ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2024. Т. 55, вып. 4. С. 1200–1206

КВАНТОВЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В УСКОРЕННОЙ СРЕДЕ

Г. Ю. Прохоров [1,2,*], *О. В. Теряев* [1,2,**], *В. И. Захаров* [1,2,3,***]

[1] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
[2] Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва
[3] Тихоокеанский квантовый центр Дальневосточного федерального университета, Владивосток, Россия

Известно, что обычный вакуум Минковского в ускоренной системе отсчета выглядит как «тепловая баня» частиц. Этот эффект хорошо известен, он называется эффектом Унру и является аналогом излучения Хокинга в пространстве с нулевой кривизной. Таким образом, вакуум Минковского выглядит как среда с точки зрения ускоренного наблюдателя, и естественной целью является более подробное изучение свойств такой среды. Показано, что если вакуум Минковского охладить и добиться температуры ниже температуры Унру, то происходит фазовый переход, связанный с «падением под горизонт» низших мацубаровских мод. Данный переход обладает многими замечательными свойствами, например, для безмассовых частиц он является «полиномиальным», а также связан с нарушением конформной симметрии.

It is known that the usual Minkowski vacuum in an accelerated frame looks like a “thermal bath” of particles. This effect is well known and called the Unruh effect, and is an analogue of Hawking radiation in space with zero curvature. Thus, the Minkowski vacuum looks like a heated medium from the point of view of an accelerated observer, and the natural goal is to study in more detail the properties of such a medium. We show that if the Minkwoski vacuum is cooled, and we achieve a temperature below the Unruh temperature, then a phase transition occurs associated with the “falling under the horizon” of the lower Matsubara modes. This transition has many remarkable features; for example, for massless particles it is “polynomial”, and is also associated with violation of conformal symmetry.

PACS: 03.70.+k; 11.10.−z

ВВЕДЕНИЕ

В ускоренной системе отсчета возникает горизонт событий, подобный горизонту черной дыры. Как и для черной дыры, данный горизонт создает тепловое излучение. Таким образом, состояние вакуума Минковского, для которого неподвижная система отсчета является пустой, т. е. не содержит квантов полей, с точки зрения ускоренного наблюдателя образует

* E-mail: prokhorov@theor.jinr.ru
** E-mail: teryaev@jinr.ru
*** E-mail: vzakharov@itep.ru

среду с определенной температурой. Этот необычный эффект называется эффектом Унру [1]. Отметим, что эффект Унру существует, несмотря на то, что кривизна равна нулю, в отличие от излучения Хокинга, т. е. теория в плоском пространстве в данном случае воспроизводит явление, характерное для теории с гравитацией.

Стандартный способ вывода эффекта Унру состоит во введении детектора, который взаимодействует со средой [2]. Соответствующее взаимодействие в простейшем случае описывается дополнительным членом в гамильтониане системы $\widehat{H}_I(\tau) \sim \widehat{\mu}(\tau)\,\widehat{\phi}(z(\tau))$, где $\widehat{\mu}$ — оператор, описывающий «поле» (а точнее, одну моду) детектора, а $\widehat{\phi}$ — само поле, которое находится в состоянии вакуума Минковского, но в ускоренной системе приобретает температуру. В результате взаимодействия с нагретой средой детектор, движущийся с ускорением вдоль мировой линии $z(\tau)$, переходит в возбужденное состояние, причем вероятность перехода описывается термодинамическим распределением с температурой Унру

$$T_U = \frac{|a|}{2\pi}, \tag{1}$$

где $|a| = \sqrt{-a_\mu a^\mu}$ — модуль собственного ускорения $a_\mu = u^\nu \partial_\nu u_\mu$, u_μ — 4-скорость среды.

Альтернативой такому рассмотрению является использование самой среды с определенной температурой в качестве своего рода детектора. Нас будет интересовать плотность энергии среды из безмассовых фермионов. Квантово-полевое вычисление энергии, как это часто бывает в квантовой теории поля, приводит к ультрафиолетово расходящимся величинам. Нормируя квантовые средние на вакуум Минковского, получим, что условием эффекта Унру является обращение плотности энергии в нуль [3, 4]:

$$\varepsilon(T = T_U, a) = 0. \tag{2}$$

Возникает естественный вопрос: если эффект Унру приводит к появлению среды с определенной температурой, какими еще свойствами обладает данная среда? Ниже мы покажем, что при попытке охладить данную среду ниже температуры Унру $T < T_U$ происходит фазовый переход, тесно связанный с существованием горизонта событий в ускоренной системе.

Следуя работе [5], покажем, что в безмассовом случае данный фазовый переход описывается особенно просто, с использованием полиномов. Также покажем, что он существует и в случае массивных полей, что является оригинальным результатом, описанным впервые в данной работе.

1. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

Рассмотрим ускоренную среду из свободных безмассовых фермионов при нулевом химическом потенциале*. Так как мы хотим рассмотреть среду ниже температуры Унру, будем рассматривать ускорение a_μ (предположим, что ускорение происходит вдоль оси z) и собственную (т. е. измеряемую сопутствующим термометром) температуру T как независимые параметры, в отличие от подавляющего количества работ по эффекту Унру, где эти два параметра всегда связаны уравнением (1).

Плотность энергии этой среды будем нормировать на вакуум Минковского, т. е. в состоянии вакуума Минковского она должна быть равна нулю. Один из способов вычисления энергии в данном случае состоит в переходе к ускоренным координатам Риндлера

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\nu^2} d\varphi^2 + dx^2 + dy^2 + d\rho^2, \tag{3}$$

которые дополнительно сделаны евклидовыми и периодичными по мнимому собственному времени τ, связанному с координатой $\varphi = 2\pi T\tau$ (периодичность соответствует отождествлению границ $\tau = 0$ и $1/T$), что позволяет исследовать также эффекты при конечной температуре. В выражении (3) $\nu = (2\pi T)/|a| = \mathrm{const}$, что гарантирует глобальное термодинамическое равновесие, при котором вектор $\beta_\mu = u_\mu/T$ является вектором Киллинга [6, 7]. Координата $\rho = |a|^{-1}$ одновременно соответствует обратному ускорению.

Так как мы рассматриваем T и $|a|$ как независимые, данное пространство в общем случае содержит коническую сингулярность при $\rho = 0$. Отклонение от упомянутого термодинамического равновесия при этом искривило бы поверхность данного конуса, т. е. равновесию соответствует именно нулевая кривизна евклидова пространства.

Для вычисления энергии теперь необходимо поместить в пространство (3) поля Дирака $\psi(x)$. Они будут описываться уравнением Дирака

$$\begin{aligned} \not{D}\psi(x) = \\ = \gamma_E^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{8}[\gamma^E_{(a)}\gamma^E_{(b)}] \left(e^{(a)\lambda}\partial_\mu e^{(b)}_\lambda - e^{(b)}_\tau e^{(a)\lambda}\Gamma^{(E)\tau}_{\lambda\mu} \right) \right) \psi(x) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\gamma^E_\mu = e^{(a)}_\mu \gamma^E_{(a)}$ — (евклидовы) искривленные матрицы Дирака; $e^{(b)}_\tau$ — (евклидова) тетрада; $\Gamma^{(E)\tau}_{\lambda\mu}$ — (евклидовы) символы Кристоффеля, построенные для (евклидовой) метрики $g^{\mu\nu}_E$ (3). Для вычисления средних

* В отличие от большинства известных релятивистских фазовых переходов (например, известного перехода, связанного с хиггсовским конденсатом), описываемый нами переход существует даже для свободных полей.

необходимо найти функцию Грина, которая может быть построена из собственных волновых мод квадрата оператора Дирака

$$\not{D}^2\phi(x) = \left[I_4 \left(g_E^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \frac{1}{4\rho^2} \right) - \frac{2\nu}{\rho^2}\Sigma_0\partial_\phi \right] \phi(x) = -\lambda^2\phi(x), \quad (5)$$

где $\Sigma_0 = (i/4)[\gamma_N^{(0)}, \gamma_N^{(3)}]$ — спиновая часть (неевклидова) оператора буста, а I_4 — единичная матрица 4×4. Уравнение (5) имеет два решения — $\phi_q^+(x)$ и $\phi_q^-(x)$, выражающихся через функции Бесселя первого рода

$$\phi_q^\pm(x) = \frac{\sqrt{\nu}}{4\pi^{3/2}} \exp\left(ip_x x + ip_y y + i\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi \right) J_{\pm\beta_{s_1}}(\xi\rho)\, w_{(s_1,s_2)}, \quad (6)$$

где q — набор квантовых чисел, классифицирующих решения, $\beta_{s_1} = \nu(n + (1/2)) - (s_1/2)$,

$$\xi^2 = \lambda^2 - p_x^2 - p_y^2, \quad (7)$$

$w_{(s_1,s_2)}$ — собственные функции (постоянные биспиноры) операторов спинового буста Σ_0 и спинового углового момента Σ_3, $is_1/2 = \pm i/2, s_2/2 = \pm 1/2$ — соответствующие собственные значения (спиновых) буста и углового момента, а n — номер фермионной мацубаровской частоты.

Наиболее существенным является то, что только одно из решений — $\phi_q^+(x)$ и $\phi_q^-(x)$ с положительным показателем функции Бесселя для каждого (n, s_1) конечно на горизонте $g_{00}(\rho = 0) = 0$, так как $J_a(x) \sim x^a$ при $x \to 0$. Именно регулярное решение необходимо выбрать для построения функции Грина и средних. Выше температуры Унру мы выбираем моды $\phi_q^+(x)$ для $n \geqslant 0$ и $\phi_q^-(x)$ для $n < 0$. Вычисляя в конечном счете плотность энергии, получим

$$T > \frac{|a|}{2\pi}: \quad \varepsilon = \frac{7\pi^2 T^4}{60} + \frac{|a|^2 T^2}{24} - \frac{17|a|^4}{960\pi^2}, \quad (8)$$

что соответствует ряду других вычислений в других подходах [8, 9]. Как и следовало ожидать, соотношение (8) удовлетворяет эффекту Унру (2).

Что же будет ниже температуры Унру? При $T < T_U$ моды $\phi^+{}_{(n=0,\, s_1=1)}$ и $\phi^-{}_{(n=-1,\, s_1=-1)}$, которые мы использовали при вычислении (8), становятся сингулярны на горизонте. И наоборот, решения $\phi^-{}_{(n=0,\, s_1=1)}$ и $\phi^+{}_{(n=-1,\, s_1=-1)}$, которые мы ранее отбрасывали, становятся конечны. Моды как бы «проваливаются в черную дыру», и мы должны теперь выбрать другой набор решений для построения квантовых средних.

В результате при $T < T_U$ (но $T > T_U/3$) получим новое значение для плотности энергии

$$\frac{|a|}{6\pi} < T < \frac{|a|}{2\pi}: \quad \varepsilon = \frac{127\pi^2 T^4}{60} - \frac{11|a|^2 T^2}{24} - \frac{17|a|^4}{960\pi^2}.$$

Энергия выше и ниже температуры Унру, таким образом, имеет различный вид, что указывает на фазовый переход.

Замечательным свойством этого фазового перехода является полиномиальность: средние значения плотности энергии выражаются просто через конечные полиномы по температуре и ускорению. Это свойство весьма нетривиально, так как, вообще говоря, свидетельствует о равенстве нулю высших порядков теории возмущений [4, 7, 10, 11], что очень близко к неперенормируемости квантовых аномалий [12]. Однако вид соответствующего полинома меняется при переходе через температуру Унру.

Фазовый переход связан с изменением решения для мод, из-за сингулярности на горизонте (ниже температуры Унру) появляется вклад от мод $\phi^{-}{}_{(n=0,\, s_1=1)}$ и $\phi^{+}{}_{(n=-1,\, s_1=-1)}$, которые стали регулярны. Полиномиальность позволяет наглядно продемонстрировать, что переход относится к фазовым переходам второго рода. Действительно, мы видим, что энергия непрерывна, так как

$$\varepsilon_{T\to T_U+0} = \varepsilon_{T\to T_U-0} = 0, \tag{9}$$

но скачкообразно меняется теплоемкость

$$\left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right|_{T\to T_U+0} = \frac{4\pi T_U^3}{5}, \qquad \left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right|_{T\to T_U-0} = \frac{24\pi T_U^3}{5}, \tag{10}$$

что отвечает именно фазовому переходу второго рода.

Интересный вопрос связан с тем, что считать параметром порядка для данного перехода. Необходимым условием, которым обладает параметр порядка, является его равенство нулю с одной стороны от точки перехода и неравенство нулю с другой. Хорошим кандидатом на роль параметра порядка является след тензора энергии-импульса. Действительно, выше температур Унру имеем

$$T > \frac{|a|}{2\pi}: \quad \langle \widehat{T}^{\beta}_{\beta} \rangle = 0, \tag{11}$$

что и ожидаемо для безмассовых полей в отсутствие гравитационного поля. Однако ниже температуры Унру след уже не равен нулю:

$$\frac{|a|}{6\pi} < T < \frac{|a|}{2\pi}: \quad \langle \widehat{T}^{\beta}_{\beta} \rangle = 2\pi T|a| \left(T^2 - \frac{|a|^2}{4\pi^2} \right). \tag{12}$$

Неравенство нулю следа приводит к тому, что не сохраняется дилатационный ток, т. е. нарушается конформная симметрия. Вопрос о происхождении и смысле данного нарушения симметрии, в частности можно ли его рассматривать как спонтанное нарушение симметрии, соответственно, сопровождающегося появлением голдстоуновского состояния (возможно, связанного с парой фермионных мод, изменивших свое решение), остается открытым.

Примечательно также, что этот переход не является единственным. Действительно, легко увидеть, что подобная картина с сингулярностью мод (6) на горизонте будет повторяться при температурах

$$T_k = \frac{T_U}{2k+1}, \qquad k = 0, 1, 2\ldots \tag{13}$$

Таким образом, можно говорить о целом наборе фазовых переходов. Однако при $k \geqslant 1$ будет происходить скачок энергии, что говорит о том, что последующие переходы являются фазовыми переходами первого рода. При этом в пределе $k \to \infty$ энергия стремится к минус бесконечности, что является указанием на то, что энергия вакуума Риндлера (когда $T \to 0$) на бесконечную отрицательную величину отличается от энергии вакуума Минковского.

2. СЛУЧАЙ КОНЕЧНОЙ МАССЫ

Естественный вопрос связан с тем, насколько общим является описанный переход, т. е. насколько он специфичен для выбранной постановки задачи. Например, очевидно, что для массивных частиц энергия (8) уже не будет иметь полиномиальный вид. Однако будет ли фазовый переход в этом случае?

Ответ на этот вопрос утвердительный. Действительно, в этом случае необходимо добавить член с массой в уравнение Дирака и, соответственно, в уравнение для собственных мод лапласианоподобного оператора, построенного из квадрата оператора Дирака [13]:

$$\not{D}_m \not{D}_{-m}\phi(x) = \left[I_4\left(g_E^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \frac{1}{4\rho^2} - m^2\right) - \frac{2\nu}{\rho^2}\Sigma_0\partial_\varphi\right]\phi(x) = \\ = -\lambda^2\phi(x). \tag{14}$$

В результате собственные моды квадратичного оператора будут иметь тот же вид, что и (6), и масса проявится только в собственном значении λ, а вместо (7) получим

$$\xi^2 = \lambda^2 - p_x^2 - p_y^2 - m^2. \tag{15}$$

Легко увидеть, что моды (6), несмотря на (15), как и при с $m = 0$, попарно становятся сингулярны в точках (1) и (13). Таким образом, как и в случае массивных полей, происходит фазовый переход в этих точках.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обсудили новый фазовый переход, который происходит в ускоренной среде безмассовых и массивных полей Дирака. Этот переход происходит, когда температура становится ниже температуры Унру, и связан с сингулярностью низших мацубаровских мод на горизонте. Он относится к фазовым переходам второго рода, а в качестве параметра порядка можно использовать след тензора энергии-импульса, который становится ненулевым ниже температуры Унру. Также существует целый набор подобных переходов при еще более низких температурах.

Представляет интерес рассмотрение данного перехода в самосогласованной задаче с учетом обратного влияния на геометрию. А именно, представляет интерес исследование влияния обнаруженного сингулярного поведения мод на горизонте в случае возможного аналогичного перехода в пространстве черной дыры на стабильность черной дыры.

Работа В. И. Захарова выполнена при частичной поддержке Минобрнауки России (грант № 0657-2020-0015).

Работа Г. Ю. Прохорова выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 24-22-00124).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Unruh W. G.* Notes on Black Hole Evaporation // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 870.
2. *Bunney C. R. D., Parry L., Perche T. R., Louko J.* Ambient Temperature versus Ambient Acceleration in the Circular Motion Unruh Effect. arXiv:2310.05700. 2023.
3. *Becattini F.* Thermodynamic Equilibrium with Acceleration and the Unruh Effect // Phys. Rev. D. 2018. V. 97, No. 8. P. 085013; arXiv:1712.08031.
4. *Prokhorov G. Yu., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Unruh Effect Universality: Emergent Conical Geometry from Density Operator // JHEP. 2020. V. 03. P. 137; arXiv:1911.04545.
5. *Prokhorov G. Yu., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Novel Phase Transition at the Unruh Temperature. arXiv:2304.13151. 2023.
6. *Becattini F.* Thermodynamic Equilibrium in Relativity: Four-Temperature, Killing Vectors and Lie Derivatives // Acta Phys. Polon. B. 2016. V. 47. P. 1819; arXiv:1606.06605.
7. *Prokhorov G. Yu., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Thermodynamics of Accelerated Fermion Gases and Their Instability at the Unruh Temperature // Phys. Rev. D. 2019. V. 100, No. 12. P. 125009; arXiv:1906.03529.
8. *Dowker J. S.* Remarks on Geometric Entropy // Class. Quant. Grav. 1994. V. 11. P. L55–L60; arXiv:hep-th/9401159.
9. *Prokhorov G. Yu., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Unruh Effect for Fermions from the Zubarev Density Operator // Phys. Rev. D. 2019. V. 99, No. 7. P. 071901(R); arXiv:1903.09697.
10. *Buzzegoli M., Grossi E., Becattini F.* General Equilibrium Second-Order Hydrodynamic Coefficients for Free Quantum Fields // JHEP. 2017. V. 10. P. 091; Erratum // JHEP. 2018. V. 07. P. 119; arXiv:1704.02808.
11. *Stone M., Kim J.* Mixed Anomalies: Chiral Vortical Effect and the Sommerfeld Expansion // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 2. P. 025012; arXiv:1804.08668.
12. *Adler S. L., Bardeen W. A.* Absence of Higher Order Corrections in the Anomalous Axial Vector Divergence Equation // Phys. Rev. 1969. V. 182. P. 1517–1536.
13. *Bezerra V. B., Khusnutdinov N. R.* Vacuum Expectation Value of the Spinor Massive Field in the Cosmic String Space-Time // Class. Quant. Grav. 2006. V. 23. P. 3449–3462; arXiv:hep-th/0602048.