

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970
VOL.32
PART 2
Six issues per year

DUBNA 2001

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года
ТОМ 32
ВЫПУСК 2
Выходит 6 раз в год

ДУБНА 2001

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

(зам. главного редактора),

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

О.Н.КРОХИН,

[Р.М.ЛЕБЕДЕВ],

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГҮЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Зав. редакцией А.Н.Графова,

тел. (09621) 6-26-58;

E-mail address: pepan@jinr.ru

ОИЯИ, «Физика элементарных частиц
и атомного ядра», 2001

УДК 539.149

СУПЕРСИММЕТРИЯ В СТРУКТУРЕ ЯДЕР

*P.B.Джолос**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Сделан обзор результатов применения идей суперсимметрии в теории структуры ядер. Приведены примеры спектров возбужденных состояний четно-четных и соседних нечетных ядер, иллюстрирующие приближенную суперсимметрию. Рассмотрен пример суперсимметричного гамильтониана ядра, основанного на градиуированной алгебре $U(1/2)$, и сделан сравнительный анализ алгебраической структуры этой модели ядра и суперсимметричной модели квантовой теории поля. Приведен пример гамильтониана, часть собственных состояний которого, относящихся к четно-четным и соседним нечетным ядрам, характеризуется тождественными энергиями гамма-переходов, хотя этот гамильтониан не принадлежит ни к одному из известных пределов динамических симметрий. Показано, что описание некоторых ротационных полос в соседних четно-четных и нечетных ядрах в рамках модели частица—ротор может быть переформулировано как реализация частичной суперсимметрии.

The results of the applications of the supersymmetry ideas in nuclear structure are reviewed. The spectra of the excited states of the even-even and odd nuclei, which illustrate an approximate supersymmetry, are shown. The example of the supersymmetric nuclear Hamiltonian based on the $U(1/2)$ graded algebra is considered and a comparison of the algebraic structure of this model and of one of the quantum field theory supersymmetric models is made. The Hamiltonian is constructed, a part of whose eigenstates belonging to the even-even and odd neighboring nuclei has identical gamma-transition energies, although this Hamiltonian does not have dynamical symmetry. It is shown that description in the framework of the particle—rotor model of some rotational bands in the neighboring even-even and odd nuclei can be reformulated as a realization of the partial supersymmetry.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы идеи суперсимметрии стали предметом широкого обсуждения и последующего применения в различных областях физики. Суперсимметрия имеет долгую и интересную историю. Впервые она была введена в рассмотрение в квантовой теории поля [1–6], однако идеи суперсимметрии нашли интенсивное применение в теории ядерной структуры. Было показано, что объединенные алгебры бозонов и фермионов особенно полезны при описании свойств нечетных ядер: как спектров низколежащих возбужденных состояний, так и вероятностей электромагнитных переходов и соотношений между сечениями реакций однонуклонных передач. Кроме того,

*E-mail: jolos@thsun1.jinr.ru

была предпринята попытка классификации, в которой свойства нескольких ядер, включая четно-четные и нечетные, описывались одним и тем же эффективным гамильтонианом с теми же самыми параметрами, и были получены весьма интересные результаты [7–19].

Однако формальные методы, использованные для введения суперсимметрии в теорию структуры ядра и в физику частиц, различны. Это делает сопоставление подходов более трудным и ограничивает использование примеров, найденных в ядерной физике. Поэтому одна из целей данного обзора — сделать сравнительный анализ этих подходов. С одной стороны, это может способствовать проникновению в теорию структуры ядра тех математических разработок, которые имеются в квантовой теории поля. С другой стороны, это сделает более известными те примеры суперсимметрии, которые есть в ядерной физике. Именно в спектрах возбуждения четно-четных и нечетных ядер были обнаружены группы возбужденных состояний, характеризующиеся близкими по величине энергетическими интервалами, т.е. близкими энергиями гамма-переходов. Фактически, это единственные примеры проявления суперсимметрии в физике ядра и частиц.

Суперсимметрия предполагает совпадение масс частиц, бозонов и фермionов, или же спектров возбуждения бозонной и фермionной систем. В ядерной физике, говоря о суперсимметрии, надо иметь в виду, что четно-четные ядра, имеющие целочисленные угловые моменты стационарных состояний, являются бозонными системами, а нечетные ядра, с полуцелыми значениями угловых моментов собственных состояний — фермionными системами. Есть несколько примеров, когда спектры низколежащих возбужденных состояний четно-четных и соседних нечетных ядер совпадают с достаточно хорошей точностью, или же совпадают энергетические интервалы между какими-то определенными состояниями: например, энергии переходов в квазиротационных полосах, построенных на некоторых состояниях в четно-четных и соседних нечетных ядрах. При этом анализ показывает, что случай слабой связи нечетной частицы с четно-четным остовом не реализуется. Это видно из того, что не все возможные с геометрической точки зрения члены мультиплета, образуемого в результате связи нечетной частицы, имеющей угловой момент j , с четно-четным остовом в состоянии с угловым моментом I , наблюдаются при той же энергии возбуждения, что и состояние остова, как это должно быть в случае слабой связи.

Есть и примеры несколько иного рода, когда угловые моменты состояний нечетного ядра можно интерпретировать как результат векторной связи углового момента четно-четного остова, который продолжает оставаться хорошим квантовым числом и в нечетном ядре, со спином (псевдоспином) нечетной частицы, хотя спектры возбуждения соседних четно-четных и нечетных ядер и не совпадают. В этом случае говорят о динамической суперсимметрии, когда дополнительное взаимодействие, не изменяющее волновых функций, изме-

няет энергетические интервалы между уровнями нечетного ядра по сравнению с соответствующими интервалами в четно-четном ядре.

В основном по этой причине в теории структуры ядра главное внимание уделялось построению гамильтонианов, демонстрирующих динамическую суперсимметрию. Такие гамильтонианы можно представлять в виде суммы операторов Казимира для соответствующей цепочки подгрупп базисной бозон-фермионной группы. Это были феноменологические гамильтонианы. Параметры таких гамильтонианов, число которых значительно меньше, чем экспериментальных данных, фиксировались так, чтобы одновременно описывать как четно-четные, так и нечетные ядра.

Симметрия является очень важной концепцией в физике вообще и в ядерной физике в частности. В конечных многочастичных системах она проявляется как инвариантность относительно обращения времени, отражения пространственных координат, вращения, но также и как внутренняя симметрия, связанная со структурой системы и характером взаимодействия ее элементов. Среди мезоскопических систем атомные ядра формируют, возможно, наилучшую основу для апробирования концепций симметрий, благодаря большому объему детальной спектроскопической информации, накопленной к настоящему времени. Концепция динамических симметрий играет важную роль в интерпретации свойств атомных ядер. Эта концепция базируется на предположении о существовании какой-то первичной симметрии с соответствующей ассоциированной алгеброй операторов, такой, что гамильтониан системы может быть выражен в терминах операторов этой алгебры. Однако в гамильтониане эта симметрия редуцируется до симметрии более низкого уровня (например, симметрии относительно вращения пространственных координат). Таким способом генерируется энергетический спектр возбужденных состояний системы. По этой причине динамические алгебры часто называют алгебрами, генерирующими спектр. Простейшим примером редукции симметрии может служить включение в ротационно-инвариантный гамильтониан взаимодействия с внешним магнитным полем фиксированной ориентации. В результате ротационная инвариантность гамильтониана нарушается, но угловой момент и его проекция на ось симметрии продолжают оставаться хорошими квантовыми числами. Собственные значения гамильтониана становятся функциями не только полного углового момента, но и его проекции. Вырожденный мультиплет состояний с одним и тем же полным угловым моментом расщепляется, тем самым генерируется спектр.

Атомные ядра характеризуются прежде всего числом протонов Z и нейтронов N . Соответственно различают четно-четные ядра (Z и N — четные числа), нечетные ядра (Z — четное, N — нечетное число, или наоборот) и нечетно-нечетные ядра (Z и N — нечетные числа). Собственные состояния соседних четно-четных ядер характеризуются целочисленными значениями углового момента. Возбужденные состояния — это двух-, четырех- и т.д. ква-

зичастичные состояния. Наиболее важные из них, оказывающие определяющее влияние на структуру атомных ядер, — это коллективные возбуждения. Поскольку коллективные возбуждения являются суперпозицией большого числа двухквазичастичных возбуждений, они могут многократно повторяться подобно бозонам. Поэтому для их описания используется алгебра бозонных операторов. Примером может служить модель взаимодействующих бозонов, гамильтониан которой строится с помощью операторов монопольных и квадрупольных бозонов. Если ввести общее, не зависящее от мультипольности обозначение для бозонных операторов b_α^+ (оператор рождения бозона) и b_α (оператор уничтожения бозона), то преобразование одного коллективного состояния ядра в другое осуществляется с помощью генераторов $b_\alpha^+ b_\beta$. Здесь α, β — наборы квантовых чисел, характеризующих бозонное состояние.

При рассмотрении нечетных ядер необходимо явно вводить операторы рождения a_s^+ и уничтожения a_s фермионов, необходимые для описания нечетной частицы. Фермионные операторы необходимы также и для описания неколлективных возбуждений четно-четных ядер. Переходы между состояниями нечетного ядра описываются, наряду с операторами $b_\alpha^+ b_\beta$, еще и операторами $a_s^+ a_t$. Можно ввести в рассмотрение матрицу операторов, связывающих состояния четно-четных и состояния нечетных ядер:

$$\begin{pmatrix} b^+ b & 0 \\ 0 & a^+ a \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эти операторы позволяют рассматривать отдельно четно-четные и нечетные ядра. Однако, благодаря тому, что сейчас уже экспериментально исследовано большое число как четных, так и нечетных ядер, было бы интересно найти такую классификацию состояний ядер, в которой четно-четные и нечетные ядра рассматривались бы одновременно. Так как одни из этих ядер содержат четное число нуклонов, а другие — нечетное число нуклонов, то математические построения, необходимые для описания обоих типов ядер, должны включать операторы, изменяющие числа бозонов и фермионов:

$$a_s^+ b_\alpha, \quad b_\alpha^+ a_s. \quad (2)$$

Соответствующие математические конструкции называются градуированными алгебрами. Матрица, включающая все эти операторы, имеет вид

$$\begin{pmatrix} b^+ b & b^+ a \\ a^+ b & a^+ a \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Операторы $b^+ b$ и $a^+ a$ формируют ту или иную классическую алгебру Ли, замкнутую относительно коммутационных соотношений. Операторы, образующие матрицу (3), уже не образуют классической алгебры Ли. Для того

чтобы построить из них замкнутую алгебраическую структуру, необходимо ввести в рассмотрение, наряду с коммутаторами, также и антисимметрии. Результирующая алгебра называется градуированной алгеброй или супералгеброй. Схематично коммутационные и антисимметрические соотношения между операторами (3) имеют следующий вид:

$$[b^+b, b^+b]_- = b^+b, \quad (4)$$

$$[a^+a, a^+a]_- = a^+a, \quad (5)$$

$$\{a^+b, b^+a\}_+ = a^+a - b^+b, \quad (6)$$

$$[a^+b, b^+b]_- = a^+b, \quad (7)$$

$$[a^+b, a^+a]_- = -a^+b. \quad (8)$$

Гамильтониан ядра строится в виде комбинации членов, линейных и квадратичных по операторам (3). Гамильтониан может коммутировать с некоторыми из операторов b^+b или a^+a . В этом случае говорят об инвариантности гамильтониана относительно тех или иных преобразований. Мы говорим также о симметрии относительно того или иного преобразования. Инвариантность означает, что есть набор собственных состояний ядра, имеющих одну и ту же энергию. Например, ротационная инвариантность гамильтониана означает, что состояния ядра с одним и тем же угловым моментом, но с разными значениями его проекции, характеризуются одним и тем же значением энергии возбуждения.

Как уже отмечалось выше, операторы типа a^+b принадлежат не классической алгебре Ли, а супералгебре. По аналогии в случае, если гамильтониан коммутирует с оператором типа a^+b , говорят о суперсимметрии гамильтониана. Так как оператор a^+b переводит состояния четно-четного ядра в состояния нечетного ядра, то суперсимметрия гамильтониана означает, что энергии состояний четно-четного и нечетного ядер совпадают. Поскольку в теории структуры ядер гамильтониан описывает только энергию возбуждения, то в случае суперсимметрии речь идет о совпадении энергий возбуждения четно-четных и нечетных ядер.

В дальнейшем обзор построен следующим образом. В разд. 2 приведены и обсуждаются примеры спектров состояний четно-четных и нечетных ядер, иллюстрирующих приближенную суперсимметрию. В разд. 3 кратко излагается аппарат модели взаимодействующих бозонов. В разд. 4 излагается аппарат модели взаимодействующих бозонов и фермионов. Разд. 5 посвящен формальному сравнению схем реализации идей суперсимметрии в теории структуры ядра и в квантовой теории поля. В разд. 6 рассматривается пример $U(1/2)$ -суперсимметрии в ядрах. В разд. 7 анализируется суперсимметрия в модели частица — ротор. Основные результаты обзора просуммированы в заключении.

2. СУПЕРСИММЕТРИЯ И СПЕКТРЫ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР

Прежде чем перейти к изложению теоретических результатов, полученных при исследовании проявлений суперсимметрии в спектрах атомных ядер, рассмотрим имеющиеся экспериментальные данные. Ниже приведены примеры спектров состояний четно-четных и нечетных ядер, относящихся к областям сферических, переходных, деформированных и супердеформированных ядер. Что можно было бы ожидать, исходя из общих соображений? Спектр низколежащих состояний ядер, удаленных от магических, определяется коллективными состояниями. При переходе от четно-четного к нечетному ядру к первому добавляется квазичастица. В простейшем случае, если она не взаимодействует с коллективными состояниями четно-четного остова, мы получаем модель невзаимодействующих квазичастицы и остова. Энергии гамма-переходов между состояниями четно-четного и нечетного ядер будут совпадать по тривиальной причине — отсутствие взаимодействия. При той же энергии, что и у состояния четно-четного ядра с угловым моментом I , мы будем иметь вырожденный мультиплет состояний с угловыми моментами $J = |I - j|, |I - j| + 1, \dots, I + j$, где j — угловой момент квазичастицы. Однако такая упрощенная картина не реализуется в ядрах. Даже если взаимодействие квазичастицы с остовом слабое, ее присутствие приводит к поляризации остова, что выражается, например, в «сжатии» спектра нечетного ядра. В случае деформированных ядер это проявляется в увеличении момента инерции нечетного ядра. Примером такой ситуации являются ядра ^{102}Ru и ^{103}Rh . Спектры низколежащих возбужденных состояний этих ядер приведены на рис. 1 [7]. Спектр ^{103}Rh выглядит как результат связи нечетного протона в состоянии $p_{1/2}$ с ядром ^{102}Ru . Другие одночастичные состояния отрицательной четности $p_{3/2}$ и $f_{5/2}$ удалены от $p_{1/2}$ на 1 МэВ и более. Видно, что спектр низколежащих состояний отрицательной четности состоит из дублетов: $3/2^-$ и $5/2^-$ при энергиях возбуждения 295 и 357 кэВ, $7/2^-$ и $9/2^-$ при энергиях 848 и 920 кэВ. Центр тяжести первого дублета близок к энергии возбуждения первого 2^+ -состояния ^{102}Ru 475 кэВ, а центр тяжести второго дублета близок к энергии возбуждения первого 4^+ -состояния ^{102}Ru 1106 кэВ. Коэффициент сжатия спектра ^{103}Rh относительно спектра ^{102}Ru составляет 0,7–0,8 и приближается к единице с ростом энергии возбуждения. Состояние $1/2^-$ при энергии возбуждения 803 кэВ соответствует $p_{1/2} \otimes 0_2^+$ (944 кэВ).

Следующим примером спектра нечетного ядра, который можно интерпретировать как результат связи нечетной частицы с $j^\pi = 1/2^-$ с низколежащими состояниями четно-четного остова, является ^{195}Pt (рис. 2) [20]. На рис. 2 приведены не все низколежащие возбужденные состояния ^{195}Pt , а только те из них, которые формируют дублеты на основе коллективных состояний ^{194}Pt . Расщепление дублетов в ^{195}Pt заметно меньше, чем в ^{103}Rh ,

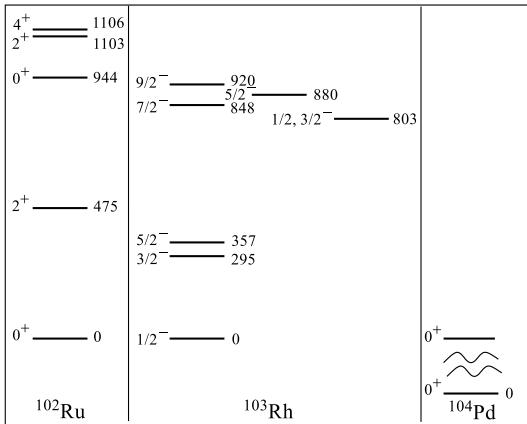


Рис. 1. Пример $U(6/2)$ -суперсимметрии в ядрах. Показана часть экспериментального спектра изотопов ^{102}Ru , ^{103}Rh и ^{104}Pd , образующих супермультиплет [7]. Энергии указаны в кэВ. Двухквазичастичные состояния в ^{104}Pd не идентифицированы. Возможным кандидатом на место нижайшего возбужденного состояния ^{104}Pd , принадлежащего супермультиплету, является 0^+ (1793 кэВ)-уровень, наблюдавшийся при β^- -распаде ^{104}Rh с $\log ft = 5,5$

SUSY	Экспер.	Экспер.	Расчет
$9/2^-$	4_1^+ — 812	$9/2^-$ — 667	$9/2^-$ — 654
$7/2^-$		$7/2^-$ — 612	$7/2^-$ — 608
$5/2^-$	2_2^+ — 622	$5/2^-$ — 544	$5/2^-$ — 495
$3/2^-$		$3/2^-$ — 525	$3/2^-$ — 470
$5/2^-$	2_1^+ — 328	$5/2^-$ — 239	$5/2^-$ — 266
$3/2^-$		$3/2^-$ — 212	$3/2^-$ — 241
$1/2^-$	0^+ — 0	$1/2^-$ — 0	$1/2^-$ — 0
	^{194}Pt	^{195}Pt	^{195}Pt

Рис. 2. Экспериментальный спектр низколежащих состояний ^{194}Pt и экспериментальный и теоретический спектры тех состояний ^{195}Pt , которые образуют супермультиплет вместе с приведенными на рисунке состояниями ^{194}Pt . Предсказания модели, основанной на точной суперсимметрии, приведены в левой колонке. Рассчитанный спектр ^{195}Pt получен в предположении, что собственные значения гамильтониана (116) для четно-четного изотопа ^{194}Pt совпадают с соответствующими экспериментальными энергиями. Результат расчета, выполненного с учетом сжатия спектра ^{195}Pt относительно ^{194}Pt и псевдоспин-орбитального расщепления дублетов, показан на рисунке справа

Экспер.	Экспер.	Расчет
(16^+) ————— 3209	$33/2^-$ ————— 3001 $31/2^-$ ————— 2969	$33/2^-$ ————— 2946 $31/2^-$ ————— 2893
(14^+) ————— 2598	$29/2^-$ ————— 2392 $27/2^-$ ————— 2358	$29/2^-$ ————— 2387 $27/2^-$ ————— 2340
(12^+) ————— 2020	$25/2^-$ ————— 1832 $23/2^-$ ————— 1796	$25/2^-$ ————— 1857 $23/2^-$ ————— 1817
(10^+) ————— 1486	$21/2^-$ ————— 1330 $19/2^-$ ————— 1294	$21/2^-$ ————— 1368 $19/2^-$ ————— 1335
8^+ ————— 1010	$17/2^-$ ————— 894 $15/2^-$ ————— 862	$17/2^-$ ————— 932 $15/2^-$ ————— 905
6^+ ————— 608	$13/2^-$ ————— 536 $11/2^-$ ————— 508	$13/2^-$ ————— 563 $11/2^-$ ————— 542
4^+ ————— 297	$7/2^-$ ————— 262 $5/2^-$ ————— 242 $3/2^-$ ————— 81 $1/2^-$ ————— 0	$7/2^-$ ————— 277 $5/2^-$ ————— 262 $3/2^-$ ————— 86 $1/2^-$ ————— 78
2^+ ————— 91		
0^+ ————— 0		
^{174}Hf	^{173}Hf	^{173}Hf

Рис. 3. Состояния основной полосы ^{174}Hf и те экспериментальные и рассчитанные уровни ^{173}Hf , которые формируют супермультиплет вместе с уровнями основной полосы ^{174}Hf . Энергии указаны в кэВ

но коэффициент сжатия спектра относительно соседнего четно-четного ядра такой же, как и в случае ^{103}Rh . В ядрах области Pt одночастичные уровни отрицательной четности $p_{1/2}$, $p_{3/2}$ и $f_{5/2}$ достаточно близки по энергии. Это подтверждается как экспериментальными данными по реакциям однонуклонных передач [21], так и присутствием других уровней отрицательной четности при небольших энергиях возбуждения в ^{195}Pt . Поэтому в этом случае уже нельзя говорить о слабой связи нечетной частицы и остова. В изотопах Pt суперсимметрия имеет более глубокие причины.

На рис. 3 и 4 [22–26] приведены спектры ротационных полос, основанных на состояниях с отрицательной четностью в деформированных или близких к деформированным ядрах. Основанием полос во всех случаях является состояние $1/2^-$. Видно, что полосы состоят из весьма слабо расщепленных дублетов, центр тяжести которых близок по энергии к соответствующим уровням соседних четно-четных ядер. Коэффициент сжатия спектра, например, в ^{173}Hf , составляет в среднем 0,9.

	Экспер.	Экспер.	Расчет
16^+	3459		
14^+	2831	$(33/2^-)$ 3147 $(31/2^-)$ 3067	$(33/2^-)$ 2874 $(31/2^-)$ 2795
12^+	2241	$29/2^-$ 2521 $27/2^-$ 2465	$29/2^-$ 2355 $27/2^-$ 2285
10^+	1698	$25/2^-$ 1960 $23/2^-$ 1906	$25/2^-$ 1867 $23/2^-$ 1807
8^+	1205	$21/2^-$ 1445 $19/2^-$ 1397	$21/2^-$ 1446 $19/2^-$ 1366
6^+	774	$17/2^-$ 990 $15/2^-$ 949	$17/2^-$ 1007 $15/2^-$ 966
4^+	419	$13/2^-$ 604 $11/2^-$ 573	$13/2^-$ 649 $11/2^-$ 618
2^+	155	$9/2^-$ 301 $7/2^-$ 278	$9/2^-$ 354 $7/2^-$ 332
0^+	0	$5/2^-$ 94 $3/2^-$ 79	$5/2^-$ 132 $3/2^-$ 120
		$1/2^-$ 0	$1/2^-$ 0
^{182}Pt		^{181}Pt	^{181}Pt

Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для изотопов $^{181,182}\text{Pt}$

На рис. 5 и 6 [27] показаны уровни так называемых тождественных супердеформированных ротационных полос. Видно, что энергии гамма-переходов в четно-четном и соседнем нечетном ядрах совпадают с точностью до нескольких кэВ. К сожалению, в случае супердеформированных полос угловые моменты состояний, как правило, неизвестны или известны лишь ориентировочно. Не установлены надежно и четности состояний. Кроме того, не зафиксированы партнеры по сигнатуре, так что нельзя говорить о дублетах.

Тождественные ротационные полосы среди супердеформированных состояний — это исключительно интересное явление, обнаруженное в последнее десятилетие. Обнаружение в разных ядрах длинных цепочек гамма-переходов с одинаковыми энергиями было совершенно неожиданно. Наоборот, в течение более чем 50 лет предполагалось, что энергетический спектр однозначно характеризует ядро. Впервые тождественные ротационные полосы были обнаружены в ^{151}Tb и ^{152}Dy [28]. Совпадение с точностью до нескольких кэВ энергий гамма-переходов между уровнями ротационных полос разных ядер означает совпадение с точностью до нескольких десятых процента моментов инерции этих двух полос. Это заметно меньше, чем ожидаемое изменение порядка 1 % твердотельного момента инерции, обусловленное из-

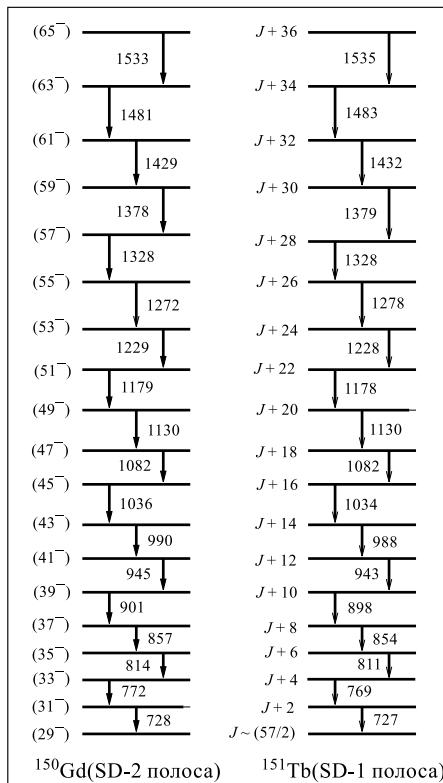


Рис. 5. Экспериментальные спектры тождественных супердеформированных полос ^{150}Gd и ^{151}Tb . Энергии указаны в кэВ

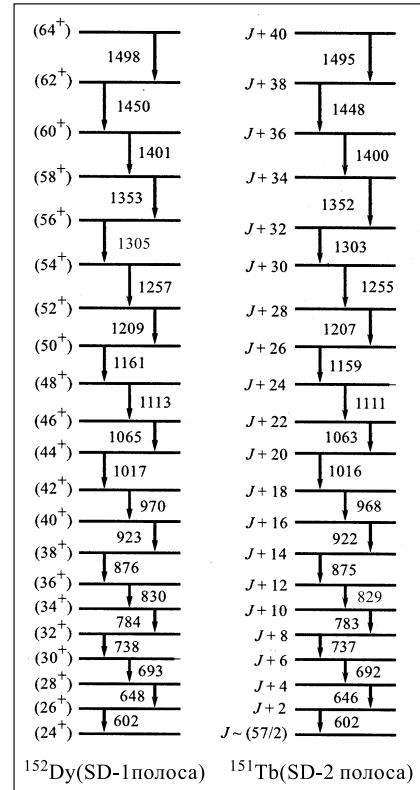


Рис. 6. Экспериментальные спектры тождественных супердеформированных полос ^{152}Dy и ^{151}Tb . Энергии указаны в кэВ

менением массы ядер. Позднее несколько других тождественных полос были найдены среди супердеформированных полос в области Dy и Hg. Несмотря на отсутствие полной экспериментальной информации представляется весьма захватывающим рассматривать тождественные супердеформированные полосы как пример проявления суперсимметрии в ядерных спектрах. Мы остановимся на этом вопросе подробнее в разд. 7.

Как видно из рис. 1–4, во всех случаях, когда энергии переходов в нечетных ядрах близки к энергиям переходов в четно-четных ядрах, основаниями полос являются состояния $1/2^-$, а возбужденные уровни полосы представляют собой слаборасщепленные дублеты: $(3/2^-, 5/2^-)$, $(7/2^-, 9/2^-)$ и т.д. Этот факт будет обсуждаться в последующих разделах.

3. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ

Анализ явления суперсимметрии в ядерной физике связан со сравнением спектров возбужденных состояний как нечетных, так и четно-четных ядер. При этом интерес представляют только низколежащие коллективные возбуждения четно-четных ядер. Для их описания была разработана модель взаимодействующих бозонов. Хотя эта модель достаточно подробно рассмотрена в литературе, мы посвятим данный раздел ее краткому описанию, с тем чтобы обзор содержал всю необходимую исходную информацию.

Модель взаимодействующих бозонов (МВБ) является приближением к описанию четно-четных ядер в рамках оболочечной модели ядра. Конфигурационное пространство состояний ядер, используемое в МВБ, составляет лишь небольшую часть конфигурационного пространства оболочечной модели, хотя и наиболее важную часть. Оно строится при помощи квадрупольных (d) и монопольных (s) бозонов, которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[d_\mu, d_\nu^+] = \delta_{\mu\nu}, \quad [d_\mu, d_\nu] = 0, \quad (9)$$

$$[s, s^+] = 1, \quad [s, d_\mu] = [s, d_\mu^+] = 0. \quad (10)$$

Здесь индексы μ, ν принимают значения $-2, -1, 0, 1, 2$. Таким образом, базисные векторы состояний могут быть охарактеризованы полным числом бозонов N , равным сумме чисел s - и d -бозонов, и числом d -бозонов. Рассмотрим набор билинейных комбинаций бозонных операторов

$$d_\mu^+ d_\mu, \quad d_\mu^+ s, \quad s^+ d_\mu, \quad s^+ s. \quad (11)$$

Всего в этом наборе 36 операторов. Коммутатор любых двух операторов из набора (11) является оператором из того же набора. Таким образом, 36 операторов (11) образуют алгебру. Это унитарная алгебра в шестимерном пространстве $U(6)$. Коллективный гамильтониан ядра может быть построен как сумма членов, линейных и квадратичных относительно операторов из (11), являющихся ротационными инвариантами.

Для построения базиса состояний, необходимого для диагонализации гамильтониана и классификации состояний, нужно выявить все подалгебры алгебры $U(6)$, т.е. все поднаборы операторов из (11), замкнутые относительно коммутационных соотношений. Это означает, что если операторы X и Y принадлежат такому поднабору, то их коммутатор $[X, Y]$ также принадлежит этому поднабору. Для использования в ядерной спектроскопии важно, чтобы эти цепочки подалгебр алгебры $U(6)$ включали $O(3)$ — алгебру трехмерных вращений, поскольку угловой момент является характеристикой состояний ядра.

Одну из подалгебр $U(6)$ образуют 25 операторов $d_\mu^+ d_\nu$. Это алгебра $U(5)$. Среди операторов этой алгебры 10 операторов

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 1\nu}^{2\mu'} d_\mu^+ d_{\mu'}, \quad \nu = -1, 0, 1 \quad (12)$$

и

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 3\nu}^{2\mu'} d_\mu^+ d_{\mu'}, \quad \nu = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \quad (13)$$

образуют подалгебру $U(5)$ — группу ортогональных преобразований в пятимерном пространстве $O(5)$. Три оператора (12) образуют подалгебру $O(5)$. Это алгебра $O(3)$. И, наконец, оператор

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 10}^{2\mu} d_\mu^+ d_\mu \quad (14)$$

генерирует алгебру $O(2)$ вращений вокруг оси z . Таким образом, мы получили первую из возможных цепочек подалгебр $U(6)$:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2). \quad (15)$$

Следующую цепочку подалгебр получить труднее, так как она включает линейные комбинации операторов из (11). Рассмотрим операторы

$$s^+ s + \sum_\mu d_\mu^+ d_\mu, \quad (16)$$

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 1\nu}^{2\mu'} d_\mu^+ d_{\mu'}, \quad (17)$$

$$d_\nu^+ s + s^+ (-1)^\nu d_{-\nu} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 2\mu'}^{2\nu} d_\mu^+ (-1)^{\mu'} d_{-\mu'}. \quad (18)$$

Используя коммутационные соотношения (9), (10), можно показать, что 9 операторов (16)–(18) формируют подалгебру. Это алгебра $U(3)$. Это утверждение справедливо для обоих знаков \pm в (18). Оператор (18) связан с квадрупольной деформацией ядра. Оператор (17) является оператором углового момента, а оператор (16) — оператором полного числа бозонов \hat{N} . Так как в МВБ полное число бозонов полагается равным половине числа валентных нуклонов, то N сохраняется. По этой причине удобнее рассматривать

не алгебру $U(3)$, а алгебру, которая не содержит оператор \hat{N} . Она состоит из восьми операторов (17), (18). Это алгебра $SU(3)$ — алгебра специальных унитарных преобразований в трех измерениях. Подалгебрами $SU(3)$ являются $O(3)$ и $O(2)$. Таким образом, вторая возможная цепочка подалгебр имеет вид

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2). \quad (19)$$

Рассмотрим теперь следующие 15 операторов:

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 1\nu}^{2\mu'} d_\mu^+ d_{\mu'}, \quad (20)$$

$$\sum_{\mu, \mu'} C_{2\mu 3\nu}^{2\mu'} d_\mu^+ d_{\mu'} \quad (21)$$

и

$$d_\mu^+ s + s^+ (-1)^\mu d_\mu. \quad (22)$$

Эти операторы образуют алгебру $O(6)$ — алгебру ортогональных преобразований в шестимерном пространстве. Без операторов (22) оставшиеся 10 операторов образуют, как и выше, алгебру $O(5)$, подалгебрами которой являются $O(3)$ и $O(2)$. Таким образом, третья цепочка подалгебр имеет вид

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2). \quad (23)$$

Можно показать, что цепочки подалгебр (15), (19) и (23) являются единственными возможными цепочками подалгебр, если мы хотим, чтобы алгебра трехмерных вращений $O(3)$ была включена в эти цепочки как подалгебра.

В заключение приведем все полученные цепочки подалгебр [29]:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{I}), \quad (24)$$

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{II}), \quad (25)$$

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2) \quad (\text{III}). \quad (26)$$

Перейдем к рассмотрению гамильтониана, который может быть построен в рамках модели взаимодействующих бозонов. В общем случае гамильтониан модели может быть диагонализован только численно. Однако есть несколько специальных случаев, когда решение может быть получено аналитически.

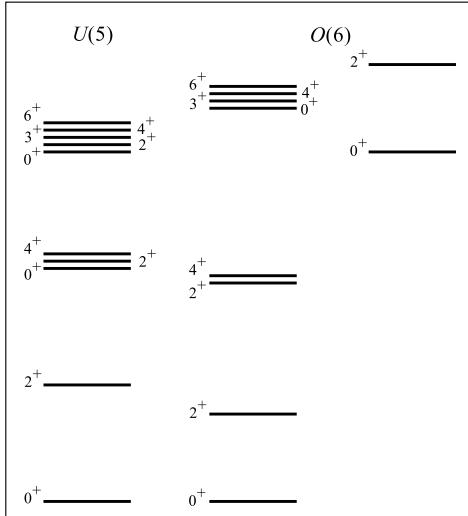


Рис. 7. Типичные спектры возбужденных состояний системы с $U(5)$ и $O(6)$ динамическими симметриями (редукционные цепочки I и III соответственно)

Это случаи динамических симметрий, которые играют важную роль в МВБ. Они возникают, когда гамильтониан может быть записан в виде линейной комбинации операторов Казимира одной из цепочек подалгебр, приведенных в (24)–(26). Так как операторы Казимира диагональны в заданной цепочке, их собственные значения определяют собственные значения гамильтониана.

Гамильтониан модели взаимодействующих бозонов наиболее общего вида, включающий и постоянные для данного ядра члены, влияющие только на энергию основного состояния, но не на спектр возбуждения, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H = & e_0 + e_1 C_1(U(6)) + e_2 C_2(U(6)) + e_3 C_1(U(5)) + \\
 & + e_4 C_2(U(5)) + e_5 C_2(O(5)) + e_6 C_2(O(3)) + \\
 & + e_7 C_2(SU(3)) + e_8 C_2(O(6)),
 \end{aligned} \tag{27}$$

где $C_1(\dots)$ и $C_2(\dots)$ являются линейными и квадратичными, соответственно, операторами Казимира групп, указанных в скобках. Этот гамильтониан можно диагонализовать только численно, так как одни из операторов Казимира в (27) диагональны в одной цепочке подгрупп, другие — в другой. Приведем выражения для собственных значений операторов Казимира, используя квантовые числа цепочек подгрупп:

$$C_1(U(6)) = N, \tag{28}$$

$$C_2(U(6)) = N(N+5), \tag{29}$$

$$C_1(U(5)) = n_d, \tag{30}$$

$$C_2(U(5)) = n_d(n_d+4), \tag{31}$$

где N — полное число бозонов, а n_d — число квадрупольных (d) бозонов. Они принимают следующие значения:

$$N = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

$$n_d = 0, 1, 2, \dots, N - 1, N, \quad (33)$$

$$C_2(O(6)) = 2\sigma(\sigma + 4), \quad (34)$$

$$C_2(O(5)) = 2\tau(\tau + 3), \quad (35)$$

$$C_2(O(3)) = 2L(L + 1), \quad (36)$$

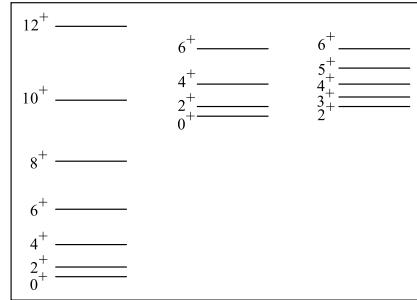


Рис. 8. Типичные спектры возбужденных состояний системы с $SU(3)$ динамической симметрией (редукционная цепочка II)

$$C_2(SU(3)) = \frac{2}{3}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu), \quad (37)$$

где L — угловой момент,

$$\sigma = N, N - 2, \dots, 1 \text{ или } 0. \quad (38)$$

В редукционной цепочке I

$$\tau = n_d, n_d - 2, \dots, 1 \text{ или } 0. \quad (39)$$

В редукционной цепочке III

$$\tau = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1, 0. \quad (40)$$

Квантовые числа λ и μ принимают значения

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu) = & (2N, 0), (2N - 4, 2), (2N - 8, 4), \dots \\ & (2N - 6, 0), (2N - 10, 2), \dots \\ & (2N - 12, 0), \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Типичные спектры, характерные для редукционных цепочек I–III, показаны на рис. 7, 8.

4. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ

В модели взаимодействующих бозонов и фермионов, предложенной для описания структуры нечетных ядер, наряду с бозонными операторами при построении гамильтониана используются и операторы рождения и уничтожения

фермионов: a_{jm}^+ и a_{jm} . Здесь j — это полный угловой момент фермиона, m — его проекция. Оператор уничтожения фермиона a_{jm} при вращении системы координат преобразуется не так, как оператор рождения фермиона a_{jm}^+ . Поэтому в рассмотрение вводится и оператор \tilde{a}_{jm} :

$$\tilde{a}_{jm} = (-1)^{j-m} a_{j-m}, \quad (42)$$

у которого трансформационные свойства те же, что и у оператора a_{jm}^+ .

Операторы a_{jm}^+ , a_{jm} удовлетворяют следующим коммутационным и антикоммутационным соотношениям:

$$\{a_{jm}^+, a_{j'm'}\} = \delta_{jj'}\delta mm', \quad \{a_{jm}^+, a_{j'm'}^+\} = \{a_{jm}, a_{j'm'}\} = 0, \quad (43)$$

$$[d_\mu, a_{jm}^+] = [d_\mu, a_{jm}] = [s, a_{jm}^+] = [s, a_{jm}] = 0. \quad (44)$$

Оставшиеся соотношения можно получить с помощью операции эрмитова сопряжения.

Гамильтониан модели взаимодействующих бозонов и фермионов наиболее общего вида состоит из трех слагаемых, описывающих бозоны (H_B), фермионы (H_F) и их взаимодействие (V_{BF}):

$$H = H_B + H_F + V_{BF}. \quad (45)$$

Предполагается, что гамильтониан сохраняет как полное число бозонов, так и число фермионов. Различные части гамильтониана имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} H_B = & \epsilon_s s^+ s + \epsilon_d \sum_\mu d_\mu^+ d_\mu + \sum_{L,M} C_L (d^+ d^+)_{LM} (dd)_{LM} + \\ & + f ((d^+ d^+)_{00} ss + s^+ s^+ (dd)_{00}) + \\ & + g ((d^+ d^+)_{2\mu} d_\mu s + s^+ d_\mu^+ (dd)_{2\mu}), \end{aligned} \quad (46)$$

$$H_F = \sum_{jm} E_j a_{jm}^+ a_{jm} + \sum (j_1 j_2 | V_L | j'_1 j'_2) (a_{j_1}^+ a_{j_2}^+)_{LM} (a_{j'_1} a_{j'_2})_{LM}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} V_{BF} = & \sum_{jj';J} v_{jj';J} (d^+ a_{j'}^+)_{JM} (da_{j'})_{JM} + s^+ s \sum_{jm} \lambda_j a_{jm}^+ a_{jm} + \\ & + \sum \xi_{jj'} \left((d^+ a_{j'}^+)_{j'm'} a_{j'm'} s + s^+ a_{j'm'}^+ (da_{j'})_{j'm'} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Рассмотрим набор билинейных фермионных операторов $a_{jm}^+ a_{j'm'}^-$. Эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[a_{jm}^+ a_{j'm'}, a_{in}^+ a_{i'n'}^-] = \delta_{j'i} \delta_{m'n} a_{jm}^+ a_{i'n'}^- - \delta_{i'j} \delta_{n'm} a_{in}^+ a_{j'm'}^- \quad (49)$$

вместе с соответствующими тождествами Якоби. Они являются генераторами унитарной алгебры размерности n : $U(n)$. Величина $n = \sum_{j_i} (2j_i + 1)$ может быть достаточно большой. Например, если нечетная частица занимает один из уровней нормальной четности, принадлежащий осцилляторной оболочке с главным квантовым числом $N = 4$, т.е. один из уровней $d_{5/2}, g_{7/2}, s_{1/2}$ и $d_{3/2}$, то $n = 20$. В случае осцилляторной оболочки с $N = 5$ имеем $n = 30$. Таким образом, набор билинейных фермионных операторов $a_{jm}^+ a_{j'm'}$ имеет достаточно сложную алгебраическую структуру. В теории ядерной структуры в рамках модели взаимодействующих бозонов и фермионов рассматриваются, в основном, два класса алгебраических структур.

В первом классе рассматриваются редукционные цепочки исходной алгебры $U(n)$, содержащие алгебру $SU(4)$, изоморфную спинорной алгебре $Spin(6)$. Например,

$$\begin{aligned} U(20) &\supset Spin(6) \approx O(6) \approx SU(4) \supset Spin(5) \\ &\supset Spin(3) \approx SU(2) \supset Spin(2) \approx O(2). \end{aligned} \quad (50)$$

В этом случае фермионная алгебра $Spin(6)$ может быть объединена с рассмотренной в предыдущем разделе бозонной алгеброй $O(6)$. В результате получается объединенная бозон-фермионная алгебра.

Второй класс представляет наибольший интерес с точки зрения последующего рассмотрения суперсимметрии. Этот класс можно получить следующим образом. Представим угловой момент фермиона j в виде векторной суммы целочисленного псевдоорбитального момента \tilde{l} и псевдоспина $\tilde{s} = 1/2$ [30, 31]. Почему в рассмотрение вводится псевдоорбитальный угловой момент, а не обычный угловой момент нуклона? Причина состоит в следующем. Спин-орбитальное взаимодействие нуклонов в ядрах весьма сильное. Поэтому в тяжелых ядрах спин-орбитальные дублеты расщеплены настолько, что принадлежат разным ядерным оболочкам. Например, одночастичный уровень $g_{9/2}$ принадлежит оболочке 28–50, а $g_{7/2}$ — оболочке 50–82. Другой пример: одночастичный уровень $h_{11/2}$ принадлежит оболочке 50–82, а $h_{9/2}$ входит в состав оболочки 82–126. В то же время уже давно было отмечено, что уровни преобладающей четности с l_1, j_1 и $l_2 = l_1 + 2, j_2 = j_1 + 1$ очень близки по энергии и их можно рассматривать как принадлежащие дублету с $\tilde{l} = l_1 + 1$ и $j_1 = \tilde{l} - 1/2$, а $j_2 = \tilde{l} + 1/2$. Примерами являются следующие дублеты. В оболочке 50–82: $d_{5/2}, g_{7/2}(\tilde{l} = 3)$, $s_{1/2}, d_{3/2}(\tilde{l} = 1)$. В оболочке 82–126: $f_{7/2}, h_{9/2}(\tilde{l} = 4)$, $p_{3/2}, f_{5/2}(\tilde{l} = 2)$ и псевдоорбитальный

синглет $p_{1/2}(\tilde{l} = 0)$. Малая величина расщепления псевдоорбитальных дублетов означает, что псевдоспин-орбитальное взаимодействие в отличие от обычного спин-орбитального взаимодействия является слабым.

Итак, операторы рождения (и, соответственно, уничтожения) фермионов могут быть представлены следующим образом:

$$a_{jm}^+ = \sum_{\mu,\sigma} C_{\tilde{l}\mu 1/2\sigma}^{jm} a_{\tilde{l}\mu,1/2\sigma}^+. \quad (51)$$

В результате алгебра $U\left(n = \sum_{j_i}(2j_i + 1)\right)$ может быть представлена в виде прямого произведения

$$U\left(n = \sum_{j_i}(2j_i + 1)\right) \supset U\left(n_{\tilde{l}} = \sum_{\tilde{l}_i}(2\tilde{l}_i + 1)\right) \otimes U(2). \quad (52)$$

Например, если мы рассматриваем случай, когда j принимает значения $1/2$ и $3/2$, для построения базиса фермионных состояний мы можем использовать квантовые числа следующей редукционной цепочки алгебры $U\left(\sum_{j_i}(2j_i + 1)\right) = U(6)$:

$$U(6) \supset SU_{\tilde{l}}(3) \otimes SU_{\tilde{s}}(2) \supset O_{\tilde{l}}(3) \otimes SU_{\tilde{s}}(2) \supset SU_J(2) \supset O_J(2). \quad (53)$$

Индексы \tilde{l} , \tilde{s} и J в (53) указывают на то, что соответствующая группа преобразований связана с псевдоорбитальным моментом, псевдоспином или полным угловым моментом.

Сейчас мы можем перейти к рассмотрению связанных бозон-фермионных алгебр, которые используются для классификации состояний бозон-фермионных систем. Например, нечетных, нечетно-нечетных ядер или состояний четно-четных ядер с двумя и более квазичастицами. Состояния бозонной системы могут быть охарактеризованы квантовыми числами одной из редукционных цепочек алгебры $U^B(6)$. Состояния системы фермионов могут быть классифицированы с помощью квантовых чисел одной из редукционных цепочек алгебры $U^F(n_F)$, где $n_F = \sum_{j_i}(2j_i + 1)$. Алгебра, описывающая связанную систему бозонов и фермионов, является прямым произведением двух алгебр $U^B(6) \otimes U^F(n_F)$. Если какие-то из алгебр в двух редукционных цепочках совпадают или изоморфны, то они могут быть объединены и образуют общую бозон-фермионную алгебру. Если в общем случае бозоны характеризуются с помощью цепочки алгебр:

$$U^B(6) \supset G'^B \supset G''^B \supset \dots, \quad (54)$$

а фермионы с помощью другой цепочки

$$U^F(n_F) \supset G'^F \supset G''^F \supset \dots, \quad (55)$$

то связанная система может быть описана с помощью следующей решетки алгебр:

$$\begin{array}{ccccc}
 U^B(6) & & \otimes & & U^F(n_F) \\
 \downarrow & \searrow a & & a \swarrow & \downarrow \\
 G'^B & & G^{BF} & & G'^F \\
 \downarrow & \searrow b & & b \swarrow & \downarrow \\
 \dots & & G'^{BF} & & \dots \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \dots & &
 \end{array} \quad (56)$$

Часто существует несколько путей, на которых бозонная и фермионная алгебры связываются в единую бозон-фермионную алгебру при той же самой решетке алгебр. В (56) они обозначены индексами a, b, \dots .

В случае псевдоспиновой алгебры решетка алгебр выглядит несколько иначе, так как алгебра $U^F(n_F)$ расщепляется сначала на псевдоорбитальную и псевдоспиновую алгебры:

$$U^F(n_F) \supset U^F(1/2n_F) \otimes U^F(2). \quad (57)$$

Это ведет к следующей решетке алгебр:

$$\begin{array}{ccccc}
 U^B(6) & & \otimes & & U^F(n_F) \\
 | & & & & \downarrow \\
 \downarrow & \searrow a & & a \swarrow & \downarrow \\
 G'^B & & G^{BF} & & G'^F \\
 \downarrow & \searrow b & & b \swarrow & \downarrow \\
 \dots & & G'^{BF} & & \dots \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \dots & &
 \end{array} \quad (58)$$

Генераторами связанных бозон-фермионных алгебр являются линейные комбинации генераторов соответствующих бозонных и фермионных алгебр.

Процедура объединения бозонной и фермионной алгебр является обобщением известной процедуры связи угловых моментов. Например, если сначала мы имеем бозонную алгебру $O^B(3)$, генераторами которой являются компоненты оператора углового момента L_μ , и фермионную алгебру $SU^F(2)$, генераторами которой являются компоненты оператора спинового момента S_μ , то можно сформировать объединенную алгебру $SU^{BF}(2)$, генераторами которой являются компоненты оператора полного углового момента J_μ :

$$J_\mu = L_\mu + S_\mu. \quad (59)$$

После того как алгебраическая структура (решетка алгебр) определена, можно построить соответствующий базис. Этот базис будет характеризоваться квантовыми числами, описывающими представления алгебр в цепи. Построенный таким образом базис может быть использован для численной диагонализации гамильтониана. Кроме того, этот базис является аналитическим решением в случаях, называемых динамическими симметриями, когда гамильтониан может быть записан в виде линейной комбинации операторов Казимира C тех алгебр, которые содержатся в редукционной цепочке исходной алгебры. Например, в случае редукционной цепочки b (56):

$$\begin{aligned} H = E_0 + \alpha C(U^B) + \beta C(U^F) + \alpha' C(G'^B) + \\ + \beta' C(G'^F) + \gamma C(C''^{BF}) + \dots \end{aligned} \quad (60)$$

5. ФОРМАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ СУПЕРСИММЕТРИИ В МОДЕЛИ ЯДЕРНОЙ СТРУКТУРЫ, БАЗИРУЮЩЕЙСЯ НА ГРУППЕ $U(6/2)$, И В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Рассмотрим достаточно простую систему [32], состоящую из нечетного нуклона, взаимодействующего с бозонами. Несмотря на простоту, такая система, как это будет видно из приведенного ниже примера, описывает спектры низколежащих состояний некоторых ядер. Предположим, что нуклон может находиться только в состоянии с угловым моментом $j = 1/2$ (например, $p_{1/2}$). С учетом того, что четно-четный остов описывается гамильтонианом, основанным на алгебре $U(6)$, гамильтониан бозон-фермионной системы будет базироваться на алгебре $U(6/(2j+1) = 2)$. Для начала покажем, как пример, гамильтониан, имеющий более простую структуру, который можно рассматривать как введение для более сложного случая.

Простейший гамильтониан системы, состоящей из невзаимодействующих монопольных s -бозонов и фермиона со спином $1/2$ и спиральностью, являющейся хорошим квантовым числом, имеет вид

$$H = \epsilon(a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^- + s^+ s). \quad (61)$$

Это стандартный пример из учебника [33], с помощью которого можно проиллюстрировать многие черты суперсимметрии. Однако этот гамильтониан не обладает вращательной симметрией и не реализуется в ядерной физике. Простейшее расширение такого гамильтониана, обладающее ротационной симметрией, имеет следующий вид:

$$H = \epsilon(a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^- + a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^- + s^+ s). \quad (62)$$

Супероператорами, коммутирующими с гамильтонианом (62), являются операторы $a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ s$ и $a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s$. Они преобразуют одни собственные состояния гамильтониана (62) в другие, которые имеют на один фермион больше, но туже самую энергию возбуждения.

Сделаем еще один шаг и введем в рассмотрение гамильтониан, используемый в ядерной физике. Этот гамильтониан содержит не только монопольные s -бозоны, но и квадрупольные d -бозоны. Будем рассматривать систему в пределе $U(5)$ динамической симметрии, когда числа s - и d -бозонов сохраняются по отдельности. В этом пределе гамильтониан имеет вид

$$H = \epsilon(N_F + N_s) + H_d, \quad (63)$$

где $N_s \equiv s^+ s$ и $N_F \equiv \sum_m a_{1/2m}^+ a_{1/2m}$ являются операторами числа s -бозонов и фермионов соответственно, и

$$H_d = \epsilon_d \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu} + \sum_{L=0,2,4} C_L (d^+ d^+)_{LM} (dd)_{LM}. \quad (64)$$

Супероператоры, коммутирующие с гамильтонианом (63), имеют вид

$$P_{1/2m} = a_{1/2m}^+ s, \quad P_{1/2m}^+ = s^+ a_{1/2m}, \quad (65)$$

$$[H, P_{1/2m}] = [H, P_{1/2m}^+] = 0. \quad (66)$$

Рассмотрим градуированную алгебру, содержащую операторы $P_{1/2m}$ и $P_{1/2m}^+$. Антикоммутатор супероператоров имеет вид

$$\{P_{1/2m}, P_{1/2m'}^+\} = \delta_{mm'} (N_s + \frac{1}{2} N_F) - \sqrt{2} (-1)^{1/2+m'} C_{1/2m 1/2-m'}^{1\eta} S_{1\eta}, \quad (67)$$

где $S_{1\eta}$ — оператор спина фермионов:

$$S_{1\eta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m,m'} C_{1/2m 1\eta}^{1/2m'} a_{1/2m'}^+ a_{1/2m}, \quad (68)$$

а $C_{b\beta c\gamma}^{a\alpha}$ — коэффициент Клебша–Гордана. Остальные антикоммутаторы имеют вид

$$\{P_{1/2m}^+, P_{1/2m'}^+\} = \{P_{1/2m}, P_{1/2m'}\} = 0. \quad (69)$$

Операторы N_s и N_F коммутируют друг с другом и с $S_{1\eta}$. Оператор $S_{1\eta}$ удовлетворяет обычным коммутационным соотношениям для компонент оператора спина

$$[S_{1\eta}, S_{1\eta'}] = \sqrt{2} C_{1\eta' 1\eta}^{1\eta''} S_{1\eta''}. \quad (70)$$

Наконец, рассмотрим коммутационные соотношения операторов N_s , N_F и $S_{1\eta}$ с супероператорами $P_{1/2m}$ и $P_{1/2m}^+$:

$$[P_{1/2m}, N_s] = P_{1/2m}, \quad (71)$$

$$[P_{1/2m}, N_F] = -P_{1/2m}, \quad (72)$$

$$[P_{1/2m}, S_{1\eta}] = \frac{\sqrt{3}}{2} C_{1/2m 1\eta}^{1/2m'} P_{1/2m'}. \quad (73)$$

Операторы $P_{1/2m}$, $P_{1/2m}^+$, N_s , N_F и $S_{1\eta}$ образуют градуированную алгебру $U(1/2)$, и гамильтониан (63) отвечает следующей редукционной цепочке:

$$U(6/2) \supset U(5) \otimes U(1/2). \quad (74)$$

Мультиплеты собственных состояний гамильтониана (63) с одинаковой энергией возбуждения включают состояния с различными числами фермионов. По этой причине они называются супермультиплетами. С помощью супероператоров $P_{1/2m}$, $P_{1/2m}^+$ мы можем трансформировать один член супермультиплета в другой с иным числом фермионов. Все собственные состояния, принадлежащие одному и тому же супермультиплету, могут быть получены повторным применением супероператоров $P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ и $P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ к базисному состоянию $|n_s, n_d\rangle$, где n_s и n_d — числа s - и d -бозонов соответственно. Таким образом, супермультиплет включает следующие состояния:

$$\begin{aligned} |n_s, n_d\rangle &\equiv (s^+)^{n_s} \{(d^+)^{n_d}\}_{IM} |0\rangle, \\ &P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} |n_s, n_d\rangle, \\ &P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} |n_s, n_d\rangle, \\ &P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} |n_s, n_d\rangle. \end{aligned} \quad (75)$$

Выше состояние $|n_s, n_d\rangle$ является аналогом клиффордовского (фермионного) вакуума суперсимметричных моделей в квантовой теории поля. Примеры супермультиплетов приведены в табл. 1. Глядя на эти примеры, можно обнаружить интересное соотношение между полным числом бозонных состояний (которое включает по определению состояние без фермионов, а также состояния с четным числом фермионов) и полным числом фермионных состояний (т.е. состояний с нечетным числом фермионов) в супермультиплете. В супермультиплетах, включающих состояния с числом s -бозонов, равным или превышающим два, полное число фермионных состояний равно полному числу

СУПЕРСИММЕТРИЯ В СТРУКТУРЕ ЯДЕР 245

Таблица 1. Волновые функции членов супермультиплетов с различными числами s - и d -бозонов. $P_{1/2m} = a_{1/2m}^+ s$

$N_s + N_F$	Бозонные	Фермионные	Бозонные
3	$s^+ s^+ s^+ 0\rangle$	$3s\text{-бозонная система}$	$P_{1\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} s^+ s^+ s^+ 0\rangle = 6a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ s^+ 0\rangle$
		$P_{1\frac{1}{2}} s^+ s^+ s^+ 0\rangle = 3a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ s^+ s^+ 0\rangle$	
2	$s^+ s^+ 0\rangle$	$2s\text{-бозонная система}$	$P_{1\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} s^+ s^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ 0\rangle$
		$P_{1\frac{1}{2}} s^+ s^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ s^+ 0\rangle$	
2	$s^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle$	$2s, 1d\text{-бозонная система}$	$P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} s^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle = 2a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ a_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^+ d_\mu^+ 0\rangle$
		$P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} s^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle = 2a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ s^+ d_\mu^+ 0\rangle$	
1	$s^+ 0\rangle$	$1s\text{-бозонная система}$	$P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} s^+ 0\rangle = 0$
		$P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} s^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ 0\rangle$	
1	$s^+ d_\mu^+ 0\rangle$	$1s, 1d\text{-бозонная система}$	$P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} s^+ d_\mu^+ 0\rangle = 0$
		$P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} s^+ d_\mu^+ 0\rangle = a_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ d_\mu^+ 0\rangle$	
0	$ 0\rangle$	$0s\text{-бозонная система}$	$P_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} 0\rangle = 0$
		$P_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} 0\rangle = 0$	

бозонных состояний (с учетом всех возможных проекций полного углового момента). В супермультиплете, включающем состояния с числом s -бозонов, равным единице, полное число фермионных состояний равно удвоенному числу бозонных состояний. Ниже будет приведено формальное доказательство этого соотношения.

Хорошо известный пример приближенной суперсимметрии в ядерной физике, соответствующий гамильтониану (63), приведен в [7]. Этот супермультиплет включает три ядра: $^{102}_{44}\text{Ru}_{58}$ ($N_s + N_d = 7, N_F = 0$), $^{103}_{45}\text{Rh}_{58}$ ($N_s + N_d = 6, N_F = 1$), а также двухквазичастичные состояния $^{104}_{46}\text{Pd}_{58}$ ($N_s + N_d = 5, N_F = 2$). Однако экспериментальная информация о двухквазичастичных состояниях в ^{104}Pd недостаточна. Возможным кандидатом на место нижайшего состояния ^{104}Pd , принадлежащего супермультиплету, является состояние 0^+ (1793 кэВ), полученное при бета-распаде ^{104}Ru ($\log ft = 5, 5$). Эксперименты с использованием реакции $^{103}\text{Rh}(^3\text{He}, d)$ могли бы прояснить ситуацию. В этом примере нечетный протон заселяет одночастичное состояние $p_{1/2}$. Экспериментальные спектры показаны на рис.1. На этом рисунке двухквазичастичное 0^+ возбужденное состояние ^{104}Pd помещено при той же энергии, что и основные состояния ^{102}Ru и ^{103}Rh , так как в теории структуры ядра подход, основанный на суперсимметрии, имеет дело только с энергиями, отсчитанными относительно нижайшего состояния данного ядра, принадлежащего супермультиплету. По той же причине в (63) перед N_F и N_s стоит один и тот же коэффициент. Соответствующий полный гамильтониан, включающий полные энергии, имеет вид

$$\bar{H} = E_0 + \epsilon_F N_F + \epsilon_s N_s + H_d, \quad (76)$$

где E_0 — константа. Но если интересоваться только энергиями возбуждения, то \bar{H} эквивалентен (63). Это можно увидеть, переписав \bar{H} следующим образом:

$$\bar{H} = E_0 + (\epsilon_F - \epsilon_s)N_F + \epsilon_s(N_F + N_s) + H_d. \quad (77)$$

Первые два члена в (77) не влияют на энергию возбуждения, поскольку N_F постоянно для заданного ядра. Поэтому эти два слагаемых опущены в (63).

Из рис.1 видно, что в ^{102}Ru и ^{103}Rh суперсимметрия приближенная. Для лучшего описания экспериментальных данных необходимо включить в гамильтониан член, нарушающий суперсимметрию. Он может иметь следующий вид:

$$H_{\text{break}} = \alpha N_s \cdot N_F + \beta \mathbf{L}_d \cdot \mathbf{S}, \quad (78)$$

где $\mathbf{L}_d = \sqrt{10}(d^+ \tilde{d})_1$ — оператор орбитального момента бозонов.

Сравним теперь коммутационные и антикоммутационные соотношения операторов, формирующих алгебру $U(1/2)$, с соответствующими соотношениями операторов в суперсимметрических моделях квантовой теории поля. Это

сравнение продемонстрирует сходство между двумя наборами соотношений, но также и некоторое различие между ними. Сходство будет использовано в дальнейшем для получения формального соотношения между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплетах. В квантовой теории поля суперзаряды, аналогичные нашим операторам $P_{1/2m}$ и $P_{1/2m}^+$, обозначаются как Q_α^L и $(Q_\alpha^L)^+$, где α является спинорным индексом, а L связан с внутренней группой симметрии. Эти операторы коммутируют с четырехмерным лоренцевским импульсом P_μ :

$$[Q_\alpha^L, P_\mu] = [(Q_\alpha^L)^+, P_\mu] = 0 \quad (79)$$

и, следовательно, коммутируют с гамильтонианом, являющимся компонентой P_μ с $\mu = 0$.

Антикоммутатор суперзарядов

$$\{Q_\alpha^L, (Q_\beta^M)^+\} = 2\delta^{LM} \sum_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \quad (80)$$

где σ^μ — матрица Дирака. Второй антикоммутатор

$$\{Q_\alpha^L, Q_\beta^M\} = 0. \quad (81)$$

В дополнение к суперзарядам Q_α^L , $(Q_\alpha^L)^+$ и четырехмерному лоренцевскому импульсу P_μ суперсимметричные модели квантовой теории поля включают также бозонные операторы, формирующие алгебру Ли внутренней симметрии. Обозначим их B_l . Они удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям

$$[B_l, B_m] = i \sum_k f_{lmk} B_k, \quad (82)$$

где f_{lmk} — структурные константы. Коммутационные соотношения операторов B_l и суперзарядов имеют вид

$$[Q_\alpha^L, B_l] = i \sum_M A_l^{LM} Q_\alpha^M. \quad (83)$$

Мы можем сравнить эти соотношения с теми, которые получены для операторов, формирующих алгебру $U(1/2)$ в теории структуры ядра. Это сделано ниже, где соответствующие соотношения связаны двухсторонними стрелками:

$$P_{1/2m} \iff Q_\alpha^L, H \iff P_\mu, \quad (84)$$

$$N_s - N_F, S_{1\eta} \iff B_l, \quad (85)$$

$$[P_{1/2m}, H] = 0 \iff [Q_\alpha^L, P_\mu] = 0, \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \{P_{1/2m'}, P_{1/2m}^+\} &= \delta_{mm'} \left(N_s + \frac{1}{2} N_F \right) + \sqrt{3} \sum_{\eta} C_{1/2m1\eta}^{1/2m'} S_{1\eta} \\ &\iff \{Q_\alpha^L, (Q_\beta^M)^+\} = 2\delta^{LM} \sum_{\mu} \sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\{P_{1/2m}, P_{1/2m'}\} = 0 \iff \{Q_\alpha^L, Q_\beta^M\} = 0, \quad (88)$$

$$[S_{1\eta}, S_{1\eta'}] = \sqrt{2} C_{1\eta/1\eta}^{1\eta''} S_{1\eta''} \iff [B_l, B_m] = i \sum_k f_{lmk} B_k, \quad (89)$$

$$\begin{aligned} [P_{1/2m}, N_s] &= P_{1/2m}, [P_{1/2m}, N_F] = -P_{1/2m}, \\ [P_{1/2m}, S_{1\eta}] &= -\frac{\sqrt{3}}{2} C_{1/2m1\eta}^{1/2m'} P_{1/2m'} \iff [Q_\alpha^L, B_l] = i \sum_M A_l^{LM} Q_\alpha^M. \end{aligned} \quad (90)$$

Легко увидеть сходство между аналогичными соотношениями в квантовой теории поля и в теории структуры ядра. Это сходство очевидно для соотношений (86) и (88)–(90). Отметим, однако, некоторое различие в структуре выражений антисимметрических операторов в (87). Оно обусловлено разной структурой бозонных алгебр в квантовой теории поля и в ядерном случае, которое отражается и в соотношении между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплетах. Как и в квантовой теории поля, это соотношение может быть получено умножением обеих частей антисимметрического оператора (67) на $(-1)^{N_F}$ и взятием шпера. Слева мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left((-1)^{N_F} P_{1/2m} P_{1/2m'}^+ + (-1)^{N_F} P_{1/2m'}^+ P_{1/2m} \right) &= \\ = \text{Tr} \left((-1)^{N_F} P_{1/2m} P_{1/2m'}^+ + P_{1/2m} (-1)^{N_F} P_{1/2m'}^+ \right) &= \\ = \text{Tr} \left((-1)^{N_F} P_{1/2m} P_{1/2m'}^+ - (-1)^{N_F} P_{1/2m} P_{1/2m'}^+ \right) &= 0. \end{aligned} \quad (91)$$

Выше мы использовали инвариантность шпера относительно циклической перестановки операторов и коммутационные соотношения (71), (72). Так как соотношение (67) может быть записано

$$\{P_{1/2m}, P_{1/2m'}^+\} = \delta_{mm'} s^+ s + a_{1/2m}^+ a_{1/2m'}, \quad (92)$$

то, полагая $m = m'$ и суммируя по m , получаем

$$\text{Tr} \left((-1)^{\hat{N}_F} (2\hat{N}_s + \hat{N}_F) \right) = 0. \quad (93)$$

Уравнение (93) содержит соотношение между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплете. Чтобы показать это, перепишем шпур в (93) в явном виде как сумму диагональных матричных элементов оператора в круглых скобках. Так как супероператор слева в (92) имеет ненулевые матричные элементы только между состояниями, принадлежащими одному и тому же супермультиплету, суммирование в (93) ограничивается только этими состояниями

$$\sum_{a \in \text{супермультиплете}} \langle a | (-1)^{\hat{N}_F} (2\hat{N}_s + \hat{N}_F) | a \rangle = 0. \quad (94)$$

В (94) индекс a включает только бозонные состояния, т.е. состояния без фермионов или с двумя фермионами, и фермионные состояния, т.е. состояния с одним фермионом. Так как в нашем случае два фермиона могут иметь только нулевой полный угловой момент, то число состояний без фермионов равно числу состояний с двумя фермионами. Следовательно, каждое из этих чисел равно половине полного числа бозонных состояний в супермультиплете. Мы обозначим полное число бозонных состояний через n_B . Пусть n_F будет полным числом фермионных состояний в супермультиплете. Для супермультиплета с $N_s + N_F \equiv N_s^{\max} \geq 2$ мы получаем из (94)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n_B \cdot 2N_s^{\max} - n_F(2(N_s^{\max} - 1) + 1) + \frac{1}{2}n_B(2(N_s^{\max} - 2) + 2) = \\ = (n_B - n_F)(2N_s^{\max} - 1) = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Таким образом, для супермультиплетов с $N_s^{\max} \geq 2$ $n_B = n_F$. Выше N_s^{\max} является максимально возможным числом s -бозонов в состояниях, принадлежащих супермультиплету. Для супермультиплета с $N_s + N_F = 1$ из (94) следует

$$\frac{1}{2}n_B \cdot 1 - n_F = 0. \quad (96)$$

Итак, бозон-фермионное правило можно сформулировать следующим образом:

- в супермультиплетах, включающих состояния с $N_s + N_F \geq 2$, число бозонных состояний равно числу фермионных состояний;
- в супермультиплетах, содержащих состояния с $N_s + N_F = 1$, число фермионных состояний равно удвоенному числу бозонных состояний.

Таким образом, есть некоторое различие в соотношениях между числами бозонных и фермионных состояний в ядерном случае и в квантовой теории поля, где для всех супермультиплетов, исключая основное состояние, $n_F = n_B$. Это различие является следствием различия между антисимметризованными (67) и (80).

Так как соотношение между числами бозонных и фермионных состояний является фундаментальным в квантовой теории поля, рассмотрим с этой точки зрения собственные состояния гамильтонианов (61), (62). Супермультиплеты собственных состояний гамильтониана (61) соответствуют супермультиплетам в квантовой теории поля с нулевой массой покоя клиффордовского (фермионного) вакуума. В этом случае спиральность является хорошим квантовым числом. Однофермионное состояние является, например, аналогом нейтрино, а состояние с одним s -бозоном — аналогом S -нейтрино. В случае гамильтониана (62) однофермионное состояние является аналогом электрона с двумя возможными значениями спина.

В рамках суперсимметричного подхода в квантовой теории поля было получено следующее соотношение для гамильтониана. Если умножить обе стороны соотношения (80) на $\sigma_{\alpha\beta}^0$ и просуммировать по α и β , то мы получим

$$H \equiv P_0 = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, L} \{Q_\alpha^L, (Q_\alpha^L)^+\}. \quad (97)$$

В ядерном случае соотношение, которое может быть получено аналогичным образом, имеет иной вид из-за различия в структуре антисимметрических антикоммутаторов (67) и (80):

$$H = \frac{1}{2} N_F + \frac{1}{2} \sum_m \{P_{1/2m}, P_{1/2m}^+\} + H_d, \quad (98)$$

которое эквивалентно, если интересоваться только энергиями возбуждения, следующему гамильтониану:

$$H = \frac{1}{2} \sum_m \{P_{1/2m}, P_{1/2m}^+\} + H_d. \quad (99)$$

Подведем итоги. Мы рассмотрели модель структуры ядра, основанную на $U(6/2)$ градуированной алгебре, и показали, что эта алгебра имеет градуированную подалгебру, генераторы которой коммутируют с модельным гамильтонианом. Таким образом, показано, что существуют супероператоры, преобразующие бозоны в фермионы и обратно, и коммутирующие с гамильтонианом. Мы получили также соотношение между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплетах.

6. $U(1/2)$ -СУПЕРСИММЕТРИЯ БЕЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Мы уже отмечали выше, что в теории ядерной структуры основное внимание уделялось исследованию моделей с гамильтонианами, которые можно представить в виде линейной комбинации операторов Казимира соответствующих

подгрупп редукционной цепочки $U(6/\Omega)$, где Ω — максимально возможное число фермионов в системе, а 6 есть число бозонных степеней свободы, необходимых для описания четно-четных ядер в модели взаимодействующих бозонов. Гамильтониан, построенный таким образом, использовался при фиксированных параметрах для описания как четно-четных, так и нечетных ядер. При этом, хотя для описания четно-четных и нечетных ядер использовались и тот же гамильтониан, и квантовые числа тех же подгрупп, в общем случае относительные энергии собственных состояний четно-четных и нечетных ядер были различны. Как правило, операторы, принадлежащие ферми-сектору градуированной алгебры Ли (супероператоры), т.е. операторы, трансформирующие бозоны в фермионы и обратно, не проявлялись явным образом в редукционных цепочках подгрупп. Цель этого раздела — дать пример гамильтониана, описывающего систему взаимодействующих бозонов и фермионов, который хотя и не обладает известными динамическими симметриями, но часть собственных состояний гамильтониана формирует бозон-фермионные мультиплеты, объединяющие состояния, принадлежащие разным ядрам [34]. В этом отношении система подобна тем, которые описываются неполными симметриями, введенными в рассмотрение и проанализированными в [35–41]. Гамильтониан, который рассматривается ниже, является достаточно общим гамильтонианом для четно-четных ядер. Он построен с использованием формализма «согласованных квадрупольных операторов» (CQF) модели взаимодействующих бозонов [42, 43]. Однако в отношении нечетных ядер этот гамильтониан имеет специальный вид. Мы покажем ниже, что существует супероператор, преобразующий бозоны в фермионы, который коммутирует с этим гамильтонианом. Этот супероператор образует вместе с эрмитово-сопряженным оператором и рядом других операторов, показанных ниже, подгруппу $U(1/2)$ группы $U(6/12)$, являющуюся группой инвариантности гамильтониана.

В предыдущем разделе было продемонстрировано тесное сходство между формой коммутационных и антисимметрических соотношений операторов, формирующих алгебру $U(1/2)$, и операторов, формирующих суперсимметричную модель в квантовой теории поля. Благодаря отмеченной выше инвариантности среди собственных состояний, относящихся к нечетным ядрам, есть наборы состояний, характеризующихся теми же относительными энергиями, что и состояния четно-четных ядер. Конечно, не все состояния нечетных ядер имеют партнеров среди чисто бозонных состояний четно-четных ядер. Существуют также так называемые состояния смешанной симметрии, чьими партнерами являются двухквазичастичные возбужденные состояния четно-четных ядер с тем же суммарным числом бозонов и фермионов. В общем случае этот гамильтониан не обладает динамической симметрией и не может быть представлен в виде суммы операторов Казимира какой-либо из цепочек подгрупп.

Ниже мы рассмотрим модель, основанную на градуированной алгебре $U(6/12)$. Эта модель описывает систему из s - и d -бозонов и фермионов, заселяющих одночастичные состояния с угловыми моментами $j = 1/2, 3/2$ и $5/2$. Есть несколько примеров нечетных ядер, низколежащие состояния которых можно приближенно описать в рамках данного подпространства одночастичных состояний. Например, изотопы Pt и W. Они были рассмотрены в [15, 44].

Как уже отмечалось выше, угловой момент фермиона j может быть разложен на псевдоорбитальную часть \tilde{l} с $\tilde{l} = 0, 2$ и псевдоспиновую часть s [30, 31] с $s = 1/2$ [7, 11, 13]. Поэтому оператор рождения фермиона с заданным угловым моментом можно представить как

$$a_{jm}^+ = \sum_{\mu, \sigma} C_{\tilde{l}\mu, 1/2\sigma}^{jm} a_{\tilde{l}\mu, 1/2\sigma}^+. \quad (100)$$

Используя операторы $a_{\tilde{l}\mu, 1/2\sigma}^+$ и $a_{\tilde{l}\mu, 1/2\sigma}$, можно сконструировать другие операторы псевдоорбитального и псевдоспинового типа. Для последующего рассмотрения нам нужен оператор квадрупольного момента фермионов

$$\begin{aligned} Q_{2\mu}^F(\chi) = & \sum_{\sigma} \left(a_{2\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{00, \frac{1}{2}\sigma} + a_{00, \frac{1}{2}\sigma}^+ (-1)^{\mu} a_{2-\mu, \frac{1}{2}\sigma} + \right. \\ & \left. + \chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} a_{2\eta, \frac{1}{2}\sigma}^+ (-1)^{\eta'} a_{2-\eta', \frac{1}{2}\sigma} \right), \end{aligned} \quad (101)$$

содержащий свободный параметр χ , а также операторы числа фермионов с псевдоорбитальным моментом $\tilde{l} = 0$:

$$\hat{N}^F(\tilde{l} = 0) = \sum_{\sigma} a_{00, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{00, \frac{1}{2}\sigma} \quad (102)$$

и $\tilde{l} = 2$:

$$\hat{N}^F(\tilde{l} = 2) = \sum_{\mu, \sigma} a_{2\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{2\mu, \frac{1}{2}\sigma}. \quad (103)$$

Соответствующими бозонными операторами являются оператор квадрупольного момента бозонов

$$Q_{2\mu}^B(\chi) = d_{\mu}^+ s + s^+ (-1)^{\mu} d_{-\mu} + \chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} d_{\eta}^+ (-1)^{\eta'} d_{-\eta'} \quad (104)$$

и операторы чисел s -бозонов $\hat{N}_s^B = s^+ s$ и d -бозонов $\hat{N}_d^B = \sum_{\mu} d_{\mu}^+ d_{\mu}$.

Объединенные бозон-фермионные операторы могут быть получены суммированием бозонных и псевдоорбитальных фермионных операторов

$$Q_{2\mu}(\chi) = Q_{2\mu}^B(\chi) + Q_{2\mu}^F(\chi), \quad (105)$$

$$\hat{N}(0) = \hat{N}_s^B + \hat{N}^F(\tilde{l} = 0), \quad (106)$$

$$\hat{N}(2) = \hat{N}_d^B + \hat{N}^F(\tilde{l} = 2). \quad (107)$$

Фермионный сектор градуированной алгебры $U(6/12)$ содержит операторы, преобразующие бозоны в фермионы и обратно. В общем случае они могут быть представлены следующим образом:

$$P_{jm} = x_j a_{jm}^+ s + \sum_{j'} y_{jj'} (a_{j'}^+ d)_{jm}. \quad (108)$$

В зависимости от значений коэффициентов x_j и $y_{jj'}$ эти операторы могут иметь различные тензорные свойства. Наиболее интересен для нас оператор $P_{1/2m}$:

$$P_{1/2m} = a_{00,1/2m}^+ s + \sum_{\mu} a_{2\mu,1/2m}^+ d_{\mu}, \quad (109)$$

который был введен в [13] в связи с рассмотрением реакций однонуклонных передач, где было показано, что этот оператор преобразуется как скаляр при шестимерных вращениях под действием генераторов $SO^{BF}(6)$.

Рассмотрим коммутационные соотношения оператора $P_{1/2m}$ с бозонными и фермионными операторами, введенными выше. Они имеют вид

$$[P_{1/2m}, Q_{2\mu}^B(\chi)] = a_{2\mu,1/2m}^+ s + a_{00,1/2m}^+ \tilde{d}_{\mu} + \chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} a_{2\eta,1/2m}^+ \tilde{d}_{\eta'}, \quad (110)$$

$$[P_{1/2m}, Q_{2\mu}^F(\chi)] = -a_{2\mu,1/2m}^+ s - a_{00,1/2m}^+ \tilde{d}_{\mu} - \chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} a_{2\eta,1/2m}^+ \tilde{d}_{\eta'}, \quad (111)$$

$$[P_{1/2m}, \hat{N}_s^B] = a_{00,1/2m}^+ s, \quad (112)$$

$$[P_{1/2m}, \hat{N}^F(\tilde{l} = 0)] = -a_{00,1/2m}^+ s, \quad (113)$$

$$\left[P_{1/2m}, \hat{N}_d^B \right] = \sum_{\nu} a_{2\nu, 1/2m}^{+} d_{\nu}, \quad (114)$$

$$\left[P_{1/2m}, \hat{N}^F (\tilde{l} = 2) \right] = - \sum_{\nu} a_{2\nu, 1/2m}^{+} d_{\nu}. \quad (115)$$

Видно, что оператор $P_{1/2m}$ коммутирует с введенными выше объединенными бозон-фермионными операторами $Q_{2\mu}(\chi)$, $\hat{N}(0)$ и $\hat{N}(2)$. Это означает, что $P_{1/2m}$ коммутирует с гамильтонианом, имеющим достаточно общий вид:

$$H(\chi) = \epsilon_0 \hat{N}(0) + \epsilon_2 \hat{N}(2) - \kappa Q_2(\chi) \cdot Q_2(\chi). \quad (116)$$

Это наиболее общий гамильтониан модели взаимодействующих бозонов, построенный в формализме «согласованных квадрупольных операторов». Но он имеет достаточно специальный вид для нечетных ядер. Ограничения касаются фермионной подсистемы. Только три одночастичных уровня $p_{1/2}$, $p_{3/2}$ и $f_{5/2}$ введены в рассмотрение. Кроме того, предполагается, что $E_{p_{3/2}} = E_{f_{5/2}}$ и $E_{p_{3/2}} - E_{p_{1/2}} = \epsilon_d - \epsilon_s$. Обычно в модели взаимодействующих бозонов $\epsilon_d - \epsilon_s \geq 0$. В ядрах в области Pt фермионы являются дырками, и последнее неравенство корректно. Гамильтониан (116) не включает обменное взаимодействие. В конце раздела мы рассмотрим это ограничение более подробно.

Из того факта, что $[H(\chi), P_{1/2m}] = 0$, следует, что, хотя при произвольном χ мы получаем для четно-четных ядер спектр, не принадлежащий ни одному из пределов, отвечающих динамическим симметриям, однако в нечетных ядрах мы имеем набор собственных состояний, характеризующихся теми же относительными энергиями, что и коллективные состояния четно-четного ядра. Вместе с соответствующими состояниями четно-четного ядра они образуют суперсимметричные мультиплеты. Собственные векторы этих состояний можно построить, действуя оператором $P_{1/2m}$ на собственные состояния четно-четного ядра с разными значениями углового момента I . Так как оператор $P_{1/2m}$ имеет угловой момент, равный $1/2$, то мы получаем в нечетных ядрах дублеты состояний с угловыми моментами $J = I \pm \frac{1}{2}$. Формально спектр этих состояний выглядит так, как если бы нечетный фермион заселял одночастичное состояние $p_{1/2}$ и не взаимодействовал с бозонами. Однако этим набором не исчерпываются собственные состояния нечетного ядра. Есть и другие собственные состояния, которые в противоположность состояниям, рассмотренным выше, не симметричны относительно перестановки бозонных и фермионных орбитальных моментов. Они называются состояниями со смешанной симметрией. Присутствие этих состояний отличает систему с нечетной частицей в состоянии $p_{1/2}$, не взаимодействующую с четно-четным остовом, от системы с тремя одночастичными уровнями $p_{1/2}$, $p_{3/2}$ и $f_{5/2}$ и нечетной частицей, сильно связанный с бозонным остовом.

В противоположность полностью симметричным состояниям состояния со смешанной симметрией не могут быть получены действием оператора $P_{1/2m}$ на собственные состояния четно-четного остова. В пределе динамической симметрии $O(6)$ состояния со смешанной симметрией получаются действием операторов типа (108), не являющихся, однако, скалярами по отношению к $O(6)$ - и $O(5)$ -преобразованиям, на состояния четно-четного остова. Так как такие операторы не являются скалярами, то они изменяют квантовые числа состояний остова. Например, квантовые числа, характеризующие представления группы $O(6)$ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), изменяются от $(\sigma, 0, 0)$ к $(\sigma \pm 1, 1, 0)$. Вместе с квантовыми числами изменяются собственные значения гамильтонiana и разности собственных значений (т.е. энергии гамма-переходов). Если динамическая симметрия $O(6)$ нарушена, то эти операторы, в противоположность $P_{1/2m}$, перестают генерировать собственные моды гамильтонiana.

Супероператоры $P_{1/2m}$ вместе с эрмитово-сопряженными им $P_{1/2m}^+$ и операторами $\hat{N}_B \equiv \hat{N}_s^B + \hat{N}_d^B$, $\hat{N}_F \equiv \hat{N}^F(\tilde{l} = 0) + \hat{N}^F(\tilde{l} = 2)$ и $\hat{S}_{1\eta} \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m,m'} C_{\frac{1}{2}m'1\eta}^{\frac{1}{2}m} \sum_{\tilde{l}=0,2;\mu} a_{\tilde{l}\mu,\frac{1}{2}m}^+ a_{\tilde{l}\mu,\frac{1}{2}m'}$ образуют градуированную алгебру $U(1/2)$. Соответствующие коммутационные и антисимметрические соотношения аналогичны приведенным в предыдущем разделе.

Подчеркнем, что появление в нечетных ядрах состояний с теми же относительными энергиями, что и в четно-четных ядрах, обусловлено тем, что псевдоспин не связан динамически с псевдоорбитальным моментом фермионов и орбитальным моментом бозонов. То же самое отсутствие динамической связи псевдоспина с псевдоорбитальным моментом рассматривалось в [45, 46] как одна из причин появления тождественных ротационных супердеформированных полос.

Супероператоры $P_{1/2m}$, $P_{1/2m}^+$, а также другие операторы этого типа, характеризующиеся другими трансформационными свойствами относительно $SO^{BF}(6)$ -преобразований, удобны для конструирования обменного взаимодействия. Простейшее обменное взаимодействие имеет вид

$$g \sum_m P_{1/2m} P_{1/2m}^+. \quad (117)$$

Покажем, что это взаимодействие не действует на состояния со смешанной симметрией, однако сдвигает на одну и ту же величину gN энергию полностью симметричных состояний, т.е. суперпартнеров коллективных состояний четно-четного остова. Оператор $P_{1/2m}$, будучи скаляром относительно преобразований группы $SO^{BF}(6)$, коммутирует со всеми генераторами этой группы. Этот генератор не изменяет квантовых чисел собственных состояний, действуя на чисто бозонные состояния остова.

Состояния со смешанной симметрией ортогональны полностью симметричным состояниям:

$$\langle \text{mixed.sym.} | P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle = 0. \quad (118)$$

Рассмотрим теперь действие обменного взаимодействия (117) на состояния со смешанной симметрией. Так как оператор $P_{1/2m}^+$, действуя на состояния со смешанной симметрией, уничтожает нечетный фермион, то в результате получается чисто бозонное состояние. Однако, как следует из (118), такое состояние ортогонально всем чисто бозонным состояниям. Следовательно,

$$g \sum_m P_{1/2m} P_{1/2m}^+ | \text{mixed.sym.} \rangle = 0. \quad (119)$$

Для полностью симметричных состояний имеем

$$\begin{aligned} & g \sum_{m'} P_{1/2m'} P_{1/2m'}^+ P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = g \sum_{m'} P_{1/2m'} \{ P_{1/2m'}^+, P_{1/2m} \} | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = g P_{1/2m} (\hat{N}_B + \frac{1}{2} \hat{N}_F) | N_F = 0, N_B = N \rangle + \\ & + g \sum_{m'} P_{1/2m'} \sqrt{2} (-1)^{1/2-m'} C_{1/2m 1/2-m'}^{1\eta} \hat{S}_{1\eta} | N_F = 0, N_B = N \rangle. \end{aligned} \quad (120)$$

Так как операторы \hat{N}_F и $\hat{S}_{1\eta}$ дают нуль, действуя на чисто бозонные состояния, то

$$g \sum_{m'} P_{1/2m'} P_{1/2m'}^+ P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle = g N P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle. \quad (121)$$

Таким образом, взаимодействие (117) может использоваться, чтобы регулировать энергию полностью симметричных состояний относительно состояний со смешанной симметрией.

Состояния нечетных ядер, имеющие те же относительные энергии, что и четно-четные ядра, связаны $E2$ -переходами с приведенными вероятностями, совпадающими с точностью до геометрического фактора с вероятностями $E2$ -переходов между соответствующими состояниями четно-четного остова. Причиной этого является структура собственных векторов состояний, принадлежащих суперсимметричным мультиплетам.

Пусть $|JMN_F = 1, N_B = N - 1, L_n\rangle$ является нормированным собственным вектором нечетного ядра, построенным в результате действия оператора

$P_{1/2m}$ на нормированный собственный вектор $|Ln\mu N_F = 0, N_B = N\rangle$ четно-четного ядра:

$$|JMN_F = 1, N_B = N - 1, Ln\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m,\mu} C_{\frac{1}{2}mL\mu}^{JM} P_{1/2m} |Ln\mu N_F = 0, N_B = N\rangle. \quad (122)$$

В общем случае оператор $E2$ -перехода может отличаться от бозон-фермионного оператора (105), который использовался выше при построении гамильтониана (116). Это может быть произвольная линейная комбинация бозонного (104) и фермионного (101) квадрупольных операторов. Для наших целей удобно представить оператор $E2$ -перехода в виде линейной комбинации квадрупольного оператора (105) и квадрупольного оператора с нулевыми матричными элементами между состояниями (122). Ниже показано [34], что такой оператор имеет следующую структуру:

$$Q_{2\mu}^B - (N - 1)Q_{2\mu}^F. \quad (123)$$

Рассмотрим оператор

$$Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F. \quad (124)$$

Используя приведенные выше коммутационные и антисимметрические соотношения, а также двойной коммутатор

$$\begin{aligned} & \left[P_{1/2m'}^+, [Q_{2\mu}^B - Q_{2\mu}^F, P_{1/2m}] \right] = -2\delta_{mm'} Q_{2\mu}^B + 2a_{2\mu, 1/2m}^+ a_{00, 1/2m'} + \\ & + 2a_{00, 1/2m}^+ (-1)^\mu a_{2-\mu, 1/2m'} + 2\chi \sum_{\eta, \eta'} C_{2\eta 2\eta'}^{2\mu} a_{2\eta, 1/2m}^+ (-1)^{\eta'} a_{2-\eta', 1/2m'}, \end{aligned} \quad (125)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \langle N_F = 0, N_B = N | P_{1/2m'}^+ (Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F) P_{1/2m} | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = \langle N_F = 0, N_B = N | P_{1/2m'}^+ [Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F, P_{1/2m}] | N_F = 0, N_B = N \rangle + \\ & + \langle N_F = 0, N_B = N | P_{1/2m'}^+ P_{1/2m} (Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F) | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = \langle N_F = 0, N_B = N | \left[P_{1/2m'}^+, [Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F, P_{1/2m}] \right] | N_F = 0, N_B = N \rangle + \\ & + \langle N_F = 0, N_B = N | \left\{ P_{1/2m'}^+, P_{1/2m} \right\} (Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F) | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = \langle N_F = 0, N_B = N | - (1 - \beta) \delta_{mm'} Q_{2\mu}^B | N_F = 0, N_B = N \rangle + \\ & + \delta_{mm'} N \langle N_F = 0, N_B = N | Q_{2\mu}^B + \beta Q_{2\mu}^F | N_F = 0, N_B = N \rangle = \\ & = \delta_{mm'} ((N - 1) + \beta) \langle N_F = 0, N_B = N | Q_{2\mu}^B | N_F = 0, N_B = N \rangle = 0. \end{aligned} \quad (126)$$

Следовательно, $\beta = -(N - 1)$. Таким образом, квадрупольный оператор общего вида можно представить как

$$T_\mu(E2) = e_{\text{eff}} \left((Q_{2\mu}^B + Q_{2\mu}^F) + \alpha(Q_{2\mu}^B - (N - 1)Q_{2\mu}^F) \right). \quad (127)$$

Параметр α в (127) несуществен для последующего рассмотрения. Однако этот параметр определяет интенсивности $E2$ -переходов между состояниями с полной и смешанной симметрией.

Приведенные матричные элементы оператора $T_\mu(E2)$, взятые между полностью симметричными состояниями нечетного ядра, могут быть выражены через матричные элементы квадрупольного бозонного оператора между соответствующими состояниями четно-четного ядра, а именно

$$\begin{aligned} \langle J', N_F = 1, N_B = N - 1, L'n' | T(E2) | J, N_F = 1, N_B = N - 1, Ln \rangle &= \\ &= (-1)^{L-\frac{1}{2}-J'} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & L & L' \\ 1/2 & J' & J \end{array} \right\} \times \\ &\times \langle L'n' N_F = 0, N_B = N | Q_2^B | Ln N_F = 0, N_B = N \rangle. \end{aligned} \quad (128)$$

Из (128) следуют различные соотношения между величинами $B(E2)$ для нечетных и четно-четных ядер. Удобно рассматривать отношения $B(E2)$:

$$R_{\text{SUSY}}(J'L'n' \rightarrow JLn) \equiv \frac{B(E2; J'L'n' \rightarrow JLn)}{B(E2; L'n' \rightarrow Ln)}. \quad (129)$$

Из (128) следует, например, что

$$\begin{aligned} R_{\text{SUSY}}(J' = 9/2, L'_{n'} = 4_1 \rightarrow J = 5/2, L_n = 2_1) &= 1, \\ R_{\text{SUSY}}(J' = 7/2, L'_{n'} = 4_1 \rightarrow J = 3/2, L_n = 2_1) &= 0, 9, \\ R_{\text{SUSY}}(J' = 3/2, L'_{n'} = 2_2 \rightarrow J = 5/2, L_n = 2_1) &= 0, 3, \\ R_{\text{SUSY}}(J' = 5/2, L'_{n'} = 2_{n'} \rightarrow J = 1/2, L_n = 0_1) &= 1, \\ R_{\text{SUSY}}(J' = 3/2, L'_{n'} = 2_{n'} \rightarrow J = 1/2, L_n = 0_1) &= 1. \end{aligned} \quad (130)$$

В соотношении (130) для краткости опущены обозначения чисел бозонов и фермионов в характеристиках векторов состояний.

Примером приближенной суперсимметрии, соответствующим гамильтониану, рассмотренному в этом разделе, являются изотопы $^{194,195}\text{Pt}$ [7, 21] (рис. 2). Как видно из рисунка, суперсимметрия является приближенной. Согласие между теорией и экспериментом можно улучшить, преобразовав гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} \rightarrow (1 - a\hat{N}_B\hat{N}_F)\hat{H} + 2b\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}. \quad (131)$$

Это преобразование аналогично использованному в разд. 5, с той лишь разницей, что там хорошими квантовыми числами являлись как полное число

Таблица 2. Рассчитанные значения $B(E2)$ для изотопа ^{195}Pt (в $e^2 b^2$). Экспериментальные данные для ^{195}Pt взяты из [20, 47]. Экспериментальные данные по $B(E2; L_i n_i \rightarrow L_f n_f)$ для ^{194}Pt взяты из [56]. Результаты, приведенные в третьей колонке, получены с учетом перенормировки эффективного заряда у ^{195}Pt : $n_{\text{ren}} \equiv e_{\text{eff}}(^{195}\text{Pt})/e_{\text{eff}}(^{194}\text{Pt}) = 0,67$

$J_i(L_i n_i) \rightarrow J_f(L_f n_f)$	$B(E2)_{\text{exp}}$ в ^{195}Pt	$B(E2; L_i n_i \rightarrow L_f n_f)$ $\times R_{\text{SUSY}} \times n_{\text{ren}}$	$B(E2; L_i n_i \rightarrow L_f n_f)$ $\times R_{\text{SUSY}}$	R_{SUSY}
$3/2^- (2_1) \rightarrow 1/2^- (0_1)$	0,190(10)	0,168(7)	0,374(16)	1
$5/2^- (2_1) \rightarrow 1/2^- (0_1)$	0,170(10)	0,168(7)	0,374(16)	1
$3/2^- (2_2) \rightarrow 1/2^- (0_1)$	0,017(1)	0,0006(1)	0,0014(2)	1
$5/2^- (2_2) \rightarrow 1/2^- (0_1)$	0,008(4)	0,0006(1)	0,0014(2)	1
$3/2^- (2_2) \rightarrow 5/2^- (2_1)$	$\leq 0,019$	0,076(9)	0,17(2)	0,3
$7/2^- (4_1) \rightarrow 3/2^- (2_1)$	0,17(7)	0,19(1)	0,42(3)	0,9
$9/2^- (4_1) \rightarrow 5/2^- (2_1)$	0,20(4)	0,21(1)	0,47(3)	1

бозонов, так и число s -бозонов. Гамильтониан (131) имеет тот же спектр возбуждений ^{194}Pt , что и гамильтониан (116). Но спектр возбужденных состояний ^{195}Pt сжат, а псевдоспин-орбитальные дублеты расщеплены. Это преобразование гамильтониана не изменяет волновых функций.

Если сравнить экспериментальные данные для $B(E2)$ в ^{195}Pt [20, 47] с теоретическими предсказаниями, следующими из (130) (табл. 2), то видно, что теоретические предсказания для сильных переходов систематически превышают экспериментальные данные. Согласие может быть улучшено, если эффективный заряд для оператора $E2$ -перехода сделать зависящим от числа фермионов, т.е. преобразовать оператор $E2$ -перехода так же, как и гамильтониан в (131).

Подведем итоги этого раздела. Анализируя гамильтониан, построенный с помощью генераторов градуированной алгебры $U(6/12)$, мы показали, что хотя этот гамильтониан и не обладает в общем случае динамической симметрией, тем не менее часть собственных состояний этого гамильтониана, относящихся к нечетному ядру, и коллективные состояния четно-четного ядра образуют супермультиплеты. Это связано с тем, что алгебра $U(6/12)$ содержит подалгебру $U(1/2)$, являющуюся группой симметрии рассматриваемого гамильтониана.

7. НЕПОЛНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ В МОДЕЛИ ЧАСТИЦА–РОТОР

Выше уже отмечалось, что в подходе, базирующемся на динамических симметриях, внимание уделялось описанию всего спектра состояний четно-четных и нечетных ядер с помощью единого гамильтониана с фиксирован-

ными параметрами взаимодействия. Как правило, тем группам состояний, которые характеризуются одинаковыми энергиями гамма-переходов как в четно-четных, так и в нечетных ядрах, специального внимания не уделялось. Однако именно эти случаи являются примерами точной суперсимметрии, и было бы полезно показать, что такое представляющее общий интерес явление, как суперсимметрия, реализуется в спектрах ядер [50]. Экспериментально известно несколько примеров ротационных полос, основания которых имеют угловой момент $J = 1/2$, почти вырожденных по сигнатуре, которые характеризуются энергиями гамма-переходов, очень близкими к энергиям соответствующих переходов в четно-четных ядрах. Среди этих примеров есть ядра, которые либо близки, либо принадлежат к области ядер со статической деформацией. В этих случаях основания ротационных полос интерпретируются как нильсоновские состояния с $K = 1/2$.

Обычно предполагается, что нечетная частица поляризует четно-четный остов, изменяя, например, момент инерции. Действительно, спектры ротационных и квазиротационных полос в нечетных ядрах с обычной деформацией, имеющих энергии гамма-переходов, близкие к соответствующим энергиям в соседних четно-четных ядрах, сжаты по сравнению со спектрами соседних четно-четных ядер. Коэффициент сжатия равен 0,8–0,9. Однако в случае супердеформированных ротационных полос были обнаружены практически тождественные энергии гамма-переходов, совпадающие с точностью до нескольких кэВ [28]. Чтобы объяснить наблюдаемое явление — тождественные супердеформированные ротационные полосы, было предложено несколько подходов. Первое объяснение основывалось на модели частица — ротор и на концепции псевдоспина, динамически не связанного с псевдоорбитальным моментом [46]. В этом подходе одночастичный угловой момент выражается в виде суммы псевдоорбитального момента и псевдоспина. Предполагается, что псевдоорбитальный момент фермиона сильно связан с угловым моментом остова, формируя полный орбитальный момент. Псевдоспин же добавляется к полному орбитальному моменту. В противоположность обычному кориолисову взаимодействию псевдокориолисово взаимодействие включает только псевдоспин, а не полный угловой момент нечетной частицы. Параметр развязывания a для ротационных полос с $K = 1/2$ в псевдоасимптотическом пределе равен $a = (-1)^{\tilde{N}} \delta_{\tilde{\Lambda}0}$, где \tilde{N} — полное псевдоосцилляторное квантовое число, а $\tilde{\Lambda}$ — проекция псевдоорбитального момента частицы на ось симметрии. В случае псевдоорбитального синглета ($\tilde{\Lambda} = 0$) и четного \tilde{N} $a = +1$, и энергии гамма-переходов в нечетных ядрах становятся тождественными энергиями гамма-переходов в соседних четно-четных ядрах.

В другом подходе, предложенном в [45], тождественные супердеформированные полосы анализировались в рамках формализма, использующего динамические суперсимметрии. Супералгебры, включающие как бозоны, так и

фермионы, позволяют описывать на основе единого гамильтониана как четно-четные, так и нечетные ядра. Как уже отмечалось выше, концепция псевдоспина естественным образом включается в формализм суперсимметрий. Однако в [45] суперсимметрия рассматривалась в контексте $U(6/12)$ динамической суперсимметрии с соответствующим ограничением конфигурационного пространства одночастичных состояний нечетного нуклона. В этом разделе мы рассмотрим суперсимметрию в рамках модели частица — ротор, имея в виду как ядра с обычной деформацией, так и супердеформированные ядра. В этой модели нечетная частица может заселять любое состояние основной для заданной ядерной оболочки четности. Цель этого раздела — показать, что описание вырожденных по сигнатуре ротационных полос с $K = 1/2$ с энергиями гамма-переходов, тождественными энергиям соответствующих переходов в соседних четно-четных ядрах, может быть переформулировано как проявление суперсимметрии.

Остановимся чуть подробнее на концепции псевдоспина. В тяжелых ядрах одночастичные орбиты, принадлежащие ядерной оболочке с главным осцилляторным квантовым числом N , формируют слабовырожденные дублеты с квантовыми числами $l_1, j_1 = l_1 + 1/2$ и $l_2, j_2 = l_2 - 1/2 = j_1 + 1$. Состояния, принадлежащие дублетам, являются псевдоспин-орбитальными партнерами. Для практического применения этой концепции важно, что псевдоспин-орбитальное взаимодействие $\tilde{1}s$ существенно слабее, чем обычная спин-орбитальная связь $1s$.

Как и в предыдущем разделе, разложим угловой момент нечетной частицы на псевдоорбитальную и псевдоспиновую части:

$$a_{jm}^+ = \sum_{\mu, \sigma} C_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^{jm} a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+. \quad (132)$$

Используя операторы рождения и уничтожения фермиона $a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+$ и $a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}$ и предполагая, что матричные элементы r^2 не зависят от \tilde{l} [31], что выполняется приближенно, мы получим следующее выражение для оператора квадрупольного момента частицы:

$$q_{2\mu} = \langle r^2 \rangle \sum_{\tilde{l}, \tilde{l}', \nu, \nu', \sigma} \frac{\langle \tilde{l}' || Y_2 || \tilde{l} \rangle}{\sqrt{5}} C_{\tilde{l}'\nu' \tilde{l}\nu}^{2\mu} a_{\tilde{l}'\nu', \frac{1}{2}\sigma}^+ \tilde{a}_{\tilde{l}\nu, \frac{1}{2}\sigma}, \quad (133)$$

где $\langle r^2 \rangle$ задан в единицах $\frac{\hbar}{m\omega_0}$. Это предположение означает, что считаются равными как диагональные, так и недиагональные матричные элементы r^2 , не связанные с поворотом псевдоспина. В дальнейшем будем пренебрегать слабым псевдоспин-орбитальным взаимодействием. В псевдоспин-орбитальном представлении гамильтониан модели частица — ротор в лабо-

раторной системе координат имеет вид

$$H = \sum_{\tilde{l}, \nu, \sigma} E_{\tilde{l}} a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma} + \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{J}} \mathbf{L}^2 - \hbar\omega_0 \sum_{\mu} (-1)^{\mu} q_{2\mu} Q_{2-\mu}^c. \quad (134)$$

Первый член в (134) представляет энергию невзаимодействующей частицы в сферически-симметричном потенциале. Второе слагаемое — это энергия вращения. В отличие от стандартной модели частицы — ротор, здесь предполагается, что вращательный момент \mathbf{L} является векторной суммой момента остива \mathbf{R} и одночастичного псевдоорбитального момента $\tilde{\mathbf{l}}$ [36,42–44]:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{l}}. \quad (135)$$

Это очень важное предположение. Оно основывается на слабости псевдоспин-орбитального взаимодействия, благодаря которой псевдоорбитальный момент частицы оказывается сильно связанным с деформированным средним ядерным потенциалом. В результате $\tilde{\mathbf{l}}$ и \mathbf{R} оказываются связанными в полный угловой момент \mathbf{L} . Отметим также, что благодаря достаточно большому энергетическому разделению одночастичных состояний с $\tilde{\Lambda} = 1$ и $\tilde{\Lambda} = 0$, к oriолисово взаимодействие, появляющееся, если заменить в (134) \mathbf{L}^2 на \mathbf{R}^2 , окажет слабое воздействие на псевдоорбитальный синглет. В этом случае эффект к oriолисова взаимодействия в основном сводится к перенормировке момента инерции и фактора развязывания. Третий член в (134), где безразмерный оператор $Q_{2\mu}^c$ пропорционален квадрупольному моменту остива, описывает связи нечетной частицы с деформированным средним полем ядра. Так как в (134) приняты во внимание только ротационные возбуждения остива, то собственные векторы ротационной полосы, построенной на основном состоянии остива, можно представить следующим образом:

$$|R\nu\rangle = \sqrt{\frac{2R+1}{8\pi^2}} D_{\nu 0}^R. \quad (136)$$

Проекция углового момента \mathbf{R} для этой полосы принята равной нулю, в соответствии с предположением об аксиальной симметрии среднего поля. По той же причине оператор $Q_{2\mu}^c$ может быть представлен как

$$Q_{2\mu}^c = \beta D_{\mu 0}^2, \quad (137)$$

где β — параметр аксиальной деформации остива.

Операторы

$$a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{\tilde{l}'\mu', \frac{1}{2}\sigma'}, L_\nu, D_{M0}^L, \quad (138)$$

используемые при конструировании гамильтониана (134), формируют вместе с операторами

$$a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{m0}^l, \quad a_{\tilde{l}\mu, \frac{1}{2}\sigma}^- D_{m0}^l \quad (139)$$

градуированную алгебру Ли. Соответствующие коммутационные и антимомутационные соотношения приведены ниже. Чтобы упростить обозначения, ниже опущен знак тильда:

$$[L_\mu, L_\nu] = \sqrt{2} C_{1\nu 1\mu}^{1\nu'} L_{\nu'}, \quad (140)$$

$$[L_\mu, D_{M0}^L] = \sqrt{L(L+1)} C_{LM1\mu}^{LM'} D_{M'0}^L, \quad (141)$$

$$\begin{aligned} [L_\mu, a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\nu', \frac{1}{2}\sigma'}^-] &= \sqrt{l(l+1)} C_{l\nu 1\mu}^{l\nu_1} a_{l\nu_1, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\nu', \frac{1}{2}\sigma'}^- - \\ &- \sqrt{l'(l'+1)} (-1)^\mu C_{l'\nu' 1-\mu}^{l'\nu_1} a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\nu_1, \frac{1}{2}\sigma'}, \end{aligned} \quad (142)$$

$$[D_{M0}^L, D_{M'0}^{L'}] = 0, \quad (143)$$

$$[D_{M0}^L, a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\nu', \frac{1}{2}\sigma'}^-] = 0, \quad (144)$$

$$\begin{aligned} [a_{l_1\mu_1, \frac{1}{2}\sigma_1}^+ a_{l_2\mu_2, \frac{1}{2}\sigma_2}, a_{l'_1\mu'_1, \frac{1}{2}\sigma'_1}^+ a_{l'_2\mu'_2, \frac{1}{2}\sigma'_2}] &= \delta_{l'_1 l_2} \delta_{\mu'_1 \mu_2} \delta_{\sigma'_1 \sigma_2} a_{l_1\mu_1, \frac{1}{2}\sigma_1}^+ a_{l'_2\mu'_2, \frac{1}{2}\sigma'_2} - \\ &- \delta_{l_1 l'_2} \delta_{\mu_1 \mu'_2} \delta_{\sigma_1 \sigma'_2} a_{l'_1\mu'_1, \frac{1}{2}\sigma'_1}^+ a_{l_2\mu_2, \frac{1}{2}\sigma_2}, \end{aligned} \quad (145)$$

$$[a_{l\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ a_{l'\mu', \frac{1}{2}\sigma'}, a_{l_1\mu_1, \frac{1}{2}\sigma_1}^+ D_{M0}^L] = \delta_{l'l_1} \delta_{\mu'\mu_1} \delta_{\sigma'\sigma_1} a_{l_1\mu_1, \frac{1}{2}\sigma_1}^+ D_{M0}^L, \quad (146)$$

$$\begin{aligned} [L_\mu, a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M0}^L] &= \sqrt{l(l+1)} C_{l\nu 1\mu}^{l\nu'} a_{l\nu', \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M0}^L + \\ &+ \sqrt{L(L+1)} C_{LM1\mu}^{LM'} a_{l\nu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M'0}^L, \end{aligned} \quad (147)$$

$$[D_{M0}^L, a_{l\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M'0}^{L'}] = 0, \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \left\{ a_{l\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M0}^L, a_{l'\mu', \frac{1}{2}\sigma'}^- D_{M'0}^{L'} \right\} &= \delta_{ll'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\sigma\sigma'} D_{M0}^L D_{M'0}^{L'} = \\ &= \delta_{ll'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\sigma\sigma'} \sum_{L'' M''} C_{LM'L'M'}^{L''M''} C_{L0L'0}^{L''0} D_{M''0}^{L''}, \end{aligned} \quad (149)$$

$$\left\{ a_{l\mu, \frac{1}{2}\sigma}^+ D_{M0}^L, a_{l'\mu', \frac{1}{2}\sigma'}^- D_{M'0}^{L'} \right\} = 0. \quad (150)$$

В (138) и (139) \tilde{l} принимает значения $\tilde{N}, \tilde{N} - 2, \dots, 1$ или 0 , где \tilde{N} — главное псевдоосцилляторное квантовое число. Мы можем ограничить набор возможных значений l в (139) только четными числами, беря $l = 0, 2, \dots, \tilde{N}$ или $\tilde{N} - 1$. Тогда L в (138) является четным числом, принимающим значения $L = 0, 2, \dots, 2l_{\max}$, где $l_{\max} = \tilde{N}$ или $\tilde{N} - 1$. В этой градуированной алгебре операторы (138) формируют бозе-сектор, а операторы (139) — ферми-сектор.

Наша цель — найти условия, при которых в спектре нечетного ядра появляются уровни, разделенные такими же энергетическими интервалами, что и соответствующие уровни в спектре соседнего четно-четного ядра, а затем построить оператор, принадлежащий ферми-сектору рассмотренной выше градуированной алгебры Ли, который генерирует соответствующие уровни нечетного ядра при действии на состояния четно-четного соседа. Если построение такого оператора возможно, то можно говорить о суперсимметрии в ядерных спектрах или, более точно, о неполной суперсимметрии, так как не все ротационные полосы нечетного ядра, являющиеся собственными состояниями гамильтониана (134), могут быть построены с помощью такого оператора. Этот оператор должен коммутировать с гамильтонианом или должен быть оператором, генерирующим собственные моды, т.е. его коммутатор с гамильтонианом должен быть равен ему же, помноженному на некоторую константу. В последнем случае уровни рассматриваемой ротационной полосы нечетного ядра будут сдвинуты относительно соответствующих уровней четно-четного соседа на одну и ту же величину. Однако энергетические разности (энергии гамма-переходов) будут теми же самыми в обоих ядрах. Формально, когда оператор, трансформирующий бозонную систему в фермионную, не коммутирует с гамильтонианом, это означает, что гамильтониан неинвариантен относительно преобразования, генератором которого является рассматриваемый оператор. Однако в ядерной спектроскопии можно говорить о суперсимметрии только в отношении спектров возбуждения, т.е. вычитая перед рассмотрением из полных энергий массы ядер. При сравнении энергетических интервалов в ротационных полосах нечетных ядер с основными ротационными полосами соседних четно-четных ядер энергии оснований ротационных полос должны быть вычтены из энергий возбуждения. В этом отношении ситуация аналогична той, которая возникает при рассмотрении изоспиновой симметрии, когда для проверки ее применимости необходимо вычесть кулоновские энергии из масс ядер.

Рассмотрим оператор

$$P_{\frac{1}{2}\sigma} \equiv \sum_{\tilde{l},m} \chi_{\tilde{l}} C_{\tilde{l}m\tilde{l}-m}^{00} a_{\tilde{l}m,\frac{1}{2}\sigma}^+ \sqrt{2\tilde{l}+1} D_{-m0}^{\tilde{l}} \quad (151)$$

и вычислим его коммутатор с гамильтонианом (134). Коэффициенты $\chi_{\tilde{l}}$ будут определены в дальнейшем. Видно, что каждое слагаемое в (151) имеет нулевой полный орбитальный момент и, следовательно, коммутирует с ротационным членом гамильтониана (134). Полный коммутатор оператора (151) с гамильтонианом равен

$$[H, P_{\frac{1}{2}\sigma}] = \sum_{\tilde{l},\tilde{l}'} h_{\tilde{l},\tilde{l}'} \chi_{\tilde{l}'} \sum_m C_{\tilde{l}m\tilde{l}-m}^{00} a_{\tilde{l}m,\frac{1}{2}\sigma}^+ \sqrt{2\tilde{l}+1} D_{-m0}^{\tilde{l}}, \quad (152)$$

где

$$h_{\tilde{l},\tilde{l}'} = E_{\tilde{l}} \delta_{\tilde{l}\tilde{l}'} - \hbar\omega_0 \beta \langle r^2 \rangle \langle \tilde{l}0 | Y_{20} | \tilde{l}'0 \rangle. \quad (153)$$

Здесь $h_{\tilde{l},\tilde{l}'}$ — матричные элементы одночастичного гамильтониана Нильссона в псевдоосцилляторном базисе, вычисленные в предположении, что матричные элементы r^2 не зависят от \tilde{l}, \tilde{l}' . Более точно, матричные элементы $h_{\tilde{l},\tilde{l}'}$ являются частью матрицы гамильтониана Нильссона, соответствующей одночастичным состояниям с нулевой проекцией псевдоорбитального момента на ось симметрии, т.е. с $\tilde{\Lambda} = 0$. Мы определим коэффициенты $\chi_{\tilde{l}}$ так, чтобы они удовлетворяли уравнению

$$\sum_{\tilde{l}'} h_{\tilde{l},\tilde{l}'} \chi_{\tilde{l}'} = E_0 \chi_{\tilde{l}}. \quad (154)$$

Таким образом, $\chi_{\tilde{l}}$ — это коэффициенты, описывающие разложение нильссоновских одночастичных состояний в псевдоосцилляторном базисе, а E_0 — энергия нильссоновского состояния с $\tilde{\Lambda} = 0$. Окончательно мы получаем следующий результат:

$$[H, P_{\frac{1}{2}\sigma}] = E_0 P_{\frac{1}{2}\sigma}. \quad (155)$$

Из (155) следует, что $P_{\frac{1}{2}\sigma}$, действуя на состояния четно-четного ядра, порождает собственные состояния соседнего нечетного ядра с $\tilde{\Lambda} = 0$. Энергии этих состояний сдвинуты на величину E_0 относительно энергий соответствующих состояний четно-четного ядра. Однако энергии гамма-переходов будут теми же самыми как в четно-четном, так и в нечетном ядрах. Мы можем сказать также, что оператор $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ порождает ротационные состояния нечетного ядра с основанием полосы, имеющим $\tilde{\Lambda} = 0$, когда действует на состояния

четно-четного ядра. Выше этот оператор задан в лабораторной системе координат.

Как видно из выражения для оператора $P_{\frac{1}{2}\sigma}$, его полный орбитальный момент равен нулю. Поэтому $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ генерирует только состояния нечетного ядра с четным L и $\tilde{\Lambda} = 0$, когда действует на ротационную полосу, базирующуюся на основном состоянии четно-четного ядра. Из выражения для собственного вектора гамильтониана (134), имеющего $\tilde{\Lambda} = 0$:

$$|JM, L\tilde{\Lambda} = 0\rangle = \sum_{m,\sigma} C_{Lm\frac{1}{2}\sigma}^{JM} \sum_{R,l} (-1)^{\tilde{l}} C_{L0\tilde{l}0}^{R0} \chi_{\tilde{l}} \sum_{\eta,\nu} C_{\tilde{l}\eta R\nu}^{Lm} a_{\tilde{l}\eta, \frac{1}{2}\sigma}^+ |R\nu\rangle, \quad (156)$$

следует, что полный орбитальный момент L этих состояний должен удовлетворять условию

$$(-1)^{L+\tilde{l}} = +1. \quad (157)$$

Следовательно, оператор $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ будет генерировать собственные состояния нечетного ядра, только если \tilde{l} — четное число, т.е. принадлежит осцилляторной оболочке с четным \tilde{N} . Например, одночастичные состояния $p_{1/2}, (p_{3/2}, f_{5/2})$ и $(f_{7/2}, h_{9/2})$ характеризуются четными значениями псевдоорбитального момента. И в том случае, если соответствующая осцилляторная оболочка валентна, энергетические интервалы в ротационной полосе нечетного ядра, построенной на нильсоновском состоянии с $\tilde{\Lambda} = 0$, могут совпадать с соответствующими энергетическими интервалами в основной полосе четно-четного ядра. В противоположность рассмотренному выше примеру одночастичные состояния $(s_{1/2}, d_{3/2})$ и $(d_{5/2}, g_{7/2})$ имеют нечетные псевдоорбитальные моменты. Следовательно, согласно (157) в этом случае L — нечетное число, и собственные состояния нечетного ядра, базирующиеся на этих орбитах, не могут быть получены действием оператора $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ на полосу основного состояния четно-четного ядра. В принципе можно сконструировать соответствующий оператор. Однако такой оператор должен обладать ненулевым орбитальным моментом, и по этой причине он не будет коммутировать с ротационным членом гамильтониана (134). Поэтому такой коммутатор нельзя будет представить как (155). Такая ситуация иллюстрируется ротационными полосами основных состояний ^{171}Tm и ^{171}Yb . ^{171}Tm — это нечетно-протонное ядро, которое можно получить удалением протона (добавлением протонной дырки) из ^{172}Yb . Протонная дырка будет находиться в состоянии $[411]\frac{1}{2}^+$, которое характеризуется $\tilde{\Lambda} = 0$ и $\tilde{N} = 3$. Так как \tilde{N} — нечетное число, то полный орбитальный момент нечетного ядра L будет принимать только нечетные значения. Как следствие, полоса, построенная на основном состоянии ^{171}Tm , угловые моменты состояний которой являются результатом векторного сложения полного орбитального момента L и псевдоспина, равного $1/2$, будет

состоять из почти вырожденных дублетов $(1/2^+, 3/2^+), (5/2^+, 7/2^+)$ и т.д. Полоса основного состояния ^{171}Yb базируется на нильсоновском состоянии $[521]\frac{1}{2}^-$, имеющем $\tilde{\Lambda} = 0$ и $\tilde{N} = 4$. В этом случае полный орбитальный момент состояний основной ротационной полосы нечетного ядра является четным. Как следствие, эта полоса будет состоять из синглета $1/2^-$ и дублетов $(3/2^-, 5/2^-), (7/2^-, 9/2^-)$ и т.д. Энергетические интервалы в основной полосе ^{171}Yb близки к соответствующим интервалам в основной полосе ^{172}Yb , демонстрируя тем самым пример приближенной суперсимметрии в ядерном спектре. В полосе основного состояния ^{171}Tm энергетические интервалы отличаются от соответствующих разностей энергий в ^{172}Yb . Однако с хорошей точностью они следуют правилу $L(L + 1)$ (L — нечетное число) с тем же моментом инерции, что и в четно-четном ядре.

Обычно модель частица — ротор включает парное взаимодействие, эффект которого учитывается в приближении среднего поля. Соответствующий член может быть включен и в гамильтониан (134) без существенного изменения полученных выше результатов. В этом случае супероператором становится линейная комбинация операторов $P_{\frac{1}{2}\sigma}$ и $(-1)^{\tilde{l}+1/2-\sigma} P_{\frac{1}{2}-\sigma}^+$ с коэффициентами $u - v$ преобразования Боголюбова. При этом одночастичная энергия E_0 заменяется на одноквазичастичную энергию.

Вычислим для полноты картины антисимметризатор

$$\{P_{\frac{1}{2}\sigma}, P_{\frac{1}{2}\sigma'}^+\} = \delta_{\sigma\sigma'} \sum_{\tilde{l}} |\chi_{\tilde{l}}|^2. \quad (158)$$

Нормируя коэффициенты $\chi_{\tilde{l}}$ следующим образом: $\sum_{\tilde{l}} |\chi_{\tilde{l}}|^2 = 1$, получаем

$$\{P_{\frac{1}{2}\sigma}, P_{\frac{1}{2}\sigma'}^+\} = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (159)$$

Из предыдущего рассмотрения следует, что суперпартнером ротационного состояния четно-четного ядра, а именно $|R\nu\rangle$, является нормированный вектор

$$|JM, R\rangle = \sum_{m,\nu} C_{\frac{1}{2}mR\nu}^{J,M} P_{\frac{1}{2}m} |R\nu\rangle. \quad (160)$$

Рассчитаем приведенные матричные элементы оператора $E2$ -перехода между состояниями мультиплета (160). В качестве оператора $E2$ -перехода возьмем квадрупольный оператор остова $Q_{2\mu}^c$. В результате получаем выражение для приведенного матричного элемента

$$\begin{aligned} \langle J'R'||Q_2||JR\rangle &= \beta(-1)^{J'+1/2} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)(2R+1)} \times \\ &\times C_{R020}^{R'0} \left\{ \begin{array}{ccc} R & 1/2 & J \\ J' & 2 & R' \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (161)$$

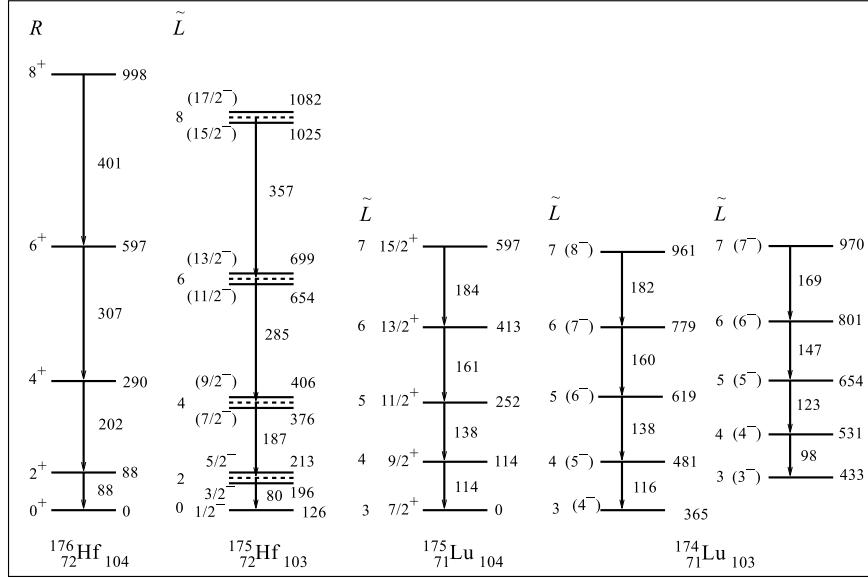


Рис. 9. Экспериментальные спектры состояний основных ротационных полос $^{175,176}\text{Hf}$ и ^{175}Lu и возбужденных ротационных полос ^{174}Lu . Энергии указаны в кэВ. Вместе со значениями полного углового момента приведены и значения псевдоорбитального момента \tilde{L}

которое может быть переписано следующим образом:

$$\langle J'R'||Q_2||JR\rangle = \beta\sqrt{2J+1}C_{J1/220}^{J'1/2}. \quad (162)$$

Последнее выражение совпадает с известным результатом модели частица — ротор [51].

Есть несколько примеров приближенной суперсимметрии в спектрах ядер, описываемых гамильтонианом (134), например, $^{181,182}\text{Pt}$, $^{173,174}\text{Hf}$ и уже отмеченный выше $^{171,172}\text{Yb}$. На рис. 3 и 4 показаны низколежащие состояния четно-четных ядер и соответствующие состояния соседних нечетных ядер, являющиеся суперсимметричными партнерами состояний основной ротационной полосы четно-четного ядра. Видно, однако, что суперсимметрия не является точной. Как и в предыдущих разделах, согласие между теорией и экспериментом можно улучшить, преобразовав гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} \rightarrow (1 - a\hat{N}_F)\hat{H} + 2b\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (163)$$

где \hat{N}_F — оператор числа частиц, добавленных к коллективному остову.

Оператор $P_{1/2m}$, рождающий нейтронную дырку, может быть применен и к состояниям основной ротационной полосы нечетно-протонного ядра. В результате получится ротационная полоса нечетно-нечетного ядра с теми же энергетическими интервалами, что и в родительском нечетно-протонном ядре. Этот случай иллюстрируется спектрами $^{174,175}\text{Lu}$, показанными на рис. 9. Действуя оператором $P_{1/2m}$ на волновые векторы состояний основной ротационной полосы ^{175}Lu , которая базируется на состоянии $7/2^+$, мы получаем две ротационные полосы ^{174}Lu , в основании которых лежат состояния 4^- и 3^- . Энергии гамма-переходов в этих полосах близки к соответствующим энергиям ^{175}Lu . Это особенно верно для полосы, основанной на состоянии 4^- , где совпадение почти точное.

Таким образом, в данном разделе было показано, что суперсимметричными партнерами состояний основной ротационной полосы четно-четного ядра являются состояния ротационной полосы соседнего нечетного ядра, базирующейся на псевдосинглете, принадлежащем оболочке с четным псевдоосцилляторным главным квантовым числом \tilde{N} . Концепция псевдоспина сыграла ключевую роль при получении этого результата. Таким образом, существование суперсимметричных мультиплетов в ядерных спектрах основывается, частично, на псевдоспиновой симметрии, которая имеет, как это показано в [52–55], корни в релятивистской теории самосогласованного поля.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре показано, что спектры возбужденных состояний атомных ядер предоставляют интересный материал для исследования проявлений суперсимметрии. В атомных ядрах можно найти как примеры весьма близких по энергии гамма-переходов в соседних четно-четных и нечетных ядрах, так и примеры спектров с нарушенной суперсимметрией, хотя при этом как четно-четные, так и нечетные ядра описываются одним и тем же эффективным гамильтонианом с единым набором параметров. Суперсимметрия позволяет ввести для описания нечетных и нечетно-нечетных ядер квантовые числа, неизвестные в прежних моделях, использовавшихся для описания таких ядер. Новая схема классификации, основанная на суперсимметрии, позволяет понять природу наблюдаемых состояний ядер, особенно в тех случаях, когда не реализуется схема слабой связи, и стимулирует новые экспериментальные исследования ядерной структуры.

Мы провели формальное сравнение алгебраических структур суперсимметричных моделей, используемых в теории ядерной структуры и в квантовой теории поля. Это сравнение продемонстрировало сходство между двумя наборами коммутационных и антакоммутационных соотношений. Хотя имеется и некоторое различие между ними, обусловленное разной структурой бозонных

алгебр в теории ядра и в квантовой теории поля. Сходство было использовано затем для получения соотношения между числами бозонных и фермионных состояний в супермультиплетах.

В обзоре также показано, что существование суперсимметрии совсем не обязательно предполагает наличие какой-либо динамической симметрии для бозонной подсистемы. Гамильтониан, описывающий бозонную подсистему (четно-четное ядро), может иметь достаточно общий вид, и в то же время в спектре фермионной подсистемы (соседнее нечетное ядро) могут быть группы состояний с теми же энергетическими интервалами, т.е. с теми же энергиями переходов, что и в чисто бозонной подсистеме.

Большое внимание было уделено рассмотрению тех случаев, когда в соседних четно-четном и нечетном ядрах можно выделить группы уровней, характеризующихся весьма близкими по величине энергиями гамма-переходов. Такие примеры можно найти в спектрах ротационных полос деформированных и особенно супердеформированных ядер. Это примеры суперсимметрии, реализующейся с весьма высокой точностью. В обзоре показано, что описание таких ротационных полос в рамках модели частица — ротор может быть переформулировано как проявление суперсимметрии. При этом операторы, используемые при построении гамильтониана модифицированной модели частица — ротор, образуют вместе с рядом дополнительных операторов градуированную алгебру Ли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mayazawa H.** — Prog. Theor. Phys., 1966, v.36, p.1266.
2. **Neven A., Schwarz J.H.** — Nucl. Phys., 1971, v.B31, p.86.
3. **Gervais J.L., Sakita B.** — Nucl. Phys., 1971, v.B34, p.632.
4. **Gol'fand Yu.A., Likhtman E.P.** — JETF Lett., 1971, v.13, p.323.
5. **Volkov D.V., Akulov V.P.** — JETF Lett., 1972, v.16, p.438.
6. **Wess J., Zumino B.** — Nucl. Phys., 1974, v.B70, p.34.
7. **Iachello F., Van Isacker P.** — The Interacting Boson–Fermion Model, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
8. **Frank A., Van Isacker P.** — Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Physics, John Wiley & Sons, New York, 1994.
9. **Iachello F.** — Phys. Rev. Lett., 1980, v.44, p.772.
10. **Balantekin A.B., Bars I., Iachello F.** — Nucl. Phys., 1981, v.A370, p.284.
11. **Iachello F., Kuyucak S.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1981, v.136, p.19.
12. **Bijker R., Kota V.K.B.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1984, v.156, p.110.
13. **Bijker R., Iachello F.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1985, v.161, p.360.
14. **Bijker R., Kota V.K.B.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1988, v.187, p.148.

15. **Vervier J.** — Revista Nuovo Cimento, 1987, v.10, No.9, p.1.
16. **Vervier J.** — In: Nuclear Structure, Reactions and Symmetries, v.1, p.175, Dubrovnik, Yugoslavia, 1986, eds. R.A.Meyer and V.Paar, World Scientific, 1986.
17. **Cizewski J.A.** — In: Nuclear Structure, Reactions and Symmetries, v.1, p.181, Dubrovnik, Yugoslavia, 1986, eds. R.A.Meyer and V.Paar, World Scientific, 1986.
18. **Warner D.D., Casten R.F., Frank A.** — Phys. Lett. B, 1986, v.180, p.207.
19. **Vervier J., Van Isacker P., Jolie J. et al.** — Phys. Rev. C, 1985, v.32, p.1406.
20. **Mauthofer A., Stelzer K., Gerl J. et al.** — Phys. Rev. C, 1986, v.34, p.1958.
21. **Metz A., Jolie J., Graw G. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1999, v.83, p.1542.
22. Tables of Isotopes. Eighth Ed., ed. by Firestone R.B. et al. Wiley, NY, 1996.
23. **Fabricius B. et al.** — Nucl. Phys., 1996, v.A523, p.426.
24. **Jett J.H., Lind D.A.** — Nucl. Phys., 1970, v.A155, p.182.
25. **Voigt M.J.A. et al.** — Nucl. Phys., 1990, v.A507, p.447.
26. **Popesku D.G. et al.** — Phys. Rev. C, 1997, v.55, p.1175.
27. **Singh B., Firestone R.B., Chu S.Y.F.** — Table of Superdeformed Nuclear Bands and Fission Isomers, LBL-38004, UC-413, 1996.
28. **Byrski T. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.64, p.1650.
29. **Arima A., Iachello F.** — Interacting Boson Model, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
30. **Hecht K.T., Adler A.** — Nucl. Phys., 1969, v.A 137, p.129.
31. **Arima A., Harvey M., Shimizu K.** — Phys. Lett., 1969, v.30B, p.517.
32. **Jolos R.V., von Brentano P.** — Phys. Rev. C, 1999, v.60, p.064318.
33. **Kaku M.** — Quantum Field Theory, Oxford University Press, New York, Oxford, 1993.
34. **Jolos R.V., von Brentano P.** — Phys. Rev. C, 2000, v.62, p.034310.
35. **Alhassid Y., Leviatan A. J.** — Phys. A, 1992, v.25, p.L1265.
36. **Leviatan A.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.818.
37. **Leviatan A., Sinai I.** — Phys. Rev. C, 1999, v.60, p.061301.
38. **Van Isacker P.** — Phys. Rev. Lett., 1999, v.83, p.4269.
39. **Talmi I.** — Phys. Lett. B, 1997, v.405, p.1.
40. **Leviatan A., Ginocchio J.N.** — Phys. Rev. C, 2000, v.61, p.24305.
41. **Escher J., Leviatan A.** — Phys. Rev. Lett., 2000, v.84, p.1866.
42. **Warner D.D., Casten R.F.** — Phys. Rev. Lett., 1982, v.48, p.1385.
43. **Lipas P.O., Toivonen P., Warner D.D.** — Phys. Lett., 1985, v.B 155, p.295.
44. **Warner D.D.** — Phys. Rev. Lett., 1984, v.52, p.259.
45. **Gelberg A., von Brentano P., Casten R.F.** — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 1990, v.16, p.L143.
46. **Nazarewicz W., Fallon P., Twin P.J., Garrett J.D.** — Phys. Rev. Lett., 1990, 64, 1654.
47. **Bruce A.M., Gelletly W., Lukasiak J. et al.** — Phys. Lett., 1985, v.165B, p.43.
48. **Bohr A., Hamamoto I., Mottelson B.R.** — Phys. Scrip., 1982, v.26, p.267.
49. **Van Isacker P., Elliot J.P., Warner D.D.** — Phys. Rev. C, 1987, v.36, p.1229.
50. **Jolos R.V., von Brentano P.** — Phys. Rev. C., in press.

51. **Bohr A., Mottelson B.R.** — Nuclear Structure, v.II, Benjamin, New York, 1975.
52. **Bahri C., Draayer J.P., Moszkowski S.A.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.68, p.2133.
53. **Ginocchio J.N.** — Phys. Rev. Lett., 1997, v.78, p.436.
54. **Meng J., Sugawara-Tanabe K., Yamaji S. et al.** — Phys. Rev. C, 1998, v.58, p.R632.
55. **Sugawara-Tanabe K., Arima A.** — Phys. Rev. C, 1998, v.58, p.R3065.
56. **Browne E., Singh B.** — Nucl. Data Sheets, 1996, v.79, p.277.

УДК 530.145; 539.19

MULTIDIMENSIONAL POLARON WITHIN THE GENERALIZED GAUSSIAN REPRESENTATION

G.V. Efimov, G. Ganbold*

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

A path-integral approach called the *Generalized Gaussian Representation* is systematically applied to the polaron problem in arbitrary spatial dimensions ($d \geq 1$). This method represents a generalized Gaussian approximation, whose leading order represents the best variational estimation over Gaussian fluctuations. Main quasi-particle characteristics of the Fröhlich and Dirac polaron, namely, the ground-state energy and the effective mass are derived within and beyond the generalized Gaussian approximation. Explicit analytical results are obtained in the weak- and strong-coupling limit.

Метод обобщенного гауссовского представления для интегралов по траекториям систематично применен к проблеме полярона в пространстве произвольной размерности. Подход является, по сути, обобщенным гауссовским представлением, ведущее приближение которого воспроизводит лучшую вариационную оценку для гауссовых флуктуаций в системе. Основные квазичастичные характеристики поляронов Фрелиха и Дирака, такие как энергия основного состояния и эффективная масса, получены в рамках и вне пределов обобщенного гауссовского приближения. Явные аналитические результаты получены в пределах слабой и сильной связи.

1. INTRODUCTION

The polaron concept introduced by Landau [1] describes a nonrelativistic conduction electron placed in an ionic crystal. The Coulomb field of the electron causes distortion of the surrounding ions which reacts back on the electron, changing its energy and mass. A slowly moving electron followed by accompanying perturbation of the lattice forms a quasi-particle which is called a *polaron*.

The polaron problem in condensed-matter physics has been attracting much attention over the last decades, including the general field-theoretic formulation as well as particular experiment on cyclotron-resonances and transport properties [2, 3]. As a simplified model of a particle interacting with surrounding medium the polaron can serve as a testing ground of various nonperturbative methods developed for systems where conventional perturbative approaches do not work.

*Permanent address: Institute of Physics and Technology, Mongolian Academy of Sciences, 210651 Ulaanbaatar, Mongolia.

The physical properties of the polaron are different from those of the band electron and depend on the electron-lattice interaction strength α . Quantities of interest are the ground-state energy $E(\alpha)$, the effective mass $m^*(\alpha)$ and some other quasi-particle characteristics of the polaron such as the effective radius, average phonon number, the mobility, the impedance, etc. Further developments of the standard polaron concept spread into a large area considering the effect of the external fields, the piezo-, acoustic-, bound-, small- and spin-polaron, bipolarons and polaronic excitons, etc. Experimentally, the polaron effects have been observed in various physical systems [4,5].

A great number of studies has been devoted to the ground-state energy (GSE) and the effective mass (EM) of the polaron. The problem of deriving the GSE and the EM simultaneously by one method is of considerable significance because one can suppose that in comparing two approximate methods the one giving the better $E(\alpha)$ will likely give the better $m^*(\alpha)$ that can be measured directly [6]. Second, experiments on the ionization energy of bound polarons [7] require accurate estimation of the free-polaron GSE.

Different approaches and methods have been developed to investigate the polaron in the weak [8], intermediate [9] and strong coupling regime [10].

Typically, exact results are available only in the limiting cases of weak coupling ($\alpha \rightarrow 0$) and strong coupling ($\alpha \rightarrow \infty$). While the weak-coupling results may be obtained by conventional perturbation expansions, rigorous proofs of the strong-coupling behaviour require more advanced techniques [11, 12], reflecting the qualitative difference between the polaron states in the two limits.

The first studies on the polaron self-energy and effective mass were performed in three dimensions within a «Produkt-Ansatz» [10]. In fact Pekar's method corresponds to the adiabatic *strong-coupling* regime of the polaron theory. In the pioneer works [13, 14], a canonical-transformation method was applied to this problem.

A systematic field-theoretic formulation of the polaron theory suitable for the *weak-coupling* was proposed by Fröhlich [8] to describe the interaction between the band electron (or hole) and phonons, quanta associated with the long-wave optical branch of lattice vibrations. In his original paper, Fröhlich obtained the first weak-coupling perturbation results for the GSE and EM. A method based on two successive canonical transformations by introducing the polaron total momentum and a set of adjustable functions opens a variational weak-coupling approach to the polaron problem [9].

The first attempt to built the *all-coupling* polaron theory, valid for arbitrary values of coupling, was made by Feynman [2] within the path integral (PI) formalism. The Feynman approach for the polaron has an advantage because the phonon coordinates are adequately eliminated and as a consequence, the polaron problem is reduced to an effective one-particle problem with a retarded interaction. Thus, the solution of the polaron problem amounts to the technical mathematical

problem how to calculate the non-Gaussian PI. As far as the PI formalism allows to build a class of exactly solvable models corresponding to quadratic functionals, one can use these functionals as bases for variational estimations of the polaron problem. As a result, Feynman's PI approach gives a good upper bound to the GSE in the whole range of the coupling constant. Later Feynman's variational approach was generalized to two [15], more than two [16, 17], and even to a continuum of such oscillators [18, 19] within the variational ansatz.

The question arises, can the Feynman's variational estimations of the polaron PI be improved by a more general approach? Although there exists small hope to calculate this PI exactly, we can realize the following programme. The idea is to get the representation

$$e^{-F} = \int \frac{\delta r}{\sqrt{\det D_0}} e^{-\frac{1}{2}(r D_0^{-1} r) + W[r]} = e^{-F_0} \int \frac{\delta \rho}{\sqrt{\det D}} e^{-\frac{1}{2}(\rho D^{-1} \rho) + W_1[\rho]}$$

by some transformations of the functional variables $r \rightarrow \rho$ in order to rewrite the initial integral on the left side in the form on the right side, where the zeroth approximation F_0 is the best variational Gaussian estimation of the initial integral. Calculations of the perturbation corrections over W_1 give subsequent contributions to the zeroth approximation

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \dots$$

The method which realizes this programme was called the *Gaussian Equivalent Representation* (GER) and was formulated in [20, 21]. It is based on the observation that the normal-ordering quantum field technique means in reality the main contributions to functional integrals (the so-called tadpole diagrams) to be taken into account. In other words, our approach gives prescription how to find the most optimal Gaussian functional measure for the polaron path-integral. Within this approach the Gaussian leading term takes care of all Gaussian fluctuations around the ground state and remaining higher orders for non-Gaussian contributions can be calculated systematically. Our approach does not require the smallness of the coupling constant. This method is applicable to a huge number of physical problems which admit a path-integral formulation of the problem and where a ground-state exists. Some details can be found also in [22, 23].

In the present paper we purpose to give a systematic description of the *Gaussian Equivalent Representation*, suitable to derive accurately the polaron properties for whole range of coupling in different spatial dimensions. We concern neither the bound polaron, the bi-polaron nor other polaron excitations. Originally, the term polaron is only referred to the electron in an interaction with longitudinal-optical modes of lattice vibrations. In this paper, we do not concern ourselves with the acoustic modes in a piezo-electric crystal. A series of reviews devoted to these and other related themes can be found, in particular, in [24–29].

The paper is organized as follows. In Sections 2 and 3, we extend the conventional Fröhlich polaron model into $d \geq 1$ dimensions within the path integral approach. A short review of some known variational and nonvariational perturbation methods is given in Section 4. The polaron main quasi-particle properties, namely, its ground-state energy and effective mass are considered in Section 5. Hereby, we give an extended set of definitions of the polaron effective mass and compare them. The basic idea and short description of the GGR method as well as its particular application to the d -dimensional polaron are described in Section 6. Section 7 is devoted to the generalized Gaussian approximation of the d -dimensional polaron GSE and EM in the entire range of the coupling constant. The necessary non-Gaussian corrections to the GGR results are discussed in Section 8. Here, we restrict ourselves to evaluating the next-to-leading non-Gaussian corrections and find them to be rather small. Exact analytical (for the weak- and strong-coupling regimes) and some numerical results obtained in the intermediate-coupling range are represented in Section 9.

2. FRÖHLICH–FEYNMAN POLARON

The Fröhlich theory [8] of the polaron serves as an idealized construction modeling the real electron behaviour in ionic and polar crystals. Admitting several simplifying assumptions, the model Hamiltonian (three-dimensional) reads as follows [8]:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \left(A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} + A_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{kr}} \right), \quad (1)$$

where \mathbf{p} , \mathbf{r} , and m denote the momentum, position operator and the bare mass of the electron; $a_{\mathbf{k}}$ and $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ are the phonon annihilation and creation operators, whereas \mathbf{k} and $\omega_{\mathbf{k}}$ are the wave vector and the frequency at which the phonons couple to the electron. For the longitudinal-optical branch of the lattice vibrations (optical polaron), $\omega_{\mathbf{k}} = \omega$ does not depend on \mathbf{k} . Here and in the following we set units such that $m = \omega = 1$. The electron-phonon coupling for $d = 3$ is given by

$$A_{\mathbf{k}} = -i2^{3/4} \sqrt{\frac{\alpha\pi}{\Omega}} \frac{1}{|\mathbf{k}|}, \quad (2)$$

where Ω is the quantization volume and α is the Fröhlich dimensionless constant.

As is known, the exact solution to (1) has not been obtained yet. The Fröhlich Hamiltonian is self-adjoint and half-bounded from below [30]. Besides, \mathcal{H} is invariant with respect to the Abelian group of translation: $a_{\mathbf{k}} \rightarrow a_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{ak})$

and $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$. The total momentum

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (3)$$

commutes to the Hamiltonian $[\mathcal{H}, \mathbf{P}] = 0$ which results in the strict translational symmetry of the system, so that the momentum \mathbf{P} is the good quantum number.

The conservation of the total momentum allows one to use a canonical transformation

$$\mathcal{U} = \exp \left\{ -i\mathbf{r} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right\}$$

and to go to the following representation of the Hamiltonian

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U} \mathcal{H} \mathcal{U}^\dagger &= \mathcal{H}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right)^2 + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + g \sum_{\mathbf{k}} \left(A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + A_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (4)$$

where \mathbf{P} is a c-number.

Due to the linear electron-phonon coupling in (1) the phonon variables can be analytically eliminated explicitly by either solving the operator equations of motion or by integrating out within a path-integral approach. The polaron problem can be re-formulated within different path-integral techniques [31, 32]. Among these methods Feynman's PI approach [2] stands out due to the elegance and all-coupling nature, within it one obtains a one-particle model.

The density matrix looks like

$$\rho_{\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle 0 | e^{-\beta \mathcal{H}} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | 0 \rangle = N \int_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}(\beta)=\mathbf{r}_1} \delta \mathbf{r} e^{-S[\mathbf{r}]}, \quad (5)$$

where the normalization constant N provides with the normalization for $\alpha = 0$

$$\rho_{\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|_{\alpha=0} = \exp \left\{ -\beta \frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\beta} \right)^2 \right\}. \quad (6)$$

The effective action is introduced as follows

$$S[\mathbf{r}] = S_0[\mathbf{r}] + S_{\text{int}}[\mathbf{r}],$$

where

$$S_0[\mathbf{r}] = \frac{m}{2} \int_0^\beta dt \dot{\mathbf{r}}^2(t) = \frac{m}{2} \iint_0^\beta dt ds (\mathbf{r}(t) \mathbf{D}_0^{-1}(t, s) \mathbf{r}(s)) = \frac{m}{2} (\mathbf{r} \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{r}), \quad (7)$$

$$(\mathbf{D}_0^{-1}(t, s))_{ij} = \delta_{ij} D_0^{-1}(t, s), \quad D_0^{-1}(t, s) = -\frac{d^2}{dt^2} \delta(t - s).$$

The Green function satisfying the equation

$$(D_0^{-1} D_0)(t, s) = \int_0^\beta du D_0^{-1}(t, u) D_0(u, s) = \delta(t - s)$$

and obeying the zero boundary condition reads

$$\begin{aligned} D_0(t, s) &= -\frac{1}{2}|t - s| + \frac{1}{2}(t + s) - \frac{ts}{\beta}, \\ (\mathbf{D}_0(t, s))_{ij} &= \delta_{ij} D_0(t, s). \end{aligned} \quad (8)$$

The interaction functional looks like

$$S_{\text{int}}[\mathbf{r}] = -\frac{\alpha}{\sqrt{8}} \iint_0^\beta dt ds \frac{e^{-|t-s|}}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s)|}. \quad (9)$$

The partition function reads

$$\begin{aligned} Z_\beta(\alpha) &= e^{-\beta E(\alpha)} = \int d\mathbf{r} \rho_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = N \int_{\substack{\mathbf{r}(\beta)=\mathbf{0} \\ \mathbf{r}(0)=\mathbf{0}}} \delta \mathbf{r} e^{-S[\mathbf{r}]} = \\ &= \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]}, \quad d\sigma_0[\mathbf{r}] = \sqrt{\det \mathbf{D}_0^{-1}} \delta \mathbf{r} e^{-S_0[\mathbf{r}]}. \end{aligned} \quad (10)$$

where $E(\alpha)$ is the ground-state energy.

The functional integral in (10) will be the basic object of our investigation.

The advantage of the PI formulation is obvious: the original many-body problem has been transformed into an effective one-particle model, just with the electron coordinate $\mathbf{r}(t)$. On the other hand, effective action $S_{\text{int}}[\mathbf{r}]$ is nonlocal and has either Coulombic (for $d \geq 2$) or δ -function (for $d = 1$) singularity. This — up to now — has prevented any further exact analytic treatment except in the limits $\alpha \rightarrow 0$ and $\alpha \rightarrow \infty$. For arbitrary couplings, an approximation method should be applied.

3. POLARON IN d DIMENSIONS

The study of the polaron properties in reduced dimensionality ($d < 3$) is currently attracting much attention. Traditionally, the polaron problem has been investigated in three dimensions. In recent years, however, polaron effects have been observed in low-dimensional systems [33]. The growing interest in low-dimensional polarons can be attributed to several factors. In particular, advanced semiconductor technology [34–37] makes it possible to confine electrons in quasi-low-dimensional structures. Another reason is due to inevitable theoretical enhancement of the conventional ($d = 3$) polaron model in lowering the spatial dimensions [31], [38–41]. Certain physical problems have been mapped into a two-dimensional ($d = 2$) polaron theory [42–44], and the possibility that an electron may be trapped on the surface of a dielectric material has attracted much interest [45]. The properties of the polaron confined to one dimension ($d = 1$) have attracted considerable attention [38, 41, 46, 47].

Considering a polaron confined in any dimensions different from three ($d \neq 3$), we assume that the electron-phonon interaction keeps its «standard» Coulomb-like ($1/|r|$) behaviour [39]. Note, for $d = 1$ the Dirac «delta»-function is commonly implied rather than the nonintegrable $1/r$ form [38]. In other words, we assume that for arbitrary dimension the polaron interaction functional looks like

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{U}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \begin{cases} 2\delta(r), & d = 1, \\ |\mathbf{r}|^{-1}, & d \geq 2, \end{cases} \quad \frac{\alpha}{\Omega} \tilde{U}(\mathbf{k}) = \sqrt{2} |A_{\mathbf{k}}|^2. \quad (11)$$

The numerical prefactor 2 for δ function is chosen to fit the conventional weak-coupling limit $E(\alpha) = -\alpha + O(\alpha^2)$ for $d = 1$.

Assumption (11) leads to certain k -dependence of the *generalized multidimensional* coupling $A_{\mathbf{k}}$. Going to the continuous limit as $\Omega \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \mapsto \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}$$

we redefine the electron-phonon coupling factor in arbitrary dimensions ($d \geq 1$) as follows:

$$|A_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}\Omega} \tilde{U}(\mathbf{k}) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}\Omega} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha(2\pi)^d B_d}{\sqrt{2}\Omega |\mathbf{k}|^{d-1}}. \quad (12)$$

In particular,

$$B_d = \begin{cases} \pi^{-1}, & d = 1, \\ (2\pi)^{-1}, & d = 2, \\ (2\pi^2)^{-1}, & d = 3. \end{cases}$$

We see that the conventional value (2) for $d = 3$ can be reproduced from (12).

Accordingly, we redefine the interaction functional of the multidimensional polaron as follows:

$$S_{\text{int}}[\mathbf{r}] = -\frac{\alpha}{\sqrt{8}} \iint_0^{\beta} dt ds e^{-|t-s|} U(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s)) = - \int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)}, \quad (13)$$

where

$$d\Omega_{tsk} = \frac{\alpha B_d}{\sqrt{8}} e^{-|t-s|} dt ds \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^{d-1}}, \quad \mathbf{R}(t,s) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s).$$

4. SHORT REVIEW OF METHODS

Owing to its important practical and theoretical implications, a great number of investigations utilizing various methods have been devoted to the Fröhlich polaron. Below, we shortly survey a few original techniques.

Operator methods

- Fröhlich [8] has shown that the first studies on the polaron [1, 10] had been, in fact, devoted to the strong-coupling regime. The main idea of the Pekar «Produkt-Ansatz» is that the electron excitations are governed by a potential adopted to the ground state. The Landau-Pekar theory leads to quantum states localized around fixed space points which can be chosen arbitrary. According to this approach, the polaron wave function $|\Psi\rangle$ is written as a direct product of the electron $|\psi\rangle$ and field $|\varphi\rangle$ wave functions. Hereby, $|\varphi\rangle$ parametrically depends on $|\psi\rangle$. Further development of this method can be found, in particular, in [13, 14]. The most rigorous results for the strong-coupling limits of the GSE and EM have been reported in [11, 12, 48]. Following this Ansatz, the GSE can be found (for $d \geq 2$) by performing the following variational task:

$$-\lim_{\alpha \rightarrow \infty} E(\alpha)/\alpha^2 = \min_{\psi} \left\{ - \int d\mathbf{x} (\nabla \psi(\mathbf{x}))^2 + \iint d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{\psi^2(\mathbf{x}) \psi^2(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right\}$$

with respect to the trial function $\psi(\mathbf{x})$ obeying the normalization $\int d\mathbf{x} |\psi(\mathbf{x})|^2 = 1$.

Giving the exact GSE for the polaron, this method allows one to test other «all-coupling» methods in the limit $\alpha \rightarrow \infty$. However, the «Produkt-Ansatz» fails in describing actual polar crystals with $\alpha \propto 1$.

- Besides the conventional weak-coupling perturbation expansion in a series of α , the polaron model admits one to use also an alternate strong-coupling expansion in inverse powers of α . This unique property of the polaron model

was utilized to obtain asymptotic behaviours of the polaron GSE. A systematic perturbation theory in powers of α^{-1} gives an adiabatic result in the lowest order (which is proportional to α^2) and a correction (proportional to α) which is the perturbation-theory result [49]. However, the accuracy of this method is not sufficient in comparison with the complexity of the technique.

- A weak-coupling method was proposed in [50] taking into account a few phonon correction to the Davydov phonon coherent state. Within this approach the Lee–Low–Pines canonical transformation [9] is applied to the polaron Hamiltonian. Then, a coherent-state wave function is constructed to satisfy the Schrödinger equation. Gradually improving the trial wave function to diagonalize the Hamiltonian and involving more and more phonon degrees, one obtains an iterative procedure to calculate the GSE and EM of the optical polaron. It results in smooth data for the GSE of the one-dimensional polaron for $\alpha < 2.5$. However, the complexity of the iteration scheme increases rapidly and in fact only a two- and three-phonon correlation is utilized in [38]. The obtained result is neither an upper nor a lower bound to the energy. Besides, this method belongs to the class of weak-coupling approaches and, therefore, the valid range of this technique is very restricted. Higher phonon numbers are required to extend this restricted region of α . By increasing (even theoretically) the number of involved phonons one obtains only a polynomial in powers of α . This will contradict the correct strong-coupling behaviour with expansion in powers of $1/\alpha^2$ instead of $1/\alpha$ [49].

Path-integral methods

Up to now all known analytic investigations of a two-time action (9) describing the retarded, or nonlocal Coulomb interaction are reduced to the problem how to estimate PIs like (10) by using a Gaussian-type measure. The first attempt was done in [51]. Since many approximation methods have been developed to combine the solvability of the Gaussian approach with the simplicity of the variational principle, especially to estimate the polaron ground-state characteristics. All variational approaches are based on the well-known Jensen (or, Bogoliubov) inequalities

$$\begin{aligned} e^{-F} &= N \int \delta \mathbf{r} e^{-S_0[\mathbf{r}] - S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} = N \int \delta \mathbf{r} e^{-S_0[\mathbf{r}] - S_\mu[\mathbf{r}] + S_\mu[\mathbf{r}] - S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \geqslant \\ &\geqslant \exp \{-F_\mu + \langle S_\mu - S_{\text{int}} \rangle_\mu\}, \\ e^{-F_\mu} &= N \int \delta \mathbf{r} e^{-S_0[\mathbf{r}] - S_\mu[\mathbf{r}]}, \quad \langle (*) \rangle_\mu = e^{F_\mu} \int \delta \mathbf{r} (*) e^{-S_\mu[\mathbf{r}]}, \\ F &\leqslant F_0 = \min_\mu [F_\mu - \langle S_\mu - S_{\text{int}} \rangle_\mu]. \end{aligned}$$

Here $S[\mathbf{r}]$ is a quadratic over r functional depending on a set of variational parameters μ . The choice of $S_\mu[\mathbf{r}]$ defines different variational approaches.

Now we give a short survey of a few known approaches. Note, however, that this short list does not at all cover the whole area of enormous ideas, methods and techniques developed and utilized to the polaron problem.

- The simplest variational Ansatz is to choose a one-parameter (say, μ) quadratic trial action instead of the exact one

$$S_{\text{osc}}[\mathbf{r}] = S_0[\mathbf{r}] - \frac{\mu^2}{2} \int_0^\beta dt \mathbf{r}^2(t) = \frac{1}{2} \int_0^\beta dt [m\dot{\mathbf{r}}^2(t) - \mu^2 \mathbf{r}^2(t)].$$

This simplest version of Gaussian PI is, of course, explicitly solvable and by optimizing the obtained self-energy with respect to μ , one obtains the simplest variational approximations to the GSE (see, e.g., [19] for $d = 3$). The «simple oscillator» approach results in a discontinuous function for the self-energy that may mislead to the wrong prediction of the nature of the polaron ground state. Besides, by construction it serves as a weak-coupling approach and, therefore, it does not fit the correct strong-coupling behaviours for the GSE and EM.

- Among the approximations which are believed to describe the polaron characteristics reasonably well for all values of α , Feynman's celebrated variational method [2] stands out in that it smoothly interpolates between the weak- and the strong-coupling regime. This technique uses a two-parameter trial action and can be considered as a natural successor of the simple oscillator model. It uses the Jensen–Peierls inequality and is based on an exactly solvable quadratic action

$$S_{\text{Feyn}}[\mathbf{r}] = S_0[\mathbf{r}] - \frac{C}{2} \iint_0^\beta dt ds e^{-w|t-s|} (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s))^2.$$

It represents a retarded oscillator-potential model and the corresponding free energy results in a continuous upper bound to the GSE valid throughout the whole range of α .

To define the polaron EM, Feynman has introduced an imaginary-time «velocity» and replaced the polaron action with the following trial action [2]

$$S_F[\mathbf{r}, \mathbf{v}] = S_0[\mathbf{r}] - \frac{C}{2} \iint_0^\beta dt ds e^{-w|t-s|} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s) - i\mathbf{v}(t-s)|^2.$$

Due to the quadratic nature of $S_F[\mathbf{r}, \mathbf{v}]$, the partition function at zero temperature

$$e^{-\beta E_F(\alpha, \mathbf{v})} \propto \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int d\mathbf{r} e^{-S_F[\mathbf{r}, \mathbf{v}]}$$

has been evaluated explicitly. A variational optimization over $E_F(\alpha, \mathbf{0})$ may define the parameters C, w . Then, by using the expansion $E_F(\alpha, \mathbf{v}) = E_F(\alpha) +$

$+ \frac{1}{2}m_F^* \mathbf{v}^2 + O(\mathbf{v}^4)$ Feynman has found an approximation m_F^* to the polaron EM. In the limiting cases of $\alpha \rightarrow 0$ and $\alpha \rightarrow \infty$, the Feynman mass differs slightly from the known exact value of the EM and, for general α it gives a reasonable approximation. However, the Feynman definition of the EM is not well established. First, a reasonable set of parameters C, w optimized for the GSE may not necessarily be good for the EM. Second, Feynman's trial action does not reflect the preservation law of the total momentum \mathbf{P} , when the potential well seizing the particle moves. Therefore, a functional variational method modifying the Feynman approach to the case of preserving $\mathbf{P} \neq 0$ was suggested in [52]. Here, a polaron path integral in respect to the fluctuation $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - i\mathbf{P}t/M$ is considered, where $i\mathbf{P}/M$ is average transportational velocity of the system. The parameter M is defined from the constrained minimum of the excited energy for fixed \mathbf{P} . The final result of [52] was in full agreement with corresponding Feynman estimate.

In contrast with the simplest oscillator model, the Feynman approach results in the correct behaviour of the GSE even for the strong-coupling regime, deviating from the exact value within a few per cent. Nevertheless, it remains a variational model adapted to optimize the GSE and, therefore, a more strict technique should be developed especially to define and estimate the EM.

A scaling relation connecting the Feynman estimates performed in different numbers of spatial dimension has been reported in [53, 54].

- A straightforward extension of the Feynman method for the polaron problem has been developed particularly by increasing the number of oscillators in describing the trial action as follows:

$$S_N[\mathbf{r}] = S_0[\mathbf{r}] - \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{2} \iint_0^\beta dt ds e^{-\omega_n |t-s|} (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s))^2.$$

The estimation has been performed with $N = 2$ and $N = 3$ in [15] and [16], respectively. Later, a sum of up to 32 nonlocal oscillators has been considered and a particular estimation has been obtained for $N = 8$ [17].

- An essential generalization of the Feynman method has been proposed in [19] and [18] independently. Within this approach the polaron approximate action is given by [19]

$$S_{AGLS}[\mathbf{r}] = S_0[\mathbf{r}] - \lambda \iint_0^\beta dt ds f(t-s) (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s))^2 \quad (14)$$

with an isotropic trial function $f(t-s) \geq 0$. In fact, this general two-time isotropic action essentially extends the Feynman choice and corresponds to the limiting case $N \rightarrow \infty$ for the multioscillator model. The AGL–Saitoh method

gives the best upper bound to the GSE for $d = 3$. Note the specific factorization of time-damping in (14).

- An original path-integral approximation scheme to the Pekar–Fröhlich polaron problem in multidimensions has been developed in [55] by using an expansion in the inverse powers of spatial dimension number d . The first step of this model is to redefine the electron-phonon coupling constant as $\alpha_d = \alpha\sqrt{8}d^{3/2}$ which allows one to expand the polaron GSE and EM as follows:

$$E(\alpha) = dE_0(\alpha) + E_1(\alpha) + O(1/d), \quad m^*(\alpha) = dm_0^*(\alpha) + m_1^*(\alpha) + O(1/d).$$

The next key point in [55] is the stationary point calculations for $d \rightarrow \infty$. The stationary point requirement leads to the master equations that coincide with the results of the AGL–Saitoh method. The numerical results obtained for the leading terms are very close to the data due to the AGL–Saitoh method, but next corrections are distinct that stresses the different origin of the original ideas. It has been shown that the AGL–Saitoh variational method becomes asymptotically exact in the limit of $d \rightarrow \infty$. The specific factorization of the leading term resulted in a scaling relation connecting $E(\alpha)$ (and $m^*(\alpha)$) calculated in different numbers d .

5. POLARON QUASI-PARTICLE CHARACTERISTICS

The main quasi-particle characteristics of the polaron are the GSE and EM. To evaluate correctly these quantities one should first give the proper definition and then to choose an appropriate method of estimation. Hereby, the definition should not depend on an estimation method. From this point of view, some of earlier investigations devoted to the problem (see, e.g., [2, 18]) are method-dependent, i.e., they lack the clear differentiation between the proper definition and the estimation method.

Our aim is to define the ground state energy $E(\alpha)$ and the effective mass $m^*(\alpha)$ of the d -dimensional polaron self-consistently in terms of the following functional integral

$$\begin{aligned} Z_\beta(\alpha, \mathbf{u}^2) &= e^{-\beta\Phi(\alpha, \mathbf{u}^2)} = N \int_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{0}}^{\mathbf{r}(\beta)=\mathbf{0}} \delta\mathbf{r} \exp \left\{ -\frac{m}{2} \int_0^\beta dt \dot{\mathbf{r}}^2(t) - S_{\text{int}}[\mathbf{r} + \mathbf{u}] \right\} = \\ &= \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r} + \mathbf{u}]}, \end{aligned} \quad (15)$$

where $S_{\text{int}}[\mathbf{r}]$ is given in (13) and $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} t$.

Within the path-integral formalism the definition of the GSE is well established and unique — it is the zero temperature limit of free energy of the polaron system.

$$E(\alpha) = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln Z_\beta(\alpha, 0) = \Phi(\alpha, 0) = \Phi(\alpha).$$

However, there exist several ways to determine the EM by using different physical principles. Some of them are self-consistent, i.e., they involve only polaron internal dynamic variables, while others are based on the response of the polaron system to an external source like electric and magnetic field, etc. In particular, the *total momentum*- [52], *Feynman-type*- [2], or *small momentum*- [56, 57] masses are self-consistent, while the *inertial*- [18], *magnetic*- [58, 59], or *string*- [60] ones belong to the second group. Below we consider some examples of these definitions of the EM and find out how they are related to each other and to our scheme. Then, we define the GSE and EM by using expansion of the real part of the self-energy with respect to small momentum.

In any case we need to calculate the quantity

$$\Phi_\xi(\alpha) = \left. \frac{d}{d\xi} \Phi(\alpha, \xi) \right|_{\xi=0}, \quad \xi = \mathbf{u}^2. \quad (16)$$

To evaluate (16), it is convenient to extract the explicit dependence in (15) for infinitesimal \mathbf{u}^2 . For this purpose, we expand functional W over small \mathbf{u} as follows:

$$\begin{aligned} -S_{\text{int}}[\mathbf{r} + \mathbf{u}] &= \int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{kR}(t,s) + i\mathbf{ku}(t-s)} = \\ &= \int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{kR}(t,s)} \left\{ 1 + i\mathbf{ku}(t-s) - \frac{1}{2}(\mathbf{ku})^2 (t-s)^2 + O(|\mathbf{u}|^3) \right\} \\ &= -S_{\text{int}}[\mathbf{r}] + iu_i W_i^{(1)}[\mathbf{r}] - \frac{1}{2}u_i u_j W_{ij}^{(2)}[\mathbf{r}] + O(|\mathbf{u}|^3), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} W_i^{(1)}[\mathbf{r}] &= \int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{kR}(t,s)} k_i(t-s), \\ W_{ij}^{(2)}[\mathbf{r}] &= \int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{kR}(t,s)} k_i k_j (t-s)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Then,

$$\begin{aligned}
Z_\beta(\alpha, \mathbf{u}^2) &= \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \left\{ 1 + iu_i W_i^{(1)}[\mathbf{r}] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} u_i u_j \left(W_i^{(1)}[\mathbf{r}] W_j^{(1)}[\mathbf{r}] + W_{ij}^{(2)}[\mathbf{r}] \right) + O(|\mathbf{u}|^4) \right\} = \\
&= Z_\beta(\alpha) \exp \left\{ -\mathbf{u}^2 \frac{Y_\beta(\alpha)}{Z_\beta(\alpha)} + O(\mathbf{u}^4) \right\}, \\
Y_\beta(\alpha) &= \frac{1}{2d} \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \left(W_j^{(1)}[\mathbf{r}] W_j^{(1)}[\mathbf{r}] + W_{jj}^{(2)}[\mathbf{r}] \right),
\end{aligned} \tag{18}$$

where $Z_\beta(\alpha) = Z_\beta(\alpha, 0)$.

Finally, we have

$$\Phi_\xi(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{Y_\beta(\alpha)}{Z_\beta(\alpha)}.$$

5.1. The Effective Mass and Momentum. The most direct definition of the EM is the following. As was mentioned above, the total momentum \mathbf{P} (3) of the *electron + phonon* system commutes with the total Hamiltonian \mathcal{H} , therefore, it is conserved and we can calculate the GSE for given \mathbf{P} . The energy spectrum is continuous and for infinitesimal \mathbf{P} the following expansion takes place:

$$\langle 0 | e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{P})} | 0 \rangle = e^{-\beta E(\alpha, \mathbf{P})} = \exp \left\{ -\beta \left[E(\alpha) + \frac{\mathbf{P}^2}{2m^*(\alpha)} + O(\mathbf{P}^4) \right] \right\}, \tag{19}$$

where $E(\alpha) = E(\alpha, \mathbf{0})$ is the ground-state energy and $m^*(\alpha)$ can be considered as the effective mass of the polaron (see, for example, [52]). The next point is to express $E(\alpha)$ and $m^*(\alpha)$ in terms of the function $\Phi(\alpha, \xi)$ (15). This can be done as follows. Using the conception of T -product and the Gaussian path integral representation we can rewrite formula (19) with the Hamiltonian (4) and fixed \mathbf{P} in the form

$$\begin{aligned}
e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{P})} &= N \int \delta \mathbf{q} T_t \exp \left\{ - \int_0^\beta dt \left[\frac{m}{2} \mathbf{q}^2(t) + i\mathbf{q}(t)\mathbf{P} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\mathbf{k}} (1 - i(\mathbf{k}\mathbf{q}(t))) a_{\mathbf{k},t}^\dagger a_{\mathbf{k},t} \right] - g \int_0^\beta dt \sum_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},t} + A_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k},t}^\dagger) \right\}.
\end{aligned}$$

Thus, the quadratic term $(\mathbf{P} - \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}})^2$ in $\mathcal{H}(\mathbf{P})$ is «linearized». The standard calculation gives in the continuous limit (see Section 3)

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{P})} | 0 \rangle &= N \int \delta \mathbf{q} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\beta dt (m \mathbf{q}^2(t) + 2i \mathbf{P} \mathbf{q}(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{\sqrt{8}} \int_0^\beta dt ds e^{-|t-s|} U(\mathbf{Q}(t, s)) \right\}, \quad \mathbf{Q}(t, s) = \int_s^t dt' \mathbf{q}(t'). \end{aligned} \quad (20)$$

Let us introduce the new integration variable as follows:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u} + \dot{\mathbf{r}}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(\beta) = \mathbf{0}.$$

Then, $\delta \mathbf{q} = d\mathbf{u} \delta \mathbf{r}$ and formula (20) with definition (15) reads

$$\langle 0 | e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{P})} | 0 \rangle = \int d\mathbf{u} \exp \left\{ -i\beta \mathbf{P} \mathbf{u} - \frac{\beta m}{2} \mathbf{u}^2 - \beta \Phi(\alpha, \mathbf{u}^2) \right\}, \quad (21)$$

where function $\Phi(\alpha, \mathbf{u}^2)$ is given by (15) and normalization in (21) is chosen such that

$$\langle 0 | e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{P})} | 0 \rangle \Big|_{\alpha=0} = \exp \left(-\beta \frac{\mathbf{P}^2}{2m} \right).$$

Since we deal with $\beta \rightarrow \infty$, integral (21) can be derived by using the saddle point method. The extremum condition

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left\{ -i\mathbf{P} \mathbf{u} - \frac{m \mathbf{u}^2}{2} - \Phi(\alpha, \mathbf{u}^2) \right\} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = 0$$

results in the solution for infinitesimal \mathbf{P}

$$\mathbf{u}_0 = \frac{-i\mathbf{P}}{m + 2\Phi_\xi(\alpha)} + O(\mathbf{P}^4),$$

and hence,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\beta} \ln \langle 0 | e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{P})} | 0 \rangle &= i\mathbf{P} \mathbf{u}_0 + \frac{m \mathbf{u}_0^2}{2} + \Phi(\alpha, \mathbf{u}_0^2) = \\ &= \Phi(\alpha) + \frac{\mathbf{P}^2}{2[m + 2\Phi_\xi(\alpha)]} + O(\mathbf{P}^4). \end{aligned} \quad (22)$$

Comparing (19) with (22) we define the GSE and EM as follows

$$E(\alpha) = \Phi(\alpha), \quad m_{\text{canon}}^*(\alpha) = m + 2\Phi_\xi(\alpha). \quad (23)$$

5.2. The Effective Mass and Velocity. Another definition of the EM coinciding with (23) and connected with polaron velocity was done by Feynman [2]. The argumentation is based on the remark that the density matrix under the condition $\alpha = 0$ looks like (6), where $\mathbf{u} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\beta$ can be considered as «the Euclidian velocity» which is related to the real velocity as $\mathbf{v} = -i\mathbf{u}$. Therefore, we define

$$\rho_\beta(\mathbf{u}\beta, \mathbf{0}) = e^{-\beta E(\alpha, \mathbf{u})} = \int_{\mathbf{q}(0)=\mathbf{0}}^{\mathbf{q}(\beta)=\beta\mathbf{u}} \delta\mathbf{q} e^{-S[\mathbf{q}]} . \quad (24)$$

Going to the new variable $\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{u}t$, we obtain

$$\begin{aligned} e^{-\beta E(\alpha, \mathbf{u})} &= e^{-\beta \frac{m\mathbf{u}^2}{2}} \int_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{0}}^{\mathbf{r}(\beta)=\mathbf{0}} \delta\mathbf{r} \exp \{-S_0[\mathbf{r}] - S_{\text{int}}[\mathbf{r} + \mathbf{u}]\} = \\ &= \exp \left\{ -\beta \frac{m\mathbf{u}^2}{2} - \beta \Phi(\alpha, \mathbf{u}^2) \right\} . \end{aligned} \quad (25)$$

If \mathbf{u} is infinitesimal, we have

$$E(\alpha, \mathbf{u}) = \frac{m\mathbf{u}^2}{2} + \Phi(\alpha, \mathbf{u}^2) = \frac{\mathbf{u}^2}{2} [m + 2\Phi_\xi(\alpha)] + O(\mathbf{u}^4) .$$

Thus, we obtain the *velocity* definition of the GSE and EM as follows:

$$E(\alpha) = \Phi(\alpha), \quad m_{\text{vel}}^*(\alpha) = m + 2\Phi_\xi(\alpha) . \quad (26)$$

We see that definitions (26) coincide with (23).

5.3. The Effective Mass and the Fourier Transform of the Density Matrix.

Now we will show that definitions of the EM in (23) and (26) can be obtained by considering the Fourier transform of the density matrix. Let us follow the standard definition by using expansion of the self-energy with respect to small momentum (see, e.g., [56, 57]). To define the GSE and EM simultaneously, we consider a generalized form of (10) by involving the projected partition function at finite \mathbf{p} as follows:

$$e^{-\beta E(\alpha, \mathbf{p})} = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \rho_\beta(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \cdot N \int_{\mathbf{q}(0)=\mathbf{0}}^{\mathbf{q}(\beta)=\mathbf{x}} \delta\mathbf{q} e^{-S[\mathbf{q}]} . \quad (27)$$

Since the polaron action is translationally invariant, the energy spectrum of the polaron is continuous and for small \mathbf{p} the following expansion takes place:

$$E(\alpha, \mathbf{p}) = E(\alpha) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*(\alpha)} + O(\mathbf{p}^4) . \quad (28)$$

To arrive at the conventional zero-end-point boundary conditions, we shift the path variables by a classical straight-line reference path $\mathbf{z}(t)$

$$\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{x}}{\beta} t = \mathbf{y} t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(\beta) = 0.$$

Then, we rewrite (27)

$$e^{-\beta E(\alpha, \mathbf{p})} = \beta^d \int d\mathbf{y} e^{-\beta \left(i\mathbf{p}\mathbf{y} + \frac{m\mathbf{y}^2}{2} + \Phi(\alpha, \mathbf{y}^2) \right)}. \quad (29)$$

For large $\beta \rightarrow \infty$ this integral can be computed by the saddle point method. The extremal point for small \mathbf{p} can be calculated

$$i\mathbf{p} + m\mathbf{y}_0 + 2\mathbf{y}_0\Phi_\xi(\alpha, \mathbf{y}_0^2) = 0, \quad \mathbf{y}_0 = \frac{-i\mathbf{p}}{m + 2\Phi_\xi(\alpha)} + O(\mathbf{p}^3).$$

Substituting it into (29) we obtain

$$\begin{aligned} E(\alpha, \mathbf{p}) &= \left(i\mathbf{p}\mathbf{y}_0 + \frac{m\mathbf{y}_0^2}{2} + \Phi(\alpha, \mathbf{y}_0^2) \right) = \\ &= \Phi(\alpha, 0) + \frac{\mathbf{p}^2}{2(m + 2\Phi_\xi(\alpha))} + O(\mathbf{p}^4). \end{aligned} \quad (30)$$

Comparing (28) and (30) term by term, we define the GSE and EM as follows:

$$E(\alpha) = \Phi(\alpha), \quad m_F^*(\alpha) = m + 2\Phi_\xi(\alpha). \quad (31)$$

We can see that definitions (23), (26) and (31) coincide explicitly.

5.4. The «Statistical» Effective Mass. A «statistical» definition of the EM was given in [60]. It was shown that the polaron functional integral was equivalent to the statistical mechanics of an anharmonic string. The variable $\mathbf{q}(t)$ in (24) can be regarded as a weighted random walk. The effective polaron mass m^* can be identified with the effective diffusion coefficient κ of the Brownian motion. In our notation, for free motion ($\alpha = 0$) it looks like

$$\langle \mathbf{q}^2(T) \rangle_0 = \int_{\mathbf{q}(0)=0}^{\mathbf{q}(\beta)=0} \delta\mathbf{q} \mathbf{q}^2(T) e^{-S_0[\mathbf{q}]} = \frac{3T}{m} \left(1 - \frac{T}{\beta} \right) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{3T}{m}$$

and

$$\frac{1}{\kappa} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{3T} \langle [\mathbf{q}(T) - \mathbf{q}(0)]^2 \rangle_0 = \frac{1}{m}.$$

Naturally, for $\alpha \neq 0$, the effective polaron mass should be defined as

$$\frac{1}{m_{\text{stat}}^*(\alpha)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{3T} \langle [\mathbf{q}(T) - \mathbf{q}(0)]^2 \rangle ,$$

$$\langle \mathbf{q}^2(T) \rangle = \frac{1}{Z_\beta(\alpha)} \int d\sigma_0[q] \mathbf{q}^2(T) e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{q}]} .$$

One can write

$$\langle [\mathbf{q}(T) - \mathbf{q}(0)]^2 \rangle = \left. \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_j} \ln Z_\beta(\alpha, \mathbf{y}_T^2) \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} ,$$

$$Z_\beta(\alpha, \mathbf{y}_T^2) = \int d\sigma[\mathbf{q}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{q}] + \int_0^\beta dt \mathbf{q}(t) \mathbf{y}_T(t)} , \quad \mathbf{y}_T(t) = \mathbf{y} \delta(T-t) .$$

Here \mathbf{y} is infinitesimally small and $1 \ll T \ll \beta \rightarrow \infty$.

By introducing a new variable

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{y}(t) , \quad \mathbf{y}(t) = \frac{\mathbf{y}}{m} D_0(T, t) ,$$

where $D_0(T, t)$ is given by (8), one can obtain for $1 \ll T \ll \beta \rightarrow \infty$

$$Z_\beta(\alpha, \mathbf{y}_T^2) = e^{\frac{\mathbf{y}^2}{2m} T} \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}+\mathbf{y}]} .$$

Then, for infinitesimal \mathbf{y} one can show that (for details see *Appendix B*)

$$Z_\beta(\alpha, \mathbf{y}_T^2) = Z_\beta(\alpha) \exp \left\{ T \frac{\mathbf{y}^2}{2m} - T \Phi \left(\alpha, \frac{\mathbf{y}^2}{m} \right) + O(\mathbf{y}^4) \right\}$$

and hence,

$$\frac{1}{m_{\text{stat}}^*(\alpha)} = \frac{1}{m} - \frac{2}{m^2} \Phi_\xi(\alpha) \Rightarrow m_{\text{stat}}^*(\alpha) = \frac{m^2}{m - 2\Phi_\xi(\alpha)} . \quad (32)$$

5.5. The «Inertial» Effective Mass. There exist other ways to define the effective mass. One of them is the idea to determine the «inertial» mass of the polaron which has been suggested in [18]. Remember, that Feynman-type variational estimates possess the same perturbation nature, the only difference is that the variational optimization allows one to optimize the perturbation answer getting reasonable results even for large α . Namely, this strategy has been fulfilled by Saitoh [18] by considering the acceleration rate against the fictitious constant driving field (a static electric field \mathbf{E}) incorporated in the generalized Feynman-type action. Now we follow this idea. Consider an electron in the presence of external electric field \mathbf{E} . The Lagrangian is

$$\mathcal{L}_{cl} = m \dot{\mathbf{x}}^2 / 2 - \mathbf{E} \mathbf{x} .$$

The solution of the classical equation of motion with boundary conditions $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\beta) = 0$ is

$$\mathbf{x}_{cl}(t) = \frac{\mathbf{E}\beta}{2m} a(t), \quad a(t) = t \left(1 - \frac{t}{\beta}\right),$$

and the classical action becomes

$$\mathcal{S}_{cl}[\mathbf{x}] = \int_0^\beta dt \mathcal{L}_{cl} = -\frac{(\beta\mathbf{E})^2}{24m}\beta.$$

Therefore, the value $(\beta\mathbf{E})^2$ we consider to be infinitesimally small for $\beta \rightarrow \infty$. In the presence of interaction, the «inertial» EM of the multidimensional polaron can be defined as follows

$$\begin{aligned} e^{-\beta E(\alpha, \mathbf{E})} &= \int d\sigma_0[\mathbf{q}] \exp \left\{ -S_{\text{int}}[\mathbf{q}] - \mathbf{E} \int_0^\beta dt \mathbf{q}(t) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\beta \left[E(\alpha) - \frac{(\beta\mathbf{E})^2}{24m^*_{\text{iner}}} + O((\beta\mathbf{E})^4) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

where the external field is infinitesimally weak $|\mathbf{E}| \rightarrow 0$. Let us show the connection between this definition and the functional integral (15). Going to the new integration variable

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{x}_{cl}(t),$$

which satisfies the same zeroth boundary conditions. Then (33) reads

$$\begin{aligned} e^{-\beta E(\alpha, \mathbf{E})} &= \exp \left\{ -\beta \left[-\frac{(\beta\mathbf{E})^2}{24m} + \Psi \left(\alpha, \frac{(\beta\mathbf{E})^2}{4m^2} \right) \right] \right\}, \\ &\exp \left\{ -\beta \Psi \left(\alpha, \frac{(\beta\mathbf{E})^2}{4m^2} \right) \right\} = \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r} - \mathbf{x}_{cl}]} . \end{aligned}$$

Thus, we get

$$\begin{aligned} E(\alpha, \mathbf{E}) &= -\frac{(\beta\mathbf{E})^2}{24m} + \Psi \left(\alpha, \frac{(\beta\mathbf{E})^2}{4m^2} \right) = \\ &= -\frac{(\beta\mathbf{E})^2}{24m} + \Psi(\alpha) + \frac{(\beta\mathbf{E})^2}{4m^2} \Psi_\xi(\alpha) + O((\beta\mathbf{E})^4), \end{aligned}$$

where

$$\Psi(\alpha) = \Psi(\alpha, 0), \quad \Psi_\xi(\alpha) = \left. \frac{d}{d\xi} \Psi(\alpha, \xi) \right|_{\xi=0} .$$

One can show (see *Appendix A*) that in the limit $\beta \rightarrow \infty$

$$\Psi(\alpha) = \Phi(\alpha), \quad \Psi_\xi(\alpha) = \frac{1}{3}\Phi_\xi(\alpha).$$

Therefore, the *inertial* version looks:

$$E(\alpha) = \Psi(\alpha) = \Phi(\alpha), \\ \frac{1}{m_{\text{iner}}^*(\alpha)} = \frac{1}{m} - \frac{6}{m^2}\Psi_\xi(\alpha) = \frac{1}{m} - \frac{2}{m^2}\Phi_\xi(\alpha),$$

so

$$m_{\text{iner}}^*(\alpha) = \frac{m^2}{m - 2\Phi_\xi(\alpha)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} m + 2\Phi_\xi(\alpha) \approx m_{\text{canon}}^*(\alpha). \quad (34)$$

Definitions (32) and (34) turn to be identical. However, one can see that the *statistical* and *inertial* versions of the EM do not coincide with the *canonical* definition. These definitions may be equivalent only in the weak-coupling regime $\alpha \ll 1$, i.e., they may coincide with each other in the framework of the first-order of any perturbation methods (see, for example [59]).

5.6. The «Magnetic» Effective Mass. Consider the polaron in a weak magnetic field $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ at zero-temperature limit $\beta \rightarrow \infty$. The vector potential in the symmetric gauge is $\mathbf{B} = [\mathbf{H} \times \mathbf{q}] / 2$. So, we consider the following model Hamiltonian [58, 59]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{B} \right)^2 + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + g \sum_{\mathbf{k}} \left(A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} + A_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}} \right).$$

For weak magnetic field \mathbf{H} , the free energy up to the order $|\mathbf{H}|^3$ is given in [61]. By analogy with (33) we expand the energy for $|\mathbf{H}| \ll 1$

$$Z_\beta = \text{Tr } e^{-\beta \mathcal{H}} = e^{-\beta E(\alpha, \mathbf{H})}, \quad E(\alpha, \mathbf{H}) = E(\alpha) + \frac{\chi}{2} \mathbf{H}^2 + O(|\mathbf{H}|^3), \quad (35)$$

where the polaron «magnetic» mass m_H is defined through the diamagnetic susceptibility

$$\chi = -\frac{e^2 \beta}{12 m_H^2 c^2}.$$

Expanding the partition function up to \mathbf{H}^2 , one is able to calculate χ and hence, m_H .

In perturbational calculations (see [59]) up to α^2 term, it was noted that for $\beta \rightarrow \infty$, the «inertial» mass equaled the «magnetic» one defined through the Landau zero-point energy [58]. This statement has been made by considering a

Feynman-like general quadratic action, but *not* the true polaron retarded nonlocal interaction. Besides, a Jensen–Peierls inequality and a variational optimization have been used before getting the final results for both the «inertial» and «magnetic» masses in [59].

In this section we would like to connect the definition of the polaron «magnetic» mass in (35) with the function $\Phi_\xi(\alpha)$. For this purpose we rewrite the partition function in the path-integral formulation as follows

$$Z_\beta = \int d\sigma_0[\mathbf{q}] e^{-S_{\text{mag}}[\mathbf{q}]-S_{\text{int}}[\mathbf{q}]} = \sqrt{\det \mathbf{D}_0^{-1}} \int_{\mathbf{q}(0)=\mathbf{0}}^{\mathbf{q}(\beta)=\mathbf{0}} \delta \mathbf{q} e^{-\frac{m}{2}(\mathbf{q}[\mathbf{D}_0^{-1} + \hat{\mathbf{H}}]\mathbf{q}) - S_{\text{int}}[\mathbf{q}]}, \quad (36)$$

where

$$\begin{aligned} S_{\text{mag}}[\mathbf{q}] &= \frac{i}{2} \int_0^\beta dt (\mathbf{H}[\mathbf{q}(t) \times \dot{\mathbf{q}}(t)]) = \frac{m}{2}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{H}}\mathbf{q}), \\ (\hat{\mathbf{H}}(t, s))_{ij} &= \frac{i}{m} \epsilon_{ijl} H_l \delta(t-s) \frac{\partial}{\partial s}, \quad \epsilon_{ijl} = \text{antisymmetric unit tensor}. \end{aligned}$$

The magnetic field is supposed to be infinitesimal ($\beta \mathbf{H}^2 \ll 1$) and all subsequent calculations will be done with accuracy $O((\beta \mathbf{H}^2)^2)$.

In contrast to the «inertial» mass definition, where the external force was proportional to \mathbf{q} , the additional term due to the external magnetic field is now proportional to \mathbf{q}^2 that makes it possible to use the following trick. To evaluate (36) we go to a new path variable

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}_0^{1/2} \left(1 + \mathbf{D}_0^{1/2} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{D}_0^{1/2} \right)^{1/2} \mathbf{D}_0^{-1/2} \mathbf{q}$$

so that

$$(\mathbf{q}, [\mathbf{D}_0^{-1} + \hat{\mathbf{H}}]\mathbf{q}) = \left(\mathbf{q}, \mathbf{D}_0^{-1/2} [1 + \mathbf{D}_0^{1/2} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{D}_0^{1/2}] \mathbf{D}_0^{-1/2} \mathbf{q} \right) = (\mathbf{r}, \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{r})$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{D}_0^{1/2} \left[1 + \mathbf{D}_0^{1/2} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{D}_0^{1/2} \right]^{-1/2} \mathbf{D}_0^{-1/2} \mathbf{r} = \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} \mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}} + \frac{3}{8} \mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}} \mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}} + O(|\mathbf{H}|^3) \right] \mathbf{r} \end{aligned}$$

with boundary conditions $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(\beta) = \mathbf{0}$.

Differential operator $\mathbf{D}_0^{-1}(t, s)$ and its Green function $D_0(t, s)$ are defined in (7) and (8). Some useful relations for $D_0(t, s)$ are given in *Appendix C*. Obviously,

$$S_0[\mathbf{q}] + S_{\text{mag}}[\mathbf{q}] = S_0[\mathbf{r}].$$

Further, we omit terms $\sim O(|\mathbf{H}|^3)$. Then, we rewrite the partition function in terms of the new paths as follows

$$\begin{aligned} Z_\beta &= e^{-\beta E(\alpha) - \frac{\beta^2 \mathbf{H}^2}{24m_H^2}} = \det \left\{ 1 - \frac{1}{2} \mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}} + \frac{3}{8} \mathbf{D}_0^{1/2} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{D}_0^{1/2} \hat{\mathbf{H}} \right\} \times \quad (37) \\ &\times \int d\sigma_0[\mathbf{r}] \exp \left\{ -S_{\text{int}} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}} + \frac{3}{8} \mathbf{D}_0^{1/2} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{D}_0^{1/2} \hat{\mathbf{H}} \right) \mathbf{r} \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} (\mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}}) + \frac{1}{4} \text{Tr} (\mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}} \mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}}) \right\} \times \\ &\times \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \left\{ 1 - \int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)} (\mathbf{k}\mathbf{A}(t,s)) + \right. \\ &+ \int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)} (\mathbf{k}\mathbf{B}(t,s)) + \frac{1}{2} \int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)} (\mathbf{k}\mathbf{A}(t,s))^2 + \\ &\left. + \frac{1}{2} \left(\int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)} (\mathbf{k}\mathbf{A}(t,s)) \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}\mathbf{A}(t,s)) &= \frac{i}{2} k_i \int_0^\beta dz \left[\left(D_0 \hat{H} \right)_{ij} (t,z) - \left(D_0 \hat{H} \right)_{ij} (s,z) \right] r_j(z) = \\ &= \frac{1}{2m} k_i \epsilon_{ijl} H_l \int_0^\beta dz r_j(z) \left(\frac{\text{sign}(z-t) - \text{sign}(z-s)}{2} + \frac{t-s}{\beta} \right), \\ (\mathbf{k}\mathbf{B}(t,s)) &= \frac{3i}{8m^2} k_i \int_0^\beta dz \left[\left(D_0 \hat{H} D_0 \hat{H} \right)_{ij} (t,z) - \left(D_0 \hat{H} D_0 \hat{H} \right)_{ij} (s,z) \right] r_j(z) = \\ &= \frac{3i}{8m^2} k_i (H^2 \delta^{ij} - H_i H_j) \int_0^\beta dz r_j(z) \left\{ \frac{1}{2} [a(t) - a(s)] - D_0(t,z) + D_0(s,z) \right\}. \end{aligned}$$

It is easy to show that (see *Appendix B*)

$$\frac{1}{2} \text{Tr} (\mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}}) = 0, \quad \frac{1}{4} \text{Tr} (\mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}} \mathbf{D}_0 \hat{\mathbf{H}}) = -\frac{\beta \mathbf{H}^2}{24m^2} \beta.$$

To evaluate (37) we use the Wick theorem

$$\begin{aligned} & \int d\sigma_0[\mathbf{r}] (\mathbf{kM}(t, s)\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{kQ}(t, s)\mathbf{r})} e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} = \\ &= e^\Delta \left\{ (\mathbf{kM}(t, s)\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{kQ}(t, s)\mathbf{r})} e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \right\} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \\ &= i (\mathbf{kM}(t, s) \mathbf{D}_0 \mathbf{Q}(t, s) \mathbf{k}) e^\Delta \left\{ e^{i(\mathbf{kQ}(t, s)\mathbf{r})} e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \right\} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} + \\ &+ i \int d\Omega_{xy}\mathbf{p} e^{i(\mathbf{pQ}(x, y)\mathbf{r})} (\mathbf{kM}(t, s) \mathbf{D}_0 \mathbf{Q}(x, y) \mathbf{p}) e^\Delta \left\{ e^{i(\mathbf{kQ}(t, s)\mathbf{r})} e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \right\} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}, \end{aligned}$$

where

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{r}} \mathbf{D}_0 \frac{\delta}{\delta \mathbf{r}} \right), \quad (\mathbf{kM}(t, s)\mathbf{r}) = k_i \int_0^\beta dz (\mathbf{M}(t, s; z))_{ij} r_j(z).$$

Then, for $\beta \rightarrow \infty$ the terms in curly brackets in (37) may be replaced by the corresponding contributions (see *Appendix B*)

$$\begin{aligned} & (\mathbf{kA}(t, s)) \rightarrow 0, \\ & (\mathbf{kB}(t, s)) \rightarrow \frac{\beta \mathbf{H}^2}{48} \left\{ \mathbf{k}^2 [a(t) - a(s)]^2 + \right. \\ & \quad \left. + \int d\Omega_{xy}\mathbf{p} e^{i(\mathbf{pR}_{xy})} \mathbf{kp} [a(t) - a(s)][a(x) - a(y)] \right\}, \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{kA}(t, s))^2 \rightarrow \frac{\beta \mathbf{H}^2}{48} \mathbf{k}^2 [a(t) - a(s)]^2, \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{kA}(t, s))(\mathbf{pA}(x, y)) \rightarrow \frac{\beta \mathbf{H}^2}{48} \mathbf{kp} [a(t) - a(s)][a(x) - a(y)]. \end{aligned}$$

We obtain for large β

$$\begin{aligned} Z_\beta &= e^{-\beta \frac{\beta \mathbf{H}^2}{24m^2}} \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \left\{ 1 + \frac{\beta \mathbf{H}^2}{24m^2} \left[\int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{kR}(t,s)} \mathbf{k}^2 [a(t) - a(s)]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \iint d\Omega_{tsk} d\Omega_{xyp} e^{i\mathbf{kR}(t,s)+i\mathbf{pR}(x,y)} \mathbf{k}\mathbf{p} [a(t) - a(s)][a(x) - a(y)] \right] \right\} = \\ &= e^{-\beta \frac{\beta \mathbf{H}^2}{24m^2}} \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \left\{ 1 + \frac{\beta \mathbf{H}^2}{72m^2} \left[\int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{kR}(t,s)} \mathbf{k}^2 (t-s)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \iint d\Omega_{tsk} d\Omega_{xyp} e^{i\mathbf{kR}(t,s)+i\mathbf{pR}(x,y)} \mathbf{k}\mathbf{p} (t-s)(x-y) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Comparing (38), in particular, with analogous expansion (25)

$$\begin{aligned} e^{-\beta\Phi(\alpha, \mathbf{u}^2)} &= \int d\sigma_0[\mathbf{r}] e^{-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]} \left\{ 1 - \frac{\mathbf{u}^2}{6} \left[\int d\Omega_{tsk} e^{i\mathbf{kR}(t,s)} \mathbf{k}^2 (t-s)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \iint d\Omega_{tsk} d\Omega_{xyp} e^{i\mathbf{kR}(t,s)+i\mathbf{pR}(x,y)} \mathbf{k}\mathbf{p} (t-s)(x-y) \right] \right\} \end{aligned}$$

we deduct that

$$\frac{1}{m_H^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{2}{m^3} \Phi_\xi(\alpha). \quad (39)$$

This definition does not coincide with the definitions of the «statistical» and «inertial» masses, the obvious difference is the squared mass power in (39) instead of a linear one.

One the other hand, there is a statement [62] that in the expansion of the GSE of a polaron in a weak magnetic field, the first-order (not the second!) term is inversely proportional to the polaron «magnetic» mass. The EM obtained so is exactly equivalent to the free polaron EM as defined by Fröhlich. In [58] the Landau zero-point EM at zero temperature has been found exactly the same as the «inertial» one. This EM was also found as the inverse coefficient of the first order of the magnetic field. Obviously, our definition of the polaron «magnetic» mass does not coincide with that given in [58] because (39) is proportional to the second-order term $\propto |\mathbf{H}|^2$ by the very construction.

Below we tabulate a comparison of various definition schemes for the polaron GSE and EM obtained in this Section.

In this Section, we have given several definitions of the polaron EM based on different physical principles, but independent of the specific approximate method. We have shown that definitions based on the polaron internal dynamics do not coincide, in general, with those obtained by using a response principle to external sources (forces). They are equivalent either in the weak-coupling regime or, in case of some variational optimizations having in fact, the same perturbation nature.

Schemes	Definition of the EM	Effective mass
«Momentum's»	$E_{\text{eff}}(\mathbf{P}) = E_{\text{eff}}(\mathbf{0}) + \frac{\mathbf{P}^2}{2m^*}$	$m^* = m + 2\Phi_\xi(\alpha)$
«Velocity's»	$E_{\text{eff}}(\mathbf{v}) = E_{\text{eff}}(\mathbf{0}) + \frac{m^*\mathbf{v}^2}{2}$	$m^* = m + 2\Phi_\xi(\alpha)$
«Density matrix's»	$E_{\text{eff}}(\mathbf{p}) = E_{\text{eff}}(\mathbf{0}) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*}$	$m^* = m + 2\Phi_\xi(\alpha)$
«Statistical»	$\frac{1}{m^*} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{3T} \langle \mathbf{q}^2(T) \rangle$	$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} - \frac{2}{m^2} \Phi_\xi(\alpha)$
«Inertial»	$E_{\text{eff}}(\mathbf{E}) = E_{\text{eff}}(\mathbf{0}) - \frac{(\beta\mathbf{E})^2}{24m^*}$	$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} - \frac{2}{m^2} \Phi_\xi(\alpha)$
«Magnetic»	$E_{\text{eff}}(\mathbf{H}) = E_{\text{eff}}(\mathbf{0}) - \frac{e^2 \beta \mathbf{H}^2}{24c^2(m^*)^2}$	$\frac{1}{(m^*)^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{2}{m^3} \Phi_\xi(\alpha)$

Below, we follow the «density matrix» definition of the polaron EM.

6. GENERALIZED GAUSSIAN REPRESENTATION

Path integrals $Z_\beta(\alpha)$ and $Y_\beta(\alpha)$ in (18) are the central quantities of the present paper. To evaluate them, we use the Generalized Gaussian Representation method developed partly in [20, 63, 64] and successfully applied earlier to some problems in quantum physics [21, 65].

The key idea of our approach comes from quantum field theory and consists in the following. In QFT the main ultraviolet contributions estimated by the perturbation theory come from the so-called tadpole Feynman diagrams and they can be taken into account effectively if the interaction Lagrangian is chosen in the normal-ordered form with respect to the free Lagrangian, which realizes the Gaussian measure in the functional integral approach.

Thus, if a PI over a Gaussian measure is given, it should be rewritten in the representation where the interaction functional is given in the normal form, according to the new Gaussian measure, and does not contain any linear and quadratic terms over the fields – variables of the functional integration. As a result, we obtain a representation which isolates the main contribution to the PI, and the high-order corrections can be calculated by using a perturbation expansion over the new interaction term.

6.1. Basic Formulae. To demonstrate our idea, we consider a d -component vector $\mathbf{q}(t) = \{q_j(t)\} \in \mathbb{R}^d$, ($j = 1, \dots, d$) in the Euclidean imaginary time $t \in [0, \beta]$ and a PI in the following general form

$$I_\beta = \int d\sigma_0[\mathbf{q}] e^{S_I[\mathbf{q}]} = \langle e^{S_I[\mathbf{q}]} \rangle_0, \quad \langle 1 \rangle_0 = 1, \quad (40)$$

where the initial Gaussian measure $d\sigma_0[\mathbf{q}]$ is given in (10).

The following items characterize shortly the basic idea of our method.

1. Without loss of generality the interaction functional may be given by

$$S_I[\mathbf{q}] = \int d\Omega_{\mathbf{a}} e^{i(\mathbf{qa})}, \quad (\mathbf{qa}) = \int_0^\beta dt q_j(t) a_j(t).$$

For theories possessing a central symmetry (like the polaron) we specify

$$\int d\Omega_{\mathbf{a}} a_j(t) = 0, \quad \text{or} \quad \left. \frac{\delta}{\delta q_j(t)} S_I[\mathbf{q}] \right|_{\mathbf{q}=0} = 0.$$

2. By introducing a new operator $\mathbf{D}^{-1} = \delta_{ij} D^{-1}(t, s)$ we rewrite (40) as follows:

$$\begin{aligned} I_\beta &= \sqrt{\det \left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}_0} \right)} \int d\sigma[\mathbf{q}] e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{q}[\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}]\mathbf{q}) + S_I[\mathbf{q}]} \\ &= \sqrt{\det \left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}_0} \right)} \cdot \left\langle e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{q}[\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}]\mathbf{q}) + S_I[\mathbf{q}]} \right\rangle, \end{aligned} \quad (41)$$

where a general Gaussian measure is introduced

$$d\sigma[\mathbf{q}] = \frac{\delta \mathbf{q}}{\sqrt{\det \mathbf{D}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{q}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{q})}, \quad \langle (*) \rangle = \int d\sigma (*) , \quad (42)$$

The following relation takes place:

$$\langle e^{i(\mathbf{qa})} \rangle = \int d\sigma e^{i(\mathbf{qa})} = e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{Da})} \quad \forall a_j(t) \in \mathfrak{R}^d.$$

3. Now we introduce the conception of the *normal-ordered form* with respect to the general measure $d\sigma$. In particular, we use the following normal forms:

$$\begin{aligned} :e^{i(\mathbf{qa})}: &= e^{i(\mathbf{qa})} \cdot e^{\frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{Da})} \\ :(\mathbf{q}, [\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}]\mathbf{q}): &= (\mathbf{q}, [\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}]\mathbf{q}) - ([\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}], \mathbf{D}), \end{aligned}$$

so that

$$\langle :e^{i(\mathbf{qa})}: \rangle = 1, \quad \langle :q(t_1) \cdot \dots \cdot q(t_n): \rangle = 0, \quad n \geq 1.$$

4. Functional $W[\phi]$ should be represented in the normal ordered form as

follows:

$$\begin{aligned}
 S_I[\mathbf{q}] &= \int d\Lambda_{\mathbf{a}} :e^{i(\mathbf{qa})}: = :W[\mathbf{0}]: + :W_1[\mathbf{q}]: + :W_2[\mathbf{q}]: + :W_{\text{int}}[\mathbf{q}]:, \quad (43) \\
 :W[\mathbf{0}]: &= \int d\Lambda_{\mathbf{a}} = \int d\Omega_{\mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{aD}\mathbf{a})}, \\
 :W_1[\mathbf{q}]: &= \int d\Lambda_{\mathbf{a}} (\mathbf{qa}) = \int d\Omega_{\mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{aD}\mathbf{a})} (\mathbf{qa}), \\
 :W_2[\mathbf{q}]: &= \int d\Lambda_{\mathbf{a}} :(\mathbf{qa})(\mathbf{qa}): = \int d\Omega_{\mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{aD}\mathbf{a})} :(\mathbf{qa})(\mathbf{qa}):, \\
 :W_{\text{int}}[\mathbf{q}]: &= \int d\Lambda_{\mathbf{a}} :e_2^{i(\mathbf{qa})}: = \int d\Omega_{\mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{aD}\mathbf{a})} :e_2^{i(\mathbf{qa})}:
 \end{aligned}$$

where

$$d\Lambda_{\mathbf{a}} = d\Omega_{\mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{aD}\mathbf{a})}, \quad e_2^S = e^S - 1 - S - \frac{S^2}{2}.$$

5. The requirement that all Gaussian terms over \mathbf{q} are concentrated in the measure $d\sigma$ corresponds to the complete elimination of any quadratic parts from the interaction and it leads to the constraint equation

$$:(\mathbf{q}, [\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}]\mathbf{q}): + \int d\Lambda_{\mathbf{a}} :(\mathbf{qa})(\mathbf{qa}): = 0, \quad \forall \mathbf{q}(t) \quad (44)$$

which results in

$$\delta_{ij} [D_0^{-1}(t, s) - D^{-1}(t, s)] + \int d\Lambda_{\mathbf{a}} a_i(t) a_j(s) = 0$$

or

$$D_0^{-1}(t, s) - D^{-1}(t, s) + \frac{1}{d} \int d\Omega_{\mathbf{a}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{aD}\mathbf{a})} (\mathbf{a}(t)\mathbf{a}(s)) = 0$$

defining the adjustable Green function $\mathbf{D}(t, s) = \delta_{ij} D(t, s)$.

6. Substituting formulae (43) and (44) into the representation (41), we obtain the new representation of the initial PI (40) as follows:

$$\begin{aligned}
 I_{\beta} &= e^{-F_{\beta}} J_{\beta}, \quad (45) \\
 F_{\beta} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \ln(\mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{D}) + \mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{1} \} - :W[\mathbf{0}]:, \\
 J_{\beta} &= \int d\sigma[\mathbf{q}] e^{:W_{\text{int}}[\mathbf{q}]:} = \left\langle e^{:W_{\text{int}}[\mathbf{q}]:} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Thus, the original PI is rewritten as a product of a prefactor $e^{-F_{\beta}}$ and a new PI J_{β} based on the new Gaussian measure $d\sigma$. Hereby, F_{β} describes the leading-order General Gaussian Representation and the remaining non-Gaussian contributions can be systematically computed by evaluating J_{β} into a perturbation series over the interaction term $:W_{\text{int}}[\mathbf{q}]:$.

Note that the suggested scheme has a general structure and can be easily adapted for different physical problems, including the polaron in statistical physics.

6.2. Application to the Polaron. Below we apply the GGR method to the d -dimensional polaron problem in statistical mechanics. We deal with the path-integration variable $\mathbf{r}(t)$ with closed ends $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(\beta) = \mathbf{0}$ in the Euclidean imaginary time $t \in [0, \beta]$. Our purpose is to derive the GSE and EM in (31) by evaluating PIs in (18) in the limit $\beta \rightarrow \infty$.

First, we evaluate $Z_\beta(\alpha)$ by using the representation (45). For this purpose, we should use $-S_{\text{int}}[\mathbf{r}]$ defined in (13) instead of $W[\phi]$. Also, measure $d\Omega_a$ should be changed to $d\Omega(t, s, \mathbf{k})$ given in (13). In doing so, we remark the following correspondence:

$$(\phi, a) \Rightarrow (\mathbf{kR})(t, s) = \int_0^\beta d\tau \mathbf{r}(\tau) \mathbf{a}(\tau, t, s), \quad \mathbf{a}(\tau, t, s) = \mathbf{k} \cdot [\delta(\tau-t) - \delta(\tau-s)].$$

The initial functional measure in the polaron problem is given by $d\sigma_0[\mathbf{r}]$, where the differential operator $\mathbf{D}_0^{-1}(t, s)$ and its Green function $\mathbf{D}_0(t, s) = \delta_{ij} D_0(t, s)$ are given in (7) and (8).

Note, as $\beta \rightarrow \infty$ the Green function $D_0(t, s)$ becomes translationally invariant. To trace it, we make a shift $\{t, s\} \rightarrow \{t + \beta/2, s + \beta/2\}$ in «time» and go to the symmetrical region $\{t, s\} \in [-\beta/2, \beta/2]$. The boundary conditions for paths remain: $\mathbf{r}(-\beta/2) = \mathbf{r}(\beta/2) = \mathbf{0}$. Then,

$$D_0(t, s) = -\frac{|t-s|}{2} + \frac{\beta}{4} - \frac{ts}{\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} -\frac{|t-s|}{2} + \frac{\beta}{4} = D_0(t-s)$$

and its Fourier transform reads

$$\tilde{D}_0(p) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt e^{ipt} \left(-\frac{|t|}{2} + \frac{\beta}{4} \right) = \frac{1 - \cos(\beta p/2)}{p^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{p^2}. \quad (46)$$

Now the application of the GGR method to $Z_\beta(\alpha)$ is straightforward. Following (42), we introduce a new Gaussian measure $d\sigma[\mathbf{r}]$.

By analogy with (41), we go to another functional averaging scheme based on the measure $d\sigma[\mathbf{r}]$ and rewrite the partition function as follows:

$$Z_\beta(\alpha) = \sqrt{\det \left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}_0} \right)} \int d\sigma[\mathbf{r}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{r}, [\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}] \mathbf{r}) + W[\mathbf{r}] \right\}.$$

The normal-ordering procedure with respect to $d\sigma[\mathbf{r}]$ implies

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{kR}(t,s)} &= :e^{i\mathbf{kR}(t,s)}: e^{-\mathbf{k}^2 F(t-s)}, \\ (\mathbf{r}, [\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}] \mathbf{r}) &= :(\mathbf{r}, [\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}] \mathbf{r}): + ([\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}], \mathbf{D}), \end{aligned}$$

where a shifted Green function has been introduced

$$F(t-s) = D(0) - D(t-s). \quad (47)$$

According to (44), we remove all quadratic path configurations from the interaction as follows:

$$:(\mathbf{r}, [\mathbf{D}_0^{-1} - \mathbf{D}^{-1}] \mathbf{r}): + \int d\Lambda(t, s, \mathbf{k}) :(\mathbf{kR})^2 := 0, \quad (48)$$

where

$$d\Lambda_{ts\mathbf{k}} = d\Omega_{ts\mathbf{k}} e^{-\mathbf{k}^2 F(t-s)} = \frac{\alpha}{\sqrt{8}} e^{-|t-s|} dt ds \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \tilde{U}(\mathbf{k}) e^{-\mathbf{k}^2 F(t-s)}.$$

Requirement (48) results in the following set of constraint equations (for details see *Appendix C*):

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk [1 - \cos(kt)] \tilde{D}(k), \\ \tilde{D}(k) &= \frac{1}{k^2 + \alpha_d \cdot \tilde{\Sigma}(k)}, \\ \tilde{\Sigma}(k) &= \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt [1 - \cos(kt)] \frac{\exp(-t)}{F^{3/2}(t)} \end{aligned} \quad (49)$$

which self-consistently define adjustable functions $F(t)$ and $\tilde{D}(k)$.

Then, following (45) we rewrite

$$Z_\beta(\alpha) = e^{-\beta E_0(\alpha)} J_\beta(\alpha), \quad (50)$$

where the zeroth Gaussian approximation to the polaron exact GSE is

$$\begin{aligned} E_0(\alpha) &= - \frac{d}{2\pi} \int_0^\infty dk \left[\ln(k^2 \tilde{D}(k)) - k^2 \tilde{D}(k) + 1 \right] - \\ &\quad - \frac{\alpha B_d}{\sqrt{8}\beta} \iint_{-\beta/2}^{-\beta/2} dt ds e^{-|t-s|} \int \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^{d-1}} e^{-\mathbf{k}^2 F(t-s)} = \\ &= - d \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left[\ln(k^2 \tilde{D}(k)) - k^2 \tilde{D}(k) + 1 \right] + \frac{\alpha_d}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt \frac{\exp(-t)}{F^{1/2}(t)} \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

The remaining non-Gaussian contributions should be evaluated systematically by considering a new PI

$$J_\beta(\alpha) = \langle \exp \{ :W_{\text{int}}[\mathbf{r}]: \} \rangle = \int d\sigma \exp \{ :W_{\text{int}}[\mathbf{r}]: \}, \quad (52)$$

where

$$:W_{\text{int}}[\mathbf{r}]: = \int d\Lambda_{tsk} :e_2^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)}: .$$

Substituting (50) into (31) we obtain the polaron GSE as follows

$$E(\alpha) = E_0(\alpha) - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln J_\beta(\alpha).$$

Obviously, $\langle :W_{\text{int}}[\mathbf{r}]: \rangle = 0$ due to normal ordering. Then, applying the Jensen–Peierls inequality we arrive at a lower bound to the non-Gaussian correction

$$J_\beta(\alpha) \geq e^{\langle :W_{\text{int}}[\mathbf{r}]: \rangle} = 1.$$

Therefore, our leading-order Gaussian term $E_0(\alpha)$ represents an *upper bound* to the polaron exact ground-state energy

$$E_0(\alpha) \geq E(\alpha). \quad (53)$$

Note also that inequality (53) turns to an equation as $d \rightarrow \infty$ because $\alpha_d \propto O(1/d^{3/2}) \rightarrow 0$ and so $J_\beta(\alpha) \rightarrow 1$. Therefore,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} E(\alpha) = E_0(\alpha).$$

A similar property has earlier been observed [55] by considering the leading term for the GSE within the $1/d$ expansion method applied to the multidimensional Fröhlich polaron.

The next point is to evaluate $Y_\beta(\alpha)$ within the GGR technique by analogy with $Z_\beta(\alpha)$. The only difference between these two PIs is an additional factor $W_i^{(1)}[\mathbf{r}] W_i^{(1)}[\mathbf{r}] + W_{ii}^{(2)}[\mathbf{r}]$ entering into $Y_\beta(\alpha)$. This factor does not influence the exponential $e^{W[\mathbf{r}]}$ in (18) as $\beta \rightarrow \infty$. Therefore, the normal ordering for $W[\mathbf{r}]$ as well as the elimination of the quadratic parts from the interaction remains the same as for $Z_\beta(\alpha)$. In other words, a constraint equation for $Y_\beta(\alpha)$ in the limit $\beta \rightarrow \infty$ is given by (49), too. Repeating all the steps made in the previous subsection we obtain

$$Y_\beta(\alpha) = e^{-\beta E_0(\alpha)} \langle e^{:W_{\text{int}}[\mathbf{r}]:} \{ W_i^{(1)}[\mathbf{r}] W_i^{(1)}[\mathbf{r}] + W_{ii}^{(2)}[\mathbf{r}] \} \rangle. \quad (54)$$

Now we represent functionals (17) in the normal-ordered form with respect to the measure $d\sigma[\mathbf{r}]$ as follows:

$$\begin{aligned} W_i^{(1)}[\mathbf{r}] &= \int d\Lambda_{ts\mathbf{k}} :e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)}: k_i(t-s) = \\ &= \int d\Lambda_{ts\mathbf{k}} :e_0^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)}: k_i(t-s), \\ W_{ij}^{(2)}[\mathbf{r}] &= \int d\Lambda_{ts\mathbf{k}} :e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)}: k_i k_j (t-s)^2 = \\ &= \int d\Lambda_{ts\mathbf{k}} k_i k_j (t-s)^2 + \\ &+ \int d\Lambda_{ts\mathbf{k}} :e_2^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)}: k_i k_j (t-s)^2. \end{aligned}$$

Therefore,

$$W_i^{(1)}[\mathbf{r}] W_i^{(1)}[\mathbf{r}] + W_{ii}^{(2)}[\mathbf{r}] = \int d\Lambda_{ts\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 (t-s)^2 + :Q[\mathbf{r}]:, \quad (55)$$

where

$$\begin{aligned} :Q[\mathbf{r}]: &= \int d\Lambda_{ts\mathbf{k}} \int d\Lambda_{uv\mathbf{q}} \mathbf{k}\mathbf{q} (t-s)(u-v) :e_0^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)}: :e_0^{i\mathbf{q}\mathbf{R}(u,v)}: \\ &+ \int d\Lambda_{ts\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 (t-s)^2 :e_2^{i\mathbf{k}\mathbf{R}(t,s)}:. \end{aligned}$$

Substituting (54) and (55) into (31) we obtain

$$\Phi_\xi(\alpha) = \Phi_\xi^0(\alpha) + \Delta\Phi_\xi(\alpha),$$

where the Gaussian approximation is

$$\begin{aligned} \Phi_\xi^0(\alpha) &= \frac{\alpha B_d}{\sqrt{8}\beta d} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt ds e^{-|t-s|} \int \frac{d\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^{d-1}} e^{-\mathbf{k}^2 F(t-s)} \mathbf{k}^2 (t-s)^2 = \\ &= \frac{\alpha_d}{6\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt \frac{t^2 e^{-t}}{F^{3/2}(t)} \end{aligned} \quad (56)$$

so

$$m_0^*(\alpha) = m + \frac{\alpha_d}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt \frac{t^2 e^{-t}}{F^{3/2}(t)}. \quad (57)$$

The remaining non-Gaussian correction is given by

$$\Delta\Phi_\xi(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta d} \frac{\mathcal{J}_\beta(\alpha)}{J_\beta(\alpha)},$$

where a new PI is defined as follows

$$\mathcal{J}_\beta(\alpha) = \langle e^{iW_{\text{int}}[\mathbf{r}]} : Q[\mathbf{r}] : \rangle. \quad (58)$$

Note, for a weak coupling $J_\beta(\alpha) \propto 1 + O(\alpha^2)$ while $\mathcal{J}_\beta(\alpha) \propto O(\alpha)$.

7. GAUSSIAN LEADING-ORDER ENERGY AND MASS

Now we consider only the Gaussian leading terms for the self-energy and effective mass of the polaron. In doing so, we take the following approximations:

$$J_\beta(\alpha) = 1, \quad \mathcal{J}_\beta(\alpha) = 0.$$

Thus, we obtain $E(\alpha) = E_0(\alpha)$ and $m^*(\alpha) = m_0^*(\alpha)$, where $E_0(\alpha)$ and $m_0^*(\alpha)$ have been defined in (51) and (57), respectively.

The following remarks are in order to conclude the Gaussian approximation.

i. According to (53), the Gaussian approximation $E_o(\alpha)$ gives an upper bound to the exact polaron GSE, which slightly improves Feynman's celebrated estimate.

ii. As $d \rightarrow \infty$ our $E_0(\alpha)$ and $m_0^*(\alpha)$ tend to the exact GSE and EM, respectively, because $\alpha_d \propto O(d^{-3/2})$ suppresses any non-Gaussian correction.

iii. To our knowledge, equivalent forms of integral equations (49) have been previously obtained, e.g., in [19] for $d = 3$, by considering the stationarity condition for extension of Feynman's variational approach to general quadratic trial actions. This idea was independently utilized also in [18]. Note, that the same equations govern the leading term of the $1/d$ -expansion scheme applied to the polaron model [55]. We derive exact analytic solutions to (49) in the weak- and strong-coupling limits as follows:

$$F(t) = \begin{cases} t/2 - \alpha_d f_1(t) + \alpha_d^2 f_2(t) + O(\alpha_d), & \alpha \rightarrow 0, \\ [1 - \exp(-v_\infty t)] / 2v_\infty, & v_\infty = 4\alpha_d^2/9\pi, \quad \alpha \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (59)$$

Therefore, both the Gaussian leading-order term and the second-order non-Gaussian correction may be derived analytically for the weak- and strong-coupling limits. The resulting GSE and EM are in complete agreement with the exact data for $\alpha \ll 1$ and differ very slightly for $\alpha \gg 1$.

iv. For intermediate-coupling ($\alpha \propto 1$) equations (49) seem to admit no analytic solutions. Nevertheless, any strictly positive function can be used instead

of $F(t)$ to derive an approximation to the GSE and EM, following the lines of the Gaussian approximation. The result, however, will in general be inferior to $E_0(\alpha)$. For example, Feynman's celebrated variational model can be recovered if one chooses a convex combination

$$F_2(t) = w_0 \frac{t}{2} + (1 - w_0) \frac{1 - \exp(-vt)}{2v}, \quad 0 \leq w_0 \leq 1 \quad (60)$$

of the two known asymptotic solutions (59) instead of $F(t)$. The parameter w_0 corresponds to the contribution of the pure weak-coupling solution in this combination. The second term in the r.h.s of (60) corresponds to the strong-coupling contribution. Therefore, the stronger the interaction, the smaller the weight factor $w_0 = (w/v)^2$ should be. Substituting (60) into (51) and optimizing the result with respect to parameters $\{w, v\}$ one reproduces Feynman's upper

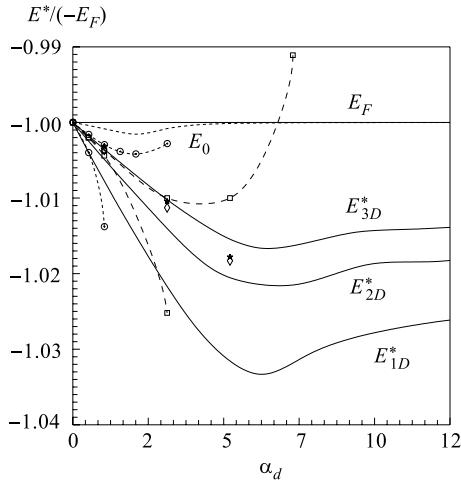


Fig. 1. Ground-state energy of the one-, two- and three-dimensional polaron normalized to the Feynman variational result as a function of the re-scaled electron-phonon coupling constant α_d . Due to the scaling feature, all Gaussian approximations to the GSE estimated in different spatial dimensions ($d = 1, 2, 3$) are represented by one curve versus the effective coupling α_d . The abscissa stands for all d-dimensional Feynman estimates. Taking into account the next-order non-Gaussian contribution splits this junction into separate curves in different dimensions. The marked solid curves depict our corrected result $E_2(\alpha)$ for $d = 1$, $d = 2$, and $d = 3$, respectively. For comparison some three-dimensional results are shown: circles — correspond to the upper and lower bounds reported in [75], boxes — analogous bounds due to the Páde scheme [73], stars — result from [75], asterisks — the Monte-Carlo calculation [71], and rhombuses depict results due to the two-phonon perturbation method [50]

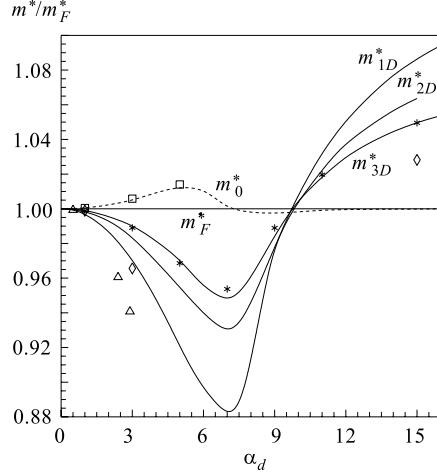


Fig. 2. Effective mass of the one-, two- and three-dimensional polaron normalized to the Feynman variational result as a function of the re-scaled electron-phonon coupling constant α_d . The notation is the same as for Figure 1. For comparison some three-dimensional results are shown: rhombuses and boxes denote the Monte Carlo data from [71] and [56]; stars correspond to the result from [75]; asterisks show the corrected Feynman result from [57]; and up (down) triangles depict lower (upper) bounds due to the Pade scheme [73]

bound to the GSE as follows:

$$E_{\text{Feyn}}(\alpha) = \min_{v,w} \left\{ \frac{3(v-w)^2}{4v} - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{\sqrt{tw^2/v^2 + (v^2 - w^2)(1 - \exp(-vt))/v^3}} \right\}.$$

The corresponding substitution of the optimized $F_2(t)$ into (57) results in Feynman's mass $m_F^*(\alpha)$. Note, however, that (60) is *not* a solution of equations (49).

v. An obvious improvement of the Feynman approximation can be obtained by increasing the number of strong-coupling components in (60)

$$F_N(t) = w_0 \frac{t}{2} + \sum_{i=1}^N w_i \frac{1 - \exp(-v_i t)}{2v_i}, \quad N \geq 2.$$

Optimization with $N = 2$, $N = 3$ and $N = 8$ reproduces the data obtained in [15], [16] and [17], respectively. The limiting case $N \rightarrow \infty$ leads, obviously, to the results of the general quadratic action [19].

vi. Exact analytic solutions to (49) feature the following scaling properties:

$$F^{[n]}(\alpha_m, t) = F^{[m]}(\alpha_n, t), \quad \tilde{\Sigma}^{[n]}(\alpha_m, k) = \tilde{\Sigma}^{[m]}(\alpha_n, k), \quad n, m > 1,$$

where different spatial-dimension numbers are given in the square brackets. This results in the scaling relations for the GSE and EM, too. In particular,

$$E_0^{[1]}(\alpha) = \frac{1}{3} E_0^{[3]}(3\alpha), \quad m_0^{*[1]}(\alpha) = m_0^{*[3]}(3\alpha). \quad (61)$$

Note, this has been observed earlier in [66] for the special case of Feynman's approximation. The scaling feature allows us to depict all one-, two- and three-dimensional Gaussian leading-order terms by only one curve in Figs. 1 and 2. To show the deviation of all results from Feynman's more clearly, we have plotted them normalized with respect to the corresponding Feynman results. Stress also that taking into account non-Gaussian corrections to the GSE and EM breaks the scaling feature.

8. NEXT-TO-GAUSSIAN APPROXIMATION

The Gaussian leading-order terms $E_0(\alpha)$ and $m_0^*(\alpha)$ approximate well the exact GSE and EM of the polaron. The higher the spatial dimensions, the better the approximations. Nevertheless, according to (50), the contribution of the multiplicators $J_\beta(\alpha)$ and $\mathcal{J}_\beta(\alpha)$ should be estimated more precisely to check the accuracy of the obtained Gaussian approximations in the physically meaningful dimensions $1 \leq d \leq 3$.

To evaluate (52) and (58), we use the following expansion schemes:

$$\begin{aligned} J_\beta(\alpha) &= \langle e^{:W_{\text{int}}[\mathbf{r}]:} \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} V_n , \\ \mathcal{J}_\beta(\alpha) &= \langle e^{:W_{\text{int}}[\mathbf{r}]:} :Q[\mathbf{r}]: \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{V}_j , \end{aligned} \quad (62)$$

where the higher-order non-Gaussian terms are

$$V_n = \frac{1}{n!} \langle :W_{\text{int}}[\mathbf{r}]:^n \rangle, \quad \mathcal{V}_j = \frac{1}{j!} \langle :W_{\text{int}}[\mathbf{r}]:^j :Q[\mathbf{r}]: \rangle, \quad n \geq 2, \quad j \geq 0.$$

Note, $V_1 = 0$ due to normal ordering. Besides, (62) are not the conventional perturbation series in the coupling constant because α enters into each term in a more complicated way by involving the function $F(t)$ which depends on α , too.

We restrict ourselves to estimating only the second-order (over : $W_{\text{int}}[\mathbf{r}]$:) non-Gaussian corrections to the GSE and EM as follows

$$\Delta E_2(\alpha) = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} V_2(\alpha), \quad \Delta m_2^*(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta d} \{ \mathcal{V}_0(\alpha) + \mathcal{V}_1(\alpha) \} .$$

Appropriate analyses performed for the weak- and strong-coupling regimes have indicated that taking into account higher-order corrections ($n \geq 3$) results in only slight improvement over the obtained estimate. We suppose that this picture remains valid in the intermediate region of α , too.

Omitting the details of calculations we write the final results for the second-order non-Gaussian contributions to the GSE and EM as follows:

$$\begin{aligned} \Delta E_2(\alpha) &= -\frac{\alpha_d^2 d^2 \Gamma[d/2]}{9\pi^{d/2+2} B_d} \int_0^1 d\eta (1-\eta^2)^{\frac{d-3}{2}} \int_0^\infty dz_1 \int_{z_1}^\infty dz_2 \int_{z_2}^\infty dz_3 \left\{ e^{-z_3 - |z_1 - z_2|} \times \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{[4F(z_1)F(z_2 - z_3) - \eta^2 \Xi^2]^{1/2}} - \frac{1}{[4F(z_1)F(z_2 - z_3)]^{1/2}} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\eta^2}{2} \frac{\Xi^2(z_1, z_2, z_3, 0)}{[4F(z_1)F(z_2 - z_3)]^{3/2}} \right) + (z_1 \leftrightarrow z_2) + (z_1 \leftrightarrow z_3) \right\}, \\ \Delta m_2^*(\alpha) &= \frac{2\alpha_d^2 d \Gamma[d/2]}{9\pi^{d/2+2} B_d} \int_0^1 d\eta (1-\eta^2)^{\frac{d-3}{2}} \int_0^\infty dz_1 \int_{z_1}^\infty dz_2 \int_{z_2}^\infty dz_3 \left\{ e^{-z_3 - |z_1 - z_2|} \times \right. \\ &\quad \times \left[[F(z_2 - z_3)z_1^2 + F(z_1)(z_2 - z_3)^2] \left(\frac{1}{[4F(z_1)F(z_2 - z_3) - \eta^2 \Xi^2]^{3/2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{[4F(z_1)F(z_2 - z_3)]^{3/2}} - \frac{3\eta^2}{2} \frac{\Xi^2(z_1, z_2, z_3, 0)}{[4F(z_1)F(z_2 - z_3)]^{5/2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta^2 z_1 (z_2 - z_3) \Xi(z_1, z_2, z_3, 0) \left(\frac{1}{[4F(z_1)F(z_2 - z_3) - \eta^2 \Xi^2]^{3/2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{[4F(z_1)F(z_2 - z_3)]^{3/2}} \right) \right] + (z_1 \leftrightarrow z_2) + (z_1 \leftrightarrow z_3) \right\}, \end{aligned}$$

where a four-point correlation function Ξ has been introduced:

$$\Xi(t, s, u, v) = F(t-u) + F(s-v) - F(s-u) - F(t-v).$$

Finally, combining both the Gaussian leading-order and the second-order non-Gaussian contribution, we estimate the polaron GSE and EM as follows:

$$\begin{aligned} E_2(\alpha) &= E_0(\alpha) + \Delta E_2(\alpha), \\ m_2^*(\alpha) &= m_0^*(\alpha) + \Delta m_2^*(\alpha). \end{aligned} \quad (63)$$

9. EXACT AND NUMERICAL RESULTS

The Gaussian (leading-order) and the next-to-Gaussian contributions to the GSE and EM have been derived analytically for the weak- and strong-coupling limits. For intermediate coupling, we have calculated these quantities numerically. The obtained intermediate-coupling results for the polaron GSE and EM $d = 1, 2$ and $d = 3$ are represented in Figures 1 and 2, respectively, in comparison with several known data.

Weak-Coupling Limit

The exact results by fourth-order perturbation theory are as follows:

$$E_{4th-PT}(\alpha) = \begin{cases} -\alpha - 0.06066 \alpha^2 - O(\alpha^3), & d = 1, \\ -\alpha - 0.06397 \alpha^2 - O(\alpha^3), & d = 2, \\ -\alpha - 0.01592 \alpha^2 - O(\alpha^3), & d = 3 \end{cases}$$

for the GSE [38, 39, 67] and

$$m_{4th-PT}^*(\alpha) = \begin{cases} 1 + (1/2) \alpha + 0.1919417 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 1, \\ 1 + (\pi/8) \alpha + 0.1272348 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 2, \\ 1 + (1/6) \alpha + 0.0236276 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 3 \end{cases}$$

for the EM [38, 59, 66, 68].

The coefficient of the α^2 term of the Feynman polaron mass overestimates the exact value by 7.8 and 4.5 per cent for $d = 2$ and $d = 3$. The next correction to the Feynman result [57] for $d = 3$ fits the correct behaviour.

Knowing explicitly the weak-coupling behaviour of $F(t)$ we derive the leading-order Gaussian contributions. Considering the next-to-Gaussian corrections, it is sufficient to use the asymptotic solution $F(t) = t/2 - \alpha_d f_1(t)$ because the neglected terms $O(\alpha_d^2)$ will generate corrections proportional to $O(\alpha_d^3)$. We obtain

$$\begin{aligned} E_2(\alpha) &= \begin{cases} -\alpha - 0.060660 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 1, \\ -\alpha - 0.063974 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 2, \\ -\alpha - 0.015919 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 3, \end{cases} \\ m_2^*(\alpha) &= \begin{cases} 1 + (1/2) \alpha + 0.191941738 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 1, \\ 1 + (\pi/8) \alpha + 0.127234835 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 2, \\ 1 + (1/6) \alpha + 0.023627630 \alpha^2 + O(\alpha^3), & d = 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (64)$$

Our final results for the weak-coupling polaron GSE and EM are in complete agreement with previously known data obtained within the perturbation [59,66,67] and $1/d$ -expansion [69] methods.

Strong-Coupling Limit

It is known that in the strong-coupling polaron regime the polaron is described well by the Pekar Produkt-Ansatz implying that electron excitations are governed by a potential adopted to the ground state. The wave function corresponding to the ground state has rather exponential function behaviour than a Gaussian shape. Therefore, one should not expect to see exact coincidence of the GGR result and extensive numerical data obtained in [12,48,53,60]:

$$\begin{aligned} E_{\text{Adiab}}(\alpha) &= \begin{cases} -0.33203 \alpha^2 + O(1), & d = 1, \\ -0.4047 \alpha^2 + O(1), & d = 2, \\ -0.108513 \alpha^2 + O(1), & d = 3, \end{cases} \\ m_{\text{Adiab}}^*(\alpha) &= \begin{cases} 2.1254 \alpha^4 + O(1), & d = 1, \\ 0.7328 \alpha^4 + O(1), & d = 2, \\ 0.022702 \alpha^4 + O(1), & d = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Note, the exact solution to the one-dimensional Pekar problem (strong-coupling regime) has been found in [23] which resulted in $E(\alpha) = -\alpha^2/3$ and $m^*(\alpha) = -32\alpha^4/15$.

As α becomes very large, $F(t)$ behaves like that in (59). By using this asymptotic solution, we derive

$$\begin{aligned} E_2(\alpha) &= \begin{cases} -0.236926 \alpha^2 + O(1), & d = 1, \\ -0.400538 \alpha^2 + O(1), & d = 2, \\ -0.108433 \alpha^2 + O(1), & d = 3, \end{cases} \\ m_2^*(\alpha) &= \begin{cases} 1.858065 \alpha^4 + O(1), & d = 1, \\ 0.681878 \alpha^4 + O(1), & d = 2, \\ 0.021656 \alpha^4 + O(1), & d = 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (65)$$

We observe that the leading-order Gaussian GSE and EM as $\alpha \rightarrow \infty$ behave similarly to the corresponding results obtainable within the Feynman and $1/d$ -expansion methods. These results underestimate the corresponding adiabatic ones [48, 53]. This is probably due to the fact that for increasing α the nonlocal Coulomb-like polaron self-interaction is less well approximated by an oscillator-type term used for our leading-order mass. Hence, higher-order non-Gaussian corrections are required to fill this gap.

Intermediate-Coupling Range

For intermediate coupling we have solved equations (49) numerically by means of an iterative procedure accepting (60) as the first approximation. We

have checked that after the fourth and fifth iteration steps with a sufficiently large integration domain the final results did not change within the given accuracy.

The obtained intermediate-coupling results for the Gaussian leading-order GSE and EM as well as for the corrected values $E_2(\alpha)$ and $m_2^*(\alpha)$ in one, two and three dimensions are presented in Figures 1 and 2, respectively, in comparison with several known data. The scaling feature (61) for $m_0^*(\alpha)$ allows us to depict one-, two- and three-dimensional Gaussian leading-order masses by only one curve in Fig. 2. In doing so, we plot, for example, our two-dimensional results scaled actually by $\alpha_d/\alpha = 3\pi/4$ times in the horizontal (α -axis) direction. Data cited as Feynman's have been re-obtained by us to cover more data sets. To show the deviation of all results from the Feynman ones more clearly, we have plotted them normalized to the Feynman data. The results of the fourth-order perturbation theory and the adiabatic strong-coupling model extrapolated to the intermediate-coupling region $1 < \alpha_d < 10$ have not been plotted due to their relative large deviations from Feynman's result. Taking into account non-Gaussian corrections breaks the scaling feature (61) and the deviations of the corrected results from Feynman's estimates (and from Gaussian, too) for $d = 1$ is larger than for $d = 3$. This is because α_d vanishes as $d \rightarrow \infty$. In lower spatial dimensions non-Gaussian corrections play more important role.

Comparing our intermediate-coupling results to that obtained within other approaches, we note that our method works well in the whole range of α for all spatial dimensions $d \geq 1$. It does not require extensive numerical calculations on supercomputers [70–72], but is able to give more reliable and consistent results rather quickly.

Comparing to another type of approaches characterized by constructing different interpolation algorithms [73, 74], our approach does not suffer any singularity and hypersensitivity intrinsic to these algorithms.

In conclusion, we have represented the generalized Gaussian representation method to evaluate a wide class of path integrals arising in various fields of modern theoretical physics. This method is a non-variational path-integral approach, whose leading order already takes care of all Gaussian fluctuations and higher orders correct systematically for non-Gaussian contributions. As a particular application of this method, we have considered the Fröhlich–Feynman polaron model at arbitrary value of the electron-phonon coupling $\alpha \geq 0$ by extending it into different ($d \geq 1$) spatial dimensions.

Considering the polaron quasi-particle characteristics, we have given several definitions of the polaron EM based on different physical principles, but independent of the specific approximate method. We have shown that definitions based on the polaron internal dynamics do not coincide, in general, with those obtained by using a response principle to external sources (forces). They are equivalent either in the weak-coupling regime or, in case of some variational optimizations having in fact, the same perturbation nature.

Applied to the polaron problem in statistical physics, the GGR method allows one to estimate main quasi-particle characteristics of the polaron with accuracy superior to other methods, improving, e.g., the Feynman variational estimations. We have calculated the ground-state energy and the effective mass of the polaron in all the weak-, strong- and intermediate-coupling regimes. For explicit results we concentrate on the physically relevant cases of $d = 1$, $d = 2$, and $d = 3$. In the weak-coupling limit we have obtained exact analytic answers while a systematic iteration estimation has been developed to get a fast converging series to the exact results for the strong-coupling regime. By calculating the next-to-leading non-Gaussian corrections to both the GSE and EM, we have found that these corrections are rather small for an arbitrary value of α in $d = 1$, $d = 2$, and $d = 3$, and higher orders can result only in a tiny improvement. Therefore, we believe that the obtained results are sufficiently close to the exact polaronic characteristics. This can be verified also by comparing our results with the recent numerical data due to extensive Monte Carlo calculations for the polaron GSE ($d = 3$) performed in [71, 72]. Our results lie very close to Monte Carlo estimates wherever the latter is available.

Besides, we have shown that the GGR can serve as a source of various approximation techniques. In particular, the Feynman variational method is readily obtained when a simple trial function is substituted by the exact solution derived from the integral equation governing the GGR method. Other generalizations of the Feynman methods are also obtainable as particular cases of the general Gaussian approximation. The estimated Gaussian self-energy improves, as it can be expected by the very construction, the Feynman estimate through the entire range of α and belongs to the lowest *upper bounds* available at present. The corresponding estimation of the Gaussian effective mass has also been performed for arbitrary coupling in one, two and three dimensions. Quantitatively, the Gaussian GSE improves the corresponding Feynman estimate not too much; the deviation is slightly higher for the effective mass. This difference disappears as strong coupling tends to infinity, which proves once again the common nature of both the methods.

Discussing on our method we would like to point out that still there is room for diversification and improvement. Being a nonvariational approach, the GGR method can deal with non-Hermitean functionals and, therefore, may be successfully applied to other related problems such as the magneto-polaron, the bi-polaron or the spin-polaron. Another interesting item is to reformulate the method by using Wiener-type stochastic integration «measure» rather than Feynman «paths». This may allow one to use a powerful mathematical technique developed in this area. And, specially for $\alpha \gg 1$ our method can be modified to take into account more efficiently higher-order non-Gaussian terms.

Acknowledgments. We are indebted to H. Leschke, N.M. Plakida and V.B. Priezzhev for several useful discussions.

APPENDIX A

Consider a general functional

$$\begin{aligned} e^{-\beta \tilde{\Phi}(\alpha, \mathbf{u}^2, \lambda)} &= N \int_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{0}}^{\mathbf{r}(\beta)=\mathbf{0}} \delta \mathbf{r} \exp \left\{ -S_0[\mathbf{r}] + \right. \\ &\quad \left. + \iint_0^\beta dt ds V \left[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s) - \mathbf{u}(t-s) \left(1 - \lambda \frac{t+s}{\beta} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Obviously, function $\tilde{\Phi}(\alpha, \mathbf{u}^2, \lambda)$ is related to $\Phi(\alpha, \xi)$ and $\Psi(\alpha, \xi)$ as follows

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \xi) &= \tilde{\Phi}(\alpha, \xi, 0), & \Psi(\alpha, \xi) &= \tilde{\Phi}(\alpha, \xi, 1), & \xi &= \mathbf{u}^2, \\ \Phi_\xi(\alpha, \xi) &= \tilde{\Phi}'(\alpha, \xi, 0), & \Psi_\xi(\alpha, \xi) &= \tilde{\Phi}'(\alpha, \xi, 1). \end{aligned}$$

By the very definition it takes place

$$\Phi(\alpha, 0) = \Psi(\alpha, 0).$$

The first part of $\tilde{\Phi}'(\alpha, 0, \lambda)$ is proportional to

$$\iint_0^\beta dt ds V_1(t-s)(t-s)^2 \left(1 - \lambda \frac{t+s}{\beta} \right)^2 = 2 \int_0^\beta ds s^2 V_1(s) \int_s^\beta dt \left(1 - \lambda \frac{2t-s}{\beta} \right)^2. \quad (66)$$

For $\beta \rightarrow \infty$ (66) becomes

$$2\beta \int_0^\beta ds s^2 V_1(s) \cdot \int_0^1 dx (1 - 2\lambda x)^2 = 2\beta \left((1 - \lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{3} \right) \int_0^\beta ds s^2 V_1(s).$$

An analogous calculation takes place for the second part of $\tilde{\Phi}'(\alpha, \mathbf{u}^2, \lambda)$ and it results in

$$\begin{aligned} &\iiint_0^\beta dt ds dx dy V_2(t, s, x, y) (t-s)(x-y) \left(1 - \lambda \frac{t+s}{\beta} \right) \left(1 - \lambda \frac{x+y}{\beta} \right) = \\ &= 2\beta \left((1 - \lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{3} \right) \frac{1}{\beta} \iiint_0^\beta dt ds dx dy V_2(t, s, x, y) (t-s)(x-y). \quad (67) \end{aligned}$$

In (66) and (67) we have taken into account that functions $V_1(t, s)$ and $V_2(t, s, x, y)$ depend only on the absolute differences of their arguments. Therefore, we find for $\beta \rightarrow \infty$

$$\tilde{\Phi}_\xi(\alpha, \lambda) = \tilde{\Phi}'(\alpha, 0, \lambda) = \beta \left((1 - \lambda)^2 + \frac{\lambda^2}{3} \right) C(\alpha) + O(1).$$

Note, function $C(\alpha)$ is finite and behaves $C(\alpha) \sim \alpha$ as $\alpha \rightarrow 0$. In particular,

$$\tilde{\Phi}'(\alpha, 0, 0) = \beta C(\alpha), \quad \tilde{\Phi}'(\alpha, 0, 1) = \frac{1}{3} \beta C(\alpha).$$

In other words,

$$\Phi_\xi(\alpha, 0) = 3 \Psi_\xi(\alpha, 0).$$

APPENDIX B

According to (8), for large β we have

$$D_0(T, t) - D_0(T, s) = \begin{cases} 0 & \text{if } T < t, s, \\ t - s & \text{if } t, s < T, \\ T - s & \text{if } s < T < t, \\ -T + t & \text{if } t < T < s. \end{cases}$$

The following relations take place

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_0(t, s) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(t - s) - \frac{s}{\beta}, \quad \frac{d}{ds} D_0(t, s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(t - s) - \frac{t}{\beta}, \\ \frac{d^2}{ds dt} D_0(t, s) &= \delta(t - s) - \frac{1}{\beta}, \\ \int_0^z ds D_0(t, s) &= \frac{1}{2}(z - t)D_0(z, t) + \frac{z}{2}a(t), \quad a(t) = t \left(1 - \frac{t}{\beta}\right), \\ \int_0^\beta dz a(z) &= \frac{\beta^2}{6}, \quad \int_0^\beta dz D_0(z, t) = \frac{\beta}{2}a(t), \quad \iint_0^\beta dt ds D_0(t, s) = \frac{\beta^3}{12}, \\ \int_0^\beta dz [D_0(t, z) - D_0(s, z)]^2 &= \frac{\beta}{3}[a(t) - a(s)]^2 + O(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\beta dz [D_0(t, z) - D_0(s, z)][D_0(x, z) - D_0(y, z)] = \\
& = \frac{\beta}{3}[a(t) - a(s)][a(x) - a(y)] + O(1), \\
& \int_t^s dz a(z) = \frac{s}{2}a(s) - \frac{t}{2}a(t) + \frac{s^3 - t^3}{6\beta}.
\end{aligned}$$

APPENDIX C

First, we note that

$$\int d\Lambda_{tsk} :(\mathbf{kR})^2 := \frac{\lambda_d}{2} \iint_{-\beta/2}^{\beta/2} dt ds \Phi(t-s) :[\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(s)]^2:,$$

where

$$\Phi(t) = \frac{\exp(-|t|)}{F^{3/2}(t)}, \quad \lambda_d = \frac{\alpha_d}{6\sqrt{2\pi}}, \quad \alpha_d = \alpha \frac{3\pi^{d/2+1}}{d\Gamma(d/2)} B_d.$$

Then, in the limit $\beta \rightarrow \infty$ the constraint equation in (48) becomes

$$\begin{aligned}
& \iint_{-\infty}^{\infty} dt ds \left\{ : \mathbf{r}(t) [\mathbf{D}_0^{-1}(t-s) - \mathbf{D}^{-1}(t-s)] \mathbf{r}(s) : + \right. \\
& \left. + \lambda_d \Phi(t-s) : \mathbf{r}^2(t) - \mathbf{r}(t) \mathbf{r}(s) : \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{68}$$

Substituting the identity

$$\mathbf{r}^2(t) = \mathbf{r}(t) \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z-t) \mathbf{r}(z)$$

into (68) and interchanging the variables $s \leftrightarrow z$ we obtain

$$\begin{aligned}
& \iint_{-\infty}^{\infty} dt ds : \mathbf{r}(t) \left\{ \mathbf{D}_0^{-1}(t-s) - \mathbf{D}^{-1}(t-s) + \right. \\
& \left. + \lambda_d \left[\delta(t-s) \int_{-\infty}^{\infty} dz \Phi(z-t) - \Phi(t-s) \right] \right\} \mathbf{r}(s) := 0.
\end{aligned}$$

In other words,

$$D_0^{-1}(t-s) - D^{-1}(t-s) + \lambda_d \left[\delta(t-s) \int_{-\infty}^{\infty} dz \Phi(z) - \Phi(t-s) \right] = 0. \quad (69)$$

Going to the Fourier transform for (69) and taking into account (46) we obtain

$$k^2 - \tilde{D}^{-1}(k) + \lambda_d [\tilde{\Phi}(0) - \tilde{\Phi}(k)] = 0 \quad \text{or} \quad \tilde{D}(k) = \frac{1}{k^2 + \lambda_d [\tilde{\Phi}(0) - \tilde{\Phi}(k)]},$$

where

$$\tilde{\Phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ikz} \Phi(z) = 2 \int_0^{\infty} dz \cos(kz) \frac{\exp(-z)}{F^{3/2}(z)}.$$

Introducing an auxiliary function

$$\tilde{\Sigma}(k) = \frac{\lambda_d}{\alpha_d} [\tilde{\Phi}(0) - \tilde{\Phi}(k)] = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz [1 - e^{ikz}] \frac{\exp(-z)}{F^{3/2}(z)}$$

and performing the Fourier transform for (47) we obtain

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk [1 - e^{ikt}] \tilde{D}(k).$$

REFERENCES

1. **Landau L.D.** — Phys. Z. Sowjetunion, 1933, v.3, p.664.
2. **Feynman R.P.** — Phys. Rev., 1955, v.97, p.660;
Feynman R.P., Hibbs A.R. — Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.
3. **Devreeze J.T.** — Polarons in Encyc. Appl. Phys., 1996, v.14, p.383, Amsterdam: VCH Publishers.
4. **Kuper C.G., Whitfield G.D. (ed)** — Polarons and Excitons. London: Oliver and Boyd, 1963.
5. **Lakhno V.D. (ed.)** — Polarons & Applications. Chichester: J. Wiley, 1994.
6. **Mikkor M., Kanazawa K., Brown F.C.** — Phys. Rev., 1967, v.162, p.848.
7. **Ascarelli G.** — Phys. Rev. Lett., 1968, v.20, p.44.
8. **Fröhlich H.** — Philos. Mag. Suppl., 1954, v.3, p.325.
9. **Lee T.D., Low F., Pines D.** — Phys. Rev., 1953, v.90, p.297.

10. **Pekar S.I.** — Research in Electron Theory of Crystals. Moscow: Gostekhizdat, 1951. Untersuchungen über die Elektronentheorie der Kristalle. Berlin: Akademie-Verlag, 1954.
11. **Adamowski J., Gerlach B., Leschke H.** — Phys. Lett., 1980, v.A79, p.249.
12. **Lieb E.H., Thomas L.E.** — Commun. Math. Phys., 1997, v.183, p.511; Erratum: 1997, v.188, p.499.
13. **Bogolyubov N.N., Tyablikov S.V.** — Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1949, v.19, p.256.
14. **Tyablikov S.V.** — Zh. Eksp. Teor. Fiz., 1951, v.21, p.377.
15. **Okamoto K., Abe R.** — J. Phys. Soc. Jpn., 1975, v.31, p.1337.
16. **Bogolyubov N.N. (Jr.), Kireev A.N., Kurbatov A.M.** — Theor. Math. Phys., 1986, v.67, p.394 (English translation).
17. **Poulter J., Sa-yakanit V.** — On the Ground-State Energy of the Polaron. (Path Integration: Trieste 1991), eds. H.A. Cerdeira et al. Singapore: World Scientific, 1993, p.506.
18. **Saitoh M.** — J. Phys. Soc. Jpn., 1980, v.49, p.878.
19. **Adamowski J., Gerlach B., Leschke H.** — Feynman's Approach to the Polaron Problem Generalized to Arbitrary Quadratic Actions (Functional Integration, Theory and Application), eds. J.-P. Antoine and E. Tirapegui. New York: Plenum, 1980, p.241.
20. **Ganbold G., Efimov G.V.** — Phys. Rev., 1994, v.B50, p.3733.
21. **Dineykhan M. et al.** — Oscillator Representation in Quantum Physics (Lecture Notes in Physics, series Monographs m26). Berlin: Springer, 1995.
22. **Ganbold G., Efimov G.V.** — J. Phys.: Condens. Matter, 1998, v.10, p.4845.
23. **Ganbold G.** — Theor. Math. Phys., 2000, v.122, p.231.
24. **Brown F.C.** — In: Polarons and Excitons, eds.C.G. Kuper and G.D. Whitfield. London: Oliver and Boyd, 1963.
25. **Larsen D.** — In: Landau Level Spectroscopy, eds. G. Landwehr and E. Rashba. Amsterdam: North Holland, 1991.
26. **Miura N., Nojiri H., Imanaka Y.** — In: Proc. XXII Int. Conf. Physics of Semiconductors, ed. D.J. Lockwood. Singapore: World Scientific, 1994.
27. **Mott N.F.** — Metal-Insulator Transitions. London: Taylor and Francis, 1990.
28. **Alexandrov A.S., Mott N.F.** — Rep. Prog. Phys., 1994, v.57, p.1197;
Alexandrov A.S., Bratkovsky A.M., Mott N.F. — Phys. Rev. Lett., 1994, v.72, p.1734.
29. **Smondyrev M.A., Devreese J.T., Peeters F.M.** — Phys. Rev., 1995, v.B51, p.15008.
30. **de Dormale B.** — Can. J. Phys., 1979, v.57, p.114.
31. **Leschke H., Wonneberger S.** — J. Phys., 1989, v.A22, p.L1009; Corrigendum, 1990, v.A23, p.1475.
32. **Roepstorff G.** — Path Integral Approach to Quantum Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
33. **Horst M., Merkt V., Kottaus J.P.** — Phys. Rev. Lett., 1983, v.50, p.754.
34. **Su W.P., Schrieffer J.R., Heeger A.J.** — Phys. Rev. Lett., 1980, v.42, p.1648; Phys. Rev., 1980, v.B22, p.2099.
35. **Su Z.B., Yu L.** — Phys. Rev., 1983, v.B27, p.5199.
36. **Berggren K.-F. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1986, v.57, p.1769.
37. **Sernelius B.E.** — Phys. Rev., 1987, v.B36, p.9509; Phys. Rev., 1988, v.B37, p.7909.
38. **Quinghu C., Kelin W., Shaolong W.** — J. Phys.: Condensed Matter, 1994, v.6, p.6599.

-
39. **Peeters F.M., Wu X., Devreese J.T.** — Phys. Rev., 1986, v.B33, p.3926.
40. **Degani M.H., Hipólito O., Lobo R., Farias G.A.** — J. Phys., 1986, v.C19, p.2919.
41. **Saho S.** — J. Phys.: Condens. Matter, 1998, v.10, p.1999.
42. **Jackson S.A., Platzman P.M.** — Phys. Rev., 1981, v.B24, p.499.
43. **Sak J.** — Phys. Rev., 1972, v.B6, p.3981.
44. **Hai G.Q., Peeters F.M., Devreese J.T.** — Phys. Rev., 1993, v.B48, p.12016.
45. Proceed. IV Int. Conf. on Electronic Properties of 2D-Systems, New Hampshire, August 1981.
46. **Gross E.P.** — Annals of Physics, 1976, v.99, p.1.
47. **Peeters F.M., Smolyakov M.A.** — Phys. Rev., 1991, v.B43, p.4920.
48. **Miyake S.** — J. Phys. Soc. Jpn., 1975, v.38, p.181; 1976, v.41, p.747.
49. **Whitfield G., Platzman P.** — Phys. Rev., 1972, v.B6, p.3987.
50. **Wang K., Chen Q., Wan S.** — Phys. Lett., 1994, v.A185, p.216.
51. **Cameron R.H.** — Duke Math. Jour., 1951, v.18, p.111.
52. **Kochetov E.A., Kuleshov S.P., Smolyakov M.A.** — Phys. of Elem. Part. and Atomic Nuclei, 1982, v.13, p.635; Theor. Math. Phys., 1975, v.25, p.30.
53. **Wu X., Peeters F.M., Devreese J.T.** — Phys. Rev., 1985, v.B31, p.3420.
54. **Peeters F.M., Devreese J.T.** — Phys. Rev., 1987, v.B36, p.4442.
55. **Smolyakov M.A.** — Physica, 1991, v.A171, p.191;
Selyugin O.V., Smolyakov M.A. — In: Proc. Int. Confer. Path Integrals in Physics, eds. V. Selyugin et al. Singapore: World Scientific, 1994, p.355.
56. **Gerlach B., Löwen H., Schliffke H.** — Phys. Rev., 1987, v.B36, p.6320.
57. **Lu Y., Rosenfelder R.** — Phys. Rev., 1992, v.B46, p.5211.
58. **Saitoh M.** — J. Phys. Soc. Jpn., 1980, v.49, p.886.
59. **Arisawa K., Saitoh M.** — phys. stat. sol. (b), 1983, v.120, p.361; Phys. Lett., 1981, v.A82, p.462.
60. **Spoohn H.** — Phys. Rev., 1986, v.B33, p.8906; Ann. Phys. (N.Y.), 1987, v.175, p.278.
61. **Saitoh M.** — J. Phys. Soc. Jpn., 1981, v.49, p.2295.
62. **Marshall J.T., Chawla M.S.** — Phys. Rev., 1970, v.B2, p.4283
63. **Efimov G.V., Ganbold G.** — Functional Integrals in the Strong-Coupling Regime (Vacuum Structure in Intense Fields), eds. H.M. Fried and B. Muller, New York, Plenum, 1991, p.257; preprint DIAS-STP-90-22.
64. **Efimov G.V., Ganbold G.** — phys. stat. sol.(b), 1991, v.168, p.165.
65. **Efimov G.V., Ganbold G.** — Phys. Part. Nucl., 1995, v.26, p.198.
66. **Peeters F.M., Wu X., Devreese J.T.** — Phys. Rev., 1988, v.B37, p.933.
67. **Röseler J.** — phys. stat. sol., 1968, v.25, p.311.
68. **Höhler G., Müllensiefen A.** — Z. Phys., 1959, v.157, p.159.
69. **Seljuk O.V., Smolyakov M.A.** — Physica, 1987, v.A142, p.555.
70. **Becker W., Gerlach B., Schliffke H.** — Phys. Rev., 1983, v.B28, p.5735.
71. **Alexandrou C., Rosenfelder R.** — Phys. Rep., 1992, v.215, p.1.
72. **Alexandrou C., Fleischer W., Rosenfelder R.** — Phys. Rev. Lett., 1992, v.65, p.2615; Mod. Phys. Lett., 1991, v.B5, p.613.
73. **Selyugin O.V., Smolyakov M.A.** — phys. stat. sol. (b), 1989, v.155, p.155.
74. **Kleinert H.** — Phys. Lett., 1995, v.A207, p.133.
75. **Larsen D.M.** — Phys. Rev., 1968, v.172, p.967.

УДК 539.173.12

ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР ПРИ ВЗАЙМОДЕЙСТВИИ С ПРОТОНАМИ И НЕЙТРОНАМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЙ

A.I. Обухов

Радиевый институт им. В.Г.Хлопина, Санкт-Петербург

В обзоре представлены экспериментальные и некоторые расчетные данные о делении ядер при взаимодействии с протонами с энергией от 20 МэВ до 3÷6 ГэВ и нейтронами от 20 до 200÷450 МэВ. Кратко представлены данные о первичной стадии взаимодействия с ядрами быстрых протонов и нейтронов. Рассмотрены зависимости от энергии бомбардирующих протонов и нейтронов сечений деления ядер, угловых распределений осколков деления, массовых и изотопных распределений продуктов деления ядер, кинематических характеристик продуктов деления ядер. Кратко представлены данные об испускании нейтронов и заряженных частиц при делении ядер, вызванном протонами промежуточных энергий. Деление ядер типа висмута, свинца, вольфрама, тантала по некоторым характеристикам подобно делению ядер урана, приводящему к нейтрононедостаточным продуктам деления, высоковозбужденному делению ядер урана. Деление ядер урана, приводящее к нейтронизбыточным продуктам деления, по некоторым характеристикам подобно делению ядер урана при низких энергиях возбуждения. Деление первой группы ядер связано, по-видимому, с центральными взаимодействиями бомбардирующих протонов с ядрами, а деление второй группы — с периферическими взаимодействиями. При энергиях бомбардирующих протонов выше 2000÷3000 МэВ проявляется или другой механизм деления ядер, или вклад других процессов — фрагментации и мультифрагментации ядер.

Experimental and some calculated data are presented in this review article on nuclear fission under 20 MeV to 3–6 GeV energy proton and 20 to 200 ÷ 450 MeV energy neutron interactions. Data on primary stage of interactions of high energy protons and neutrons with nuclei are briefly also presented. Dependences of nuclear fission cross sections, angular distributions of fission fragments, mass and isotope distributions of nuclear fission products, kinematic characteristics of fission products from the energy of bombarding protons and neutrons are considered. Data on neutrons and charged particles emission at the nuclear fission induced by intermediate energy protons are briefly presented. Some characteristics of the nuclear fission of bismuth, lead, tungsten, tantalum are similar to those of highly excited uranium fission, resulting in neutron-deficient products. The fission of uranium nuclei resulting in neutron-excess fission products is by some characteristics similar to that of fission of uranium nuclei at the low energy excitation. Fission of the first group of nuclei is apparently related to more central interactions of bombarding protons with nuclei and the fission of the second group is connected with peripheral interactions of protons. The other mechanism of nuclear fission or the contribution of other processes, i.e., nuclear fragmentation and multifragmentation, is appeared at the energy of protons above 2000 ÷ 3000 MeV.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что основной массив данных о делении ядер относится к области энергий бомбардирующих нейтронов до 20 МэВ и к тяжелым ядрам

типа урана, тория, плутония. Это связано, прежде всего, с практическим использованием деления ядер в ядерных реакторах. Данные о делении ядер в этой области энергий широко представлены в многочисленных монографиях, обзорных статьях, материалах конференций, см., например, [1–7].

С постройкой ускорителей заряженных частиц область деления ядер и энергий была расширена. Позднее на базе протонных ускорителей были созданы источники нейтронов с энергиями до $200 \div 450$ МэВ для научных исследований в Лос-Аламосской национальной лаборатории (США, LANL), $E_p = 800$ МэВ [8] и в Петербургском институте ядерной физики (Россия), $E_p = 1000$ МэВ [9]. Основная часть данных при энергиях нейтронов выше 20 МэВ состоит из результатов, полученных на «белых» источниках нейтронов этих лабораторий. Данные о характеристиках деления ядер в области промежуточных энергий, прежде всего протонами, содержатся, в той или иной мере, в монографиях [1, 4, 6, 10, 11] и обзорных статьях [2, 12–14].

Помимо чисто научного интереса, сведения о делении ядер при промежуточных энергиях, как и сведения о других видах расщепления ядер, в последние годы стали приобретать прикладное значение в связи с проблемой трансмутации долгоживущих радиоактивных отходов и создания систем для производства энергии с использованием ускорителей протонов с энергией до 1,5 ГэВ [15, 16]. Этой проблеме было посвящено несколько международных конференций. В частности, в Дубне в 1996 г. на эту тему была проведена международная школа «Ядерные методы для трансмутации ядерных отходов: проблемы, перспективы, кооперативные исследования» [17]. А в 1998 г. в Японии прошла школа под обязывающим названием «Перспективы науки и технологии в 21 столетии, открываемые интенсивными нейтронными источниками на основе расщепления (spallation) ядер» [18]. Как ожидается, элементы типа Ta, Au, Bi, Hg, W, Pb, Th и U могут быть использованы в таких системах, управляемых ускорителем (Accelerator-Driven System — (ADS)), или как материал для мишеней при производстве нейтронов, или как компоненты отработавшего топлива. Поэтому в данном обзоре был сделан акцент на рассмотрении данных о делении ядер прежде всего элементов W, Pb, Th и U и их соседей типа Ta, Au, Bi при взаимодействии с протонами и нейtronами промежуточных энергий.

В обзоре представлены кратко данные о первичной стадии взаимодействия с ядрами быстрых протонов и нейтронов — данные о передаваемых ядрам импульсе и энергии возбуждения ядер. Более подробно рассмотрены зависимости от энергии бомбардирующих протонов и нейтронов сечений деления ядер и угловых распределений осколков деления ядер. В последнем случае анализируется проблема так называемого «аномального» увеличения анизотропии деления некоторых ядер вблизи порога деления, в частности, при облучении ядер свинца ионами He. Рассмотрены зависимости массовых распределений продуктов деления ядер урана, тория, висмута, свинца, зо-

лота, тантала от энергии бомбардирующих протонов до 6 ГэВ, энергетическая зависимость изотопных распределений деления ядер урана, свинца, кинематических характеристик продуктов деления ядер урана, висмута, тантала. Не все характеристики деления ядер при промежуточных энергиях могли быть рассмотрены в необходимом объеме, в частности, эмиссия нейтронов и заряженных частиц при делении высоковозбужденных ядер. Принятое в обзоре определение промежуточных энергий частиц как интервал от 20 МэВ до $2 \div 6$ ГэВ носит условный характер, связанный с проблемой трансмутацииadioактивных продуктов с использованием ускорителей протонов с энергией в этом интервале.

Интересно отметить, что в 1999 г. исполнилось 50 лет со дня ввода в строй в Дубне (тогда — в Институте ядерных проблем АН СССР) под руководством М.Г.Мещерякова синхроциклотрона — ускорителя протонов сначала с энергией 480 МэВ, затем 660 МэВ, дейtronов с энергией 280 МэВ. Уже в 1951–1952 гг. А.П.Виноградовым с сотр. были проведены выделение и идентификация продуктов деления ядер Bi, Th и U протонами с энергией 480 МэВ [19]. Б.В.Курчатов с сотр. исследовали с помощью радиохимических методов деление вольфрама дейtronами с энергией 280 МэВ [20]. А.Н.Мурин с сотр. изучали реакции глубокого расщепления и деления ядер Cu, La Bi под действием протонов с энергией 480 и 660 МэВ [21]. В эти же годы Н.А.Перфилов с сотр. провели большой цикл работ по изучению деления ядер U, Bi, W при облучении протонами с энергией 460 и 660 МэВ с использованием метода ядерных эмульсий [22], и впервые в первой половине 1950 г. наблюдалось деление ядер урана медленными π^- -мезонами [22]. Почти одновременно также в 1950 г. наблюдалось деление ядер урана π^- -мезонами Г.Е.Беловицким и И.М.Франком. В эти же годы В.И.Гольданский с сотр. [23] измерили сечения деления ядер ^{232}Th , $^{238,235}\text{U}$, Bi, Pb, Tl, Au, Pt, Re, W нейtronами с энергиями 84, 120 и 380 МэВ. Нейтроны были получены от реакции срыва (break up) дейtronов на медной мишени.

Большинство из выполненных на синхроциклотроне в те годы работ [19–23] не потеряли актуальности до наших дней и интенсивно используются и цитируются при составлении систематик данных по делению ядер.

2. ПЕРВИЧНАЯ СТАДИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОТОНОВ И НЕЙТРОНОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЭНЕРГИИ С ЯДРАМИ

При достаточно высокой энергии бомбардирующей частицы, протона или нейтрона, когда ее средний свободный пробег в ядре становится сравнимым с диаметром тяжелого ядра, взаимодействие частицы с ядром можно рассматривать как столкновение с индивидуальными нуклонами ядра-мишени [24].

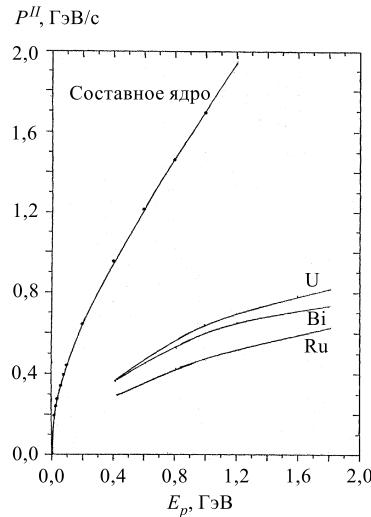


Рис. 1. Изменение средней передней компоненты импульса P^{II} , передаваемого ядрам U, Bi, Ru, в зависимости от энергии бомбардирующему протона, расчетные зависимости [31]. Верхняя кривая — зависимость $P_{CN}^{II}(E_p)$ в случае образования составного ядра

На этой, быстрой, стадии ($\tau \sim \tau_0$, где $\tau_0 < 10^{-22}$ с — время, необходимое для того, чтобы быстрая частица пересекла ядро) после каскада нуклон-нуклонных столкновений ядро, оставшееся после вылета нескольких быстрых нуклонов, нейтронов и протонов, получает лишь долю энергии возбуждения, которую получило бы составное ядро. В результате такого взаимодействия быстрых протонов или нейтронов с ядрами после каскадной стадии взаимодействия, рассчитываемой по методу случайных совпадений — методу Монте-Карло, образуется широкий набор ядер по A, Z и энергиям возбуждения [11, 25, 26, 27]. На второй, медленной, стадии ($\tau \gg \tau_0$) высоковозбужденное ядро последовательно испаряет частицы или испытывает деление [11, 28]. В начале 1970-х гг. был предложен ряд предравновесных, экситонных моделей, см., например, [29, 30]. В этих моделях рассматриваются три стадии реакции: стадия внутриядерного каскада, стадия предравновесного испарения частиц и стадия равновесного распада, включающая испарение частиц или деление.

В работах [25, 26] было найдено, что средняя энергия возбуждения остаточных ядер растет с увеличением энергии бомбардирующей частицы, при этом более тяжелому ядру передается большая энергия возбуждения [11, 25, 26]. Это объяснялось тем, что для более тяжелых ядер с большими размерами радиуса доля первичных частиц, которая проходит через ядро без взаимодействия, уменьшается. Порил [31] нашел связь между энергией бомбардирующей частицы и передаваемым ядру импульсом P^{II} в направлении бомбардирующих частиц, используя первичные данные расчета каскадной стадии взаимодействия Метрополиса и др. [25, 26]. Эти зависимости для трех ядер-мишеней U, Bi, Ru представлены на рис. 1. Из них видно, что, так же, как энергия возбуждения E^* , передаваемый ядру-мишени бомбардирующем пронтом импульс в переднем направлении P^{II} растет при переходе от более легкого ядра Ru к более тяжелым ядрам Bi, U. Далее Порил нашел почти линейную зависимость между величиной передаваемого ядру импульса в переднем направлении и энергией возбуждения ядра после каскадной стадии для случаев взаимодействия U и Bi с пронтами $E_p = 0,46$ ГэВ, Bi при $E_p = 0,94$ ГэВ и Ru при $E_p = 0,46$ ГэВ [31].

Точнее, была найдена линейная зависимость P^{II}/P_{CN}^{II} от E^*/E_{CN}^* , где P_{CN}^{II} и E_{CN}^* означают импульс и энергию возбуждения гипотетического составного ядра, если бы оно образовывалось. Подобные зависимости P^{II}/P_{CN}^{II} от E^*/E_{CN}^* были найдены расчетным путем Беляевым и Муриным для случая взаимодействия ядер висмута с протонами с энергией 135 МэВ [32] и Барашенковым, Тонеевым при взаимодействии ядер урана с протонами с энергией 350 МэВ [11].

Таким образом, у экспериментаторов появилась возможность измерения энергии возбуждения ядра после каскадной стадии взаимодействия бомбардирующего протона при определении величины P^{II} — передаваемого ядру импульса.

Аппроксимируя результаты зависимостей P^{II} и E^* , полученных в [31], Александр и др. [33] получили связь между E^* и P^{II} «для всех ядер-мишеней и всех бомбардирующих энергий» [33] в форме

$$\frac{E^*}{E_{CN}^*} = 0,75 \frac{P^{II}}{P_{CN}^{II}}. \quad (1)$$

Импульс, переданный ядру в каскадной стадии вдоль направления пучка, P^{II} , в экспериментах определяется или из угла между осколками, дополнительного к 180° , или из отношения числа осколков в передней и задней полусферах в радиохимическом методе и в методе ядерных эмульсий [14]. То и другое связано с переносной скоростью V^{II} и, соответственно, с импульсом ядра P^{II} . На рис. 2 представлены результаты экспериментального определения переносного импульса P^{II} для делящихся ядер в случаях облучения U, Bi и Ta(W) протонами с различными энергиями вплоть до 3000 МэВ [34–42]. Как видно из рисунка, две особенности характерны для приведенных данных. В случае урана и висмута значения переносных импульсов проходят через широкие максимумы около энергий бомбардирующих протонов $460 \div 1000$ МэВ. Ранее подобная зависимость наблюдалась при облучении тория протонами с максимумом $P^{II} \sim 300 - 350$ МэВ/с, около $E_p \approx 1000$ МэВ [43]. Максимум P^{II} для урана на рис. 2 равен ~ 380 МэВ/с, что близко к значению P^{II} для тория. В случае облучения Ta(W) протонами данных недостаточно, но, тем не менее, они указывают на увеличение продольного импульса P^{II} вплоть до энергии протонов 1 ГэВ.

Вторая особенность приведенных данных для P^{II} на рис. 2 — это явная сильная зависимость переданного делящемуся ядру импульса от типа ядра. В отличие от расчетных зависимостей $P^{II}(E_p)$, приведенных на рис. 1 для Ru, Bi, U в общем случае, в случае делящихся ядер зависимость P^{II} от Z^2/A ядра обратная. С уменьшением Z^2/A ядра, с ростом величины барьера деления, увеличивается доля делящихся ядер из области центральных взаимодействий протонов, с большей передачей импульса P^{II} и энергией возбуждения

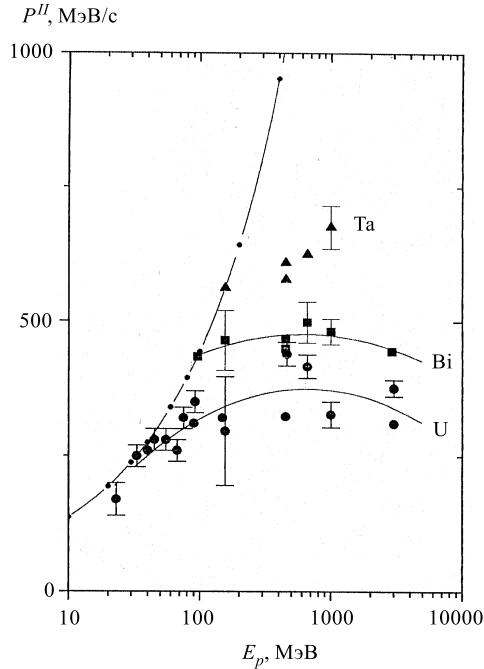


Рис. 2. Значение среднего импульса P^{II} , передаваемого в переднем направлении делящимся ядрам при облучении протонами урана, висмута, тантала (вольфрама), в зависимости от энергии протона. У: $E_p = 23 \div 92$ МэВ [34], 45, 80, 155 [35], 156 [36], 450 [37], 460, 660 [38], 1000 [14], 2900 [39], 3000 [38]; Bi: $E_p = 96$ МэВ [40], 156 [36], 660 [38], 1000 [14], 2900 [41]; Та: $E_p = 156$ МэВ [40], 450 [37], 660 (W) [42], 1000 (W) [14]

ядру E^* . Ранее подобный эффект увеличения импульса P^{II} , точнее, скорости V^{II} , с уменьшением Z^2/A делящегося ядра при облучении протонами 200 МэВ авторами статьи [44] был назван эффектом центральных столкновений, приводящих к образованию составного ядра.

Если воспользоваться выражением (1) — связью переданного ядру импульса P^{II}/P_{CN}^{II} и энергии возбуждения E^*/E_{CN}^* , то можно получить зависимости переданной энергии возбуждения E^* от энергии бомбардирующего протона и типа делящихся ядер (рис. 3). Видно, что, как и в случае с передачей импульса, энергия возбуждения делящихся ядер увеличивается с уменьшением Z^2/A ядра при данной энергии бомбардирующего протона. В отличие от зависимости $P^{II}(E_p)$, энергия возбуждения делящихся ядер E^* растет с увеличением энергии бомбардирующего протона вплоть до энергии протонов 3000 МэВ, хотя рост и замедляется в случае U, Bi.

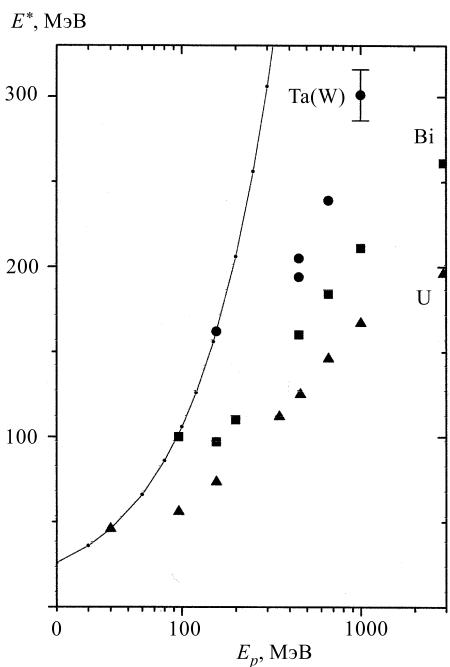


Рис. 3. Значение энергии возбуждения делящихся ядер U, Bi, Ta(W) в зависимости от энергии бомбардирующего протона, вычисленное с помощью зависимости (1) (см. текст) из данных рис. 2

3. ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЙ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР ОТ ЭНЕРГИИ БОМБАРДИРУЮЩИХ ПРОТОНОВ

Изучение зависимостей сечений деления ядер от энергии протонов от типа делящегося ядра U, Th, Bi, Pb, W, Ta и др. представляет интерес как для понимания физики процесса деления, так и, как отмечалось уже во введении, для ряда прикладных задач.

К настоящему времени накоплен сравнительно большой массив данных о сечениях деления ядер при облучении протонами. Однако данные, представленные в литературе по энергетической зависимости сечений деления ядер, были весьма противоречивы.

Так, Стейнер и Юнгерман [45] в 1956 г. измерили сечения деления ядер для ^{238}U , ^{235}U , ^{232}Th , ^{209}Bi и ^{197}Au при облучении их протонами в интервале энергий $100 \div 340$ МэВ. Ионизационная камера компенсационного типа (с компенсацией влияния ионизации первичного пучка) была использована для регистрации осколков деления. Результаты этих измерений показали, что сечения деления для изотопов урана и для тория велики: 1,5 б для урана и

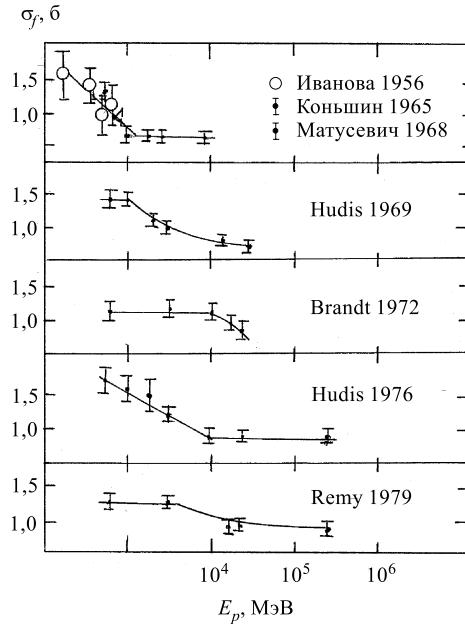


Рис. 4. Зависимости сечений деления ядер ^{238}U от энергии бомбардирующих протонов [47–53]. Линейные зависимости проведены по экспериментальным точкам

0,8 б для тория, и эти значения не изменяются в интервале 100 \div 400 МэВ. Висмут и золото показали заметное изменение делимости в зависимости от энергии, от 0,15 б для Bi и 0,016 б для Au при $E_p = 158$ МэВ до 0,20 б для Bi и 0,05 б для Au при 336 МэВ. Сечения деления ядер были измерены также радиохимически суммированием выходов масс продуктов деления для мишней, облученных протонами. Стивенсон и др. [46] нашли, таким образом, что сечение деления ядер урана примерно постоянно в интервале энергий протонов от 30 до 340 МэВ и равно 1,5 б. В 1956 г. Ивановой [47] были опубликованы результаты измерений сечений деления ядер урана при облучении ядерной эмульсии, пропитанной солью урана, протонами 140, 350, 460 и 660 МэВ. Было найдено, что сечение деления урана уменьшается от 1,6 б при $E_p = 140$ МэВ до 1 б при $E_p = 660$ МэВ.

После появления твердотельных трековых детекторов и обнаружения с их помощью возможности детектировать осколки с массой больше 20 а.е. [54, 55] в 1965–1976 гг. были проведены несколько серий измерений энергетической зависимости сечений деления ядер в широкой области энергий протонов до 300 ГэВ [48–53] (рис. 4). Измерения сечений деления урана, проведенные в 1965–1976 гг., продемонстрировали различные формы их зависимости от

энергии протонов: постоянство величины сечений деления вплоть до 10 ГэВ или различные варианты уменьшения сечений (рис. 4). За исключением измерений Ивановой [47] и Коньшина [48], Матусевича [49], во всех других приведенных на рис. 4 экспериментах осколки деления регистрировались двумя твердотельными детекторами в виде сэндвича, а именно детекторами из слоев слюды [50–52], макрофолья [53], «два осколка в совпадении». В случае Коньшина, Матусевича осуществлялась односторонняя регистрация осколков силикатным стеклом [48, 49]. Одной из возможных причин расхождения зависимостей рис. 4 является неопределенность в идентификации следов осколков, летящих в направлении плоскости детектора и тормозящихся в нем. Это видно из сравнения результатов двух различающихся способов подсчета следов осколков в одном и том же детекторе в 1969 и 1976 гг. [50, 52]. Существовал достаточно большой разброс данных в сечениях деления других ядер — Th, Bi, Au, Ta, W.

Авторами [56, 57] были проведены серии измерений сечений деления ряда ядер от урана до тантала при облучении протонами с энергией 70, 100, 155, 200 МэВ [56] и 1 ГэВ [57]. Круговая геометрия расположения твердотельных трековых детекторов (силикатное стекло) обеспечивала 100 % эффективность регистрации осколков деления исследуемых ядер. Эта геометрия позволяла авторам одновременно определять угловое распределение осколков деления и величину переносной скорости ядер. Для ядер ^{238}U , ^{235}U , ^{232}Th было найдено, что их сечения деления имеют максимум вблизи энергии протонов 70 МэВ и затем уменьшаются, а для ядер ^{209}Bi , ^{208}Pb , ^{207}Pb , ^{206}Pb , ^{197}Au сечения деления не достигают максимума вплоть до энергии протонов 1 ГэВ [58]. Другой группой авторов [59, 60] были измерены сечения деления ядер от тория до америция при облучении протонами с энергиями $10 \div 100$ МэВ. Для регистрации осколков деления ими были использованы тонкопленочные пробойные счетчики (ТПС), разработанные в Радиевом институте. Было установлено, что положение максимума в сечении деления тяжелых ядер несколько зависит от их Z^2/A и находится в районе 50–60 МэВ. На рис. 5 и 6 приведены полученные авторами [56–60] экспериментальные данные о сечениях деления ядер ^{238}U и ^{235}U соответственно при облучении протонами с энергией $10 \div 1000$ МэВ [61]. Для определения энергетической зависимости сечений использованы также данные прецизионных измерений сечений деления ядер урана при облучении протонами с энергиями до 30 МэВ [66], а в случае ^{238}U значительно менее точное значение сечения деления ядер ^{238}U при облучении протонами с энергией 9 ГэВ, полученное ранее с помощью методики ядерных эмульсий [67]. На рис. 5, 6 приведены сечения деления этих ядер при облучении нейtronами с энергией до 200 МэВ, полученные экспериментально Лисовским и др. [62]. Так же, как в случае протонов, наблюдается максимум в сечениях деления, только сдвинутый в сторону меньших энергий нейтронов (около 30–40 МэВ) и при меньшем зна-

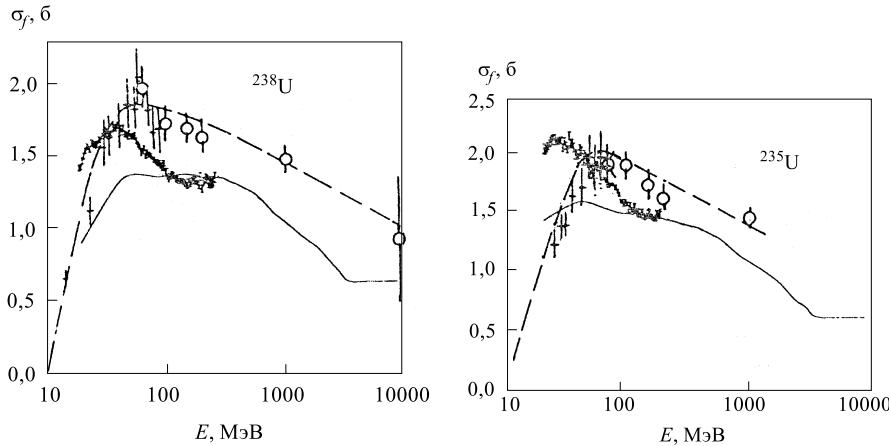


Рис. 5. Зависимость [61] сечения деления ядер ^{238}U от энергии бомбардирующих частиц: + — протоны, эксперимент [59, 60], о — протоны, эксперимент [56–58]; × — нейтроны, эксперимент [62], — — нейтроны, расчет [63]

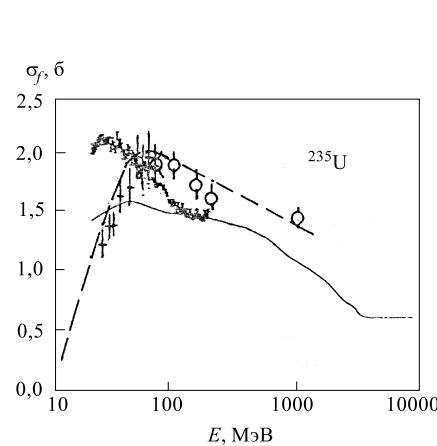


Рис. 6. Зависимость [61] сечений деления ядер ^{235}U от энергии бомбардирующих частиц. Обозначения см. на рис. 5

чении сечения. Здесь же приведены расчетные значения сечений деления ядер ^{238}U и ^{235}U в зависимости от энергии нейтронов в широком интервале энергий вплоть до 9 ГэВ [63]. Видно качественное подобие зависимости сечений деления ядер в трех случаях, но со сдвигом по величине и форме зависимости. На рис. 7 приведена [61] зависимость делимости $\sigma_f/\sigma_{\text{in}}$ ядер ^{238}U в широком интервале энергий протонов. При вычислении делимости $\sigma_f/\sigma_{\text{in}}$ ядер ^{238}U использованы значения сечений неупругого взаимодействия протонов с ядрами урана из систематики Барашенкова [65]. Как видно из приведенной на рис. 7 зависимости, начиная с энергии протонов ~ 100 МэВ, делимость ядер ^{238}U начинает заметно уменьшаться. Подобная зависимость делимости ядер была получена и для ^{235}U [61].

Эйсмонт и др. [68] констатировали, что накоплен большой объем экспериментальных данных о сечениях деления ядер в области Та — У при облучении протонами, однако достаточно полной компиляции и сравнительного критического анализа экспериментальных данных не существовало. Они поставили задачу заполнить этот пробел. Был проведен экстенсивный анализ и компиляция экспериментально измеренных (p, f) -сечений ^{181}Ta , ^{183}W , $^{\text{nat}}\text{W}$, ^{208}Pb , $^{\text{nat}}\text{Pb}$, ^{209}Bi , ^{232}Th , ^{238}U и $^{\text{nat}}\text{U}$ в области энергий протонов от порога деления до 30 ГэВ. Как результат анализа и компиляции, была со-

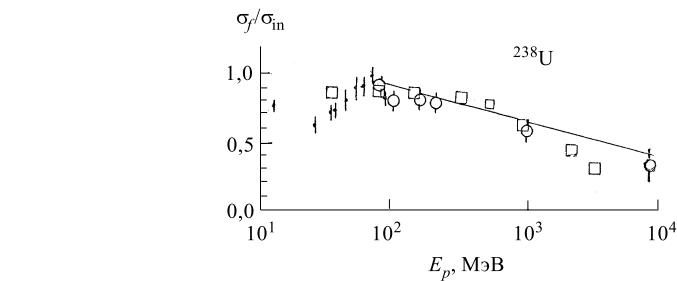


Рис. 7. Зависимость [61] делимости ядер σ_f/σ_{in} от энергии протонов при облучении ^{238}U : ● — экспериментальные данные σ_f [59, 60]; ○ — экспериментальные данные σ_f [56, 57]; □ — расчетные данные [64]; σ_{in} — сечение неупругого взаимодействия, из систематики [65]

здана база данных, включающая 100 серий данных. Авторы [68] выполнили сравнительный критический анализ экспериментальной техники, использованной при измерении сечений деления ядер, чтобы выяснить, насколько надежно определялись в каждом рассматриваемом случае характеристики сечения деления ядер (поток протонов, толщина мишней, эффективность регистрации). В результате такого анализа был присвоен «уровень надежности» каждой серии данных согласно следующим критериям: 1-й (высший) уровень надежности был присвоен сериям данных, если анализ не обнаруживал какой-либо упущеный или недооцененный источник систематических ошибок, 2-й (средний) уровень достоверности — серии данных, если имелись упомянутые ошибки или неопределенности, которые могли быть экспертно оценены; 3-й (наименее надежный) уровень достоверности присвоен данным, если анализ обнаруживал методические дефекты, ведущие к большим и непредсказуемым систематическим ошибкам. Данные, отнесенные к 3-й группе, не рассматривались в дальнейшем анализе. Высший уровень присваивался авторами [68] данным, полученным с помощью современной высокоинформационной техники (полупроводниковые детекторы, тонкопленочные пробойные счетчики, твердотельные трековые детекторы осколков в хороших геометрических условиях). Данные, полученные с помощью техники ядерных эмульсий или путем суммирования радиохимических выходов продуктов, относились, как правило, к наименее надежной группе. В результате такого анализа всего массива экспериментальных данных о (p, f) -сечениях была создана база данных для ^{232}Th , ^{238}U , ^{181}Ta , ^{nat}W , ^{208}Pb , ^{nat}Pb , ^{209}Bi (рис. 8,*a–d*) в широком интервале энергий. Окончательно была получена аналитическая аппроксимация энергетических зависимостей сечений деления, полученная методом наименьших квадратов (сплошные линии на рис. 8,*a–d*).

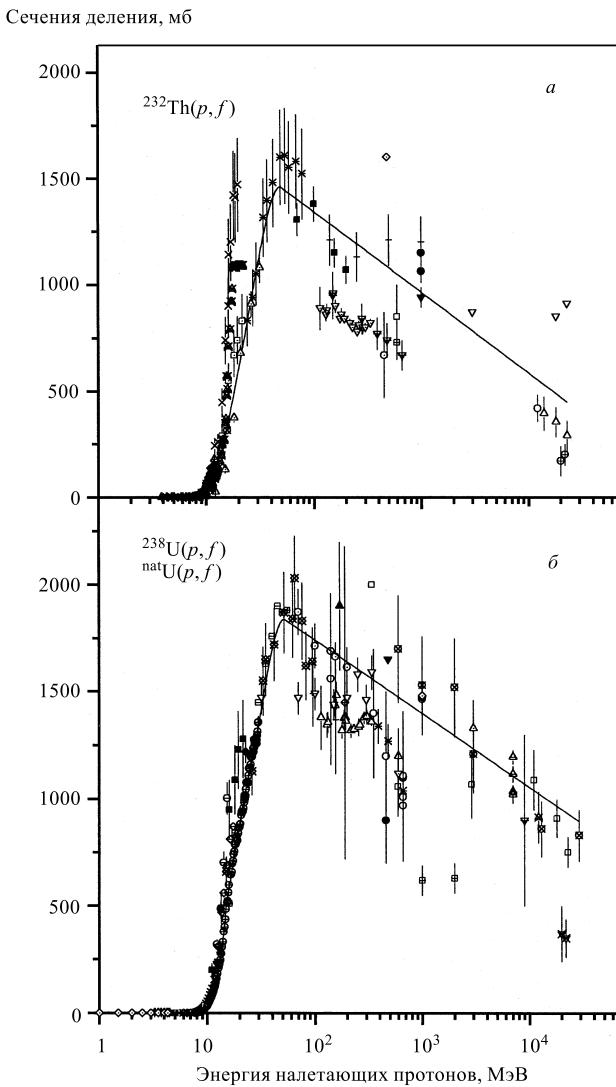
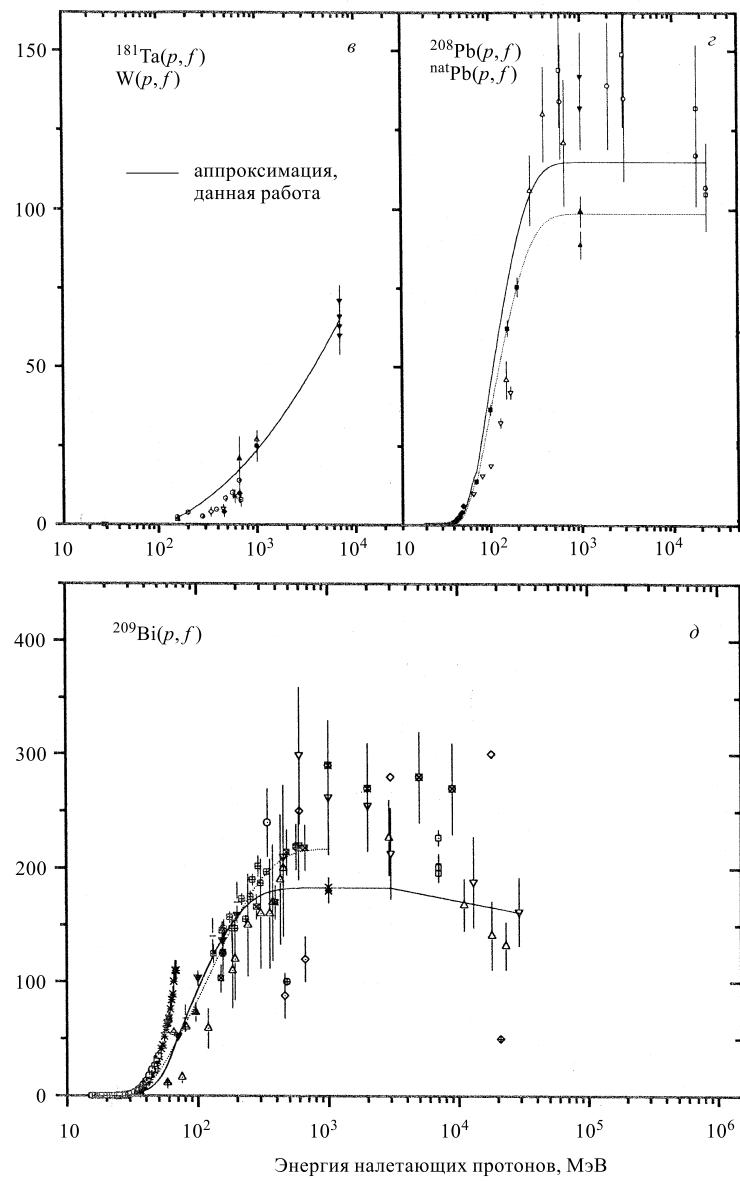


Рис. 8. Зависимость сечений деления ядер от энергии протонов при облучении ^{232}Th (*a*), ^{238}U , $^{\text{nat}}\text{U}$ (*b*), ^{181}Ta , ^{183}W , ^{184}W , $^{\text{nat}}\text{W}$ (*в*), ^{208}Pb , $^{\text{nat}}\text{Pb}$ (*г*), ^{209}Bi (*д*). Символы относятся к экспериментальным данным (см. обозначения на рис. 1 статьи [68]). Сплошные линии обозначают линии наилучшего согласия (best fits). Пунктирная линия на рис. 8,*в* — линия наилучшего согласия для сечения $^{208}\text{Pb}(p,f)$ [68], пунктируя линия на рис. 8,*д* — сечение $^{209}\text{Bi}(p,f)$ в ENDF/B-VI/HE. Рисунок взят из работы Эйсманта и др. [68].

Сечения деления, мб

Рис. 8, δ , ϵ , δ

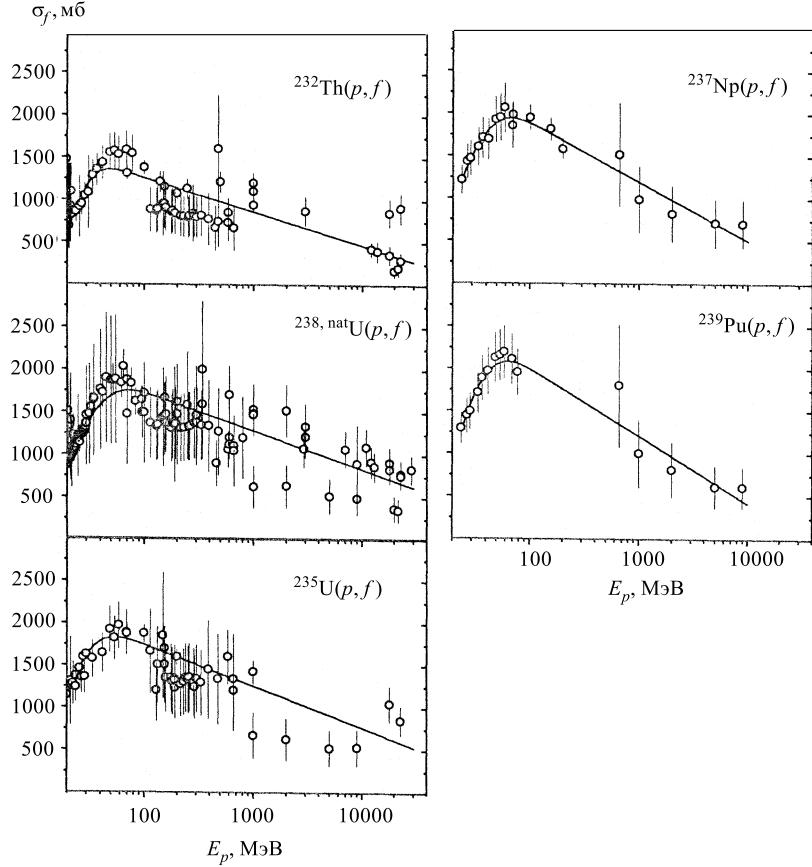


Рис. 9. Сечения [71] деления ядер в зависимости от энергии протонов при облучении ^{232}Th , ^{238}U , $^{\text{nat}}\text{U}$, ^{235}U , ^{237}Np , ^{239}Pu . Символы относятся к экспериментальным данным (см. табл. 1 [71]). Линии обозначают линии наилучшего согласия в описании данных, полученных в [71]

Ранее Фукахори и Пирлстайн [69] предложили параметризацию (p, f) -сечений для ядер от ^{181}Ta до ^{209}Bi в форме:

$$\sigma_f(E_p) = P_1 \{1 - \exp[-P_3(E_p - P_2)]\}, \quad (2)$$

где σ_f — сечение деления (мб), E_p — энергия протона (МэВ) и P_1 , P_2 , P_3 — подгоночные параметры. Позднее подобная формула была предложена для вероятности деления $\sigma_f/\sigma_{\text{in}}$ ядер от $^{\text{nat}}\text{Ag}$ до ^{239}Pu [70]. Качественное согласие с экспериментом было получено, хотя отмечались расхождения с экспериментом в области энергий протонов порядка гигаэлектронвольт, где систематики переоценивают делимости. Чтобы улучшить описание данных,

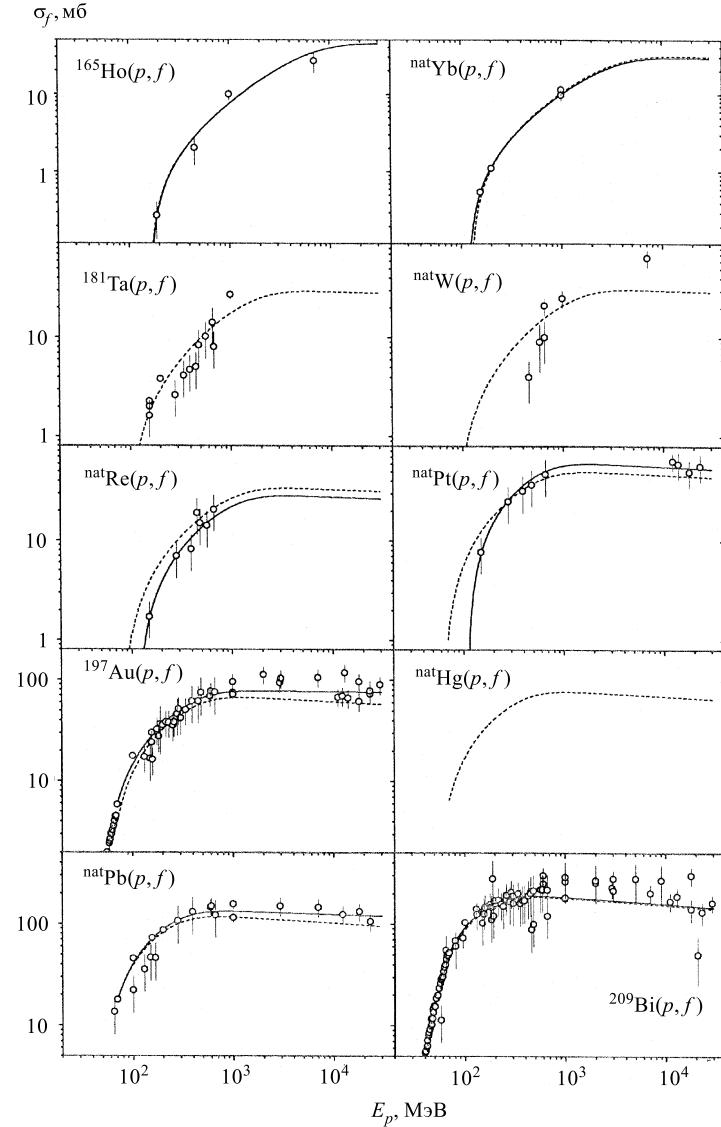


Рис. 10. Сечения [71] деления ядер в зависимости от энергии протонов при облучении ^{165}Ho , ^{nat}Yb , ^{181}Ta , ^{nat}W , ^{nat}Re , ^{nat}Pt , ^{197}Au , ^{nat}Hg , ^{nat}Pb , ^{209}Bi . Символы относятся к экспериментальным данным (см. табл. 1 [71]). Сплошные линии обозначают линии наилучшего согласия для каждого конкретного случая, штриховые линии — предсказание систематик [71]

Прокофьев [71] модифицировал формулу (2):

$$\sigma_f(E_p) = P_1 \{1 - \exp[-P_3(E_p - P_2)]\} (1 - P_4 \ln E_p), \quad (3)$$

где дополнительный параметр P_4 введен, чтобы описать уменьшение сечения деления при высоких энергиях. Автором была проведена новая селекция данных, включающая авторскую переоценку ошибок измерений. На рис. 9 и 10 представлены результаты компиляции и систематизации сечений деления ядер от ^{239}Pu до ^{165}Ho для случая (p, f) в широком интервале энергий протонов [71].

4. ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЙ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР ОТ ЭНЕРГИИ НЕЙТРОНОВ

В случае деления тяжелых ядер нейtronами относительно низких энергий ядра-мишени можно подразделить условно на две группы: ядра, которые делятся тепловыми нейтронами (например, ^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu), и ядра, которые ими не делятся (например, ^{232}Th , ^{238}U , ^{240}Pu). В первом случае барьер деления составного ядра меньше энергии связи нейтрона в составном ядре, во втором случае — больше. Сечения деления ядер первой группы сначала уменьшаются с возрастанием энергии нейтронов, испытывают ряд резонансных всплесков и затем образуют первое плато при энергии нейтронов 1–5 МэВ. Ядра второй группы начинают делиться только при определенной пороговой энергии, их сечение деления вначале растет быстро и затем достигает насыщения — первого плато. Когда энергия нейтронов возрастает выше 6 МэВ, характер изменения сечения деления двух групп ядер подобен, становится энергетически возможным деление после испускания одного нейтрона (n, nf), затем после испускания второго, третьего и т.д. нейтронов до деления при энергиях бомбардирующих нейтронов вблизи 12,17 МэВ и т.д.

Ядерные данные для нейтронов с энергией ниже 20 МэВ регулярно оцениваются в библиотеках данных, таких, как JENDL-3.2 (Japanese Evaluated Nuclear Data Library, Япония), ENDF/B-VI (Evaluated Nuclear Data File, Version 6, США), БРОНД (BROND) (библиотека рекомендованных оцененных нейтронных данных, Обнинск, Россия), CENDL-2 (Chinese Evaluated Neutron Data Library, Китай), JEF-2 (Joint European File). Оцененные данные по нейтронным сечениям периодически публикуются в виде атласов нейтронных данных [72–75]. В последние годы стали создаваться файлы данных для ядерных реакций нейтронов и протонов промежуточных энергий, в ENDF/B-VI-HE, High Energy File, в Обнинском центре ядерных данных — библиотека оцененных ядерных данных для нейтронов промежуточных энергий до 100 МэВ, MENDL, в JENDL, High Energy File, который будет включать

ядерные данные для реакций, вызванных протонами и нейtronами с энергиями до 2 ГэВ.

4.1. Измерения $\sigma_f(E_n)$ на источниках нейtronов с энергиями E_n выше 20 МэВ. Панкратов [76] использовал источник моноэнергетических нейtronов (циклотрон, реакции $D[d, n]^3\text{He}$, $T[d, n]^4\text{He}$), чтобы перекрыть интервал от 5 до 37 МэВ для измерения сечений деления ^{238}U и ^{232}Th . Гольданский с сотрудниками [23] измерили сечения деления ядер ^{235}U , ^{238}U , ^{232}Th , ^{209}Bi , $^{\text{nat}}\text{Pb}$, Tl , ^{197}Au , Pt , Re , $^{\text{nat}}\text{W}$ нейtronами с энергиями 84, 120 и 380 МэВ (нейtronы от реакции срыва дейtronов). Для детектирования нейtronов использована реакция $^{12}\text{C}(n, 2n) ^{11}\text{C}$.

Как уже отмечалось, основная часть результатов, составляющих базу экспериментальных данных по (n, f) -сечениям в интервале энергий выше 20 МэВ, состоит из результатов, полученных на «белых» источниках нейtronов на базе ускорителей протонов — с $E_p = 800$ МэВ в LANL [8] и с $E_p = 1000$ МэВ в Петербургском институте ядерной физики [9]. В Лос-Аламосе устройство, состоящее из вольфрамовой мишени, представляет высокointенсивный источник нейtronов, почти идеальный для измерений от доли МэВ до нескольких сотен МэВ. Протонный пучок падает на вольфрамовую мишень длиной 7,5 см, диаметром 3 см, чтобы создать «белый» источник нейtronов в несколько сотен МэВ. Эти эксперименты были выполнены с несколькими пролетными базами нейtronов, в частности, с пролетным путем 20 метров.

В Петербургском институте ядерной физики нейtronный источник состоит из охлаждаемой водой свинцовой мишени $40 \times 20 \times 5$ см, облучаемой протонами с энергией 1000 МэВ на синхроциклотроне в Гатчине. Измерения выполняются с использованием гатчинского нейtronного спектрометра по времени пролета с пролетной базой 50 метров (ГНЕЙС).

Отношения сечений реакций деления измерялись в ионизационных камерах, содержащих несколько слоев фольг оксидного делящегося материала. Авторами работ [62, 77–83] были измерены сечения деления ядер по отношению к ^{235}U для всех основных актиноидов: ^{232}Th , $^{233,234,238}\text{U}$, ^{237}Np , $^{239,240,242,244}\text{Pu}$.

Альтернативные измерения сечений (n, f) были начаты в 1992 г. в Лаборатории Сведберга (Швеция) в коллaborации университета Уппсала и Радиевого института им. В.Г.Хлопина [84–88]. Измерения проводятся с квазимохроматическими нейtronами от реакции $^7\text{Li}(p, n)$ с использованием техники измерений по времени пролета. Для регистрации осколков деления использовались тонкопленочные пробойные счетчики. Были определены $\sigma(n, f)$ для ^{197}Au , $^{\text{nat}}\text{Pb}$, ^{208}Pb , ^{209}Bi , ^{232}Th , ^{235}U и ^{238}U в интервале энергий $22 \div 173$ МэВ [84–88]. Недавно, также в квазимоэнергетическом пучке нейtronов, абсолютные значения $\sigma(n, f)$ для ^{238}U были измерены для энергий нейtronов 34, 46 и 61 МэВ [89]. На рис. 11 представлена экспериментальная

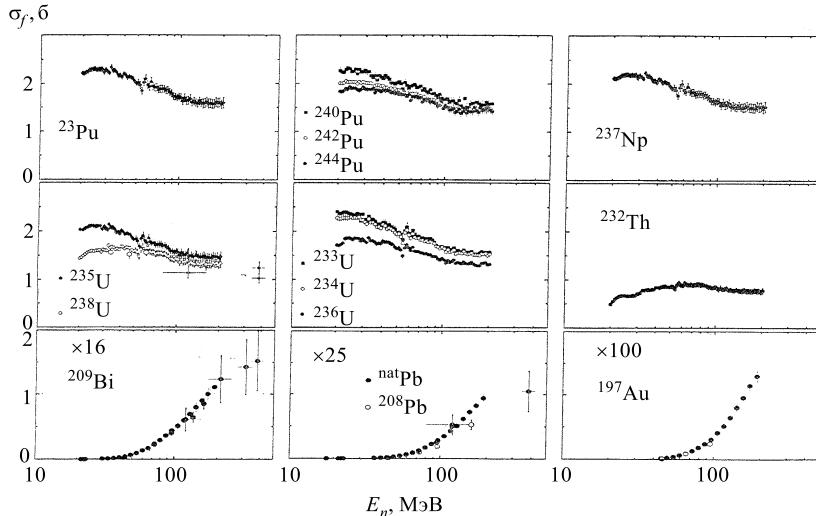


Рис. 11. Экспериментальная база данных о зависимости сечений деления тяжелых ядер от энергии нейтронов при промежуточных энергиях [87]

база известных на сегодня данных о сечениях деления (n, f) для ядер от Ru до Au (из работы [87]).

4.2. Оцененная зависимость абсолютных значений $\sigma_f(E_n)$ для ^{235}U в интервале энергий нейтронов 20÷200 МэВ [90] как стандарт. Сечения деления ^{235}U при энергиях нейтронов до 20 МэВ широко используются в качестве стандарта. Авторы [90] обосновывают возможность создания стандарта $\sigma(n, f)$ ^{235}U и для энергий выше 20 МэВ. В основу стандарта положены данные измерений $\sigma_f(E_n)$ для ^{235}U Лисовского и др. [62]. Оцененные ошибки этих данных равны 2% (от 30 до 50 МэВ), 3% (от 50 до 80 МэВ), 4% (от 80 до 120 МэВ) и 5% (от 120 до 200 МэВ). Неопределенности включают как статистические, так и систематические погрешности измерений и расчетов эффективности мониторирования потока нейтронов. Они не включают неопределенности в сечении стандарта $H(n, n)$. Экспериментальные данные работы [62] для E_n выше 20 МэВ были нормализованы к очень точным данным сечения деления ^{235}U при энергии нейтронов 14 МэВ. Сечение деления ^{235}U , как было найдено [62], уменьшается выше $E_n \approx 30$ МэВ и затем, вблизи 150 МэВ, достигает примерно постоянного значения. Данные, полученные ранее Лисовским и др. [62], были оценены для внутреннего использования в LANL. Так как сечения (n, f) для ^{235}U — очень важный стандарт, при высоких энергиях рекомендуется [90] значения этих сечений, используемых в LANL, использовать как общий стандарт, пока не появится новая оценка сечений делений в этой области. Эти значения $\sigma(n, f)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1. Рекомендованные значения сечений деления ядер в реакции $^{235}\text{U}(n, f)$ при энергиях нейтронов $E_n > 20$ МэВ (сокращенный вариант) [90]

Энергия, МэВ	$\sigma, \text{б}$						
20,5	2,0143	45,0	1,9190	70,0	1,7373	95,0	1,5713
25,0	2,0963	50,0	1,8796	75,0	1,7021	100,0	1,5446
30,0	2,0691	55,0	1,8435	80,0	1,6670	150,0	1,4527
35,0	2,0188	60,0	1,8071	85,0	1,6331	170,0	1,4507
40,0	1,9654	65,0	1,7716	90,0	1,6009	200,0	1,4478

Примечание: $\sigma = \Sigma a(N)E^{N-1}$,

$20,00 < E < 22,259$ МэВ, $a(1) = 42,7166$, $a(2) = -7,62357$, $a(3) = 0,538579$,

$a(4) = -0,0170663$;

$22,259 < E < 26,15$ МэВ, $a(1) = 1162,3369$, $a(2) = -272,40531$, $a(3) = 26,499823$,

$a(4) = -1,3679508$, $a(5) = 0,039538964$;

$26,15 < E < 62,95$ МэВ, $a(1) = -2,02908$, $a(2) = 0,521141$, $a(3) = -0,0257918$,

$a(4) = 6,44748 \cdot 10^{-4}$, $a(5) = -8,77333 \cdot 10^{-6}$, $a(6) = 6,18946 \cdot 10^{-8}$,

$a(7) = -1,77344 \cdot 10^{-10}$;

$62,95 < E < 134,1$ МэВ, $a(1) = 1,40538$, $a(2) = 0,0301602$;

$134,1 < E < 200,0$ МэВ, $a(1) = 1,46724$, $a(2) = -9,71941 \cdot 10^{-5}$.

4.3. Оцененная зависимость абсолютных значений $\sigma_f(E_n)$ для ^{238}U в интервале энергий нейтронов 20÷200 МэВ [90]. Абсолютные значения сечений деления для $^{238}\text{U}(n, f)$ выше 20 МэВ были получены Лисовским и др. [62] из относительных измерений $\sigma(n, f)$ $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$ в комбинации с абсолютным измерением сечения $^{235}\text{U}(n, f)$, нормализованного к очень точному значению при $E_n = 14$ МэВ. Абсолютные значения $\sigma_f(E_n)$ для ^{238}U , полученные в [62], уменьшаются при энергии нейтронов выше 20÷30 МэВ и затем, вблизи 150 МэВ, становятся примерно постоянными. Было рекомендовано [90] использовать значения $\sigma_f(E_n)$, полученные Лисовским и др. [62], пока не будет произведена новая оценка данных. Эти данные представлены в табл. 2. В работе [90] приведен также аналитический вид зависимости $\sigma_f(E_n)$ для ^{238}U . Полная неопределенность — около 2 % в диапазоне энергий от 30 до 50 МэВ, 3 % — для интервала 50÷80 МэВ, 4 % — для 80÷120 МэВ, 5 % — 120÷200 МэВ.

4.4. Оцененная зависимость абсолютных значений $\sigma_f(E_n)$ для ^{209}Bi в интервале энергий 20÷1000 МэВ [90]. В качестве стандарта в области $E_n > 20$ МэВ сечения деления ^{209}Bi подходят по нескольким причинам [90]:

- а) функция возбуждения имеет порог ~ 25 МэВ, что исключает влияние низкоэнергетических нейтронов;

Таблица 2. Рекомендованные значения сечений деления ядер в реакции $^{238}\text{U}(n, f)$ при энергиях нейтронов $E_n > 20$ МэВ (сокращенный вариант) [90]

Энергия, МэВ	σ , б						
20,5	1,4453	45,0	1,6383	70,0	1,5505	95,0	1,4179
25,0	1,5873	50,0	1,6289	75,0	1,5244	100,0	1,3952
30,0	1,6075	55,0	1,6153	80,0	1,4968	150,0	1,3173
35,0	1,6387	60,0	1,5960	85,0	1,4695	170,0	1,3161
40,0	1,6431	65,0	1,5741	90,0	1,4427	200,0	1,3137

Примечание: $R = {}^{238}\text{U}(n, f)/{}^{235}\text{U}(n, f)$,

$R = \sum a(N)E^{N-1}$ для $20 < E < 30$ МэВ; $a(1) = -1,8415050$, $a(2) = 0,29048799$,
 $a(3) = -0,010901993$,

$R = A(1 - \exp(-E/B)) + C(1 - \exp(-E/D))$ для $E > 30$ МэВ; $A = 0,8119$,
 $B = 13,88724$, $C = 0,09563$, $D = 30,65851$.

Таблица 3. Рекомендованные значения сечений деления ядер в реакции $^{209}\text{Bi}(n, f)$ при энергиях нейтронов $E_n > 20$ МэВ (сокращенный вариант) [90]

Энергия, МэВ	σ , мб						
21,0	0,000066	24,5	0,00233	100,0	28,1	700,0	98,0
21,5	0,000138	25,0	0,00309	200,0	60,5	800,0	98,9
22,0	0,000241	25,0	0,00407	300,0	78,3	900,0	99,4
22,5	0,000446	30,0	0,0327	400,0	88,1	950,0	99,5
23,0	0,000773	40,0	0,631	500,0	93,5	1000,0	99,7
24,0	0,00181	50,0	3,32	600,0	96,4		

Примечание:

$\sigma = \exp(-108,7 + 50(\ln E) - 5,6(\ln E)^2)$ для энергий нейтронов от 20 до 73 МэВ;

$\sigma = 100(1 - \exp(-0,006(E - 45)))$ для энергий нейтронов от 73 до 1000 МэВ.

б) имеется плавное изменение сечения с энергией нейтронов, что делает стандарт нечувствительным к разрешению энергии нейтронов;

в) ^{209}Bi — моноизотопный и нерадиоактивный материал. Поэтому его легко транспортировать и легко обращаться с ним. На основании всех имеющихся данных о сечениях $^{209}\text{Bi}(n, f)$ в интервале энергий нейтронов $18 \div 500$ МэВ и полученной ранее аппроксимации отношения $^{209}\text{Bi}(p, f)/{}^{209}\text{Bi}(n, f)$, которая стремится к 2 при $E_n > 300$ МэВ [91], авторы [90] рекомендовали полученную ими параметризацию $\sigma_f(E_n)$ вплоть до 1000 МэВ использовать в качестве стандарта. Она приведена в табл. 3. Неопределенности этой параметризации $\sim 50\%$ при $E_n = 20 \div 40$ МэВ, $\sim 13\%$ — при 40 МэВ, до 10 % — при 160 МэВ и $\sim 30\%$ — свыше 169 МэВ.

5. УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ПРОТОНАМИ

При облучении ^{235}U нейtronами с энергией 14 МэВ [92] был обнаружен преимущественный вылет осколков деления под углами 0° и 180° . Если предположить, как это было сделано О.Бором [93], что делящееся ядро при прохождении через седловую точку обладает осевой симметрией и что направление оси симметрии, совпадающее с направлением деления, сохраняется после прохождения ядром седловой точки, то направление разлета осколков определяется направлением оси симметрии ядра в седловой точке и, следовательно, некоторой величиной — K -проекцией углового момента ядра I на его ось симметрии. При облучении ядер нейtronами и заряженными частицами средних энергий, когда в ядро вносится значительный угловой момент, в сплошном спектре возможных переходных состояний имеется некоторая преимущественность для состояний с малым значением K , так как этим состояниям соответствует меньшая энергия вращения ядра:

$$E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2J_{II}}K^2 + \frac{\hbar^2}{2J_\perp}(I^2 - K^2), \quad (4)$$

где J_{II} и J_\perp — моменты инерции ядра в седловой точке относительно оси симметрии ядра и перпендикулярной к ней оси соответственно. Струтинский предположил [94], что распределение ядер по энергиям вращения в седловой точке определяется фактором Больцмана, $W(E_{\text{вр}}) \sim \exp[-E_{\text{вр}}/T]$, где T — температура ядра в седловой точке. Тогда распределение ядер по K будет гауссовского типа:

$$W(K) \sim \exp[-K^2/2K_0^2], \quad (5)$$

$$\text{где } K_0^2 = \frac{1}{\hbar^2} \frac{J_\perp J_{II}}{J_\perp - J_{II}} T = \frac{1}{\hbar^2} J_{\text{эфф}} T.$$

При заданном значении I и K угловое распределение осколков деления относительно пучка частиц определяется как [94]:

$$W_{I,K}(\theta) = \frac{2I}{4\pi^2} (I^2 \sin^2 \theta - K^2)^{-1/2}.$$

После интегрирования по всем возможным значениям I и K угловое распределение осколков имеет максимумы под углами 0° и 180° к пучку бомбардирующих частиц, и величина анизотропии увеличивается с ростом параметра $p = (I_{\text{max}}/2K_0)^2$. При малых значениях p анизотропия деления

$$W(0^\circ)/W(90^\circ) \simeq 1 + (I_{\text{max}}^2/8K_0^2), \quad (6)$$

где I_{max} — максимальный угловой момент составного ядра.

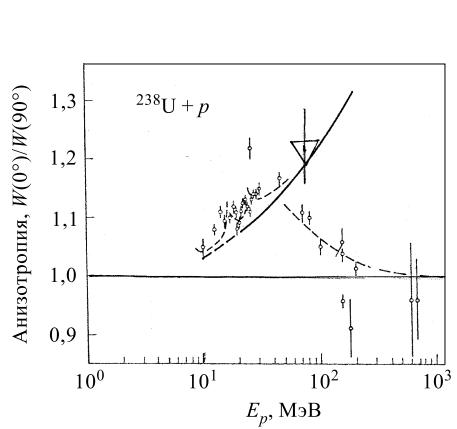


Рис. 12. Зависимость [120] анизотропии деления ядер от энергии протонов при облучении ^{238}U : 10 [95], 22,8 [104], 10–30 [66], 45, 80, 155 [35], 156 [36], 180 [106], 70, 100, 155, 200 [107], 600 [108], 660 МэВ [109]. Сплошной линией представлена расчетная зависимость до испускания нейтронов ядрами, штриховой обозначенены расчетные значения анизотропии с учетом вклада делений после испускания нейтронов. Штрихпунктирная кривая справа проведена «на глаз» по экспериментальным точкам. Показано значение анизотропии деления ядер при облучении ^{238}U нейтронами с энергией 75 МэВ (∇) [122]

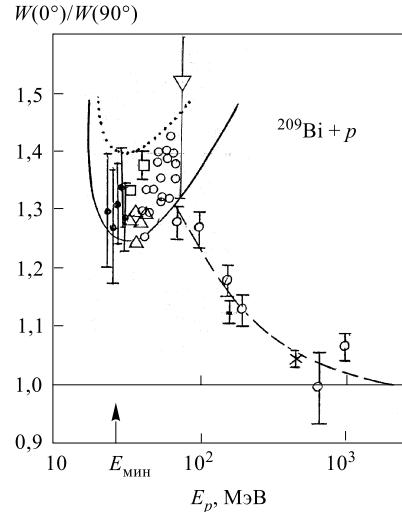


Рис. 13. Зависимость анизотропии деления ядер от энергии протонов при облучении ^{209}Bi : 24–29 [110], 30–45 [111, 112], 70, 100, 155, 200 [107], 156 [36], 450 [113], 660 [109], 1000 МэВ [96]. Сплошные линии — расчет (см. текст). Штриховая линия выше $E_p = 70$ МэВ проведена «на глаз» по экспериментальным точкам. Дано значение анизотропии деления ядер при облучении ^{209}Bi нейтронами с энергией 75 МэВ (∇) [122]

Помимо чисто научного интереса, сведения о величине анизотропии деления ядер при облучении протонами и нейtronами имеют и «прикладное» значение, т.к. коэффициент $\left(1 + \frac{A}{3}\right)$ (где A — величина анизотропии деления в случае углового распределения типа $W(\theta) = B(1 + A \cos^2 \theta)$, θ — угол между направлением деления в системе центра масс и бомбардирующими частицей) входит в качестве сомножителя в формулу, определяющую сечение деления ядер.

Как было определено в области энергий образования составного ядра при облучении тяжелых ядер протонами, дейтронами и ионами ^4He , анизотропия углового распределения осколков деления ядер увеличивается с ростом энергии бомбардирующих частиц [95]. При дальнейшем увеличении энергии протонов до 45, 80, 155 МэВ было отмечено постепенное уменьшение

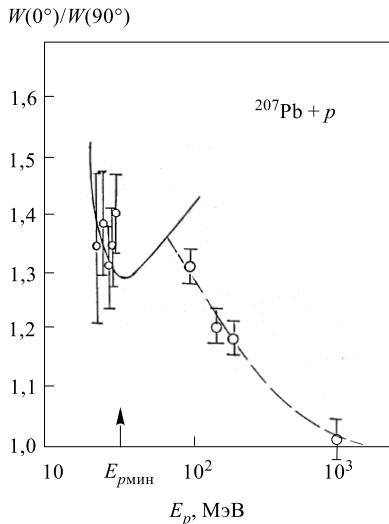


Рис. 14. Зависимость [96] анизотропии деления ядер от энергии протонов при облучении ^{207}Pb : 24–29 [110], 100–200 [107], 1000 МэВ [96]. Сплошная линия — расчет (см. текст), штриховая линия проведена «на глаз» по экспериментальным точкам

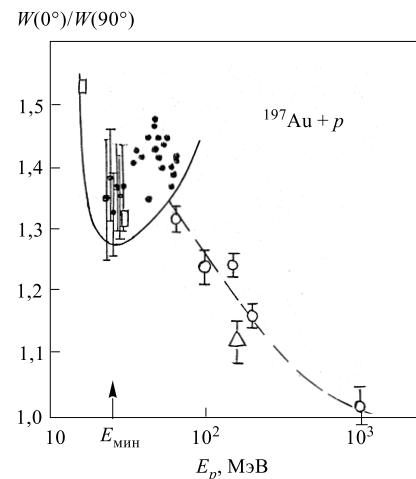


Рис. 15. Зависимость анизотропии деления ядер от энергии протонов при облучении ^{197}Au [115, 110, 114, 36, 96]. Сплошная линия — расчет (см. текст), штриховая линия проведена «на глаз» по экспериментальным точкам

анизотропии деления ядер урана [35]. Анизотропия в угловом распределении осколков деления исследовалась для широкого круга ядер: ^{238}U , ^{232}Th , ^{209}Bi , ^{207}Pb , ^{197}Au при облучении протонами с энергией 70, 100, 155, 200 и 1000 МэВ [96]. На рис. 12–15 представлены данные из статьи [96] для ^{238}U , ^{209}Bi , ^{207}Pb и ^{197}Au и добавлено угловое распределение для близких по A , Z ядер Re , W , Ta (рис. 16) (ввиду малого числа экспериментальных данных для них, они соединены вместе). Общим для всех представленных зависимостей является то, что анизотропия ядер проходит через максимум вблизи энергии протонов 50 МэВ и затем уменьшается. Угловое распределение осколков становится изотропным при энергиях протонов выше 600 \div 1000 МэВ, т.к. при облучении протонами с энергией выше 50 МэВ угловые моменты ядер после каскадной стадии взаимодействия оказываются дезориентированными относительно направления падающих протонов из-за вылета каскадных нуклонов [98].

В работах [117, 118] был предложен способ расчета угловой анизотропии деления ядер, несколько отличающийся от предложенного Халперном, Струтинским [94], но совпадающий с ним при малых значениях анизотропии.

Авторы [117, 118] предположили, что распределение ядер в седловой точке по «состояниям K » (проекции углового момента I на направление оси симметрии ядра) определяется зависимостью делительной ширины $\Gamma_f(E^*, I, E_{\text{bp}})$ от энергии вращения ядра в седловой точке, в форме, полученной Хьюзенгой и Ванденбошем [119], в рамках модели ферми-газа. Тогда вероятность деления может быть определена как

$$W_f \sim \{[2a_f^{1/2}(E^* - E_f - E_{\text{bp}}^{\text{ct}})^{1/2} - 1] \exp[2a_f^{1/2}(E^* - E_f - E_{\text{bp}}^{\text{ct}})^{1/2}] + 1\}, \quad (7)$$

где a_f — константа плотности уровней в седловой точке, E_f — барьер деления невращающегося ядра, $E_{\text{bp}}^{\text{ct}}$ — энергия вращения ядра в седловой точке при форме невращающегося ядра. Как следует из рассмотрения зависимостей (4) и (7), у ядра в состоянии с $K = 0$ в седловой точке (угловой момент I перпендикулярен направлению деформации ядра) наибольшая вероятность разделиться (наименьшая энергия вращения). Как показано в [94] из простых геометрических соображений, анизотропия делений ядер следует в этом случае распределению

$$W(\theta) \sim \frac{1}{\sin \theta}. \quad (8)$$

Заменяя в выражении (7) $E^* - E_f - (\hbar^2 I^2 / 2J_\perp)$ на aT^2 и разлагая показатель экспоненты в ряд по степеням $\hbar^2 K^2 \left(\frac{1}{J_{II}} - \frac{1}{J_\perp} \right) / T$, авторы [117] получили в первом приближении

$$W(E^*, I, K) \sim \exp \left[-\hbar^2 K^2 \left(\frac{1}{J_{II}} - \frac{1}{J_\perp} \right) / 2T \right],$$

распределение ядер в седловой точке по K , совпадающее с выражением, полученным Халперном и Струтинским [94].

Расчетные значения анизотропии деления ядер ^{238}U , ^{209}Bi , ^{207}Pb , ^{197}Au на рис. 12–15 авторы [96] получили в приближении Халперна–Струтинского

$$W(0^\circ)/W(90^\circ) = 1 + I_{\max}^2/8K_0^2,$$

$T = a_f^{1/2}(E^* - E_f - E_{\text{bp}}^{\text{ct}})^{1/2}$ — температура ядра в седловой точке, $E_{\text{bp}}^{\text{ct}} = (4/9)I_{\max}^2 \hbar^2 / 2J_\perp$ — средняя вращательная энергия ядра в седловой точке.

Значения I_{\max} определялись из соотношения $I_{\max}^2 = 3,9E_p - 22$ [110], значения моментов инерции J_{II} и J_\perp — расчетные значения по жидкокапельной модели [101]. За величины барьера деления принимались расчетные значения E_f [102]. Расчетные зависимости анизотропии деления ядер существенно различаются для ^{238}U и ^{209}Bi . В случае ^{209}Bi (и более легких ядермишеней) (рис. 13–16) расчетная анизотропия деления уменьшается, проходит через минимум и затем увеличивается вблизи порога деления. Для таких ядер пороговая энергия протонов, при которой энергия возбуждения составного

ядра равна по величине барьеру деления, существенно выше кулоновского барьера ядра. С уменьшением энергии протонов в этом случае энергия возбуждения составных ядер в седловой точке может быть получена как угодно малой при конечном значении вносимого углового момента, что приводит, согласно (6), к резкому возрастанию анизотропии деления. При облучении ^{238}U протонами подобные условия не могут быть достигнуты, так как пороговая энергия протонов в этом случае значительно меньше кулоновского барьера ядра.

При облучении ^{209}Bi , ^{207}Pb протонами нет экспериментальных данных, которые свидетельствовали бы о предсказываемом подъеме анизотропии вблизи барьера деления. Нижнее значение энергии протонов в этих экспериментах равнялось 24 МэВ [110]. В случае облучения ^{197}Au авторам [115] удалось измерить угловую анизотропию деления ядер при энергии протонов 17 МэВ, при этом был обнаружен подъем анизотропии деления вблизи порога (рис. 15), правда, всего лишь при одном значении энергии. На рис. 16 наряду с экспериментальными данными для ^{185}Re , Ta , W приведена расчетная зависимость анизотропии деления для составного ядра ^{186}W . Расчет был проведен по описанной схеме для ядер Bi , Pb , Au . Расчетный подъем анизотропии деления ядер на рис. 16 качественно совпадает с наблюдавшимся в эксперименте.

Ранее был обнаружен подъем анизотропии вблизи порога деления при облучении ядер ^{206}Pb и ^{207}Pb ионами ^4He [100]. Резкий подъем анизотропии деления вблизи порога позднее наблюдался в случае облучения ионами ^4He целого ряда изотопов Pb , Pt , Re , ^{192}W , ^{178}Hf [99, 116]. Авторами работы было найдено, что энергия возбуждения в седловой точке, с которой начинается рост анизотропии вблизи порога деления, систематически увеличивается с уменьшением Z^2/A делящегося ядра от ~ 4 МэВ для изотопов Po до ~ 10 МэВ для изотопов Os и W . На рис. 17 представлена, наряду с экспериментальными данными [99, 116], расчетная зависимость анизотропии деления ядер ^{206}Pb при взаимодействии с ионами ^4He . Расчет был проведен по вышеприведенной схеме в случае облучения ядер $\text{U}-\text{Re}$ протонами в приближении Халперна–Струтинского. За значения барьеров деления E_f и моментов

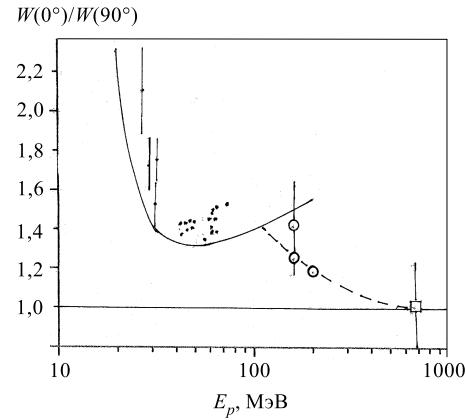


Рис. 16. Зависимость анизотропии деления ядер при облучении Re , $\text{Ta}(\text{W})$ протонами [37, 40, 42, 110, 114]. Сплошная линия — расчет (см. текст), штриховая линия проведена «на глаз» по экспериментальным точкам: • — Re ; ○ — Ta ; □ — W

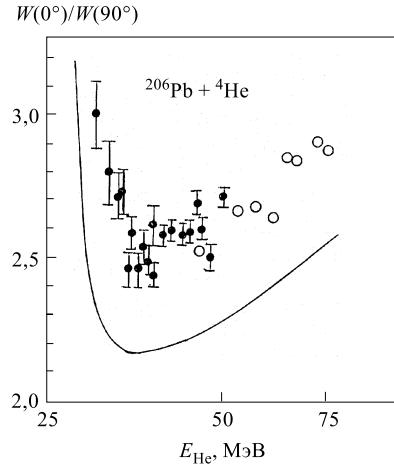


Рис. 17. Зависимость анизотропии деления ядер при облучении ^{206}Pb ионами ^4He [99, 116]. Сплошная линия — расчетная кривая (см. текст)

инерции J_{II} и J_{\perp} принимались расчетные значения из [102] и [101] соответственно. Значение I_{\max} определялось из соотношения $(I_{\max}^2)^{^4\text{He}} = 20,3E^{^4\text{He}} - 392$ [99]. В этом случае расчетный подъем анизотропии деления вблизи порога также качественно совпадал с наблюдаемым в эксперименте. Этот эффект может быть объяснен физически понятной причиной: при конечном значении вносимого ионом ^4He углового момента энергия возбуждения ядра в седловой точке может быть доведена до минимально возможного значения, когда ядро может разделиться лишь в состоянии с $K = 0$, с минимально возможной энергией вращения $E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2J_{\perp}}I^2$. Все это и ведет к угловому распределению осколков деления после разделения $W(\theta) \sim \frac{1}{\sin \theta}$.

Авторы [97] минимизировали зависимость (6) для углового распределения осколков и нашли простую зависимость: расчетный подъем анизотропии начинается тем дальше от порога деления, чем больше значения E_f , точнее,

$$U_{\min} = E^* - E_f \approx E_f - d - b/a, \quad (9)$$

где d — энергия связи бомбардирующей частицы в составном ядре, b и a — коэффициенты в зависимости $I_{\max}^2 = aE - b$. Для ^{208}Po и ^{182}W оценки дали U_{\min} , равные, соответственно, ~ 5 и ~ 9 МэВ, что совпадает качественно с упомянутой выше экспериментальной зависимостью U_{\min} от Z^2/A . Как видно из выражения (9), помимо величины E_f на положение минимума анизотропии влияет и величина энергии связи бомбардирующей частицы в составном ядре d . Так, например, как отмечали авторы [97], увеличения анизотропии вблизи порога деления при облучении ионами ^3He не следовало ожидать для ядер вплоть до E_g , что и совпадало с результатами эксперимента [121]. Как следует из рассмотрения формул (6) и (7), при облучении ядер нейtronами тоже можно ожидать подъема анизотропии деления вблизи порога деления, причем для более широкого круга ядер, чем при облучении протонами и ионами ^4He .

В качестве примера на рис. 13 пунктирной линией указана расчетная угловая анизотропия деления в случае взаимодействия нейtronов с ядрами Bi .

Видна заметная разница в значениях анизотропии вблизи порога деления и в области минимума, из-за отсутствия кулоновского поля. Для определения вносимого момента в этом случае принималась зависимость $I_{\max}^2 = 5E_n$ [94]. На рис. 13 приведено экспериментально определенное значение анизотропии деления ядер при взаимодействии ядер ^{209}Bi с нейтронами с энергией 75 МэВ, а на рис. 12 — экспериментальное значение анизотропии деления ^{238}U нейтронами с той же энергии [122]. Изучение анизотропии деления ядер при взаимодействии с нейтронами даст новые сведения о делении ядер вблизи порога деления.

6. МАССОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ПРОТОНАМИ И НЕЙТРОНАМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЙ

Большинство измерений массовых распределений осколков деления проведены с помощью радиохимического и масс-спектрометрического методов. Эти методы позволяют получить лишь вторичное распределение продуктов деления по массам после вылета мгновенных нейтронов деления. Для этого измеряют кумулятивный выход изобары в конце цепочки β^- -превращений, который представляет сумму выходов всех осколков с данным массовым числом. Для некоторых элементов применение масс-спектрометрической техники позволяет измерить выход стабильных и долгоживущих изотопов с повышенной точностью. Выход продукта определяется как процент делений, приводящих к образованию исследуемого продукта. Первичное распределение осколков деления по массам до испускания мгновенных нейтронов может быть получено при измерении кинетических энергий и скоростей первичных осколков деления. При повышении энергии бомбардирующих частиц, протонов и нейтронов промежуточных энергий увеличивается число испускаемых нейтронов (и заряженных частиц при достаточно высоких энергиях) до деления или после деления из осколков. Первичные осколки деления смещаются к линии β -стабильности, появляются наряду с нейтронизбыточными и нейтронодефицитными продуктами деления. Испускание большого числа частиц усложняет и возможность идентификации первичных осколков деления по их кинетическим энергиям и скоростям [1, 4, 14, 123].

6.1. Распределение по массам осколков вблизи порога деления. Примеры массовых распределений осколков (продуктов) деления ряда ядер вблизи порога деления приведены на рис. 18: при облучении ^{235}U тепловыми нейтронами [124], ^{226}Ra протонами с энергией 11 МэВ [125], ^{206}Pb ионами ^4He [126] (энергия возбуждения над барьером 8 МэВ), ^{178}Hf ионами ^4He [127] (энергия возбуждения ^{182}W над барьером 20 МэВ). Там же приведен пример массового распределения осколков преимущественно симметричного спонтанного деления ядер ^{258}Fm [128].

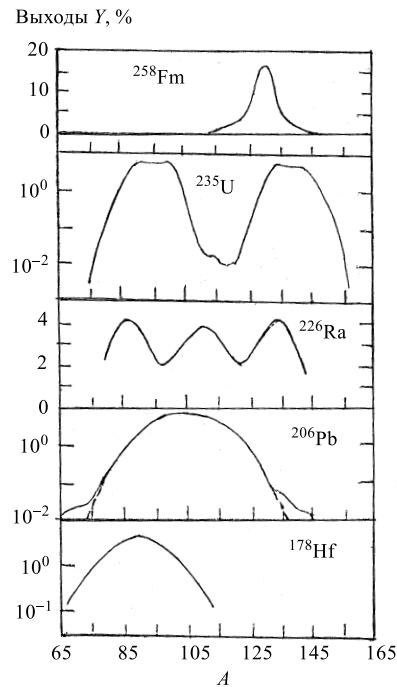


Рис. 18. Массовое распределение продуктов деления ядер при спонтанном делении ^{258}Fm [128], при облучении ^{235}U тепловыми нейтронами [124], ^{226}Ra — протонами с энергией 11 МэВ [125], ^{206}Pb — ионами ^4He [126], ^{178}Hf — ионами ^4He [127]

формы деления на уровне $\sim 2 \cdot 10^{-2} \%$ при облучении ^{206}Pb ионами ^4He (при энергии возбуждения составного ядра ^{210}Po 8–10 МэВ над барьером). В случае деления ^{182}W (энергия возбуждения над барьером 20 МэВ) асимметричной формы деления не было обнаружено на уровне 10^{-2} отношений выходов [127].

С другой стороны, по A и Z от урана все более тяжелые ядра вплоть до ^{256}Fm спонтанно делятся преимущественно асимметрично [5, 124, 128]. Однако начиная с ^{258}Fm вплоть до ^{260}Rf ($Z = 104$) была обнаружена преимущественно симметричная форма спонтанного деления этих ядер [128].

Характерной особенностью деления ядер вблизи порога (рис. 18) является почти неизменное положение правого пика асимметричной формы деления вблизи массовых чисел $A = 132 \div 145$ в широком диапазоне ядер-мишеней

Приведенные распределения свидетельствуют о различном характере массового распределения осколков деления ядер вблизи порога деления: при переходе от тяжелых ядер типа урана к более легким типа вольфрама наблюдается переход от преимущественно асимметричного деления к преимущественно симметричному делению. В случае деления радия при облучении протонами с энергией 11 \div 16 МэВ [120, 125] наблюдались раздельно как асимметричная форма деления, так и симметричная. Позднее трехгорбое массовое распределение протонов деления наблюдалось при облучении ^{232}Th нейtronами с энергиями в интервале 2 \div 14 МэВ [129] и протонами с энергиями 13 \div 53 МэВ [130].

При облучении висмута протонами с энергией 36 МэВ было найдено симметричное массовое распределение ядер и указание на очень малый вклад асимметричного деления (на уровне 0,3 % от симметричного деления) [131]. Позднее асимметричной компоненты в массовом распределении осколков деления при облучении висмута протонами с энергией 36,1 МэВ не была обнаружена [132]. Иткис и др. [126] идентифицировали малый вклад асимметричной фор-

от $Z = 100$ до $Z = 84$. При этом левый пик масс-асимметричной формы деления сдвигается в сторону легких масс: в случае деления ядра ^{210}Po этот пик был идентифицирован при $A \approx 70$ [126]. Преимущественно симметричное спонтанное деление ядер ^{258}Fm , как видно из рис. 18, происходит на два фрагмента с массами $A \approx 130$. Такой характер массового распределения осколков деления ядер с очевидностью свидетельствует о сильном влиянии ядерной подструктуры из 50 протонов и 82 нейтронов на процесс разделения масс при делении ядер вблизи порога. При делении ядер с $Z < 92$ из-за увеличения барьера деления ядер увеличивается необходимым образом вносимая в ядро энергия возбуждения, что приводит к уменьшению влияния этой подструктуры на процесс массового распределения осколков деления ядер.

6.2. Изменение массового распределения осколков деления ядер с ростом энергии бомбардирующих протонов и нейтронов. Основные особенности изменения массового распределения осколков деления тяжелых ядер типа урана при возрастании энергии бомбардирующих частиц состоят в следующем: вначале быстрое, затем замедляющее увеличение вклада симметричных делений, уменьшение вклада продуктов в области пиков двугорбого массового распределения и некоторое увеличение вклада сильноасимметричных делений [124]. Систематический анализ массового распределения продуктов деления ядер ^{233}U , ^{235}U , ^{238}U , ^{237}Np , ^{239}Pu , ^{242}Pu , ^{244}Pu , ^{241}Am и ^{243}Am при облучении протонами с энергией $8 \div 32$ МэВ был сделан в работах Отзуки и др. [133–135]. Были определены массовый выход продуктов деления, отношение выходов продуктов деления в максимуме и минимуме в зависимости от энергии протонов. Анализ показал, что данные укладываются в бимодальную модель деления, где один тип деления — симметричное деление — имеет больший барьер деления, более вытянутую конфигурацию осколков в момент разделения (меньшая кинетическая энергия) в сравнении с другим, асимметричным типом деления [135]. Эти данные указывают, что для симметричного и асимметричного делений имеются два независимых пути деформации вплоть до разделения. Исследования выходов продуктов деления ядер ^{238}U в интервале энергий бомбардирующих протонов $10 \div 340$ МэВ показали, что минимум выходов в области симметричного деления исчезает лишь при энергии протонов ~ 150 МэВ [1].

Недавно на источнике быстрых нейтронов LANL путем измерений кинетических энергий парных осколков деления были впервые определены массовые распределения осколков деления ^{238}U при облучении нейтронами в широкой области энергий от порога до 500 МэВ [136]. Из полученной серии 22 массовых спектров осколков в зависимости от энергии бомбардирующих нейтронов видно, что минимум в выходах осколков в симметричной области исчезает, когда E_n достигает значений 120 МэВ.

В случае облучения радиа, массовое распределение продуктов деления которого вблизи порога описывается трехгорбой кривой, с ростом энергии

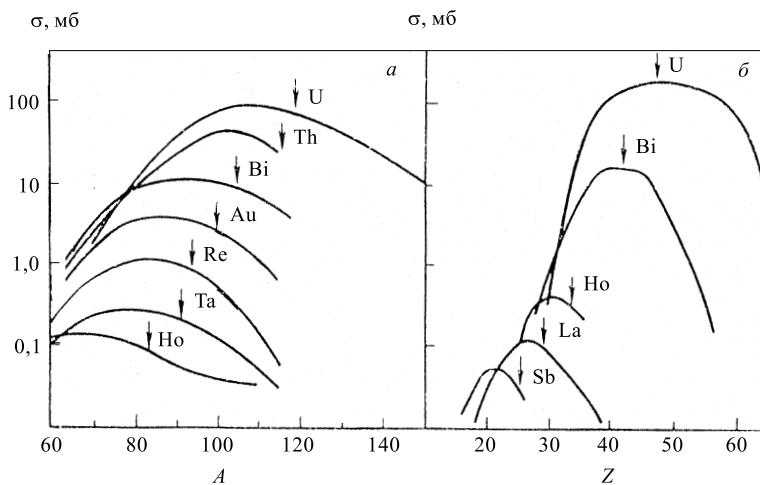


Рис. 19. *а)* Распределение продуктов деления по массам при облучении U, Th, Bi, Au, Re, Ta, Ho протонами с энергией 450 МэВ. *б)* Распределение продуктов деления по зарядам при облучении U, Bi, La, Sb протонами с энергией 660 МэВ и Ho протонами с энергией 460 МэВ. Стрелками указаны значения *а*) $(A_{\text{мин}} + 1)/2$; *б*) $(Z_{\text{мин}} + 1)/2$. Рисунок из работы [2]

Таблица 4. Зависимость от энергии протонов полуширины массового распределения продуктов деления $W_{1/2}(A)$ и положения максимума в массовом распределении A_{max} при облучении висмута, свинца и золота

Висмут						
E_p , МэВ	36 [131]	54* [141]	58 [131]	600* [153]	1000 [148]	2900 [41]
$W_{1/2}$, а.е.м.	18	22	28	38–39	$45,5 \pm 0,2$	43
A_{max}	103	102	102	95 ± 2	95 ± 2	90
Золото						
E_p , МэВ	32 [142]			490 [151]	1000 [148]	
$W_{1/2}$, а.е.м.	21 ± 1			30	$54,5 \pm 0,6$	
A_{max}	98			90	84 ± 2	

*Свинец.

бомбардирующих частиц p, d вклад симметричного деления увеличивается, а центральный пик симметричного распределения при этом несколько расширяется [137–140].

При облучении протонами ядер типа Bi, Pb с ростом энергии протонов симметричный пик массового распределения осколков деления просто расширяется [19, 21, 22, 131, 141–143]. На рис. 19,*а* приведено распределение

продуктов деления по массам при облучении урана [144], тория, висмута, золота, рения, tantalа и гольмия [145] протонами с энергией 450 МэВ. В отличие от характера массового распределения осколков деления ядер вблизи порога (рис. 18), при энергиях бомбардирующих частиц значительно выше порога деления, деление всех ядер становится преимущественно симметричным. Преимущественно симметричное деление ядер было найдено и при облучении ^{209}Bi , ^{197}Au , $^{\text{nat}}\text{W}$ и $^{\text{nat}}\text{Yb}$ протонами с энергией $E_p = 1$ ГэВ с полушириной $W_{1/2}(A)$, равной 45,5; 54,5; 66,0 и 62,1 а.е.м. для этих ядер соответственно. Данные были получены в ($2E$)-экспериментах [148].

В табл. 4 приведены основные характеристики массовых распределений осколков деления ядер: $W_{1/2}(A)$ — ширина распределения на половине высоты, A_{\max} — массовое число осколков (продуктов) в максимуме распределения для ядер ^{209}Bi , $^{\text{nat}}\text{Pb}$, ^{197}Au при облучении их протонами с энергией $E_p = 36 \div 3000$ МэВ. Видно, что ширина массовых распределений на половине высоты $W_{1/2}$ для этих ядер увеличивается с ростом энергии протонов, а максимум в распределении A_{\max} сдвигается в область меньших масс. При еще более высоких энергиях, при облучении ядер урана протонами с энергией в несколько ГэВ, массовое распределение осколков преимущественно симметричного деления становится более широким в сравнении с распределением в области энергий протонов в сотни МэВ (рис. 20). В массовом распределении продуктов еще отчетливо виден широкий пик деления даже при энергиях бомбардирующих протонов 2,9 и 28 ГэВ при ≈ 110 и 107 соответственно [13, 149], но при этом резко возрастает выход продуктов с $A < 50$. Выход этих продуктов связывается с механизмом фрагментации ядер [13]. На рис. 21–23 представлены массовые распределения продуктов деления ядер ^{209}Bi , $^{\text{nat}}\text{Pb}$, ^{197}Au и $^{181}\text{Ta}(\text{W})$ при облучении протонами в широком интервале энергий. Из рис. 21–23 и работы [148] очевидно, что распределения продуктов деления ядер по массам при облучении Bi, Pb, Au, Ta, W протонами преимущественно симметричны вплоть до энергии 1 ГэВ, при этом с ростом энергии протонов они расширяются (см. также табл. 4).

На рис. 21 наряду с массовыми распределениями продуктов деления и расщепления ядер висмута и свинца, полученными радиохимическим мето-

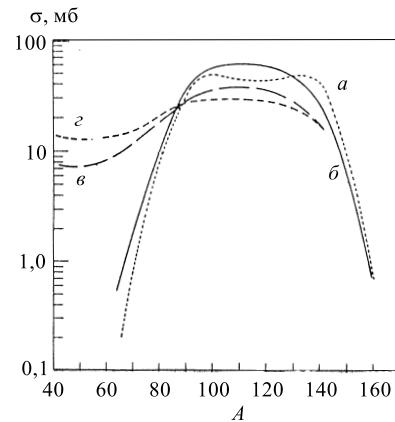


Рис. 20. Распределение [13] по массам продуктов деления и расщепления ядер урана при облучении протонами различных энергий: $a)$ 100 МэВ, $b)$ 170 МэВ, $c)$ 2,9 ГэВ

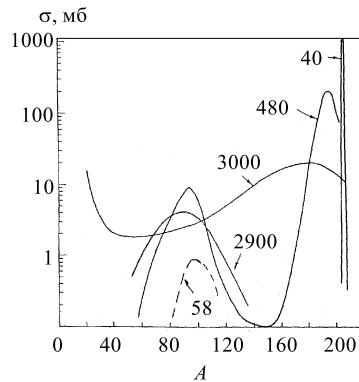


Рис. 21. Распределение [12] по массам продуктов расщепления и деления ядер при облучении висмута и свинца протонами с энергией 40, 480, 3000 МэВ. Добавлены зависимости $\sigma(A)$ при облучении Bi протонами с энергией 58 [131] и 2900 МэВ [41]

ядра-мишени, область остаточных продуктов расщепления ядер; 2) область с $A < 30 \div 40$, область продуктов фрагментации и 3) область продуктов деления с $A \approx 40 \div 150$ для висмута, $A \approx 40 \div 140$ для золота, $A \approx 40 \div 130$ для тантала, вольфрама.

Значительные изменения в массовом распределении продуктов реакции происходят при энергии протонов выше 1000 МэВ: заполняется впадина между областями остаточных ядер расщепления и областью продуктов деления, резко возрастают с энергией протонов выходы ядер-фрагментов с $A \leq 40$.

На изменение механизма реакции в этой области энергий протонов указывает и изменение ряда кинематических характеристик продуктов реакции урана. Так, при энергии протонов ~ 3 ГэВ отношение нейтронодефицитных продуктов в передне-задней полусферах по отношению к пучку протонов проходит через максимум [154–157]. Кинетическая энергия нейтронодефицитных продуктов значительно уменьшается в интервале энергий протонов $1,0 \div 3,0$ ГэВ. Изучение угловых распределений продуктов реакции показало переход от преимущественной направленности в переднюю полусферу к перпендикулярной ориентации по отношению к направлению бомбардирующих протонов [103, 158–160].

6.3. Природа массового распределения осколков деления ядер. Природа асимметричного деления актинидных ядер при низких энергиях возбуждения является одной из загадок со временем открытия деления ядер. Хотя за это

дом, приведено распределение, полученное с помощью регистрации кинетических энергий парных осколков и скорости одного из них в случае облучения висмута протонами с энергией 2,9 ГэВ [41]. Как видно, кривая массового распределения имеет форму относительно узкого пика, характерного для симметричного деления. На рис. 21 приведено распределение по массам продуктов расщепления свинца протонами с энергией 3 ГэВ [150]. Кривая масс осколков деления с наибольшей вероятностью массой 90–95, как видно, объясняет большую часть радиохимических продуктов, наблюдавшихся в этой области [41].

Похожие зависимости найдены и при облучении ядер золота (рис. 22) и тантала (вольфрама) (рис. 23) протонами. При энергиях протонов меньше 1000 МэВ отчетливо видны с учетом результатов работ [148, 180] три области продуктов: 1) область вблизи

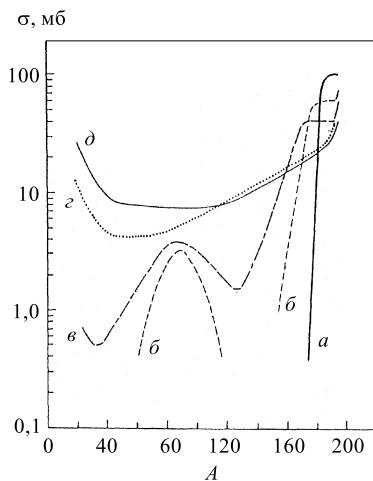


Рис. 22. Распределение [151] по массам продуктов расщепления и деления ядер при облучении ^{197}Au протонами с энергией $a)$ 0,20, $b)$ 0,49, $c)$ 1,0, $g)$ 3,0 и $d)$ 11,5 ГэВ

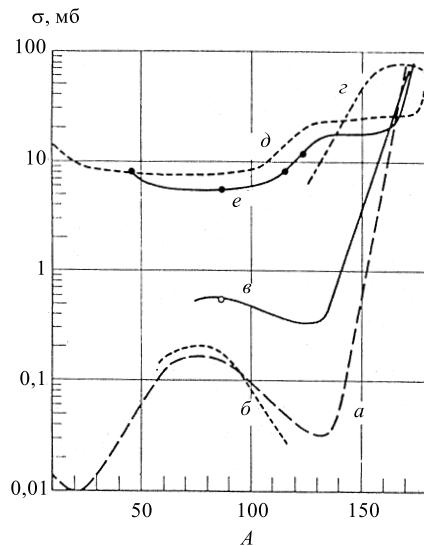


Рис. 23. Распределение [152] по массам продуктов расщепления и деления ядер ^{161}Ta протонами с энергией $a)$ 0,34, $b)$ 0,45, $v)$ 0,58, $g)$ 0,66, $d)$ 5,7, $e)$ 19,0 ГэВ

время было сделано много попыток понять природу массового распределения осколков при делении ядер качественно, ни одна из них не имела успеха в количественном предсказании [161]. Сравнение характеристик массовых распределений осколков деления ядер вблизи порога деления ядер (рис. 18) и при достаточно высоких энергиях возбуждения (рис. 19) с очевидностью приводит к двум основным выводам.

1. Преимущественность асимметричного деления актинидных ядер, наличие асимметричной формы деления при облучении радиоактивными изотопами гелия вблизи порога деления, симметричное спонтанное деление ядер ^{258}Fm (и ряда более тяжелых ядер) с несомненностью свидетельствуют об определяющем влиянии на характер процесса деления ядерной подструктуры с массовым числом $A = 132$.

2. Влияние подструктуры с $A = 132$ на процесс деления уменьшается с ростом энергии возбуждения ядер, что проявляется в увеличении вклада симметричного деления актинидных ядер, и при делении ядер вблизи порога деления с уменьшением Z^2/A делящегося ядра. Во втором случае повышается необходимая первоначальная энергия возбуждения из-за увеличения барьера деления ядер.

Указания на влияние оболочечной структуры в ядре на характер деления актинидных ядер были сделаны уже в первых работах [162–164]. После обнаружения факта, что деление ядер при облучении висмута дейtronами с энергией 190 МэВ происходит преимущественно симметрично [165], Туркевич и Нидей выдвинули гипотезу о двух независимых способах деления — симметричном и асимметричном [166]. Эта гипотеза нашла подтверждение после обнаружения при делении радия дейtronами одновременно асимметричной и симметричной форм массового распределения [167].

6.4. Массовое распределение осколков деления в модели жидкой капли.

Характер изменения симметричного способа деления ядер с ростом энергии возбуждения нашел объяснение в рамках модели заряженной жидкой капли. Согласно расчетам деформации равномерно заряженной жидкой капли симметричной форме ядра в седловой точке соответствует наименьшая энергия деформации, наименьший барьер деления [101, 168–170], то есть симметричное деление в модели жидкой капли преобладает. С ростом энергии возбуждения ядра появляется возможность для менее энергетически выгодных, менее симметричных деформаций ядра при прохождении через вершину потенциального барьера. Струтинский [170] и Никс, Святецкий [171] вычислили жесткость заряженной жидкой капли по отношению к изменению ее формы, характеризуемую константой K_m . Исходя из представления о термодинамическом равновесии в седловой точке и представляя, вследствие этого, вероятность отклонения формы ядра от симметричной кривой Гаусса, они получили выражение для конкуренции деления ядра со степенью асимметрии $U = m/(m_1 + m_2)$:

$$P(U) = \frac{1}{(2\pi T/K_m)^{1/2}} \exp \left[-(U - \frac{1}{2})^2 / (2T/K_m) \right], \quad (10)$$

где T — температура ядра в седловой точке. Это выражение качественно правильно описывает изменение, возрастание ширины массовых распределений осколков деления ядер при облучении Bi, Pb, Au, Ta, W протонами с энергиями до 1 ГэВ (см. табл. 4 и рис. 21–23 с учетом зависимости энергии возбуждения ядер от энергии протонов (рис. 3)).

В работе Андроненко и др. [172] были рассчитаны массовые распределения осколков деления ядер Bi, Au, W, Ag при взаимодействии с протонами с энергией 1 ГэВ. Были использованы результаты расчетов каскадной стадии взаимодействия и статистическая модель Фонга без учета оболочечных эффектов [173] на второй стадии реакции с включением деления ядер. Согласно Фонгу, вероятность деления с той или иной степенью асимметрии определяется плотностью состояний сформировавшихся осколков в точке разрыва. Как показало сравнение, результаты расчета хорошо воспроизвели основные параметры экспериментальных массовых распределений [14, 172].

6.5. Влияние структуры ядра. Пашкевичем [174] была рассчитана потенциальная энергия ядер при больших деформациях с учетом оболочечной поправки методом Струтинского. Форма ядра в нулевом приближении описывалась овалоидами Кассини. Было показано, что при больших деформациях ядра вблизи точки разрыва рассчитанная форма тяжелых ядер находится в качественном согласии с экспериментальными данными по массовой асимметрии трансуранных элементов.

В последние годы была высказана гипотеза о мультимодальном делении ядер при низких энергиях возбуждения. Эта гипотеза разрабатывалась в расчетах Брозы и др. [175, 176] для 4 каналов деления: деление со «стандартной деформацией», приводящей к конфигурации с тяжелым осколком с $A \approx 140$; деление с супермалой деформацией, приводящей к симметричным конфигурациям с большой кинетической энергией; деление с суперудлиненными симметричными деформациями, приводящими к малым кинетическим энергиям осколков; и, наконец, деление с суперасимметричной деформацией, с отношением масс осколков 3:1. Каждому каналу соответствует компонента в массовом распределении, связанная с соответствующим барьером деления. Подобные результаты были получены Пашкевичем для ядер в области фермия в его расчетах деформации ядер с учетом оболочечной поправки [177].

С ростом энергии возбуждения деление трансактинидных ядер, как уже отмечалось, становится преимущественно симметричным, подобно делению доактинидных ядер, что указывает на уменьшение влияния структурных эффектов, но не полностью их исчезновение. Так, при взаимодействии ядер урана с протонами 1 ГэВ и выше массовое распределение продуктов взаимодействия можно разделить на три группы [178, 179]: 1) нейтроноизбыточные продукты низкоэнергичного деления; 2) нейtronодефицитные продукты высокоенергичного деления; 3) очень нейtronодефицитные продукты глубокого расщепления ядер и фрагментации. Продукты взаимодействия урана с протонами с энергией 2,2 ГэВ в интервале масс $A = 90 \div 140$ авторы [98] еще связывают с обычным бинарным делением.

7. ЗАРЯДОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЗАРЯДОВАЯ ДИСПЕРСИЯ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР

7.1. Зарядовое распределение осколков деления. Под термином зарядового распределения понимается характер деления заряда ядра между двумя осколками в процессе деления. Обычно задачу построения распределения заряда при делении ядра сводят к определению распределения по зарядам осколков с данным массовым числом, к определению наиболее вероятного заряда этого распределения Z_p и ширины распределения заряда на половине высоты $W_{1/2}(Z)$. В области низких энергий сильнонейтроноизбыточное

ядро-осколок в ряду изобаров претерпевает ряд β^- -распадов, чтобы достигнуть долины стабильных ядер Z_A . Измеренный выход почти каждого из ядер-продуктов представляет сумму независимого выхода данного нуклида в процессе деления и выходов его предшественников в ряду изобаров. Лишь в редких случаях, когда ядро-предшественник в цепочке изобаров является стабильным или долгоживущим, удается определить независимый выход такого защищенного изобара. Обычно удается измерить независимые выходы небольшого числа защищенных изобаров вблизи долины стабильности, так как далекие от нее изобары имеют слишком короткие для химического выделения времена жизни. В большинстве работ для этой цели до недавнего времени использовался радиохимический или масс-спектрометрический методы [181]. Позднее был разработан ряд физических методов: определение заряда осколка по энергии рентгеновского излучения его атомной оболочки путем подсчета числа β -распадов для осколков известной массы, определенной с помощью масс-спектрометра, и др. [182].

Полученные при делении ядер урана медленными нейтронами и при спонтанном делении ядер независимые выходы изобаров ряда массовых цепочек удовлетворительно укладываются на одну универсальную кривую зарядового распределения $P(Z - Z_p)$, если зависимость наиболее вероятного заряда в каждой массовой цепочке $Z_p(A)$ выбрана согласно предположению о равенстве длин цепочек β -распадов дополнительных осколков $(Z_p - Z_A)_l = (Z_p - Z_A)_t$, где индексы «л» и «т» относятся к легкому и тяжелому осколку соответственно. Вааль нашел экспериментальную зависимость $Z_p(A)$ для значительного числа массовых цепочек при делении ^{235}U тепловыми нейтронами [183], которая близка к расчетной в предположении равенства длин цепочек дополнительных осколков. Согласно результатам, полученным радиохимическим методом, зарядовая плотность осколков с $A = 132$ отличается от плотности заряда подструктуры из 50 протонов и 82 нейтронов. Но образование магической подструктуры в тяжелом осколке в процессе деления ядра при низкой энергии возбуждения играет, по-видимому, существенную роль в уменьшении плотности заряда наиболее вероятных тяжелых осколков и в увеличении плотности заряда дополнительных, наиболее вероятных легких осколков, в отклонении экспериментальной зависимости $Z_p(A)$ для наиболее вероятных осколков от ожидаемой зависимости $Z_p(A)$ в случае равной плотности зарядов дополнительных осколков.

При определении зарядового распределения деления ядер с более высокими энергиями возбуждения возникают большие экспериментальные трудности. Соответственно знания о зарядовом распределении при более высоких энергиях бомбардирующих частиц более ограничены, и можно установить только основные тенденции в эволюции зарядового разделения с энергией возбуждения. Имеющиеся данные свидетельствуют, что характер деления тяжелых ядер U, Th в области средних и высоких энергий возбуж-

дения вплоть до нескольких сотен МэВ такой же, как и при низкоэнергетическом делении [184, 185], или же промежуточный между двумя распределениями, согласно предположению о равенстве длин цепочек β -распадов и о равенстве плотности зарядов парных осколков [186, 187].

Продукты сильноасимметричного деления урана, которые возникают в результате деления лишь высоко-возбужденных ядер, имеют зарядовое распределение, соответствующее гипотезе равных плотностей зарядов делящегося ядра и осколков [188–190]. При дальнейшем росте энергии протонов ширина зарядового распределения осколков деления ядер увеличивается (рис. 19, б) [146, 147].

При изучении выхода продуктов деления ядер, вызванного бомбардировкой висмута дейtronами с энергией 190 МэВ, было найдено, что отношение N/Z легкого и тяжелого фрагментов примерно одинаково [191], что не соответствует гипотезе равного смещения заряда, как это имеет место при делении урана медленными нейтронами. Подобные экспериментальные результаты были получены при облучении золота ионами ${}^4\text{He}$ с энергией 40 МэВ [192].

7.2. Зарядовая дисперсия осколков деления. Под дисперсией зарядов понимают распределения независимых выходов нуклидов среди изобаров с данным массовым числом. В ряде работ [19, 184, 193, 194] было показано, что в области сотен МэВ кривые зарядовой дисперсии при делении урана расширяются с возрастанием энергии за счет появления нейтронодефицитных продуктов среди нейтроноизбыточных продуктов низковозбужденного деления ядер. Также было найдено, что максимумы Z_p в кривых зарядовых дисперсий сдвинуты ближе к линии β -стабильности [184, 194] в интервале $0 \div 2$ ед. Z с нейтроноизбыточной стороны от линии β -стабильности (Z_A) в сравнении с делением ядер на тепловых нейтронах, где $Z_A - Z_p$ находятся в интервале $3 \div 4$ ед. Z [181].

На рис. 24 приведены кривые зарядовых дисперсий для продуктов деления в области $A \approx 131$, образованных при взаимодействии урана с протонами различных энергий [13, 195]. Следует иметь в виду, что приведенные на рисунке кривые не являются, строго говоря, зарядовой дисперсией, поскольку по оси абсцисс отложен не заряд осколка, а отношение N/Z [13]. Из рис. 24

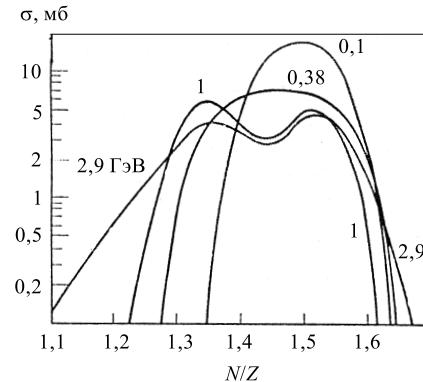


Рис. 24. Кривые зарядовой дисперсии для продуктов в области $A \approx 131$, образовавшихся при взаимодействии урана с протонами различных энергий [13, с.269]

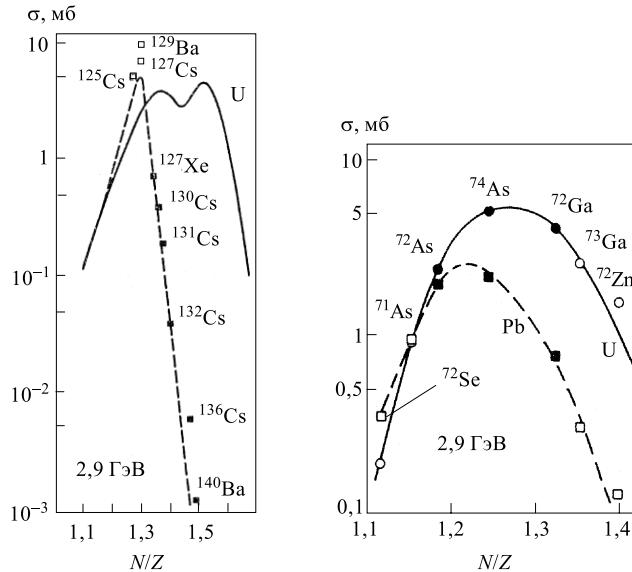


Рис. 25. Кривые зарядовой дисперсии для $A \sim 131$ при взаимодействии урана (сплошная кривая), свинца (пунктир) с протонами 2,9 ГэВ; экспериментальные точки ■ — свинец, независимые выходы, □ — кумулятивные выходы [13, с.270]

Рис. 26. Кривые зарядовых дисперсий для $A \sim 72$ при взаимодействии урана (сплошная кривая) и свинца (пунктир) с протонами 2,9 ГэВ. ■, □ — независимые выходы, ○, ● — кумулятивные выходы [13, с.272]

видно, что при энергии протонов 1 ГэВ и выше на кривых зарядовой дисперсии появляются два максимума. Образование левого (нейтронодефицитного) максимума обязано проявлению высокоэнергетичного деления. Ширина и положение второго (правого) максимума, соответствующего нейтроноизбыточным продуктам деления ($N/Z \approx 1,5$), мало изменяется с ростом энергии протонов, положение этого максимума близко к положению нейтроноизбыточного пика в низкоэнергетичном делении.

На рис. 25 приведены кривые зарядовой дисперсии для $A = 131$ при взаимодействии урана и свинца с протонами 2,9 ГэВ [13], а на рис. 26 — то же для осколков с $A \approx 72$ [13]. Данные рис. 25 и 26 свидетельствуют: а) кривые зарядовой дисперсии для свинца и урана существенно отличаются, при этом выходы продуктов с большими отношениями N/Z существенно ниже для свинца, чем для урана; б) двойной пик зарядовой дисперсии, найденный в области $A \approx 131$ [13, 196] при делении урана, не наблюдается для малых значений $A \approx 72$. В случае урана продукты с $A \approx 72$ соответствуют силь-

ноасимметричному делению, по-видимому, с большей энергией возбуждения (рис. 20). Некоторые качественно подобные результаты были получены при изучении изотопных распределений продуктов деления урана и иридия протонами с энергией 1 ГэВ с помощью масс-спектрометра «в линию» [197]. Как было оценено [195], соотношение площадей двух максимумов в зарядовой дисперсии осколков деления ядер урана протонами с энергией 1 ГэВ указывает на относительно большой вклад (около 200 мб) низковозбужденных делений. В связи с этим интересно отметить, что при изучении деления ядер урана протонами с энергией 1 ГэВ с помощью двухплечевого спектрометра кинетических энергий парных осколков [198] была обнаружена группа делительных событий с сечением деления 140 мб ($\approx 10\%$ всех событий), имеющая характерное для малой энергии возбуждения двугорбое массовое распределение продуктов деления. Еще раньше в работе [143] при делении ^{238}U протонами с энергией $E_p = 156$ МэВ авторы оценили вклад асимметричной моды деления в 30 % методом разложения экспериментальной массовой кривой на симметричное и асимметричное распределения.

8. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР

Вскоре после открытия Ганом и Штрасманом деления ядер радиохимическим методом О.Фриш [199] экспериментально установил, что при делении ядер урана выделяется значительная энергия. Он измерил величину импульсов, создаваемых осколками в ионизационной камере. Позднее измерения энергии осколков производились с помощью двух ионизационных камер, разделенных сеткой Фриша. В настоящее время метод измерений с помощью усовершенствованных ионизационных камер переживает второе рождение. Ионизационная камера имеет ряд преимуществ: возможно измерение полной энергии частицы с энергетическим разрешением лучшим, чем с помощью полупроводниковых детекторов; определение кинетической энергии, массы, атомного номера частицы, углового распределения частиц [200]. Большой объем информации о кинетической энергии осколков деления ядер получили путем измерения с помощью полупроводниковых детекторов кинетических энергий осколков в $(2E)$ -экспериментах или путем измерений скоростей в $(2V)$ -экспериментах [123].

8.1. Зависимость кинетической энергии осколков деления от отношения их масс. Если бы кинетическая энергия осколков деления определялась только их кулоновским взаимодействием в момент разделения, то для осколков сферической формы, в предположении $Z_1/Z_2 = A_1/A_2$, суммарная кинетическая энергия двух осколков деления была бы наибольшей при симметрич-

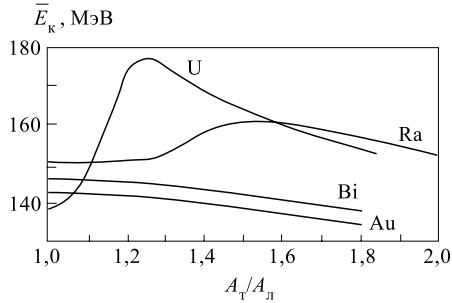


Рис. 27. Зависимость средней кинетической энергии парных осколков деления от отношения их масс в случае деления ядер при облучении ^{235}U тепловыми нейтронами [205], ^{226}Ra дейtronами с энергией 14 МэВ [212], ^{209}Bi и ^{197}Au ионами ^3He с энергией 25,5 МэВ [212]

ном делении и уменьшалась с ростом отношения масс осколков [2]. Однако, как было найдено при спонтанном делении тяжелых ядер [201–203], при делении тяжелых ядер тепловыми нейтронами [204, 205], нейтронами с энергией несколько МэВ [206–208] и при делении ^{226}Ra протонами 9–13 МэВ [209] в зависимости $\bar{E}_k(A_t/A_n)$ имеется минимум в области симметричного деления. В случае облучения ядер ^{233}U , ^{235}U и ^{239}Pu тепловыми нейтронами провал в кинетической энергии в области симметричного деления, как было найдено, составляет около 20–35 МэВ и с ростом энергии бомбардирую-

щих частиц уменьшается. При облучении урана и тория нейтронами с энергией 14 МэВ провал в \bar{E}_k для симметричного деления составлял 12–15 МэВ [206, 207], а при облучении ^{235}U нейтронами с энергией 20 МэВ провал в \bar{E}_k симметричного деления составлял уже ~ 10 МэВ [210, 211]. При облучении ^{226}Ra протонами и дейtronами 11–14 МэВ провал \bar{E}_k в области симметричного деления составлял ~ 9 МэВ [209, 212]. При облучении же ядер висмута и золота ионами ^3He с энергией 25,5 МэВ и ионами ^4He с энергией 25 и 42 МэВ была найдена плавная зависимость $\bar{E}_k(A_t/A_n)$ с максимумом для симметричного деления (рис. 27) [212, 213].

В ряде работ наблюдаемая зависимость $\bar{E}_k(A_t/A_n)$ при делении тяжелых ядер связывается с влиянием степени заполненности ядерных оболочек на форму осколков в момент разделения [206], с повышенной жесткостью по отношению к деформации околомагнитических осколков и с пониженной жесткостью осколков, далеко отстоящих от заполненных оболочек [214, 215].

В другой группе работ наблюдаемая зависимость $\bar{E}_k(A_t/A_n)$ при делении тяжелых ядер объяснялась как результат наложения двух независимых типов деления — симметричного и асимметричного [212, 216–218]. С симметричным делением связывается большее расстояние между центрами тяжести осколков в сравнении с асимметричным делением, а следовательно, меньшая кинетическая энергия осколков [212, 216]. Интересно отметить, что сильно-асимметричное деление тяжелых ядер в области масс $A \geq 150$ по характеру деления напоминает симметричное деление. Так, при фотodelении ядер ^{240}Pu было найдено, что с ростом энергии возбуждения ядер суммарная кинетическая энергия осколков асимметричного деления уменьшается, а кинетическая

энергия осколков симметричного и сильноасимметричного деления или остается постоянной, или слегка возрастает [219]. Книттер и др. [220] проанализировали зависимость суммарной кинетической энергии осколков деления ^{235}U тепловыми нейтронами [220] от массы тяжелого осколка как результат наложения симметричного деления суперудлиненной формы, стандартного деления 1 и стандартного деления 2 из асимметричной области.

Как следовало из рассмотрения особенностей массового распределения осколков деления ядер вблизи порога деления (см. разд. 6), при делении тяжелых ядер с несомненностью проявляется влияние подструктуры из 50 протонов и 82 нейtronов. Следует отметить, что подобно провалу в области симметричного деления в кривой масс при делении тяжелых ядер наблюдается и провал в кинетической энергии в области симметричного деления этих ядер в зависимости $\bar{E}_k(A_t/A_n)$. С ростом энергии возбуждения при делении тяжелых ядер уменьшается провал в области симметричного деления как в зависимости выходов масс, так и в зависимости $\bar{E}_k(A_t/A_n)$.

8.2. Зависимость средней кинетической энергии осколков деления от энергии бомбардирующих нейтронов и протонов. В области средних энергий возбуждения небольшое наблюдаемое изменение — уменьшение кинетической энергии осколков деления ^{235}U нейтронами [221] совпадает с ожидаемым изменением из-за уменьшения вклада асимметричных делений с максимальной кинетической энергией и из-за уменьшения самой величины максимальной кинетической энергии для асимметричного деления с ростом энергии возбуждения. При дальнейшем увеличении энергии нейтронов до 20 МэВ средняя кинетическая энергия осколков деления ^{233}U , ^{235}U существенно не изменяется [221, 222]. Подобный результат был получен при облучении

Таблица 5. Средние значения суммарной кинетической энергии парных осколков деления ядер \bar{E}_k [МэВ] при облучении протонами

Ядро	n_T [7]	E_p , МэВ				
		96 [40]	156 [36, 40]	450 [37]	1000 [148]	2900 [41]
^{235}U	$169,3 \pm 0,5$					
^{238}U		163 ± 3	166 ± 4	154 ± 7		
^{209}Bi		144 ± 3	154 ± 3	142 ± 3	$137,2 \pm 20$	133,1
^{197}Au			144 ± 3		$126,5 \pm 3,0$	
^{181}Ta			119 ± 4	122 ± 4	$111,5^* \pm 3,0$	

*Вольфрам.

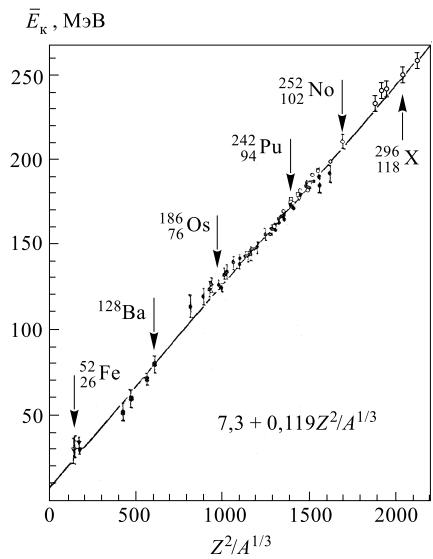


Рис. 28. Зависимость полной кинетической энергии \bar{E}_k парных осколков деления от параметра $Z^2/A^{1/3}$, делящегося ядра [224]

имодействия с частицами, включая тяжелые ионы. Сюда не включены аномально высокие значения $\bar{E}_k \simeq 230$ МэВ при спонтанном делении ^{258}Fm и ^{260}Md [128].

^{238}U , ^{235}U , ^{232}Th , ^{209}Bi нейтронами с энергией 90 МэВ [223]. Средняя кинетическая энергия осколков в случае деления ^{235}U только на 5 МэВ выше, чем при делении медленными нейтронами. В табл. 5 приведены значения кинетических энергий осколков деления ядер U , Bi , Au , Ta при облучении протонами в широком интервале энергий бомбардирующих протонов $100 \div 1000$ МэВ (в случае Bi еще и при $E_p = 2900$ МэВ). Видно, что кинетическая энергия осколков деления ядер ^{238}U , ^{209}Bi , ^{197}Au , ^{181}Ta , ^{nat}W в указанном интервале энергий протонов мало изменяется, слегка уменьшаясь.

На рис. 28 приведена зависимость суммарной средней кинетической энергии осколков деления ядер от параметра $Z^2/A^{1/3}$, полученная в [224] для широкого круга ядер при спонтанном делении и в реакциях вза-

9. НЕЙТРОНЫ И ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ, ИСПУСКАЕМЫЕ ПРИ ДЕЛЕНИИ ЯДЕР

Энергия, освобождаемая при делении ядра, реализуется в форме кинетической энергии осколков деления путем испускания из осколков мгновенных нейтронов и гамма-квантов. Так как средняя кинетическая энергия осколков практически не изменяется с ростом энергии возбуждения ядра, то добавочная энергия возбуждения, внесенная в ядро, идет, в основном, на испарение дополнительных нейтронов. При достаточно высокой внесенной энергии возбуждения наряду с нейтронами при делении ядер испускаются заряженные частицы. В некоторых редких случаях заряженные частицы, в основном альфа-частицы, испускаются при спонтанном делении ядер и при делении ядер, вызванном частицами низких энергий [225, 226]. Механизм возникно-

вения этих заряженных частиц, по-видимому, отличен от испарительного и здесь рассматриваться не будет.

9.1. Испускание нейтронов. Так как в модели жидкой капли минимум потенциальной энергии ядра в момент перед разделением осколков соответствует форме осколков, отличной от сферической [101], а минимум потенциальной энергии осколков при их бесконечном отдалении друг от друга соответствует сферической форме, то эта разница в энергии деформации осколков превращается во внутреннюю энергию возбуждения осколков. Осколки деления тяжелых ядер при спонтанном делении и при облучении ядер нейтронами низких энергий сильно нейтроноизбыточны. Этот избыток частично уменьшается путем испарения нейтронов за счет их энергии возбуждения. В статье [7] приведены оцененные среднемировые значения чисел мгновенных нейтронов при спонтанном делении ядер и делении ядер, вызванном тепловыми нейтронами.

Энергетические спектры мгновенных нейтронов деления от нескольких электронвольт до ~ 14 МэВ с наиболее вероятной энергией $\sim 0,72$ МэВ и средней энергией около 2 МэВ имеют характер, близкий к максвелловскому в лабораторной системе координат [227]. Результаты более точных и в более широком энергетическом интервале измерений привели к необходимости более сложного описания спектров мгновенных нейтронов деления [228, 229]. С ростом энергии возбуждения ядра увеличивается число эмитированных нейтронов [229–232]. В случае облучения тяжелых ядер нейтронами с энергией E_n зависимость числа испускаемых нейтронов может быть представлена выражением $\bar{\nu}(E_n) = \bar{\nu}_0 + aE_n$, где $\bar{\nu}_0$ — среднее число мгновенных нейтронов при делении тепловыми нейтронами. Параметр $a \approx 0,15$ слабо зависит от энергии бомбардирующего нейтрона в интервале энергий до 50 МэВ [7].

При облучении ^{238}U и ^{209}Bi протонами с энергией 147 МэВ наблюдалась эмиссия большого числа нейтронов. Прямым измерением множественности Хардинг нашел, что эмитируется $(13,1 \pm 1,6)$ нейтронов на деление в случае урана и $(10,0 \pm 2,7)$ нейтронов на деление в случае висмута [233]. Хардинг и Фарли [234] измерили отношение числа нейтронов, летящих параллельно и перпендикулярно направлению движения осколков деления ядер естественного урана при облучении протонами с энергией 147 МэВ. Они получили значение для этого отношения $(1,27 \pm 0,11)$, которое совпадало с предположением, что большая часть нейтронов эмитируется до деления ядра, и только $(2,5 \pm 1)$ нейтронов эмитируется из движущихся осколков. В последующей работе [235] был измерен энергетический спектр нейтронов при делении урана протонами с энергией 150 МэВ с использованием ядерных эмульсий с высокой чувствительностью. Средняя энергия нейтронов деления была найдена равной $(2,4 \pm 0,2)$ МэВ, что совпадало с заключением, что большинство нейтронов испускается до деления.

Отличающиеся результаты были получены в работе Хейфеца и др. [236], регистрировавших нейтроны в совпадении с осколками деления ядер при облучении урана и висмута протонами с энергией 155 МэВ. Энергии осколков измерялись поверхностно-барьерными детекторами, энергии нейтронов — по времени пролета. Для нейтронов с энергией больше 1 МэВ они нашли значение $N(0^\circ)/N(90^\circ) = (2,05 - 2,45)$ для U и $(1,77 - 2,11)$ для Bi. При спонтанном делении ^{252}Cf то же отношение равно 6. В результате было оценено, что в случае урана $(5,8 \pm 1,0)$ нейтронов эмитируется до деления, $(5,1 \pm 0,5)$ нейтронов — после деления. При делении висмута оценка дала, что $(6,9 \pm 1,0)$ и $(4,2 \pm 0,5)$ нейтронов, соответственно, испускаются до и после деления. Подобные результаты были получены в случае взаимодействия ядер урана и висмута с протонами с энергией 475 МэВ [105].

В работе Эйсманта [237] была оценена вероятность того, что при делении ядер урана, возбужденных до энергии выше 20 МэВ, некоторая доля нейтронов (увеличивающаяся с возбуждением осколков) может эмитироваться в ходе ускорения осколков до момента полного ускорения. По оценкам этой работы вполне вероятно, что при делении ядра урана, возбужденного до энергии ~ 100 МэВ (что имеет место при энергии бомбардирующих протонов 147 МэВ), эмиссия нейтронов из осколков происходит в очень короткое время, при котором осколки не успевают набрать большой скорости. Таким образом, наблюдаемая экспериментально незначительная анизотропия вылета нейтронов [234] и малая кинетическая энергия нейтронов [235] могут быть качественно объяснены [237]. Коллаборацией исследователей Радиевого института им. В.Г.Хлопина (С.-Петербург, Россия), Университета штата Орегон (США) и департамента нейтронных исследований (INF) Университета Уппсала (Швеция) подготовлен и начал проводиться эксперимент по измерению энергетического распределения нейтронов, эмитированных при делении ядер в случае взаимодействия протонов с энергией $50 \div 200$ МэВ с ^{209}Bi , ^{232}Th , ^{238}U , ^{237}Nr . Для выполнения этой задачи создан высокопрецизионный спектрометр, способный измерять нейтронные спектры, энергетические, угловые корреляции нейтронов, а также кинетические энергии, массы и относительные углы вылета осколков деления [238].

9.2. Зависимость числа мгновенных нейтронов от массы осколка. При измерении зависимости числа испущенных нейтронов от массы осколка в случае спонтанного деления ядер ^{252}Cf и при делении ядер ^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu тепловыми нейтронами была обнаружена пилообразная зависимость выхода $\nu(A)$ [239–242]. С возрастанием массы легкого и тяжелого осколков число нейтронов изменяется так, что оно является наименьшим для наиболее легкого осколка в легкой группе осколков и наибольшим для наиболее тяжелого осколка в этих двух группах. Область осколков с $A \approx 110 \div 130$ является переходной для этих двух ветвей. Было найдено, что наибольшее число нейтронов эмитируется при симметричном делении ядер ^{234}U , ^{236}U и ^{240}Pu [242].

Оцененная разница в энергиях возбуждения осколков при симметричном и асимметричном делении ядер урана и плутония тепловыми нейтронами составляет около 20 МэВ [242], что примерно равно величине провала кинетической энергии осколков симметричного деления этих ядер (см. разд. 8). Пилообразная зависимость $\nu(A)$ была найдена и в случае деления ядер при облучении ^{226}Ra протонами с энергией 13 [243] и 12 МэВ [244]. При облучении ^{209}Bi протонами с энергией 36 МэВ установлено, что выход нейтронов почти линейно возрастает с массой осколка деления [132]. На рис. 29 приведены зависимости $\nu(A)$ при делении ядер ^{235}U тепловыми нейтронами [242], ^{226}Ra протонами 13 МэВ [243], ^{209}Bi протонами 36 МэВ [132]. Там же приведено схематично расчетное распределение $\nu(A)$ для случая спонтанного деления ядер ^{258}Fm [245]. При облучении ^{209}Bi и ^{238}U протонами с энергией 155 МэВ [246] наблюдалось плавное возрастание выхода нейтронов $\nu(A)$ с увеличением массы осколка (рис. 30).

Качественное объяснение наблюдавшейся пилообразной зависимости $\nu(A)$ при делении тяжелых ядер основывалось на предположении, что форма осколков в момент перед разделением зависит от близости осколка к магическому числу нейтронов и протонов в нем [206, 240, 247, 248]. Энергия возбуждения осколков, пропорциональная деформации осколков перед разделением, оказывается наименьшей для осколков вблизи заполненных оболочек с $N = 82$, $Z = 50$ с $A = 132$. Количественные расчеты привели к достаточно хорошему согласию с эксперимен-

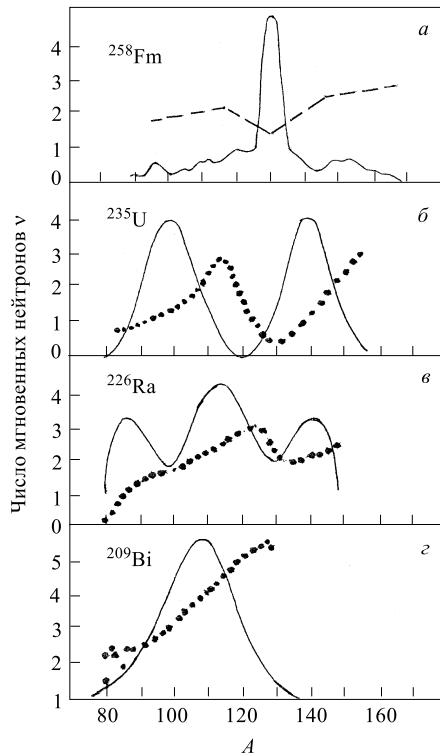


Рис. 29. Зависимость числа испущенных осколком деления мгновенных нейтронов от массового числа A : *а*) при спонтанном делении ^{258}Fm , оцененная зависимость [245] — штриховая линия; *б*) при делении ^{235}U тепловыми нейтронами [242] — пунктир; *в*) при делении ядер ^{226}Ra протонами с энергией 13 МэВ [243] — пунктир; *г*) при делении ядер ^{209}Bi протонами 36 МэВ [132] — пунктир. Сплошной линией схематично обозначено массовое распределение осколков деления соответствующих ядер

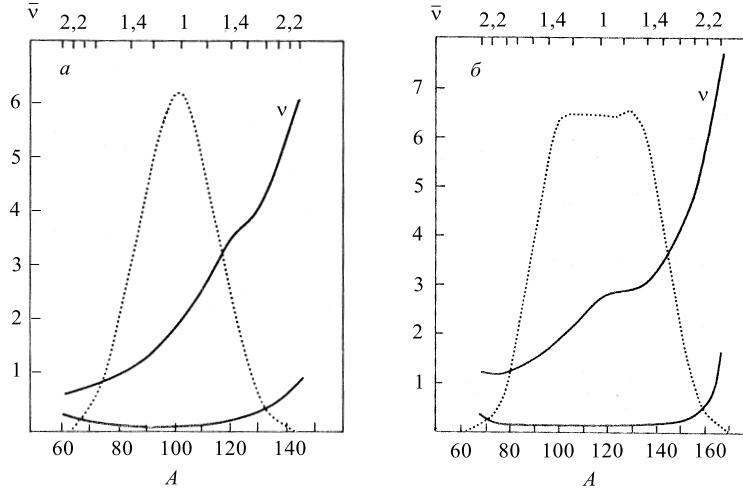


Рис. 30. Среднее число нейтронов $\bar{\nu}$, испущенных осколком данной массы при делении ^{209}Bi (а) и ^{238}U (б) протонами с энергией 155 МэВ [246], нижние сплошные линии — погрешности в определении числа нейтронов. Пунктиром обозначено соответствующее массовое распределение осколков деления

тальной зависимостью $\nu(A)$ в случае деления ^{235}U тепловыми нейtronами и в случае спонтанного деления ^{252}Cf [215, 227]. Расчеты, достаточно удовлетворительно описывающие экспериментальные зависимости $\nu(A)$ при делении ядер, были сделаны в рамках мультимодального представления о делении ядер [176].

9.3. Испускание заряженных частиц. При достаточно высоких энергиях возбуждения делящихся ядер наряду с нейтронами испаряются заряженные частицы, в основном протоны. При изучении деления ядер с помощью ядерных эмульсий было найдено, что число заряженных частиц, сопровождающих деление ядер, растет как с увеличением энергии бомбардирующих протонов, так и, при данной энергии бомбардирующих протонов, при переходе от тяжелых ядер типа урана к более легким — висмуту и вольфраму [22, 38, 42, 249]. Так, среднее число заряженных частиц на одно деление урана, протонов с энергией < 25 МэВ, возрастает от 0,25 при $E_p = 140$ МэВ [249] до 1,9 при $E_p = 3000$ МэВ [38]. Максимальное число заряженных частиц на одно деление урана было равно 8, 10, 16 и 26 при облучении урана протонами с энергиями 460, 660, 3000 и 9000 МэВ соответственно [250]. На рис. 31 приведены микрофотографии двух делительных событий в ядерной эмульсии, содержащей соли урана, в случае деления ядер урана, вызванного протонами с энергией 9 ГэВ [251]. Одно событие деления произошло при большой передаче энергии возбуждения и сопровождалось излучением 18 заряженных

частиц, в основном протонов с энергией меньше 25 МэВ. Второй случай деления произошел без испускания заряженных частиц, протонов с энергией меньше 25 МэВ, с малой передачей энергии возбуждения ядру урана бомбардирующем протоном. Таких событий наблюдается до 30 % в случае облучения урана протонами с энергией 9 ГэВ [67].

В работе [252] экспериментально было найдено, что при взаимодействии урана с протонами с энергией 475 МэВ и ионами ^3He с энергией 2 ГэВ при делении ядер испускается до 22 и 34 нейтронов соответственно (максимально измеренные числа нейтронов). Авторы [252] планируют, наряду с уже использованным 4π -нейтронным детектором, использовать в совпадении 4π -детектор заряженных частиц. Это позволит существенно продвинуться в понимании протон-ядерных реакций и, возможно, в понимании природы испускания большого числа заряженных частиц при делении урана, подобно изображенному на рис. 31.

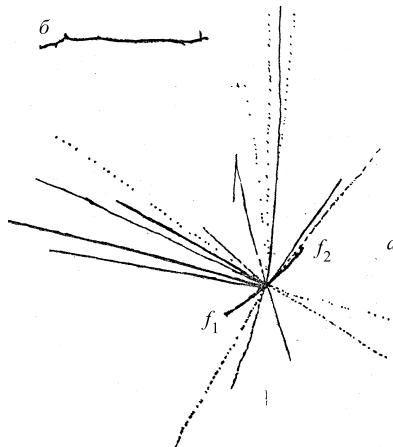


Рис. 31. Микрофотографии двух событий деления ядер урана в ядерной эмульсии при облучении протонами с энергией 9 ГэВ: а) деление сопровождается испусканием 18 заряженных частиц в результате передачи протоном большой порции энергии; б) случай деления с малой передачей энергии; f_1 и f_2 — осколки деления [251]

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Одно из отличий в делении ядер в области промежуточной энергии легких частиц — это набор делящихся ядер по A, Z и энергиям возбуждения. В то же время, как свидетельствуют зависимости рис. 3, делящимся ядрам передается протоном сравнительно небольшая энергия возбуждения. Так, при делении урана, висмута, тантала протонами с энергией 1 ГэВ доля переданной протоном энергии составляет 0,16; 0,21 и 0,3 соответственно.

2. Сравнение зависимостей сечений деления ядер от энергии протонов и нейtronов (рис. 5–11) с очевидностью указывает на различие механизма деления двух групп ядер: типа урана, с одной стороны, и ядер висмута, вольфрама, тантала — с другой. Как отмечалось в статье [61], делимость ядер урана в области высоких энергий слабо зависит от энергии возбуждения, как это имеет место и в области малых энергий. И, наоборот, делимость ядер типа висмута сильно зависит от энергии возбуждения, энергии частиц в

области промежуточных энергий, как это наблюдается для этих ядер в области энергий частиц до ~ 50 МэВ.

В результате экспенсивного анализа и компиляции экспериментально измеренных (p, f) -сечений широкого круга ядер от ^{181}Ta до ^{238}U [68] и от ^{165}Ho до ^{239}Pu [71] создана база данных в области энергий протонов от порога деления до $\sim 10\text{--}30$ ГэВ.

3. Авторами работ [96, 117, 118] систематизирована зависимость анизотропии деления ядер от ^{238}U до ^{197}Au от энергии протонов вплоть до 1000 МэВ. Ими предложено объяснение явления так называемого аномального увеличения анизотропии вблизи порога деления ядер типа ^{208}Pb при облучении ионами ^4He и ядер ^{185}Re при облучении протонами как результата выстроенности ядер в седловой точке перпендикулярно направлению углового момента.

4. Сравнение массовых распределений осколков деления ядер, зависимости кинетической энергии осколков деления от симметрии деления, зависимости числа испускаемых мгновенных нейтронов от массы осколка при делении ядер вблизи порога (рис. 18, 27, 29) и при высоких энергиях возбуждения (рис. 19, 30) с несомненностью свидетельствует о сильном влиянии магического числа нуклонов $A \approx 132$ на процесс деления при малых энергиях и исчезновении этого влияния при высоких энергиях.

5. При вычислениях, например, сечений деления ядер при взаимодействии с протонами промежуточных энергий часто полагают, что сложная, двугорбая структура барьера деления тяжелых ядер [5, 7], обязанная проявлению оболочечной структуры ядра, исчезает с увеличением энергий возбуждения делящегося ядра выше ~ 50 МэВ. Но, как отмечалось (разд. 7), авторами [198] и [143] была обнаружена группа низкоэнергичных делений ядер урана с характерным распределением осколков по массам в количестве $\sim 10\%$ и 30% при облучении протонами 1000 и 156 МэВ соответственно.

6. Новые теоретические приближения развиваются для оценки существующих экспериментальных данных. Так, в работе [253] была пересмотрена модель деления путем полуэмпирической параметризации вычисления вклада деления в широкой области Z, A , энергий возбуждения ядер при взаимодействии с протонами, альфа-частицами и ионами. Модель воспроизводит измеренные конкуренцию скальвания — деления ядер (сечения), массовые распределения и т.д. для делящихся систем от Ta до Cf в области промежуточных энергий.

В заключение автор выражает благодарность сотрудникам Радиевого института им. В.Г. Хлопина В.П. Эйсмонту, А.Н. Смирнову, А.В. Прокофьеву, О.И. Батенкову, С.Г. Явшицу за предоставление ряда материалов и многочисленные дискуссии и доценту Северо-Западного заочного политехнического института И.А. Обуховой за большую помощь в подготовке обзора к публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайд Э., Перлман И., Сиборг Г. — Ядерные свойства тяжелых элементов. Вып.5: Деление ядер. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1969;
Hyde E.K. — The Nuclear Properties of the Heavy Elements. Vol.III: Fission Phenomena. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
2. Обухов А.И., Перфилов Н.А. — Деление ядер. УФН, 1967, т.92, с.621; Soviet Physics Uspekhi, 1968, v.10, p.559.
3. Vandenbosch R., Huizenga J.R. — Nuclear Fission. Academic Press, New York and London, 1973.
4. Гангский Ю.П., Далхсурэн Б., Марков Б.Н. — Осколки деления ядер. М.: Энергоатомиздат, 1986.
5. The Nuclear Fission Process. Ed. by C.Wagemans, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1991.
6. Гангский Ю.П., Марков Б.Н., Перельгин В.П. — Регистрация и спектрометрия осколков деления. М.: Энергоатомиздат, 1992.
7. Обухов А.И., Григорьев И.С. — Деление ядер. В справочнике: «Физические величины», ред. И.С.Григорьев, Е.З.Мейлихов. М.: Энергоатомиздат, 1991, с.1087; Handbook of Physical Quantities. Edit. by I.S.Grigoriev, E.Z.Meilikhov. CRC Press, Boca Raton, N.Y., London, Tokyo, 1997, p.1321.
8. Lisowski P.W., Bowman C.A., Russel G.J., Wender S.A. — The Los Alamos National Laboratory Spallation Neutron Sources. Nucl. Sci. Eng., 1990, v.106, p.208.
9. Shcherbakov O.A. — Preprint N1664, LINP, Decemb., 1990.
10. Перфилов Н.А., Ложкин О.В., Остроумов В.И. — Ядерные реакции под действием частиц высоких энергий. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962.
11. Барашенков В.С., Тонеев В.Д. — Взаимодействия высокоэнергетических частиц и атомных ядер с ядрами. М.: Атомиздат, 1972.
12. Miller J.M., Hudis J. — Ann. Rev. Nucl. Sci., 1959, v.9, p.159.
13. Friedlander G. — In: Physics and Chemistry of Fission. Proc. of a Symposium, Salzburg, 22–26 March, 1965, v.2, p.278.
14. Андроненко Л.Н., Вайшнене Л.А., Котов А.А. и др. — ЭЧАЯ, 1987, т.18, с.685.
15. Gudowski W. — Nucl. Phys., 1999, v.A654, p.436.
16. Carminati F., Klapisch R., Revol J.P. et al. — CERN/AT/93-47 (ET), 1993.
17. Proc. of the Internat. Workshop — Nuclear Methods for Transmutation of Nuclear Waste. Problems, Perspectives, Cooperative Research. Dubna, Russia, 29–31 May, 1996. Eds. M.Kh.Khankhasayev, H.S.Plendl, Z.B.Kurmanov. World Scientific. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
18. Proc. of the 3rd Workshop on Neutron Science Project — Science and Technology in the 21st Century Opened by Intense Spallation Neutron Source, March 17, 1998, JAERI, Tokai, Japan. JAERI — Conf., 99-003.
19. Виноградов А.П., Алимарин И.П., Баранов В.И. — Материалы сессии АН СССР по мирному использованию атомной энергии, 1–5 июля 1955 г.; отделение хим. наук. М.: Изд-во АН СССР, 1955, с.97.
20. Курчатов Б.В., Мехедов В.И., Кузнецова М.Я., Курчатова Л.Н. — там же, с.120.
21. Мурин А.Н., Преображенский Б.К., Ютландов И.А., Якимов М.А. — там же, с.160.

22. **Перфилов Н.А., Иванова Н.С., Ложкин О.В. и др.** — там же, с.79.
23. **Гольданский В.И., Пенькина В.С., Тарумов Е.З.** — ЖЭТФ, 1955, т.29, с.778.
24. **Serber R.** — Phys. Rev., 1947, v.72, p.1114.
25. **Metropolis N., Bivins R., Storm M. et al.** — Phys. Rev., 1958, v.110, p.185.
26. **Metropolis N., Bivins R., Storm M. et al.** — Phys. Rev., 1958, v.110, p.204.
27. **Ijinov A.S., Kazarnovski M.V., Paryev E.Ya.** — Intermediate Energy Nuclear Physics. CRC Press. Boca Raton—Ann Arbor—London—Tokyo, 1994.
28. **Dostrovsky I., Fraenkel Z., Rabinovitz P.** — In: Proc. of the Second U.N. Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva), 1958, v.15, p.301; В сб.: Труды Второй Межд. конф. по мирному использованию атомной энергии. М.: Атомиздат, 1959, с.1615.
29. **Blann M.** — Ann. Rev. Nucl. Sci., 1975, v.25, p.123.
30. **Gudima K.K., Mashnik S.G., Toneev V.D.** — Nucl. Phys., 1983, v.A401, p.329.
31. **Porile N.T.** — Phys. Rev., 1960, v.120, p.1960.
32. **Беляев Б.Н., Мурин А.Н.** — В сб.: Физика деления атомных ядер. Ред. Перфилов Н.А., Эйсмонт В.П. М.: Госатомиздат, 1962, с.203.
33. **Alexander J., Baltzinger C., Gasdik M.F.** — Phys. Rev., 1963, v.129, p.1826.
34. **Горшков И.Ю., Дьяченко А.Т., Прокофьев А.В. и др.** — Известия РАН, сер. физ., 1993, т.57, с.172.
35. **Meadows J.W.** — Phys. Rev., 1958, v.110, p.1109.
36. **Kowalski L.** — Ann. de Phys. (Paris), 13 ser., 1964, v.9, p.211.
37. **Panontin J.A., Sugarman N.** — High Energy Fission of ^{181}Ta and ^{209}Bi by 450 MeV Protons. COO-1167-16, EFINS-71-21, Chicago Univ.
38. **Обухов А.И.** — Диссертация. Радиевый ин-т им. В.Г.Хлопина, Ленинград, 1963.
39. **Remsberg L.P., Plasil F., Cumming J.B., Perlman M.L.** — Phys. Rev., 1969, v.187, p.1597.
40. **Stephan C., Maury F., Peter J., Langevin-Joliot H.** — Annuaire 1965, Institut de Phys. Nucl., Facultes des Sciences de Paris et d'Orsay, p.13; **Stephan C.** — Theses, Docteur es Sci., Univ. de Paris, Orsay, 1965.
41. **Remsberg L.P., Plasil F., Cumming J.B., Perlman M.L.** — Phys. Rev., 1970, v.C1, p.265.
42. **Бычеков В.С., Перфилов Н.А.** — ЯФ, 1967, т.5, с.264.
43. **Saint-Laurent F., Conjeaud M., Dayras R. et al.** — Nucl. Phys., 1984, v.A422, p.307.
44. **Шингаев О.Е., Бычеков В.С., Ломанов М.Ф. и др.** — ЯФ, 1978, т.27, с.1424.
45. **Steiner H.M., Jungerman J.A.** — Phys. Rev., 1956, v.101, p.810.
46. **Stevenson P.S., Hicks H.G., Nervik W.E.** — Phys. Rev., 1958, v.111, p.886.
47. **Иванова Н.С.** — ЖЭТФ, 1956, т.31, с.413.
48. **Коньшин В.А., Матусевич Е.С., Регушевский В.И.** — ЯФ, 1965, т.2, с.682.
49. **Матусевич Е.С., Регушевский В.И.** — ЯФ, 1968, т.7, с.1187.
50. **Hudis J., Katcoff S.** — Phys. Rev., 1969, v.180, p.1122.
51. **Brandt R., Carbonara F., Cieslack E. et al.** — Revue de Physique Appliquee, 1972, v.7, p.243.
52. **Hudis J., Katcoff S.** — Phys. Rev., 1976, v.C13, p.1961.
53. **Remy G., Ralarosy J., Stein R. et al.** — Nucl. Phys., 1971, v.A163, p.583.

54. Fleischer R.L., Price P.B., Walker R.M. — J. Appl. Phys., 1965, v.36, p.3645.
55. Николаев В.А., Перельгин В.П. — ПТЭ, 1976, №2, с.7.
56. Шигаев О.Е., Быченков В.С., Ломанов М.Ф. и др. — Препринт Радиевого института им. В.Г.Хлопина, РИ-17, Л., 1973.
57. Бочагов Б.А., Быченков В.С., Дмитриев В.Д. и др. — ЯФ, 1978, т.28, с.572.
58. Быченков В.С., Ломанов М.Ф., Обухов А.И. и др. — Энергетическая зависимость сечений деления ядер при облучении ^{238}U , ^{235}U , ^{232}Th , ^{209}Bi , $^{208,207,206}\text{Pb}$, ^{197}Au протонами промежуточных энергий. В сб.: Труды Межд. конф. «Деление ядер—50 лет», ред. Л.В. Драгчинский, 1989, т.2, с.165.
59. Smirnov A.N., Gorshkov I.Yu., Prokofiev A.V., Eismont V.P. — In: Proc. 21st Int. Symp. on Nuclear Physics. Castle Gaussia, Germany, Nov. 4–8, 1991, p.214.
60. Eismont V.P., Prokofiev A.V., Smirnov A.N. — In: Proc. of Int. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, Gatlinburg, USA, May 9–13, 1994, v.1, p.397.
61. Obukhov A.I., Eismont V.P. — In: Proc. XIII Meeting on Physics of Nuclear Fission in the Memory of Prof. G.N. Smirenkin, Obninsk, 3–6 October 1995. Ed. by Prof. B.D.Kuzminov, SSCRF-IPPE, 1995, p.145.
62. Lisowski P.W., Gavron A., Parker W.E. et al. — In: Proc. of a Specialists Meeting on Neutron Cross Section Standards for the Energy Region above 20 MeV, Uppsala, Sweden, 1991, NEANDC-305/U. Ed. by H.Conde, p.177.
63. Prael R.E. — Ref. 13 in [62].
64. Alsmiller F.S., Alsmiller R.G. (Jr.), Gabriel T.A. et al. — Nucl. Sci. Eng., 1981, v.79, p.147.
65. Барашенков В.С. — Сечения взаимодействия частиц и ядер с ядрами. Дубна: ОИЯИ, 1993; Сообщение ОИЯИ Р2-89-770, Дубна, 1989.
66. Boyce J.C., Hayward T.D., Bass R. et al. — Phys. Rev., 1974, v.C10, p.231.
67. Перфилов Н.А., Даровских В.Ф., Денисенко Г.Ф., Обухов А.И. — ЖЭТФ, 1960, т.38, с.716.
68. Eismont V.P., Obukhov A.I., Prokofyev A.V., Smirnov A.N. — In: Proc. of 2nd Conf. on ADTT, Kalmar, Sweden, June 3–7, 1996. Ed. by H.Conde, p.592.
69. Fukahori T., Pearlstein S. — In: Proc. of the Advisory Group Meeting Organized by IAEA, Vienna, October 9–12, 1990, p.93. INDC (NDS) -245(1991). Ed. N.P.Kocherov.
70. Fukahori T., Chiba S. — The First Internet Symposium on Nuclear Data. Pap. No.09, p.95, JAERI-Conf. 97-004. Eds. T.Fukahori, O.Iwamoto, T.Nakagawa.
71. Prokofiev A.V. — Compilation and Systematics of Proton — Induced Fission Cross Section Data. Submitted to Nucl. Instr. Methods, ser.A., 1998, Dec. (to be published).
72. Mughabghab S.F., Divadeenam M., Holden N.E. — Neutron Cross Sections. V.1. Neutron Resonance Parameters and Thermal Cross Sections. Part A: $Z = 1 – 60$. Academic Press, 1981.
73. Mughabghab S.F. — Neutron Cross Sections. V.1. Neutron Resonance Parameters and Thermal Cross Sections. Part B: $Z = 61 – 100$. N.N.D.C. Brookhaven Nation. Laboratory, Upton, N.Y., 1984.
74. McLane V., Dunford Ch.L., Rose Ph.F. — Neutron Cross Sections, v.2. Neutron Cross Sections Curves. Academic Press Inc., N.Y., 1988.
75. Shibata K., Nakagawa Ts., Sugano H., Kawasaki H. (Eds). — Curves and Tables of Neutron Cross Sections in JENDL-3.2. Part II. ($Z = 51 – 100$), JAERI Data Code, 97-003 (Part II), Febr. 1997, Japan Atomic Energy Research Institute.

76. Панкратов В.М. — Атомная энергия, 1963, т.14, с.177.
77. Lisowski P.W., Ullmann J.L., Balestrini S.J. et al. — Neutron Induced Fission Cross Section Ratios for ^{232}Th , $^{235,238}\text{U}$, ^{237}Np and ^{239}Pu from 1 to 400 MeV. In: Proc. of the Int. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, May 30–June 3, 1988, Mito, Japan, JAERI, ed. S.Igarasi, p.97.
78. Lisowski P.W., Ullmann J.L., Balestrini S.J. et al. — Neutron Induced Fission Cross Sections for ^{232}Th , $^{235,236}\text{U}$, ^{237}Np and ^{239}Pu . In: Proc. of the Conf. on Fifty Years with Nuclear Fission, Gaithersberg, M.D., 1989, p.443.
79. Lisowski P.W., Gavron A., Parker W.E. et al. — Fission Cross Section Ratios for $^{233,234,236}\text{U}$ Relative to ^{235}U from 0,5 to 400 MeV. In: Proc. of an Int. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, Julich, Germany, 13–17 May, 1991. Ed. S.M. Qaim. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992, p.732.
80. Carlson A.D., Wasson O.A., Lisowski P.W. et al. — Measurements of the $^{235}\text{U}(n, f)$ Cross Section in the 3 to 30 MeV Neutron Energy Region. In: Proc. of the Conf. on Fifty Years with Nuclear Fission, Gaithersberg, M.D., 1989, p.518.
81. Fomichev A.V., Tuboltseva I.V., Donets A.Yu. et al. — Measurement of Neutron Induced Fission Cross Section Ratios for ^{235}U , ^{238}U and ^{232}Th from 1 to 100 MeV. In: Proc. of the Int. Conf. on Nucl. Data for Science and Technology, Julich, Germany. May 13–17, 1991, p.734, ed. S.M.Qaim.
82. Fomichev A.V., Shcherbakov O.A., Petrov G.A., Laptev A.B. — Fission Cross Section Ratios for ^{232}Th , ^{238}U and ^{237}Np Relative to ^{235}U from 1 MeV to 200 MeV. In: Proc. of the Int. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, May 19–24, 1997, Trieste, Italy, v.59, p.1522.
83. Staples P., Morley K. — Nucl. Sci. Eng., 1998, v.129, p.149.
84. Eismont V.P., Prokofiev A.V., Smirnov A.N., Elmgren K. et al. — Measurements of Neutron — Induced Fission Cross Sections of Heavy Nuclei in the Intermediate Energy Region. In: Proc. of the Second Int. Conf. on Accelerator-Driven Transmutation Technologies and Applications, June 3–7, 1996, Kalmar, Sweden, v.2, p.606.
85. Eismont V.P., Prokofiev A.V., Smirnov A.N. et al. — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.2911.
86. Eismont V.P., Prokofiev A.V., Smirnov A.N. et al. — Neutron — Induced Fission Cross Sections of ^{nat}Pb and ^{197}Au in the 45–180 MeV Energy Region. In: Proc. Int. Conf. on Accelerator- Driven Transmutation Technologies and Applications, Praha, Czech Republic, June 7–11, 1999 (CD ROM publication, paper M 0-0-C8).
87. Eismont V.P., Prokofiev A.V., Ryzhov I.V. et al. — Up-to-Date Status and Problems of the Experimental Nucleon — Induced Fission Cross Section Data Base at Intermediate Energies. In: Proc. Int. Conf. on Accelerator-Driven Transmutation Technologies and Applications, Praha, Czech Republic, June 7–11, 1999 (CD ROM publication, paper P-23).
88. Eismont V.P., Korobkin A.P., Prokofiev A.V. et al. — Neutron-Induced Fission Cross Section Measurement for ^{232}Th , ^{235}U and ^{238}U in the Intermediate Energy Region. In: Proc. of the Int. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, Trieste, Italy, May 19–24, 1997, v.1, p.434.
89. Newhauser W.D., Brede H.J., Dangendorf V. et al. — In: Proc. of the Intern. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, Trieste, Italy, May 19–24, 1997, v.59, part 2, p.1236.
90. Carlson A.D., Chiba S., Hambach F.J., Olssen N., Smirnov A.N. — Update to Nuclear Data Standards for Nuclear Measurements-Summary Report of A Consultants' Meeting. Vienna, Austria, 2–6 Decem. 1996. Edit. by H.Wienke, INDC(NDS)-368, May 1997; Proc. of the Intern. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, May 19–24, 1997, Trieste, Italy, p.1223.

91. **Conde H., Eismont V.P., Elmgren K., Obukhov A.I., Smirnov A.N.** — A Comparison of Proton- and Neutron-Induced Fission Cross Section of Heavy Nuclei at Intermediate Energies. In: Proc. of the Second Int. Conf. on Accelerator-Driven Transmutation Technologies and Applications, June 3–7, 1996, Kalmar, Sweden, v.2, p.599.
92. **Dickinson W.C., Brolley J.E.** — Phys. Rev., 1953, v.90, p.388.
93. **Bohr A.** — On the Theory of Nuclear Fission. In: Proc. Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1956, v.2, p.151.
94. **Halpern I., Strutinski V.M.** — Angular Distributions in Particle-Induced Fission at Medium Energies. In: Proc. of the Second U.N. Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, v.15, p.408.
95. **Coffin C.T., Halpern I.** — Phys. Rev., 1958, v.112, p.536.
96. **Быченков В.С., Ломанов М.Ф., Обухов А.И., Шимчук Г.Г.** — Энергетическая зависимость анизотропии деления ядер при облучении ^{238}U , ^{232}Th , ^{209}Bi , ^{207}Pb , ^{197}Au протонами промежуточных энергий. В сб.: Труды Межд. конф. «Деление ядер — 50 лет», Радиевый институт им. В.Г.Хлопина, Ленинград, 16–20 октября 1989 г., ред. Л.В.Драпчинский, т.1, с.469.
97. **Быченков В.С., Дмитриев В.Д., Обухов А.И. и др.** — ЯФ, 1979, т.30, с.30.
98. **Crespo V.P., Cumming J.B., Poskanzer A.M.** — Phys. Rev., 1968, v.174, p.1455.
99. **Игнатюк А.В., Иткис М.Г., Околович В.Н. и др.** — ЯФ, 1977, т.25, с.25.
100. **Moretto L.G., Gatti R.C., Thompson S.G. et al.** — Phys. Rev., 1969, v.178, p.1845.
101. **Cohen S., Swiatecki W.J.** — Ann. of Phys., 1963, v.22, p.406.
102. **Myers W.D., Swiatecki W.J.** — Nuclear Masses and Deformations-UCRL -11980, 1965, USA.
103. **Porile N.T., Pandian S., Klonk H. et al.** — Phys. Rev., 1979, v.C19, p.1832.
104. **Fulmer C.B.** — Phys. Rev., 1959, v.116, p.418.
105. **Fraenkel Z., Breskin A., Checnik R. et al.** — Phys. Rev., 1990, v.C41, p.1050.
106. **Vallinder U.L., Tyren H.** — Nucl. Phys., 1959, v.15, p.152.
107. **Быченков В.С., Ломанов М.Ф., Обухов А.И. и др.** — ЯФ, 1973, т.17, с.947.
108. **De Carvalho H.G. et al.** — Nuovo Cim., 1962, v.25, p.886.
109. **Обухов А.И., Перфилов Н.А.** — ЖЭТФ, 1961, т.40, с.1250.
110. **Жукова О.А. и др.** — ЯФ, 1977, т.26, с.473.
111. **Barjon R., Engelhardt D., Gravost M. et al.** — J. de Phys., 1970, v.31, Coll. C2, p.213.
112. **Gadioly E., Iori I., Molho N., Zetta L.** — Lett. Nuovo Cim., 1969, v.2, p.904.
113. **Wolke R.L., Gutman J.R.** — Phys. Rev., 1957, v.107, p.85.
114. **Иткис М.Г., Мульгин С.И., Каменев И.А. и др.** — Препринт ИЯИ АН УССР, 1982, КИЯИ-82-13, с.8–11.
115. **Natowitz J.B., Chulick E.T.** — Nucl. Phys., 1971, v.A172, p.185.
116. **Каменев И.А.** — Автореф. дисс., ИЯФ КазССР, Алма-Ата, 1986.
117. **Перфилов Н.А., Обухов А.И., Шигаев О.Е., Дмитриев В.Д.** — ЯФ, 1974, т.20, с.270.
118. **Дмитриев В.Д., Обухов А.И., Перфилов Н.А., Шигаев О.Е.** — ЯФ, 1977, т.26, с.956.
119. **Huizenga J.R., Vandenbosh R.** — In: Nucl. Reactions. Ed. by P.M.Endt, P.B.Smith, Amsterdam, 1962, v.2, p.42. Пер. с англ. в сб.: Ядерные реакции. М.: Атомиздат, 1964, т.2, с.51.

-
120. **Perry D.G., Fairhall A.W.** — Phys. Rev., 1971, v.C4, p.977.
121. **Околович В.Н.** — Автореф. дисс. Ротапринт ИЯИ АН УССР, Киев, 1977.
122. **Eismont V.P., Kireev A.V., Ryzhov G.A. et al.** — Neutron-Induced Fission Fragment Angular and Kinetic Energy Distribution for ^{209}Bi and ^{238}U at 75 MeV. In: Proc.of the Int. Conf. on Nuclear Data for Science and Technology, Trieste, Italy, May 19–24, 1997, v.59, part 1, p.658.
123. **Gonnenwein F.** — Spectroscopy of Fission Fragments. In: Proc. of the Int. Workshop on High-Resolution Spectroscopy of Fission Fragments, Neutrons, and γ -Rays. Dresden, Germany, Febr. 1–2, 1993. Eds. H.Marten, K.D.Schielling. FZR-Forschungszentrum, Rossendorf, March 1993, FZR 93-08. Also in: Nucl. Phys., 1989, v.A502, p.159.
124. **James M.F., Mills R.W., Weaver D.R.** — A New Evaluation of Fission Product Yields and the Production of a New Library (UKFY2) of Independent and Cumulative Yields. Part 1. Methods and Outline of the Evaluation. AEA-TRS-1015; Progress in Nucl. Energy, 1991, v.26, p.1.
125. **Jensen R.C., Fairhall A.W.** — Phys. Rev., 1958, v.109, p.942.
126. **Иткис М.Г., Околович В.Н., Русанов А.Я., Смиренин Г.Н.** — ЭЧАЯ, 1988, т.19, с.301.
127. **Wilkins B.D., Back B.B., Gindler J.E. et al.** — Phys. Rev., 1984, v.C30, p.1228.
128. **Hoffman D.C.** — Nucl. Phys., 1989, v.A502, p.21.
129. **Glendenin L.E., Gindler J.E., Ahmad I. et al.** — Phys. Rev., 1980, v.C22, p.152.
130. **Croall I.E., Cuninghame J.G.** — Nucl. Phys., 1969, v.A125, p.402.
131. **Sugihara T.T., Roesmer J., Meadows J.W.** — Phys. Rev., 1961, v.121, p.1179.
132. **Plasil F., Ferguson R.L., Pleasonton F., Schmitt H.W.** — Phys. Rev., 1973, v.C7, p.1186.
133. **Ohtsuki T., Hamajima Y., Sueki K. et al.** — Phys. Rev., 1989, v.C40, p.2144.
134. **Ohtsuki T., Nagame Y., Tsukada K. et al.** — Phys. Rev., 1991, v.C44, p.1405.
135. **Nagame Y., Nishinaka I., Tsukada K. et al.** — Radiochimica Acta, 1997, v.78, p.3.
136. **Zoller C.M., Gavron A., Lestone J.P. et al.** — Seminar on Fission «Pont d'Oye III». Castle of Pont d'Oye, Habay-la-Neuve, Belgium, 9–11 May, 1995. EUR 16295 EN.
137. **Jensen R.C., Fairhall A.W.** — Phys. Rev., 1960, v.118, p.771.
138. **Wolke R.L.** — Phys. Rev., 1960, v.120, p.543.
139. **Bowles B.J., Beckett N.** — Phys. Rev., 1966, v.147, p.852.
140. **Konecny E., Schmitt H.W.** — Phys. Rev., 1968, v.172, p.1213.
141. **Vallinder U.L., Pappas A.C.** — J. Inorg. Nucl. Chem., 1961, v.22, p.161.
142. **Neuzil E.F., Apt K.** — J. Inorg. Nucl. Chem., 1969, v.31, p.1571.
143. **Galin J., Lefort M., Peter J. et al.** — Nucl. Phys., 1969, v.A134, p.513.
144. **Лаврухина А.К., Красавина Л.Д.** — АЭ, 1957, т.2, с.27.
145. **Kruger P., Sugarman N.** — Phys. Rev., 1955, v.99, p.1459.
146. **Лаврухина А.К., Красавина Л.Д., Поздняков А.А.** — ДАН СССР, 1958, т.119, с.56.
147. **Лаврухина А.К., Раковский Э.Е., Су Хун-Гуй, Хойнацкий С.** — ДАН СССР, 1961, т.137, с.826.
148. **Котов А.А., Семенчук Г.Г., Андроненко Л.Н. и др.** — ЯФ, 1974, т.20, с.467.
149. **Bachmann K.** — J. Inorg. Nucl. Chem., 1970, v.32, p.1.
150. **Wolfgang R., Baker E.W., Caretto A.A. et al.** — Phys. Rev., 1956, v.103, p.394.

151. **Kaufman S.B., Steinberg E.P.** — Phys. Rev., 1980, v.C22, p.167.
152. **Trabitzsch U., Bachmann K.** — Radiochimica Acta, 1971, v.16, p.15.
153. **Hagebo E., Lund T.** — J. Inorg. Nucl. Chem., 1975, v.37, p.1569.
154. **Beg K., Porile N.T.** — Phys. Rev., 1971, v.C3, p.1631.
155. **Scheidemann O., Porile N.T.** — Phys. Rev., 1976, v.C14, p.1534.
156. **Kaufman S.B., Weisfield M.W.** — Phys. Rev., 1975, v.C11, p.1258.
157. **Biswas S., Porile N.T.** — Phys. Rev., 1979, v.C20, p.1467.
158. **Pandian S., Porile N.T.** — Phys. Rev., 1981, v.C23, p.427.
159. **Fortney D.R., Porile N.T.** — Phys. Lett., 1978, v.B76, p.553.
160. **Porile N.T., Fortney D.R., Pandian S. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1979, v.43, p.918.
161. **Moreau J., Hende K.** — In: [5], Chapter 7, p.227.
162. **Mayer M.G.** — Phys. Rev., 1948, v.74, p.235.
163. **Meitner L.** — Nature, 1950, v.165, p.561.
164. **Curie D.** — Compt. Rend., 1953, v.237, p.1401.
165. **Goeckermann R.H., Perlman I.** — Phys. Rev., 1949, v.76, p.628.
166. **Turkevich A., Niday J.B.** — Phys. Rev., 1951, v.84, p.52.
167. **Fairhall A.W., Jensen R.C., Neuzil E.F.** — In: Proc. of the Second U.N. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, v.15, p.452.
168. **Present R.D., Reines F., Knipp J.K.** — Phys. Rev., 1946, v.70, p.557.
169. **Струтинский В.М., Лященко Н.Я., Попов Н.А.** — ЖЭТФ, 1962, т.43, с.584.
170. **Струтинский В.М.** — ЖЭТФ, 1963, т.45, с.1891; 1900.
171. **Nix J.R., Swiatecki W.R.** — Nucl. Phys., 1965, v.71, p.1;
Nix J.R. — Nucl. Phys., 1969, v.A130, p.241.
172. **Andronenko L.N., Kotov A.A., Nesterov M.M. et al.** — Z. Phys., 1984, v.A318, p.97.
173. **Fong P.** — Phys. Rev., 1978, v.C17, p.1731; Statistical Theory of Fission. Gordon and Breach, N.Y., 1969.
174. **Pashkevich V.V.** — Nucl. Phys., 1971, v.A169, p.275.
175. **Brosa U., Grossmann S., Müller A.** — Z. Phys., 1983, v.A310, p.177.
176. **Brosa U., Grossmann S., Müller A.** — Phys. Rep., 1990, v.197, p.167.
177. **Pashkevich V.V.** — Nucl. Phys., 1988, v.A477, p.1.
178. **Starzyk P.M., Sugarman N.** — Phys. Rev., 1973, v.C8, p.1448.
179. **Sauvagenon H.** — Z. Phys., 1987, v.A326, p.301.
180. **Gloris M., Michel R., Sudbrock F. et al.** — Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A. (to be published).
181. **Wahl A.C.** — J. Radioanal. Chem., 1980, v.55, p.111; Atomic Data and Nucl. Data Tables, 1988, v.39, p.1.
182. **Denschlag H.O.** — Nucl. Sci. Eng., 1986, v.94, p.337.
183. **Wahl A.C.** — Mass and Charge Distribution in Low Energy Fission. In: Proc. Symp. on Physics and Chemistry of Fission, Salzburg, 22–26 March 1965, IAEA. Vienna, 1965, v.1, p.317.
184. **Pate B.D., Foster J.S., Yaffe L.** — Canad. J. Chem., 1958, v.36, p.1691, 1707.

-
185. **Coryell C.D., Kaplan M., Fink R.D.** — Canad. J. Chem., 1961, v.39, p.646.
186. **Colby L.J., Cobble J.W.** — Phys. Rev., 1961, v.121, p.1410;
Wogman N.A., Powers J.A., Cobble J.W. — Phys. Rev., 1966, v.152, p.1088.
187. **Rudstam G., Pappas A.C.** — Nucl. Phys., 1961, v.22, p.468.
188. **Umezawa H.** — J. Inorg. Nucl. Chem., 1971, v.33, p.2731.
189. **Pappas A.C., Alstad J.** — J. Inorg. Nucl. Chem., 1961, v.17, p.195;
Hagebo E., Pappas A.C., Aagaard P. — J. Inorg. Nucl. Chem., 1964, v.26, p.1639.
190. **Khan A.H., Saha G.B., Yaffe L.** — Can. J. Chem., 1968, v.46, p.3565.
191. **Goeckermann R.H., Perlmann I.** — Phys. Rev., 1948, v.73, p.1127.
192. **Lisman F.L., Brandhorst H.W., Cobble J.W.** — Phys. Rev., 1965, v.B140, p.863.
193. **Lindner M., Osborne R.N.** — Phys. Rev., 1954, v.94, p.1323.
194. **Folger R.L., Stevenson P.C., Seaborg G.T.** — Phys. Rev., 1955, v.98, p.107.
195. **Friedlander G., Friedmann L., Gordon B., Yaffe L.** — Phys. Rev., 1963, v.129, p.1809.
196. **Kaufman S.B.** — Phys. Rev., 1963, v.129, p.1866.
197. **Беляев Б.Н., Домкин В.Д., Мухин В.С.** — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.993.
198. **Андроненко Л.Н., Синогеев И.Н., Солякин Г.Е. и др.** — Препринт ЛИЯФ АН СССР, № 375, 1977.
199. **Frisch O.R.** — Nature, 1939, v.143, p.276.
200. **Hambach F.-J.** — In: Proc. of the Int. Workshop on High-Resolution Spectroscopy of Fission Fragments, Neutrons, and γ -Rays. Dresden, Germany, Febr. 1–2, 1993. Eds. H.Märten, K.D.Schielling. FZR 93-08; p.17;
Budtz-Jorgensen C., Knitter H.-H., Straede Ch. et al. — Nucl. Instr. Meth., 1987, v.A258, p.209.
201. **Brandt R., Thompson S.G., Gatti R.C., Phillips L.** — Phys. Rev., 1963, v.131, p.2617.
202. **Milton J.C.D., Fraser J.S.** — In: Proc. of the Second U.N.Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva, 1958, v.15, p.216.
203. **Whetstone S.L.** — Phys. Rev., 1963, v.131, p.1232.
204. **Stein W.E.** — Phys. Rev., 1957, v.108, p.94.
205. **Milton J.C.D., Fraser J.S.** — Canad. J. Phys., 1962, v.40, p.1625.
206. **Протопопов А.Н., Баранов И.А., Селицкий Ю.А., Эйсмонт В.П.** — ЖЭТФ, 1959, т.36, с.1932; ЖЭТФ, 1960, т.38, с.384.
207. **Коваленко С.С., Петржак К.А., Adamov B.M.** — АЭ, 1962, т.13, с.474; АЭ, 1963, т.15, с.320.
208. **Whetstone S.L.** — Phys. Rev., 1964, v.B133, p.613.
209. **Konechny E., Norenberg W., Schmitt H.W.** — Nucl. Phys., 1969, v.A139, p.513.
210. **Дьяченко П.П., Кузьминов Б.Д., Куцаева Л.С. и др.** — ЖЭТФ, 1963, т.45, с.8.
211. **Дьяченко П.П., Кузьминов Б.Д.** — Многопараметровые исследования осколков при делении ядер быстрыми нейтронами. In: Proc. of the Symp. on Physics and Chemistry of Fission, Salzburg, 22–26 March 1965, IAEA, Vienna, 1965, v.1, p.601.
212. **Britt H.C., Wegner H.E., Gursky J.C.** — Phys. Rev., 1963, v.129, p.2239.
213. **Unik J.P., Huizenga J.R.** — Phys. Rev., 1964, v.B134, p.90.

214. **Fong P.** — Phys. Rev., 1964, v.135, p.1338.
215. **Vandenbosch R.** — Nucl. Phys., 1963, v.46, p.129.
216. **Селицкий Ю.А., Эйсмонт В.П.** — ЖЭТФ, 1962, т.43, с.1005.
217. **Комар А.П., Бочагов Б.А., Фадеев В.И.** — ДАН СССР, 1963, т.152, с.858.
218. **Немилов Ю.А., Павлов В.В., Селицкий Ю.А. и др.** — ЯФ, 1965, т.1, с.633.
219. **Thierens H., De Clercq A., Jacobs E. et al.** — Phys. Rev., 1981, v.C23, p.2104.
220. **Knitter H.-H., Hambisch F.J., Budtz-Jorgensen C., Theobald J.P.** — Z. Naturforsch, 1987, v.42a, p.786.
221. **Околович В.Н., Смирекин Г.Н.** — АЭ, 1964, т.16, с.521.
222. **Баранов И.А., Протопопов А.Н., Эйсмонт В.П.** — АЭ, 1962, т.12, с.150.
223. **Jüngerman J., Wright S.C.** — Phys. Rev., 1949, v.76, p.1112.
224. **Viola V.E., Kwiatkowski K., Walker M.** — Phys. Rev., 1985, v.C31, p.1550.
225. **Wagemans C.** — In: [5], Chap. 12, p.580.
226. **Mutterer M., Theobald J.P.** — In: Handbook of Nuclear Decay Modes, D.N.Poenaru and W.Greiner (Ed-s), CRC Press, Boca Raton, Fl, USA, 1994.
227. **Terrell J.** — In: Proc. of the Symp. on Physics and Chemistry of Fission. Salzburg, 22–26 March 1965, IAEA, Vienna, 1965, v.2, p.3.
228. **Madland D.G., Nix J.R.** — Nucl. Sci. Eng., 1982, v.81, p.213.
229. **Knitter H.-H., Brosa U., Budtz-Jorgensen C.** — In: [5], Chapter 11, p.497.
230. **Malinovski V.V., Tarasko M.Z., Kuzminov B.D.** — Radiat. Effects, 1986, v.96, p.131.
231. **Howe R.E.** — Nucl. Sci. Eng., 1984, v.86, p.157.
232. **England T.R., Wilson W.B., Scheuter R.E., Mann F.M.** — Nucl. Sci. Eng., 1983, v.85, p.139.
233. **Harding G.N.** — In: Proc. Phys. Soc. (London), 1956, v.A69, p.330.
234. **Harding G.N., Farley F.J.M.** — In: Proc. Phys. Soc. (London), 1956, v.A69, p.853.
235. **Skyrme D.M., Harding G.N.** — Nuovo Cim., 1958, v.9, p.1082.
236. **Cheifetz E., Fraenkel Z., Galin J. et al.** — Phys. Rev., 1970, v.C2, p.256.
237. **Эйсмонт В.П.** — АЭ, 1965, т.19, с.113.
238. **Batenkov O., Elmgren K., Majorov M. et al.** — Nucl. Instr. Meth., 1997, v.A394, p.235.
239. **Milton J.C.D., Fraser J.S.** — In: Proc. of the Symp. on Physics and Chemistry of Fission, Salzburg, 22–26 March 1965, IAEA, Vienna, 1965, v.2, p.39.
240. **Whetstone S.L.** — Phys. Rev., 1959, v.114, p.581.
241. **Bowman H.R., Thompson S.G., Milton J.C.D., Swiatecki W.J.** — Phys. Rev., 1963, v.129, p.2133.
242. **Апалин В.Ф., Грицюк Ю.Н., Кутиков И.Е. и др.** — АЭ, 1960, т.8, с.15; ЯФ, 1965, т.1, с.639.
243. **Schmitt H.W., Konechny E.** — Phys. Rev. Lett., 1966, v.16, p.1008.
244. **Gayer A., Fraenkel Z.** — Phys. Rev., 1977, v.C16, p.1077.
245. **Brosa U.** — Phys. Rev., 1988, v.C38, p.1944.
246. **Galin J., Lefort M., Peter J. et al.** — In: Annuaire 1967–1968, Institut de Physique Nucleaire. Fac. des Sciences de Paris et D'Orsay, I.P.N.B.P. n.1, 91-ORSAY.

247. **Блинов М.В., Эйсмонт В.П.** — ЖЭТФ, 1962, т.42, с.180.
248. **Terrell J.** — Phys. Rev., 1962, v.27, p.880.
249. **Иванова Н.С., Пьянов И.И.** — ЖЭТФ, 1956, т.31, с.416.
250. **Жданов А.А., Обухов А.И., Солякин Г.Е.** — ЯФ, 1994, т.57, с.1210.
251. **Перфилов Н.А.** — В сб.: Физика деления атомных ядер. Ред. Н.А.Перфилов, В.П.Эйсмонт. М.: Госатомиздат, 1962, с.175.
252. **Ledoux X., Bohlen H.G., Cugnon H. et al.** — Phys. Rev., 1998, v.C57, p.2375.
253. **Atchison F.** — A Revised Calculational Model for Fission-1998, PSI Bericht, Nr.98-12, p.111.

УДК 539.1.074

ОДНОКРИСТАЛЬНАЯ СЦИНТИЛЯЦИОННАЯ ВРЕМЕННАЯ СПЕКТРОМЕТРИЯ

B.A. Морозов, H.B. Морозова

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре подведены итоги развития методики однодетекторной временной спектрометрии для исследования короткоживущих изомерных и основных состояний радиоактивных атомов вnano- и микросекундном диапазоне. Отличительная особенность этой методики заключается в использовании 4π -геометрии измерений, что обеспечивает высокую эффективность регистрации задержанных совпадений. В Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ впервые реализован режим многомерных задержанных совпадений на одном детекторе. Трехмерный режим $E1 - T - E2$ позволяет помимо временного спектра регистрировать энергетические спектры, которые соответствуют переходам, заряжающим и разряжающим изомерные состояния. Дальнейшее развитие этой методики привело к созданию двухдетекторного четырехмерного спектрометра тройных совпадений, что продемонстрировало возможность эффективного применения автокорреляционного однокристального временного спектрометра для поиска изомерных состояний ядер при включении его в конфигурацию спектрометра «crystal ball». При этом для исследования ядер, имеющих изомерные состояния, отпадает необходимость применения низкоэффективного лазерного ионного источника в масс-сепараторе, что особенно важно при исследовании короткоживущих ядер в «on-line»-экспериментах. Диапазон времен жизни, доступных для изучения однодетекторными спектрометрами задержанных совпадений, простирается от 4 нс до 100 с. Создан набор калибровочных источников задержанных совпадений, перекрывающий временной диапазон от 4 нс до 4 мкс и энергетический диапазон, начинающийся с 10 кэВ. Так как низкоэнергетические переходы перекрываются с энергетическим спектром послеимпульсов ФЭУ, то было проведено изучение амплитудно-временных характеристик послеимпульсов для некоторых типов фотомузжителей.

Development of the single-detector time spectrometry procedure for investigation of short-lived isomeric and ground states of radioactive atoms in the nano- and microsecond range is summed up. A distinctive feature of the procedure is measurement in the 4π -geometry, which ensures a high recording efficiency for delayed coincidences. The mode of multidimensional delayed coincidences in one detector was first implemented at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR. The three-dimensional $E1 - T - E2$ mode allows energy spectra corresponding to transitions exciting and de-exciting isomeric states to be recorded in addition to the time spectrum. Further development of this technique resulted in construction of a two-detector four-dimensional triple-coincidence spectrometer and thus demonstrated that the autocorrelation single-crystal time spectrometer, when included in the «Crystal Ball» configuration, can be effectively used to search for nuclear isomeric states. It becomes possible to investigate nuclei that have isomeric states without a low-efficiency laser ion source in the mass-separator, which is particularly important for investigation of short-lived nuclei in on-line experiments. The life-times accessible for single-detector delayed-coincidence spectrometers range from 4 ns to 100 s. A set of calibration sources of delayed coincidences for the time range from 4 ns to 4 μ s and for energies from 10 keV is developed. Since the low-energy transition overlap the energy spectrum of photomultiplier afterpulsing, the amplitude-time characteristics of afterpulsing were studied for some types of photomultipliers.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение временной корреляции между моментом образования возбужденного состояния в ядре и моментом его распада является одним из наиболее эффективных методов изучения строения ядра. Определение времен жизни основных и возбужденных состояний ядер дает возможность установить границу стабильности ядер и природу этих состояний. Сравнение приведенных вероятностей переходов определенной мультипольности с расчетами в рамках различных моделей ядра позволяет определить применимость той или другой модели к рассматриваемому кругу ядер и состояний. Таким образом, выявление изомерных состояний и установление их природы дает возможность определения широкого круга ядерных констант: параметров взаимодействия, электрических и магнитных моментов ядерных состояний и т.д., что способствует развитию теории ядра. Метод однокристальной сцинтилляционной временной спектрометрии (ОСВС) является одним из вариантов метода задержанных совпадений и его характерная особенность заключается в высокой эффективности регистрации совпадений, обусловленной использованием только одного детектора, регистрирующего ядерное излучение в геометрии, которая может достигать 4π . Следствием этого является возможность исследования времен жизни в широком временном интервале — от наносекунд до 100 с — при высоком отношении числа истинных к случайным совпадениям.

1. МЕТОД ЗАДЕРЖАННЫХ СОВПАДЕНИЙ

На начальном этапе исследования радиоактивности использование одного детектора для определения периода полураспада радиоактивных ядер сводилось к изучению функциональной зависимости изменения скорости счета радиоактивного излучения от времени. В методе задержанных совпадений времена жизни возбужденных или основных короткоживущих состояний ядер определяются по временному распределению интервалов времени между моментом возникновения возбужденного состояния и моментом его распада [1–8]. При исследовании радиоактивного распада ядер эти моменты соответствуют времени регистрации излучения, заселяющего и разряжающего изучаемое состояние. При исследовании радиоактивного распада в стандартном спектрометре задержанных совпадений используются, по крайней мере, два детектора ядерного излучения, два дискриминатора или временных формирователя (ВФ), времязамплирудный преобразователь (ВАП), а также ряд других блоков. Принципиальная блок-схема спектрометра приведена на рис. 1. Линейные усилители (ЛУ) и дифференциальные дискриминаторы (ДД) обеспечивают выделение излучения определенной энергии, а медленная схема совпадений (МСС) — регистрацию только отобранных совпадений. Многоканальный анализатор (МКА) обеспечивает регистрацию временных спектров,

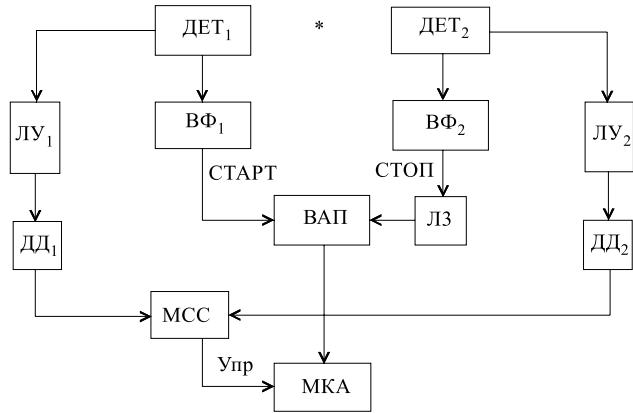


Рис. 1. Блок-схема спектрометра задержанных совпадений

ЛЗ — линия задержки. При изучении мгновенных совпадений разрешающее время МСС не превосходит времени разброса фронтов совпадающих импульсов, а при поиске изомеров оно должно равняться изучаемому временному интервалу.

В измерениях временных интервалов как в наносекундном, так и в микросекундном диапазоне наибольшее распространение получили преобразователи типа СТАРТ–СТОП. Преобразование интервалов времени в электронный сигнал осуществляется или в аналоговой форме с использованием ВАП, амплитуда импульса на выходе которого пропорциональна разности времени срабатывания дискриминаторов СТАРТ и СТОП, или в цифровой форме, когда цифровой код (число импульсов от внутреннего генератора времязадающего преобразователя (ВЦП)) пропорционален исследуемому интервалу времени. Существует также метод прямой регистрации времени появления материнского и дочернего излучения с помощью ЭВМ и вычисления при дальнейшей обработке соответствующего интервала времени. В случае образования возбужденного состояния в ядерной реакции точкой отсчета момента его возникновения (сигнал СТАРТ) может служить импульс синхронизации с ускорителя или прерывателя пучка заряженных или нейтральных частиц.

Установление времени жизни возбужденного состояния ядра τ в методе задержанных совпадений связано с определением постоянной экспоненциального распада λ при анализе плотности вероятности появления запаздывающего излучения в момент времени t после заселения изомерного состояния. Это распределение описывается следующим образом:

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{для } t < 0, \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{для } t > 0, \text{ где } \lambda = 1/\tau. \end{cases} \quad (1)$$

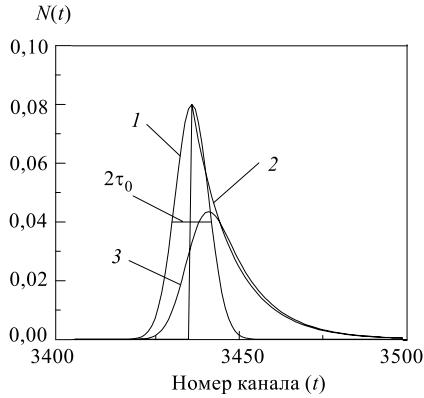


Рис. 2. Вид нормированных распределений мгновенных и задержанных совпадений

лучшения (кривая 2), $F(t)$ — ожидаемое экспериментально измеренное временное распределение (кривая 3). Поэтому при анализе кривой задержанных совпадений (КЗС) необходимо знать аппаратурное временное разрешение спектрометра $2\tau_0$, форму кривой мгновенных совпадений (КМС) и величину фона случайных совпадений. На рис. 2 приведен вид КМС, когда ее форма аппроксимируется нормальным распределением

$$P(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (3)$$

где стандартное отклонение $\sigma = \frac{2\tau_0}{2} \sqrt{2 \ln 2}$ или $2\tau_0 = 2,35\sigma$.

Временное разрешение и форма КМС играют важную роль при определении коротких времен жизни, сравнимых с разрешающим временем спектрометра совпадений $2\tau_0$. Точное знание формы фона случайных совпадений особенно важно при анализе времен жизни уровней при $\tau \gg 2\tau_0$.

Рассматриваемая нами методика измерения времен жизни ограничивается рассмотрением только тех случаев, когда $\tau \gg 2\tau_0$. Поэтому результаты экспериментов будут сведены к анализу временных распределений вида:

$$\begin{aligned} N(t) &= \lambda N_0 e^{-\lambda t} + B, \\ N(t) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i e^{-\lambda_i t} + B \end{aligned} \quad (4)$$

при возбуждении одного или нескольких изомерных состояний в ядре (i — число возбужденных изомерных состояний, B — фоновое распределение).

Период полураспада возбужденного состояния $T_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau = 0,693\tau$. Так как аппаратура имеет конечное временное разрешение, то в результате свертки экспоненциального распределения, характеризующего распад возбужденного состояния, вид кривой видоизменяется, как показано на рис. 2 и как следует из выражения (1):

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') P(t - t') dt', \quad (2)$$

Заметим, что мы не рассматриваем такой вариант однодетекторного временного спектрометра, в котором используется корреляционный метод для определения времени жизни, основанный на анализе статистических свойств скоростей счета излучений, заселяющих и разряжающих изомерное состояние и зависящих от наличия временной корреляции между этими событиями [9, 10]:

$$\begin{aligned} F(t) &= \overline{md} - \overline{m}\overline{d}, \\ F_n(t) &= \frac{1}{n} \sum m_i d_i - \frac{1}{n^2} \sum m_i \sum d_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где m_i — скорость счета материнской активности, d_i — скорость счета дочерней активности, n — число серий измерений.

2. ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА ОДНОКРИСТАЛЬНОЙ СЦИНТИЛЛЯЦИОННОЙ ВРЕМЕННОЙ СПЕКТРОМЕТРИИ

Вопросы, которые встают при использовании ОСВС, связаны с необходимостью установления предела измеряемых коротких времен жизни, эффективности регистрации совпадений и установления нижнего порога регистрацией энергий. Применение однокристального временного спектрометра задержанных совпадений (ОСВ) предполагает последовательную регистрацию излучений, заряжающих и разряжающих исследуемое состояние, одним детектором. В качестве детекторов могут быть использованы практически любые виды электронных детекторов ядерного излучения, позволяющие обеспечить геометрию измерений вплоть до 4π и достаточно высокую эффективность регистрации излучения. Могут быть применены сцинтилляционные неорганические кристаллы с колодцем, пластмассовые сцинтилляторы с внедренными радиоактивными изотопами или полупроводниковые детекторы, чувствительный объем которых содержит радиоактивные изотопы. Естественно встает вопрос о предельно коротком и предельно большом времени жизни состояния, которое можно измерить подобным методом. Ответ на этот вопрос можно получить как в качественном, так и в количественном виде. Качественную информацию о временах жизни уровней можно получить из анализа энергетических спектров сумм, получаемых, например, в спектрометрах полного поглощения на основе кристаллов NaI(Tl) большого объема [11] или в полупроводниковых Ge-детекторах с колодцем [12]. Если в спектрах появляются линии, соответствующие сумме каскадных переходов, то можно утверждать, что промежуточное состояние живет меньше, чем время высыпчивания сцинтиллятора или время сбора заряда в ППД. В этом случае время жизни состояния не превышает долей микросекунды. Плохое энергетическое разрешение сцинтилляционных детекторов с пластмассовыми сцинтилляторами, но с малым временем высыпчивания позволяет проводить подобный анализ только

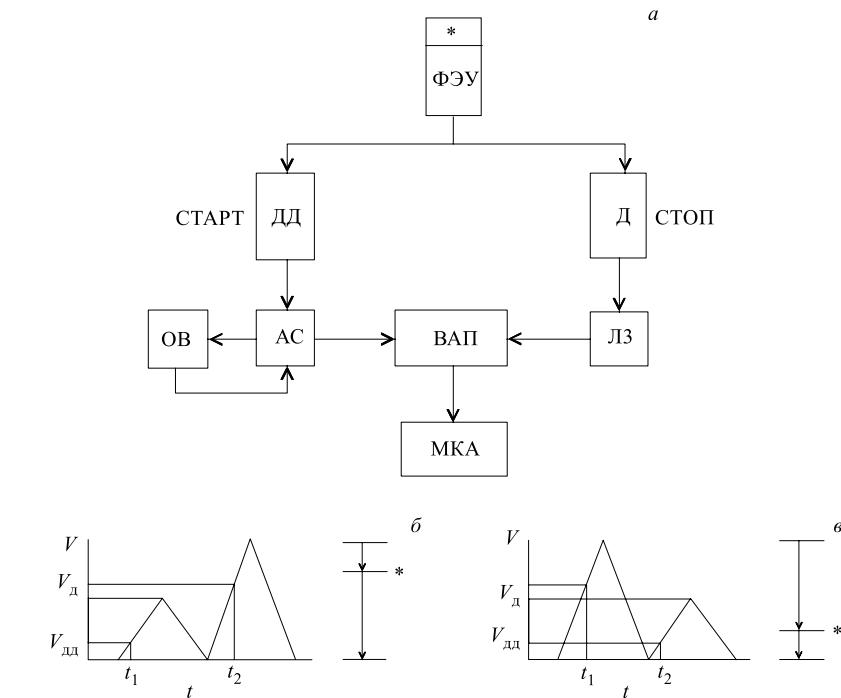


Рис. 3. Блок-схема однокристального временного спектрометра

в случае наличия сильноконвертированных каскадных переходов, заселяющих и разряжающих изомер. Граница оценки времен жизни промежуточных уровней в этом случае понижается до нескольких наносекунд.

Количественную информацию о временах жизни состояний можно получить, изучая интервалы времени, соответствующие зарядке и разрядке изомерных состояний, применяя стандартную схему задержанных совпадений (рис. 3, а). На этом рисунке АС (схема антисовпадений) и ОВ (одновибратор) включены, чтобы уменьшить входную загрузку ВАП по каналу СТАРТ, ДД — дифференциальный и Д — интегральный дискриминаторы, имеющие разные пороги срабатывания и выделяющие переходы, соответствующие сигналам СТАРТ и СТОП, $t_2 - t_1$ характеризует интервал времени между последовательно регистрируемыми импульсами. Возможность определения предельно короткого времени жизни уровня при данной постановке опыта (рис. 3, б) непосредственно связана с длительностью анализируемого импульса. Необходимо иметь в виду, что запаздывающим может быть импульс как с большей, так и с меньшей амплитудой. Очевидно, что корректное определение периода полураспада возможно только при полном разделении во времени импульсов,

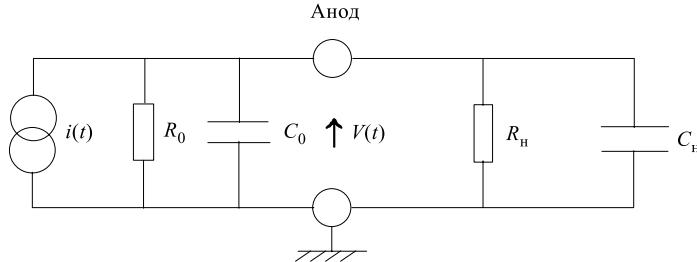


Рис. 4. Эквивалентная схема фотоумножителя

связанных с заселением и разрядкой изомерного состояния. При наложении переднего фронта второго импульса на спад первого импульса измерения также возможны, но ошибка в определении $T_{1/2}$ будет зависеть от максимальной энергии излучения, разряжающего изомерный уровень, и от уровня порога Δ .

В случае, представленном на рис. 3, *в*, при использовании дифференциального дискриминатора ДД, выделяющего низкоэнергетическое излучение, возникает новое ограничение на возможность определения минимального интервала времени. Это ограничение связано с величиной мертвого времени дифференциального дискриминатора.

Для оценки предельно достижимого измеряемого периода полураспада в методе ОСВС были проведены вычисления формы импульса тока (длительности импульса) на выходе ФЭУ при использовании различных сцинтилляторов и фотоумножителей. Эквивалентная схема ФЭУ, являющегося идеальным источником тока, представлена на рис. 4, где R_0 — внутреннее сопротивление ФЭУ ($R_0 > 10^{12}$ Ом) и емкость $C_0 < 10$ пФ, R_h и C_h — нагрузочные сопротивление и емкость на выходе ФЭУ. В расчете была учтена постоянная времени ФЭУ, определяемая как RC , элементами которой являются $R = R_0 R_h / (R_0 + R_h)$ и $C = C_0 + C_h$. Анализ формы импульса тока проводился для $R_h = 50$ Ом и $C = 10$ пФ. Постоянная времени ФЭУ RC была равна в этом случае 0,5 нс. Были рассмотрены три типа фотоумножителей — R7400U, ФЭУ-87 и XP2020Q (табл. 1) и некоторые сцинтилляторы (табл. 2). Временная дисперсия ФЭУ σ определялась из соотношения $t_\phi = 1,2\sigma$, приведенного в работе [13].

Для описания формы импульса тока при засветке ФЭУ бесконечно короткой световой вспышкой можно воспользоваться функцией Гаусса

$$I(t) = \frac{Q}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(t-t_d)^2/2\sigma^2}, \quad (6)$$

где Q — величина заряда, t_d — временной интервал между моментом засветки фотокатода ФЭУ и появлением сигнала на аноде ФЭУ (время пролета

Таблица 1. Временные характеристики фотоумножителей

Тип ФЭУ	Спектральная чувствительность, нм	t_Φ , нс	σ , нс
R7400U	300–650	0,78	0,65
ФЭУ-87	300–600	1,5	1,25
XP2020Q	150–670	1,6	1,33

Таблица 2. Основные характеристики некоторых сцинтилляторов

Тип сцинтиллятора	Относительная конверсионная эффективность	ρ , г/см ³	τ_p , нс	τ_s , нс	Относительная интенсивность f_s	λ_p^* , нм
BC-422Q	0,19	1,032	0,7	—	—	370
BC-422	0,55	1,032	1,6	—	—	370
NE 111	0,55	1,032	1,7	12,5	0,12	375
Стильбен	0,50	1,16	4,5	33	0,11	410
Антрацен	1,00	1,25	30	—	—	447
NaI(Tl)	2,30	3,67	230	—	—	413
CsF	0,22	4,64	2,8	—	—	390
BaF ₂	0,46	4,88	0,6	620	0,80	220
BGO	0,18	7,13	300	—	—	480

* λ_p соответствует максимальной интенсивности быстрой компоненты в спектре вы-
свечивания сцинтиллятора.

электронов). При засветке ФЭУ световыми вспышками от сцинтиллятора со временем высвечивания τ

$$I(t) \sim \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad (7)$$

а так как для большинства сцинтилляторов помимо основной компоненты со временем высвечивания τ обнаружена и вторая компонента с гораздо большим временем высвечивания, то форма импульса тока имеет вид

$$I(t) \sim \frac{f}{\tau_p} e^{-t/\tau_p} + \frac{(1-f)}{\tau_s} e^{-t/\tau_s}, \quad (8)$$

где f характеризует относительную интенсивность быстрой τ_p и $(1-f)$ — медленной τ_s компонент высвечивания сцинтиллятора. Результат свертки экс-

поненциального распада с конечным времененным разрешением ФЭУ приводит к следующему выражению:

$$I(t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-(t-t_d-t')^2/2\sigma^2} \left(\frac{f}{\tau_p} e^{-t'/\tau_p} + \frac{(1-f)}{\tau_s} e^{-t'/\tau_s} \right) dt'. \quad (9)$$

При анализе формы импульсов от быстрых пластмассовых сцинтилляторов учитывалась также постоянная времени ФЭУ $RC = 0,5$ нс. В этом случае форма импульса тока будет определяться сверткой выражения (6) с функцией $e^{-t/RC}$. Выражение (7) преобразуется, соответственно, в выражение

$$I(t) \sim \frac{1}{RC - \tau} \left[e^{(-t/\tau)} - e^{(-t/RC)} \right]. \quad (10)$$

А выражение (8) будет иметь вид

$$\begin{aligned} I(t) = & \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-(t-t_d-t')^2/2\sigma^2} \left(\frac{f}{\tau_p} (e^{-t'/\tau_p} - e^{-t'/RC}) + \right. \\ & \left. + \frac{(1-f)}{\tau_s} (e^{-t'/\tau_s} - e^{-t'/RC}) \right) dt'. \end{aligned} \quad (11)$$

Момент $t = 0$ соответствует времени возбуждения сцинтиллятора. В своих расчетах мы не учитывали время нарастания сцинтилляции, так как время нарастания фронта импульса ФЭУ имеет обычно тот же порядок величины.

Результаты анализа импульсов тока для фотоумножителей R7400U и XP2020Q представлены на рис. 5, 6 и в табл. 3. На этих рисунках представлен временной отклик собственно ФЭУ, отклик ФЭУ с сопротивлением нагрузки и отклик ФЭУ с сопротивлением нагрузки и двумя типами быстрых сцинтилляторов. Так как временная дисперсия фотоумножителей ФЭУ-87 и XP2020Q отличается незначительно, то для них нами были получены сходные результаты, характеризующие длительность импульса тока с выхода ФЭУ.

На рис. 7 приведен вид импульса тока, полученного от неорганического сцинтиллятора BaF_2 , который обладает высокой эффективностью регистрации γ -излучения. Реализация хороших временных свойств этого сцинтиллятора при использовании его в ОВС будет возможна при условии разрядки изомерного состояния более жестким излучением, чем его зарядка. В этом случае влияние медленной компоненты может быть исключено.

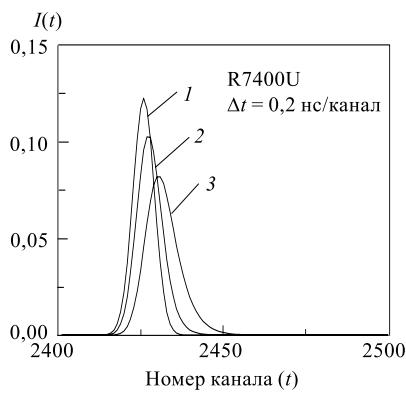


Рис. 5. Форма импульса тока на выходе ФЭУ R7400U при засветке от световой вспышки: 1 — R_0C_0 , 2 — RC и 3 — $RC +$ сцинтиллятор BC-422Q

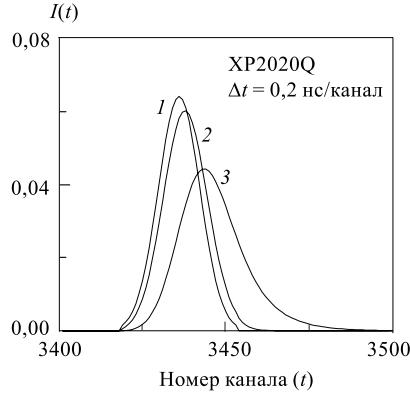


Рис. 6. Форма импульса тока на выходе ФЭУ XP2020Q при засветке от световой вспышки: 1 — R_0C_0 , 2 — RC и 3 — $RC +$ сцинтиллятор BC-422Q

Таблица 3. Длительность импульса тока на выходе ФЭУ

Тип ФЭУ	Тип засветки	$T_{0,5}$, нс	$T_{0,10}$, нс	$T_{0,01}$, нс
R7400U	СД ($R_aC_0^*$)	1,6	2,8	4,0
	СД (RC^*)	1,8	3,4	5,0
	BC-422Q	2,2	4,4	6,6
XP2020Q	NE 111	4	9	23
	Стильбен	6	15	27
	Антрацен	20	69	138
	BaF ₂	3,5	7	>1000
	CsF	4,5	11	18,5
	NaI(Tl)	159	530	>1000

*При засветке ФЭУ бесконечно короткой световой вспышкой от светодиода (СД). $R_a = 1$ Ом.

Проведенные оценки показывают, что для данных фотоумножителей при допущении наложения двух импульсов на уровне 0,1 от полной амплитуды меньшего импульса возможно определение периодов полураспада возбужденных состояний, начиная с 3–4 нс. При этом отношение числа зарегистрированных истинных событий к случайным будет определяться числом периодов полураспада исследуемого состояния, регистрируемых в выбранном времен-

ном интервале. В табл. 1 и 3 представлены данные по малогабаритному фотомультиплексору R7400U фирмы «Hamamatsu» с диаметром фотокатода $d = 9,4$ мм и длиной 11,5 мм, обладающему крутым фронтом импульса и малой временной дисперсией. Использование этих фотомультиплексоров позволяет, в принципе, еще понизить порог регистрации измеряемых времен жизни уровней однокристальным методом, воспользовавшись при этом эффектом Черенкова при прямой регистрации заряженных частиц во входном окне фотокатода ФЭУ или в стеклянном конверторе с большим коэффициентом преломления вместо пластмассового сцинтиллятора. Так

как длительность черенковского излучения не будет превышать время торможения электронов в стекле ($\Delta t < 10$ пс), то световой импульс можно рассматривать как δ -функцию, и импульс тока на выходе ФЭУ будет целиком определяться временной дисперсией ФЭУ и RC -цепочкой, формирующей токовый импульс на выходе ФЭУ. Эта методика может оказаться пригодной для идентификации короткоживущих основных состояний нейтронобытовых ядер, возникающих в ядерных реакциях с малыми сечениями образования и претерпевающих последовательный β^- -распад. На рис. 8 и 9 приведены временные и энергетические спектры, полученные на двухдетекторном сцинтилляционном спектрометре совпадений, которые характеризуют эффективность регистрации черенковского излучения от источника ^{60}Co спектрометром с ФЭУ XP2020Q. В качестве детектирующего материала применялся пластмассовый сцинтиллятор NE111 ($d = 20$ мм, $l = 15$ мм), плексигласовый световод ($d = 30$ мм, $l = 40$ мм) и фотокатод ФЭУ. Видно, что наблюдается эффект регистрации черенковского излучения фотокатодом ФЭУ и плексигласовым световодом, сравнимый с регистрацией излучения пластмассовым сцинтиллятором малого объема.

На рис. 10 приведен пример измерения периода полураспада ^{212}Po ($T_{1/2} = 298$ пс) в 2π -геометрии на сцинтилляционном ОВС с регистрацией черенковского излучения, генерируемого β^- - и α -частицами на стеклянном фотокатоде ФЭУ 56AVP. Источник представляет собой кусочек металлического ^{232}Th с размерами $3 \times 3 \times 0,2$ мм. Несмотря на сильное самопоглощение β^- - и α -частиц в источнике, наблюдаемый эффект весьма значителен (фон случайных совпадений не превышает 6 отсчетов). На этом же рисунке приведен временной спектр, полученный на источнике ^{60}Co в том же интервале

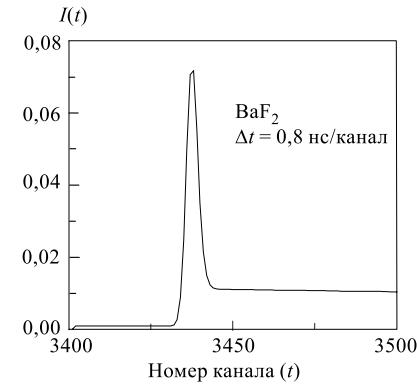


Рис. 7. Форма импульса тока на выходе ФЭУ XP2020Q со сцинтиллятором BaF_2

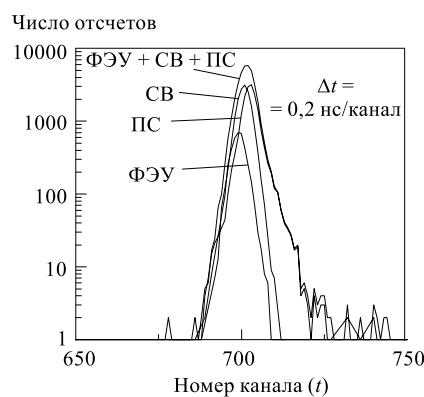


Рис. 8. Временное разрешение ФЭУ XP2020Q при регистрации черенковского излучения входным окном ФЭУ, пластмассовым сцинтиллятором (ПС) и световодом (СВ)

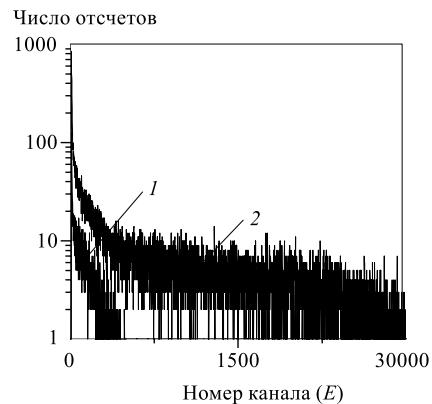


Рис. 9. Энергетический спектр (1) черенковского излучения от фотокатода ФЭУ; спектр комптоновского распределения (2), полученный на источнике ^{60}Co ($\Phi\text{ЭУ} + \text{СВ} + \text{ПС}$)

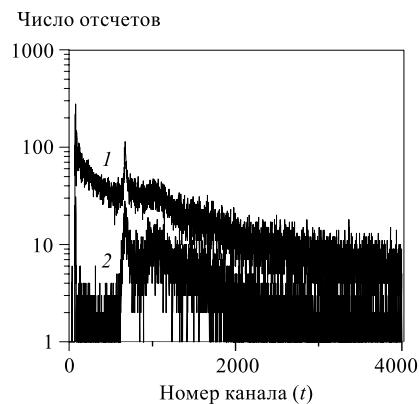


Рис. 10. Временные распределения от источников ^{232}Th и ^{60}Co на ФЭУ: 1 — ^{232}Th ($T_{1/2} = 298 \text{ нс}, ^{212}\text{Po}$); 2 — ^{60}Co , $\Delta t = 0,75 \text{ нс/канал}$

времени и при той же загрузке. Исключительное экспоненциальное распределение тянется до 600 канала, далее на него накладывается спектр послеимпульсов, идентичный спектру на источнике ^{60}Co .

Для каждого варианта метода задержанных совпадений, например, однодетекторного, двухдетекторного и т.д., существует не только нижний предел измеряемых времен жизни, но и верхний, который связан со статистической природой метода совпадений, используемым телесным углом и эффективностью регистрации излучения. Временное распределение истинных совпадений, т.е. соответствующих генетически связанным переходам, за-

селяющим и разряжающим исследуемое состояние, будет определяться выражением

$$N_{\text{ист}}(t) = N_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 f e^{-\lambda t}. \quad (12)$$

Предполагается, что измерения проводятся в геометрии 4π , параметры ε_1 , ε_2 характеризуют эффективности регистрации соответствующих излучений,

f — доля распадов, идущих на изомерное состояние, а N_0 — число радиоактивных ядер. Число случайных совпадений, т.е. совпадений от генетически не связанных переходов, определяется как

$$N_{\text{сл}} = \Delta t N_1 N_2, \quad (13)$$

где Δt — исследуемый временной диапазон, $N_1 = \varepsilon_0 N_0$ (скорость счета импульсов СТАРТ) и $N_2 = \varepsilon_0 N_0 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f)$ (скорость счета импульсов СТОП); ε_0 — полная эффективность регистрации излучения сцинтиллятором. Отношение истинных задержанных совпадений к случайным равно

$$\frac{N_{\text{ист}}}{N_{\text{сл}}} = \frac{f \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\Delta t N_0 \varepsilon_0^2 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f)} \int_0^t e^{-\lambda t} dt. \quad (14)$$

Выбор временного диапазона Δt определяется необходимостью обеспечения 100 % регистрации истинных совпадений и необходимостью определения общего уровня случайных совпадений за пределами временного диапазона зарегистрированных истинных совпадений. Поэтому этот диапазон разумно ограничить пределами, не превышающими 5τ , что будет соответствовать регистрации почти 100 % случаев распада изучаемого состояния. В этом случае отношение

$$\frac{N_{\text{ист}}}{N_{\text{сл}}} = \frac{f \varepsilon_1 \varepsilon_2}{5\tau N_0 \varepsilon_0^2 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f)}. \quad (15)$$

Предполагается, что интенсивность радиоактивного источника N_0 постоянна.

Следует отметить, что распределение случайных совпадений может иметь сложную структуру в зависимости от способов формирования и отбора совпадающих импульсов, загрузочных характеристик электронной аппаратуры и типа применяемого ВАП. В методе задержанных совпадений различают случайные совпадения первого порядка, определяемые выражением (13), и совпадения более высоких порядков, которые обусловлены или повышенными загрузками детекторов, или влиянием разрешающего времени спектрометра в цепях энергетического отбора. Распределение случайных совпадений первого порядка, измеренное с помощью ВАП, работающего по принципу СТАРТ — СТОП, будет постоянным по всему диапазону при выполнении условий

$$N_2 \ll 1/\Delta t. \quad (16)$$

Поэтому проведение измерений времен жизни состояния с $\tau = 100$ мкс потребует применения источника с активностью не более сотни отсчетов в секунду. В тех случаях, когда $N_2 > 1/\Delta t$, распределение случайных совпадений будет носить экспоненциальный характер:

$$N(t) = (N_0 e^{-\lambda t} + N_{\text{сл}}) e^{-N_2 t}. \quad (17)$$

Вопросы формирования спектров случайных совпадений более высоких порядков рассмотрены в работах [14–18].

Возможность использования метода задержанных совпадений для измерения времен жизни уровней в секундном диапазоне вплоть до 100 с была реализована в работах [14, 18] путем применения режима измерений МУЛЬТИСТОП. Таким образом, можно констатировать, что временной диапазон, перекрываемый однокристальным сцинтилляционным временным спектрометром, может простираться от нескольких наносекунд до 100 с.

3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕГИСТРАЦИИ СОВПАДЕНИЙ ОДНОКРИСТАЛЬНЫМ ВРЕМЕННЫМ СПЕКТРОМЕТРОМ

Очевидно, что если эффективность регистрации совпадений двухдетекторным спектрометром постоянна, то эффективность ОСВС зависит от длительности сформированного импульса на выходе ФЭУ и мертвого времени дискриминатора. На рис. 11 приведена диаграмма эффективностей регистрации задержанных совпадений двухдетекторным временным спектрометром (ДВС) (2 π -геометрия для каждого детектора) и сцинтилляционным ОВС в зависимости от t_m , где $t_m = t_{\text{имп}} + t_{\text{диск}}$, $t_{\text{имп}}$ — длительность импульса, а $t_{\text{диск}}$ — мертвое время дискриминатора. На диаграмме приведены значения эффективности регистрации совпадений, соответствующие различным временам жизни состояний. Заметим, что эффективности регистрации совпадений относятся к каскадам переходов одинаковой интенсивности. Также отметим, что реализация 2 π -геометрии для каждого из детекторов двухдетекторного спектрометра в большинстве случаев затруднительна, так что эффективность регистрации совпадений может быть существенно ниже верхнего предела эффективности, равного 0,25 для спектрометра данного типа. Рассматриваемая методика предназначена в основном для поиска изомерных состояний, которые, как правило, заряжаются или разряжаются сильноконвертированными низкоэнергетическими переходами или β -частицами. Эта методика также применима для исследования послеимпульсов в ФЭУ. Основной тип сцинтилляторов, особенно для поиска наносекундных состояний, это пластмассовые

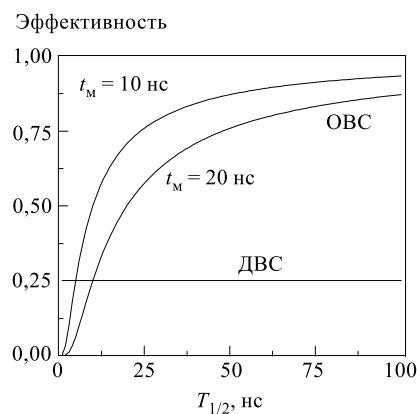


Рис. 11. Эффективность регистрации задержанных совпадений двухдетекторным спектрометром и сцинтилляционным ОВС

сцинтилляторы с малым временем вы- свечивания. Пробеги электронов в таких сцинтилляторах (рис. 12) [19] позволяют обеспечить при толщине сцинтиллятора в несколько миллиметров почти 100% эффективность регистрации заряженных частиц (конверсионных электронов, β -частиц, α -частиц), возникающих при радиоактивном распаде. Сцинтилляционные детекторы позволяют широко варьировать типы и размеры сцинтилляторов для обеспечения высокоэффективной регистрации желаемого вида излучения. Помимо пластмассовых сцинтилляторов при измерениях микросекундных времен жизни состояний используются неорганические сцинтилляторы NaI(Tl) с колодцем, которые обеспечивают высокую эффективность регистрации γ -излучения и лучшее энергетическое разрешение по сравнению с пластмассовыми сцинтилляторами. Использование полупроводниковых детекторов фактически ограничивается применением только поверхностно-барьерных детекторов для измерения микросекундных времен жизни, хотя известен пример измерения времени жизни состояния 56,5 кэВ в ^{74}Ga , который входил в состав Ge-детектора [20].

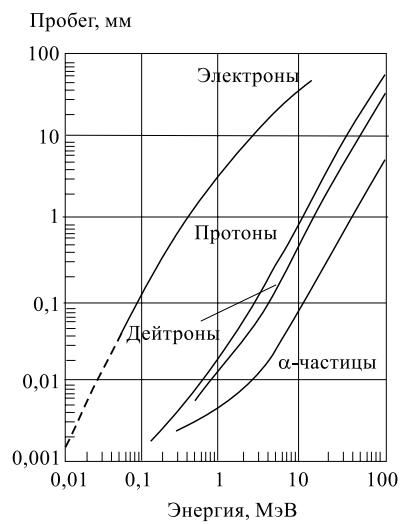


Рис. 12. Пробеги частиц в пластмассовом сцинтилляторе [19]

4. АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ СПЕКТРОВ

Анализ временных спектров может носить качественный и количественный характер. Как уже отмечалось, данная методика характеризуется малым аппаратурным разрешением (менее 100 пс) по сравнению с измеряемыми временами жизни $2\tau_0 \ll \tau$, поэтому при регистрации изомера, соответствующего этой оценке, запаздывающее излучение будет иметь экспоненциальное распределение. Если же при распаде ядра разряжаются несколько изомеров, то временное распределение будет носить иной характер.

Рассмотрим два случая сложного распада.

1. Распад взаимно не связанных состояний (параллельный распад, рис. 13, кривая 1), который описывается выражением, определяющим полную активность соответствующих изомерных ветвей. Предполагаем, что в началь-

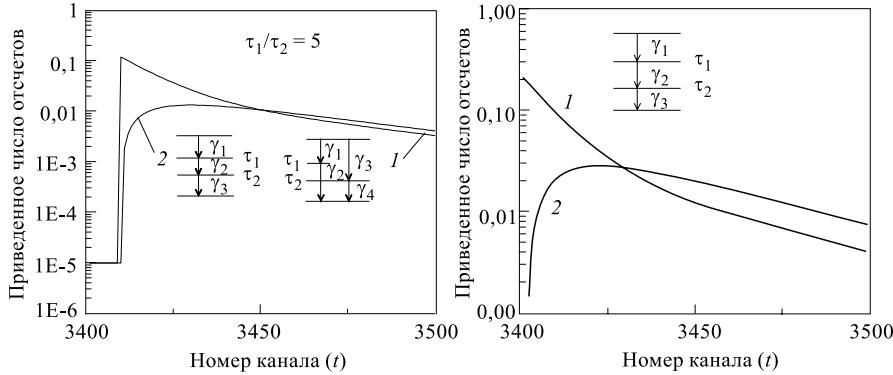


Рис. 13. Временные спектры, полученные по формулам (18) — кривая 1 и (19) — кривая 2

Рис. 14. Временные спектры, полученные по формуле (20): 1 — $\tau_1/\tau_2 = 5$, 2 — $\tau_1/\tau_2 = 0,2$

ный момент времени заселенность изомерных каскадов одна и та же — N_0 и $f_1 = f_2$,

$$F(t) = \frac{N_0 f_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{-t/\tau_1}}{\tau_1} + \frac{N_0 f_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 e^{-t/\tau_2}}{\tau_2}, \quad (18)$$

где τ_1, τ_2 — времена жизни соответствующих состояний. Предполагается, что в канале СТАРТ временного спектрометра регистрируются γ -лучи $E_{\gamma 1}$ и $E_{\gamma 3}$, а в канале СТОП — $E_{\gamma 2}$ и $E_{\gamma 4}$.

2. Распад состояний, связанных последовательными ядерными переходами (последовательный распад, рис. 13, кривая 2). Если при этом в канале СТАРТ регистрируется переход $E_{\gamma 1}$, а в канале СТОП — $E_{\gamma 3}$, то этот процесс описывается следующим выражением:

$$F(t) = \frac{N_0 \varepsilon_1 \varepsilon_3}{\tau_1 - \tau_2} f(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}). \quad (19)$$

Если же при регистрации $E_{\gamma 1}$ в канале СТАРТ $E_{\gamma 2}$ и $E_{\gamma 3}$ регистрируются в канале СТОП, то распад описывается формулой

$$F(t) = \frac{N_0 f}{\tau_1(\tau_1 - \tau_2)} \left[(2\tau_1 - \tau_2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{-t/\tau_2} - \tau_1 \varepsilon_1 \varepsilon_3 e^{-t/\tau_2} \right]. \quad (20)$$

Следует иметь в виду, что данное распределение будет иметь место, если для регистрации временных спектров будет использован мультистопный ВАП типа СТАРТ—СТОП [14]. На рис. 14 приведены два конкретных примера для

отношений τ_1/τ_2 , позволяющих качественно произвести оценку имеющегося вида распада. Реальная картина временного распределения будет зависеть от соотношения τ_1/τ_2 , от интенсивностей каскадов и эффективностей регистрации соответствующих переходов.

Количественное определение времен жизни уровней можно провести, например, с помощью программ POSITRONFIT [21], UPEAK [22] или ряда других, позволяющих разлагать сумму экспоненциальных распределений. В других случаях необходимо провести сортировку временного распределения, производя энергетическую выборку совпадающих излучений, с целью выделения каналов зарядки и разрядки изомерных состояний.

5. ОДНОКРИСТАЛЬНЫЕ СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫЕ ВРЕМЕННЫЕ СПЕКТРОМЕТРЫ

Однокристальные сцинтилляционные временные спектрометры задержанных совпадений можно разделить на два типа: спектрометры быстро-медленных совпадений с предварительным энергетическим отбором излучений, за-селяющих и разряжающих изомерное состояние, и спектрометры, работающие в автокорреляционном режиме, который позволяет исследовать временную зависимость появления импульсов в определенном интервале, после регистрации первого сигнала независимо от энергии поступающих сигналов с проведением последующего энергетического анализа. В качестве временных анализаторов используется, как правило, ВАП типа СТАРТ–СТОП или времязадающие преобразователи (ВЦП), а также мультистопные преобразователи, которые могут принимать после стартового импульса несколько сигналов СТОП, попадающих в анализируемый интервал. Разработаны также системы с использованием ЭВМ, позволяющие осуществить регистрацию нескольких сигналов СТОП после прихода сигнала СТАРТ и провести многочленный временной анализ [18]. Это дает возможность избежать потерь на мертвое время ВАП при регистрации как случайных, так и истинных совпадений. Мультистопный режим измерений используется в том случае, когда необходимо измерить время жизни уровня, превышающее 100 мкс. Первоначально в измерениях времен жизни уровней в микросекундном диапазоне нашли применение кристаллы NaI(Tl). Рассмотрим временные спектрометры, предназначенные для решения этой задачи.

5.1. Измерения времен жизни уровней с $T_{1/2} > 100$ мкс. Измерения времен жизни уровней с $T_{1/2} > 100$ мкс проводились, как правило, с помощью неорганических сцинтилляторов типа NaI(Tl). Измерения в нано- и микросекундном диапазоне времен жизни уровней были проведены в основном с помощью быстрых пластмассовых сцинтилляторов.

Мультистопный временной анализатор с пересчетными схемами. В своей работе Тове [23] показал, что для обеспечения высокого отношения истинных совпадений к случайным $N_{\text{ист}}/N_{\text{сл}}$ необходимо использовать в измерениях 4π -геометрию (кристалл NaI(Tl) с колодцем). Созданный на базе сцинтилляционного спектрометра временной анализатор представлял собой 20-канальную систему регистрации задержанных совпадений с двумя дифференциальными дискриминаторами, выделяющими γ -лучи, которые заселяют и разряжают изомерное состояние. Регистрация совпадений в каждом канале осуществлялась при помощи 20 пересчетных схем. Переключение каналов инициировалось сигналом СТАРТ. Характерной особенностью этого анализатора является осуществление мультистопного режима, обеспечивающего регистрацию всех сигналов СТОП, пришедших после сигнала СТАРТ в пределах заданного интервала времени. В измерениях использовался кристалл NaI(Tl) ($\varnothing 25$ мм) с колодцем. Отношение числа истинных совпадений к случайным для анализатора подобного типа, полученное в этой работе:

$$\frac{N_{\text{ист}}}{N_{\text{сл}}} = \frac{\lambda \alpha_1 \alpha_2 e^{-\lambda t}}{N(1 - \alpha_1 \alpha_2 F_1)}, \quad (21)$$

где $\lambda = 1/\tau$, α_1 и α_2 представляют собой доли зарегистрированных детектором коррелированных во времени излучений, выделенных на временном анализаторе, F_1 — полная эффективность регистрации γ_1 , N — активность источника, позволило оценить время, необходимое для измерения времен жизни в миллисекундном диапазоне. Проведенные оценки для отношения $N_{\text{ист}}/N_{\text{сл}} = 2$ в первом канале и реалистические оценки эффективности регистрации совпадающих излучений для кристалла NaI(Tl) $\varnothing 25 \times 25$ мм привели к заключению, что для определения времени жизни в 200 мкс потребуется время для измерений, равное 68 мин, а для определения времени жизни в 0,010 с — 56 ч при подборе соответствующего уровня активности источника. Измерения времени жизни состояния с $E = 2200$ кэВ ($T_{1/2} = 123(4)$ мкс) в ^{206}Pb показали реалистичность этих оценок.

Мультистопный временной анализатор с МКА. Использование в качестве запоминающих устройств при измерениях долгоживущих уровней не пересчетных устройств, а памяти многоканального анализатора, было реализовано в работе [14]. При поступлении сигнала СТАРТ происходит последовательное переключение каналов многоканального анализатора (МКА) в пределах заданного интервала времени, определяемого числом каналов МКА и временной ценой канала. Все поступающие сигналы СТОП в пределах этого интервала времени будут зарегистрированы в соответствующих каналах. Таким образом, происходит существенное уменьшение мертвого времени временного анализатора и повышение эффективности регистрации совпадений, что обеспечивает возможность проведения измерений времен жизни уровней,

начиная от 30 мкс и вплоть до секунд. Пример подобного измерения состояния 1315,2 кэВ с периодом полураспада 1,1 с, возбуждаемого при распаде ^{177}Lu , представлен на рис. 15. Набор полученной статистики продолжался 14 дней. Хотя эти измерения были проведены на двухдетекторном спектрометре, включающем помимо 4π -детектора для регистрации β -частиц также и детектор со сцинтиллятором NaI(Tl), необходимо отметить, что может быть применен и однодетекторный вариант при изучении распада радиоактивных источников. Пределом в измерениях малых времен жизни с помощью использованного спектрометра была величина не менее 30 мкс, а больших ~ 10 с.

OBC с многократным времененным анализом. В работе [18] продемонстрирована возможность применения метода задержанных совпадений к измерениям времен жизни вплоть до 100 с. Основное отличие концепции измерений, развитой в этой работе, от концепции мультистопного режима измерений для фиксированного интервала времени [14] заключается в том, что в пределах анализируемого диапазона времени определяются временные интервалы между всеми сигналами СТАРТ и сигналами СТОП, в то время как в первом случае регистрируется только первый сигнал СТАРТ и все последующие сигналы СТОП, а второй и последующие сигналы СТАРТ, попадающие в анализируемый интервал времени, просто отбрасываются, что приводит к уменьшению эффективности регистрации как истинных, так и случайных совпадений. В качестве запоминающего устройства в спектрометре совпадений использовалась малая ЭВМ.

Время появления каждого сигнала СТАРТ фиксировалось в памяти ЭВМ. При регистрации сигнала СТОП вычислялись все интервалы времени, более короткие, чем анализируемый диапазон, между предшествовавшими сигналами СТАРТ и этим сигналом СТОП и запоминались в другом участке памяти ЭВМ, формируя таким образом спектр временного распределения. Если разность между сигналами СТАРТ и СТОП превышала анализируемый диапазон, то время появления этого сигнала СТАРТ стиралось из памяти ЭВМ. Этот метод фактически не имеет потерь за счет просчетов, которые свойственны временным анализаторам других типов, обладающим определенным мертвым временем.

Результаты измерений времени жизни основного состояния ^{114}In , проведенных этим методом, представлены на рис. 16. В этих измерениях использовался пластмассовый сцинтиллятор с колодцем, позволивший осуществить

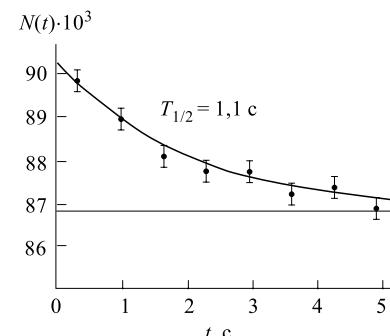


Рис. 15. Период полураспада состояния 1315,2 кэВ в ^{177}Hf [14]

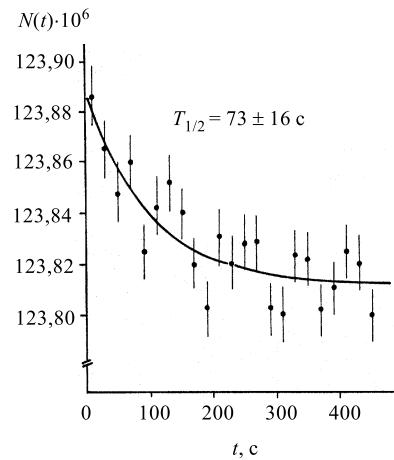


Рис. 16. Период полураспада основного состояния ^{114}In [18]

метод наиболее эффективно может применяться для определения микросекундных и секундных времен жизни ядерных состояний, слабо заселяемых при радиоактивном распаде.

5.2. Измерения времен жизни уровней с $T_{1/2} < 100$ мкс.

OBC с кристаллом NaI(Tl). В работе [24] использовалась стандартная схема спектрометра задержанных совпадений с отбором с помощью двух дифференциальных дискриминаторов γ -переходов, заселяющих и разряжающих изомерное состояние. С его помощью был проведен ряд успешных измерений в микросекундной области — табл. 4. В измерениях был использован кристалл NaI(Tl) с размерами $\varnothing 50 \times 50$ мм с колодцем.

Некоторые измерения были проведены с разными по силе источниками. Полученные результаты не противоречат известным данным. Это свидетельствует о том, что при выбранной активности источника можно проводить измерения с использованием ВАП обычного типа СТАРТ–СТОП в диапазоне времен жизни уровней, достигающем по крайней мере 100 мкс.

Таблица 4. Периоды полураспада уровней, измеренные на ОВС с ВАП [24]

A	Распад	E _{уп} , кэВ	E ₁ /E ₂	N, с ⁻¹	N ₁ , с ⁻¹	N ₂ , с ⁻¹	t, ч	N _{ист} /N _{сл}	T _{1/2} , мкс
151	Gd → Eu	197	154/175		18,8	13,6	18	14	58,93(44)
181	Re → W	365	59/366	100			19		12,80(20)
184	Ta → W	~1285	413/>500		133	140	1,5	31	7,73(12)

регистрацию электронов внутренней конверсии и β -частиц в 4π -геометрии. Интенсивность сигналов СТАРТ составляла $3,8 \text{ с}^{-1}$ и СТОП — $5,4 \text{ с}^{-1}$. Набор статистики продолжался три дня. При одинаковой статистике этот спектрометр имеет эффективность, по крайней мере, в 100 раз больше по сравнению с предыдущим анализатором (рис. 17). Число каналов во временном анализаторе составляло 1024. Цена канала в зависимости от решаемой задачи могла устанавливаться от 50 мкс до 2 с. Это давало возможность проводить измерения времен жизни, начиная с 100 мкс. Один из вариантов спектрометра представлял собой двумерный анализатор $E - T$ с числом каналов 224×32 . Рассмотренный

ОВС с пластмассовым сцинтиллятором. ОВС с пластмассовыми сцинтилляторами наиболее успешно применяются при измерениях времен жизни уровней в наносекундной области. Не менее успешным оказалось их применение и при изучении микросекундных времен жизни, особенно для ядер, претерпевающих β - или α -распад.

ОВС с регистрацией одномерных спектров совпадений. При измерении наносекундных времен жизни можно применять различные сочетания схем электронной аппаратуры, обеспечивающей как одномерный режим измерений с регистрацией только временного спектра T , так и двух- или трехмерный режим регистрации спектров $E-T$ или $E-T-E$, а также возможность включения ОВС в состав многопараметрического спектрометра типа «crystal ball». Самая простая конфигурация, позволяющая осуществить поиск изомеров, может состоять из двух интегральных дискриминаторов, ВАП и МКА (рис. 18) с разными порогами сраба-

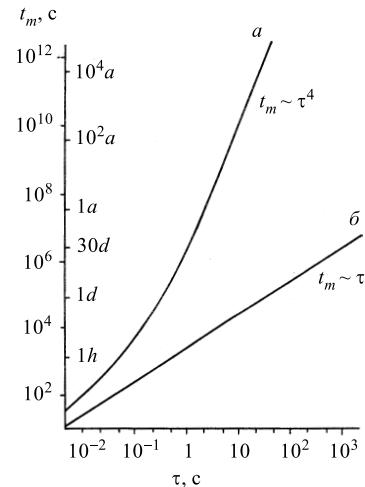


Рис. 17. Продолжительность эксперимента, необходимая для измерений различных времен жизни уровней ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $N_0 = 1/\tau$, $\Delta\tau/\tau = 10\%$): a) спектрометр с однократным временным анализом, b) спектрометр с многократным времененным анализом [18]

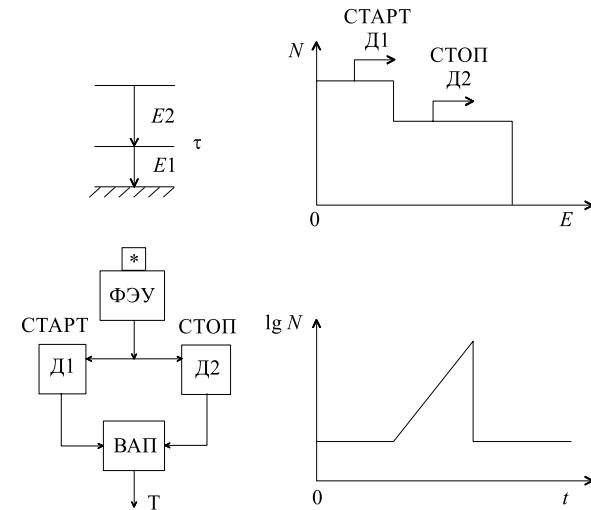
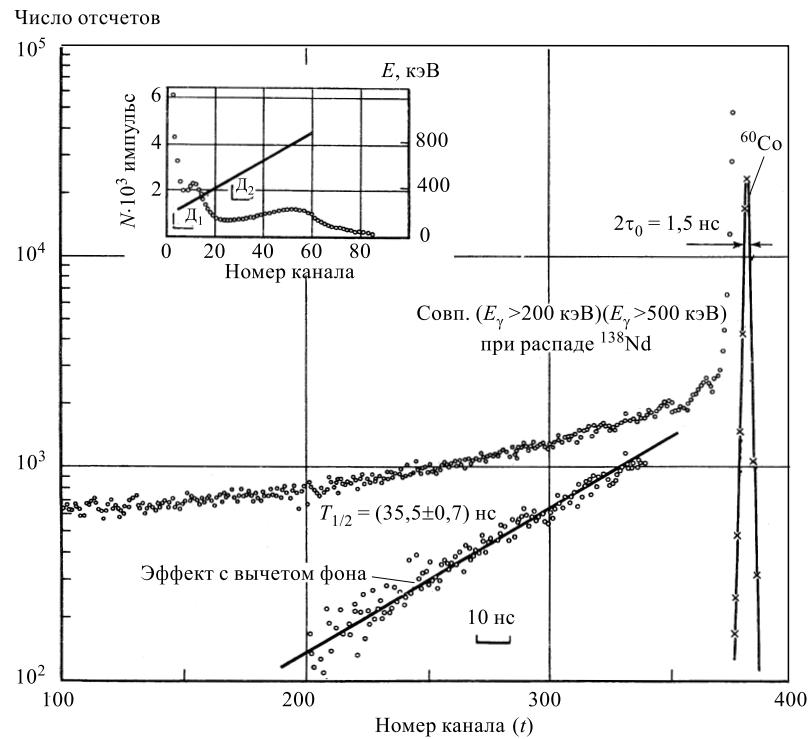


Рис. 18. Блок-схема ОВС с интегральными дискриминаторами

Рис. 19. Измерение времени жизни состояния 822 кэВ в ^{139}Pr

тывания [25]. Такой режим измерений позволяет обнаружить изомеры при любом соотношении энергий переходов, заряжающих и разряжающих изомерное состояние. Этот подход применим и в поиске изомеров при β -распаде, и при регистрации комптоновского распределения от γ -лучей вследствие непрерывного распределения соответствующих спектров вплоть до энергии, равной нулю. Характерной особенностью временного спектра при таких измерениях является наличие, помимо задержанных совпадений, также и самосовпадений. На рис. 19 приведен пример подобных измерений. В измерениях применялся ФЭУ XP-1020 и пластмассовый сцинтиллятор размером $\varnothing 40 \times 40 \text{ мм}$ с колодцем. Фрагменты схем распада соответствующих изотопов, энергетические спектры и уровни выбранных порогов дискриминаторов приведены на этом же рисунке. В дальнейшем с целью исключения самосовпадений и уменьшения загрузки канала СТАРТ ВАП, приводящей к увеличению числа случайных совпадений и изменению формы спектра случайных совпадений, в низкоэнергетический канал спектрометра был включен дифференциальный дискриминатор на основе двух быстрых интегральных дискриминаторов и

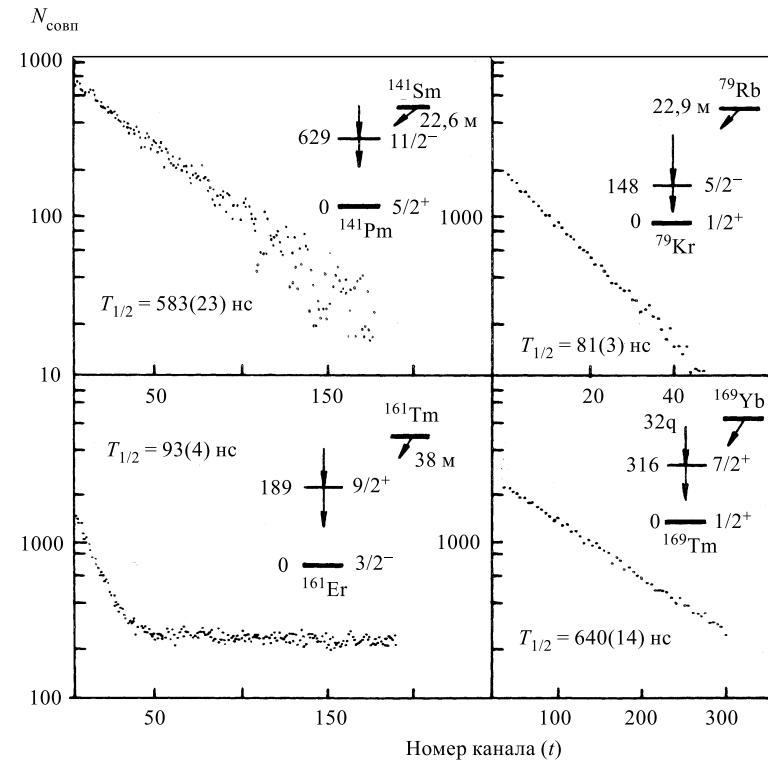


Рис. 20. Периоды полураспада изомерных состояний радиоактивных ядер

схемы антисовпадений [26] (рис. 3). В спектрометре использовались блоки наносекундной электроники, разработанные в Лаборатории ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований [28]. С помощью этого спектрометра были проведены измерения времен жизни изомеров в диапазоне от 8 до 700 нс [26, 27], см. рис. 20, табл. 5.

OBC с регистрацией многомерных спектров совпадений. Изучение изомерии ядер требует не только установления значения периода полураспада изомерного состояния, но и определения его энергии и энергии переходов, заселяющих и разряжающих это состояние. Способ определения энергии изомерного состояния или изомерного перехода при работе с пластмассовыми сцинтилляторами менее однозначен по сравнению с использованием неорганических сцинтилляторов. Энергию изомерного перехода можно определить по краю комптоновского распределения γ -линии или в случае сильноконвертированного перехода по линиям ЭВК. При этом в рамках традиционного подхода необходимо снимать последовательно несколько серий кривых за-

Таблица 5. Периоды полураспада изомерных состояний ядер

A	Распад	$T_{1/2}$ (ядра)	$E_{\text{уп}}$, кэВ	$T_{1/2}$, нс (уровня)	
				Наши результаты	Известные данные
79	Rb → Kr	23 мин	148	81,2(32)	77,7(15) [31]
133	Ce → La	5,4 ч	534	63,9(45)	60(5) [33]
139	Nd → Pr	5,5 ч	822	35,5(7)	40(2) [32]
141	Sm → Pm	22,6 мин	629	583(23)	594(20) [30]
155	Ho → Dy	48 мин	132	83(3)	85(10) [29]
159	Tm → Er	9 мин	182	337(13)	325(30) [34]
161	Tm → Er	38 мин	189	93(4)	70(20) [34]
167	Lu → Yb → Tm	52 мин → 17 мин		~400	—
169	Yb → Tm	32 сут	316	640(14)	640(40) [35]
172	Lu → Yb	6,7 сут	1172	8,85(31)	8,14(22) [36]
181	Hf → Ta	42,4 сут	482	10,21(35)	10,67(5) [37]

держаных совпадений при различных порогах дискриминаторов до момента исчезновения эффекта регистрации задержанных совпадений. Однако при исследовании короткоживущих нуклидов реализация этого подхода затруднительна как при измерениях на одном радиоактивном источнике, так и в случае использования нескольких источников. Решение этой задачи при измерениях на ОВС возможно только в случае применения многомерного режима измерений. Как уже отмечалось, только в одной работе [18] сообщалось о реализации в измерениях двумерного режима совпадений $E - T$ с матрицей 224×32 канала для измерений времен жизни уровней с $T_{1/2} > 100$ мкс. В последующих работах [38–40] нами была отработана методика многомерных измерений в наносекундной области времен жизни уровней с использованием ОВС.

1. ОВС с регистрацией двумер-

ных спектров совпадений. Использование стандартных спектрометров задержанных совпадений не позволяет реализовать полную эффективность регистрации излучения детектором, так как любое зарегистрированное излучение на сцинтилляционном детекторе имеет, помимо пика (фотопик γ -лучей или пик ЭВК), также и непрерывное распределение, идущее от пика к нулю, и энергетическая вы-

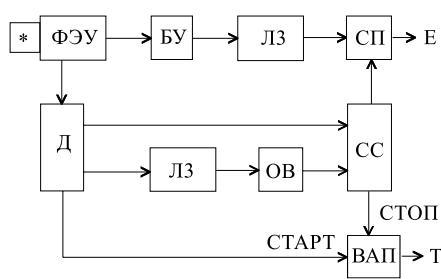


Рис. 21. Блок-схема ОВС двумерных совпадений

борка соответствующего пика с помощью интегральных или дифференциальных дискриминаторов обеспечивает регистрацию только части полезных событий. Оптимизация режима многомерных измерений оказалась возможной только при использовании иного подхода. Блок-схема ОВС, обеспечивающая регистрацию двумерных спектров совпадений, и временные диаграммы импульсов приведены на рис. 21, 22. Основное отличие данного спектрометра от рассмотренных ранее заключается в использовании автокорреляционного принципа, который позволяет осуществить вместо предварительного энергетического отбора предварительный временной отбор и только на втором этапе провести энергетический анализ. В автокорреляционном однокристальном временном спектрометре (АОСВС) используется только один временной формирователь Δ , порог которого можно установить предельно низко, с небольшим превышением над уровнем шумов ФЭУ. Преимущества такого режима очевидны: во-первых, реализуется максимальная эффективность регистрации заселяющего и задержанного излучения и, во-вторых, упрощается схема спектрометра и повышается его надежность. Сигнал СТАРТ берется непосредственно от дискриминатора, а сигнал СТОП вырабатывается стробируемой схемой совпадений. В качестве строба используется сигнал от одновибратора, длительность импульса с которого устанавливается равной длительности исследуемого временного диапазона. Новым элементом в этом спектрометре совпадений является линейная схема пропускания наносекундных импульсов СП, которая позволяет выделять энергетический сигнал, соответствующий задержанному излучению. На рис. 23 приведен двумерный $E - T$ -спектр задержанных совпадений, полученный при измерении времени жизни состояния 103 кэВ с $T_{1/2} = 4,1(3)$ нс. Время жизни состояния характеризует распределение от 1300 -го до 1400 -го канала (ось X), до 2000 -го канала идет фон случайных совпадений, а далее — временной спектр распределения послеимпульсов

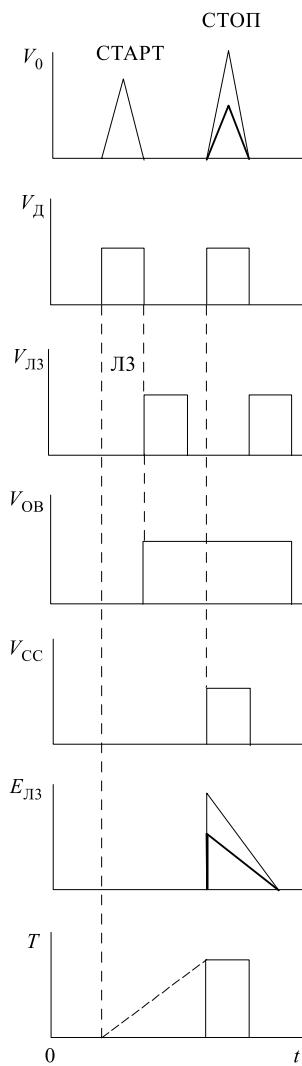


Рис. 22. Временная диаграмма импульсов автокорреляционного ОВС двумерных совпадений

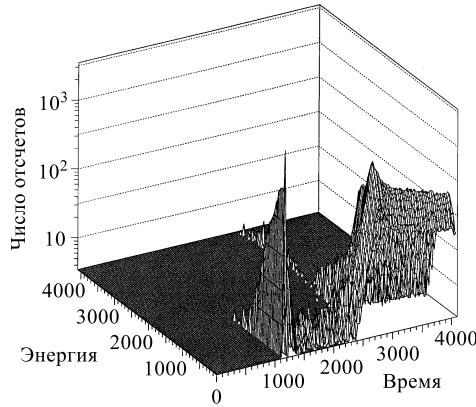


Рис. 23. Двумерный спектр $E - T$ -совпадений при распаде ^{153}Gd

вышала 5 нс (длительность на уровне 0,1 высоты амплитуды импульса). Временной сигнал снимался с анода ФЭУ ($R_a = 50 \Omega$) и подавался на временной формирователь (Δ). Энергетический сигнал снимался с динода и через быстрый усилитель (БУ) ORTEC FFA-579 подавался на линейную схему пропускания наносекундных импульсов [41]. Инструментальное временное разрешение спектрометра $2\tau_0$ не превышало долей наносекунды. Измерения производились в геометрии 2π при активности источника 500 с^{-1} .

ФЭУ, рассмотрение происхождения которых будет проведено позднее. Ось Y характеризует энергетическое распределение запаздывающего излучения E . Рисунок 24 дает возможность оценить влияние величины мертвого времени дискриминатора Δt_m (10 и 20 нс) на эффективность регистрации задержанных совпадений на пределе временной разрешающей способности ОВС. В спектрометре использовался ФЭУ XP2020Q и сцинтиллятор NE104, время высвечивания которого $\tau = 1,9$ нс. При этом длительность импульса на выходе ФЭУ не пре-

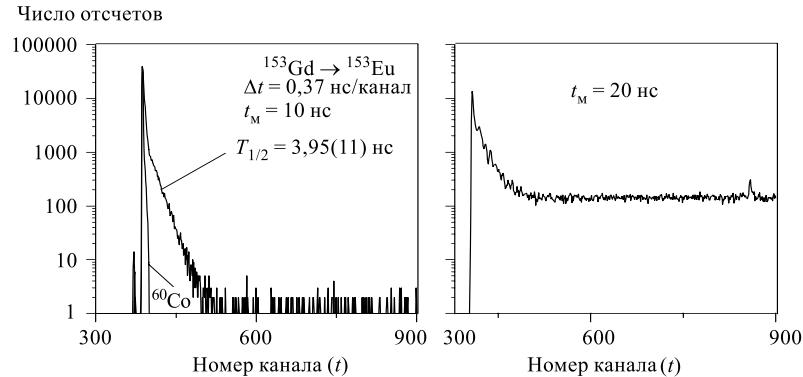


Рис. 24. Период полураспада состояния 103 кэВ в ^{153}Eu

2. ОВС с регистрацией трехмерных спектров совпадений. Дальнейшее развитие методики однокристальной сцинтилляционной временной спектрометрии привело к реализации режима трехмерных совпадений на одном сцинтилляционном детекторе $E_1 - T - E_2$ [39], позволяющего одновременно регистрировать временной спектр и энергетические спектры как задержанного излучения, так и излучения, заселяющего изомерное состояние. Принципиальная блок-схема спектрометра трехмерных совпадений приведена на рис. 25. В этом спектрометре была использована аппаратура, аналогичная аппаратуре, примененной в двумерном временном спектрометре. В качестве временных формирователей (ВФ_1 , ВФ_2) использовались дискриминаторы ORTEC CFD-584, мертвое время которых не превышало 20 нс. Сигнал для энергетического анализа снимался с анода ФЭУ ($R_a = 50 \text{ Ом}$) и через разветвитель подавался на линейные схемы пропускания наносекундных импульсов (ЛСП) [41], линейные усилители (ЛУ) и на амплитудно-цифровые преобразователи (АЦП).

В спектрометре данного типа в отличие от спектрометра двумерных совпадений $E - T$ [38] более полно реализованы функциональные возможности

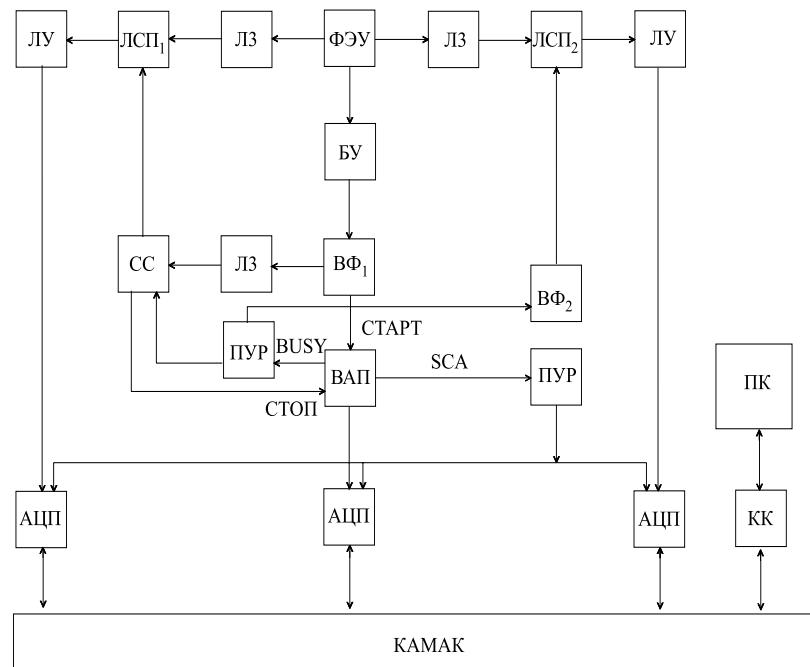


Рис. 25. Блок-схема ОВС трехмерных совпадений

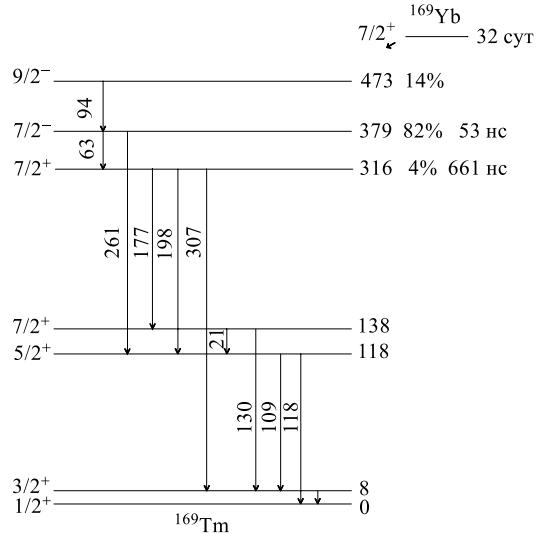
времяамплитудного преобразователя (ВАП) ORTEC ТРНС-476. В качестве строба, подаваемого на стробирующую схему совпадений (СС), использовался сигнал BUSY, который синхронизирован по времени с началом преобразования временного интервала ВАП и соответствовал по длительности выбранному временному диапазону ВАП. Сигналы с СС использовались в качестве сигнала СТОП, подаваемого на ВАП, и в качестве строба, управляющего линейной схемой пропускания наносекундных импульсов (ЛСП₁), соответствующих задержанному излучению.

Стробирующий импульс для управления амплитудными кодировщиками снимается с выхода SCA ВАП. Этот импульс соответствует полезному событию, попадающему в выбранный временной интервал. Преобразователи уровней (ПУР) логических сигналов BUSY и SCA используются с целью преобразования сигналов с этих блоков в сигналы, управляющие последующими электронными блоками. Временной формирователь (ВФ₂) выполняет роль формирователя строба для ЛСП₂, пропускающей импульсы, которые соответствуют излучению, заселяющему изомерное состояние. Линии задержки используются для временного согласования импульсов. Следует отметить, что для такого варианта отбора излучения, заселяющего изомер, требуется, чтобы длительность импульса с ЛУ была не меньше длительности анализируемого диапазона, в противном случае необходимо использовать АЦП с двойным управлением. Первый управляющий сигнал соответствует сигналу СТАРТ, а второй — управляющему сигналу с ВАП, если событие попадает в анализируемый интервал времени. В этом варианте применение блока ЛСП₂ не требуется.

Система сбора данных содержала три преобразователя амплитуда–код типа КА007 [42], крейт КАМАК и контроллер крейта КК009 (КК) [43], который был соединен с персональным компьютером (ПК). Преобразование амплитуды в код начиналось по внешнему стробу, подаваемому на все три АЦП от блока логики отбора событий. По окончании преобразования каждый АЦП подает в магистраль свой сигнал запроса LAM, который будет снят после считывания амплитуды. Контроллер крейта выполняет обмен 16-разрядными данными между модулями КАМАК и компьютером и разрешает обработку сигналов запроса и подачу сигнала прерывания в компьютер.

Программа набора трехмерных спектров выполняет следующие функции:

- а) ввод с клавиатуры и вывод в отдельный файл на диск информации об условиях и параметрах эксперимента;
- б) считывание с амплитудно-цифровых преобразователей события, состоящего из кодов трех амплитуд с признаками после появления сигналов LAM;
- в) запись кодов амплитуд, принадлежащих каждому событию, последовательно во внутренний буфер, при заполнении буфера до 64К слов выполняется вывод данных в двоичный файл, содержащий последовательно идущие трехмерные события;

Рис. 26. Схема распада ^{169}Yb

- г) формирование трех интегральных спектров совпадений с их выводом на экран в логарифмическом масштабе;
- д) вывод на экран оперативной информации о скорости набора данных и времени, остающемся до конца набора;
- е) после окончания набора на диск выводится последний двоичный файл с трехмерными событиями и три интегральных спектра совпадений с данными в текстовом виде.

Программа набора позволяет выбирать частоту обновления экрана со спектрами для сокращения потерь данных во время их регистрации. После набора спектры могут быть представлены в графическом виде с помощью любых программ визуализации данных. Обработка трехмерных событий выполняется с помощью программы PAW [44].

Результаты проведенных измерений на ОВС представлены на рис. 26–28. Нами использовался радиоактивный источник ^{169}Yb , при распаде которого возбуждаются два изомерных состояния с $T_{1/2} = 52,6(9)$ нс (энергия изомерного состояния $E = 379$ кэВ) и с $T_{1/2} = 661(7)$ нс ($E = 316$ кэВ), рис. 26. Регистрация излучения осуществлялась пластическим сцинтиллятором размером $\varnothing 20 \times 15$ мм в геометрии 2π , при пороге регистрации $E > 30$ кэВ. Первое изомерное состояние заселяется при K -захвате и при разрядке состояния 473 кэВ переходом 94 кэВ. Разряжается оно на второе изомерное состояние переходом с $E = 63$ кэВ, которое, помимо этого канала, заселяется также и

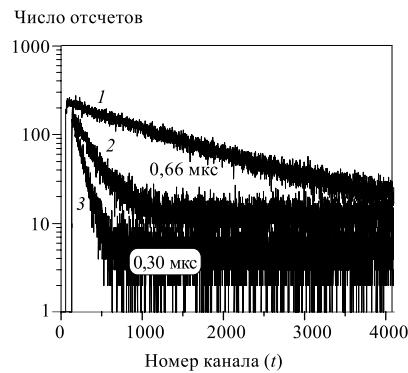


Рис. 27. Периоды полураспада основных и изомерных состояний в радиоактивных ядрах: 1 — ^{213}Po , $T_{1/2} = 3,65 \text{ мкс}$, 2 — ^{169}Tm , 3 — ^{212}Po ; $\Delta t_k = 3,98 \text{ нс/канал}$

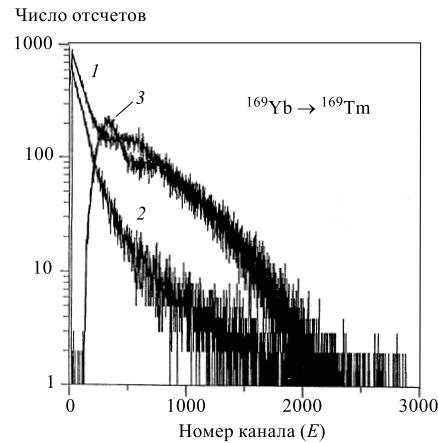


Рис. 28. Спектр излучения при распаде ^{169}Yb — 1; спектр излучения, заселяющего изомерные состояния в ^{169}Tm — 2; спектр излучения, разряжающего изомерное состояния в ^{169}Tm — 3

при K -захвате. При разрядке этого состояния испускается ряд гамма-лучей, наиболее интенсивные имеют энергию 109, 118, 130, 177 и 198 кэВ.

На рис. 27 приведен временной спектр ^{169}Yb , представляющий время жизни второго изомерного состояния $T_{1/2} = 661 \text{ нс}$ в ^{169}Tm , а также времена жизни основных состояний $^{212,213}\text{Po}$, на рис. 28 — спектры излучений, заселяющих и разряжающих изомерное состояние ^{169}Tm , которые были зарегистрированы пластмассовым сцинтиллятором. Так как коэффициенты усиления по энергетическим каналам были установлены равными, то видно, что изомерное состояние заселяется низкоэнергетичным, а разряжается более высокоэнергетичным излучением. Экспоненциальное распределение с $T_{1/2} = 53 \text{ нс}$ в данном эксперименте не идентифицируется.

3. ОВС в составе двухдетекторного четырехмерного сцинтилляционного спектрометра тройных совпадений. Рассмотренные ранее спектрометры совпадений позволяли только качественно решить задачу определения энергетического положения изомера по соотношению энергии заселяющего и разряжающего излучения вследствие плохого энергетического разрешения пластмассовых сцинтилляторов. Более точно при условии знания схемы распада изучаемого изотопа эту задачу можно решить добавлением к ОВС еще одного детектора с хорошим энергетическим разрешением, например, ППД. Наличие изомерного состояния или короткоживущего основного состояния и связанных с ними заселяющих или разряжающих каскадных переходов (ко-

эффективент множественности при этом должен быть $M \geq 3$) позволяет установить в энергетическом спектре второго детектора γ -переходы, связанные с короткоживущим состоянием. Таким образом, двухдетекторный спектрометр, включающий ОВС, обеспечивает регистрацию трехкратных совпадений при исследовании распада радиоактивных ядер, если в них возбуждаются изомерные состояния.

В спектрометрах совпадений кратность совпадений определяется числом используемых детекторов. Но есть два типа спектрометров совпадений, которые позволяют при наличии только двух детекторов реализовать режим тройных совпадений. Такие спектрометры включают в себя 4 π -детектор, регистрирующий альфа-, гамма- или электронное излучение, и сцинтилляционный или полупроводниковый детектор (ППД), включенный на совпадения с первым. Подобные спектрометры совпадений могут различаться по виду селекции каскадных переходов в 4 π -детекторе: по энергии или по времени. Примером спектрометра первого типа может служить сцинтилляционный спектрометр полного поглощения с кристаллом NaI(Tl) большого размера с колодцем или ППД с колодцем. Реализация режима трехкратных совпадений осуществляется при выделении в энергетическом спектре 4 π -детектора пиков сумм, соответствующих мгновенным совпадениям, и анализе соответствующего этим пикам энергетического спектра совпадений во втором детекторе. Затруднения, которые могут возникать при анализе трехкратных совпадений на спектрометре данного типа, будут определяться недостаточно высоким энергетическим разрешением сцинтилляционного 4 π -детектора или недостаточно высокой эффективностью регистрации гамма-лучей 4 π -ППД.

В работе [40] был реализован второй тип двухдетекторного спектрометра тройных совпадений — выделение каскадного излучения в 4 π -детекторе по задержанным совпадениям. Таким образом, выделение во временном спектре ОВС событий, соответствующих задержанным совпадениям, позволяет установить в энергетическом спектре второго детектора γ -переходы, соответствующие трехкратным совпадениям. В основу данного спектрометра был положен автокорреляционный однокристальный сцинтилляционный временной спектрометр трехмерных совпадений с пластмассовым сцинтиллятором [39] и сцинтилляционный спектрометр с кристаллом NaI(Tl). Блок-схема спектрометра приведена на рис. 29. В данном временном спектрометре с двумя детекторами ядерного излучения реализован режим четырехмерных совпадений $E_1 - E_2 - E_3 - T$, где E_1 — канал регистрации γ -излучения сцинтилляционным детектором или ППД, E_2 — канал регистрации излучения, разряжающего изомерное состояние, E_3 — канал регистрации излучения, заселяющего изомерное состояние, и канал временного анализа T . В спектрометре использовалась та же аппаратура, что и в трехмерном спектрометре ОВС. Для регистрации γ -излучения использовались или сцинтилляционный детектор с неорганическим кристаллом NaI(Tl) с размерами $\varnothing 40 \times 50$ мм или

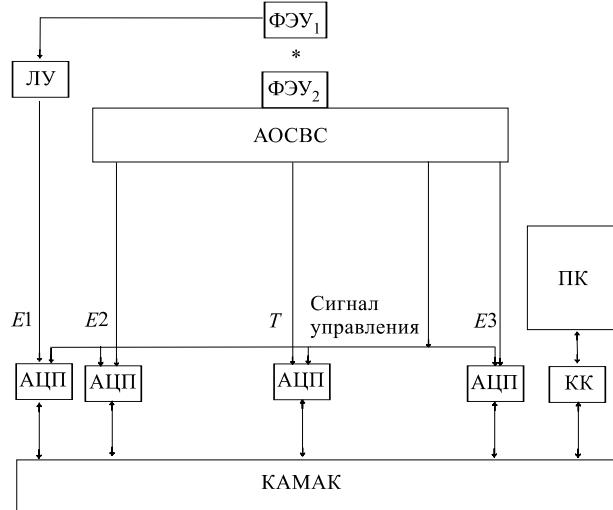


Рис. 29. Блок-схема двухдетекторного спектрометра тройных совпадений

ППД. Так как четырехмерный спектрометр в той части, которая касается трехмерного анализа $E_2 - E_3 - T$, идентичен спектрометру, рассмотренному в [39], то остановимся только на том различии, которое обусловлено введением второго спектрометра для регистрации γ -излучения. В отличие от обычных схем быстро-медленных совпадений в канале γ -спектрометра не применяется временной формирователь и не проводится временной анализ времени поступления импульсов от двух детекторов, а амплитудный сигнал с ФЭУ₁ после линейного усилителя (ЛУ) поступает на АЦП, который работает в режиме линейных ворот и открывается импульсами от ВАП в том случае, если в 4π-детекторе ФЭУ₂ зарегистрировано изомерное состояние. Таким образом, АЦП играет роль стробируемой линейной схемы совпадений, разрешающее время которой равно длительности логического сигнала SCA от ВАП. Преимущество подобного подхода будет рассмотрено позднее при анализе экспериментальных результатов.

Система сбора и накопления данных аналогична системе, представленной в работе [39], и вместо трех включает в себя четыре амплитудно-цифровых преобразователя. Методические исследования были проведены на радиоактивных источниках ^{169}Yb , ^{225}Ac и ^{232}Th . Цель исследований заключалась в демонстрации возможности идентификации изомерных состояний в длинных радиоактивных цепочках и в установлении предела эффективности регистрации каскадного γ -излучения в совпадениях с задержанным излучением.

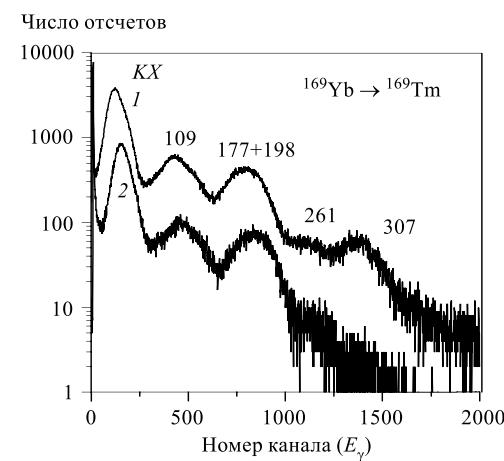
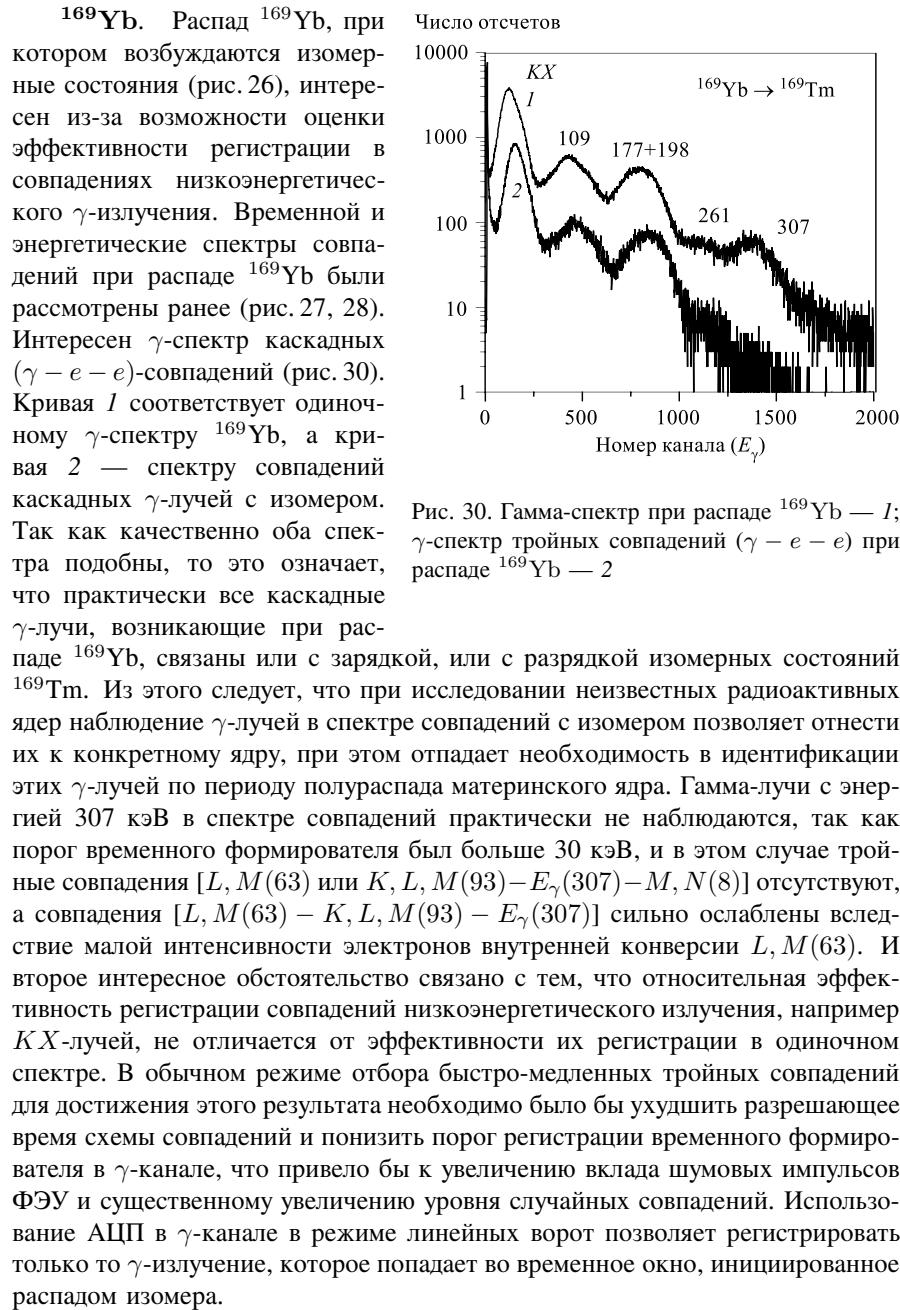
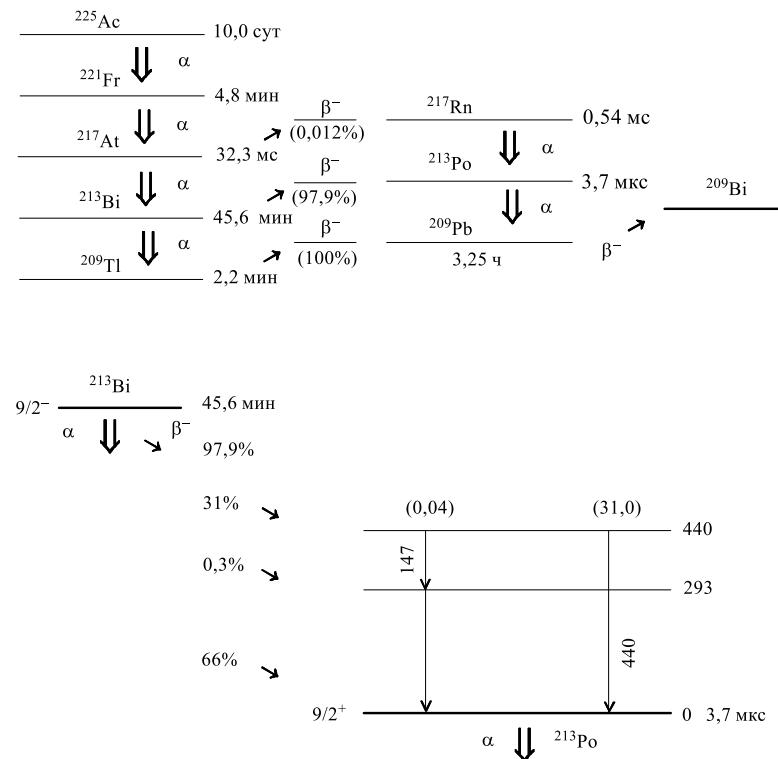


Рис. 30. Гамма-спектр при распаде ^{169}Yb — 1; γ -спектр тройных совпадений ($\gamma - e - e$) при распаде ^{169}Yb — 2

Рис. 31. Схема радиоактивной цепочки ^{225}Ac

^{225}Ac . Регистрация излучения от источника сложного изотопного состава в радиоактивной цепочке, начинающейся с ^{225}Ac , производилась в геометрии 2π на пластическом сцинтиляторе с размерами $\varnothing 20 \times 15$ мм. В данном случае источник осаждался непосредственно на пластический сцинтилятор. Наблюденное временное распределение с $T_{1/2} = 3,65(4)$ мкс [45] позволило отнести его к распаду основного состояния ^{213}Po . На рис. 31 представлена схема распада радиоактивной цепочки ^{225}Ac и схема возбужденных состояний ^{213}Po , для которого было определено время жизни основного состояния.

На рис. 32 показаны: одиночный спектр радиоактивной цепочки ^{225}Ac (кривая 1) и спектр задержанных $\beta - \alpha$ -совпадений (кривая 2), на котором отчетливо выделяется α -линия ($E_\alpha = 8,376$ МэВ), возникающая при распаде ^{213}Po . Спектр снят на пластическом сцинтиляторе. На рис. 33 приведен одиночный γ -спектр источника ^{225}Ac и γ -спектр ($\alpha - \beta - \gamma$)-совпадений. В со-

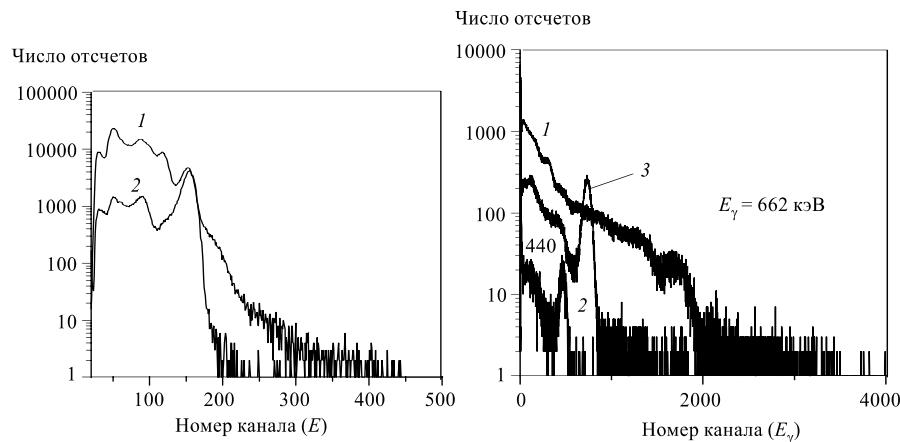
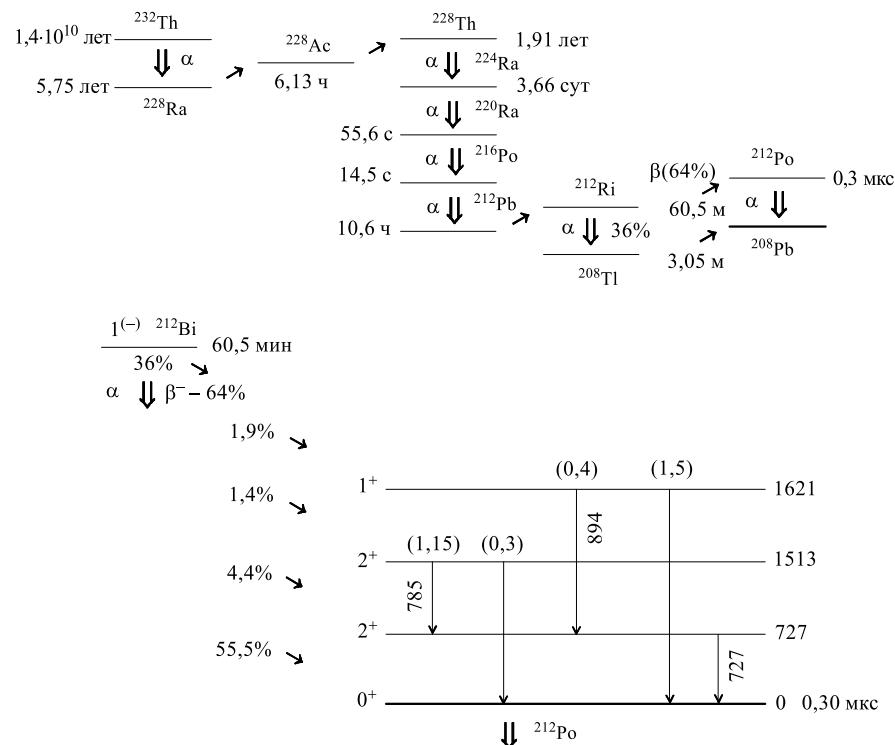


Рис. 32. Спектр излучения радиоактивной цепочки $^{225}\text{Ac} \rightarrow ^{209}\text{Bi}$ (1); α -спектр при распаде $^{213}\text{Po} \rightarrow ^{209}\text{Pb}$ (2)

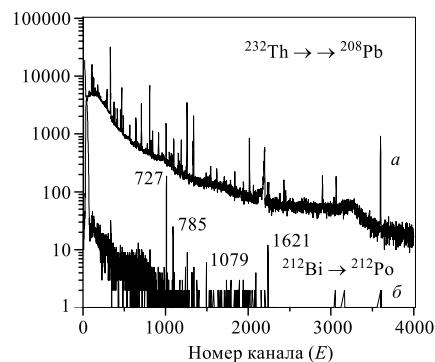
Рис. 33. Гамма-спектр радиоактивной цепочки $^{225}\text{Ac} \rightarrow ^{209}\text{Bi}$ (1); γ -спектр тройных совпадений ($\gamma - \beta - \alpha$) при распаде $^{213}\text{Bi} \rightarrow ^{213}\text{Po}$ (2); калибровочный γ -спектр ^{137}Cs (3)

ответствии со схемой распада ^{213}Bi наблюдался переход с энергией 440 кэВ, идущий на основное состояние ^{213}Po (кривая 2).

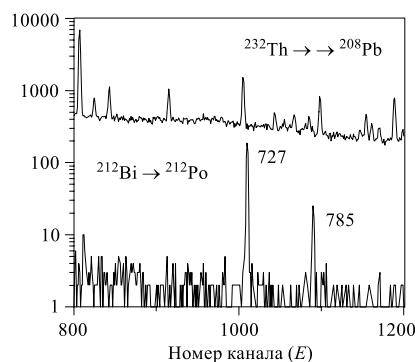
^{232}Th . Измерение задержанных совпадений в радиоактивной цепочке ^{232}Th проводилось в 4π -геометрии. На рис. 34 представлена схема распада радиоактивной цепочки ^{232}Th и схема возбужденных состояний ^{212}Po , для которого было определено время жизни основного состояния. В качестве γ -детектора использовался полупроводниковый детектор HPGe с эффективностью регистрации 10 %, приближенный вплотную к пластиковому сцинтиллятору. Период полураспада зарегистрированного временного распределения оказался равен $T_{1/2} = 298(3)$ нс, что соответствует известным данным для периода полураспада основного состояния ^{212}Po . На рис. 35 представлены одиночный γ -спектр всей радиоактивной цепочки ^{232}Th (кривая a) и γ -спектр ($\alpha - \beta - \gamma$)-совпадений (кривая b). На рис. 36 представлен фрагмент того же спектра. В соответствии со схемой распада ^{212}Bi в совпадениях наблюдаются наиболее интенсивные γ -лучи с энергией 727, 898 и 1612 кэВ. Согласно схеме распада ^{212}Bi интенсивность перехода $E_\gamma = 1612$ кэВ составляет 1,2 % на распад. Но так как исследовался не моноизотоп, а радиоактивная цепочка, состоящая из 11 радиоактивных ядер, то доля активности, относящейся к распаду $^{212}\text{Bi} \rightarrow ^{212}\text{Po}$, по крайней мере, на порядок меньше. Поэтому в случае исследования β -распада моноизотопа при такой же активности источника и

Рис. 34. Схема радиоактивной цепочки ^{232}Th

Число отсчетов

Рис. 35. Гамма-спектр радиоактивной цепочки ^{232}Th (a); γ -спектр тройных ($\gamma-\beta-\alpha$)-совпадений при распаде ^{212}Bi (б)

Число отсчетов

Рис. 36. Фрагмент γ -спектра тройных ($\gamma-\beta-e$)-совпадений при распаде ^{212}Bi

времени набора статистики наблюдались бы каскадные γ -переходы с интенсивностью не менее $(0,12/\alpha)\%$ на распад при энергии $E \approx 1600$ кэВ, где α — коэффициент внутренней конверсии перехода, разряжающего изомерное состояние.

6. ОВС С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ ДЕТЕКТОРАМИ

Использование в ОВС полупроводниковых детекторов носит более ограниченный характер вследствие существенно большего времени сбора заряда в них по сравнению с ФЭУ. Поэтому измерения времен жизни уровней в субмикросекундной области с помощью ППД не позволяют реализовать высокое энергетическое разрешение ППД, оставляя это поле деятельности для применения ФЭУ. Реализовать высокое энергетическое разрешение ППД в измерениях времен жизни можно только в микро- и миллисекундной области, хотя обеспечение телесного угла, близкого к 4π , возможно только для Ge-детекторов.

6.1. ОВС с Si(Au)-детектором. В работе [46] для измерения периода полураспада основного состояния ^{213}Po применялся ОВС с поверхностью-барьерным Si(Au)-детектором, который имел чувствительный слой в 200 Å и энергетическое разрешение 25 кэВ для α -частиц с энергией 5 МэВ. Измерения проводились по стандартной схеме быстро-медленных совпадений с использованием двух временных дискриминаторов. Дискриминатор в канале СТАРТ выделял участок в β^- -спектре с энергией $E_{\beta^-} = 0,35 \div 0,90$ МэВ, а дискриминатор в канале СТОП выделял α -частицы с энергией $E_\alpha = 8,38$ МэВ,

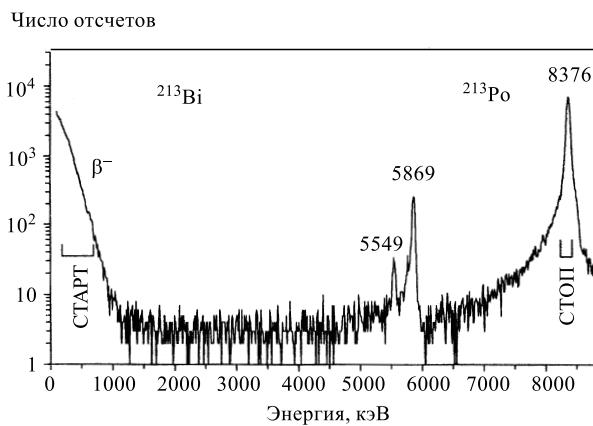


Рис. 37. Спектр β^- - и α -излучений при распаде ^{213}Bi и его продуктов, измеренный с помощью Si(Au)-детектора. Показаны выделенные энергетические окна в измерениях $(\beta^- - \alpha)$ -задержанных совпадений ^{213}Po [46]

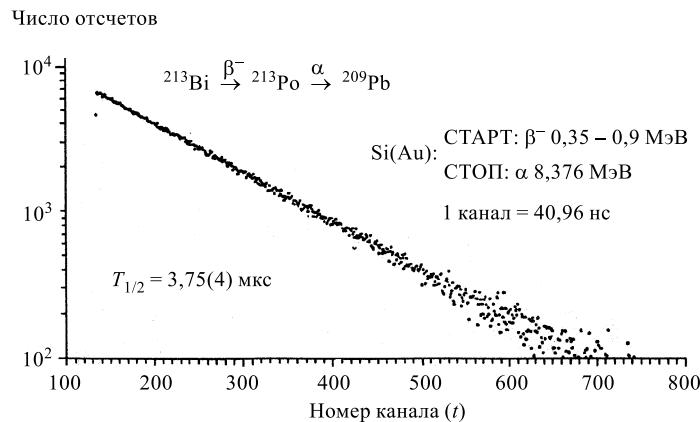
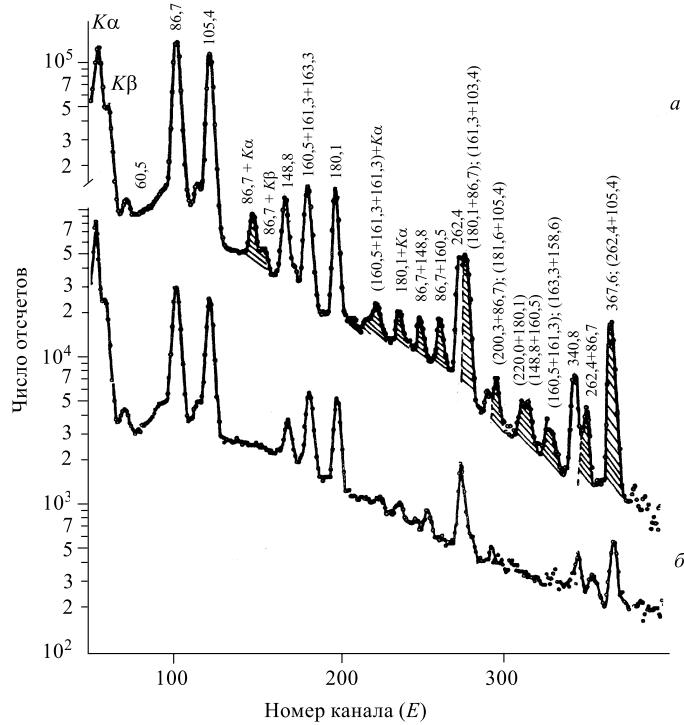


Рис. 38. Кривая распада основного состояния в ^{213}Po , измеренная методом задержанных ($\beta^- - \alpha$)-совпадений при использовании одного Si(Au)-детектора [46]

рис. 37. Источник ^{213}Bi , который использовался в измерениях, находился в вакуумной камере и располагался на расстоянии 3 мм от поверхности детектора. Несмотря на то, что в данных измерениях телесный угол был существенно меньше 2π , эффективность регистрации задержанных совпадений даже в этом случае была достаточна для того, чтобы определить с высокой точностью период полураспада основного состояния ^{213}Po , рис. 38.

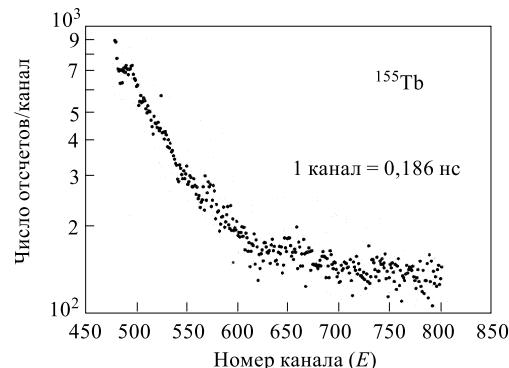
6.2. ОВС с Ge-детектором. ОВС с германиевым детектором в измерениях малых времен жизни применяются в двух аспектах: суммирование быстрых совпадений (СБС) и суммирование задержанных совпадений (СЗС). Быстрые совпадения обусловлены переходами между состояниями, время жизни которых меньше времени сбора заряда в ППД и времени формирования импульса в спектрометрическом усилителе τ_ϕ . В этом случае амплитуда импульса равна сумме энергий переходов $E1 + E2$ и форма импульса суммы не отличается от формы импульса одиночного перехода. В методе СЗС время жизни состояния превышает время сбора заряда в ППД, поэтому при суммировании амплитуд двух импульсов происходит искажение формы суммарного импульса. По характеру искажения формы импульса можно судить о времени жизни состояния.

В качестве примера реализации метода СБС на рис. 39 приведен одиночный γ -спектр ^{155}Tb и спектр сумм. В качестве детектора использовался Ge(Li)-кристалл с колодцем объемом 32 см^3 , диаметром 36 мм, высотой 40 мм, диаметр колодца был равен 18 мм. Детектор имел разрешение 3,6 кэВ на линии 662 кэВ ^{137}Cs . В спектре суммы видны пики совпадений рентгеновского излучения и γ -лучей с переходом 86,5 кэВ. Переход 86,5 кэВ разряжает возбужденное состояние 86,5 кэВ ^{155}Gd , которое живет 6,75 нс. Но так как

Рис. 39. Спектр сумм (а), одиночный спектр ^{155}Tb (б) [12]

это время существенно меньше времени сбора заряда в коаксиальном детекторе, то спектр сумм равен суммам совпадающих переходов, и можно только дать предел времени жизни этого состояния. Это же состояние легко идентифицируется при использовании автокорреляционного ОВС с пластмассовым сцинтиллятором [38], рис. 40.

Примеры измерения времен жизни методом СЗС поискажению формы линии приведены в работе [20]. В этих измерениях анализировалась форма γ -линий, которая соответствовала сумме переходов 3,2 кэВ и 56,5 кэВ в ^{74}Gd . Эти переходы возбуждались при распаде изомер-

Рис. 40. Временной спектр задержанных со-впадений, полученный на источнике ^{155}Tb , $T_{1/2} = 6,84(31)$ нс

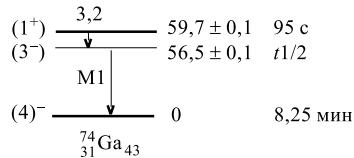
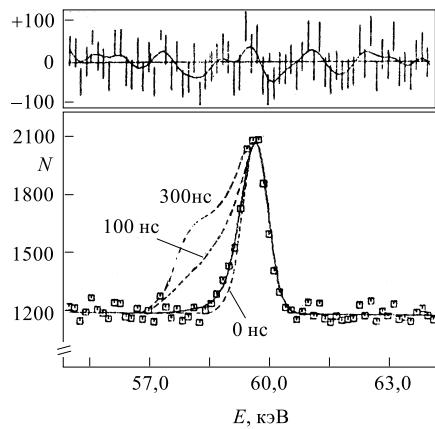
Рис. 41. Распад $^{74\text{m}}\text{Ga}$ 

Рис. 42. Форма гамма-линии с энергией 59 кэВ [20]

ного состояния 59,7 кэВ ($T_{1/2} = 95$ с) $^{74\text{m}}\text{Ga}$ (рис. 41). В эксперименте была реализована истинная 4π -геометрия, так как $^{74\text{m}}\text{Ga}$ получался при облучении планарного детектора из сверхчистого Ge в результате реакции $^{74}\text{Ge}(n, p)^{74\text{m}}\text{Ga}$. Площадь детектора составляла 1 см² при толщине чувствительного слоя 0,5 см. В ходе эксперимента формирующая цепочка $\tau_{\text{форм}}$ изменялась от 0,1 мкс до 3 мкс. При этом искажение формы линии сумм происходило только при $\tau_{\text{форм}} = 0,1$ мкс. Разрешение на линии 59 кэВ составляло 0,75 кэВ. При $\tau_{\text{форм}} = 1$ мкс разрешение было 0,4 кэВ. На рис. 42 представлены результаты измерений и фитирования линии 59 кэВ, которые дали значение периода полураспада состояния 56,5 кэВ $T_{1/2} = 31, (5)$ нс. Этот результат следует рассматривать как предел в определении малых времен жизни этим методом. Этим же методом был определен период полурас-

пада в 79 нс в ^{71}Ge и 2,96 мкс ^{73}Ge . Очевидный недостаток этого метода заключается в том, что реакция возможна только на изотопах Ge, входящих в кристалл детектора, а также то, что детектор выходит из строя после определенного цикла его облучений.

7. ЭТАЛОННЫЕ РАДИОАКТИВНЫЕ ИСТОЧНИКИ ДЛЯ КАЛИБРОВКИ ОСВС

Развитие методики однокристальной сцинтилляционной временной спектрометрии привело к созданию высокоэффективного спектрометра задержанных совпадений, основанного на автокорреляционном принципе, и потребовало подбора соответствующих калибровочных источников. Так как при использовании ОСВС проводится анализ энергетических и временных корреляций ядерного излучения, то требуется установление корректной настройки аппаратуры с целью достижения предельно возможного низкоэнергетического

Таблица 6. Характеристики эталонных источников [47]

Источник	$T_{1/2}$ источник.	Исслед. ядро	Энерг. уровня, кэВ	$T_{1/2}^*$ уровня, нс	E_1 , кэВ**	E_2 , кэВ	Каскад (% на распад)
^{73}As	80,3 сут	^{73}Ge	13,2	2940(30)	$E_K(53, 5) = 42, 4$	$E_L(13, 2) = 11, 8$	100
^{153}Gd	241,6 сут	^{153}Eu	103,2	3,90(3)	$E_K(69, 7) = 21, 2$	$E_K(103, 2) = 55, 3$	15
^{169}Yb	32 сут	^{169}Tm	316	661(7)	$E_L(63, 1) = 53, 0$	$E_K(198) = 138, 6$	96
^{225}Ac	10,0 сут	^{213}Po	0	3700(30)	$E_\beta = 1422$	$E_\alpha = 8376$	98
^{232}Th	$1, 4 \cdot 1010$	^{212}Po	0	298(3)	$E_\beta = 2270$	$E_\alpha = 8784$	64
^{241}Am	443 лет	^{237}Np	59,5	68,3(2)	$E_\alpha = 5389; 5544$	$E_L(59, 5) = 37, 4$	~ 100

*Значение 2940(30) соответствует 2940 ± 30 .

**Запись $E_K(53, 5) = 42, 4$ означает: 53,5 — энергия перехода, 42,4 — энергия ЭВК.

порога регистрации ядерного излучения детектором и определения минимального времени жизни уровней, доступного для измерения этим методом. В спектрометре данного типа оно будет определяться уровнем шумов ФЭУ, временем высвечивания сцинтиллятора, длительностью импульса с ФЭУ и мертвым временем временного формирователя. Поэтому решение данной задачи требует использования набора эталонных источников, обеспечивающих регистрацию задержанных совпадений для определенных временных и энергетических диапазонов. В табл. 6 представлены данные, которые характеризуют эталонные источники, применявшиеся нами в методических исследованиях спектрометра совпадений: $T_{1/2}$ означает период полураспада радиоактивного изотопа, а $T_{1/2}^*$ (нс) — период полураспада изомерного состояния. В колонке E_1 и E_2 приведены значения энергий излучения (в скобках), заселяющего и разряжающего изомерное состояние соответственно. E_K , E_L и E_β характеризуют энергию конверсионных электронов и граничную энергию β -частиц. E_α характеризует диапазон энергий регистрируемых α -частиц. В тех случаях, когда зарядка и разрядка состояния происходит несколькими γ -переходами, указывается наиболее интенсивный переход. Для регистрации ядерного излучения использовался пластмассовый сцинтиллятор NE104 с временем высвечивания 1,9 нс и ФЭУ XP2020Q. Для разных источников измерения проводились в двух геометриях: 2π (^{153}Gd , ^{169}Yb , ^{225}Ac) и 4π для всех остальных источников. Ниже приводятся данные по методам приготовления радиоактивных источников.

^{73}As . Использование этого изотопа было обусловлено необходимостью определения низкоэнергетического порога регистрации ядерного излучения, так как проведение стандартной энергетической калибровки спектрометра затруднительно, вследствие присутствия в том же энергетическом диапазоне шумовых импульсов от ФЭУ. И только сам факт начала регистрации экспо-

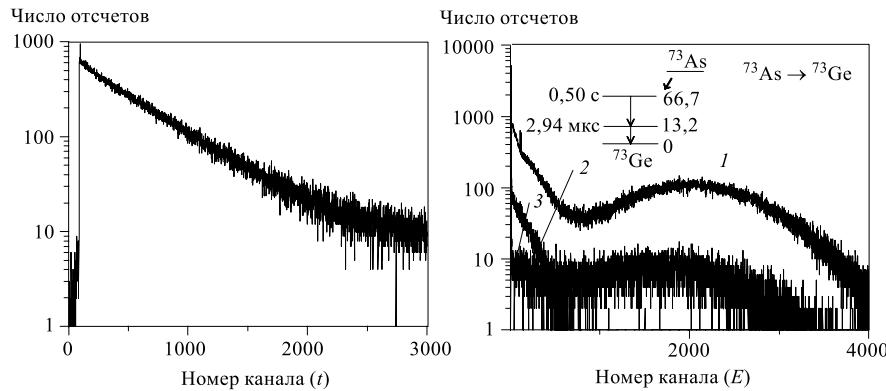


Рис. 43. Период полураспада состояния 13,2 кэВ в ^{73}Ge : $^{73}\text{As} \rightarrow ^{73}\text{Ge}$, $T_{1/2} = 2,94(3)$ мкс, $\Delta t = 8$ нс/канал

Рис. 44. Энергетические спектры при распаде ^{73}As : 1 — одиночный спектр ^{73}As , 2 — спектр задержанного излучения, 3 — спектр излучения, заряжающего изомерное состояние

ненциального временного распределения при понижении порога временного формирователя позволяет утверждать, что порог регистрации не превышает 10 кэВ. На рис. 43 представлен результат измерения периода полураспада изомерного состояния 13,2 кэВ в ^{73}Ge . На рис. 44 представлены энергетические спектры излучений, возникающих при распаде ^{73}As . Источник ^{73}As был получен следующим образом: As_2O_3 (800 Бк), находившийся в растворе бидистиллированной воды, наносился на поверхность сцинтиллятора $\varnothing 10 \times 3$ мм и высушивался. Затем по периметру таблетки наносился дихлорэтан, и первая таблетка закрывалась второй аналогичной таблеткой. Дихлорэтан растворял поверхностные слои сцинтиллятора, изготовленного на основе стирола, обеспечивая, таким образом, 4π-геометрию регистрации излучения ^{73}As .

^{153}Gd . Источник ^{153}Gd был использован для демонстрации возможности измерения наносекундных времен жизни методом ОВС. Изотоп ^{153}Gd был получен в результате реакции расщепления танталовой мишени быстрыми протонами с энергией 660 МэВ на фазotronе ЛЯП ОИЯИ. После химического выделения из группы РЗЭ фракции Tb и некоторой выдержки была проведена масс-сепарация фракции Tb с целью выделения изобарной цепочки с $A = 153$. При масс-сепарации источник внедрялся в алюминиевую ленту и в таком виде помещался на пластмассовый сцинтиллятор. На рис. 24, как указывалось ранее, приведен результат измерений периода полураспада состояния 103,2 кэВ в ^{153}Eu , возбуждаемом при распаде ^{153}Gd . Мертвое время используемого дискриминатора в этом случае не превышало 10 нс, порог регистрации излучения не превышал 30 кэВ.

¹⁶⁹Yb. Источник ¹⁶⁹Yb приготавливается так же, как и источник ¹⁵³Gd. Регистрация низкоэнергетического излучения источника ¹⁶⁹Yb производилась пластмассовым сцинтиллятором размером $\varnothing 25 \times 25$ мм в 2π -геометрии при пороге регистрации $E \geq 30$ кэВ. Результаты измерений в ¹⁶⁹Yb были представлены ранее на рис. 27 и 28.

²²⁵Ac. Измерение периода полураспада ²¹³Po, так же, как и ²¹²Po, проводилось на источнике сложного изотопного состава в радиоактивной цепочке, начинающейся с ²²⁵Ac. Источник выделялся ионообменным методом из ²²⁹Th и высушивался на пластмассовом сцинтилляторе. Это обеспечивало 2π -геометрию регистрации излучения. На рис. 27 представлен временной спектр, характеризующий период полураспада ²¹³Po, а на рис. 32 приведены энергетические спектры, включающие в себя спектр β^- , α -, e -излучения цепочки ²²⁵Ac \rightarrow ²⁰⁹Bi и спектр задержанных $\beta^- - \alpha$ -совпадений.

²³²Th. Измерение периода полураспада основного состояния ²¹²Po проводилось также с использованием источника сложного изотопного состава в длинной радиоактивной цепочке. Источник приготавливался следующим образом: водный раствор азотнокислого тория наносился на поверхность пластического сцинтиллятора $\varnothing 10 \times 6$ мм и высушивался, затем сцинтиллятор склеивался с аналогичным сцинтиллятором при помощи стирола. Было нанесено в пересчете на металл около 10 мг тория [40]. Сцинтиллятор подобного размера в основном регистрирует только α^- - и β -частицы и электроны внутренней конверсии. Временной спектр приведен на рис. 27.

²⁴¹Am. Препарат ²⁴¹Am был получен в виде раствора после хроматографической очистки. Метод герметизации источника аналогичен способу приготовления источника ⁷³As. Этот источник, так же, как и источник ⁷³As, позволяет определить порог регистрации низкоэнергетического излучения и является в этом смысле более удобным, чем источник ¹⁶⁹Yb, вследствие большего периода полураспада и более высокой эффективности регистрации задержанных совпадений. На рис. 45 представлены результаты измерений, проведенные на этом источнике.

Таким образом, проведенный подбор эталонных радиоактивных источников позволяет осуществить временную и энергетическую калибровку спек-

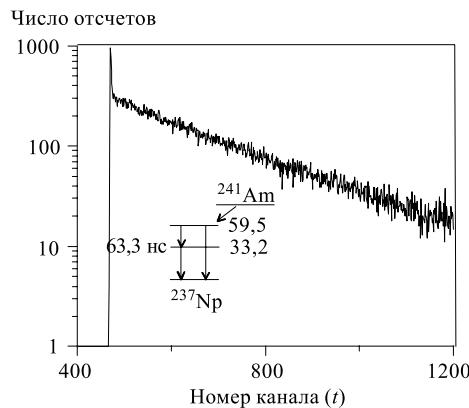


Рис. 45. Период полураспада состояния 59,5 кэВ в ²³⁷Np: $^{241}\text{Am} \rightarrow ^{237}\text{Np}$, $\Delta t = 0,73$ нс/канал, $T_{1/2} = 68,3$ нс

трометра по известным энергиям переходов в ядрах и периодам полураспада изомерных состояний ядер во временном диапазоне, начиная от 4 нс до 4 мкс, и в энергетическом диапазоне, начиная с 10 кэВ.

8. АМПЛИТУДНО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕИМПУЛЬСОВ ФОТОУМНОЖИТЕЛЕЙ

Изомерные состояния заряжаются или разряжаются, как правило, низкоэнергетическими γ -переходами, поэтому поиск изомерных состояний связан с необходимостью обеспечения регистрации γ -переходов, начиная от нескольких кэВ до 100–200 кэВ, т.е. для переходов, коэффициенты внутренней конверсии которых достаточно велики. Так как в методике ОВС в основном используются ФЭУ, то проблема влияния зарегистрированных шумовых импульсов ФЭУ на временное распределение коррелированных событий от исследуемого изотопа для низкоэнергетического излучения стоит на первом месте. Фотоэлектронные умножители относятся к тому классу приборов, которые преобразуют световое излучение в электрические сигналы. Процесс этого преобразования сопровождается рядом побочных эффектов, которые могут влиять на конечный результат проводимых исследований. При изучении, например, времен жизни возбужденных состояний ядер методом задержанных совпадений форма кривой совпадений может быть искажена вследствие появления, помимо зарегистрированного, основного импульса (ОИМ), а также предимпульсов, предшествующих ОИМ, и послеимпульсов (ПИМ), появляющихся после ОИМ. Процессы образования этих видов импульсов отражены в работах [48–58]. Заметим, что те, и другие импульсы генетически связаны с ОИМ. В работе [59] было проведено изучение амплитудно-временных характеристик ПИМ для нескольких типов временных ФЭУ. Каждая группа ПИМ имеет вполне определенное положение во времени относительно ОИМ. Можно представить следующую классификацию основных групп ПИМ:

1. Высокочастотные импульсы (ВЧИМ), обусловленные затухающими колебаниями ($f \approx 100\text{--}120$ МГц), возникающими сразу после прохождения импульсов с крутыми фронтами на контуре, образованном паразитными емкостями и индуктивностями оконечных каскадов ФЭУ, и на входе временного формирователя.

2. Импульсы, обусловленные оптической обратной связью (ООС). Время появления этих импульсов определяется временем прохождения электронов через ФЭУ. Эта величина лежит в диапазоне 20–60 нс. Причиной появления ООС является высвечивание атомов и молекул остаточных газов и конструкционных материалов ФЭУ, возбужденных электронами. Эти фотоны и являются причиной эмиссии вторичных фотоэлектронов с фотокатода ФЭУ.

3. Импульсы, обусловленные ионной обратной связью (ИОС). Процесс их появления связан с эмиссией электронов с фотокатода и близлежащих электродов под действием соударения с положительно заряженными ионами, которые образуются как при фотоионизации молекул остаточных газов, так и при их возбуждении электронным током в ФЭУ. Так как возникновение импульсов ИОС связано с относительно медленным перемещением ионов под действием электрического поля по сравнению с электронами, то они могут запаздывать по отношению к ОИМ на время от десятков наносекунд до десятков микросекунд.

4. Импульсы, обусловленные инерционной эмиссией динодов и входной камеры ФЭУ [49]. Время их появления после ОИМ варьируется от нескольких секунд до сотен секунд. Не во всех ФЭУ в равной мере наблюдаются рассмотренные процессы. Интенсивность их развития определяется конкретным типом ФЭУ, технологией его изготовления и используемыми конструкционными материалами, напряжением на ФЭУ, оптимизацией междуэлектродных потенциалов. Устранить ПИМ полностью невозможно, однако учет их влияния на результаты эксперимента в ряде случаев вполне реален. Детальное исследование временных характеристик ПИМ необходимо для оптимизации параметров автокорреляционного сцинтилляционного временного спектрометра, чтобы избежать возможных ошибок при интерпретации полученных результатов при регистрации низкоэнергетического излучения на фоне высокоэнергичного излучения.

8.1. Аппаратура. Обычно ПИМ исследуется осциллографическим или автокорреляционным методом. В работе [59] использовался последний метод. Блок-схема автокорреляционного спектрометра приведена на рис. 21. Спектрометр работал в режиме регистрации двухмерных совпадений $E - T$ как от радиоактивного источника, так и при подсветке фотокатода ФЭУ световым диодом (СД), излучающим в красной области спектра, для получения количественных данных. В качестве генератора применялся генератор наносекундных интервалов И1-8. Частота следования световых импульсов составляла 10 кГц. Длительность отдельного измерения равнялась 5 мин. При анализе ВЧИМ, когда существенным фактором оказывалось влияние длительности фронта импульса, амплитудно-временные характеристики исследовались при регистрации гамма-излучения пластическим сцинтиллятором с малым временем выsvечивания.

8.2. Временные характеристики послеимпульсов. На рис. 46, *a* представлено временное распределение ПИМ для XP2020Q при регистрации γ -излучения от источника ^{60}Co пластическим сцинтиллятором. Порог регистрации ПИМ не превышал 50 кэВ. Обращает на себя внимание периодическая структура в начальной части спектра, представленная на рис. 46, *б* ($N_k \sim 900-1100$), которая может соответствовать ВЧИМ ($f \sim 150$ МГц) и ООС. При изменении напряжения на ФЭУ или порога дискриминатора

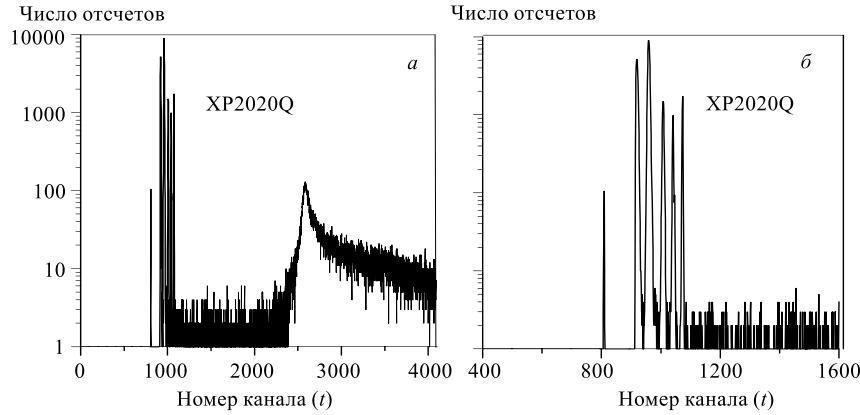


Рис. 46. Временное распределение ПИМ от источника ^{60}Co : $V_\phi = 1900$ В, $V_d = 0,05$ В, $\Delta t_k = 0,17$ нс/канал

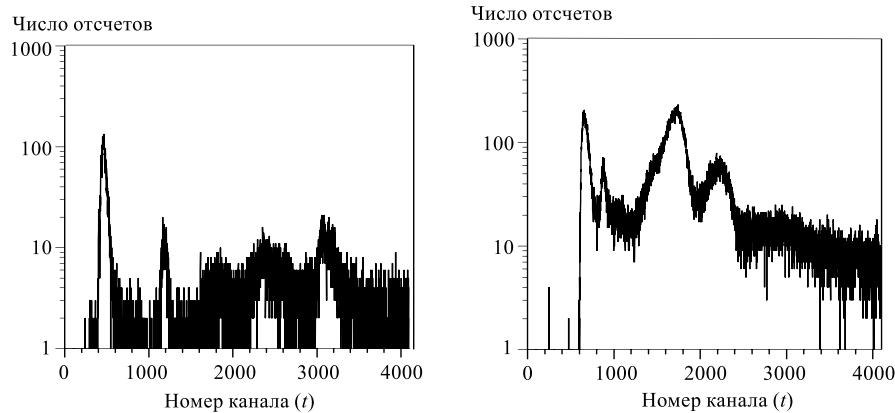


Рис. 47. Временное распределение ПИМ для ФЭУ-30, $\Delta t_k = 0,35$ нс/канал

Рис. 48. Временное распределение ПИМ для ФЭУ-87, $\Delta t_k = 0,35$ нс/канал

эта группа сохраняет в первом приближении свою структуру, хотя в группе происходит и перераспределение интенсивностей пиков и возникновение новых пиков. Пик в районе 2600 канала ($\Delta \sim 250$ нс) обусловлен ИОС. На рис. 47, 48 приведены временные распределения ПИМ для различных ФЭУ при их засветке СД. При повышении напряжения на ФЭУ-87 и ФЭУ-30 происходит постепенное размытие пиков ПИМ. При повышении напряжения на ФЭУ временное распределение от XP2020Q сохраняет свою структуру. Это

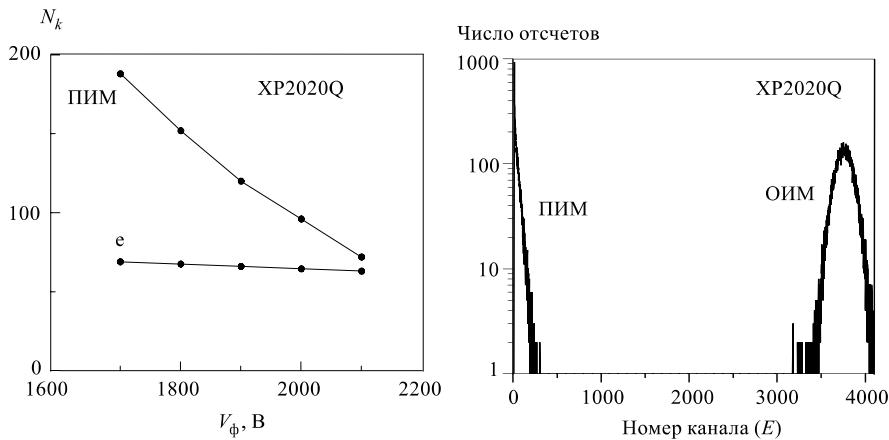


Рис. 49. Зависимость времени пролета носителей заряда, вызывающих ПИМ, и электронов от напряжения на ФЭУ: $V_0 = 0,5$ В, $\Delta t_k = 0,35$ нс/канал

Рис. 50. Амплитудное распределение ПИМ, вызванных ИОС; $V_\phi = 1900$ В

позволяет с достаточной точностью определить разницу во времени пролета носителей заряда в ФЭУ XP2020Q (рис. 49) в зависимости от напряжения на ФЭУ. Сравнение этих распределений свидетельствует о меньшей скорости носителей заряда, обуславливающей появление пика во временном спектре ПИМ, т.е. об ИОС. Наличие пика на временной характеристики ПИМ определяется тем фактом, что распределение поля между фотокатодом и первым динодом такое, что время, необходимое иону с данной массой и зарядом для достижения фотокатода, в первом приближении не зависит от точки образования иона. На подобное обстоятельство обращалось внимание в работе [50] при изучении ФЭУ RCA-7850. В исследованном нами временном диапазоне пики ПИМ для ФЭУ-87 сосредоточены в районе 140–160 нс, а для ФЭУ-30 — от 70 до 980 нс. Наблюдение значительного числа пиков ПИМ может быть связано с однократной или двукратной ионизацией атомов и молекул таких газов, как, например, H_2 , He , N_2 , A , Xe . Изучение временных характеристик транспортировки ионов для ФЭУ-87 и ФЭУ-30, подобных представленным на рис. 50, установило разную подвижность ионов, что свидетельствует о разных значениях M/Z . Заметим, что для всех ФЭУ во всех измерениях амплитуда выходного сигнала устанавливалась равной $V_0 = 0,5$ В. Дискриминатор работал в интегральном режиме. Качественная картина временных распределений для однотипных ФЭУ сохраняется.

8.3. Амплитудные характеристики послесигнальных импульсов. Различные группы ПИМ имеют разную зависимость от напряжения на ФЭУ и разные амплитуды выходного сигнала. Амплитуда ВЧИМ приблизительно пропорциональна ам-

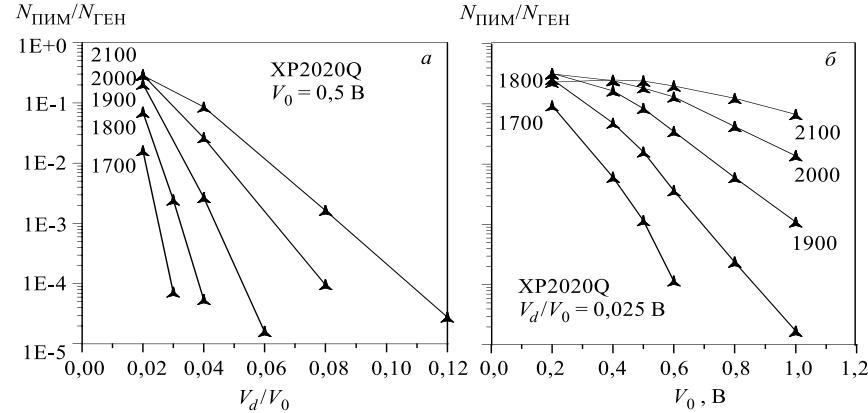


Рис. 51. Относительные интенсивности ПИМ, вызванных ИОС, для XP2020Q в зависимости от а) V_d/V_0 , $V_0 = 0,5$ В; б) V_0 , $V_d/V_0 = 0,025$

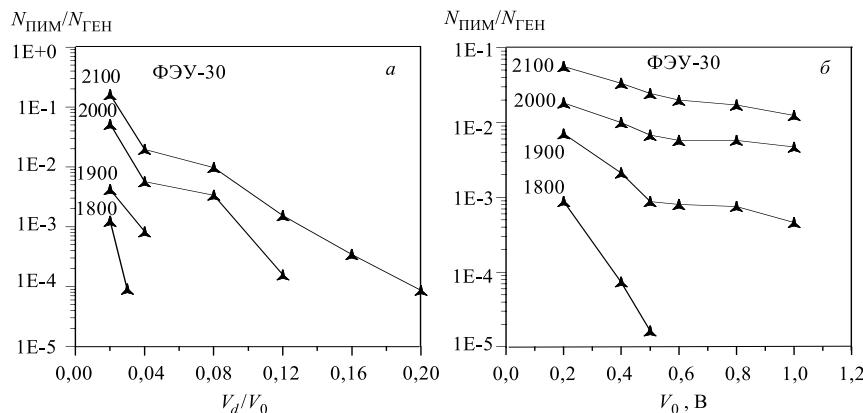


Рис. 52. Относительные интенсивности ПИМ, вызванных ИОС, для ФЭУ-30 в зависимости от а) V_d/V_0 , $V_0 = 0,5$ В; б) V_0 , $V_d/V_0 = 0,025$

плитуде выходного сигнала и не превышает для ФЭУ-30 $\sim 22\%$, для ФЭУ-87 $\sim 12\%$ и для XP2020Q $\sim 22\%$. Амплитуда выходного сигнала при этом варьировалась от 0,2 до 1,0 В. Амплитудное распределение ПИМ, обусловленное ИОС, приведено на рис. 50. Спектр ПИМ измерялся в режиме задержанных совпадений, спектр ОИМ — результат случайных совпадений. Более полное представление об амплитудах ПИМ можно составить по рис. 51, а, 52, а, 53, а, на которых приведены отношения числа ПИМ $N_{\text{ПИМ}}$, взятых из

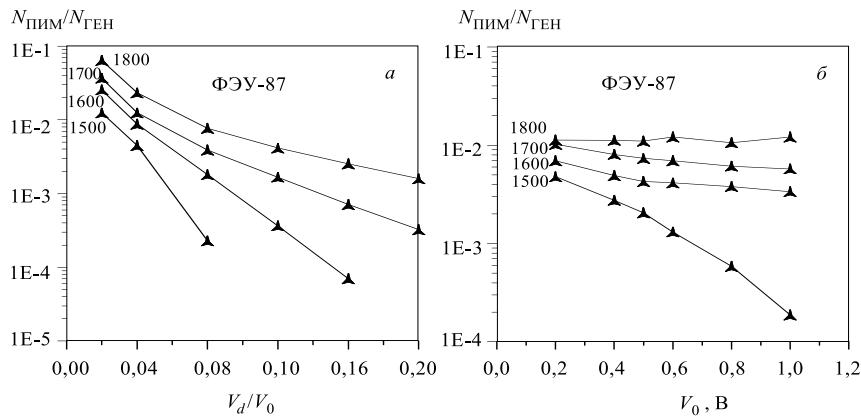


Рис. 53. Относительные интенсивности ПИМ, вызванных ИОС, для ФЭУ-87 в зависимости от а) V_d/V_0 , $V_0=0,5$ В; б) V_0 , $V_d/V_0=0,05$

распределений, подобных представленным на рис. 47–49, к числу световых импульсов $N_{\text{ген}}$. При $N_{\text{пим}}/N_{\text{ген}} = \text{const}$ амплитуды ПИМ увеличиваются (V_d/V_0 становится больше) по мере роста V_ϕ . Порог дискриминатора характеризуется V_d . На рис. 51, б, 52, б, 53, б приведены данные, характеризующие развитие процесса ионизации в различных ФЭУ. При этом относительный порог срабатывания V_d/V_0 оставался постоянным. Во всех рассмотренных случаях по мере роста электронного тока в импульсе возрастает относительное число ПИМ с большими амплитудами. В ФЭУ-87 по мере повышения V_ϕ это отношение стремится к постоянной величине, т.е. начинают преобладать импульсы больших амплитуд. Неожиданно, на первый взгляд, выглядят зависимости отношений максимальных значений амплитуд ПИМ, обусловленные ИОС, к амплитудам ОИМ от напряжений на ФЭУ для разных значений амплитуды (или тока) импульса на выходе ФЭУ (рис. 54). Большее значение этого отношения при малых токах в анодной нагрузке ФЭУ по сравнению с большими значениями тока в нагрузке при определенном напряжении V_ϕ означает, что ионный ток ПИМ в ФЭУ не пропорционален электронному. Подобная картина соответствует характеристикам, приведенным на рис. 51, б, 52, б, 53, б. Очевидно, что в рассмотренном временном интервале процесс ионизации, приводящий к образованию ПИМ, происходит в объеме между фотокатодом и первыми динодами. Подобная зависимость характерна для рассмотренных типов ФЭУ и, очевидно, означает, что меньшему ускоряющему напряжению в рассматриваемом объеме соответствует большее сечение ионизации ионов.

Использование сцинтилляционных детекторов в спектрометрах совпадений требует учета ПИМ при регистрации низкоэнергетического излучения в

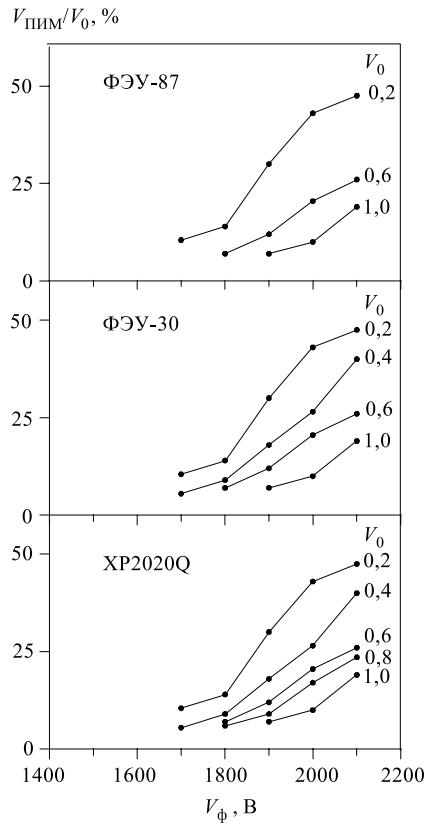


Рис. 54. Зависимости отношения амплитуд $V_{\text{ПИМ}}/V_0$ от V_ϕ . Цифры у кривых соответствуют амплитуде выходного сигнала V_0

на Рис. 54. Зависимости отношения амплитуд $V_{\text{ПИМ}}/V_0$ от V_ϕ . Цифры у кривых соответствуют амплитуде выходного сигнала V_0

на Рис. 54. Зависимости отношения амплитуд $V_{\text{ПИМ}}/V_0$ от V_ϕ . Цифры у кривых соответствуют амплитуде выходного сигнала V_0

на Рис. 54. Зависимости отношения амплитуд $V_{\text{ПИМ}}/V_0$ от V_ϕ . Цифры у кривых соответствуют амплитуде выходного сигнала V_0

спектрах совпадений на фоне регистрации излучения с большим энерговыделением. Полностью исключить влияние ВЧИМ можно в том случае, если максимальные амплитуды ВЧИМ, возникающие при регистрации излучения, меньше амплитуд импульсов, соответствующих энергиям переходов, заряжающих и разряжающих изомерное состояние. В этом случае повышение порога V_d выше амплитуды ВЧИМ позволяет получить неискаженную кривую задержанных совпадений. Другой способ устранения влияния ВЧИМ — это увеличение мертвого времени дискриминатора для исключения неинформативной области временного анализа. Лучшее согласование выхода ФЭУ со входом дискриминатора также позволяет существенно понизить уровень ВЧИМ. Устранение влияния ИОС на результаты эксперимента достигается подбором типа ФЭУ, оптимизацией V_ϕ , V_d . Среди рассмотренных нами ФЭУ лучшим для измерения времен жизни уровней методом ОСВС является XP2020Q, который имеет в начальной части временного диапазона участок не менее 200 нс, не искаженный ПИМ. Рассмотренная методика облегчает изучение процессов образования ПИМ, а также подбор ФЭУ для временных измерений с отбраковкой ФЭУ с большим уровнем ПИМ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Однокристальная временная спектрометрия является одним из вариантов метода задержанных совпадений, обеспечивающим эффективный поиск и измерение времен жизни нано- и микросекундных изомеров и основных состояний короткоживущих ядер. Основное его отличие заключается в возможности использования геометрии измерений вплоть до 4π и реализации

режима трехмерных совпадений на одном детекторе. Диапазон измеряемых времен жизни, перекрываемый этим методом, простирается от 4 нс до 100 с в зависимости от используемого варианта спектрометра задержанных совпадений. Эти спектрометры могут представлять собой стандартные спектрометры быстро-медленных совпадений СТАРТ–СТОП, спектрометры с регистрацией многократных сигналов СТОП, а также автокорреляционные временные спектрометры. В качестве детекторов излучения применяются как сцинтилляционные, так и полупроводниковые детекторы. Основное назначение однокристальных сцинтилляционных временных спектрометров — использование в «on-line»-экспериментах на пучках заряженных или нейтральных частиц, а также при анализе продуктов реакции делящихся ядер. На примере двухдетекторного четырехмерного ($E_1 - E_2 - E_3 - T$) сцинтилляционного временного спектрометра тройных совпадений показано, что фактически развита методика меченых ядер при наличии в них или изомерного возбужденного, или короткоживущего основного состояния, так как в спектрах совпадений вскрывается вся система каскадных γ -переходов, заряжающих или разряжающих изомерное или короткоживущее основное состояние ядра. Так как зарядка и разрядка изомерного состояния происходит, как правило, путем низкоэнергетических переходов с большим коэффициентом конверсии, то одновременно с γ -лучами происходит регистрация и рентгеновского излучения. Это позволяет по самому факту присутствия в γ -спектре совпадений рентгеновских лучей, характерных для ядра с определенным Z , определить элемент, в котором имеется изомерное состояние. Поэтому отпадает необходимость в использовании масс-сепаратора с лазерным ионным источником, обеспечивающим селективное выделение определенного элемента. Рассмотренный спектрометр позволяет исследовать за счет более высокой эффективности регистрации совпадений радиоактивные ядра, образующиеся в ядерных реакциях, идущих с малыми сечениями.

Эффективность поиска наносекундных и микросекундных изомеров наглядно продемонстрирована на примере анализа длинных радиоактивных цепочек, начинающихся с ^{225}Ac (8 радиоактивных ядер) и ^{232}Th (11 радиоактивных ядер). Очевидно, что наибольшая эффективность регистрации совпадений будет реализована при исследовании ядер, претерпевающих β^- - или α -распад. При K -захвате эта эффективность будет определяться коэффициентами внутренней конверсии переходов, связывающих изомерное состояние, и эффективностью регистрации рентгеновского излучения пластическим сцинтиллятором. К несомненным достоинствам метода следует отнести возможность использования АЦП в режиме стробируемых линейных ворот, что обеспечивает высокую эффективность регистрации низкоэнергетического γ -излучения в спектрах тройных совпадений. Продемонстрирована также высокая эффективность регистрации каскадного γ -излучения, связанного с изомерным состоянием, по задержанным совпадениям.

Высокая эффективность регистрации задержанных совпадений обеспечивает возможность проведения прецизионных измерений периодов полураспада изомерных состояний в нано- и микросекундном диапазоне за сравнительно короткое время — от нескольких десятков минут до нескольких часов в зависимости от интенсивности изомерного каскада.

Очевидно, что наиболее эффективно автокорреляционные однокристальные сцинтилляционные временные спектрометры могут быть использованы со спектрометрами типа «Crystal Ball» или со сцинтилляционными детекторами с большими неорганическими кристаллами с колодцем в «on-line»-экспериментах, хотя уже дополнение к ОВС только одного высокоэффективного полупроводникового детектора позволяет решать большинство задач по поиску и идентификации изомеров.

Контроль диапазона измеряемых времен жизни от 4 нс до 4 мкс и энергетического порога регистрации излучения, начиная с 10 кэВ, может быть обеспечен набором эталонных источников — ^{73}As , ^{151}Gd , ^{169}Yb , ^{232}Th , ^{241}Am .

Автокорреляционные временные спектрометры позволили осуществить отбор ФЭУ с малым уровнем послеимпульсов, влияние которых на временное распределение при анализе задержанных совпадений низкоэнергетического излучения может оказаться весьма значительным.

Несомненным достоинством рассмотренного метода является его простота, дешевизна и доступность серийно производимой аппаратуры и материалов, что может способствовать широкому использованию автокорреляционных временных спектрометров в физических исследованиях.

Авторы признательны В.Б.Бруданину и В.Г.Калинникову за содействие в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schwarzschild A.Z., Warburton E.K. — Ann. Rev. Nucl. Sci., 1968, v.18, p.265.
2. Бэлл Р.Э. — В кн.: Альфа-, бета-, гамма-спектроскопия. Под ред. К.Зигбана. М.: Атомиздат, 1969, вып.3, с.43.
3. Берлович Э.В., Василенко С.С., Новиков Ю.Н. — В кн.: Времена жизни возбужденных состояний атомных ядер. Л.: Наука, 1972, с.210.
4. Мейлинг В., Стари Ф. — В кн.: Наносекундная импульсная техника. М.: Атомиздат, 1973, с.384.
5. Lobner K.T.G. — In: Electromagnetic Interaction in Nuclear Spectroscopy. Ed. W.Hamilton, N.H. Publ. Comp., 1975, ch.6, p.173.
6. Аликов Б.А., Морозов В.А., Муминов Т.М., Усманов Р.Р. — В кн.: Современные методы ядерной спектроскопии. Л.: Наука, 1984, вып.11, с.132.
7. Fossan D.D., Warburton E.K. — Nucl. Spectr. and React., pt. C, 1974, p.307.
8. Nolan P.J., Sharpey-Schafer J.F. — Rep. Prog. Phys., 1979, v.42, No.1, p.1.

9. **Landaud G.** — Nucl. Instr. and Meth., 1964, v.26, p.117.
10. **Гольданский В.И., Подгорецкий М.И.** — Доклады АН СССР, 1955, т.100, с.237.
11. **Быков А.А., Витман В.Д., Мороз Ф.В. и др.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1980, т.44, с.918.
12. **Вылов Ц., Кузнецов В.В., Осипенко Б.Л. и др.** — Препринт ОИЯИ 13-6389, Дубна, 1972.
13. **Басиладзе С.Г.** — Препринт ОИЯИ 13-7955, Дубна, 1974.
14. **Radeloff J., Buttler N., Kesternich W. et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1967, v.47, p.109.
15. **Matoba M., Hyakutake H., Yamamoto H. et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1971, v.94, p.192.
16. **Lowe L.M., Boulter J.F., Prestwith W.V.** — Nucl. Instr. and Meth., 1972, v.105, p.461.
17. **Coates P.B.** — Nucl. Instr. and Meth., 1973, v.113, p.311.
18. **Glatz J., Lobner K.E.G.** — Nucl. Instr. and Meth., 1971, v.94, p.237.
19. **Catalog Bicron** — <http://www.bicron.com>.
20. **Van Klinken J., Taff L.M.** — Phys. Rev., 1977, v.C15, No.1, p.431.
21. **Kirkegaard P., Eldrup M.** — Comp. Phys. Comm., 1974, v.7, p.401.
22. **Zlokazov V.B.** — Comp. Phys. Comm., 1978, v.13, No.5/6, p.389.
23. **Tove P.A.** — Nucl. Instr. and Meth., 1957, v.1, p.95.
24. **Favret D.** — Preprint Lyon University LYCEN 6924, 1969, p.73.
25. **Морозов В.А., Муминов Т.М.** — ПТЭ, 1973, №1, с.79.
26. **Будзински М., Бутцев В.С., Морозов В.А. и др.** — ЯФ, 1975, т.21, с.913.
27. **Жильцов А.А., Морозов В.А., Разов В.И. и др.** — ПТЭ, 1987, №1, с.39.
28. **Борейко В.Ф., Будяшов Ю.Г., Валуев Ю.М. и др.** — Препринт ОИЯИ 13-6396, Дубна, 1972.
29. **Аликов Б.А., Андрейчев В., Громов К.Я. и др.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1979, т.43, с.904.
30. **Kennedy G., Deslauries J., Gujrathi S.C. et al.** — Phys. Rev. C, 1977, v.13, p.792.
31. **Bleck J., Haag D.W., Leitz W., Rible W.** — Phys. Lett., 1968, v.26B, p.134.
32. **Kelly W.H., McHarris W.G.** — Phys. Rev., 1969, v.188, p.1851.
33. **Leigh J.R., Nakai V., Maier K.H. et al.** — Nucl. Phys., 1973, v.A213, p.1.
34. **Аликов Б.А., Андрейчев В., Кузнецов В.В. и др.** — Препринт ОИЯИ Р6-12220, Дубна, 1979.
35. **Энuleскu A., Питику I., Вавачета I.** — Изв. АН СССР, сер. физ., 1974, т.38, с.2090.
36. **Greenwood L.R.** — NDS, 1975, v.15, p.497.
37. **Mouchel D., Hansen H.H.** — Z. Phys. F, 1984, v.315, p.113.
38. **Морозов В.А., Морозова Н.В., Лебедев Н.А.** — Препринт ОИЯИ Р6-95-303, Дубна, 1995.
39. **Морозов В.А., Чурин И.Н., Морозова Н.В.** — ПТЭ, 1998, №5, с.21.
40. **Морозов В.А., Калинников В.Г., Морозова Н.В. и др.** — ПТЭ, 1998, №5, с.26.
41. **Будяшов Ю.Г., Зинов В.Г., Краснобородов Б.С.** — ПТЭ, 1972, №1, с.114.
42. **Антихов В.А., Выонг Дао Ви, Динель З. и др.** — Препринт ОИЯИ 10-80-650, Дубна, 1980.
43. **Антихов В.А., Георгиев А., Гонс З. и др.** — Препринт ОИЯИ Р10-87-928, Дубна, 1987.

44. PAW. The Complete Reference. Version 2.03. CERN Program Library Long Writeup Q121, 1993, CERN, Geneva, Switzerland.
45. **Ваврышук Я., Громов К.Я., Злоказов В.Б. и др.** — ЯФ, 1998, т.61, №8, с.1424.
46. **Ваврышук Я., Юлдашев М.Б., Громов К.Я. и др.** — Изв. РАН, сер. физ., 1997, т.61, с.31.
47. **Firestone R.B.** — Table of Isotopes. VII. John Wiley&Sons. Inc., 1996.
48. **Ланько Э.В., Домбровская Г.С.** — ПТЭ, 1967, №5, с.218.
49. **Ветохин С.С., Гулагов И.Р., Перцев А.И.** — Одноэлектронные фотоприемники. М.: Энергоатомиздат, 1986.
50. **Morton G.A., Smith H.M., Wasserman R.** — IEEE Trans. NS-14, 1972, p.433.
51. **Krall H.R.** — IEEE Trans. NS-14, 1967, p.455.
52. **Matheson R.M., Heloy F.A.** — IEEE Trans. NS-15, 1968, p.195.
53. **Stevens S.S., Langworth J.** — IEEE Trans. NS-19, 1972, p.356.
54. **Coates P.B.** — J. Phys D: Appl. Phys., 1973, v.6, No.10, p.1159.
55. **Yamashita M., Yura O., Kamada Y.** — Nucl. Instr. and Meth., 1982, v.196, p.199.
56. **Incandela J.R., Ahlen S.P., Beatty J. et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1988, v.A269, p.237.
57. **Moszynski M., Costa G.J., Guillaume et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1991, v.A307, p.97.
58. **Ranucci G., Bonetti S., Cavalletti R. et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1993, v.A303, p.276.
59. **Морозов В.А., Морозова Н.В.** — ПТЭ, 1997, №4, с.97.

УДК 681.31; 518.3

НЕЙРОЧИПЫ, НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ И СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

H.M. Никитюк

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассмотрены архитектурные особенности и параметры ряда нейрочипов и нейрокомпьютеров, применяемых в научном приборостроении, описана тенденция их развития и использования в экспериментах по физике высоких и сверхвысоких энергий. Приведены сравнительные данные, характеризующие эффективность применения нейрочипов для отбора полезных событий, классификации элементарных частиц, реконструкции треков заряженных частиц и для поиска гипотетических частиц Хиггса, а также характеристики нейрочипов и ускорительных нейроплат отечественного производства.

Architecture peculiarity and characteristics series neural chips and neural computers used in scientific instruments are considered. Tendency development and its use in high energy and superhigh energy physics experiment are described. Compare data which characterize the efficient use neural chips for usefull event selection, classification elementary particles, reconstruction tracks charged particles and for serch hypotesis Higgs particles are given. The characteristics nativ neural chips and accelerated neural boards are considered.

1. ВВЕДЕНИЕ

Человеческий мозг, содержащий порядка 100 млрд нейронов, где каждый нейрон соединен с 1000 аналогичных ячеек, выполняющих относительно простые операции, по существу, является совершенным параллельным и, скорее всего, чисто аналоговым процессором. Самый совершенный компьютер трудно сравнивать с человеческим мозгом отнюдь не только потому, что он содержит гигантское количество логических ячеек-нейронов. Принципиальное отличие прежде всего состоит в способе обработки информации, высокой степени параллелизма и связности между нейронами. Кроме того, данные в нейронных сетях не содержатся в отдельном блоке памяти, как в обычной ЭВМ. Они распределены, запоминаются и содержатся в виде весовых коэффициентов. Важно также, что в нейронных сетях операции вычисления и коммутации данных совмещены.

В типичной ЭВМ дискретного действия для обработки простейшего изображения требуется выполнить множество операций над числовыми данными,

получаемыми к тому же после преобразования естественных аналоговых сигналов в дискретные эквиваленты. После такого преобразования, как правило, теряется много первичной информации, и поэтому компьютер восстанавливает ее в приближенном виде. Другими словами, при обработке образов цифровая ЭВМ имеет крайне низкий КПД. В человеческом мозге (в первом приближении) реализуется «картинная логика», когда без пространственного или временного сканирования обработка данных выполняется путем наложения отдельных картин друг на друга. Отсюда высокая скорость обработки образов при довольно больших задержках в отдельном нейроне (несколько миллисекунд). Человеческий мозг может работать на уровне значительных помех. Мы сталкиваемся с удивительными фактами восприятия информации, поступающей от органов чувств, на уровне больших помех или в искаженном виде: из отдельных фрагментов картины восстанавливается целый образ, распознаются знакомые голоса на уровне уличных помех, а дети уже в раннем возрасте узнают лица своих близких и т.д. И, наконец, последнее и не менее удивительное: мозг способен обучаться без каких-либо побуждений извне.

В зарубежной литературе вопросам применения искусственных нейронных сетей в различных областях науки и техники уделяется серьезное внимание, о чем свидетельствуют многочисленные публикации. Здесь можно отметить популярные статьи [1–3]. В [1] рассматривается проблема психики и мозга. Отмечается разнообразие нервных клеток, которое отметил один из основателей современной науки о мозге Сантьяго Рамон-и-Кахаль. Описывается упрощенная схема работы нейрона. Работа [2] посвящена вопросам обучения нейронных сетей. Описывается суть широко используемого для настройки искусственных нейронных сетей (ИНС) алгоритма обратного функционирования. Ряд конкретных схем ИНС приведен в [3], где показано, каким образом решается проблема четности с помощью ИНС.

Уже сложилось несколько направлений в создании ИНС в интегральном исполнении. Появился ряд периодических изданий, посвященных нейросетям, например «Neural Networks», «IEEE Transaction on Neural Networks», «Neural Computation» и др. Среди популярных работ, опубликованных в конце 80-х годов, можно отметить обзор Т. Кохонена [4], в котором данная проблема рассматривается с исторической точки зрения и детально описываются отличия в работе биологического мозга от работы цифровых ЭВМ. Заслуживает внимания также книга упомянутого автора, изданная на русском языке [5]. Ряд сведений о нейросетях даны в обзоре [6]. Много полезных сведений о вычислениях с помощью ИНС и о классификаторах, применяемых в научных исследованиях с помощью ИНС, приводится в обзоре [7]. В [8] дается систематическое изложение основ нейровычислений и приводится ряд примеров использования ИНС в научных исследованиях и в измерительной технике. Применение нейрокомпьютеров в разработках военной техники США рассмотрено в обстоятельных обзора [9,10]. В [11] описаны тео-

ретические основы различных моделей ИНС, дан обзор работ, посвященных использованию программных ИНС в экспериментах по физике высоких энергий. Из публикаций последних лет следует отметить тематический выпуск, посвященный нейрокомпьютерам и их применению, где, в частности, рассмотрены вопросы концептуального развития нейрокомпьютеров [12], описаны программные продукты (нейропакеты) [13], приведены параметры популярного нейрочипа ETANN [14] и оптических нейрокомпьютеров [15] и т.д. Можно отметить три основных сложившихся направления в исследованиях ИНС: математическое, физическое и технологическое.

Цель данного обзора состоит в том, чтобы представить тенденцию в развитии архитектуры современных нейрочипов и их применение в научных исследованиях. Обзор состоит из десяти разделов, заключения и приложения. Во введении рассматривается актуальность проблемы и отмечаются принципиальные различия между современными суперкомпьютерами и нейрокомпьютерами. Во втором разделе обзора описывается структура нейрона как логического элемента. Приводится приближенная схема биологического нейрона. Третий раздел посвящен краткому обзору наиболее известных моделей искусственных нейронных сетей (ИНС). Методам обучения ИНС посвящен четвертый раздел обзора. В пятом разделе описываются интегральные аналоговые и аналогово-цифровые нейрочипы. Шестой раздел посвящен описанию нейроплат и нейрокрейтов. В седьмом разделе обзора рассматриваются примеры применения популярного аналогового нейрочипа ETANN, а также других аналоговых нейрочипов. В восьмом разделе приводятся примеры применения аналоговых нейрочипов для измерения физических параметров и управления объектами. Применение для построения ИНС транспьютеров и цифровых сигнальных процессоров рассмотрено в девятом разделе. В десятом разделе описана архитектура и приведены примеры применения цифровых нейрочипов и нейрокомпьютеров. В приложении дана сводная таблица рассматриваемых нейрочипов и нейрокомпьютеров.

2. НЕЙРОН КАК ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ. ПРОСТЫЕ КЛАССИФИКАТОРЫ

Кратко рассмотрим то, что известно о нейроне как логическом элементе. Исходя из современных представлений, биологический нейрон можно схематически изобразить, не претендуя на строгость, как это показано на рис. 1. Нейрон состоит из тела, называемого сомой (soma), дендритов, по которым поступают входные сигналы, и аксона. С помощью аксонов сигналы от одного нейрона передаются к другим нейронам через синапсы, которые находятся на стыке между аксонами и дендридами. Предполагается, что мозг содержит до 10^{14} синапсов. Каждому синапсу ассоциируется сила связи или

весовой коэффициент. Возбужденные нейроны посыпают электрические импульсы, которые исходят из тела нейрона. Сигналы имеют амплитуду около

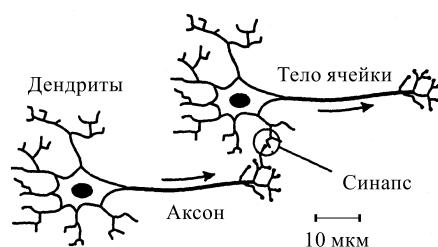
100 мВ длительностью 1 мс. Каждый нейрон имеет тысячи связей с другими нейронами. Обучение происходит путем изменения силы связи синапсов. В результате меняется влияние одного нейрона на другой. Причем, в зависимости от состояния синапса, он или возбуждает следующий нейрон, или запрещает его срабатывание. Обнаружено различие между клетками с короткими аксонами, которые взаимодействуют с соседними нейронами, и клетками с длинными аксонами, от которых сигналы идут в другие участки мозга.

Рис. 1. Упрощенная схема двух биологических нейронов. Дендриты являются входами нейронов. После возбуждения нейрона сигнал распространяется вдоль аксона в направлении, указанном стрелкой. Взаимодействие нейронов происходит на стыке, который называется синапсом [8]

искусственного (формального) нейрона. Стык или узел между нейронами называется синапсом. Он выполняет преобразование входной информации в сигналы, воспринимаемые нейроном. С точки зрения логики нейрон представляет собой в первом приближении пороговый элемент, который с помощью синапсов собирает сигналы и суммирует их в аналоговом сумматоре. Каждый нейрон время от времени оценивает эту сумму по отношению к пороговому уровню, после чего он оставляет свой выходной сигнал без изменения либо изменяет его. Если сумма превышает определенный порог, то выходной сигнал распространяется по аксонам дальше, причем сигнал может проходить через нейрон только в одном направлении. Искусственный нейрон имеет определенное количество входов с весами w_{ij} , сумматор с суммирующей функцией, пороговый элемент и чаще всего один выход. Связи между нейронами имеют резистивный характер. Для реализации пороговой функции в нейрон вводится смещение или смещающие элементы, выходы которых соединены со входами суммирующего элемента. На рис. 2 приведена схема идеализированного искусственного нейрона [2]. В общем виде выход нейрона x_j в однородной сети, содержащей n нейронов (т.е. сети без обратных связей с выходов на входы), описывается следующим уравнением:

$$x_j = f \left(\sum_{i=1}^n w_{ij} v_i + s \right), \quad (1)$$

где w_{ij} — вес связи между нейронами j и i , v_i — входной сигнал нейрона i , s — порог (смещение), который складывается со значением взвешенной



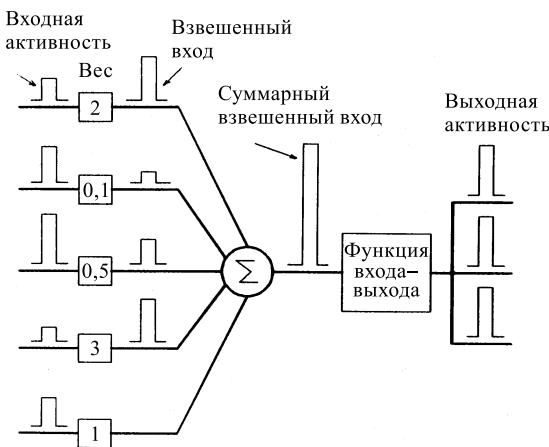


Рис. 2. Блок-схема формального (искусственного) нейрона с пятью входами. Нейрон обрабатывает электрические сигналы, поступающие на его входы. Каждый входной сигнал умножается на весовой коэффициент. С помощью сумматора значения взвешенных сигналов складываются. Если суммарный сигнал превышает порог, который вычисляется с помощью функции входа-выхода, на выходе нейрона появляется импульс

суммы, f — функция активации (например, сигмоидная функция, пороговая функция, линейная функция и др.). Используемая сигмоидная функция часто определяется из уравнения

$$y = 1/(1 + e^{-x}).$$

Первая часть выражения (1) представляет собой процедуру матричного умножения матрицы весов W и вектора активности (входного воздействия) v и является наиболее трудоемким процессом с точки зрения вычислений:

$$x = f(Wv).$$

Сигмоидная функция (рис. 3) дает такой же выход, как и обычная пороговая функция, но математически она проще. Однако, в отличие от пороговой функции, сигмоидная функция имеет производную, что весьма удобно в процессе обучения тех сетей, в которых используются алгоритмы, требующие выполнения такой операции. Следует отметить, что перемножение вектора на матрицу часто используется в численном анализе, поэтому по аналогии с созданными копроцессорами с плавающей точкой появились нейропроцессоры, выполняемые на стандартных печатных платах с

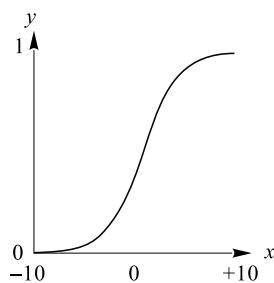


Рис. 3. Сигмоидная функция, задаваемая уравнением $y = 1/(1 + e^{-x})$

интерфейсом для связи с основной ЭВМ и возможностью каскадирования для повышения производительности.

Для моделирования ИНС искусственные нейроны группируются в линейные матрицы, называемые слоями или уровнями. Для решения различного рода задач, которые связаны с распознаванием образов, классификации объектов и др., создаются искусственные нейронные сети, которые представляют собой физические модели, состоящие из множества искусственных нейронов. Из многих десятков известных моделей нейронных сетей наиболее широкое применение нашли три модели: модель Хопфильда [16], машина Больцмана [17] и модель, описываемая радиально-базовыми функциями [18]. В процессе описания функционирования нейрочипов будут кратко рассмотрены и другие используемые модели.

Наиболее широкое применение в экспериментах по физике высоких энергий нашли первые две модели. Машины Больцмана представляют собой класс сетей, в которых используется шумовой процесс для нахождения глобального минимума оценочной функции. Модель Хопфильда базируется на представлении нейрона в виде сумматора-дискриминатора, на входах которого имеются весовые резисторы, моделирующие функции синапса. Элементу модели Хопфильда соответствует схема, изображенная на рис. 2.

При поступлении сигнала на вход искусственного нейрона он умножается на вес соответствующей связи и нейрон складывает все взвешенные входные значения. Действие такого элемента во многом зависит от того, какую функцию он выполняет: линейную, пороговую или сигмоидную. Сигмоидальные элементы можно рассматривать как приближения к реальным нейронам. Путем изменения порога суммирования (смещающего элемента) можно настроить одну и ту же схему на выполнение операций конъюнкции или дизъюнкции, что следует

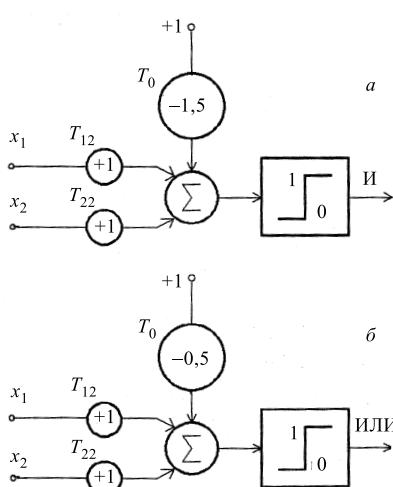


Рис. 4. Логические операции двух переменных И (a) и ИЛИ (b), выполняемые искусственным нейроном в зависимости от величины порога: T_{12} , T_{22} — веса; T_0 — смещение

из рис. 4. Здесь мы имеем пример элементарной однослоиной сети. В экспериментах по физике высоких энергий широко используется классификация элементарных частиц по определенным признакам. Это может быть тип событий, их особенность и проч. Связи между событиями могут быть линейными

и нелинейными. Так, линейная дискриминация для одномерной физической переменной эквивалентна пороговой функции, как это показано на рис. 5 [19]. Здесь мы имеем пример линейного классификатора, который можно реализовать с помощью нейрона с одним входом и со смещающим элементом, на выходе которого всегда присутствует сигнал логической единицы.

Для большого числа переменных линейная дискриминация возможна, если объекты (категории) линейно различимы. В таком случае решение возможно с помощью простой нейронной сети, реализующей дискриминатор Фишера, известный из статистических методов обработки данных [20]. В [21] кроме свойств дискриминатора Фишера описывается также ряд других классификаторов (алгоритм обратного функционирования, классификатор Гаусса и проч.), применяемых в экспериментах по физике высоких энергий.

Рассмотрим кратко суть дискриминатора Фишера. Допустим, что мы хотим разделить два класса событий A и B , содержащих события с двумя изме-

ренными переменными s_1 и s_2 (рис. 6). Видно, что если мы попытаемся дискриминировать события этих классов путем использования одномерного линейного классификатора (проецируя их координаты на оси S_1 или S_2), то окажется, что значительная часть событий наложится на другие. Однако, если проецирование выполнить на ось Фишера, то в значительной степени эти два класса событий будут различимы. Проекция на ось Фишера [22] описывается уравнением (1), которое реализуется с помощью простого типа однодirectionalной нейронной сети, имеющей входные и выходные нейроны со смещением. Далее, если граница между классами событий A и B носит нелинейный характер, то проблема решается

путем введения еще одного, скрытого (дополнительного) слоя, который чаще всего подобен входному слою, но у него нет внешних выводов. В результате получаются широко распространенные трехслойные ИНС, которые состоят из трех групп элементов: слоя входных элементов, на которые поступают

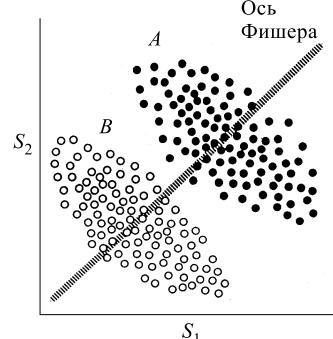


Рис. 6. Пример классификации групп событий A и B с помощью дискриминатора Фишера. S_1 и S_2 — оси координат

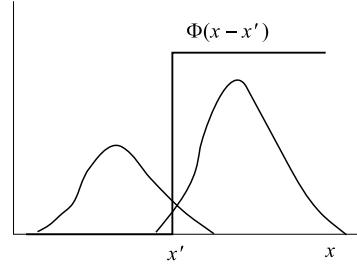


Рис. 5. Пороговая функция $\Phi(x - x')$, используемая для фильтрации событий одной переменной, которая эквивалентна линейной дискриминации для одномерной физической переменной

входные сигналы, слоя скрытых элементов, входы которых определенным образом соединены с выходами входных элементов. В свою очередь, входы третьего выходного слоя подключены к выходам скрытого слоя.

3. ИСКУССТВЕННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ. НЕЙРОПАКЕТЫ

Искусственные нейронные сети являются мощным инструментом для решения таких проблем, как распознавание образов, анализ данных и нелинейный контроль. Особенно эффективно с помощью ИНС решается совокупность задач, возникающих при распознавании образов, относящихся к категории, которую называют нерегулярными (случайными) задачами. Широкие перспективы открываются для использования ИНС в научном приборостроении, где требуется быстрое решение нелинейных задач. Формально нейронная сеть определяется как сеть с конечным числом слоев из однотипных нейронов. Популярными оказались две концепции построения ИНС: многослойные однонаправленные сети и сети Хопфильда, которые рассматриваются как обобщение однонаправленных сетей в силу нерегулярности связей между элементами и наличия обратной связи. В однонаправленной сети или в сети с прямыми связями потоки информации могут проходить только в направлении от предыдущего слоя к последующему.

В качестве примера ИНС первого типа может служить двухслойный персептрон Розенблата [23], у которого каждый элемент входного слоя соединен со входом каждого нейрона выходного слоя. Однако такая сеть имеет ограниченные функциональные возможности, поскольку не все комбинации входных значений правильно дешифруются. Поэтому широкое применение находят трехслойные сети. В такой сети входной вектор входного воздействия поступает на элементы входного слоя. Далее он перемножается на матрицы весовых коэффициентов этого уровня, после чего новая информация по связям поступает на средний (скрытый) уровень. Аналогичная операция повторяется на среднем и выходном уровнях. В настоящее время находят применение также многослойные сети, которые содержат несколько скрытых слоев. Вектор входного воздействия в однонаправленной сети распространяется от элементов входного слоя к скрытым элементам, образующим второй слой, которые передают сигналы к выходному слою. Скрытые элементы ведут себя оригинально: они могут создавать свои собственные представления о входных данных. Так, веса связи между входными и скрытыми элементами определяют, при каких сигналах на входах скрытый элемент будет активным. Сети со скрытыми слоями позволяют решать проблему четности, для реализации которой с помощью булевых выражений требуется инверсия переменных. На рис. 7 в качестве примера приведена прямоточная сеть, выполняющая функцию «ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ» [3]. Числа 1,5; 0,5 и -2 на

линиях обозначают веса. Если на один входной элемент подается 1, на другой 0, то на выходе скрытого элемента будет 0, поскольку его порог превышает 1. Однако с учетом того, что входные элементы имеют еще связи с выходным элементом, последний все-таки возбуждается (полагаем, что сигналу нечетности соответствует логическая единица). Наличие двух единиц на входах сети возбуждает скрытый элемент, который блокирует активность двух входных элементов, и на выходе сети будет сигнал логического нуля.

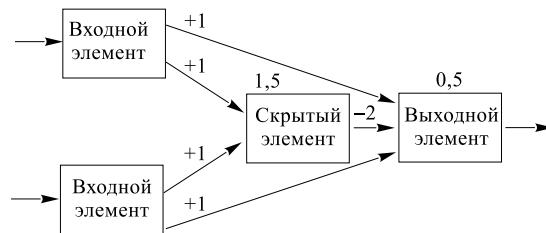


Рис. 7. Трехслойная односторонняя сеть со скрытым элементом, выполняющая функцию «ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ». Выходной элемент срабатывает только тогда, когда на один из входных нейронов подается сигнал, соответствующий логической единице. Числа, проставленные на соединениях, — это весовые коэффициенты (веса связи), а находящиеся над элементами — величины смещения

Вообще говоря, доступ к скрытому слою — это скорее всего технологическая проблема, поскольку стоимость нейроципа во многом зависит от количества контактов в корпусе.

В общем виде односторонняя трехслойная сеть содержит n входных нейронов, m скрытых нейронов и k выходных нейронов. Исходя из этого такую сеть мы будем называть $n - m - k$ -сетью.

Технологическая база ИНС. В современных суперЭВМ реализация нейронных сетей и связанных с ними идей выполняется программным или аппаратным способом. При аппаратной реализации в основном используются три подхода: аналоговый, цифровой и гибридный. Аналоговые ИНС имеют определенные преимущества при создании ИНС невысокой степени интеграции. Суть проблемы состоит в том, что для создания аналоговых ИНС требуется изготовление высокопрецизионных резисторов и конденсаторов. Кроме того, они подвержены воздействию электрических помех и шумов. И, наконец, требуется множество преобразователей уровней при стыковке с управляющими компьютерами.

В [15] отмечается, что переход от булевой к пороговой логике, используемой в ИНС, расширяет круг технологий изготовления нейроципов и нейрокомпьютеров. Для изготовления нейроципов используются в основном три типа технологий: технология электронных сверхбольших интегральных ми-

кросхем (СБИС), использование заказных СБИС или электрически перепрограммируемых логических матриц (ЭПЛМ) и оптические методы обработки данных.

Возможности системы автоматизированного проектирования (САПР) устройств на базе ИНС с использованием ЭПЛМ описаны в [24]. Ее особенности заключаются в регулярности структуры с выделенными трассами для соединения макроэлементов в требуемую функциональную схему, применении стандартных узлов, содержащихся в каталоге, возможности моделирования разработки с использованием программного комплекса.

Широкое применение, в том числе и для создания ИНС, получила САПР фирмы «Xilinx». Одна из последних разработок имеет 500 тысяч вентилей в одном корпусе микросхемы и работает на частоте 150 МГц. Заказной СБИС имеет статическую память емкостью 2 Мбит [25]. Однако специфика пороговой нейронной логики неадекватна технологии СБИС в силу того, что в существующих электронных схемах вся обработка информации происходит в двумерной плоскости СБИС или пластины, что создает трудности при реализации нейрочипов. Нетрудно создать на одном кристалле большое количество искусственных нейронов. Суть проблемы заключается в том, что при числе нейронов N в полносвязной ИНС требуется N^2 синапсов. В результате более 90 % площади кристалла используется под устройства, реализующие матрицу аддитивных синапсов. Кроме того, в полносвязной ИНС имеется множество пересечений проводников, каждое из которых требует дополнительного слоя металлизации и двух слоев изолятора. Поэтому разработка сложной ИНС, содержащей несколько сотен искусственных нейронов с использованием технологии СБИС, создает определенные трудности, которые можно было бы преодолеть, если бы в интегральной электронике можно было создавать трехмерные структуры на одном кристалле. На современном этапе создания нейрочипов и нейрокомпьютеров весьма перспективной можно считать технологию компоновки трехмерных кремниевых пластин [15].

Наряду с электрическими моделями ИНС находят также применение оптические нейронные сети [15]. Основным преимуществом таких устройств является то, что световые лучи не влияют друг на друга и могут многократно перекрещиваться. Кроме того, с помощью оптических методов более просто обрабатываются образы в реальном времени. В указанной работе дается обзор и приводится обширный список литературы, посвященной вопросам применения оптических методов и нанотехники для аппаратной реализации ИНС, а также современная оптическая элементная база и задачи, решаемые оптическими нейрокомпьютерами.

В [26] описана конструкция оптоэлектронного нейрокомпьютера, центральным элементом которого является оптоэлектронный векторно-матричный умножитель. Разработка световых нейронных сетей предполагает использование модулированных лазерных лучей, дифракционных решеток и го-

лографических систем. Более подробное рассмотрение принципов действия оптических нейронно-сетевых компьютеров выходит за рамки данного обзора. Читателям, интересующимся данной проблемой, рекомендуем ознакомиться с работой [27].

Наряду с ИНС широкое применение в научном приборостроении находят также нейрокомпьютеры. «Нейрокомпьютер — это вычислительная система с архитектурой аппаратного и программного обеспечения, адекватной выполнению алгоритмов, представленных в нейросетевом логическом базисе» [12]. Однако в ряде статей вместо термина «нейрокомпьютер» используется более широкое понятие «нейронная сеть», хотя в таких сетях отсутствуют искусственные нейроны. Примеры таких сетей будут рассмотрены в седьмом разделе.

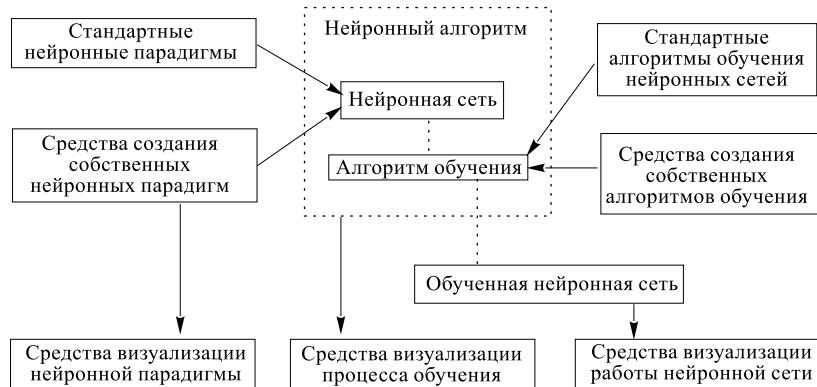


Рис. 8. Общая структура нейропакета

Нейропакеты. Как отмечается в [13], для реализации ИНС с помощью мощного парка современных вычислительных машин (в том числе и с использованием персональных компьютеров) необходимо иметь некоторый программный продукт, который моделирует нейрокомпьютер. Такая система программ получила название нейропакета. По существу, нейропакет является промежуточным звеном между архитектурой обычной ЭВМ и нейросетевым логическим базисом и аналогом широко известных компиляторов. Нейропакет является программной реализацией алгоритмов решения задач. Для решения различного типа задач уже создано 28 стандартных нейросетевых структур (парадигм). На рис. 8 приведена общая структура нейропакета. В цитируемой выше работе приводится также классификация нейропакетов. Среди них можно отметить средства разработки (библиотеки запрограммированных нейронных парадигм и алгоритмов обучения), универсальные нейропакеты, предоставляющие пользователю работу с несколькими нейронными

парадигмами и имеющие средства для создания собственных разработок, специализированные нейропакеты и т.д. Таким образом, с помощью нейропакетов создаются виртуальные ИНС, для реализации которых могут быть использованы различные архитектуры параллельных процессоров: матричные процессоры, архитектуры типа «гиперкуб» и вычислители, создаваемые на базе современных транспьютеров и цифровых сигнальных процессоров.

4. ПРОЦЕСС ОБУЧЕНИЯ ИНС

Важным свойством ИНС является то, что они сами себя программируют в процессе обучения. Если рассматривать в общем, то ИНС обучаются путем ввода наблюдаемых образцов в модель. Далее они сравнивают входные образцы с хранящимися. Когда сеть анализирует и классифицирует хранящиеся образцы в сравнении с входными, в сети формируются новые весовые коэффициенты и осуществляется самообучение [28]. Таким образом, процесс обучения ИНС в основном заключается в вычислении весовых коэффициентов и установлении связей между нейронами. Поэтому количество устанавливаемых связей в секунду является одним из основных параметров ИНС не только в процессе обучения, но и в процессе эксплуатации. Обученная для решения определенного класса задач ИНС может принимать решения на базе знаний, полученных в процессе обучения на основе реальных образцов, несколько отличающихся от используемых для обучения. Как правило, весовые коэффициенты различных входов ИНС хранятся в виде матрицы, так что входной вектор умножается на указанную матрицу весовых коэффициентов. Поэтому обучение ИНС распознаванию заданного класса образов требует много машинного времени, поскольку количество сочетаний весовых коэффициентов весьма велико даже в простой сети.

Основы современного обучения сформулированы в правиле Хебба: «Если аксон клетки A достаточно близок к клетке B , чтобы возбуждать ее, и если он повторно или настойчиво принимает участие в ее срабатывании, то в одной из этих клеток или в обоих происходит некоторый процесс метаболического изменения, так что эффективность клетки A как одной из клеток, вызывающих срабатывание клетки B , увеличивается» [11]. Таким образом, путем изменения синаптических связей обеспечивается тренировка сети и хранение данных. Самый простой метод тренировки заключается в том, что на входах сети задается контрольный образец, например, изображение цифры, и сравнивается активность на выходных ячейках с желаемым поведением. Затем подсчитывается погрешность, определяемая как квадрат разности между действительным и желаемым выходом. С целью уменьшения погрешности вес связи уменьшается. Проблема заключается в том, что каждый вес необходимо изменять на величину, пропорциональную скорости, с

которой изменяется погрешность (производная погрешности по весу). Этот процесс требует много машинного времени, особенно для сложной многослойной сети. Более эффективным и широко используемым в физике высоких энергий и в других направлениях исследований является метод обратного функционирования (обратного распространения), предложенный Вербосом в 1974 г. и изложенный в доступной форме в [2]. Суть алгоритма заключается в следующем. Чтобы выполнить обучение сети, необходимо корректировать веса каждого нейрона таким образом, чтобы уменьшалась погрешность — разница между действительным и желаемым выходом. Для этого вычисляется производная от погрешности по весам. Затем в зависимости от величины и знака погрешности значения соответствующих весов меняются. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не получится желаемый результат. Метод обратного функционирования позволяет эффективно настраивать многослойные сети, поскольку доступ к внутренним слоям, как правило, невозможен. Данный алгоритм успешно реализуется с помощью компьютеров. В последнее время в связи с появлением цифровых нейрочипов разработан ряд более простых и эффективных алгоритмов обучения ИНС, которые будут рассмотрены ниже.

5. АНАЛОГОВЫЕ И АНАЛОГОВО-ЦИФРОВЫЕ НЕЙРОЧИПЫ

Некоторые характерные особенности ИНС, и прежде всего такие, как регулярность структуры и небольшое число выполняемых операций, дают идеальные предпосылки для построения нейрочипов в виде микросхемы. Как отмечалось выше, в настоящее время существуют три вида нейрочипов: аналоговые, аналогово-цифровые и цифровые нейрочипы. Каждый из них имеет свои плюсы и минусы, однако многое зависит от типа используемой модели ИНС. Здесь мы рассмотрим два характерных нейрочипа, которые подробно описаны в литературе, — аналоговый и аналогово-цифровой. Краткие сведения о других нейрочипах данного класса будут приведены ниже при рассмотрении их применения.

Аналоговые ИНС. По своей архитектуре аналоговые нейрочипы наиболее близки к естественным. Поэтому не случайно первые коммерческие разработки нейрочипов, получившие применение в научном приборостроении, предназначены для обработки аналоговых сигналов. Наиболее широкое применение в экспериментальной физике получил модуль фирмы «Intel» ETANN, описания которого приведены в [14] на русском языке и в [29] на английском языке (ETANN — Electrically Tranable Analog Neural Network — электрически обучаемая аналоговая нейронная сеть). Нейрочип ETANN (80170NX) выполнен в виде большой интегральной микросхемы, содержащей 208 выводов. Среди них 2×64 выводов предназначены для входных сигналов и 64 вывода

являются выходными, которые, в свою очередь, можно соединять с 64 входными контактами. Это позволяет с помощью внутреннего мультиплексора создавать рекуррентную сеть на 64 входа (выхода). Кроме того, возможны несколько вариантов построения каскадных сетей. С целью расширения функциональных возможностей сетей отдельные модули могут соединяться также параллельно или в виде дерева.

На кристалле микросхемы, выполненной по технологии электрически перепрограммируемых ячеек, сформировано 64 нейрона. В свою очередь, каждый нейрон имеет 64 информационных входа, 16 входов используются для задания величин начальных смещений. Схемы для задания смещений образуют матрицу 16×64 . Для хранения весовых коэффициентов имеется матрица синаптических элементов размерностью 80×64 . Всего 64 нейрона содержат 10240 синапсов. Каждая матрица имеет 80 входов, причем 16 входов используются для подачи напряжения смещения, а остальные входы являются информационными. Далее, каждый нейрон подключен к 16 фиксированным источникам смещения. Задержка сигналов в одном нейрочипе составляет 1–3 мкс. Величины весов запоминаются в электрически перепрограммируемых аналоговых ячейках, так что каждый вход модуля имеет свой вес, умножаемый на величину входного сигнала, который может меняться в пределах от 0 до 3 В с точностью 6–7 бит. Структура синапса нейрочипа обеспечивает умножение входного сигнала нейрона с учетом знака на хранящееся в памяти синапса значение весового коэффициента. Значения произведений независимо суммируются с помощью аналогового сумматора, выход которого соединен с входом устройства, моделирующего сигмоидную функцию, наклон которой можно программировать и контролировать. Эффективная вычислительная мощность модуля эквивалентна $4 \cdot 10^9$ операций с плавающей точкой в секунду, что сравнимо с мощностью современного суперкомпьютера. Важно также, что нейрочип ETANN наряду с аналоговыми сигналами при определенных условиях может использовать и цифровые сигналы для вычислений [14].

Аналогово-цифровой нейрочип ANNA. Для решения многих задач с помощью ИНС не требуется высокой точности. В то же время ряд функций ИНС, в том числе и программирование работы, более эффективно выполняется цифровыми методами. Поэтому весьма перспективными являются гибридные нейрочипы, в которых часть функций выполняется с помощью аналоговых устройств. Блок-схема и характеристики гибридного нейрочипа ANNA (Artificial Neural Network ALU — искусственный нейрочип с арифметико-логическим устройством) описаны в [30,31]. Модуль специально разработан для решения классификационных задач и прежде всего для распознавания рукописных текстов. Однако его архитектура позволяет реализовать также сеть Хопфильда. Модуль выполняет до $2 \cdot 10^6$ умножений и сложений в секунду и может производить до $5 \cdot 10^9$ соединений в секунду. Арифметические операции выполняются с точностью до 6 бит при вычислении весовых

коэффициентов, и 3 бита определяют состояния на выходах нейрочипа. Аппаратная система поддержки нейрочипа состоит из персонального компьютера и нейроплаты, выполненной в стандарте VME, на которой смонтированы нейрочип и цифровой сигнальный процессор. Цифровой сигнальный процессор используется для программирования нейрочипа и обучения сети. В нейрочипе содержится 4096 синапсов, которые с помощью мультиплексора позволяют создавать сети, имеющие сотни и тысячи соединений. С помощью команд можно запрограммировать количество синапсов в нейроне от 16 до 256. Тогда количество нейронов может составлять от 256 до 16. На рис. 9 приведена блок-схема нейрочипа. Входные 64-разрядные данные (по 3 бита на слово) в нейрочип заносятся последовательно по четырем независимым

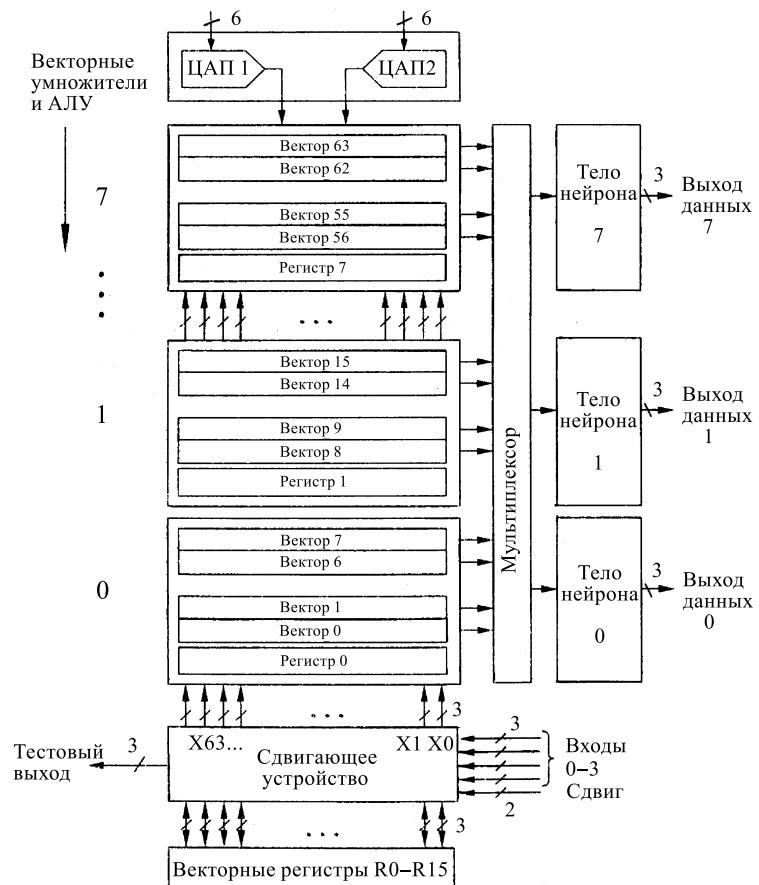


Рис. 9. Блок-схема нейрочипа ANNA

интерфейсам с частотой 120 Мбит/с. Основу нейрочипа составляют восемь векторных умножителей. В свою очередь, каждый умножитель содержит регистр, с помощью которого запоминается вектор состояния, и восемь АЛУ, каждое из которых подключено к 64 синапсам. С помощью мультиплексора осуществляются связи между выходами АЛУ и входами (телами) нейронов. Если содержимое регистров каждого АЛУ различно, то полученная сеть будет содержать максимальное количество нейронов — 256. Естественно, что архитектура нейрочипа позволяет программировать многослойные сети. Тело нейрона реализует сигмоидную функцию и преобразует результат операции в цифровое трехразрядное слово. Веса хранятся в виде электрических зарядов на конденсаторах. Для преобразования цифровых данных в аналоговые сигналы в процессе занесения весовых коэффициентов служат цифроаналоговые преобразователи (ЦАП1 и ЦАП2).

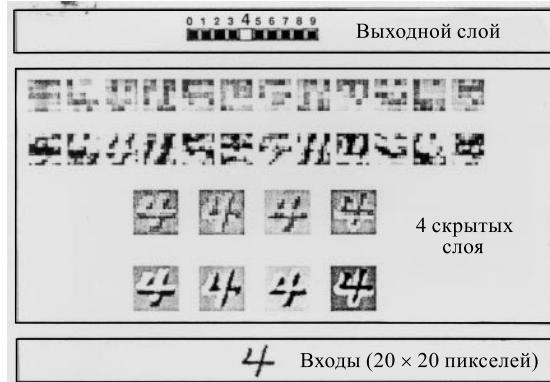


Рис. 10. Пример, иллюстрирующий состояния входного, четырех скрытых и выходного слоя сети для рукописной цифры 4 [30]. Сеть имеет 400 входов (20×20 пикселей). Состояния входов и четырех скрытых слоев имеют серый фон (цвет). Состояния на выходах соответствуют белому (правильный ответ) и черному цвету — на остальных выходах (отрицательный ответ)

Для экспериментов по распознаванию рукописных текстов была использована пятислойная прямоточная сеть, содержащая 20×20 входов и 10 выходов. На рис. 10 приведен результат эксперимента. Рисунок состоит из трех частей, характеризующих состояния входного, четырех скрытых и выходного слоя нейронной сети. Внизу показан входной образец (рукописная цифра 4). Средняя часть иллюстрирует процесс обработки информации в четырех скрытых слоях. В верхней части показано состояние выходного слоя. Нейрочип распознает до 20 символов в секунду. Для распознавания цифры 4 потребовалось 130 тысяч соединений.

6. НЕЙРОПЛАТЫ И НЕЙРОКРЕЙТЫ

Для эффективного использования нейрочипов необходимы системы тренировки и интерфейсы для цифровых процессоров общего применения. Поэтому наряду с нейромодулем ETANN фирма «Интел» выпускает аппаратную систему поддержки (систему моделирования) и гибридную вычислительную плату в стандарте VME [32]. Система позволяет тренировать одновременно до восьми модулей с помощью персонального компьютера i486. Разработан также гибридный процессор, смонтированный на двух платах. На одной плате установлена микроЭВМ 68070 с двухпортовой памятью емкостью 2 Мбайт, с двумя каналами прямого доступа и параллельно последовательный интерфейс для обмена данными с ПК. На другой плате расположены два модуля ETANN и два разъема для ввода аналоговых сигналов. Обмен данными между платами осуществляется с помощью прецизионных АЦП и ЦАП.

Цифроанalogовые преобразователи выполняют следующие функции: задают весовые коэффициенты, значения смещений и осуществляют программирование сигмоидной функции. С помощью АЦП выходы нейронной сети подключены к микроЭВМ. С учетом перспективности нейроплат в [33] проведено исследование каскадируемых гибридных плат, выполненных в стандарте VME. На рис. 11 приведена блок-схема экспериментальной системы, которая состоит из трех модулей ETANN, расположенных на плате VME. Такая структура получила название VME-3ETANN. Система может реализовать одно-, двух- или трехслойную ИНС. Такие конфигурации образуются путем использования стандартных интерфейсов J_1 , J_2 , расположенных на передней панели платы VME, и интерфейсов S_1 и S_2 , находящихся непосредственно на плате. Например, используя только интерфейсы S_1 и S_2 , можно построить трехслойную сеть. Разработанная архитектура позволяет создавать сети, имеющие кратное 64 количество входов и выходов. Поскольку модуль выполнен в стандарте VME, нет проблем со стыковкой аналоговых входов со вспо-

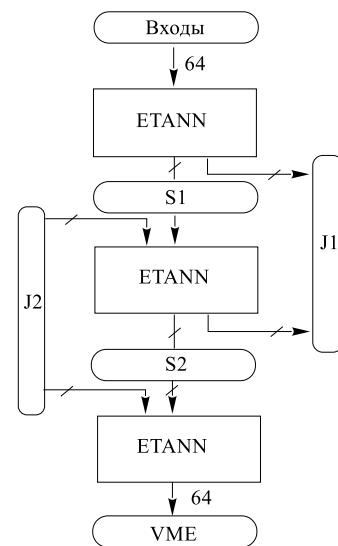


Рис. 11. Блок-схема стандартной нейроплаты VME-3ETANN: J_1 , J_2 , S_1 и S_2 — интерфейсы стандарта VME. Используя выходы разъема J_2 , можно реализовать одно- и двухслойную ИНС. Используя последовательно включенные модули ETANN с помощью интерфейсов S_1 и S_2 , можно реализовать трехслойную ИНС. По остальным шинам, обозначенным косой чертой, передаются 32-разрядные данные

могательными модулями, необходимыми для фильтрации входных данных и преобразования типа АЦП и ЦАП. Функция программы-драйвера сводится к выбору процессорной платы, установке моды работы (однонаправленная сеть или сеть с обратной связью), чтению или записи весов, установке адресов синапсов и т.д.

В [34] описан гибридный нейрокомпьютер, выполненный в виде крейта, содержащего 9 модулей в модернизированном стандарте VME [35] (версия VME9U с размерами платы 366,7×400 мм). Среди них два модуля содержат аналоговые нейрочипы и на двух модулях смонтированы цифровые нейрочипы типа M16 (см. ниже). Остальные модули содержат микропроцессоры, интерфейсы и контроллеры. Создание такой системы преследует три цели: использование нейрокомпьютеров для регистрации вторичных вершин распада в эксперименте WA92; исследование и сравнение возможностей аналоговой и цифровой ИНС в реальных экспериментах и внедрение гибридной нейросистемы в другие эксперименты. Для обеспечения наладки и работы гибридного нейрокомпьютера используется программа NEURAL [34], которая включает в себя подпрограммы обучения с помощью алгоритма обратного функционирования, подпрограмму вычисления коэффициентов для линейного дискриминатора Фишера и т.д.

7. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГОВЫХ И АНАЛОГОВО-ЦИФРОВЫХ НЕЙРОЧИПОВ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Обработка сигналов. С помощью ИНС эффективно решается проблема фильтрации сигналов на уровне значительных помех. Между цифровым фильтром и искусственным нейроном имеется прямая аналогия [29]. Принципиальным отличием искусственного нейрона от цифрового фильтра является наличие сигмоидной передаточной характеристики. Если к нейрону добавить элементы задержки и исключить нелинейность в передаточной характеристике, то получим формальный эквивалент фильтра. Это свойство нейрона позволяет использовать ИНС для обработки сигналов с применением быстрого преобразования Фурье или других методов. В [36] показано, каким образом нейрочип ETANN может быть использован в качестве фильтра сигналов. На рис. 12, *a* приведена трехслойная нейронная сеть [36]. Справа показаны два нейрона со смещением, а внизу — специальная аналоговая память последовательного типа с ответвителями. Количество нейронов в скрытом слое может меняться от 3 до 32. Показано, что чем больше нейронов в сети, тем «тоньше» настройка. Для настройки сети использовался алгоритм обратного функционирования (рис. 12, *б*), который в математической форме

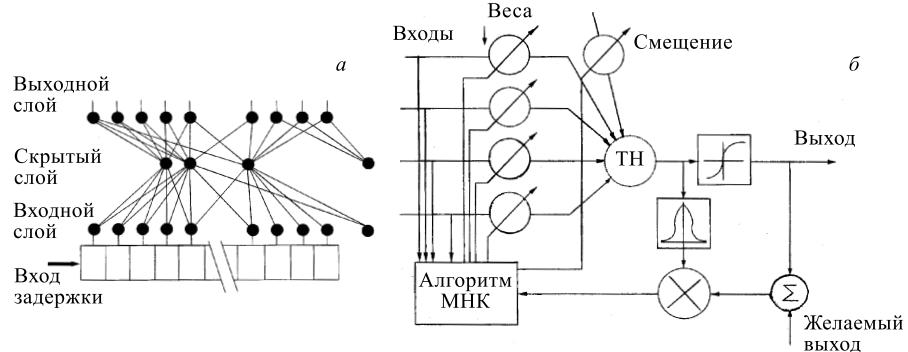


Рис. 12. Использование нейрочипа ETANN в качестве фильтра сигналов: *а*) блок-схема трехслойной односторонней нейронной сети (черными кружками обозначены нейроны); справа изображены элементы смещения; внизу — аналоговая линия задержки с ответвлениями; *б*) упрощенная схема обучения с помощью метода обратного функционирования для одного нейрона. ТН — тело нейрона; МНК — метод наименьших квадратов. Кривые изображают сигмоидную функцию и ее производную. Σ — сумматор, \times — схема умножения

(упрощенно) представлен в виде

$$f(\alpha) = 2/(1 + e^{-G\alpha}) - 1,$$

здесь G — параметр сигмоидной функции и

$$\alpha = \sum (a_i w_i + b_i w_i), \quad (2)$$

где a_i и b_i — i -й нейрон и i -й вход смещения соответственно и w_i — весовой коэффициент. Причем суммирование выполняется по всем связям, включая и элементы смещения b . Матрица весов получена с помощью алгоритма обратного функционирования. В данной работе использовался модифицированный вариант алгоритма обратного функционирования. Обычно для обучения используется пара векторов, состоящая из входного вектора и желаемого выходного вектора. Во время обучения эти данные подаются на входы сети, и веса меняются до тех пор, пока не получится желаемый результат. В предлагаемой версии алгоритма действительное значение входа используется также в качестве желаемого выхода. Далее, после первой итерации выбираются произвольные веса, и с помощью алгоритма обратного функционирования полу-

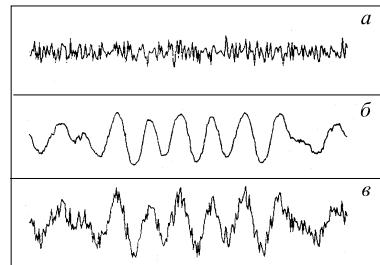


Рис. 13. Результат фильтрации спектра с использованием семи скрытых нейронов: *а*) вход фильтра в отсутствие сигналов; *б*) вид спектра после фильтрации; *в*) входные сигналы [36]

чаются новые веса для решения уравнения (2). С целью повышения точности настройки итерации повторяются. На рис. 13 показан результат фильтрации.

Примеры применения нейрочипа ETANN в экспериментах по физике высоких энергий. Необходимость в использовании ИНС в экспериментах по физике высоких энергий диктуется не только сложностью топологий редких событий, регистрируемых на уровне больших шумов, но и стремлением получить систему отбора частиц с высокой селективностью, так как полезное событие может содержаться среди $10^{10} - 10^{12}$ фоновых. Одним из преимуществ использования ИНС в экспериментах по физике высоких энергий является возможность распознавания сложных коррелированных событий между входными переменными, высокое быстродействие и высокая помехоустойчивость. Для решения задач, связанных с классификацией элементарных частиц, таких, как разделение легких и тяжелых кварковых струй, для идентификации частиц, а также в триггерных системах для выделения полезных событий на фоне помех, используются прямоточные ИНС [37].

Рассмотрим пример применения нейрочипа ETANN для обработки событий, регистрируемых в вершинном детекторе. Назначением вершинных детекторов в экспериментах по физике высоких энергий является нахождение и измерение времени жизни короткоживущих частиц порядка 10^{-10} с и менее. Топология таких событий имеет, как правило, одну или несколько вторичных вершин распада, которые пространственно отделены от первичной вершины и одна от другой на определенное расстояние, составляющее несколько миллиметров и менее. Объективным параметром, определяющим, ассоциируется ли заряженная частица со вторичной вершиной, является прицельный параметр P (или «промашка»), поскольку его значение не зависит от импульса частиц и поэтому не требуются дополнительные измерения. Так, если частица исходит прямо из точки первичной вершины распада, то «промашка» $P = 0$. В [38] гибридный процессор с нейрокомпьютером ETANN используется для детектирования вторичной вершины распада частиц в эксперименте с фиксированной мишенью по поиску тяжелых цветных кварков. Исследование проводилось при условии, что отношение сигнал/шум равно 1:50000. На рис. 14 приведена схема установки. Частицы, исходящие из мишени и вторичной вершины распада, детектируются с помощью микрополоскового полупроводникового телескопа. После усиления и оцифровки сигналов координаты частиц поступают на входы ассоциативных запоминающих устройств, с помощью которых отбираются только заведомо полезные треки, имеющие заданный наклон. Прицельный параметр определялся путем использования предварительно обученной нейронной сети. В табл. 1 приведены сравнительные данные, полученные с помощью моделирующей нейронную сеть программы и с помощью гибридного процессора.

Как следует из табл. 1, процент полезных событий, идентифицированных с помощью нейрочипа ETANN, несколько хуже, нежели это делает программа

Таблица 1. Процент полезных, фоновых событий и шумов, которые идентифицированы верно, неверно или неопределенны с помощью моделирующей нейронную сеть программы и аппаратной сети, созданной на основе нейрочипа ETANN

Программа	Полезные соб.	Фоновые соб.	Неопределенные соб.
Сигнал	57 %	37 %	6 %
Шум	92 %	6 %	2 %
ETANN			
Сигнал	48 %	48 %	4 %
Шум	92 %	6 %	2 %

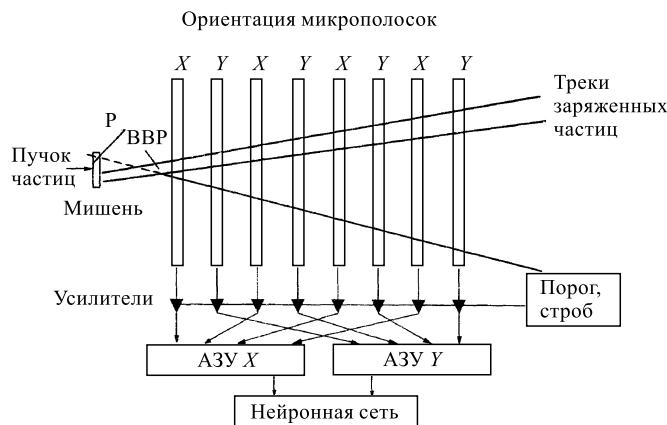


Рис. 14. Блок-схема установки с нейронной сетью для регистрации координат вершины распада вторичных частиц. ВВР — вторичная вершина распада; АЗУ — ассоциативное запоминающее устройство. Если продлить трек, исходящий из ВВР, в сторону мишени, то он пересечет ее в определенной точке плоскости мишени. Перпендикуляр, опущенный из этой точки на ось *X*, будет равен прицельному параметру *P*. С помощью ассоциативных запоминающих устройств регистрируются треки с заданным наклоном. Функция обученной ИНС сводится к регистрации только тех событий, которые имеют в пределах заданной точности прицельный параметр, отличный от нуля

при одинаковых значениях процентов фильтрации шумов. В то же время с помощью процессора гораздо лучше фильтруются фоновые события, т.е. такие события, которые не содержат вторичной вершины распада при одинаковых значениях фильтрации шумов. Процент распознавания неопределенных событий практически одинаков для обоих методов. В [39] описано использование ИНС, выполненной на основе нейрочипа ETANN в качестве фильтра сигналов, получаемых с помощью жидкостного времязадеяния камеры.

ИНС тренировалась путем подачи спектра сигналов, регистрируемых в сегменте, содержащем 192×2048 каналов. Функции фильтра заключались в том, чтобы обеспечить высокое отношение сигнал/шум в процессе определения позиции пика и восстановления треков заряженных частиц. Настройка сети выполнялась в три этапа. Вначале для обучения моделировались изображения треков на уровне шумов. После этого проверялась работа программы фильтрации. После получения удовлетворительного результата составлялись таблицы весов, параметров сигмоидной функции и величин смещений. Затем эти данные использовались для обучения аппаратной ИНС. На рис. 15 приведены результаты фильтрации. В верхней части рисунка показана картина до фильтрации. В нижней части рисунка отчетливо видны треки частиц, которые стали заметными после фильтрации. Применение ИНС позволило повысить скорость обработки сигналов в 10^6 раз по сравнению с обычными методами реконструкции треков заряженных частиц.

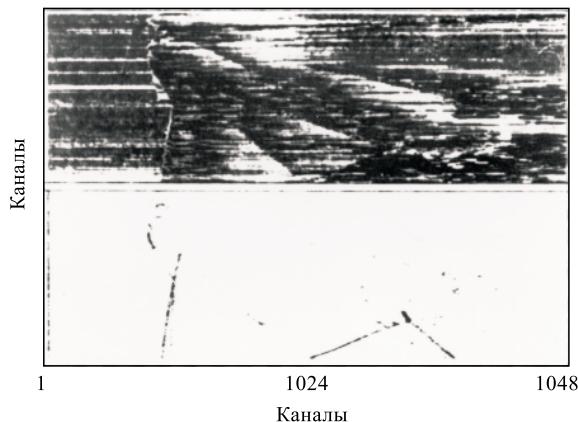


Рис. 15. Пример фильтрации треков заряженных элементарных частиц, зарегистрированных с помощью жидкого аргоновой времязадеяционной камеры: верхняя часть — картинка до фильтрации, которая была получена с помощью математического фильтра, внизу — после фильтрации. Данные были получены от фрагмента детектора, содержащего спектр для 192×2048 каналов [39]

Возможность использования нейроочипа ETANN для распознавания событий, регистрируемых с помощью сцинтилляционного калориметра в Лаборатории им. Э.Ферми, была показана в [40]. Затем на базе данного нейроочипа была создана система выработки импульса запуска установки (триггерная система), где в качестве детектора используется электромагнитный калориметр [41]. Функция триггерной системы заключается в том, чтобы с помощью зарегистрированного изолированного кластера идентифицировать: а) наличие изолированного фотона в центральной области калориметра; б) факт

регистрации изолированного электрона или фотона в торце калориметра; в) обнаружение полулептонного b -распада. Нейроchip ETANN был выбран с целью реализации алгоритма регистрации изолированной частицы в триггерной системе второго уровня. Калориметр разделен на 25 электромагнитных и 25 адронных частей. Причем каждой части соответствует один входной нейрон. Сигналы на каждый скрытый нейрон поступают от выходов пятидесяти нейронов входного слоя (рис. 16). Эффективность регистрации составляет 97 %. На рис. 17 приведена картинка с дисплея, на которой изображено полезное событие, которое не регистрировалось с помощью ранее используемого обычного алгоритма без применения нейроchipа. Черные фигуры обозначают теряемую электронами энергию в торцевой части калориметра.

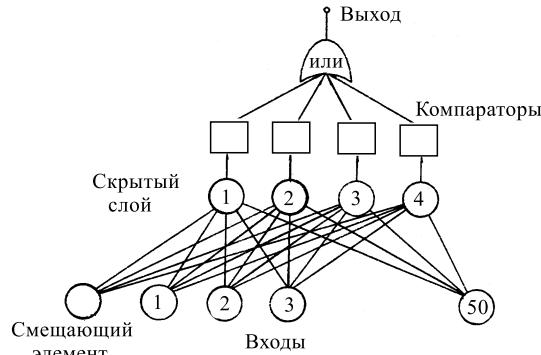


Рис. 16. Блок-схема части однонаправленной ИНС для вычисления алгоритма регистрации изолированной частицы с помощью сцинтилляционного калориметра. Сигналы на входы сети подаются от 25 электромагнитных и 25 адронных сегментов калориметра

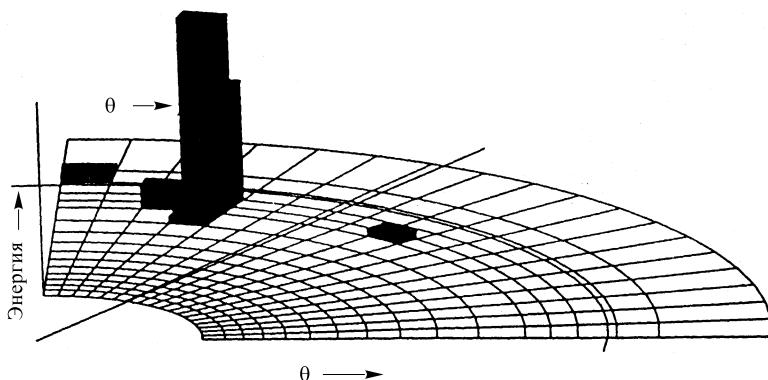


Рис. 17. Пример события, зарегистрированного с помощью ИНС. Чёрные фигуры изображают энергию в продольном направлении, теряемую электронами в торцевой части калориметра. Максимальное значение энергии равно 14,4923 ГэВ [41]

Известен ряд работ, посвященных использованию аналогового нейроchipа ETANN для идентификации элементарных частиц. В [42] нейроchip входит в

состав устройства, предназначенного для выработки импульса, запускающего установку, с целью регистрации и идентификации тау-лептонов. Данные на входы сети подаются от сегмента калориметра, содержащего $5 \times 5 \times 2$ ячеек. Сеть имеет структуру 50-50-1. В [43] в качестве детектора используется черенковский детектор кольцевого изображения (RICH-детектор) с целью отделения протонов от пионов. Основу экспериментальной установки составляет черенковский радиатор из кристаллов NaF толщиной 10 мм и оригинальный светочувствительный детектор. Световой конус, эмиттируемый из радиатора, отражаясь от кристаллов, экспонируется в виде кольца черенковского света в дрейфовой области, наполненной гелием. Далее черенковские фотоны проходят сквозь окно в кварцевом стекле и конвертируются в электроны в светочувствительном газе. Затем фотоэлектроны дрейфуют в направлении чувствительных проволочек многопроволочной пропорциональной камеры. Как следствие этого, на электродах многопроволочной пропорциональной камеры (МПК) индуцируются электрические сигналы. Катодная плоскость МПК состоит из 12×12 микрополосок (8×8 мм каждая) квадратной формы, что позволяет получать две координаты для каждого фотоэлектрона. Обычно от одной частицы срабатывают 2–5 микрополосок, поэтому использовались данные, поступающие от 128 датчиков, что позволило задействовать один модуль типа ETANN. При импульсе 3,5 ГэВ/с скорости протонов и пионов равны, соответственно, 0,966с и 0,992с (с — скорость света в вакууме).

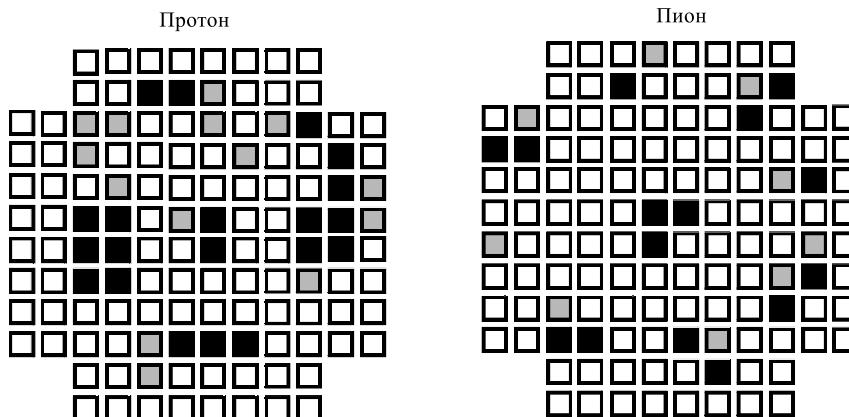


Рис. 18. Образцы событий, используемых для тренировки ИНС. 128 аналоговых сигналов одновременно подаются на входы ИНС. Затемнения показывают логарифмическое изменение интенсивности. В ИНС это соответствует напряжению в пределах 0–3 В [43]

В то время как более медленные частицы (протоны) дают плотные и меньших размеров кольцевые изображения, пионы генерируют аналогичные

изображения больших размеров с тонкими и прерывистыми линиями. Типичный размер кольца составляет 38 мм. На рис. 18 приведены образцы, используемые для настройки сети, причем приведены модели событий с протонами и пионами в таком виде, в каком они регистрируются с помощью стрипов детектора. Штриховка отображает изменение интенсивности в логарифмическом масштабе. При этом используются пять градаций интенсивности, что соответствует изменению входного сигнала от 0 до 3 В.

На рис. 19 приведено схематическое изображение нейронной сети, включающее предусилители и логарифмические усилители. Напряжение смещения подается на входы скрытого и выходного слоя. Если детектируется протон, то на выходе сети «Выход(p)» выходного слоя устанавливается высокий уровень напряжения, а на выходе «Выход(π)» будет низкий уровень напряжения. Для формирования сигмоидной функции используется алгоритм обратного функционирования. Показано, что применение гибридного процессора, состоящего из нейрочипа ETANN и микроЭВМ 68070, позволило существенно повысить достоверность распознавания событий от 87 %, когда использовалась математическая модель нейронной сети, до 98 % в случае применения аппаратной нейронной сети.

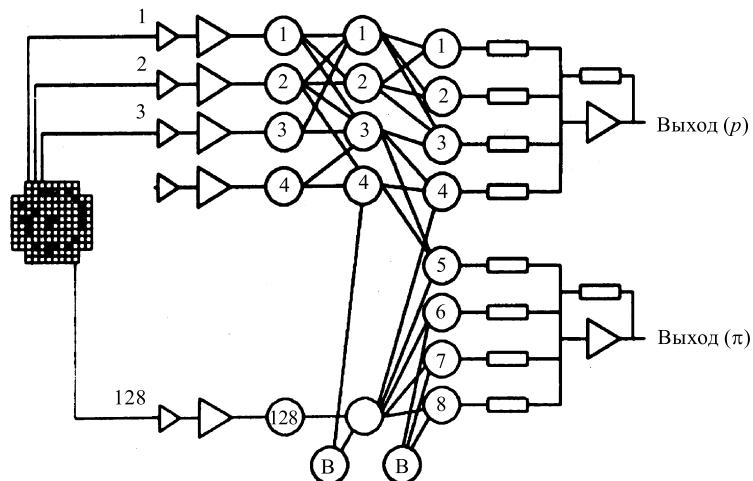


Рис. 19. Блок-схема аналоговой ИНС, используемой для идентификации протонов и пионов с помощью детектора кольцевого изображения. «Выход(p)» и «Выход(π)» — выходы сети; 1÷128 — входы сети; В — элементы смещения; остальные кружки обозначают нейроны. Слева на рисунке изображен образец, подаваемый на входы сети [43]

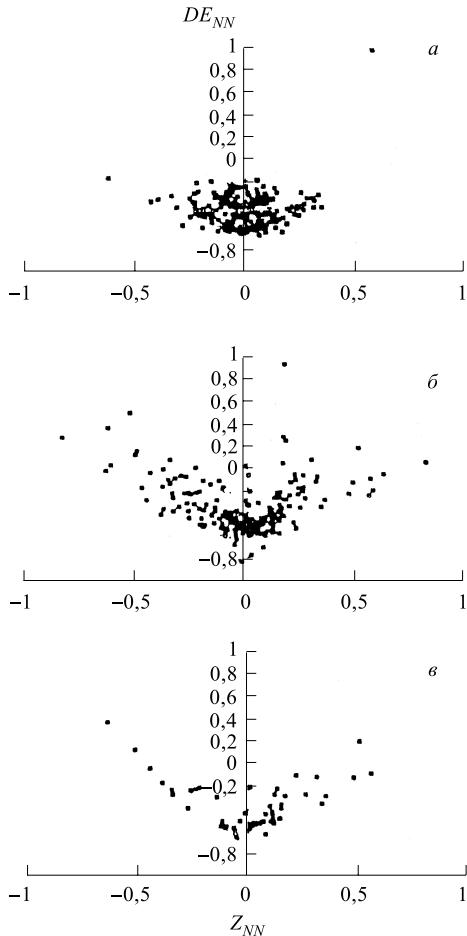


Рис. 20. Распределения входных значений DE_{NN} и Z_{NN} , распознаваемых с помощью ИНС: для каонов (а) и для пионов (б); распределение для некорректной классификации каонов и пионов (в). DE_{NN} — сумма сигналов, формируемых на концах сцинтилляторов, обеспечивающих в оцифрованном виде информацию о потере энергии частицами в сцинтилляторах; Z_{NN} — разница этих сигналов, которые дают информацию о z -координате зарегистрированной частицы

С целью идентификации каонов и пионов в [44] используется четырехслойная ИНС с двумя скрытыми слоями и смещением. В качестве детектора служат сцинтилляционные счетчики большой длины. Сигналы, поступающие с выходов ФЭУ, оцифровываются с помощью параллельных АЦП. Далее формируются два типа сигналов: DE_{NN} — сумма сигналов, формируемых на концах сцинтилляторов, и Z_{NN} — разница аналогичных сигналов. Эти данные по даются непосредственно на входы сети, выполненной на основе ставшей уже стандартной платы VME-ЗЕТАНН.

Идентификация рассматриваемых частиц возможна, поскольку каоны и пионы имеют различные величины потерь энергии dE/dx на единицу длины. Для выбора окончательной архитектуры ИНС с помощью алгоритма обратного функционирования было использовано 2000 тестовых векторов, соответствующих идентифицируемым частицам. На рис. 20 приведены результаты идентификации с помощью обычной сети, в которых использовалось по 450 векторов, соответствующих данным о каонах и пионах. На рис. 20, а и рис. 20, б приведены распределения, соответствующие каонам и пионам. С помощью рис. 20, в иллюстрируется отрицательный результат, поскольку идентификация частиц невозможна.

Перспективы использования ИНС в экспериментах на большом адронном коллайдере. Поиск гипотетической частицы — хиггс-бозона начнется,

скорее всего, не ранее 2005 года, после успешного запуска ускорителя. Поэтому с целью подготовки к анализу информации, регистрируемой с помощью сложной системы детекторов, и с учетом редкости событий в [45] проведено исследование по использованию ИНС для поиска хиггс-бозона. В качестве образцов использовались коды, генерируемые методом Монте-Карло. Требовалось также сравнить, насколько аппаратные методы более эффективны по сравнению с программными ИНС, и оценить возможности двух типов аналоговых чипов для решения поставленной задачи. В качестве нейрочипов использовались аналоговые модули ETANN, CLN32 и вспомогательный чип CLN64 [45].

Рассмотрим кратко особенности аналогового нейрочипа CLN32. В отличие от многих других нейрочипов на кристалле содержится встроенное устройство для обучения с помощью двух независимых алгоритмов, один из которых реализует машину Больцмана. В отличие от нейрочипа ETANN, в модуле CLN32 веса запоминаются в цифровой форме. Имеется также 32 нейрона и 496 аддитивных синапсов. Кроме того, на отдельном чипе CLN64 имеется 1024 аддитивных синапса, что позволяет существенно расширять функциональные возможности основного нейрочипа. Задержка сигналов в однослойной сети составляет всего 1 мкс. В процессе обучения данные на 32 аналоговых входа подавались с частотой 50 кГц. Для исследований была выбрана прямоточная сеть с архитектурой 8-16-2 для программного эмулятора и для нейрочипа ETANN. Это значит, что входной слой имеет восемь нейронов, шестнадцать нейронов содержится в скрытом слое и два нейрона имеются на выходах. Необходимость в двух двоичных выходах с четырьмя различными состояниями диктуется тем, что для идентификации событий в данном случае требуется генерация трех сигналов на выходах: «сигнал события», «событие, не представляющее интерес» и «фоновое событие». На основе нейрочипа CLN32 исследовалась топология ИНС 24-16-2. Исследования проводились по следующей программе: возможности программной эмуляции и сравнение двух типов нейрочипов. В результате исследований показано, что путем применения алгоритма обратного функционирования качество отбора событий с помощью программного эмулятора и с помощью нейрочипа ETANN практически одинаково. Величина задержки ИНС составляет 8 мкс, что не позволяет использовать такую сеть в быстрых устройствах для отбора частиц. Кроме того, по сравнению с нейрочипом ETANN модуль CLN32 допускает гораздо большее число ошибок в процессе классификации частиц.

В связи с этим представляет интерес аналогово-цифровой нейрочип MESA [46], время установки данных в котором не превышает 50 нс. Архитектура нейрочипа позволяет создавать прямоточную сеть, имеющую 70 входных и 6 скрытых нейронов и несколько выходов. Последнее качество достигается тем, что взвешенные входы каждого нейрона скрытого слоя имеют внешние выводы. В то время как входные сигналы являются аналоговыми, пятираз-

рядные синаптические веса программируются обычным способом с помощью внешнего процессора.

Нейрочип MESA используется в триггерной системе первого уровня с целью отбора событий, по своим характеристикам весьма близких к фоновым в эксперименте H1, проводимом на ускорителе со встречными пучками HERA (Гамбург). Частота поступления фоновых событий составляет 100 кГц при частоте регистрации полезных событий порядка 10 Гц. Требуется отбор событий, имеющих первичную вершину распада в точке встречи пучков протонов с энергией 820 ГэВ и позитронов с энергией 27,5 ГэВ. Причем сгустки частиц сталкиваются каждые 96 нс. Для построения триггерной системы использовались два нейрочипа, поскольку гистограмма событий имеет 96 входов. Для тестирования ИНС на линии с персональным компьютером была выбрана VME-плата. С целью максимального приближения к реальным условиям наряду с полезными сигналами в систему вводились шумы. Помимо нейрочипа на тестируемой плате имеется 70 ЦАП для преобразования входных цифровых сигналов в аналоговые и 12-разрядный АЦП, используемый для чтения выходных сигналов. Показано, что классификации полезных и фоновых событий с помощью ИНС достаточно для их разделения. Причем эффективность сети повышается с ростом числа входов.

8. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГОВЫХ ИНС ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ

Распознавание образов и классификация объектов являются типичными задачами, решаемыми с помощью ИНС. При решении задач распознавания образов с помощью ИНС возникает проблема ввода желаемых образцов во входной слой ИНС. Однако в экспериментальной технике имеется ряд задач, когда такая проблема не возникает. В [47] была предложена идея использования аналоговых ИНС для измерения физических параметров. Такими выходными параметрами могут быть, например, угол наклона трека заряженной частицы или положение пучка заряженных частиц относительно оси и его ширина на полувысоте. В качестве входных данных могут быть координаты событий или временные параметры. При этом сигналы можно подавать непосредственно на входы ИНС или с помощью усилителей.

Для реализации рассмотренной идеи возможны два метода (подхода). Реализация первого метода предполагает использование в выходном слое сети только одного нейрона, выходное значение которого разделено на несколько интервалов. К недостатку такого подхода можно отнести то, что если нейрон имеет нелинейную характеристику, то в этом случае трудно оценивать чувствительность ИНС как прибора. Отрицательно сказывается также нестабильность значений напряжений на выходе. Суть альтернативного метода

заключается в том, что в выходном слое используется как можно больше нейронов с соответствующими выходами. В этом случае каждому из выходов сети можно сопоставить определенный, присущий ему интервал измеряемой величины. Для этой цели нейрочип ETANN является подходящим модулем, поскольку он имеет 64 выхода. В данной работе обсуждается вопрос выбора параметра x в выражении для сигмоидной функции (см. рис. 3), который обеспечивал бы работу ИНС в качестве измерительного прибора в заданных пределах.

В [48] описана экспериментальная установка, предназначенная для измерения параметров треков заряженных частиц, регистрируемых с помощью газонаполненной дрейфовой камеры. Описание используемого детектора читатель может найти в цитируемой работе. В качестве входных сигналов сети используются время дрейфа электронов к сигнальной проволочке (одна координата частицы) и позиции микрополосок в катодной плоскости (другая координата частицы). Трехслойная ИНС, созданная на основе нейрочипа ETANN, имеет структуру 64-64-64. Причем входы и выходы ИНС разделены на две равные группы. На первую группу входов подаются сигналы от времязамплифидных конверторов, и на вторую поступают усиленные сигналы от микрополосок детектора. Первой группе выходов соответствует расстояние в детекторе, равное 20 см, так что один бин равен 0,625 см. В свою очередь, второй группе выходов соответствует угол наклона трека заряженной частицы в пределах 45°. На основе этих данных ИНС тренировалась по методу обратного функционирования. Получено разрешение координаты трека 0,9 мм и угла наклона 16 мрад, в то время как при моделировании на ЭВМ получены худшие данные: 1,2 мм и 20 мрад соответственно.

В [49] ИНС на основе нейрочипа ETANN используется для определения положения пучка частиц и его ширины на полувысоте. В отличие от предыдущей работы сеть имеет всего два аналоговых выхода, которые отградуированы соответствующим образом.

С помощью аналоговых и аналогово-цифровых ИНС эффективно решается ряд сложных проблем, связанных с нелинейным управлением. В [50] разработанная авторами ИНС используется в токамаке для контроля формы и положения плазмы в эксперименте COMPASS. На рис. 21 приведена блок-схема системы контроля. Сигналы на входы ИНС поступают от электромагнитных датчиков, окружающих вакуумную камеру. В процессе обработки этих данных на выходах нейрокомпьютера получаются измеренные параметры плазмы u_k , которые описывают координаты и форму плазмы на границе вакуумной камеры. Путем сравнения этих величин с заданными получаются сигналы погрешности, которые по цепям обратной связи поступают в корректирующие обмотки управляющих устройств. Высокий параллелизм вычислений, присущий аналогово-цифровой ИНС, позволяет быстро, за несколько десятков микросекунд, посыпать корректирующие сигналы. Синаптические

веса в аналоговом виде получаются с помощью ЦАП, которые, в свою очередь, программируются.

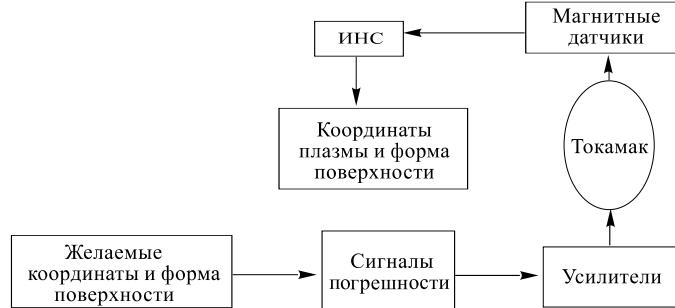


Рис. 21. Блок-схема контроля позиции и формы плазмы в токамаке. ИНС осуществляет нелинейное преобразование измеряемых сигналов магнитных датчиков в множество геометрических параметров, которые описывают координаты и форму плазмы. Затем эти параметры сравниваются с желаемыми параметрами и результат погрешности используется для коррекции тока в корректирующих обмотках

Другим примером применения ИНС в системах управления может служить установка для контроля положения шести сегментов зеркала астрономического оптического телескопа [51]. В адаптивной оптике телескопа примерно каждые 10 мс требуется изменение эффективной поверхности зеркала с целью подавления атмосферных помех. Обычный метод решения этой задачи заключается в использовании итеративного алгоритма, для реализации которого требуются трудоемкие вычисления с целью коррекции поверхности зеркала. Эксперимент по измерению искажения оптической фазы, возникающей вследствие турбулентности атмосферы, проводился в реальных условиях с использованием света от звезды. Использование ИНС (название ИНС, к сожалению, авторы не указали) обеспечивает быстрое и с необходимой точностью управление формой зеркала, что позволило повысить качество изображения объекта наблюдения. Данные на входы ИНС подавались от камеры с ПЗС-структурой. В [52] представлен обзор применения ИНС для решения различных задач управления, написанный по материалам зарубежной печати последних лет.

9. ПРИМЕНЕНИЕ ТРАНСПЬЮТЕРОВ И ЦИФРОВЫХ СИГНАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОРОВ

В настоящее время сложились два направления, характеризующие развитие нейрокомпьютеров: разработка ускорительных плат на базе БИС и

микропроцессоров и реализация нейрокомпьютеров на базе универсальных многопроцессорных систем. Первое направление получило наиболее широкое применение в научном приборостроении, и поэтому мы остановимся на нем более подробно.

Среди аппаратной поддержки нейровычислений следует отметить применение быстрых микропроцессоров с RISK-архитектурой (например, транспьютеры), цифровых сигнальных процессоров (ЦСП) и специальных нейропроцессоров и вычислителей на их основе.

Применение транспьютеров. Ряд характерных особенностей транспьютеров обусловили их широкое применение для построения мощных и относительно дешевых вычислительных сетей, в том числе и для построения нейрокомпьютеров. В типичном модуле на одном кристалле (рис. 22) содержится высокопроизводительный микропроцессор с плавающей точкой и второй процессор с RISK-архитектурой, обуславливающий эффективность транспьютера. Кроме того, транспьютер содержит быструю оперативную память; и, что весьма важно, наряду с параллельным каналом прямого доступа в память имеются четыре последовательных дуплексных канала обмена (линки), с помощью которых можно осуществлять гибкий обмен информацией с соседними транспьютерами, как по горизонтали, так и по вертикали со скоростью 20 Мбит/с и более. С помощью линков можно создавать различные по топологии и производительности сети типа матричной, «дерево», конвейерные многопроцессорные системы и т.д. Важно, что каждый транспьютер в сети может работать в режиме ведущего и ведомого. В научном приборостроении транспьютеры широко используются для построения ускорительных плат, выполняемых, как правило, в стандарте VME. Так, ускорительная плата [53] содержит два транспьютера T800 и память емкостью 4 Мбайт.



Рис. 22. Блок-схема типичного транспьютера. В одном кристалле содержится процессор с плавающей точкой и второй процессор с RISK-архитектурой, оперативной памятью. Наряду с каналом прямого доступа к памяти имеется четыре последовательных дуплексных канала обмена (ПИ — последовательный интерфейс)

Одна из последних версий фирмы INMOS — транспьютер T9000 содержит еще дополнительный коммуникационный процессор, КЭШ-память, пятиступенчатый конвейер для выполнения команд, мультиплексный канал и т.д., позволяет выполнять 25 млн операций с плавающей точкой в секунду [54]. В данной работе описаны также нейрокомпьютеры, созданные на базе транспьютеров серии T9000. Транспьютеры используются для управления каскадируемой нейровычислительной системой на базе нейрочипа L-Neuro, разработанного фирмой «Telmat» (Франция) [55].

Нейронная сеть на базе транспьютера T800 [56] использовалась для идентификации электромагнитных и адронных ливней, регистрируемых с помощью калориметра. В качестве модели использовалась прямоточная нейронная сеть, содержащая четыре входных нейрона, три нейрона содержатся в скрытом слое и один нейрон имеется в выходном слое. В состав аппаратуры входят миникомпьютер VAX3000, персональный компьютер и два транспьютера T800. Персональный компьютер в основном выполняет функции сервера и устанавливает значения весов в транспьютерах. Эффективность дискриминации параметров частиц составила не менее 96%.

Применение цифровых сигнальных процессоров. Цифровой сигнальный процессор типа TMS320C40 широко используется в экспериментах по физике высоких энергий вследствие высокой производительности и гибкости архитектуры. Он выполняет до 40 млн. операций с плавающей точкой в секунду, имеет два 32-разрядных интерфейса и шесть 8-разрядных интерфейсов с прямым доступом к оперативной памяти, с помощью которых данные передаются со скоростью 20 Мбайт/с. Наличие такого количества интерфейсов позволяет создавать не только многомерные топологические структуры типа гиперкуба, но и использовать его в качестве коммутатора данных в системах запуска установок, предназначенных для экспериментов на большом адронном коллайдере [57]. Кроме того, ЦСП TMS320C40 имеет следующие параметры: 32-разрядная сетка, 12 регистров для временного хранения данных, два модуля двухпортовых ОЗУ емкостью $1\text{K} \times 32$. Процессор может выполнять в течение одного цикла операцию умножения с плавающей точкой. Наличие четырех внутренних магистралей позволяет с помощью одной команды в течение одного цикла выполнять такое часто встречающееся выражение, как $Z = Y + AX$. Такие выражения, как $1/X$ и $1/X^{1/2}$, выполняются табличным способом [58].

Поэтому не случайно на базе процессоров TMS320C40 разработаны высокопроизводительные наращиваемые вычислительные модули типа $M1$ и $M2$, предназначенные для обработки информации в реальном времени, в том числе видеоизображений, радиолокационной информации, сигнальной обработки и т.д. Модуль $M1$ со стандартным интерфейсом ISA, который используется в микропроцессорах (Industrial System Architecture), содержит четыре процессора с тактовой частотой 50 МГц и имеет производительность

200 Мфлопс с объемом статической памяти 5 Мбайт. Модуль $M2$ имеет быстродействие до 300 Мфлопс, представляет собой плату с интерфейсом VME и содержит шесть процессоров. Для повышения производительности можно наращивать несколько модулей [59]. Ниже будет показано, каким образом ЦСП TMS320C40 используется для построения ускорительных нейроплат.

10. ЦИФРОВЫЕ НЕЙРОЧИПЫ И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

В [60] описан полностью цифровой программируемый нейрочип (название нейрочипа в статье не приводится) Научно-технического центра (НТЦ) «Модуль», имеющий ряд рекордных параметров и оригинальную архитектуру. При создании архитектуры нейрочипа разработчики стремились обеспечить программируемость узлов, специально разработанных для поддержки нейровычислений: параллельность вычислений и обеспечение вычислений над данными (весами) произвольной разрядности (от 1 до 64 бит). Нейрочип предназначен для реализации нейросетей. В качестве примера рассмотрим принцип действия операционного узла нейрочипа, предназначенного для вычисления весовых коэффициентов. Эти операции требуют выполнения множества часто повторяющихся операций умножения и сложения в процессе работы нейрочипа. Особенностью функционирования операционного узла является то, что всего лишь за один такт осуществляется вычисление весовых коэффициентов нескольких синапсов и вычисление их сумм для нескольких нейронов. Работа операционного узла иллюстрируется на примере реализации функции фрагмента слоя нейросети, включающего два нейрона и три синапса (рис. 23), где $m = 19$ — общее число разрядов выходов, $n = 12$ — суммарная разрядность входов. Операнды имеют следующие разрядности: $X_1 = 3$, $X_2 = 4$, $X_3 = 5$; $W_{11} = 5$, $W_{12} = 4$, $W_{13} = 3$, $W_{21} = 4$, $W_{22} = 3$, $W_{23} = 2$; $U_1 = 10$, $U_2 = 9$, где U_1 и U_2 — смещения; $Y_1 = 10$ и $Y_2 = 9$.

Вначале в операционный узел загружаются элементы матрицы весов, содержимое которой вычисляется в процессе обучения нейросети. Элементами матрицы являются разряды весовых коэффициентов и нулевые элементы,

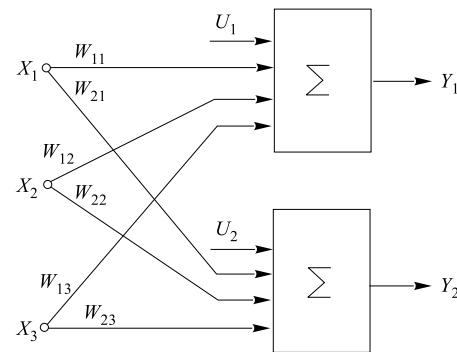


Рис. 23. Иллюстрация работы операционного узла (ОУ) нейрочипа на примере фрагмента слоя нейрона, состоящего из двух нейронов и трех синапсов. $X_1 \div X_3$ — входы; U_1, U_2 — смещение, $W_{11}, W_{21}, W_{12}, W_{22}, W_{13}, W_{23}$ — весовые коэффициенты; Y_1, Y_2 — выходы

расположенные в строго фиксированных позициях. Такая настройка как бы разбивает операционный узел на подматрицы размером $P \times R$ (рис.24), где P — количество нейронов, R — количество синапсов, во фрагменте сети. Для рассматриваемого примера $P = 2$, $R = 3$. Пусть подматрица

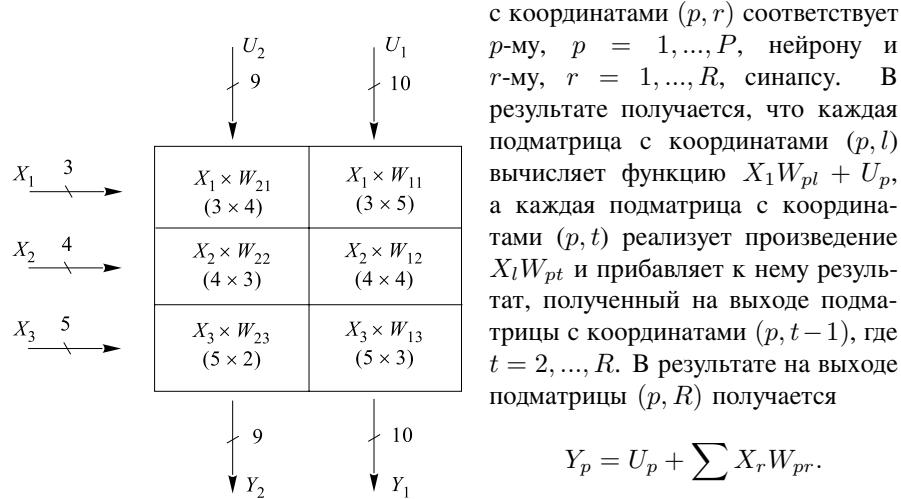


Рис. 24. Структура подматрицы. Все обозначения аналогичны обозначениям рис. 23 (см. текст)

для настройки нейрочипа с конкретными величинами имеются специальные регистры. Существенными узлами нейрочипа являются также скалярный и векторный процессор. Наличие двух двунаправленных портов, аппаратно совместимых с портами ЦСП TMS320C40, позволяют создавать различные высокопроизводительные системы: двунаправленный конвейер, двухмерная и трехмерная решетка, двунаправленное кольцо, дерево и т.д.

Нейрокомпьютер SYNAPS1 [61]. Данный нейрокомпьютер разработан фирмой «Siemens» и предназначен для решения широкого круга задач, таких, как распознавание символов и обработка более сложных образов, например, шахматных фигур, речевых сообщений, управление роботами и т.д. Основу нейрокомпьютера составляет матричный процессор, состоящий из восьми сигнальных процессоров, выполняющих 3,2 млрд операций умножения (16×16 бит) и сложения. Емкость памяти составляет 32 Мбайт, скорость

следует отметить, что количество нейронов, обрабатываемых одновременно, зависит от числа входов, их разрядности и значений весовых коэффициентов. При работе нейрочипов с одинаковыми 8-разрядными данными операционный узел за один процессорный такт выполняет 24 операции умножения с накоплением. При частоте тактовых импульсов 30 МГц это составляет 720 млн операций с плавающей точкой в секунду (MCPS). В цитируемой работе приводится блок-схема нейрочипа и ее описание.

Существенными узлами нейрочипа являются также скалярный и векторный процессор. Наличие двух двунаправленных портов, аппаратно совместимых с портами ЦСП TMS320C40, позволяют создавать различные высокопроизводительные системы: двунаправленный конвейер, двухмерная и трехмерная решетка, двунаправленное кольцо, дерево и т.д.

передачи данных 0,8 Гбайт/с по шине данных, 200 Мбайт/с по управляющейшине и 56 Мбайт/с по адреснойшине с тактовой частотой 25 МГц. Кроме того, нейрокомпьютер включает память весов емкостью 128 Мбайт и двауправляющих микропроцессора MC 68040 фирмы «Моторола».

Нейрочип MA16. Особенностью нейрочипа является то, что его архитектура позволяет организовать систолическую вычислительную архитектуру. Данный тип процессорных структур получил название систолических, исходя из той аналогии, которая существует между операцией в базовом процессоре и сокращением сердца, а также между пульсациями потоков исходных данных, промежуточных и окончательных результатов и кровотоков [62]. Хотя систолические процессоры представляют собой новый класс конвейерных архитектур, имеется то принципиальное отличие, что в систолической структуре имеются три признака: конвейерность, синхронность и регулярность. Как следствие этого, отдельные процессоры работают параллельно, выполняя базовую операцию, после чего осуществляется синхронная передача выходных данных от одного процессорного элемента к соседнему по всем локальным связям. При этом данные в систолическом процессоре распространяются по конвейеру, обеспечивая многократное использование промежуточных данных, поступающих на вход процессора.

Нейрочип MA16 используется в эксперименте WA92 по поиску прелестных частиц совместно с аналоговым нейрочипом ETANN (см. выше) [34]. Нейрочип MA16 представляет собой цифровой систолический микропроцессор, разработанный фирмой «Siemens» [34,63]. Его архитектура позволяет эффективно моделировать и изучать односторонние нейронные сети и сети с обучением по методу векторного квантования. Нейрочип имеет разрядность по 16 бит для переменных, весов и скалярного произведения (для моделирования передаточной функции) соответственно. Кроме того, 47 бит предназначены для задания пороговых значений и 38 бит используются для выходных данных. В одном корпусе содержится 4 однотипных микропроцессора, которые функционируют параллельно с тактовой частотой 50 МГц. Для реализации систолической архитектуры между отдельными процессорными элементами введена задержка 4 нс. Подобную систолическую цепочку можно расширить путем внешнего соединения нескольких нейрочипов. Для функционирования нейрочипа необходима внешняя память. В [34,63] описана вычислительная плата на основе нейрочипа MA16, выполненная на плате VME9U стандарта VME64. Помимо нейрочипа основными элементами процессорной платы являются девять модулей ППЗУ емкостью 64К каждый, работающих с частотой 83 МГц. С помощью такой процессорной платы можно реализовать двухслойную одностороннюю сеть на 16 входов. Две такие сети расположены на одной ускорительной плате. Время задержки в однослоиной сети составляет 3 мкс. Такая сеть реализует дискриминатор Фишера. С помощью трехслойной сети, состоящей из пяти скрытых нейронов и одного

выходного нейрона, решалась аналогичная задача. При этом получены идентичные результаты. Авторами получены также предварительные результаты, позволяющие оценить возможности аналогового нейрочипа ETANN и цифрового нейропроцессора MA16. Как и следовало ожидать, положительным качеством цифровых нейрочипов является высокая стабильность их работы в зависимости от температуры.

Цифровой нейрочип ТОТЕМ. Особенностью данного нейрочипа является то, что он предназначен для аппаратной реализации так называемого алгоритма RTS (Reaction Tabu Search — реакция на нахождение запрета). Вначале рассмотрим суть RTS-алгоритма. Одним из существенных недостатков многослойных ИНС является то, что процесс их обучения, как уже отмечалось, является весьма трудоемким. Другие проблемы проявляются в том, что нередко трудно интерпретировать внутренние представления многослойного персептрона. Так, для данного входного вектора выходное значение получается путем нелинейной комбинации входных значений с вовлечением в процесс внутреннего слоя, который чаще всего трудно контролировать. Отчасти это связано с тем, что алгоритмы настройки ИНС, подобные методу обратного функционирования и требующие выполнения операции дифференцирования, имеют ряд недостатков, ограничивающих их применение. Так, после нахождения первого же локального минимума работа алгоритма прекращается. Практически это означает, что можно начинать обучение от новой произвольной точки, и предыдущие результаты оказываются бесполезными. Кроме того, операция дифференцирования требует значительных аппаратных затрат и времени. Предъявляются высокие требования к точности представления весов. И, наконец, в процессе обучения необходимы все данные, получаемые на выходном слое. Причем поиск ведется в локальной области. Существуют несколько направлений в создании моделей ИНС, позволяющих существенно упростить и ускорить процесс обучения нейронной сети. Ниже будут рассмотрены два таких направления, которые реализованы в виде нейрочипов.

Вначале рассмотрим алгоритм работы нейрочипа. Дабы избежать названных выше трудностей и упростить решение проблемы обучения, в [64] предложен довольно простой алгоритм обучения ИНС, который радикально отличается от широко известных и относительно просто реализуется с помощью специализированного нейрочипа. Основное отличие заключается в том, что задача обучения сети сводится к задаче оптимизации методами комбинаторного анализа. По своей сути RTS-алгоритм является алгоритмом локального поиска. Он оптимизирует заданную оценочную функцию E путем использования итеративных «сеточных» компонент для смещения поиска в направлении меньших значений E . С целью исключения бесконечных циклов используется стратегия запретов (tabu). При этом веса n , содержащие b бит, представляются в виде цепочки длиной $l = nb$. Причем значения весов отличаются относительно друг друга всего лишь на один бит. Другими словами, двоич-

ные веса представляют собой слова кода Грэя. В свою очередь, эта цепочка рассматривается в качестве угла куба в l -м пространстве, и задача заключается в поиске угла с минимальной ошибкой. Один бит задает направление перехода (вращения) от одного угла к другому. Далее, искомая траектория $X^{(t)}$ генерируется в выбранной плоскости Z , и последовательность точек X выбирается непосредственно среди соседних точек, которые получаются как следствие элементарных вращений $m_i (i = 1, \dots, l)$. Причем на каждом шаге итеративного процесса в результате элементарных вращений выбираются наименьшие значения оценочной функции E . По мере выполнения элементарных вращений, вращения в обратном направлении запрещаются путем введения параметра T . Другими словами, с помощью параметра T определяется общее количество итераций. Первоначальное значение $T = 1$, и его текущее значение может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от успеха в процессе обучения. Применение RTS-алгоритма для обучения ИНС подробно описано в [65].

Рассмотрим простой пример (рис. 25). Пусть изучаемая поверхность F представляет собой трехбитовую последовательность ($f = [b_1, b_2, b_3]$), и оценочная функция имеет вид

$$E([b_1, b_2, b_3]) = b_1 + 2b_2 + 3b_3 - 7b_1b_2b_3.$$

На рис. 25 приведены возможные точки (вершины трехмерного двоичного куба) вместе с оценочной функцией. Точка $f^{(0)} = [0, 0, 0]$ с $E(f^{(0)}) = 0$ представляет собой локальный минимум, поскольку всевозможные вращения дают большее значение оценочной функции. Наиболее приемлемым вращением является вращение m_1 , так что в результате имеем $f^{(1)} = [1, 0, 0]$. Следует отметить, что вращение выполняется, даже если $E(f^{(1)}) = 1 \geq E(f^{(0)})$. Поэтому система «покидает» локальный минимум. Если $T^{(1)} = 0$, то более благоприятным вращением из точки $f^{(1)}$ будет опять-таки m_1 , и система возвратится в стартовую точку. Если же значение $T^{(t)}$ остается равным нулю, то обучаемый объект будет повторять ограниченный цикл $[0, 0, 0] \rightarrow [1, 0, 0] \rightarrow [1, 0, 0] \dots$. С другой стороны, если $T^{(t)} = 1$, то при $t = 1$ вращение m_1 запрещено, поскольку оно уже использовалось. Поэтому приемлемым является

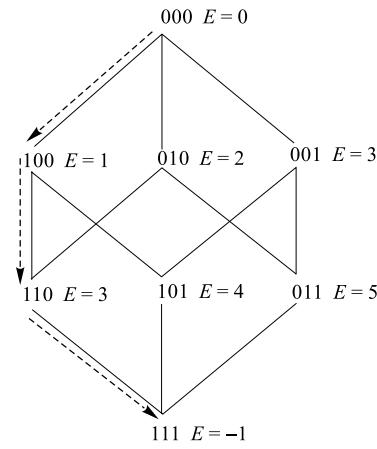


Рис. 25. Пример, поясняющий работу RTS-алгоритма. Обучаемая система достигает глобального минимума $f^{(3)} = [1, 1, 1]$ с оценочной функцией $E^{(3)} = -1$. Стрелки указывают направления вращения

ход в направлении m_2 . В результате получаем $f^{(2)} = [1, 1, 0]$, и оценочная функция равна $E(f^{(2)}) = 3$. И, наконец, при $t = 2$ приемлемым вращением является m_3 , хотя бы потому, что оно еще не использовалось. При этом система достигает глобального минимума: $f^{(3)} = [1, 1, 1]$ с оценочной функцией $E^{(3)} = -1$.

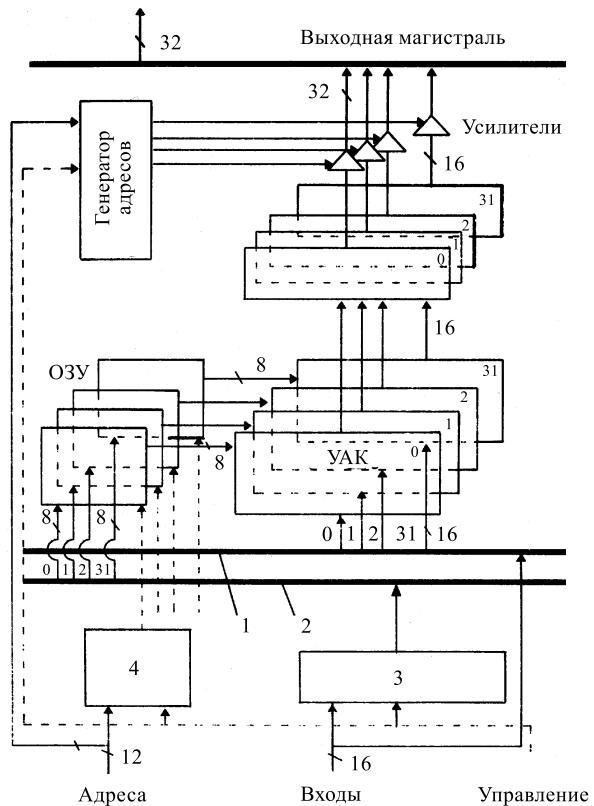


Рис. 26. Блок-схема нейрочипа TOTEM: УАК — умножитель-аккумулятор; 1, 2 — магистрали; 3 — преобразователь кода Грэя в двоичный код; 4 — генератор адресов весовых коэффициентов. Нейрочип содержит 32 процессорных элемента. Каждый процессор вычисляет скалярное произведение весовых коэффициентов w_{ij} и последовательности x_i , которые в режиме «от одного на все» поступают от входной магистрали. С целью ускорения выполнения операций используется конвейерный способ выполнения операций умножения со сложением. Это значит, что после трехцикловой задержки на выходах нейрочипа с циклом 35 нс выполняется до 32 умножений со сложением. Сигмоидная функция реализована методами табличной арифметики

На рис. 26 приведена блок-схема модуля [66]. С целью оптимизации реализации RTS-алгоритма нейрочип ТОТЕМ выполняет только операции, характерные для данного алгоритма, и поэтому он представляет собой копроцессор к процессору общего назначения. Модуль содержит 32 процессорных элемента, работающих параллельно. В свою очередь, каждый процессор P_i в основном вычисляет скалярное произведение весов w_{ij} , которые хранятся в ОЗУ, и последовательности x_i , которые (последовательно, но в режиме «от одного на все» (broadcast)) поступают от входной магистрали. Для временного хранения скалярных произведений имеются регистры, данные от которых могут быть снова переданы на входную магистраль. В процессоре используется динамическая память с последовательной адресацией. С целью ускорения выполнения операций в модуле используется конвейерный способ выполнения операций умножения со сложением. Это означает, что после первоначальной трехциклической задержки на выходах процессора с циклом 35 нс получается до 32 умножений со сложением. Сигмоидная функция реализована с помощью табличной арифметики. Нейрочип ТОТЕМ выполнен по стандартной КМОП-технологии с шириной дорожки 1,2 мкм и содержит 250 тыс. транзисторов. В следующей версии будет использована субмикронная технология (0,8 мкм). Корпус микросхемы содержит 132 вывода. Поскольку нейрочип представляет собой копроцессор к более универсальному процессору, то для построения ИНС разработана процессорная плата, совместимая с персональными компьютерами. Области применения нейрочипа: классификация объектов, распознавание образов в экспериментах по физике высоких энергий и в системах контроля. Вопросы конкретного применения нейрочипа ТОТЕМ в эксперименте по поиску гипотетических хигсовских частиц обсуждаются в [67].

Нейрочип CNAPS-1064 (Connected Network of Adaptive Processors — сеть связанных адаптивных процессоров). Нейрочип содержит 64 процессорных элемента, работающих параллельно с частотой цикла 25 МГц [68]. Процессорный элемент содержит 32-разрядный сумматор, умножитель 16×8 , 16-разрядное логическое устройство, 4 Кбайт локальной памяти с устройством адресации, регистр, внутренние и внешние магистрали для обмена 16-разрядными адресами и 8-разрядными данными. Архитектура нейрочипа позволяет реализовать матричный процессор, содержащий до 512 аналогичных нейрочипов. Фирма-разработчик ASI поставляет также процессорную плату, выполненную в стандарте VME и содержащую четыре нейрочипа CNAPS-1064, 16 Мбайт файлового ОЗУ, $64K \times 64$ бит программной памяти, контроллеры и интерфейс ввода-вывода, выполненный в виде навесной конструкции, которая сопрягается с основной нейроплатой. В [69] описана система обработки аэрокосмических изображений, в которой используется описываемый нейрочип. В [68] нейрочип используется в эксперименте по физике высоких энергий для фильтрации данных, регистрируемых с помощью уст-

новки Н1. Триггерная система содержит четыре уровня фильтрации физических событий $L1 \div L4$ с временем решения 2, 20, 800 и 100000 мкс соответственно. Для фильтрации событий на втором уровне с временем решения 20 мкс создана мощная вычислительная нейросистема на базе стандартной нейроплаты фирмы ASI, которая наряду с другими обычными процессорными модулями составляет основу триггерной системы второго уровня.

Эксперименты с нейрочипом ZISC036 [70]. Так же, как и в предыдущем случае, процесс обучения нейрочипа носит локальный характер. В данном модуле реализован так называемый RBF-алгоритм (Radial Base Function). Кратко суть алгоритма заключается в следующем. RBF-алгоритм [8,18] базируется на простой интуитивной идее, которая заключается в том, что произвольная функция $y(x)$ может быть аппроксимирована с помощью линейной суперпозиции системы локализованных базовых функций $h_j(x)$. Такой подход, по существу, приводит к модели ИНС, близкой по функциональным возможностям к многослойным ИНС. Новый тип ИНС описывается с помощью выражения [8]:

$$y_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^m w_{kj} h_j(\mathbf{x}),$$

где m — количество базовых функций; значение w_{kj} определяется из системы линейных уравнений. Функция $h_j(\mathbf{x})$ представляет собой функцию активации j -го нейрона скрытого слоя и \mathbf{x} — входной вектор. В отличие от однонаправленной сети в данной сети вводится также смещение в выходные нейроны (см. блок-схему нейронной сети, реализующую данную модель [8]).

Обучение сети выполняется в два этапа. Вначале оптимизируются параметры базовой функции и затем вычисляются веса. Высокое быстродействие ИНС, в которой реализуются радиально-базовые функции, обусловливается тем, что на выходе каждого нейрона получается значение функции, отличающееся от нуля в ограниченной области пространства. Другими словами, процесс обучения носит локальный характер, и поэтому не требуется комплексная информация от других нейронов, что существенно упрощает их структуру. Подобные сети эффективно решают классификационные проблемы. Возможно несколько модификаций алгоритмов, использующих радиально-базовые функции. Одна из них реализована в нейрочипе ZISC036, который разработан фирмой IBM и описан в [70]. Он состоит из 36 логических ячеек и блока принятия решений. Каждый нейрон имеет по два входа: один вход используется для записи контрольного вектора, а на второй вход подаются данные, характеризующие область влияния данного нейрона. Принцип работы нейрочипа можно представить, рассмотрев процесс обучения ИНС.

- Каждый нейрон параллельно вычисляет так называемое блоковое кодовое расстояние Манхэттена d между входным вектором \mathbf{V} и вектором прототипа \mathbf{P} :

$$d = \sum (v_i - p_i),$$

или выбирает максимальное значение

$$|v_i - p_i|, \quad i = 1, \dots, n$$

для n -элементного вектора.

- Каждый прототип имеет область влияния q такую, что если $d < q$, то нейрон включается.
- В случае, когда все прототипы удовлетворяют определенным условиям, вырабатывается признак правильной идентификации между входными данными и прототипами.
- Если срабатывают несколько нейронов, вырабатывается признак неопределенности в классификации.
- И, наконец, в случае отсутствия положительного результата, т.е. когда ни один из нейронов не сработал, имеет место неопределенность в состоянии нейросети.

Нейрочип ZISC036 выполняет до 250 тыс. операций в секунду над векторами и прототипами, что эквивалентно $2 \cdot 10^9$ обычных операций в секунду. На плате VME монтируется до четырех нейрочипов с возможностью каскадирования до сорока модулей. Данный нейрочип предполагается использовать в эксперименте по поиску тяжелых частиц Хиггса [71]. С этой целью было проведено моделирование, результат которого приведен на рис. 27. Здесь показано двумерное распределение импульсов частиц, соответствующих полезным сигналам и шумам, которые, как видно из рисунка, разделяются. В качестве входных сигналов использовались импульсы p и поперечные импульсы p_t четырех различных частиц (общее число входов сети равнялось восьми). Сигналы исходили или из модели реакции распада тяжелых хиггс-частиц или от шумовых процессов. Полученные результаты оказались более высокими по сравнению с использованием для аналогичных целей нейрочипов ETANN и CLN32/64.

Известен еще один нейрочип — SANDY/1, в котором используется модель радиально-базовых функций [72]. Нейрочип SANDY/1 представляет собой каскадируемую систолическую матрицу, которая может быстро моделировать многослойную прямоточную сеть, реализующую радиально-базовые функции и некоторые другие модели. Такая архитектура существенно расширяет области применения нейрочипа. Нейрочип SANDY/1 вычисляет выражение (1) с помощью n процессорных элементов, если вектор x имеет раз-

мерность n . Это возможно, поскольку все компоненты x_i вычисляются независимо. Как отмечается в [72], одним из недостатков матрично-векторного умножения является то, что количество циклов, необходимых для передачи элементов матрицы W , больше, чем активационных векторов v_i . В результате получаются пустые циклы.

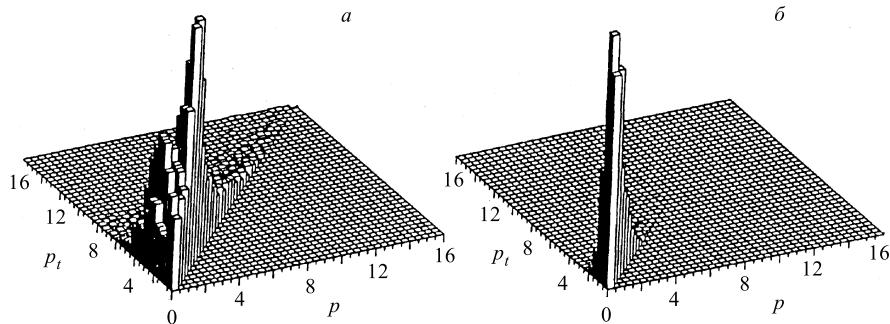


Рис. 27. Образцы распределений сигналов, используемых для тренировки ИНС: *а*) полезные сигналы; *б*) шумы; p — импульсы частиц; p_t — поперечные импульсы частиц. Видно, что картинки, иллюстрирующие распознавание полезных сигналов и шумов, существенно отличаются [71]

Количество циклов можно существенно уменьшить, если выполнять процедуру умножения двух матриц, что и реализовано в архитектуре нейрочипа. В этом случае четыре активационных вектора в процессе распознавания вычисляются за четыре цикла ($n = 4$), и результат операции передается в следующий процессорный элемент. 40-разрядная сетка АЛУ позволяет обсчитывать до 512 нейронов без потери необходимой точности. С целью обеспечения совместимости с 16-разрядной магистралью и упрощения каскадирования отдельных нейрочипов введен блок дискриминации 40-битных значений в 16-битные. Для генерации функций активности имеется отдельная микросхема. Для реализации не только алгоритма радиально-базовых функций, но и алгоритма Кохонена в нейрочипе имеются два дополнительных блока: дополнительное АЛУ и блок определения наиболее активного нейрона.

В нейрочипе SANDY/1 реализуется представление радиально-базовых функций, требующее вычисления евклидова расстояния между векторами w и v , представляющих собой весовой вектор и вектор активности соответственно. Эта процедура требует вычисления корня квадратного из суммы разностей квадратов. Для этой цели в нейрочипе имеются два дополнительных устройства: 16-разрядный сумматор для вычисления разностей $w_i - v_i$, работающий в конвейерном режиме с основным АЛУ, и АЛУ для вычисления сумм квадратов. Квадратный корень находится табличным методом. Нейро-

чип SANDY/1 выполнен по КМОП-технологии с шириной дорожки 0,8 мкм в корпусе, содержащем 144 вывода. При цикле 20 нс выполняется $2 \cdot 10^8$ операций в секунду. В табл. 2 приведены сравнительные характеристики трех вышеописанных цифровых модулей.

Таблица 2. Сравнительные характеристики нейрочипов

Нейрочип	Входной вектор: количество бит, частота поступления	Время вычисления	За- держ- ка	Струк- тура ИНС
CNAPS SANDY/1	8 бит, 20 МГц 16 бит, 40 МГц	8 мкс — одно событие 20,5 мкс — четыре события	— 27	$64 \times 64 \times 1$ $64 \times 64 \times 1$
MA16 SANDY/1	16 бит, 40 МГц 16 бит, 40 МГц	5,5 мкс 2 мкс — четыре события	8 3,6	$16 \times 5 \times 1$ $16 \times 5 \times 1$

Как видно из табл. 2, нейрочип SANDY/1 имеет более высокую производительность, нежели нейрочипы CNAPS и MA16. Так, с помощью нейрочипа SANDY/1 одно событие обрабатывается примерно за 5 мкс, с помощью нейрочипа CNAPS на обработку одного события требуется 8 мкс при одинаковой структуре ИНС $64 \times 64 \times 1$. При одинаковой структуре ИНС $16 \times 5 \times 1$ для обработки одного события с помощью нейрочипа SANDY/1 требуется времени в пять раз меньше, нежели с помощью нейрочипа MA16. Данная разработка предназначена для использования в системах быстрого отбора событий в экспериментах по физике высоких энергий.

Применение активной перепрограммируемой памяти. Концепция активной перепрограммируемой (АПП) памяти базируется на использовании размещенных в одном корпусе микросхемы перепрограммируемой логической матрицы (ПЛМ) и доступных загрузчику файловых регистров большой емкости (банки памяти). Это направление в цифровой технике активно развивается фирмой «Xilinx» с начала 90-х годов [73]. Чаще всего на базе такой технологии создаются быстрые копроцессоры, выполняющие специфические функции. Один из таких копроцессоров, предназначенный для быстрой обработки данных, которые будут регистрироваться в экспериментах на большом адронном коллайдере, описан в [74]. Процесс разработки и контроля разработки может выполняться квалифицированным инженером на рабочем месте при наличии соответствующих программных и аппаратных средств. Причем цикл создания сложного устройства обычно не превышает одной недели и менее. Будучи однажды запрограммированным, устройство затем работает как обычная большая микросхема до выключения источника питания. Логика ра-

боты копроцессора описывается с помощью языка высокого уровня. Данные в модуль загружаются в последовательном коде или байтами. Ожидается, что к 2001 г. в одном корпусе может содержаться до 25К неоднократно перепрограммируемых вентилей с тактовой частотой 200 МГц. Широкое практическое применение концепция АПП нашла благодаря разработке процессорной платы DecPeRLe-1 [61] фирмой DEC, структурная схема которой кратко описана в [74,75]. На одной плате расположено 23 модуля фирмы «Xilinx» и четыре банка памяти емкостью 1 Мбайт каждый, которые объединены с помощью внутренних магистралей. Основу копроцессора составляет вычислительная матрица M , состоящая из 16 модулей ПЛМ. В свою очередь, каждый модуль имеет связи с соседними. В дополнение к этому копроцессор с помощью мультиплексоров, которые представляют собой отдельные модули, имеет доступ к каждой из четырех 64-разрядных магистралей и к банкам памяти. С помощью других модулей осуществляется связь с основным процессором и генерация адресов для АПП. Как показано в [75], копроцессор эффективно используется в прототипе системы сбора и обработки физических данных установки ATLAS в качестве классификатора частиц. Была использована модель односторонней сети по схеме 12-6-4. Три выхода используются для классификации частиц, например, «электрон», «мюон» или «струя» из частиц. Четвертый выход является резервным. Суть проблемы заключается в том, что в будущем эксперименте на установке ATLAS, субдетекторы которой будут содержать несколько миллионов каналов регистрации, требуется быстро (менее чем за 2 мкс) определить те области детекторов, в которых имеется признак полезного события (область интересов), обработать эти данные и принять решение о передаче отфильтрованной информации на второй уровень триггерной системы. Эта задача решается с помощью логических процессоров. На втором уровне триггерной системы, где время решения должно составлять порядка 10 мкс, выполняется классификация зарегистрированных частиц, по которой можно судить о наличии полезного события. И, наконец, на третьем уровне воссоздается топология полезного события. Использование ИНС в такой установке позволит существенно упростить триггерную систему и повысить качество регистрации полезных событий.

Разработка быстрого специализированного нейрокомпьютера. Как уже отмечалось выше, ведутся интенсивные исследования, направленные на использование в системах запуска физических установок быстродействующих ИНС и нейрокомпьютеров. В [76] описан специализированный нейрокомпьютер, с помощью которого определяется множественность и координаты треков зарегистрированных частиц в эксперименте CPLEAR за время 75 нс. Целью эксперимента является прецизионное измерение нарушения CP-симметрии путем использования первичных K^0 - и \bar{K}^0 -частиц от распада антiproтонов в водородной мишени.

Прежде чем описывать архитектуру ИНС, кратко рассмотрим параметры экспериментальной установки. Ядром установки является цилиндрический детектор, состоящий из нескольких проволочных камер, расположенных вокруг водородной мишени. Ближе к мишени расположены два слоя пропорциональных камер, шесть слоев дрейфовых камер, два слоя стримерных трубок, сцинтилляционный гадоскоп, черенковские счетчики и покрывающий все детекторы газонаполненный калориметр. Информация от трековых детекторов используется в нейрокомпьютере для подсчета количества треков (два или четыре) и их положения. Исходя из практических соображений, каналы регистрации трековых детекторов разделены на 64 сектора. Одна процессорная плата, представляющая собой локальную сеть, используется для обработки данных, поступающих от пяти соседних секторов. В одном VME-крайтре располагается до 16 процессорных плат. Для построения триггерной системы потребовалось четыре аналогичных крейта. Все процессорные платы работают по одному и тому же алгоритму. На рис. 28 приведена блок-схема

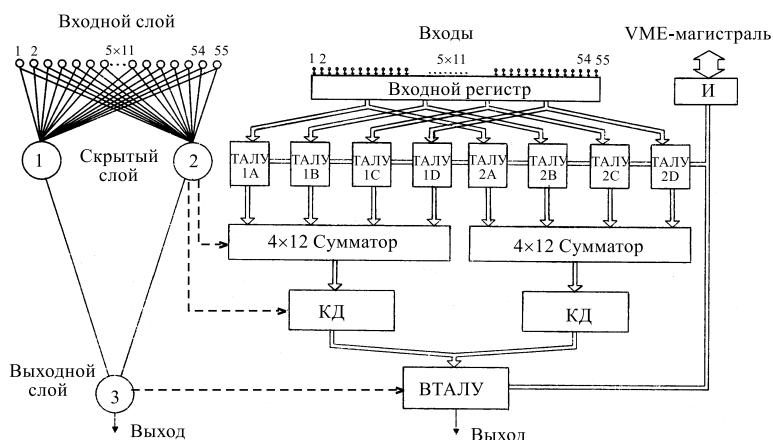


Рис. 28. Блок-схема одной платы специализированного нейрокомпьютера. ТАЛУ1А-Д, ТАЛУ2А-Д — АЛУ с табличным методом решения; ВТАЛУ — выходное ТАЛУ; КД — компрессор данных; И — элементы И. На входной слой ИНС поступают данные от детектора. На входном регистре запоминаются желаемые образцы. Пунктирными линиями условно показаны связи между нейронной сетью и остальной частью нейрокомпьютера

одной процессорной платы. ИНС представляет собой одностороннюю 55-2-1 сеть, которая, с целью получения высокого быстродействия, выполнена на обычных микросхемах и с широким использованием табличных методов решения, позволяющих быстро вычислять сигмоидную функцию и

производить умножение входных значений входных сигналов на весовые коэффициенты. Для этих целей используются блоки ТАЛУ1А÷ТАЛУ1Д и ТАЛУ2А÷ТАЛУ2Д. Распараллеливание блоков ТАЛУ обеспечивает меньшую емкость табличной памяти и в конечном итоге более высокое быстродействие. В качестве адресов этих блоков служат значения сумм входного образца, умноженные на соответствующие весовые коэффициенты. Выходы блоков ТАЛУ подключены к входам быстрых сумматоров. На рисунке не показан еще один блок ТАЛУ, который подключен к нейронам 1 и 2 скрытого слоя. В случае выработки сигнала о регистрации полезного события данные передаются для дальнейшей обработки. Отмечается, что разработанный нейрокомпьютер хорошо адаптируется к изменениям измеряемых параметров. В цитируемой работе проводится сравнение неэффективности отбора двух и четырех треков, выполненное с помощью обычного аппаратного устройства, с помощью программных средств и с помощью ИНС. Получены следующие величины неэффективности отбора: 0,218 и 0,444; 0,083 и 0,217; 0,144 и 0,296.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нейроципы и создаваемые на их основе искусственные нейронные сети могут быть успешно использованы для быстрого отбора событий в экспериментах по физике высоких и сверхвысоких энергий, для классификации элементарных частиц и в других направлениях научного приборостроения. Этому способствует быстрое развитие математических алгоритмов ИНС и достижений полупроводниковой технологии. Широкое развитие получили вычислительные нейроплаты и создаваемые на их основе нейрокрейты в стандарте VME. В равной степени используются аналоговые, аналогово-цифровые и чисто цифровые ИНС и нейрокомпьютеры. Наиболее широкое применение находят трехслойные односторонние ИНС.

Характерно также, что нейроципы и создаваемые на их основе ИНС изготавливаются не только промышленным способом, но и силами разработчиков научной аппаратуры путем использования такого перспективного направления, как неоднократно электрически перепрограммируемые большие интегральные микросхемы [77]. Используя язык высокого уровня и персональную ЭВМ, квалифицированный разработчик может в течение нескольких дней изготовить необходимый нейроцип. Как показано в [78], наиболее перспективными для использования в научных исследованиях и в приборостроении являются четыре нейроципа: ETANN, ZISC036, TOTEM и CNAPS.

Приложение. Характеристики рассматриваемых нейрочипов

Нейро-чип	Фирма	Аналоговый/цифровой	Общие характеристики
ETANN	Intel	Аналоговый	В корпусе микросхемы, содержащей 208 выводов, имеется 64 нейрона, содержащих 10240 синапсов. Максимально возможное число входных сигналов — 128 на один нейрон. 2 × 64 выводов предназначены для входных сигналов, и 64 вывода являются выходными, которые можно соединять с входными выводами. Задержка сигналов в одном модуле составляет 1–3 мкс [29].
ANNA	AT&T Bell Laboratories	Аналогово-цифровой	Количество синапсов 4096. Количество элементов смещения 256. Одновременно выполняет до 2 млн. операций умножений и сложений в секунду. Типичная область применения — распознавание рукописных текстов. Данные в цифровой форме поступают на входы с тактовой частотой 20 МГц в последовательном коде [30,31].
CLN32	Bellcore	Аналогово-цифровой	Кроме 32 нейронов и 496 аддитивных синапсов на кристалле имеется встроенное устройство для обучения. Весовые коэффициенты запоминаются в цифровой форме. С помощью дополнительного чипа CLN64 можно подключить еще 1024 аддитивных синапса. Задержка сигналов в однослоевой сети равна 1 мкс [45].
MESA	MESA	Аналогово-цифровой	Архитектура нейрочипа позволяет создавать однонаправленную сеть, содержащую 70 входных нейронов, 6 скрытых нейронов и несколько выходов. Это достигается тем, что взвешенные выходы каждого нейрона скрытого слоя имеют внешние выводы. В то время как входные сигналы являются аналоговыми, пятиразрядные синаптические веса программируются от внешнего процессора [46].
L-Neuro	Telmat	Цифровой	Базовый нейрочип, предназначенный для создания современных нейрокомпьютеров под управлением транспьютеров. Особенностью нейрочипа являются аппаратная реализация параллельного выполнения базовых операций в процессе обучения и распознавания. Локальная память весовых коэффициентов составляет 1 кбайт [55].
НТЦ «Модуль»	НТЦ «Модуль»	Цифровой	Нейрочип отечественного производства предназначен для построения сложных нейросетей. В основу архитектуры нейрочипа положен оригинальный метод выполнения его базовых операций с помощью однородной вычислительной среды, которая позволяет производить операции произвольной разрядности (от 1 до 64 бит). При тактовой частоте 30 МГц нейрочип выполняет до 720 миллионов операций с плавающей точкой в секунду [60].
SYNAPS1 N110	Siemens	Цифровой	Нейрокомпьютер, реализованный на базе восьми нейрочипов MA16. Нейрокомпьютер выполняет до 3,2 млрд. операций умножения (16×16 и сложений в секунду). Емкость памяти 32 Мбайт [61].
MA16	Siemens	Цифровой	Работает с тактовой частотой 50 МГц в систолическом режиме. Необходима внешняя память. Точность представления данных 16 бит [63].
TOTEM	INFN Universita di Trento.	Цифровой	Реализует RTS-алгоритм и содержит 32 процессорных элемента (ПЭ), работающих в конвейерном режиме. Используется в качестве копроцессора к персональной ЭВМ. Выполняет до 32 умножений со сложением за 35 нс. Емкость памяти весовых коэффициентов 32 кбит [66,67].
SNAPS-1064	Adaptive Solutions	Цифровой	Содержит 64 ПЭ, работающих параллельно с тактовой частотой 20 МГц. Архитектура нейрочипа позволяет создавать матричный процессор, содержащий 512 ПЭ. Память весовых коэффициентов равна 4 кбайт.
ZISC036	IBM	Цифровой	Реализует алгоритм радиально-базовых функций (РБФ). Нейрочип содержит 36 идентичных нейронов, подключенных к общей магистрали и управляющее устройство. Используется в качестве копроцессора для быстрого вычисления весовых коэффициентов. Тактовая частота 20 МГц [70,71].
SANDY/I	Research center Karlsruhe	Цифровой	Реализует алгоритм РБФ и многослойный перцептрон. Имеется четыре процессорных элемента, работающих в систолическом режиме с возможностью каскадирования. Память весовых коэффициентов равна 64×16 . Выполняет 600 млн. операций в секунду [72].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фишбах Д.Д.** — В мире науки, 1992, № 11,12, с.10.
2. **Хинтон Д.Е.** — В мире науки, 1992, № 11,12, с.103.
3. **Кэмп Д.В.** — В мире науки, 1992, № 11,12, с.200.
4. **Kohonen T.** — Neural Networks, 1988, v.1, No.1, p.3.
5. **Кохонен Т.** — Ассоциативные запоминающие устройства. Ред. Зуева В.И. М.: Мир, 1982, 375 с.
6. **Ачасова С.М.** — Программирование, 1991, № 2, с.40.
7. **Lippman R.P.** — IEEE ASSP Magazine. April 1987, p.4.
8. **Bishop C.M.** — Review Science Instruments, 1994, v.65, No.6, p.1803.
9. **Галушкин А.И.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1995, № 5, с.4.
10. **Галушкин А.И.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1995, № 6, с.4.
11. **Кисель И.В., Нескоромный В.Н., Осоков Г.А.** — Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1993, т.24, вып.6, с.1551.
12. **Галушкин А.И., Иванов В.В., Картамышев М.Г.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1997, № 2, с.3.
13. **Логовский А.С., Якушев Д.Ж.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1997, № 2, с.11.
14. **Кирсанов Д.В.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1997, № 2, с.19.
15. **Степанов М.В.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1997, № 2, с.32.
16. **Bortolotto C., De Angelis A., De Groot N. et al.** — Preprint INFN/AE-92/13. Frascati, 1992.
17. **Peterson C.E.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1989, v.A279, No.3, p.537.
18. **Renalds S.** — Electronics Letters, 1989, v.25, No.7, p.437.
19. **Amendolia S.R.** — 1992 CERN School of Computing. CERN 93-03. Geneva, 1993, p.135.
20. **Fisher R.A.** — Annals Engenics, 1936, v.7, p.179.
21. **Mazzani P., Odario R.** — Z. fur Physik (C), 1993, v.59, No.2, p.273.
22. **Baldanza C., Bisi F., Cotto-Romansino A. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1995, v.A361, No.3, p.506.
23. **Розенблат Ф.** — Принципы нейродинамики. М.: Мир, 1965, 480 с.
24. **Фомин Д.В.** — Приборостроение, 1995, № 1,2, с.57.
25. **Bursky D.** — Electronic Design, 1997, v.45, No.25, p.67.
26. **Кусуль М.Д.** — Управляющие системы и машины, 1993, № 5, с.6.
27. **Ясер С., Псалтис Д.** — В мире науки, 1987, № 5, с.42.
28. **Мануэль Т.** — Электроника, 1988, т.61, № 16, с.58.
29. **Brauch J., Tam S.M., Holler M.A. et al.** — IEEE Micro, 1992, No.6, December, p.34.
30. **Boser B., Sackinger E., Bromley J. et al.** — IEEE Micro, 1992, February, p.32.
31. **Sakinger E., Boser B.E., Bromley J. et al.** — IEEE Transaction on Neural Networks, 1992, v.3, No.3, p.498.
32. **Molnar J., Szekely G., Lindblad Th. et al.** — ICFA Instruments Bulletin, 1993, No.10, p.24.

33. **Lindsey C.S., Lindblad Th., Vollaro J.R. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1994, v.A351, No.1,2, p.466.
34. **Baldanza C., Beichter J., Bisi F. et al.** — Nucl. Istrum. and Methods, 1996, v.A373, No.2, p.261.
35. **Ponting P.J.** — In: Proc. Intern. Conf. on New Trends in Data and Signal Processing in Research. ESONE RTD'95. Warsaw, Poland. Sept. 27–29. 1995, p.35.
36. **Lindblad Th., Szekely G.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1993, v.A328, No.3, p.603.
37. **Kolonski H.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1995, v.A367, No.1-3, p.16.
38. **Denby B., Lindblad Th., Lindsey C.S. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1993, v.A335, No.2,3, p.296.
39. **Hornblad P., Lindblad Th., Lindsey C.S. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1993, v.A336, No.1,2, p.285.
40. **Wu D.Y., Cambell M.K.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1992, v.A317, No.1,2, p.323.
41. **Denby B., Lindsey C.S., Dikson M. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1995, v.A356, No.2,3, p.485.
42. **Conway J.S., Looms C.** — Int. J. of Modern Physics C, 1995, v.6, No.4, p.549.
43. **Akkila T., Franke T., Lindblad Th.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1993, v.A327, No.2,3, p.566.
44. **Danielsen M., Go A., Jon-And K. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1994, v.A350, No.1,2, p.322.
45. **Lindblad Th., Lindsey C.S., Block F. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1995, v.A356, No.2,3, p.498.
46. **Tong Tran T.** — Int. J. of Modern Physics C, 1995, v.6, No.4, p.573.
47. **Eide A.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1992, v.A317, No.3, p.607.
48. **Lindsey C., Denby B., Haggerty H. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1992, v.A317, No.1,2, p.346.
49. **Akkila T., Linblad Th., Lund-Jensen B.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1993, v.A327, No.3, p.573.
50. **Bishop C.M., Haynes P.S., Smith M.E. et al.** — Neural Computation, 1995, v.7, No.1, p.206.
51. **Sandler D.G., Barrett T.K., Painer D.A. et al.** — Nature, 1991, v.351, No.6324, p.300.
52. **Бондарь Е.А., Логовский А.С.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1997, №2, с.57.
53. **Haynes W.J.** — 1989 CERN School of Computing. CERN 90-06. Geneva, 1990, p.179.
54. **Крысанов А.И.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1997, №2, с.27.
55. **Крысанов А.И.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1998, №1, с.18.
56. **Bianchin S., Cosmo G., Garlatt C. et al.** — Preprint INFN/AE-92/14. Frascati, 1992.
57. **Clarke P.L., Granfield R., Crone G.I. et al.** — ATLAS Int. Note 94-01. Geneva, 1994.
58. Sonitech International Inc. 1993–1994. Product Catalog.
59. **Погорильй А.И.** — Приборостроение, 1996, т.39, №7, с.31.
60. **Виксне П.Е., Фомин Д.В., Черников В.М.** — Приборостроение, 1996, т.39, №7, с.13.
61. **Истратов А.Ю.** — Зарубежная радиоэлектроника, 1997, №2, с.24.
62. **Суньюань Гун** — ТИИЭР, 1984, т.72, №7, с.133.

-
63. **Baldanza C., Beichter J., Bisi F. et al.** — Int. J. of Modern Physics C, 1995, v.6, No.4, p.567.
 64. **Battiti R., Tecchiolli G.** — IEEE Transaction on Neural Nets, 1995, v.6, No.5, p.1185.
 65. **Batti R., Lee P.** — In: Proc. Fourth Intern. Conf. on Microelectronics for Neural Networks and Fuzzy Systems. Turin, Italy. Sept. 26–28. 1994, p.17.
 66. **Anzellotti G., Battiti R., Lazzizzera I. et al.** — Int. J. of Modern Physics C, 1995, v.6, No.4, p.555.
 67. **Dusini S., Ferrary F., Lazzizzera I. et al.** — In: Int. Conf. on Computing in High Energy Physics. 1997. Berlin. April 7–11, p.563.
 68. **Goldner D., Getta H., Kolander M. et al.** — Int. J. of Modern Physics C, 1995, v.6, No.4, p.541.
 69. **David K., Andes James C., Witham C. et al.** — Neural Networks, 1995, v.8, No.7/8, p.1349.
 70. **Lindsey C.S., Lindblad Th., Sekhniadze G. et al.** — Int. J. of Modern Physics C, 1995, v.6, No.4, p.579.
 71. **Linblad Th., Lindsey C.S., Minerskjold M. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1995, v.A357, p.192.
 72. **Fisher T., Eppler W., Gemmeke H.** — In: Proc. Second Workshop on Electronics for LHC Experiments. Balatonfured, Hungary, Sept. 23–27, 1996. CERN/LHCC/96-39, p.245.
 73. **Brandenburg G., Gorshutz U., Muller K.D.** — IEEE Transaction on Nuclear Science, 1988, v.35, p.213.
 74. **Belostoudtsev D., Bertin P., Bock R.C. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1995, v.A356, No.2,3, p.457.
 75. **Lundheim L., Legrand I., Moll L.** — Int. J. of Modern Physics C, 1996, v.6, No.4, p.561.
 76. **Leingruber F.R., Pavlopoulis P., Steincher M. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1995, v.A365, No.1, p.198.
 77. ALTERA FLEX 8000 handbook. May 1994.
 78. **Vlachos S., Wadhwa W., Lindblad Th. et al.** — Nucl. Instrum. and Methods, 1997, v.A385, No.2, p.361.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.149

Суперсимметрия в структуре ядер. Джолос Р.В. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2001, том 32, вып. 2, с. 223.

Сделан обзор результатов применения идей суперсимметрии в теории структуры ядер. Приведены примеры спектров возбужденных состояний четно-четных и соседних нечетных ядер, иллюстрирующие приближенную суперсимметрию. Рассмотрен пример суперсимметричного гамильтониана ядра, основанного на градуированной алгебре $U(1/2)$, сделан сравнительный анализ алгебраической структуры этой модели ядра и суперсимметричной модели квантовой теории поля. Приведен пример гамильтониана, часть собственных состояний которого, относящихся к четно-четным и соседним нечетным ядрам, характеризуется тождественными энергиями гамма-переходов, хотя этот гамильтониан не принадлежит ни к одному из известных пределов динамических симметрий. Показано, что описание некоторых ротационных полос в соседних четно-четных и нечетных ядрах в рамках модели частица—ротор может быть переформулировано как реализация частичной суперсимметрии.

Табл. 2. Ил. 9. Библиогр.: 56.

УДК 530.145; 539.19

Многомерный полярон в обобщенном гауссовском представлении. Ефимов Г.В., Ганболд Г. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2001, том 32, вып. 2, с. 273.

В обзоре подробно исследуются основные квазичастичные характеристики полярона, а именно энергия основного состояния и эффективная масса в любой размерности пространства $d \geq 1$ при произвольном значении электрон-фононной связи. Для эффективного исследования задачи полярона авторами разработан метод обобщенного гауссовского представления интегралов по траекториям, который уже в первом приближении выделяет вклад всех гауссовых флуктуаций в рассматриваемой системе. Поправки высших порядков могут быть систематически вычислены для учета высших негауссовых поправок. Детально исследована проблема корректного определения эффективной массы полярона, основанного на различных физических принципах. Применение метода к проблеме полярона позволило оценивать квазичастичные характеристики полярона с точностью лучшей, чем у традиционных методов. Найдены точные аналитические решения при слабой связи, разработана систематическая интерактивная оценка для получения быстро сходящегося к точному пределу ряда в режиме сильной связи. Систематический учет высших негауссовых вкладов приводит лишь к очень незначительным поправкам. Для получения численных результатов рассматриваются случаи физических размерностей $d=1$, $d=2$ и $d=3$. Метод может служить эталоном для различных методов приближенных вычислений. Дан краткий обзор современных методов в теории полярона.

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр.: 75.

УДК 539.173.12

Деление ядер при взаимодействии с протонами и нейtronами промежуточных энергий. Обухов А.И. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2001, том 32, вып. 2, с. 319.

Представлен обзор экспериментальных данных о делении ядер при взаимодействии с протонами с энергией от 20 МэВ до 3–6 ГэВ и нейтронами от 20 до 200–450 МэВ. Особое внимание удалено взаимодействию ядер U, Th, Bi, Pb, Au, W, Та с протонами и нейтронами указанных энергий, важному с практической точки зрения в связи с проблемой трансмутации долгоживущих радиоактивных отходов с использованием ускорителей протонов. Кратко рассмотрена первичная стадия взаимодействия с ядрами протонов и нейтронов с энергиями выше 50 МэВ. Рассмотрены зависимости от энергии бомбардирующих частиц сечений деления ядер, угловых распределений осколков, массовых, изотопных и кинематических распределений продуктов деления, испускания нейтронов и заряженных частиц. Сравнение характеристик деления ядер при делении ядер вблизи порога и при промежуточных энергиях частиц свидетельствует о сильном влиянии магического числа нуклонов $A \approx 132$ на процесс деления при малых энергиях и исчезновение этого влияния при высоких энергиях. При энергиях бомбардирующих протонов выше 2–3 ГэВ заметно проявляется вклад процессов глубокого расщепления и мультифрагментации ядер.

Табл. 5. Ил. 31. Библиогр.: 253.

УДК 539.1.074

Однокристальная сцинтилляционная временная спектрометрия. Морозов В.А., Морозова Н.В. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2001, том 32, вып. 2, с. 377.

Подведены итоги развития методики однодетекторной временной спектрометрии для исследования короткоживущих изомерных и основных состояний радиоактивных атомов вnano- и микросекундном диапазоне. Отличительная особенность этой методики заключается в использовании 4π -геометрии измерений, что обеспечивает высокую эффективность регистрации задержанных совпадений. В Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ впервые был реализован режим многомерных задержанных совпадений на одном детекторе. Трехмерный режим $E1 - T - E2$ позволяет помимо временного спектра регистрировать энергетические спектры, которые соответствуют переходам, заряжающим и разряжающим изомерные состояния. Дальнейшее развитие этой методики привело к созданию двухдетекторного четырехмерного спектрометра тройных совпадений, что продемонстрировало возможность эффективного применения автокорреляционного однокристального временного спектрометра для поиска изомерных состояний ядер при включении его в конфигурацию спектрометра «crystal ball». При этом для исследования ядер, имеющих изомерные состояния, отпадает необходимость применения низкоэффективного лазерного ионного источника в масс-сепараторе, что особенно важно при исследовании короткоживущих ядер в «on-line»-экспериментах. Диапазон времен жизни, доступных для изучения однодетекторными спектрометрами задержанных совпадений, простирается от 4 нс до 100 с. Создан набор калибровочных источников задержанных совпадений, перекрывающий временной диапазон от 4 нс до 4 мкс и энергетический диапазон, начинающийся с 10 кэВ. Так как низкоэнергетические переходы перекрываются с энергетическим спектром послеимпульсов ФЭУ, то

было проведено изучение амплитудно-временных характеристик послеимпульсов для некоторых типов фотоумножителей.

Табл. 6. Ил. 54. Библиогр.: 59.

УДК 681.31; 518.3

Нейрочипы, нейрокомпьютеры и их применение в экспериментальной физике высоких и сверхвысоких энергий. Никитюк Н.М. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2001, том 32, вып. 2, с. 431.

Рассмотрены архитектурные особенности и параметры ряда нейрочипов и нейрокомпьютеров, применяемых в научном приборостроении, описана тенденция их развития и использования в экспериментах по физике высоких и сверхвысоких энергий. Приведены сравнительные данные, характеризующие эффективность применения нейрочипов для отбора полезных событий, классификации элементарных частиц, реконструкции треков заряженных частиц и для поиска гипотетических частиц Хиггса, а также характеристики нейрочипов и ускорительных нейронплат отечественного производства.

Табл. 2. Ил. 28. Библиогр.: 78.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Джолос Р.В.</i>	
Суперсимметрия в структуре ядер	223
<i>Ефимов Г.В., Ганболд Г.</i>	
Многомерный полярон в обобщенном гауссовском представлении ..	273
<i>Обухов А.И.</i>	
Деление ядер при взаимодействии с протонами и нейтронами промежуточных энергий	319
<i>Морозов В.А., Морозова Н.В.</i>	
Однокристальная сцинтилляционная временная спектрометрия ...	377
<i>Никитюк Н.М.</i>	
Нейрочипы, нейрокомпьютеры и их применение в экспериментальной физике высоких и сверхвысоких энергий	431

CONTENTS

<i>Jolos R.V.</i>	
Supersymmetry in Nuclear Structure	223
<i>Efimov G.V., Ganbold G.</i>	
Multidimensional Polaron within the Generalized Gaussian Representation	273
<i>Obukhov A.I.</i>	
Nuclear Fission at Interactions of Intermediate Energy Protons and Neutrons	319
<i>Morozov V.A., Morozova N.V.</i>	
Single Crystal Scintillation Time Spectrometry	377
<i>Nikityuk N.M.</i>	
Neural Chips, Neural Computers and its Application in High and Superhigh Energy Physics Experiments	431

**Редакторы Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.
Корректор Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 23.10.2000. Подписано в печать 19.01.2001. Формат 60 90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,6. Уч.-изд. л. 20,08.
Тираж 400. Заказ 52474. Цена 15 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, E-mail address: publish@pds.jinr.dubna.su

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
2001. Том 32. Вып.2. 219—486.

УДК 539.149

СУПЕРСИММЕТРИЯ В СТРУКТУРЕ ЯДЕР

*P.B.Джолос**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	223
СУПЕРСИММЕТРИЯ И СПЕКТРЫ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР	228
МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ	233
МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ И ФЕРМИ- ОНОВ	237
ФОРМАЛЬНОЕ СРАВНЕНИЕ СУПЕРСИММЕТРИИ В МО- ДЕЛИ ЯДЕРНОЙ СТРУКТУРЫ, БАЗИРУЮЩЕЙСЯ НА ГРУППЕ $U(6/2)$, И В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ	242
$U(1/2)$ -СУПЕРСИММЕТРИЯ БЕЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИМ- МЕТРИИ	250
НЕПОЛНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ В МОДЕЛИ ЧАСТИЦА- РОТОР	259
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	269
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	270

*E-mail: jolos@thsun1.jinr.ru

УДК 530.145; 539.19

MULTIDIMENSIONAL POLARON WITHIN THE GENERALIZED GAUSSIAN REPRESENTATION

*G.V. Efimov, G. Ganbold**

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

INTRODUCTION	273
FRÖHLICH–FEYNMAN POLARON	276
POLARON IN d DIMENSIONS	279
SHORT REVIEW OF METHODS	280
POLARON QUASI-PARTICLE CHARACTERISTICS	284
The Effective Mass and Momentum	286
The Effective Mass and Velocity	288
The Effective Mass and the Fourier Transform of the Density	
Matrix	288
The «Statistical» Effective Mass	289
The «Inertial» Effective Mass	290
The «Magnetic» Effective Mass	292
GENERALIZED GAUSSIAN REPRESENTATION	297
Basic Formulae	297
Application to the Polaron	300
GAUSSIAN LEADING-ORDER ENERGY AND MASS	304
NEXT-TO-GAUSSIAN APPROXIMATION	307
EXACT AND NUMERICAL RESULTS	309
APPENDIX A	313
APPENDIX B	314
APPENDIX C	315
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	316

*Permanent address: Institute of Physics and Technology, Mongolian Academy of Sciences,
210651 Ulaanbaatar, Mongolia.

УДК 539.173.12

ДЕЛЕНИЕ ЯДЕР ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
С ПРОТОНАМИ И НЕЙТРОНАМИ
ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЙ

А.И.Обухов

Радиевый институт им. В.Г.Хлопина, Санкт-Петербург

ВВЕДЕНИЕ	319
ПЕРВИЧНАЯ СТАДИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОТОНОВ И НЕЙТРОНОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЭНЕРГИИ С ЯДРАМИ	321
ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЙ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР ОТ ЭНЕРГИИ БОМБАРДИРУЮЩИХ ПРОТОНОВ	325
ЗАВИСИМОСТЬ СЕЧЕНИЙ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР ОТ ЭНЕРГИИ НЕЙТРОНОВ	334
Измерения $\sigma_f(E_n)$ на источниках нейтронов с энергиями E_n выше 20 МэВ.	335
Оцененная зависимость абсолютных значений $\sigma_f(E_n)$ для ^{235}U в интервале энергий нейтронов 20÷200 МэВ [90] как стандарт.	336
Оцененная зависимость абсолютных значений $\sigma_f(E_n)$ для ^{238}U в интервале энергий нейтронов 20÷200 МэВ [90].	337
Оцененная зависимость абсолютных значений $\sigma_f(E_n)$ для ^{209}Bi в интервале энергий 20÷1000 МэВ [90].	337
УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ПРОТОНАМИ	339
МАССОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ПРОТОНАМИ И НЕЙТРОНАМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЙ	345
Распределение по массам осколков вблизи порога деле- ния.	345
Изменение массового распределения осколков деления ядер с ростом энергии бомбардирующих протонов и ней- тронов.	347
Природа массового распределения осколков деления ядер.	350

2 ОБУХОВ А.И.

Массовое распределение осколков деления в модели	
жидкой капли.	352
Влияние структуры ядра.	353
ЗАРЯДОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЗАРЯДОВАЯ ДИСПЕРСИЯ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР	353
Зарядовое распределение осколков деления.	353
Зарядовая дисперсия осколков деления.	355
КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ОСКОЛКОВ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР	357
Зависимость кинетической энергии осколков деления от	
отношения их масс.	357
Зависимость средней кинетической энергии осколков деления от энергии бомбардирующих нейтронов и протонов.	359
НЕЙТРОНЫ И ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ,	
ИСПУСКАЕМЫЕ ПРИ ДЕЛЕНИИ ЯДЕР	360
Испускание нейтронов.	361
Зависимость числа мгновенных нейтронов от массы	
осколка.	362
Испускание заряженных частиц.	364
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	365
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	367

УДК 539.1.074

ОДНОКРИСТАЛЬНАЯ СЦИНТИЛЛЯЦИОННАЯ ВРЕМЕННАЯ СПЕКТРОМЕТРИЯ

В.А.Морозов, Н.В.Морозова

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	378
МЕТОД ЗАДЕРЖАННЫХ СОВПАДЕНИЙ	378
ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА ОДНОКРИСТАЛЬНОЙ СЦИНТИЛЛЯЦИОННОЙ ВРЕМЕННОЙ СПЕКТРОМЕТРИИ	381
ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕГИСТРАЦИИ СОВПАДЕНИЙ ОДНОКРИСТАЛЬНЫМ ВРЕМЕННЫМ СПЕКТРОМЕТРОМ	390
АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ СПЕКТРОВ	391
ОДНОКРИСТАЛЬНЫЕ СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫЕ ВРЕМЕН- НЫЕ СПЕКТРОМЕТРЫ	393
ОВС С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ ДЕТЕКТОРАМИ	413
ОВС с Si(Au)-детектором.	413
ОВС с Ge-детектором.	414
ЭТАЛОННЫЕ РАДИОАКТИВНЫЕ ИСТОЧНИКИ ДЛЯ КАЛИБРОВКИ ОСВС	416
АМПЛИТУДНО-ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕИМПУЛЬСОВ ФОТОУМНОЖИТЕЛЕЙ	420
Аппаратура.	421
Временные характеристики послеимпульсов.	421
Амплитудные характеристики послеимпульсов.	423
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	428

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 2

УДК 681.31; 518.3

НЕЙРОЧИПЫ, НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ И СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

H.M. Никитюк

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	431
НЕЙРОН КАК ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ. ПРОСТЫЕ КЛАС- СИФИКАТОРЫ	433
ИСКУССТВЕННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ. НЕЙРОПАКЕТЫ	438
ПРОЦЕСС ОБУЧЕНИЯ ИНС	442
АНАЛОГОВЫЕ И АНАЛОГОВО-ЦИФРОВЫЕ НЕЙРОЧИПЫ	443
НЕЙРОПЛАТЫ И НЕЙРОКРЕЙТЫ	447
ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГОВЫХ И АНАЛОГОВО-ЦИФРОВЫХ НЕЙРОЧИПОВ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ФИЗИКЕ ВЫСО- КИХ ЭНЕРГИЙ	448
ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГОВЫХ ИНС ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ФИ- ЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ	458
ПРИМЕНЕНИЕ ТРАНСПЬЮТЕРОВ И ЦИФРОВЫХ СИГ- НАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОРОВ	460
ЦИФРОВЫЕ НЕЙРОЧИПЫ И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ	463
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	476
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	476