются выпуклыми для $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Очевидно, что то же самое верно для (ср. (9.1), (9.14) и (9.15))

$$\begin{aligned} \lim_\Lambda p_\Lambda [H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\# = 0)] &= \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_\alpha^B(\beta, \mu; c^\#, \nu^\# = 0) = \\ &= \tilde{p}_\alpha^B(\beta, \mu; \widehat{c}_\alpha^\#(\beta, \mu), 0) = \tilde{p}^B(\beta, \mu; \widehat{c}_\alpha^\#(\beta, \mu), 0) - \alpha |\widehat{c}_\alpha(\beta, \mu)|^2. \end{aligned} \quad (9.22)$$

С помощью несложных преобразований можно показать, что

$$\partial_\alpha \tilde{p}_\alpha^B(\beta, \mu; \widehat{c}_\alpha^\#(\beta, \mu), 0) = -|\widehat{c}_\alpha(\beta, \mu)|^2 < \text{const} \quad (9.23)$$

для $(\theta, \mu) \in Q$ и $|\alpha| \leq -\mu_0$. Поэтому по лемме 4.1 (п. 4.2) мы получаем

$$\lim_\Lambda \partial_\alpha p_\Lambda [H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\# = 0)] = \lim_\Lambda \left(- \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda,\alpha}^B(\nu^\# = 0)} \right) = -|\widehat{c}_\alpha(\beta, \mu)|^2. \quad (9.24)$$

Следствие 9.8. Благодаря непрерывности по $\alpha \rightarrow 0$, уравнения (9.2) и (9.24) гарантируют, что

$$\rho_0^B(\beta, \mu) = \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^* a_0}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}^B} = \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0^*}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_{\Lambda}^B} \lim_{\Lambda} \left\langle \frac{a_0}{\sqrt{V}} \right\rangle_{H_{\Lambda}^B} = |\widehat{c}(\beta, \mu)|^2. \quad (9.25)$$

Мы завершаем этот раздел анализом поведения нестандартного бозе-конденсата $\rho_0^B(\beta, \mu)$. Согласно равенству (9.25) он сводится к изучению поведения $|\widehat{c}(\beta, \mu)|$, соответствующего $\sup_{c \in \mathbb{C}}$ исходного выражения для давления (9.1):

$$\widetilde{p}^B(\beta, \mu; c^{\#}, \nu^{\#} = 0) = \xi(\beta, \mu; x := |c|^2) + \eta(\mu; x := |c|^2) := \widetilde{p}^B(\beta, \mu; c^{\#}), \quad (9.26)$$

где (ср. (7.28), (7.29))

$$\begin{aligned} \xi(\beta, \mu; x) &= \frac{1}{(2\pi)^3 \beta} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \ln(1 - e^{-\beta E_k})^{-1}, \\ \eta(\mu; x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k (f_k - E_k) + \mu x - \frac{1}{2} v(0) x^2, \end{aligned} \quad (9.27)$$

$$f_k = \varepsilon_k - \mu + x[v(0) + v(k)], \quad h_k = xv(k), \quad E_k = \sqrt{f_k^2 - h_k^2}.$$

Ниже мы опишем некоторые свойства исходного выражения для давления (9.26).

1) При $\mu \leq 0$ функция (9.26) является дифференцируемой по $x = |c|^2 \geq 0$ и

$$\lim_{|c|^2 \rightarrow \infty} \widetilde{p}^B(\beta, \mu; c^{\#}) = -\infty. \quad (9.28)$$

Следовательно, $\sup_{x \geq 0} (\xi + \eta)(\beta, \mu; x)$ достигается либо при $x = 0$, либо на положительном решении уравнения

$$\begin{aligned} 0 = \partial_x (\xi + \eta)(\beta, \mu; x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k (1 - e^{\beta E_k})^{-1} \partial_x E_k - \\ &- \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k (\partial_x E_k - \partial_x f_k) + \mu - xv(0). \end{aligned} \quad (9.29)$$

2) По определению (9.27) и свойствам 1) и 2) потенциала $v(k)$ можно показать, что

$$\partial_x f_k = v(0) + v(k), \quad \partial_x E_k = E_k^{-1} (f_k v(0) + (f_k - h_k) v(k)) \geq 0$$

при $\mu \leq 0$, $x \geq 0$ и любых $k \in \mathbb{R}^3$. Поэтому из уравнения (9.29) мы имеем

$$\partial_x \tilde{p}^B(\beta, \mu; c^\# = 0) \leq \partial_x \eta(\mu; x = 0) := \partial_x \tilde{p}^B(\beta = \infty, \mu; c^\# = 0) = \mu. \quad (9.30)$$

3) С помощью явных вычислений можно показать, что $\partial_\mu \partial_x \eta(\mu; x) \geq 0$ при $\mu \leq 0$ и $x \geq 0$. Следовательно,

$$\partial_x \eta(\mu; x) \leq \partial_x \eta(\mu = 0; x) \quad (9.31)$$

и $\partial_x \eta(\mu = 0; x)$ является выпуклой функцией на $(0, \infty)$.

4) Пусть теперь потенциал $v(k)$ удовлетворяет условию 3), (7.33). Тогда

$$\partial_x^2 \eta_\Lambda(\mu = 0; x) = -v(0) + \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{[v(k)]^2}{\varepsilon_k} d^3 k \geq 0. \quad (9.32)$$

Так как $\eta_\Lambda(\mu = 0; x = 0) = 0$, равенство (9.32) означает, что тривиальное давление

$$\tilde{p}^B(\beta = \infty, \mu; c^\#) = \eta_\Lambda(\mu = 0; x)$$

достигает $\sup_{x \geq 0}$ при $\hat{x}(\theta = 0, \mu = 0) > 0$, и по непрерывности при $(\theta \geq 0, \mu \geq 0)$ область

$$D_0 = \{(\theta, \mu) : \hat{x}(\theta, \mu) > 0\} \neq \{\emptyset\},$$

см. лемму 7.15, теорему 7.16.

5) Зафиксируем $\mu \in D_0$ и $\theta = 0$. Тогда, согласно неравенству (9.30),

$$\partial_x \eta_\Lambda(\mu; x = 0) = \partial_x \tilde{p}^B(\beta = \infty, \mu; c^\# = 0) = \eta_\Lambda(\mu = 0; x) < 0,$$

но $\partial_x^2 \tilde{p}^B(\beta = \infty, \mu; c^\#, \nu^\# = 0) > 0$ обеспечивает $|\hat{c}(\beta = \infty, \mu)|^2 = \hat{x}(\theta = 0, \mu) := \bar{x}(\mu) > 0$ (см. рис. 5), т. е.

$$\tilde{p}^B(\beta = \infty, \mu; c^\# = 0) < \tilde{p}^B(\beta = \infty, \mu; |\hat{c}(\beta = \infty, \mu)|^2). \quad (9.33)$$

6) Так как $\partial_x \xi(\beta, \mu; x) < 0$ (см. (9.29)) и

$$\partial_\theta \partial_x \xi(\beta, \mu; x) = \frac{(-1)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 k \frac{\beta^2 E_k e^{\beta E_k}}{(1 - e^{\beta E_k})^2} \partial_x E_k < 0, \quad (9.34)$$

существует $\theta_0(\mu)$ (ср. теорему 7.16) такое, что при $\mu \in D_0$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} [\xi(\beta_0(\mu), \mu; x) + \eta(\mu; x)] &= \xi(\beta_0(\mu), \mu; 0) + \eta(\mu; 0) = \\ &= \xi(\beta_0(\mu), \mu; \hat{x}(\theta_0(\mu), \mu) > 0) + \eta(\mu; \hat{x}(\theta_0(\mu), \mu) > 0), \end{aligned} \quad (9.35)$$

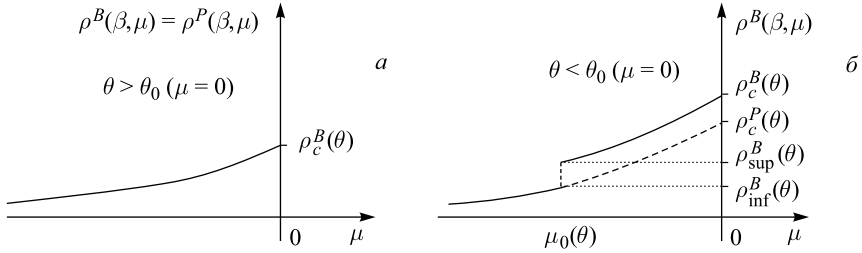


Рис. 5. Иллюстрация полной плотности частиц в большом каноническом ансамбле для модели H_{Λ}^B как функции химического потенциала μ при фиксированной температуре $\theta = \beta^{-1}$: а) при $\theta > \theta_0(0)$ — график $\rho^B(\beta, \mu) = \rho^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$, где $\rho_c^{\text{PBG}}(\theta)$ обозначает критическую плотность для ИБГ (здесь $\rho_c^B(\theta) = \rho_c^{\text{PBG}}(\theta) := \rho^{\text{PBG}}(\beta, 0)$); б) при $\theta < \theta_0(0)$ — график $\rho^B(\beta, \mu) \geq \rho^{\text{PBG}}(\beta, \mu)$, заметим, что в этом случае $\rho_c^B(\theta) > \rho_c^{\text{PBG}}(\theta)$

в то время как при $\theta < \theta_0(\mu)$ супремум достигается при $x = \hat{x}(\theta, \mu) > 0$ и при $\theta > \theta_0(\mu)$ он «перепрыгивает» на значение $\hat{x}(\theta, \mu) = 0$.

Заметим, что по определению $\hat{x}(\theta, \mu)$ и формуле (9.25) можно получить

$$\hat{x}(\theta, \mu) = |\hat{c}(\beta, \mu)|^2 = \rho_0^B(\beta, \mu).$$

Поэтому мы только что доказали следующее утверждение.

Теорема 9.9. *Если потенциал взаимодействия $v(k)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), то тогда область $D \neq \{\emptyset\}$ и динамический конденсат претерпевает скачок на границе ∂D :*

$$\rho_0^B(\beta = \theta^{-1}, \mu) = \begin{cases} > 0, & (\theta, \mu) \in D \\ = 0, & (\theta, \mu) \in Q \setminus \overline{D} \end{cases}. \quad (9.36)$$

Поведение нестандартного динамического конденсата (9.36) показано на рис.4, где его плотность обозначена как $\rho_0^B(\theta, \mu)$.

10. СТАНДАРТНЫЙ БЭК В СЛАБО НЕИДЕАЛЬНОМ БОЗЕ-ГАЗЕ

Сначала мы покажем, что (аналогично ИБГ) общая плотность частиц $\rho^B(\theta, \mu)$ в СИБГ насыщается при $\mu \rightarrow -0$ (или $\mu \uparrow 0$), т. е. что существует критическая плотность частиц $\rho_c^B(\theta) = \lim_{\mu \uparrow 0} \rho^B(\theta, \mu)$. Действительно, используя лемму Гриффитса (п. 4.2, лемма 4.1) и теоремы 8.14, 9.9, мы получаем

для общей плотности частиц в большом каноническом ансамбле СНБГ:

$$\begin{aligned}
 \rho^B(\theta, \mu) &\equiv \lim_{\Lambda} \omega_{\Lambda}^B \left(\frac{N_{\Lambda}}{V} \right) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*} \omega_{\Lambda}^B(N_k) = \\
 &= \lim_{\Lambda} \partial_{\mu} p_{\Lambda}^B(\beta, \mu) = \partial_{\mu} \tilde{p}^B(\beta, \mu; 0) = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1)^{-1} d^3 k
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

при $(\theta, \mu < 0) \in Q \setminus \overline{D}$, в то время как при $(\theta, \mu < 0) \in D$ имеем

$$\begin{aligned}
 \rho^B(\theta, \mu) &= \partial_{\mu} \tilde{p}^B(\beta, \mu; \widehat{c}^{\#}(\theta, \mu) \neq 0) = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f_k}{E_k} (e^{\beta E_k} - 1)^{-1} + \frac{h_k^2}{2E_k(f_k + E_k)} \right]_{c=\widehat{c}(\theta, \mu)} d^3 k + |\widehat{c}(\theta, \mu)|^2.
 \end{aligned} \tag{10.2}$$

Тогда из (10.1) и (10.2) мы видим, что общая плотность частиц $\rho^B(\theta, \mu)$ достигает своего максимального (критического) значения $\rho_c^B(\theta) \equiv \rho^B(\theta, \mu = 0)$ при $\mu = 0$:

1) при $\theta > \theta_0$ ($\mu = 0$) получаем

$$\rho_c^B(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (e^{\beta \varepsilon_k} - 1)^{-1} d^3 k = \rho_c^P(\theta) < +\infty, \tag{10.3}$$

2) при $\theta < \theta_0$ ($\mu = 0$) имеем

$$\begin{aligned}
 \rho_c^B(\theta) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{f_k}{E_k} (e^{\beta E_k} - 1)^{-1} + \frac{h_k^2}{2E_k(f_k + E_k)} \right]_{c=\widehat{c}(\theta, 0)} d^3 k + \\
 &+ |\widehat{c}(\theta, \mu = 0)|^2 < +\infty,
 \end{aligned} \tag{10.4}$$

поскольку плотность нестандартного конденсата $\rho_0^B(\theta, \mu)$ насыщается при $\mu = 0$ значением $|\widehat{c}(\theta, \mu = 0)|^2$, см. теорему 9.9 и рис. 5.

Отметим, что выпуклость $p^B(\beta, \mu)$ по μ обеспечивает монотонность функции $\rho^B(\theta, \mu)$ и

$$\lim_{\mu \uparrow \mu_0(\theta)} \rho^B(\theta, \mu) =: \rho_{\inf}^B(\theta) < \lim_{\mu \downarrow \mu_0(\theta)} \rho^B(\theta, \mu) =: \rho_{\sup}^B(\theta), \tag{10.5}$$

где $\mu_0(\theta)$ является обратной функцией $\theta_0(\mu)$ и

$$\lim_{\theta \downarrow \theta_0(0)} \rho_c^B(\theta) < \lim_{\theta \uparrow \theta_0(0)} \rho_c^B(\theta). \tag{10.6}$$

График $\mu \mapsto \rho^B(\theta, \mu)$ для *общей* плотности частиц в слабо неидеальном бозе-газе приведён на рис. 5.

Теперь мы рассмотрим СНБГ-модель для температур и общих плотностей частиц как заданных параметров. Заметим, что для любого ограниченного сосуда Λ существует

$$\varepsilon_{\Lambda,1} \in \left[\inf_{k \neq 0} \left(\varepsilon_k - \frac{v(k)}{2V} \right), \widehat{\varepsilon}_{\Lambda,1} = \inf_{k \neq 0} \varepsilon_k = \varepsilon_{\|k\|=\frac{2\pi}{L}} \right]$$

(см. п. 6.1) такое, что при $\mu < \varepsilon_{\Lambda,1} < \varepsilon_{\|k\|=2\pi/L}$ имеем

$$\omega_{\Lambda}^B \left(\frac{N_{\Lambda}}{V} \right) < +\infty,$$

хотя предел

$$\lim_{\mu \uparrow \varepsilon_{\Lambda,1}} \omega_{\Lambda}^B \left(\frac{N_{\Lambda}}{V} \right) = +\infty, \quad (10.7)$$

см. лемму D.1 в [26]. Поэтому при любых $\rho > 0$ существует единственное значение химического потенциала $\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho) < \varepsilon_{\Lambda,1}$, которое удовлетворяет уравнению

$$\left\langle \frac{N_{\Lambda}}{V} \right\rangle_{H_{\Lambda}^B}(\beta, \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho)) = \omega_{\Lambda}^B \left(\frac{N_{\Lambda}}{V} \right) = \rho. \quad (10.8)$$

Заметим, что при $\rho < \rho_c^B(\theta)$ монотонность $\rho^B(\theta, \mu)$ при $\mu \leq 0$ гарантирует, что уравнение (10.8) имеет единственное решение

$$\mu^B(\theta, \rho) = \lim_{\Lambda} \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho) < 0,$$

не зависящее от наличия *нестандартного* конденсата, см. (10.1) и (10.2). Поэтому ниже порога насыщения $\rho_c^B(\theta)$ возможен только нестандартный конденсат (9.36).

В оставшейся части этого раздела мы рассмотрим случай $\rho \geq \rho_c^B(\theta)$. В общем случае, для любых $\rho \geq \rho_c^B(\theta)$, из соотношений (10.7) и (10.8) можно заключить, что $\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho) \geq 0$ и

$$\lim_{\Lambda} \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho \geq \rho_c^B(\theta)) = 0. \quad (10.9)$$

В дальнейшем мы полагаем для гиббсовского состояния при фиксированной плотности ρ :

$$\omega_{\Lambda, \rho}^B(-) := \omega_{\Lambda}^B(-) \big|_{\mu=\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho)}. \quad (10.10)$$

Согласно разд. 9 нестандартный конденсат в СНБГ на моде $k=0$ насыщается при $\mu \uparrow 0$ либо $|\widehat{c}(\theta, 0)|^2 > 0$ (при $\theta < \theta_0(0)$), или $|\widehat{c}(\theta, 0)|^2 = 0$

(при $\theta > \theta_0(0)$), см. (9.36) и рис. 4. Поэтому соотношения (10.1)–(10.4) и насыщение общей плотности частиц $\rho^B(\theta, \mu)$ при $\mu \uparrow 0$ дают стандартную бозе-конденсацию на модах, следующих за $k = 0$.

Для обсуждения сосуществования этих двух типов конденсата в рамках нашей игрушечной модели см. разд. 3.

Для контроля стандартного конденсата при $k \neq 0$ мы определяем вспомогательный гамильтониан

$$H_{\Lambda, \alpha}^B = H_{\Lambda}^B - \alpha \sum_{k \in \Lambda^*, a < \|k\| < b} a_k^* a_k$$

при $0 < a < b$. Положим

$$p_{\Lambda}^B(\beta, \mu, \alpha) \equiv \frac{1}{\beta V} \ln \text{Tr}_{\mathcal{F}_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda, \alpha}^B(\mu)} \tag{10.11}$$

и

$$\omega_{\Lambda}^{B, \alpha}(-) := \langle - \rangle_{H_{\Lambda, \alpha}^B}(\beta, \mu)$$

для гиббсовского состояния большого канонического ансамбля, соответствующего $H_{\Lambda, \alpha}^B(\mu)$.

Напомним, что $\mu_0(\theta)$ является функцией (обратной к $\theta_0(\mu)$), которая определяет граничную кривую области D (см. рис. 4).

Предложение 10.1. Пусть $\alpha \in [-\delta, \delta]$, где $0 \leq \delta \leq \varepsilon_a/2$ и $\varepsilon_a = \inf_{\|k\| \geq a} \varepsilon_k$.

Тогда существует область $D_{\delta} \subset D$:

$$D_{\delta} \equiv \{(\theta, \mu) : \mu_0 < \mu_0(\delta) \leq \mu \leq 0, 0 \leq \theta \leq \theta_0(\mu, \delta) < \theta_0(\mu)\} \tag{10.12}$$

такая, что

$$\left| p_{\Lambda}^B(\beta, \mu, \alpha) - \sup_{c \in \mathbb{C}} \tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu, \alpha; c^{\#}) \right| \leq \frac{K(\delta)}{\sqrt{V}} \tag{10.13}$$

для достаточно больших V , равномерно по $\alpha \in [-\delta, \delta]$ и для:

- а) $(\theta, \mu) \in D_{\delta}$, если $\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho \geq \rho_c^B(\theta)) \leq 0$; или
 - б) $(\theta, \mu) \in D_{\delta} \cup \{(\theta, \mu) : 0 \leq \mu \leq \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho \geq \rho_c^B(\theta)), 0 \leq \theta \leq \theta_0(\mu = 0, \delta)\}$,
если $\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho \geq \rho_c^B(\theta)) \geq 0$.
- (10.14)

Доказательство. Существование области D_{δ} следует из доказательства теоремы 8.14. Это означает, что оценка (10.13) стабильна по отношению к локальным возмущениям спектра свободных частиц: $\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_k - \alpha \chi_{(a,b)}(\|k\|)$ при $|\alpha| \leq \delta \leq \varepsilon_a/2$ в меньшей области $D_{\delta} \subset D$. Здесь $\chi_{(a,b)}(\|k\|)$ является характеристической функцией интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Расширение области в (10.14) происходит благодаря непрерывности давления $p_{\Lambda}^B(\beta, \mu, \alpha)$ и начального давления $\tilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu, \alpha; c^{\#})$ по параметрам $\alpha \in [-\delta, \delta]$ и $\mu \leq \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho \geq \rho_c^B(\theta))$, см. (10.8), (10.9).

Следствие 10.2. Пусть $\rho \geq \rho_c^B(\theta)$, см. (10.3), (10.4). Тогда при $\theta < \theta_0(0)$ имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*, a < \|k\| < b} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{a < \|k\| < b} d^3k \left[\frac{f_k}{E_k} (e^{\beta E_k} - 1)^{-1} + \frac{h_k^2}{2E_k(f_k + E_k)} \right]_{\substack{c = \widehat{c}(\theta, 0) \\ \mu = 0}}, \end{aligned} \quad (10.15)$$

в то время как при $\theta > \theta_0(0)$ получаем

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*, a < \|k\| < b} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{a < \|k\| < b} d^3k (e^{\beta \varepsilon_k} - 1)^{-1}. \quad (10.16)$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $\{p_{\Lambda}^B(\beta, \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho), \alpha)\}_{\Lambda}$, определённых в (10.11), в которых химический потенциал является решением уравнения (10.8) для соответствующего гамильтониана и $\alpha \in [-\delta, \delta]$. Так как согласно (10.11)

$$\partial_{\alpha} p_{\Lambda}^B(\beta, \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho), \alpha) = \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*, a < \|k\| < b} \omega_{\Lambda, \rho}^{B, \alpha}(N_k) \quad (10.17)$$

и $\{p_{\Lambda}^B(\beta, \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho), \alpha)\}_{\Lambda}$ являются выпуклыми функциями $\alpha \in [-\delta, \delta]$, предложение 10.1 и лемма 4.1 доказывают, что

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda} \partial_{\alpha} p_{\Lambda}^B(\beta, \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho), \alpha) &= \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*, a < \|k\| < b} \omega_{\Lambda, \rho}^{B, \alpha}(N_k) = \\ &= \partial_{\alpha} \lim_{\Lambda} \sup_{c \in \mathbb{C}} \widetilde{p}_{\Lambda}^B(\beta, \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho), \alpha; c^{\#}) \end{aligned} \quad (10.18)$$

при $\alpha \in [-\delta, \delta]$. Используя явные вычисления в правой части (10.18), можно получить при $\alpha = 0$ равенства (10.15) и (10.16).

Замечание 10.3. Заметим, что значения среднего числа частиц $\omega_{\Lambda}^B(N_k) = \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}^B}(\beta, \mu)$ (и аналогично $\omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \langle N_k \rangle_{H_{\Lambda}^B}(\beta, \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho))$) определены на дискретном множестве Λ^* (6.3). Ниже мы обозначаем $\{\omega_{\Lambda}^B(N_k)\}_{k \in \mathbb{R}^3}$ непрерывную интерполяцию этих значений с множества Λ^* в \mathbb{R}^3 .

Теперь мы в состоянии доказать основное утверждение этого раздела о нестандартном и стандартном конденсатах, появляющихся в СНБГ при плотностях $\rho > \rho_c^B(\theta)$.

Теорема 10.4. Пусть $\rho > \rho_c^B(\theta)$. Тогда мы имеем

1)

$$\rho_0^B(\theta, 0) = \lim_{\Lambda} \omega_{\Lambda, \rho}^B \left(\frac{a_0^* a_0}{V} \right) = \left\{ \begin{array}{ll} |\widehat{c}(\theta, 0)|^2, & \theta < \theta_0(0) \\ 0, & \theta > \theta_0(0) \end{array} \right\}; \quad (10.19)$$

2) для любых $k \in \Lambda^*$ таких, что $\|k\| > 2\pi/L$,

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\Lambda, \rho}^B \left(\frac{N_k}{V} \right) = 0; \quad (10.20)$$

3) при $\theta < \theta_0(0)$ и для всех $k \in \Lambda^*$ таких, что $\|k\| > \delta > 0$

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \left[\frac{f_k}{E_k} (e^{\beta E_k} - 1)^{-1} + \frac{h_k^2}{2E_k(f_k + E_k)} \right]_{c=\widehat{c}(\theta, 0), \mu=0}, \quad (10.21)$$

в то время как при $\theta > \theta_0(0)$

$$\lim_{\Lambda} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_k} - 1}; \quad (10.22)$$

4) двойной предел

$$\widetilde{\rho}_0^B(\theta) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, 0 < \|k\| \leq \delta\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \rho - \rho_c^B(\theta), \quad (10.23)$$

означающий, что в СНБГ образуется стандартный (обобщённый) бозе-конденсат $\widetilde{\rho}_0^B(\theta) > 0$ в модах, следующих за нулевой модой, благодаря насыщению плотности частиц.

Доказательство. 1) Так как согласно (10.9) мы имеем

$$\lim_{\Lambda} \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho) = 0, \quad (10.24)$$

термодинамический предел (10.19) следует из теоремы 3.4 и следствия 3.8 работы [25], см. (9.36) при $\mu = 0$.

2) Поскольку $\|k\| > 2\pi/L$ и $\Lambda = L \times L \times L$ — это куб, что исключает обобщённую конденсацию Бозе–Эйнштейна, происходящую из-за анизотропии (см. п. 4.2), термодинамический предел (10.20) следует из ограничения $\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho) < \varepsilon_{\|k\|=2\pi/L}$ и оценки (D.10) в лемме D.2 работы [26].

3) Рассмотрим $g_{\theta}(k)$, определённую при $k \in \mathbb{R}^3$, $\|k\| > \delta > 0$ следующим образом:

$$g_{\theta}(k) := \lim_{\Lambda} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k), \quad (10.25)$$

где состояние $\omega_{\Lambda, \rho}^B(-)$ обозначает $\omega_{\Lambda}^B(-)$ с $\mu = \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho)$, ср. (10.10). Заметим, что благодаря лемме D.2 работы [26] и тому факту, что

$$\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho) < \varepsilon_{\Lambda, 1} < \inf_{k \neq 0} \varepsilon_k = \varepsilon_{\|k\|=2\pi/L},$$

термодинамический предел (10.25) существует и он равномерно ограничен при $\|k\| > \delta > 0$. Более того, для любого интервала $(a > \delta, b)$ мы имеем

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*, \|k\| \in (a, b)} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|k\| > \delta} d^3k g_{\theta}(k) \chi_{(a, b)}(\|k\|),$$

где опять $\chi_{(a, b)}(\|k\|)$ обозначает характеристическую функцию (a, b) . Тогда следствие 10.2 приводит к тому, что

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|k\| > \delta} d^3k g_{\theta}(k) \chi_{(a, b)}(\|k\|) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|k\| > \delta} d^3k f_{\theta}(k) \chi_{(a, b)}(\|k\|), \quad (10.26)$$

где $f_{\theta}(k)$ — непрерывная функция $k \in \mathbb{R}^3$, определённая равенствами (10.15), (10.16), т. е.,

$$f_{\theta}(k) := \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\frac{f_k}{E_k} (e^{\beta E_k} - 1)^{-1} + \frac{h_k^2}{2E_k(f_k + E_k)} \right]_{c=\tilde{c}(\theta, 0)}^{\mu=0} \quad (10.27)$$

при $\theta < \theta_0(0)$ и

$$f_{\theta}(k) := \frac{1}{(2\pi)^3} (e^{\beta \varepsilon_k} - 1)^{-1} \quad (10.28)$$

при $\theta > \theta_0(0)$. Так как соотношение (10.26) справедливо для любого интервала $(a > \delta, b) \subset \mathbb{R}$, получаем

$$g_{\theta}(k) = f_{\theta}(k), \quad k \in \mathbb{R}^3, \quad \|k\| > \delta > 0.$$

Благодаря этому и соотношениям (10.25)–(10.28), мы получаем равенства (10.21) и (10.22).

4) Так как общая плотность ρ фиксирована, по определению (10.10) мы имеем

$$\frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, 0 < \|k\| \leq \delta\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \rho - \omega_{\Lambda, \rho}^B\left(\frac{a_0^* a_0}{V}\right) - \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: \|k\| > \delta\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k). \quad (10.29)$$

Благодаря следствию 10.2 при $a = \delta$ и $b \rightarrow +\infty$ мы находим при $\theta < \theta_0(0)$

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: \|k\| > \delta\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|k\| > \delta} d^3k \left[\frac{f_k}{E_k} (e^{\beta E_k} - 1)^{-1} + \frac{h_k^2}{2E_k(f_k + E_k)} \right]_{c=\tilde{c}(\theta, 0)}^{\mu=0} \end{aligned} \quad (10.30)$$

и при $\theta > \theta_0(0)$

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{k \in \Lambda^*, \|k\| > \delta} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\|k\| > \delta} d^3k (e^{\beta \varepsilon_k} - 1)^{-1}. \quad (10.31)$$

Теперь из равенств (10.3), (10.4), (10.19), (10.29)–(10.31) мы получаем формулу (10.23), перейдя к пределу $\delta \downarrow 0$.

Поэтому, согласно пределу (10.23) при $\theta > \theta_0(0)$ и $\rho > \rho_c^B(\theta)$, СНБГ демонстрирует только *один тип* конденсации, а именно *стандартную* конденсацию Бозе–Эйнштейна, которая происходит на модах $k \neq 0$, в то время как при $\theta < \theta_0(0)$ эта модель демонстрирует при $\rho > \rho_c^B(\theta)$ этот тип конденсации на *втором* этапе, после *нестандартной* бозе-конденсации $|\widehat{c}(\theta, 0)|^2$, см. (10.19). Классификация различных типов конденсатов приведена в п. 4.1.

Замечание 10.5. В области $\theta < \theta_0(0)$, $\rho > \rho_c^B(\theta)$, имеет место сосуществование этих двух типов конденсата, а именно:

— *нестандартный конденсат, появляющийся, когда ρ становится больше $\rho_{\text{sup}}^B(\theta)$, см. (10.5) и рис. 2, б и достигающий своего максимального значения $\rho_0^B(\theta, 0)$ при $\rho \geq \rho_c^B(\theta) > \rho_{\text{sup}}^B(\theta)$;*

— *стандартный бозе-конденсат $\widetilde{\rho}_0^B(\theta)$, возникающий при $\rho > \rho_c^B(\theta)$, см. (10.23).*

Поскольку конденсат Бозе–Эйнштейна (10.23) возникает на модах $k \neq 0$, он должен быть классифицирован как *обобщённый* конденсат. Согласно классификации ван ден Берга–Льюиса–Пуле (см. п. 4.1), из (10.20) и (10.23) мы только можем заключить, что *обобщённый стандартный* конденсат в СНБГ может быть либо конденсатом типа I на модах $\|k\| = 2\pi/L$, либо конденсатом типа III, если моды $\|k\| = 2\pi/L$ макроскопически не заполнены (неэкстенсивная конденсация), или, наконец, он является комбинацией двух.

Следствие 10.6. При $\rho > \rho_c^B(\theta)$ и периодических граничных условиях на $\partial\Lambda$, (обобщённый) стандартный конденсат (10.23) относится к типу I для первых $2d(=6)$ мод, следующих за нулевой модой $k = 0$, т. е.

$$\widetilde{\rho}_0^B(\theta) = \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, \|k\| = 2\pi/L\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(a_k^* a_k) = \rho - \rho_c^B(\theta). \quad (10.32)$$

Доказательство. Так как для $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, \|k\| = 2\pi/L\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) &= \rho - \omega_{\Lambda, \rho}^B\left(\frac{a_0^* a_0}{V}\right) - \\ &- \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, 2\pi/L < \|k\| < \delta\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) - \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: \|k\| \geq \delta\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k), \end{aligned}$$

по лемме D.2 [26] мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, \|k\|=2\pi/L\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) &\geq \rho - \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, 2\pi/L < \|k\| < \delta\}} \frac{1}{e^{B_k(\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho))} - 1} - \\ &- \omega_{\Lambda, \rho}^B\left(\frac{a_0^* a_0}{V}\right) \left[1 + \frac{\beta}{2V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, 2\pi/L < \|k\| < \delta\}} \frac{v(k)}{1 - e^{-B_k(\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho))}} \right] - \\ &- \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*: \|k\| \geq \delta\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k), \quad (10.33) \end{aligned}$$

где

$$B_k(\mu = \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho)) = \beta \left[\varepsilon_k - \mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho) - \frac{v(k)}{2V} \right].$$

Поскольку согласно лемме D.1 [26] верно

$$\mu_{\Lambda}^B(\theta, \rho) < \varepsilon_{\Lambda, 1} < \inf_{k \neq 0} \varepsilon_k = \varepsilon_{\|k\|=2\pi/L},$$

из соотношений (10.3), (10.4) и (10.30) мы выводим

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, \|k\|=2\pi/L\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(a_k^* a_k) \geq \rho - \rho_c^B(\theta) \quad (10.34)$$

переходом к пределу $\delta \downarrow 0$ в правой части неравенства (10.33) *после* термодинамического предела. Следовательно, комбинируя неравенство

$$\lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, \|k\|=2\pi/L\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k) \leq \lim_{\Lambda} \frac{1}{V} \sum_{\{k \in \Lambda^*, 0 < \|k\| < \delta\}} \omega_{\Lambda, \rho}^B(N_k)$$

с соотношениями (10.23) и (10.34), мы получаем (10.32).

Поэтому для температуры θ и общей плотности частиц ρ , рассматриваемых как параметры, мы получаем *три режима* термодинамического поведения СНБГ при $\theta < \theta_0(0)$ (см. рис. 4 и 5):

- 1) при $\rho \leq \rho_{\inf}^B(\theta)$ конденсация отсутствует;
- 2) при $\rho_{\sup}^B(\theta) \leq \rho \leq \rho_c^B(\theta)$ существует *нестандартная* конденсация (9.36) на моде $k = 0$, возникающая благодаря недиагональному взаимодействию в боголюбовском гамильтониане, см. рис. 5;

3) при $\rho_c^B(\theta) \leq \rho$ существует *второй* тип конденсата: *стандартный* конденсат Бозе–Эйнштейна типа I, который появляется *после нестандартного*; он возникает благодаря стандартному механизму насыщения общей плотности частиц (следствие 10.6).

При $\theta > \theta_0(0)$ существует только *два* типа термодинамического поведения: они соответствуют $\rho \leq \rho_c^B(\theta)$ без конденсации и $\rho_c^B(\theta) < \rho$ со *стандартной* конденсацией, как в 3). Следовательно, при $\theta > \theta_0(0)$ конденсация в СНБГ совпадает со стандартной обобщённой конденсацией Бозе–Эйнштейна типа I в ИБГ с *исключённой* модой $k = 0$, см. теорему 10.4.3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья представляет собой обзор результатов по нестандартной динамической конденсации в сопоставлении со стандартной конденсацией Бозе–Эйнштейна, включая обобщённую БЭК по типам ван ден Берга–Льюиса–Пуле. Она основывается на обсуждении двух моделей: на простой игрушечной модели и модели слабо неидеального бозе-газа Боголюбова, которая была предложена для объяснения сверхтекучести ^4He , но также полезна для анализа нестандартной динамической конденсации в свете недавнего пересмотра экспериментальных данных, см. [63, 62].

Мы предупреждаем читателя о другом использовании выражения «нестандартная БЭК», например, в препринте Марко Коргини «*New Scenario for the Emergence of Non-Conventional Bose–Einstein Condensation. Beyond the Notion of Energy Gap*» (arXiv:200101315v1).

Благодарности. Данный обзор возник в результате моей лекции на семинаре (Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ, Дубна, 10 сентября 2019 г.), посвящённом светлой памяти Вячеслава Борисовича Приезжева.

Я глубоко благодарен организаторам: Вячеславу Спиридонову и Александру Поволоцкому за приглашение и гостеприимство.

Я также признателен рецензенту за внимательное чтение рукописи и за ряд полезных замечаний и предложений по улучшению текста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lieb E. H., Seiringer R., Solovej J. Ph., Yngvason J. The Mathematics of the Bose Gas and Its Condensation. Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.
2. Verbeure A. F. Many-Body Boson Systems (Half a Century Later). Heidelberg: Springer Verlag, 2011.
3. Einstein A. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1925. V. I. P. 3–14.
4. Uhlenbeck G. E. Over Statistische Methoden in de Theorie der Quanta. Leiden: Doctoralexamen, 1927.
5. London F. On the Bose–Einstein Condensation // Phys. Rev. 1938. V. 54. P. 947–954.
6. Kapitza P. Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point // Nature. 1938. V. 141. P. 74–75.
7. Allen J. F., Misener A. D. Flow Phenomena in Liquid Helium II // Ibid. 1938. V. 142. P. 643–644.
8. Kozlov Zh. A., Aleksandrov L., Zagrebnoy V. A., Parfenov V. A., Priezhev V. B. Bose-Condensate Search in He II. JINR Preprint P4-7895. Dubna, 1974. P. 16.
9. Aleksandrov L., Zagrebnoy V. A., Kozlov Zh. A., Parfenov V. A., Priezhev V. B. High Energy Neutron Scattering and the Bose Condensate in He II // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1975. V. 68. P. 1825–1833 (Sov. Phys. JETP. 1975. V. 41. P. 915–918).

10. *Dokukin E. V., Kozlov Zh. A., Parfenov V. A., Puchkov A. V.* Investigation of the Temperature Dependence of the Density of the Bose Condensate in Helium-4 in Connection with the Superfluidity Phenomenon // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1978. V. 75. P. 2273–2279 (Sov. Phys. JETP. 1978. V. 48, No. 6. P. 1146–1149).
11. *Bogoyavlenskii I. V., Karnatsevich L. V., Kozlov Zh. A., Puchkov A. V.* Bose Condensation in Liquid ^4He // *Sov. J. Low Temp. Phys.* 1990. V. 140. P. 139–163.
12. *Bogoyavlenskii I. V., Karnatsevich L. V., Kozlov Zh. A., Puchkov A. V.* Neutron Scattering Determination of Condensate in Liquid ^4He // *Physica B: Condes. Matter.* 1992. V. 176. P. 151–152.
13. *Blagoveshchenskii N. M., Bogoyavlenskii I. V., Karnatsevich L. V., Kozlov Zh. A., Kolobrodov V. G., Priezhev V. B., Puchkov A. V., Skomorokhov A. N., Yarunin V. S.* Structure of the Excitation Spectrum of Liquid ^4He // *Phys. Rev. B.* 1994. V. 50. P. 16550–16565.
14. *Загребнов В. А.* Фонон-фононное взаимодействие в жидком гелии // *Moscow Univ. Physics Bull.* 1971. V. 26, No. 1. P. 54–58 (Вестн. МГУ. Сер. 3: Физика. Астрон. 1971. № 1. P. 75–81).
15. *Загребнов В. А.* Фононное взаимодействие в квантовой жидкости ^4He // *Вестн. МГУ. Сер. 3: Физика. Астрон.* 1971. № 5. С. 568–578.
16. *van den Berg M., Lewis J. T., Pulè J.* A General Theory of Bose–Einstein Condensation in the Free Boson Gas // *Helv. Phys. Acta.* 1986. V. 59. P. 1271–1288.
17. *Seiringer R., Ueltschi D.* Rigorous Upper Bound on the Critical Temperature of Dilute Bose Gases // *Phys. Rev. B.* 2009. V. 80. P. 014502.
18. *Betz V., Ueltschi D.* Critical Temperature of Dilute Bose Gases // *Phys. Rev. A.* 2010. V. 81. P. 023611.
19. *Sütö A.* The Total Momentum of Quantum Fluids // *J. Math. Phys.* 2015. V. 56. P. 081901.
20. *Wreszinski W. F.* Equilibrium and Non-Equilibrium Properties of Superfluids and Superconductors // *J. Stat. Phys.* 2017. V. 169. P. 782–803.
21. *van den Berg M., Lewis J. T., Pulè J.* The Large Deviation Principle and Some Models of an Interacting Boson Gas // *Commun. Math. Phys.* 1988. V. 118. P. 61–85.
22. *Huang K., Yang C. N., Luttinger J. M.* Imperfect Bose Gas with Hard-Sphere Interactions // *Phys. Rev.* 1957. V. 105. P. 776–784.
23. *Thouless D. J.* *The Quantum Mechanics of Many Body Systems.* New York: Acad. Press, 1961.
24. *Bru J.-B., Zagrebнов V. A.* Exact Phase Diagram of the Bogoliubov Weakly Imperfect Bose Gas // *Phys. Lett. A.* 1998. V. 244. P. 371–376.
25. *Bru J.-B., Zagrebнов V. A.* Exact Solution of the Bogoliubov Hamiltonian for Weakly Imperfect Bose Gas // *J. Phys. A: Math. Gen. A.* 1998. V. 31. P. 9377–9404.
26. *Bru J.-B., Zagrebнов V. A.* On Condensations in the Bogoliubov Weakly Imperfect Bose Gas // *J. Stat. Phys.* 2000. V. 99. P. 1297–1338.
27. *Ziff R. M., Uhlenbeck G. E., Kac M.* The Ideal Bose–Einstein Gas, Revisited // *Phys. Rep.* 1977. V. 32(C). P. 169–248.
28. *Casimir H. B. G.* On Bose–Einstein Condensation // *Fundamental Problems in Statistical Mechanics III* / Ed. E. G. D. Cohen. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1968. P. 188–196.

29. *Girardeau M.* Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension // *J. Math. Phys.* 1960. V. 1. P. 516–523.
30. *van den Berg M., Lewis J. T.* On Generalized Condensation in the Free Boson Gas // *Physica A.* 1982. V. 110. P. 550–564.
31. *van den Berg M.* On Boson Condensation into an Infinite Number of Low-Lying Levels // *J. Math. Phys.* 1982. V. 23. P. 1159–1161.
32. *Pulè J. V.* The Free Boson Gas in a Weak External Potential // *J. Math. Phys.* 1983. V. 24. P. 138–142.
33. *van den Berg M., Lewis J. T., de Smedt Ph.* Condensation in the Imperfect Boson Gas // *J. Stat. Phys.* 1984. V. 37. P. 697–707.
34. *Bru J.-B., Zagrebnov V. A.* Exactly Soluble Model with Two Kinds of Bose–Einstein Condensations // *Physica A.* 1999. V. 268. P. 309–325.
35. *Bru J.-B., Zagrebnov V. A.* A Model with Coexistence of Two Kinds of Bose Condensations // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2000. V. 33. P. 449–464.
36. *Bradley C. C., Sackett C. A., Tollet J. J., Hulet R. G.* Evidence of Bose–Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. P. 1687–1690.
37. *Davis K. B., Mewes M.-O., Andrews M. R., van Druten N. J., Durfee D. S., Kurn D. M., Ketterle W.* Bose–Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms // *Ibid.* V. 75, No. 22. P. 3969–3973.
38. *Anderson M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E., Cornell E. A.* Observation of Bose–Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor // *Science.* 1995. V. 269. P. 198–201.
39. *Huang K.* *Statistical Mechanics.* New York: Wiley, 1963.
40. *Davies E. B.* The Thermodynamic Limit for an Imperfect Boson Gas // *Commun. Math. Phys.* 1972. V. 28. P. 69–86.
41. *Fannes M., Verbeure A.* The Condensed Phase of the Imperfect Bose Gas // *J. Math. Phys.* 1980. V. 21. P. 1809–1818.
42. *Michoel T., Verbeure A.* Nonextensive Bose–Einstein Condensation Model // *J. Math. Phys.* 1999. V. 40. P. 1268–1279.
43. *Schröder M.* On the Bose Gas with Local Mean-Field Interaction // *J. Stat. Phys.* 1990. V. 58. P. 1151–1163.
44. *Papoyan V. V., Zagrebnov V. A.* On Condensation of a One-Dimensional Non-Ideal Boson Gas // *Phys. Lett. A.* 1985. V. 113. P. 8–10.
45. *Griffiths R.* A Proof That the Free Energy of a Spin System Is Extensive // *J. Math. Phys.* 1964. V. 5. P. 1215–1222.
46. *Bogoliubov N. N., Jr., Brankov J. G., Zagrebnov V. A., Kurbatov A. M., Tonchev N. S.* Some Classes of Exactly Soluble Models of Problems in Quantum Statistical Mechanics: The Method of the Approximating Hamiltonian // *Russ. Math. Surveys.* 1984. V. 39. P. 1–50.
47. *Zagrebnov V. A., Bru J.-B.* The Bogoliubov Model of Weakly Imperfect Bose Gas // *Phys. Rep.* 2001. V. 350. P. 291–434.
48. *Bogoliubov N. N.* On the Theory of Superfluidity // *J. Phys. (USSR).* 1947. V. 11. P. 23–32.
49. *Боголюбов Н. Н.* К теории сверхтекучести // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1947. Т. 11. № 1. С. 77–90;

- Боголюбов Н. Н.* К теории сверхтекучести // Собр. науч. тр. Т. 8. Статистическая механика. М.: Наука, 2007. С. 107–124.
50. *Angelescu N., Verbeure A., Zagrebnov V. A.* On Bogoliubov's Model of Superfluidity // *J. Phys. A: Math. Gen. A.* 1992. V. 25. P. 3473–3491.
51. *Fröhlich H.* Interaction of Electrons with Lattice Vibrations // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1952. V. 215. P. 291–298.
52. *Bogoljubov N. N.* On a New Method in the Theory of Superconductivity // *Nuovo Cim.* 1958. V. 7. P. 794–805.
53. *Bogoliubov N. N., Tolmachev V. V., Shirkov D. V.* A New Method in the Theory of Superconductivity (translated from Russian). New York: Consultants Bureau, 1959.
54. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 4. Квантовая статистика. 2-е изд. М.: КомКнига, 2010.
55. *Davydov A. S.* Quantum Mechanics. Second ed., translated from Russian, with revisions and additions by D. ter Haar. Oxford: Pergamon Press, 1976.
56. *Zubarev D. N., Tserkovnikov Yu. A.* On the Theory of Phase Transition in Non-Ideal Bose Gas // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1958. V. 120. P. 991–994.
57. *Luban M.* Statistical Mechanics of a Nonideal Boson Gas: Pair Hamiltonian Model // *Phys. Rev.* 1962. V. 128. P. 965–987.
58. *Pulè J. V., Zagrebnov V. A.* A Pair Hamiltonian Model of a Non-Ideal Boson Gas // *Ann. Inst. Henri Poincaré.* 1993. V. 59. P. 421–444.
59. *Pulè J. V., Verbeure A. F., Zagrebnov V. A.* On Solvable Boson Models // *J. Math. Phys.* 2008. V. 49. P. 043302–18.
60. *Pulè J. V., Zagrebnov V. A.* Proof of the Variational Principle for a Pair Hamiltonian Boson Model // *Rev. Math. Phys.* 2007. V. 19. P. 157–194.
61. *Bru J.-B., Zagrebnov V. A.* Quantum Interpretation of Thermodynamic Behaviour of the Bogoliubov Weakly Imperfect Bose Gas // *Phys. Lett. A.* 1998. V. 247. P. 37–41.
62. *Blagoveshchenskii N. M.* Superfluid Helium as the Condensate of Bound Atoms Pairs. arXiv: 2001.10856 [cond-mat.stat-mech]. 2020.
63. *Vilchinskyy S. I., Yakimenko A. I., Isaieva K. O., Chumachenko A. V.* The Nature of Superfluidity and Bose–Einstein Condensation: From Liquid ^4He to Dilute Ultracold Atomic Gases // *Low Temp. Phys.* 2013. V. 39, No. 9. P. 937–957.
64. *Bogoliubov N. N.* Lectures on Quantum Statistics. V. I. Quantum Statistics. Ch. 3, §5, Eq. (3.81). London; Paris: Gordon and Breach, Science Publ., 1970;
- Боголюбов Н. Н.* Лекции по квантовой статистике // Собр. науч. тр. Т. 6. Статистическая механика. М.: Наука, 2006. С. 9–235.
65. *Bru J.-B., Zagrebnov V. A.* Large Deviations in the Superstable Weakly Imperfect Bose Gas // *J. Stat. Phys.* 2008. V. 133. P. 379–400.
66. *Lewis J. T., Zagrebnov V. A., Pulè J. V.* The Large Deviation Principle for the Kac Distribution // *Helv. Phys. Acta.* 1986. V. 61. P. 1063–1078.
67. *Ginibre J.* On the Asymptotic Exactness of the Bogoliubov Approximation for Many Bosons Systems // *Commun. Math. Phys.* 1968. V. 8. P. 26–51.
68. *Harris B.* Bounds for Certain Thermodynamic Averages // *J. Math. Phys.* 1967. V. 8. P. 1044–1045.
69. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Учен. записки МГУ. Сер. «Математика». 1939. Т. 30. С. 3–16.