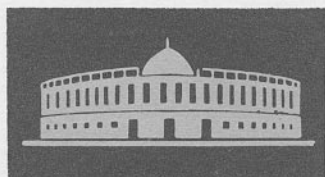


ISSN 0367-2026

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ



ЧАСТИЦ

И АТОМНОГО

ЯДРА

ВЫПУСК

1994 том 25 выпуск 3



JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

**PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI**

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.25

PART 3

Six issues per year

DUBNA 1994

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

**ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА**

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 25

ВЫПУСК 3

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1994

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

М.Г.МЕЩЕРЯКОВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

В.Г.СОЛОВЬЕВ

(зам. главного редактора),

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редактор

Е.К.Аксенова, тел. 65-165

О КОНФАЙНМЕНТЕ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ*

Л.В.Прохоров

Санкт-Петербургский государственный университет, НИИ Физики, С.-Петербург

Анализируется проблема конфайнмента в калибровочных теориях. Исследуется широкий класс моделей с калибровочной симметрией, начиная от квантовой механики и кончая квантовой хромодинамикой. Подчеркивается целесообразность отделения чисто кинематического аспекта проблемы (запрет на состояния) от динамического (линейно растущий потенциал). Обсуждается природа удерживающих сил. Изучается эволюция струно-подобных возбуждений электромагнитного поля в свободной электродинамике и в теории со статическими источниками; показана их неустойчивость. Дается классификация различных видов конфайнмента в зависимости от физических параметров струны.

The problem of confinement in gauge theories is analyzed. A wide class of gauge models (both quantum mechanical and field theoretical ones, including QCD) is considered. It is stressed that it is useful to distinguish the kinematical aspect of the problem (the existence of forbidden states) from the dynamical one (linear potential). The nature of confining forces is discussed. The evolution of string-line excitations of field in free QED and in QED with static sources is investigated. It is shown that they are not stable. The classification of forms of confinement depending on the physical parameters of string is given.

1. ВВЕДЕНИЕ

Краткая история вопроса. Если предыстория вопроса начинается с открытия сильных взаимодействий (нуклонная модель ядра (1932) — проблема сил, связывающих нуклоны), то начало истории можно отнести к 1961 г. К этому времени было открыто довольно много сильновзаимодействующих частиц (π , K , $\bar{K}$; N , Λ , Σ , Ξ ; Δ , Σ^* , Ξ^*) и остро встал вопрос о наведении порядка в этом множестве «простейших кирпичиков материи». Гелл-Манн [1] и Нееман [2] предложили классифицировать их по группе $SU(3)$ (на современном языке — группа ароматов $SU(3)_f$), это так называемый «восьмеричный путь»: мезоны π , K , $\bar{K}$, η и барионы N , Λ ,

*Расширенный доклад на XI Международном семинаре по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 7—12 сентября 1992 г.

Σ , Ξ приписывались октетному представлению группы. Триумфом теории явилось открытие Ω^- -гиперона, недостающего звена декаплета Δ , Σ^* , Ξ^* , Ω . Наблюдавшиеся частицы, однако, реализовывали лишь часть представлений группы $SU(3)_f$ (октетное и декаплетное), роль остальных была неясна.

Известно, что все представления группы $SU(3)$ можно построить из двух простейших триплетов ξ , ξ^* , так называемых фундаментальных или элементарных представлений [3]. Гелл-Манн [4] и Цвейг [4] (1964) предположили, что все сильновзаимодействующие частицы (адроны) построены из простейших, реализующих фундаментальные представления группы $SU(3)$ («кварков» [4] или «тузов» [5]). Вопрос о том, являются ли кварки реальными частицами или они представляют собой чисто математические объекты, оставался открытым. Признание их реальности порождало новые проблемы: 1) кварки, будучи фермионами, описывались симметричными по всем известным квантовым числам волновыми функциями (модель аддитивных кварков [6]); 2) не наблюдались изолированные кварки (конфайнмент), хотя до сих пор все составные объекты удавалось разбивать на простейшие; 3) не наблюдались дикварки и другие экзотические состояния. Первая проблема решалась наделением кварков новым квантовым числом [7—9] (на современном языке — «цветом»), принимавшим три значения; предполагалось, таким образом, что имеется три сорта каждого из кварков, и их волновая функция в нуклоне антисимметрична по цвету.

Интерес к кваркам возрос после открытия масштабной инвариантности (скейлинга) и появления партонной модели адронов [10,11], когда стало ясно, что последние построены из точечных объектов. Естественно было отождествить их с кварками, но тогда в полный рост вставал вопрос о природе взаимодействия кварков. Была выдвинута гипотеза, что сильные взаимодействия описываются калибровочной теорией [12—14], причем в работе [14] была предложена модель, именуемая ныне квантовой хромодинамикой (КХД). Современная теория сильных взаимодействий появилась в результате превращения глобальной цветовой симметрии в локальную, т.е. калибровочную.

Итак, в 1973 г. квантовая хромодинамика была сформулирована. Вопрос о статистике решался автоматически, вопрос о конфайнменте оставался открытым. Проблема была немедленно атакована теоретиками. Наметились два подхода: физический, опирающийся на здравый смысл и интуицию, и «физико-математический», в котором за основу брался лагранжиан КХД. Из работ, относящихся к первому направлению, отметим модель мешков [15] и модель вакуумного конденсата монополей [16,17].

Из работ второго направления сошлемся на публикации [18—20]. Наиболее последовательно программу изучения конфайнмента из первых принципов провел К. Вильсон [21]. Эта пионерская работа примечательна в нескольких отношениях. Во-первых, в ней была сформулирована калибровочная теория на решетке, во-вторых, были введены «петли Вильсона», в-третьих, был сформулирован «критерий Вильсона» (закон площадей), и наконец, для массивных зарядов в пределе сильной связи был получен конфайнмент в КЭД (подробнее об этом см. разд. 5). Неабелевы теории в подходе Вильсона исследовались путем вычислений на компьютерах [22]. Отметим также фундаментальную работу Т. Куго и И. Оджима [23], в которой проведено подробное и математически строгое исследование проблемы, установлены общие свойства физических состояний в калибровочных теориях (равенство нулю глобальных калибровочных зарядов, отсутствие в физическом секторе локализованных цветных состояний). Это, так сказать, «кинематика» феномена, поскольку для решения вопроса о характере межчастичных сил недостаточно общих соображений — необходимо умение описывать динамику полей.

Среди прочих работ, посвященных конфайнменту, отметим исследование модели Швингера [24] (электродинамика безмассовых фермионов в пространстве-времени $(1+1)$). Интерес к ней связан с тем, что в одномерной электродинамике конфайнмент имеет место автоматически («кулонов» потенциал линейен). В безмассовой модели Швингера электрический заряд полностью экранирован, т.е. имеет место «обесцвечивание» [25—26].

Общие замечания о проблеме. Строго говоря, до сих пор не существует общепринятого определения конфайнмента. Причина, очевидно, в отсутствии ясного понимания феномена. Проблема формулируется по-разному. Первоначально она сводилась к вопросу [12]: почему мы не видим физических кварков? С появлением КХД вопрос приобрел конкретность: почему кварки встречаются только в бесцветных комбинациях ($q\bar{q}$, qqq , $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$) [27]? Наконец, говорят, что имеет место конфайнмент, если статические силы между кварками характеризуются линейно растущим потенциалом. Все три формулировки имеют совершенно разный характер. Первая — качественная, вторая ничего не говорит о динамике (чистая кинематика, вопрос о силах не поднимается), тогда как в третьей речь идет о конкретном потенциале. Подразумевается, что применительно к кваркам справедливы все три формулировки. Более того, исключение одного из признаков («ненаблюдаемость» кварков, бесцветность адронов, линейный рост потенциала) трактуется как подмена проблемы. Отсутствие четкого определения конфайнмента затрудняет его изучение.

Даже поверхностное знакомство с проблемой строения адронов убеждает в ее чрезвычайной сложности, равно как и в непригодности для ее

решения метода теории возмущений. Не удалось выяснить физику феномена и с помощью единственного регулярного непертурбативного подхода — квазиклассического описания в рамках аппарата континуальных интегралов. Из попыток решить проблему конфайнмента стало ясно, что физики столкнулись с качественно новым явлением. Все это контрастирует с простотой лагранжиана КХД.

Иногда полезно обобщить или, наоборот, упростить проблему с тем, чтобы исключить несущественные детали. Расширим постановку задачи. Оба вышеприведенных вопроса, ставящих проблему, по существу, носят запретительный характер. А какие запреты вообще известны в физике? Помимо произвольных запретов, не вытекающих из динамики (например, помещение частицы на окружность или сферу), сюда относятся законы сохранения, правила суперотбора, связи в теориях с вырожденным лагранжианом. Первые, однако, хотя и ограничивают движение, очевидным образом не имеют отношения к проблеме — они лишь запрещают изменение некоторых динамических величин со временем, не препятствуя им принимать любые значения. Далее. Имеется два правила суперотбора [28]: 1) запрещена суперпозиция состояний с целым и полуцелым спином (это следует из общих свойств представлений группы Лоренца); 2) запрещена суперпозиция состояний с разными электрическими зарядами (до недавнего времени это правило было «эмпирическим» [29]). Ясно, что эти запреты уже нельзя исключить, как заведомо не относящиеся к вопросу (см. разд.2). Наконец, теории со связями. Они тем более заслуживают внимания, что калибровочные теории являются типичными их представителями.

Изучение уже простейших механических систем с калибровочной симметрией обнаруживает запреты интересующего нас типа (разд.2) — часть состояний оказывается за пределами физического сектора. В случае гармонического осциллятора с калибровочной группой $SO(2)$ запрещены все возбуждения с нечетными номерами; в теории поля это соответствовало бы запрету на появление частиц иначе как парами и исключению из физического сектора состояний с нечетным числом частиц — факт, характерный для конфайнмента. Данный пример наводит на мысль о том, что конфайнмент кварков есть частный случай явлений, присущих динамическим системам со связями первого рода. В дальнейшем термин «конфайнмент» будет толковаться расширительно как запрет на состояния с определенными квантовыми числами. Это позволит отделить чисто кинематический аспект проблемы от динамического. Анализ различных моделей показывает плодотворность такого подхода, выделяющего самую яркую черту конфайнмента — запрет цветных состояний. Детали статического взаимодействия кварков или других заряженных частиц зависят от конкретики теории, в частности, от калибровочной группы, строения

вакуума и т.п. и составляют отдельную проблему. При таком понимании конфайнмент имеет место даже в электродинамике — полный электрический заряд Вселенной должен равняться нулю [29] (разд.2). Кинематический и динамический аспекты конфайнмента в известной степени независимы: в квантовой электродинамике (КЭД) есть запрет на полный электрический заряд, но нет линейно растущего потенциала.

В предлагаемом подходе проблема допускает красивую геометрическую формулировку в виде задачи о перечислении полилокальных инвариантов в теории расслоенных пространств. Как известно, векторные калибровочные поля можно отождествить со связностями в главном расслоении [30,31]. «Цветные» конфигурации полей запрещены требованием калибровочной инвариантности, а P -экспонента, обычно отождествляемая со струной, возникает как оператор параллельного переноса (разд.3). Разумеется, здесь и речи нет о динамике, поскольку отсутствует лагранжиан. Включение динамики не может нарушить калибровочную инвариантность найденных структур, т.е. проделанный анализ остается в силе — калибровочно-инвариантный лагранжиан задает лишь закон их изменения со временем.

Вопрос о статических силах между массивными зарядами, входящими в упомянутые инвариантные структуры, рассматривается в разд.4. Энергия состояния, образованного кварком, антикварком и соединяющей их P -экспонентой, разумеется, пропорциональна длине контура интегрирования в последней, но отождествление этой энергии с потенциальной возможно лишь при условии стационарности данного состояния. В разд.5 вопрос о стационарности исследуется в квантовой электродинамике. Показано, что струноподобные возбуждения, порождаемые замкнутыми «струнами» (линейными экспонентами) или «струнами» со статическими зарядами на концах, нестационарны [32,33]. Там же обсуждается вопрос о законе площадей и методе сильной связи в КЭД на решетке [21]. Показано, что метод сильной связи, используемый в решеточных вычислениях, непригоден для решения задачи о конфайнменте в непрерывном пределе. В разд.6 перечислены формы, в которых может проявиться конфайнмент. В разд.7 подводятся итоги анализа.

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ И КОНФАЙНМЕНТ

«Конфайнмент» в квантовой механике. *Калибровочная группа $SO(2)$* . Чтобы поближе познакомиться с особенностью запретов, возникающих в теориях с калибровочной группой, рассмотрим простейшую модель [34,35] с лагранжианом

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{\vec{x}} - yT\vec{x})^2 - \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^2, \quad \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Лагранжиан (2.1) описывает частицу единичной массы в двумерном пространстве $\vec{x}(x_1, x_2)$. Он инвариантен относительно калибровочных преобразований $\delta\vec{x} = \omega T\vec{x}$, $\delta y = \dot{\omega}$, где $\omega(t)$ — бесконечно малая произвольная функция времени, и, по существу, совпадает с лагранжианом скалярной электродинамики в пространстве-времени $(0+1)$: компоненты $\vec{x}$ есть вещественная и мнимая части скалярного комплексного поля, а $y = A_0$ (A_μ — вектор-потенциал). Переход к гамильтонову формализму совершается с учетом первичной связи $p_y = \partial L / \partial \dot{y} = 0$ (далее см. [35, 36]):

$$H = \frac{1}{2} (\vec{p}^2 + \vec{x}^2) + y\vec{p}T\vec{x}. \quad (2.2)$$

Запишем (2.2) во вторично квантованном виде

$$\hat{H} = \hat{\vec{a}}^+ \hat{\vec{a}} + y \hat{\vec{a}}^+ T \hat{\vec{a}}, \quad \hat{\vec{a}}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p} \pm i\vec{x}), \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2. \quad (2.3)$$

вторичная связь

$$\hat{\sigma} = \hat{\vec{a}}^+ T \hat{\vec{a}} \quad (2.4)$$

есть генератор поворотов в плоскостях $\vec{x}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ или $(\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+)$. Связи находятся в инволюции, $[\hat{p}_y, \hat{\sigma}] = 0$, откуда следует, что векторы физических состояний Φ должны удовлетворять условиям [37]

$$p_y \Phi = 0, \quad \hat{\sigma} \Phi = 0. \quad (2.5)$$

Первое условие (2.5) малосодержательно, второе же исключает часть собственных векторов оператора $\hat{H}$ (2.3). Действительно, если $|0\rangle$ — физический «вакуум» ($\hat{\vec{a}}|0\rangle = \hat{\sigma}|0\rangle = 0$), то любой собственный вектор $\hat{H}$ получается применением к $|0\rangle$ операторов вида $(\hat{a}_1^+)^{n_1}(\hat{a}_2^+)^{n_2}$. Второе условие (2.5) означает, что физическому сектору принадлежат лишь состояния, не меняющиеся при калибровочных преобразованиях, т.е. при поворотах в плоскости $(\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+)$. Единственный инвариантный оператор, который можно построить из 2-вектора $\hat{\vec{a}}^+$, есть $(\hat{\vec{a}}^+)^2$; следовательно, базис физического пространства образуют векторы

$$[(\hat{\vec{a}}^+)^2]^n |0\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

отвечающие собственным значениям оператора $\hat{H}$ (2.3) $E_{2n} = 2n + 1$.

Векторы вида $\hat{a}_1^+ [(\hat{a}^+)^2]^n |0\rangle$ меняются при калибровочных преобразованиях, генерируемых оператором $\hat{\sigma}$, и исключаются вторым условием (2.5). В квантовой теории поля подобный запрет означал бы, что частицы, порождаемые из вакуума оператором $\hat{a}^+$, могут появляться лишь парами. По существу, мы имеем пример конфайнмента, если понимать его в широком смысле: уровни с нечетными номерами запрещены.

Замечание. Калибровочной орбитой модели является окружность; точки окружности физически неразличимы. В калибровке $x_2 = 0$ орбита превращается в дискретное множество, состоящее из двух точек оси x_1 , т.е. точки положительной и отрицательной полуосей отождествляются. Вследствие этого частица после достижения начала координат фактически начинает двигаться в обратном направлении [35,36]. Отождествление положительной и отрицательной полуосей x_1 допускает следующую интерпретацию. Можно считать всю ось физической, но предположить существование второй частицы, не отличимой от первой и движущейся зеркально. Тогда первая частица после достижения начала координат продолжает движение по отрицательной полуоси, тогда как зеркальная ей проходит через ноль, имитируя попятное движение первой. Так как существование первой частицы возможно лишь вместе с зеркальной, при таком истолковании рассматриваемая модель служит примером глобального конфайнмента. Подобная интерпретация даже более предпочтительна, поскольку полностью согласуется с ситуацией в теории поля (появление частиц только парами). В квантовой механике второе условие (2.5) в калибровке $x_2 = 0$ сводится к исключению нечетных функций. Тем самым формирование локализованного волнового пакета на положительной полуоси влечет появление зеркального, т.е. с точки зрения квантовой механики предлагаемая интерпретация тривиальна.

Калибровочная группа $SU(3)$. Аналогично обстоят дела и в модели с калибровочной группой $SU(3)$, иллюстрирующей ситуацию в хромодинамике. Лагранжиан

$$L(\vec{\xi}, \vec{\xi}^*, \vec{\xi}, \vec{\xi}^*, y, \dot{y}) = (\vec{\xi} - i\dot{y}\vec{\xi})^* (\vec{\xi} - i\dot{y}\vec{\xi}) - \vec{\xi}^* \vec{\xi} \quad (2.7)$$

(здесь $\hat{y} = y^a \lambda_a$, $a = 1, 2, \dots, 8$, λ_a — матрицы Гелл-Манна, $\vec{\xi}_\alpha$ — 3-мерный комплексный вектор, $\vec{\xi}^* \vec{\xi} = \xi_\alpha^{i*} \xi_i^\alpha$, индекс α нумерует «цвет», $\alpha = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3$) инвариантен относительно калибровочных преобразований $\delta \vec{\xi} = i\hat{\omega} \vec{\xi}$, $\delta \vec{\xi}^* = -i\vec{\xi}^* \hat{\omega}$, $\delta \hat{y} = i[\hat{\omega}, \hat{y}] + \hat{\omega}$, где $\hat{\omega} = \omega^a \lambda_a$, $\omega^a(t)$

— произвольные бесконечно малые функции времени. Теория, заданная лагранжианом (2.7), есть скалярная изовекторная хромодинамика в фундаментальном представлении в пространстве-времени (0+1). Первичные связи таковы: $p_a = \partial L / \partial \dot{y}^a = 0$. Переходя к гамильтонову формализму,

$$\text{имеем } \vec{p}_\alpha = \partial L / \partial \vec{\xi}^{\alpha*}, \quad \vec{p}^{\alpha*} = \partial L / \partial \vec{\xi}_\alpha^*,$$

$$H = \vec{p} \vec{p}^* + \vec{\xi}^* \vec{\xi} + i \vec{p} \vec{y} \vec{\xi} - i \vec{\xi}^* \vec{y} \vec{p}^*. \quad (2.8)$$

С помощью замены

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p} - i \vec{\xi}^*), \quad \vec{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p}^* + i \vec{\xi}), \\ \vec{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p}^* - i \vec{\xi}), \quad \vec{b}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{p} + i \vec{\xi}^*), \end{aligned} \quad (2.9)$$

гамильтониан (2.8) записываем во «вторично квантованном виде»:

$$H = \vec{a}^* \vec{a} + \vec{b} \vec{b}^* + \vec{a} \vec{y} \vec{a}^* - \vec{b}^* \vec{y} \vec{b}. \quad (2.10)$$

Вторичные связи

$$\sigma^a = \vec{a} \lambda^a \vec{a}^* - \vec{b}^* \lambda^a \vec{b} \quad (2.11)$$

генерируют калибровочные преобразования из группы $SU(3)$. Дальнейшее просто. Физические состояния не должны меняться при калибровочных преобразованиях, т.е.

$$\sigma^a \Phi = 0, \quad a = 1, 2, \dots, 8, \quad (2.12)$$

а единственные неприводимые инварианты, которые можно построить из векторов $\vec{a}^{\alpha+}, \vec{b}_\alpha^+$, есть

$$\hat{M}_{ij} = \hat{a}_i^{\alpha+} \hat{b}_{\alpha j}^+, \quad \hat{B} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{ijk} \hat{b}_{\alpha i}^+ \hat{b}_{\beta j}^+ \hat{b}_{\gamma k}^+, \quad \hat{B} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{ijk} \hat{a}_i^{\alpha+} \hat{a}_j^{\beta+} \hat{a}_k^{\gamma+}, \quad (2.13)$$

где $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}, \epsilon^{ijk}$ — единичные антисимметричные тензоры, т.е. физическому сектору принадлежат векторы вида

$$\hat{M}_{ij}^{n_1} \hat{B}^{n_2} \hat{B}^{n_3} |0\rangle, \quad \hat{a}_\alpha^+ |0\rangle = \hat{b}^{\alpha+} |0\rangle = 0, \quad n_{1,2,3} = 0, 1, \dots \quad (2.14)$$

Видно, что требование калибровочной инвариантности допускает в физический сектор лишь бесцветные состояния. Цветные состояния, порождаемые операторами $(\hat{a}_i^{\alpha+})^n, (\hat{b}_{\beta j}^+)^m$, исключаются условиями (2.12). Данное обстоятельство можно интерпретировать как наличие в модели конфайнмента. Здесь нет понятия межчастичных сил, но есть запрет на цветные состояния. Рассмотренные модели показывают полез-

ность отделения чисто кинематического (калибровочного) аспекта кон-
файнмента от динамического.

«Конфайнмент» в квантовой электродинамике. Разобранные приме-
ры легко обобщаются на полевые теории. Рассмотрим квантовую элект-
родинамику. Запрет на цветные состояния здесь трансформируется в ус-
ловие электрической нейтральности Вселенной [29]. Это утверждение
хорошо известно и легко доказывается для замкнутой Вселенной.
Выбирая произвольный, не содержащий электрического заряда объем V ,
имеем для потока напряженности электрического поля E через его
границу ∂V :

$$\int_{\partial V} \vec{E} d\vec{s} = 0. \quad (2.15)$$

Но вместе с тем (2.15) есть поток через ∂V от остальной части Вселенной,
взятый с обратным знаком, что и доказывает утверждение. В случае
открытой Вселенной формальное доказательство усложняется. Пусть $\mathcal{L}$ -
лагранжиан электромагнитного и заряженного спинорного полей:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi, \quad \hat{D} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\gamma_\mu.$$

В силу калибровочной инвариантности имеется первичная связь $\pi_0 =$
 $= \partial \mathcal{L} / \partial \dot{A}_0 = 0$, и, как хорошо известно [37], гамильтониан записывает-
ся в виде

$$H_T = H + \int d^3x [\vec{\partial} A_0 \vec{E} + j_0], \quad (2.16)$$

где H — стандартный гамильтониан полей, A_0 и j_0 — нулевые компонен-
ты вектор-потенциала электромагнитного поля и электрического тока.
Обычно в последнем члене (2.16) интегрируют по частям, пренебрегая
поверхностными членами; затем из условия непротиворечивости теории
 $\dot{\pi}_0 = \{\pi_0, H_T\} = 0$ получают вторичную связь (закон Гаусса)

$$G(x) = \vec{\partial} \vec{E} - j_0 = 0. \quad (2.17)$$

При выводе (2.17) фактически делается предположение о достаточно
быстром убывании полей на бесконечности, чего, строго говоря, делать
нельзя, поскольку A_0 и $\vec{E}$ есть динамические переменные, и скорость их
убывания зависит от характера задачи и калибровки. Например, в случае
 $A_0 \rightarrow \text{const}$ при $|\vec{x}| \equiv r \rightarrow \infty$ и $\vec{E} \sim \vec{\partial} 1/r$ внеинтегральный член отличен
от нуля. Для полей, $A_0, \vec{E}$, произведение которых при $r \rightarrow \infty$ убывает не
медленнее $1/r^2$, запишем формулу интегрирования по частям в виде

$$\int d^3x \vec{\partial} A_0(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int d^3x A_0(\vec{x}) \mathfrak{D}_R \vec{E}(\vec{x}), \quad (2.18)$$

где

$$\mathfrak{D}_R = \vec{\partial} - \vec{f}_R(\vec{x}), \quad \vec{f}_R(\vec{x}) = \int d\vec{s} \delta(\vec{x} - R\vec{n}). \quad (2.19)$$

В (2.19) интегрирование ведется по поверхности сферы радиуса R , $\vec{n}^2(\theta, \varphi) = 1$, $\vec{n} d\vec{s} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, $\vec{n} \times d\vec{s} = 0$. Применяя эту формулу, из условия $\dot{\pi}_0 = 0$ находим вторичную связь:

$$\sigma(x) = \mathfrak{D}_R \vec{E} - j_0 = 0, \quad R \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Очевидно, $\vec{f}_R(\vec{x}) = 0$ при $|\vec{x}| \neq R$, поэтому на конечных расстояниях (2.20) совпадает с законом Гаусса (2.17). Интегрируя (2.20) по всему пространству и учитывая, что

$$\int d^3x \mathfrak{D}_R \vec{E} = 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad |\vec{E}| = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.21)$$

закключаем:

$$Q = \int d^3x j_0(\vec{x}) = 0, \quad (2.22)$$

т.е. если полный электрический заряд Вселенной конечен, то он равен нулю^x. Смысл этого утверждения прост. Предполагая, что $\vec{E}$ убывает не медленнее, чем $1/r^2$, мы предполагаем отсутствие заряда вне некоторой сферы сколь угодно большого, но конечного радиуса. Теория же формулируется локально, заданием лагранжиана, согласно которому электрические силовые линии начинаются и кончаются на зарядах (или образуют замкнутые линии). Именно поэтому допущение, что весь электрический заряд Вселенной конечен и сосредоточен в конечном объеме, означает равенство его нулю, в противном случае пришлось бы допустить, что равный заряд противоположного знака находится на бесконечности. Впрочем, и в этом случае полный заряд, но уже с учетом бесконечно удаленного, был бы равен нулю.

В квантовой теории оператор $\hat{\sigma}(x)$ также есть генератор калибровочных преобразований. Он должен коммутировать (слабо, т.е. на физических векторах) со всеми физическими операторами $\hat{O}$:

$$[\hat{\sigma}(x), \hat{O}] \approx 0 \quad (2.23)$$

^xРавенство (2.22) другим способом (методом БРСТ) было получено также в работе [23], но не применительно к Вселенной, поэтому оно отвергалось.

и исчезать на векторах из физического гильбертова подпространства $\mathcal{H}_{ph}$:

$$\hat{\sigma}(x)\Phi = 0, \quad \Phi \in \mathcal{H}_{ph}. \quad (2.24)$$

Интегрируя (2.23), (2.24) по всему пространству и учитывая (2.21) (как равенство для матричных элементов в $\mathcal{H}_{ph}$), имеем

$$[\hat{Q}, \hat{O}] \approx 0, \quad \text{т.е.} \quad [\hat{Q}, \hat{O}]\Phi = 0, \quad (2.25)$$

$$\hat{Q}\Phi = 0. \quad (2.26)$$

Отметим, что нет проблемы существования оператора $\int d^3x \hat{\sigma}(x)$, поскольку все его матричные элементы между физическими состояниями равны нулю. Условие (2.26) означает: в электродинамике, согласно терминологии [29, 38, 39], имеет место слабый конфайнмент (частный случай конфайнмента: существует запрет на заряженные состояния, но потенциал между зарядами убывает как $1/r$, отсутствует удержание).

Условие (2.25), между прочим, означает, что для электрического заряда имеет место правило суперотбора; как и правило суперотбора для состояний с целым и полуцелым спином [40], оно также является «теоретическим» [29], т.е. нет необходимости постулировать условие (2.25) (в сильном смысле), как это фактически предполагалось в [28].

Замечание. Отметим, что из (2.25) следует (2.26). Действительно, любое физическое состояние Φ может быть получено из вакуума Φ_0 воздействием некоторого физического оператора $\Phi = \hat{O}\Phi_0$; но $\hat{Q}\Phi_0 = 0$, поэтому, согласно (2.25), $\hat{Q}\Phi = 0$. Итак, и из эмпирического правила суперотбора для электрического заряда (2.25), установленного в работе [28], следует, что *полный* электрический заряд физических состояний равен нулю.

Неабелевы теории. Глобальный конфайнмент. Приведенные рассуждения во многом верны и для неабелевых теорий. Закон Гаусса в этом случае записывается в виде равенств

$$\sigma^a(x) \equiv \vec{\mathcal{D}}_R^{ab} \vec{E}_b(x) - j_0^a = 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad (2.27)$$

где $\vec{\mathcal{D}}_R^{ab} = \vec{\mathcal{D}}^{ab} - \vec{f}_R \delta^{ab}$, $\vec{\mathcal{D}}^{ab} = \delta^{ab} \vec{\partial} - ig f^{acb} \vec{A}_c$, g — константа связи, f^{abc} — структурные постоянные калибровочной группы G , $a, b, c = 1, 2, \dots$, $N = \dim G$, а j_μ^a — ток материи. Обозначая $\tilde{j}_0^a = ig f^{abc} \vec{A}_b \vec{E}_c$ (нулевая компонента тока полей A_μ^a) и интегрируя (2.27) по всему пространству, имеем

$$Q^a = \int d^3x [\tilde{j}_0^a(x) + j_0^a(x)] \equiv \tilde{Q}^a + Q_M^a = 0, \quad (2.28)$$

т.е. полный «заряд» (материя плюс поля A_μ^a), как и в электродинамике, также равен нулю. В квантовой теории интегрирование условий калибровочной инвариантности всех физических операторов $\hat{O}$ и состояний Φ

$$[\hat{\sigma}^a(x), \hat{O}] \approx 0, \quad \hat{\sigma}^a(x)\Phi = 0 \quad (2.29)$$

приводит к условиям

$$[\hat{Q}^a, \hat{Q}] \approx 0, \quad \hat{Q}^a\Phi = 0. \quad (2.30)$$

Согласно (2.30) полный цветной заряд физических состояний равен нулю. Данный запрет на цветные состояния, не затрагивающий вопроса о характере удерживающих сил, уместно назвать *глобальным* конфайнментом, поскольку речь идет о полных зарядах. По-другому (в рамках метода БРСТ) и более строго (для локальных операторов и локализованных состояний) равенства (2.30) были получены в работе [23], причем первое из них в виде сильного равенства.

Неабелевы теории. Группа Вейля и локальный конфайнмент. К утверждениям, не затрагивающим вопроса о статических силах, относится и утверждение о равенстве нулю функций Вайтмана (о функциях Вайтмана см. [40]), в частности, пропагаторов локальных заряженных полей. Оно универсально, т.е. не зависит ни от калибровочной группы G , ни от числа измерений пространства, и, следовательно, имеет чисто кинематический характер. По существу, это есть запрет локальных цветных возбуждений.

Пусть $\hat{\phi}(x)$ — локальное поле, изменяющееся при калибровочных преобразованиях согласно

$$\hat{U} \hat{\phi}(x) \hat{U}^+ = S(x) \hat{\phi}(x), \quad (2.31)$$

где $\hat{U} = \exp[i \int d^3x \omega^a(\vec{x}, t) \hat{G}_a(\vec{x}, t)]$, $\hat{G}_a$ — генераторы калибровочных преобразований (связи первого рода), ω^a — произвольные, убывающие при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ функции, а матрица S , действующая на $\hat{\phi}$, реализует некоторое представление калибровочной группы. Поскольку, аналогично (2.24), (2.29), $\hat{G}_a \Phi = 0$, $\Phi \in \mathcal{H}_{ph}$, т.е.

$$\hat{U}\Phi = \Phi, \quad \hat{U}^+ \hat{U} = 1, \quad (2.32)$$

имеем

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \langle 0 | S(x) \hat{\phi}(x) S(y) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle; \quad (2.33)$$

здесь мы воспользовались тем, что вакуум есть физическое состояние. Уравнение (2.33) перепишем в виде

$$(\delta_{ik} \partial_{jl} - S_{ik}(x) S_{jl}(y)) \langle 0 | \hat{\phi}_k(x) \hat{\phi}_l(y) | 0 \rangle; \quad (2.34)$$

из (2.34) следует

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = 0. \quad (2.35)$$

Равенство (2.35) означает, что локальное цветное поле $\hat{\phi}(x)$ не может распространяться, его пропагатор равен нулю. Рассуждение легко обобщить на случай произвольной функции Вайтмана $\langle 0 | \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle$ — все они также равны нулю. Следовательно, локальные возбуждения поля $\hat{\phi}(x)$, отвечающие функциям Вайтмана указанного вида, невозможны [38]. По существу, эквивалентные результаты (но в другой форме) получены в [23].

Замечания. 1) В обкладках формул (2.33)—(2.35) вместо вакуума можно взять любые физические состояния, удовлетворяющие условию (2.32). 2) При $x \neq y$ все утверждения остаются в силе и для заряженных полей абелевой теории (КЭД). Это означает, что локальное заряженное поле калибровочной теории не имеет непосредственного физического смысла (ненаблюдаемо); как известно [41], оно отвечает электрону, лишенному кулонова поля (подробнее см. разд.3,4).

Может показаться, что приведенный вывод обесценивается следующим рассуждением. Поскольку поле $\hat{\phi}$ меняется при калибровочных преобразованиях, не все его степени свободы являются физическими. Эти последние, обозначаемые $\hat{\phi}_{ph}$, не преобразуются при непрерывных калибровочных преобразованиях

$$\hat{U} \hat{\phi}_{ph}(x) \hat{U}^+ = \hat{\phi}_{ph}(x), \quad (2.36)$$

и, казалось бы, локальные поля $\hat{\phi}_{ph}(x)$ могут распространяться. Другими словами, исключив нефизические компоненты $\hat{\phi}$ подходящим выбором калибровки (положив их равными нулю), получим обыкновенные локальные поля, распространению которых, как будто, ничто не мешает. Более тщательный анализ показывает, что это не так [38] — остаются дискретные калибровочные преобразования, образующие группу Вейля, которые и обеспечивают локальный конфайнмент. Действительно, пусть $\hat{\phi}$ реализует присоединенное представление G (рассуждение легко обобщается на любое представление). Тогда имеет место формула [42]:

$$\hat{\phi} = e^{\hat{z}} \hat{h} e^{-\hat{z}}, \quad (2.37)$$

где поле $\hat{h}(x)$ принадлежит подалгебре Картана H алгебры Ли X калибровочной группы, а $\hat{z} \in X \ominus H$. Поле $\hat{h}$, содержащее l компонент, $l = \dim H$, может рассматриваться как физическое, тогда как поле $\hat{z}$ ($N - l$ компонент, $N = \dim X$) всегда можно удалить калибровочным преобразованием; очевидно, $\hat{h}$ есть стационарный вектор подгруппы Картана. Известно также, что в H действует дискретная подгруппа группы G (группа Вейля W [42]), сохраняющая систему корней группы. Эта группа и обеспечивает локальный конфайнмент поля $\hat{h}(x)$. Вместо (2.31) имеем

$$\hat{U}_W \hat{h}(x) \hat{U}_W^+ = \hat{W}(x) \hat{h}(x), \quad \hat{U}_W \in W, \quad (2.38)$$

где $\hat{W}(x)$ есть $l \times l$ -матрица, действующая в линейном пространстве H , т.е. формула (2.34) заменяется на

$$(\delta_{ac} \delta_{bd} - W_{ac}(x) W_{bd}(y)) \langle 0 | \hat{h}_c(x) \hat{h}_d(y) | 0 \rangle = 0, \quad (2.39)$$

$a, \dots, d = 1, 2, \dots, l$, откуда и следует равенство нулю пропагатора «физического» поля $\hat{h}$. Обобщение этого рассуждения на произвольную функцию Вайтмана не представляет труда. Следовательно, локальные возбуждения «физических» полей $\hat{h}$ также запрещены. Допустимы лишь возбуждения их локальных бесцветных комбинаций.

Выводы

1. В калибровочных теориях существуют запреты на состояния с определенными квантовыми числами безотносительно к характеру статического взаимодействия заряженных частиц.

2. Имеется два типа запретов: а) утверждение о равенстве нулю полных зарядов физических состояний (равенства (2.12), (2.26), (2.30), *глобальный* конфайнмент), б) утверждение о равенстве нулю функций Вайтмана локальных заряженных полей (равенство (2.35) и его обобщения, *локальный* конфайнмент).

3. КОНФАЙНМЕНТ И ГЕОМЕТРИЯ. РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Особенности калибровочных теорий поля. Уже предварительный анализ разд.2 показал, что проблема естественным образом разбивается на три самостоятельные задачи.

1) Формальное доказательство отсутствия цветных объектов в физическом секторе теории.

2) Выяснение природы и характера удерживающих сил.

3) Построение теории, позволяющей провести аналитический расчет структуры адронов.

Постановка каждой из двух последних задач предполагает решение предшествующей.

Как мы видим, в рамках схемы квантования Дирака [37] решение первой задачи тривиально, ибо в физический сектор допускаются лишь калибровочно-инвариантные операторы и векторы состояний. Кварки и глюоны, представляемые *локальными* полями, обладают цветными зарядами, поэтому они исключаются из числа физических (наблюдаемых) степеней свободы. Это есть «наивный» ответ на «наивный» вопрос о том, почему мы не видим изолированных кварков.

Ответ на второй вопрос требует более серьезного исследования. Выяснение природы удерживающих сил предполагает выяснение более тонких деталей теории калибровочных полей. Согласившись, что физический смысл имеют лишь калибровочно-инвариантные объекты, мы приходим к задаче о перечислении и классификации всех калибровочных инвариантов, построенных из полей. Только на этом пути можно надеяться получить ответ на вопрос о физической природе конфайнмента. Существо дела в следующем. Можно считать установленным, что удерживающие кварки силы характеризуются линейно растущим потенциалом. Современные квантовые теории поля (в том числе и калибровочные) по природе своей причинны (локальны) — в них заложен принцип близкодействия. Это означает, что взаимодействие между физическими объектами осуществляется через посредство окружающих их полей. Вопрос: в каких формах могут проявляться (возбуждаться) эти поля? Известно, что в электродинамике покоящиеся заряды возбуждают вокруг себя статические поля, обеспечивающие их кулоново взаимодействие. «Физический электрон» (т.е. электрон вместе с окружающим его электрическим полем) описывается нелокальным калибровочно-инвариантным оператором [41]

$$\hat{\Psi}(x) = e^{-ie\Delta^{-1}\vec{\partial}\vec{A}} \hat{\psi}(x) \quad (3.1)$$

(подробнее см. разд.4). В неабелевых теориях из цветных полей также несложно построить калибровочно-инвариантные объекты. Например, это может быть «струна» (P -экспонента) с кварком и антикварком на концах. В данном случае, как нетрудно видеть, глюонное поле между кварками возбуждено лишь на контуре интегрирования P -экспоненты, а его энергия пропорциональна длине контура (разд.4). На первый взгляд, это и есть ответ на вопрос о природе удерживающих сил в хромодинамике. Дело однако в том, что, во-первых, подобные объекты можно построить и в электродинамике, во-вторых, неизвестно, какие еще

инвариантные конфигурации полей существуют, т.е. подобные рассуждения недостаточны. Задача заключается в выяснении структуры окружающих заряды полей, т.е. в вопросе о том, распределены ли они по всему пространству или сосредоточены на линии (в трубке), ибо в первом случае следует ожидать убывающего с расстоянием потенциала. Итак, в неабелевых теориях нужно знать ответ на вопрос: допустимы ли (в классике) цветные заряды с калибровочными полями, заполняющими все пространство?

Что касается третьей задачи, то она чрезвычайно сложна. Речь может идти лишь о создании работоспособной схемы приближенных вычислений.

Роль связей первого рода. Между экспертами существует молчаливое согласие, что конфайнмент имеет место только в калибровочных теориях. Почему? Чем отличаются калибровочные теории от некалибровочных? Ответ почти очевиден: они отличаются наличием в них связей первого рода [37]. Эта деталь, на первый взгляд тривиальная, есть наиболее существенная особенность калибровочных теорий; именно она выделяет их среди остальных (некалибровочных) теорий и в значительной степени обесценивает единственный хорошо разработанный метод расчета — метод теории возмущений. В отличие от уравнений движения связи не содержат производных по времени; они есть условия на канонические переменные в данный момент времени, т.е. на мгновенные конфигурации полей. Иначе говоря, условия связи отбирают физические состояния полей. Они абсолютны: связи не могут быть нарушены, ибо их нарушение означало бы нарушение калибровочной инвариантности, т.е. отказ от исходного (калибровочно-инвариантного) лагранжиана.

Итак, в калибровочных теориях желательно сперва выявить физические конфигурации полей (разрешить связи), а затем описывать их эволюцию во времени. Было бы, однако, опрометчиво понимать рекомендацию «разрешать связи» буквально. Это трудно сделать в классике и чревато недоразумениями в квантовой теории (связи первого рода нельзя понимать как операторные равенства, см. [37]). К счастью, имеется окольный путь. Вспомним, что связи первого рода есть генераторы калибровочных преобразований^x, поэтому они должны исчезать на физических векторах состояний и коммутировать с физическими операторами, т.е. физические операторы и состояния должны обладать свойством калибровочной инвариантности. Использование лишь калибровоч-

^xИмеется в виду расширенная по Дираку [37] группа калибровочных преобразований, генерируемая *всеми* связями первого рода.

но-инвариантных состояний полей и означает, по существу, учет (разрешение) связей.

К чему же ведет учет связей в калибровочных теориях? Обратимся опять к электродинамике. Как отмечалось, физический электрон представляется оператором (3.1), описывающим заряженные объекты вместе с их статическими полями (кулонову полю отвечает экспонента перед $\hat{\psi}$ [41]). Применение теории возмущений затушевывает это важное обстоятельство: в нулевом приближении $\hat{\Psi} = \hat{\psi}$, причем $\hat{\psi}$ меняется при калибровочных преобразованиях. Именно эти поля фигурируют в приближенных вычислениях и именно благодаря их неинвариантности возникает иллюзия, что калибровочные теории по существу не отличаются от некалибровочных, поскольку и в тех, и в других работают с локальными полями.

Каковы же последствия наличия у зарядов внешних статических полей? Очевидно, внешнее электрическое поле заряда обладает определенной энергией, пропорциональной электромагнитной массе частицы. Ясно также, что если подсчитать энергию электрического поля двух зарядов, то, за вычетом их собственных энергий, получится некоторая функция от расстояния между ними, а именно кулонов потенциал. Таким образом, в электродинамике статическое взаимодействие зарядов можно считать следствием ее калибровочной инвариантности. Данное обстоятельство играет центральную роль и в неабелевых теориях. Изложенное составляет идейную основу последующего анализа.

Хорошо известно, что в неабелевых теориях аналогом экспоненты в (3.1) служит P -экспонента. В случае двух зарядов различной полярности ее контур идет от данного заряда к другому — это стандартный пример калибровочно-инвариантного объекта в хромодинамике, обычно отождествляемого с мезоном. Главное, однако, в том, чтобы выяснить, нет ли других допустимых конфигураций полей. Если они существуют, то их необходимо принять во внимание при вычислении энергии взаимодействия зарядов. Другими словами, необходимо знать *все* инвариантные конфигурации полей. Изучение проблемы убеждает, что наиболее прямой путь к цели, заметно проясняющий существо дела, связан с формулированием теории калибровочных полей как теории расслоенных пространств [30,31]. При этом векторные калибровочные поля отождествляются со связностями в главном расслоении, а заряженные поля (поля «материи») образуют ассоциированные расслоения. При такой постановке задачи отыскание калибровочных инвариантов сводится к чисто математической проблеме, обсуждающейся в учебниках по геометрии. Тем самым удастся отделить динамические свойства теории от чисто кинематических (геометрических). Такой подход не нов. Аналогичным образом по-

ступают в стандартной теории поля, когда сперва изучают неприводимые представления группы Лоренца, а затем строят лоренц-инвариантные лагранжианы и амплитуды рассеяния. И здесь постулирование лагранжиана (включение динамики) задает лишь закон, по которому эволюционируют допущенные в физический сектор объекты; их калибровочные (трансформационные) свойства остаются при этом в неприкосновенности. Переход к квантовому описанию уже не представляет труда.

Калибровочные поля как геометрические объекты [43]. Пусть $P(M, G)$ есть главное расслоенное пространство [30,31], в котором база M — пространство Минковского, а слой G — простая компактная группа. Определенности ради полагаем, что $G = SU(n)$. Пусть, далее, поле $\psi(x)$ ($\equiv \psi_x$) есть объект представления группы G (ассоциированное расслоение), т.е.

$$\psi_{x'} = U_g(x)\psi_x, \quad \psi_{x'}^* = \psi_x^* U_g^+(x), \quad g \in G, \quad U_g^+ U_g = 1 \quad (3.2)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение). Нас интересуют билинейные в ψ, ψ^* инварианты. Построение инвариантов из полей ψ_x, ψ_x^* , взятых в одной и той же точке, не представляет труда и сводится к конструированию тривиального представления группы из нетривиальных. Важнее знать инварианты с участием полей в разных точках, например, ψ_x и $\psi_{x'}^*$, поскольку кварки могут находиться в разных точках пространства. Задача имеет смысл лишь при условии, что определена операция параллельного переноса из точки x в точку x' . По определению параллельный перенос ψ из точки x в бесконечно близкую точку $x' = x + dx$ задается формулой

$$\tilde{\psi}_{x'} = (1 + A_\mu dx^\mu) \psi_x \equiv P_{x'x} \psi_x. \quad (3.3)$$

Связность A_μ есть вектор со значениями из алгебры Ли группы G (в представлении, реализуемом ψ). Билинейный инвариант некоторых одинаково преобразующихся полей $\psi_x, \varphi_{x'}$ есть

$$\varphi_{x'}^* \tilde{\psi}_{x'}. \quad (3.4)$$

Из формул (3.2) — (3.4) находим:

1) выражение для ковариантной производной

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu \quad (3.5)$$

(как следствие (3.3): $\psi_{x'} - \tilde{\psi}_{x'} = (\partial_\mu - A_\mu) \psi_x dx^\mu$);

2) закон преобразования A_μ , вытекающий из условия инвариантности формы (3.4):

$$\varphi_{x'}^* U_g^+(x') (1 + A_\mu' dx^\mu) U_g(x) \psi_x = \varphi_x^* (1 + A_\mu dx^\mu) \psi_x, \quad (3.6)$$

$$A_\mu' = U_g(x) A_\mu(x) U_g^+(x) - U_g(x) \partial_\mu U_g^+(x). \quad (3.7)$$

Формулы (3.5), (3.7) позволяют отождествить связность A_μ в расслоенном пространстве с векторным калибровочным полем.

Параллельный перенос ψ из точки x в точку x' вдоль контура $c(x', x)$ конечной длины дается согласно (3.3) формулой

$$\tilde{\psi}_{x'} = P[c(x', x)] \psi_x, \quad (3.8)$$

в которой оператор параллельного переноса

$$P[c(x', x)] = P \exp \left[\int_{c(x', x)} A_\mu dx^\mu \right] \equiv P_{x'x}, \quad (3.9)$$

получаемый многократным применением элементарной операции (3.3), есть не что иное, как P -экспонента. Предполагается, что упорядочивающий параметр принимает наименьшее значение в точке x . Согласно формулам (3.3), (3.6) $P_{x'x}$ преобразуется по правилу

$$P_{x'x}' = U_g(x') P_{x'x} U_g^+(x), \quad (3.10)$$

т.е. в отличие от ψ_x оператор $P_{x'x}$ есть *билокальный* тензор. Из сказанного ясно, что с геометрической точки зрения поля ψ , φ , P -экспонента (3.9) и инвариантные тензоры (подобные единичному антисимметричному тензору $\varepsilon_{\alpha\beta\dots}$) есть единственные объекты, из которых можно строить нелокальные инварианты. Других не существует. Простейший инвариант есть

$$\varphi_{x'}^* P_{x'x} \psi_x. \quad (3.11)$$

Именно биллокальный тензор $P_{x'x}$ представляет ассоциированное с хроматическими зарядами внешнее поле, аналогичное кулоновскому. Подчеркнем, что, во-первых, все построение носит чисто геометрический характер (динамика отсутствует), во-вторых, выписанные формулы справедливы и тогда, когда группа G — абелева (в этом случае символ P в (3.9) можно опустить).

Замечание. К связности A_μ всегда можно добавить произвольный «тензор» B_μ , преобразующийся однородно. С помощью новой связности также можно строить нелокальные инварианты. Соответствующие P -экспоненты могут появиться при включении динамики [43].

Инвариантные структуры в электродинамике [44]. Прежде чем переходить к динамике, изучим инварианты простейших групп. Начнем с абелевой группы. Все ее комплексные представления одномерны, поэтому векторное поле A_μ и все заряженные поля ψ преобразуются согласно правилам

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \psi_x \rightarrow \exp(ig \Lambda_x) \psi_x. \quad (3.12)$$

Константа g фактически классифицирует представления. После введения динамики она отождествляется с постоянной взаимодействия (с электрическим зарядом поля ψ). Принимая во внимание закон, по которому преобразуются заряженные поля, важно знать такие линейные по A_μ объекты B , преобразование которых сводится к сдвигу $B \rightarrow B + \Lambda$. Зная B , легко построить искомые инварианты. Перечислим их:

$$B_1 = \int_{-\infty}^x A_\mu dx^\mu, \quad dx_\mu^2 < 0, \quad (3.13)$$

$$B_2 = \Delta_2^{-1}(\vec{\nabla}_\perp, \vec{A}_\perp), \quad \Delta_2 = (\vec{\nabla}_\perp, \vec{\nabla}_\perp) = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad (3.14)$$

$$B_3 = \Delta^{-1}(\vec{\nabla}, \vec{A}), \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \quad (3.15)$$

$$B_4 = -\square^{-1} \partial_\mu A_\mu, \quad \square = -\partial_\mu^2 = -\partial_0^2 + \Delta. \quad (3.16)$$

С помощью B_k конструируем инвариантные комбинации полей^x:

$$\Psi_k(x) = \exp(-igB_k(x)) \psi(x) \equiv P_k(x) \psi(x), \quad k = 1, \dots, 4. \quad (3.17)$$

Все они нелокальны. В Ψ_1 поле A_μ сосредоточено на контуре интегрирования, в Ψ_2 — на плоскости (x_1, x_2) , в Ψ_3 — в трехмерном пространстве, а в Ψ_4 — во всем четырехмерном пространстве-времени. На первый взгляд, это противоречит утверждению, что единственной фундаментальной структурой является P -экспонента. Парадокс разрешается просто: все новые структуры можно трактовать как составные, построен-

^xСтруктуры (3.17) инвариантны относительно группы локальных калибровочных преобразований с произвольными функциями Λ_x , исчезающими на бесконечности ($\Lambda_x \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$).

ные из линейных (т.е. из P -экспонент). Однако прежде чем продемонстрировать это, заметим, что поле Ψ_4 представляет особый случай, поскольку оно «нелокально» и по временной координате. Его изменение со временем носит, по существу, нединамический характер, поскольку определяется оператором $\square^{-1}$ в (3.16). Нас же интересуют лишь статические поля (связи не содержат производных по времени). Но в этом случае (3.16) сводится к (3.15). Действительно,

$$\square^{-1} \partial_\mu A_\mu = \int d^4 x' \square_{xx'}^{-1} \partial_\mu A_\mu(x') = (2\pi)^{-4} \int d^4 k k^{-2} e^{ikx} i k_\mu a_\mu(k),$$

и для статического поля $a_\mu(k) = 2\pi \delta(k_0) \tilde{a}_\mu(k)$ конфигурация Ψ_4 превращается в Ψ_3 .

Обратимся к Ψ_2 и Ψ_3 . Покажем, что P_3 в (3.17) можно построить из линейных структур $P_1(x) = \exp(-igB_1(x))$. Рассмотрим

$$P_3(N, x) = \prod_{i,j}^N \exp\left(-ig \int_{-\infty}^x A_\mu(y_{ij}) dy_{ij}^\mu\right). \quad (3.18)$$

Выражение (3.18) есть произведение N экспонент с интегрированиями по исходящим из точки x прямым, занумерованным двумя индексами i, j . Эти индексы фиксируют «координаты» телесного угла (площадки на единичной сфере), приходящегося на каждую прямую: $(4\pi/N)_{i,j} = \sin \theta_j \Delta \theta_j \Delta \varphi_i$. Считая произведение $Ng \equiv e$ фиксированным при $N \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_3(N, x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{ie}{4\pi} \sum_{i,j} \sin \theta_j \Delta \theta_j \Delta \varphi_i \int_0^\infty dr A_r(r, \theta_j, \varphi_i) \right] = \\ &= \exp \left[\frac{ie}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr A_r \right] \equiv e^{ieI_3}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $A_\mu dy_{ij}^\mu \equiv A_r(r, \theta_j, \varphi_i) dr$. Интеграл в экспоненте (3.19) перепишем в виде

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 y r^{-2} A_r = \frac{-1}{4\pi} \int d^3 y (\partial_r r^{-1}) A_r = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 y r^{-1} [r^{-2} \partial_r (r^2 A_r)] = -B_3. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Последнее равенство в (3.20) написано с учетом формулы $-1/4\pi |\vec{x} - \vec{y}|^{-1} \equiv \Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{y})$ и выражения для дивергенции в сферических координатах:

$$(\vec{\nabla}, \vec{A}) = r^{-2} \partial_r (r^2 A_r) + (r \sin \theta)^{-1} [\partial_\theta (\sin \theta A_\theta) + \partial_\varphi A_\varphi],$$

а также с учетом того, что $A_\theta = A_\varphi = 0$. Из (3.18), (3.20) следует, что фактор $P_3(x)$, представляющий кулоново поле частицы, можно рассматривать как составленный из линейных экспонент («струн»). Экспонента $P_2(x)$ представляется аналогичным образом [44].

Итак, существование инвариантных структур (3.17), $k = 2, 3, 4$, в абелевой теории не противоречит утверждению предыдущего пункта, что все инварианты построены из билокальных тензоров $P_{x'x}$ и локальных заряженных полей ψ .

Замечание. В работах [45, 46] изучалась гипотеза, что число N у элементарных частиц конечно, хотя и велико ($N \sim 10^{40}$). Там же рассмотрены некоторые экспериментальные следствия гипотезы.

Инвариантные структуры в теориях с калибровочными группами $SU(3)$, $SU(2)$ [44]. Группа $SU(3)$. В случае $G = SU(3)$ появляются следующие особенности. Во-первых, к полю ψ , реализующему фундаментальное представление, можно присоединить лишь одну струну (в этом же представлении), ибо фундаментальное представление характеризуется лишь одним индексом, принимающим три значения. Во-вторых, струны могут ветвиться. Вспомним, что в данном случае имеются инвариантные единичные, полностью антисимметричные трехиндексные тензоры

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \quad \alpha(\beta, \gamma) = 1, 2, 3, \quad (3.21)$$

фигурирующие в условиях унимодулярности матриц $U_g(x)$: $\det U_g(x) = 1$. Благодаря этому обстоятельству три струны в фундаментальном представлении могут соединяться в точке, т.е. помимо очевидных инвариантов

$$\bar{\psi}_{x'}^\beta P_\beta^\alpha [c(x', x)] \psi_{\alpha x}, \quad \text{Tr } P[c(x, x)], \quad (3.22)$$

имеются еще, например, и такие:

$$\Theta(x', x) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (P_{x'x})_\alpha^{\alpha'} (P_{x'x})_\beta^{\beta'} (P_{x'x})_\gamma^{\gamma'} \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{B}_{x_1 x_2 x_3}(x) = \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} (P_{xx_1})_\alpha^{\alpha'} (P_{xx_2})_\beta^{\beta'} (P_{xx_3})_\gamma^{\gamma'} \bar{\psi}_{x_1}^{\alpha'} \bar{\psi}_{x_2}^{\beta'} \bar{\psi}_{x_3}^{\gamma'}. \quad (3.24)$$

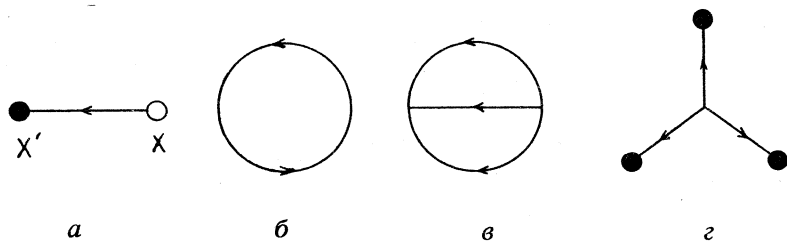


Рис. 1. Струны, отвечающие структурам (3.22) — (3.24)

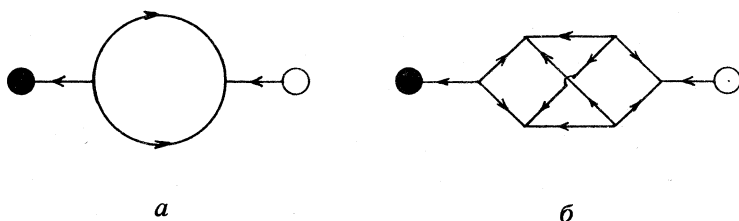


Рис. 2. Струны с нетривиальной топологией, соединяющие кварк и антикварк

P -экспоненты в (3.23) различаются контурами. Из вида выражений (3.22) — (3.24) ясно, что инвариантные структуры удобно изображать графически [44], сопоставляя струнам направленные линии, например, билокальному тензору $(P_{x'x})^\alpha_\beta$ — линию со стрелкой от верхнего индекса к нижнему (от x к x'). Структуры (3.22) — (3.24) представлены графиками, изображенными на рис.1. Светлые кружки на нем сопоставляются полю, содержащему оператор уничтожения, а темные — оператор рождения кварка. Отметим, что благодаря ветвлению кварки могут соединяться струнами с нетривиальной топологией (рис.2).

Разумеется, приведенные диаграммы имеют мало общего с диаграммами Фейнмана. Первые представляют мгновенную конфигурацию струн («неприводимые решения связей»), тогда как последние сопоставляются амплитудам вероятности процессов. Специфика струн проявляется в том, что граф, построенный без учета направленности струн, может оказаться лишенным смысла. Например, невозможна диаграмма с топологией, изображенной на рис.3,а, хотя остальные две диаграммы (б и в) допустимы: стрелки могут или только входить в вершину, или только из нее выходить.

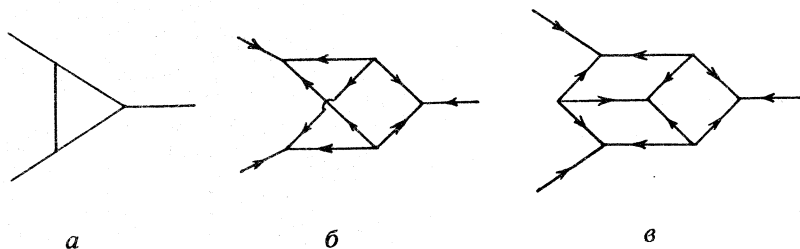


Рис. 3. Примеры структур с тремя струнами на концах. Топология *a* невозможна

Группа $SU(2)$. Случай, когда $G = SU(2)$ резко отличается от предыдущего. В группе $SU(2)$ представление, комплексно сопряженное фундаментальному, ему унитарно эквивалентно [47]: инвариантные антисимметричные тензоры этой группы $\epsilon^{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) переводят спиноры с нижним индексом в спиноры с верхним индексом и наоборот. Это радикально меняет структуру струн. Во-первых, исчезают тройные вершины, т.е. струны не могут разветвляться, во-вторых, теряют смысл стрелки на диаграммах, ибо представления с верхними и нижними индексами унитарно эквивалентны. Таким образом, неабелева калибровочная теория с группой $SU(2)$ отличается от теорий с группами $SU(n)$, $n > 2$, структурой (топологией) статических полей. Она скорее сродни электродинамике, в которой также отсутствует ветвление струн. Возможно, именно с этим связан тот факт, что в модели электрослабых взаимодействий перемешиваются поля именно из этих групп (т.е. $U(1)$ и $SU(2)$).

Замечание 1. Рассмотрены лишь простейшие инварианты калибровочных групп. Простота определяется: а) рангом структуры с точки зрения лоренцевых преобразований (например, (3.22), (3.23) — скаляры, а (3.24) — спин-тензор; нетрудно построить лоренцевы тензоры произвольного ранга), б) топологией (числом вершин в диаграммах на рис.1—3), в) числом локальных тензоров (полей материи), формирующих инвариант, т.е. числом струн, оканчивающихся на зарядах, г) приводимостью; калибровочный тензор называется неприводимым, если он есть прямое произведение других тензоров [44]. Наконец, после включения динамики инвариантные структуры целесообразно классифицировать еще и по энергии.

Замечание 2. В рамках теории расслоенных пространств естественным образом не возникает объектов типа монополей. Их включение в формализм требует дополнительных предположений.

Выводы

1. Геометрический подход подтверждает результаты предыдущего анализа (разд.2): возбуждения полей с открытым цветом запрещены.

2. Геометрический подход позволяет (в принципе) перечислить все допустимые конфигурации полей.

4. КОНФАЙНМЕНТ В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ. ВКЛЮЧЕНИЕ ДИНАМИКИ. КВАНТОВАНИЕ

Включение динамики. До сих пор анализ имел чисто кинематический характер — основные элементы теории (калибровочные поля) фигурировали как объекты теории расслоенных пространств. Постулирование лагранжиана наделяет найденные структуры динамикой. Если лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований из группы G , то проделанный выше анализ целиком сохраняет свое значение — струны могут меняться, перемещаться, но принципиально иных структур, сверх установленных, не появится.

Стандартный калибровочно-инвариантный лагранжиан ($G = SU(n)$) имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_f \bar{\psi}_f (\hat{D} - m_f) \psi_f. \quad (4.1)$$

В (4.1) $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ (мы перешли к вещественным полям $A_\mu \rightarrow igA_\mu$ и ввели константу связи g), $A_\mu \equiv A_\mu^a \lambda_a$, $\hat{D} = D_\mu \gamma_\mu$, причем γ_μ и λ_a — матрицы Дирака и Гелл-Манна, $\text{Tr} \lambda_a \lambda_b = \delta_{ab}$, $a, b = 1, 2, \dots, n^2 - 1$; $F_{\mu\nu} = i(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)/g$, f нумерует сорта спинорных полей ψ . В случае квантовой хромодинамики $n = 3$ ($G = SU(3)_c$), а f нумерует сорта кварков. Итак, в нашем распоряжении имеется закон, по которому меняются отбираемые связями нелокальные структуры, он задается лагранжианом (4.1) и вытекающими из него уравнениями движения. Для перехода к гамильтонову формализму воспользуемся стандартной процедурой [37]. Гамильтониан дается следующим выражением (в стандартных обозначениях [39]):

$$H = \int d^3y \left[\frac{1}{2} (\vec{E}_a^2 + \vec{H}_a^2) + \sum_f \bar{\psi}_f (\gamma_0 \vec{\gamma} \vec{D} + \gamma_0 m_f) \psi_f \right]. \quad (4.2)$$

Классические скобки Пуассона определены обычным образом [37].

Замечание. Результаты анализа разд.3 могут быть получены и без обращения к геометрии. Пусть задан лагранжиан (4.1). Он инвариантен относительно преобразований (3.2), (3.7) (с учетом замены $A_\mu \rightarrow igA_\mu$). Умножая обе части (3.7) на -1 и добавляя к ним оператор ∂_μ , находим, что D_μ (3.5) преобразуется однородно: $D'_\mu = UD_\mu U^+$ (здесь ∂_μ действует на U^+ как оператор, $\partial_\mu U^+ = (\partial_\mu U^+) + U^+ \partial_\mu$). Далее, умножая (3.7) на dx^μ и добавляя к обеим частям единицу, получаем закон преобразования $P_{x'x}: P'_{x'x} = U(x') P_{x'x} U^+(x)$. Только эти факты и используются в разд.3.

Квантование. Переход к квантовому описанию совершается в рамках стандартной процедуры Дирака [37,41]. Нам понадобятся следующие канонические коммутационные соотношения ($x_0 = y_0$):

$$[A_k^a(x), E_b^l(y)]_- = i\delta_b^a \delta_k^l \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\psi_\rho(x), \psi_\lambda^+(y)]_+ = \delta_{\rho\lambda} \delta(\vec{x} - \vec{y}); \quad (4.3)$$

здесь $k, l = 1, 2, 3$ нумеруют векторные компоненты, a, b — компоненты присоединенного представления, а, например, $\rho \equiv i, \alpha$ включает в себя как цветные $i = 1, \dots, n$, так и спинорные $\alpha = 1, \dots, 4$ индексы. Камнем преткновения при квантовании по рецепту Дирака [41] нередко оказывается проблема выбора порядка следования операторов в гамильтониане и в связях. В рамках предлагаемого подхода эта проблема могла бы возникнуть лишь в отношении инвариантных структур. Весь предыдущий анализ в значительной степени обесценивается, если найденные в классике конструкции не сохраняются в квантовой теории. К счастью, этого не происходит. В абелевой теории в линейных экспонентах с пространственно-подобными контурами интегрирования фигурируют лишь взаимокommутующие поля A_μ , и нет необходимости их упорядочивать.

В теориях же с неабелевой калибровочной группой уже в классике вводится упорядочение полей (элементов алгебры Ли) вдоль пути интегрирования в P -экспоненте. Это упорядочение автоматически переносится на квантовую теорию, сохраняя свой смысл даже тогда, когда поля не коммутируют, как это имеет место в случае времениподобных контуров интегрирования. Итак, внесение динамики и последующее квантование в полном объеме сохраняют результаты геометрического анализа.

Замечание. Ветвление струн (в случае $G = SU(3)$) — наличие структур с тройными вершинами, см. рис.1—3) обсуждалось до сих пор как абстрактная возможность. Фиксация лагранжиана вносит новый момент во все рассмотрение, ибо встает вопрос: может ли в процессе движения меняться топология струны? Может ли, например, конфигурация на

рис.1,а перейти в конфигурацию на рис.2,а? Очевидно, это произойдет лишь в том случае, если возможен переход

$$(1 + igA_\mu dx^\mu)_\gamma^{\gamma'} \rightarrow \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (1 - igA_\mu dx^\mu)_\alpha^{\alpha'} (1 - igA_\nu dx^\nu)_\beta^{\beta'} \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'},$$

необходимым условием которого является наличие в лагранжиане инвариантных тензоров ε или d вершин, ибо

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha^{\alpha'} A_\beta^{\beta'} A_\gamma^{\gamma'} \varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \text{Tr} (A[A, A]_+) = \sqrt{2} d^{abc} A^a A^b A^c, \quad (4.4)$$

где $A_\mu dx^\mu \rightarrow A$, $\text{Tr} A = 0$, и $d^{abc} = 2^{-1/2} \text{Tr} (\lambda^a [\lambda^b, \lambda^c]_+)$; матрицы λ отличаются от стандартных на $\sqrt{2}$, откуда множитель $2^{-1/2}$ в определении тензора d . Однако в лагранжиане (4.1) нет ни d -, ни ε -тензоров. Первое слагаемое в (4.1) содержит лишь инвариантный тензор f^{abc} (структурные константы). Но из тензоров f^{abc} не построить тензор d ($\text{Tr} (F^a [F^b, F^c]_+) = 0$, где $(F^a)_{bc} = f^{abc}$ [47]). Следовательно, в чистой глюодинамике ($\mathcal{L} = -\text{Tr} F_{\mu\nu}^2/4$) «струны» в фундаментальном представлении не могут ветвиться, т.е. в этом случае сохраняется топология «струны» [44]. Не могут они и рваться, ибо по предположению не существует частиц в фундаментальном представлении, а открытая струна (открытый цвет) — это бессмыслица. Появление вершин типа (4.4) можно ожидать лишь в эффективном лагранжиане спинорной хромодинамики (подробнее см. [39,44]).

Энергия внешних полей статических зарядов. Электродинамика. Мы выяснили, что калибровочная инвариантность (наличие связей) влечет появление у зарядов внешних полей. Следуя Дираку [41], выясним их вид в электродинамике. Пусть Φ — некоторое физическое состояние, собственный вектор оператора напряженности электрического поля: $\hat{E}^j \Phi = E^j_\Phi \Phi$. Рассмотрим состояние $\hat{\Psi}^+(x) \Phi$ (см. (3.15), (3.17)); имеем

$$\begin{aligned} \hat{E}^j(x) \hat{\Psi}_3(y) \Phi &= -i \frac{\delta}{\delta A_j(x)} [\exp(-ig\Delta^{-1} \vec{\partial} \vec{A}(y)) \hat{\Psi}^+(y) \Phi] = \\ &= \left(\frac{g}{4\pi} \frac{(x-y)^j}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} + E^j_\Phi \right) \hat{\Psi}_3^+(y) \Phi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Видно, что добавочное электрическое поле, порождаемое оператором $\hat{\Psi}_3^+$, идентично кулонову. Аналогичная выкладка для состояния $\hat{\Psi}_1^+ \Phi$ дает

$$\hat{E}^j(x) \hat{\Psi}_1(y) \Phi = (g \int_{-\infty}^0 d\sigma \frac{d\vec{z}^j}{d\sigma} \delta(\vec{z}(\sigma) - \vec{x}) + E^j_\Phi) \hat{\Psi}_1^+(y) \Phi, \quad (4.6)$$

где $\vec{z}(\sigma)$ задает контур интегрирования, $\vec{z}(0) = \vec{y}$. Из (4.6) видно, что 1) напряженность электрического поля, создаваемого $\hat{\Phi}_1^+$, отлична от нуля лишь на контуре интегрирования, 2) отлична от нуля лишь компонента поля, параллельная контуру, 3) на контуре поле бесконечно ($\sim \delta^{(2)}(0)$; обсуждение см. ниже).

Вычислим энергию внешних полей пары разноименных статических источников (за вычетом их собственных энергий), т.е. вычислим энергию состояний

$$P_3(x) P_3^+(x') |0\rangle, \quad (4.7)$$

$$P_{x'x} |0\rangle. \quad (4.8)$$

Здесь $|0\rangle$ — физический вакуум; в $P_{x'x}$ интегрируется по прямой, соединяющей точки $\vec{x}'$, $\vec{x}$. Нам потребуются коммутационные соотношения

$$[\hat{E}^j(y), P_{x'x}]_- = P_{x'x} g \int_x^{x'} dz^j \delta(\vec{z} - \vec{y}), \quad (4.9)$$

$$[\hat{E}^j(y), P_{3x}]_- = P_{3x} g \int d^3z (\nabla^j \Delta^{-1})_{xz} \delta(\vec{z} - \vec{y}). \quad (4.10)$$

Среднее от гамильтониана электромагнитного поля $\hat{H}_0 = \int d^3y [\hat{\vec{E}}^2 + \hat{\vec{H}}^2]/2$ в случае кулоновских источников есть

$$\begin{aligned} \langle P_{3x'} P_{3x}^+ \hat{H}_0 P_{3x} P_{3x'}^+ \rangle_0 &= C_0 + \frac{g^2}{2} \int d^3z_1 d^3z_2 [(\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{xz_1} - (\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{x'z_1}] \times \\ &\times \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) [(\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{xz_2} - (\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{x'z_2}], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $C_0 \equiv \langle \hat{H}_0 \rangle_0$. Второе слагаемое в (4.11) порождается членом $\vec{E}^2/2$ в H_0 . Вычитая собственные энергии источников (члены $\int d^3z [(\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{xz}]^2/2$), находим искомую энергию их статического взаимодействия

$$V_{xx'} = -g^2 \int d^3z (\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{xz} (\vec{\nabla} \Delta^{-1})_{x'z} = \frac{-g^2}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (4.12)$$

Для случая одномерного линейного поля (прямая струна между источниками) имеем [45, 46]:

$$\langle P_{x'x}^+ \hat{H}_0 P_{x'x} \rangle_0 = C_0 + \frac{g^2}{2} \int_x^{x'} dz_1^j \int_x^{x'} dz_2^j \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) =$$

$$= C_0 + \frac{g^2}{2} \delta^{(2)}(0) |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (4.13)$$

Отметим, что в данном случае отсутствуют слагаемые, которые можно было бы отождествить с собственными энергиями источников.

Итак, для состояний, порождаемых операторами типа (4.7), энергия внешнего поля за вычетом собственных энергий источников дается функцией (4.12), а в случае оператора $P_{x'x}$ (3.9) — функцией (4.13). Можно ли их отождествить с потенциальной энергией взаимодействия источников? Ответ связан с выяснением вопроса о том, являются ли найденные энергии внешних полей минимально возможными. Энергия (4.12) конечна и, как хорошо известно, являет собой кулонов потенциал. Энергия же (4.13) бесконечна ввиду фактора $\delta^{(2)}(0)$ (следствие нулевой толщины «струны»), поэтому следует ожидать, что состояние электромагнитного поля источников, порождаемое экспонентой $P_{x'x}$, неустойчиво. Анализ показывает, что это действительно так (см. разд.5): после излучения избыточной энергии порождаемое экспонентой (3.9) поле превращается в кулоново. Неустойчивы и поля, порождаемые операторами P_{2x} (3.17).

Неабелевы теории. В неабелевых теориях состояния с определенным значением напряженности хромозлектрического поля E_a^j не принадлежат к физическому подпространству (поскольку

$$[\hat{E}_a^j(x), D_i^{bc} \hat{E}_c^i(y)] = -i g f^{abc} \hat{E}_c^j \delta(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0,$$

т.е. E_a^j не есть калибровочный инвариант), поэтому в них нет аналога формулы (4.6). Вычислим энергию статических источников в фундаментальном представлении (массивные кварки, $m \rightarrow \infty$; $G = SU(n)$), т.е. вычислим среднее значение оператора (4.2) между состояниями $|\mathbb{M}_{x'x}\rangle = \mathbb{M}_{x'x}|0\rangle$, где

$$\mathbb{M}_{x'x} = \bar{\psi}_{x'} P_{x'x} \gamma_5 \psi_x, \quad (4.14)$$

а $|0\rangle$ — физический вакуум; контур интегрирования в $P_{x'x}$ есть прямая. Покажем, что энергия возбуждения глюонного поля в пределе при $m \rightarrow \infty$ пропорциональна расстоянию между кварками. При вычислении необходимо учесть следующие обстоятельства.

1) Пусть $\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$, $\bar{\psi} = \bar{\psi}^{(+)} + \bar{\psi}^{(-)}$, где $\psi^{(+)} (\bar{\psi}^{(+)})$ содержит оператор уничтожения кварка (антикварка). Вообще говоря, $\hat{\psi}^{(+)}|0\rangle \neq 0$, но при $m \rightarrow \infty$, очевидно,

$$\hat{\psi}^{(+)}|0\rangle \rightarrow 0, \quad \hat{\bar{\psi}}^{(+)}|0\rangle \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

поскольку в этом пределе кварковые степени свободы заморожены (не возбуждаются).

2) Рассмотрим одновременные антикоммутизаторы

$$S_{\rho\lambda} \equiv [\hat{\psi}_{\rho}^{(+)}(x), \hat{\bar{\psi}}_{\lambda}^{(-)}(y)]_{+} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{-ip(x-y)} u_{\alpha}^{\sigma}(p) \bar{u}_{\beta}^{\sigma}(p) \delta_{ij} \quad (4.16)$$

и аналогичное выражение для $\tilde{S}_{\rho\lambda} \equiv [\hat{\psi}_{\rho x}^{(-)}, \hat{\bar{\psi}}_{\lambda y}^{(+)}]_{+}$, которое получается из (4.16) заменами: $u(p) \rightarrow v(p)$ в строке и $p \rightarrow -p$ в экспоненте. В (4.16) использованы стандартные обозначения и нормировки, $u^{\sigma}(p) \bar{u}^{\sigma}(p) = (\hat{p} + m)$, $v^{\sigma}(p) \bar{v}^{\sigma}(p) = \hat{p} - m$, $E_p = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$, $\rho = i, \alpha$, $\lambda = j, \beta$; σ фиксирует поляризацию фермиона. Для массивных кварков имеем

$$S_{\rho\lambda} \rightarrow \frac{1}{2} (\gamma_0 + 1)_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \tilde{S}_{\rho\lambda} \rightarrow \frac{1}{2} (\gamma_0 - 1)_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.17)$$

3) Нормировка состояний $|\mathbb{M}\rangle$ такова: $\langle \mathbb{M} | \mathbb{M} \rangle \equiv C = 2 \text{Tr} 1 [\delta^{(3)}(0)]^2$, $\text{Tr} 1 = n$. Нас интересует разность

$$V_{x'x} = [\langle \mathbb{M}_{x'x} | \hat{H} | \mathbb{M}_{x'x} \rangle - \langle \mathbb{M}_{xx} | \hat{H} | \mathbb{M}_{xx} \rangle] C^{-1}, \quad (4.18)$$

где H — гамильтониан (4.2). Вычисление аналогично соответствующей выкладке в электродинамике с той разницей, что в (4.18) явным образом входят фермионные поля, и что простая экспонента заменяется на P -экспоненту:

$$P_{x'x} = P \exp \left(ig \int_0^1 A_{\mu}^a(z(\tau)) \lambda_a(\tau) \dot{z}^{\mu}(\tau) d\tau \right). \quad (4.19)$$

Здесь $\dot{z}^{\mu} = dz^{\mu}/d\tau$, $z(0) = x$, $z(1) = x'$; следуя Фейнману [48], мы ввели зависящие от упорядочивающего параметра матрицы λ_a , символ P в (4.19) задает порядок их следования. Нам понадобится коммутационное соотношение, аналогичное (4.9):

$$[\hat{E}_a^k(y), P_{x'x}]_{-} = gP [P_{x'x} \int_0^1 \lambda_a(\tau) \dot{z}^k(\tau) \delta(\vec{z}(\tau) - \vec{y}) d\tau]. \quad (4.20)$$

Отметим, что символ упорядочивания P относится здесь ко всем матрицам λ в квадратных скобках, включая матрицы оператора $P_{x'x}$.

Принимая во внимание коммутативность полей A_{μ}^a при одинаковых вре-

менах, тождество $P_{x'x} P_{x'x}^+ = 1$ и соотношения (4.15), (4.17), (4.20), находим для разности (4.18):

$$V_{x'x} = \frac{g^2}{2 \text{Tr } 1} \langle \text{Tr} \left\{ \int d^3 y \tilde{P} [P_{x'x}^+ \int_0^1 \lambda_a(\sigma) \dot{z}^k(\sigma) \delta(\vec{z}(\sigma) - \vec{y}) d\sigma] \times \right. \\ \left. \times P [P_{x'x} \int_0^1 \lambda_a(\tau) \dot{z}^k(\tau) \delta(\vec{z}(\tau) - \vec{y}) d\tau] \right\} \rangle_0; \quad (4.21)$$

символ $\tilde{P}$ предписывает антиупорядочивание по отношению к P , например, $P_{x'x}^+ = \tilde{P} \exp(-ig \int A_\mu dx^\mu)$. Искомая энергия возбуждения глюонного поля в состоянии $|\mathbb{M}_{x'x}\rangle$ есть

$$V_{x'x} = \frac{g^2}{2 \text{Tr } 1} \text{Tr} \lambda_a^2 \delta^{(2)}(0) |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (4.22)$$

Итак, именно оператор параллельного сдвига (3.9) представляет порождаемое зарядами внешнее поле; эта структура, в случае ее стабильности, ведет к статическому взаимодействию источников, которое описывается линейно растущим потенциалом. Такие потенциалы постулировались для объяснения 1) прямолинейности траекторий Редже, 2) спектра кваркония, 3) конфайнмента (в узком смысле, применительно к адронам; линейный конфайнмент).

Замечания. 1. Подчеркнем, что для кварка невозможна конструкция типа (3.18), естественная в электродинамике; к нему можно присоединить лишь одну струну в фундаментальном представлении. 2. Следует ожидать нестабильности струны в присоединенном представлении, поскольку в этом случае роль полей материи играют и векторные калибровочные поля. Но их масса равна нулю, т.е. модель аналогична хромодинамике с безмассовыми кварками, когда струнам выгодно рваться.

Обсуждение. Сформулируем предположения, которые фактически использовались при получении формулы (4.22): 1) статические источники (массивные кварки, $m \rightarrow \infty$), 2) «статическая» струна. Особенность задачи в том, что положение струны, как и источников, фиксировано в пространстве, хотя в принципе она может менять свою конфигурацию. Можно ли это условие (фиксированность) сформулировать «параметрически», подобно условию $m \rightarrow \infty$ для кварков? Очевидно, можно. В случае искривленной струны длиной l в (4.22) вместо $g^2 |\vec{x} - \vec{x}'|$ стояло бы $g^2 l$, и при $g^2 \rightarrow \infty$ даже малое ее отклонение от прямой было бы связано с большим увеличением энергии; следовательно, при $g^2 \rightarrow \infty$ все собственные колебания струны будут подавлены. Именно этот случай и отвечает

результату (4.22): найдена энергия внешнего поля массивных кварков в пределе сильной связи (но без использования метода сильной связи, т.е. без использования разложения по $1/g^2$, см. разд.5).

А что происходит при допределных значениях обоих параметров? Случай бесконечных фермионных масс отвечает «чистой» глюодинамике. Главным следствием включения фермионного поля будет возможность разрыва струн в фундаментальном представлении — теперь кварки могут рождаться (на концах струны обязательно должны находиться заряды). Это влечет появление нового параметра в теории — критической длины струны r_c , при которой она рвется. На расстояниях $r > r_c$ потенциал теряет смысл.

В потенциал (4.22) входит бесконечный множитель $\delta^{(2)}(0)$. Упрощая существо дела, его можно или заменить на $c/\pi r_s^2$, где r_s — радиус струны, $c \sim 1$, или включить в определение натяжения струны σ : $V_r = \sigma r$, r — расстояние между источниками. Тем самым вводится новый физический параметр σ . Очевидно, эти три параметра (r_c , m , σ) связаны между собой: $r_c \sim m/\sigma$, т.е. только два из них независимы. Они выбираются из посторонних соображений; выбор тех или иных конкретных их значений может привести к теориям, резко отличающимся друг от друга, хотя и имеющим одну и ту же природу (лагранжианы различаются входящими в них параметрами). Отмеченное обстоятельство — первопричина многообразия форм, в которых может проявляться конфайнмент (см. разд.6).

Выводы

1. В электродинамике кулоново взаимодействие статических зарядов есть следствие локальной калибровочной инвариантности теории.

2. В неабелевых теориях энергия возбуждения векторного калибровочного поля $V_{x'x}$, представляемого P -экспонентой $P_{x'x}$, пропорциональна длине контура интегрирования. Отождествление $V_{x'x}$ с потенциальной энергией возможно лишь в случае стабильности струны.

5. ЭВОЛЮЦИЯ СТРУН В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Замкнутые струны [32,33]. Итак, согласно разд.3, кварк и антикварк в разных точках пространства всегда соединены струной (P -экспонентой) с более или менее сложной топологией. Энергия глюонного поля, порождаемого оператором $P_{x'x}$ (3.9), пропорциональна длине контура интегрирования $c(x', x)$ (разд.4). В соответствии с общей идеологией полевых

теорий эту энергию можно было бы отождествить с потенциальной энергией взаимодействия статических источников, если бы удалось доказать устойчивость данного одномерного возбуждения. В случае неабелевых теорий проследить за эволюцией струноподобных возбуждений, задаваемых оператором $P_{x'x}$, — задача достаточно сложная. К счастью, имеются модели, в которых эта задача решается до конца, а именно свободная электродинамика и электродинамика массивных зарядов. В первом случае единственный калибровочно-инвариантный объект — это «замкнутая струна» (экспонента (3.9) с замкнутым контуром), во втором — экспонента (3.9) с контуром, соединяющим разноименные заряды. Анализ показывает, что в электродинамике представляемая оператором (3.9) конфигурация поля неустойчива и расплывается с течением времени, т.е. ее энергия (4.13) не может быть отождествлена с потенциальной энергией статических источников.

Выясним судьбу конкретного возбуждения электромагнитного поля, заданного оператором

$$P_c = \exp \left[i \oint_c \hat{A}_j(\vec{y}, 0) dy^j \right] = \exp \left[i \int d^3x \hat{A}(\vec{x}, 0) \vec{J}_c(\vec{x}) \right], \quad (5.1)$$

где

$$\vec{J}_c(\vec{x}) = \int_0^1 \delta(\vec{x} - \vec{y}(\sigma)) \dot{\vec{y}}(\sigma) d\sigma = \oint_c \delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y}; \quad (5.2)$$

очевидно, $\vec{y}(0) = \vec{y}(1)$, $\dot{\vec{y}} = d\vec{y}/d\sigma$ и $\partial \vec{J}_c(\vec{x}) = 0$ (выбрана калибровка $A_0 = 0$). Гамильтониан свободной теории в физическом секторе зависит только от поперечных полей $\vec{A}_\perp = \vec{A} - \partial \Delta^{-1}(\partial \vec{A})$, $\partial \vec{A}_\perp = 0$:

$$\hat{H}_{0\perp} = \frac{1}{2} \int d^3x [\hat{E}_\perp^2 + \hat{H}^2], \quad \partial \vec{E}_\perp = 0. \quad (5.3)$$

Легко видеть, что в контурном интеграле (5.1) возможна замена $\vec{A} \rightarrow \vec{A}_\perp$.

В состоянии $|c\rangle = P_c|0\rangle$, где $|0\rangle$ — физический вакуум ($\partial \vec{E}|0\rangle = 0$,

$\hat{H}_0|0\rangle = E_0|0\rangle$), средние значения операторов $\hat{A}_\perp$, $\vec{E}_\perp$ равны

$$\langle c | \hat{A}_\perp(\vec{x}, 0) | c \rangle = 0, \quad \langle c | \vec{E}_\perp(\vec{x}, 0) | c \rangle = \vec{J}_c(\vec{x}), \quad (5.4)$$

т.е. в состоянии $|c\rangle$ осцилляторы поля возбуждены лишь на контуре интегрирования c ; ясно, что $\vec{J}_c(\vec{x})$ есть смещение центра осцилляций в фазовой плоскости $(A_\perp^i(\vec{x}, 0), \pi_\perp^i(\vec{x}, 0))$, $i = 1, 2, 3$, $\pi_\perp^i \equiv E_\perp^i$. Там, где

$\vec{J}_c = 0$, т.е. где $\langle \hat{A}_\perp \rangle_c = \langle \hat{E}_\perp \rangle_c = 0$, осцилляторы поля находятся в основном состоянии. За время t состояние $|c\rangle$ превратится в $|c, t\rangle = \exp(-i\hat{H}_0 t)|c\rangle$, также описывающее некоторое когерентное возбуждение поля. Средние значения полей $\hat{A}_\perp, \hat{E}_\perp$ теперь равны

$$\vec{A}_{\perp c} = \langle c, t | \hat{A}_\perp(x, 0) | c, t \rangle = \langle c | \hat{A}_\perp(x, t) | c \rangle, \quad (5.5)$$

$$\vec{E}_{\perp c} = \langle c, t | \hat{E}_\perp(x, 0) | c, t \rangle = \langle c | \hat{E}_\perp(x, t) | c \rangle. \quad (5.6)$$

Они удовлетворяют волновому уравнению Даламбера; $\vec{E} = \dot{\vec{A}}$, поэтому с учетом начальных условий (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\perp c}(\vec{x}, t) &= \int d^3y D(\vec{x} - \vec{y}, t) \vec{J}_c(\vec{y}), \\ \vec{E}_{\perp c}(\vec{x}, t) &= \partial_t \int d^3y D(\vec{x} - \vec{y}, t) \vec{J}_c(\vec{y}), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $D(\vec{x}, t)$ есть коммутатор свободного скалярного поля $\hat{\varphi}$ нулевой массы:

$$D(x) = i[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(0)]_- = \frac{\varepsilon(x_0)}{2\pi} \delta(x^2). \quad (5.8)$$

Из (5.7), (5.8) следует, что по истечении времени t средние значения операторов $\hat{A}_\perp, \hat{E}_\perp$ отличны от нуля в той 3-мерной области пространства, до которой дошла волна. Через достаточно большой интервал времени осцилляторы поля на контуре c (и в любой конечной области) возвращаются в основное состояние. Это означает, что порождаемое P_c состояние есть чистое излучение — запасенная в нем энергия переносится на бесконечность. Следовательно, одномерные струноподобные возбуждения полей в КЭД, представляемые оператором P_c (5.1), нестабильны: с течением времени они расплываются.

Струны с массивными зарядами на концах [32,33]. Рассмотрим электромагнитное поле, взаимодействующее с двумя статическими источниками. Действие системы задается функционалом

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - A_0 J_0 \right], \quad J_0(\vec{x}) = g[\delta(\vec{x} - \vec{x}_1) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_2)], \quad (5.9)$$

инвариантным относительно калибровочных преобразований $\delta A_\mu = \partial_\mu \omega$ с произвольными функциями $\omega(x)$, такими, что $[\omega(\vec{x}, t) - \omega(\vec{x}, -t)] \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Электрические заряды $\pm g$ расположены в точках $\vec{x}_1, \vec{x}_2$. Связи имеют вид

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \quad \vec{\partial} \vec{E} - J_0(\vec{x}) = 0, \quad (5.10)$$

а гамильтониан системы $H_0 = \int d^3x [\vec{E}^2 + \vec{H}^2]/2$. В квантовой теории связи первого рода (5.10) аннулируют физические векторы состояний Φ :

$$\hat{\pi}^0 \Phi = 0, \quad (\vec{\partial} \vec{E} - J_0) \Phi = 0. \quad (5.11)$$

С учетом (5.11) гамильтониан в физическом подпространстве задается суммой

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{0\perp} - \frac{1}{2} \int d^3x J_0(\vec{x}) \Delta^{-1} J_0(\vec{x}) = \hat{H}_{0\perp} + E_{\text{кул}}, \quad (5.12)$$

где $\hat{H}_{0\perp}$ есть (5.3), а кулонова энергия $E_{\text{кул}}$ включает собственные энергии источников. Нам потребуется явный вид функционала основного состояния системы

$$\Phi_0[\vec{A}] = \exp[-i \int d^3x d^3y J_0(\vec{x}) \Delta^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\partial} \vec{A}(\vec{y})] \varphi_0[\vec{A}]; \quad (5.13)$$

здесь $\varphi_0[\vec{A}] = \varphi_0[\vec{A}_\perp] = \langle \vec{A}_\perp | 0 \rangle$ — функционал основного состояния свободной теории, $\vec{\partial} \hat{E} \varphi_0 = 0$. Экспонента в (5.13) обеспечивает выполнение закона Гаусса (5.11).

Проследим за эволюцией состояния

$$\Phi_{x_2 x_1}[\vec{A}] = P_{x_2 x_1} \varphi_0[\vec{A}], \quad (5.14)$$

где в операторе

$$P_{x_2 x_1} = \exp \left[ig \int_{x_1}^{x_2} \hat{A}_j(\vec{x}, 0) dx^j \right] \quad (5.15)$$

интеграл берется по прямой, соединяющей точки $\vec{x}_1, \vec{x}_2$. Электромагнитное поле в (5.14) возбуждено лишь на контуре интегрирования. Задача решается с помощью тождества

$$\vec{A} = \vec{A}_\perp + \vec{\partial} \Delta^{-1}(\vec{\partial} \vec{A}), \quad (5.16)$$

подстановка которого в (5.15) позволяет записать функционал (5.14) в виде

$$\Phi_{x_2 x_1}[\vec{A}] = \exp \left[ig \int_{x_1}^{x_2} A_{\perp j} dx^j \right] \Phi[\vec{A}]; \quad (5.17)$$

мы воспользовались формулой

$$g \int_{x_1}^{x_2} \partial_j (\Delta^{-1} \vec{\partial} \vec{A}) dx^j = - \int d^3x J_0(\vec{x}) \Delta^{-1} \vec{\partial} \vec{A}(\vec{x}). \quad (5.18)$$

Заметим, что экспонента в (5.17), зависящая лишь от поперечного поля $\vec{A}_\perp$, согласно сказанному в начале раздела описывает чистое излучение. Это есть пучок замкнутых силовых линий, все они проходят через контур интегрирования и далее расходятся. Из-за слагаемого $\vec{\partial}\Delta^{-1}(\vec{\partial}\vec{A})$ в $\vec{A}_\perp$ (см. (5.16)) концы контура играют роль кулоновых центров. Так как Φ_0 есть основное состояние системы, а гамильтониан $\hat{H}_0$ (5.12) в физическом секторе отличается от гамильтониана $\hat{H}_{0\perp}$ лишь на постоянную, задача, по существу, свелась к задаче с замкнутыми «струнами» из предыдущего пункта: энергия возбуждения поля, отвечающего экспоненте в (5.17), излучается на бесконечность. Состояние Φ_0 при этом не меняется. Следовательно, возбужденное состояние электромагнитного поля, порождаемое оператором $P_{x_2x_1}$ в (5.14) («струна с зарядами на концах»), после излучения избыточной энергии превращается в кулоново поле двух статических источников.

Замечание. Поскольку контурная экспонента (5.1) есть калибровочно-инвариантный объект, время от времени предпринимаются попытки переформулировать теорию в терминах новых нелокальных переменных P_c . В свете полученных результатов (неустойчивость «струн») шансы на успех подобных попыток выглядят довольно проблематично.

О методе сильной связи. Изучение модели (5.9) показало, что в электродинамике массивных зарядов линейный конфайнмент невозможен. Это утверждение справедливо независимо от величины зарядов. Между тем можно услышать мнение, что в электродинамике в пределе сильной связи выполняется «закон площадей», знаменующий наличие линейно растущего потенциала. Обычно ссылаются на работу Вильсона [21], в которой данный результат получен в рамках решеточного подхода. При его оценке, однако, необходимо принимать во внимание следующие обстоятельства. Во-первых, в непрерывном пределе метод сильной связи в том виде, в каком он формулируется на решетке, не годится для решения проблемы статических сил. Во-вторых, решеточная формулировка радикально меняет калибровочную теорию (дискретизация пространства, компактность области изменения полей и т.п. [21]); наконец, в решеточной теории могут существовать эффекты, исчезающие в непрерывном пределе.

Действительно, в гамильтоновой формулировке (время непрерывно) оператор энергии на решетке [22, 49] записывается в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}, i} \hat{E}_{x,i}^2 + \frac{1}{2g^2} \sum_{\vec{x}, i, j} (1 - \cos g' \hat{F}_{ij}); \quad (5.19)$$

здесь g' — некоторая постоянная, в непрерывном пределе совпадающая с g . Второе слагаемое в (5.19) играет роль потенциальной энергии. Оно обеспечивает взаимодействие осцилляторов поля в соседних точках, поскольку содержит пространственные производные полей. Ясно, что в пределе $g \rightarrow \infty$ связь между соседними осцилляторами выключается и локальные возмущения поля замораживаются — распространение сигнала становится невозможным. В этом пределе когерентное возбуждение электромагнитного поля на контуре интегрирования («струна» (5.15)) становится стабильным. Данный факт не специфичен для калибровочной теории и может быть проиллюстрирован на примере скалярного безмассового поля φ . Аналогом (5.19) в непрерывном пределе служит гамильтониан

$$H_g = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\pi^2 + \frac{1}{g^2} (\vec{\partial}\varphi)^2 \right]. \quad (5.20)$$

В нулевом приближении $H_\infty = \int d^3x \pi^2/2$, а вакуумный функционал $\Phi_0^{(\infty)}$ определяется условием $\hat{\pi}\Phi_0^{(\infty)} = -i\delta\Phi_0^{(\infty)}/\delta\varphi = 0$, т.е. $\Phi_0^{(\infty)} = \text{const.}$ Любой вектор, описывающий когерентное возбуждение поля φ

$$|J\rangle_\infty = \exp \left[i \int d^3x \hat{\varphi} J \right] |0\rangle_\infty, \quad (5.21)$$

теперь стационарен — он является собственным вектором оператора $\hat{H}_\infty$:

$$\hat{H}_\infty |J\rangle_\infty = \frac{1}{2} \int d^3x J^2(\vec{x}) |J\rangle_\infty, \quad (5.22)$$

т.е. локальное возбуждение не расплывается. Это утверждение остается верным в любом конечном порядке разложения по степеням $1/g^2$. Между прочим, и здесь проявляется коренное различие между решеточной и стандартной теориями поля. В первой, ввиду конечности постоянной решетки, взяв достаточное число членов в разложении по $1/g^2$, можно описать корреляцию полей в сколь угодно далеких точках. На это, впрочем, обратил внимание еще Вильсон («...разложение по степеням $1/g^2$ не очень полезно в пределе...», когда охватываемая контуром минимальная площадь стремится к бесконечности [21, р.2455]). Остается добавить, что в [21] рассматривалась евклидова теория с «лагранжианом» $\sim F_{\mu\nu}^2/g^2$, в которой при $g \rightarrow \infty$ вообще исчезает всякая связь между полями в разных точках пространства-времени. Другими словами, в нулевом приближении, долженствующем по предположению учитывать главные физические эффекты, динамика вообще отсутствует. Но она появляется уже в низших порядках теории возмущений — специфика решеточного подхода.

Выводы

1. В электродинамике контурные экспоненты не могут играть роль фундаментальных степеней свободы.
2. В стандартной электродинамике массивных зарядов линейно растущий потенциал невозможен даже в пределе сильной связи.

6. «ЛИКИ» КОНФАЙНМЕНТА

«Кинематика» феномена. Перечислим формы, в которых может проявляться конфайнмент. При расширительном толковании термина, принятом здесь, конфайнмент понимается как запрет на состояния с определенными квантовыми числами; вопрос о статических силах между зарядами остается открытым. В узком смысле конфайнмент понимается как наличие в физическом секторе линейно растущего потенциала между массивными зарядами (линейный конфайнмент). Априори нельзя исключить и нелинейного роста потенциала $\sim r^\alpha$, $\alpha = 1 \pm \varepsilon \approx 1$.

Итак, если отвлечься от вопроса о динамике (т.е. о статических силах), можно выделить следующие случаи.

1) *Глобальный конфайнмент.* Как показано в разд.2, в любой калибровочной теории физический сектор определяется условием равенства нулю полных зарядов (равенства (2.26), (2.30), см. также [23]). Физическому подпространству принадлежат лишь нейтральные (бесцветные) состояния.

2) *Локальный конфайнмент.* Функции Вайтмана локальных полей, нетривиально преобразующихся при калибровочных преобразованиях, равны нулю (равенство (2.35) и его обобщения). Локальные возбуждения цветных полей запрещены. Локально могут возбуждаться лишь их бесцветные комбинации типа $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ и т.п.

В обоих случаях потенциальная энергия может как расти с увеличением расстояния между статическими зарядами, так и убывать.

3) *Конфайнмент с точки зрения теории расслоенных пространств.* Особое место занимают результаты чисто геометрического анализа инвариантных структур. Если приведенные выше случаи 1, 2 содержат суждения о динамических системах с определенным, но не конкретизированным лагранжианом, то здесь всякая динамика вообще отсутствует. Анализ тем не менее оказывается полезным, так как позволяет выявить допустимые конфигурации полей. По существу, это также есть форма проявления запрета на состояния полей. Важность геометрического подхода в том, что теперь задача о перечислении нелокальных калибровочно-инвариантных конфигураций полей превращается в хорошо определенную чисто математическую задачу.

Динамические проявления конфайнмента. Включение динамики заметно разнообразит формы проявления конфайнмента. Новые возможности, связанные с особенностями статического взаимодействия зарядов, удобно классифицировать по упомянутым в разд.4 параметрам r_c (критическая длина, при которой струна рвется) и σ (натяжение струны). Особое место занимает случай, когда потенциальное взаимодействие зарядов не связано с одномерными возбуждениями полей.

1) *Слабый конфайнмент.* Случай, когда потенциал не растет с увеличением расстояния. Хорошо известным примером служит электродинамика. Полный электрический заряд Вселенной равен нулю, но заряды могут удалиться друг от друга на сколь угодно большое расстояние. Тем не менее это типичный конфайнмент, только «тюрьма» здесь — вся Вселенная.

2) *Сильный или линейный конфайнмент* ($r_c = \infty$). Это классический конфайнмент, когда статическое взаимодействие массивных частиц описывается линейно растущим потенциалом, т.е. когда противоположно заряженные (цветные) частицы соединены струной, которая не может разорваться.

3) *Конфайнмент в физике адронов* ($0 < r_c < \infty$). В реальном мире сильных взаимодействий струны рвутся по достижении некоторой длины r_c ; при этом рождается $q\bar{q}$ -пара. С величиной r_c связан вопрос о наблюдаемости или ненаблюдаемости кварков (вопрос о том, «почему мы не видим физических кварков»). Чтобы быть зарегистрированной современными приборами, заряженная частица должна пройти расстояние порядка атомных размеров r_A . Если $r_c < r_A$, то отдельный кварк не может быть обнаружен с помощью камеры Вильсона (или иного аналогичного прибора). Такая возможность появляется лишь при $r_c > r_A$. Но и в том, и в другом случае имеет место конфайнмент! Следовательно, упомянутый вопрос о «невыветании» кварков возникает только при использовании определенных средств наблюдения. Уже опыты по глубоконеупругому рассеянию лептонов на адронах (т.е. применение «лептонного» микроскопа) позволили не только зарегистрировать кварки, но и установить их квантовые числа (спин, изоспин, электрический заряд). Таким образом, пленение кварков не превращает их в ненаблюдаемые объекты — они остаются полноправными частицами^{*}, хотя и существующими в своеобразных условиях, вследствие чего для их изучения требуются специальные приборы.

^{*} Впрочем, это, пожалуй, немножко сильно сказано; некоторое «поражение в правах» все же имеет место — они не могут разлететься.

4) *Экранирование (обесцвечивание, $r_c = 0$)*. Если $r_c \rightarrow 0$, то поля в форме струн не проявляются. Струна конечной длины коллапсирует, распадается на фрагменты нулевой длины (явление аналогично экранированию электрического заряда в проводнике; разрыв струны означает рождение пары). Феномен хорошо изучен в модели Швингера [24], где безмассовые фермионы могут рождаться в неограниченном количестве [25, 26]. Надо полагать, что ввиду безмассовости глюонов струны в присоединенном представлении будут вести себя аналогичным образом.

Типы конфайнмента можно различать и по величине натяжения струны σ .

5) *Мягкий конфайнмент ($\sigma r_A^2 \ll 1$)*. Пусть размер адрона характеризуется параметром r_h . Число r_c/r_h позволяет выделить два предельных случая. При $r_c \gg r_h$, в особенности если $r_c \gg r_A$, частицы, будучи плененными, могут удаляться друг от друга на макроскопическое расстояние. Разумеется, такие частицы, если они обладают электрическими зарядами, могут быть зарегистрированы обычными приборами (камерой Вильсона) — даже линейный конфайнмент здесь не помеха. Подобная ситуация возможна при достаточно малых натяжениях струн («либеральный режим заключения»).

6) *Жесткий конфайнмент ($\sigma r_h^2 \sim 1$)*. Если $r_A > r_c \geq r_h$, плененные частицы по отдельности не наблюдаются. Ситуация имеет место при больших натяжениях струн ($\sigma r_h^2 \sim 1$). Именно такой жесткий конфайнмент имеет место в физике адронов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дискутируемые в литературе механизмы удержания кварков на базе КХД можно условно разбить на две группы. К первой относятся работы, в которых конфайнмент стараются получить из «первых принципов» (из лагранжиана), не привлекая дополнительных гипотез. В работах второй группы делаются предположения о существовании новых частиц (монополей) и специальной структуры вакуума. Сразу же оговоримся, что в нашу задачу не входит обсуждение весьма полезных полуфеноменологических моделей (таких, как модель мешков МТИ [15]). Особое место занимают численные расчеты на компьютерах в рамках решеточной формулировки КХД [22].

Работы первой группы используют единственный регулярный метод выхода за рамки теории возмущений — квазиклассику [50, 51]. Именно

на этом пути первоначально надеялись описать феномен удержания кварков, исходя из лагранжиана КХД [20].

Работы второй группы базируются на теории сверхпроводников второго рода [52]. Здесь физики имеют достаточно хорошо изученный пример механизма, обеспечивающего линейный конфайнмент магнитных монополей: их магнитные силовые линии заключены в трубку. Замена электрических зарядов на магнитные и наоборот приводит к модели, в которой в трубку заключены электрические силовые линии, а монополи образуют вакуумный конденсат, т.е. в заточении оказываются электрические заряды (дуальный эффект Мейснера [16,17]). Применение этой идеи в КХД немедленно дает сильный конфайнмент кварков. Логически построение безупречно. Приходится лишь предполагать, помимо лагранжиана КХД, а) существование хроматических монополей, б) наличие их конденсата в вакууме, т.е. привлекать дополнительные гипотезы. В работах второй группы принципиальную роль играет основное состояние системы. Поскольку предлагаемый в них механизм появления линейного потенциала тождествен (с точностью до дуального преобразования) механизму появления магнитных нитей в сверхпроводниках второго рода, в системе должна существовать фаза деконфайнмента. При достаточно высокой температуре трубки с хроматическими силовыми линиями не могут не разрушаться. В принципе, это должно вести к рождению хромагнитных монополей, чего, по видимому, на опыте не наблюдалось. Отметим, что фазовый переход существует и в теориях, не прибегающих к специальным гипотезам о структуре вакуума. Поскольку речь идет о возбужденных состояниях системы в ограниченном объеме ($V \sim r_h^3$), при достаточно высокой температуре ($T \sim r_h^{-1}$) будут размораживаться собственные степени свободы струн, т.е. должен иметь место фазовый переход первого рода.

Приведенные соображения относятся и к решеточным формулировкам теории. Здесь обращает на себя внимание естественность, с которой включаются в формализм монополи [22], — следствие компактности области определения калибровочных полей. Разумеется, в этом случае получение удерживающего потенциала также не представляет труда. Вместе с тем следует подчеркнуть, что решеточные теории радикально отличаются от непрерывных — меняются области изменения физических степеней свободы, динамика, пространство (физические процессы разыгрываются на решетке). Более того, переход к непрерывному пределу, вообще говоря, неоднозначен, поэтому в дискретных теориях могут существовать эффекты, отсутствующие в континуальном пределе.

Выше мы видели, что в калибровочных теориях нет необходимости прибегать к специальным ухищрениям для получения линейных (одномерных) объектов — они изначально там присутствуют (P -экспоненты). Эти структуры имеют глубокий геометрический смысл. Интерпретация векторных калибровочных полей как связностей в главном расслоенном пространстве позволяет отождествить P -экспоненту с оператором параллельного переноса вдоль контура интегрирования. Включение динамики (постулирование лагранжиана) заметно усложняет рисуемую картину. В абелевой теории представляемые линейными экспонентами струноподобные возбуждения оказываются неустойчивыми и расплываются (разд.5).

Данный факт высвечивает еще одну особенность решеточных теорий. Развитые там методы приближенных вычислений могут привести к эффектам, отсутствующим в непрерывной теории. Речь идет об электродинамике массивных зарядов в пределе сильной связи: решеточные расчеты дают закон площадей [21], тогда как точный расчет показывает отсутствие в этой модели конфайнмента [32,33].

Подведем некоторые итоги.

1. В широком смысле конфайнмент имеет место в любой калибровочной теории (разд.2). Конфайнмент кварков есть частный случай данного класса явлений.

2. Удерживающие кварки силы обеспечиваются статическими полями, окружающими цветные заряды (в электродинамике это кулоново поле). Поля обязаны своим появлением вторичным связям первого рода (по закону Гаусса).

3. В моделях, в которых решающую роль играет вакуум (гипотеза о конденсате монополей) существует фаза деконфайнмента. В рамках КХД появление открытого цвета запрещено калибровочной инвариантностью. Тем не менее фазовый переход возможен. Он связан с размораживанием струнных степеней свободы; критическая температура определяется энергией первого возбужденного состояния струны.

4. Струноподобные возбуждения в квантовой электродинамике массивных зарядов, представляемые линейными экспонентами, нестабильны.

5. Решеточная версия метода сильной связи не годится для решения вопроса о конфайнменте. Можно лишь с большой осторожностью переносить результаты решеточных вычислений на непрерывную теорию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gell-Mann M. — California Institute of Technology. Synchrotron Laboratory Report CTSL-20, 1961.
2. Ne'eman Y. — Nucl. Phys., 1961, vol. 26, p. 222.
3. Salam A. — Theoretical Physics, IAEA. Vienna, 1963, p. 173.

4. Gell-Mann M. — Phys. Lett., 1964, vol.8, p.214.
5. Zweig G. — CERN Preprints TH-401, 402, Geneva, 1964.
6. Клоуз Ф. — Кварки и партоны. М.: Мир, 1982.
7. Боголюбов Н.Н., Струминский Б.В., Тавхелидзе А.Н. — Препринт ОИЯИ, Д-1968, Дубна, 1965.
8. Han M.Y., Nambu Y. — Phys. Rev., 1965, vol.139B, p.1006.
9. Miyamoto Y. — Progr. Theor. Phys. Suppl., 1965, Extra No.187.
10. Feynman R.P. — Phys. Rev. Lett., 1969, vol.23, p.1415.
11. Bjorken J.D., Paschos E.A. — Phys. Rev., 1969, vol.185, p.1975.
12. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1973, vol.31, p.494.
13. Pati J., Salam A. — Phys. Rev., 1973, vol.D8, p.1240.
14. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. — Phys. Lett., 1973, vol.B47, p.365.
15. Chodos A., Jaffe R.L., Johnson K., Thorn C.B. et al. — Phys. Rev., 1974, vol.D9, p.3471; vol.D10, p.2599.
16. 't Hooft G. — High Energy Physics (Ed. Zichichi A.), Editrice Compositori, Bologna, 1976.
17. Mandelstam S. — Phys. Rep., 1976, vol.23C, p.245.
18. Amati D., Testa M. — Phys. Lett., 1974, vol.48B, p.227.
19. 't Hooft G. — Nucl. Phys., 1978, vol.B138, p.1.
20. Polyakov A.M. — Nucl. Phys., 1977, vol.B120, p.429.
21. Wilson K. — Phys. Rev., 1974, vol.D10, p.2445.
22. Кройц М. — Кварки, глюоны и решетки. М.: Мир, 1987.
23. Kugo T., Ojima I. — Suppl. Progr. Theor. Phys., 1979, No.66, p.1.
24. Schwinger J. — Phys. Rev., 1962, vol.128, p.2425.
25. Casher A., Kogut J., Susskind L. — Phys. Rev., 1974, vol.D10, p.732.
26. Danilov G.S., Dyatlov I.T., Petrov V.Yu. — Nucl. Phys., 1980, vol.174B, p.68.
27. Волошин М.Б., Тер-Мартirosян К.А. — Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1984.
28. Wick G.C., Wightman A.S., Wigner E. — Phys. Rev., 1952, vol.88, p.101.
29. Prokhorov L.V. — Lett. Math. Phys., 1990, vol.19, p.245.
30. Daniel M., Viallet C.M. — Rev. Mod. Phys., 1980, vol.52, p.175.
31. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. — Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
32. Fursaev D.V., Prokhorov L.V., Shabanov S.V. — Mod. Phys. Lett. A, 1992, vol.7, p.3441.
33. Prokhorov L.V., Fursaev D.V., Shabanov S.V. — ICTP Preprint IC/92/116, Trieste, 1992; Прохоров Л.В., Фурсаев Д.В. Шабанов С.В. — ТМФ, 1993, т.97, с. 373.
34. Jackiw R. — Rev. Mod. Phys., 1980, vol.25, p.661.
35. Прохоров Л.В. — ЯФ, 1982, т.35, с.229.
36. Прохоров Л.В., Шабанов С.В. — УФН, 1991, т.161, с.13.
37. Дирак П.А.М. — Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
38. Прохоров Л.В. — Проблемы физики высоких энергий и теории поля. Тр. XIII семинара, Протвино, июль 9—13, 1990. М.: Наука, 1991, с.156.
39. Prokhorov L.V., Shabanov S.V. — Int.J.Mod.Phys.A, 1992, vol.7, p.7815.
40. Стритер Р., Вайтман А.С. — РСТ, спин, статистика и все такое. М.: Наука, 1966.
41. Дирак П.А.М. — Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960, § 80.
42. Желобенко Д.П. — Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
43. Прохоров Л.В. — Вестн. СПбУ, 1992, № 4, с.3.
44. Прохоров Л.В. — Вестн. ЛГУ, 1990, № 18, с.3.
45. Прохоров Л.В. — Проблемы физики высоких энергий и теории поля. Тр. X семинара, Протвино, июль 6—12, 1987. М.: Наука, 1988, с.131.
46. Prokhorov L.V. — Carleton Univ. Preprint OCIP-89-04, Ottawa, 1989.
47. Carruthers P. — Introduction to Unitary Symmetry, New York, 1966.
48. Feynman R.P. — Phys. Rev., 1951, vol.84, p.108.

- 49. Kogut J., Susskind L. — Phys. Rev., 1974, vol.D9, p.3501.
- 50. Polyakov A.M. — Phys. Lett., 1975, vol.59B, p.82.
- 51. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwarz A.S., Tyupkin Yu.S. — Phys. Lett., 1975, vol.59B, p.85.
- 52. Шмидт В.В. — Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982.

ЛОКАЛЬНЫЕ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРЫ ГРУПП, ФОРМЫ КАРТАНА И ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИЯМ КАЛИБРОВОЧНЫХ И КИРАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В.И.Кувшинов, Нгуен Вьен Тхо

Институт физики им.Б.И.Степанова Академии наук Белоруссии, Минск

Обзор посвящен развитию метода векторной параметризации групп и его применениям к теориям калибровочных и киральных полей. Установлена прямая связь между формами Картана и законом композиции вектор-параметров групп, которая позволяет вычислить простым образом формы Картана для ряда групп, не решая дифференциальных уравнений Картана — Мауэра. Получен явный вид конечных калибровочных преобразований групп унитарных, пространственно-временных симметрий и суперсимметрии, а также нелинейных реализаций калибровочных гравитации и супергравитации. Найдены формы Картана и лагранжианы главных киральных и голдстоуновских полей для групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$, обладающие новыми типами нелинейности (отношение полиномов). Получено простое выражение лагранжиана $SU(2)$ -модели Скинра в векторной параметризации группы $SU(2)$, содержащее только три независимые полевые переменные. На основе этого лагранжиана рассмотрены сохраняющиеся токи модели и схема квантования вращательных коллективных возбуждений, в которой используются вектор-параметры $SO(3)$ в качестве коллективных координат скирмионов. Такой подход к модели Скинра дает значительное упрощение выкладок при рассмотрении модели, а также ее модифицированного варианта со стабилизирующим членом шестого порядка.

The review is devoted to the development of the method of vector parametrization and its applications to the gauge and chiral field theories. The direct connection between the Cartan forms and the law of composition of parameters is established which allows to calculate simply the Cartan forms for many different groups, not resolving Cartan — Maurer's differential equations. The explicit form of finite gauge transformations for the groups of local unitary, space-time symmetries and supersymmetry, and of the nonlinear realizations of gravity and supergravity are obtained. The Cartan forms, the Lagrangians of the principal chiral and Goldstone fields for the unitary groups $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$ are found which have the new types of nonlinearity. The expression of the Lagrangian of $SU(2)$ -Skyrme model is obtained which contains only three independent field variables and has the simple form. With this Lagrangian we consider the conserved currents of the model and the scheme of quantization of the rotational collective excitations in which the vector-parameters of $SO(3)$ are used as collective coordinates of skyrmions. This approach to the Skyrme model simplifies considerably the calculations in the consideration of the model, and also its modified variant with the sixth order stabilizing term.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении непрерывных групп и их использовании в приложениях существенную роль играет выбор параметризации. Хотя он равносителен выбору системы координат на групповом многообразии и от него не должны зависеть физические следствия, удачный выбор параметризации не только может упростить математические выкладки, но и во многих случаях позволяет преодолеть трудности, которые существуют в других параметризациях.

Векторная параметризация, предложенная и разработанная сначала для группы вращений и группы Лоренца [1—5] и обобщенная впоследствии для ряда других групп (в частности, см. [6—8]), отличается от других параметризаций рядом привлекательных свойств:

1) закон композиции параметров, соответствующий умножению группы, имеет простой вид;

2) параметризация удовлетворяет условию естественности: если $g(Q)$ — элемент группы, Q — совокупность параметров, рассматриваемая как вектор в некотором пространстве, то

$$g(Q = 0) = I, \quad g(-Q) = g^{-1}(Q) \quad (1)$$

(I — единица группы);

3) параметризация обладает также свойством линейности: внутреннему автоморфизму отвечает линейное преобразование параметров

$$g(Q) g(Q') g^{-1}(Q) = g[\Lambda(Q) Q'], \quad (2)$$

где $\Lambda(Q)$ — матрица, элементы которой зависят от вектор-параметра Q . Эти свойства играют важную роль при разработке теории групп и их представлений и рассмотрении физических приложений, так как групповое умножение, вычисление обратного элемента, а также преобразование подобия постоянно возникают в групповых выкладках. Благодаря этим свойствам многие результаты можно получить только с использованием операций над параметрами, не обращаясь к конкретным выражениям матриц преобразований группы или ее представлений. В векторной параметризации было дано изящное изложение теорий групп вращений и Лоренца, в котором значительно упрощаются многие соотношения и их доказательство [5].

Недавнее развитие метода векторной параметризации показывает, что с его помощью можно изучать проблемы, связанные не только с глобальными преобразованиями, но и с локальными преобразованиями групп. Обнаруживается исключительно простая и прямая связь между формами Картана и законом композиции вектор-параметров групп, с

помощью которой можно легко найти формы Картана для ряда групп [9—12]. Известно, что формы Картана играют важную роль в теории калибровочных и киральных полей: они фигурируют в формулах конечных преобразований калибровочных групп и их нелинейных реализаций, служат основными элементами для построения лагранжианов киральных полей и т.д. Поэтому разработка простого метода расчета форм Картана дает возможность исследовать ряд важных проблем теории этих полей.

В настоящем обзоре представлены новый метод расчета форм Картана на основании использования закона композиции параметров и его применения к проблемам теории калибровочных и киральных полей. В разд.1 приведены сведения о естественных линейных параметризациях групп вращения, Лоренца, унитарных групп, группы и супергруппы Пуанкаре, явный вид закона композиции параметров соответствующих групп. В разд.2 установлена связь между формами Картана и законом композиции параметров. На основе использования этой связи простым образом рассчитаны формы Картана для групп, параметризации которых даны в разд.1. Выражения форм Картана, приведенные в этом разделе, будут использованы в последующих разделах. Далее в разд.3 рассматривается задача о нахождении явного вида конечных преобразований калибровочных полей. Известно, что обычно при формулировке калибровочных полевых теорий локальные параметры группы вводятся с помощью инфинитезимальных преобразований. Однако представляет несомненный интерес формулировка таких теорий, основанная на использовании конечных преобразований калибровочной группы. В принципе для групп локальных унитарных или лоренцевой симметрий задача может решаться с использованием матричного полиномиального вида преобразований соответствующих групп [13,14], но эффективность расчета существенно зависит от сложности матриц этих преобразований. В данной работе с помощью метода расчета форм Картана, развитого в разд.2, мы можем легко получить результаты, не обращаясь к явному выражению групповых преобразований. Такой подход играет решающую роль в случае гравитации и супергравитации Пуанкаре, когда матричные выражения групповых преобразований имеют сложный вид [15,16]. В этом разделе получен также явный вид нелинейных реализаций калибровочных гравитации и супергравитации Пуанкаре, которые линейны на стабильной подгруппе Лоренца. В разд.4 обсуждается построение лагранжианов нелинейных киральных полей. Главные киральные поля отождествляются с локальными параметрами группы, а голдстоуновские поля — с локальными параметрами фактор-пространства G/H , где H — стабильная подгруппа группы G , связанная с ненарушаемыми симметриями. Обладая формами Картана для соответствующих групп, нетрудно найти лагранжианы этих полей. Полученные таким образом

лагранжианы обладают новыми типами нелинейности (отношение конечных полиномов). В разд.5 приведен пример, иллюстрирующий применение нового вида лагранжианов киральных полей к исследованию свойств нелинейных полевых моделей. Рассматривается случай $SU(2)$ -модели Скирма. В векторной параметризации группы $SU(2)$ лагранжиан этой модели имеет простой вид и содержит три независимые полевые переменные, которые можно отождествить с триплетом пионных полей. Изложена схема квантования вращательных коллективных возбуждений скирмионов, в которой в качестве коллективных координат выбираются вектор-параметры матриц вращений в трехмерном изопространстве. Найдены выражения сохраняющихся токов и зарядов модели в этих коллективных координатах. В аналогичном плане рассмотрен модифицированный вариант модели со стабилизирующим членом шестого порядка. В приложении приведены явные выражения для коэффициентов, входящих в закон композиции, формы Картана, киральные лагранжианы для исследуемых унитарных групп, через структурные постоянные этих групп.

1. ВЕКТОРНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГРУПП И ЗАКОН КОМПОЗИЦИИ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРОВ

Векторная параметризация групп вращений и Лоренца. Векторная параметризация групп была предложена и разработана в [1] (см. также [5]) для группы трехмерных вращений $SO(3)$. Произвольная матрица трехмерного вращения O может быть параметризована трехмерными вещественными вектор-параметрами $c = (c_a)$, $a = 1, 2, 3$ следующим образом [1,5]:

$$O = O(c) = 1 + 2 \frac{c^{\times} + (c^{\times})^2}{1 + c^2} = \frac{1 - c^2 + 2c \cdot c + 2c^{\times}}{1 + c^2}, \quad (3)$$

где $c^{\times}$, $c \cdot c$ — следующие 3×3 -матрицы:

$$(c^{\times})_{ab} = \varepsilon_{adb} c_d, \quad (4)$$

$$(c \cdot c)_{ab} = c_a c_b. \quad (5)$$

Вектор-параметр c имеет простой геометрический смысл: направление вектора c задает ось поворота, а угол поворота α определяется длиной c :

$$|c| = \operatorname{tg}(\alpha/2). \quad (6)$$

Закон композиции вектор-параметров c , соответствующий групповому умножению, имеет простой вид:

$$\begin{aligned} O(c'') &= O(c) O(c'), \\ c'' = \langle c, c' \rangle &= \frac{c + c' + [c, c']}{1 - (cc')}, \end{aligned} \quad (7)$$

где (cc') и $[c, c']$ — обычные скалярное и векторное произведения трехмерных векторов, а скобки $\langle \rangle$ обозначают композицию вектор-параметров.

Легко убедиться, что параметризация (3) обладает свойством естественности:

$$\langle c, 0 \rangle = \langle 0, c \rangle = c, \quad \langle c, -c \rangle = \langle -c, c \rangle = 0, \quad (8)$$

и линейности:

$$c'' = \langle c, c', -c \rangle = O(c) c'. \quad (9)$$

Для группы Лоренца $SO(3,1)$ может вводиться аналогичная параметризация [2—5]. На основе того факта, что $SO(3,1)$ является комплексификацией $SO(3)$, в работах [2—5] для параметризации $SO(3,1)$ используется комплексный трехмерный вектор-параметр

$$q = a + ib, \quad (10)$$

с помощью которого произвольная матрица преобразования Лоренца L представляется в следующем компактном виде [5]:

$$L = L(q) = \varepsilon_+(q) \varepsilon_-(q) = \frac{(1 + q_+) (1 + q_-^*)}{|1 + q^2|}. \quad (11)$$

Здесь введены обозначения:

$$\varepsilon_{\pm}(q) = \frac{1 + q_{\pm}}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad (12)$$

$q_{\pm}$ — 4×4 -матрица:

$$q_{\pm} = \begin{pmatrix} q^x & \pm q \\ \mp q & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где q^x — 3×3 -матрица, определяемая формулой (4). Закон композиции комплексных вектор-параметров q внешне совпадает с законом композиции вектор-параметров группы вращений:

$$L(q'') = L(q) L(q'), \quad q'' = \langle q, q' \rangle = \frac{q + q' + [q, q']}{1 - (qq')}. \quad (14)$$

Параметризация (11) также обладает естественностью:

$$\langle q, 0 \rangle = \langle 0, q \rangle = q, \quad \langle q, -q \rangle = \langle -q, q \rangle = 0, \quad (15)$$

и линейностью:

$$q'' = \langle q, q', -q \rangle = O(q) q'. \quad (16)$$

Известно, что для групп вращений и Лоренца в литературе часто используются параметризации с помощью вещественных и комплексных углов Эйлера (см., например, [17—19]). Однако закон композиции конечных углов Эйлера имеет довольно громоздкий вид [19]. В этих параметризациях свойства (1), (2) также не выполняются.

Векторная параметризация унитарных групп. Для унитарной группы $U(n)$ параметризацией, обладающей простым законом композиции, является параметризация с помощью форм Кэли [20—22]:

$$U = U(N) = \frac{1 + N}{1 - N}, \quad U \in U(n), \quad (17)$$

где N — антиэрмитова $n \times n$ -матрица (матрица параметров), $N^\dagger = -N$. При такой параметризации матрица U может быть представлена в виде полинома степени $n - 1$ от матрицы-параметра N , коэффициенты которого выражаются через следы от степеней N [23, 24]. Закон композиции матриц-параметров N имеет вид [21, 22]:

$$U(L) = U(M) U(N), \\ L = \langle M, N \rangle = 1 - (1 - N)(1 + MN)^{-1}(1 - M). \quad (18)$$

В частности, имеет место соотношение [22]:

$$\langle M + \delta N, M \rangle \approx (1 - M)^{-1} \delta N (1 + M)^{-1}, \quad (19)$$

где δN — малая добавка к матрице M .

Легко убедиться, что параметризация (17) является естественной и линейной. Свойство линейности выражается следующим соотношением [21]:

$$VU(M)V^{-1} = U(VMV^{-1}), \quad V = U(N). \quad (20)$$

При использовании формул (18), (19) в приложениях следует найти матрицы, обратные к $(1 + M)$ или $(1 + MN)$. С помощью характеристических уравнений для матриц M или MN , которые позволяют выразить их степени выше n через n низших степеней, можно получить выражения соответствующих обратных матриц [21, 23, 24]. Выпишем, например, выражение $(1 + N)^{-1}$:

$$(1 + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k N^k, \quad (21)$$

где

$$\alpha_k = (-1)^k \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} \beta_i \right) / \left(\sum_{j=0}^n \beta_j \right),$$

$$\beta_k = (1/k) \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} s_i \beta_{k-i}, \quad \beta_0 = 1, \quad s_i = \text{Sp}(N^i).$$

Матрица-параметр N в (17) может раскладываться по соответствующим базисам. Тогда компоненты матрицы N в определенном базисе, составляющие вектор в некотором пространстве, могут быть использованы для параметризации группы $U(n)$.

Рассмотрим важные частные случаи: $n = 2$ и $n = 3$. Известно, что в качестве базисных матриц для матриц второго порядка обычно выбираются матрицы σ_i ($i = 0, 1, 2, 3$), включающие матрицы Паули σ_a ($a = 1, 2, 3$) и единичную матрицу $\sigma_0 = I$. Для антиэрмитовых 2×2 -матриц N коэффициенты разложения в этом базисе являются чисто мнимыми: $N = -i\eta_i \sigma_i$ (η_i — вещественные, по повторным индексам подразумевается суммирование). Вектор в пространстве R^4 , составленный из компонент $\{\eta_i\}$, может играть роль вектор-параметра группы $U(2)$. Тогда для $U(2)$ параметризация (17) принимает вид:

$$U = \frac{1 - i\eta_i \sigma_i}{1 + i\eta_i \sigma_i} = U(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3). \quad (22)$$

Для группы $SU(2)$ параметр η_0 должен равняться нулю, что следует из условия $\det(1 - i\eta_i \sigma_i) = \det(1 + i\eta_i \sigma_i)$. Поэтому произвольная матрица $U \in SU(2)$ параметризуется совокупностью трех вещественных параметров, составляющих трехмерный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$:

$$U = \frac{1 - i\eta_a \sigma_a}{1 + i\eta_a \sigma_a} = U(\eta_1, \eta_2, \eta_3). \quad (23)$$

В качестве базисных для матриц третьего порядка выбираются матрицы λ_i ($i = 0, 1, \dots, 8$): $\lambda_0 = \sqrt{2/3}I$; $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ — восемь матриц Гелл-Манна. Матрица-параметр N имеет разложение $N = -i\eta_i \lambda_i$ (η_i — вещественные), и матрица $U \in U(3)$ параметризуется вектором в R^9 : $\eta = \{\eta_i\}$:

$$U = \frac{1 - i\eta_i \lambda_i}{1 + i\eta_i \lambda_i} = U(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_8). \quad (24)$$

Для $SU(3)$ девять компонент вектор-параметра не являются независимыми, а связаны уравнением

$$3\eta_0^3 - \eta_0 \eta_i \eta_i + i \sqrt{2/3} k_{jkl} \eta_j \eta_k \eta_l - \eta_0 = 0, \quad (25)$$

которое получается из условия $\det(1 - i\eta_i \lambda_i) = \det(1 + i\eta_i \lambda_i)$. Коэффициенты k_{jkl} задаются формулой (П.10).

Закон композиции параметров (18) и свойство линейности (20), записанные в матричном виде, могут быть реализованы в терминах вектор-параметров η для групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$. Используя (21) и свойства базисных матриц σ_i и λ_i , получаем:

а) Для группы $SU(2)$ — закон композиции вектор-параметров:

$$U(\xi) = U(\xi) U(\eta),$$

$$\xi = \langle \xi, \eta \rangle = \frac{(1 - \eta^2) \xi + (1 - \xi^2) \eta + 2[\xi, \eta]}{1 - 2(\xi \eta) + \xi^2 \eta^2}, \quad (26)$$

$((\xi \eta)$ и $[\xi, \eta]$ обозначают скалярное и векторное произведения трехмерных векторов ξ и η);

свойство линейности:

$$U(\eta) U(\eta_0) U^{-1}(\eta) = U[\Lambda(\eta) \eta_0],$$

$$\Lambda(\eta) = 1 + 4 \frac{(1 - \eta^2) \eta^\times + 2(\eta^\times)^2}{(1 + \eta^2)^2}. \quad (27)$$

б) Для группы $U(2)$ — закон композиции параметров:

$$\begin{aligned} \xi_i = \langle \xi, \eta \rangle_i = s^{-1}(\xi, \eta) \{ \xi_i + \eta_i + (h_{jki} - h_{kji}) \xi_j \eta_k - 2(\xi \eta) \xi_i - \\ - h_{jkm} h_{mli} \xi_j \xi_l \eta_k - 2(\xi \eta) \eta_i - h_{jkm} h_{mli} \xi_k \eta_j \eta_l + 2i\delta_{0i} (\xi \eta)^2 + \\ + 2h_{jki} (\xi \eta) \xi_k \eta_j + (h_{kjn} h_{nmp} h_{pli} - \delta_{0i} h_{jkn} h_{nlp} h_{pm0}) \xi_j \xi_l \eta_k \eta_m \}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $(\xi \eta) = \xi_i \eta_i$, по повторным индексам подразумевается суммирование, все индексы принимают значения 0, 1, 2, 3,

$$s(\xi, \eta) = 1 - 2(\xi \eta) + 2(\xi \eta)^2 + i h_{ijm} h_{mkn} h_{nl0} \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l,$$

свойство линейности:

$$U(\eta) U(\eta_0) U^{-1}(\eta) = U[\Lambda(\eta) \eta_0], \quad \Lambda = (\Lambda_{ij}), \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \quad (29)$$

$$\Lambda_{ij} = s^{-1}(\eta) \{ \delta_{ij} + \lambda_{ijk}^{(1)} \eta_k + \lambda_{ijkl}^{(2)} \eta_k \eta_l + \lambda_{ijklm}^{(3)} \eta_k \eta_l \eta_m + \lambda_{ijklmn}^{(4)} \eta_k \eta_l \eta_m \eta_n \},$$

где коэффициенты $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(4)}$ даны в приложении (формула (П.5)) и $s(\eta) = (1 + \eta_0^2 + \eta^2)^2 + 4\eta_0^2$.

в) Для групп $U(3)$ и $SU(3)$ — закон композиции параметров:

$$\xi_i = \langle \xi, \eta \rangle_i = s^{-1}(\xi, \eta) \{ \xi_i + \eta_i + \rho_{ijk}^{(1,1)} \xi_j \eta_k + \rho_{ijkl}^{(1,2)} \xi_j \eta_k \eta_l + \rho_{ijkl}^{(2,1)} \xi_j \xi_k \eta_l +$$

$$+ \rho_{ijklm}^{(2,2)} \xi_j \xi_k \eta_l \eta_m + \rho_{ijklmn}^{(2,3)} \xi_j \xi_k \eta_l \eta_m \eta_n +$$

$$+ \rho_{ijklmn}^{(3,2)} \xi_j \xi_k \xi_l \eta_m \eta_n + \rho_{ijklmnp}^{(3,3)} \xi_j \xi_k \xi_l \eta_m \eta_n \eta_p \}, \quad (30)$$

где

$$s(\xi, \eta) = 1 - 2(\xi\eta) + 2(\xi\eta)^2 + i(\sqrt{6}/2)k_{ijm}k_{mkn}k_{nlo} \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l - (4/3)(\xi\eta)^3 -$$

$$- i\sqrt{6}k_{ijm}k_{mkn}k_{nlo}(\xi\eta) \xi_i \xi_k \eta_j \eta_l - i(\sqrt{6}/3)k_{ijn}k_{nkp}k_{plq}k_{qmr}k_{rn0} \xi_i \xi_k \xi_m \eta_j \eta_l \eta_m,$$

свойство линейности:

$$U(\eta) U(\eta_0) U^{-1}(\eta) = U[\Lambda(\eta) \eta_0], \quad \Lambda = (\Lambda_{ij}), \quad i, j = 0, 1, \dots, 8,$$

$$\Lambda_{ij} = s^{-1}(\eta) \{ \delta_{ij} + \lambda_{ijk}^{(1)} \eta_k + \lambda_{ijkl}^{(2)} \eta_k \eta_l + \lambda_{ijklm}^{(3)} \eta_k \eta_l \eta_m + \lambda_{ijklmn}^{(4)} \eta_k \eta_l \eta_m \eta_n +$$

$$+ \lambda_{ijklmnp}^{(5)} \eta_k \eta_l \eta_m \eta_n \eta_p + \lambda_{ijklmnpq}^{(6)} \eta_k \eta_l \eta_m \eta_n \eta_p \eta_q \}, \quad (31)$$

где все индексы принимают значения $0, 1, \dots, 8$,

$$s(\eta) = (1 - 3\eta_0^2 + \eta_s \eta_s)^2 + (\sqrt{6}\eta_0 - \eta_0^3 + \sqrt{6}\eta_0 \eta_s \eta_s - \frac{2i}{3} k_{ijk} \eta_i \eta_j \eta_k)^2,$$

коэффициенты ρ и λ даны в приложении (формулы (П.11) и (П.12)), при этом для группы $SU(3)$ следует учесть уравнение связи параметров (25).

Для группы $SU(2)$ в работах [13, 22] (см. также [8]) предложена и разработана и другая удобная векторная параметризация: произвольная матрица $U \in SU(2)$ представляется в виде

$$U = \frac{1 - in_a \sigma_a}{\sqrt{1 + n^2}} = \frac{1 - in\sigma}{\sqrt{1 + n^2}}, \quad (32)$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ — трехмерный вещественный вектор. Закон композиции вектор-параметров n имеет простой вид:

$$n'' = \langle n, n' \rangle = \frac{n + n' + [n, n']}{1 - nn'}. \quad (33)$$

Легко видеть, что существует простое соотношение между вектор-параметром n в (32) и вектор-параметром η в параметризации (24):

$$n = 2 \frac{\eta}{1 - \eta^2}. \quad (34)$$

Естественная линейная параметризация группы Пуанкаре. Преобразования группы Пуанкаре векторов четырехмерного пространства Минковского:

$$x \rightarrow x' = Lx + a, \quad (35)$$

где L — лоренцево преобразование, a — 4-вектор, удобно представить в виде действия 5×5 -матриц:

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lx + a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Легко видеть, что в сочетании с четырьмя параметрами a непосредственное использование комплексных вектор-параметров q группы Лоренца в качестве параметров группы Пуанкаре дает параметризацию, не обладающую естественностью и линейностью. Поэтому в работе [6] для параметризации группы Пуанкаре была выбрана совокупность параметров:

$$Q = \{p, p^*, b\}, \quad (37)$$

где b — 4-вектор пространства Минковского, p — комплексный трехмерный вектор-параметр, связанный с вектор-параметром q следующим образом:

$$L(q) = L^2(p), \quad q = \langle p, p \rangle = \frac{2p}{1 - p^2}. \quad (38)$$

Матрица, представляющая произвольное преобразование группы Пуанкаре, записывается в виде

$$P = P(Q) = \begin{pmatrix} L^2(p) & \frac{L(p)b}{|1 + p^2|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Закон композиции параметров Q имеет следующий вид:

$$Q'' = \langle Q, Q' \rangle, \quad Q = \{p, p^*, b\}, \quad Q' = \{p', p'^*, b'\}, \quad Q'' = \{p'', p''^*, b''\},$$

$$p'' = \frac{(1 - p'^2)p + (1 - p^2)p' + 2[pp']}{1 + p^2p'^2 - 2pp'}, \quad p''^* = (p'')^*, \quad (40)$$

$$b'' = \frac{|1 + p'^2| L(-p'') L(p) b + |1 + p^2| L(p'') L(-p') b'}{|1 + p^2p'^2 - 2pp'|}.$$

Формула (39) дает естественную и линейную параметризацию группы Пуанкаре, причем внутреннему автоморфизму $P(Q') \rightarrow P(Q'') = P(Q) P(Q') P^{-1}(Q)$ соответствует следующее линейное преобразование параметров [6]:

$$Q'' = \Lambda(Q)Q',$$

$$\Lambda(Q) = \begin{pmatrix} O^2(p) & 0 & 0 \\ 0 & O^2(p^*) & 0 \\ \alpha_+(p, p^*, b) & \alpha_-(p, p^*, b) & L^2(p) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где $O(p)$ — 3×3 -матрицы, действующие в пространстве комплексных параметров p и имеющие вид

$$O(p) = 1 + 2 \frac{p^x + (p^x)^2}{1 + p^2}, \quad (42)$$

$\alpha_{\pm}(p, p^*, b)$ — прямоугольные 4×3 -матрицы со следующими элементами:

$$[\alpha_{\pm}(p, p^*, b)]_{ma} = - \frac{2}{|1 + p^2|} [L^2(p) I_a^{(\pm)} L(-p) b]_m, \quad (43)$$

$I_a^{(\pm)}$ — 4×4 -матрица генераторов группы Лоренца с элементом

$$[I_a^{(\pm)}]_{mn} = \frac{1}{2} [\pm (\delta_{ma} \delta_{4n} - \delta_{an} \delta_{m4}) - \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} (\delta_{mb} \delta_{cn} - \delta_{bn} \delta_{mc})], \quad (44)$$

$$(a, b, c = 1, 2, 3; \quad m, n = 1, 2, 3, 4).$$

Линейная естественная параметризация супергруппы Пуанкаре. Обратимся теперь к супергруппе Пуанкаре. На основе линейной естественной параметризации группы Пуанкаре можно найти аналогичную параметризацию супергруппы [9]. Согласно [9], элемент супергруппы Пуанкаре параметризуется совокупностью параметров $Q = (p, p^*, B, A, A^*)$, где p — комплексный 3-мерный вектор-параметр $SL(2, C)$, B — вещественная 2×2 -матрица, A — 2-мерный комплексный вектор с антиком-

мутирующими компонентами. Закон композиции параметров задается следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 Q'' &= \langle Q, Q' \rangle, \\
 p'' &= \langle p, p' \rangle = \frac{(1 - p'^2) p + (1 - p^2) p' + 2[p p']}{1 + p^2 p'^2 - 2pp'}, \quad p^{*''} = (p'')^*, \\
 B'' &= (1 + p^2 p'^2 - 2pp')^{-1} \{ |1 + p'^2| l'^{-1} l B l'^{+} l'^{-1} + \\
 &+ |1 + p^2| l'^{-1} B' l'^{-1} l'^{+} - i \sqrt{1 + p^{*2}} \sqrt{1 + p'^2} l'^{-1} l A \cdot \bar{A}' l'^{-1} l'^{+} + \\
 &+ i \sqrt{1 + p^{*2}} \sqrt{1 + p'^2} l'^{-1} l' A' \cdot \bar{A} l'^{-1} l'^{+} \}, \\
 A'' &= \sqrt{1 + p'^2} \left(\frac{l'^{-1} l A}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{l'^{-1} l' A'}{\sqrt{1 + p'^2}} \right), \quad A^{*''} = (A'')^*, \quad (45)
 \end{aligned}$$

где

$$l \in SL(2, C), \quad l = l(p) = \frac{(1 + \hat{p})}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \hat{p} = i p_a \sigma_a,$$

σ_a — матрицы Паули,

$$A \cdot \bar{A}' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot (A_1^{*'}, A_2^{*'}) = \begin{pmatrix} A_1 A_1^{*'} & A_1 A_2^{*'} \\ A_2 A_2^{*'} & A_2 A_1^{*'} \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что эта параметризация удовлетворяет условию естественности. Взяв преобразование внутреннего автоморфизма $S(Q'') S(Q) S^{-1}(Q)$, получаем следующее выражение для преобразования параметров:

$$\begin{aligned}
 p'' &= O^2(p) p', \quad O(p) = 1 + 2 \frac{p^x + (p^x)^2}{1 + p^2}, \quad (p^x)_{ab} = \varepsilon_{acb} p_c, \quad O\tilde{O} = I, \\
 B'' &= l^2 B' l^{+2} - |1 + p^2|^{-1} [2 l^2 \hat{p}' l^{-1} (B + i A \cdot \hat{A}) l^{+} + \\
 &+ 2 l (B - i A \cdot \bar{A}) l^{-1} + \hat{p}' l^{+2}] - 2i(1 + p^2)^{-1/2} l A \cdot \bar{A}' l^{+2} - \\
 &- 2i(1 + p^{*2})^{-1/2} l^2 A' \cdot \bar{A} l^{+}, \\
 A'' &= l^2 A' - 2(1 + p^2)^{-1/2} l^2 \hat{p}' l^{-1} A. \quad (46)
 \end{aligned}$$

Учитывая линейность $\hat{p}$ по параметру p , можно увидеть, что преобразование (46) является линейным.

2. МЕТОД РАСЧЕТА ФОРМ КАРТАНА НА ОСНОВЕ ЗАКОНА КОМПОЗИЦИИ ГРУППОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

При рассмотрении вопросов, связанных с локальными групповыми преобразованиями, часто встречаются дифференциальные формы Картана $(dg)g^{-1} = (\partial g(x)/\partial x^\mu)g^{-1}(x)dx^\mu$, где $g(x)$ — функция, принимающая значения в группе G . Обычно нахождение форм Картана требует решения дифференциальных уравнений Картана — Мауэра (см., например, [25—27]). Покажем, что в параметризации группы G , обладающей свойством естественности (1), формы Картана можно определить простым образом с помощью закона композиции групповых параметров [9—12].

Связь между формами Картана и законом композиции параметров. Обозначим $Q = \{Q_n\}$ совокупность параметров группы G . С точки зрения геометрии группового пространства параметров, бесконечно малому вектору dQ с началом в точке Q отвечает элемент группы $g(Q')$: $g(Q')g(Q) = g(Q + dQ)$. Разлагая $g(Q + dQ)$ в ряд по dQ :

$$\begin{aligned} g(Q + dQ) &= g(Q) + \frac{\partial g}{\partial Q_m} \Big|_Q dQ_m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial Q_n \partial Q_m} \Big|_Q dQ_m dQ_n + \dots = \\ &= g(Q) + dg(Q) + O(dQ^2), \end{aligned} \quad (47)$$

получаем

$$g(Q') = g(Q + dQ)g^{-1}(Q) = I + (dg(Q))g^{-1}(Q) + O(dQ^2). \quad (48)$$

С другой стороны, из свойства естественности (1) можно представить $g(Q')$ в виде

$$g(Q') = g(Q + dQ)g^{-1}(Q) = g(Q + dQ)g(-Q). \quad (49)$$

Отсюда следует, что

$$Q' = \langle Q + dQ, -Q \rangle. \quad (50)$$

В уравнении (50), если $dQ = 0$, то $Q' = \langle Q, -Q \rangle = 0$ (согласно (1)), поэтому параметры Q_n являются бесконечно малыми и представляются в виде:

$$Q'_n = \langle Q + dQ, -Q \rangle_n = \alpha_{nm}(Q) dQ_m + O(dQ^2) = Q_n^{(1)} + O(dQ^2), \quad (51)$$

где коэффициенты $\alpha_{nm}(Q)$ зависят от конкретного вида закона композиции параметров, $Q_n^{(1)} = \alpha_{nm}(Q) dQ_m$ — член первого порядка по dQ в выражении Q'_n .

Поскольку касательное пространство к группе Ли G в единичном элементе группы отождествляется с алгеброй Ли этой группы, $g(Q')$ имеет вид

$$g(Q') = I + iQ_n^{(1)} X_n + O(dQ^2), \quad (52)$$

где $\{X_n\}$ — генераторы группы G .

Сравнивая (48) и (52), получаем

$$(dg(Q)) g^{-1}(Q) = -g(Q) dg^{-1}(Q) = iQ_n^{(1)} X_n, \quad (53)$$

где $Q_n^{(1)}$ определяются формулой (51).

Уравнение (53) дает простой метод расчета форм Картана: их нахождение в данном подходе сводится к выделению члена первого порядка по $dQ(Q_n^{(1)})$ в выражении $\langle Q + dQ, -Q \rangle$. Итак, если для группы найдена параметризация, обладающая законом композиции параметров и свойством естественности, с помощью этого метода легко определить формы Картана, не прибегая к решению дифференциальных уравнений Картана — Мауэра. Ниже на основе использования этого метода и параметризаций, приведенных в разд.1, рассчитаны выражения форм Картана для ряда групп.

Формы Картана для унитарных групп. Формы Картана для группы $U(2)$ определяются следующей формулой (с использованием параметризации (22)):

$$(dU)U^{-1} = -2iN^{(1)} = -2i\eta_i^{(1)} \sigma_i = -2if_{ij}(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_j \sigma_i, \quad (54)$$

где $N^{(1)}$ — член первого порядка по dN в выражении $\langle N + dN, -N \rangle$. Используя (19) и (21), найдем выражение f_{ij} в формуле (54):

$$f_{ij}(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\delta_{ij} + \alpha_{ijk}^{(1)} \eta_k + \alpha_{ijkl}^{(2)} \eta_k \eta_l}{(1 - \eta_0^2 + \eta^2)^2 + 4\eta_0^2}, \quad (55)$$

где $\alpha_{ijk}^{(1)}, \alpha_{ijkl}^{(2)}$ — постоянные коэффициенты, выражения которых через структурные постоянные группы $U(2)$ даны в приложении (см. (П.6)).

Формы Картана для случая группы $SU(2)$ определяются следующим образом (с использованием параметризации (23)):

$$\begin{aligned}(dU)U^{-1} &= -2if_{ab}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_b \sigma_a, \quad a, b = 1, 2, 3, \\ f_{ab}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= \\ &= \frac{1}{(1 + \eta^2)^2} [\delta_{ab} - 2\epsilon_{abc}\eta_c + (\delta_{ad}\delta_{cb} + \delta_{ac}\delta_{db} - \delta_{ab}\delta_{dc})\eta_c\eta_d].\end{aligned}\quad (56)$$

Для группы $U(3)$ в параметризации (24) имеем

$$\begin{aligned}(dU)U^{-1} &= -2iF_{ij}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_8) d\eta_j \lambda_i, \\ F_{ij}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_8) &= \\ &= [(1 - 3\eta_0^2 + \eta_s\eta_s)^2 + (\sqrt{6}\eta_0 - \eta_0^3 + \sqrt{6}\eta_0\eta_s\eta_s - \frac{2}{3}ik_{pqr}\eta_p\eta_q\eta_r)^2]^{-1} \times \\ &\times \{\delta_{ij} + \beta_{ijk}^{(1)}\eta_k + \beta_{ijkl}^{(2)}\eta_k\eta_l + \beta_{ijklm}^{(3)}\eta_k\eta_l\eta_m + \beta_{ijklmn}^{(4)}\eta_k\eta_l\eta_m\eta_n\},\end{aligned}\quad (57)$$

где k_{pqr} и $\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(4)}$ даны в приложении (ф-лы (П.10) и (П.13)).

Для группы $SU(3)$ формы Картана определяются теми же уравнениями (57), но с добавлением уравнения связи параметров (25).

Случай группы Лоренца. В параметризации (11) группы Лоренца с законом композиции (14) легко выделить член первого порядка в выражении $\langle q + dq, -q \rangle$ и получить формы Картана для группы Лоренца:

$$(dL)L^{-1} = i[f_{ab}(q) dq_b f_a^{(+)} + f_{ab}^*(q) dq_b^* f_a^{(-)}], \quad (58)$$

$$f_{ab}(q) = i \frac{\delta_{ab} - \epsilon_{abc}q_c}{1 + q^2}, \quad f_{ab}^*(q) = f_{ab}(q^*), \quad (59)$$

где $f_a^{\pm}$ — генераторы группы Лоренца, матричная форма которых задается формулой (44).

Формы Картана для группы и супергруппы Пуанкаре. Приведем выражение форм Картана для группы и супергруппы Пуанкаре, рассчитанное по развитой выше методике [15, 16]. Для группы Пуанкаре имеем

$$(dP)P^{-1} = iQ_A'^{(1)}X_A, \quad (60)$$

где $\{X_A\} = \{J_a^{(+)}, J_a^{(-)}, T_m\}$ — совокупность генераторов подгруппы Лоренца и 4-трансляций, которые в 5-мерном представлении имеют вид

$$J_a^{(\pm)} = \begin{pmatrix} 2I_a^{(\pm)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (T_m)_{MN} = \delta_{mM} \delta_{N5}, \quad (M, N = 1, 2, \dots, 5), \quad (61)$$

$\{Q_A^{(1)}\} = \{p_a'^{(1)}, p_a'^{(1)*}, b_m'^{(1)}\}$ — член первого порядка в выражении $\langle Q + dQ, -Q \rangle$, причем

$$\begin{aligned} p_a'^{(1)} &= iF_{ab}(\mathbf{p}) \partial_\mu p_b, \\ F_{ab}(\mathbf{p}) &= -(1 + \mathbf{p}^2)^{-2} [(1 - \mathbf{p}^2) \delta_{ab} + 2p_a p_b - 2\varepsilon_{abc} p_c], \\ b_m'^{(1)} &= i[\beta_+(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*, b)]_{ma} \partial_\mu p_a + \\ &+ i[\beta_-(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*, b)]_{ma} \partial_\mu p_a^* - \frac{i}{|1 + \mathbf{p}^2|} [L(\mathbf{p})]_{mn} \partial_\mu b^n, \end{aligned} \quad (62)$$

$$[\beta_+(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*, b)]_{ma} = \frac{1}{|1 + \mathbf{p}^2|} \left\{ \left[\frac{p_a}{1 + \mathbf{p}^2} - (4F_{ba}(\mathbf{p}) + f_{ba}(\mathbf{p})) I_b^{(+)} \right] L(\mathbf{p}) b \right\}_m,$$

$$[\beta_-(\mathbf{p}, \mathbf{p}^*, b)]_{ma} = \frac{1}{|1 + \mathbf{p}^2|} \left\{ \left[\frac{p_a^*}{1 + \mathbf{p}^{*2}} - (4F_{ba}^*(\mathbf{p}) + f_{ba}^*(\mathbf{p})) I_b^{(-)} \right] L(\mathbf{p}) b \right\}_m,$$

$f_{ab}(\mathbf{p})$ задается формулой (59).

Формы Картана для супергруппы Пуанкаре имеют вид

$$(dS) S^{-1} = iQ_A'^{(1)} X_A, \quad (63)$$

где $\{X_A\} = \{J_a^{(+)}, J_a^{(-)}, T_m, Q_a, Q_a^*\}$ — генераторы супергруппы, $\{Q_A^{(1)}\} = \{p_a'^{(1)}, p_a'^{(1)*}, B_m'^{(1)}, A_\alpha'^{(1)}, A_\alpha'^{(1)*}\}$, причем

$$\begin{aligned} p_a'^{(1)} &= iF_{ab}(\mathbf{p}) \partial_\mu p_b, \\ B_m'^{(1)} &= i|1 + \mathbf{p}^2| (1 + \mathbf{p}^2)^{-2} [(\alpha_a + \beta_a) l(\mathbf{p}) (B + iA \cdot \bar{A}) l^+(\mathbf{p}) \partial_\mu p_a + \\ &+ l(\mathbf{p}) (B - iA \cdot \bar{A}) l^+(\mathbf{p}) (\alpha_a^+ + \beta_a^+) \partial_\mu p_a^* + l(\mathbf{p}) \partial_\mu B l^+(\mathbf{p}) + \\ &+ il(\mathbf{p}) A \cdot (\partial_\mu \bar{A}) l^{-1}(\mathbf{p}) - il(\mathbf{p}) (\partial_\mu A) \cdot \bar{A} l^+(\mathbf{p})], \end{aligned}$$

$$A'^{(1)} = i(1 + p^2) [(\alpha_a + \beta_a) A \partial_\mu p_a + l(p) \partial_\mu A], \quad (64)$$

В формулах (64) используются следующие обозначения:

$$B = B_m \sigma^m, \quad B'^{(1)} = B'_m{}^{(1)} \sigma^m,$$

$$F_{ab}(p) = -(1 + p^2)^{-2} [(1 - p^2) \delta_{ab} + 2p_a p_b - 2\epsilon_{abc} p_c],$$

$$\alpha_a = (1 + p^2)^{-1} p_a - i\sigma_a, \quad \beta_a = (1 + p^2)^{-1} p_a - 2iF_{ba} \sigma_b.$$

3. ЯВНЫЙ ВИД КОНЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ

В этом разделе показано, что на основе использования линейных естественных параметризаций групп и метода расчета форм Картана, развитого в разд.2, можно найти явный вид конечных преобразований калибровочных полей и их нелинейных реализаций.

Конечные локальные преобразования унитарных групп. Известно, что конечные преобразования калибровочных полей для унитарных групп имеют вид

$$B'_\mu = U(x) B_\mu U^{-1}(x) + (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x), \quad (65)$$

или

$$b'_{\mu i}(x) T_i = b_{\mu i}(x) U(x) T_i U^{-1}(x) + (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x), \quad (65')$$

где $b_{\mu i}(x)$ — компоненты калибровочного поля B_μ ($B_\mu = b_{\mu i} T_i$), T_i — генераторы группы, $U(x)$ — конечное локальное унитарное преобразование. Найдем явный вид этих преобразований в терминах конечных локальных параметров группы для унитарных групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$, используя приведенные в разд.1 параметризации этих групп.

Второй член в правой части (65') определяется формами Картана, которые были рассчитаны в разд.2. Что касается первого члена, то

$$U(x) T_i U^{-1}(x) = \Lambda_{ij}(\eta(x)) T_j, \quad (66)$$

где $\Lambda_{ij}(\eta(x))$ — матрица линейного преобразования вектор-параметров при преобразовании подобия (в соответствии со свойством линейности параметризации):

$$U(\eta(x)) U(\eta_0) U^{-1}(\eta(x)) = U[\Lambda(\eta(x)) \eta_0]. \quad (67)$$

Действительно, выбирая в (67) в качестве η_0 произвольный малый вектор-параметр (но $\eta(x)$ — конечный) и разлагая $U(\eta_0) = 1 + \eta_{0i} T_i$, выводим (66).

Таким путем получаем следующие выражения для преобразований компонент калибровочного поля при произвольных конечных локальных преобразованиях унитарных групп:

$$b'_{\mu i}(x) = \Lambda_{ij}(\eta(x)) b_{\mu j}(x) + f_{ij}(\eta) \partial_\mu \eta_j(x), \quad (68)$$

где явные выражения матриц f_{ij} для $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$ даны формулами (55), (56), (57), а Λ_{ij} — формулами (27), (29), (31).

Изложенный выше метод получения явного вида конечных калибровочных преобразований унитарных групп может быть использован без трудностей для ряда других групп.

Конечные локальные преобразования групп пространственно-временных симметрий и супергруппы. Известно, что теории гравитации и супергравитации могут формулироваться как калибровочные теории групп пространственно-временных симметрий и суперсимметрий [28—41, 49, 50]. Общей математической основой этих теорий может служить геометрия расслоенных пространств [42—45]. Тогда группа симметрии рассматривается как структурная группа, действующая в касательном расслоении над пространственно-временным многообразием (базой) с координатами x_μ , $\mu = 1, 2, 3, 4$, а калибровочные поля — как коэффициенты $\Omega_{\mu A}$ 1-формы связности $\Omega = \Omega_{\mu A} I_A dx^\mu$ (I_A — генераторы группы симметрии) на расслоении, принимающей значения в алгебре Ли группы. Конечные локальные преобразования S группы (т.е. преобразования, параметры которых зависят от точек базового пространства-времени) описываются как замены сечения расслоения, при которых форма связности Ω преобразуется следующим образом (см., например, [43]):

$$\Omega' = S \Omega S^{-1} + S d S^{-1}. \quad (69)$$

Из (69) можно найти явный вид преобразования коэффициентов 1-формы связности при конечных локальных преобразованиях группы прост-

ранственно-временных симметрий и суперсимметрии, используя приведенные в разд.1 параметризации этих групп. Конечные локальные лоренцевы преобразования принимают вид [14]:

$$\begin{aligned}\omega'_{\mu a}(x) &= O_{ab}(q(x)) \omega_{\mu b}(x) + f_{ab}(q(x)) \partial_{\mu} q_b(x), \\ \omega^{*'}_{\mu a}(x) &= O^*_{ab}(q(x)) \omega^*_{\mu b}(x) + f^*_{ab}(q(x)) \partial_{\mu} q^*_b(x),\end{aligned}\quad (70)$$

где $\omega_{\mu a}(x)$, $\omega^*_{\mu a}(x)$ — коэффициенты 1-формы связности, принимающей значения в алгебре Ли группы Лоренца: $\Omega = (\omega_{\mu a}(x)J^{(+)}_a + \omega^*_{\mu a}(x)J^{(-)}_a)dx^{\mu}$ ($J^{(\pm)}_a$ — генераторы группы Лоренца). Калибровочное поле Ω имеет геометрический смысл локальной лоренцевой связности.

Конечные локальные преобразования группы Пуанкаре имеют следующий вид [15]:

$$\begin{aligned}\omega'_{\mu a}(x) &= [O^2(p(x))]_{ab} \omega_{\mu b}(x) + F_{ab}(p(x)) \partial_{\mu} p_b(x), \\ \omega^{*'}_{\mu a}(x) &= [O^2(p^*(x))]_{ab} \omega^*_{\mu b}(x) + F^*_{ab}(p(x)) \partial_{\mu} p^*_b(x), \\ \theta'_{\mu m}(x) &= [\alpha_+(p(x), p^*(x), b(x))]_{ma} \omega_{\mu a}(x) +\end{aligned}\quad (71)$$

$$\begin{aligned}&+ [\alpha_-(p(x), p^*(x), b(x))]_{ma} \omega^*_{\mu a}(x) + \\ &+ [L^2(p(x))]_{mn} \theta^n_{\mu}(x) + [\beta_+(p(x), p^*(x), b(x))]_{ma} \partial_{\mu} p_a(x) + \\ &+ [\beta_-(p(x), p^*(x), b(x))]_{ma} \partial_{\mu} p^*_a(x) - \frac{1}{|1 + p^2(x)|} [L(p(x))]_{mn} \partial_{\mu} b^n(x),\end{aligned}$$

где матрицы $O(p)$, $F_{ab}(p)$, $\alpha_{\pm}(p, p^*, b)$, $\beta_{\pm}(p, p^*, b)$ задаются формулами (42), (43), (62). В уравнениях (71) $\omega_{\mu a}(x)$, $\omega^*_{\mu a}(x)$, $\theta^m_{\mu}(x)$ являются коэффициентами 1-формы связности, принимающей значения в алгебре Ли группы Пуанкаре: $\Omega = (\omega_{\mu a}(x)J^{(+)}_a + \omega^*_{\mu a}(x)J^{(-)}_a + \theta^m_{\mu}(x)T_m) dx^{\mu}$, где $J^{(\pm)}_a$, T_m — генераторы группы Пуанкаре (см. (61)). Геометрическая интерпретация этих коэффициентов дается на основе рассмотрения нелинейной реализации группы Пуанкаре (см. ниже).

Для супергруппы Пуанкаре мы имеем следующие формулы для калибровочных полей при преобразованиях с произвольными

конечными локальными параметрами супергруппы $Q(x) = \{p(x), p^*(x), B(x), A(x), A^*(x)\}$ [16]:

$$\begin{aligned}\omega'_{\mu a} &= O_{ab}^2(p) \omega_{\mu b} + F_{ab}(p) \partial_{\mu} p_b, & \omega_{\mu a}^* &= (\omega'_{\mu a})^*, \\ \theta'_{\mu} &= l^2 \theta_{\mu} l^{+2} - |1 + p^2|^{-1} [2l^2 \hat{\omega}_{\mu} l^{-1} (B + iA \cdot \bar{A}) l^+ + 2l(B - iA \cdot \bar{A}) l^{-1} + \hat{\omega}_{\mu}^+ l^{+2}] - \\ &- 2i(1 + p^2)^{-1/2} l A \cdot \bar{\Psi}_{\mu} l^{+2} - 2i(1 + p^2)^{-1/2} l^2 \Psi_{\mu} \cdot \bar{A} l^+ + \\ &+ |1 + p^2| (1 + p^2)^{-2} [(\alpha_a + \beta_a) l(B + iA \cdot \bar{A}) l^+ \partial_{\mu} p_a + \\ &+ l(B - iA \cdot \bar{A}) l^+ (\alpha_a^+ + \beta_a^+) \partial_{\mu} p_a^* + l \partial_{\mu} B l^+ + \\ &+ i l A \cdot (\partial_{\mu} \bar{A}) l^{-1} - i l (\partial_{\mu} A) \cdot \bar{A} l^+],\end{aligned}\quad (72)$$

$$\Psi'_{\mu} = l^2 \Psi_{\mu} - (1 + p^2)^{-1/2} [2l^2 \hat{\omega}_{\mu} l^{-1} A - (\alpha_a + \beta_a) A \partial_{\mu} p_a + l \partial_{\mu} A],$$

$$\Psi_{\mu}^* = (\Psi'_{\mu})^*,$$

где

$$\theta_{\mu} = \theta_{\mu m} \sigma^m, \quad \theta'_{\mu} = \theta'_{\mu m} \sigma^m, \quad \hat{\omega}_{\mu} = i \omega_{\mu a} \sigma_a, \quad \hat{\omega}_{\mu}^+ = -i \omega_{\mu a}^* \sigma_a,$$

$$F_{ab}(p) = - (1 + p^2)^{-2} [(1 + p^2) \delta_{ab} + 2p_a p_b + (p^x)_{ab}],$$

$$\alpha_a = (1 + p^2)^{-1} p_a - i \sigma_a, \quad \beta_a = (1 + p^2)^{-1} p_a - 2i F_{ba} \sigma_b.$$

В уравнениях (72) $\omega_{\mu a}(x)$, $\omega_{\mu a}^*(x)$, $\theta_{\mu m}(x)$, $\Psi_{\mu a}(x)$, $\Psi_{\mu a}^*(x)$ — коэффициенты 1-формы связности, принимающей значения в алгебре Ли супергруппы:

$$\Omega = (\omega_{\mu a}(x) J_a^+ + \omega_{\mu a}^*(x) J_a^- + \theta_{\mu m}(x) T^m + \Psi_{\mu a}(x) Q_a^x - \Psi_{\mu a}^*(x) Q_a^{*x}) dx^{\mu},$$

$$Q_a^x = \varepsilon_{a\beta} Q_{\beta}.$$

Геометрическая интерпретация этих коэффициентов дается нелинейной реализацией супергруппы Пуанкаре (см. ниже).

Явный вид нелинейных реализаций калибровочных теорий гравитации и супергравитации. Рассмотрим нелинейную реализацию группы Пуанкаре, которая линейна на подгруппе Лоренца. Мы можем написать преобразования группы Пуанкаре (39) в виде

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L(p)b}{|1+p^2|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^2(p) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_F P_L, \quad (73)$$

где L обозначает подгруппу Лоренца и F — фактор-пространство P/L . В соответствии с методом нелинейной реализации [46—48, 26, 27] введем поле $\Phi(x)$, принимающее значения в фактор-пространстве в фиксированной точке x :

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L(p)\xi(x)}{|1+p^2|} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in F_x, \quad \xi(x) \in R^{1,3}, \quad (74)$$

и определим нелинейное калибровочное поле $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} = \Phi^{-1} \Omega \Phi + \Phi^{-1} d\Phi. \quad (75)$$

Учитывая явный вид (61) генераторов группы Пуанкаре для 5×5 -матриц Ω , $\hat{\Omega}$, мы можем написать:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2\omega & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 2\hat{\omega} & \hat{\theta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (76)$$

где $\omega, \hat{\omega}$ — 1-формы, принимающие значения в алгебре Ли группы Лоренца: $\omega = (\omega_{\mu a} I_a^{(+)} + \omega_{\mu a}^* I_a^{(-)}) dx^\mu$, $\hat{\omega} = (\hat{\omega}_{\mu a} I_a^{(+)} + \hat{\omega}_{\mu a}^* I_a^{(-)}) dx^\mu$; $\theta, \hat{\theta}$ — 1-формы со значениями в $R^{1,3}$: $\theta = \theta_\mu^m I_m dx^\mu$, $\hat{\theta} = \hat{\theta}_\mu^m I_m dx^\mu$. Формулы (75), (76) позволяют определить $\hat{\omega}, \hat{\theta}$ из ω, θ (путем использования естественности, линейности параметризации и метода расчета форм Картана (разд.2)) [15]:

$$\hat{\omega} = \omega, \quad \hat{\theta} = \theta + D \left(\frac{L(p)\xi}{|1+p^2|} \right), \quad D = d + \omega. \quad (77)$$

При замене сечения $\hat{\omega}$ преобразуется как линейное калибровочное поле группы Лоренца:

$$\hat{\omega}' = L^2(p) \hat{\omega} (L^2(p))^{-1} + L^2(p) d(L^2(p))^{-1}, \quad (78)$$

или

$$\hat{\omega}'_{\mu a}(x) = [O^2(p(x))]_{ab} \omega_{\mu b}(x) + F_{ab}(p(x)) \partial_\mu p_b(x), \quad (78')$$

и $\hat{\theta}$ — как лоренц-тензор: $\hat{\theta}' = L^2(p) \hat{\theta}$. Поэтому $\hat{\omega}$ и $\hat{\theta}$ интерпретируются, соответственно, как локальная лоренцева связность и тетрада ($e_\mu^m = k_0 \hat{\theta}_\mu^m$, $[k_0] = \text{см}$). Эти величины будут играть роль основных

динамических переменных для построения калибровочной теории гравитации.

Аналогично можно найти явный вид нелинейной реализации супергруппы Пуанкаре, которая линейна на подгруппе Лоренца. Напишем преобразование супергруппы:

$$S(p, p^*, B, A, A^*) = S\left(0, 0, \frac{l(p)Bl^+(p)}{|1+p^2|}, \frac{l(p)}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{l^*(p)A^*}{\sqrt{1+p^{*2}}}\right) S(p, p^*, 0, 0, 0) = S_F S_L, \quad (79)$$

где S_L — элемент подгруппы Лоренца, $S_F \in G/L$. Определим нелинейное калибровочное поле $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} = \Phi^{-1} \Omega \Phi + \Phi^{-1} d\Phi, \quad (80)$$

где $\Phi(x)$ принимает значения в фактор-пространстве в фиксированной точке x и имеет вид

$$\Phi(x) = S\left(0, 0, \frac{l(p)Bl^+(p)}{|1+p^2|}, \frac{l(p)\eta(x)}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{l^*(p)\eta^*(x)}{\sqrt{1+p^{*2}}}\right), \quad (81)$$

$$\xi(x) = \xi^m(x), \xi^m(x) \in R^{1,3}, \quad \eta(x) = \begin{pmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \end{pmatrix},$$

здесь $\eta_1(x), \eta_2(x)$ — антикоммутиационные компоненты. Из (80), (81) получаем явный вид нелинейных калибровочных полей [16]:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{\mu a} &= \omega_{\mu a}, \quad \hat{\omega}_{\mu a}^* = \omega_{\mu a}^*, \\ \hat{\theta}_\mu &= \theta_\mu + \mathfrak{D}_\mu \left(\frac{l(p)\xi(x)l^+(p)}{|1+p^2|} \right) - i \left[\Delta_\mu^\rightarrow \left(\frac{l(p)\eta(x)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \right] \cdot \bar{\eta}(x) + \\ &+ i\eta(x) \cdot \left[\left(\frac{\overline{l(p)\eta(x)}}{\sqrt{1+p^2}} \right) \Delta_\mu^{\leftarrow+} \right] + 2i \left(\frac{l(p)\eta(x)}{\sqrt{1+p^2}} \right) \cdot \bar{\Psi}_\mu + 2i\Psi_\mu \cdot \left(\frac{\overline{l(p)\eta(x)}}{\sqrt{1+p^2}} \right), \\ \hat{\Psi}_\mu &= \Psi_\mu + \Delta_\mu^\rightarrow \left(\frac{l(p)\eta(x)}{\sqrt{1+p^2}} \right), \quad \hat{\bar{\Psi}}_\mu = \bar{\Psi}_\mu + \left(\frac{\overline{l(p)\eta(x)}}{\sqrt{1+p^2}} \right) \Delta_\mu^{\leftarrow+}, \end{aligned} \quad (82)$$

где

$$\mathfrak{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu^\rightarrow + \omega_\mu^{\leftarrow+},$$

$$\Delta_{\mu}^{\rightarrow} = \partial_{\mu}^{\rightarrow} + 2\omega_{\mu}^{\rightarrow}, \quad \Delta_{\mu}^{\leftarrow+} = \partial_{\mu}^{\leftarrow+} + 2\omega^{\leftarrow+}_{\mu},$$

$$\omega_{\mu} = i\omega_{\mu a}\sigma_a, \quad \omega_{\mu}^+ = -i\omega_{\mu a}^*\sigma_a, \quad \theta_{\mu} = \theta_{\mu t}\sigma^t, \quad \hat{\theta}_{\mu} = \hat{\theta}_{\mu t}\sigma^t.$$

При замене сечения 1-форма $\hat{\Omega}$ преобразуется как

$$\begin{aligned} \hat{\omega}'_{\mu a} &= O_{ab}^2(\mathbf{p}) \hat{\omega}_{\mu b} + F_{ab} \partial_{\mu} p_b, & \hat{\omega}_{\mu a}^{*'} &= (\hat{\omega}'_{\mu a})^*, \\ \hat{\theta}'_{\mu} &= l^2(\mathbf{p}) \hat{\theta}_{\mu} l^{+2}(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (83)$$

$$\hat{\Psi}'_{\mu} = l^2(\mathbf{p}) \hat{\Psi}_{\mu}, \quad \bar{\hat{\Psi}}'_{\mu} = (\bar{\hat{\Psi}}_{\mu})'.$$

Коэффициенты $\hat{\omega}_{\mu a}, \hat{\omega}_{\mu a}^*, \hat{\theta}_{\mu t}, \hat{\Psi}_{\mu a}$ нелинейного калибровочного поля $\hat{\Omega}$ с законом преобразования (83) отождествляются, соответственно, с локальной лоренцевой связностью, тетрадой и полем Рариты — Швингера и используются в качестве основных динамических переменных супергравитации.

4. ЛАГРАНЖИАНЫ ГЛАВНЫХ КИРАЛЬНЫХ И ГОЛДСТОУНОВСКИХ ПОЛЕЙ В ВЕКТОРНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ УНИТАРНЫХ ГРУПП

Как известно, в ряде задач теоретической физики возникают нелинейные киральные модели, в которых взаимодействие вводится не путем добавления лагранжиана взаимодействия к лагранжиану свободного поля, а чисто геометрическим способом (см., например, [51—54, 43]). Киральные поля при этом принимают значения не в пространстве R^n , а в некотором нелинейном многообразии M , кривизна которого определяет их взаимодействие. Для таких киральных полей, как главные киральные поля, n -поля, голдстоуновские поля, нелинейные поля Скирма и т.д., многообразие M является либо группой G , либо факторпространством G/H (H — подгруппа группы G). Возможность исследования таких интересных особенностей нелинейных киральных моделей, как асимптотическая свобода, нетривиальная топологическая структура, существование частицеподобных решений и т.д., в значительной степени определяется сложностью и типом нелинейности лагранжиана, которые в свою очередь, зависят от выбора параметризации группового многообразия.

В этом разделе будут приведены лагранжианы нелинейных киральных полей в векторной параметризации унитарных групп, рассмотренной в разд.1. Лагранжианы нелинейных киральных полей строятся на основе использования геометрии группового пространства, аналогичной геометрии римановых пространств и пространства аффинной связности. При этом поля отождествляются с локальными параметрами группы или фактор-пространства, а лагранжианы выражаются через формы Картана соответствующих групп [25—27, 46, 47, 53, 43].

Лагранжианы главных киральных полей (ГПК). Найдем выражения для лагранжианов ГПК, принимающих значения в многообразиях локальных параметров групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$. Эти многообразия сами образуют группы относительно операции $\langle \cdot, \cdot \rangle$, изоморфные рассматриваемым группам. Лагранжианы ГПК могут быть отождествлены с метриками в алгебрах Ли, инвариантными относительно левых и правых сдвигов [43, 53]:

$$\mathcal{L} = -\text{const Tr}\{(\partial_\mu U)U^{-1}(\partial^\mu U)U^{-1}\}. \quad (84)$$

Используя выражения форм Картана, рассчитанные в разд.3 (формулы (54)—(57)), получим лагранжианы ГПК в векторной параметризации.

Для группы $U(2)$ в параметризации (22)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{const} & \left[(1 - \eta_0^2(x) + \eta^2(x))^2 + 4\eta_0^2(x) \right]^{-2} \left\{ \delta_{jj'} + \left(\alpha_{jj'}^{(1)} + \alpha_{j'jk}^{(1)} \right) \eta_k(x) + \right. \\ & + \left(\alpha_{jj'kl}^{(2)} + \alpha_{j'jkl}^{(2)} + \alpha_{ijk}^{(1)} \alpha_{ij'l}^{(1)} \right) \eta_k(x) \eta_l(x) + \\ & + \left(\alpha_{ijk}^{(1)} \alpha_{ij'lm}^{(2)} + \alpha_{ij'k}^{(1)} \alpha_{ijlm}^{(2)} \right) \eta_k(x) \eta_l(x) \eta_m(x) + \\ & \left. + \alpha_{ijkl}^{(2)} \alpha_{ij'mn}^{(2)} \eta_k(x) \eta_l(x) \eta_m(x) \eta_n(x) \right\} \partial_\mu \eta_j(x) \partial^\mu \eta_{j'}(x) \end{aligned} \quad (85)$$

(все индексы принимают значения 0, 1, 2, 3).

Для группы $SU(2)$ в параметризации (23) лагранжиан ГПК имеет крайне простой вид:

$$\mathcal{L} = \text{const} \frac{(\partial \eta(x))^2}{(1 + \eta^2(x))^2}, \quad (86)$$

а в параметризации (32)

$$\mathcal{L} = \text{const} \left[\frac{(\partial n(x))^2}{1 + n^2(x)} - \frac{(n(x) \partial n(x))^2}{(1 + n^2(x))^2} \right]. \quad (87)$$

Лагранжиан ГКП для группы $U(3)$

$$\mathcal{L} = \text{const } F_{ij}(\eta(x)) F_{ij}(\eta(x)) \partial_\mu \eta_j(x) \partial^\mu \eta_j(x), \quad (88)$$

где $F_{ij}(\eta) = F_{ij}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_8)$ определяются формулой (57). Лагранжианом ГКП для группы $SU(3)$ служит уравнение (88) с добавлением соотношения (25) как уравнения связи полей.

Отметим, что в лагранжиане (88) для группы $U(3)$ поле $\eta_0(x)$ взаимодействует с остальными полями $\eta_k(x)$ в отличие, например, от экспоненциальной параметризации, в которой такое взаимодействие отсутствует.

Лагранжианы голдстоуновских полей (ГП). Рассмотрим теперь киральные поля, принимающие значения в фактор-пространстве G/H . Известно, что для системы со спонтанно-нарушенной симметрией, если G является группой симметрии лагранжиана, H — инвариантной подгруппой вакуума, параметры фактор-пространства G/H отождествляются с ГП, соответствующими нарушению $G \rightarrow H$ [27, 46, 47]. Обозначим V_α генераторы подгруппы H , а A_i — генераторы, дополняющие H до группы G . Тогда можно записать формы Картана

$$(dG(Q))G^{-1}(Q) = iQ_n^{(1)}X_n = i(\theta_\alpha V_\alpha + \omega_i A_i), \quad (89)$$

где дифференциальные формы θ_α, ω_i зависят, в общем случае, от v, dv, a, da (v и a — параметры H и G/H). В соответствии с геометрической интерпретацией θ_α, ω_i аналогичны вращениям и трансляциям реперов в римановом пространстве. Для построения лагранжианов ГП рассматриваем только пространство параметров a_i , полагая $v_\alpha = 0$, и определяем лагранжианы ГП как квадраты интервала геодезической линии между точками a_i и $a_i + da_i$ [26, 27, 46, 47]:

$$\mathcal{L} = \text{const } \omega_\mu^i(a, \partial a) \omega^{j\mu}(a, \partial a) C_{ik}^\alpha C_{aj}^k. \quad (90)$$

Найдем лагранжиан голдстоуновских полей, соответствующих нарушению $U(2) \times U(2) \rightarrow U(2)$. Отправляемся от прямого произведения двух независимых элементов группы $U(2)$, параметризованных R^4 -векторами η_i и χ_j , $i, j = 0, 1, 2, 3$ (см. (22)):

$$G = U(\eta) \otimes U(\chi),$$

$$U(\eta) = \frac{1 - i\eta_i \sigma_i}{1 + i\eta_i \sigma_i}, \quad U(\chi) = \frac{1 - i\chi_i \sigma_i}{1 + i\chi_i \sigma_i}. \quad (91)$$

Для малых η, χ имеем

$$G \cong 1_4 - 4i \left[\eta_i \left(\frac{\sigma_i}{2} \otimes 1_2 \right) + \chi_j \left(1_2 \otimes \frac{\sigma_j}{2} \right) \right] = 1_4 - 4i [\eta_i X_i^R + \chi_j X_j^L], \quad (92)$$

где

$$X_i^R = \frac{\sigma_i}{2} \otimes 1_2, \quad X_j^L = 1_2 \otimes \frac{\sigma_j}{2}$$

подчиняются следующим перестановочным соотношениям:

$$[X_i^R, X_k^R] = ia_{ijk} X_k^R, \quad [X_i^L, X_j^L] = ia_{ijk} X_k^L, \quad [X_i^L, X_j^R] = 0, \quad (93)$$

a_{ijk} — структурные постоянные группы $U(2)$, значения которых приведены в (П.2). Из X_i^R, X_j^L составляем комбинации $V_\alpha = X_\alpha^R + X_\alpha^L$, $A_i = X_i^R - X_i^L$, которые подчиняются уже следующим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [V_\alpha, V_\beta] &= ia_{\alpha\beta\gamma} V_\gamma, \quad [V_\alpha, A_j] = ia_{\alpha jk} A_k, \\ [A_i, A_j] &= ia_{ij\alpha} V_\alpha, \quad i, j, k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (94)$$

При этом V_α порождают подгруппу H , а A_i связаны с нарушенными симметриями. Из (92) простым алгебраическим преобразованием можно выразить бесконечно малый элемент G через V_α, A_i :

$$G = 1 - 2i [v_\alpha V_\alpha + a_i A_i], \quad v_\alpha = \eta_\alpha + \chi_\alpha, \quad a_i = \eta_i - \chi_i, \quad (95)$$

где v_α, a_i — параметры подгруппы H и фактор-пространства G/H соответственно.

Выражение форм Картана для группы $G = U(2) \times U(2)$ можно написать в виде

$$\begin{aligned} (dG)G^{-1} &= -4i(\eta_i^{(1)} X_i^R + \chi_k^{(1)} X_k^L), \\ \eta_i^{(1)} &= f_{ij}(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_j, \quad \chi_k^{(1)} = f_{kl}(\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3) d\chi_l, \end{aligned} \quad (96)$$

где $f_{ij}(\eta)$ даны формулой (55). Приводя (96) к виду

$$\begin{aligned} (dG)G^{-1} &= -2i [\theta_\alpha V_\alpha + \omega_i A_i], \\ \theta_\alpha &= \eta_\alpha^{(1)} + \chi_\alpha^{(1)} = f_{\alpha j} d\eta_j + f_{\alpha l}(\chi) d\chi_l, \\ \omega_i &= \eta_i^{(1)} - \chi_i^{(1)} = f_{ij}(\eta) d\eta_j - f_{il}(\chi) d\chi_l \end{aligned} \quad (97)$$

и сужая пространство параметров до пространства a_i (см. ф-лу (95)): $v_\alpha = \eta_\alpha + \chi_\alpha = 0$, $\chi_\alpha = -\eta_\alpha$, $a_i = \eta_i - \chi_i = 2\eta_i$, получим выражение θ_α и ω_i через параметры a_i фактор-пространства $U(2) \times U(2)/U(2)$:

$$\theta_\alpha = [f_{\alpha j}(a) - f_{\alpha j}(-a)]da_j, \quad \omega_i = [f_{ij}(a) + f_{ij}(-a)]da_j. \quad (98)$$

Лагранжиан ГП $\xi_i(x)$, рассматриваемых как параметры фактор-пространства $U(2) \times U(2)/U(2)$, имеет вид

$$\mathcal{L} = \text{const } \omega_\mu^i(\xi, \partial\xi) \omega^{j\mu}(\xi, \partial\xi) C_{ik}^\alpha C_{\alpha j}^k, \quad (i, j, k, \alpha = 0, 1, 2, 3), \quad (99)$$

где $C_{ik}^\alpha = a_{ik\alpha}$ — структурные постоянные группы $U(2)$ (см. (П.2)),

$$\omega_\mu^i(\xi, \partial\xi) = [f_{ij}(\xi) + f_{ij}(-\xi)]\partial_\mu \xi_j. \quad (100)$$

Из (П.2) следует, что отличны от нуля только компоненты $C_{ak}^\alpha C_{ab}^k$ при $i = a, j = b(a, b = 1, 2, 3)$: $C_{ak}^\alpha C_{ab}^k = \delta_{ab}$, следовательно, из (55), (99), (100) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{const } \omega_\mu^a(\xi(x), \partial\xi(x)) \omega^{a\mu}(\xi(x), \partial\xi(x)) = \\ \mathcal{L} &= \text{const} [(1 - \xi_0^2(x) + \xi^2(x))^2 + 4\xi_0^2(x)]^{-2} \{ \delta_{aj} \delta_{aj'} + \\ &+ (\delta_{aj} \alpha_{ajkl}^{(2)} + \delta_{aj} \alpha_{aj'kl}^{(2)}) \xi_k(x) \xi_l(x) + \\ &+ \alpha_{ajkl}^{(2)} \alpha_{aj'mn}^{(2)} \xi_k(x) \xi_l(x) \xi_m(x) \xi_n(x) \} \partial_\mu \xi_j(x) \partial^\mu \xi_{j'}(x), \\ &i, j, k = 0, 1, 2, 3; \quad a = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (101)$$

Формула (101) дает лагранжиан ГП, соответствующих нарушению $U(2) \times U(2) \rightarrow U(2)$. Из (101) можно получить следующий лагранжиан ГП, соответствующих нарушению $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{const} (1 + \xi^2(x))^{-4} \{ (\partial \xi(x))^2 + 4(\xi(x) \partial \xi(x))^2 - \\ &- 2\xi^2(x) (\partial \xi(x))^2 + \xi^4(x) (\partial \xi(x))^2 \}. \end{aligned} \quad (102)$$

Отметим, что заменой полевых переменных

$$\pi(x) = 2 \frac{\xi(x)}{1 - \xi^2(x)} \quad (103)$$

(см. формулу (34)) приводим лагранжиан (102) к простому виду:

$$\mathcal{L} = \text{const} \frac{(\partial \pi(x))^2}{(1 + \pi^2(x))^2}, \quad (104)$$

который является лагранжианом ГП $\xi(x)$ в параметризации $SU(2)$ формулой (32). Далее, считая компоненты поля $\pi(x)$ стереографическими координатами сферы S^3 в пространстве R^4 и переходя к координатам $\varphi^a(x)$ пространства R^4 ($a = 1, 2, 3, 4$), лагранжиан (104) можно привести к виду:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^a(x) \partial^\mu \varphi^a(x), \quad (105)$$

где $\varphi^a(x)$ удовлетворяет связи $\varphi^a(x) \varphi^a(x) = 1$ (н-поле). Этот лагранжиан, как известно, описывает основные (вакуумные) состояния σ -модели [55].

Аналогичным, но более громоздким вычислением получаем лагранжиан ГП, соответствующих нарушению $U(3) \times U(3) \rightarrow U(3)$, используя параметризацию $U(3)$ формулой (24):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{const } s^{-2}(\xi(x)) \{ & \partial_\mu \xi_a(x) \partial^\mu \xi_a(x) + [\gamma_{jj'kl}^{(2)} \xi_k(x) \xi_l(x) + \\ & + \gamma_{jj'klmn}^{(4)} \xi_k(x) \xi_l(x) \xi_m(x) \xi_n(x) + \\ & + \gamma_{jj'klmnpq}^{(6)} \xi_k(x) \xi_l(x) \xi_m(x) \xi_n(x) \xi_p(x) \xi_q(x) + \\ & + \gamma_{jj'klmnpqrs}^{(8)} \xi_k(x) \xi_l(x) \xi_m(x) \xi_n(x) \xi_p(x) \xi_q(x) \xi_r(x) \xi_s(x)] \times \\ & \times \partial_\mu \xi_j(x) \partial^\mu \xi_j(x) \}, \end{aligned} \quad (106)$$

где

$$\begin{aligned} s(x) = & (1 - 3\xi_0^2(x) + \xi_i(x) \xi_i(x))^2 - (i\sqrt{6} \xi_0(x) - i\xi_0^3(x) + \\ & + i\sqrt{6} \xi_0(x) \xi_i(x) + k_{i_1 i_2 i_3} \xi_{i_1}(x) \xi_{i_2}(x) \xi_{i_3}(x))^2. \end{aligned}$$

Здесь $\xi_i(x) = (\xi_0(x), \xi_a(x))$, $a = 1, 2, \dots, 8$; постоянные коэффициенты γ даны формулой (П.14). Лагранжианом ГП, соответствующих нарушению $SU(3) \times SU(3) \rightarrow SU(3)$, является лагранжиан (106) с добавлением уравнения связи (25).

Наконец, в качестве примера простейшего случая приведем также лагранжиан ГП, соответствующих нарушению $SU(2) \rightarrow U(1)$. Используя параметризацию группы $SU(2)$ формулой (32), получаем

$$\mathcal{L} = \text{const} \frac{(\partial \xi(x))^2}{(1 + \xi^2(x))^2}, \quad \xi(x) = \{\xi_i(x)\}, \quad i = 1, 2. \quad (107)$$

Стереографическим отображением этот лагранжиан приводится к лагранжиану n -поля $n(x) \in S^2$ (обычной сфере):

$$\mathcal{L} = 1/2(\partial n(x))^2, \quad n^2 = \{n_a\}, \quad (a = 1, 2, 3). \quad (108)$$

Отметим, что явный вид лагранжиана ГП, соответствующих нарушению $SU(2) \times SU(2)$ до $SU(2)$, в экспоненциальной параметризации обладает, в отличие от (102) и (104), неполиномиальной нелинейностью синуса [27]. Выражения же форм Картана, лагранжиана ГП в случае $SU(3) \times SU(3)/SU(3)$ в этом подходе имеют гораздо более сложный вид, чем в случае $SU(2)$, и в работах [26, 27, 46, 47] не были выписаны.

5. ВЕКТОР-ПАРАМЕТРЫ КАК НЕЗАВИСИМЫЕ ПОЛЕВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ СКИРМИОНОВ

Выше показано, что с использованием векторной параметризации могут быть получены киральные лагранжианы, обладающие новым типом нелинейности (отношение конечных полиномов). В частности, в случае группы $SU(2)$ они имеют крайне простой вид (см. ф-лу (86)), что облегчает рассмотрение их свойств. В этом разделе рассмотрена $SU(2)$ -модель Скирма [54, 56] (см. также [57—60]) на основе использования лагранжиана модели, полученного в векторной параметризации группы $SU(2)$. Известно, что модель Скирма представляет эффективную нелинейную полевую теорию, которая довольно проста и дает качественное описание низкоэнергетических свойств барионов и их взаимодействий. В этой модели барионы отождествляются с коллективными квантовыми возбуждениями солитонных решений полевого уравнения. Лагранжиан модели составляется из лагранжиана нелинейной σ -модели и члена, введенного Скирмом для стабилизации солитонов [54, 56]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} = \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger]^2, \quad (109)$$

где U — $SU(2)$ -матрица, $F_\pi = 186$ МэВ — постоянная распада пионов, e — безразмерный параметр. Обычно лагранжиан (109) рассматривается либо в матричном виде, либо в следующей параметризации: матрица U

параметризуется четырьмя параметрами (ϕ_0, ϕ) , которые не независимы, а подчиняются нелинейной связи

$$\phi_0^2 + \phi^2 = c^2, \quad (110)$$

(c — постоянная). Конечно, лагранжиан с такой дополнительной связью неудобен для рассмотрения. Можно вместо четырех полей (ϕ_0, ϕ) использовать три независимые компоненты поля $\varphi = \varphi \hat{\varphi}$ ($\varphi = |\varphi|$, $\hat{\varphi} = \varphi/\varphi$):

$$\phi_0 = \cos \varphi, \quad \phi = \hat{\varphi} \sin \varphi, \quad (111)$$

однако соответствующий лагранжиан не имеет простого вида (см., например, [61]).

В параметризации (23) группы $SU(2)$ первый член (109) принимает вид (86). А для коммутаторов во втором члене можно записать:

$$[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger] = -4F_{\mu a}F_{\nu a'}[\sigma_a, \sigma_{a'}], \quad (112)$$

где обозначено

$$F_{\mu a} = f_{ab}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \partial_\mu \eta_b, \quad (113)$$

(f_{ab} задаются формулой (56)). Используя алгебру σ -матриц, перепишем соотношение (112) в виде

$$[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger] = -8i\epsilon_{aa'c} F_{\mu a} F_{\nu a'} \sigma_c. \quad (114)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[(\partial_\mu U)U^\dagger, (\partial_\nu U)U^\dagger]^2 = \\ & = -64\epsilon_{aa'c}\epsilon_{dd'e}F_{\mu a}F_{\nu a'}F_d^\mu F_{d'}^\nu \text{Tr}(\sigma_c\sigma_e) = -128[(F_{\mu a})^2 - F_{\mu a}F_a^\nu F_{\nu a'}F_a^\mu] = \\ & = -128 \frac{(\partial_\mu \eta \cdot \partial^\mu \eta)^2 - (\partial_\mu \eta \cdot \partial^\nu \eta)(\partial_\nu \eta \cdot \partial^\mu \eta)}{(1 + \eta^2)^4} = -128 \frac{[\partial_\mu \eta \wedge \partial_\nu \eta]^2}{(1 + \eta^2)^4}. \end{aligned} \quad (115)$$

Наконец, получаем лагранжиан $SU(2)$ -модели Скирма в виде [62]:

$$\mathcal{L} = \frac{F_\pi^2}{2} \frac{(\partial_\mu \eta \cdot \partial^\mu \eta)}{(1 + \eta^2)^2} - \frac{4}{e^2} \frac{[\partial_\mu \eta \wedge \partial_\nu \eta]^2}{(1 + \eta^2)^4} \quad (116)$$

и соответствующее выражение плотности статической энергии

$$\mathcal{E} = \frac{F_\pi^2}{2} \frac{(\nabla_i \boldsymbol{\eta})^2}{(1 + \boldsymbol{\eta}^2)^4} + \frac{4}{e^2} \frac{[\nabla_i \boldsymbol{\eta} \wedge \nabla_j \boldsymbol{\eta}]^2}{(1 + \boldsymbol{\eta}^2)^4}. \quad (117)$$

Отметим, что, в отличие от обычного подхода [54,56—61], лагранжиан (116) содержит только три независимые полевые компоненты η_a ($a = 1, 2, 3$), которые можно отождествить с триплетом пионных полей, и имеет простой вид. Лагранжиан (116) дает всю информацию о взаимодействии между полями и не требует дополнительного уравнения связи. Выражение для плотности статической энергии (117) является явно инвариантным относительно вращений в изопространстве. Благодаря этим особенностям лагранжиан модели Скирма (116) весьма удобен для рассмотрения сферически-симметричного решения и полевой конфигурации, описывающей вращающиеся скирмионы.

Вектор-параметры $SO(3)$ как коллективные координаты при квантовании вращающихся скирмионов. Для лагранжиана (116) солитонное решение находится с помощью анзаца:

$$\eta_0(\mathbf{x}) = \operatorname{tg}(\omega(r)/2) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (118)$$

и граничных условий $\omega(0) = \pi$, $\omega(\infty) = 0$. Тогда в сферических координатах для компонентов полей и градиентов имеем:

$$(\eta_0)_r = \operatorname{tg}(\omega(r)/2), \quad (\eta_0)_\theta = (\eta_0)_\varphi = 0,$$

$$(\nabla_r \eta_0)_r = \frac{1}{2\cos^2(\omega(r)/2)} \left(\frac{d\omega}{dr} \right), \quad (\nabla_\theta \eta_0)_\theta = (\nabla_\varphi \eta_0)_\varphi = \frac{1}{r} \operatorname{tg}(\omega(r)/2). \quad (119)$$

Подставляя (119) в (117), получаем известное сферически-симметричное солитонное решение [54,56], минимизирующее статическую энергию.

Рассмотрим схему квантования вращательных возбуждений солитонного решения $\eta_0(\mathbf{x})$. Из (117) видно, что статическая энергия является инвариантной при вращениях вектора η_0 в трехмерном изопространстве, поэтому согласно общей схеме квазиклассического метода квантования [63,64] параметры этих изовращений играют роль коллективных координат при квантовании вращательных возбуждений солитонов. Как известно (разд.1), для $SO(3)$ существует удобная параметризация: матрица $O \in SO(3)$ параметризуется вещественным трехмерным вектором $\mathbf{q}$. Выберем в качестве коллективных координат солитона компоненты q_i этого вектор-параметра $\mathbf{q}$.

Рассматривая зависящие от времени полевые конфигурации вида [65,66]:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = O(q(t)) \eta_0(\mathbf{x}) \quad (120)$$

и подставляя (120) в лагранжиан (116), найдем лагранжиан, содержащий коллективные координаты $q_i(t)$:

$$\begin{aligned} L = & -M + \frac{F^2}{2} \int d^3\mathbf{x} \frac{(\eta_0)_r(\eta_0)_r}{(1 + \eta_0^2)^2} [(\partial_t \tilde{O})(\partial_t O) l_{rr} + \\ & + \frac{8}{e^2} \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{(1 + \eta_0^2)^4} \{(\nabla_i \eta_0)^2 (\eta_0)_r (\eta_0)_r [(\partial_t \tilde{O})(\partial_t O) l_{rr} - \\ & - (\nabla_r \eta_0)_r (\nabla_r \eta_0)_r (\eta_0)_r (\eta_0)_r [(\tilde{O} \partial_t O)_{rr}]^2 - \\ & - (\nabla_\theta \eta_0)_\theta (\nabla_\theta \eta_0)_\theta (\eta_0)_r (\eta_0)_r [(\tilde{O} \partial_t O)_{\theta r}]^2 - \\ & - (\nabla_\varphi \eta_0)_\varphi (\nabla_\varphi \eta_0)_\varphi (\eta_0)_r (\eta_0)_r [(\tilde{O} \partial_t O)_{\varphi r}]^2\}, \end{aligned} \quad (121)$$

где $M = \mathfrak{E}[\eta_0(\mathbf{x})]$ — масса солитона, индексы r, θ, φ указывают на компоненты векторов и матриц в системе сферических координат.

В векторной параметризации $SO(3)$ выражение $\tilde{O} \partial_t O$ имеет следующий вид [8]:

$$\tilde{O} \partial_t O = g_a \tau_a, \quad g_a = g_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -2i \frac{\delta_{ab} - \varepsilon_{abc} q_c}{1 + \mathbf{q}^2} \dot{q}_b, \quad (122)$$

где $a, b = 1, 2, 3$; τ_a — 3×3 -матрицы, элементы которых в декартовых координатах $(\tau_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}$. Легко видеть, что в сферических координатах $(\tau_a)_{rr} = 0$ и

$$(\tilde{O} \partial_t O)_{rr} = g_a (\tau_a)_{rr} = 0. \quad (123)$$

Подставляя компоненты полей и градиентов (119) в (121) и учитывая (123), получаем для последних членов (121):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \text{tg}^4(\omega(r)/2) [(\tilde{O} \partial_t O)_{rr} (\tilde{O} \partial_t O)_{rr} + (\tilde{O} \partial_t O)_{r\theta} (\tilde{O} \partial_t O)_{\theta r} + \\ & + (\tilde{O} \partial_t O)_{r\varphi} (\tilde{O} \partial_t O)_{\varphi r}] = \frac{1}{r^2} \text{tg}^4(\omega(r)/2) [\tilde{O}(\partial_t O) \tilde{O}(\partial_t O) l_{rr}], \end{aligned} \quad (124)$$

и для всего лагранжиана:

$$\begin{aligned}
 L = -M + & \left\{ \frac{F^2}{2} \int r^2 dr \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)\right)^2} + \right. \\
 & + \frac{8}{e^2} \int r^2 dr \frac{\left[\frac{1}{4\cos^4(\omega(r)/2)} \cdot \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 + \frac{2}{r^2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right) \right]}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)\right)^4} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right) \Bigg\} \times \\
 & \times \int d\Omega [(\partial_t \tilde{O})(\partial_t O)]_{rr} + \left\{ \frac{8}{e^2} \int r^2 dr \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^4\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\omega(r)}{2}\right)\right)^4} \right\} \times \\
 & \times \int d\Omega [\tilde{O}(\partial_t O) \tilde{O}(\partial_t O)]_{rr}. \quad (125)
 \end{aligned}$$

Для элементов любой матрицы N в сферических координатах:

$$\begin{aligned}
 \int d\Omega N_{rr} &= \int d\Omega R_{ri} N_{ik} R_{kr}^{-1} = N_{ik} \int d\Omega R_{ri} R_{kr}^{-1} = \\
 &= N_{ik} \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} = \frac{4\pi}{3} \operatorname{Tr} N, \quad (126)
 \end{aligned}$$

где N_{ik} — элементы этой матрицы в декартовых координатах, R — матрица преобразования координат.

Легко убедиться, что

$$\operatorname{Tr}(\partial \tilde{O} \partial_t O) = -\operatorname{Tr}[\tilde{O}(\partial_t O) \tilde{O}(\partial_t O)] = -g_a g_b \operatorname{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = -2g^2,$$

поэтому получаем окончательно

$$L = -M - \frac{8\pi}{3} \lambda g^2, \quad (127)$$

где $g = \{g_a\}$, $a = 1, 2, 3$, определяются формулой (122) и λ — постоянная:

$$\lambda = \int_0^\infty dr r^2 \left\{ \frac{F^2}{8} \sin^2 \omega(r) + \frac{1}{2e^2} \left[\left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2 + \frac{\sin^2 \omega(r)}{r^2} \right] \sin^2 \omega(r) \right\}. \quad (128)$$

Из соотношения (122) имеем

$$g^2 = -4 \alpha_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \alpha_{ij} = \frac{\delta_{ij}(1 + \mathbf{q}^2) - q_i q_j}{(1 + \mathbf{q}^2)^2}, \quad (129)$$

следовательно,

$$L = -M + \chi \alpha_{ij}(\mathbf{q}) q_i q_j, \quad \chi = \frac{32\pi}{3} \lambda. \quad (130)$$

Вводя обобщенный импульс, сопряженный координатам q_i ,

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 2\chi \alpha_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_j, \quad (131)$$

мы можем представить гамильтониан, содержащий коллективные координаты, в виде

$$H = \pi_i \dot{q}_i - L = M + \chi \alpha_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = M + \frac{1}{4\lambda} (\alpha^{-1})_{kl} \pi_k \pi_l, \quad (132)$$

где $(\alpha^{-1})_{kl}$ — элементы матрицы, обратной $\alpha = (\alpha_{ij})$. Нетрудно найти, что

$$(\alpha^{-1})_{kl} = (1 + \mathbf{q}^2)(\delta_{kl} + q_k q_l),$$

и, следовательно,

$$H = M + \frac{1}{4\chi} (1 + \mathbf{q}^2)(\delta_{kl} + q_k q_l) \pi_k \pi_l. \quad (133)$$

Применяя правило канонического квантования $\pi_k \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial q_k}$, получаем квантованный гамильтониан системы:

$$H_{qu} = M - \frac{1}{4\chi} (1 + \mathbf{q}^2)(\delta_{kl} + q_k q_l) \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_l}. \quad (134)$$

Второй член правой части (134) пропорционален квадрату инфинитезимального вектор-оператора группы вращений [5], поэтому имеем [65,66]:

$$H_{qu} = M - \frac{1}{\chi} \mathbf{I}^2, \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{4} (1 + \mathbf{q}^2)(\delta_{kl} + q_k q_l) \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_l}. \quad (135)$$

Для сферически-симметричного анзаца (118) и полевой конфигурации (120) вращающегося скирмиона легко видеть, что операторы изотопических (I_i) и пространственных (J_i) вращений связаны между собой ортогональным преобразованием, а, следовательно, $\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2$. Мы пришли

к задаче о шаровом волчке. Энергетический спектр вращающихся возбуждений:

$$E_l = M + \frac{1}{\chi} l(l+1), \quad (136)$$

где l принимает целые или полуцелые значения. Выбирая возможность квантования по полуцелым моментам, мы можем отождествить вращательные возбуждения скирмиона с нуклонами ($l = 1/2$) и Δ -резонансами ($l = 3/2$). Волновыми функциями с определенными спином и изоспином служат матричные элементы $T_{mm'}^l(\mathbf{q})$ представлений группы вращений [5]. Например, можно выбрать в качестве волновых функций нуклонов следующие матричные элементы $T_{mm'}^{1/2}(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} |p\uparrow\rangle &= \frac{1+\alpha}{(1+\alpha^2+2|\beta|^2)^{1/2}}, & |p\downarrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}\beta}{(1+\alpha^2+2|\beta|^2)^{1/2}}, \\ |n\uparrow\rangle &= \frac{\sqrt{2}\beta}{(1+\alpha^2+2|\beta|^2)^{1/2}}, & |n\downarrow\rangle &= \frac{1-\alpha}{(1+\alpha^2+2|\beta|^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (137)$$

где α, β — компоненты вектора $\mathbf{q}$ в аксиальном базисе [5]:

$$\mathbf{q} = \alpha \mathbf{q}_0 + \beta \mathbf{e} + \beta^* \mathbf{e}^*,$$

(α — вещественный, а β — комплексный).

Отметим, что проблема квантования вращательных степеней свободы скирмионов рассматривалась в работе [56] (см. также [57—59]). В нашем подходе получено значительное упрощение при рассмотрении конфигурации (120) вращающихся скирмионов: вращение скирмионов представляется изовращением вектор-поля η_0 , знаменатели в лагранжиане (116) не изменяются при изовращении (120), и, следовательно, легко отделять части, содержащие матрицу вращений O . В этом плане нетрудно провести выкладки и в случае модифицированного варианта модели Скирма, в котором вводится стабилизирующий член шестого порядка [67,68] (см. ниже). Применение векторной параметризации $SO(3)$ к исследованию вращательных скирмионов позволяет использовать детально разработанную теорию группы вращений и ее представлений в этой параметризации [5].

Сохраняющиеся топологический и нетеровский токи модели. Выражение плотности топологического тока [54,56]:

$$B^\mu = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \text{Tr}[(U^\dagger \partial_\nu U)(U^\dagger \partial_\alpha U)(U^\dagger \partial_\beta U)], \quad (138)$$

в полевых переменных $\eta_a(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} B^\mu &= \frac{(-2i)^3}{24\pi^2} \cdot \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\nu a} F_{\alpha b} F_{\beta c} \text{Tr}(\sigma_a \sigma_b \sigma_c) = \\ &= -\frac{2}{3\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{abc} F_{\nu a} F_{\alpha b} F_{\beta c}, \end{aligned} \quad (139)$$

где $F_{\mu a}$ определяются формулой (113).

В частности, плотность топологического заряда

$$B_0 = -\frac{2}{3\pi^2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} F_{ia} F_{jb} F_{kc} = -\frac{4}{\pi^2} \det F, \quad (140)$$

($i, j, k, a, b, c = 1, 2, 3$), где F — 3×3 -матрица, составленная из элементов F_{ia} . Подставляя компоненты полей и градиентов (119) в выражении F_{ia} , получаем

$$\det F = -\frac{\sin^2 \omega}{8r^2} \frac{d\omega}{dr}$$

и

$$B_0 = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2 \omega}{r^2} \frac{d\omega}{dr} \quad (141)$$

— соотношение, которое совпадает с известным результатом [54, 56].

Нетеровские токи можно получить из лагранжиана (116) с помощью варьирования вектор-поля $\eta(x)$. Рассмотрим, как пример, изоспиновый ток. При инфинитезимальном вращении в изопространстве вектор-поле $\eta(x)$ преобразуется следующим образом:

$$\eta' = O(\xi) \eta = \eta + \delta_\xi \eta, \quad (142)$$

где ξ — вектор-параметр инфинитезимального вращения. Используя выражение матрицы вращения в векторной параметризации [5], имеем

$$[O(\xi)]_{ab} = \delta_{ab} - 2i \xi_c (\tau^c)_{ab},$$

и, следовательно,

$$(\delta_\xi \eta)_a = -2i \xi(\tau)_{ab} \eta_b. \quad (143)$$

Соответствующий нетеровский ток

$$j_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \eta_a)} \delta \eta_a$$

принимает вид

$$j_{\mu}^c = -2i(\tau^c)_{ab} \left\{ F_{\pi}^2 \frac{(\partial_{\mu} \eta_a) \eta_b}{(1 + \eta^2)^2} - \frac{16}{e^2} \frac{[(\partial \eta)^2 (\partial_{\mu} \eta_a) \eta_b - (\partial_{\mu} \eta \cdot \partial_{\nu} \eta)(\partial^{\nu} \eta_a) \eta_b]}{(1 + \eta^2)^4} \right\}. \quad (144)$$

Подставляя полевые конфигурации (120) в (144), получим выражение тока через коллективные координаты. В частности, для плотности изоспинового заряда имеем

$$j_0^c = -2i \left\{ F_{\pi}^2 \frac{(\eta_0)_r (\eta_0)_r}{(1 + \eta_0^2)^2} (\partial_t \tilde{O} \tau^c O)_{rr} + \frac{16}{e^2} \frac{(\nabla_i \eta_0)^2 (\eta_0)_r (\eta_0)_r}{(1 + \eta_0^2)^4} (\partial_t \tilde{O} \tau^c O)_{rr} - \right. \\ \left. - \frac{16}{e^2} \frac{(\nabla_i \eta_0)_i (\nabla_i \eta_0)_i (\eta_0)_r (\eta_0)_r}{(1 + \eta_0^2)^4} (\tilde{O} \tau^c O)_{ir} (\tilde{O} \partial_t O)_{ir} \right\}, \quad (i = r, \theta, \varphi). \quad (145)$$

Угловой интеграл j_0^c имеет простой вид:

$$\int j_0^c d\Omega = -i \frac{16\pi \lambda'}{3} \text{Tr}(O \partial_t \tilde{O} \tau^c), \quad (146)$$

где

$$\lambda' = \frac{F_{\pi}^2}{8} \sin^2 \omega(r) + \frac{1}{2e^2} \left[\left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \omega(r)}{r^2} \right] \sin^2 \omega(r).$$

Следы в (146) можно записать явно через коллективные координаты q_i :

$$\text{Tr}[O(\partial_t \tilde{O}) \tau_c] = g_a(-q) \text{Tr}(\tau_a \tau_c) = 2g_c(-q) \quad (147)$$

(g_c задаются формулой (122)), поэтому выражение углового интеграла j_0^c через коллективные координаты принимает вид [66]:

$$\int d\Omega j_0^c = \frac{64\pi}{3} \lambda' \frac{\dot{q} - [q \wedge \dot{q}]}{1 + q^2}. \quad (148)$$

Из этого выражения и волновых функций типа (137) можно вычислить физические средние в соответствующих адронных состояниях.

Модифицированный вариант модели Скирма со стабилизирующим членом шестого порядка. Известно, что в лагранжиан (116) для стабилизации солитонов, кроме члена четвертого порядка $\mathcal{L}^4$, можно ввести еще член шестого порядка [67, 68]:

$$\mathcal{L}^{(6)} = (1/2) \varepsilon_6^2 B_\mu B^\mu, \quad (149)$$

где B_μ — барионный ток (139). Этот член, как и член четвертого порядка, содержит только производные первого порядка, максимально две временные производные и удовлетворяет требованиям симметрии. Он может быть интерпретирован как проявление эффектов векторных мезонов в пределе бесконечности масс и констант связи векторных мезонов [69—71]. Тогда параметр ε_6 связан с массой ω -мезона m_ω и ω -барионной константой связи ($\varepsilon_6 = g_\omega/m_\omega$).

В параметризации (23) группы $SU(2)$ $\mathcal{L}^{(6)}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(6)} = & -(4\varepsilon_6^2/3\pi^4)(1 + \eta^2)^{-6} \times \\ & \times \{(\partial\eta)^6 - 3(\partial\eta)^2(\partial_\alpha\eta\partial^\beta\eta)(\partial_\beta\eta\partial^\alpha\eta) + \\ & + 2(\partial_\nu\eta\partial^\beta\eta)(\partial_\beta\eta\partial^\alpha\eta)(\partial_\alpha\eta\partial^\nu\eta)\}. \end{aligned} \quad (150)$$

$\mathcal{L}^{(6)}$ вносит в плотность статической энергии следующую добавку:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(6)} = & -(4\varepsilon_6^2/3\pi^4)(1 + \eta^2)^{-6} \times \\ & \times \{(\nabla_i\eta\nabla_i\eta)^3 - 3(\nabla_i\eta\nabla_i\eta)(\nabla_j\eta\nabla_k\eta)^2 + \\ & + 2(\nabla_i\eta\nabla_j\eta)(\nabla_j\eta\nabla_k\eta)(\nabla_k\eta\nabla_i\eta)\}. \end{aligned} \quad (151)$$

Полученное с помощью анзаца (118) решение, минимизирующее $E = E^{(2)} + E^{(4)} + E^{(6)}$ и удовлетворяющее граничным условиям $\omega(0) = \pi$, $\omega(\infty) = 0$, обладает теми же асимптотическими свойствами, что и в случае стандартной модели Скирма. Подставляя полевую конфигурацию (120) в $L^{(6)}$, получаем аналогичное (121) выражение:

$$\begin{aligned} L^{(6)} = & -M^{(6)} + (4\varepsilon_6^2/3\pi^4) \int d^3x \frac{1}{(1 + \eta_0^2)^6} \times \\ & \times \{[(\nabla_i\eta_0\nabla_i\eta_0)^3 - (\nabla_i\eta_0\nabla_j\eta_0)(\nabla_i\eta_0\nabla_j\eta_0)](\eta_0)_r(\eta_0)_r[(\partial_t\tilde{O})(\partial_t O)]_{rr} + \\ & + 2[(\nabla_i\eta_0\nabla_j\eta_0)(\nabla_i\eta_0)_k(\nabla_j\eta_0)_l - (\nabla_i\eta_0\nabla_i\eta_0)(\nabla_j\eta_0)_k(\nabla_j\eta_0)_l] \times \\ & \times (\eta_0)_r(\eta_0)_r[\tilde{O}\partial_t O]_{kr}[\tilde{O}\partial_t O]_{lr}\}, \quad k, l = r, \varphi, \theta, \end{aligned} \quad (152)$$

которое приводит к следующей добавке $\lambda^{(6)}$ к постоянной λ (128):

$$\lambda^{(6)} = (\epsilon_6^2/8\pi^4) \int dr \sin^4 \omega(r) (d\omega/dr)^2. \quad (153)$$

Квантовый гамильтониан вращательных скирмионов по-прежнему сохраняет вид (135), но со следующим добавлением к постоянной χ , определяющей момент инерции скирмионов:

$$\chi^{(6)} = (4\epsilon_6^2/3\pi^3) \int dr \sin^4 \omega(r) (d\omega/dr)^2. \quad (154)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эффективность использования теоретико-групповых методов в различных задачах теоретической физики зачастую существенно зависит от адекватного выбора параметризации соответствующей группы симметрии, выбора координат на нелинейном групповом многообразии. При этом, хотя окончательные физические результаты не должны зависеть от этого выбора, те или иные параметризации могут отражать физику задачи, существенно прояснять и упрощать расчеты.

Наличие явного и простого вида закона композиции параметров, свойства естественности и линейности, которые присущи векторной параметризации, не является тривиальным. Использование этих свойств позволяет провести исследования групп только на уровне параметров, не обращаясь к конкретному матричному виду преобразований групп или их представлений. В обзоре развит метод расчета форм Картана на основе использования закона композиции параметров. Метод применим в любом случае, когда известна параметризация, удовлетворяющая упомянутым свойствам. С помощью этого метода рассчитаны явные выражения форм Картана для групп пространственно-временных, внутренних симметрий и суперсимметрии. Отметим, что в литературе вычисление форм Картана обычно сводится к решению структурных уравнений Картана — Мауэра и является гораздо более сложной процедурой.

Изложенный простой метод расчета форм Картана открывает возможность использования векторной параметризации для решения проблем, связанных с локальными преобразованиями групп. Он позволяет, в частности, сформулировать калибровочные теории групп пространственно-временных, внутренних симметрий и суперсимметрии в конечном (а не только инфинитезимальном) подходе. Полученный явный вид конечных калибровочных преобразований может быть удобен, например, в исследовании проблемы квантования калибровочных теорий.

Вектор-параметры унитарных групп играют роль полевых переменных в теории нелинейных киральных полей. Найденные лагранжианы ГКП и ГП в векторной параметризации обладают новым типом нелинейности (отношение конечных полиномов). Подчеркнем достоинства векторной параметризации для группы $SU(2)$: в этой параметризации лагранжианы нелинейных киральных полей имеют простой вид и содержат три независимые полевые переменные, составляющие трехмерный вектор; вся информация о взаимодействии содержится в лагранжиане без использования дополнительного уравнения связи. Для групп $U(3)$ и $SU(3)$, ввиду сложности их структур, киральные лагранжианы имеют более сложный вид, однако здесь их выражения выписаны явно. Из этих выражений можно получить приближенные лагранжианы, представляющие интерес для феноменологии физики частиц. Напомним, что в экспоненциальной параметризации формы Картана и киральные лагранжианы для группы $SU(2)$ обладают нелинейностью синуса (см., например, [26,27]). Их выражения для групп $U(3)$ и $SU(3)$ в этой параметризации, ввиду сложности, не были выписаны.

Использование векторной параметризации при исследовании свойств $SU(2)$ -модели Скирма позволяет резко упростить выражения и выкладки. В векторной параметризации группы $SU(2)$ лагранжиан модели содержит три независимые полевые переменные, которые можно отождествить с триплетом пионов. Выражение для лагранжиана имеет вид отношения полиномов, знаменатели которых зависят только от квадрата вектор-поля. В силу этого знаменатели не изменяются при вращении вектор-поля в изопространстве, и при подстановке вращательных конфигураций в лагранжиане легко отделить те части, которые зависят от элементов матрицы вращений. Известно, что векторная параметризация группы $SO(3)$ весьма удобна для рассмотрения конечных вращений, поэтому естественно выбрать в качестве коллективных координат скирмионов компоненты вектор-параметра $SO(3)$. Выражения сохраняющихся нетеровских токов имеют компактный вид вследствие использования этих коллективных координат, квантовый гамильтониан вида шарового волчка вращательных возбуждений (в рамках твердых вращений) получается в рамках векторного исчисления.

Авторы глубоко признательны академику АНБ Ф.И.Федорову, основоположнику векторной параметризации, за интерес и поддержку этой работы, а также А.А.Богушу, Л.М.Томильчику, Л.Ф.Бабичеву, А.Б.Березину и другим сотрудникам лаборатории теоретической физики и физики высоких энергий Института физики АНБ за обсуждения результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коммутаторы и антикоммутаторы матриц $\sigma_i = (\sigma_0, \sigma_a)$, где $\sigma_0 = I$; $\sigma_{1,2,3}$ — матрицы Паули, имеют вид

$$[\sigma_i, \sigma_j]_- = 2ia_{ijk} \sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\}_+ = 2s_{ijk} \sigma_k, \quad i, j, k = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{П.1})$$

где a_{ijk}, s_{ijk} , соответственно, антисимметричны и симметричны по всем индексам. Отличны от нуля следующие компоненты a_{ijk}, s_{ijk} :

$$a_{abc} = \varepsilon_{abc}, \quad (\text{П.2})$$

$$s_{000} = 1, \quad s_{0ab} = \delta_{ab} \quad (a, b, c = 1, 2, 3). \quad (\text{П.3})$$

Обозначая

$$h_{ijk} = a_{ijk} - is_{ijk}, \quad i, j, k = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{П.4})$$

мы имеем для коэффициентов $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}$ в формуле (29):

$$\lambda_{ijk}^{(1)} = 2(h_{kij} - h_{ikj}),$$

$$\lambda_{ijkl}^{(2)} = 4\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} + 2i \delta_{0l} (h_{kij} - h_{ikj}) + 4h_{ikm} h_{mlj} - h_{klp} h_{pij} - h_{ikp} h_{plj},$$

$$\lambda_{ijklm}^{(3)} = -4\delta_{0l} \delta_{0m} (h_{kij} + h_{ikj}) + 2i \delta_{0m} (h_{klp} h_{pij} - h_{ikp} h_{plj}) + \\ + 2(h_{kip} h_{plq} h_{qmj} + h_{klp} h_{piq} h_{qmj}),$$

$$\lambda_{ijklmn}^{(4)} = 4\delta_{0m} \delta_{0n} h_{ikp} h_{plj} + 2i \delta_{0n} h_{kip} h_{plq} h_{qmj} - \\ - 2i \delta_{0n} h_{klp} h_{piq} h_{qmj} + h_{klp} h_{piq} h_{qmr} h_{rnj} \quad (\text{П.5})$$

и для коэффициентов $\alpha_{ijk}^{(1)}, \alpha_{ijkl}^{(2)}$ в формулах (55), (85), (101):

$$\alpha_{ijk}^{(1)} = h_{jki} - h_{kji},$$

$$\alpha_{ijkl}^{(2)} = 4\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} + 2i(h_{jki} + h_{kji}) \delta_{0l} - h_{kjm} h_{mli}. \quad (\text{П.6})$$

Коммутаторы и антикоммутаторы матриц $\lambda_i = (\lambda_0, \lambda_a)$, ($\lambda_0 = \sqrt{2/3}I$, λ_a ($a = 1, 2, \dots, 8$) — матрицы Гелл-Манна):

$$[\lambda_i, \lambda_j]_- = 2iA_{ijk}\lambda_k, \quad \{\lambda_i, \lambda_j\}_+ = 2S_{ijk}\lambda_k, \quad i, j, k = 0, 1, \dots, 8, \quad (\text{П.7})$$

где A_{ijk} , S_{ijk} , соответственно, антисимметричны и симметричны по всем индексам. Отличны от нуля следующие компоненты A_{ijk} , S_{ijk} :

$$A_{abc} = f_{abc}, \quad S_{000} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad S_{0ab} = \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{ab}, \quad S_{abc} = d_{abc}, \quad (\text{П.8})$$

f_{abc} , d_{abc} определяются соотношением

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c, \quad \{\lambda_a, \lambda_b\}_+ = 2d_{abc}\lambda_c, \quad a, b, c = 1, 2, \dots, 8. \quad (\text{П.9})$$

Значения f_{abc} , d_{abc} даны, например, в [72]. Обозначая

$$k_{ijk} = A_{ijk} - iS_{ijk}, \quad (\text{П.10})$$

мы имеем для коэффициентов $\rho^{(1,1)}$, $\rho^{(1,2)}$, $\rho^{(2,1)}$, $\rho^{(2,2)}$, $\rho^{(2,3)}$, $\rho^{(3,2)}$, $\rho^{(3,3)}$ в формуле (30):

$$\begin{aligned} \rho_{ijk}^{(1,1)} &= k_{jki} - k_{kij}, \\ \rho_{ijkl}^{(1,2)} &= -2\delta_{jk}\delta_{il} - k_{ljm}k_{mki}, \\ \rho_{ijkl}^{(2,1)} &= -2\delta_{kl}\delta_{ij} - k_{jlm}k_{mki}, \\ \rho_{ijklm}^{(2,2)} &= -i\sqrt{6}\delta_{0i}\delta_{jl}\delta_{km} + 2\delta_{km}(k_{lji} - k_{jli}) + \\ &\quad + k_{mjn}k_{nlp}k_{pki} - k_{ljn}k_{nmp}k_{pki}, \\ \rho_{ijklmn}^{(2,3)} &= 2\delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in} + (i\sqrt{6}/2)\delta_{in}k_{jlp}k_{pkq}k_{qm0} + \\ &\quad + 2\delta_{jl}k_{nkp}k_{pmi} - ik_{njp}k_{plq}k_{qkr}k_{rmi}, \\ \rho_{ijklmn}^{(3,2)} &= 2\delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{il} + (i\sqrt{6}/2)\delta_{il}k_{jmp}k_{pkq}k_{qn0} + \\ &\quad + 2\delta_{jm}k_{knp}k_{pli} - ik_{jmp}k_{pkq}k_{qnr}k_{rli}, \\ \rho_{ijklmnp}^{(3,3)} &= 3\delta_{jm}k_{knq}k_{qlr}k_{rp0} + k_{jmq}k_{qkr}k_{knp}k_{rns}k_{slt}k_{tpi} - \\ &\quad - (i\sqrt{6}/3)\delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{lp}\delta_{i0} - 2\delta_{jm}\delta_{kn}k_{pli} - 2\delta_{jm}k_{nkq}k_{qpr}k_{rli} - \\ &\quad - (i\sqrt{6}/2)k_{jmq}k_{qkr}k_{rn0}k_{pli} - k_{pjq}k_{qmr}k_{rks}k_{snt}k_{tli}, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

для коэффициентов $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}, \lambda^{(5)}, \lambda^{(6)}$ в формуле (31):

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ijk}^{(1)} &= 2(k_{kij} - k_{ikj}), \\
 \lambda_{ijkl}^{(2)} &= 2\delta_{ij}\delta_{kl} + 2k_{klm}(k_{mij} + k_{imj}) - 4k_{lin}k_{nkj}, \\
 \lambda_{ijklm}^{(3)} &= 3(\delta_{0k}\delta_{0l}(k_{mij} - k_{imj}) + 3\delta_{kl}(k_{mij} - k_{imj}) - \\
 &\quad - i\sqrt{6}\delta_{0m}k_{kln}(k_{nij} - k_{inj}) - k_{kln}k_{nmp}(k_{pij} - k_{ipj}) - \\
 &\quad - k_{kln}k_{nip}k_{pmj} + 4k_{klp}k_{min}k_{npj}), \\
 \lambda_{ijklmn}^{(4)} &= 9\delta_{ij}\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{0m}\delta_{0n} - 6\delta_{ij}\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{mn} + \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \\
 &\quad + 3i\sqrt{6}\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{0m}(k_{nij} + k_{inj}) - 12\delta_{0k}\delta_{0l}k_{mip}k_{pnj} + \\
 &\quad + i\sqrt{6}\delta_{0k}\delta_{lm}(k_{nij} + k_{inj}) + 2\delta_{mn}k_{klp}(k_{pij} + k_{ipj}) - \\
 &\quad - i\sqrt{6}\delta_{0n}k_{klp}k_{pmq}(k_{qij} + k_{iqj}) + 2i\sqrt{6}\delta_{0n}k_{klp}(k_{piq}k_{qmj} - k_{miq}k_{qpj}) - \\
 &\quad - 4\delta_{mn}k_{kip}k_{plj} - 2k_{klp}k_{pmq}(k_{qir}k_{rnj} + k_{nir}k_{rqj}) + 4k_{klp}k_{mnq}k_{pir}k_{rqj}, \\
 \lambda_{ijklmnp}^{(5)} &= 9\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{0m}\delta_{0n}(k_{pij} - k_{ipj}) + 6\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{mn}(k_{pij} + k_{ipj}) + \\
 &\quad + \delta_{kl}\delta_{mn}(k_{pij} - k_{ipj}) - 3i\sqrt{6}\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{0m}k_{npq}(k_{qij} + k_{iqj}) + \quad (\text{П.12}) \\
 &\quad + i\sqrt{6}\delta_{0k}\delta_{lm}k_{npq}(k_{qij} - k_{iqj}) - 3\delta_{0k}\delta_{0l}k_{mnq}k_{qpr}(k_{rij} - k_{irj}) - \\
 &\quad - 3\delta_{0k}\delta_{0l}k_{mnq}k_{qpr}(k_{rij} - k_{irj}) + \delta_{kl}k_{mnq}k_{qpr}(k_{rij} - k_{irj}) + \\
 &\quad + 6\delta_{0k}\delta_{0l}k_{mnr}(k_{piq}k_{qrj} - k_{riq}k_{qpj}) + 2\delta_{kl}k_{mnr}(k_{piq}k_{qrj} - k_{riq}k_{qpj}) + \\
 &\quad + 2i\sqrt{6}\delta_{0k}k_{lmq}k_{qnr}(k_{ris}k_{spj} - k_{pis}k_{srj}) + \\
 &\quad + 2k_{klq}k_{qmr}k_{nps}k_{rit}k_{tsj} - 2k_{klq}k_{npr}k_{rms}k_{qit}k_{tsj}, \\
 \lambda_{ijklmnpq}^{(6)} &= -9\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{0m}\delta_{0n}k_{pir}k_{rqj} + 6\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{mn}k_{pir}k_{rqj} - \\
 &\quad - \delta_{kl}\delta_{mn}k_{pir}k_{rqj} + 3i\sqrt{6}\delta_{0k}\delta_{0l}\delta_{0m}k_{nps}(k_{qir}k_{rsj} + k_{sir}k_{rqj}) - \\
 &\quad - i\sqrt{6}\delta_{0k}\delta_{lm}k_{nps}(k_{qir}k_{rsj} + k_{sir}k_{rqj}) + \\
 &\quad + 3\delta_{0k}\delta_{0l}k_{mnr}k_{rps}(k_{qit}k_{tsj} + k_{sit}k_{tqj}) + 6\delta_{0k}\delta_{0l}k_{mnr}k_{pqs}k_{rit}k_{tsj} -
 \end{aligned}$$

$$- i\sqrt{6} \delta_{0k} k_{riu} k_{utj} (k_{lmr} k_{nps} k_{sqt} + k_{lms} k_{snr} k_{pqt}) - \\ - \delta_{kl} k_{mnr} k_{rps} (k_{qit} k_{tsj} + k_{sit} k_{tqj}) - k_{klr} k_{rms} k_{npt} k_{tqu} k_{siv} k_{vuj},$$

для коэффициентов $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)}, \beta^{(4)}$ в формуле (57):

$$\begin{aligned} \beta_{ijk}^{(1)} &= k_{jki} - k_{kji}, \\ \beta_{ijkl}^{(2)} &= \delta_{ij} \delta_{nk} \delta_{nl} + k_{jkm} k_{mli} - k_{kim} k_{mli} + k_{klm} k_{mji}, \\ \beta_{ijklm}^{(3)} &= 3(k_{jki} - k_{kji}) \delta_{0l} \delta_{0m} + (k_{jki} - k_{kji}) \delta_{lm} + \\ &+ i\sqrt{6} (k_{jkn} k_{nli} - k_{kln} k_{nij}) \delta_{0m} + (k_{kln} k_{njp} k_{pmi} - k_{kjn} k_{nlp} k_{pmi}), \\ \beta_{ijklmn}^{(4)} &= 9\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} \delta_{0m} \delta_{0n} - 6\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} \delta_{mn} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \\ &+ 3i\sqrt{6} (k_{jki} + k_{kji}) \delta_{0l} \delta_{0m} \delta_{0n} - i\sqrt{6} (k_{jki} + k_{kji}) \delta_{0l} \delta_{mn} - \\ &- 3(2k_{kjp} k_{pli} + k_{klp} k_{pji} + k_{jkp} k_{pli}) \delta_{0m} \delta_{0n} + (k_{jkp} k_{pli} + k_{klp} k_{pji}) \delta_{mn} - \\ &- i\sqrt{6} (k_{klp} k_{pjg} k_{qmi} + k_{kjp} k_{plq} k_{qmi}) \delta_{0n} + k_{klp} k_{pjg} k_{qmr} k_{rni} \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

и, наконец, для коэффициентов $\gamma^{(2)}, \gamma^{(4)}, \gamma^{(6)}, \gamma^{(8)}$ в формуле (106):

$$\begin{aligned} \gamma_{ijkl}^{(2)} &= \sum_{a=1}^8 2\delta_{ai} p_{ajkl}, \\ \gamma_{ijklmn}^{(4)} &= \sum_{a=1}^8 (p_{aikl} p_{ajmn} + 2\delta_{ai} q_{ajklmn}), \\ \gamma_{ijklmnpq}^{(6)} &= \sum_{a=1}^8 2p_{aikl} q_{ajmnpq}, \\ \gamma_{ijklmnpqrs}^{(8)} &= \sum_{a=1}^8 q_{aiklmn} q_{ajpqrs}, \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

где

$$\begin{aligned} p_{ijkl} &= 2\delta_{ij} \delta_{kl} + k_{klr} k_{rji} + k_{jkr} k_{rli} - k_{kjr} k_{rli}, \\ q_{ijklmn} &= 9\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} \delta_{mn} - 6\delta_{ij} \delta_{0k} \delta_{0l} \delta_{mn} + \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \\ &+ 6i\sqrt{6} (k_{kji} + k_{jki}) \delta_{0l} \delta_{0m} \delta_{0n} - 2i\sqrt{6} (k_{kji} + k_{jki}) \delta_{0l} \delta_{mn} - \end{aligned}$$

$$- 3(k_{klr} k_{rji} + k_{jkr} k_{rli} - 2k_{kjr} k_{rli}) \delta_{0m} \delta_{0n} + (k_{klr} k_{rji} + k_{jkr} k_{rli}) \delta_{mn} - \\ - i\sqrt{6} (k_{klr} k_{rjs} k_{smi} + k_{kjr} k_{rls} k_{smi}) \delta_{0n} + k_{klr} k_{rjs} k_{smt} k_{tni}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров Ф.И. — Докл. АН БССР, 1958, т.2, с.408.
2. Федоров Ф.И. — Там же, 1961, т.5, с.101.
3. Федоров Ф.И. — Там же, 1961, т.5, с.194.
4. Федоров Ф.И. — ДАН СССР, 1962, т.143, с.56.
5. Федоров Ф.И. — Группа Лоренца. М.: Наука, 1979.
6. Березин А.В., Федоров Ф.И. — Докл. АН БССР, 1982, т.26, с.17.
7. Березин А.В., Кувшинов В.И., Федоров Ф.И. — ДАН СССР, 1988, т.302, с.317.
8. Богущ А.А. — Введение в полевую теорию элементарных частиц. Минск: Наука и техника, 1981.
9. Березин А.В., Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо — Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности. Минск: ИФ АН БССР, 1991, с.21.
10. Kuvshinov V.I., Nguyen Vien Tho — Rapid Communications on Theoretical Physics. Prep. No. 652(2), 1991, IP AS of Belarus, p.14.
11. Kuvshinov V.I., Nguyen Vien Tho — Journ. of Phys. A — Math. and Gen., 1993, vol.26, p.631.
12. Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо — Ядерная физика, 1992, т.55, вып.8, с.2253.
13. Богущ А.А. — Докл. АН БССР, 1980, т.24, с.1073.
14. Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо — Докл. АН БССР, 1991, т.35, с.119.
15. Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо — Там же, 1991, т.35, с.597.
16. Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо, Федоров Ф.И. — Докл. РАН, 1992, т.326, с.68.
17. Гельфанд И.М., Минлос З.А., Шапиро З.Я. — Представления группы вращений и Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
18. Наймарк М.А. — Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
19. Виленкин Н.Я. — Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
20. Гантмахер Ф.Р. — Теория матриц. М.: Наука, 1967.
21. Федоровых А.М. — Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1983, вып.2, с.90.
22. Богущ А.А., Жирков Л.Ф., Федоровых А.М. — В сб.: Труды межд. сем. «Теоретико-групповые методы в теоретической физике», М.: Наука, 1983, т.1, с.196.
23. Богущ А.А. — Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1973, вып.5, с.105.
24. Богущ А.А., Федоров Ф.И. — ДАН СССР, 1972, т.206, с.1033.
25. Карган Э. — Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
26. Волков М.К. — ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.1, с.3.
27. Волков М.К., Перушин В.Н. — Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. М.: Атомиздат, 1978.
28. Utiyama R. — Phys.Rev., 1956, vol.101, p.1587.
29. Kibble T.W.B. — J. Math. Phys., 1961, vol.2, p.212.
30. Sciama D. — Recent Development in GR. Warsaw, New York, 1962, p.321.
31. Коноплева Н.П., Попов В.Н. — Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
32. Held F.W., von der Heyder P., Kerlick G.D. — Rev. Mod. Phys., 1976, vol.68, p.393.
33. Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Бухов Ю.Н. — Геометро-динамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Энергоатомиздат, 1985.

34. Иваненко Д.В., Пронин П.И., Сарданашвили Г.А. — Калибровочная теория гравитации. М.: Изд. МГУ, 1985.
35. Tseytlin A.A. — Phys. Rev., 1982, vol.D26, p.3327.
36. Chamseddine A.N., West P.C. — Nucl. Phys., 1977, vol.B129, p.39.
37. MacDowell S.W., Mansouri F. — Phys. Rev. Lett., 1977, vol.38, p.739; Ibid. p.1376.
38. Chang L.N., Mansouri F. — Phys. Rev., 1978, vol.17D, p.3168.
39. van Nieuwenhuizen P. — Phys. Repts., 1981, vol.68, p.189.
40. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. — Phys. Repts., 1985, vol.119, p.233.
41. Бесс Ю., Бергер Дж. — Суперсимметрия и супергравитация: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
42. Лихнерович А. — Теория связностей в целом и группы голономии: Пер. с франц. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
43. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. — Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
44. Зуланке Р., Витген П. — Дифференциальная геометрия и расслоения: Пер. с нем. М.: Мир, 1975.
45. Кобаяси Ш., Номидзу К. — Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
46. Coleman S., Wess J., Zumino B. — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.2239.
47. Callan C.G., Coleman S., Wess J., Zumino B. — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.2247.
48. Salam A., Strathdee J. — Phys. Rev., 1969, vol.184, p.1750.
49. Chang L.N., Mansouri F. — Phys. Rev., 1978, vol.D17, p.3168.
50. Gursey F., Marchildon L. — Phys. Rev., 1978, vol.D17, p.2038.
51. Perelomov A.M. — Phys. Repts., 1987, vol.146, p.135.
52. Переломов А.М. — Элементарные частицы. 13-я Школа физики ИТЭФ, М.: Энергоатомиздат, 1989, вып.2, с.3.
53. Шварц А.С. — Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.
54. Skyrme T.H.R. — Proc. Roy. Soc., 1961, vol.A260, p.127.
55. Gell-Mann M., Levy M. — Nuovo Cimento, 1960, vol.16, p.705.
56. Adkin G., Nappi C., Witten E. — Nucl. Phys., 1983, vol.B228, p.552.
57. Zahed I., Brown G.E. — Phys. Repts., 1986, vol.142, p.1.
58. Holzwarth G., Schweisinger B. — Repts. Progr. Phys., 1986, vol.49, p.825.
59. Николаев В.А. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, вып.2, с.401.
60. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. — УФН, 1992, т.162, вып.1, с.3.
61. Walliser H., Eskart G. — Nucl. Phys., 1984, vol.A429, p.514.
62. Kuvshinov V.I., Nguyen Vien Tho — Proc. of the Sem. on Nonlinear Phenomena in Complex Systems, Polatsk, February 17—20, 1992, p.192.
63. Jackiw R. — Rev. of Mod. Phys., 1977, vol.49, p.661.
64. Раджараман Р. — Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
65. Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо — Докл. АНБ, 1993 (в печати).
66. Kuvshinov V.I., Nguyen Vien Tho — Physical Express, 1993 (в печати).
67. Jackson A., Jackson A.D., Goldhaber A.S., Brown G.E. — Phys. Lett., 1985, vol.154B, p.101.
68. Wirtza A., Weise W. — Phys. Lett., 1987, vol.B188, p.6.
69. Bando M. et al. — Phys. Lett., 1985, vol.54, p.1215.
70. Igarashi Y. et al. — Nucl. Phys., 1985, vol.259B, p.721.
71. Adkin G.S., Nappi C.R. — Phys. Lett., 1984, vol.137B, p.251.
72. Новожилов Ю.В. — Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.

НОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВOK. ТЕОРИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ¹

Ф.В.Ткачев

Институт ядерных исследований РАН, Москва

Анализируется математическая задача о построении асимптотических разложений многопетлевых фейнмановских диаграмм по массам и внешним импульсам, являющаяся центральной в пертурбативной квантовой теории поля. Дается обзор теории асимптотической операции — наиболее мощного инструмента решения этой задачи. Объясняется ее связь со стандартными методами (теория БПХЦ, метод главного логарифмического приближения и т.п.). Обсуждается проблема изучения неевклидовых асимптотических режимов и указываются пути ее полного решения.

The mathematical problem of construction of asymptotic expansions of multiloop Feynman diagrams is masses and external momenta is analyzed, which is central in applied perturbative Quantum Field Theory. A review of the theory of asymptotic operation is given, which is the most powerful instrument for solving the problem. Its connection with the standard methods (BPHZ, the leading logarithmic approximation etc.) is explained. The problem of studying non-Euclidean asymptotic regimes is discussed and ways of solving it are pointed out.

Главная цель обзора — объяснить, что такое асимптотическая операция (As-операция), и как она используется в приложениях, связанных с исследованием и расчетами радиационных поправок в рамках прикладной пертурбативной квантовой теории поля.

¹Обработка докладов, прочитанных на Совещании по физике SSC (Мадисон, апрель 1992), VII Совещании по физике высоких энергий (Сочи, октябрь 1992), Совещании по новым вычислительным методам в пертурбативной КХД (Цюрих, декабрь 1992), в ОИЯИ (Дубна), ИТЭФ (Москва), НИИЯФ МГУ (Москва), ИФВЭ (Протвино), в национальных лабораториях США FERMILAB, CERN, Argonne, и в университетах штатов Оклахома, Пенсильвания, Нью-Йорк (Стони Брук), а также МакГилл (Канада). Работа выполнена при финансовой поддержке коллаборации CTEQ/TNRLC.

Прежде всего, отношение теории As -операции к физике элементарных частиц можно пояснить с помощью следующей аналогии (см. табл. 1). Другими словами, в теории As -операции рассматриваются математические (вычислительные) вопросы прикладной пертурбативной квантовой теории поля, которая представляет собой формализм современной физики высоких энергий. С другой стороны, теория As -операции может рассматриваться как новая прикладная ветвь теории обобщенных функций, отличающаяся специфическими постановками математических задач. Поскольку в пертурбативной КТП все амплитуды выражаются в явном виде через диаграммы Фейнмана, ситуация здесь в определенном смысле проще, чем в классической механике. Однако теория As -операции достаточно трудна и важна.

Таблица 1

Классическая физика	Физика высоких энергий
Механика Ньютона	Пертурбативная КТП
Теория гамильтоновых систем	Теория As -операции
Общая теория дифференциальных уравнений	Теория распределений (обобщенных функций)

В обзоре сделана попытка ответить на следующие вопросы:

- В чем состоит задача и в чем ее специфика?
- Что такое As -операция?
- Что нужно сделать для распространения теории на неевклидовы асимптотические режимы?

В ЧЕМ СОСТОИТ ЗАДАЧА?

Ответ на этот вопрос будет довольно длинным, поскольку время, потраченное на то, чтобы точно понять задачу, потрачено хорошо — имеется более чем достаточно примеров того, как вредно преждевременно переходить к вычислениям, доказательствам, написанию статей и проч. Именно рассмотрение с новой точки зрения хотя и старой, но тонкой и сложной задачи об асимптотическом разложении фейнмановских диаграмм по массам и внешним импульсам лежит в основании теории As -операции.

1. Фейнмановские диаграммы остаются главным источником количественной динамической информации в физике высоких энергий, и это обстоятельство вряд ли скоро изменится (см., например, материалы любой конференции по программам новых суперускорителей).

2. Многопетлевые диаграммы необходимо вычислять по следующим причинам: некоторые эффекты целиком возникают из радиационных (петлевых) поправок; учет высших поправок в КХД уменьшает неопределенность, связанную с обрыванием ряда теории возмущений [93,104].

3. Вычислительная сложность многопетлевых диаграмм увеличивается с ростом числа независимых переменных интегрирования в диаграмме и количеством независимых внешних безразмерных параметров (см. табл.2).

Таблица 2

Сложность интегрирования	Количество параметров, с которыми возможна эффективная работа
древесное приближение	произвольное сечение
1 петля	много
2 петли	несколько (обычно один-два)
3 петли (4 РГ)	нуль (один размерный параметр)
4 петли (5 РГ) (рекорд)	нуль
более 4 петель	?!

В евклидовых задачах сложность интегрирования совпадает с числом петель l , если требуется вычислять конечные части l -петлевых диаграмм. В случае вычисления β -функции и других ренормгрупповых функций требуются лишь бесконечные части диаграмм, так что сложность равна числу петель минус 1. В неевклидовых задачах число петель нужно удваивать, так как здесь выделяется времениподобная компонента, интегрирование по которой проводится отдельно от пространственноподобных. Такая мера сложности соответствует максимальной глубине иерархии сингулярных многообразий подынтегрального выражения.

На древесном уровне любая амплитуда может быть вычислена как рациональная функция кинематических переменных. Следует учитывать, однако, что зачастую требуется делать интеграции по фазовому пространству, которые ничем не лучше в плане вычислительной сложности, чем «настоящие» петли. На однопетлевом уровне в ряде случаев

можно работать с несколькими параметрами, даже если ответы в самом общем случае будут весьма громоздкими [24, 73]. На двухпетлевом уровне лишь небольшое число задач с одним, самое большее двумя, параметрами поддается решению (ср. недавние вычисления лейденской группы [76]). На трехпетлевом уровне, похоже, только задачи без безразмерных параметров допускают систематическое решение аналитическими методами. Один пример — задача расчета $g_e - 2$ в КЭД [86]. Другой пример — безмассовые интегралы пропагаторного типа, допускающие систематическое эффективное вычисление в трехпетлевом приближении [29, 32]. Имеется два типа задач, которые сводятся к таким интегралам: вычисление коэффициентных функций вильсоновского операторного разложения на малых расстояниях (главное применение — к глубоконеупругому лептон-адронному рассеянию; см., например, [85]), а также вычисление 4-петлевых РГ-функций (см. [23, 89]). Эффективное уменьшение числа петель имеет место благодаря приему, описанному в [15, 20, 22, 28], который удерживает лишь ведущие члены разложения по импульсам и массам соответствующих диаграмм (ср. ниже обсуждение приложений евклидовой асимптотической операции). В третьем классе задач (связанном с уже упоминавшимися) имеют дело с интегралами с массами [102].

Наконец, есть два примера вычислений 4-петлевой сложности: впечатляющий численный расчет $g_e - 2$ в КЭД [42], который нуждается еще в повышении точности, а также 5-петлевой ренормгрупповой расчет β -функций и аномальных размерностей в скалярной модели $\varphi_{D=4}^4$ [46]. Последнее вычисление было сделано с помощью различных аналитических приемов, а также численного суммирования в одной из диаграмм (затем вычисленной и аналитически [43]); оно имеет интересное применение к теории фазовых переходов [25, 51] (вычисление критических показателей методом ϵ -разложения Вильсона — Фишера). Интересно, что из-за несколько медленной сходимости просуммированного ряда для одного из показателей (η) было бы полезно вычислить даже 6-петлевую поправку к аномальной размерности волновой функции. Такое вычисление не кажется невозможным, если применять как аналитические, так и численные методы (имеется не так много диаграмм, и большинство из них тривиальны), но все-таки чрезвычайно громоздко.

4. Ясно, что единственный способ обеспечить реальную возможность продвижения в высокие порядки теории возмущений — это редукция числа независимых параметров. Такая редукция может быть достигнута, если использовать наличие больших/малых параметров (иногда неочевидным образом — примеры приведены ниже) и выполнить

асимптотическое разложение по ним. Таким способом можно заменить исходную сложную функцию рядом по степеням и логарифмам параметров разложения. Коэффициенты получающихся рядов суть более простые функции (с меньшим числом независимых параметров) по сравнению с исходной, и таким образом достигаемые вычислительные преимущества зачастую велики, даже если число таких более простых функций оказывается внушительным: «настоящая» сложность заменяется «просто» громоздкостью большого объема алгебры.

5. Наконец, задача об асимптотических разложениях фейнмановских диаграмм содержит два логических уровня. Это объясняется тем, что физические величины представляются суммами по всей совокупности соответствующих диаграмм, которая к тому же имеет иерархическую структуру. Иерархичность структуры ряда теории возмущений проявляется в существовании структурных уравнений (например, уравнений ренормгруппы [53]), позволяющих суммировать поправки. При определенных условиях асимптотические разложения также наследуют такого рода структуру, так что появляется возможность суммировать высшие поправки с помощью какого-либо аналога уравнений ренормгруппы (например, уравнений Липатова — Альтарелли — Паризи, Кураева — Липатова — Фаина [18,105] и т.п.). Для вывода таких уравнений требуется знание глобальной структуры разложений для ряда теории возмущений в целом.

На *нижнем уровне* задачи о разложениях в пертурбативной КТП имеют дело с разложениями отдельных диаграмм. Задача на этом уровне имеет *аналитическую* природу.

На *высшем уровне* имеют дело с определенными глобально (т.е. в терминах полных наборов фейнмановских диаграмм) амплитудами или функциями Грина. Их разложения следует преобразовать к глобальной форме (типа операторного разложения), которая допускала бы непертурбативную интерпретацию и вывод структурных уравнений. Переход с уровня отдельных диаграмм на глобальный уровень² имеет *комбинаторный* характер и сравнительно нетруден, если на нижнем уровне было найдено решение правильного типа.

«Правильные» решения — это те, которые, во-первых, удовлетворяют условию совершенной факторизации (см. [39,40,106] и обсуждение далее в обзоре). Во-вторых, разложения диаграмм должны быть составлены из таких «кусков» исходных диаграмм, которые представляли бы собой целостные объекты, снова имеющие вид многопетлевых диаграмм, с

²Такой переход называют факторизацией или экспоненцированием; лучший термин, видимо, *глобализация*.

тем чтобы их можно было — после комбинаторной перегруппировки «кусков», происходящих от разных исходных диаграмм, — сложить в объекты типа матричных элементов некоторых составных операторов. Именно указанное обстоятельство вносит специфику в задачу об асимптотических разложениях в прикладной КТП по сравнению с общей математической задачей.

Замечательным оказывается тот факт, что такие «правильные» решения естественно описываются лишь на языке теории обобщенных функций³ (см. подробнее ниже), в то время как в старых подходах работают в рамках обычного интегрального исчисления. Это объясняет, почему в рамках старых подходов (БПХЦ и т.п.) не удалось получить практически полезных результатов⁴.

Суммируем:

Центральная математическая задача в пертурбативной КТП — получение явных выражений для асимптотических разложений многопетлевых диаграмм по массам и внешним импульсам, удовлетворяющих известным дополнительным требованиям (условие совершенной факторизации).

Эта задача остается нерешенной в полном объеме несмотря на усилия десятков теоретиков в течение около 40 лет и наличие ряда частичных результатов. Пафос обзора состоит в том, что теория As-операции дает в настоящее время реальную надежду на принципиальный прогресс в направлении полного решения задачи уже в близком будущем.

Прежде чем объяснять, на чем основана эта надежда, следует представить несколько примеров конкретных физических задач, в которых возникают асимптотические разложения фейнмановских диаграмм. Это представляется необходимым, так как, с одной стороны, в феномено-

³Здесь имеется прямая аналогия с задачей классической геометрии об измерении диагонали квадрата, решение которой также выражается в терминах некоторых «обобщенных» объектов — иррациональных чисел. Заметим, что открытие таких обобщенных решений сопровождается, как правило, путаницей, неприятием и прочими эмоциями со стороны приверженцев старых методов. Теория асимптотической операции не является здесь исключением.

⁴Впрочем, поскольку любое выражение с обобщенными функциями может быть переписано в терминах обычных интегралов, старые методы могут применяться для верификации результатов — *при условии, что эти результаты уже найдены каким-либо другим более адекватным способом*. Впрочем, такая верификация реально возможна лишь в простых случаях ввиду ее чрезвычайной громоздкости. Даже в случае евклидовых асимптотических режимов провести ее полностью в явном виде оказалось практически невозможным (см. обсуждение ниже). В любом случае практическая (научная) ценность таких верификаций крайне невелика.

логических работах не всегда точно описываются асимптотические режимы, малые и большие параметры в задаче и т.п., и зачастую не осознается, что, в принципе, для любого асимптотического режима имеется аналог операторного разложения — даже если форма последнего отлична от стандартного вильсоновского разложения с локальными операторами.

С другой стороны, специалисты по математической физике обычно ограничиваются небольшим числом канонических задач, где возможно «строгое» решение, например, задачей доказательства того, что разложения идут по степеням и логарифмам малого параметра или доказательства операторного разложения на малых расстояниях или на световом конусе⁵. К сожалению, строгость сама по себе «за пределами студенческих работ не имеет первостепенного значения и при наличии настоящей идеи всегда может быть внесена любым компетентным профессионалом» [3]. Это замечание принадлежит первоклассному «чистому» математику и касается «чистой» математики, изучающей «чистые» модели и примеры. В реальной жизни практические задачи в большинстве своем настолько громоздки, что полностью формализованные доказательства, которые были бы реально доступны для всеобщего обозрения теоретическому сообществу, остаются благим пожеланием. В такой ситуации термин «строгость» приобретает мифологическое содержание и зачастую употребляется с целью самодифференциации, являясь признаком отсутствия реальных идей и результатов. Результаты нас интересуют прежде всего *правильные* — неважно, сопровождающиеся вполне формализованными доказательствами или нет, а формализмы — к таковым новым результатам приводящие. Правильность же гарантируется не «строгостью», а глубоким и точным пониманием аналитической сущности изучаемых объектов и структуры задачи, адекватно отраженным в методах, используемых для нахождения решений.

ПРИМЕРЫ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Прежде всего, асимптотические режимы могут быть разделены на евклидовы и неевклидовы. Евклидовы режимы возникают в задачах, допускающих вихор поворот импульсов интегрирования, так что все диаграммы становятся чисто евклидовыми. Класс евклидовых режимов включает два типичных случая: хорошо известный вильсоновский режим ма-

⁵К слову, феноменологически осмысленные задачи всегда формулируются на языке импульсного представления, так что буквальное понимание слов «малые расстояния» и т.п. без конкретного анализа реальной вычислительной практики приводит лишь к доказыванию бесполезных теорем.

лых расстояний, а также режим тяжелой массы, когда рассматриваются низкоэнергетические амплитуды, включающие только легкие поля (например, эффективные низкоэнергетические лагранжианы слабых взаимодействий легких кварков [16,17]). Имеются и смешанные случаи. Первое, более или менее полное феноменологически осмысленное решение задачи об асимптотических разложениях для общих евклидовых режимов было дано теорией евклидовой As -операции ([106] и ссылки там). Фраза «феноменологически осмысленное» переводится в техническое требование *совершенной факторизации*, которому должны удовлетворять разложения. Это требование будет обсуждаться ниже.

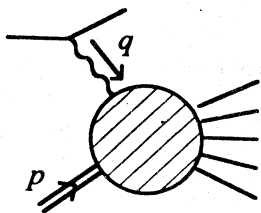


Рис. 1

Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах хорошо известно (рис.1; см., например, обзор [41]). Сечение параметризуется формфакторами, которые являются функциями $F(x, Q^2)$ от двух кинематических переменных: безразмерной бьеркеновской переменной x и переданного импульса $Q^2 = -q^2$. Стандартный асимптотический режим соответствует $Q^2 \rightarrow +\infty$ при фиксированном x :

$$F(x, Q^2) \xrightarrow[Q^2 \rightarrow +\infty]{x \text{ fixed}} F_{\text{LAP}}(x, Q^2) \times (1 + O(Q^{-2})). \quad (1)$$

Ведущий член зависит от Q^2 логарифмически, а функция F_{LAP} удовлетворяет интегродифференциальному уравнению, известному как уравнение Липатова — Альтарелли — Паризи (ЛАП). «Твистовые» поправки (т.е. поправки порядка $O(Q^{-2})$) удовлетворяют аналогичным уравнениям. Это редкий случай, когда структура твистовых поправок известна, что объясняется прямой связью задачи с хорошо изученным операторным разложением на малых расстояниях (через моменты структурных функций).

Соответствующий асимптотический режим можно описать, сказав, что p стремится к светоподобному значению:

$$p \rightarrow \tilde{p}, \quad \tilde{p}^2 = 0, \quad q \text{ фиксировано}, \quad q^2 < 0, \quad m_i = O(p - \tilde{p}). \quad (2)$$

Массы исчезают с той же скоростью, с которой p приближается к своему светоподобному предельному значению. (В координатном представлении это соответствует пределу светового конуса [44].)

Обратим внимание на то, что p стремится к вектору, компоненты которого отличны от нуля, хотя лоренцев квадрат равен нулю. Это характерная черта неевклидовых режимов.

Альтернативно можно рассматривать моменты структурных функций:

$$\int_0^1 dx x^n F(x, Q^2) \xrightarrow[Q^2 \rightarrow +\infty]{x \text{ fixed}} C_n(Q^2) \times M_n \times (1 + O(Q^{-2})). \quad (3)$$

Этот асимптотический режим по существу евклидов. Коэффициентные функции $C_n(Q^2)$ суть фурье-преобразования коэффициентов вильсоновского операторного разложения.

Два асимптотических режима не эквивалентны. Выражением этого обстоятельства является тот факт, что задача восстановления структурных функций по их моментам является в математическом смысле некорректной: такое восстановление возможно, только если *все* моменты известны точно (как при восстановлении однопетлевых ядер уравнений ЛАП из аномальных размерностей операторов вильсоновского разложения), или если используется дополнительная информация вместе со значениями нескольких низших моментов.

Проблема малых x и реджевский предел (см. обзор 105)). Здесь рассматриваются структурные функции глубоконеупругого рассеяния при малых x , где амплитуда, как ожидается, наиболее чувствительна к взаимодействию глюонов:

$$F(x, Q^2) \text{ для } x \rightarrow 0 \text{ при фиксированном } Q^2, \quad (4)$$

что эквивалентно изучению реджевского предела:

$$s = (p + q)^2 \gg Q^2, p^2, m_i^2. \quad (5)$$

По оптической теореме это связано с амплитудой упругого процесса:

$$F(s, t, u, m_i^2) \underset{s \rightarrow +\infty}{\approx} F(s) \times \dots \times (1 + O(s^{-1})). \quad (6)$$

Задача здесь состоит в том, чтобы определить зависимость от s , т.е. вид $f(s)$. Точками обозначен множитель, не содержащий s .

Реджевский предел изучался в связи с теорией дисперсионных соотношений и различными ограничениями на сечения, начиная с 50-х годов. Имеющийся в рамках пертурбативной КТП теоретический результат известен как уравнение Кураева — Липатова — Фадына (КЛФ) (см.,

например, [18]). Это уравнение выводится с помощью так называемой техники главного логарифмического приближения [2,72], и полное понимание вывода остается привилегией узкого круга специалистов. Более того, уравнение КЛФ является аналогом лишь однопетлевого приближения для ренормгруппового уравнения для коэффициентных функций вильсоновского операторного разложения, и неизвестно, как его нужно модифицировать, чтобы выйти за рамки главного логарифмического приближения. Вопрос весьма важен, поскольку приближение ведущих логарифмов далеко не всегда работает удовлетворительно при доступных энергиях⁶. Следует также отметить, что в школе главного логарифмического приближения накоплен значительный теоретический опыт, остающийся труднодоступным для непосвященных.

Партонная модель с учетом КХД (см., например, обзор [41]) представляет собой набор рецептов, имеющих целью дать описание структуры ведущих степенных членов в асимптотических разложениях амплитуд для некоторого класса инклюзивных процессов для определенного класса асимптотических режимов. Теоретические результаты, на которых основана модель, известны как *теоремы о факторизации* [69]. Они выведены, как правило, лишь для ведущих степенных членов, и их статус, как подчеркивается и в [69], еще не может быть признан удовлетворительным из-за пробелов в выводе. Например, доказательство малости остаточного члена разложения технически весьма похоже на вычисление следующей поправки, а о степенных (твистовых) поправках в задачах типа судаковского формфактора практически ничего не известно. Здесь до сих пор не хватало эффективного формализма для работы как с аналитическими, так и комбинаторными аспектами задачи. Для евклидовых режимов пример подобного формализма дает теория евклидовой As -операции.

Например, в рамках КХД, следуя [26], рассмотрим процесс $H_1 + H_2 \rightarrow H_3 + X$, где X обозначает инклюзивное состояние (рис.2). Здесь имеется три независимые кинематические переменные: мандельстамовские переменные S , T и инвариантная масса инклюзивного состояния M_X^2 . Переменная U определяется из соотношения

$$S + T + U = M_X^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad (7)$$

⁶Автор признателен Л. Франкфурту за обсуждение этого вопроса.

где m_j^2 суть массы трех частиц. Имеются также легкие параметры типа масс кварков, которые явно не указаны. Обычно такие процессы рассматриваются в режиме S , T , $M_X^2 \gg m_j^2$, который соответствует стандартной партонной модели с учетом КХД. Тогда сечение представляется сверткой сечения «жесткого партонного подпроцесса» и партонных распределений, аналогичных распределениям $F_{\text{LAP}}(x, Q^2)$, возникшим при изу-

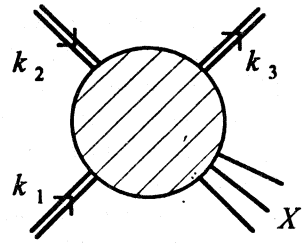


Рис. 2

чении глубоконеупругого рассеяния и удовлетворяющим тем же интегродифференциальным уравнениям. Существенная динамическая информация сконцентрирована в жестком сечении, которое является аналогом коэффициентных функций вильсоновского разложения. В настоящем случае оно зависит от двух безразмерных параметров (S обычно выделяется из выражений скейлингом).

Пример «скрытого» малого параметра. Вычисление жесткого сечения в предыдущем примере довольно громоздко уже на однопетлевом уровне [26]. Однако можно рассмотреть квазиупругий асимптотический режим S , $T \gg m_i^2$, M_X^2 , и тогда нужно иметь дело лишь с одним независимым безразмерным параметром. (На практике работают с вариантом режима, соответствующим S , $T \gg M_X^2 \gg m_i^2$.) Такая модификация асимптотического режима мотивируется следующим обстоятельством. Как уже отмечалось, формула партонной модели для сечения содержит свертку жесткого сечения и партонных распределений $F_i(x, Q^2)$, которые

имеют степенное поведение вида $(1 - x)^n$ при $x = 1$. Оказывается, что область, где это подавление не срабатывает, соответствует квазиупругому режиму; более того, вклады, доминирующие в квазиупругом режиме, усилены сингулярностями (см., например, [91] и ссылки там). Оказывается, что вычисление однопетлевых поправок тогда становится несравненно проще, в то время как аппроксимация, основанная на удержании лишь ведущих членов, работает удивительно хорошо (с численной точностью 5%) вплоть до $x_T \gtrsim 0,2$ [91]. Это означает, что задача содержит

эффективный скрытый малый параметр M_X^2/S . Заметим, что «малый» параметр не обязательно численно мал; важно лишь, что по такому параметру производится разложение, и что разложение работает с нужной точностью для значений параметра, представляющих интерес.

Общей теории квазиупругого режима нет; имеются только некоторые результаты в главном логарифмическом приближении (см., например, [92]). Заметим, что в области малых x партонная модель не может работать в любом случае. С другой стороны, квазиупругий режим ничем в принципе не хуже, чем стандартный режим, соответствующий партонной модели.

В задаче о судаковском формфакторе [2] рассматривается поведение формфакторов электрона, кварка и других элементарных полей при больших переданных импульсах (рис.3). Результаты для ведущего

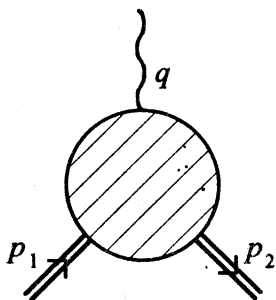


Рис. 3

степенного члена описаны в [59,70]. Интересный факт состоит в том, что здесь появляются новые типы операторов (струнные операторы [100]), в то время как в обычном вильсоновском операторном разложении на малых расстояниях участвуют только локальные операторы. Струнные операторы появляются также и в других задачах [100]⁷.

Заметим, что судаковский формфактор убывает при больших Q^2 — эффект, известный как *судаковское подавление*. Важность задачи о судаковском формфакторе обусловлена старой гипотезой (см., например, [30]), что судаков-

ское подавление может для некоторых асимптотических режимов играть роль, подобную роли асимптотической свободы (ср. недавнюю работу [96]). Этот вопрос остается непоясненным.

Асимптотический режим здесь может быть описан следующим образом:

$$p_{1,2} \rightarrow \tilde{p}_{1,2}, \quad (8)$$

где $\tilde{p}_{1,2}^2 = 0$, при фиксированном q и все $t = O(p - \tilde{p})$ (ср. уравнение (2)).

Струи в КХД. «Струйный» подход к процессам при высоких энергиях представляет собой значительную новую парадигму в физике элементарных частиц, изобилующую сложными интересными задачами (см., например, обзор [60]). Практически здесь имеют дело с сечениями партонного типа со многими мягкими и коллинеарными сингулярностями. Ниже приведен пример задачи об асимптотическом разложении, сущность которой весьма отлична от рассмотренных выше.

⁷ Автор признателен А.В.Радюшкину за обсуждение этого вопроса.

Проблема «двойного бокса»⁸. Рассмотрим процесс с тремя адронными струями в конечном состоянии. В приближении $O(\bar{\alpha}_s^3)$ имеются трех-партонные вклады двухпетлевой сложности, из которых аналитически вычисляются все, за исключением диаграмм типа «двойной бокс» и их непланарных аналогов (рис.4; природа виртуальных линий — глюонные, кварковые и т.п. — неважна постольку, поскольку они безмассовы). Диаграмма «двойной бокс» есть функция $M^2 > 0$ и трех инвариантных масс пар конеч-

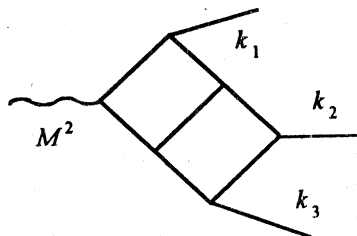


Рис. 4

ных партонов $s_{ij} = (k_i + k_j)^2$, $\{i, j\} = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}$. Однако, поскольку $s_{12} + s_{23} + s_{31} = M^2$, в задаче имеются только два независимых безразмерных параметра, например:

$$x = s_{12}/M^2 > 0, \quad y = s_{23}/M^2 > 0, \quad x + y < 1. \quad (9)$$

Такая амплитуда имеет инфракрасные сингулярности (максимальная сингулярность ϵ^{-4}). Чтобы обеспечить калибровочно-инвариантное сокращение всех ИК-сингулярностей в полном ответе, нужно использовать размерную регуляризацию (другие практические методы пока не развиты, хотя это и не кажется невозможным). Другое требование состоит в том, что результат будет использоваться для генерирования по методу Монте-Карло $O(10^5)$ событий, так что ответ должен представлять собой эффективный вычислительный алгоритм. Это исключает прямолинейный подход, основанный на параметрических представлениях.

Возможный сценарий систематической работы с такими диаграммами, который применим и во многих других случаях, состоит в их представлении в виде разложений по степеням и логарифмам x , y , $1 - x$, $1 - y$.

Чтобы пояснить этот момент, заметим следующее. Часто неверно считают, что точные выражения для изучаемых интегралов через специальные функции являются тем окончательным ответом, к которому нужно стремиться при аналитическом вычислении. На самом же деле

⁸ Автор признателен Р.К.Эллису и В.Т.Гиле за разъяснение проблемы двойного бокса.

окончательным ответом следует считать асимптотические формулы в сингулярных точках (включая бесконечности) и эффективные численные алгоритмы для регулярных областей. «Явные» же представления через специальные функции полезны лишь постольку, поскольку имеется полная информация о поведении таких функций, позволяющая получать асимптотические формулы и проводить численные расчеты. С другой стороны, гарантированных универсальных методов получения таких явных представлений во всех случаях не существует, и даже когда они есть, они могут оказаться менее полезными, чем хотелось бы. Один пример — выражения через бесконечные многократные ряды по обобщенным гипергеометрическим функциям, получаемые посредством преобразования Меллина (см. [103] и ссылки там). Другой пример — численные расчеты типа описанных в [99], где иногда требуется вычислять дилוגарифмы с точностью 15 знаков, чтобы получить численный ответ с разумной (невысокой) точностью.

Однако, если имеется возможность напрямую и систематически получать асимптотические разложения в сингулярных точках для изучаемых выражений, то в сочетании с численными алгоритмами (используемыми, например, фейнмановские параметры) это дает возможность напрямую получать всю необходимую информацию, обходя громоздкий шаг «аналитического вычисления».

В настоящем случае, скажем, разложение по x приводит к ряду, коэффициенты которого оказываются вычислимыми функциями от y . Для получения такого разложения нужно использовать неевклидов вариант техники As-операции. Можно, конечно, также выполнять разложения для асимптотических режимов $0 < x \ll y \ll 1$ и т.д. Так можно получать представления амплитуды в виде разложений по x и y около границ кинематического треугольника (рис.5). Сходимость таких разложений геометрическая, а радиус сходимости определяется сингулярностями функции, локализованными вдоль границ кинематического треугольника. Если сходимость недостаточна быстра около центра треугольника, всегда можно построить простую интерполяционную формулу, используя несколько значений, полученных численно; функция в центральной области аналитична.

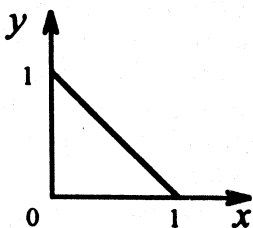


Рис. 5

По вычислительной сложности, измеряемой числом полюсов по $\varepsilon = D - 4$, только что описанный сценарий соответствует рекордным пятипетлевым ренормгрупповым (евклидовым) вычислениям работ [46]. Однако неевклидовы усложнения делают задачу существенно более громоздкой, в то время как неабелевость КХД значительно увеличивает

объем алгебры. Тем не менее на данный момент это единственный реалистический сценарий вычисления диаграмм типа двойной бокс.

Имеется замечательный недавний аналитический результат [95] для скалярного двойного бокса, но только для планарного случая; к сожалению, ответ имеется только для 4 измерений, так что нужно взять $k_i^2 > 0$, чтобы регуляризовать ИК-расходимости. Чтобы привести 4-мерные результаты с ненулевыми k_i^2 к нужной форме (размерная регуляризация с $k_i^2 = 0$), можно выполнить разложение для $k_i^2 \rightarrow 0$. (Заметим, что снятие регуляризации для сингулярных произведений похоже на выполнение асимптотического разложения в смысле теории распределений, что подчеркивает фундаментальную роль этого понятия — см. обсуждение ниже.) Представляется маловероятным, что комбинация приемов, подобных использованным в вычислении планарного двойного бокса [95], могла бы привести к успеху и в непланарном случае (ср. [94]). Тогда придется прибегнуть к полному сценарию, описанному выше.

Наконец, в какой-то момент может потребоваться более тщательный анализ сингулярных граничных областей. Тогда потребуются использовать глобальные результаты типа факторизационных теорем и соответствующих уравнений для таких асимптотических режимов, что представляет собой еще одну вариацию на тему асимптотических разложений.

Имеется еще много других физических проблем, включающих асимптотические разложения фейнмановских диаграмм, для обсуждения которых здесь недостаточно места, например, эффективная низкоэнергетическая теория тяжелых кварков [88] и т.д.

ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ПЕРТУРБАТИВНОЙ КТП

Прежде всего следует описать конкретный асимптотический режим в терминах масс и внешних импульсов вместо скалярных (например, мандельштамовских) кинематических переменных, т.е. определить, какие массы и компоненты импульсов малы по сравнению с прочими. Положим, $Q, M \gg k, m$. По техническим причинам работать с малыми параметрами, по которым проводится разложение, проще, нежели со стремящимися к бесконечности. Из-за однородности амплитуд по размерным параметрам оба способа постановки задачи эквивалентны.

$Q, M \gg k, m$	
Q, M фиксированы	$k, m \rightarrow 0$
большие параметры	малые параметры

Следует подчеркнуть, что выражение $Q, M \gg k, m$, описывающее асимптотический режим, не обязательно выполняется в наивном численном смысле. Оно только означает, что исходная функция будет заменена на разложение по отношению двух масштабов. Радиус численной полезности получающегося разложения может быть довольно большим (ср. примеры выше).

УФ-перенормировка вводит дополнительный размерный параметр $\mu_{\text{ген}}$. Без существенной потери общности можно предположить, что все амплитуды перенормируются в MS-схеме (или любой другой безмассовой схеме перенормировок). Тогда перенормированные диаграммы суть полиномы от $\log \mu_{\text{ген}}$, и несущественно, рассматривается ли $\mu_{\text{ген}}$ как малый или большой параметр. В дальнейшем $\mu_{\text{ген}}$ будет игнорироваться.

Если $A(Q, M, k, m)$ обозначает изучаемую амплитуду (функцию Грина), то требуется найти разложение вида

$$A(Q, M, k, m) \cong \sum_i C_i(Q, M, \mu_{\text{fact}}) D_i(k, m, \mu_{\text{fact}}), \quad (10)$$

где C_i обычно называются «коэффициентными функциями», а D_i — «матричными элементами» (терминология унаследована от вильсоновского операторного разложения на малых расстояниях).

В выражении (10) явно указан еще один параметр — μ_{fact} , который возникает в процессе факторизации больших и малых параметров:

$$\log(Q^2/m^2) \rightarrow \log(Q^2/\mu_{\text{fact}}^2) + \log(\mu_{\text{fact}}^2/m^2).$$

Он может быть приравнен (или нет) параметру перенормировки.

СОВЕРШЕННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ

Чрезвычайно важное требование, которое было полностью упущено в старой постановке задачи о разложении, — это совершенная факторизация больших и малых параметров [39]. Оно может быть объяснено следующим образом. Во-первых, C_i должны содержать только вклады, пропорциональные одной и той же степени большого параметра. Во-вторых, они

не должны зависеть от малых параметров k и m . Из-за однородности A такие же утверждения — *mutatis mutandis* — будут справедливы и для D_i . Как следствие, μ_{fact} не может более наивно интерпретироваться как обрезание в импульсном представлении, разделяющее области интегрирования, поскольку использование таких обрезаний приводит к появлению степенных зависимостей от μ_{fact} . Термин «вялое обрезание»⁹ точнее определяет природу μ_{fact} (ср. пример ниже). Его глобальный смысл может быть пояснен следующим образом. Выражения для D_i оказываются матричными элементами некоторых сложных операторов, которые автоматически снабжены подходящей УФ-перенормировкой. Если требование совершенной факторизации удовлетворено, то автоматически оказывается, что такая перенормировка использует одну из безмассовых схем, например, MS-схему, при этом μ_{fact} оказывается параметром перенормировки такой схемы (ср. конструкцию As-операции, данную в [97,98]).

Поскольку разложения для пертурбативных функций Грина получают комбинаторной перегруппировкой разложений для отдельных диаграмм, следует уточнить смысл совершенной факторизации на уровне отдельных диаграмм. На этом уровне требование совершенной факторизации означает, что разложения должны идти по чистым степеням и логарифмам, и, на первый взгляд, такое требование может показаться бессодержательным. В самом деле, специалистам по вычислениям многопетлевых диаграмм хорошо известно, что при всей комбинаторной громоздкости аналитическая природа многопетлевых диаграмм довольно проста — они суть интегралы от рациональных функций переменных интегрирования. Вычислительный опыт показывает, что их асимптотические разложения по массам и внешним импульсам, извлеченные из «явных» выражений через специальные функции или разбиением областей интегрирования и т.п., всегда идут по степеням и логарифмам малого параметра. Формальные доказательства этого факта для разных асимптотических режимов были даны в [13,27,31,34,55]¹⁰. Однако суть задачи о

⁹Термин введен А.В.Радюшкиным.

¹⁰Аналитическая идея всех таких доказательств достаточно проста — умножения на рациональные функции и одномерные интегрирования не выводят из класса степенно-логарифмических функций. Главная же трудность состоит в том, чтобы провести более или менее явное сведение задачи к последовательности одномерных интегралов и построить рассуждение для произвольной диаграммы из того или иного достаточно широкого класса. Наиболее четкий способ организации таких рассуждений (приводящий к существенно более сильным результатам) дается теорией As-операции и основан на использовании рекурсии в задаче (см. ниже).

разложении многопетлевых диаграмм состоит в том, чтобы расчленив исходный интеграл (до явного вычисления, что представляет собой отдельную задачу со своей спецификой) на «куски» таким образом, чтобы одни «куски» содержали степенно-логарифмическую зависимость от параметра разложения, а другие — от больших параметров. При этом «куски» должны представлять собой целостные объекты, снова имеющие вид многопетлевых диаграмм, с тем чтобы их можно было, после комбинаторной перегруппировки «кусков», происходящих от разных исходных диаграмм, сложить в объекты типа матричных элементов некоторых составных операторов. В цитированных выше работах такого разбиения построить не удалось (да и задача такая, по-видимому, не ставилась). В то же время в работах Циммерманна [10,12], где были построены разложения в операторном виде для режима малых расстояний, «куски» не обладали чисто степенно-логарифмической зависимостью от малого параметра.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую одномерную модель однопетлевого интеграла, зависящего от большого «импульса» Q , малого «импульса» k , а также малой ненулевой массы m :

$$I(Q, k, m) = \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p+k+m} \times \frac{1}{p+Q+m}.$$

Требуется построить разложение этого интеграла при $Q \rightarrow \infty$. Возможны три конструкции.

1) Наиболее прямолинейный подход заключается в том, чтобы разбить область интегрирования:

$$\int_0^{+\infty} dp = \int_0^{\mu} dp + \int_{\mu}^{+\infty} dp, \quad (11)$$

и в первой подобласти разложить подынтегральное выражение по $Q \rightarrow \infty$, а во второй — по $k, m \rightarrow 0$. Все интегралы здесь вычисляются, и нетрудно видеть, что в разложении будут только степени и логарифмы параметров, причем будут присутствовать также степени μ , которые сокращаются после приведения подобных из интегралов по двум областям. Последний факт свидетельствует о том, что при таком подходе игнорируются какие-то важные свойства.

2) Стандартное решение, типа полученного в [10], выглядит следующим образом. Сначала выполняется предварительное вычитание:

$$I(Q, k, m) = \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{1}{p+k+m} - \frac{1}{p+m} \right] \times \frac{1}{p+Q+m} + \\ + \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p+m} \times \frac{1}{p+Q+m}.$$

Теперь в первом члене можно заменить пропагатор, зависящий от Q , на значение, соответствующее асимптотике при больших Q , следующим образом:

$$I(Q, k, m) = \left\{ \frac{1}{Q+m} \right\} \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{1}{p+k+m} - \frac{1}{p+m} \right] + \\ + \left\{ \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p+m} \times \frac{1}{p+Q+m} \right\} + O(Q^{-2}). \quad (12)$$

Выражение в квадратных скобках соответствует перенормированному матричному элементу локального оператора (вычитание при нулевых k по схеме МОМ [53]). В фигурные скобки взяты куски, зависящие от Q (соответствующего «малым расстояниям» после преобразования Фурье), но не от k («большие расстояния») — из таких выражений складываются в конечном итоге коэффициентные функции.

Хотя формально задача в постановке Вильсона [8] решена — большие и малые расстояния расфакторизованы, но для феноменологических приложений этого недостаточно по следующим причинам.

Во-первых, физические задачи непосредственно формулируются в импульсном представлении, и корректный асимптотический режим — это $Q \gg k, m$, т.е. масса должна быть малым параметром (если противное специально не оговорено).

Во-вторых, путем явного вычисления интегралов нетрудно убедиться, что выражения для «коэффициентных функций» содержат в асимптотике при больших Q члены, содержащие «твистовые» поправки, т.е. подавленные множителями $O(m/Q)$ по сравнению с ведущей степенью. В асимптотически свободных теориях коэффициенты при таких членах по теории возмущений не вычисляются [40].

В-третьих, наличие достаточно сложной зависимости от m в коэффициентных функциях делает расчеты радиационных поправок к ним практически невозможными.

В-четвертых, метод не дает удовлетворительных результатов для теорий с безмассовыми частицами (например, КХД) — это проявляется в

невозможности положить $m = 0$ в уравнении (12) из-за неинтегрируемой сингулярности при $p = 0$.

Наконец, для неевклидовых режимов, где сингулярности локализованы на нелинейных многообразиях (световой конус), подход с предвычитаниями оказывается крайне негибким. По существу, чтобы выполнить предварительное вычитание, подобное сделанному выше, требуется знать ответ заранее. Это обстоятельство — отсутствие достаточно мощных эвристик для более сложных задач — является решающим для оценки стандартного подхода.

3) Решения для задач такого типа, лишенные перечисленных недостатков, были впервые получены в рамках теории As -операции [39] (см. также [106] и ссылки там). Чтобы только сравнить получающиеся здесь выражения с приведенными выше, ограничимся окончательным ответом, поскольку способ рассуждений, автоматически приводящий к таким выражениям, будет обсуждаться ниже:

$$I(Q, k, m) = \left\{ \frac{1}{Q} \right\} \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{1}{p + k + m} - \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{\tilde{r}} \right] + \\ + \left\{ \int_0^{+\infty} dp \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{\tilde{r}} \times \frac{1}{p + Q} \right\} + O(Q^{-2}). \quad (13)$$

Выражение $\left\{ p^{-1} \right\}^{\tilde{r}}$ представляет собой распределение, определяемое с помощью формулы

$$\int_0^{+\infty} dp \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{\tilde{r}} \varphi(p) = \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p} \left[\varphi(p) - \theta \left(\frac{p}{\mu_{\text{fact}}} \right) \varphi(0) \right],$$

где $\theta(p/\mu)$ — обрезающая функция, равная 1 при $p \leq \mu$ и 0 при $p \geq \mu$. В более общем случае появляются распределения, обладающие, как и в нашем примере, простыми свойствами скейлинга, что приводит к степенно-логарифмической зависимости от Q [97, 106]. В вышеприведенном примере в этом можно убедиться прямым вычислением.

Вычитание в квадратных скобках уже соответствует перенормировочной схеме типа MS-схемы [97]. Если использовать промежуточную регуляризацию типа размерной, то справедливы представления типа

$$\left\{ \frac{1}{p} \right\}^{\tilde{r}} = \frac{1}{p} + \frac{\text{const}}{\varepsilon} \delta(p),$$

т.е. по сравнению с «голым» выражением, получающимся из исходного с помощью разложения по m , появляются «контрчлены», локализованные в точках сингулярностей. Если использовать такие представления (общие формулы для этого случая выписаны в [97,106,107]), то при вычислениях достаточно иметь дело, пренебрегая простыми членами, содержащими δ -функции, с интегралами без масс. Для коэффициентных функций вильсоновского операторного разложения получаются безмассовые интегралы пропагаторного типа [39,45], а для таких интегралов существует эффективный алгоритм вычисления до трех петель включительно [29,32,38,66,67,84].

Хотя в этом простом примере можно переписать результат так, чтобы избавиться от выражений, содержащих распределения, в более сложных случаях (когда больше импульсов интегрирования) это сделать труднее, и при этом будет потеряна эвристическая связь с выводом. А изучать то, как выводятся новые правильные результаты, в математике не менее и даже более (и гораздо более) важно, чем «строгое доказывать» уже найденные.

Таким образом, можно заключить, что разложения, удовлетворяющие требованию совершенной факторизации, во-первых, *можно* получить в виде, пригодном для проведения комбинаторной факторизации. Во-вторых, такие разложения наиболее естественно описываются на языке теории обобщенных функций.

Остается заметить следующее. Требование совершенной факторизации чрезвычайно важно как с технической, так и с концептуальной точек зрения. Это обусловлено тем обстоятельством, что такие разложения обладают свойством единственности (см. [106]). Отсюда, в частности, следует, что такие разложения наследуют свойства типа калибровочной инвариантности, унитарности и т.д. от начальной амплитуды упорядоченным образом, автоматически, и нет нужды специально заботиться о том, чтобы окончательные выражения не противоречили, скажем, унитарности. *Единственное, что необходимо обеспечить, — это чтобы разложения шли по степеням и логарифмам параметра разложения.* С другой стороны, логарифмически-степенная природа разложений сохраняется в рекурсивных конструкциях, типичных для теории As -операции, потому что произведение логарифмически-степенных разложений снова будет разложением такого же типа.

ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ МНОГОПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ С МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

... пертурбативный вариант вильсоновского разложения на малых расстояниях полностью понят более десяти лет назад.

... Новая теория не нужна.

Рецензент журнала Nuclear Physics B

Не спеши меня понять.

Китайская поговорка

ПОЧЕМУ ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ?

Рассмотрим следующий интеграл, который требуется разложить по $m \rightarrow 0$ (бесконечно малые мнимые добавки в знаменателе для краткости опущены):

$$\int dp \frac{1}{(p^2 - m^2)(p - Q)^2}. \quad (14)$$

Хорошо известная трудность с разложением такого интеграла состоит в том, что зависящий от m пропагатор получает при формальном разложении по m сингулярности, степень которых увеличивается с ростом порядка разложения:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{m^2}{p^4} + O(m^4). \quad (15)$$

Обычный способ обойти эту трудность состоит в разбиении области интегрирования так, чтобы изолировать опасные точки и/или выполнить подходящие вычитания в точке $p = 0$ для множителей, которые не участвуют в разложении по m , чтобы нейтрализовать сингулярности. Эта идея лежит в основе обычных подходов — либо в форме Циммерманна [10], либо в форме техники «главных областей интегрирования» [2, 69].

Такой подход сам по себе вполне правилен. Однако в многопетлевом случае количество дополнительных вычитаний увеличивается, и работать с ними становится трудно. Вот почему так называемая лесная формула [10, 21] (которая дает замкнутое формальное описание получающегося нагромождения вычитаний для простейшего случая евклидовых разложений) обычно рассматривается как модель решения задачи в общем случае. Однако, как объясняется ниже, ожидаемое расширение теории

As-операции на неевклидов случай было бы неверно рассматривать как построение неевклидова варианта лесной формулы, поскольку последний, возможно, и не существует в форме, доступной для изучения.

Принимая во внимание, что неевклидову лесную формулу не удалось найти в течение более чем двадцати лет, прибегнем к методу пристально-го разглядывания — наиболее мощному из известных методов решения нетривиальных задач.

Прежде всего, трудные задачи не следует рассматривать изолированно, а также нельзя упускать из виду их существенные аспекты. Так, можно вспомнить, что в контексте прикладной КТП рассматривать отдельную диаграмму имеет мало смысла, поскольку здесь имеют дело с бесконечными иерархически (рекурсивно¹¹) организованными наборами таких диаграмм. Более того, имеется много моделей, где возникают сходные интегралы. Например, рассмотрим следующий вариант выражения (14), который отличается от (14) только наличием тяжелой массы:

$$\int dp \frac{1}{(p^2 - m^2)((p - Q)^2 - M^2)}. \quad (16)$$

Можно заметить, что зависящий от m множитель, приводящий к трудностям, здесь тот же, что и в (14), и все различие только в «пассивном» множителе $((p - Q)^2 - M^2)^{-1}$, который гладок в сингулярной точке. Естественно предположить, что точный вид «пассивного» множителя неважен постольку, поскольку он гладок:

$$\int dp \frac{1}{(p^2 - m^2)} \varphi(p), \quad (17)$$

где $\varphi(p)$ есть всюду гладкая функция, убывающая при больших p достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость (чтобы избежать побочных усложнений из-за УФ-расходимостей)¹². Ясно, что как выражение (17), так и его разложение по m — каков бы ни был вид такого разложения — линейны по $\varphi(p)$. Разложить (17) для любых «хороших» $\varphi(p)$ — это в точности то же самое, что разложить пропагатор $(p^2 - m^2)^{-1}$ в смысле теории распределений.

¹¹Напомним, что ряд теории возмущений можно породить итерациями уравнений Дайсона — Швингера.

¹²Здесь следует подчеркнуть, что в исходном интеграле множитель, который мы заменили на пробную функцию, сам пробной функцией не является. Речь здесь идет прежде всего об эвристике, позволяющей сконцентрировать внимание на самом главном моменте задачи. Заметим, что выбор класса пробных функций здесь — дело достаточно произвольное и диктуется исключительно удобством.

Здесь удобно разъяснить, в чем состоит с практической точки зрения разница между разложениями в смысле распределений и формальным тэйлоровским разложением. Ключевой результат здесь — так называемый *принцип продолжения* [33, 106] — конструктивное, хотя и абстрактное (впрочем, формально довольно простое) утверждение, подобное классической теореме Хана — Банаха о продолжении функционалов. Принцип продолжения утверждает, что если задан зависящий от m функционал, определенный на линейном пространстве, а также другой функционал, аппроксимирующий первый на подпространстве, то аппроксимирующий функционал может быть расширен на все пространство с сохранением свойства аппроксимации. С практической точки зрения рецепт принципа продолжения состоит, грубо говоря, в добавлении к формальному разложению контрчленов, локализованных в сингулярных точках и поэтому пропорциональных δ -функциям и их производным. Аналогично случаю R -операции в координатном представлении коэффициенты таких контрчленов расходятся, чтобы компенсировать неинтегрируемые сингулярности формального разложения. Однако в отличие от R -операции *конечные части коэффициентов не произвольны*, потому что они должны обеспечить аппроксимационные свойства получающегося разложения в смысле распределений. В действительности, если разложение должно иметь определенный аналитический вид (в нашем случае условие совершенной факторизации требует, чтобы оно содержало только степени и логарифмы параметра разложения), то *коэффициенты контрчленов определяются однозначно*. Практический рецепт определения коэффициентов дается условиями *самосогласованности* [33, 106].

В настоящем случае зависящий от m функционал — это распределение, соответствующее неразложенному пропагатору (17); пространство — это пространство пробных функций; аппроксимирующий функционал — это формальное разложение Тэйлора (15); подпространство, на котором последнее представляет собой хорошо определенный аппроксимирующий функционал, состоит из пробных функций, таких, что $\varphi(0) = 0$. Ясно, что единственный способ построить расширенный функционал состоит в добавлении к формальному разложению δ -функции с подходящим коэффициентом. (Это рассуждение подобно аргументам Н.Н.Боголюбова, приведшим его к открытию правильного вида R -операции [1, 6]. В действительности именно конструкция Н.Н.Боголюбова с самого начала послужила моделью для теории As -операции [33].) Итак, полное разложение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \approx As \frac{1}{p^2 - m^2} + O(m^4) = \frac{1}{p^2} + \frac{m^2}{p^4} + c(m) \delta(p) + O(m^4), \quad (18)$$

где коэффициент $c(m)$ определяется однозначно условием самосогласованности. В настоящем случае его явное выражение (для случая размерной регуляризации) имеет вид

$$c(m) = \int dp \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (19)$$

Явные выражения для общего евклидова случая могут быть найдены в [106] (размерно регуляризованный вид) и в [87] (вид, не зависящий от регуляризации). Здесь достаточно подчеркнуть, что контрчлены, вводимые As -операцией, служат двум целям. Во-первых, они содержат расходящиеся части, которые компенсируют расходимости формального разложения подобно тому, как R -операция удаляет УФ-расходимости в координатном представлении; во-вторых, контрчлены содержат конечные части, которые фиксированы однозначно (в отличие от случая R -операции), а их роль состоит в «подстройке» разложения с тем, чтобы обеспечить аппроксимационные свойства.

Данная выше переформулировка задачи на языке распределений настолько важна (по существу, вся теория As -операции представляет собой логическое развитие этой идеи), что заслуживает нескольких замечаний общего характера.

1. Задача (17) представляет собой обобщение исходной проблемы (14). Имеется два вида обобщений. При одном игнорируется какой-либо важный аспект задачи, так что ее природа, по существу, меняется; а отсутствие важных структур может затруднить решение или сделать его невозможным. При другом игнорируются вторичные, хотя, возможно, и громоздкие детали. В результате оказывается возможным сконцентрироваться на том, что действительно важно, а задача при этом по-настоящему упрощается, даже если и вводятся в действие новые понятия. Именно этот род обобщения имеет место в нашем случае.

2. Наша переформулировка представляет собой вложение исходной задачи в более общую. Такое вложение допускает известный произвол, который мы имеем право фиксировать из соображений удобства. В нашем случае произвол включает выбор типа допустимых пробных функций $\varphi(p)$, выбор топологии (или ее отсутствия) во множестве линейных функционалов и т.п. Однако такие технические детали менее важны, нежели эвристика общего сценария, и должны фиксироваться по мере решения задачи из соображений удобства. В нашем случае наиболее удобный выбор [97] состоит в использовании пробных функций и функционалов из пространств Шварца $\mathcal{D}(P)$ и $\mathcal{D}'(P)$ соответственно.

3. Работа сначала с пробными функциями, которые убывают для всех достаточно больших p , соответствует введению гладкого УФ-обрезания.

Это соответствует наблюдению о независимости того, что происходит вокруг $p = 0$, от поведения интеграла при больших p . Мы увидим ниже, как происходит переход к интегралам по бесконечному объему. Здесь достаточно заметить, что введение локализованных пробных функций позволяет сосредоточиться на окрестности изучаемой сингулярности. Это, по существу, лишь более тонкая реализация основной идеи метода главных областей интегрирования.

СВОЙСТВО ЛОКАЛИЗАЦИИ И РЕКУРСИВНАЯ СТРУКТУРА As -ОПЕРАЦИИ

Рассмотрим многопетлевую диаграмму, где знаменатель содержит тот же зависящий от m пропагатор, что и ранее:

$$\int dp \frac{1}{(p^2 - m^2)} \int dp' \frac{1}{(p - p')^2 \dots} \quad (20)$$

(см. рис.6). Сингулярности формального разложения зависящего от m пропагатора локализованы на подпространстве $p = p'$ (вертикальная ось

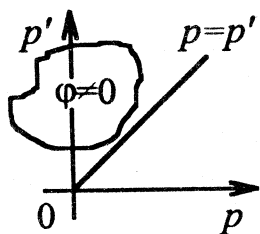


Рис. 6

на рис.6). В соответствии с философией метода главных областей интегрирования рассмотрим вклады, происходящие из окрестности этого подпространства. С точки зрения теории распределений это означает, что рассматривается разложение пробных функций $\varphi(p, p' \dots)$, которые равны нулю вокруг других сингулярностей подынтегрального выражения. Носитель φ (т.е. множество, где $\varphi(p, p' \dots) \neq 0$) может иметь вид, как на рис.6. Ясно, что произведение таких $\varphi(p, p' \dots)$ и

остальной части подынтегрального выражения, $\varphi(p, p' \dots) \times \frac{1}{(p - p')^2 \dots}$, может рассматриваться

как гладкая пробная функция, так что задача вырождается к случаю одиночного пропагатора (17). Введем обозначение As для операции, которая применяется к зависящим от m произведениям и дает как результат их разложение в смысле распределений. Тогда приведенные выше рассуждения могут быть формально представлены в следующем виде:

$$As^\circ \left(\frac{1}{(p^2 - m^2)} \times \frac{1}{(p - p')^2 \dots} \right) = \left(As^\circ \frac{1}{(p^2 - m^2)} \right) \times \left(T^\circ \frac{1}{(p - p')^2 \dots} \right),$$

которое справедливо на описанных выше пробных функциях. Операция T в правой части — обыкновенное тэйлоровское разложение по m . Его

присутствие отражает тот факт, что множители, разложение которых не дает сингулярностей в данной области, не требуют особого обращения.

Более общо: пусть G — произведение зависящих от m пропагаторов, которые требуется разложить по m в смысле распределений, а O — область пространства интегрирования, где сингулярны лишь часть пропагаторов из G (обозначим произведение таких пропагаторов G^{sing}), так что все другие пропагаторы из G регулярны (их произведение обозначим $G^{\text{reg}} \equiv G/G^{\text{sing}}$). Тогда возникает следующее фундаментальное

Локализационное свойство As-операции:

$$\text{As} \circ G|_O = T \circ G^{\text{reg}} \times \text{As} \circ G^{\text{sing}}.$$

Это свойство выявляет ключевую рекурсивную структуру, имеющуюся в нашей задаче о разложениях. Его роль здесь подобна роли условия микропричинности в конструкции R -операции [53].

Рекурсивная организация задачи имеет явные преимущества, поскольку она позволяет разбить исходную задачу на более простые подзадачи и свести рассуждения — как на эвристической стадии, так и в формальном доказательстве — к изучению одного индуктивного шага. Все это вполне очевидно и представляет собой именно ту цель, которую преследует теория As-операции. Более того, парадигматический пример такого подхода уже давно известен — это построение Н.Н.Боголюбовым ультрафиолетовой R -операции [1,53]. В этой связи полезно вспомнить условие микропричинности для S -матрицы, которое в простом частном случае имеет вид

$$T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)\mathcal{L}(z)(w)] = T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)]T[\mathcal{L}(z)\mathcal{L}(w)], \quad x^0, y^0 > z^0, w^0.$$

В этом соотношении T обозначает хронологическое произведение, а $\mathcal{L}(x)$ — плотность лагранжиана взаимодействия в пространственно-временной точке x . Если в задаче о разложении рекурсивная структура видна только после принятия точки зрения теории распределений, в теории R -операции она была на поверхности с самого начала: оригинальное рассуждение Н.Н.Боголюбова было явно рекурсивным и обобщенно-функциональным¹³. Оно не было полностью понято и усвоено теоретическим сооб-

¹³ Следует отличать эвристический вывод R -операции Н.Н.Боголюбовым от ее «доказательства» в теории БПХЦ — они основаны на двух совершенно противоположных способах разрешения дилеммы, о которой речь ниже.

ществом (заметим, что даже в самой книге [53] ключевая работа [1] процитирована не вполне точно) — пока не было использовано как модель для теории *As*-операции.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДИЛЕММА: СИНГУЛЯРНЫЕ МНОЖИТЕЛИ И РЕКУРСИЯ

Итак, фундаментальная рекурсия в задаче о разложении (локализационное свойство) имеет дело с *произведением сингулярных множителей*. Соответственно дилемма состоит в том, как обращаться с сингулярностями (см. табл.3).

Таблица 3

<i>Альтернатива</i>	БПХЦ и т.п.: пожертвовать рекурсией, чтобы избавиться от сингулярностей.	<i>As-операция</i> : использовать рекурсию путем привлечения теории распределений.
<i>Цель</i>	Формальная строгость.	Новые результаты; вычисленные методы; эвристически содержательные доказательства.
<i>За</i>	Используются только методы обычного интегрального исчисления.	Полностью используются преимущества рекурсии; детерминистский рецепт построения разложения.
<i>Против</i>	Чрезвычайно громоздкие формулы; никакой связи с эвристическими рассуждениями, ответ нужно знать заранее; не каждая рекурсия разрешима!	Нестандартная техника для работы с сингулярностями (новый раздел теории распределений).

ТРАДИЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ И ЛЕСНАЯ ФОРМУЛА

По уже обсуждавшимся причинам в течение довольно долгого времени принималось за само собой разумеющееся, что все выражения, содержащие сингулярности, должны сводиться к обычным абсолютно сходящимся интегралам путем разрешения рекурсии. Этот подход был инициирован Боголюбовым и Парасюком [4]¹⁴, преследовавшими цель

¹⁴Они, кстати, не сделали это последовательно, что только усугубило технические трудности доказательства.

дать «строгое» оформление их формулы для R -операции, и со временем развился в теорию, известную как БПХЦ (Боголюбов — Парасюк — Хепп — Циммерманн) и ставшую доминирующей для «строгого» изучения диаграмм Фейнмана, причины чего рассмотреть поучительно.

Во-первых, формализованная реализация альтернативного подхода требует создания специальной математической техники, которой нет в готовом виде в стандартной теории распределений (ср., например, так называемые d -неравенства, позволяющие описывать аналитическую структуру сингулярности в изолированной точке в присутствии сингулярностей, локализованных на многообразиях, проходящих через эту точку [56,97]). Поэтому естественно, что сначала пытались обойтись методами обычного интегрального исчисления, даже в ущерб эвристическим аспектам и интуиции.

Вторая причина была в популярности параметрических представлений. Достаточно вспомнить, что параметрические представления использовались в 50-х годах для изучения аналитических свойств амплитуд (ср., например, уравнения Ландау [5]). При использовании и «изучении» параметрических представлений создается иллюзия, что подынтегральное выражение упрощается (что обманчиво, потому что при этом разрушается его фундаментальная мультипликативная структура; напомним также, что наиболее успешные методы аналитических вычислений многопетлевых диаграмм избегают параметрических представлений — ср., например, широко применяемый алгоритм интегрирования по частям для безмассовых интегралов [29,32,38,66,67,84]). Другая иллюзия состоит в том, что при таком изучении создается впечатление, что имеет место большее, нежели просто создание систематической нотации для формального описания подынтегральных выражений и преодоления трудностей ятрогенного характера (уже отмеченное разрушение мультипликативной структуры).

Наконец, К.Хепп, уточнивший доказательство Н.Н.Боголюбова и О.С.Парасюка и введший их результат в русло мировой теоретической традиции, очевидно, не интересовался обобщенно-функциональными аспектами вывода и механизма R -операции, но рассматривал «метод Боголюбова» (т.е. окончательную формулу для R -операции, а отнюдь не вывод) довольно формально как «феноменологическую процедуру», которую надлежит «доказать» (ср. его книгу [9], особенно главу 6 и замечания перед уравнением (6.26)).

Что касается отношения самого Н.Н.Боголюбова, то можно предположить, что правильность формулы для R -операции должна была быть ему ясна из совокупности эвристических аргументов, основанных на координатном и параметрическом представлениях, и ставилась лишь задача «строгого» оформления результата. Кроме того, Н.Н.Боголюбов,

очевидно, был увлечен (судя по значительному вниманию, уделенному в монографии [6] параметрическому представлению, которое, как теперь уже вполне ясно, того не заслуживает), как и многие, любопытным (хотя и несущественным) взаимодействием комбинаторных и теоретико-графовых аспектов α -параметрического представления.

Как бы то ни было, традиция БПХЦ оставалась доминирующей в течение 30 лет. Соответствующая формула с многократным суммированием, представляющая решение соответствующей рекурсии в евклидовом случае, известна как «лесная формула» [10,21].

Разумеется, в теории распределений нет ничего сверхъестественного, и ее общие теоремы гарантируют, что любое выражение, содержащее распределения, может быть переписано на языке обычных интегралов, а процедура вывода разложений в смысле распределений может быть, хотя бы в принципе, сведена (на низшем логическом уровне) к вычитаниям, перегруппировке членов, разбиению области интегрирования на сектора типа хепповских и т.п. Но не менее справедливо, например, то, что любое математическое выражение практически сводится к конечным манипуляциям с целыми числами. Однако было бы в высшей степени неразумно пренебречь преимуществами работы с понятиями высшего логического уровня (рациональные, комплексные числа, математический анализ и проч.) только для того, чтобы не изучать правил рациональной арифметики и бесконечно малых.

С другой стороны, не все рекурсии могут быть разрешены к виду обозримой нерекурсивной формулы (в нашем случае лесная формула содержит многократные суммирования по специальным наборам подграфов — лесам). Евклидову лесную формулу уже с трудом можно назвать обозримой¹⁵. В неевклидовом случае ситуация намного хуже (что должно быть ясно уже из того факта, что неевклидов вариант задачи остается нерешенным). Формальная причина состоит в следующем. Строго говоря, локализационное свойство само по себе недостаточно. Оно позволяет лишь определить структуру контрчленов (ср.(18)). Их коэффициенты

¹⁵Это обстоятельство, кстати говоря, психологически объясняет, почему современные приверженцы теории БПХЦ столь рьяно настаивают на формальной строгости, причем именно в их варианте, при изучении многопетлевых диаграмм: при работе с лесной формулой делается попытка решить задачу целиком, одним махом, не структурируя ее в иерархию более простых подзадач. При этом лежащий в основе рассуждений примитивный подсчет степеней оказывается спрятан под слоем формализма, нужного для отслеживания сокращений между членами довольно сложной суммы; как результат, с лесной формулой можно работать только в скрупулезно формальной манере. Поэтому неудивительно, что у начинающих изучать теорию многопетлевых диаграмм с лесной формулы неискоренима подозрительность в отношении новых подходов, дающих лучшие результаты с меньшими усилиями.

(ср.(19)) должны быть найдены с помощью дополнительных рассуждений, основанных на принципе продолжения. Выражения для коэффициентов замыкают рекурсию. В евклидовом случае такие выражения довольно просты, особенно в размерной регуляризации (ср.(19)). В неевклидовом случае выражения для коэффициентов содержат дополнительные разложения, так что рекурсия в целом усложняется принципиальным образом (она становится как бы двухъярусной). Поэтому даже если неевклидова лесная формула в точном смысле слова и будет построена, не следует ожидать, что она окажется полезной даже для целей формальной верификации результатов, полученных более тонкими методами.

Это подводит нас к следующему. Имеется другая конкретная причина эвристической бесплодности стандартного подхода, основанного на использовании лесной формулы. Типичная структура R - или As -операции (с точки зрения теории распределений) имеет следующий вид:

$$r_G \circ \left(G/\Gamma \sum_{\Gamma \subset G} \dots r_\Gamma \circ \Gamma \right), \quad (21)$$

где r_Γ — оператор, который «обрабатывает» сингулярность, ассоциированную с подпроизведением Γ . Конструкция (21) выражает тот простой факт, что перед тем, как рассматривать сингулярность, ассоциированную с полным произведением G (и локализованную, скажем, в изолированной точке), нужно «обработать» сингулярности, ассоциированные с подпроизведениями $\Gamma \subset G$ (и локализованные на многообразиях, проходящих через эту точку). Следует подчеркнуть, что явный вид последнего оператора r_G может быть определен только после того, как построены операторы r_Γ для всех подпроизведений. Однако процедура разрешения рекурсии включает раскрытие вычитательных операторов в присутствии пробных функций, что может быть представлено в следующем символическом виде:

$$\int (r \circ \Gamma) \varphi \rightarrow \int \Gamma \times (\varphi - T\varphi),$$

где T есть нечто типа (не обязательно в точности) разложения Тэйлора. Это означает, что в получающихся интегралах *обращен порядок вычитаний* (в точном сходстве с обращением порядка операторов при сопряжении). В более общем случае (21) эффект может быть представлен в следующем виде:

$$\int X r_G \circ \sum_{\Gamma \subset G} Y r_\Gamma \circ Z \rightarrow \int \sum_{\Gamma \subset G} Z \times (1 - T_\Gamma) [Y \times (1 - T_G) X].$$

(Заметим, что структура правой части явно подобна структуре лесной формулы; ср. трехточечные произведения в §30 книги [53].)

Итак, если работать с выражениями, соответствующими разрешенным рекурсиям, то вычитание, которое следует делать первым, $(1 - T_G)$, соответствует сингулярности, которая должна анализироваться последней — после того, как определены все вычитания для подграфов.

Формальное обращение порядка вычитаний в подграфах есть техническая причина, по которой обычные методы не позволяют эффективно использовать рекурсию. Это объясняет их неудачу в неевклидовом случае.

С другой стороны, в рамках традиционного подхода никогда не делалось попыток изучать (и развивать) эвристические аспекты рассматриваемых задач. В этой связи можно вспомнить, что эвристики, использованные Н.Н.Боголюбовым для нахождения правильной формулы для R -операции, были полностью проигнорированы в теории БПХЦ. В этом нет ничего удивительного: в то время как доказательство, данное Боголюбовым и Парасюком, основывалось на первом подходе к разрешению вышеприведенной дилеммы, оригинальное рассуждение Н.Н.Боголюбова [1] соответствует второму.

РЕШЕНИЕ, ПРЕДЛАГАЕМОЕ ТЕОРИЕЙ As -ОПЕРАЦИИ

Специалистам хорошо известно, что любое формальное доказательство, касающееся свойств многопетлевых диаграмм, в конечном счете сводится к обыкновенному счету степеней. Как уже было отмечено, традиционный подход пытается рассматривать всю задачу целиком, неструктурированным образом, так что при подсчете степеней приходится рассматривать все выражение таким образом, что все члены, порожденные вычитаниями, рассматриваются одновременно (например, остаточный член разложения перенормированной l -петлевой диаграммы).

Ключевая аналитическая идея теории As -операции состоит в использовании локализационного условия для структурирования задачи к форме итерации одного и того же элементарного шага, в котором рассматривается только сингулярность, локализованная в изолированной точке.

После того как это понято, задача в существенном сводится к нахождению и анализу ограниченного числа представительных примеров с небольшим числом петель, для того чтобы понять механизм центрального рекурсивного шага (напомним, что конструктивный рецепт для случая

изолированной сингулярности дается принципом продолжения, обсуждавшимся выше).

В евклидовом случае достаточно рассмотреть двухпетлевые диаграммы¹⁶. Следующий двухпетлевой пример поможет проиллюстрировать этот момент.

Рассмотрим двухпетлевую евклидову диаграмму, показанную на рис.7. Две верхние жирные линии соответствуют тяжелым частицам с массой M , которая имеет порядок Q . Три других пропагатора содержат массы $m \ll Q, M$. Направим Q по жирным линиям. Тогда вся зависимость от тяжелых параметров будет удобно локализована в двух тяжелых пропагаторах. Задача состоит в разложении диаграммы по $m/M \rightarrow 0$.

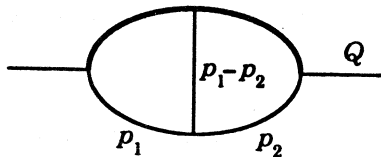


Рис. 7

Для простоты рассмотрим двумерную теорию. Тогда УФ-расходимости отсутствуют, в то время как нетривиальные сингулярности возникают уже в членах ведущего порядка $O(m^0)$ формального разложения по m .

Интеграл в целом имеет вид

$$\int d^2 p_1 d^2 p_2 \frac{1}{p_1^2 + m^2} \times \frac{1}{p_2^2 + m^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2} \times \\ \times \frac{1}{(p_1 - Q)^2 + M^2} \times \frac{1}{(p_2 - Q)^2 + M^2}.$$

Можно видеть, что два тяжелых пропагатора не зависят от m и составляют «пробную функцию», точный вид которой неважен. Ясно, что достаточно разложить произведение трех факторов, зависящих от m , в смысле теории распределений и подставить результат в интеграл.

Построение разложения факторов, зависящих от m , в смысле теории распределений является итерацией следующей последовательности шагов:

¹⁶Чтобы увидеть, как рекурсия будет продолжаться, здесь необходимо рассматривать некоторые свойства двухпетлевых диаграмм произведений, которые не нужны для разложения собственно двухпетлевых интегралов. Это все же менее громоздко, чем рассмотрение полного трехпетлевого случая. Более сложные примеры не показывают новых явлений. Усложнения, связанные с неевклидовыми режимами, делают уже однопетлевые диаграммы более трудными, с точки зрения построения разложений, чем евклидовы двухпетлевые. Тем не менее общие принципы работают и здесь.

- формальное разложение Тэйлора;
- изучение геометрии сингулярностей формального разложения;
- идентификация наборов пропагаторов (*IR*-подграфов), чьи сингулярности перекрываются в различных точках области интегрирования (*условие полноты*);
- изучение аналитической структуры сингулярностей (подсчет степеней);
- построение контрчленов.

Формальное разложение имеет вид

$$\frac{1}{p_1^2 + m^2} \times \frac{1}{p_2^2 + m^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2} \approx \frac{1}{p_1^2} \times \frac{1}{p_2^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + O(m^2). \quad (22)$$

Геометрия сингулярностей правой части (22) показана на рис. 8. Каждый знаменатель, который может обращаться в нуль, порождает многообразие, на котором локализована сингулярность. В нашем случае

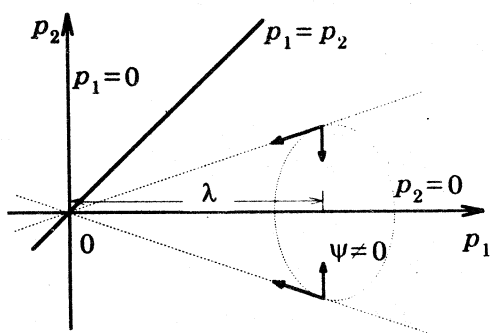


Рис. 8

имеются три разных двумерных подпространства, соответствующие каждому из трех множителей. Такие сингулярные многообразия могут пересекаться. Каждое пересечение должно рассматриваться как новое сингулярное многообразие, потому что природа сингулярности в соответствующих точках может быть нетривиальной. «Нетривиальная» в данном контексте означает, что сингулярность не факторизуется. В нашем случае

таким пересечением является точка $p_1 = p_2 = 0$; сингулярность здесь не факторизуется. В отсутствие любого из трех множителей сингулярность становится факторизующейся.

Перечисление всех пересечений не представляет затруднений: достаточно перечислить все подмножества сингулярных пропагаторов с учетом ограничений, налагаемых сохранением импульса. Это известно как *условие полноты* [49,50,106]. В самом деле, если положить равными нулю импульсы некоторого выбранного набора пропагаторов (что соответствует пересечению соответствующих многообразий), то могут быть пропагаторы, чьи импульсы автоматически занулятся из-за сохранения импульса.

са. Это означает, что их сингулярности накладываются на сингулярности набора, и такие пропагаторы нужно включить в этот набор. Наборы пропагаторов, которые не могут быть пополнены таким образом, суть в точности *IR-подграфы*. В настоящем случае имеется четыре *IR-подграфа*: $\gamma_1 = \{\text{пропагатор, зависящий от } p_1\}$; $\gamma_2 = \{\text{пропагатор, зависящий от } p_2\}$; $\gamma_3 = \{\text{пропагатор, зависящий от } p_1 - p_2\}$; $\gamma_{123} = \{\text{набор всех трех пропагаторов}\}$. Ни одна из трех пар пропагаторов не обладает свойством полноты и поэтому не является *IR-подграфом*.

Затем следует изучить аналитическую природу сингулярностей. Именно в этом месте в дело вводится локализационное условие. В самом деле, как объяснялось выше, разложение, справедливое на пробных функциях ψ , не равных нулю только в области, показанной на рис.8, дается формальным разложением множителей, регулярных в этой области, умноженным на разложение в смысле теории распределений для пропагатора, сингулярного в этой области. Разложение изолированного пропагатора уже известно (см. (18); в двумерном случае контрчлен, пропорциональный δ -функции, должен быть включен уже для первого члена формального разложения, который в этом случае будет иметь логарифмическую сингулярность при нулевом импульсе). Поэтому разложение в области имеет вид (здесь используется размерная регуляризация для придания смысла промежуточным выражениям):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_1^2} \times \left(\frac{1}{p_2^2} + c_0(m) \delta(p_2) \right) \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + O(m^2) = \\ & = \frac{1}{p_1^2} \times \frac{1}{p_2^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + \frac{1}{p_1^2} \times c_0(m) \delta(p_2) \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + O(m^2). \end{aligned}$$

Итак, анализ окрестности сингулярного многообразия $p_2 = 0$ показал необходимость введения контрчлена в правую часть. Легко рассмотреть аналогичным образом два сингулярных многообразия $p_1 = 0$ и $p_1 = p_2$. Получается выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_1^2} \times \frac{1}{p_2^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + \frac{1}{p_1^2} \times c_0(m) \delta(p_2) \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + \\ & + \frac{1}{p_1^2} \times \frac{1}{p_2^2} \times c_0(m) \delta(p_1 - p_2) + c_0(m) \delta(p_1) \times \frac{1}{p_2^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + O(m^2). \quad (23) \end{aligned}$$

Это разложение справедливо в смысле теории распределений на пробных функциях, которые могут отличаться от нуля всюду, кроме малой окрестности точки $p_1 = p_2 = 0$.

Можно также сказать, что после удаления точки $p_1 = p_2 = 0$ три многообразия перестают пересекаться (сингулярности «распадаются»), так что задача эффективно распадается на более простые подзадачи, соответствующие сингулярным многообразиям большей размерности и с меньшим числом пропагаторов, дающих вклад в соответствующие сингулярности.

Остается превратить разложение (23) в разложение, справедливое на всем пространстве интегрирования. Это делается в два логических шага. Во-первых, замечаем, что (подобно случаю R -операции в координатном представлении) разложение (23) (вместе с уже добавленными контрчленами) интегрируемо с пробными функциями из более широкого множества, не обязательно исчезающими в окрестности начала координат. Утверждение, в сущности, эквивалентное теореме Боголюбова — Парасюка, состоит в том, что такие пробные функции должны лишь иметь нуль второго порядка (подробное обсуждение теоремы Боголюбова — Парасюка в координатном представлении с точки зрения теории распределений дано в [56, 97]). Естественно предположить, что аппроксимационные свойства разложения (23) также сохраняются на таких пробных функциях. Это ключевой аналитический шаг в доказательстве. Предполагая, что это доказано, легко сделать второй шаг, который состоит в построении контрчлена для сингулярности в точке $p_1 = p_2 = 0$ точно таким же образом, как и в случае отдельного пропагатора. А именно: контрчлен должен быть линейной комбинацией δ -функции и ее производных первого порядка, причем коэффициенты имеют вид, аналогичный (19). Например, для коэффициента при δ -функции без производных имеем

$$c_0^{\{y_3\}}(m) = \int dp_1 dp_2 \frac{1}{p_1^2 + m^2} \times \frac{1}{p_2^2 + m^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2}.$$

(Обсуждение подобных выражений можно найти в [106]).

Сосредоточимся теперь на ключевом аналитическом пункте вышеприведенного рассуждения — на подсчете степеней в (23) в точке $p_1 = p_2 = 0$ в присутствии трех контрчленов. Рассмотрим снова пробную функцию, локализованную в области, показанной на рис.8. Введем параметр λ , как показано на рисунке, чтобы параметризовать пробную функцию $\psi_\lambda(p_1, p_2) \equiv \psi(p_1/\lambda, p_2/\lambda)$ (не предполагая ничего о нулях ψ). Ясно, что изучение сингулярности (23) в $p_1 = p_2 = 0$ эквивалентно изу-

чению зависимости значения распределения (23) на ψ_λ при $\lambda \rightarrow 0$. Как уже упоминалось, утверждение, по существу, эквивалентное теореме Боголюбова — Парасюка, состоит в том, что при фиксированном m ведущее степенное поведение есть λ^{-2} , т.е. такое же, как получается путем наивного подсчета степеней. С другой стороны, при фиксированном λ про остаточный член разложения (т.е. разность между начальным выражением, т.е. левой частью (22) и (23)) известно, что он имеет порядок $O(m^2)$. Теперь для того, чтобы проверить, что аппроксимационное свойство выполнено, нужно получить оценку остаточного члена, которая соединяла бы оба типа зависимости в факторизованном виде, т.е. $O(\lambda^{-2}) \times O(m^2)$.

Заметим, что это означает, что тип зависимости от λ и m здесь *тот же самый, что и в первом отброшенном члене*, — свойство, хорошо известное из более простых случаев асимптотических разложений. Учитывая, что аналитическая природа интегралов, с которыми нам приходится иметь дело (интегралы от рациональных функций), довольно проста (несмотря на внешнюю громоздкость, имеющую чисто комбинаторную природу), трудно представить себе, что это могло бы быть иначе. Во всяком случае такого рода оценки безусловно справедливы для отдельных пропагаторов, и требуется лишь провести формальное вычисление, чтобы вывести подобное свойство для произведения в целом. Наличие рекурсии сильно помогает, поскольку позволяет использовать (в этом состоит индуктивное предположение, которое, по существу, и требуется проверить) факторизованную оценку степенного поведения для отдельного пропагатора (более общо — для IR -подграфа, соответствующего сингулярному многообразию, с которым ведется работа).

Остается заметить, что удобный формальный язык для точного описания таких оценок и выполнения вычислений этого типа — в сущности, подсчет степеней в присутствии логарифмических модификаций — развит в [56,97] (так называемые *d-неравенства*).

Наконец, замечание о комбинаторном восстановлении разложений в глобальной операторной форме. Ясно, что окончательные формулы для разложений в формализме As -операции представляют собой суммы по IR -подграфам, которые имеют простую характеристику (см. выше условие полноты). Более того, из выражений для контрчленов нетрудно видеть, что они допускают непосредственную интерпретацию как проинтегрированные фейнмановские диаграммы, соответствующие некоторым матричным элементам. Это приводит к *радикальным упрощениям комбинаторики экспоненцирования* по сравнению с обычными рассуждениями (см. детали в [87,98,107]).

РАБОТА С УФ-РАСХОДЯЩИМИСЯ ДИАГРАММАМИ

Рассмотрим неперенормированную диаграмму. Пусть $G(p, M_{\text{tot}})$ — ее подынтегральное выражение, где p — набор импульсов интегрирования, а M_{tot} — набор всех ее внешних импульсов и всех масс, от которых зависят ее пропагаторы. Введем гладкое обрезание при больших $p \sim \Lambda$ посредством пробной функции $\Phi(p/\Lambda)$ такой, что $\Phi(0) = 1$. Тогда устремление $\Lambda \rightarrow \infty$ соответствует снятию обрезания и восстановлению интеграции по всему импульсному пространству. Представим обрезавшую функцию как сумму по сферическим слоям (ср.рис.9):

$$\Phi\left(\frac{p}{\Lambda}\right) = \int_0^{\Lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} \phi\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Меняя порядок интеграций по p и λ и заменяя $p \rightarrow \lambda p$, видим, что изучение интеграла $\int dp \Phi(p/\Lambda) G(p, M_{\text{tot}})$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ эквивалентно изу-

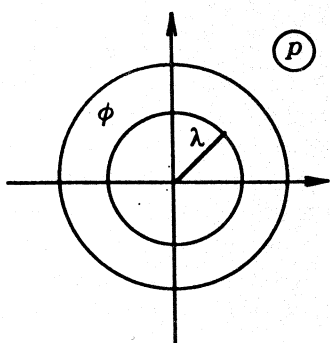


Рис. 9

чению выражения $\int dp \phi(p) G(p, M_{\text{tot}}/\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. А последнее — в точности то же самое, что изучение асимптотического разложения подынтегрального выражения при $M_{\text{tot}} \rightarrow 0$ в смысле теории распределений для $p \neq 0$. Можно сразу использовать формализм As-операции и получить *точную исчерпывающую информацию об УФ-расходимостях диаграммы*. Оказывается, что путем вычитания из подынтегрального выражения тех и только тех членов разложения, которые ответственны за УФ-расходимости, можно не только обеспечить автоматическую сходимость в УФ-области, но также получить правильную УФ-перенормировку, эквивалентную R-операции Боголюбова [75,98].

Можно показать, что после этого изучение разложений перенормированных диаграмм сводится к изучению двойного асимптотического разложения (As-операции по отношению к иерархии параметров, состоящей, с одной стороны, из легких параметров разложения и, с другой стороны, из совокупности всех размерных параметров диаграммы, как показано выше) [75,98]. Как и ранее, все, что требуется сделать, — это получить факторизованные оценки для остаточного члена двойного разложения. Такая задача существенных новых трудностей не содержит.

ЕВКЛИДОВА As -ОПЕРАЦИЯ

Более или менее полная теория As -операции к настоящему моменту развита для случая евклидовых асимптотических режимов, хотя идеология и большая часть техники являются совершенно общими. Принцип продолжения был найден в [33,47] (см. также [106] и ссылки там). Исходные мотивировки были следующие:

- анализ вывода R -операции Боголюбовым [1,6] в связи с многопетлевыми вычислениями теоретических групп из ОИЯИ (Дубна) [22] и ИЯИ РАН (Москва) [36];

- метод ренормгрупповых вычислений, развитый в [15,20,22,28]; этот метод основан на идее использования простой зависимости УФ-контрчленов в MS -схеме от масс и импульсов [52] для упрощения вычислений; по существу, метод включал в себя тэйлоровские разложения по массам и импульсам, что иногда приводило к трудностям из-за ИК-расходимостей типа обсуждавшихся выше;

- анализ операторного разложения на малых расстояниях с целью применения вычислительных алгоритмов для 3-петлевых безмассовых интегралов пропагаторного типа [29,32,38,84] к вычислению коэффициентов функций; стандартные формулы, предлагавшиеся теорией БПХЦ, оказались для этих целей бесполезными.

Мотивировки имели отчетливо прикладной характер. Соответственно первые результаты были также связаны с практическими вычислениями.

R^* -операция [35] обобщает метод ренормгрупповых вычислений, упомянутый выше. Эвристика, стоящая за рецептом R^* -операции [35,108], состоит в следующем. Возьмем диаграмму, контрчлен которой нужно вычислить в перенормированном виде, т.е. вместе со всеми контрчленами. Выполним теперь разложение такого выражения по какому-либо параметру диаграммы (например, по одной из масс) по рецептам теории As -операции. (Такое разложение заведомо упростит диаграмму с вычислительной точки зрения.) При этом учтем тот факт, что УФ-контрчлены в MS -схеме (в том числе тот, который необходимо вычислить) суть полиномы от размерных параметров [52], поэтому они разлагаются тривиально и войдут в конечное выражение известным образом; без ограничения общности можно считать, что диаграмма логарифмически расходится в УФ-области и вычисляемый контрчлен входит в выражение как аддитивная добавка. Теперь обратим внимание на то, что нужно вычислять не всю диаграмму, а только этот последний контрчлен. Тогда не важно, является ли получившееся выражение аппроксимацией исходной диаграммы. Но тогда не важны и аппроксимационные свойства контрчленов, вводимых As -операцией; попросту говоря, можно

проигнорировать конечные части ИК-контрчленов и выбирать их только исходя из требования ИК-сходимости. Схематически:

$$R_{MS} \circ G \rightarrow As \circ R_{MS} \circ G \rightarrow \tilde{R} \circ R_{MS} \circ G \equiv R^* \circ G,$$

где $\tilde{R}$ обозначает операцию, которая отличается от As -операции отсутствием конечных частей в контрчленах. Получающиеся формулы допускают независимые проверки прямыми вычислениями, поскольку даже в одной и той же диаграмме допустимы вариации, связанные с разным выбором параметров разложения; получающиеся при этом структуры ИК-расходимостей могут быть совершенно различными.

Определение IR -подграфа в оригинальной работе [35] не было вполне общим, поскольку была сделана попытка сформулировать его на языке координатного представления, что мотивировалось более ранними вычислительными алгоритмами [36]. Общая аналитическая характеристика ИК-контрчленов была представлена в [49,50] (см. пример условия полноты выше и подробное изложение в [106]).

Если используется α -представление, то аналитическое описание IR -подграфов через условие полноты уже недостаточно, и для работы с α -представлением была специально придумана теоретико-графовая версия определения IR -подграфов [54]. Хотя и непригодная для практической работы по причине своей чрезвычайной громоздкости, эта версия необходима для строгого доказывания уже известных результатов о многопетлевых диаграммах. Причина этого в том, что структура подынтегрального выражения в представлении характеризуется косвенно через вторичные теоретико-графовые понятия¹⁷. Далее, при переходе к параметрическим представлениям простая мультипликативная структура подынтегральных выражений в импульсном представлении разрушается, и строение подынтегрального выражения в α -представлении описывается посредством вторичных теоретико-графовых понятий (двудеревьев, коциклов и проч.). Соответственно условие полноты, весьма просто и естественно формулируемое на языке импульсного представления [106], становится совершенно строгим при переписывании в терминах коциклов [54].

С аналитической точки зрения сущность механизма метода R^* -операции сводится к свойству коммутативности двойной As -операции,

¹⁷Иногда утверждается, что такое косвенное (и, заметим, чрезвычайно громоздкое) описание является более «строгим», чем простое аналитическое. Это яркий пример того, как строгость иногда путают с бессодержательной громоздкостью неудачно формализованных «доказательств».

обсуждавшейся выше (полные доказательства этого свойства в виде, не зависящем от регуляризации, даны в [87,97]).

Имеется значительное количество вычислений, в которых применялась R^* -операция (см., например, [46,51,79,89,90]). Близкие по духу рассуждения были использованы в [80].

Алгоритмы для коэффициентных функций операторных разложений [39,45] в рамках MS-схемы оказались весьма успешными (см., например, недавние 3-петлевые вычисления [46,51,61,82,83,85,89]). Теоретическая и практическая важность требования совершенной факторизации в операторных разложениях была показана в [39,40].

Общие формулы для асимптотических разложений в евклидовых режимах в размерно-регуляризованной форме, удовлетворяющие критерию совершенной факторизации, были даны в [50,57,58] (см. также [107]) и обсуждались в литературе с традиционной точки зрения в работах [63,68,74]. Метод комбинаторного экспоненцирования разложений, разработанный в теории As-операции (в частности, метод обратной R-операции [62]), вызвал пересмотр комбинаторных аспектов и в теории БПХЦ [81].

Систематическое описание теории евклидовой As-операции с упором на приложения в рамках размерной регуляризации дано в [106,107,108].

Анализ теории евклидовой As-операции, не зависящий от используемой регуляризации, предпринят в работах [56,64,75,77,78,87,97,98]. Для детального сравнения того, как изучаются многопетлевые диаграммы в теории As-операции, с формализмом БПХЦ весьма важно новое представление для УФ-перенормированных диаграмм, разработанное в рамках теории As-операции [64,75,98]. Это представление дает удобный способ формулировки вычитательных схем типа MS-схемы [14] без использования размерной регуляризации. Развитие чисто 4-мерных аналитических формализмов весьма важно, ввиду того, что мощные расчетные методы, основанные на использовании спиральных амплитуд (см., например, [65]), выходят на центральное место в практике пертурбативной КХД.

Кроме уже упоминавшихся работ [63,68], проверке формул евклидовых асимптотических разложений, полученных в рамках теории As-операции [33,39,47,48,50,57,58,106,107], посвящена довольно необычная серия работ [71,74], опубликованных представителями московской школы приверженцев α -представления (ср. основополагающее сочинение этой школы [21]). Своеобразие этих работ в том, что хотя в них и не содержится сколько-нибудь существенных новых результатов, в них даются формализованные описания уже известных, весьма полезные для строгой теории α -представления.

Интересная математическая задача общего характера состоит в том, чтобы проанализировать и прояснить использование размерной регуляризации в приложениях непосредственно в импульсном представлении (ср. оригинальное определение [11] и любую работу с расчетами в пертурбативной КХД). Формальный перевод эвристически полученных результатов на язык параметрических представлений, как это было сделано, например, в [19,81], остается неудовлетворительным, поскольку совершенно ничего не дает в эвристическом плане. Имеются частичные результаты в правильном направлении (см. [37] и ссылки там), но они, по-видимому, недостаточны. В этой связи нужно отметить недавно обнаруженный эффект нарушения размерной регуляризации в неевклидовых асимптотических режимах [101]. Этот результат подчеркивает необходимость более содержательного математического изучения размерной регуляризации.

К НЕЕВКЛИДОВОЙ As -ОПЕРАЦИИ

При распространении метода As -операции на неевклидовы асимптотические режимы возникают технические проблемы, связанные с тем фактом, что квадратичные формы в знаменателях фейнмановских пропагаторов, в отличие от евклидова случая, не являются положительно определенными. Поэтому сингулярности отдельных сомножителей локализованы на многообразиях второго порядка, которые могут быть сингулярны в дифференциально-геометрическом смысле (особенность в вершине светового конуса). Возникают следующие трудности.

Оскулирующие («слипающиеся») сингулярности (пересечения сингулярных многообразий не общего положения). Чтобы проанализировать природу таких сингулярностей, необходимо выполнять выпрямляющие деформации координат. Такие деформации должны быть найдены в явном виде, что не всегда тривиально. Другое следствие в том, что рескейлинги переменных, которые нужно проделать для подсчета степеней (ср. выше), асимметричны, т.е. степень растяжения по разным направлениям различна.

Возможны проблемы из-за алгебраической зависимости между скалярными инвариантами в знаменателях. Напомним, что между векторами, число которых превышает размерность пространства, всегда существует линейная зависимость. Это может сделать невозможным простую характеризацию IR -подграфов. Однако в ряде конкретных случаев, видимо, возможен полный анализ.

Неоднородные выражения для контрчленов, которые возникают из условий самосогласованности. Здесь нужно выполнять вторичное разложение (так называемая *гомогенизация*). В результате возникают со-

множители, которые более не соответствуют стандартным пропегаторам и имеют необычное УФ-поведение. Гомогенизация в общем случае может быть весьма тонкой процедурой с необычным взаимодействием между УФ- и ИК-расходимостями.

Сложная двухуровневая рекурсия, которая связана с вторичным разложением в контрчленах (гомогенизацией) и которая отнюдь не допускает явного решения типа трехточечных произведений или лесной формулы, возникающих в теории БПХЦ. Это, вероятно, является непреодолимым препятствием для обычных методов доказательств.

Неприменимость размерной регуляризации [101] является, по всей видимости, весьма общей чертой неевклидовых разложений. Последствия этого факта для вычислительных приложений, где роль размерной регуляризации огромна, могут быть драматическими. Во всяком случае с простотой (зачастую обманчивой) формул, к которой мы привыкли в рамках размерной регуляризации, придется, по-видимому, распрощаться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершить обзор удобно с помощью следующей аналогии из истории математики, которая довольно точно иллюстрирует некоторые психологические аспекты того, как в научном сообществе воспринимаются новые парадигмы (см. табл. 4).

Таблица 4

Греко-римская арифметическая нотация в Европе до IX в.	Позиционная система принесена арабами из Индии
позволяет приступить к работе немедленно: $I + I = II$	сначала нужно выучить новые правила: $1 + 1 = 2$
ОДНАКО	
в сложных задачах быстро возникают трудности: МСМХСП	после усвоения новых правил проблем нет: 1993
Языки низкого уровня:	↔ Языки высокого уровня:
БПХЦ	As-операция

Полезно вспомнить, что во Флоренции еще в 1299 г. использование позиционной десятичной системы в банковских бухгалтерских книгах было запрещено законом [7]. Сегодня кажется невероятным, но тогда де-

сятичная система казалась сложной и непонятной. Теперь мы знаем, что в конечном счете десятичная система проложила путь к открытию десятичных дробей, двоичной системы и к арифметике с плавающей точкой, встроенной в любой персональный компьютер. Здесь уместно вспомнить отзывы на ранние работы по теории As -операции, полученные от экспертов по теории БПХЦ (см. вышеприведенные цитаты)¹⁸. Эта аналогия также помогает понять, почему, например, трудно удовлетворить обычную просьбу — объяснить основные идеи теории As -операции на простом однопетлевом примере; анализ таких примеров состоит в основном из новых определений, смысл и значение которых выясняются только при анализе довольно громоздких интегралов, рассмотреть которые прямыми методами чрезвычайно трудно. В то же время в простых примерах вполне можно обойтись и без теории распределений (ср. $I + I = II \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$).

Тем не менее совершенно очевидно, что теория As -операции доказала вполне определенно свой потенциал — как в эвристическом плане, указав уникальные вычислительные алгоритмы, так и в формальном плане, дав новые, весьма компактные методы формальных доказательств. Более того, на данный момент представляется вполне определенно, что проблемы, перечисленные выше при обсуждении неевклидовых асимптотических режимов, допускают вполне конкретные решения в рамках теории As -операции. Надеюсь иметь возможность обсудить эти решения в недалеком будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н.Н. — ДАН СССР, 1952, т.82, с.217.
2. Судаков В.В. — ЖЭТФ, 1956, т.30, №1, с.87.
3. Littlewood J.E. — A Mathematician's Miscellany. London, 1957.
4. Bogoliubov N.N., Parasiuk O.S. — Acta Math., 1957, vol.97, No.3,4, p. 227.
5. Landau L.D. — Nucl. Phys., 1959, vol.13, p. 187.
6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Физматгиз, 1957 (1 изд.).
7. Struik D.J. — Abriss der Geschichte der Mathematik. Berlin: VEB Deutscher Verlag, 1963.
8. Wilson K. — Phys. Rev., 1969, vol.179, p.1499.
9. Hepp K. — Theorie de la Renormalization. Lecture Notes in Physics, vol. 2. Heidelberg: Springer, 1969.
10. Zimmermann W. — In: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory. 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics (Deser S. et al., Ed.). MIT Press: Cambridge (Mass.), 1970.
11. 't Hooft G., Veltman M. — Nucl. Phys. B, 1972, vol.44, No.1, p.189.

¹⁸Как известно, основной метод освоения новых способов мышления человеческими сообществами — смена поколений.

12. Zimmermann W. — Ann. Phys., 1973, vol.77, No.2, p.570.
13. Славнов Д.А. — ТМФ, 1973, т.17, №2, с.169.
14. 't Hooft G. — Nucl. Phys. B, 1973, vol.61, No.2, p.455.
15. Jones D.R.T. — Nucl. Phys. B 1974, vol. 75. No. 3, p. 531.
16. Gaillard M., Lee B.W. — P. Rev. Lett., 1974, vol.33, No.1, p.108.
17. Altarelli G., Maiani L. — Phys. Lett. B, 1974, vol.52, No.3, p.351.
18. Lipatov L.N. — Sov. J. Nucl. Phys., 1976, vol.23, p.338.
19. Breitenlohner P., Maison D. — Commun. Math. Phys., 1977, vol.52, No.1, p.55.
20. Владимиров А.А. — ТМФ, 1978, т.36, №2, с.271.
21. Завьялов О.И. — Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
22. Владимиров А.А., Ширков Д.В. — УФН, 1979, т.22, с.860.
23. Казаков Д.И., Тарасов О.В., Ширков Д.В. — ТМФ, 1979, т.38, №1, с.15.
24. 't Hooft G., Veltman M. — Nucl. Phys. B, 1979, vol.153, No.3,4, p.365.
25. Казаков Д.И., Ширков Д.В. — Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля. Лекции для молодых ученых, Дубна, ОИЯИ, 1980.
26. Ellis R.K., Furman M.A., Haber H.E., Hinchliffe I. — Nucl. Phys. B, 1980, vol.173, p.397.
27. De Calan C., Malbouisson A.P.C. — Ann. Inst. H.Poincare A, 1980, vol.32, No.1, p.91.
28. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. — Nucl. Phys. B, 1980, vol.174, No.2/3, p.345.
29. Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1981, vol.100, No.1, p.65.
30. Mueller A.H. — Phys. Reports, 1981, vol.73, No.4, p.238.
31. Manoukian E.B. — J. Phys. G, 1981, vol.7, No.9, p.1159.
32. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. — Nucl. Phys. B, 1981, vol.192, No.1, p.159.
33. Tkachov F.V. — In: «Quarks-82» (1982, May 5—7, Sukhumi, USSR). INR, USSR Acad. Sci.: Moscow, 1983.
34. Pohlmeier K. — J. Math. Phys., 1982, vol.23, p.2511.
35. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1982, vol.114, No.5, p.340.
36. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. — In: Quantum Chromodynamics. Proc. Extended Triangle Meeting Hadron Structure '80 (Nogov A., Ed.). VEDA: Bratislava, 1982.
37. Блехер П.М. — ТМФ, 1982, т.50, №3, с.370.
38. Ткачев Ф.В. — ТМФ, 1983, т.56, с.350.
39. Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1983, vol.124, No.3,4, p.212.
40. Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1983, vol.125, No.1, p.85.
41. Радюшкин А.В. — ЭЧАЯ, 1983, т.14, №1, с.58.
42. Kinoshita T., Lindquist W.B. — Phys. Rev. D, 1983, vol.27, No.4, p.853.
43. Kazakov D.I. — Phys. Lett. B, 1983, vol.133, p.406.
44. Июффе Б.Л., Липатов Л.Н., Хозе В.А. — Глубоконеупругие процессы. (Феноменология. Партоновая модель). М.: Энергоатомиздат, 1983.
45. Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1983, vol.124, No.3,4, p.217.
46. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1983, vol.132, No.4,5,6, p.351.
47. Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. P-332, Moscow, 1984.
48. Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. INR P-358, Moscow, 1984.
49. Popov E.N. — Preprint JINR E2-84-569, Dubna, 1984.
50. Pivovarov G.B., Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. P-370, Moscow, 1984.
51. Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. — Phys. Lett. A, 1984, vol.101, p.120.
52. Collins J.C. — Renormalization. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
53. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984 (4 изд.).

54. Смирнов В.А., Четыркин К.Г. — ТМФ, 1985, т.63, №2, с.208.
55. Kosinski P., Maslanka P. — Lett. Math. Phys., 1985, vol.9, p.157.
56. Vlasov V.V., Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. P-504, Moscow, 1986.
57. Pivovarov G.B., Tkachov F.V. — In: Int. Seminar Quarks-86 (1986, Tbilisi, Georgia). VNU Science Press., 1987.
58. Pivovarov G.B., Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. P-459, Moscow, 1986.
59. Корчемский Г.П., Радюшкин А.В. — ЯФ, 1987, т.45, с.910.
60. Ellis S.D. — In: «The 1987 Theoretical Advanced Study Institute» (1987, July, St. John's College, Santa Fe, NM), (also preprint NSF-ITP-88-55).
61. Сургуладзе Л.Р., Ткачев Ф.В. — ТМФ, 1988, т.75, №2, с.245.
62. Пивоваров Г.Б., Ткачев Ф.В. — ТМФ, 1988, т.77, №1, с.51.
63. Llewellyn Smith C.H., de Vries J.P. — Nucl. Phys. B, 1988, vol.29, p.991.
64. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V. — In: «Quarks-88» (1988, May, Tbilisi, Georgia).
65. Berends F.A., Giele W.T. — Nucl. Phys. B, 1988, vol.306, No.4, p.759.
66. Surguladze L.R., Tkachov F.V. — Comp. Phys. Commun., 1989, vol.55, No.2, p.205.
67. Gorishny S.G., Larin S.A., Surguladze L.R., Tkachov F.V. — Comp. Phys. Commun., 1989, vol.55, No.2, p.381.
68. Gorishny S.G. — Nucl. Phys. B, 1989, vol.319, No.3, p.633.
69. Collins J.C., Soper D.E., Sterman G. — In Perturbative QCD (Mueller A. H., Ed.). World Scientific: Singapore, 1989.
70. Collins J.C. — In Perturbative QCD (Mueller A. H., Ed.). World Scientific: Singapore, 1989.
71. Chetyrkin K.G. — Preprint ICTP IC/88/418. Miramare-Trieste, 1989.
72. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. — Квантовая электродинамика. Л.Ландау, Е.Лифшиц. Курс теоретической физики. М.: Наука, 1989, т.4 (3 изд.).
73. van Oldenborgh G.J., Vermaseren J.A.M. — Z. Phys. C, 1990, vol.46, p.425.
74. Smirnov V.A. — Commun. Math. Phys., 1990, vol.134, No.1, p.109.
75. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V. — Preprint NIKHEF-H/90-17, 1990.
76. van Neerven W.L., Zijlstra E. — Phys. Lett. B, 1991, vol.272, No.1,2, p.127.
77. Tkachov F.V., Vlasov V.V. — Preprint McGill-91/03. Montreal, 1991.
78. Tkachov F.V., Vlasov V.V. — Preprint McGill-91/04. Montreal, 1991.
79. Surguladze L.R., Samuel M.A. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.66, p.560.
80. Spiridonov V.P., Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1991, vol.260, No.1,2, p.109.
81. Smirnov V.A. — Renormalization and Asymptotic Expansions. Progress in Physics, vol.14. Basel: Birkhauser, 1991.
82. Larin S.A., Vermaseren J.A.M. — Phys. Lett. B, 1991, vol.259, No.3, p.345.
83. Larin S.A., Tkachov F.V., Vermaseren J.A.M. — Phys. Lett. B, 1991, vol.272, No.1,2, p.121.
84. Larin S.A., Tkachov F.V., Vermaseren J.A.M. — Preprint NIKHEF-H/91-18, 1991.
85. Larin S.A., Tkachov F.V., Vermaseren J.A.M. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.66, No.7, p.862.
86. Laporta S., Remiddi E. — Preprint Bologna Univ., DFUB 91-3, 1991.
87. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V., Vlasov V.V. — Preprint FERMILAB-PUB-91/346-T, 1991.
88. Grinstein B. — Preprint Lyman Labs., Harvard Univ., HUTP-91/A028, 1991.
89. Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A., Surguladze L.R. — Phys. Lett. B, 1991, vol.256, No.1, p.81.
90. Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A. — Phys. Lett. B, 1991, vol.259, No.1,2, p.144.
91. Contogouris A.P., Papadopoulos S., Kamal B. — Nucl. Phys. B, 1991, vol.23, No.1, p.119.
92. Chiappetta P., Ermolaev B.I., Guillet J.P.H. — Preprint CPT-91/P, 2594. Marseille, 1991.
93. Bethke S. — Preprint CERN-PPE/91-36, 1991.

94. van Neerven W. — In: «New Techniques for Calculating Higher Order QCD Corrections» (1992, 16—18 December 1992, ETH, Zürich). ETH: Zürich, 1992.
95. Ussyukina N.I., Davydychev A.I. — In: «VII Workshop on High-Energy Physics and Quantum Field Theory» (1992, October 6—14, 1992, Sochi, USSR). Sov. J. Nucl. Phys.: Moscow.
96. Li H.-N., Sterman G. — Nucl. Phys. B, 1992, vol.381, p.129.
97. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V., Vlasov V.V. — Preprint Penn. State Univ. PSU-92/108-T, 1992.
98. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. INR-809/93, Moscow, 1992.
99. Kosower D.A. — In «New Techniques for Calculating Higher Order QCD Corrections» (1992, 16—18 December 1992, ETH, Zürich). ETH: Zürich, 1992.
100. Korchemsky G.P., Radyushkin A.V. — Phys Lett. B, 1992, vol.279, No.3,4, p.359.
101. Collins J.C., Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1992, vol.294, No.3,4, p.403.
102. Broadhurst D.J. — In: «Artificial Intelligence '92» (1992, January), (available as preprint OUT-4102-37).
103. Boos E.E., Davydychev A.I. — J. Math. Phys., 1992, vol.33, No.1, p.358.
104. Bethke S. — In: «New Techniques for Calculating Higher Order QCD Corrections» (1992, 16—18 December 1992, ETH, Zürich). ETH: Zürich, 1992.
105. Badelek B., Charchula K., Krawczyk M., Kwiecinski J. — Rev. Mod. Phys., 1992, vol.64, No.4, p.927.
106. Tkachov F.V. — Int. J. Mod. Phys. A, 1993, vol.8, No.12, p.2047.
107. Pivovarov G.B., Tkachov F.V. — Int. J. Mod. Phys. A, 1993, vol.8, No.13, p.2241.
108. Tkachov F.V. — Int. J. Mod. Phys. A (to be publ.).

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ФОТОННЫХ ПУЧКОВ ПО АСИММЕТРИИ ЭЛЕКТРОНОВ ОТДАЧИ ПРИ ФОТООБРАЗОВАНИИ e^+e^- -ПАР НА ЭЛЕКТРОНАХ

*В.Ф.Болдышев, Е.А.Винокуров,
Н.П.Меренков, Ю.П.Пересунько*

Национальный научный центр
«Харьковский физико-технический институт», Харьков, Украина

Рассматриваются основные характеристики процесса фоторождения e^+e^- -пар на электронах (триплетов) и обсуждаются возможности использования этого процесса для измерения степени линейной поляризации фотонных пучков в широком интервале энергий от 25 МэВ до нескольких ТэВ. Анализируется поведение различных дифференциальных сечений и азимутальной асимметрии вылета электронов отдачи в зависимости от энергии фотона, величины импульса и полярного угла вылета электронов отдачи, минимального детектируемого импульса отдачи, инвариантной массы рожденной пары, доли энергии, уносимой позитроном. Определяются оптимальные условия для проведения экспериментов, обсуждаются возможности создания поляриметра на основе измерения азимутальной асимметрии электронов отдачи с использованием трековых приборов и быстродействующих счетчиков. Приводятся результаты проверочного эксперимента по измерению линейной поляризации фотонов, проведенного на харьковском ускорителе электронов.

The main characteristics of the process of e^+e^- pair photoproduction on the electrons (triplets) are reviewed and the possibility of this process to be used for the photon beam linear polarization measurement in the wide energy region from 25 MeV to few TeV is discussed. The differential cross section and the azimuthal asymmetry of recoil electrons are determined versus: the photon energy; the recoil electron momentum and its polar angle; the minimal recoil electron momentum which can be detected; e^+e^- pair invariant mass, and versus the positron energy. The optimal kinematical conditions for the experiments are determined and the possibility of constructing the polarimeter is discussed. This polarimeter is to be based on the recoil electron azimuthal asymmetry measurement by means of tracking devices and high-speed counters. The results of the experiment on the photon linear polarization measurement, which was held at the Kharkov electron accelerator, are presented.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты с поляризованными частицами позволяют более глубоко и критично исследовать динамические механизмы, лежащие в основе различных взаимодействий. Пример этому — фазовые анализы про-

цессов πN -рассеяния [1] и фоторождения пионов на нуклонах [2—4] при малых энергиях, в которых широко используются данные поляризационных опытов. Аналогичная задача стоит и для процессов при промежуточных и очень высоких энергиях.

На современных ускорителях можно создать пучки поляризованных фотонов с энергией до сотен ГэВ [5,6]. Для проведения экспериментов с такими пучками и получения достоверной информации о механизмах взаимодействия необходимо знать с высокой точностью степень поляризации фотонных пучков больших энергий.

Существующие методы анализа поляризации фотонов высоких энергий можно разделить на три группы. В первой группе используются реакции фоторождения частиц на аморфных мишенях и исследуются корреляции между поляризацией фотона и кинематическими характеристиками конечных частиц. Во второй группе используются когерентные эффекты взаимодействия фотонов с монокристаллами, которые приводят к зависимости поглощения фотонов, если конечные частицы не регистрируются, или выхода продуктов реакций фоторождения от относительного расположения вектора поляризации фотона $\mathbf{P}$ и кристаллографических осей или плоскостей монокристалла. Для измерения поляризации фотонов возможны и эксперименты третьей группы, в которых используются корреляции поляризаций частиц начального и конечного состояний. Необычайная сложность таких экспериментов в связи с необходимостью измерения поляризации частиц конечного и начального состояний делает их в настоящее время неосуществимыми.

В методах первой и второй групп дифференциальное сечение процесса рождения линейно поляризованными фотонами обладает азимутальной асимметрией и обычно записывается в виде

$$2\pi \frac{d\sigma}{d\varphi} = \sigma^{(t)} + P \sigma^{(l)} \cos 2\varphi = \sigma^{(t)} [1 + P \Lambda \cos 2\varphi]. \quad (1)$$

Здесь $\sigma^{(t)}$ — сечение процесса на неполяризованных фотонах, $\sigma^{(l)}$ — часть сечения, связанная с поляризацией фотона, P — степень линейной поляризации фотонного пучка, $\Lambda = \sigma^{(l)}/\sigma^{(t)}$ — асимметрия выхода продуктов реакции при $P = 1$, которая часто называется анализирующей способностью процесса, φ — азимутальный угол. Для методов первой группы это угол между плоскостью поляризации фотонного пучка, содержащей векторы поляризации фотонного пучка $\mathbf{P}$ и 3-импульса фотона $\mathbf{k}$, и плоскостью выхода регистрируемой частицы, содержащей ее 3-импульс и вектор $\mathbf{k}$; для процессов второй группы это угол между плоскостью поляризации фотонного пучка и плоскостью, содержащей вектор $\mathbf{k}$ и одну из осей обратной решетки кристалла $\mathbf{b}_1$.

Для определения P может использоваться любая реакция с большими значениями $\sigma^{(t)}$ и Λ . Наиболее подходящими являются процессы квантовой электродинамики (КЭД), поскольку для них $\sigma^{(t)}$ и Λ могут вычисляться с необходимой точностью. Многие адронные процессы имеют большие значения Λ , однако интерпретация экспериментов с участием адронов затрудняется в связи с отсутствием теории сильного взаимодействия, а точность экспериментальных значений Λ для таких процессов значительно хуже, чем для процессов КЭД. Несмотря на это, некоторые процессы с участием адронов использовались для определения степени линейной поляризации фотонов. В частности, процесс фотодезинтеграции дейтерия на основании данных [7—9] использовался при энергиях фотонов ω в области $\omega \leq 80$ МэВ [10,11], а процесс фоторождения ρ_0 -мезонов оказался эффективным [12—15] в области $2,5 \leq \omega \leq 6$ ГэВ. В работе [16] процесс резонансного рассеяния поляризованных фотонов на уровне $\omega_0 = 15,1$ МэВ ядра ^{12}C использовался для измерения поляризации фотонного пучка с интенсивностью, меньшей 10^5 фот./с.

Из процессов КЭД при энергиях фотонов, больших нескольких десятков МэВ, перспективны процессы рождения e^+e^- -пар на ядрах и электронах. В процессах

$$\gamma + A \rightarrow A + e^+ + e^-, \quad (2)$$

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ \rightarrow e^- \quad (3)$$

фотон с 4-импульсом $k = (k, \omega)$ и вектором поляризации P (рис.1) на ядре с массовым числом A и зарядом Z или на электроне образует e^+e^- -пару с импульсами и энергиями ее фрагментов $|p_+|, |p_-| \sim |k|/2$ и $E_+, E_- \sim \omega/2$, полярными углами $\theta_+, \theta_- \sim mc^2/\omega$ (m — масса электрона, c — скорость света), отсчитываемыми от вектора k , и азимутальными углами φ_+ и φ_- . Величина составляющей импульса отдачи q вдоль k

$$q_{\parallel} = \omega - |p_+| \cos \theta_+ - |p_-| \cos \theta_- \quad (4)$$

порядка минимально допустимого импульса отдачи $m^2 c^3 \omega / (2E_+ E_-)$; величина квадрата его поперечной составляющей

$$q^2 = (|p_+| \sin \theta_+ - |p_-| \sin \theta_-)^2 + 4|p_+| |p_-| \sin \theta_+ \sin \theta_- \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

$$\Phi = \pi - (\varphi_- - \varphi_+) \quad (5)$$

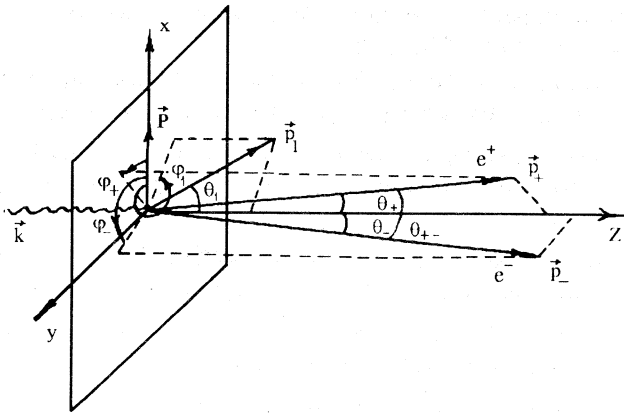


Рис.1. Импульсы и углы частиц конечного состояния в процессе рождения e^+e^- -пар линейно поляризованными фотонами. p_1 — импульс частицы отдачи ($|p_1| = q$)

порядка m^2c^2 . Сечения процессов (2) и (3) пропорциональны, соответственно, Z^2 и Z и растут с увеличением ω . При очень больших ω этот рост логарифмический.

Ядро отдачи в процессе (2) обладает малой кинетической энергией и регистрироваться не может. Для анализа поляризации фотонов используются фрагменты пар. Поскольку в перпендикулярную составляющую нерегистрируемого импульса отдачи ядра входит угол Φ , величины $\sigma^{(t)}$ и $\sigma^{(l)}$ зависят от интервала усреднения по этому углу.

В случае аморфного конвертора эта зависимость особенно существенна, когда $\varphi_- - \varphi_+ \approx \pi$. Положение плоскости преобладающего выхода пары относительно плоскости поляризации фотонов (плоскости XZ на рис.1) и значение Λ сильно зависят от геометрии опыта [17—20]. Сечение, проинтегрированное по Φ в интервале $-\Delta\Phi \leq \Phi \leq \Delta\Phi$, дает при некотором характерном угле $\Delta\Phi = \Delta\Phi_0$ изотропный выход, при $\Delta\Phi > \Delta\Phi_0$ преобладает выход пар в плоскости поляризации, а при $\Delta\Phi < \Delta\Phi_0$ — в перпендикулярной ей плоскости. Малая величина $\Delta\Phi_0$ и убывание θ_+ , θ_- как $mc^2/\hbar\omega$ приводят к трудности в определении φ_+ , φ_- и восстановлении плоскости, в которой летят фрагменты пары. Это ограничивает возможности метода энергиями фотонов порядка 1 ГэВ. В работах [21—26] с помощью магнитных спектрометров с аморфными

конверторами измерена линейная поляризация фотонных пучков с энергией в интервале 150÷950 МэВ.

В случае монокристаллического конвертора выход пар определяется углом φ в (1) между плоскостями (k, P) и (k, b_1) , который достаточно просто определяется экспериментально. В настоящее время известно два метода использования монокристалла для измерения линейной поляризации фотонов.

В [27] предложено определять поляризацию фотонов с $\omega > 1$ ГэВ, измеряя с помощью магнитного спектрометра выход симметричных пар из тонкого монокристалла. При этом $\sigma^{(t)}$ и Λ в (1) сильно зависят от угла θ между k и b_1 . Угол θ_M , обеспечивающий максимальное значение Λ , убывает с ростом ω , и это затрудняет измерение поляризации при $\hbar\omega \gtrsim 40$ ГэВ. Этим методом измерена линейная поляризация фотонов с энергией 2 ГэВ [28], а также с энергией 1,5 и 4,4 ГэВ [29].

Метод селективного поглощения [30—32] заключается в том, что при высоких энергиях полное сечение поглощения фотонов, по сути, равно сечению рождения пар, которое в соответствии с (1) зависит от φ . После прохождения через ориентированный монокристалл толщиной t линейно поляризованный пучок фотонов с поляризацией P за счет рождения e^+e^- -пар ослабляется по закону

$$(I(t)/I(\theta))_P = (I(t)/I(0)) [1 + P \operatorname{th} (1/2 \sigma \Lambda t) \cos 2\varphi], \quad (6)$$

где $(I(t)/I(0))_P$ и $I(t)/I(0)$ — отношения интенсивностей пучка после прохождения кристалла к начальной интенсивности для поляризованного и неполяризованного пучков, σ — усредненное по поляризациям фотонов сечение, Λ — асимметрия рождения пар в кристаллах. Этот метод может оказаться эффективным при энергиях фотонов выше нескольких ГэВ. Недостаток метода — большое ослабление пучка при прохождении толстого кристалла.

В настоящее время очень широко используются пучки когерентного тормозного излучения (КТИ) электронов в монокристаллах. Линейная поляризация таких пучков определяется на основе теории КТИ [33—35] по когерентному эффекту [36,37] и по спектру интенсивности КТИ [38]. Эти методы позволяют оценить значение поляризации пучка КТИ. Использование когерентного эффекта дает только одно значение линейной поляризации — в максимуме интенсивности КТИ. Зная спектр интенсивности КТИ, можно определить спектр его поляризации. Этот метод сопряжен с трудностями при измерении спектра интенсивности и при учете реальных условий образования КТИ.

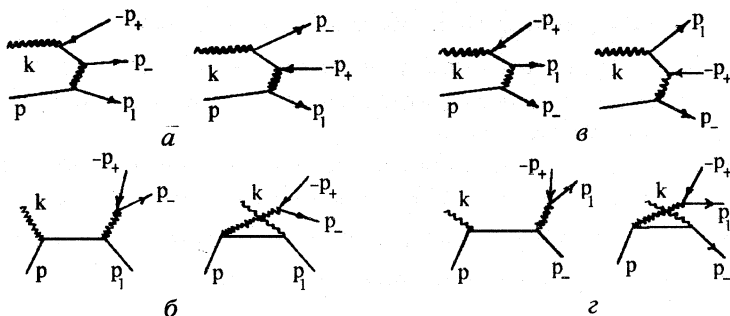


Рис.2. Диаграммы Фейнмана, описывающие процесс фоторождения e^+e^- пар на свободных электронах

Процесс (3) оказывается очень удобным для измерения линейной поляризации фотонных пучков в очень широком интервале энергий фотонов. Значительная часть электронов отдачи обладает кинетической энергией, достаточной для их регистрации. Поскольку в конечном состоянии этого процесса три регистрируемые частицы, о нем говорят, как о процессе фоторождения триплетов.

Регистрируемые электроны отдачи обладают импульсом q , большим некоторого, в каждом случае своего, минимально регистрируемого импульса $q_0 \sim 1mc^2$. С ростом q сечение процесса (3) убывает, но при $\hbar\omega \gtrsim 100mc^2$ характер убывания [45] не зависит от ω . Сечение $\sigma(q_0)$ рождения триплетов с $q \geq q_0$ [44,46] увеличивается с ростом ω и при $\hbar\omega \gtrsim 100mc^2$ имеет тенденцию выйти на плато. Экспериментальные распределения по полярному углу θ_1 (см. рис.24) [47,46,43] симметричны относительно максимумов при $\theta_1 \approx 55^\circ$, сильно скоррелированы с импульсными распределениями (большему импульсу соответствует меньший угол). Они, как предполагается, подобно импульсному распределению, не зависят от энергии фотонов. В области максимума концентрируются электроны с $q \approx 1$ МэВ/с. Из сказанного ясно, что значительная часть электронов отдачи обладает импульсами и полярными углами, дающими возможность надежно определять их азимутальный угол φ_1 . Доля таких электронов слабо меняется с ростом ω .

В низшем порядке теории возмущений процесс (3) описывается диаграммами Фейнмана, показанными на рис.2. Диаграммы *а* с обменом фотоном в t -канале дают вклад, преобладающий при высоких энергиях ($\hbar\omega \gtrsim 10mc^2$) [48]. По сложившейся традиции их называют диаграммами

Борселлино. Вклад диаграмм b с ростом энергии убывает, по крайней мере, как $mc^2/\hbar\omega$. Они называются γe -диаграммами. Остальные диаграммы учитывают тождественность электронов в конечном состоянии и называются обменными диаграммами.

Образование триплетов линейно поляризованными фотонами впервые исследовалось в работах [49,50]. С учетом диаграмм рис.2, a в [49] получено сечение $d\sigma/d\varphi_1$ в интервале энергий $20mc^2 \leq \hbar\omega \leq 1000mc^2$ и сечение $d\sigma/d\varphi_1(q_0)$ [50] рождения триплетов с $q \geq q_0$ в интервалах $100mc^2 \leq \hbar\omega \leq 1000mc^2$ и $0,05 \leq q_0 \leq 1,25$ МэВ/с. В этих интервалах ω и q_0 выход электронов отдачи обладает значительной азимутальной асимметрией, чувствительной к линейной поляризации фотонов. В интервале $100mc^2 \leq \hbar\omega \leq 1000mc^2$ при $q_0 \sim m$ сечение порядка нескольких мб, а асимметрия, хотя и убывает с ростом ω и q_0 , все же при $\hbar\omega = 1000mc^2$ и $q_0 = 1,25$ МэВ/с равна 0,131. В работах [51,52], пренебрегая членами порядка $mc^2/\hbar\omega$, авторы получили с учетом диаграмм Борселлино выражения для сечений $d^2\sigma_a/d\varphi_1 dq$, $d\sigma_a/d\varphi_1(q_0)$, $d\sigma_a/d\varphi_1$ и $d^2\sigma_a/d\varphi_1 dx(q_0)$ ($x = E_+/\hbar\omega$). Анализ показал, что асимптотические значения сечений и асимметрий отличаются от точных значений не более чем на $\sim 10\%$. Это означает, что, в отличие от всех методов, рассмотренных выше, процесс (3) может использоваться для измерения линейной поляризации фотонов по азимутальной асимметрии электронов отдачи в очень широком диапазоне энергий фотонов.

Последующие работы [53—64,11] были направлены на разработку метода измерения линейной поляризации фотонов, основанного на азимутальной асимметрии выхода электронов отдачи в процессе фоторождения триплетов. Исследована зависимость различных дифференциальных сечений от кинематических параметров конечных частиц, определены оптимальные условия для проведения опыта по измерению линейной поляризации фотонных пучков [57—64]. Исследованы возможности метода при измерении степени линейной поляризации фотонов с помощью трековых приборов [53,54] и устройств, использующих быстродействующие детекторы [64]. С помощью стримерной камеры СК-600 проведен [11] проверочный эксперимент по измерению линейной поляризации пучка когерентного тормозного излучения электронов харьковского линейного ускорителя ЛУЭ-2000 с энергией фотонов в когерентном пике 60 МэВ. Описанию результатов исследований, связанных с разработкой метода измерения линейной поляризации фотонных пучков, посвящен данный обзор.

2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА ФОТОРОЖДЕНИЯ ТРИПЛЕТОВ

В работах [49—52] была показана принципиальная возможность использования азимутальной асимметрии электронов отдачи в процессе (3) для измерения линейной поляризации фотонных пучков. Однако при разработке надежного метода измерения линейной поляризации фотонов необходимо рассмотреть следующие вопросы: каковы эффекты γe -диаграмм и диаграмм, учитывающих тождественность конечных электронов, которые не учитывались в [49—52]; каковы величины радиационных поправок; как влияет связь электронов в атоме на характеристики процесса; имеются ли области кинематических параметров, где перечисленными факторами можно пренебречь, и как зависит сечение от различных кинематических переменных. В данном разделе исследуются эти вопросы и приводятся имеющиеся в настоящее время формулы для дифференциальных сечений процесса рождения триплетов линейно поляризованными фотонами, соответствующих диаграммам Борселлино.

2.1. Кинематика. Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо прежде всего исследовать кинематику процесса (3). Закон сохранения 4-импульса в этом процессе можно записать в виде

$$k + p = p_1 + p_2 + p_3,$$

где $k = (\omega, \mathbf{k})$ и $p = (E, \mathbf{p})$ — импульсы налетающего фотона и электрона мишени, p_1 — 4-импульс электрона отдачи, $p_2 = p_-$ и $p_3 = p_+$ — 4-импульсы электрона и позитрона родившейся пары. Используется метрика $ab = a_0 b_0 - \mathbf{a} \mathbf{b}$ и система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

В лабораторной системе (л.с.), где $|\mathbf{p}| = 0$, $E = m$, квадрат переданного 4-импульса

$$q^2 = (p - p_1)^2 = -2m(E_1 - m) = -X. \quad (7)$$

Используя (7), выразим энергию и квадрат 3-импульса электрона отдачи через X :

$$E_1 = \frac{1}{2m}(X + 2m^2), \quad p_1^2 = \frac{X}{4m^2}(X + 4m^2). \quad (8)$$

Важной характеристикой процесса (3) является инвариантная масса пары Δ , $\Delta^2 = (p_2 + p_3)^2$. В л.с. Δ^2 можно выразить через импульсы и углы фрагментов пары или через энергию фотона и кинематические параметры электрона отдачи:

$$\Delta^2 = 2m^2 + 2E_2 E_3 - 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3| \cos \theta_{23}, \quad (9a)$$

$$\Delta^2 = -2(E_1 - m)(\omega + m) + 2\omega |p_1| \cos \theta_1, \quad (96)$$

где $\theta_{23} = \theta_{+-}$ — угол раствора пары, θ_1 — полярный угол электрона отдачи (рис.1). В системе центра инерции (с.ц.и.), где $\mathbf{k}^* + \mathbf{p} = \mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* + \mathbf{p}_3^* = 0$, Δ^2 удобно выразить через инвариантную величину S и энергию электрона отдачи E_1^* :

$$S = (k + p)^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = (\omega^* + E^*)^2 = (E_1^* + E_2^* + E_3^*)^2, \quad (10)$$

$$\Delta^2 = S - 2E_1^* \sqrt{S} + m^2. \quad (11)$$

В лабораторной системе

$$S = m(2\omega + m). \quad (12)$$

Приведенных соотношений достаточно, чтобы определить все необходимые нам кинематические характеристики процесса. При энергии порога $\omega_{\text{пор}}$ в л.с. все частицы конечного состояния в с.ц.и. покоятся ($E_1^* = E_2^* = E_3^* = m$). При этом из (10) и (12) следует, что $\omega_{\text{пор}} = 4m$. Максимальное значение квадрата инвариантной массы $\Delta_{\text{max}}^2 = (\sqrt{S} - m)^2$ достигается при $E_1^* = m$. $\Delta_{\text{min}} = 2m$ при $|p_2| = |p_3|$ и $\theta_{23} = 0$. Следовательно, допустимые значения Δ находятся в интервале

$$2m \leq \Delta \leq \sqrt{S} - m. \quad (13)$$

При заданных ω , Δ и θ_1 значения E_1 и $|p_1|$ можно получить, решая (96) относительно E_1 и $|p_1|$:

$$|p_1| = m \frac{(S - m^2)(S + m^2 - \Delta^2) \cos \theta_1 \pm (S + m^2) \sqrt{D_1}}{4Sm^2 + (S - m^2)^2 \sin^2 \theta_1}, \quad (14)$$

$$E_1 = m \frac{(S + m^2)(S + m^2 - \Delta^2) \pm (S - m^2) \cos \theta_1 \sqrt{D_1}}{4Sm^2 + (S - m^2)^2 \sin^2 \theta_1}, \quad (15)$$

где

$$D_1 = (S + m^2 - \Delta^2)^2 - [4Sm^2 + (S - m^2)^2 \sin^2 \theta_1]. \quad (16)$$

Учитывая (15) и (7), имеем

$$X = 2m^2 \frac{(S - m^2)^2 \cos^2 \theta_1 - (S + m^2)\Delta^2 \pm (S - m^2) \cos \theta_1 \sqrt{D_1}}{4Sm^2 + (S - m^2)^2 \sin^2 \theta_1}. \quad (17)$$

Области допустимых значений $|p_1|$ и Δ^2 , E_1 и Δ^2 , X и Δ^2 ограничиваются прямой $\Delta^2 = 4m^2$ и кривыми зависимости $|p_1|$, E_1 и X от Δ^2 при $\theta_1 = 0$, на которых они достигают максимальных (знак «плюс» перед членом, пропорциональным $\sqrt{D_1}$ в формулах (14), (15) и (17)) и минимальных (знак «минус») значений при заданных ω и Δ^2 . Области допустимых значений $|p_1|$ и θ_1 , E_1 и θ_1 , X и θ_1 ограничиваются прямой $\theta_1 = 0$ и кривыми зависимости $|p_1|$, E_1 и X от θ_1 при $\Delta^2 = 4m^2$, на которых находятся их максимальные и минимальные значения при заданных ω и θ_1 . Максимально и минимально возможные значения $|p_1|$, E_1 и X при фиксированном ω достигаются, когда $\Delta^2 = 4m^2$, $\theta_1 = 0$.

Верхние границы интервала допустимых значений θ_1 при заданных ω и Δ , а также интервала допустимых значений Δ при заданных ω и θ_1 определяются из условия

$$D_1(\omega, \Delta^2, \theta_1) \geq 0. \quad (18)$$

Решая уравнение (18), получим следующие выражения для предельных при каждом ω и Δ значений углов $\theta_{1\text{пр}}(\omega, \Delta)$ и предельной инвариантной массы рожденной пары $\Delta_{\text{пр}}(\omega, \theta_1)$ при заданных ω и θ_1 .

$$\sin^2 \theta_{1\text{пр}}(\omega, \Delta) = [(S + m^2 - \Delta^2)^2 - 4m^2 S] / (S - m^2)^2, \quad (19)$$

$$\Delta_{\text{пр}}^2(\omega, \theta_1) = S + m^2 - [4Sm^2 + (S - m^2)^2 \sin^2 \theta_1]^{1/2}. \quad (20)$$

Значение $\sin^2 \theta_{1\text{пр}}(\omega, \Delta)$ убывает с ростом Δ^2 :

$$\sin^2 \theta_{1\text{пр}}(\omega, \Delta = 2m) = 1 - \frac{4m}{\omega}, \quad \sin^2 \theta_1(\omega, \Delta = \sqrt{S} - m) = 0. \quad (21)$$

Это означает, что при заданных ω максимально допустимый угол вылета электрона отдачи

$$\theta_{1\text{max}}(\omega) = \theta_{1\text{пр}}(\omega, \Delta = 2m) = \arccos(2\sqrt{m/\omega}), \quad (22)$$

ширина интервала допустимых значений θ_1 максимальна при $\Delta = 2m$ и равна нулю при $\Delta = \sqrt{S} - m$, интервал допустимых значений θ_1 определяется неравенствами

$$0 \leq \theta_1(\omega) \leq \arccos(2\sqrt{m/\omega}). \quad (23)$$

Значение $\Delta_{\text{пр}}^2$ убывает с ростом θ_1 :

$$\Delta_{\text{пр}}^2(\omega, \theta_1 = 0) = (\sqrt{S} - m)^2, \Delta_{\text{пр}}^2(\omega, \theta_1 = \arccos(2\sqrt{m/\omega}) = 4m^2. \quad (24)$$

Это означает, что при заданных ω ширина интервала допустимых значений Δ^2 максимальна при $\theta_1 = 0$, с ростом θ_1 она убывает и при предельно допустимом угле обращается в нуль, допустимые значения Δ находятся в интервале (13).

Приведем формулы, которые определяют $|p_1|$, E_1 и X при предельных значениях θ_1 и Δ :

$$|p_1(\omega, \Delta, \theta_{1\text{пр}})| = \frac{\Delta m [2(S + m^2) - \Delta^2]^{1/2}}{S + m^2 - \Delta^2},$$

$$E_1(\omega, \Delta, \theta_{1\text{пр}}) = \frac{m(S + m^2)}{S + m^2 - \Delta^2}, \quad (25)$$

$$X(\omega, \Delta, \theta_{1\text{пр}}) = \frac{2m^2\Delta^2}{S + m^2 - \Delta^2},$$

$$|p_1(\omega, \Delta_{\text{пр}}, \theta_1)| = \frac{m(S - m^2) \cos \theta_1}{D_2^{1/2}}, \quad E_1(\omega, \Delta_{\text{пр}}, \theta_1) = \frac{m(S + m)}{D_2^{1/2}}, \quad (26)$$

$$X(\omega, \Delta_{\text{пр}}, \theta_1) = 2m^2 \frac{S + m^2 - D_2^{1/2}}{D_2^{1/2}}, \quad D_2 = 4Sm^2 + (S - m^2)^2 \sin^2 \theta_1.$$

На рис.3 схематически показаны области допустимых значений $|p_1|$ и Δ^2 и $|p_1|$ и θ_1 . Аналогичный вид имеют и области допустимых значений E_1 и Δ^2 , X и Δ^2 , E_1 и θ_1 , X и θ_1 . Сплошными линиями показаны границы областей и кривые зависимостей $|p_1(\omega, \Delta, \theta_{1\text{пр}})|$ от Δ^2 и $|p_1(\omega, \Delta_{\text{пр}}, \theta_1)|$ от θ_1 . При заданных ω и $|p_1|$ максимальные значения Δ^2 и θ_1 :

$$\Delta^2(\omega, |p_1|)_{\text{max}} = -2(\omega + m)(E_1 - m) + 2\omega |p_1|, \quad (27)$$

$$\theta_1(\omega, |p_1|)_{\text{max}} = \arccos \left[\frac{E_1 - m}{|p_1|} + m \frac{E_1 + m}{\omega |p_1|} \right] \quad (28)$$

получаются из (9б) при $\theta_1 = 0$ и $\Delta = 2m$ соответственно. Максимальные значения Δ^2 и θ_1 при заданных ω и E_1 или X получаются из (27) и (28) с учетом (8).

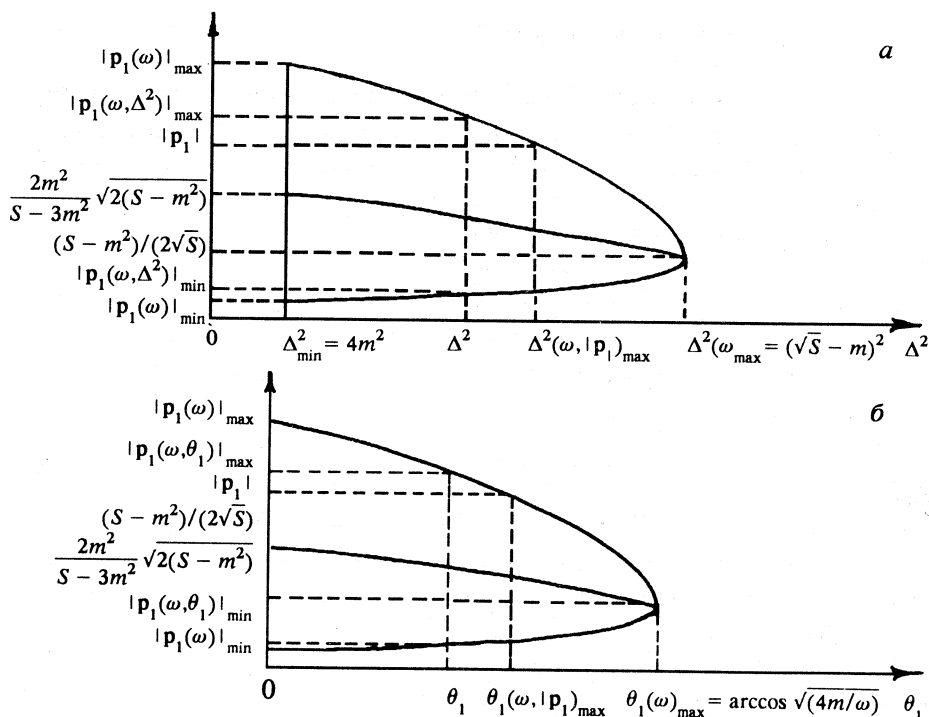


Рис.3. Области допустимых значений: а) импульса электрона отдачи $|p_1| = q$ и квадрата эффективной массы рожденной пары Δ^2 ; б) импульса $|p_1| = q$ и полярного угла вылета электрона отдачи θ_1

Итак, получены формулы для энергии E_1 и величины 3-импульса $|p_1|$ электрона отдачи и квадрата переданного 4-импульса $q^2 = -X$, определены энергия порога $\omega_{\text{пор}}$, интервалы допустимых значений Δ^2 и θ_1 области допустимых значений $|p_1|$ и θ_1 , E_1 и θ_1 , X и θ_1 .

По формулам данного раздела можно определить энергию и 3-импульс любой частицы конечного состояния как функции ее полярного угла, энергии фотона ω и эффективной массы остальных двух частиц. Для этого следует 4-импульс интересующей частицы обозначить p_1 , а p_2 и p_3 — 4-импульсы остальных двух частиц конечного состояния. Поскольку массы всех трех частиц одинаковы, все три частицы имеют одинаковые области допустимых значений углов, импульсов и энергий, одинаковые

интервалы допустимых значений эффективных масс любых двух частиц конечного состояния.

2.2. Анализ вклада различных механизмов в сечение фоторождения триплетов. Дифференциальное сечение фоторождения e^+e^- -пар на свободных электронах, усредненное по спинам начальных и просуммированное по спинам конечных частиц, в низшем порядке теории возмущений записывается в виде [65]:

$$d\sigma = \frac{\alpha r_0^2}{4\pi^2 \kappa} |M|^2 \frac{d^3 p_1 d^3 p_+ d^3 p_-}{E_1 E_+ E_-} \delta^4(k + p - p_1 - p_+ - p_-), \quad (29)$$

где α — постоянная тонкой структуры, r_0 — классический радиус электрона, $\kappa = (kp)$,

$$|M|^2 = \frac{1}{2} |A_a - A_b + A_c - A_z|^2, \quad (30)$$

$A_a, \dots, A_z$ — амплитуды, соответствующие диаграммам рис.2.

Множитель $1/2$ в правой части (30) связан с учетом тождественности электронов. Если эффектами тождественности конечных электронов пренебречь, то

$$|M|^2 = |A_a + A_b|^2, \quad (30a)$$

Вклад различных диаграмм в борновском приближении. Теоретическому исследованию процесса рождения e^+e^- -пар неполяризованными фотонами на свободных электронах посвящены работы многих авторов [66—83, 40, 41, 45, 48]. Борселлино [66—68] вычислил вклад в сечение, соответствующий диаграммам рис.2,а, и получил распределение по импульсам электронов отдачи $q = |p_1|$ и выражения для полного сечения вблизи порога при $\omega \approx 4m$ и в области высоких энергий $\omega \gg m$. Чизетти [69], интегрируя приведенное в [68] распределение по q , получил выражение для полного сечения в виде ряда по степеням m/ω .

С учетом всех 8 диаграмм рис.2 процесс исследовали Немировский [70, 71], Вотруба [72, 73], Гарибян [74]. В этих работах было показано, что учет γe -взаимодействия и тождественности конечных электронов приводит к весьма существенным эффектам вблизи порога реакции при $\omega \approx 4m$.

Сух и Бете [45], а также Джозеф и Рорлих [75] показали, что при $\omega \gg m$ и импульсе отдачи $q < m$ обмен и γe -взаимодействие не проявляются: распределения по q , учитывающие диаграммы Борселлино и все 8 диаграмм рис.2, совпадают между собой и с распределением по импульсам ядер отдачи при рождении пар на ядре.

При $\omega \gg m$ и $q > m$ [45] распределение по квадрату переданного 4-импульса не зависит от массы частицы, в поле которой рождается пара.

Копыловым и др. [76] была предпринята попытка понять, при каких энергиях фотона можно не учитывать тождественность конечных электронов. Методом Монте-Карло с учетом вклада всех 8 диаграмм рис.2 было показано, что уже при $\omega \gtrsim 10m$ электроны в каждом событии четко разделяются на быстрый с энергией $\sim \omega/2$ и медленный с энергией $1,2 \div 2m$, с различными характерными углами вылета для каждой группы. Такие электроны можно не считать тождественными — их маркирует скорость — и пренебречь интерференцией между диаграммами *a* и *в*, *б* и *г* рис.2. В дальнейшем процесс фоторождения триплетов исследовали Морк [77,78,48,40] и Хауг [41,79,80]. Морк использовал аналитическое выражение для $|M|^2$ (30) с учетом всех 8 диаграмм и методом Монте-Карло вычислял входящие в (29) интегралы; Хауг [41,79] также, учитывая все диаграммы, провел интегрирование по двум переменным в аналитическом виде, а по оставшимся — численными методами. Полученные ими результаты согласуются между собой и с данными эксперимента [84,85]. В работах [40,79] были вычислены распределения $d\sigma/dE_-$ по энергии E_- одного из конечных электронов, и $d\sigma/d \cos \theta_-$ — по косинусу угла θ_- вылета одного из электронов. Кроме того, были получены распределения $d^2\sigma/dE_- d \cos \theta_-$, а также аналогичные распределения для позитронов.

На рис.4 сплошными линиями приведены взятые из [79] зависимости сечений выхода одного из конечных электронов от E_- и $\cos \theta_-$. Из рисунка видно, что вероятность событий, в которых один из электронов имеет малую энергию $\sim 1 \div 1,5m$ (а оставшийся электрон и позитрон, соответственно, большую), резко возрастает с увеличением энергии фотона. Сравнение энергетических спектров электронов и позитронов [40] при $\omega = 7m$ показывает, что в правой части спектры совпадают. На кривых зависимости $d^2\sigma/dE_- d \cos \theta_-$ от E_- (рис.4) уже при $\omega = 5,12m$ проявляется вклад медленных электронов. С ростом θ_- роль этого вклада растет. При $\cos \theta_- = 0,930$ он оказывается преобладающим, а при $\cos \theta_- = 0,895$ в спектре присутствуют только медленные электроны.

Чтобы выяснить вклад γe -взаимодействия и обмена в сечения Хауга, мы вычислили сечения выхода электронов отдачи $d\sigma^{(t)}/dE_1$, $d\sigma^{(t)}/d \cos \theta_1$ и $d^2\sigma^{(t)}/dE_1 d \cos \theta_1$, учитывающие только диаграммы рис.2, *a*. Они обозначены на рис.4 пунктирной линией.

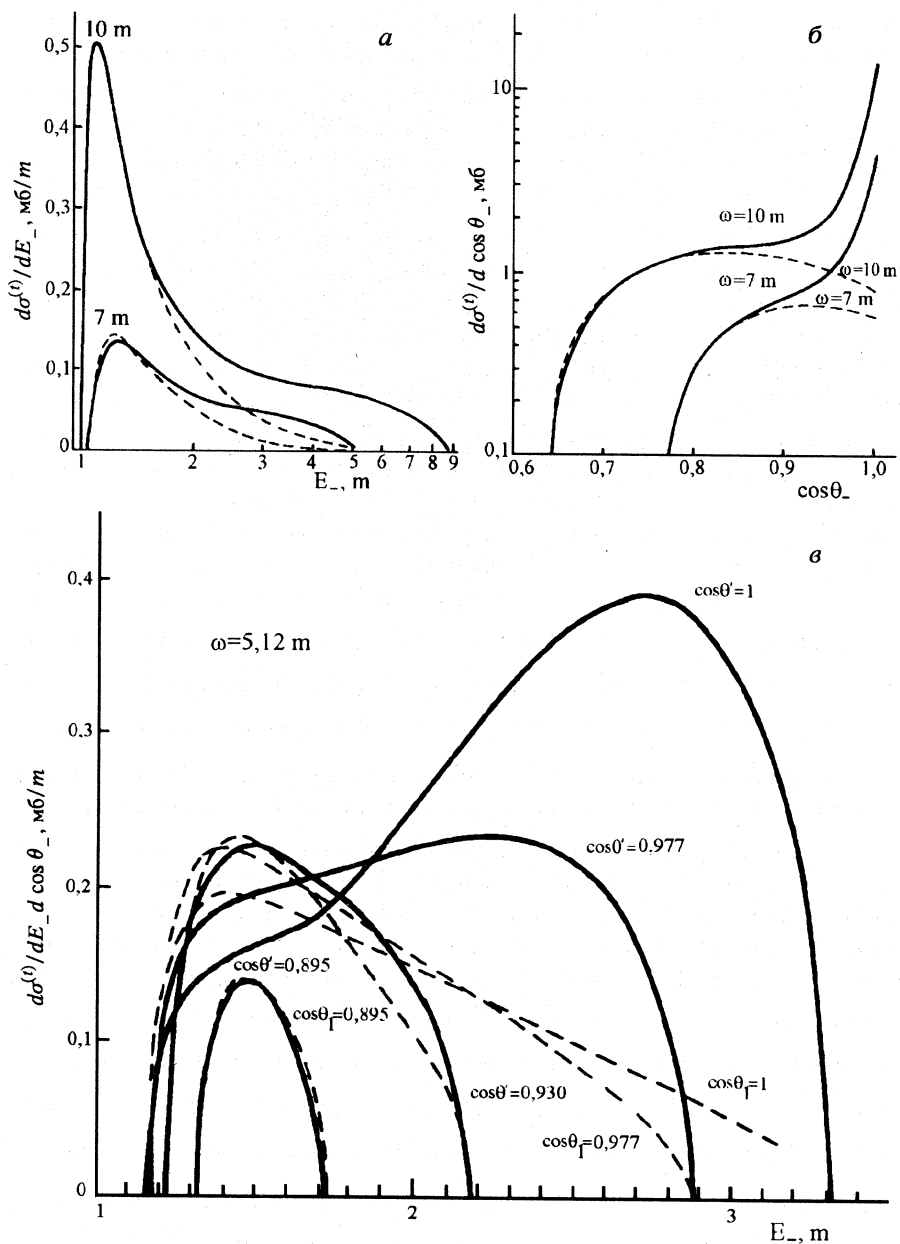


Рис.4. Сравнение энергетических спектров и угловых распределений электронов отдачи (пунктирные кривые) с сечениями Хауга (сплошные кривые) при энергиях фотонов 5, 12 м, 7 м и 10 м

Видно, что при $\omega \geq 5,12m$ в области малых E_- в энергетических спектрах и в области больших углов в угловых распределениях сечения, вычисленные с учетом двух и восьми диаграмм, практически совпадают. С ростом ω увеличиваются интервалы углов и энергий, где эти сечения очень близки друг к другу.

Из приведенного рассмотрения ясно, что при $\omega > 10m$ электроны в каждом событии можно четко разделить на две группы — электроны отдачи с энергией $\sim 1m$ и быстрые электроны рожденной e^+e^- -пары; распределения электронов с малой энергией и большими углами вылета хорошо описываются диаграммами Борселлино.

Очень показательны расчеты Морка вклада в полное сечение рассматриваемого процесса от различных групп диаграмм рис.2 по отдельности. В [48] он представил квадрат модуля матричного элемента в (30) в виде шести слагаемых:

$$|M|^2 = X_B + X_\gamma + X_{B\gamma} + X_{BE} + X_{\gamma E} + X_{B\gamma E}, \quad (31)$$

где X_B — сумма квадратов диаграмм a и $в$; X_γ — сумма квадратов диаграмм $б$ и $г$; $X_{B\gamma}$, X_{BE} , $X_{\gamma E}$ и $X_{B\gamma E}$ описывают интерференционные члены $ab + вг$, $ав$, $бг$ и $аг + бв$ соответственно.

Полученное выражение подставлялось в (29) и интегрировалось методом Монте-Карло. Результаты расчетов $\Delta_i = \sigma_i / \sigma_B$ (σ_i — вклад в полное сечение, соответствующий величине X_i) показывают, что поправки к сечению Борселлино σ_B , возникающие при учете γe -диаграмм, и поправки от учета обменных эффектов уменьшаются с ростом ω , и в значительной степени взаимно сокращаются. Поэтому суммарная поправка Δ , определяемая соотношением $\sigma = \sigma_B(1 - \Delta)$, очень быстро убывает с ростом ω , и при $\omega \geq 16m$ [41,83] $\Delta \leq 0,012$. Зависимости Δ_i и Δ от ω [48] показывают, что, уже начиная с энергии фотона $\omega \geq 16m$, полное сечение процесса фоторождения триплетов описывается диаграммами Борселлино (рис.2,а) с точностью [41] лучшей, чем 1,2%. По-видимому, при $\omega \geq 16m$ диаграммы Борселлино хорошо описывают и дифференциальные сечения выхода электронов отдачи. Этот вывод находится в полном соответствии с современными представлениями о процессах квантовой электродинамики при высоких энергиях [86]. Согласно этим представлениям сечения процессов, которые описываются диаграммами с обменом фотоном в t -канале (в случае образования триплетов это диаграммы Борселлино), не убывают с ростом энергии, причем неубывающий вклад набирается в области малых переданных импульсов: $X \approx m^2$. В то же время вклад в сечение диаграмм, не содержащих фотонов в t -канале (γe -

диаграммы), убывает с ростом энергии, по крайней мере, как m/ω (или как $X/m\omega$, если $X > m^2$).

В с.ц.и. образованная пара и электрон отдачи летят в противоположных направлениях с высокими скоростями. При этом электроны можно маркировать (т.е. не считать тождественными). Такая структура событий справедлива с точностью до членов порядка $\left| \frac{t}{S} \right| < \frac{X}{2m\omega}$. Поэтому эффект тождественности имеет такой же порядок.

Для случая поляризованного фотона аналогичный анализ отсутствует, так как до настоящего времени нет полностью дифференциального сечения образования триплетов линейно поляризованным фотоном (аналог формул Морка и Хауга). Однако можно утверждать, что в силу положительной определенности дифференциальных сечений

$$2\pi d\sigma_i/d\varphi_1 = \sigma_i^{(t)} + P \sigma_i^{(l)} \cos 2\varphi_1$$

($P \leq 1$ — степень линейной поляризации фотона), соответствующих любому калибровочно-инвариантному набору диаграмм рис.2, должно выполняться условие $\sigma_i^{(t)} > |\sigma_i^{(l)}|$ в любой области углов и переданных импульсов.

Оценка эффектов связи электронов в атоме, кулоновских и радиационных поправок. В действительности фоторождение триплетов происходит на связанных электронах атомов. Для точного описания такого процесса следует решать задачу многих тел. Однако [83], если образовавшаяся пара имеет достаточно большую энергию и 1) время прохождения атома образовавшейся парой мало по сравнению с характерным временем движения атомных электронов, 2) характерный переданный атому импульс достаточно мал по сравнению с импульсами образовавшихся частиц, то задачу можно упростить, следуя подходу, развитому в [87]. В этом случае движением электронов атома в течение происходящего процесса можно пренебречь и рассматривать статическую модель атома, свойства которой при рождении триплетов полностью описываются функцией некогерентного рассеяния $S(q)$.

Для случая атомов водорода $S(q) = 1 - |F(q)|^2$, где $F(q)$ — атомный формфактор; для других элементов она протабулирована в [88]. С ростом переданного импульса q функция $S(q)$ быстро стремится к единице. При $S(q) = 1$ атомные электроны можно рассматривать как свободные.

В работе [83] был введен характерный переданный импульс $q_3 \sim 1m$, который зависит от атомного номера элемента Z и желаемой точности расчета, определяемой величиной $1 - S(q_3)$.

Поскольку относительный вклад диаграмм рис.2,б,в,г важен только для больших передач импульса $q \gg m$, полное сечение фоторождения триплетов в атоме с номером Z можно записать в виде

$$\sigma^{(t)} = Z \int_{q_{\min}}^{q_3} S(q) \frac{d\sigma_B}{dq} dq + Z \int_{q_3}^{q_{\max}} \frac{d\sigma_H}{dq} dq, \quad (32a)$$

где σ_B — сечение Борселлино, σ_H — сечение, вычисленное Хаугом [41] с учетом всех 8 диаграмм рис.2, $q_{\min}$, $q_{\max}$ — минимальный и максимальный кинематически разрешенные переданные импульсы. Считая, что при $q_{\min} \leq q \leq q_3$ справедливо $d\sigma_H/dq = d\sigma_B/dq$, а при $q \geq q_3$ $S(q) = 1$, формулу (32a) можно переписать следующим образом:

$$\sigma^{(t)}(\omega) = Z[\sigma_B(\omega) + \Delta\sigma_H(\omega) - \Delta S(\omega, Z)], \quad (32б)$$

где $\Delta\sigma_H(\omega) = \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} dq \left[\frac{d\sigma_H}{dq} - \frac{d\sigma_B}{dq} \right]$ — поправка к полному сечению Борселлино,

связанная с учетом γe -взаимодействия и обмена,

$\Delta S(\omega, Z) = \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} dq [1 - S(q)] \frac{d\sigma_B}{dq}$ — поправка, учитывающая влияние

связи электронов в атоме.

Для точного описания процесса фоторождения триплетов следует учесть также радиационные и кулоновские поправки к сечению $\sigma^{(t)}(\omega)$, определенному формулой (32б).

Радиационные и кулоновские поправки связаны с взаимодействием более высокого порядка теории возмущений. При малых значениях Z [83] кулоновская поправка ожидается очень малой, за исключением энергий, очень близких к порогу. На основе данных о кулоновских поправках к рождению пар на ядре можно сказать, что они значительны в пределах нескольких кэВ от порога, но ими можно полностью пренебречь, когда энергия фотона выше пороговой на 1 МэВ.

В работах [89,90,55,56] оценивались радиационные поправки к сечениям тормозного излучения и фоторождения e^+e^- -пар на ядрах и электронах. Радиационные поправки не зависят от энергии фотонов и заряда ядра и составляют около 1% от сечения рождения пар в наинизшем порядке теории возмущений как в случае пар, так и в случае триплетов. Чтобы учесть радиационные поправки, следует правую часть выражения (32б) умножить на $f_{\text{rad}} = 1,01$:

$$\sigma^{(t)}(\omega) = Zf_{\text{rad}}[\sigma_B(\omega) + \Delta\sigma_H(\omega) - \Delta S(\omega, Z)]. \quad (33)$$

Поправка $\Delta \sigma_H(\omega)$ нами уже рассмотрена выше. Она не превосходит 1,2% от σ_B при $\omega > 16m$.

Поправка $\Delta S(\omega, Z)$ существенна [83] при высоких энергиях фотонов и $q \leq q_3 < 1m$. Отношение $Z \Delta S(\omega, Z)/\sigma$, где $\sigma = Z f_{\text{rad}} [\sigma_B(\omega) + \Delta \sigma_H(\omega)]$, увеличивается с ростом Z и ω и в случае свинца при $\omega = 350$ МэВ достигает 24%. Подавляющий вклад в эту величину набирается от области переданных импульсов, близких к минимально возможному.

В реальном эксперименте по определению линейной поляризации фотонов по асимметрии электронов отдачи могут регистрироваться события с импульсами электронов отдачи $q > q_0 \sim 1m$. Если $q \geq q_3$, то вкладом $\Delta S(\omega, Z)$ можно пренебречь. В случае водорода [79] $S(q) > 0,999$ при $q > 0,031m$. С ростом Z [88] увеличивается и q_3 . Тем не менее электроны атомов Be и C можно считать свободными при $q \geq 0,1m$, а Pb — при $q \geq 0,5m$.

Из результатов анализа сечения рождения триплетов неполяризованными фотонами следует, что в опытах по фоторождению триплетов, где регистрируются электроны отдачи с импульсами $q \geq q_0 \geq m > q_3$, электроны атомов можно рассматривать как свободные. Результаты таких экспериментов при $\omega \geq 16m$ можно описывать сечениями, соответствующими диаграммам Борселлино. Они и используются для разработки метода измерения степени линейной поляризации фотонных пучков с энергией $\omega \geq 50m$.

2.3. Дифференциальные сечения процесса рождения триплетов линейно поляризованными фотонами. Здесь мы приведем выражения для различных распределений процесса рождения триплетов линейно поляризованными фотонами, соответствующие диаграммам Борселлино.

Квадрат матричного элемента, соответствующий этим диаграммам, равен [49]:

$$|M|^2 = X^{-2} \rho_{\alpha\beta} T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} J_{\mu\nu}. \quad (34)$$

Здесь $-X = q^2$ — квадрат переданного 4-импульса,

$$T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \text{Sp} (\Lambda(p_-) L_{\mu}^{\alpha} \tilde{\Lambda}(p_+) L_{\nu}^{\beta}),$$

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Sp} (\Lambda(p) \gamma_{\mu} \Lambda(p_i) \gamma_{\nu}); \quad \Lambda(p_i) = \hat{p}_i + m, \quad \tilde{\Lambda}(p) = \hat{p} - m,$$

$$L_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\gamma_{\alpha} \frac{\hat{p}_- - \hat{k} + m}{(kp_-)} \gamma_{\mu} + \gamma_{\mu} \frac{-\hat{p}_+ + \hat{k} + m}{(kp_+)} \gamma_{\alpha} \right),$$

$\rho_{\alpha\beta}$ — матрица плотности фотона, которая в л.с. с осью Z вдоль k и произвольно выбранной осью X , от которой отсчитываются азимутальные углы φ , имеет вид

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где ξ_i — параметры Стокса. Параметры ξ_1 и ξ_3 определяют линейную, а ξ_2 — круговую поляризацию фотона. Параметр ξ_2 является псевдоскаляром. Поскольку мы хотим исследовать поляризацию фотона, наблюдая только за импульсом электрона отдачи p_1 , в нашем распоряжении есть два вектора — импульс фотона k и импульс p_1 , из которых нельзя построить псевдоскаляр. Поэтому круговая поляризация не может быть определена путем измерения асимметрии распределения электронов отдачи и в настоящей работе не рассматривается.

Подставляя (34) в формулу для сечения (29) и интегрируя по переменным p_+ , p_- рожденной пары, получим дифференциальное по компонентам импульса отдачи p_1 сечение рассматриваемого процесса:

$$d\sigma = d\sigma^{(t)} + (\xi_1 \sin 2\varphi_1 + \xi_3 \cos 2\varphi_1) d\sigma^{(l)}. \quad (36)$$

Не зависящая от поляризации фотона часть сечения $d\sigma^{(t)}$ была получена в [81], а $d\sigma^{(l)}$ — в [49]. В переменных $X = -q^2$, $\Delta^2 = (k + q)^2 = (p_+ + p_-)^2$, φ_1 эти величины имеют вид*:

$$d\sigma^{(t)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\alpha}{\omega^2} \frac{r_0^2}{X^2} \frac{\beta}{X^2} \left\{ (2 - X) \left[c_1 + 4 \frac{c_3 - c_2 X}{(\Delta^2 + X)^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{8\omega(kp_1)X}{(\Delta^2 + X)^2} \left[c_1 + 4 \frac{c_3 - c_4 X}{(\Delta^2 + X)^2} \right] \right\} dX d\Delta^2 d\varphi_1, \quad (37)$$

$$d\sigma^{(l)} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\alpha}{\omega^2} \frac{r_0^2}{X^2} \frac{\beta}{(\Delta^2 + X)^2} \left[\Delta^2 + \frac{X^2}{2} + 2L_1(X + 1) \right] \times \\ \times \left\{ X^2(2\omega + 1) - 2X[2\omega^2 - \Delta^2(\omega + 1)] + \Delta^4 \right\} dX d\Delta^2 d\varphi_1. \quad (38)$$

*Некоторые формулы, приведенные в настоящем разделе, были опубликованы в оригинальных работах с опечатками. Ниже мы будем исправлять замеченные неточности без добавочных ссылок.

Здесь масса электрона $m = 1$, $c_1 = 1 - L_1$, $c_2 = \Delta^2 \left(1 - \frac{L_1}{2}\right)$,
 $c_3 = (\Delta^2 c_1 + 2L_1)$, $c_4 = 2\Delta^2 - \left(2 + \frac{\Delta^2}{2}\right)L_1$, $L_1 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$, $\beta = \left(1 - \frac{4}{\Delta^2}\right)^{1/2}$.

Как видно из (37), (38), $d\sigma^{(t)}$ и $d\sigma^{(l)}$ не зависят от φ_1 , и интегрирование $d\sigma$ по φ_1 от 0 до 2π исключает вклад от $d\sigma^{(l)}$. Поэтому $d\sigma^{(t)}$ — сечение рождения триплетов неполяризованными фотонами, дающее изотропное распределение по φ_1 . Асимметрию в распределение по φ_1 , связанную с линейной поляризацией фотонов, вносит $d\sigma^{(l)}$. Величина $d\sigma^{(l)}$ отрицательна во всей физической области изменения переменных X , Δ^2 ($d\sigma^{(t)}$, естественно, положительна). Введем вместо ξ_1 и ξ_3 [32,49] степень линейной поляризации фотонов $P = (\xi_1^2 + \xi_3^2)^{1/2}$, и угол $\chi = \arctg(\xi_1/\xi_3)$ между осью OX и направлением n максимальной поляризации пучка фотонов. Тогда (36) можно переписать следующим образом:

$$d\sigma = d\sigma^{(t)}[1 - P\Lambda \cos 2(\varphi_1 - \chi)], \quad (39)$$

где $\Lambda = |d\sigma^{(l)}/d\sigma^{(t)}|$ — асимметрия $d\sigma$ при полной поляризации фотонного пучка ($P = 1$). Из (39) следует, что преобладающий выход электронов отдачи имеет место в плоскости, перпендикулярной направлению максимальной поляризации пучка фотонов n . Из выражений (37), (38) можно получить распределение $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1$ по полярному углу θ_1 вылета электронов отдачи. Для этого следует, согласно (8), (96), сделать в (37), (38) замену

$$\Delta^2 = \omega \sqrt{X(X-4)} \cos \theta_1 - X(\omega + 1)$$

и результат численно проинтегрировать по X .

Выражения (37), (38) допускают одно аналитическое интегрирование: либо по Δ^2 , либо по X . Второе интегрирование может быть выполнено численно.

Аналитическое интегрирование (37), (38) по $X = -q^2$ в интервале всех кинематически допустимых значений переданного импульса

$$X(\omega, \Delta)_{\min} \leq X \leq X(\omega, \Delta)_{\max},$$

где

$$X(\omega, \Delta)_{\min}^{\max} = \frac{\omega(2\omega + \Delta^2)}{S} - \Delta^2 \mp \frac{\omega}{S} \sqrt{(2\omega - \Delta^2)^2 - 4\Delta^2}, \quad (40)$$

дает выражения для частей сечения $d^2\sigma/d\Delta^2 d\varphi_1$. Не зависящая от поляризации часть [81] равна:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(t)}}{d\Delta^2} = & -\frac{\alpha r_0^2 \beta}{2\omega^2} \left\{ 4 \frac{L_3 - L_2}{\Delta^4} \left[2\omega \left(\omega - \frac{\Delta^2}{2} \right) c_1 + 2c_2 + \right. \right. \\ & + \left. \left(1 + 4 \frac{1-\omega}{\Delta^2} + \frac{8\omega^2}{\Delta^4} \right) c_3 \right] - c_1 L_2 + \\ & + R \left[\frac{8\omega c_1}{\Delta^4} + \frac{2}{\Delta^2 \omega} \left(1 + \frac{2}{\Delta^2} \right) \left(c_2 - \frac{c_4}{3} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{4c_3}{3\Delta^4 \omega} \left(1 - 2 \frac{2\omega - 1}{\Delta^2} + \frac{34\omega^2}{\Delta^4} \right) + \frac{4c_4}{3\Delta^4} \left(\frac{4\omega}{\Delta^2} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

Часть, зависящая от поляризации [49,50]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(l)}}{d\Delta} = & \frac{2\alpha r_0^2 \beta}{\omega^2} \left\{ \frac{L_3 - L_2}{\Delta^8} [2L_1(4\omega^2 - 2\omega\Delta^2 - \Delta^4 + 2\Delta^2) + \right. \\ & + 4\omega^2\Delta^2 - 2\omega\Delta^4 + 2\Delta^4] + \\ & + \frac{R}{3} \left[\frac{2L_1}{\Delta^8} \left(17\omega - 2\Delta^2\omega - 2\Delta^2 + \frac{\Delta^4}{2} - \frac{5\Delta^4}{4\omega} + \frac{\Delta^2}{\omega} + \frac{\Delta^6}{4\omega} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{17\omega}{\Delta^6} - \frac{\omega}{2\Delta^4} + \frac{1}{2\Delta^2} - \frac{2}{\Delta^4} - \frac{1}{8\omega} + \frac{1}{\omega\Delta^4} + \frac{1}{4\Delta^2\omega} \right] \right\}, \quad (42) \end{aligned}$$

где

$$L_2 = \ln \frac{X(\omega, \Delta)_{\max}}{X(\omega, \Delta)_{\min}}, \quad L_3 = \ln \frac{X(\omega, \Delta)_{\max} + \Delta^2}{X(\omega, \Delta)_{\min} + \Delta^2},$$

$$R = D_1^{1/2}(\theta_1 = 0) = \sqrt{(2\omega - \Delta^2)^2 - 4\Delta^2}.$$

Величины $\beta, L_1, c_1, \dots, c_4$ определены в (37), (38). В асимптотической области энергий фотона $\omega \gg 1$ (41), (42) можно проинтегрировать аналитически. В результате получим асимптотические выражения:

$$\sigma_a^{(t)} = \alpha r_0^2 \left[\frac{28}{9} \ln 2\omega - \frac{218}{27} \right], \quad (43)$$

$$\sigma_a^{(l)} = -\alpha r_0^2 \left[\frac{4}{9} \ln 2\omega - \frac{20}{27} \right]. \quad (44)$$

В результате аналитического интегрирования (37) и (38) по Δ^2 в интервале

$$4m^2 \leq \Delta^2 \leq \Delta^2(\omega, X)_{\max} = -\frac{X}{m}(\omega + m) + \frac{\omega}{m} \sqrt{X(X + 4m^2)} \quad (45)$$

в работах [82, 50] получены выражения для частей распределения $d^2\sigma/d\varphi_1 dX$ процесса фоторождения триплетов. Зависящая от поляризации часть [50]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(l)}}{dX} = \frac{2\alpha r_0^2}{\omega^2 X^2} & \left\{ \left[\frac{8\omega^2 X(X+1)}{3(\delta+X)^3} - \frac{2\omega X(X+1)}{(\delta+X)^2} - \frac{2(X+1)}{\delta+X} + 1 \right] \beta L_1 + \right. \\ & + \frac{4\omega^2}{3} L_4 - \beta \left\{ \frac{2}{3} \omega^2 \left[1 - \frac{X(2\delta+X^2)}{(\delta+X)^3} \right] - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega X}{2} \left[1 - \frac{2}{\delta+X} - \frac{X(X-2)}{(\delta+X)^2} \right] - \frac{(X-2)\delta}{2(\delta+X)} \right\} \right\}. \quad (46) \end{aligned}$$

Не зависящая от поляризации часть [82]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(t)}}{dX} = -\frac{4\alpha r_0^2}{\omega^2 X^2} & \left\{ \beta \left\{ \frac{2-X}{1-\beta^2} + \frac{2}{X(\beta^2-\beta_0^2)} \left\{ (2-X)(1-X) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - X \left\{ \omega \left(1 + 2 \frac{9-\beta^2}{X(\beta^2-\beta_0^2)} \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{8\omega^2}{3X^2(\beta^2-\beta_0^2)^2} \left[5(1-\beta^2) + (1-X)(1-\beta^2)^2 + \frac{4}{X} \right] \right\} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (2-X) \left[-X - \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{8-(1-\beta^2)(4-X^2)}{2(\beta^2-\beta_0^2)X} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[(2-X) \left(1 - \frac{X}{2} \right) + \omega X \right] \ln \frac{1-\beta^2}{4} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\omega}{X^2(\beta^2 - \beta_0^2)^2} [8(2 - \beta^2) - (X + 2)(1 - \beta^2)^2] + \\
 & + \frac{4\omega^2(1 - \beta^2)}{X^2(\beta^2 - \beta_0^2)^3} \left[8 + 2(X + 2)(1 - \beta^2) + \frac{(1 - \beta^2)^2}{3}(X^2 - 3X - 4) \right] \left\{ \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} + \right. \\
 & + \left. \left[\frac{1}{2} \left[(2 - X) \left(1 - \frac{X}{2} \right) + \omega X \right] \ln \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{1}{4\beta_0 X} \left[X(2 - X)(4 + X) + \frac{8}{3} \omega^2(X - 1) \right] \right\} \ln \frac{\beta + \beta_0}{\beta - \beta_0} + \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} \left[(2 - X) \left(1 - \frac{X}{2} \right) + \omega X \right] I \right\}. \quad (47)
 \end{aligned}$$

Здесь принято $m = 1$,

$$\beta = (1 - 4/\delta)^{1/2}, \quad \beta_0 = (1 + 4/X)^{1/2},$$

$$L_1 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad L_4 = \frac{1}{\sqrt{X(X + 4)}} \ln \frac{\beta + \beta_0}{\beta - \beta_0},$$

$\delta = \Delta^2(\omega, X)_{\max}$, определенное в (45),

$$\begin{aligned}
 I = & \Phi\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1 - \beta}{2}\right) + \Phi\left(-\frac{\beta + \beta_0}{1 - \beta_0}\right) - \Phi\left(\frac{\beta - \beta_0}{1 - \beta_0}\right) + \\
 & + \Phi\left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 + \beta_0}\right) - \Phi\left(\frac{\beta + \beta_0}{1 + \beta_0}\right),
 \end{aligned}$$

$$\Phi(X) = - \int_0^X \frac{dt}{t} \ln(1 - t) - \text{дилогарифм Эйлера.}$$

В реальных экспериментах кинематические параметры электронов могут надежно измеряться, если их импульс превосходит величину $q_0 \sim m$. Для того чтобы получить части $\sigma^{(t)}(q_0)$ и $\sigma^{(l)}(q_0)$ сечения фоторождения триплетов с исключенным вкладом недетектируемых импульсов, меньших q_0 , следует численно проинтегрировать (46), (47) по X в интервале $X_0 \leq X \leq X_{\max}$, где

$$X_0 = 2 \left(\sqrt{q_0^2 + 1} - 1 \right),$$

$$X_{\max} = \frac{\omega(2\omega + 4)}{2\omega + 1} - 4 + \frac{2\omega}{2\omega + 1} \sqrt{\omega(\omega - 4)}. \quad (48)$$

Величины $\sigma^{(t)}(q_0)$ и $\sigma^{(l)}(q_0)$ можно получить и другим, менее трудоемким способом. Найдем распределение $d\sigma/d\varphi_1 d\Delta^2(q_0)$ процесса фотопроизводства триплетов с импульсами отдачи большими, чем q_0 . Оно получается аналитическим интегрированием (37), (38) по X в интервале $X_0 \leq X \leq X(\omega, \Delta)_{\max}$, где $X(\omega, \Delta)_{\max}$ определено в (40), X_0 — в (48). Для зависящей и не зависящей от поляризации частей сечения получаем

$$\frac{d\sigma^{(i)}}{d\Delta^2}(q_0) = F^{(i)}(X(\omega, \Delta)_{\max}, \Delta) - F^{(i)}(X_0, \Delta), \quad (49)$$

где

$$F^{(i)}(X, \Delta) = \int \frac{d^2\sigma^{(i)}}{dXd\Delta^2} dX.$$

В явном виде первообразные $F^{(i)}(X, \Delta)$ равны:

$$\begin{aligned} F^{(l)}(X, \omega) = & \frac{2\alpha r_0^2}{\omega^2} \beta \left\{ [2L_1(2\Delta^2 - \Delta^4 + 4\omega^2 - 2\Delta^2\omega) + \right. \\ & + 2\Delta^4 + 4\Delta^2\omega^2 - 2\omega\Delta^4] \frac{1}{\Delta^8} \ln \frac{\Delta^2 + X}{X} - \\ & - \frac{1}{\Delta^4 X} (\Delta^2 + 2L_1) + \frac{1}{\Delta^6(\Delta^2 + X)} \left[2L_1(\Delta^4 - \Delta^2 - 4\omega^2 + 2\Delta^2\omega) - \right. \\ & \left. - \Delta^4 - 4\Delta^2\omega^2 + 2\Delta^4\omega - \frac{\Delta^6}{2} (2\omega + 1) \right] + \\ & + \frac{1}{(\Delta^2 + X)^2} \left[\frac{2L_1}{\Delta^4} \omega (-2\omega + \Delta^2 - \Delta^4) - 2 \frac{\omega^2}{\Delta^2} + \omega + \frac{\omega}{2} (2\omega + \Delta^2) \right] + \\ & \left. + \frac{4\omega^2}{3(\Delta^2 + X)^3} \left[2L_1 \left(1 - \frac{1}{\Delta^2} \right) - 1 - \frac{\Delta^2}{2} \right] \right\}, \quad (50) \end{aligned}$$

$$F^{(t)}(X, \omega) = -\frac{2\alpha r_0^2}{4\omega^2} \beta \left\{ -\frac{4}{\Delta^4} \left[2\omega \left(\omega - \frac{\Delta^2}{2} \right) c_1 + 2c_2 + \left(1 + 4 \frac{1-\omega}{\Delta^2} + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8\omega^2}{\Delta^4} \Big) c_3 \Big] \ln \frac{X}{\Delta^2 + X} - c_1 \ln X - \frac{2}{X} \left(c_1 + \frac{4c_3}{\Delta^4} \right) - \\
& - 4 \left[\frac{2\omega^2}{\Delta^2} c_1 + \left(1 + \frac{2}{\Delta^2} \right) c_2 + \frac{1}{\Delta^2} \left(1 + 2 \frac{1 - 2\omega}{\Delta^2} + \frac{8\omega^2}{\Delta^4} \right) c_3 \right] \frac{1}{\Delta^2 + X} - \\
& - \frac{8\omega}{(\Delta^2 + X)^2} \left[\frac{2\omega - \Delta^2}{\Delta^4} c_3 - c_4 \right] - \frac{32\omega^2}{3(\Delta^2 + X)^3} \left(\frac{c_3}{\Delta^2} + c_4 \right) \Big\}. \quad (51)
\end{aligned}$$

При $X_0 = X(\omega, \Delta)_{\min}$ из (49)–(51) получим выражения (41), (42). Для того чтобы получить $d\sigma^{(l)}(q_0)$ и $d\sigma^{(l)}(q_0)$, необходимо численно проинтегрировать (50), (51) по Δ^2 в интервале ее допустимых значений при X из интервала $X_0 \leq X \leq X_{\max}$, где X_0 , $X_{\max}$ определены в (48). Приведенные выше формулы очень громоздки, в области высоких энергий фотонов они могут быть существенно упрощены.

В работах [51, 52] в асимптотическом пределе высоких энергий фотона, когда можно пренебречь членами порядка m/ω по сравнению с единицей, для вычисления дифференциальных сечений процесса рождения триплетов линейно поляризованными фотонами с переданным импульсом $|q| > q_0$ использовался метод переменных Судакова. В этих переменных переданный 4-импульс q раскладывается по судакским параметрам α, β и $q_{\perp}$:

$$q = \alpha k + \beta p' + q_{\perp}; \quad p' = p - k \frac{m^2}{2(kp)}; \quad p'^2 = 0, \quad 2(pp') = m^2.$$

Параметры α и β определяются из уравнений

$$(p_1 - q)^2 = m^2, \quad (k + q)^2 = \Delta^2.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{q_{\perp}^2}{2\kappa}, \quad \beta = \frac{\Delta^2 + q_{\perp}^2}{2\kappa}, \quad q_{\perp}^2 = -q_{\perp}^2, \quad \kappa = (kp).$$

Поскольку минимальное значение регистрируемого на опыте импульса электрона отдачи q_0 порядка массы электрона, при написании квадрата 4-импульса промежуточного фотона $-q^2 = q_{\perp}^2 + (\Delta^2 + q_{\perp}^2) q_{\perp}^2 / (2\kappa)$ можно опустить второе слагаемое, так как эффективные Δ^2 порядка m^2 .

Тогда для дифференциального сечения получается следующий результат [52]:

$$2\pi \frac{d^3\sigma}{dx d q_{\perp}^2 d\varphi_1} = \frac{4\alpha r_0^2}{q_{\perp}^4} m^2 \{ [1 - 2x(1-x)] \Psi_1(q_{\perp}^2) + \\ + 2x(1-x) [1 - P \cos 2(\varphi_1 - \chi)] \Psi_2(q_{\perp}^2) \}, \quad (52)$$

где $x = E_+/\omega$ — доля энергии, уносимая позитроном,

$$\Psi_1(q_{\perp}^2) = \frac{1}{2z} \ln \frac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{z}}, \quad \Psi_2(q_{\perp}^2) = 1 - \frac{2m^2}{q_{\perp}^2} \Psi_1(q_{\perp}^2), \\ z = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{q_{\perp}^2}}.$$

Величина $q_{\perp}^2$ связана с массой M и энергией E_1 частицы отдачи в лабораторной системе:

$$q_{\perp}^2 = 2M(E_1 - M), \quad E_1 = \sqrt{M^2 + q^2}, \quad (53)$$

где q — 3-импульс отдачи. Для процесса фоторождения триплетов $M = m = 1$.

Интегрируя (52) по x от 0 до 1, находим распределение по перпендикулярной составляющей переданного импульса, справедливое, когда $q_{\perp}^2 \sim m^2$:

$$2\pi \frac{d^2\sigma}{d q_{\perp}^2 d\varphi_1} = \frac{4\alpha r_0^2}{3q_{\perp}^2} m^2 \{ 2\Psi_1(q_{\perp}^2) + [1 - P \cos 2(\varphi_1 - \chi)] \Psi_2(q_{\perp}^2) \}. \quad (54)$$

Используя далее связь $|q_{\perp}|$ с 3-импульсом и углом вылета электрона отдачи

$$\cos \theta_1 = \frac{E_1 - m}{|q|}; \quad |q_{\perp}|^2 = 2m(E_1 - m), \quad q = 2m \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1}, \quad (55)$$

можно получить распределения по импульсам и по углам вылета электронов отдачи [51]:

$$2\pi \frac{d\sigma}{dq d\varphi_1} = \frac{2\alpha r_0^2}{3(E_1 - m)} \left\{ 1 + \frac{2E_1 - 3m}{q} \ln \frac{E_1 + q}{m} - \right.$$

$$- P \cos 2(\varphi_1 - \chi) \left[1 - \frac{m}{q} \ln \frac{E_1 + q}{m} \right] \Bigg\}, \quad (56)$$

$$2\pi \frac{d\sigma}{d\varphi_1 d\theta_1} = \frac{2\alpha r_0^2}{3} \frac{\sin \theta_1}{\cos^3 \theta_1} \left\{ 1 - \frac{1 - 5\cos^2 \theta_1}{\cos \theta_1} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} - \right. \\ \left. - P \cos 2(\varphi_q - \chi) \left[1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{\cos \theta_1} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right] \right\}, \quad (57)$$

$$E_1 = \sqrt{q^2 + m^2}.$$

Отметим, что формула (57) описывает угловое распределение электронов отдачи для углов θ_1 , существенно меньших 90° , так как приближения, с помощью которых она получена, несправедливы вне этой области углов.

Не зависящая от поляризации часть распределения по импульсу электронов отдачи в (56) совпадает с формулой Бете — Суха [45], полученной путем разложения формулы Борселлино [67,68] для $d\sigma_B/dq$ по степеням m/ω в предельном случае больших энергий $\omega \gg m$ и переданных импульсов порядка массы электрона: $q \sim m$. Интегрируя (52) по $q_\perp^2$ от $q_\perp^2(q_0)$ до ∞ , где $q_\perp^2(q_0) = 2m(\sqrt{q_0^2 + m^2} - m)$, получим распределение по доле энергии позитронов в процессе образования триплетов при условии, что регистрируются все события с импульсами отдачи больше q_0 :

$$2\pi \frac{d^2\sigma}{dx d\varphi_1}(q_0) = 2\alpha r_0^2 \{ [1 - 2x(1-x)] J_1(q_0) + \\ + 2x(1-x)[1 - P \cos(\varphi_1 - \chi)] J_2(q_0) \}, \quad (58)$$

$$J_1(q_0) = 2 \left(t \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)} - \ln(2\operatorname{sh}(t)) \right),$$

$$J_2(q_0) = -\frac{2}{3} \ln(2\operatorname{sh}(t)) + \frac{t \cdot \operatorname{ch}(t)}{\operatorname{sh}(t)} + \frac{\operatorname{sh}(t) - t \cdot \operatorname{ch}^3(t)}{3 \cdot \operatorname{sh}^2(t)}, \quad \operatorname{sh}(2t) = q_0.$$

Полагая в (52) верхний предел интегрирования по $q_\perp^2$ равным ∞ , мы допускаем ошибку порядка m/ω . Отметим, что в случае рождения пар на тяжелой ($M \gg q_0$) мишени в (58) следует положить $2\operatorname{sh}(t) = q_0$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СЕЧЕНИЙ И АСИММЕТРИЙ СЕЧЕНИЯ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ФОТОННЫХ ПУЧКОВ

Для измерения линейной поляризации фотонных пучков представляют интерес триплеты с регистрируемыми импульсами электронов отдачи ($q \geq q_0$), для которых надежно определяется азимутальный угол φ_1 . Точность измерения поляризации зависит от величины поляризации P , от асимметрии процесса в выбранном интервале кинематических переменных, от самого выбора кинематических переменных и от набранной статистики. Поэтому для практического использования метода асимметрии электронов отдачи необходим анализ зависимости $d\sigma^{(t)}$, $d\sigma^{(l)}$ и Λ от всех этих величин с целью поиска оптимальных условий эксперимента.

Для проведения этого анализа выполнены вычисления по формулам п.2.3 и численные интегрирования соответствующих выражений по эффективной массе пары Δ , импульсу q и полярному углу θ_1 электрона отдачи.

Мы попытались найти области изменения переменных, в которых характер зависимости частей и асимметрий сечений, по крайней мере от одной переменной, оставался бы неизменным. Оказалось, что характер зависимости этих величин от Δ , q , q_0 и θ_1 не меняется с изменением ω в достаточно широком интервале энергий фотона.

В работе также проведены вычисления по асимптотическим выражениям. Результаты этих вычислений сравниваются с результатами вычислений по точным выражениям для выяснения, при каких энергиях фотонов можно пользоваться асимптотическими выражениями, какую точность они обеспечивают при различных энергиях фотонов, области применимости метода.

В ходе изложения результатов анализа данные наших вычислений сравниваются с имеющимися в литературе результатами экспериментальных и теоретических исследований сечения рождения триплетов неполяризованными фотонами.

Ожидаемая ошибка измерения степени поляризации ΔP в планируемом эксперименте [32, 57, 63, 64, 53, 54, 11], если пренебречь неопределенностью $\Delta\Lambda$ и другими малыми вкладами, пропорциональна произведению $N^{-1/2}\Lambda^{-1}$, где N — число зарегистрированных триплетов с параметрами, попавшими в выбранную область с границей g . Число со-

бытий N пропорционально $\sigma(g)$ — сечению, проинтегрированному по области переменных внутри g и

$$\Delta P(g) \sim \sigma^{(t)-1/2}(g) \Lambda^{-1}(g). \quad (59)$$

Для определения оптимальных условий эксперимента по измерению P анализируется функция

$$L(g) = \frac{\Delta P(g_{\text{tot}})}{\Delta P(g)} = \frac{\Lambda(g)}{\Lambda(g_{\text{tot}})} \cdot \left[\frac{\sigma^{(t)}(g)}{\sigma^{(t)}(g_{\text{tot}})} \right]^{1/2}, \quad (60)$$

значение которой показывает, во сколько раз повысится точность измерения поляризации при использовании части событий, попавших в область g , вместо событий из всей кинематически допустимой области изменения переменных g_{tot} . Отношение $\sigma^{(t)}(g)/\sigma^{(t)}(g_{\text{tot}})$ показывает, какую долю событий из области g_{tot} составляют события из области g .

В настоящем разделе анализ $d\sigma^{(t)}$, $d\sigma^{(l)}$, Λ , $\Lambda(g)$ и отношения $\sigma^{(t)}(g)/\sigma^{(t)}(g_{\text{tot}})$ выполнен по следующим переменным: энергии фотонов ω , импульсу электронов отдачи q , минимальному детектируемому импульсу q_0 , доле энергии $x = E_+/\omega$, уносимой позитроном, эффективной массе пары Δ , полярному углу вылета электрона отдачи θ_1 .

3.1. Зависимость сечений и асимметрий от энергии фотонов. На рис.5 и в табл.1—7 приведены зависимости от ω частей и асимметрий сечений $d^2\sigma/d\varphi_1 d\Delta(q_0)$, $d^2\sigma/d\varphi_1 dq$, $d^2\sigma/d\varphi_1(q_0)$ и $d\sigma/d\varphi_1 = d\sigma/d\varphi_1(q_0 = q_{\text{min}})$. В табл.1—7 части и асимметрии сечений $d^2\sigma/d\varphi_1 dq$, $d\sigma/d\varphi_1(q_0)$ и $d\sigma/d\varphi_1$ сравниваются с асимптотическими значениями.

Из рисунка и таблиц видно, что части сечений растут с увеличением ω . Наиболее резко рост проявляется в области энергий фотонов до $\sim 200 m$. При $\omega \geq 500 m$ он становится достаточно медленным. Асимметрия сечения, дифференциального по Δ , практически не зависит от энергии фотонов, асимметрии сечений, проинтегрированных по Δ , убывают с ростом ω .

Части приведенных в них точных сечений монотонно растут с увеличением ω , приближаясь к асимптотическим значениям. Асимметрии же этих сечений убывают с ростом ω , также приближаясь к асимптотическим значениям. При $\omega = 10000 m$ асимптотические значения отличаются от точных не более чем на 5%.

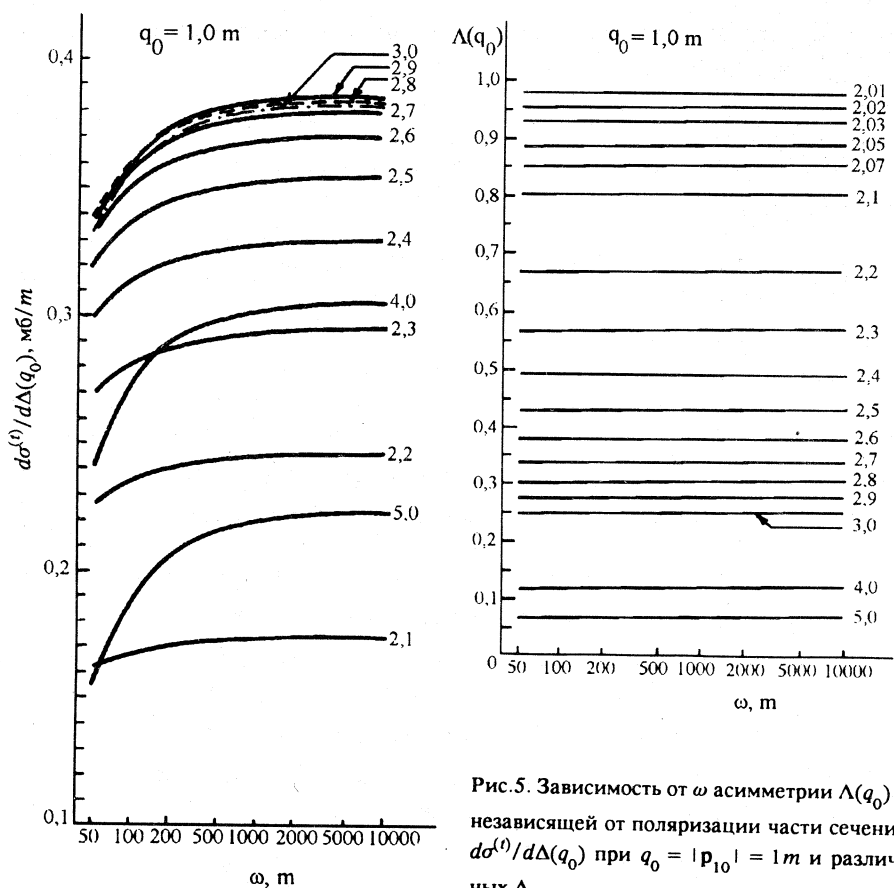


Рис.5. Зависимость от ω асимметрии $\Lambda(q_0)$ и независимой от поляризации части сечения $d\sigma^{(T)}/d\Delta(q_0)$ при $q_0 = |p_{10}| = 1m$ и различных Δ

Данные табл.1—3 показывают, что утверждения Суха и Бете [45] о независимости от ω при $\omega \gtrsim 100 mc^2$, $q \ll \omega$ и $\omega q \gg m^2 c^3$ характера распределения по q триплетов, образованных неполяризованными фотонами, справедливо для обеих частей сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 dq$. Подтверждением этому является и то, что части сечения $d\sigma/d\varphi_1(q_0)$ при $0,1mc \leq q_0 \leq 10 mc$ достаточно медленно меняются с ростом ω .

Сравнение данных табл.5,7 и табл.13 из [41] показывает, что значения $\sigma^{(T)}$ совпадают со значениями σ_B в [41]. Это свидетельствует о правильности наших вычислений и означает, что в интервале

Таблица 1. Сравнение сечений $d\sigma^{(l)}/dq$ и $d\sigma_a^{(l)}/dq$

q, m	$d\sigma^{(l)}/dq$, для различных $\omega(\omega \text{ в } m)$								$d\sigma_a^{(l)}/dq$
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
0,02	—	—	4,033	10,144	11,936	12,570	12,806	12,851	12,873
0,1	1,082	1,946	2,335	2,504	2,541	2,555	2,561	2,562	2,564
0,2	0,913	1,125	1,210	1,248	1,258	1,262	1,264	1,264	1,265
0,3	0,668	0,761	0,798	0,816	0,821	0,824	0,825	0,825	0,826
0,4	0,508	0,562	0,585	0,596	0,599	0,601	0,602	0,602	0,602
0,5	0,402	0,437	0,453	0,461	0,464	0,465	0,465	0,466	0,466
0,6	0,326	0,352	0,364	0,370	0,372	0,373	0,373	0,374	0,374
0,7	0,270	0,290	0,299	0,304	0,306	0,307	0,307	0,307	0,308
0,8	0,227	0,243	0,251	0,255	0,257	0,258	0,258	0,258	0,258
0,9	0,193	0,207	0,213	0,217	0,218	0,219	0,219	0,219	0,219
1,0	0,166	0,178	0,184	0,187	0,188	0,189	0,189	0,189	0,189
1,5	0,0886	0,0952	0,0984	0,100	0,101	0,101	0,101	0,101	0,101
2,0	0,0541	0,0586	0,0608	0,0621	0,0625	0,0627	0,0628	0,0629	0,0629
2,5	0,0361	0,0395	0,0411	0,0421	0,0424	0,0425	0,0426	0,0427	0,0427
3,0	0,0257	0,0283	0,0296	0,0304	0,0306	0,0307	0,0308	0,0308	0,0309
3,5	0,0191	0,0212	0,0223	0,0229	0,0231	0,0233	0,0233	0,0233	0,0234
4,0	0,0147	0,0165	0,0174	0,0179	0,0181	0,0182	0,0183	0,0183	0,0183
4,5	0,0116	0,0132	0,0139	0,0144	0,0146	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147
5,0	0,00934	0,0107	0,0114	0,0118	0,0120	0,0120	0,0121	0,0121	0,0121
10,0	0,00204	0,00265	0,00297	0,00316	0,00322	0,00325	0,00327	0,00328	0,00329

Таблица 2. Сравнение сечений $d\sigma^{(t)}/dq$ и $d\sigma_a^{(t)}/dq$

q, m	$d\sigma^{(t)}/dq$, для различных значений $\omega(\omega \text{ в } m)$								$d\sigma_a^{(t)}/dq$
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
0,02	—	—	—	36,64	55,74	69,12	79,66	84,09	90,11
0,1	2,571	6,886	10,72	14,15	15,69	16,63	17,32	17,591	17,95
0,2	3,152	5,069	6,477	7,633	8,137	8,442	8,662	8,750	8,864
0,3	2,672	3,762	4,526	5,142	5,409	5,570	5,687	5,733	5,794
0,4	2,204	2,921	3,417	3,813	3,985	4,088	4,164	4,194	4,234
0,5	1,829	2,345	2,699	2,981	3,104	3,178	3,232	3,254	3,283
0,6	1,535	1,928	2,196	2,411	2,504	2,561	2,602	2,619	2,641
0,7	1,301	1,613	1,825	1,996	2,070	2,115	2,148	2,162	2,180
0,8	1,113	1,368	1,542	1,682	1,743	1,780	1,807	1,818	1,833

q, m	$d\sigma^{(t)}/dq$, для различных значений $\omega(\omega \text{ в } m)$								$d\sigma_{\alpha}^{(t)}/dq$
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
0,9	0,961	1,174	1,320	1,437	1,488	1,519	1,542	1,552	1,564
1,0	0,837	1,018	1,142	1,242	1,286	1,313	1,332	1,340	1,351
1,5	0,460	0,557	0,624	0,678	0,703	0,718	0,729	0,733	0,739
2,0	0,284	0,347	0,390	0,426	0,442	0,452	0,459	0,462	0,466
2,5	0,191	0,235	0,266	0,292	0,304	0,311	0,317	0,319	0,322
3,0	0,136	0,169	0,193	0,213	0,222	0,228	0,232	0,234	0,236
3,5	0,101	0,128	0,147	0,163	0,170	0,175	0,178	0,179	0,181
4,0	0,0774	0,0992	0,115	0,128	0,134	0,138	0,141	0,142	0,144
4,5	0,0610	0,0793	0,0926	0,104	0,109	0,112	0,115	0,116	0,117
5,0	0,0491	0,0647	0,0761	0,0859	0,0904	0,0933	0,0954	0,0963	0,0976
10,0	0,0104	0,0158	0,0201	0,0239	0,0257	0,0269	0,0278	0,0282	0,0288

Таблица 3. Сравнение асимметрий Λ и Λ_{α}

q, m	Λ для различных значений $\omega(\omega \text{ в } m)$								Λ_{α}
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
0,02			0,485	0,277	0,214	0,182	0,161	0,153	0,143
0,1	0,421	0,283	0,218	0,177	0,162	0,154	0,148	0,146	0,143
0,2	0,290	0,222	0,187	0,164	0,154	0,149	0,146	0,144	0,143
0,3	0,250	0,202	0,176	0,159	0,152	0,148	0,145	0,144	0,143
0,4	0,231	0,192	0,171	0,156	0,150	0,147	0,144	0,144	0,142
0,5	0,219	0,186	0,168	0,155	0,149	0,146	0,144	0,143	0,142
0,6	0,212	0,183	0,166	0,153	0,149	0,146	0,144	0,143	0,142
0,7	0,207	0,180	0,164	0,153	0,148	0,145	0,143	0,142	0,141
0,8	0,203	0,178	0,163	0,152	0,147	0,145	0,143	0,142	0,141
0,9	0,201	0,176	0,162	0,151	0,147	0,144	0,142	0,141	0,140
1,0	0,199	0,175	0,161	0,150	0,146	0,143	0,142	0,141	0,140
1,5	0,193	0,171	0,158	0,148	0,144	0,141	0,139	0,138	0,137
2,0	0,190	0,169	0,156	0,146	0,141	0,139	0,137	0,136	0,135
2,5	0,189	0,168	0,154	0,144	0,139	0,137	0,135	0,133	0,133
3,0	0,189	0,167	0,153	0,142	0,138	0,135	0,133	0,132	0,131
3,5	0,189	0,166	0,152	0,141	0,136	0,133	0,131	0,130	0,129
4,0	0,189	0,166	0,151	0,140	0,135	0,132	0,129	0,128	0,127
4,5	0,190	0,166	0,151	0,139	0,134	0,130	0,128	0,127	0,126
5,0	0,190	0,166	0,150	0,138	0,132	0,129	0,127	0,126	0,124
10,0	0,196	0,167	0,148	0,132	0,125	0,121	0,118	0,116	0,114

Таблица 4. Сравнение сечений $\sigma^{(l)}(q_0)$ и $\sigma_a^{(l)}(q_0)$

q_0 , м	$\sigma^{(l)}(q_0)$ для различных $\omega(\omega \text{ в } m)$								$\sigma_a^{(l)}(q_0)$
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
q_{min}	0,6502	0,870	1,075	1,331	1,518	1,701	1,940	2,108	
0,02			1,054	1,172	1,202	1,214	1,219	1,221	1,222
0,1	0,6121	0,7176	0,7662	0,7921	0,8001	0,8040	0,8064	0,8072	0,8081
0,2	0,5078	0,5700	0,6004	0,6184	0,6246	0,6278	0,6298	0,6305	0,6313
0,3	0,4296	0,4778	0,5025	0,5180	0,5235	0,5264	0,5282	0,5289	0,5297
0,4	0,3713	0,4125	0,4344	0,4484	0,4535	0,4562	0,4580	0,4586	0,4593
0,5	0,3262	0,3630	0,3830	0,3960	0,4008	0,4034	0,4051	0,4057	0,4064
0,6	0,2900	0,3238	0,3424	0,3548	0,3593	0,3618	0,3634	0,3640	0,3645
0,7	0,2604	0,2918	0,3094	0,3212	0,3256	0,3280	0,3295	0,3301	0,3308
0,8	0,2357	0,2653	0,2820	0,2933	0,2976	0,2999	0,3014	0,3019	0,3026
0,9	0,2148	0,2428	0,2588	0,2698	0,2739	0,2761	0,2776	0,2782	0,2788
1,0	0,1968	0,2236	0,2391	0,2496	0,2537	0,2559	0,2573	0,2578	0,2585
1,5	0,1361	0,1584	0,1718	0,1811	0,1848	0,1868	0,1881	0,1886	0,1892
2,0	0,1014	0,1211	0,1331	0,1417	0,1451	0,1469	0,1482	0,1487	0,1492
2,5	0,07927	0,09703	0,1081	0,1162	0,1193	0,1211	0,1223	0,1228	0,1233
3,0	0,06403	0,08033	0,09067	0,09829	0,1013	0,1030	0,1042	0,1046	0,1052
3,5	0,05296	0,06808	0,07783	0,08509	0,08801	0,08967	0,09077	0,09119	0,09174
4,0	0,04460	0,05873	0,06798	0,07495	0,07777	0,07938	0,08047	0,08088	0,08140
4,5	0,03808	0,05136	0,06020	0,06691	0,06965	0,07122	0,07228	0,07268	0,07319
5,0	0,03288	0,04543	0,05389	0,06038	0,06304	0,06458	0,06561	0,06601	0,06651
10,0	0,01048	0,01853	0,02470	0,02981	0,03201	0,03331	0,03423	0,03458	0,03502

Таблица 5. Сравнение сечений $\sigma^{(t)}(q_0)$ и $\sigma_a^{(t)}(q_0)$

q_0 , м	$\sigma^{(t)}(q_0)$ для различных значений $\omega(\omega \text{ в } m)$								$\sigma_a^{(t)}(q_0)$
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
q_{min}	2,769	4,141	5,553	7,403	8,767	10,103	11,825	13,088	
0,02			5,516	6,957	7,672	8,128	8,473	8,616	8,811
0,1	2,693	3,722	4,490	5,145	5,442	5,629	5,770	5,830	5,914
0,2	2,383	3,124	3,661	4,120	4,330	4,464	4,568	4,611	4,676
0,3	2,091	2,687	3,122	3,496	3,670	3,782	3,869	3,907	3,963
0,4	1,848	2,356	2,729	3,054	3,207	3,306	3,384	3,418	3,469

q_0 , m	$\sigma^{(t)}(q_0)$ для различных значений ω (ω в m)								$\sigma_a^{(t)}(q_0)$
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
0,5	1,647	2,094	2,426	2,717	2,856	2,946	3,017	3,049	3,096
0,6	1,479	1,882	2,182	2,449	2,577	2,661	2,728	2,757	2,802
0,7	1,338	1,705	1,982	2,230	2,349	2,428	2,491	2,519	2,562
0,8	1,218	1,557	1,814	2,047	2,159	2,234	2,294	2,321	2,362
0,9	1,114	1,430	1,672	1,891	1,998	2,070	2,127	2,153	2,193
1,0	1,024	1,321	1,549	1,758	1,860	1,929	1,984	2,009	2,048
1,5	0,7134	0,9436	1,127	1,298	1,385	1,443	1,491	1,513	1,548
2,0	0,5324	0,7238	0,880	1,030	1,106	1,159	1,202	1,222	1,255
2,5	0,4158	0,5810	0,7188	0,8530	0,9227	0,9711	1,011	1,030	1,061
3,0	0,3352	0,4912	0,6053	0,7282	0,7928	0,8380	0,8768	0,8936	0,9230
3,5	0,2767	0,4077	0,5211	0,6351	0,6956	0,7382	0,7744	0,7912	0,8194
4,0	0,2325	0,3514	0,4562	0,5629	0,6201	0,6605	0,6952	0,7113	0,7387
4,5	0,1981	0,3070	0,4046	0,5051	0,5955	0,5983	0,6315	0,6471	0,6738
5,0	0,1770	0,2712	0,3626	0,4579	0,5098	0,5471	0,5792	0,5943	0,6203
10,0	0,05438	0,1093	0,1663	0,2315	0,2695	0,2978	0,3230	0,3353	0,3572

Таблица 6. Сравнение асимметрий $\Lambda(q_0)$ и $\Lambda_a(q_0)$

q_0 , m	$\Lambda(q_0)$ для различных значений ω (ω в m)								$\Lambda_a(q_0)$
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
$q_{\min}$	0,235	0,210	0,193	0,180	0,173	0,168	0,164	0,161	
0,02			0,1912	0,1684	0,1568	0,1494	0,1439	0,1417	0,1397
0,1	0,2273	0,1928	0,1706	0,1540	0,1470	0,1425	0,1397	0,1385	0,1366
0,2	0,2131	0,1825	0,1640	0,1501	0,1442	0,1406	0,1379	0,1367	0,1350
0,3	0,2054	0,1778	0,1610	0,1482	0,1426	0,1392	0,1365	0,1354	0,1337
0,4	0,2010	0,1751	0,1592	0,1468	0,1414	0,1380	0,1353	0,1342	0,1324
0,5	0,1980	0,1733	0,1579	0,1458	0,1404	0,1369	0,1342	0,1331	0,1312
0,6	0,1960	0,1721	0,1569	0,1449	0,1394	0,1360	0,1332	0,1320	0,1301
0,8	0,1935	0,1704	0,1554	0,1433	0,1378	0,1342	0,1314	0,1301	0,1281
0,9	0,1928	0,1698	0,1548	0,1427	0,1371	0,1334	0,1304	0,1292	0,1271
1,0	0,1921	0,1693	0,1543	0,1420	0,1364	0,1327	0,1297	0,1284	0,1262
1,5	0,1907	0,1679	0,1525	0,1395	0,1334	0,1294	0,1261	0,1247	0,1222

q_0 , м	$\Lambda(q_0)$ для различных значений ω (ω в м)								$\Lambda_\alpha(q_0)$
	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000	
2,0	0,1904	0,1673	0,1512	0,1376	0,1312	0,1268	0,1233	0,1217	0,1190
2,5	0,1906	0,1670	0,1504	0,1362	0,1293	0,1247	0,1209	0,1192	0,1162
3,0	0,1910	0,1669	0,1498	0,1350	0,1278	0,1230	0,1189	0,1181	0,1139
3,5	0,1914	0,1669	0,1494	0,1340	0,1265	0,1215	0,1172	0,1153	0,1119
4,0	0,1918	0,1671	0,1490	0,1332	0,1254	0,1202	0,1158	0,1137	0,1102
4,5	0,1922	0,1673	0,1488	0,1325	0,1245	0,1190	0,1144	0,1123	0,1086
5,0	0,1926	0,1675	0,1486	0,1319	0,1237	0,1180	0,1133	0,1111	0,1072
10,0	0,1928	0,1695	0,1485	0,1287	0,1188	0,1119	0,1059	0,1031	0,09803

Таблица 7. Сравнение частей и асимметрий сечений
 $d\sigma/d\varphi_1$ и $d\sigma_\alpha/d\varphi_1$

ω , м	$\sigma^{(l)}$, мб	$\sigma_\alpha^{(l)}$, мб	$\frac{\sigma^{(l)}}{\sigma_\alpha^{(l)}}$	$\sigma^{(r)}$, мб	$\sigma_\alpha^{(r)}$, мб	$\frac{\sigma^{(r)}}{\sigma_\alpha^{(r)}}$	Λ	Λ_α	$\frac{\Lambda}{\Lambda_\alpha}$
50	0,650	0,757	0,860	2,769	3,623	0,764	0,235	0,209	1,124
100	0,870	0,935	0,930	4,141	4,872	0,850	0,210	0,192	1,094
200	1,075	1,114	0,965	5,553	6,122	0,907	0,193	0,182	1,064
500	1,331	1,350	0,986	7,403	7,737	0,952	0,180	0,174	1,036
1000	1,518	1,528	0,993	8,767	9,023	0,972	0,173	0,169	1,022
2000	1,701	1,707	0,997	10,103	10,272	0,983	0,168	0,166	1,013
5000	1,940	1,943	0,998	11,825	11,924	0,992	0,164	0,163	1,007
10000	2,108	2,121	0,994	13,088	13,173	0,994	0,161	0,161	1,0005

$50 \text{ м} \leq \omega \leq 5000 \text{ м}$ значения наших сечений отличаются от значений, соответствующих учету 8 диаграмм, менее чем на 1,2%.

Характерные черты зависимости от ω частей и асимметрий сечений $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ и $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ показаны на рис.6—9. В исследуемом интервале ω зависимости частей этих сечений от ω носят пороговый характер. Положение порога частей $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ и $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ определяется выражением

$$\omega_{\text{пор}} = m(E_1 + m)/(q \cos\theta_1 - E_1 + m). \quad (61)$$

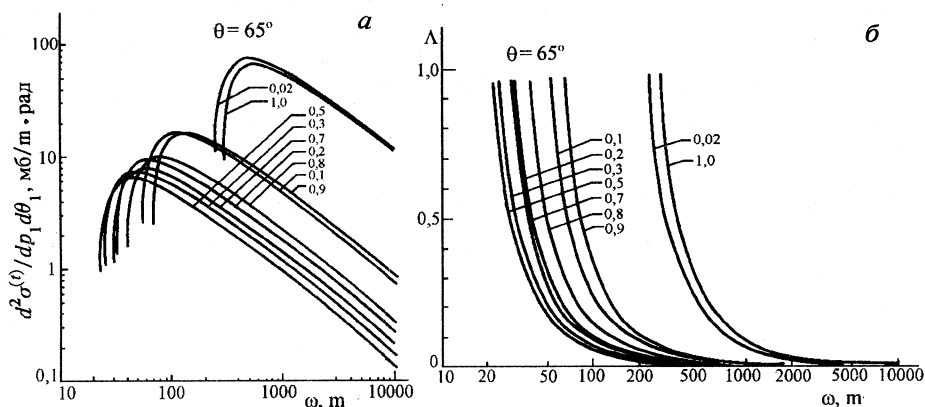


Рис.6. Зависимость от ω асимметрии и сечения $d^2\sigma^{(t)}/dq d\theta_1$ при $\theta_1 = 65^\circ$ и различных $q = |p_1|$

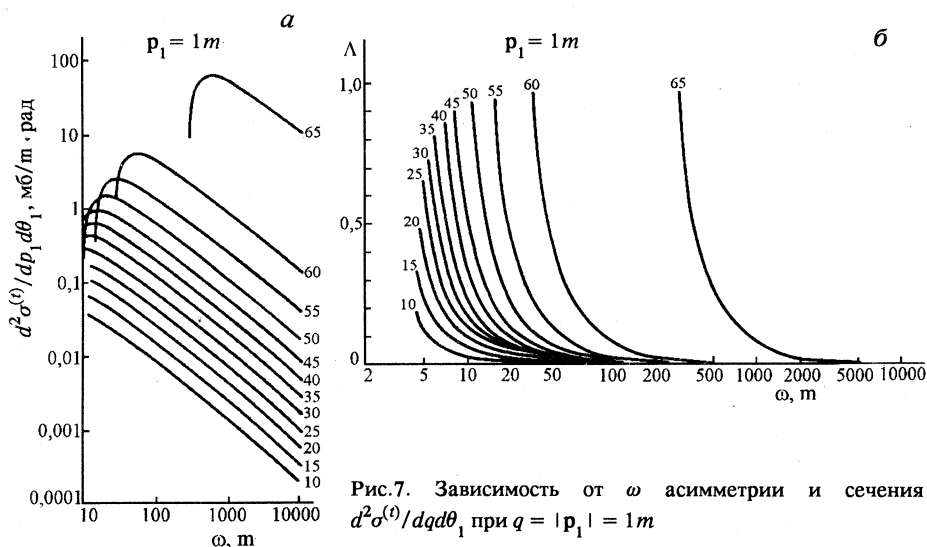


Рис.7. Зависимость от ω асимметрии и сечения $d^2\sigma^{(t)}/dq d\theta_1$ при $q = |p_1| = 1$ m

Вблизи порога части этих сечений быстро увеличиваются с ростом ω . Их асимметрии стремятся к единице при $\omega \rightarrow \omega_{\text{пор}}$. С ростом ω у порога они очень быстро убывают. В области больших ω кривые зависимости части и асимметрии сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ выходят на плато. Вдали от порогов части сечений $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ и $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ при заданных ω растут с увеличением θ_1 .

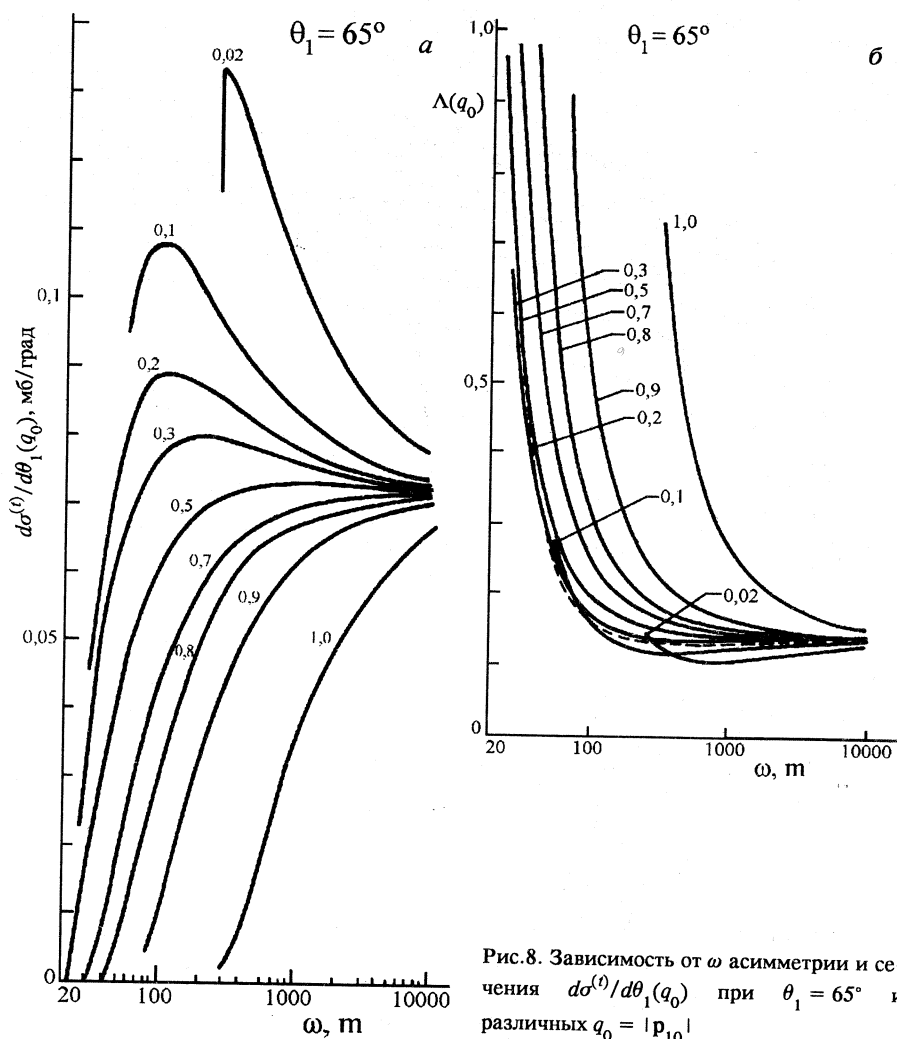


Рис. 8. Зависимость от ω асимметрии и сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ при $\theta_1 = 65^\circ$ и различных $q_0 = |p_{10}|$

Характер зависимости от ω частей и асимметрий сечений $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$, $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ после максимумов несколько отличаются. Он зависит от θ_1 и от q или q_0 соответственно.

В дважды логарифмической системе координат убывание частей сечения $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ после максимумов близко к линейному. После крутого спада у порога его асимметрия медленно убывает до значения,

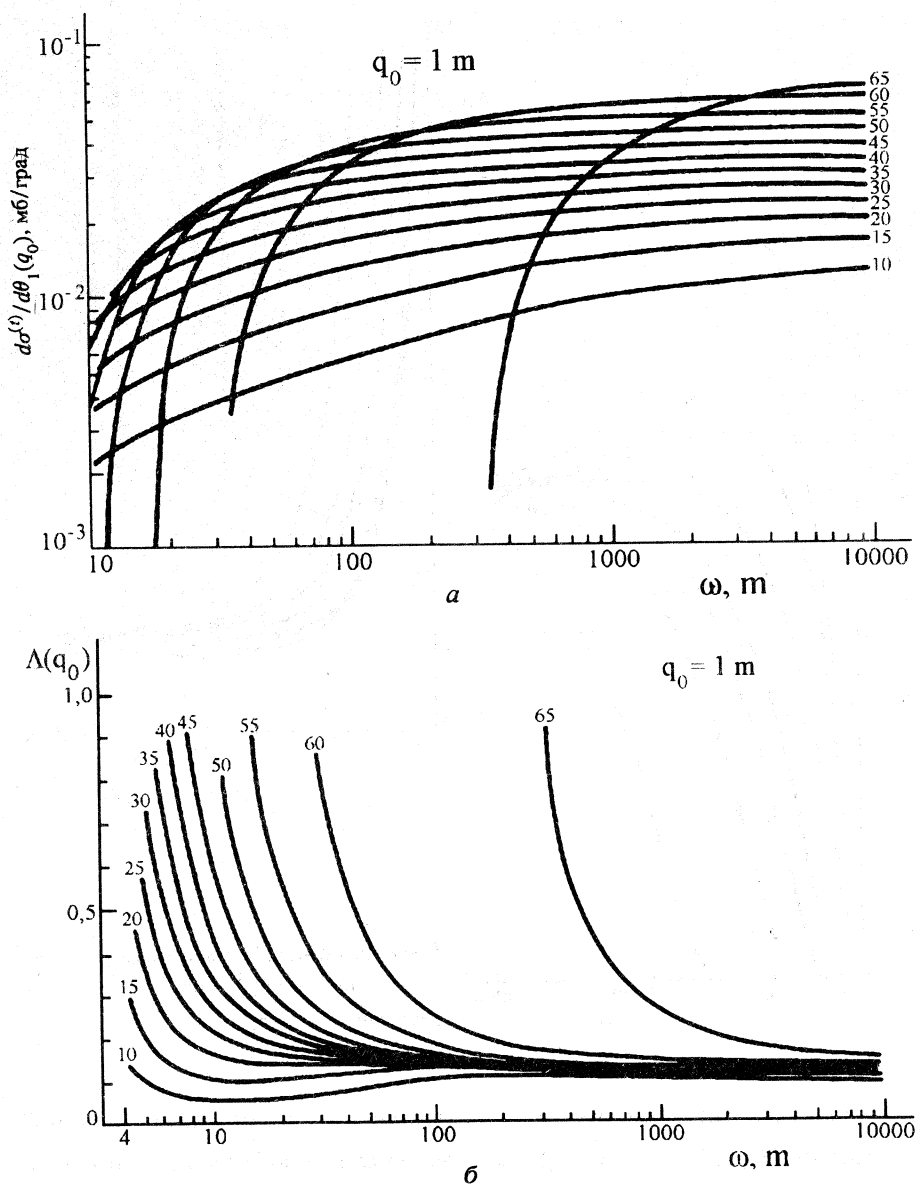


Рис.9. Зависимость от ω асимметрии и сечения $d\sigma^{(0)}/d\theta_1(q_0)$ при $q_0 = |p_{10}| = 1$ м и различных θ_1

близкого к нулю. С увеличением $\omega_{\text{пор}}$ значения частот его в максимуме возрастают. При $\theta_1 = 65^\circ$ и $50m \leq \omega \leq 10000m$ максимально допустимые значения q находятся в интервале $0,852m \leq q_{\text{max}} \leq 1,028m$. Положение порогов и максимумов его частот смещается с ростом q : в интервале $0,02m \leq q \leq 0,5m$ в сторону меньших ω и в сторону больших ω в интервале $0,5m \leq q \leq 1m$. При использованных в расчетах значениях q и ω его асимметрия вблизи порога достигает 96%. Аналогичен характер зависимости от ω части и асимметрии этого сечения и при других θ_1 . В исследуемом интервале ω при $q = 1m$ углы $\theta_1 \geq 65,52^\circ$ запрещены кинематикой. С увеличением θ_1 положение порогов и максимумов смещается в сторону больших ω , а значения частот сечения в максимумах растут. Вблизи порогов при больших θ_1 и значениях q и ω , используемых в расчетах, асимметрия и в случае фиксированных q достигает 96%. Аналогичный характер зависимости от ω частот и асимметрии $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ имеет место и при других q . Изменение q приводит к изменениям, аналогичным тем, которые имеют место на рис.6 при $\theta_1 = 65^\circ$.

Пороги и максимумы не зависящей от поляризации части и максимумы асимметрии сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ с ростом θ_1 смещаются в сторону больших ω . Асимметрия после крутого спада у порога медленно убывает с ростом ω , при малых θ_1 проходит через минимум, после чего медленно растет с последующим выходом на плато. С ростом θ_1 минимумы асимметрии проявляются слабее и при больших углах исчезают.

Быстрый рост у порога части сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ с ростом ω при $q_0 = 1m$ сменяется более медленным с последующим выходом на плато.

При заданных θ_1 характер зависимости от ω частот и асимметрии сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ изменяется с изменением q_0 . При малых q_0 (рис.8) максимумы частот сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ проявляются четко. С ростом q_0 они расширяются и при приближении к $q(\omega, \theta_1)_{\text{max}}$ исчезают. При больших ω кривые зависимости от энергии фотонов частот этого сечения выходят на плато. При малых q_0 асимметрия сечения проходит через минимум, после чего выходит на плато. С ростом q_0 минимумы проявляются менее четко, а затем и вовсе исчезают. При других θ_1 аналогичен характер зависимости не зависящей от поляризации части и асимметрии

сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ от ω . Изменение θ_1 приводит к смещению порогов и максимумов этой части и асимметрии, аналогично тому, как это имеет место при $q_0 = 1m$ на рис.9.

Из рис.5—9 и табл.1—7 виден характер зависимости частей и асимметрий сечений от Δ , q , q_0 и θ_1 при различных ω . В достаточно широком интервале ω характер зависимости частей и асимметрий исследуемых сечений от этих величин практически не зависит от энергии фотонов. В данной работе анализ зависимости частей и асимметрий исследуемых сечений от Δ , q_0 и θ_1 проводится при $\omega = 1000m$.

Исследование характера зависимости от ω частей и асимметрий сечений $d^2\sigma/d\varphi_1 d\Delta(q_0)$, $d^2\sigma/d\varphi_1 dq$, $d\sigma/d\varphi(q_0)$, $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$, $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ рождения регистрируемых триплетов показывает, что в интервале $50m \leq \omega \leq 10000m$ части и асимметрии этих сечений имеют большие значения. С ростом ω значения частей и асимметрий сечений $d^2\sigma/d\varphi_1 dq$, $d\sigma/d\varphi_1(q_0)$ и, как мы увидим в п.3.5, части и асимметрии сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ стремятся к значениям соответствующих частей и асимметрий сечений $d^2\sigma_a/d\varphi_1 dq$, $d\sigma_a/d\varphi_1(q_0)$, $d\sigma_a/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$, полученных в асимптотическом пределе высоких энергий фотонов. Большие значения частей и асимметрий асимптотических сечений указывают на то, что процесс (3) может оказаться эффективным для измерения линейной поляризации фотонов с энергиями от нескольких десятков МэВ до энергии порядка нескольких ТэВ, где становятся справедливыми асимптотические выражения.

3.2. Зависимость сечений и асимметрий от q и q_0 . Рассмотрим сначала зависимость от q и q_0 частей и асимметрий сечений, не зависящих от θ_1 . На рис.10—12 и в табл.1—3, 4—6 показан характер этих зависимостей. На рис.11,в приведено отношение асимметрий $\Lambda(q_0, x)/\Lambda(q_0)$. Из рисунков и таблиц видно, что части всех этих сечений быстро убывают с ростом q и q_0 . Асимметрия сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\Delta(q_0)$ увеличивается с ростом q_0 в отличие от асимметрий других сечений этой группы, убывающих с ростом q и q_0 . Особенно сильно рост асимметрий проявляется при Δ в интервале $2,1m \leq \Delta \leq 3m$. Отношения асимметрий при фиксированной доле энергии x_1 , уносимой позитроном, не зависят от q_0 .

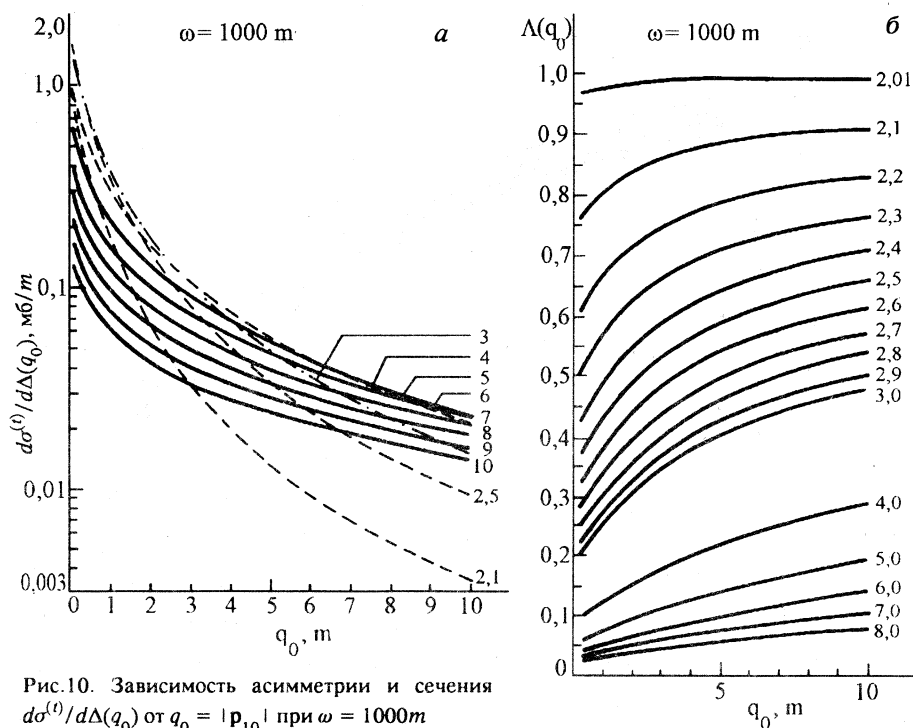


Рис.10. Зависимость асимметрии и сечения $d\sigma^{(t)}/d\Delta(q_0)$ от $q_0 = |\mathbf{p}_{10}|$ при $\omega = 1000m$

Сравнение значений частей и асимметрий асимптотических сечений $d^2\sigma_a/d\varphi_1 dq$ и $d\sigma_a/d\varphi_1(q_0)$ со значениями частей и асимметрий сечений $d^2\sigma/d\varphi_1 dq$ и $d\sigma/d\varphi_1(q_0)$ в табл.1—6 показывает, что при заданных ω отношения неасимптотических величин к асимптотическим слабо меняются с ростом q и q_0 .

Экспериментальные распределения по q триплетов, образованных неполяризованными фотонами [43,44,46,47], хорошо согласуются с расчетами по формуле Суха — Бете [45], совпадающей с частью, не зависящей от поляризации, в (56). Однако при больших импульсах экспериментальные точки ложатся ниже теоретических кривых. На рис.12 сечения $d\sigma_a^{(t)}/dq$ (сплошная кривая) и $d\sigma^{(t)}/dq$ (пунктирная кривая) сравниваются с распределением триплетов, образованных фотонами с энергией 600—800 МэВ [43] в стримерной камере, заполненной смесью из 90% неона и 10% гелия. На гелии образовалось менее 5% событий. Пунктирная

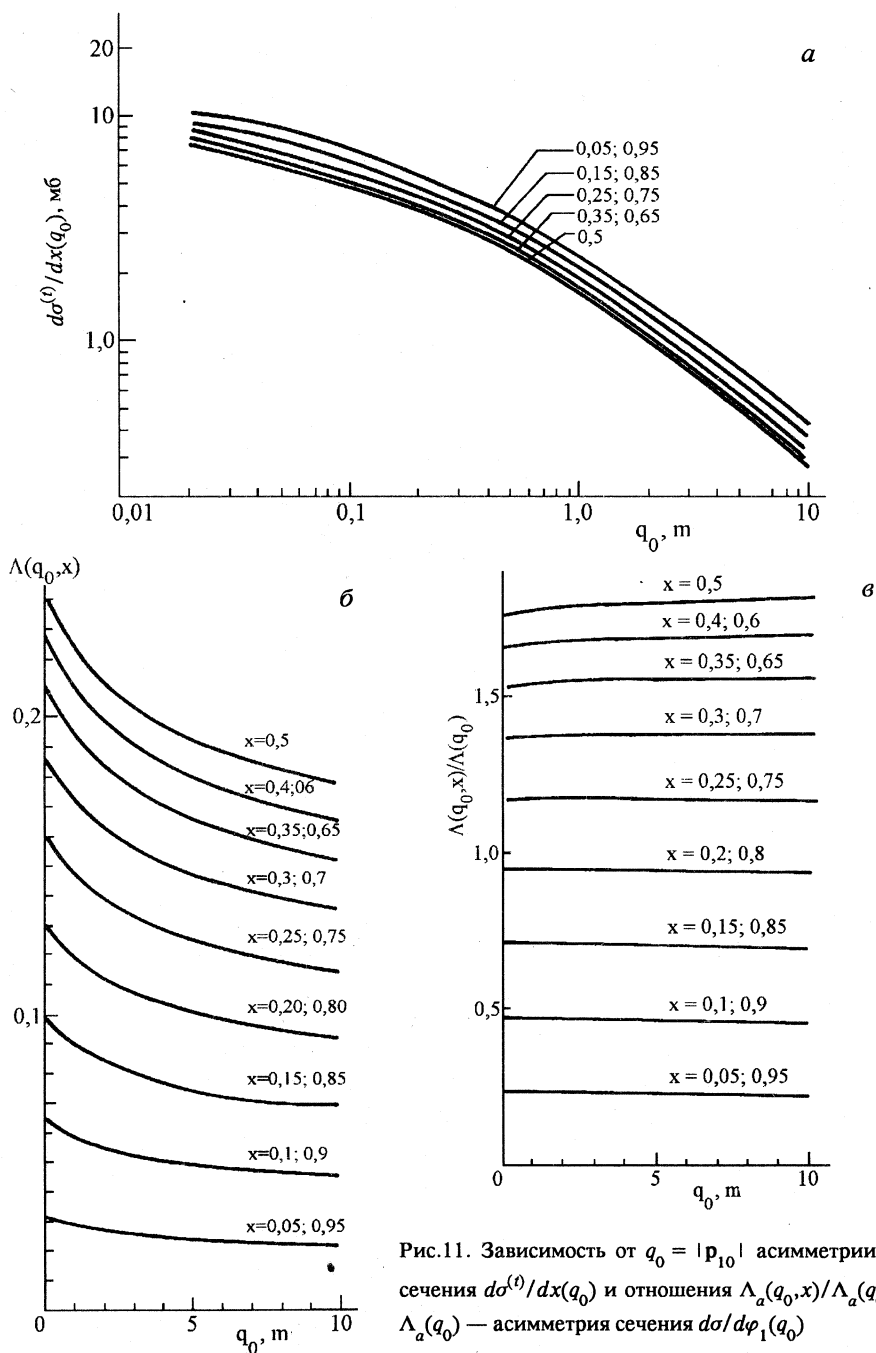
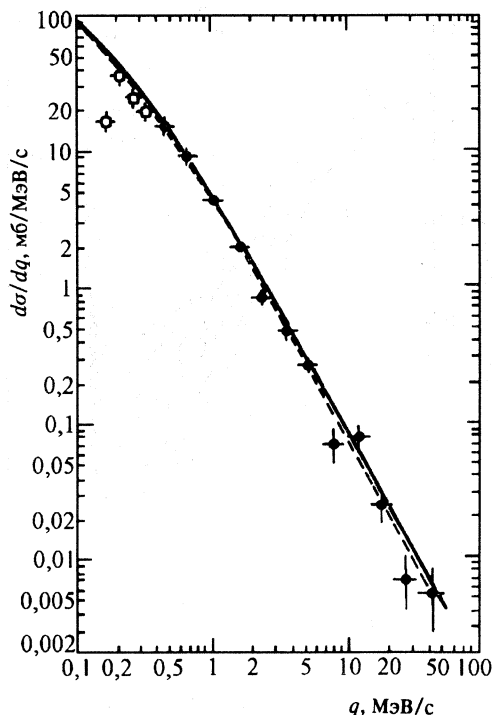


Рис.11. Зависимость от $q_0 = |p_{10}|$ асимметрии и сечения $d\sigma^{(l)}/dx(q_0)$ и отношения $\Lambda_a(q_0, x)/\Lambda_a(q_0)$. $\Lambda_a(q_0)$ — асимметрия сечения $d\sigma/d\varphi_1(q_0)$

Рис.12. Сравнение экспериментального распределения по q из работы [43] с сечениями $d\sigma_a^{(0)}/dq$ (сплошная кривая) и $d\sigma^{(0)}/dq$ (пунктирная кривая)



кривая проходит ниже сплошной и лучше согласуется с экспериментальными данными*.

Рассмотрим теперь зависимость от q и q_0 частей и асимметрий сечений $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ и $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ (рис.13—16).

При заданных ω и θ_1 не зависящая от поляризации часть сечения $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ имеет максимумы вблизи $q(\omega, \theta_1)_{\max}$ и $q(\omega, \theta_1)_{\min}$, между которыми находятся минимумы. Значения части сечения в максимумах $q(\omega, \theta_1)_{\max}$ меньше, чем в максимумах вблизи $q(\omega, \theta_1)_{\min}$. Асимметрия этого сечения имеет минимумы в минимумах его не зависящей от поляризации части. При стремлении q к $q(\omega, \theta_1)_{\max}$ и к $q(\omega, \theta_1)_{\min}$ она стремится к единице. При $\theta_1 = 65^\circ$ минимумы этой части сечения и асимметрии находятся в интервале более узком, чем $0,4t \leq q \leq 0,6t$. С ростом ω значения части сечения в минимумах убывают, а в максимумах возрастают. Левые максимумы смещаются в сторону меньших импульсов отдачи, а правые — в сторону больших q . Поскольку при $\omega \rightarrow \infty$ $q(\omega, \theta_1)_{\min} \rightarrow 0$, а $q(\omega, \theta_1)_{\max}$ быстро стремится к $2t \cos \theta_1 / \sin^2 \theta_1$, смещение правых максимумов при $\theta_1 = 65^\circ$ и $\omega > 500t$ незначительно. Правые пики находятся вблизи $q \approx 1t$. На рис.13,а значения части сечения в них отмечены

*По-видимому, на рис.6 работы [43] ошибочно указана размерность мб/МэВ/с. Наши значения $dd\sigma_a^{(0)}/dq$ из табл.2 после умножения на $Z = 10$ ложатся на сплошную кривую.

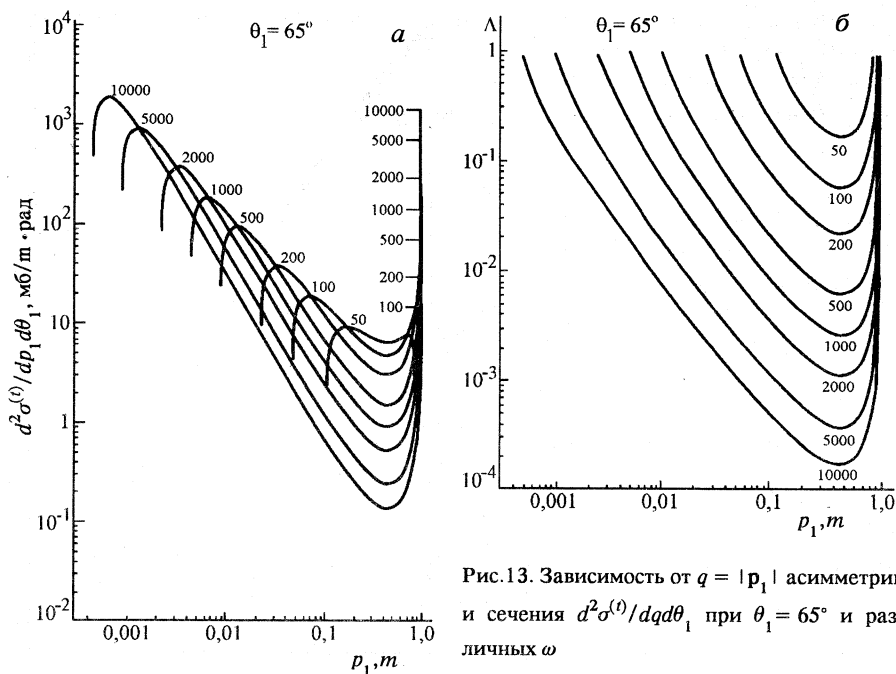


Рис.13. Зависимость от $q = |p_1|$ асимметрии и сечения $d^2\sigma^{(i)}/dq d\theta_1$ при $\theta_1 = 65^\circ$ и различных ω

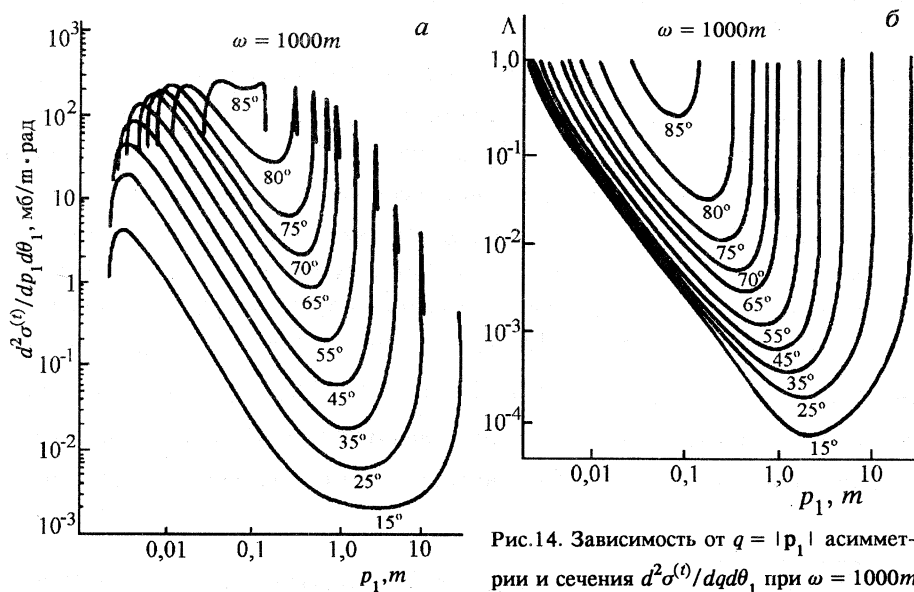


Рис.14. Зависимость от $q = |p_1|$ асимметрии и сечения $d^2\sigma^{(i)}/dq d\theta_1$ при $\omega = 1000m$ и различных θ_1

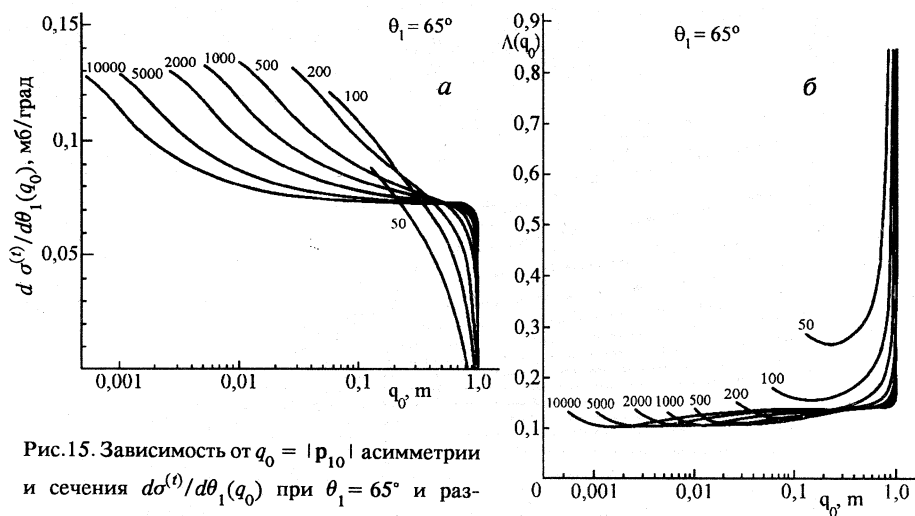


Рис.15. Зависимость от $q_0 = |\mathbf{p}_{10}|$ асимметрии и сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ при $\theta_1 = 65^\circ$ и различных ω

рисками, против которых указаны соответствующие им значения ω . При уменьшении θ_1 минимумы и правые максимумы (рис.14) смещаются в сторону больших импульсов электронов отдачи, а левые максимумы — в сторону меньших q ; значения части сечения в максимумах и в минимумах уменьшаются, а различие между значениями части сечения в правых и левых максимумах увеличивается.

Характер зависимости частей сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ от q_0 следует из характера зависимости частей сечения $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ от q . При изменении q_0 от $q(\omega, \theta_1)_{\min}$ до $q(\omega, \theta_1)_{\max}$ сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ и $d\sigma^{(l)}/d\theta_1(q_0)$ убывают, соответственно, от $d\sigma^{(t)}/d\theta_1$ и $d\sigma^{(l)}/d\theta_1$ до нуля. Это убывание очень быстрое, когда q_0 находится в окрестностях максимумов, и достаточно медленное, когда q_0 находится в области минимумов. С ростом ω при фиксированном θ_1 (рис.15) убывание частей сечения вблизи верхней границы q_0 становится более крутым. С ростом q_0 от нижней границы до области крутого спада скорость убывания частей сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ уменьшается, и вблизи верхней границы q_0 кривые зависимости этого сечения от q_0 выходят на плато. Ширина плато растет с увеличением ω .

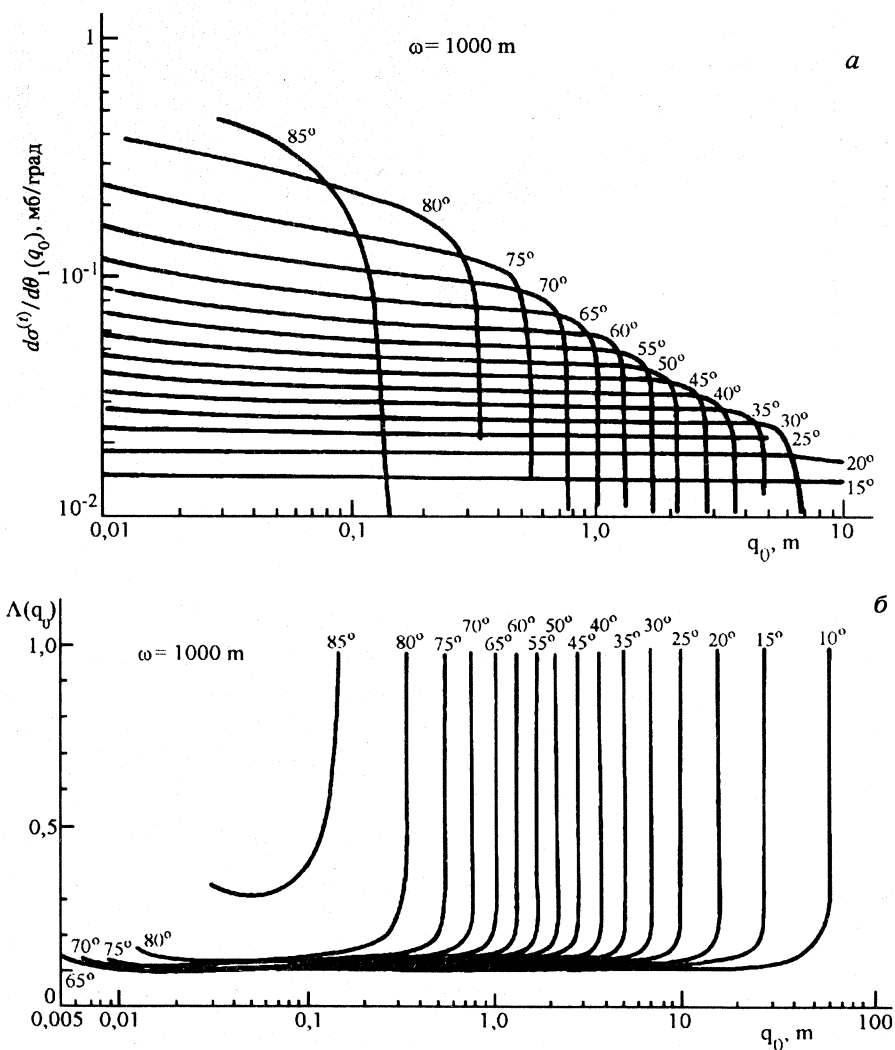


Рис.16. Зависимость от $q_0 = |p_{10}|$ асимметрии и сечения $d\sigma^{(1)}/d\theta_1(q_0)$ при $\omega = 1000\text{ м}$ и различных θ_1

Когда $q_0 = q(\omega, \theta_1)_{\min}$, асимметрия сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ равна асимметрии сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1$. С ростом q_0 она медленно убывает и, пройдя минимум, начинает медленно расти. Вблизи $q(\omega, \theta_1)_{\max}$ она очень

быстро растет с увеличением q_0 , стремясь к единице. При $\omega \geq 200m$ перед областью крутого роста в зависимости асимметрии от q_0 появляется плато. Ширина его растет с увеличением ω . Уменьшение θ_1 при фиксированном ω приводит (рис.16) к увеличению ширины плато у кривых зависимости частей и асимметрии сечения $d^3\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ от q_0 .

Выбор оптимальных интервалов q для измерения степени линейной поляризации фотонных пучков при использовании сечений, дифференциальных по Δ , x и θ_1 , будет рассмотрен ниже при поиске оптимальных интервалов Δ , x и θ_1 для таких измерений. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая использования сечения $d\sigma/d\varphi_1(q_0)$. Поскольку части этого сечения и асимметрия убывают с ростом q_0 , величина $L(q_0) = \Delta P(q_0 = q_{\min})/\Delta P(q_0)$ всегда меньше единицы и убывает с ростом q_0 . Это означает, что точность измерения степени линейной поляризации фотонных пучков при использовании интервала $q_0 \leq q \leq q_{\max}$ будет тем выше, чем с меньшими импульсами электронов отдачи можно отбирать события для таких измерений.

3.3. Зависимость сечения и асимметрии от эффективной массы рожденной пары Δ . Из зависимости от энергии фотонов сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\Delta(q_0)$, приведенного на рис.5, следует наличие максимумов в зависимости этого сечения от Δ . Их положение при $\omega > 200m$ не зависит от ω .

На рис.17 показаны зависимости части, не зависящей от поляризации, и асимметрии сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\Delta(q_0)$ от Δ при $\omega = 1000m$ и различных значениях q_0 . Из этого рисунка видно, что с ростом q_0 значения этой части сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\Delta(q_0)$ быстро убывают, а их максимумы становятся более широкими и смещаются в сторону больших Δ . Асимметрия этого сечения при $\Delta = 2,01m$ порядка 0,98. С ростом Δ она быстро убывает. С увеличением q_0 это убывание становится более медленным. Для обеспечения оптимальных условий эксперимента разумно отбирать события с $q > q_0$ из интервала

$$2m \leq \Delta \leq \Delta_0. \quad (62)$$

В результате численного интегрирования по Δ (49) с учетом (50) и (51) получены значения $d\sigma^{(l)}(q_0, \Delta_0)$, $d\sigma^{(t)}(q_0, \Delta_0)$ и $\Lambda(q_0, \Delta_0)$ и из условия максимума $L(q_0, \Delta_0) = \Delta P(q_0, \Delta_{\max})/\Delta P(q_0, \Delta_0)$ найдены опти-

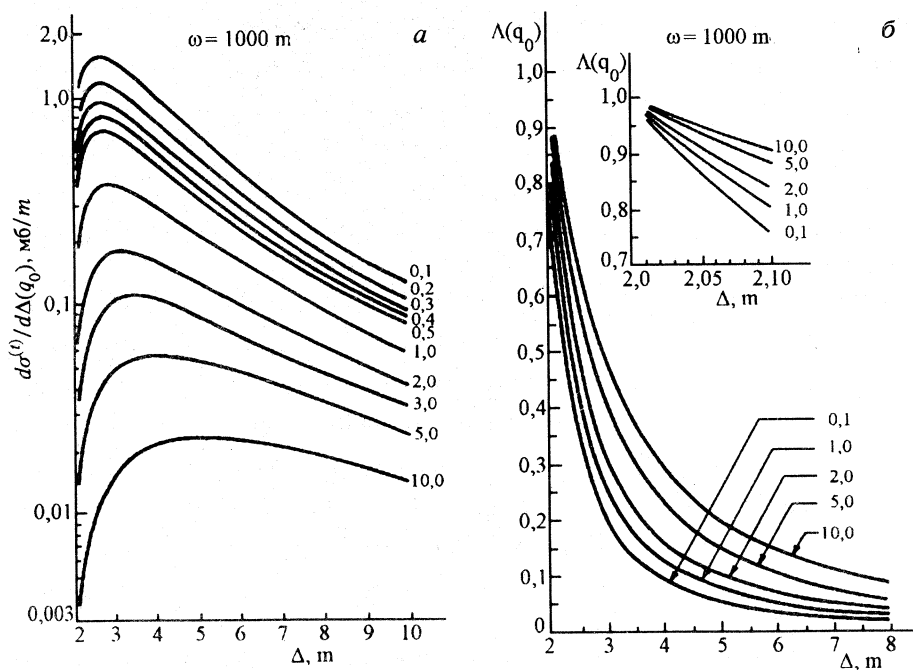


Рис.17. Зависимость от Δ асимметрии и сечения $d\sigma^{(t)}/d\Delta(q_0)$ при $\omega = 1000m$ и различных q_0

мальные значения Δ_0 . Зависимости $L(q_0, \Delta_0)$ и $\sigma^{(t)}(q_0, \Delta_0)/\sigma^{(t)}(q_0, \Delta_{\max})$ от Δ_0 при различных ω и $q_0 = 1m$ приведены в табл.8 и 9. Оптимальными для постановки опыта [60—64] при $q_0 = 1m$ оказываются интервал $2m \leq \Delta \leq 3m$ при $\omega = 50m$ и $\omega = 100m$ и интервал $2m \leq \Delta \leq 4m$ при $\omega \geq 200m$. В эти интервалы попадает 22,5—41,2% событий из интервала $2m \leq \Delta \leq \Delta_{\max}$, а точность на 17—35% выше, чем при использовании всех событий. При $\Delta_0 = 2,4—2,5m$ $L(q_0, \Delta_0) = 1$. В этом случае обработке подлежит 4,5—11% событий, а точность та же, что и в случае интервала $2m \leq \Delta \leq \Delta_{\max}$.

При q_0 , равных 0,5m, 2m, 5m и 10m, также имеются наиболее благоприятные интервалы Δ для измерения P , обеспечивающие такое же повышение точности и такое же уменьшение необходимого количества событий, как и при $q_0 = 1m$. Однако с ростом q_0 сечение быстро убывает,

Таблица 8. Значения $L(q_0, \Delta_0)$ при $q_0 = 1m$ и различных ω и Δ_0

ω, m Δ_0, m	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
2,01	0,0923592	0,0944117	0,0966708	0,0991471	0,100602	0,101629	0,102570	0,103038
2,02	0,153307	0,156738	0,160499	0,164618	0,167034	0,168741	0,170304	0,171082
2,03	0,205115	0,209736	0,214785	0,220306	0,223542	0,225827	0,227921	0,228982
2,05	0,293280	0,299977	0,307240	0,315162	0,319800	0,323073	0,326071	0,327561
2,08	0,401895	0,411255	0,421298	0,432211	0,438589	0,443086	0,447202	0,449248
2,10	0,463667	0,474604	0,486259	0,498894	0,506268	0,511466	0,516221	0,518583
2,20	0,694636	0,712031	0,729955	0,749242	0,760409	0,768263	0,775433	0,778991
2,30	0,846393	0,868793	0,891272	0,915099	0,928846	0,938494	0,947285	0,951042
2,50	1,02594	1,05586	1,08446	1,11421	1,13119	1,14306	1,15385	1,15918
2,80	1,11431	1,18194	1,21593	1,25043	1,26986	1,28338	1,29560	1,30382
3,00	1,17570	1,21702	1,25325	1,28951	1,30978	1,32384	1,33651	1,34275
4,00	1,16395	1,21486	1,25563	1,29463	1,31585	1,33041	1,34340	1,34976
5,00	1,10503	1,15797	1,19910	1,23768	1,25841	1,27254	1,28510	1,29122
8,00	1,00870	1,04049	1,08501	1,11927	1,13785	1,15054	1,16185	1,16736
10,0		1,01793	1,04760	1,07838	1,09557	1,10746	1,11813	1,12338

Таблица 9. Значения $\sigma^{(i)}(q_0, \Delta_0)/\sigma^{(i)}(q_0, \Delta_{\max})$ при $q_0 = 1m$ и различных ω и q_0

ω, m Δ_0, m	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
2,01	0,000327	0,000264	0,000229	0,000204	0,000193	0,000187	0,000182	0,000180
2,02	0,000927	0,000747	0,000649	0,000579	0,000549	0,000530	0,000516	0,000510
2,03	0,001703	0,001375	0,001194	0,001065	0,001010	0,000976	0,000950	0,000939
2,05	0,003680	0,002967	0,002578	0,002299	0,002181	0,002107	0,002051	0,002026
2,08	0,007470	0,006025	0,005236	0,004670	0,004430	0,004280	0,004166	0,004116
2,10	0,010453	0,008434	0,007331	0,006538	0,006203	0,005993	0,005833	0,005763
2,20	0,029563	0,023891	0,020782	0,018544	0,017595	0,017002	0,016549	0,016351
2,30	0,053832	0,043579	0,037939	0,033869	0,032142	0,031062	0,030236	0,029873
2,50	0,111795	0,090832	0,079215	0,070789	0,067201	0,064954	0,063232	0,062477
2,80	0,209080	0,170849	0,149406	0,133729	0,127019	0,122804	0,119568	0,118167
3,00	0,274753	0,225398	0,197479	0,176953	0,168135	0,162586	0,158319	0,156443
4,00	0,557247	0,466600	0,412779	0,371983	0,354111	0,342767	0,333939	0,330044
5,00	0,746949	0,638781	0,570682	0,517245	0,493333	0,477956	0,465938	0,460592
8,00	0,982016	0,895593	0,823611	0,759194	0,728159	0,707441	0,690817	0,683275
10,0		0,962835	0,901715	0,840110	0,808647	0,787050	0,769389	0,761285

растет Δ_0 и, несмотря на рост $\Lambda(q_0, \Delta)$, следует пользоваться как можно меньшими значениями q_0 . Это позволяет дополнительно повысить точность за счет обеспечения большего количества событий.

Рост частей сечения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\Delta(q_0)$ с увеличением ω и независимость от ω его асимметрии делает зависимость от Δ очень удобной для измерения линейной поляризации пучков фотонов с высокими энергиями.

3.4. Зависимость сечения и асимметрии от доли энергии x , уносимой позитроном. Проведем анализ зависимости от $x = E_+/\omega$ сечения $d^2\sigma_a/d\varphi_1 dx(q_0)$, полученного в [52] в асимптотическом пределе высоких энергий фотонов в случае конечных импульсов отдачи ($q \geq m$). Это сечение не зависит от ω .

Зависимость от x определяется величиной $y = x(1-x)$, входящей линейно в части сечения. Величина $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$ и максимальна ($y_{\max} = 1/4$) при $x = 0,5$. Кривые зависимости частей и асимметрии этого сечения от x (рис.18) симметричны относительно $x = 0,5$. Не зависящая от поляризации часть в этой точке имеет минимум. Зависящая от поляризации часть и асимметрия обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = 1$ и максимальны при $x = 0,5$.

При $q_0 = 1m$ выражение (58) принимает вид

$$d\sigma_a^{(t)}/dx(q_0 = 1m) = 4\alpha r_0^2 \cdot 1,156[1 - 1,421x(1-x)] \quad (63)$$

и отличается лишь нормировкой от выражения Уиллера — Лэмба в [39]

$$\begin{aligned} d\sigma/dx(q_0 = 1mc)_{\text{incoh}} &= 4\alpha r_0^2 \left[1 - \frac{13}{9} x(1-x) \right] = \\ &= 4\alpha r_0^2 [1 - 1,444x(1-x)]. \end{aligned} \quad (64)$$

На рис.19 экспериментальное распределение по x 4395 триплетов с $q \geq 1m$ из [39] сравнивается с теоретическими распределениями. В результате нормировки распределения (63) и (64) совпадают. В интервале $0,1 \leq x \leq 0,9$ теоретическое распределение по x хорошо согласуется с экспериментальным.

Из характера зависимости сечения $d^2\sigma_a/d\varphi_1 dx(q_0)$ от x и q_0 (рис.11 и 18) следует, что в области очень высоких энергий фотонов, где справедливы асимптотические выражения, для измерения линейной поляризации фотонных пучков целесообразно использовать интервал

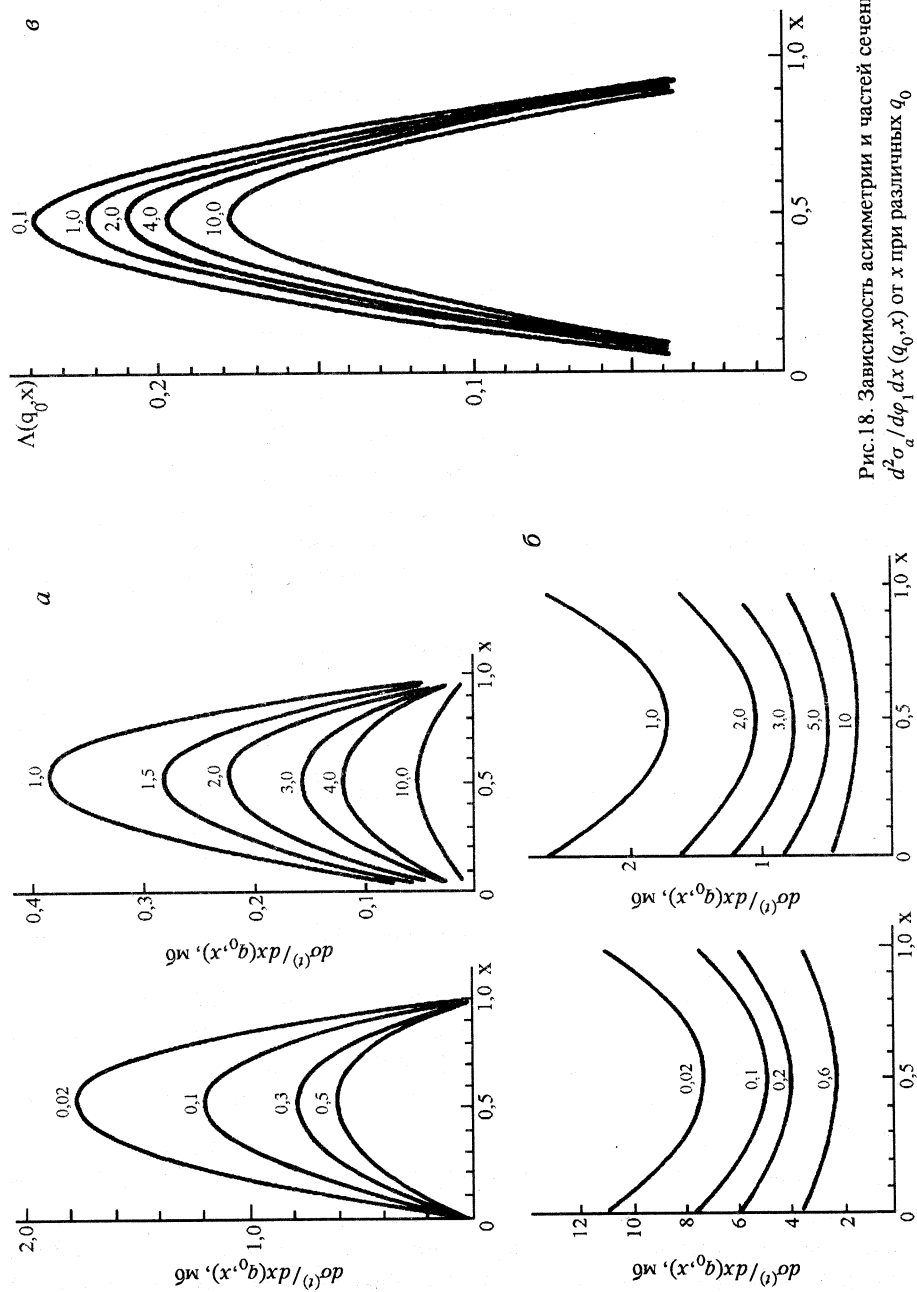
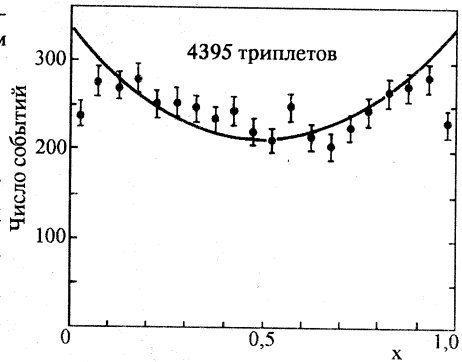


Рис. 18. Зависимость асимметрии и частот сечения $d^2 \sigma_a / d\varphi_1 dx(q_0, x)$ от x при различных q_0

Рис.19. Сравнение экспериментального распределения по x из работы [39] с сечением $d\sigma_a^{(t)}/dx (q_0 = 1m)$



значений x вблизи $x = 0,5$. Отношение $\Lambda(q_0, x)/\Lambda(q_0)$ при заданных x не меняется с ростом q_0 и при фиксированном q_0 быстро увеличивается с ростом x от 0 при $x = 0$ до 1,8 при $x = 0,5$. Использование узкого интервала вблизи $x = 0,5$ в 1,8 раза повышает чувствительность метода. Анализ показывает, что при заданной ширине интервала $u = x_1 - x_0$ требованию оптимальности удовлетворяет интервал $x_0 \leq x \leq x_1$ с границами x_0 и x_1 , симметричными относительно $x = 0,5$. Для симметричных интервалов вычислены значения $L(q_0, u) = \Delta P(q_0, u = 1)/\Delta P(q_0, u)$ и отношения $\sigma_a^{(t)}(q_0, u)/\sigma_a^{(t)}(q_0, u = 1)$ и $\Lambda_a(q_0, u)/\Lambda_a(q_0, u = 1)$. Величина $L(q_0, u)$ при $u = u_m = 0,7$ максимальна. При $u = u_1 \approx 0,45$ $L(q_0, u_1) = L(q_0, u = 1)$. При $u = u_m$ точность измерения поляризации фотонных пучков на $\sim 10\%$ выше, а число используемых событий в $\sim 1,5$ раз меньше, чем в случае интервала $0 \leq x \leq 1$ ($u = 1$). При $u = u_1$ необходимое число событий уменьшается в 2,5 раза, а точность та же, что и при $u = 1$. Поскольку $d\sigma^{(t)}/dx(q_0)$ быстро убывает с ростом q_0 , для измерения P разумно использовать события с как можно меньшими q_0 . Это дает возможность набрать больше событий и за счет этого повысить точность определения P .

3.5. Зависимость сечения и асимметрии от полярного угла вылета электрона отдачи. На рис.20 приведены зависимости сечения $d^2\sigma^{(t)}/d\theta_1 dq$ и асимметрии $\Lambda(q, \theta_1)$ от полярного угла θ_1 при различных q и $\omega = 1000m$. Вблизи максимальных значений полярных углов $\theta_1(\omega, q)_{\max}$ при заданных ω и q (см. (28)) наблюдаются острые максимумы сечений и асимметрии. Аналогичный характер зависимости от θ_1 имеет место и при других ω . Зависимость от θ_1 перечисленных величин при $q = 1m$ и различных ω показана на рис.21. Видно, что с ростом энергии фотонов максимумы сечений и асимметрии смещаются в сторону

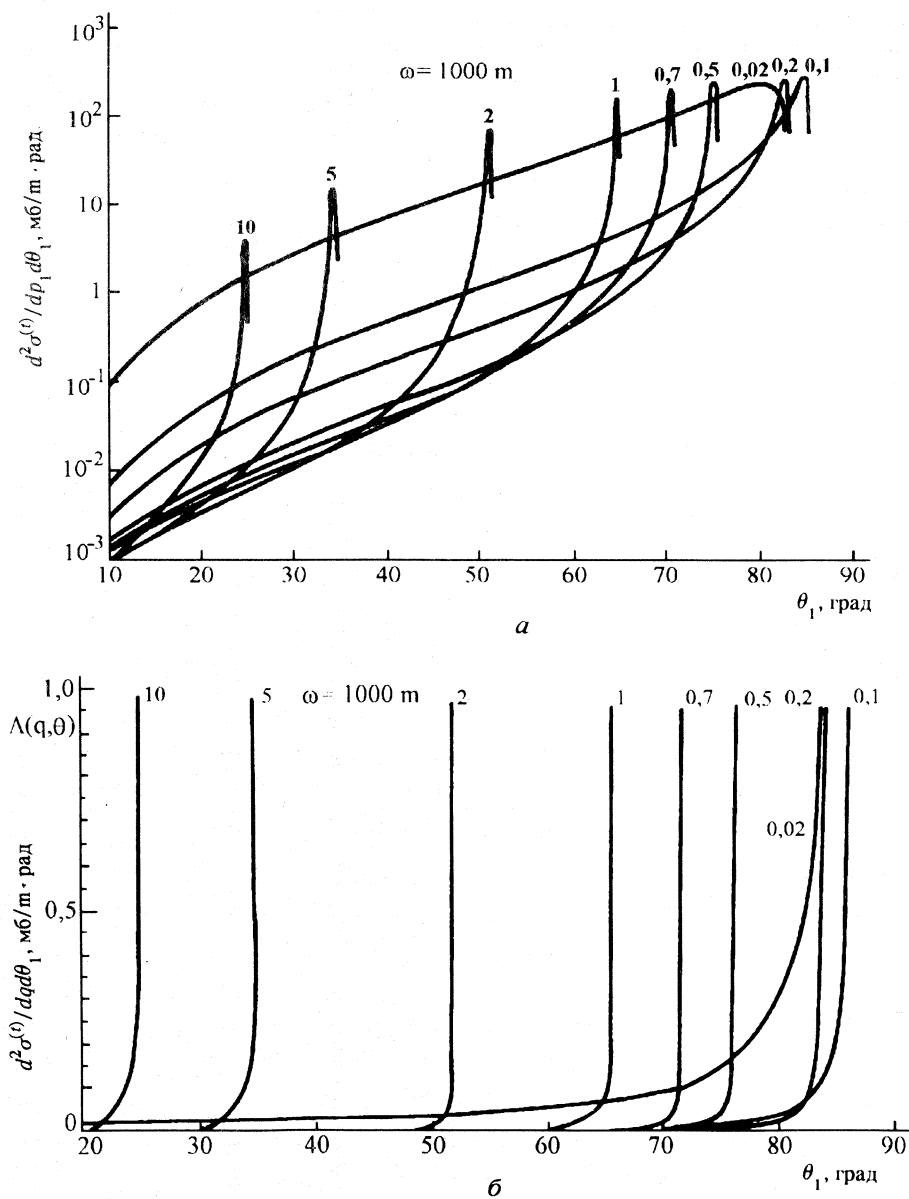


Рис. 20. Зависимость асимметрии и $d^2\sigma^{(i)}/dq d\theta_1$ от θ_1 при $\omega = 1000 \text{ м}$ и различных $q = |p_1|$

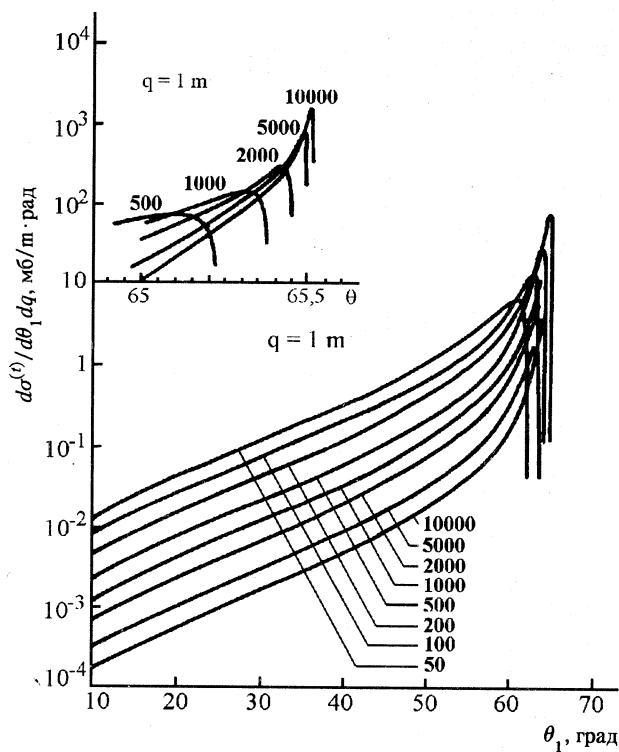


Рис.21. Зависимость от θ_1 асимметрии и сечения $d^2\sigma^{(T)}/dq d\theta_1$ при $q = 1 \text{ m}$ и различных ω

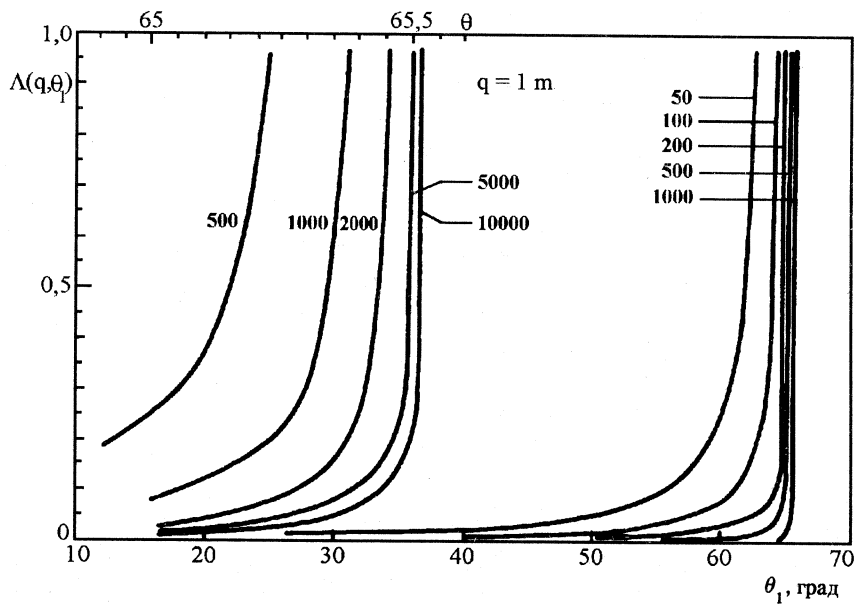


Таблица 10. Значения $\theta_1(\omega, q)_{\max}$ при различных ω и q

$q, \text{ MdB/c}$	ω, m	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
1,9	37,5637	38,7732	39,3661	39,7183	39,8351	39,8934	39,9284	39,9400	39,9516
2,0	36,6425	37,8613	38,4583	38,8128	38,9303	38,9890	39,0242	39,0359	39,0576
2,5	32,7778	34,0524	34,6742	35,0426	35,1647	35,2256	35,2621	35,2741	35,2864
3,0	29,8002	31,1389	31,7892	32,1736	32,3009	32,3644	32,4024	32,4150	32,4277
3,5	27,4103	28,8166	29,4867	29,8980	30,0307	30,0968	30,1364	30,1496	30,1628
4,0	25,4322	26,9079	27,6183	28,0365	28,1747	28,2435	28,2848	28,2985	28,3122
4,5	23,7559	25,3016	26,0423	26,4774	26,6209	26,6925	26,7353	26,7495	26,7638
5,0	22,3080	23,9243	24,6949	25,1467	25,2956	25,3697	25,4141	25,4289	25,4436
10,0	13,7716	16,1105	17,1635	17,7663	17,9628	18,0603	18,1186	18,1380	18,1573

больших углов и становятся более резкими. Как следует из (28), смещение быстро убывает с ростом ω , и $\theta_1(\omega, q)_{\max}$ стремится к

$$\theta_1(\infty, q) = \arccos\left(\frac{E_1 - m}{q}\right). \quad (65)$$

Значения $\theta_1(\omega, q)_{\max}$ при различных ω и q приведены в табл.10.

Рассмотрим теперь поведение распределения $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$, которое получается из $d^3\sigma/d\varphi_1 d\theta_1 dq$ численным интегрированием по всем допустимым q , большим минимального детектируемого импульса q_0 .

На рис.22 приведена зависимость от θ_1 величин $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ и $\Lambda(q_0)$ при $\omega = 1000m$ и разных значениях q_0 ; на рис.23 — те же величины при $q_0 = 1m$ и разных ω . Крестики соответствуют асимптотическому выражению (57), пунктир — значению $q_0 = q(\omega, \theta_1)_{\min}$. Видно, что кривые зависимости от θ_1 сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ резко обрываются, обращаясь в нуль при $\theta_1 = \theta_1(\omega, q_0)_{\max}$, определенном в (28). Вблизи этих точек сечение имеет максимумы, несколько сглаженные по сравнению с максимумами на рис.20, 21. Асимметрия сечения в области максимумов резко возрастает до единицы.

Причины этого ясны из рассмотрения кинематики процесса. В самом деле, минимальные регистрируемые на опыте импульсы $q_0 > q_*(\omega)$, где

$q_*(\omega) = 2m \frac{\sqrt{\omega m}}{\omega + m}$ — импульс электрона отдачи, вылетающего под максимально допустимым углом $\theta_1(\omega)_{\max} = \arccos(2\sqrt{m/\omega})$. (Правая крайняя точка области на рис.3,б). Поэтому все электроны отдачи с $q > q_0 > q_*(\omega)$ вылетают под меньшими, чем $\theta_1(\omega)_{\max}$, углами. Для иллюстрации на рис.22 приведены кривые, соответствующие $q_0 = 0,02m$. Та-

кое $q_0 < q_*(\omega = 1000m) = 0,0663$, точка $\theta_1(\omega)_{\max}$ включается в область интегрирования, и максимум $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ лежит правее максимума $d^2\sigma(t)/d\theta_1 dq|_{q=q_0}$ на рис.20. В окрестности этого максимума $d\sigma^{(t)}/d\theta_1$

($q_0 = 0,02m$) совпадает с пунктирной кривой, соответствующей $q_0 = q(\omega, \theta_1)_{\min}$. Отметим, что зависимости сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ и асимметрии $\Lambda(q_0)$ от угла θ_1 практически не меняются с ростом энергии фотона при $\omega > 500M$ и $q \geq 1m$ в широкой области углов θ_1 . Эта

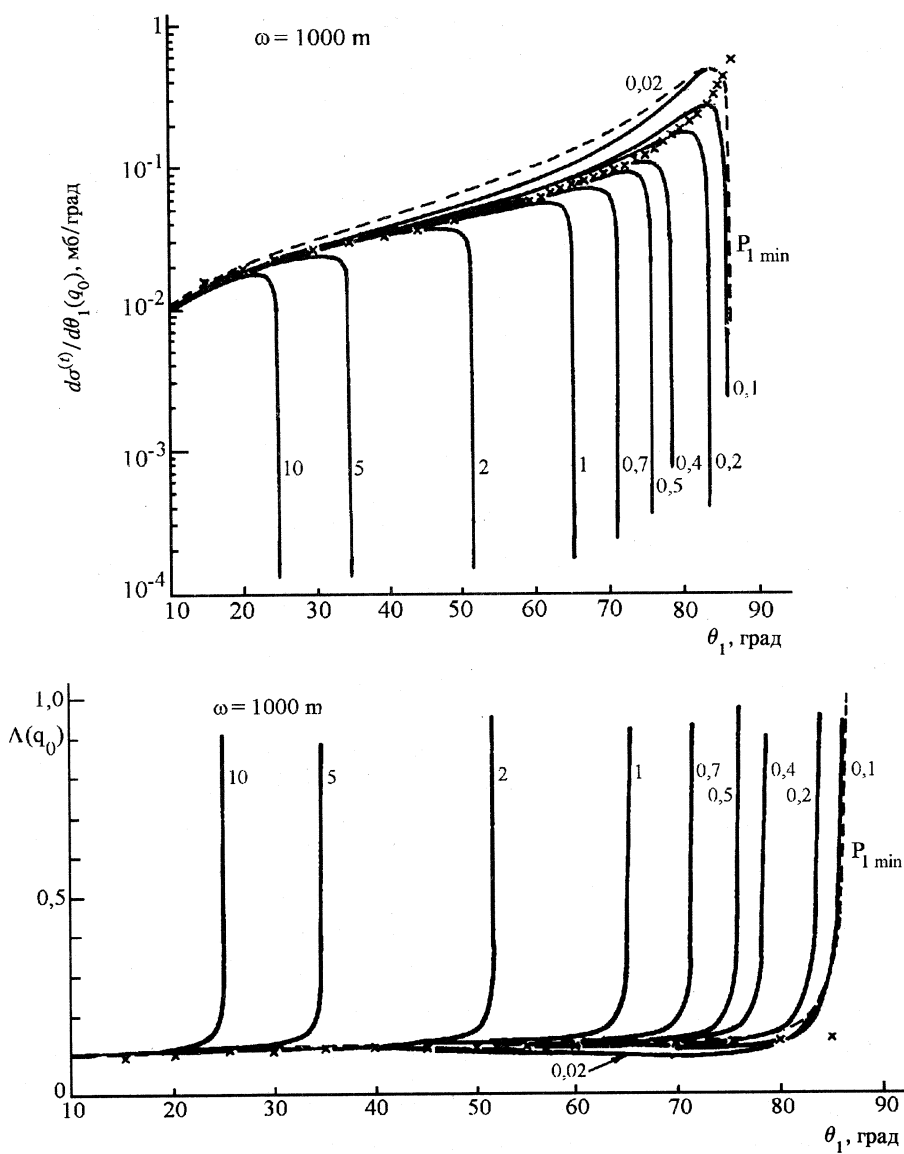


Рис.22. Зависимость от θ_1 асимметрии и сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ при $\omega = 1000 \text{ m}$ и различных $q_0 = |p_{10}|$ (сплошные кривые), сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1 = d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0 = q_{\text{min}})$ (пунктирная кривая) и сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1$ (их значения нанесены крестиками)

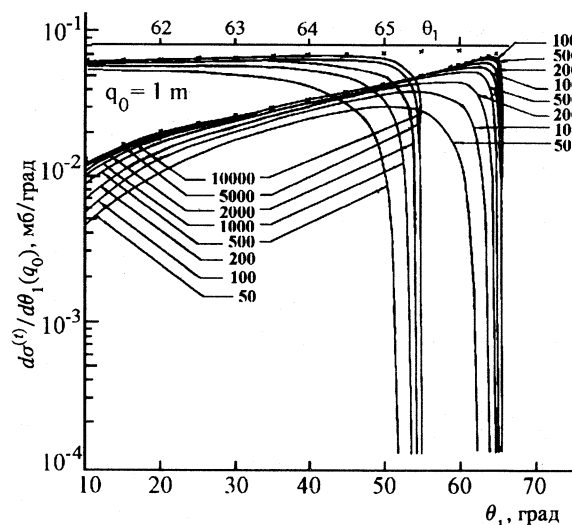
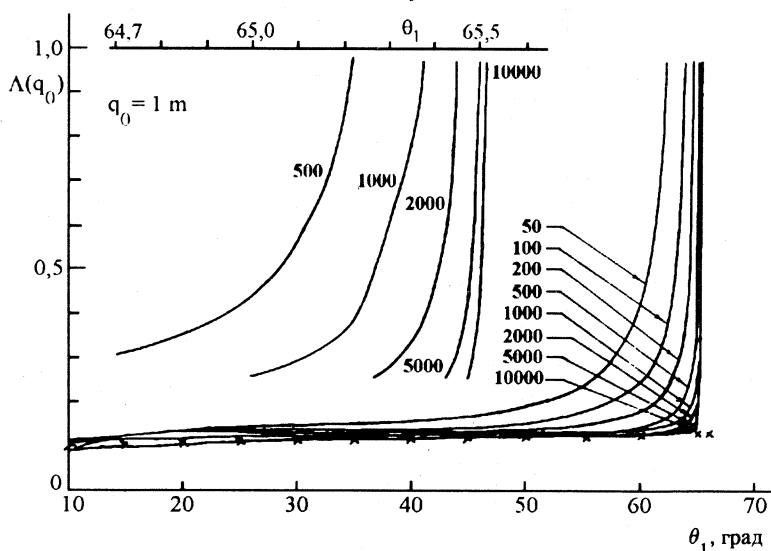


Рис.23. Зависимость от θ_1 асимметрии и сечения $d\sigma^{(1)}/d\theta_1(q_0)$ при $q_0 = |p_{10}| = 1m$ и различных ω (сплошные кривые) и сечения $d\sigma_a/d\theta_1$ (их значения нанесены крестиками)

a



б

зависимость хорошо описывается асимптотической формулой (57) (крестики на рис.22,23) в области углов, несколько меньших, чем $\theta_1(\omega, q_0)_{\max}$, и больших $\sim 15^\circ$. Более точные данные об относительных величинах асимптотических и точных значений частей сечений и асимметрий при $q_0 = 1m$ и $q_0 = 0,1m$ приведены в табл.11—13. Из рис.22 видно, что в случае, когда $q_0^{(1)} > q_*(\omega)$, электроны отдачи с величиной

Таблица 11. Отношение $d\sigma^{(l)}/d\theta_1(q_0)/d\sigma_a^{(l)}/d\theta_1$ при различных ω и $q_0=0,1m$ и $q_0=1m$

θ_1 , град	$10^2 \cdot \frac{d\sigma_a^{(l)}}{d\theta_1}$ мб/град	$\omega = 200$ m	$\omega = 500$ m	$\omega = 1000$ m	$\omega = 2000$ m	$\omega = 5000$ m	$\omega = 10000$ m						
$q_0=0,1m$ $q_0=1,0m$ $q_0=0,1m$ $q_0=1,0m$ $q_0=0,1m$ $q_0=1,0m$ $q_0=0,1m$ $q_0=1,0m$ $q_0=0,1m$ $q_0=1,0m$ $q_0=0,1m$ $q_0=1,0m$													
5	0,05801	0,352	0,352	0,572	0,572	0,725	0,725	0,838	0,839	0,928	0,928	0,962	0,963
10	0,1134	0,676	0,676	0,837	0,837	0,910	0,910	0,952	0,952	0,981	0,981	0,990	0,990
15	0,1664	0,822	0,822	0,918	0,918	0,957	0,957	0,978	0,978	0,991	0,991	0,995	0,995
20	0,2178	0,893	0,892	0,953	0,953	0,976	0,976	0,987	0,988	0,995	0,995	0,998	0,998
25	0,2691	0,932	0,932	0,971	0,971	0,985	0,985	0,993	0,993	0,997	0,997	0,999	0,999
30	0,3217	0,958	0,956	0,982	0,981	0,991	0,990	0,995	0,995	0,998	0,998	0,999	0,999
35	0,3774	0,978	0,974	0,990	0,989	0,994	0,994	0,997	0,997	0,999	0,999	0,999	0,999
40	0,4385	1,000	0,989	0,996	0,995	0,998	0,997	0,998	0,999	0,999	0,999	1,000	1,000
45	0,5080	1,021	1,003	1,003	1,001	1,001	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
50	0,5902	1,046	1,017	1,010	1,006	1,004	1,003	1,002	1,002	1,001	1,001	1,000	1,000
55	0,6914	1,081	1,033	1,020	1,013	1,009	1,007	1,004	1,003	1,001	1,001	1,001	1,001
60	0,8222	1,136	1,038	1,035	1,021	1,015	1,011	1,007	1,006	1,003	1,002	1,001	1,001
65	1,001	1,232	1,061	0,999	0,999	1,025	0,915	1,011	0,986	1,004	1,001	1,002	1,001
70	1,265	1,422	1,109	1,109	1,104	1,044	1,020	1,020	1,007	1,007	1,004	1,004	1,004
75	1,700	1,844	1,224	1,224	1,088	1,038	1,038	1,014	1,014	1,007	1,007	1,007	1,007
80	2,564	2,349	1,558	1,558	1,225	1,095	1,095	1,033	1,033	1,016	1,016	1,016	1,016
85	5,145				1,336	1,319	1,319	1,134	1,134			1,065	1,065

Таблица 13. Значение отношения $\Lambda(q_0)/\Lambda_a$ при различных ω и $q_0 = 0,1m$ и $q_0 = 1m$

θ_1 , град	Λ_a	$\omega = 200\text{ m}$		$\omega = 500\text{ m}$		$\omega = 1000\text{ m}$		$\omega = 2000\text{ m}$		$\omega = 5000\text{ m}$		$\omega = 10000\text{ m}$	
		$q_0 = 0,1m$	$q_0 = 1m$	$q_0 = 0,1m$	$q_0 = 1m$	$q_0 = 0,1m$	$q_0 = 1m$	$q_0 = 0,1m$	$q_0 = 1m$	$q_0 = 0,1m$	$q_0 = 1m$	$q_0 = 0,1m$	$q_0 = 1m$
5	0,0726	0,928	0,939	1,168	1,173	1,226	1,227	1,209	1,209	1,147	1,147	1,103	1,103
10	0,0879	1,232	1,250	1,224	1,229	1,173	1,176	1,123	1,123	1,073	1,073	1,047	1,047
15	0,0989	1,215	1,243	1,164	1,171	1,113	1,119	1,076	1,076	1,042	1,043	1,026	1,026
20	0,1073	1,161	1,200	1,111	1,128	1,077	1,085	1,050	1,055	1,027	1,029	1,017	1,018
25	0,1141	1,108	1,162	1,074	1,097	1,050	1,063	1,032	1,039	1,018	1,021	1,011	1,012
30	0,1196	1,059	1,133	1,042	1,076	1,029	1,048	1,019	1,030	1,011	1,016	1,007	1,009
35	0,1242	1,012	1,111	1,012	1,060	1,010	1,019	1,007	1,023	1,005	1,011	1,003	1,006
40	0,1281	0,972	1,098	0,984	1,048	0,991	1,028	0,995	1,016	0,998	1,008	0,999	1,005
45	0,1313	0,933	1,096	0,956	1,043	0,972	1,023	0,983	1,013	0,992	1,005	0,995	1,003
50	0,1340	0,898	1,113	0,927	1,045	0,952	1,022	0,970	1,011	0,985	1,004	0,991	1,002
55	0,1362	0,871	1,171	0,899	1,065	0,931	1,031	0,956	1,015	0,977	1,006	0,987	1,003
60	0,1381	0,857	1,373	0,873	1,141	0,909	1,070	0,940	1,034	0,968	1,013	0,981	1,007
65	0,1396	0,874		0,851	3,215	0,886	1,903	0,922	1,429	0,957	1,178	0,973	1,095
70	0,1408	0,964		0,846		0,866		0,902		0,943		0,964	
75	0,1418	1,295		0,896		0,865		0,886		0,927		0,951	
80	0,1424	3,110		1,228		0,968		0,909		0,191		0,940	
85	0,1427					2,673		1,537		1,115		1,021	

импульса q из интервала $q_0^{(1)} \leq q \leq q_0^{(2)}$ с подавляющей вероятностью вылетают в интервале углов $\theta_1(\omega, q_0^{(2)})_{\max} \leq \theta_1 \leq \theta_1(\omega, q_0^{(1)})_{\max}$, почти не давая вклада в сечение при кинематически разрешенных углах θ_1 , меньших, чем $\theta_1(\omega, q_0^{(2)})_{\max}$. Это замечание согласуется с выводами, сделанными в п.3.2 при анализе рис.13, 14, что основной вклад в обе части сечения с импульсами отдачи, соответствующими верхней половине физической области q и θ_1 на рис.3,б ($q_0 > q_*(\omega)$), дает узкая полоска значений q и θ_1 , примыкающая к верхней границе контура физической области, в которой находятся максимумы зависимости от q и θ_1 частей сечения $d^3\sigma/d\varphi_1 d\theta_1 dq$. В этой полоске $\Delta^2 \ll 2m(\omega + m)$ и при больших ω и $q \gtrsim 1m$ из (14) можно получить приближенное выражение

$$q = 2m \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} - \frac{1 + \cos^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_1} \frac{\Delta^2}{2\omega \cos \theta_1}. \quad (66)$$

Если пренебречь малым вторым слагаемым, то получается выражение, из которого [43,51] видна корреляция между q и θ_1 : меньшему углу отвечает больший импульс. Первое слагаемое в (66) дает значение q несколько большее, чем максимально возможное при заданном θ_1 .

До появления нашего теоретического распределения по θ_1 экспериментальные распределения по θ_1 сравнивались при учете корреляции между q и θ_1 с распределением Суха — Бете [45], совпадающим с $d\sigma_a^{(t)}/dq$ в (56). Данные [44,46,43] проявляют корреляцию между q и θ_1 . В [44] точки, отмечающие события с заданными q и θ_1 , концентрируются вблизи линии $\cos \theta_1 = q/2m$, в [43] такие точки группируются вблизи прямой $q = \cos \theta_1 / \sin^2 \theta_1$. Распределение по $\cos \theta_1 / \sin^2 \theta_1$ [43] ведет себя так же, как и распределение по q . Однако при $\cos \theta_1 / \sin^2 \theta_1 \gtrsim 0,5$ у многих событий из [43] с заданным θ_1 значение q меньше, чем на линии $\cos \theta_1 / \sin^2 \theta_1 = q$.

На рис.24 сечения $d^2\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ и $d\sigma_a^{(t)}/d\theta_1$ сравниваются с экспериментальными распределениями по θ_1 , полученными в [46] для триплетов с $q_0 = 0,27$ МэВ/с в водородной пузырьковой камере при энергии в интервале $2 \leq \omega \leq 323$ МэВ, в [43] для триплетов с q в

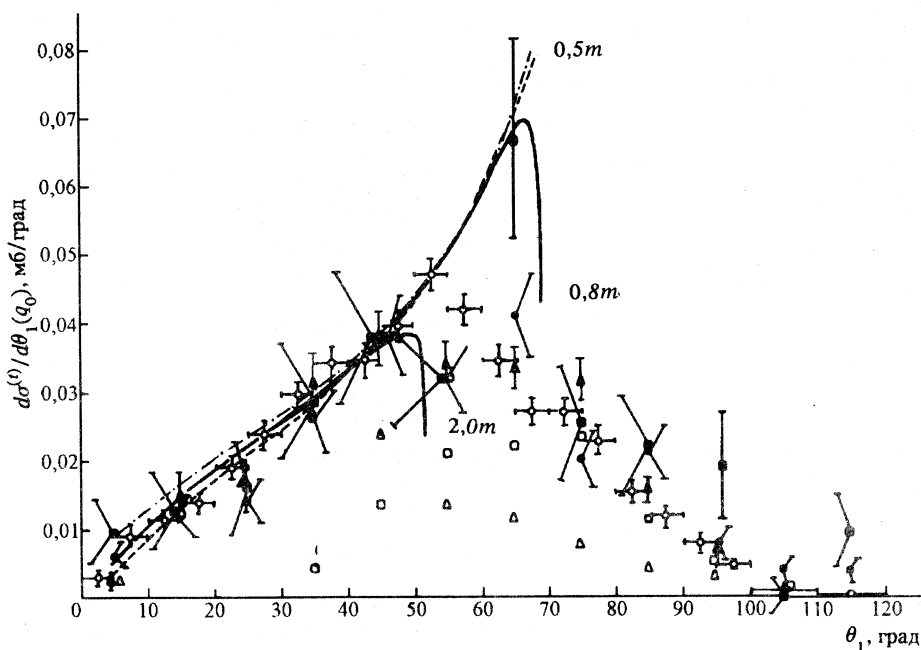


Рис.24. Сравнение сечений $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ и $d\sigma_a^{(t)}/d\theta_1$ с экспериментальными распределениями по θ_1 . Треугольники и светлые квадраты — экспериментальные данные [43]: $\square$ — в интервале $0,4 \leq q \leq 1$ МэВ/с; Δ — $q \geq 0,4$ МэВ/с. $\circ$ — данные работы [46]. Экспериментальные данные [11]: $\bullet$ — события с ω в интервале $20 \leq \omega \leq 600$ МэВ; $\blacksquare$ — события с ω в интервале $45 \leq \omega \leq 75$ МэВ. Сплошные кривые — сечение $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ при $\omega = 1400m$ и значениях $q_0 = 0,8m$ и $q_0 = 2m$. Пунктирная кривая — сечение $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ при $\omega = 500m$ и $q_0 = 0,5m$. Штрихпунктирная линия — сечение $d\sigma_a^{(t)}/d\theta_1$.

интервалах $q > 0,4$ МэВ/с, $0,4 \text{ МэВ/с} \leq q \leq 1$ МэВ/с и $q > 1$ МэВ/с в стримерной камере, заполненной смесью 90% Ne и 10% He, при энергии в интервале 600÷800 МэВ в [11] для триплетов с $q \geq 0,2$ МэВ/с в стримерной камере, заполненной гелием, при энергии в интервалах 20÷600 МэВ и 45÷75 МэВ. Сплошными кривыми показаны зависимости от θ_1 сечения $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ при $\omega = 1400m$ и значениях $q_0 = 0,8m$ и $q_0 = 2m$, штрихпунктиром — кривая зависимости $d\sigma_a^{(t)}/d\theta_1$ от θ_1 ; пунктиром — кривая зависимости $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ от θ_1 при $q_0 = 0,5m$ и

$\omega = 500m$. Из рисунка видно, что экспериментальные распределения по θ_1 проявляют ту же тенденцию, что и теоретические распределения: максимумы распределений с меньшими q_0 находятся при больших углах. Однако максимумы экспериментальных распределений находятся при меньших углах, чем максимумы теоретических распределений. Зависимости от θ_1 сечений $d\sigma^{(t)}/d\theta_1(q_0)$ и $d\sigma_a^{(t)}/d\theta_1$ хорошо согласуются с экспериментальными распределениями лишь до максимумов. Общая часть распределений [43] при $q > 1$ МэВ/с и при $0,4 \leq q \leq 1$ МэВ/с находится вблизи 55° . В этой области углов θ_1 группируются события с $q \sim 1$ МэВ/с. События с $q \sim 1$ МэВ/с группируются в области максимума при $\theta_1 \approx 55^\circ$ и в распределении из [46]. Наличие больших углов ($\theta_1 > \pi/2$) в экспериментальных распределениях их авторы связывают с многократным рассеянием электронов с малыми импульсами [43] и эффектом связи электронов [44,47] в атоме, с рассеянием электронов отдачи протонами молекул, в которых образовалась пара [44], и рассеянием электронов отдачи в эмульсии [47].

Приближение свободного электрона справедливо [91] при $q \gg m/137$. Выбитые электроны могут вылетать в заднюю полусферу, а их распределение по импульсу начинается с нуля. Хотя при $q > m/10$ [91] эффект связи в атоме не проявляется в распределении импульсов электронов отдачи, в области $q \lesssim 1$ МэВ/с он, по-видимому, существенно проявляется в распределении по θ_1 , и этим обуславливается различие экспериментальных и теоретических распределений после максимумов экспериментальных распределений. С ростом заряда ядра Z эффект сказывается сильнее. Свидетельство этому — отличие угловых распределений при рождении триплетов в водороде [46], гелии [11], неоне [43] и в фотоэмульсии [47]. Уместно отметить наличие провала в области максимума распределения по θ_1 при рождении триплетов в гелии, неоне и в фотоэмульсии и отсутствие — в случае водорода. Вопрос о больших углах вылета электронов отдачи триплетов требует тщательных теоретических исследований, он важен и для разработки метода измерения линейной поляризации фотонов по азимутальной асимметрии электронов отдачи.

Для измерения степени линейной поляризации фотонных пучков разумно использовать область θ_1 вблизи $\theta_1(\omega, q)_{\max}$ [63,64]. Значения частей и асимметрии сечения $d\sigma/d\varphi_1(q_0, \theta_{10})$ рождения триплетов с $q \geq q_0$ и $\theta_{10} \leq \theta_1 \leq \theta_1(\omega, q_0)_{\max}$ получены численным интегрированием по X выражений (46) и (47) в интервале $X_0 \leq X \leq X(\omega, \theta_{10})_{\max}$ после

Таблица 15. Значение $\sigma^{(l)}(q_0, \theta_{10})/\sigma^{(l)}(q_0, \theta_{10}=0)$ при $q_0 = 1m$ и различных ω

ω, m θ	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5°	0,9951	0,9955	0,9954	0,9949	0,9942	0,9934	0,9922	0,9914
10°	0,9793	0,9803	0,9795	0,9768	0,9743	0,9718	0,9689	0,9672
15°	0,9501	0,9521	0,9503	0,9454	0,9437	0,9377	0,9337	0,9315
20°	0,9055	0,9097	0,9079	0,9022	0,8974	0,8932	0,8888	0,8864
25°	0,8442	0,8531	0,8531	0,8481	0,8435	0,8393	0,8350	0,8327
30°	0,7656	0,7822	0,7860	0,7835	0,7799	0,7765	0,7727	0,7707
35°	0,6692	0,6966	0,7064	0,7083	0,7067	0,7044	0,7017	0,7001
40°	0,5546	0,5958	0,6138	0,6219	0,6230	0,6225	0,6212	0,6202
45°	0,4226	0,4792	0,5067	0,5230	0,5277	0,5295	0,5301	0,5299
50°	0,2768	0,3467	0,3849	0,4099	0,4189	0,4236	0,4265	0,4274
55°	0,1289	0,2016	0,2474	0,2809	0,2944	0,3023	0,3078	0,3099
60°	0,0159	0,0599	0,0999	0,1356	0,1520	0,1623	0,1702	0,1735
61°	0,0050	0,0364	0,0714	0,1052	0,1214	0,1319	0,1401	0,1435
62°	0,0003	0,0170	0,0446	0,0749	0,0905	0,1008	0,1090	0,1126
63°		0,0040	0,0211	0,0456	0,0594	0,0691	0,0771	0,0806
64°		0,00016	0,0043	0,0188	0,0294	0,0374	0,0444	0,0477
65°				0,00079	0,0040	0,0079	0,0122	0,0145
65,5°								0,00006

Таблица 16. Значения $\Lambda(q_0, \theta_{10})/\Lambda(q_0, \theta_{10}=0)$ при $q_0 = 1m$ и различных ω

ω, m θ_0	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
0°	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5°	1,0045	1,0038	1,0034	1,0030	1,0028	1,0029	1,0033	1,0037
10°	1,0152	1,0117	1,0096	1,0084	1,0086	1,0094	1,0109	1,0120
15°	1,0292	1,0213	1,0171	1,0156	1,0163	1,0178	1,0202	1,0217
20°	1,0462	1,0328	1,0264	1,0242	1,0252	1,0272	1,0299	1,0319
25°	1,0678	1,0474	1,0378	1,0342	1,0399	1,0370	1,0399	1,0419
30°	1,0966	1,0665	1,0522	1,0457	1,0455	1,0471	1,0498	1,0516
35°	1,1365	1,0925	1,0709	1,0594	1,0573	1,0577	1,0596	1,0610

ω, m θ_0	50	100	200	500	1000	2000	5000	10000
40°	1,1948	1,1295	1,0963	1,0765	1,0710	1,0693	1,0696	1,0703
45°	1,2851	1,1853	1,1332	1,0996	1,882	1,0829	1,0803	1,0798
50°	1,4386	1,2773	1,1919	1,1342	1,1124	1,1006	1,0930	1,0903
55°	1,7493	1,4542	1,3009	1,1953	1,1529	1,1282	1,1108	1,1037
60°	2,7290	1,9435	1,5821	1,3436	1,2473	1,1892	1,1461	1,1280
61°	3,2745	2,1764	1,7064	1,4059	1,2861	1,2137	1,1596	1,1368
62°	4,3183	2,5592	1,8987	1,4987	1,3429	1,2492	1,1790	1,1493
63°		3,3299	2,2453	1,6557	1,4368	1,3072	1,2101	1,1689
64°		5,8981	3,1148	1,9995	1,6329	1,4253	1,2726	1,2077
65°				3,7951	2,4834	1,8915	1,5054	1,3499
65,5								3,7758

$\sigma^{(t)}(q_0, \theta_{10})/\sigma^{(t)}(q_0, \theta_{10} = 0)$. При $q_0 = 1m$ значениям $L(q_0, \theta_{10}) = 0,9$ соответствуют значения этого отношения от $\sim 0,6$ при $\omega = 50m$ до $\sim 0,77$ при $\omega = 10000m$, что имеет место при углах θ_{10} , изменяющихся в интервале $30^\circ\div 40^\circ$. Если задаться величиной $\sigma^{(t)}(q_0, \theta_{10})/\sigma^{(t)}(q_0, \theta_{10} = 0) = 0,5$, то значения $L(q_0, \theta_{10})$ убывают с ростом ω от $\sim 0,9$ при $\omega = 50m$ до $\sim 0,79$ при $\omega = 10000m$. Этим значениям $L(q_0, \theta_{10})$ и отношениям сечений соответствуют углы θ_{10} из интервала $40^\circ\div 50^\circ$.

Аналогичный характер зависимостей $L(q_0, \theta_{10})$, $\sigma^{(t)}(q_0, \theta_{10})/\sigma^{(t)}(q_0, \theta_{10} = 0)$ и $\Lambda(q_0, \theta_{10})/\Lambda(q_0, \theta_{10} = 0)$ от ω и θ_{10} наблюдается и при q_0 , равных $q(\omega, \theta_{10})_{\min}$, $0,5m$, $2m$, $5m$. Однако, значения θ_{10} , при которых имеют место отмеченные соотношения между $L(q_0, \theta_{10})$ и отношением сечений, убывают с ростом q_0 . Значения θ_{10} , сохраняющие $L(q_0, \theta_{10}) = 0,9$, изменяются в зависимости от ω в интервале $15^\circ\div 20^\circ$, при $q_0 = 5m$, в интервале $40^\circ\div 50^\circ$ при $q_0 = 0,5m$ и в интервале $67^\circ\div 70^\circ$ при $q_0 = q(\omega, \theta_{10})_{\min}$. При $\sigma^{(t)}(q_0, \theta_{10})/\sigma^{(t)}(q_0, \theta_{10} = 0) = 0,5$ углы θ_{10} изменяются от $20^\circ\div 25^\circ$ при $q_0 = 5m$ до $50^\circ\div 55^\circ$ при $q_0 = 0,5m$ и до $75^\circ\div 81^\circ$ при $q_0 = q(\omega, \theta_{10})_{\min}$. Это означает, что при любых энергиях фотонов в интервале q_0 от $q_0(\omega, \theta_{10})_{\min}$ до $5m$ можно найти такие области углов θ_1 , которые содержат $\sim 50\%$ событий из области $0 \leq \theta_1 \leq \theta_1(\omega, q_0)_{\max}$ и обес-

печивают точность определения поляризации фотонов лишь на 10÷20% хуже, чем при использовании всех допустимых кинематикой углов. Если допустимо определение степени поляризации с уменьшением точности на 10% по сравнению с использованием всей области θ_1 , то достаточно использовать в зависимости от ω (50÷70)% общего числа событий, что значительно сокращает объем обработки данных.

Итак, в данном разделе проведен анализ зависимости частот и асимметрий различных дифференциальных и интегральных сечений рождения триплетов линейно поляризованными фотонами, соответствующих диаграммам Борселлино, от ω , q , q_0 , Δ , x , θ_1 , определены и оптимальные условия для измерения степени линейной поляризации фотонных пучков. Из результатов этого анализа следует, что для измерения линейной поляризации фотонных пучков следует отбирать события: 1) начиная с возможно меньшего импульса электронов отдачи; 2) близкие к симметричным по распределению энергий электронов и позитронов пары, $x = 0,5$; 3) с инвариантными массами в области пика распределения пар по Δ ; 4) с полярными углами θ_1 вблизи максимальных углов вылета электронов отдачи.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДА АСИММЕТРИИ ЭЛЕКТРОНОВ ОТДАЧИ ПРИ ФОТОРОЖДЕНИИ ТРИПЛЕТОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ФОТОННЫХ ПУЧКОВ

4.1. Анализ возможностей метода. До того, как стало известно распределение триплетов по полярному углу электронов отдачи θ_1 , для измерения степени линейной поляризации фотонного пучка P следовало использовать события со всеми допустимыми значениями θ_1 при $q \geq q_0$. Такую задачу можно решить с помощью 4π -детектора. В качестве 4π -детектора предполагалось использовать трековые приборы. Зная распределение электронов отдачи по q и θ_1 , можно для измерения P ограничиться областью

$$q_0 \leq q \leq q_1, \theta_{10} \leq \theta_1 \leq \theta_{11}. \quad (67)$$

Электроны отдачи можно регистрировать в совпадении с фрагментами пар быстродействующими детекторами. Границы кинематических параметров частиц можно выбирать так, чтобы обеспечить оптимальные условия для проведения эксперимента.

Для достижения разумной точности измерения линейной поляризации фотонных пучков $\sim 10\text{--}18\%$ с помощью трековых приборов требуется [53,54,11] ~ 10000 событий, для чего следует набрать ~ 250000 стереофотографий. Данные о величине и направлении вектора поляризации пучка получаются после длительной процедуры обработки. Поэтому трековые приборы не могут быть оперативными мониторами поляризации фотонного пучка. Они могут быть мониторами интенсивности и поляризации пучка, когда на фотографиях, помимо исследуемых событий, есть случаи рождения пар и триплетов. Предполагаемый метод абсолютный, и в случае трековых приборов может использоваться для калибровки неабсолютных методов, позволяющих оперативно получать информацию о векторе поляризации фотонного пучка.

Применение быстродействующих детекторов значительно облегчает набор статистики и позволяет оптимизировать условия эксперимента за счет выбора оптимальных интервалов Δ , x , q , θ_1 , упрощает процесс и сокращает время извлечения нужной информации.

Величина $\Delta^2 \sim m^2$ получается в (9а) и (9б) как разность двух очень больших ($\sim \omega^2$ и $\sim \omega$) величин, в результате чего Δ^2 можно измерять с ошибкой $\delta(\Delta^2)$ порядка Δ^2 .

При использовании (9б) относительная ошибка $\delta\Delta/\Delta \sim 1\%$ достигается при $\Delta\omega/\omega \sim 0,01$, $\Delta|p_1|/|p_1| \sim 0,01/\omega$, $\Delta\theta_1 \sim 0,01\sqrt{2}/\omega$ ($|p_1| = q$). Столь жесткие требования делают затруднительным отбор событий с эффективной массой пары в интервале

$$2m \leq \Delta \leq \Delta_0 \quad (68)$$

по данным кинематических параметров электронов отдачи.

Выражение (9а) для Δ при условии

$$\frac{\Delta|p_3|}{|p_2|} = \frac{\Delta|p_2|}{|p_3|} = \frac{\Delta|p_{2,3}|}{|p_{2,3}|}, \quad p_2 = p_-, \quad p_3 = p_+ \quad (69)$$

можно представить в виде

$$\Delta^2 = 2m^2 + \frac{2m^2}{1+y} \left[\frac{1 - m^2/E^2}{x(1-x)} - 2 \right] + 2yx(1-x) E^2 \sin^2 \frac{\theta_{23}}{2}, \quad (70)$$

$$\delta(\Delta^2) = \left\{ 2 \left[u^2(x)(\Delta^2 - 2m^2)_{\theta_{23}=0} + 16x^2(1-x)^2 E^4 \sin^4 \frac{\theta_{23}}{2} \right] \left(\frac{\Delta|p_{23}|}{|p_{23}|} \right)^2 + \right.$$

$$+ 4x^2(1-x)^2 E^4 \sin^4 \frac{\theta_{23}}{2} (\Delta \theta_{23})^2 \Bigg\}, \quad (71)$$

где $\theta_{23} = \theta_{+-}$ — угол раствора пары,

$$u(x) = \frac{2x-1}{1-2x(1-x)}, \quad x = E_3/E, \quad 1-x = E_2/E,$$

$$E = E_2 + E_3, \quad y = \frac{|\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3|}{E_2 E_3},$$

$(\Delta^2 - 2m^2)_{\theta_{23}=0} = 0$ — значение $\Delta^2 - 2m$ из (70) при $\theta_{23} = 0$. При $E^2 \sin^2 \frac{\theta_{23}}{2} \ll m^2$ и $\Delta |\mathbf{p}_{23}| / |\mathbf{p}_{23}| \sim 10^{-3}$ можно с хорошей точностью отбирать события с Δ из интервала (68). Вычисления показывают, что в интервале $50m \leq \omega \leq 10000m$ при $\Delta_0 = 2,1m$ и $q_0 \geq m$ $\Lambda(q_0, \Delta_0) \approx 0,9$, а сечение $\sigma^{(t)}(q_0, \Delta_0) \sim 10^{-3}$ мб. Это означает, что для случая интенсивных фотонных пучков можно создать очень чувствительный поляриметр.

В ФРГ [92] разработан анализатор линейной поляризации фотонных пучков для интервала энергий фотонов 100÷800 МэВ. Электроны отдачи (рис.25) регистрируются проволочной камерой, а фрагменты пары — второй проволочной камерой и магнитным спектрометром со сцинтилляционными счетчиками. Прибор отбирает события с полярными углами электронов отдачи в интервале $5^\circ \leq \theta_1 \leq 55^\circ$ и углами раствора пары $\theta_{23} \leq 2$ мрад. Этот прибор обладает анализирующей способностью, убывающей с ростом энергии фотонов от 90% при 100 МэВ до 70% при 700 МэВ. Это падение Λ с ростом ω , по-видимому, связано с ростом третьего слагаемого в (70). Для сохранения высокого значения Λ при высоких энергиях фотонов требуется отбор событий с очень малыми θ_{23} , а это может ограничить возможности метода при отборе событий с $\Delta \leq \Delta_0$ по кинематическим параметрам фрагментов пар.

При отборе событий по кинематическим параметрам электронов отдачи оптимальные условия для измерения линейной поляризации фотонов достигаются, когда используются события с наименьшими q_0 , углами θ_1 вблизи $\theta_1(\omega, q)_{\max}$ и с x в симметричном интервале вблизи $x = 0,5$.

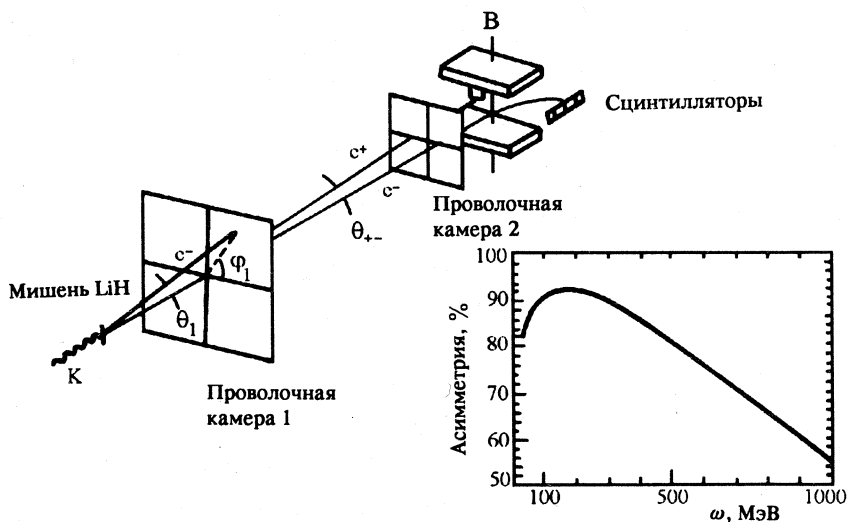


Рис. 25. Схема прибора, описанного в [92]. Электроны отдачи регистрируются проволоочной камерой 1; фрагменты пары — проволоочной камерой 2 и магнитным спектрометром со сцинтилляционными счетчиками. Показана зависимость анализирующей способности прибора от энергии фотонов ω

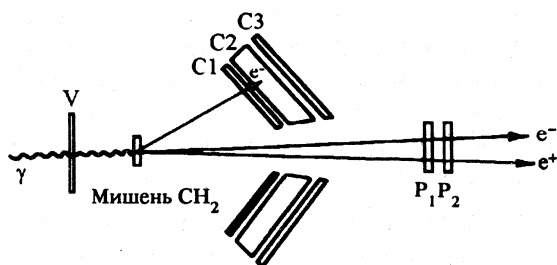


Рис. 26. Схема прибора, описанного в [93—95]. Электроны отдачи регистрируются счетчиками совпадений C_1, C_2, C_3 . Из пяти телескопов C_1, C_2, C_3 показано только два. V — ветосчетчик для исключения импульсов от заряженных частиц, присутствующих в пучке. Фрагменты пар регистрируются счетчиками P_1 и P_2 в совпадении с электроном отдачи

В статьях [93—95] описан поляриметр, схема которого показана на рис. 26. Триплеты рождаются в полиэтиленовой мишени толщиной 1 мм. Устройство, регистрирующее электроны отдачи с импульсами $1,9 \leq q \leq 10$ МэВ, состоит из пяти идентичных телескопов сцинтилляционных счетчиков C_1, C_2, C_3 , стягивающих интервалы полярных углов $10^\circ \leq \theta_1 \leq 40^\circ$ и азимутальных углов $\pm 15^\circ$, установленных под углами φ_1 , равными $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ и 270° . Счетчик C_1 отбирает электроны по удельной потере энергии. Толщина C_2 подобрана так, чтобы

Таблица 17. Значения частей и асимметрии сечения $d\sigma/d\varphi_1(q_0, q_1, \theta_{10}, \theta_{11})$ рождения триплетов с импульсами и углами электронов отдачи в интервалах $1,9 \leq q \leq 10$ МэВ/с и $10^\circ \leq \theta_1 \leq 40^\circ$ при различных ω

ω , МэВ	$\sigma^{(l)}(q_0, q_1, \theta_0, \theta_1)$, мкб	$\sigma^{(l)}(q_0, q_1, \theta_0, \theta_1)$, мкб	$\Lambda(q_0, q_1, \theta_0, \theta_1)$
50	57,28	335,09	0,1709
100	62,82	415,61	0,1511
200	65,60	472,75	0,1388
600	67,46	527,05	0,1279
1000	67,83	541,88	0,1252
2000	68,11	555,24	0,1227
5000	68,28	565,22	0,1208
10000	68,33	569,33	0,1200

электроны с $q \leq 10$ МэВ/с останавливались в нем. Нужные электроны отдачи отбирались с помощью совпадения сигналов счетчиков C_1 и C_2 и антисовпадения сигнала счетчика C_3 . Фрагменты пары регистрировались импульсами в телескопе сцинтилляционными счетчиками P_1 и P_2 , соответствующими удвоенной минимальной ионизации. Случаи рождения триплетов регистрируются совпадениями телескопа P_1P_2 и одного из телескопов C_1, C_2, C_3 . Результаты исследований [93—95] показали, что случаи рождения триплетов однозначно идентифицируются и что этот прибор может быть простым и надежным поляриметром.

Для выяснения возможностей этого прибора вычислены части и асимметрия сечения $d^2\sigma/d\varphi_1(\theta_{10}, \theta_{11}, q_0, q_1)$ рождения триплетов с импульсами и углами электронов отдачи в интервалах $1,9 \leq q \leq 10$ МэВ/с и $10^\circ \leq \theta_1 \leq 40^\circ$ фотонами с энергией в интервале 50+10000 МэВ. Результаты расчетов приведены в табл.17. Из таблицы видно, что части и асимметрия медленно меняются с ростом ω . Для оценки принято $\sigma^{(l)}(\theta_{10}, \theta_{11}, q_0, q_1) = 0,5$ мб и найдено, что из полиэтиленовой мишени толщиной 1 мм в кольцевой счетчик, стягивающий углы $10^\circ \leq \theta_1 \leq 40^\circ$, попадает $N_e \approx 1,7 \cdot 10^{-5} N_\gamma T$ электронов отдачи. Здесь N_γ — количество фотонов с нужной энергией, попадающих на мишень за 1 с, T — время экспозиции. Если кольцевой счетчик разбит на 12 идентичных телеско-

пов, стягивающих интервалы азимутальных углов с шириной 30° , а плоскость поляризации фотонного пучка проходит через середины каких-либо двух счетчиков, то с помощью такого прибора поляризацию можно определить как методом асимметрии по количеству отсчетов $N_{\parallel}$ и $N_{\perp}$, пользуясь формулой

$$P = \frac{1}{\Lambda} \frac{N_{\perp} - N_{\parallel}}{N_{\perp} + N_{\parallel}}, \quad (72)$$

так и подгонкой по методу наименьших квадратов (МНК) теоретического распределения по φ_1 к экспериментальному. Оценки показали, что при $P = 0,6$ и $\Lambda = 0,12$ ожидаемая ошибка измерения

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{ож}} = \frac{5,8 \cdot 10^3}{\sqrt{N_{\gamma} T}}$$

по методу асимметрии и

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right) = \frac{5 \cdot 10^3}{\sqrt{N_{\gamma} T}}$$

по методу наименьших квадратов. Мы видим, что для обоих методов при $N_{\gamma} \approx 10^6$ фот./с трехчасовая экспозиция обеспечивает примерно 5% точность измерения степени линейной поляризации фотонного пучка.

Из табл.10 и 17 видно, что с увеличением энергии в интервале $50 \div 10000$ МэВ части сечения растут, а асимметрия медленно уменьшается. В интервале энергии $600 \div 10000$ МэВ асимметрия практически не меняется и равна 0,12. Пики угловых распределений электронов отдачи с импульсами $1,9 \div 10$ МэВ/с попадают в интервал углов $10^\circ \leq \theta_1 \leq 40^\circ$. Это означает, что такой поляриметр может использоваться в интервале энергий фотонов $50 \div 10000$ МэВ. В интервале $600 \div 10000$ МэВ он обладает практически постоянной чувствительностью. В интервале $50 \div 600$ МэВ в связи с ростом асимметрии точность измерения поляризации будет расти с убыванием ω . Чувствительность этого прибора можно существенно повысить, если в области (67) отбирать события с $\Delta = \Delta_0$, которые находятся вблизи контура (рис.3,б), ограничивающего область допустимых значений $q = |p_1|$ и θ_1 . При $\Delta_0 = 2,1m$ это обеспечивает асимметрию $\sim 0,9$ и сечение $\sim 10^{-3}$ мб; при $\Delta_0 = 3m$, когда $\omega < 100m$, и $\Delta_0 = 4m$, когда $\omega > 100m$, обеспечиваются оптимальные условия эксперимента. Для

отбора событий с $\Delta \leq \Delta_0$ требуется, как мы уже видели, высокое разрешение по q и θ_1 .

Результаты анализа в разд.3 указывают на то, что прибор, показанный на рис.26, а значит, и метод асимметрии электронов отдачи, будут эффективными и при $\omega \gtrsim 1$ ТэВ, когда выполняются асимптотические выражения. Это утверждение основано на следующих аргументах.

1) Мы видели, что части и асимметрии сечений $d^2\sigma/d\varphi_1 dq$, $d\sigma/d\varphi_1(q_0)$, $d\sigma/d\varphi_1$ и $d^2\sigma/d\varphi_1 d\theta_1(q_0)$ с ростом ω стремятся к асимптотическим величинам. При $\omega = 10000m$ асимптотические величины отличаются от точных не более чем на 5%. Так как асимметрия асимптотических сечений не менее 11%, ясно, что условия измерения поляризации при $\omega \gtrsim 1$ ТэВ не намного хуже, чем при $\omega = 10000m$, как в случае метода, не учитывающего распределение по θ_1 , так и при использовании зависимости от θ_1 .

2) Основной вклад в части сечения $d^2\sigma/d\varphi_1(\theta_{10}, \theta_{11}, q_0, q_1)$ дают максимумы частей сечения $d^3\sigma/d\varphi_1 dq d\theta_1$ вблизи $\theta_1(\omega, q)_{\max}$ при $q \approx q_0$. Асимметрия при $\theta_1 \rightarrow \theta_1(\omega, q)_{\max}$ стремится к единице. При заданных q (см. табл.10) значения $\theta_1(\infty, q)_{\max}$ практически не отличаются от $\theta_1(\omega, q)_{\max}$ при $\omega = 10000m$ и при импульсах в интервале $1,9+10$ МэВ/с попадают в интервал $10^\circ \leq \theta_1 \leq 40^\circ$. Характер зависимости от ω асимметрии в табл.17 наводит на мысль о том, что при изменении ω от 10000 МэВ до ~ 1 ТэВ она не очень сильно изменится.

3) Поскольку распределение по x получено в асимптотическом пределе высоких энергий, все выводы, сделанные при его анализе, справедливы и при $\omega \gtrsim 1$ ТэВ. Для измерения поляризации фотонов с помощью спектрометра следует отбирать события в симметричном относительно $x = 0,5$ интервале с $u = x_1 - x_0$. При рождении пары с импульсами ее фрагментов $|p_2|$ и $|p_3|$ и углом раствора θ_{23} фотоном с энергией ω электроны отдачи с импульсом $q = |p_1|$ вылетают под углом

$$\theta_1 = \arccos \left\{ \left[E_1 - m + \frac{mE_1}{\omega} + \frac{m^2}{\omega} \frac{p_2^2 + p_3^2 + m^2}{E_2 E_3 + |p_2| |p_3|} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{|p_2| |p_3|}{\omega} \sin^2 \frac{\theta_{23}}{2} \right] / |p_1| \right\}.$$

При $\omega \rightarrow \infty$ $\theta_1 \rightarrow \theta_1(\infty, q)_{\max}$. Значения же $\theta_1(\infty, q)_{\max}$ при q из интервала $1,9 \div 10$ МэВ/с попадают в интервал углов $10^\circ \leq \theta_1 \leq 40^\circ$. Использование интервала с шириной $u = 0,4$ обеспечит ту же точность измерения поляризации фотонов, что и при измерении поляризации без анализа пар по энергии. При $u = 0,7$ точность измерения поляризации повысится на 10%.

Таким образом, можно сделать достаточно обоснованный вывод о том, что поляриметр, схема которого показана на рис.26, может использоваться как абсолютный монитор поляризации, оперативно выдающий сведения о величине и направлении вектора поляризации пучков фотонов с $\omega \gtrsim 50m$.

В работе [42] проведены расчеты эксперимента на ускорителе У-70 ИФВЭ на установке «Каскад» по измерению линейной поляризации излучения электронов с энергией 28 ГэВ в кристалле кремния (энергия фотонов в интервалах $2 \div 4$ и $6 \div 8$ ГэВ).

4.2. Проверочный эксперимент по измерению линейной поляризации фотонов. С помощью магнитного спектрометра со стримерной камерой СК-600 размером $600 \times 600 \times 120$ мм в ходе эксперимента по фотодезинтеграции ядра ^4He проведен проверочный эксперимент [11] по измерению предлагаемым методом степени линейной поляризации пучка когерентного тормозного излучения (КТИ) с энергией электронов 600 МэВ на линейном ускорителе ЛУЭ-2000 с энергией фотонов в когерентном пике 60 МэВ. Схема экспериментальной установки показана на рис.27.

Набрано 8000 стереофотографий. Отобрано около 700 событий. Прошли обработку 307 событий. В области когерентного пика

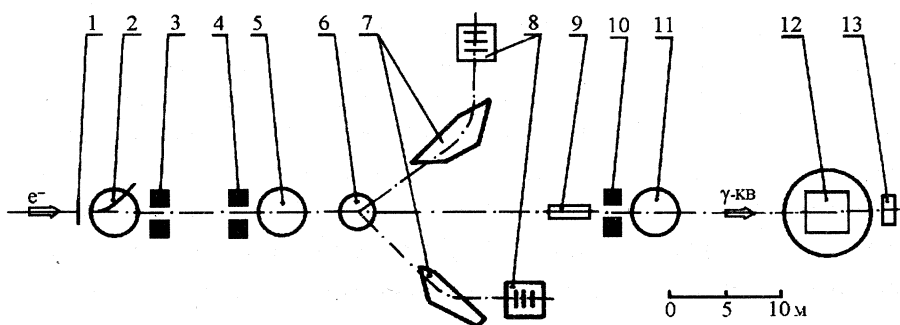


Рис.27. Схема экспериментальной установки: 1 — кристалл алмаза; 2, 5, 11 — очищающие магниты; 3, 4, 10 — коллиматоры; 6 — жидкодейтериевая мишень для мониторингирования интенсивности и поляризации фотонного пучка; 7 — магнитные спектрометры; 8 — телескопы сцинтилляционных счетчиков; 9 — фильтр из LiH толщиной 3,7 рад. для ужесточения пучка; 12 — стримерная камера; 13 — ионизационная камера

($45 \leq \omega \leq 75$ МэВ) оказалось 118 событий. Максимальная энергия фотона, образовавшего триплет, 509 МэВ. По данным этих событий построены [11] распределения триплетов по ω , энергетический спектр интенсивности $I(\omega)$ пучка, вышедшего из кристалла, распределения триплетов по импульсу q и полярному углу θ_1 электронов отдачи. Поляризация фотонного пучка определена на основе теории КТИ по спектру интенсивности $I(\omega)$ и на основе асимметрии электронов отдачи триплетов методами асимметрии, наименьших квадратов и максимума правдоподобия.

В распределении триплетов по ω , в спектре интенсивности $I(\omega)$ и в энергетическом спектре поляризации фотонов [11] $P(\omega)$, полученном в результате подгонки к $I(\omega)$ теоретического спектра КТИ, проявляются максимумы при $\omega = 60$ МэВ. Значение в максимуме $P_{\max} = 0,712 \pm 0,15$. Ее средние значения в интервале энергии $45 \div 75$ МэВ $\bar{P} = 0,659 \pm 0,15$. Распределения по q событий со всеми энергиями ω и событий в интервале $45 \leq \omega \leq 75$ МэВ [11] согласуются с распределением $d\sigma^{(t)}/dq$ при $\omega = 100m$. Распределения событий из этих интервалов ω по θ_1 (рис.24) согласуются с экспериментальными распределениями из [43] и [46] и с сечениями $d\sigma^{(t)}/d\theta_1$ и $d\sigma_a^{(t)}/d\theta_1$ в интервалах $\theta_1 \leq 50^\circ$ в случае событий со всеми ω и $\theta_1 \leq 60^\circ$ в случае событий из области когерентного пика.

Для определения степени линейной поляризации фотонного пучка использовались события с $q \geq 0,5$ МэВ/с, образованные фотонами с энергиями в интервале $45 \div 75$ МэВ.

При определении поляризации фотонов по методу асимметрии использовались события из интервалов $-25^\circ \leq \varphi_1 \leq 25^\circ$ и $155^\circ \leq \varphi_1 \leq 205^\circ$ вблизи плоскости поляризации и из интервалов $65^\circ \leq \varphi_1 \leq 115^\circ$ и $245^\circ \leq \varphi_1 \leq 295^\circ$ вблизи плоскости, перпендикулярной плоскости поляризации. Числа событий $N_{\parallel} = 22$ и $N_{\perp} = 27$ дают

$$P = 0,68 \pm 0,94.$$

Для определения поляризации фотонного пучка по методам максимума правдоподобия (ММП) и наименьших квадратов (МНК) использовались два набора событий. Первый набор содержит события со всеми θ_1 , а второй набор — события с $\theta_1 \leq 60^\circ$, где экспериментальное распределение по θ_1 согласуется с теоретическим. В случае этих наборов получены значения:

по МНК

$$P = 0,53 \pm 0,45 \text{ и } P = 0,59 \pm 0,83$$

и по МПП

$$P = 0,66 \pm 0,54 \text{ и } P = 0,66 \pm 1,18.$$

Мы видим, что все пять значений степени поляризации, полученные по методу асимметрии электронов отдачи триплетов, согласуются со значением $P(45,75) = 0,659 \pm 0,15$, полученным на основе теории КТИ. Большие ошибки измерения естественны и связаны с малой статистикой: расчет, проведенный перед экспериментом, показал, что для обеспечения точности $\sim 10\%$ нужно ~ 10000 событий. Полученные значения поляризации показывают принципиальную возможность использования для ее измерения метода асимметрии электронов отдачи.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим кратко основные результаты настоящей работы.

Выполненный в обзоре анализ имеющихся в литературе данных о теоретических и экспериментальных исследованиях процесса фоторождения e^+e^- -пар на электронах (триплетов) позволяет сделать следующие выводы.

При энергии фотона $\omega > 50m$ для описания процесса фоторождения триплетов с точностью не хуже 1% достаточно ограничиться в расчетах диаграммами Борселлино (рис.2,а) из восьми возможных в низшем порядке теории возмущений. Эффектами связи электронов в атомах мишени можно пренебречь, если ограничиться рассмотрением событий с импульсом электрона отдачи q , большим минимального надежно детектируемого $q \geq q_0 \sim 1m$.

В процессе рождения линейно поляризованными фотонами e^+e^- -пар на электронах электроны отдачи вылетают преимущественно в плоскости, перпендикулярной плоскости поляризации фотона. Азимутальная асимметрия Λ различных дифференциальных сечений вылета электронов отдачи (анализирующая способность процесса), рассчитанная в работе, составляет в различных областях изменения кинематических параметров значение $0,1 \pm 1,0$.

Большинство электронов отдачи с импульсом $q > q_0$ вылетают под большими полярными углами θ_1 по отношению к импульсу фотона k . Около 90% событий фоторождения триплетов при энергиях фотонов от $50m$ до бесконечности отвечает углам вылета электронов отдачи $\theta_1 > 20^\circ$.

Это позволяет надежно определять плоскость вылета электронов отдачи в эксперименте. Отметим, что теоретические и экспериментальные распределения по полярному углу θ_1 вылета электронов отдачи плохо согласуются при углах $\theta_1 \gtrsim 55^\circ$, что приводит к необходимости ограничиваться интервалом углов $\theta_1 \lesssim 55^\circ$. Это, по-видимому, связано с многократным рассеянием электронов отдачи с малыми q и требует дополнительного исследования.

Найдены оптимальные области кинематических параметров, в которых величина асимметрии Λ резко возрастает, и измерение степени поляризации с необходимой точностью возможно при меньшем наборе статистики. Такие области указаны в конце разд.3.

Проанализированы возможные схемы создания поляриметров на основе измерения азимутальной асимметрии электронов отдачи в процессе фоторождения триплетов с использованием трековых приборов и быстродействующих счетчиков.

Анализ позволяет сделать вывод о том, что использование метода асимметрии электронов отдачи при фоторождении триплетов является наиболее перспективной возможностью из известных в настоящее время для разработки методов измерения линейной поляризации фотонов в широком интервале энергий от ~ 25 МэВ до асимптотически высоких энергий.

В заключение нам хотелось бы выразить искреннюю благодарность Э.А.Кураеву, стимулирующую роль которого в появлении данной работы трудно переоценить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arndt R.A., Ford J.M., Roper L.D. — Phys.Rev., 1985, vol.D32, No.5, p.1085.
2. Berends F.A., Donnachie A. — Nucl.Phys., 1975, vol.B84, No.2, p.342.
3. Moorhous R.G., Oberlack H., Rosenfeld A.H. — Phys.Rev., 1974, vol.D9, No.1, p.1.
4. Nozawa S., Blankleider B., Lee T.-S.H. — Nucl.Phys., 1990, vol.A513, p.459.
5. Гинзбург И.Ф., Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Тельнов В.И. — Письма в ЖЭТФ, 1981, т.34, вып.9, с.514.
6. Гинзбург И.Ф., Коткин Г.А., Сербо В.Г., Тельнов В.И. — ЯФ, 1983, т.38, вып.2(8), с.372.
7. De Pascale M.P., Giordano G. et al. — Phys.Rev., 1985, vol.C32, No.6, p.1830.
8. Pandey L.N., Rustgi M.L. — Phys.Rev., 1985, vol.C32, No.6, p.1842.
9. Горбенко В.Г., Жербовский Ю.В., Колесников Л.Я. и др. — ЯФ, 1982, т.35, вып.5, с.1073; Nucl.Phys., 1982, vol.A381, p.330.
10. Винокуров Е.А., Волощук В.И., Ганенко В.Б. и др. — ЯФ, 1989, т.49, вып.5, с.1233.
11. Болдышев В.Ф., Винокуров Е.А., Волощук В.И. и др. — Препринт ХФТИ 92-42, Харьков, 1992.
12. Ballam J., Chadwick G.B., Gerhart R. et al. — Phys.Rev.Lett., 1970, vol.24, No.17, p.960.
13. Griegee L., Franke G., Lofler G. et al. — Phys.Rev.Lett., 1970, vol.25, No.18, p.1306.

14. Diambriini-Palazzi G., Mc Clellan G., Mistry N. et al. — Phys.Rev.Lett., 1970, vol.25, No.7, p.478.
15. Berger C., Mc Clellan G., Mistry N. et al. — Phys.Rev.Lett., 1970, vol.25, No.19, p.1336.
16. Federici L., Giordano G., Matone G. et al. — Nuovo Cimento, 1980, vol.B59, No.2, p.247.
17. Berlin T.H., Madansky L. — Phys.Rev., 1950, vol.78, p.623.
18. Wick G.C. — Phys.Rev., 1951, vol.81, No.3, p.467.
19. May M.M. — Phys.Rev., 1951, vol.84, No.2, p.265.
20. Maximon L.C., Olsen H. — Phys.Rev., 1962, vol.126, No.1, p.310.
21. Barbiellini G., Bologna G., Diambriini G., Murtas G.P. — Phys.Rev.Lett., 1962, vol.9, p.396.
22. Barbiellini G., Letardi T., Vientin R., Grianti F. — Nuovo Cimento, 1967, vol.A51, p.1124.
23. Kobayashi M., Hiramatsu S., Kondo K. et al. — J.Phys.Soc. of Japan, 1974, vol.36, No.1, p.1.
24. Ананьин П.С., Горячкин В.Г., Калинин Б.Н. и др. — ПТЭ, 1975, № 4, с.25.
25. Потылицын А.П. — Известия ВУЗов, Деп. в ВИНТИ 1325-84, 1984, с.1.
26. Ананьин П.С., Внуков И.Е., Забаев В.Н. и др. — ПТЭ, 1985, № 3, с.36.
27. Barbiellini G., Bologna G., Diambriini G., Murtas G.P. — Nuovo Cimento, 19636 vol.28, No.2, p.435.
28. Griegee L., Lutz G., Schulz H.D. et al. — Phys.Rev.Lett., 1966, vol.16, No.23, p.1031.
29. Армаганян А.А. — Когерентное рождение электрон-позитронных пар в кристаллах и поляризация фотонов. Дис. канд. физ.-мат. наук. Ереван, 1975.
30. Cabibbo N., Da Prato G., De Franceschi G., Mosco U. — Phys.Rev.Lett., 1962, vol.9, No.6, p.270.
31. Cabibbo N., Da Prato G., De Franceschi G., Mosco U. — Nuovo Cimento, 1963, vol.27, p.279.
32. Потылицын А.П. — Поляризованные фотонные пучки высокой энергии. М.: Энергоатомиздат. 1987.
33. Uberall H. — Phys.Rev., 1956, vol.103, No.4, p.1055.
34. Uberall H. — Phys.Rev., 1957, vol.107, No.1, p.223.
35. Diambriini-Palazzi G. — Rev.Mod.Phys., 1968, vol.40, No.3, p.611.
36. Горбенко В.Г., Деркач Л.М., Жебровский Ю.В. и др. — ВАНТ, сер.: Физика высоких энергий, 1972, вып.2(2), с.17.
37. Горбенко В.Г., Деркач Л.М., Жебровский Ю.В. — ЯФ, 1973, т.17, вып.4, с.793.
38. Колесников Л.Я., Рубашкин А.Л., Санин В.М. — УФЖ, 1984, т.29, с.1296.
39. Ansorge R.E., Baker R.D., Krzesinski A.E.S. et al. — Phys.Rev., 1973, vol.D7, No.1, p.26.
40. Jarp S., Mork K.J. — Phys.Rev., 1973, vol.D8, No.1, p.159.
41. Haug E. — Z. Naturforsch., 1975, vol.30, p.1099.
42. Басков В.А., Ким В.В., Сергиенко В.И. и др. — В сб.: Мат. Всесоюз. сов. «Проблемы применения эффектов каналирования частиц кристаллами в физике высоких энергий». Протвино. 1991.
43. Benaksas D., Morrison R. — Phys.Rev., 1967, vol.160, No.5, p.1245.
44. Hart E.L., Cocconi G., Cocconi V.T., Selleni J.M. — Phys.Rev., 1959, vol.115, No.3, p.678.
45. Suh K.S., Bethe H.A. — Phys.Rev., 1959, vol.115, No.3, p.672.
46. Gates D.C., Kenney R.W., Swanson W.P. — Phys.Rev., 1962, vol.125, p.1310.
47. Mohanty R.C., Webb E.H., Sandhu H.S., Roy R.R. — Phys.Rev., 1961, vol.124, No.1, p.202.
48. Mork K.J. — Phys.Rev., 1967, vol.160, No.5, p.1065.
49. Болдышев В.Ф., Пересунько Ю.П. — ЯФ, 1971, т.14, вып.5, с.1027.
50. Болдышев В.Ф., Пересунько Ю.П. — ЯФ, 1974, т.19, вып.1, с.144.
51. Винокуров Е.В., Кураев Э.А. — ЖЭТФ, 1972, т.63, вып.4(10), с.1142.
52. Винокуров Е.А., Меренков Н.П. — ЯФ, 1975, т.21, вып.4, с.781.
53. Болдышев В.Ф., Винокуров Е.А., Гетьман В.А. и др. — ВАНТ: сер. Физика высоких энергий, 1972, вып.2(2), с.19.

54. Вацет П.И., Винокуров Е.А., Гетьман В.А., Колтунов И.А. и др.— Препринт ХФТИ 73-4, Харьков, 1973.
55. Винокуров Е.А., Кураев Э.А., Меренков Н.Л.— Препринт ИЯФ 118-74, Новосибирск, 1974.
56. Винокуров Е.А., Кураев Э.А., Меренков Н.П.— ЖЭТФ, 1974, т.66, вып.6, с.1916.
57. Болдышев В.Ф., Винокуров Е.А., Кураев Э.А. и др.— ВАНТ, сер.: Физика высоких энергий и атомного ядра, 1976, вып.1(17), с.18.
58. Винокуров Е.А., Болдышев В.Ф.— УФЖ, 1974, т.28, вып.4, с.492.
59. Болдышев В.Ф., Винокуров Е.А., Пересулько Ю.П.— Физика атомного ядра и элементарных частиц. М.: ЦНИИатоминформ., 1983, ч.3, с.133.
60. Винокуров Е.А., Болдышев В.Ф.— ВАНТ, сер.: Общая и ядерная физика, 1984, вып.2(27), с.31.
61. Винокуров Е.А., Болдышев В.Ф.— ЯФ, 1984, т.40, вып.3(9), с.731.
62. Boldyshev V.F., Vinokurov E.A.— PANIC Particles and Nuclei-Tenth Inter. Conf. Book of Abstr., vol.1. Heidelberg, July 30—Aug.3, 1984.
63. Болдышев В.Ф., Винокуров Е.А.— ВАНТ, сер.: Общая и ядерная физика, 1986, вып.1(34), с.124.
64. Болдышев В.Ф., Винокуров Е.А., Пересулько Ю.П.— Обзор. М.: ЦНИИатоминформ, 1990.
65. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.— Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
66. Borsellino A.— *Helv. Phys. Acta.*, 1947, vol.20, p.136.
67. Borsellino A.— *Nuovo Cimento*, 1947, vol.4, No.3-4, p.112.
68. Borsellino A.— *Rev.Univ.Nac.Tucuman*, 1947, vol.6, No.1, p.7.
69. Chizzetti A.— *Rev.Univ.Nac.Tucuman*, 1947, vol.6, No.1, p.37.
70. Немировский П.Э.— ЖЭТФ, 1948, т.18, вып.10, с.893.
71. Немировский П.Э.— *J. of Phys.*, 1947, vol.11, p.94.
72. Votruba V.— *Phys.Rev.*, 1948, vol.73, p.1468.
73. Votruba V.— *Bul. Int. Akad. Tcheque Sci.*, 1948, vol.49, p.19.
74. Гарибян Г.М.— ЖЭТФ, 1953, т.24, вып.6, с.617.
75. Joseph J., Rohrlch F.— *Rev.Mod.Phys.*, 1958, vol.30, No.2, p.354.
76. Копылов Г.И., Кулюкина Л.А., Полубаринов И.В.— ЖЭТФ, 1964, т.46, вып.5, с.1715.
77. Mork K.J.— *Arkiv for det Fiske Seminar in Trondheim*, 1965, No.7.
78. Mork K.J.— *Phys.Norv.*, 1971, vol.5, No.1, p.51.
79. Haug E.— *Z. Naturforsch.*, 1985, vol.40 a, p.1182.
80. Haug E.— *Z. Naturforsch.*, 1981, vol.36 a, p.413.
81. Байер В.Н., Фадин В.С., Хозе В.А.— ЖЭТФ, 1966, т.50, вып.1, с.156.
82. Бардин Д.Ю., Бэм Я., Семикоз В.Б. и др.— Препринт ОИЯИ, P2-4644, Дубна, 1969.
83. Maximon L.C., Gimm H.A.— *Phys.Rev.*, 1981, vol.A23, No.1, p.171.
84. Augerat J., Avan M., Ballet M. et al.— *Nuovo Cim.*, 1974, vol.11, No.16, p.685.
85. Augerat J., Avan M., Parizet M.J. et al.— *Phys.Rev.*, 1977, vol.15, No.3, p.1068.
86. Горшков В.Г.— УФН, 1973, т.110, вып.1, с.45.
87. Wheeler J.A., Lamb W.E.— *Phys.Rev.*, 1939, vol.55, No.9, p.858.; *Phys. Rev.*, 1956, vol.101, No.6, p.1836 (Erratum).
88. Hubbel J.H., Veigele Wm.J., Briggs E.A. et al.— *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 1975, vol.4, No.3, p.471.
89. Mork K., Olsen H.— *Phys.Rev.*, 1965, vol.B140, No.6, p.1661; *Phys.Rev.*, 1968, m vol.166, No.5, p.1862 (Erratum).
90. Hubbel J.H., Gimm H.A., Overbo I.— *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 1980, vol.9, No.4, p.1023.
91. Kaufman C.— *Phys. Rev.*, 1964, vol.A135, p.985.

92. Schufer F. et al.— Gordon Research Conf. on Photonuclear Reactions, Aug.6—10, 1990, Tilton School. Tilton, New-Hampshire.
93. Endo I., Kasai S., Harada M. et al.— Inst. for Nucl. Study Univ. of Tokyo. Ann. Rep. 1986, p.79.
94. Endo I., Kasai S., Harada M. et al.— Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1989, vol.A280, p.144.
95. Endo I., Kasai S., Harada M. et al.— Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

НЕЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА $(\varphi^4)_d$ -ТЕОРИИ ПОЛЯ

Г.В.Ефимов, С.Н.Неделько

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор непертурбативных методов исследования структуры вакуума квантово-полевых моделей (вариационный подход, конструктивная квантовая теория поля, метод канонических преобразований и др.). Обсуждается проблема унитарно неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений. Наиболее подробно рассмотрен метод исследования фазовой структуры суперперенормируемых теорий самодействующего скалярного поля при произвольных константе связи и температуре, основанный на канонических преобразованиях и формализме ренормгруппы. В этом подходе с помощью канонических преобразований вводится набор пробных вакуумных векторов (неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений). Лидирующие динамические вклады, формирующие основное состояние системы, учитываются посредством ренормгрупповых уравнений. Критерии отбора основного состояния базируются на сравнении плотностей свободной энергии и эффективных констант связи, характеризующих каждое представление. Механизмы перестройки основного состояния, исследованные в работе, могут найти применение при анализе реалистических квантово-полевых теорий.

The nonperturbative methods for investigation of the phase structure of quantum field models (variational approach, constructive quantum field theory, the canonical transformation method and so on) are reviewed. The problem of the unitary nonequivalent representations of the canonical commutation relations is discussed. An application of the method, based on the canonical transformations and renormalization group, to the self-interacting scalar field model at arbitrary coupling constant and temperature is considered in details. The trial vacuum vectors (nonequivalent representations of the canonical commutation relations) are introduced by means of the canonical transformations. The leading dynamical terms forming the ground state of the system are taken into account with the renormalization group equations. The methods considered in the paper can be applied to the realistic quantum field models.

1. ВВЕДЕНИЕ

Около двадцати лет назад Коулменом и Вайнбергом [1] было установлено, что радиационные поправки могут приводить к спонтанному нарушению симметрии (SSB) в теориях, в которых квазиклассическое (древесное) приближение не показывает такого нарушения. Приблизительно в то же время Киржниц и Линде показали [2,3], что в некоторых теориях

поля с SSB, постулируемым при нулевой температуре, с ростом температуры происходит восстановление симметрии (см. также [4—7]).

В основе этих выводов лежит идея о возникновении во всем пространстве постоянного классического скалярного поля (конденсата). Появление такого конденсата означает перестройку основного состояния системы, в результате которой поля, взаимодействующие со скалярным полем, изменяют свою массу. Меняется и характер взаимодействия полей друг с другом. Оказалось, что квантово-полевые системы обладают сложной фазовой (вакуумной) структурой, и при определенных значениях констант связи и температуры в них могут происходить фазовые переходы.

Методы, предложенные в [1,3], базируются на петлевом разложении эффективного потенциала, а потому их применимость ограничена условием слабой связи. Дальнейший прогресс в исследовании фазовой структуры полевых систем связан с использованием непертурбативных методов. Внимание исследователей в основном сосредоточилось на теориях скалярного поля с лагранжианами:

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x) - \frac{g}{4} \varphi^4(x), \quad (1.1)$$

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) \left(\square + \frac{1}{2} m^2 \right) \varphi(x) - \frac{g}{4} \varphi^4(x), \quad (1.2)$$

$$L(x) = \frac{1}{2} \sum_i^N \varphi_i(x) (\square - m^2) \varphi_i(x) - \frac{g}{4} \left(\sum_i^N \varphi_i^2(x) \right)^2 \quad (1.3)$$

в пространстве-времени R^d ($d = 2, 3, 4$) при конечной и нулевой температуре T . Здесь $x = (x, t)$.

Лагранжианы (1.1) и (1.2) описывают однокомпонентное скалярное поле, они инвариантны относительно замены $\varphi \rightarrow -\varphi$. Лагранжиан (1.3) описывает $O(N)$ -мультиплет скалярных полей и инвариантен относительно $O(N)$ -преобразований, а также замены $\varphi_i \rightarrow -\varphi_i$. Параметры m и g положительны.

Если безразмерные параметры $G = \frac{g}{2\pi m^{4-d}}$ и $\theta = \frac{T}{m}$ достаточно малы, то в квантовой теории лагранжианы (1.1) и (1.3) описывают симметричное взаимодействие, а лагранжиан (1.2) соответствует спонтанно нарушенной симметрии.

В рамках конструктивной квантовой теории поля (КТП) Саймоном и Гриффитсом [8,9], Глимом и Джаффе [10,11], Мак Брайеном и Розеном [12] и др. был получен ряд строгих теорем, которые доказывают существование нетривиальных двумерных теорий самодействующего скалярно-

го поля. Эти теоремы устанавливают существование фазового перехода в двух- [9,10,11] и трехмерных [12] φ^4 -теориях поля при нулевой температуре. Получены указания на то, что эти переходы — второго рода, но доказательство этого не является полным [11,12]. Вместе с тем в рамках конструктивной КТП не удалось получить какой-либо информации о критическом значении константы связи или найти явную зависимость массы и параметра порядка от константы связи.

Близко к этой тематике примыкают исследования так называемой проблемы тривиальности $(\varphi^4)_d$ -теории. Строго доказано, что при $d > 4$ такая теория оказывается либо невзаимодействующей (голый заряд равен нулю в пределе снятия регуляризации), либо нестабильной (заряд отрицателен) [13]. В случае $d = 4$ прийти к каким-либо окончательным выводам не удается [14].

Очень привлекательный с физической точки зрения подход к проблеме фазовой структуры обеспечивается вариационным методом гауссовского эффективного потенциала (GER). Начало этому направлению в теории поля было положено в работах Барнеса и Чандора [15], Бардина и Моше [16], Стевенсона [17], Консоли и др. [18]. Другие исследования в этом направлении были предприняты Чангом [19], Магрудером [20], Баумом и Гринштейном [21], Грасси, Хакимом и Сиваком [22]. Эти работы различаются способами перенормировки, методами учета температурных эффектов, использованием или нет $1/N$ -разложения при изучении $O(N)$ -инвариантных систем и т.д. Выход за рамки GER (так называемая постгауссовская аппроксимация) был предпринят Полли и Ритчелом при изучении $(\varphi^4)_2$ -теории [23].

В рамках вариационного подхода приближенно найдены критические значения константы связи и температуры, зависимость массы и параметра порядка (конденсата) от константы связи и температуры в различных теориях самодействующего скалярного поля. Полли и Ритчелом [23] в $(\varphi^4)_2$ -теории получен фазовый переход второго рода, как это и предсказывают упомянутые выше теоремы (см. также [63]).

Вместе с тем специфика вариационных методов в КТП делает их результаты весьма ненадежными, если в теории имеются расходимости в высших порядках теории возмущений (см. статью Фейнмана [24]). Именно такая ситуация имеет место в моделях (1.1) — (1.3) при $d > 2$. Как отмечалось многими авторами [25—27], эта проблема кроется в самой постановке задачи в вариационном подходе. С одной стороны, вариационный принцип применяется к фиксированному гамильтониану с данным набором голых параметров (массы и константы связи), а с другой — физически

значимой величиной является эффективный потенциал с данным набором перенормированных параметров. После перенормировки основное неравенство вариационного подхода

$$U_{\text{eff}}^+(\varphi) \equiv \min_{\psi} \langle \psi | H | \psi \rangle \geq U_{\text{eff}}(\varphi) \quad (1.4)$$

оказывается бесполезным, т.к. УФ-расходимости вариационной оценки U_{eff}^+ и точного эффективного потенциала U_{eff} различны, и, следовательно, разница между U_{eff}^+ и U_{eff} бесконечно велика [25]. Неравенство (1.4) может быть осмысленным лишь в том случае, когда гамильтониан является оператором на пространстве состояний, т.е. если в теории имеются только нормально упорядочиваемые расходимости ((1.1)–(1.3) при $d = 2$).

Другая проблема связана с невозможностью контролировать точность аппроксимации в вариационном методе даже в том случае, когда неравенство (1.4) применимо [28].

Отметим еще оригинальный подход Чанга [29] и Магрудера [20], прямо основанный на учете структуры перенормировки точного потенциала в рамках ТВ. Чанг и Магрудер исследовали фазовую структуру модели (1.2) в R^3 и обнаружили, что с ростом константы связи симметрия восстанавливается. Это противоречит результатам GEP-аппроксимации [30].

В настоящей работе используется модификация метода канонических преобразований, которая позволяет учесть структуру перенормировки в высших порядках и контролировать точность аппроксимации. Этот подход впервые был применен в работе [31] при исследовании моделей (1.1), (1.3) в R^2 . Обобщение на более сложные случаи трех- и четырехмерных теорий и на системы при конечной температуре было сделано в работах [32–36]. Окончательная формулировка метода приведена в статье [35].

Суть подхода состоит в комбинации двух методов КТП: канонических преобразований и ренормгруппы (РГ). Идея такой комбинации исходит из фундаментальных свойств локальной КТП: неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений (ККС) и УФ-расходимостей (см., например, [47, 57]). С физической точки зрения существование неэквивалентных представлений означает, что вакуумное состояние не единственно. В то же время динамическая нестабильность вакуума связана с радиационными поправками к физическим параметрам системы. Перенормировка (R), по существу, соответствует учету лидирующих радиационных поправок. Поэтому можно ожидать, что R -структура модели содержит основную (по

крайней мере качественную) информацию о ее вакуумной структуре (см. также [8]).

Согласно этой интуитивной мотивации за исходную точку принимается следующее:

- фазы проявляются в КТП как неэквивалентные представления,
- основная информация о фазовой структуре теории заложена в структуре перенормировки.

Если перенормированная константа связи G мала и температура равна нулю, то для квантования моделей (1.1)–(1.3) можно применить каноническую процедуру в представлении Фока для частиц с перенормированной массой m . Процедура построения S -матрицы предполагает фиксацию схемы перенормировки. Имея это в виду, мы хотим знать, что представляет собой полевая система при других значениях G и θ при фиксированной схеме перенормировки. Сформулируем проблему следующим образом:

Какое представление ККС является подходящим для различных значений G и θ , и какая физическая картина соответствует этому представлению?

При этом будем понимать под различными фазами системы неэквивалентные представления, имеющиеся в теории для данных G и θ .

Обзор имеет следующую структуру. Во втором и третьем разделах кратко излагается метод канонического квантования и аппарат ренорм-группы, на которые существенно опирается используемый в работе метод. В четвертом разделе обсуждается взаимосвязь проблемы вакуумной структуры квантово-полевой системы и неэквивалентных представлений ККС, рассмотрены наиболее важные проявления неэквивалентных представлений в КТП. В пятом разделе различные аспекты квантования, неэквивалентных представлений, канонических преобразований и ренорм-группы, мотивирующие метод канонических преобразований в КТП, объединены в последовательной формулировке этого метода. В остальных разделах исследуется фазовая структура конкретных моделей.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И S -МАТРИЦА

Чтобы изучать поведение квантово-полевой системы при изменении ее параметров, необходимо прежде всего описать эту систему при каких-либо фиксированных значениях параметров. Другими словами, нужно определить своего рода «граничное условие». Без этого постановка задачи не будет полной.

Будем считать, что при нулевой температуре в пределе слабой связи самодействующее скалярное поле может быть описано в рамках стандарт-

ного формализма канонического квантования и построения S -матрицы по теории возмущений (ТВ) (см. [42]). Классический лагранжиан системы запишем в виде

$$\begin{aligned} L(x) = & \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2(\mu)) \varphi(x) - \frac{g(\mu)}{4} \varphi^4(x) + \\ & + \frac{1}{2} (Z_2 - 1) \varphi(x) \square \varphi(x) - \frac{1}{2} \delta m^2(\mu) \varphi^2(x) - \\ & - \frac{1}{4} (Z_1 - 1) g(\mu) \varphi^4(x) - \delta E. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для перенормированных поля φ , массы $m(\mu)$ и константы связи $g(\mu)$. Параметр μ характеризует масштаб перенормировки, осуществляемой с помощью контрчленов, приведенных во второй строке (2.1). Ниже мы специально остановимся на вопросах перенормировки.

В качестве канонических переменных выберем перенормированное поле φ и канонически сопряженный импульс, который равен

$$\pi(x, x_0) = \frac{\delta}{\delta \dot{\varphi}(x, x_0)} \int dy L(y, x_0) = Z_2 \dot{\varphi}(x, x_0).$$

Канонические коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)]_{x_0=y_0} &= [\pi(x), \pi(y)]_{x_0=y_0} = 0, \\ [\varphi(x), \pi(y)]_{x_0=y_0} &= i\delta(x - y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Запишем плотность гамильтониана:

$$\begin{aligned} H &= \pi \dot{\varphi} - L = H_0 + H_I + H_{ct}, \\ H_0 &= \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla \varphi)^2 + m^2(\mu) \varphi^2], \quad H_I = \frac{1}{4} g(\mu) \varphi^4, \\ H_{ct} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{Z_2} - 1 \right) \pi^2 + (Z_2 - 1) (\nabla \varphi)^2 + \delta m^2(\mu) \varphi^2 \right] + \frac{1}{4} (Z_1 - 1) g(\mu) \varphi^4. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В представлении взаимодействия H разбивается на свободную часть H_0 (по которой строится пространство состояний) и гамильтониан взаимодействия. Операторы φ и π можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega x_0} + a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega x_0} \right], \\ \pi(x) &= \frac{1}{i} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega x_0} - a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega x_0} \right], \end{aligned}$$

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2(\mu)}, \quad [a(k), a^+(k')] = \delta(k - k'). \quad (2.4)$$

Операторы рождения $a^+(k)$ и уничтожения $a(k)$ определены на пространстве Фока свободных частиц с массой $m(\mu)$ и вакуумным вектором $|0\rangle$, удовлетворяющим условиям:

$$a(k)|0\rangle = 0 \quad \forall k, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (2.5)$$

В рамках ТВ матрица рассеяния строится с помощью итераций по степеням гамильтониана взаимодействия $(H_I + H_{ct})$, так что окончательное выражение принимает вид (см., например, [43]):

$$S = \lim T \exp \left\{ -i \int d^d x [H_I(x) + H_{ct}(x)] \right\}, \quad (2.6)$$

где операторы H_I и H_{ct} записаны в представлении взаимодействия, а символ $\lim$ означает снятие УФ-регуляризации. Оператор H_{ct} подбирается так, чтобы каждый член ряда ТВ для S -матрицы был конечным при снятии регуляризации. Регуляризация может вводиться непосредственно в ряде ТВ (можно использовать размерную регуляризацию [45, 49], введение формфактора [44, 46, 57] и т.д.).

Заметим, что формализм термополевой динамики (TFD) [58, 64, 65] позволяет естественным образом включить в рассмотрение температурные эффекты в рамках канонического квантования. На этом мы подробно остановимся в двух последних разделах.

Безразмерными параметрами модели являются перенормированная константа связи $g(\mu)$ и (при ненулевой температуре T) $\theta = T/m(\mu)$. В случае размерности пространства-времени $d < 4$ безразмерная (пертурбативная) константа связи определяется отношением $G = g/m^{4-d}(\mu)$.

Для дальнейшего важно отметить, что изложенная выше схема построения S -матрицы основывается, в частности, на следующих предположениях:

- 1) выполняются одновременные соотношения коммутации (2.2), набор канонических переменных является полным;
- 2) существует пуанкаре-инвариантный нормируемый вакуум;
- 3) вакуумное состояние единственно.

Кроме того, поскольку выражение для S -матрицы (2.6) получено итерациями, то предполагается применимость ТВ, а следовательно, и малость перенормированной константы связи: $g(\mu) \ll 1$.

Приведенная процедура отражает и тот факт, что для построения S -матрицы недостаточно задать лагранжиан, но необходимо еще определить «правила вычисления» коэффициентных функций в ряде ТВ [42]. Эта необходимость связана с наличием УФ-расходимостей и может быть

сведена к произволу в определении хронологического произведения операторов в совпадающих точках. При введении в определение матрицы рассеяния (2.6) оператора H_{ct} указанный произвол в T -произведении заменяется произволом в выборе схемы перенормировки (R -схемы), которая и должна быть зафиксирована.

Если перенормировка осуществляется на массовой поверхности, т.е. по построению перенормированная масса равна физической (полюсной) массе и вычет двухточечной функции Грина в полюсе равен единице, то упомянутое выше пространство Фока описывает асимптотические in- и out-состояния.

3. РЕНОРМГРУППА

3.1. Схемы перенормировки. Определение матрицы рассеяния (2.6) требует фиксации схемы перенормировки. Используются самые разные способы устранения УФ-расходимостей. Они могут быть разбиты на два класса (см., например, [48]): класс не зависящих от массы R -схем и R -схемы, основанные на вычитании из расходящейся диаграммы ее значения при определенных значениях внешних импульсов (например, каноническая μ -схема, вычитание при нулевых внешних импульсах и т.д.).

Примером не зависящих от массы перенормировочных предписаний является схема минимальных вычитаний (MS) (см., например, [45, 49, 50]). По существу, перенормировка в этом случае сводится к тому, что в рамках размерной регуляризации из диаграмм вычитаются только полюса по переменной $\epsilon = d_{ph} - d$, где d_{ph} — размерность физического пространства-времени. При этом уже при регуляризации появляется произвольный параметр μ , имеющий размерность массы. Его значение не фиксируется MS-схемой самой по себе. Для этого нужно задать некоторое дополнительное условие.

Упомянутая выше каноническая μ -схема определяется следующими условиями на перенормированные

а) пропагатор:

$$D(p^2) \rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2(\mu) + i0} \quad \text{при } p^2 \rightarrow \mu^2, \quad (3.1)$$

б) четырехточечную вершинную функцию:

$$\Gamma^{(4)}(s, t, u) = g(\mu) \quad \text{при } s = g = u = \frac{4}{3}\mu^2,$$

где $m(\mu)$ и $g(\mu)$ — перенормированные масса и константа связи. Переменные Мандельштама s, t, u связаны с внешними импульсами обычным образом:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2.$$

В φ^4 -теории точка вычитания μ должна удовлетворять неравенству

$$\mu^2 \leq 9m^2(\mu),$$

а в остальном является произвольной. Так что, как и в случае MS-схемы, масштаб перенормировки μ должен фиксироваться дополнительно.

В общем случае при определении схемы перенормировки выбирается некоторый однопараметрический R_μ -класс предписаний и, кроме того, фиксируется масштаб перенормировки μ . Последнее наиболее естественно сделать через параметры самой теории. В нашем случае такой способ состоит в фиксации отношения $m(\mu)/\mu$ ($m(\mu) \neq 0$).

Таким образом, будем говорить, что схема перенормировки фиксирована, если

- выбран однопараметрический R_μ -класс перенормировочных предписаний;
- масштаб перенормировки фиксирован соотношением $\frac{m(\mu)}{\mu} = C$, где $m(\mu)$ — перенормированная масса, а C — некоторое число.

В заключение этого пункта заметим, что условие перенормировки на массовой поверхности соответствует μ -схеме при $\mu = m$ ($C = 1$) (см. (3.1)). В этом случае перенормированная и физическая массы совпадают: $m = m_{ph}$. Мы используем этот простой факт при анализе фазовой структуры модели (2.1) в R^4 .

3.2. Ренормгрупповые уравнения. Перепишем лагранжиан (2.1) в терминах затравочных поля φ_B , массы m_B и константы связи g_B :

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi_B(x) (\square - m_B^2) \varphi_B(x) - \frac{g_B}{4} \varphi_B^4(x).$$

Затравочные и перенормированные величины связаны соотношениями

$$\varphi_B = \sqrt{Z_2} \varphi, \quad m_B^2 = Z_m m^2, \quad g_B = Z_g g.$$

Идея ренормализационной инвариантности состоит в том, что изменение схемы перенормировки, сказывающееся на константах Z_i , компенсируется изменением перенормированных поля, массы и константы связи так, что затравочные величины не меняются. Это приводит к тому, что S -матрица теории не зависит от выбора R -схемы. Эта идея приобретает конструктивный смысл, если найдена связь между перенормированными величинами в разных схемах перенормировки. Такая связь устанавливается ренормгрупповыми (РГ) уравнениями [42,45]. Выпишем формулы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Если изменение в перенормировочном предписании состоит только в изменении масштаба перенормировки μ в рамках одного R_μ -класса, то РГ-уравнения имеют вид [45]:

$$\begin{aligned} \nu \frac{dg(\nu)}{d\nu} &= \beta \left(g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right), \\ \frac{\nu}{m^2(\nu)} \frac{dm^2(\nu)}{d\nu} &= -\gamma_m \left(g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right), \\ \nu \frac{d\zeta(\nu)}{d\nu} &= -\frac{1}{2} \gamma \left(g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где ζ — константа конечной перенормировки поля при изменении масштаба ν . Граничные условия таковы:

$$g(\nu) = g, \quad m(\nu) = m, \quad \zeta(\nu) = 1 \quad \text{при } \nu = \mu. \quad (3.3)$$

Ренормгрупповые функции $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}_m$ и $\bar{\gamma}$ определяются системой уравнений, следующей из требования инвариантности затравочных величин:

$$\begin{aligned} \bar{\beta} \left(g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right) &= -\nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_g, \\ \bar{\gamma}_m \left(g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right) &= \nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_m, \\ \bar{\gamma} \left(g(\nu), \frac{m(\nu)}{\nu} \right) &= \nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функции β , γ_m и γ получаются из решений системы (3.4) предельным переходом $\beta = \lim \bar{\beta}$, $\gamma_m = \lim \bar{\gamma}_m$, $\gamma = \lim \bar{\gamma}$, соответствующим снятию УФ-регуляризации. Если используется не зависящая от массы R-схема, то уравнения (3.2) можно просто решить в общем виде.

Традиционное применение РГ-формализма состоит в анализе асимптотик функций Грина по энергетическим переменным. Другими словами, интересуются зависимостью перенормированных величин (заряда, массы, функций Грина) от масштаба перенормировки ν . Эта зависимость как раз и описывается уравнениями (3.2).

В настоящей работе исследуется задача иного рода. Нас интересует поведение основного состояния при изменении параметров g и m , содержащихся в граничных условиях (3.3), при фиксированной схеме перенормировки. Ренормгруппа оказывается полезной при решении и этой задачи.

4. НЕЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ККС

Проблема унитарно неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений возникла в модели Ван Хоа [51]. Детальный математический анализ этой проблемы впервые дал Фридрихс [52]. Дальнейшие результаты были получены Хаагом [54], Вайтманом и др. [53,56]. Подробный анализ всего круга вопросов, касающихся неэквивалентных представлений, содержится в монографиях [74,57,58], а в работе [59] обсуждается аксиоматика релятивистски-инвариантной канонической теории поля с несепарабельным гильбертовым пространством состояний.

4.1. Бесконечное число степеней свободы. Характерная особенность, отличающая поле от других физических систем, состоит в том, что оно обладает бесконечным (мощности континуума) числом степеней свободы.

Рассмотрим нормировочный ящик с периодическими граничными условиями. Нейтральное скалярное поле может быть разложено на взаимно независимые нормальные колебания типа плоских волн

$$\varphi(x) = V^{-1/2} \sum_k [2\omega(k)]^{-1/2} [a_k e^{ikx} + a_k^+ e^{-ikx}],$$

где $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$. Канонические коммутационные соотношения для a, a^+ имеют вид

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'},$$

откуда видно, что каждое нормальное колебание имеет структуру гармонического осциллятора. Каждый такой осциллятор имеет свое собственное гильбертово пространство с основным состоянием $|0; k\rangle$, характеризваемым соотношениями $a_k |0; k\rangle = 0$, $\langle 0; k | 0; k\rangle = 1$, и бесконечную последовательность собственных состояний оператора числа частиц $N_k = a_k^+ a_k$. Гильбертово пространство всего поля является прямым произведением гильбертовых пространств простых осцилляторов. Векторы состояний поля будем обозначать $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$, где n_i — число квантов с импульсом k_i . Поскольку каждый осциллятор имеет счетное множество (M) состояний и существует счетное множество (N) осцилляторов, то число измерений полного гильбертова пространства определяется мощностью множества M^N , которая равна мощности континуума.

Множество $\{|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle\}$ не может быть использовано в качестве базиса сепарабельного гильбертова пространства, ввиду его несчет-

ности. Существует бесконечно много способов выбора таких счетных подмножеств, которые могут служить базисом сепарабельного гильбертова пространства. Если какие-либо два подмножества являются базисами представлений для операторов $(a_i, a_i^+; i = 1, 2, \dots)$, то эти два представления являются *унитарно неэквивалентными по отношению друг к другу* в том смысле, что вектор одного представления не является суперпозицией базисных векторов другого представления.

Если взаимодействие в системе отсутствует, то полное число частиц — сохраняющаяся величина. Поэтому множество $\{ |n_1, \dots, n_r, \dots\rangle \}$ оказывается излишне большим для описания свободного поля; можно ограничиться подмножеством

$$\{ |n_1, \dots, n_r, \dots\rangle; \sum_i n_i = \text{конечное число} \}.$$

Такое подмножество счетно (см., например, [58]). После введения в нем операции внутреннего произведения получается сепарабельное гильбертово пространство, которое и называется пространством Фока.

В случае взаимодействующих полей ситуация меняется, проявлением чего является теорема Хаага и ее следствия [53—56]. Доказательство теоремы Хаага существенно опирается на требование единственности вакуума, которое неявно предполагает отсутствие неэквивалентных представлений и приспособленность пространства Фока к представлению взаимодействующих полей [47]. Поэтому радикальным способом исправления ситуации могло бы быть включение неэквивалентных представлений в структуру теории посредством определения поля как оператора в несепарабельном гильбертовом пространстве (при этом необходимо отказаться от единственности вакуума). Обсуждение аксиоматики такого рода теории можно найти, например, в работе [59]. Однако реализации этой идеи препятствует уже хотя бы то, что до настоящего времени не существует последовательной классификации неэквивалентных представлений ККС.

Мы поставим себе более узкую задачу. Будем традиционно считать, что формализм, введенный в предыдущих параграфах, дает достаточные основания для вычисления элементов S -матрицы при условии, что перенормированная константа связи мала: $g(\mu) \ll 1$. Известно, что при описании электромагнитных и слабых взаимодействий такой подход оказывается успешным. При этом, конечно, следует отдавать себе отчет в том, что все принципиальные проблемы, ассоциирующиеся с теоремой Хаага, остаются.

Попробуем все же ослабить условие единственности вакуума. Выражение «вакуум не единственен» означает, что гильбертово пространство

содержит несколько нормируемых и инвариантных векторов. Эти векторы обязательно неэквивалентны (в указанном выше смысле). В этом случае отождествление вакуума и основного состояния более не является возможным. Необходимо найти собственное основное состояние системы путем явного обращения к ее динамике. Для этого нужно ввести с учетом динамики набор вакуумных векторов (пространств Фока) и выбрать из них тот, который при данных константе связи и температуре является лучшим претендентом на роль основного состояния. Заметим, что для этого нет необходимости строить полное (несепарабельное) пространство состояний. Достаточно считать, что оно существует, а все рассматриваемые пространства Фока являются его подпространствами. В каждом из этих пробных подпространств действует стандартный формализм канонического квантования.

Метод, которым эта программа может быть реализована, будет подробно сформулирован в следующем разделе. Здесь же отметим, что набор пробных вакуумных векторов (неэквивалентных представлений) вводится с помощью канонических преобразований, динамика учитывается посредством ренормгрупповых уравнений, а критерии отбора основного состояния базируются на сравнении эффективных констант связи и плотностей свободной энергии, характеризующих каждое представление.

Прежде чем перейти к формулировке метода, рассмотрим несколько известных примеров неэквивалентных представлений. Одновременно мы проясним мотивировку нашего метода и введем формулы, которые будут использованы в последующих вычислениях.

4.2. Канонические преобразования бозонных операторов. Рассмотрим два набора бозонных операторов $[a(k), a^+(k)]$ и $[b(k), b^+(k)]$. Пространство Фока, на котором действуют эти операторы, обозначим $H[a, b]$. Вакуумное состояние $|0\rangle$ в нем удовлетворяет соотношениям

$$a(k)|0\rangle = 0, \quad b(k)|0\rangle = 0 \quad \forall k.$$

Алгебраические свойства операторов даются выражениями

$$[a(k), a^+(k')] = \delta(k - k'), \quad [b(k), b^+(k')] = \delta(k - k'),$$

а остальные коммутаторы обращаются в нуль. Введем операторы $\alpha(k), \beta(k)$:

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= c(k) a(k) - d(k) b^+(-k) \\ \beta(k) &= c(k) b(k) - d(k) a^+(-k). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь численные коэффициенты c и d — вещественные функции k^2 , они удовлетворяют условию $c^2 - d^2 = 1$.

Оно гарантирует, что α и β имеют те же алгебраические свойства, что и a, b . Иными словами, преобразование (4.1) является каноническим, оно носит название преобразования Боголюбова [60—62]. Будем считать коэффициент c положительным, тогда можно принять: $c = \cosh \xi$, $d = \sinh \xi$.

Введем оператор

$$O[\xi] = \exp \{A[\xi]\}, \quad (4.2)$$

$$A[\xi] = \int d^3k \xi(k) [a(k) b(-k) - b^+(k) a^+(-k)],$$

так что

$$[a(k), A(\xi)] = -\xi(k) b^+(-k),$$

$$[b^+(-k), A(\xi)] = -\xi(k) a(k).$$

Повторно применяя эти соотношения, получаем

$$O^{-1}(\xi) a(k) O(\xi) = a(k) \cosh \xi - b^+(-k) \sinh \xi = \alpha(k). \quad (4.3)$$

Аналогично

$$\beta(k) = O^{-1}(\xi) b(k) O(\xi). \quad (4.4)$$

Преобразования (4.3), (4.4) лишь по форме выглядят как унитарные. Чтобы проверить это, рассмотрим матричный элемент

$$o_0(\xi) = \langle 0|0; \xi \rangle, \quad \text{где } |0; \xi \rangle = O^{-1}[\xi] |0\rangle.$$

Можно показать [58], что

$$o_0(\xi) = \exp \left\{ -\delta^3(0) \int d^3k \ln [\cosh \xi(k)] \right\} \left(\delta^{(3)}(0) = \frac{V}{(2\pi)^3} \right),$$

откуда следует, что в пределе бесконечного объема V он обращается в нуль независимо от сходимости интеграла, так что $|0; \xi \rangle$ не принадлежит $H[a, b]$. Другими словами, $O^{-1}[\xi]$ не отображает $H[a, b]$ на себя. С другой стороны, в силу (4.3) и (4.4) имеем

$$\alpha(k)|0; \xi \rangle = 0, \quad \beta(k)|0; \xi \rangle = 0,$$

откуда следует, что $|0; \xi \rangle$ — вакуум в отношении действия операторов α, β , и можно построить соответствующее пространство Фока $H[\alpha, \beta]$. Приведенные выше соображения показывают, что $H[a, b]$ и $H[\alpha, \beta]$ — два унитарно неэквивалентных представления ККС в том смысле, что в $H[\alpha, \beta]$ существует вектор, который нельзя представить в виде суперпозиции базисных векторов $H[a, b]$. Более того, это утверждение справедливо для любого вектора из $H[\alpha, \beta]$. Такая ситуация обычно харак-

теризуется интуитивным утверждением об ортогональности пространств $H[a, b]$ и $H[\alpha, \beta]$.

Эти результаты не означают, что нельзя определить действие операторов α и β на векторы в $H[a, b]$. Такое определение дается соотношениями (4.11). То, что было показано выше, сводится к утверждению, что каноническое преобразование (4.1) не реализуется унитарным преобразованием, а операторы α и β не являются операторами уничтожения в $H[a, b]$, поскольку в этом пространстве отсутствует соответствующий им вакуум.

Приведем еще один известный пример канонического преобразования, порождающего неэквивалентные представления. Пусть оператор α связан с оператором уничтожения бозонного поля a соотношением

$$\alpha(k) = a(k) + c(k), \quad (4.5)$$

где c — c -числовая функция. Такое преобразование порождает сдвиг поля на c -число. В операторной форме преобразование (4.5) имеет вид

$$\alpha(k) = O^{-1}[c] a(k) O[c], \quad (4.6)$$

$$O[c] = \exp \left\{ - \int d^3k [c^*(k) a(k) - c(k) a^+(k)] \right\}. \quad (4.7)$$

Отсюда легко получается соотношение

$$|0; c\rangle \equiv O^{-1}[c] |0\rangle = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int d^3k |c(k)|^2 \right\} \exp \left\{ - \int d^3k c(k) a^+(k) \right\} |0\rangle.$$

Если имеет место равенство (например, при $c(k) = c\delta(k)$)

$$\int d^3k |c(k)|^2 = \infty,$$

то представления $H[a]$ и $H[\alpha]$ унитарно неэквивалентны друг другу.

4.3. Ренормгрупповые преобразования. Среди преобразований вида (4.1) имеется два важных частных случая. Это — переход к полю с новой массой и масштабное преобразование поля.

Пусть $\{\varphi, \pi\}$ — канонические переменные, описывающие свободное скалярное поле с массой m , так что они удовлетворяют ККС (2.2) и выражаются через операторы рождения a^+ и уничтожения a посредством соотношений (2.4) с $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$.

Введем операторы (α, α^+) , связанные с (a, a^+) преобразованием

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \cosh \xi(k) a(k) - \sinh \xi(k) a^+(-k), \\ \alpha^+(k) &= \cosh \xi(k) a^+(k) - \sinh \xi(k) a(-k), \end{aligned} \quad (4.8)$$

или в операторной форме:

$$\alpha(k) = O^{-1}[\xi] a(k) O[\xi], \quad (4.9)$$

$$O[\xi] = \exp \left\{ \int d^3k \xi(k) [a(-k) a(k) - a^+(k) a^+(-k)] \right\}.$$

Если выбрать параметр ξ в виде

$$\xi(k) = \frac{1}{2} \ln \left(\xi^2 \frac{\omega}{\Omega} \right), \quad \xi = \text{const}, \quad \Omega(k) = \sqrt{k^2 + M^2}, \quad (4.10)$$

то (4.8) соответствует переходу к новой массе M и масштабному преобразованию поля. Иначе говоря, формулы (4.8) и (4.10) задают каноническое преобразование вида

$$\{\varphi, \pi\} \rightarrow \{\xi\Phi, \xi^{-1}\Pi\}, \quad (4.11)$$

где поля Φ и Π имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} [\alpha(k) e^{ikx} + \alpha^+(k) e^{-ikx}], \\ \Pi(x) &= \frac{1}{i} \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{2}} [\alpha(k) e^{ikx} - \alpha^+(k) e^{-ikx}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Пространства Фока, связанные с операторами a' и α , являются унитарно неэквивалентными.

Если $M = m$, то формулы (4.8) задают только масштабное преобразование поля, а при $\xi = 1$ — только переход к новой массе. Преобразование (4.8) для модели (2.2) — (2.6) соответствует РГ-преобразованию при условии, что одновременно осуществляется конечная перенормировка константы связи, а M и ξ удовлетворяют РГ-уравнениям (3.2).

С другой стороны, обратимся к квантованной φ^4 -теории, заданной соотношениями (2.2) — (2.6), причем схема перенормировки фиксирована, т.е. выбран определенный R_μ -класс, а масштаб перенормировки задан соотношением $m/\mu = C$ (см. п.3.1). Далее, посредством канонического преобразования перейдем к полям с некоторой новой массой $M = tm(\mu)$, где t — параметр преобразования. Ясно, что такое преобразование изменяет R-схему: $M/\mu \neq C$. Отсюда следует, что если мы делаем канонические преобразования, включающие переход к новой массе, и хотим при этом сохранить схему перенормировки неизменной, то необходимо произвести и компенсирующее РГ-преобразование $\mu \rightarrow \nu = t\mu$ с тем, чтобы выполнялось соотношение $\frac{M}{\nu} = \frac{m}{\mu}$, т.е. чтобы отношение массы к масштабу перенормировки было одинаковым в разных представлениях.

Такое РГ-преобразование включает масштабное преобразование поля (см. (4.8)) и конечную перенормировку константы связи.

Как раз такого рода ситуация возникает при исследовании фазовой структуры: с помощью канонических преобразований вводится набор неэквивалентных представлений ККС, и требуется, чтобы R-схема была одной и той же во всех этих представлениях.

5. МЕТОД КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В предыдущих параграфах мы затронули методы и проблемы, так или иначе связанные с методом канонических преобразований. По ходу дела мы уже анонсировали некоторые существенные черты этого метода. Различные аспекты метода, описанного ниже, можно найти в [31—36]. Исходной точкой являются следующие предположения:

1) в квантовой теории поля различные фазы проявляются как унитарно неэквивалентные представления ККС;

2) основная информация о фазовой структуре теории заложена в структуре перенормировки.

Если перенормированная константа связи G мала и температура равна нулю, то для квантования моделей (1.1)—(1.3) можно применить каноническую процедуру в представлении Фока для скалярных частиц с перенормированной массой m . Процедура построения S -матрицы предполагает фиксацию схемы перенормировки. Имея это в виду, мы хотим знать, что представляет собой полевая система при других значениях G и θ и при фиксированной схеме перенормировки. Сформулируем проблему следующим образом:

Какое представление ККС является подходящим для различных значений G и θ , и какая физическая картина соответствует этому представлению?

Под различными фазами системы будем понимать неэквивалентные представления, имеющиеся в теории для данных G и θ .

Метод канонических преобразований сводится к следующему.

1. Производится каноническое квантование теории в представлении, имеющем разумную физическую интерпретацию в пределе слабой связи, т.е. при $G \ll 1$. Схема перенормировки фиксирована. Это означает, что

а) выбран определенный однопараметрический класс R_μ перенормировочных предписаний;

б) масштаб перенормировки μ фиксирован соотношением $\frac{m}{\mu} = C$, где m — перенормированная масса, C — некоторая константа.

2. С помощью канонических преобразований вводится набор неэквивалентных представлений ККС так, что гамильтониан имеет *правильную* форму в каждом из этих представлений. Это значит, что

$$H = H_0 + H_I + H_{ct} + VE.$$

Здесь H_0 — стандартный свободный гамильтониан. Гамильтониан взаимодействия H_I содержит операторы поля в степени больше второй. Оператор H_{ct} определяется H_0 и H_I и соответствует эквивалентным R-схемам во всех представлениях.

R-схемы в двух представлениях с различными массами m и M будем считать эквивалентными, если

- в обоих представлениях используется один и тот же R_μ -класс перенормировочных предписаний;
- масштабы перенормировки μ и ν в первом и втором представлениях удовлетворяют соотношению

$$\frac{m}{\mu} = \frac{M}{\nu}. \quad (5.1)$$

Выполнение требования эквивалентности R-схем обеспечивается компенсирующим РГ-преобразованием, посредством которого и учитывается динамика системы.

Величина E связана с плотностью свободной энергии F согласно формуле $F = E - TS$, где S — плотность энтропии.

3. Выбирается представление с минимальной плотностью свободной энергии и наименьшей эффективной константой связи $G_{\text{eff}}(G, \theta)$. При

$d < 4$ эта величина определяется равенством $G_{\text{eff}} = \frac{g}{2\pi M^{4-d}}$. В четырехмерном случае определение несколько сложнее и мы его дадим позже.

В теории фазовых переходов обычно используется критерий, основанный на сравнении свободных энергий. Однако в квантовой теории поля критерий слабой связи представляется более осмысленным. С физической точки зрения величина F не играет никакой роли, поскольку не дает вклада в элементы S -матрицы. Кроме того, плотность свободной энергии никогда не удастся найти точно или хотя бы с одинаковой точностью в разных фазах, так что сравнение в значительной мере теряет смысл. В то же время естественно предположить, что большая константа связи в H означает, что представление, связанное с H_0 , не описывает реальные состояния и не может рассматриваться как подходящее пред-

ставление для гамильтониана H . Вместе с тем наши вычисления в [32—35] показывают, что оба критерия дают одинаковый результат.

Требование эквивалентности R -схем в различных фазах обусловлено самой постановкой задачи. Действительно, нас интересует, как *меняется структура основного состояния системы в зависимости от изменения параметров g и t , фигурирующих в граничном условии (3.3), при фиксированной схеме перенормировки.*

Требование правильной формы гамильтониана и критерий слабой связи относятся к обычной картине рассеяния в КТП. Гамильтониан H_0 описывает свободные асимптотические поля. H_I описывает взаимодействие частиц, и он не должен содержать линейные и квадратичные по полям слагаемые, поскольку они не приводят к какому-либо нетривиальному взаимодействию, а лишь переопределяют параметры свободного гамильтониана. Обычное пертурбативное разложение для амплитуд рассеяния осмысленно, если эффективная (пертурбативная) константа связи достаточно мала. Поэтому мы рассматриваем представление как приемлемое, если гамильтониан имеет правильную форму, а эффективная константа связи мала. Кроме того, G_{eff} можно использовать для контроля точности аппроксимации.

6. φ^4 -ТЕОРИЯ ОДНОКОМПОНЕНТНОГО ПОЛЯ

Трехмерные модели (1.1)—(1.3) интересны прежде всего тем, что, являясь суперперенормируемыми, они содержат двух-, трех- и четырехпетлевые расходимости в диаграммах, показанных на рис.1. Это обстоятельство делает проблематичным использование вариационных методов [25—27, 38—30] и приводит к различию результатов в разных подходах. Остановимся на этом подробнее.

Обратимся к случаю R^2 . GER-аппроксимация [19,37], оригинальный расчет Чанга [29], основанный на учете структуры перенормировки и метод канонических преобразований [31] приводят к одним и тем же результатам для модели (1.1). Критическая константа связи G_c , при которой происходит фазовый переход первого рода, масса частиц в фазе с нарушенной симметрией (BS) одинаковы во всех этих подходах.

Случай $N > 1$ (1.3) исследовался в рамках GER-аппроксимации [30], $1/N$ -разложения [41] и метода канонических преобразований

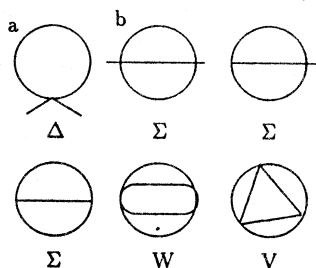


Рис.1. Расходящиеся диаграммы в R^3

[31]. Согласно работам [30,31] в системе имеется фазовый переход первого рода с нарушением симметрии. В BS-фазе имеется $(N-1)$ -мультиплет полей с ненулевыми массами. Вместе с тем $1/N$ -разложение не показывает какого-либо фазового перехода [41]. Это разногласие имеет естественное объяснение, приведенное в [30]. Применимость $1/N$ -разложения ограничена условием $NG < 1$ и, хотя GEP в пределе $N \gg 1$ совпадает с эффективным потенциалом $1/N$ -разложения, критическая точка G_c не видна в $1/N$ -разложении ($NG_c \gg 1$ при $N \gg 1$).

Теорема Голдстоуна запрещает спонтанное нарушение непрерывной симметрии в R^2 , поскольку частицы с нулевой массой в этом случае не существуют. Тем не менее два различных метода [30,31] указывают на нарушение $O(N)$ -симметрии, но «голдстоуновские частицы» имеют ненулевую массу.

Сложнее дело обстоит в трехмерном случае. Существенная разница между R^2 и R^3 заключается в структуре перенормировки рассматриваемых моделей. Разные методы отражают это в неодинаковой степени.

Вычисления Чанга [29] и Магрудера [20] прямо основаны на структуре перенормировки точного эффективного потенциала в рамках ТВ. В работах [29] и [20] установлено, что дискретная симметрия, спонтанно нарушенная при $G \ll 1$ в модели (1.2) в R^3 , восстанавливается с ростом G . Такая картина прямо противоположна ситуации в R^2 [19,33].

В то же время GEP-аппроксимация в моделях (1.1) — (1.3) в R^3 ведет к фазовой структуре, аналогичной двумерному случаю [30]. Это противоречит результатам Чанга и Магрудера.

6.1. Гамильтониан φ^4 в R^3 . Удобно рассмотреть модель со следующей плотностью лагранжиана:

$$L(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m^2) \varphi(x) - g_3 \varphi^3(x) - \frac{g_4}{4} \varphi^4(x), \quad (6.1)$$

где g_3 и g_4 — константы взаимодействия, $x = (x, t) = (x_1, x_2, t)$.

Плотность гамильтониана, соответствующая лагранжиану (6.1), имеет вид

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_I + H_{ct}, \\ H_0[\varphi, \pi] &= \frac{1}{2} : [\pi^2(x) + (\nabla \varphi(x))^2 + m^2 \varphi^2(x)] :, \\ H_I[\varphi, \pi] &= : \left[\frac{1}{4} g_4 \varphi^4(x) + g_3 \varphi^3(x) \right] :, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}x} + a^+(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}x}],$$

$$\pi(x) = \frac{1}{i} \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2}} [a(k) e^{ikx} - a^+(k) e^{-ikx}],$$

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad [a(k), a^+(k')] = \delta(k - k'). \quad (6.3)$$

Поля φ , π являются каноническими переменными и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\varphi(x), \pi(y)] = i\delta(x - y).$$

Операторы рождения и уничтожения (a^+ , a) действуют на пространстве Фока с вакуумным вектором, определенным выражением

$$a(k)|0\rangle = 0, \quad \forall k \in R^2. \quad (6.4)$$

Все операторы в (6.2) нормально упорядочены по отношению к вакууму (6.4). Модель суперперенормируема, имеется конечное число расходящихся диаграмм (рис.1). Для удаления этих расходимостей необходимо ввести в гамильтониан оператор H_{ct} , содержащий контрчлены. В схеме вычитаний при нулевом импульсе имеем:

$$H_{ct}(m) = \left[\frac{1}{2} A(m) \varphi^2(x) + C(m) \varphi(x) + \delta E(m) \right];$$

$$A(m) = 3! g_4^2 \Sigma_0(m), \quad C(m) = 3! g_3 g_4 \Sigma_0(m), \quad (6.5)$$

$$\delta E(m) = \frac{3}{4} g_4^2 W_0(m) - \frac{9}{2} g_4^3 V_0(m) + \frac{1}{2} 3! g_3^2 \Sigma_0(m).$$

Здесь и ниже индекс 0 обозначает нулевую температуру. Функции, фигурирующие в (6.5), имеют вид

$$\Sigma_0(m) = \frac{1}{(4\pi)^2} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-3ms},$$

$$W_0(m) = \frac{1}{(4\pi)^3} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-4ms}, \quad (6.6)$$

$$V_0(m) = \frac{1}{4(2\pi)^5} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \arctan^3 \left(\frac{s}{2m} \right).$$

Здесь подразумевается некоторая регуляризация.

6.2. Канонические преобразования. Произведем следующее каноническое преобразование:

$$\pi(x) \rightarrow \pi_f(x), \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi_f(x) + B, \quad (6.7)$$

где поля φ_t и π_t имеют вид (6.3), но с новой массой $M = mt$. Константа B имеет смысл вакуумного конденсата. Преобразование (6.7) можно представить в терминах операторов рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} a(k) &\rightarrow a(k, t) - 2\pi m B \delta(k) = U_2^{-1}(t) U_1^{-1}(B) a(k) U_1(B) U_2(t), \\ U_1(B) &= \exp \left\{ -2\pi m B \int dk \delta(k) [a(k) - a^+(k)] \right\}, \\ U_2(t) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dk \lambda(k, t) [a(-k) a(k) - a^+(k) a^+(-k)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

U_1 -преобразование сдвигает поле φ на константу B . Преобразование, обратное U_2 , можно представить в форме

$$\begin{aligned} a(k) &= a(k, t) \cosh(\lambda) + a^+(-k, t) \sinh(\lambda) \\ a^+(k) &= a^+(k, t) \cosh(\lambda) + a(-k, t) \sinh(\lambda). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Если параметр λ выбран следующим образом:

$$\lambda(k, t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega(k)}{\omega(k, t)} \right), \quad \omega(k, t) = \sqrt{k^2 + m^2 t^2},$$

то, используя (6.9), получаем представление полей φ_t, π_t с массой M в терминах операторов $a(k, t), a^+(k, t)$. Эти операторы действуют на пространстве Фока с вакуумным вектором, удовлетворяющим соотношениям

$$|0(t, B)\rangle = U_2^{-1}(t) U_1^{-1}(B) |0\rangle, \quad a(k, t) |0(t, B)\rangle = 0 \quad \forall k. \quad (6.10)$$

При $B \neq 0$ и $t \neq 1$ представления ККС, определенные уравнениями (6.4), (6.10), унитарно неэквивалентны.

Выразим плотность гамильтониана (6.2) в новых канонических переменных, перейдем к нормальному упорядочению операторов $(a(k, t), a^+(k, t))$ и введем контрчлены в соответствии с новым представлением свободного гамильтониана в рамках схемы вычитаний при нулевом импульсе. В результате получим

$$\begin{aligned} H &= H'_0 + H'_I + H'_{ct} + H_1 + E, \\ H'_0 &= \frac{1}{2} : [\pi_t^2(x) + (\nabla \varphi_t(x))^2 + M^2 \varphi_t^2(x)]:, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$H'_I = : \left[\frac{1}{4} h_4 \varphi_t^4(x) + h_3 \varphi_t^3(x) \right] :, \quad h_3 = g_3 + g_4 B, \quad h_4 = g_4.$$

Оператор H'_{ct} имеет структуру выражений (6.5), (6.6), где необходимо сделать замену:

$$\varphi \rightarrow \varphi_t, \quad m \rightarrow M, \quad g_3 \rightarrow h_3, \quad g_4 \rightarrow h_4.$$

Оператор H_1 имеет вид

$$H_1 = : \left[\frac{1}{2} R(t, B) \varphi_t^2(x) + P(t, B) \varphi_t(x) \right] :,$$

$$R = m^2 - M^2 + 3g_4(B^2 - D_0) + 6g_3B + 6g_4(\Sigma_0(m) - \Sigma_0(M)), \quad (6.12)$$

$$P = m^2B + g_4(B^3 - 3BD_0) + 3g_3(B^2 - D_0) + 6g_4(g_3 + g_4B)(\Sigma_0(M) - \Sigma_0(m)),$$

плотность энергии вакуума E :

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + E_3,$$

$$E_0 = \frac{1}{2} m^2 B^2 + L_0(t),$$

$$E_1 = \frac{1}{4} g_4(B^4 - 6D_0B^2 + 3D_0^2) + g_3(B^3 - 3D_0B),$$

$$E_2 = \frac{3}{4} g_4^2(W_0(m) - W_0(M) - 4D_0\Sigma_0(M)) +$$

$$+ 3(g_4B + g_3)^2(\Sigma_0(m) - \Sigma_0(M)),$$

$$E_3 = -\frac{9}{2} g_4^3(V_0(m) - V_0(M)), \quad (6.13)$$

$$D_0(t) = \Delta_0(0, m) - \Delta_0(0, M) =$$

$$= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{\omega(\mathbf{k})} - \frac{1}{\omega(\mathbf{k}, t)} \right] = \frac{m}{4\pi} (t - 1), \quad (6.14)$$

$$L_0(t) = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\omega(\mathbf{k}, t) - \omega(\mathbf{k}) - \frac{M^2 - m^2}{2\omega(\mathbf{k}, t)} \right] =$$

$$= \frac{m^3}{24\pi} (t - 1)^2 (2 + t). \quad (6.15)$$

Условие

$$H_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R(t, B) = 0 \\ P(t, B) = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

обеспечивает правильную форму гамильтониана H и определяет параметры t и B . С физической точки зрения это означает, что H описывает скалярные частицы с массой M , зависящей от константы связи. Эта зависимость определяется уравнениями (6.16) и (6.12). Вводя безразмерные переменные

$$G_4 = \frac{g_4}{2\pi m}, \quad G_3 = \frac{g_3}{m\sqrt{4\pi m}}, \quad b = B\sqrt{\frac{4\pi}{m}} \quad (6.17)$$

и пользуясь (6.12), представляем (6.16) в виде

$$-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}G_4(b^2 - t + 1) + 3G_3b + \frac{3}{4}G_4^2 \ln t = 0, \\ b + \frac{1}{2}G_4b(b^2 - 3t + 3) + 3G_3(b^2 - t + 1) + 3G_4\left(G_3 + \frac{G_4}{2}b\right) \ln t = 0. \quad (6.18)$$

Плотность энергии (6.13) конечна, ее явный вид можно найти в [32,33]. Решения уравнений (6.18) описывают возможные фазы теории. Система существует в той из них, которой соответствуют минимальные энергия и эффективная константа связи

$$G_{\text{eff}}(G) = \frac{G}{t(G)}. \quad (6.19)$$

6.3. Симметричная модель. Рассмотрим фазовую структуру теории с симметричным лагранжианом (1.1). Этот случай соответствует выбору: $G_4 = G$, $G_3 = 0$. Из (6.18) получаем уравнения для симметричной модели:

$$t^2 - 1 - \frac{3}{2}G(b^2 - t + 1) - \frac{3}{2}G^2 \ln t = 0, \\ b \left[1 + \frac{1}{2}G(b^2 - 3t + 3) + \frac{3}{2}G^2 \ln t \right] = 0. \quad (6.20)$$

Используя первое уравнение, для второго находим два решения: $b = 0$ (симметричное), $b^2 = t^2/G$ (несимметричное). Рассмотрим фазу с нарушенной симметрией.

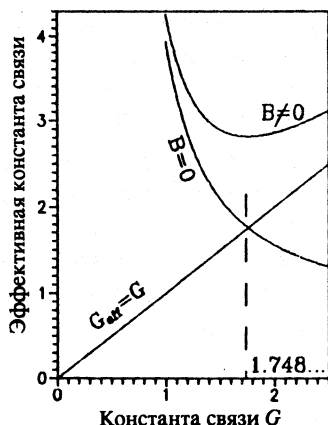
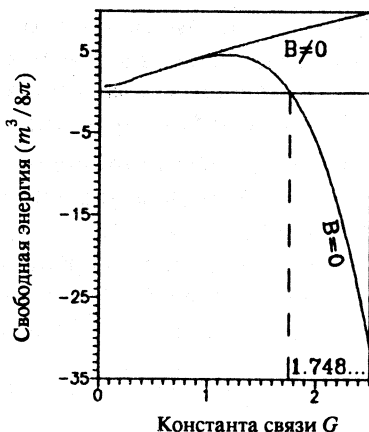
BS-фаза. В этом случае имеем

$$b^2 = \frac{t^2}{G}, \\ t^2 - 3Gt + 3G^2 \ln t + 2 + 3G = 0. \quad (6.21)$$

Второе из уравнений (6.21) при любых G имеет решение $t(G) < 1$, так что эффективная константа связи G_{eff} (рис.2) удовлетворяет неравенству

$$G_{\text{eff}}(G) > G \quad \forall G. \quad (6.22)$$

Плотность энергии в BS-фазе положительна для любых значений G (см. рис.3). Это указывает на то, что BS-фаза не реализуется в системе.


 Рис.2. Эффективные константы связи в модели (1.1) в R^3

 Рис.3. Плотность свободной энергии в модели (1.1) в R^3

S-фаза. Используя (6.20) с $b = 0$, получаем следующее уравнение для t :

$$2t^2 + 3Gt - 3G^2 \ln t - 2 - 3G = 0. \quad (6.23)$$

Прежде всего, видим, что (6.23) имеет два решения: $t_1(G) \equiv 1$ (соответствует исходному представлению (6.2)) и $t_2(G)$, причем

$$t_2 < 1, \text{ если } G < G_c, \quad t_2 \geq 1, \text{ если } G \geq G_c, \quad G_c = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{19}{3}} \right) = 1,758\dots$$

Поведение энергии как функции G показано на рис.3. Плотность энергии для решения t_2 отрицательна при $G > G_c$ и равна нулю для t_1 . Таким образом, точка G_c соответствует фазовому переходу из одной S-фазы в другую. В пределе сильной связи $G \gg 1$ масса, эффективная константа связи и плотность энергии ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} M(G) &= mG \sqrt{\frac{3}{2} \ln G} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln G}\right) \right], \\ G_{\text{eff}}(G) &= \sqrt{\frac{2}{3 \ln G}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln G}\right) \right] \ll 1, \\ \epsilon(G) &= -\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} G^2 \ln G \right)^{3/2} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln G}\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Из асимптотики (6.24) видно, что второе симметричное представление достаточно точно описывает систему в пределе сильной связи. В то же время при $G \sim 1$ ни одно из представлений не является приемлемым, т.к. $G_{\text{eff}} \sim 1$. Однако в любом случае справедливы следующие выводы.

- Нарушение симметрии отсутствует в модели (1.1) для любых G .
- Имеются две S-фазы и фазовый переход без перестройки симметрии имеет место при $G \approx 1,758$.

6.4. Модель с исходно нарушенной симметрией. Рассмотрим фазовую структуру модели (1.2). Уравнения для t и b получаются из (6.18) подстановкой $G_4 = G$, $G_3 = \sqrt{G}/2$. В результате получаем

$$t^2 - 1 - \frac{3}{2} G (b^2 - t + 1) - 3\sqrt{G}b - \frac{3}{2} G^2 \ln t = 0, \quad (6.25)$$

$$2b + Gb (b^2 - 3t + 1) + 3\sqrt{G} (b^2 - t + 1) + 3G\sqrt{G} (1 + \sqrt{G}b) \ln t = 0.$$

Та же подстановка должна быть сделана в (6.13) для плотности свободной энергии. Два решения для b следуют из (6.25):

$$b = -\frac{1}{\sqrt{G}} \quad (\text{симметричное}), \quad b = -\frac{1}{\sqrt{G}} \pm \frac{t}{\sqrt{G}} \quad (\text{несимметричное}).$$

BS-фаза. Второе уравнение (6.25) принимает вид

$$t^2 - 3Gt + 3G^2 \ln t - 1 + 3G = 0. \quad (6.26)$$

Это уравнение имеет единственное решение $t \equiv 1$, которое ведет к исходному представлению с SSB: $M = m$, $G_{\text{eff}} = G$, $E = 0$.

S-фаза. Для симметричного случая ($b = -1/\sqrt{G}$) получаем

$$2t^2 + 3Gt - 3G^2 \ln t + 1 - 3G = 0. \quad (6.27)$$

Можно убедиться, что уравнение (6.27) имеет вещественное решение только при $G \geq G_c = 2,817\dots$. Подставляя это решение в выражение для энергии (6.13), получаем функцию, представленную на рис.4. При $G \gg 1$ масса, эффективная константа связи и плотность свободной энергии имеют те же асимптотики (6.24), что и в случае симметричной модели. Они показывают, что описание является достаточно точным вне критической области. В то же время критическая точка G_c найдена весьма приблизительно, т.к. вблизи этой точки $G_{\text{eff}} \sim O(1)$ (см. рис.5). Поскольку

параметр порядка $\sigma = \pm \frac{t(G)}{\sqrt{G}}$ разрывен в точке G_c , то фазовый переход —

первого рода. Суммируем выводы:

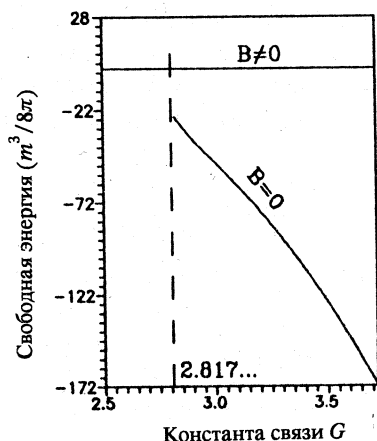


Рис. 4. Плотность свободной энергии в модели (1.2) в R^3

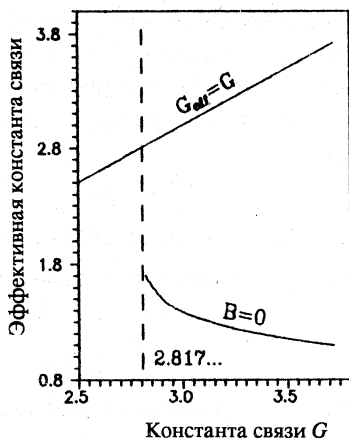


Рис. 5. Эффективные константы связи в модели (1.2) в R^3

1. Симметрия восстанавливается в системе (1.2), если константа связи достаточно велика.

2. Имеется фазовый переход между BS- и S-фазами в точке $G_c \sim 2,817\dots$

Эти выводы согласуются с результатами [20,29], но противоречат GER-аппроксимации. В двумерном случае, когда вариационный подход применим, метод канонических преобразований ведет к результатам, совпадающим с результатами GER-аппроксимации [19]. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим модель φ_2^4 [31].

6.5. Двумерная модель (1.1). Поскольку в этом случае расходятся только диаграмма рис.1,а и соответствующая вакуумная диаграмма, то в (6.12), (6.13) нужно учесть только слагаемые первого порядка по константе связи $g = g_4$ ($g_3 = 0$ для (1.1)). Согласно (6.16), (6.13) имеем

$$\begin{aligned} m^2 - M^2 + 3g(B^2 - D_0(t)) &= 0, \\ m^2 B + g(B^3 - 3BD_0(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$E = \frac{1}{2} m^2 B^2 + L_0(t) + \frac{1}{4} g(B^4 - 6D_0(t) B^2 + 3D_0^2(t)), \quad (6.29)$$

где $t = M^2/m^2$. Для двумерного случая функции D_0 и L_0 имеют вид

$$D_0(t) = \frac{1}{4\pi} \ln t, \quad L_0(t) = \frac{m^2}{8\pi} (t - 1 - \ln t).$$

Уравнения (6.28) определяют минимум $E(t, B)$ по переменным t и B и совпадают с условиями минимума GEP. Второе уравнение (6.28) имеет два решения: $B = 0$ (симметричное) и $B \neq 0$ (с нарушенной симметрией).

Симметричная фаза. Полагая $B = 0$ в первом уравнении (6.28), получаем

$$2(t - 1) = -3G \ln t, \quad G = \frac{g}{2\pi m^2}.$$

Имеется единственное решение $t \equiv 1$ с энергией вакуума $E_S \equiv 0$.

Фаза с нарушенной симметрией. В этом случае перепишем (6.28) в виде

$$B^2 = \frac{t}{2\pi G}, \quad t + 2 = 3G \ln t.$$

С учетом этих уравнений плотность энергии (6.29) принимает вид

$$E_B = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ t - 1 - \frac{t^2 + 2}{2(t + 2)} \ln t \right\}.$$

Можно показать, что $E_B(G) \leq 0$ при $G \geq G_0 = 1,625 \dots$. Критическое значение константы связи G_0 совпадает с результатом GEP [19]. В пределе сильной связи $G \gg 1$ получаем следующие асимптотики:

$$B^2 \rightarrow \frac{3}{4\pi} \ln G, \quad t \rightarrow 3G \ln G, \quad E_B \rightarrow -\frac{3m^2}{16\pi} G (\ln G)^2,$$

$$G_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{g}{2\pi M^2} \rightarrow \frac{1}{3 \ln G}, \quad G_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{g}{2\pi M^2} \sqrt{\sqrt{4\pi} B} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3 \ln G}}.$$

Более подробно двумерные модели (1.1), (1.2) мы обсудим в разд. 10.

7. $O(N)$ -ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ

7.1. Модель $(\varphi^2)^2$ в R^3 . Исследуем фазовую структуру модели (1.3). Плотность гамильтониана в представлении, соответствующем $G \ll 1$, имеет вид

$$H = H_0 + H_I + H_{ct},$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_i^N : [\pi_i^2 + (\nabla \varphi_i)^2 + m^2 \varphi_i^2] :, \quad H_I = \frac{g}{4} : \left[\sum_i^N \varphi_i^2 \right]^2 :,$$

$$H_{ct} = : \left[\frac{1}{2} A(m) \sum_i^N \varphi_i^2 + \delta E(m) \right] :,$$

$$A(m) = 2(N + 2) g^2 \Sigma_0(m),$$

$$\delta E(m) = \frac{1}{4} N(N+2) g^2 W_0(m) - \frac{1}{2} N(N+2)^2 V_0(m). \quad (7.1)$$

Функции Σ_0 , W_0 , V_0 — те же, что и в (6.6). Поля φ_i и π_i имеют вид (6.3) и удовлетворяют обычным ККС:

$$[\varphi_i(x), \pi_j(y)] = i\delta_{ij}\delta(x-y).$$

Состояния системы описываются пространством Фока с вакуумным вектором $|0\rangle$:

$$a_j(k)|0\rangle = 0, \quad \forall j, k, \quad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Гамильтониан (7.1) взят в форме нормального произведения относительно вакуума $|0\rangle$.

7.2. Каноническое преобразование. В полной аналогии с тем, как мы поступали в случае однокомпонентного поля, произведем каноническое преобразование вида

$$(\varphi_i, \pi_i) \rightarrow (\Phi_i, \Pi_i), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$(\varphi_N, \pi_N) \rightarrow (\Phi + B, \Pi).$$

Здесь (Φ_i, Π_i) — мультиплет полей с массой $M_0 = mt_0$, (Φ, Π) — поля с массой $M = mt$, B — константа. Операторная форма этих преобразований имеет вид, аналогичный (6.8) — (6.9). Поля (Φ_i, Π_i) и (Φ, Π) имеют вид (6.3), но с новыми массами M_0 и M и новыми операторами рождения и уничтожения (α_i^+, α_i) , действующими на пространстве Фока с вакуумным вектором $|0\rangle$:

$$\alpha_i(k)|0\rangle = 0, \quad \forall i, k.$$

Это новое пространство Фока унитарно неэквивалентно исходному.

В новых переменных гамильтониан, нормально упорядоченный относительно вакуума $|0\rangle$, в схеме перенормировки при нулевом внешнем импульсе принимает вид

$$H = H'_0 + H'_I + H'_{ct} + H_1 + E,$$

$$H'_0 = \frac{1}{2} : \left[\sum_i^{N-1} (\Pi_i^2 + (\nabla\Phi_i)^2 + M_0^2\Phi_i^2) + \Pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + M^2\Phi^2 \right] :,$$

$$H'_I = \frac{g}{4} : \left[\Phi^4 + 4B\Phi^3 + 4B\Phi \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + 2\Phi^2 \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + \left(\sum_i^{N-1} \Phi_i^2 \right)^2 \right] :,$$

$$H'_{ct} = : \left[\frac{1}{2} A_{\Phi}(M, M_0) \Phi^2 + \frac{1}{2} A_{\Phi_i}(M, M_0) \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + \right. \\ \left. + C(M, M_0) \Phi + \delta E(M, M_0) \right] :,$$

$$H_1 = : \left[\frac{1}{2} R(B, M, M_0) \Phi^2 + \frac{1}{2} P(B, M, M_0) \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + Q(B, M, M_0) \Phi \right] :,$$

$$R(B, M, M_0) = m^2 - M^2 - g(3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)) + 3gB^2 + \\ + A(m) - A_{\Phi}(M, M_0),$$

$$P(B, M, M_0) = m^2 - M_0^2 - g(3D_0(t) + (N+1)D_0(t_0)) + gB^2 + \\ + A(m) - A_{\Phi_i}(M, M_0),$$

$$Q(B, M, M_0) = m^2 B + gB^3 - gB(3D_0(t) - (N+1)D_0(t_0)) + \\ + BA(m) - C(M, M_0),$$

$$E = \frac{m^2}{2} B^2 + \frac{g}{4} B^4 + L_0(t_0) + \frac{g}{4} \{ -2[3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)] B^2 + \\ + 3D_0^2(t) + (N-1)D_0^2(t_0) + 2(N-1)D_0(t)D_0(t_0) \} + \\ + \frac{1}{2} A(m)B^2 - \frac{1}{2} A(m)[D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)] + \delta E(m) - \delta E(M, M_0).$$

Здесь введены обозначения:

$$A_{\Phi} = 2g^2 [3\Sigma_0(M) + (N-1)\Sigma_0^1(M, M_0)],$$

$$A_{\Phi_i} = 2g^2 [3\Sigma_0^1(M_0, M) + (N+1)\Sigma_0^1(M_0)],$$

$$C = 2g^2 B [3\Sigma_0(M) + (N+1)\Sigma_0^1(M, M_0)],$$

$$\delta E(M, M_0) = \delta E_1 + \delta E_2 + \delta E_3,$$

$$\delta E_1 = g^2 B^2 [3\Sigma_0(M) + (N-1)\Sigma_0^1(M, M_0)],$$

$$\delta E_2 = \frac{1}{4} g^2 [3W_0(M) + (N^2 - 1) W_0(M_0) + 2(N - 1) W_0^1(M, M_0)],$$

$$\delta E_3 = -\frac{1}{2} g^3 [9V_0(M) + (N - 1)(N + 1)^2 V_0(M_0) + \\ + 3(N - 1) V_0^1(M_0, M) + 3(N - 1)^2 V_0^1(M, M_0) + 8(N - 1) V_2(M, M_0)],$$

D_0, L_0, Σ_0, W_0 и V_0 уже встречались в (6.6), (6.14), а остальные расходящиеся интегралы равны

$$\Sigma_0^1(M, M_0) = \frac{1}{(4\pi)^2} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \{-s(M + 2M_0)\},$$

$$W_0^1(M, M_0) = \frac{1}{(4\pi)^3} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp \{-2s(M + M_0)\},$$

$$V_0^1(M, M_0) = \frac{1}{4(2\pi)^5} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \arctan \left(\frac{s}{2M_0} \right) \arctan^2 \left(\frac{s}{2M} \right),$$

$$V_0^2(M, M_0) = \frac{1}{4(2\pi)^5} \text{reg} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \arctan^3 \left(\frac{s}{M + M_0} \right).$$

Соответствие между расходящимися интегралами и диаграммами иллюстрируется рис.6. Вид плотности энергии в терминах безразмерных переменных (6.17) приведен в [32].

Потребуем, чтобы $H_1 = 0$. Это требование обеспечивает правильную форму гамильтониана и дает уравнения на параметры t, t_0, B . В безразмерных переменных эти уравнения имеют вид

$$3Gb^2 - 2f(1 + 2f) - 3Gf - (N - 1) Gf_0 + 3G^2 \ln t + \\ + (N - 1) G^2 \ln \left(\frac{t + 2t_0}{3} \right) = 0, \\ Gb^2 - 4f_0 \left(1 + \frac{f_0}{2} \right) - Gf - (N + 1) Gf_0 + \\ + (N + 1) G^2 \ln t_0 + G^2 \ln \left(\frac{t_0 + 2t}{3} \right) = 0, \quad (7.2)$$

$$b \left[2 + Gb^2 - 3Gf - (N - 1) Gf_0 + 3G^2 \ln t + \right. \\ \left. + (N - 1) G^2 \ln \left(\frac{t + 2t_0}{3} \right) \right] = 0,$$

где $f = t - 1, f_0 = t_0 - 1$. Все логарифмические слагаемые в уравнениях (7.2) появились из-за перенормировки в порядке G^2 .

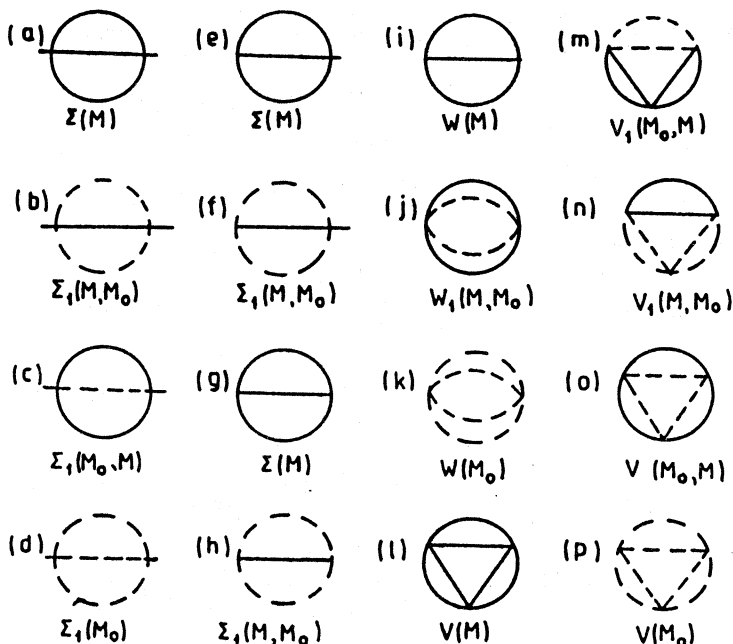


Рис. 6. Расходящиеся вакуумные диаграммы: сплошная линия — поле Φ , пунктирная — Φ_i ; диаграммы (a, b) дают вклад в A_Φ ; (c, d) — A_{Φ_i} ; (e, f) — C ; (g, h) — δE_1 ; (i-k) — δE_2 ; (l-p) — δE_3

7.3. Фазовая структура. Имеются следующие возможные фазы:

$S_1(B = 0, M = M_0 = m, O(N) \text{ — симметричная})$

$S_2(B = 0, M = M_0 \neq m, O(N) \text{ — симметричная})$

$BS_1(B = 0, M \neq M_0, O(N-1) \text{ — и } \Phi \rightarrow -\Phi \text{ симметричная})$

$BS_2(B \neq 0, M \neq M_0, O(N-1) \text{ — симметричная}).$

Эти фазы соответствуют различным решениям системы (7.2). $O(N)$ -симметричные фазы определяются условиями: $b = 0, t_0 = t$. Используя эти условия в (7.2), получаем следующее уравнение ($f = t - 1$):

$$2f(2 + f) + (N + 2)Gf - (N + 2)G^2 \ln(1 + f) = 0. \quad (7.3)$$

S_1 -фаза с $M_0 = M = m$. Уравнение (7.3) имеет тривиальное решение $f \equiv 0$ ($t \equiv 1$) при любых G , которое соответствует исходному представле-

Рис.7. Плотность свободной энергии в модели (1.3) в R^3 ($N = 4$)

нию. Энергия, масса и эффективная константа связи ($\equiv G$) показаны на рис.7—9 сплошной линией.

S_2 -фаза с $M_0 = M \neq m$. Чтобы исключить решение $t \equiv 1$, перепишем (7.3) в виде

$$2 + 2t + (N + 2)G = (N + 2)G^2 \frac{\ln t}{t - 1}. \quad (7.4)$$

Это уравнение имеет единственное решение для любых G . Критическое значение $G = G_0$, при котором происходит переход

из одной S -фазы в другую, определяется из условия равенства нулю энергии в фазе с массой M . Это имеет место при $t = 1$. Подставляя $t = 1$ в (7.4), находим

$$G_0 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{N + 18}{N + 2}} \right]. \quad (7.5)$$

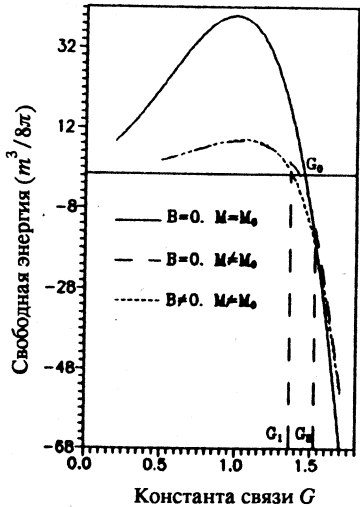
Асимптотики для режима сильной связи $G \gg 1$ имеют вид

$$t(G) \rightarrow \sqrt{\frac{N + 2}{2}} G \sqrt{\ln G}, \quad G_{\text{eff}}(G) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{(N + 2) \ln G}} \ll 1, \quad (7.6)$$

$$E(G) \rightarrow -\frac{m^3}{8\pi} N(N + 2) \sqrt{\frac{N + 2}{2}} G^3 \ln^{3/2}(G).$$

Функции $E(G)$, $t(G)$ и $G_{\text{eff}}(G)$ при промежуточных G показаны на рис.7—9.

BS_1 : расщепление масс при нулевом конденсате $b = 0$. Нарушение $O(N)$ -инвариантности только за счет расщепления масс в мультиплете $M \neq M_0$ соответствует $b = 0$, $t \neq t_0$. Гамильтониан в этой фазе инвариантен относительно группы $O(N - 1)$ и дискретного преобразования $\Phi \rightarrow -\Phi$. Эта фаза описывается системой (7.3) с $b = 0$. Чтобы исключить из (7.3) решение $t = t_0$, удобно ввести переменную $r = t_0/t$, вычест второе уравнение из первого и разделить результат на $1 - r$. Таким образом, получается следующая система уравнений:



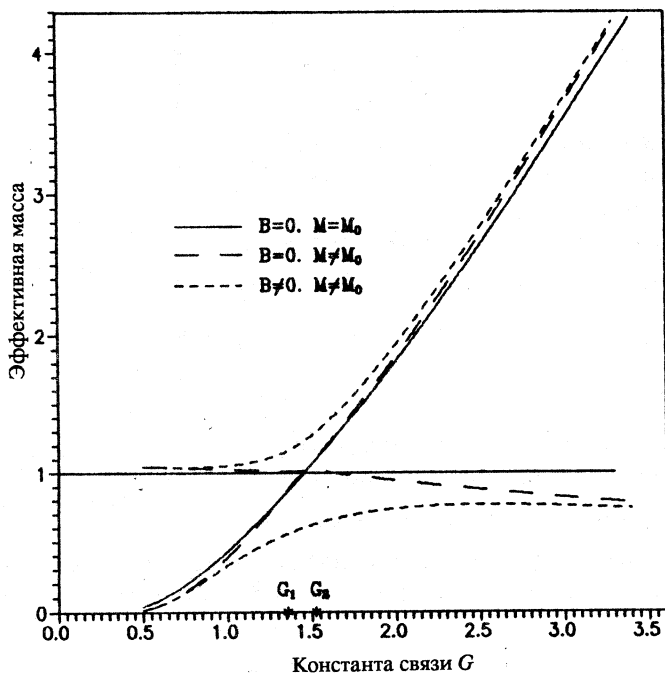


Рис.8. Масса в различных фазах ($N = 4$): верхняя и нижняя пунктирные линии — M_0 и M в BS-фазах соответственно; сплошная линия — M в S-фазах

$$\begin{aligned}
 & 2(r+1)t^2 + 2Gt - (N+1)G^2 \frac{\ln r}{1-r} + \\
 & + (N-1)G^2 \frac{\ln \left(\frac{1+2r}{3} \right)}{1-r} - G^2 \frac{\ln \left(\frac{2+r}{3} \right)}{1-r} = 0, \\
 & 2 + (N+2)G - rt(2rt + (N+1)G) - Gt + \\
 & + (N+2)G^2 \ln(rt) + G^2 \ln \left(\frac{r+2}{3r} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим асимптотики при $G \gg 1$:

$$\begin{aligned}
 t_0 & \rightarrow \sqrt{\frac{N+2}{2}} G \sqrt{\ln G}, \quad t \rightarrow \sqrt{\frac{N+2}{2}} G^{\frac{1-N}{3}} \sqrt{\ln G}, \\
 G_{\text{eff}}^0 & = \frac{G}{t_0(G)} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(N+2) \ln G}} \ll 1,
 \end{aligned}$$

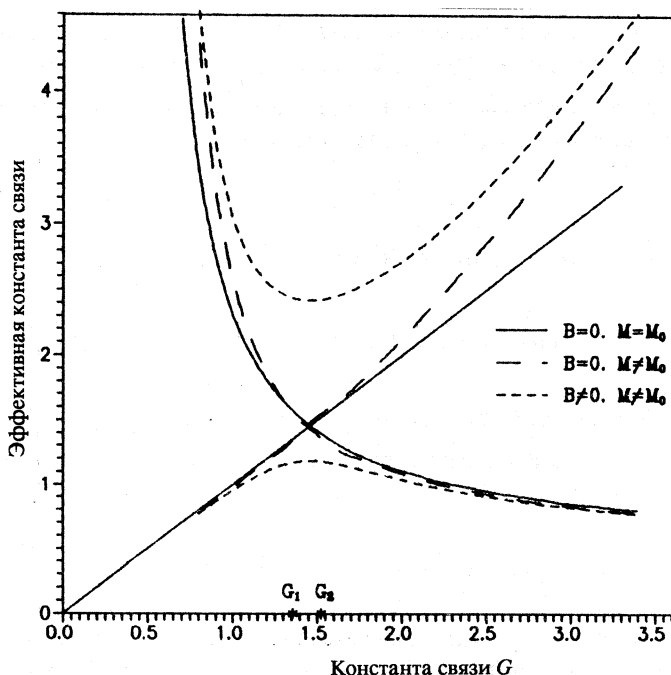


Рис.9. Эффективные константы связи в различных фазах ($N=4$): верхняя и нижняя пунктирные линии — G_{eff} и $G_{\text{eff}}^{(0)}$ в BS-фазах соответственно; сплошная линия — G_{eff} в S-фазах

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{t(G)} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(N+2) \ln G}} G^{\frac{N+2}{3}} \gg 1, \quad (7.7)$$

$$E \rightarrow -\frac{m^3}{24\pi} (N^2 + 3N - 4) \sqrt{\frac{N+2}{2}} G^3 \sqrt{\ln^3 G}.$$

Энергия, массы и эффективные константы связи как функции G приведены на рис.7—9.

BS₂: фаза с расщеплением масс и $b \neq 0$. Последнее уравнение системы (7.2) имеет ненулевое решение для b :

$$Gb^2 = -2 + (N-2)G + 3Gt + (N-1)Gt_0 - 3G^2 \ln t - (N-1)G^2 \ln \left(\frac{t+2t_0}{3} \right). \quad (7.8)$$

Соответствующая этому решению фаза $O(N-1)$ -инвариантна и характеризуется расщеплением масс $M \neq M_0$ и ненулевым конденсатом $B \neq 0$. Она описывается первыми двумя уравнениями системы (7.2) и уравнением (7.8), которые удобно представить в виде

$$b^2 = \frac{t^2}{G},$$

$$-2r^2 t^2 + 2G(1-r)t + 3G^2 \ln r + G^2 \ln \left(\frac{2+r}{3r} \right) - (N-1)G^2 \ln \left(\frac{1+2r}{3r} \right) = 0,$$

$$(1-2r^2)t^2 - (N+1)Grt - Gt + 2 + (N+2)G^2 \ln(rt) + G^2 \ln \left(\frac{2+r}{3r} \right) = 0,$$

где $r = t_0/t$. Асимптотическое поведение функций t , t_0 , G_{eff} , G_{eff}^0 и E (см. рис.7—9) то же, что и в предыдущем случае (7.7). Конденсат $b(G)$ при $G \gg 1$ имеет вид

$$b(G) \rightarrow \sqrt{\frac{N+2}{2}} G^{-(2N+1)/6} \sqrt{\ln G}.$$

Существенный момент, касающийся обеих фаз с нарушенной симметрией, состоит в том, что масса M_0 полей Φ_i , принадлежащих $O(N-1)$ -мультиплету, больше массы M поля Φ (см. рис.8). Это противоречит теореме Голдстоуна: «голдстоуновские бозоны» Φ_i должны иметь нулевую массу. Заметим, что уравнения (7.2) имеют и решения $M_0 < M$, но энергии, соответствующие этим решениям, положительны и увеличиваются с ростом G .

Из асимптотик (7.6), (7.7) следует, что в режиме сильной связи реализуется S_2 -фаза, поскольку только в ней эффективная константа связи убывает с ростом G . Сравнение асимптотик энергий подтверждает этот вывод. Для любого N энергия S_2 -фазы меньше энергий остальных фаз. Переход между первой (исходной) и второй симметричными фазами происходит в точке G_0 (см. (7.5)).

Более детальная, хотя и приближительная (эффективные константы связи порядка единицы), информация следует из сравнения энергий. Из рис.7 видно, что возможны фазовые переходы со следующей перестройкой симметрии:

$$O(N) \rightarrow O(N-1) \rightarrow O(N).$$

Система переходит из исходной S_1 -фазы в BS_2 с $B \neq 0$, а затем в S_2 -фазу с $M \neq m$. Например, при $N=4$ критические константы связи равны:

$G_1 = 1,357\dots, G_2 = 1,525\dots$. Качественно эта картина не зависит от N : $G_1 < G_0 < G_2 \forall N$.

В любом случае справедливо следующее. При $G \ll 1$ и $G \gg 1$ система существует в первой и второй симметричных фазах соответственно. Вакуум и гамильтониан $O(N)$ -инвариантны, а эффективное взаимодействие слабо.

7.4. Модель $(\varphi^2)^2$ в R^2 .

Как и в случае однокомпонентного поля, GEP-аппроксимация [30] и метод канонических преобразований [31] ведут к одинаковому результату для модели (1.3) в R^2 .

В этом случае расходятся только диаграммы первого порядка по константе связи (рис.1,а), так что в двумерном пространстве-времени из требования $H_1 = 0$ получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} m^2 - M^2 - g(3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)) + 3gB^2 &= 0, \\ m^2 - M_0^2 - g(3D_0(t) + (N+1)D_0(t_0)) + gB^2 &= 0, \\ m^2B + gB^3 - gB(3D_0(t) - (N+1)D_0(t_0)) &= 0, \end{aligned} \quad (7.9)$$

а выражение для плотности энергии имеет вид

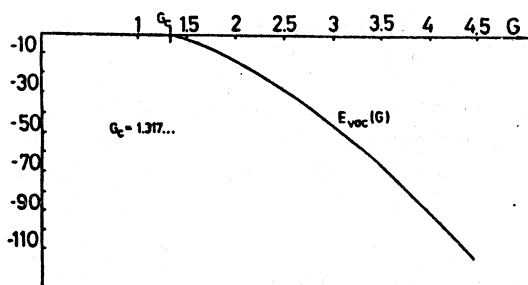
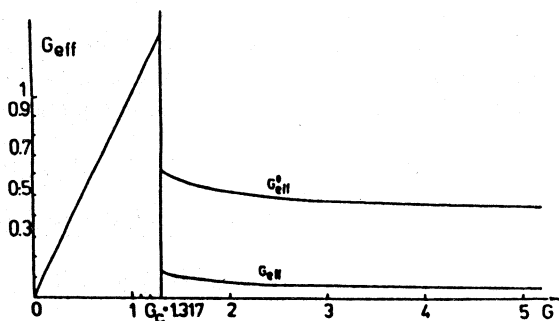
$$\begin{aligned} E = \frac{m^2}{2} B^2 + \frac{g}{4} B^4 + (N-1)L_0(t_0) + L_0(t) + \\ + \frac{g}{4} \left\{ -2[3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0)]B^2 + 3D_0^2(t) + \right. \\ \left. + (N-1)D_0^2(t_0) + 2(N-1)D_0(t)D_0(t_0) \right\}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$D_0(t) = \frac{1}{4\pi} \ln t, \quad L_0(t) = \frac{m^2}{8\pi} (t - 1 - \ln t),$$

где $t = M^2/m^2$, $t_0 = M_0^2/m^2$. Уравнения (7.9) определяют минимум энергии (7.10) как функции (t, t_0, B) и совпадают с уравнениями, минимизирующими GEP.

Решение $B = 0$ третьего уравнения (7.9) ведет к исходному симметричному представлению с $M \equiv M_0 \equiv m$ и $E \equiv 0$. Других симметричных решений в отличие от трехмерного случая нет. Нетривиальное решение последнего уравнения (7.9) имеет вид

$$B^2 = 3D_0(t) + (N-1)D_0(t_0) - \frac{m^2}{g}.$$

Рис.10. Эффективные константы связи для модели (1.3) в R^2 Рис.11. Плотность энергии вакуума для модели (1.3) в R^2

Подставляя его в оставшиеся уравнения, находим

$$t+2=G(3 \ln t+(N-1) \ln t_0), \quad t_0=G \ln \left(\frac{t}{t_0} \right),$$

где $G = g/2\pi m^2$. Критическая константа связи определяется из условия $E(G_c) = 0$. Для $N = 4$ она равна $G_c = 1,317\dots$. Зависимость энергии от G представлена на рис.10. При $G \gg 1$ имеем

$$t(G) \rightarrow (N+2)G \ln G, \quad t_0(G) \rightarrow G \ln \ln G, \quad E_B(G) \rightarrow -\frac{m^2}{8\pi} \frac{3}{4} G \ln^2 G,$$

$$G_{\text{eff}}(G) = \frac{g}{2\pi M^2} \rightarrow \frac{1}{(N+2) \ln G}, \quad G_{\text{eff}}^0(G) = \frac{g}{2\pi M_0^2} \rightarrow \frac{1}{\ln \ln G}.$$

Эффективные константы связи как функции G при $N = 4$ показаны на рис.11.

Из рис.10,11 видно, что точка G_c является критической и соответствует фазовому переходу с нарушением симметрии. Поскольку параметр порядка B разрывен в точке G_c , то происходит фазовый переход первого рода. Все эти выводы совпадают с результатами GEP-аппроксимации (см. [30]).

8. СТАБИЛЬНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫБОРА СХЕМЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ИСХОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В этом разделе мы будем исследовать стабильность результатов, полученных в разд.6, относительно выбора R-схемы. Прежде всего, приведем задачу к виду, удобному для этой цели. Лагранжиан (1.1) запишем в виде

$$L = \frac{1}{2} \varphi(x) (\square - m_B^2) \varphi(x) - \frac{1}{4} g \varphi^4(x),$$

где $m_B^2 = m^2(\mu) + \delta m^2(\mu)$, а $m(\mu)$ и $\delta m(\mu)$ — перенормированная масса и массовый контрчлен в некоторой фиксированной R-схеме (см. п.3.1). Параметром теории является безразмерная константа связи $G = g/2\pi m(\mu)$. Плотность гамильтониана в представлении с массой $m(\mu)$ имеет вид

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_I + H_{ct}, \\ H_0 &= \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2(\mu) \varphi^2], \quad H_I = \frac{1}{4} g \varphi^4, \\ H_{ct} &= \frac{1}{2} \delta m^2(\mu) \varphi^2. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Операторы φ и π удовлетворяют обычным ККС.

Произведем каноническое преобразование к представлению с новой массой $M = m(\mu)t$ и конденсатом $B = \text{const}$:

$$(\varphi, \pi) \rightarrow (\Phi + B, \Pi), \quad (8.2)$$

сопроводив его компенсирующим ренормгрупповым преобразованием (см. п.4.4): $\mu \rightarrow \nu = \mu t$, с тем чтобы обеспечить условие эквивалентности R-схем в разных представлениях:

$$\frac{m(\mu)}{\mu} = \frac{M}{\nu}. \quad (8.3)$$

В новом представлении плотность гамильтониана принимает вид

$$\begin{aligned} H &= H'_0 + H'_I + H'_{ct} + H_1, \\ H'_0 &= \frac{1}{2} [\Pi^2 + (\nabla\Phi)^2 + M^2\Phi^2], \quad H'_I = \frac{1}{4} g (\Phi^4 + 4B\Phi^3), \\ H'_{ct} &= \frac{1}{2} \delta m^2(\mu t) \Phi^2 + \delta m^2(\mu t) B\Phi, \\ H_1 &= \frac{1}{2} [m^2(\mu t) + 3gB^2 - M^2] \Phi^2 + [m^2(\mu t) + gB^2] B\Phi. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Чтобы обеспечить правильную форму гамильтониана, положим $H_1 = 0$, что ведет к следующим уравнениям на B и t :

$$m^2(\mu t) + 3gB^2 - m^2(\mu)t^2 = 0, \quad (8.5)$$

$$B[m^2(\mu t) + gB^2] = 0.$$

Будем исследовать R-схемную зависимость уравнений (8.5). В случае симметричного решения $B = 0$ первое уравнение (8.5) принимает вид

$$m^2(\mu t) = t^2 m^2(\mu). \quad (8.6)$$

Решим это уравнение, вычисляя массу $m(\mu t)$ в различных R-схемах.

8.1. Схема вычитаний при нулевом импульсе с произвольной «массой». В этой схеме массовые контрчлены даются диаграммами (см. рис.1, а, б) с нулевым внешним импульсом и произвольной «массой» μ в пропагаторах. Это один из возможных в $(\varphi^4)_3$ способов ввести масштаб μ . Положим

$$m_B^2 = \bar{m}^2(\mu) + \delta\bar{m}_a^2(\mu) + \delta\bar{m}_b^2(\mu), \quad (8.7)$$

где $\delta\bar{m}_a^2(\mu)$ и $\delta\bar{m}_b^2(\mu)$ соответствуют диаграммам а и б рис.1. Эти контрчлены легко вычисляются:

$$\delta\bar{m}_a^2(\mu) = -3g\Delta_{\text{reg}}(\mu), \quad \delta\bar{m}_b^2(\mu) = 3!g^2\Sigma_{\text{reg}}(\mu),$$

$$\Delta_{\text{reg}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \text{reg} \int_0^\infty \frac{du u^2}{u^2 + \mu^2}, \quad (8.8)$$

$$\Sigma_{\text{reg}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \text{reg} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp\{-3\mu t\}.$$

Пусть в исходном представлении используется обычная схема перенормировки при нулевом импульсе, которая соответствует частному выбору параметра μ , равного перенормированной массе m , т.е. условие

$$\bar{m}(m) = m \quad (8.9)$$

фиксирует стандартную схему вычитаний при нулевом импульсе в рамках R-схемы с произвольным μ . Уравнение (8.6) принимает вид

$$\bar{m}^2(mt) = t^2 m^2. \quad (8.10)$$

Используя R-инвариантность затравочной массы m_B и (8.9), находим

$$\bar{m}^2(\mu) = m^2 \left[1 + \frac{3}{2} G \left(1 - \frac{\mu}{m} \right) + \frac{3}{2} G^2 \ln \left(\frac{\mu}{m} \right) \right], \quad (8.11)$$

где $G = g/2\pi m$. Используя (8.11) с $\mu = mt$ в (8.10), получаем уравнение (6.23).

8.2. Размерная регуляризация: MS-схема. Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = 3 - d, \quad \alpha = \frac{g}{2\pi}, \quad m_B^2 = m^2(\mu) + \delta m_a^2 + \delta m_b^2, \quad (8.12)$$

$m(\mu)$ — бегущая масса в MS-схеме. Проводя стандартные вычисления для диаграммы рис.1,а находим

$$\delta m_a^2 = -3gm(\mu) \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{2\pi\mu}{m(\mu)} \right)^\varepsilon \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right).$$

Полагая $d = 3$, получаем конечный результат

$$\delta m_a^2 = \frac{3}{2} \alpha m(\mu), \quad (8.13)$$

что является естественным для размерной регуляризации в случае нечетной размерности «физического» пространства-времени. Вычисление диаграммы рис.1,б при нулевом внешнем импульсе дает

$$\Sigma_{\text{reg}} = \frac{3}{4} \alpha^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2(\mu)} \right) - \gamma_E + O(\varepsilon) \right]. \quad (8.14)$$

В MS-схеме только расходящаяся часть этого выражения включается в контрчлен:

$$\delta m_b^2 = \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{1}{\varepsilon}. \quad (8.15)$$

Подставляя (8.13), (8.15) в (8.12), получаем

$$m_B^2 = m^2(\mu) + \frac{3}{2} \alpha m(\mu) + \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{1}{\varepsilon}. \quad (8.16)$$

Перейдем в (8.16) к новому масштабу ν . В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$m^2(\nu) + \frac{3}{2} \alpha m(\nu) - \frac{3}{2} \alpha^2 \ln \left(\frac{\nu}{\mu} \right) - m^2(\mu) - \frac{3}{2} \alpha m(\mu) = 0 \quad (8.17)$$

с очевидным условием

$$m(\nu) \big|_{\nu=\mu} = m(\mu). \quad (8.18)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее (8.18), имеет вид

$$m(\nu) = -m(\mu) - \frac{3}{2} \alpha + \sqrt{\left[2m(\mu) + \frac{3}{2} \alpha \right]^2 + 6\alpha^2 \ln \left(\frac{\nu}{\mu} \right)}. \quad (8.19)$$

Полагая в (8.17) $\nu = \mu t$ и $m(\nu) = m(\mu)t$, получаем уравнение, совпадающее с (6.23). Таким образом, в обоих случаях функция $t(\cdot)$ оказывается одинаковой, в то время как бегущие массы $\bar{m}(\nu)$ и $m(\nu)$ совершенно различны (см. (8.11), (8.19)).

8.3. Размерная регуляризация: вычитания при нулевом импульсе. Включим в контрчлен δm_b^2 не только полюсное слагаемое выражения (8.14), но и его конечную часть. Затравочная масса принимает вид

$$m_B^2 = \tilde{m}^2(\mu) + \frac{3}{2} \alpha \tilde{m}(\mu) + \frac{3}{4} \alpha^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu}{\tilde{m}^2(\mu)} \right) \right]. \quad (8.20)$$

Стандартным образом переходя в (8.20) к новому масштабу ν , получаем уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{m}^2(\nu) - \tilde{m}^2(\mu) + \frac{3}{2} \alpha [\tilde{m}(\nu) - \tilde{m}(\mu)] - \\ - \frac{3}{2} \alpha^2 \ln \left(\frac{\nu}{\mu} \right) + \frac{3}{4} \alpha^2 \ln \left(\frac{\tilde{m}^2(\mu) \nu^2}{\tilde{m}^2(\nu) \mu^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Видим, что бегущая масса $\tilde{m}$, определяемая уравнением (8.21), отличается от $\bar{m}$ и m (см. (8.11), (8.19)). Тем не менее подстановка

$$\nu = \mu t, \quad \tilde{m}(\nu) = \tilde{m}(\mu) t$$

в (8.21) дает уравнение, совпадающее с (6.23).

Вышеприведенные вычисления позволяют заключить, что, хотя бегущая масса зависит от R-схемы очень сильно, уравнение на параметр t более стабильно относительно выбора схемы перенормировки.

9. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ φ^4 -ТЕОРИЯ

9.1. Гамильтониан $(\varphi^4)_4$ и канонические преобразования. Плотность гамильтониана, описывающего систему (1.1), (2.1) в режиме слабой связи, имеет вид (2.3). Канонические переменные φ и π можно представить в виде (2.4). Они удовлетворяют обычным ККС. Операторы рождения $a^+(k)$ и уничтожения $a(k)$, через которые выражаются φ и π , определены на пространстве Фока частиц с массой $m(\mu)$ и вакуумным вектором $|0\rangle$, удовлетворяющим условиям:

$$a(k)|0\rangle = 0 \quad \forall k, \quad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Схема перенормировки в (2.3) фиксирована, т.е. выбран определенный R_μ -класс и фиксировано отношение $C = m(\mu)/\mu$.

Представление (2.3) соответствует $g(\mu) \ll 1$. Имея это в виду, мы хотим знать, что представляет собой система в режиме сильной связи $g(\mu) \gg 1$.

Произведем следующее каноническое преобразование:

$$(\varphi, \pi) \rightarrow \left(\frac{1}{\xi} \Phi + \frac{1}{\xi} B, \xi \Pi \right). \quad (9.1)$$

Здесь (Φ, Π) — поля с массой $M = tm(\mu)$, B — константа. Согласно требованию эквивалентности R-схем в разных представлениях (см. п.4.4) каноническое преобразование к новой массе M сопровождается компенсирующим изменением точки перенормировки $\mu \rightarrow \nu = \mu$, вследствие чего в (9.1) появляется константа конечной перенормировки поля ξ . Явный вид канонического преобразования (9.1) в терминах операторов рождения и уничтожения приведен в (4.8), (4.9). Поля (Φ, Π) удовлетворяют ККС. При $t \neq 1$ и $B \neq 0$ они определены на пространстве Фока, унитарно неэквивалентном исходному.

Плотность гамильтониана в новом представлении принимает вид

$$\begin{aligned} H &= H'_0 + H'_I + H'_{ct} + H_1, \\ H'_0 &= \frac{1}{2} [\Pi^2 + (\nabla \Phi)^2 + M^2 \Phi^2], \quad H'_I = \frac{1}{4} g(\nu) [\Phi^4 + 4B\Phi^3], \\ H'_{ct} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{Z'_2} - 1 \right) \Pi^2 + (Z'_2 - 1) (\nabla \Phi)^2 \right] + \frac{1}{2} [\delta m^2(\nu) + 3(Z'_1 - 1)g(\nu)B^2] \Phi + \\ &+ \frac{1}{4} (Z'_1 - 1) g(\nu) (\Phi^4 + 4B\Phi^3) + [\delta m^2(\nu) + (Z'_1 - 1) g(\nu)B^2] B\Phi, \quad (9.2) \\ H_1 &= \frac{1}{2} [m^2(\nu) + 3g(\nu)B^2 - M^2] \Phi^2 + [m^2(\nu) + g(\nu)B^2] B\Phi. \end{aligned}$$

Здесь $\nu = \mu$, $M = tm(\mu)$. Для получения правильной формы гамильтониана положим $H_1 = 0$, что ведет к уравнениям

$$\begin{aligned} m^2(\mu t) + 3g(\mu t) B^2 - m^2(\mu) t^2 &= 0, \\ B [m^2(\mu t) + g(\mu t) B^2] &= 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Величины $m(\mu t)$ и $g(\mu t)$ связаны с $m(\mu)$ и $g(\mu)$ масштабным преобразованием и определяются РГ-уравнениями (3.2) с $\nu = \mu$ и граничными условиями:

$$g(\mu t) = g(\mu) \text{ при } t = 1, \quad m(\mu t) = m(\mu) \text{ при } t = 1. \quad (9.4)$$

Уравнения (9.3), (9.4) описывают в общем виде фазовую структуру $(\varphi^4)_4$ -теории в произвольной схеме перенормировки. Эти уравнения сводят проблему фазовой структуры к свойствам РГ-функций.

9.2. Симметричная фаза. Полагая $B = 0$, получаем уравнение для t :

$$m^2(\mu t) = t^2 m^2(\mu). \quad (9.5)$$

Заметим, что (9.5) имеет ту же форму, что и соответствующее уравнение в R^3 (8.6).

Примечательно, что совместно с уравнением (9.5) систему (3.2) можно решить в общем виде (не зная γ_m - и β -функций) в произвольной R -схеме, в то время как для самой системы (3.2) это может быть сделано только в не зависящих от массы схемах перенормировки. Действительно, второе уравнение (3.2) и (9.5) означают, что параметр t является функцией константы связи, которая в этих уравнениях может рассматриваться как независимая переменная. Так что систему (3.2), (9.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \frac{dt}{d\bar{g}} &= \beta^{-1}\left(\bar{g}, \frac{m(\mu t)}{\mu t}\right), \\ \frac{2}{t} \frac{dt}{d\bar{g}} &= -\gamma_m\left(\bar{g}, \frac{m(\mu t)}{\mu t}\right) \beta^{-1}\left(\bar{g}, \frac{m(\mu t)}{\mu t}\right), \\ m(\mu t) &= tm(\mu), \end{aligned} \quad (9.6)$$

где $\bar{g}$ означает перенормированную константу связи. В силу граничных условий (9.4) имеем

$$t(\bar{g}) = 1 \quad \text{при} \quad \bar{g} = g. \quad (9.7)$$

Первые два уравнения (9.6) с учетом третьего принимают форму

$$\frac{d \ln t}{d\bar{g}} = \frac{1}{\beta(\bar{g}, C)}, \quad 2 \frac{d \ln t}{d\bar{g}} = -\frac{\gamma_m(\bar{g}, C)}{\beta(\bar{g}, C)}. \quad (9.8)$$

Константа C была фиксирована при построении исходного представления (2.3).

Свободным параметром в системе (9.8) с граничным условием (9.7) является граничное значение константы связи g . Интегрируя (9.8) по $\bar{g}$ и учитывая (9.7), получаем

$$\ln t = \int_g^{G_{\text{eff}}} \frac{dx}{\beta(x, C)}, \quad \int_g^{G_{\text{eff}}} dx \frac{2 + \gamma_m(x, C)}{\beta(x, C)} = 0, \quad (9.9)$$

где $G_{\text{eff}} = \bar{g}(g)$ — эффективная константа связи. В силу (9.7) эти уравнения имеют решение $t \equiv 1$, $G_{\text{eff}} \equiv g$. Существование других решений зависит от вида РГ-функций. Чтобы снять вопрос о схемной зависимости, будем считать, что в исходном представлении (2.3) используется ка-

ноническая μ -схема и $C = 1$ (подробнее см. п.3.1). Напомним, что в μ -схеме двухточечная функция Грина нормирована условием

$$\tilde{G}(p^2) \xrightarrow{p^2 \rightarrow \mu^2} \frac{i}{p^2 - m^2(\mu)}, \quad (9.10)$$

и при $C = m(\mu)/\mu = 1$ мы получаем схему перенормировки на массовой поверхности, т.е. $m(\mu)$ совпадает с физической массой m_{ph} по построению. Система (9.9) принимает вид

$$\ln t = \int_g^{G_{\text{eff}}} \frac{dx}{\beta(x)}, \quad \int_g^{G_{\text{eff}}} dx \frac{2 + \gamma_m(x)}{\beta(x)} = 0, \quad M = m_{ph} t, \quad (9.11)$$

где

$$\gamma_m(g) \equiv \gamma_m(g, 1), \quad \beta(g) \equiv \beta(g, 1),$$

а $\gamma_m\left(g, \frac{m(\mu)}{\mu}\right)$ и $\beta\left(g, \frac{m(\mu)}{\mu}\right)$ вычислены в рамках канонической μ -схемы.

Заметим, что (9.5) в этом случае имеет вид

$$\frac{m(m_{ph} t)}{m_{ph} t} \equiv \frac{m(M)}{M} = 1, \quad (9.12)$$

так что M , так же, как и m_{ph} , удовлетворяет условию перенормировки на массовой поверхности

$$\tilde{G}(p^2) \xrightarrow{p^2 \rightarrow M^2} \frac{i}{p^2 - M^2}, \quad (9.13)$$

и, следовательно, имеет смысл физической массы в новом представлении (9.2).

Вернемся к системе (9.11). Поскольку точные γ_m - и β -функции неизвестны, то просто рассмотрим различные возможности. Поведение $\gamma_m(x)$ и $\beta(x)$ при малых x можно найти по теории возмущений. Подынтегральное выражение во втором уравнении (9.11) ведет себя как

$$F(x) = \frac{2 + \gamma_m(x)}{\beta(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\beta_1 \alpha^2}, \quad (9.14)$$

здесь $\alpha = 3!x/(4\pi)^2$, $\beta_1 = 3/2$. Известно, что β -функция положительная при $x \in (0, g^*)$, где УФ-стабильная точка g^* может быть как конечной, так и бесконечной. Если функция $F(x)$ не меняет знак в интервале $(0, g^*)$, то (9.11) имеет только тривиальное решение $G_{\text{eff}} \equiv g$, $t \equiv 1$. Другая возмож-

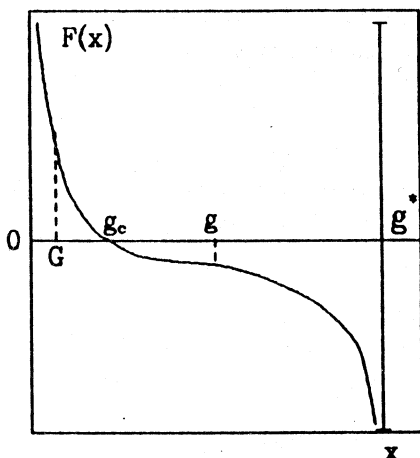


Рис.12. Возможное поведение подынтегральной функции

ность проиллюстрирована рис.12. Второе решение (9.11) существует, если $F(x)$ меняет знак в некоторой точке $g_c \in (0, g^*)$.

Например, пусть

$$\gamma_m = -ax, \quad \beta = bx^2 (g^* = \infty),$$

где $a > 0, b > 0$.

После интегрирования находим из (9.11):

$$-\frac{1}{G_{\text{eff}}} + \frac{1}{g} - \frac{a}{2} \ln \left(\frac{G_{\text{eff}}}{g} \right) = 0, \quad b \ln t = \frac{1}{g} - \frac{1}{G_{\text{eff}}}.$$

Асимптотики в режиме сильной связи имеют вид

$$t(g) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} g^{-\frac{a}{2b}} \ll 1, \quad G_{\text{eff}}(g) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} \frac{2}{a \ln g} \ll 1. \quad (9.15)$$

Этот пример иллюстрирует общую картину. Эффективная константа связи зависит только от g , причем

$$G_{\text{eff}}(g) \xrightarrow{g \rightarrow 0} g^*, \quad G_{\text{eff}}(g_c) = g_c, \quad G_{\text{eff}}(g) \xrightarrow{g \rightarrow g^*} 0, \quad (9.16)$$

и, т.к. $\beta(x) > 0$,

$$t(g) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \infty, \quad t(g_c) = 1, \quad t(g) \xrightarrow{g \rightarrow g^*} 0. \quad (9.17)$$

Из сравнения асимптотик эффективных констант связи заключаем, что в режиме слабой связи ($g \ll 1$) система существует в фазе с массой m_{ph} , а в пределе сильной связи ($g \rightarrow g^*$) реализуется другая симметричная фаза с физической массой $M \ll m_{ph}$ (см. (9.13)) и константой связи $G_{\text{eff}} \ll 1$. Фазовый переход имеет место при таком значении g_c константы связи g , что аномальная размерность оператора φ^2 компенсирует его каноническую размерность: $2 + \gamma_m(g_c) = 0$.

9.3. Динамическое нарушение симметрии. Гамильтониан H'_{ct} отражает хорошо известный факт, что контрчлены для $(\varphi^4)_4$ со спонтанным

нарушением симметрии полностью определяются контрчленами для симметричного случая (например, см. [45]). Так что $m(\mu t)$ и $g(\mu t)$ в (9.3) определяются одними и теми же уравнениями (3.2) при $B = 0$ и $B \neq 0$.

Уравнения (9.3) могут быть легко переписаны в следующем виде:

$$B^2 = - \frac{m^2(\mu t)}{g(\mu t)}, \quad t^2 = - 2 \frac{m^2(\mu t)}{m^2(\mu)}. \quad (9.18)$$

Уравнения (9.18) не имеют вещественных решений, если $m^2(\mu t) > 0$, $\forall g(\mu), t$. Именно такая ситуация имеет место для любой не зависящей от массы R-схемы. Так что, по крайней мере в этом случае, в системе нет представлений с $B \neq 0$, и, следовательно, отсутствует динамическое нарушение симметрии.

9.4. Корреляция между фазовой структурой и УФ-расходимостями. Теперь можно сравнить фазовую структуру моделей (1.1), (1.2), (1.3) в R^4 , R^3 и R^2 [31]. Из таблицы хорошо видно, что поведение систем при разных d совершенно различно. Независимо от симметрии исходного

Таблица. Фазы в режиме сильной связи

	$G \ll 1$	$G \gg 1$
R^2	$\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} g \varphi^4$	$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4 + gB(g) \Phi^3$ (BS)
R^3		$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4$ (S)
R^4	$\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} g \varphi^4$	$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} G_{\text{eff}} \Phi^4$, (S) если $\exists g_c \in (0, g^*): 2 + \gamma_m(g_c) = 0$
		?, если $\forall g \in (0, g^*) 2 + \gamma_m(g) > 0$
R^2	$\frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{4} g \varphi^4 + m \sqrt{\frac{g}{2}} \varphi^3$	$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4 + gB(g) \Phi^3$ (S)
R^3		$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g \Phi^4$ (S)
R^2	$\frac{1}{2} m^2 \sum_i^N \varphi_i^2 + \frac{1}{4} g \left[\sum_i^N \varphi_i^2 \right]^2$	$\frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{2} M_0^2 \sum_i^{N-1} \Phi_i^2 +$ (BS) $+ \frac{1}{4} g \left[\sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + \Phi^2 \right] + gB(g) \Phi \left[\sum_i^{N-1} \Phi_i^2 + \Phi^2 \right]$
R^3		$\frac{1}{2} M^2 \sum_i^N \Phi_i^2 + \frac{1}{4} g \left[\sum_i^N \Phi_i^2 \right]^2$ (S)

лагранжиана при $G \gg 1$ в R^2 реализуется BS-фаза, в то время как в R^3 имеем S-фазу. Можно заключить, что разное УФ-поведение ведет к разной фазовой структуре. Следующее эвристическое рассуждение (см., например, монографию Саймона [8]) в какой-то мере объясняет корреляцию между фазовой структурой теории и характером ее УФ-расходимостей. Интуитивно ясная причина нарушения симметрии в $(\varphi^4)_2$ состоит в нормальном упорядочении гамильтониана. Другими словами, нарушение симметрии в этом случае объясняется вкладом в перенормировку массы диаграммы рис.1,а, который в режиме сильной связи меняет знак затравочной массы m_B . Противоположная ситуация имеет место в $(\varphi^4)_3$, поскольку уже две диаграммы дают вклад в m_B с разными знаками. Затравочная масса оказывается положительной при больших g , и нарушение симметрии отсутствует. В $(\varphi^4)_4$ картина гораздо сложнее, т.к. затравочная масса представлена знакопеременным рядом. Этот ряд может быть положительным для любых g , так что причины для появления фазы с нарушенной симметрией будут вообще отсутствовать.

10. $(\varphi^4)_2$ -ТЕОРИЯ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Сама постановка задачи о динамической перестройке основного состояния квантово-полевой системы при изменении константы связи (типа постоянной тонкой структуры) выглядит достаточно искусственной, хотя и представляет интерес с чисто теоретической точки зрения. Гораздо более близким к реальной физике является исследование поведения полевой системы при изменении температуры. Такая задача имеет прямое отношение к ряду задач физики твердого тела [6,58], к системам типа кварк-глюонной плазмы или к проблеме эволюции Вселенной на ранних стадиях [3].

Активное исследование динамических температурных эффектов в КТП началось с работы Киржница [2]. В большинстве работ исследуются четырехмерные теории в одно- и двухпетлевом приближении к эффективному потенциалу. Фазовая структура $(\varphi^4)_2$ в рамках высокотемпературного разложения исследовалась в работах [4—6].

Мы получим фазовые диаграммы в (G, θ) -плоскости для теорий (1.1), (1.2). Напомним, что $G = g/2\pi m^{4-d}$ и $\theta = T/m$ — безразмерные параметры теории. Если по переменной G поведение систем в R^2 и R^3 совершенно различно (см. таблицу), то зависимость от температуры, напротив, каче-

ственно одна и та же в обоих случаях: независимо от исходной симметрии система находится в симметричной фазе, если температура достаточно велика. Это наиболее общий вывод из вида фазовых диаграмм.

10.1. Гамильтониан при нулевой температуре и канонические преобразования. С физической точки зрения любое представление ККС будет адекватным только в том случае, когда масса частиц зависит от температуры. Априори эта зависимость неизвестна даже в пределе слабой связи. Поэтому начнем построение конечно-температурной теории с представления ККС при $T = 0$, а затем, пользуясь методом канонических преобразований, введем температурную зависимость. Как и в разд.6, будем иметь дело с лагранжианом (6.1), объединяющим обе модели (1.1), (1.2).

Исходное представление при $G \ll 1$, $T = 0$. Для устранения всех расходимостей достаточно записать плотность гамильтониана в нормальной форме:

$$H = H_0 + H_I, \quad H_0[\varphi, \pi] = \frac{1}{2} : [\pi^2(x) + (\nabla\varphi(x))^2 + m^2\varphi^2(x)]:, \\ H_I[\varphi, \pi] = : \left[\frac{1}{4} g_4 \varphi^4(x) + g_3 \varphi^3(x) \right] :. \quad (10.1)$$

Операторы φ, π удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям. Операторы рождения и уничтожения $a^+(k)$ и $a(k)$ действуют на пространстве Фока с массой m . Вакуумный вектор $|0\rangle$ подчиняется условию: $a(k)|0\rangle = 0$, $\forall k$.

Каноническое преобразование. Произведем каноническое преобразование:

$$\pi(x) \rightarrow \pi_t(x), \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi_t(x) + B, \quad (10.2)$$

φ_t и π_t — поля с массой $M = mt$. Новые операторы рождения и уничтожения $a^+(k, t)$, $a(k, t)$ действуют на пространстве Фока с вакуумным вектором

$$|0(t, B)\rangle = U_2^{-1}(t)U_1^{-1}(B)|0\rangle, \quad a(k, t)|0(t, B)\rangle = 0, \quad \forall k. \quad (10.3)$$

U_1 и U_2 представлены формулами (6.8).

Выражая гамильтониан в новых переменных и переходя к нормальному упорядочению относительно вакуума $|0(t, B)\rangle$, получаем

$$H = H'_0 + H'_I + H_1 + E, \\ H'_0 = \frac{1}{2} : [\pi_t^2(x) + (\nabla\varphi_t(x))^2 + M^2\varphi_t^2(x)]:, \quad (10.4) \\ H'_I = : \left[\frac{1}{4} h_4 \varphi_t^4(x) + h_3 \varphi_t^3(x) \right] :, \quad h_3 = g_3 + g_4 B, \quad h_4 = g_4,$$

$$H_1 = : \left[\frac{1}{2} R(t, B) \varphi_t^2(x) + P(t, B) \varphi_t(x) \right] :,$$

$$R = m^2 - M^2 + 3g_4(B^2 - D_0) + 6g_3B, \quad (10.5)$$

$$P = m^2B + g_4(B^3 - 3BD_0) + 3g_3(B^2 - D_0),$$

$$E = \frac{1}{2} m^2 B^2 + L_0 + \frac{g_4}{4} [b^4 - 6B^2 D_0 + D_0^2] + g_3 B [B^2 - 3D_0],$$

$$D_0(t) = \frac{1}{4\pi} \ln t, \quad L_0(t) = \frac{m^2}{8\pi} [t - 1 - \ln t]. \quad (10.6)$$

Чтобы ввести температурную зависимость, произведем еще одно каноническое преобразование, составляющее основную идею метода термополевой динамики (TFD).

10.2. Термополевая динамика. Детальное описание TFD можно найти в обзоре [64] или в монографии [58]. Здесь мы ограничимся кратким изложением основной идеи.

Принципиальный момент TFD состоит в удвоении числа полевых переменных при $T > 0$. Интуитивное обоснование этого сводится к следующему. Наличие термостата приводит к существованию большого числа возбужденных квантов и свободных уровней энергии, называемых дырками. Поэтому поглощение энергии системой происходит двумя способами: либо за счет возбуждения дополнительных квантов, либо за счет заполнения свободных мест в пространстве частиц, т.е. уничтожения дырок с отрицательной энергией (подчеркнем отличие от античастиц в обычном понимании, являющихся дырками в пространстве состояний с отрицательной энергией). Эти два механизма поглощения независимы друг от друга, что и ведет к удвоению числа полевых переменных.

В соответствии с этой мотивацией строятся следующие операторы:

$$\alpha(k) = a(k, t) \otimes 1, \quad \tilde{\alpha}(k) = 1 \otimes a(k, t), \quad (10.7)$$

которые удовлетворяют обычным ККС:

$$[\alpha(k), \alpha^+(k')] = \delta(k - k'), \quad [\tilde{\alpha}(k), \tilde{\alpha}^+(k')] = \delta(k - k')$$

и действуют на пространстве Фока с вакуумом:

$$|0(t, B)\rangle = |0(t, B)\rangle \otimes |0(t, B)\rangle. \quad (10.8)$$

Оператор $\alpha(k)$ описывает уничтожение частиц, а $\tilde{\alpha}(k)$ — дырок. При ненулевой температуре основное состояние системы не является состоянием без частиц. Среднее число частиц описывается функцией распре-

деления (бозонной или фермионной). Следующий шаг состоит в переходе к квазичастичной картине. Квазичастицы соответствуют возбуждениям над физическим основным состоянием — термальным вакуумом.

Зависящие от температуры операторы $\alpha(k, \beta)$, $\tilde{\alpha}(k, \beta)$ ($\beta = 1/T$) вводятся с помощью температурного преобразования Боголюбова

$$\begin{aligned}\alpha(k, \beta) &= \alpha(k) \cosh(\xi) - \tilde{\alpha}^+(k) \sinh(\xi) \\ \tilde{\alpha}(k, \beta) &= \tilde{\alpha}(k) \cosh(\xi) - \alpha^+(k) \sinh(\xi),\end{aligned}\quad (10.9)$$

или то же самое в операторной форме:

$$\alpha(k, \beta) = U^{-1}(\beta) \alpha(k) U(\beta), \quad \tilde{\alpha}(k, \beta) = U^{-1}(\beta) \tilde{\alpha}(k) U(\beta),$$

$$U(\beta) = \exp \left[\int dk \xi(k, \beta) [\tilde{\alpha}(k) \alpha(k) - \alpha^+(k) \tilde{\alpha}^+(k)] \right].$$

Операторы $\alpha(k, \beta)$, $\tilde{\alpha}(k, \beta)$ определены на пространстве Фока с термальным вакуумом

$$|0(\beta, t, B)\rangle = U^{-1}(\beta) |0(t, B)\rangle, \quad (10.10)$$

причем

$$\alpha(k, \beta) |0(\beta, t, B)\rangle = \tilde{\alpha}(k, \beta) |0(\beta, t, B)\rangle = 0 \quad \forall k, \beta.$$

Параметр $\xi(k, \beta)$ определяется из требования, чтобы среднее число частиц в состоянии $|0(\beta, t, B)\rangle$ равнялось статистической функции распределения:

$$\langle 0(\beta, t, B) | \alpha^+(k) \alpha(k) | 0(\beta, t, B) \rangle = n(\omega(k, t)) = [\exp \{ \beta \omega(k, t) \} - 1]^{-1}.$$

Используя (10.7) и преобразование, обратное (10.9), находим

$$\sinh^2(\xi) = [\exp \{ \beta \omega(k, t) \} - 1]^{-1}. \quad (10.11)$$

Условие (10.11) гарантирует, что введенная величина $T = 1/\beta$ имеет смысл статистической температуры. В соответствии с (10.7) строятся поля (Φ, Π) и $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Pi})$, определенные на пространстве Фока с вакуумом (10.8). Выражения для тильда-сопряженных переменных $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Pi}$ получаются из Φ , Π подстановкой $(\alpha, \alpha^+) \rightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^+)$.

Для определения полей на пространстве с термальным вакуумом (10.10) используется преобразование, обратное (10.9), с помощью которого операторы Φ , Π , $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Pi}$ выражаются через $\alpha(k, \beta)$, $\alpha^+(k, \beta)$, $\tilde{\alpha}(k, \beta)$, $\tilde{\alpha}^+(k, \beta)$.

Плотность полного гамильтониана в TFD-формализме определяется формулой

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{H} = H \otimes 1, \quad \tilde{\mathcal{H}} = 1 \otimes H. \quad (10.12)$$

Здесь $\mathcal{H}$ описывает частицы, а $\tilde{\mathcal{H}}$ — дырки с отрицательной энергией, чем и обусловлен знак «-» перед $\tilde{\mathcal{H}}$. Плотность гамильтониана $\mathcal{H}$ в представлении термального вакуума (10.10) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0'' + \mathcal{H}_I'' + \mathcal{H}_1' + E', \\ \mathcal{H}_0'' &= \frac{1}{2} : [\Pi^2(x) + (\nabla\Phi(x))^2 + M^2\Phi^2(x)] :, \\ \mathcal{H}_I'' &= : \left[\frac{1}{4} h_4 \Phi^4(x) + h_3 \Phi^3(x) \right] :, \\ \mathcal{H}_1' &= : \left[\frac{1}{2} \mathcal{H}(t, B; \beta) \Phi^2(x) + \mathcal{H}(t, B; \beta) \Phi(x) \right] :, \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= m^2 - M^2 + 3g_4(B^2 - D) + 6g_3B, \\ \mathcal{P} &= m^2B + g_4(B^3 - 3BD) + 3g_3(B^2 - D), \\ D(t, \beta) &= \frac{1}{4\pi} \ln t - \frac{1}{\pi} d(\theta/\sqrt{t}),\end{aligned}$$

Плотность энергии E' получается из E заменой $D_0 \rightarrow D$, $L_0 \rightarrow L$, где

$$\begin{aligned}L(t, \beta) &= \frac{m^2}{8\pi} \{ t - 1 - D(t, \theta) + 4t [2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \}, \\ d(z) &= \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \left(\exp \left\{ \frac{1}{z} \sqrt{1+u^2} \right\} - 1 \right)^{-1}, \\ s(z) &= \int_0^\infty \frac{du u^2}{\sqrt{1+u^2}} \left(\exp \left\{ \frac{1}{z} \sqrt{1+u^2} \right\} - 1 \right)^{-1}.\end{aligned} \quad (10.14)$$

Согласно требованию эквивалентности R-схем нормальное произведение в этих формулах относится к $\alpha(k, \beta)$, $\alpha^+(k, \beta)$. Оператор $\tilde{\mathcal{H}}$ строится по правилу $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*[\tilde{\Phi}, \tilde{\Pi}]$.

Плотность внутренней энергии E' состояния $|0(t, B; \beta)\rangle$ связана с плотностью свободной энергии F соотношением

$$F = E' - TS, \quad (10.15)$$

где S — плотность энтропии:

$$\begin{aligned}S &= - \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} [n(k, t) \ln n(k, t) - (1 - n(k, t)) \ln(1 - n(k, t))] = \\ &= \frac{m^2}{\pi} \frac{t}{T} [2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})], \\ n(k, t) &= [\exp(\beta\omega(k, t)) - 1]^{-1}.\end{aligned} \quad (10.16)$$

Из (10.6), (10.14), (10.15) и (10.16) получаем

$$F = \frac{1}{2} m^2 B^2 + \frac{g_4}{4} [B^4 - 6B^2 D(t; \beta) + 3D^2(t; \beta)] + g_3 B [B^2 - 3D] + \frac{m^2}{8\pi} \{t - 1 - 4\pi D(t; \theta) - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})]\}. \quad (10.17)$$

Потребуем, чтобы

$$\mathfrak{R}(t, B; \theta) = 0, \quad \mathfrak{P}(t, B; \theta) = 0. \quad (10.18)$$

Легко проверить эквивалентность (10.18) уравнениям

$$\frac{\partial F(t, B)}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(t, B)}{\partial B^2} = M^2 = m^2 t,$$

которые аналогичны условиям минимальности и стабильности эффективного потенциала [3]. С другой стороны, (10.18) определяют минимум $F(t, B)$ как функции двух переменных t и B только при $\theta = 0$. Так что только в этом случае наши результаты должны совпадать с результатами GEP-аппроксимации.

10.3. Симметричная модель. При $g_3 = 0$ и $g_4 = g$ получаем из (10.18) и (10.13) следующие уравнения на B и t ($G = g/2\pi m^2$):

$$\begin{aligned} B[gB - 3gD(t; \theta) + m^2] &= 0, \\ 3gB^2 - 3gD(t; \theta) - m^2(t - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Симметричная фаза. Полагая $B = 0$ во втором уравнении (10.19), получаем

$$\frac{2}{3G}(t - 1) = -\ln t + 4d(\theta/\sqrt{t}). \quad (10.20)$$

Это уравнение имеет единственное решение при любых G и θ , причем $t(G, \theta) \equiv 1$ только при $\theta = 0$. Плотность свободной энергии имеет вид

$$F_S = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ \left(\frac{2}{3G} + 1 \right) (t - 1) + \frac{(t - 1)^2}{3G} - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \right\}. \quad (10.21)$$

Фаза с нарушенной симметрией. Используя ненулевое решение для B , перепишем (10.19) в виде

$$B^2 = \frac{t}{4\pi G}, \quad \frac{t}{3G} + \frac{2}{3G} = \ln t - 4d(\theta/\sqrt{t}).$$

Второе уравнение имеет решение только для таких G и θ , что $G \geq G_c(\theta)$. Функция $G_c(\theta)$ представлена на рис.13. Плотность свободной энергии дается выражением:

$$F_B = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ -\frac{1}{2G} + \left(1 - \frac{1}{3G} \right) (t - 1) - \frac{(t - 1)^2}{6G} - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \right\}. \quad (10.22)$$

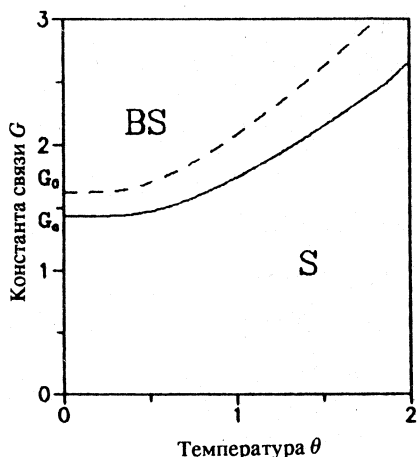


Рис.13. Фазовая диаграмма для симметричной $(\varphi^4)_2$

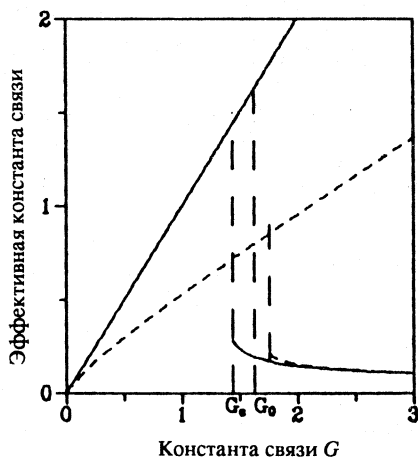


Рис.14. Эффективные константы связи для симметричной $(\varphi^4)_2$: верхние линии — S-фаза; пунктирная линия — $\theta = 1$, сплошная — $\theta = 0$

Сравнивая эффективные константы связи $G_{\text{eff}} = G/t(G, \theta)$ в S- и BS-фазах, находим, что граница фаз дается функцией $G_c(\theta)$ (сплошная линия на рис.13). Из сравнения свободных энергий F_S и F_B получаем границу, представленную на рис.13 пунктирной линией. Видно, что эти две границы не противоречат друг другу. Значение $G_0 = 1,625\dots$ совпадает с критической константой связи в GEP-аппроксимации, поскольку при $\theta = 0$ уравнения (10.19) совпадают с уравнениями, минимизирующими гауссовский эффективный потенциал.

В критической области эффективная константа связи достаточно велика в обеих фазах (см. рис.14), так что пертурбативные поправки будут велики и могут изменить границу, представленную пунктирной линией. Чтобы оценить это изменение, вычислим поправки к свободной энергии при нулевой температуре. При этом мы ограничимся порядком $O(G^3)$ для S-фазы и $O(G_{\text{eff}}^2)$ для BS. Необходимые диаграммы показаны на рис.15,16. В результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta F_S &= \frac{m^2}{8\pi} (-1,671G^2 + 4,039G^3 + O(G^4)), \\ \Delta F_B &= \frac{M^2}{8\pi} (-1,758G_{\text{eff}}^2 - 4,316G_{\text{eff}}^3 - O(G_{\text{eff}}^3)). \end{aligned} \quad (10.23)$$

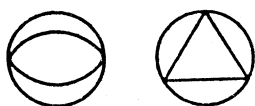
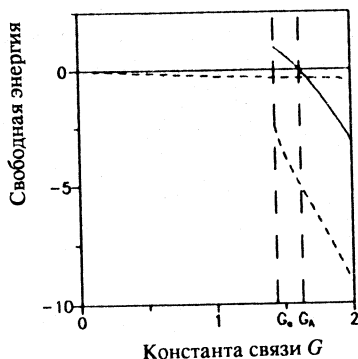
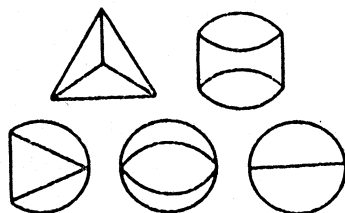
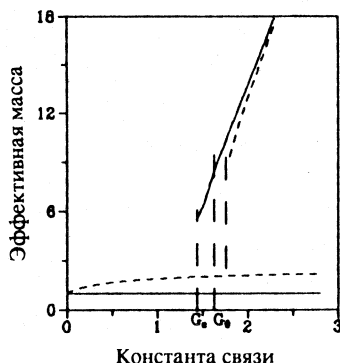

 Рис.15. Диаграммы $O(G^2)$ и $O(G^3)$ в S-фазе

 Рис.16. Диаграммы $O(G_{\text{eff}})$ и $O(G_{\text{eff}}^2)$ в BS-фазе

 Рис.17. Плотность свободной энергии: пунктирная линия — F_S, F_B ; сплошная — $F_S + \Delta D_S, F_B + \Delta F_B$

 Рис.18. Массы в симметричной модели: пунктирная линия — $\theta = 1$; сплошная — $\theta = 0$; верхние линии — BS-фаза

Видно, что ряд (асимптотический) для ΔF_B — знакпостоянный. Это обычное свойство систем с вырожденным вакуумом (см., например, [66]). Суммируя по Борелю разложения (10.23), находим

$$\Delta F_S = \frac{m^2}{8\pi} \left(\int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1 + 0,806Gt}{1 + 0,806Gt + 0,836(Gt)^2} - 1 \right),$$

$$\Delta F_B = -\frac{M^2}{8\pi} \left(\text{VP} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1 + 0,531G_{\text{eff}}t}{1 - 1,228G_{\text{eff}}t} - 1 \right),$$

Символ VP означает главное значение интеграла в смысле Коши (о методах суммирования знакпостоянных асимптотических рядов см. [66]). Сплошной и пунктирной линиями на рис.17 показана свободная энергия без учета и с учетом поправок соответственно. Поправки сдвигают критическую точку из $G_0 \sim 1,625\dots$ в $G_c(0) \sim 1,44\dots$. Аналогичная картина должна иметь место и при $\theta \neq 0$.

Параметр порядка

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{t(G, \theta)}{4\pi G}} \quad (10.24)$$

и масса $M^2 = m^2 t(G, \theta)$ (рис.18) разрывны на границе фаз, так что мы имеем переход первого рода. Однако этот результат ненадежен из-за большого значения G_{eff} вблизи границы. В режимах сильной и слабой связи описание достаточно точное, т.к. эффективная константа связи в этих случаях мала.

10.4. Модель с исходно нарушенной симметрией. Подставляя в (10.18) и (10.13) $g_4 = g$ и $g_3 = m\sqrt{g/2}$, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} gB^3 + 3m\sqrt{g/2}B^2 + B[m^2 - 3gD(t, \theta)] - 3m\sqrt{g/2}D(t, \theta) &= 0, \\ 3gB^2 + 3m\sqrt{2g}B - 3gD(t, \theta) - M^2 + m^2 &= 0. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Согласно решениям этой системы, имеются две фазы с нарушенной симметрией и одна симметричная.

S-фаза. Первое уравнение (10.25) имеет решение

$$B = -\frac{1}{\sqrt{4\pi G}}. \quad (10.26)$$

Из (10.26) и второго уравнения (10.25) получаем уравнение на t :

$$\frac{2}{3G}t + \frac{1}{3G} = -\ln t + 4d(\theta\sqrt{t}). \quad (10.27)$$

Существует единственное решение для любых G, θ . С учетом соотношений (10.26) и (10.27) получается следующее выражение для плотности энергии:

$$F_S = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ \frac{1}{2G} + \left(1 + \frac{2}{3G}\right)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{3G} - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \right\}. \quad (10.28)$$

BS-фазы. Используя остальные решения первого уравнения (10.25):

$$B = -\frac{1 \pm \sqrt{t}}{4\pi G},$$

из второго получаем

$$\frac{1}{3G}t - \frac{1}{3G} = \ln t - 4d(\theta/\sqrt{t}). \quad (10.29)$$

Это уравнение имеет решения только для таких (G, θ) , что

$$G \leq G_c^{(1)}(\theta) \quad \text{или} \quad G \geq G_c^{(2)}(\theta).$$

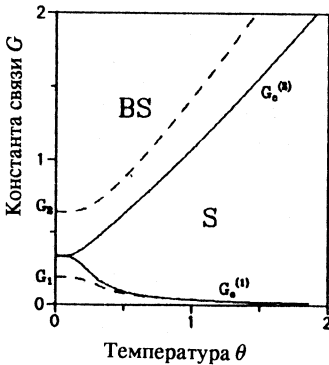
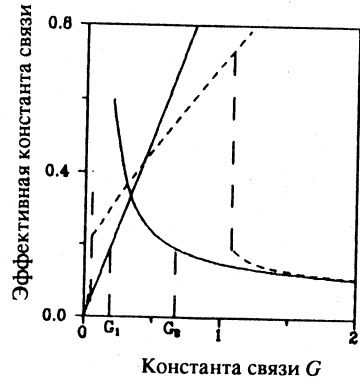

 Рис.19. Фазовая диаграмма для $(\varphi^4)_2$ с исходно нарушенной симметрией

 Рис.20. Эффективные константы связи для $(\varphi^4)_2$ с исходно нарушенной симметрией: $\theta = 0$ — сплошная линия, $\theta = 1$ — пунктирная; S-фаза — верхняя пунктирная линия


Функции $G_c^{(1)}(\theta)$ и $G_c^{(2)}(\theta)$ представлены на рис.19. Имеются два решения, и они равны друг другу при $G = G_c^{(1)}(\theta)$ или $G = G_c^{(2)}(\theta)$. Эти решения представляют собой две разных BS-фазы. Из рис.19 видно, что $G_c^{(1)}(0) = G_c^{(2)}(0) = G_c$. Подставляя $t = 1$ в (10.29), находим: $G_c = \frac{1}{3}$. Область на фазовой плоскости ниже $G_c^{(1)}(\theta)$ соответствует первой BS-фазе, область выше $G_c^{(2)}(\theta)$ представляет вторую BS-фазу. Плотность свободной энергии имеет вид

$$F_B = \frac{m^2}{8\pi} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3G} \right) (t - 1) - \frac{(t - 1)^2}{6G} - 4t[2s(\theta/\sqrt{t}) + d(\theta/\sqrt{t})] \right\}.$$

Как видно из рис. 19, границы фаз, найденные из сравнения эффективных констант связи (рис.20) и свободных энергий, не противоречат друг другу. Значения $G_1 = 0,19\dots$ и $G_2 = 0,64\dots$ на рис.19 совпадают с критическими точками GER-аппроксимации при нулевой температуре [19].

Таким образом, имеются две BS- и одна S-фаза. При нулевой температуре симметрия нарушена для любых G , хотя при $G = \frac{1}{3}$ имеется фазовый переход без изменения симметрии. Вместе с тем при любом фиксированном G симметрия восстанавливается, если температура достаточно велика. Фазовые переходы — первого рода, поскольку масса и параметр порядка (10.24) разрывны на границах фаз (см. рис.21, $\theta = 1$).

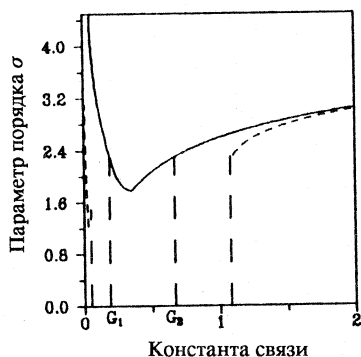


Рис.21. Параметр порядка: $\theta = 0$ — сплошная линия, $\theta = 1$ — пунктирная

Эффективная константа связи мала всюду, кроме критических областей, где $G_{\text{eff}} \sim O(1)$, так что наше описание довольно точное только вне окрестности фазовых переходов.

Граница $G_c^{(1)}(\theta)$ лежит в области применимости высокотемпературного разложения ($\theta \gg G$). Ее вид согласуется с результатами этого метода [4—6].

11. ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ φ^4 ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

11.1. Представление термального вакуума. Каноническое преобразование к полям с новой массой и ненулевым конденсатом было выполнено в разд.6 (см. (6.2), (6.11)). Поэтому мы не будем воспроизводить здесь выкладки, связанные с этим преобразованием. Кроме того, переход от представления (6.11) к нижеследующим формулам осуществляется в полной аналогии с двумерным случаем (см. (10.7) — (10.12)). Единственное принципиальное отличие связано с дополнительными контрчленами, устраняющими расходимость диаграммы второго порядка (см. рис.1,б). Поэтому мы сразу начнем с выражения для плотности гамильтониана $\mathcal{H}$ в представлении термального вакуума $|\phi(\beta, t, B)\rangle$ (10.10):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0'' + \mathcal{H}_I'' + \mathcal{H}_{ct}'' + \mathcal{H}_1',$$

$$\mathcal{H}_0'' = \frac{1}{2} : [\Pi^2(\mathbf{x}) + (\nabla\Phi(\mathbf{x}))^2 + M^2\Phi^2(\mathbf{x})] :, \quad (11.1)$$

$$\mathcal{H}_I'' = : \left[\frac{1}{4} h_4 \Phi^4(\mathbf{x}) + h_3 \Phi^3(\mathbf{x}) \right] :.$$

Нормальное упорядочение в этих формулах относится к зависящим от температуры операторам $\alpha(\mathbf{k}, \beta)$, $\alpha^+(\mathbf{k}, \beta)$. Контрчленный оператор $\mathcal{H}_{ct}''$ в этом представлении принимает форму

$$\mathcal{H}_{ct}''(M, \beta) = : \left[\frac{1}{2} A(M) \Phi^2(\mathbf{x}) + C(M) \Phi(\mathbf{x}) \right] :, \quad (11.2)$$

зависящие от температуры функции A , C имеют вид [36]:

$$\begin{aligned}
 A(M) &= 3!g_4^2\Sigma(M), & C(M) &= 3!g_3g_4\Sigma(M), \\
 \Sigma(M) &= \Sigma_0(M) + 3\Sigma_\beta(M) + 3\Sigma_{\beta\beta}(M), \\
 \Sigma_\beta(M) &= \frac{1}{2(2\pi)^2}\sigma_\beta(t, \theta), & \Sigma_{\beta\beta}(M) &= \frac{1}{2(2\pi)^2}\sigma_{\beta\beta}(t, \theta), \quad (11.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\beta(t, \theta) &= -\ln 3 \cdot \frac{\theta}{t} \ln \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right), \\
 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) &= \int_1^\infty \int_1^\infty dx dy \left[\exp \left\{ \frac{xt}{\theta} \right\} - 1 \right]^{-1} \left[\exp \left\{ \frac{yt}{\theta} \right\} - 1 \right]^{-1} \times \\
 &\times \left[\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + xy) - 3}} + \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2 - xy) - 3}} \right]. \quad (11.4)
 \end{aligned}$$

В схеме вычитаний при нулевом импульсе оператор $\mathcal{H}'_1$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}'_1 &= : \left[\frac{1}{2} \mathcal{R}(t, B, \beta) \Phi^2(\mathbf{x}) + \mathcal{P}(t, B, \beta) \Phi(\mathbf{x}) \right] :, \\
 \mathcal{R} &= m^2 - M^2 + 3g_4(B^2 - D) + 6g_3B + 6g_4^2(\Sigma_0(m) - \Sigma(M)), \quad (11.5)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P} = m^2B + g_4(B^3 - 3BD) + 3g_3(B^2 - D) + 6g_4(g_3 + g_4B)(\Sigma_0(m) - \Sigma(M)),$$

$$D(t, \beta) = \frac{m}{4\pi} \left[t - 1 + 2\theta \ln \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right) \right]. \quad (11.6)$$

Плотность гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}$ строится согласно правилу $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^*[\tilde{\Phi}, \tilde{\Pi}]$. Чтобы гамильтониан имел правильную форму, потребуем, чтобы

$$\mathcal{H}'_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(t, B, \beta) = 0 \\ \mathcal{P}(t, B, \beta) = 0. \end{cases} \quad (11.7)$$

С физической точки зрения, это означает, что $\mathcal{H}$ описывает скалярные частицы с массой M , зависящей от константы связи G и температуры θ . Эта зависимость определяется уравнениями (11.7). Удобно перейти к следующим безразмерным величинам:

$$G_4 = \frac{g_4}{2\pi m}, \quad G_3 = \frac{g_3}{m\sqrt{4\pi m}}, \quad b = B\sqrt{\frac{4\pi}{m}}. \quad (11.8)$$

Используя определения (11.8), представим (11.5) в виде

$$-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}G_4(b^2 - d(t, \theta)) + 3G_3b + \frac{3}{4}G_4^2(\ln t - 6\sigma_\beta(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0,$$

$$b + \frac{1}{2} G_4 b(b^2 - 3d(t, \theta)) + 3G_3(b^2 - d(t, \theta)) + \quad (11.9)$$

$$+ 3G_4 \left(G_3 + \frac{G_4}{2} b \right) (\ln t - 6\sigma_\beta(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0,$$

$$d(t, \theta) = t - 1 + 2\theta \ln \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right). \quad (11.10)$$

Различные решения этих уравнений описывают возможные фазы системы.

11.2. Симметричная модель. Рассмотрим модель с лагранжианом (1.1). Для этого положим $G_4 = G$, $G_3 = 0$. Используя (11.9), получаем

$$t^2 - 1 - \frac{3}{2} G(b^2 - d(t, \theta)) - \frac{3}{2} G^2 (\ln t - 6\sigma_\beta(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0, \quad (11.11)$$

$$b \left[1 + \frac{1}{2} G(b^2 - 3d(t, \theta)) + \frac{3}{2} G^2 (\ln t - 6\sigma_\beta(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) \right] = 0.$$

S-фаза. Из (11.11), (11.10) и (11.3) получаем уравнение для t :

$$2t^2 + 3Gt - 2 - 3G - 3G^2 \ln t + 18G^2 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) +$$

$$+ 6G \left(\theta - 3 \ln 3 G \frac{\theta}{t} \right) \ln \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right) = 0, \quad (11.12)$$

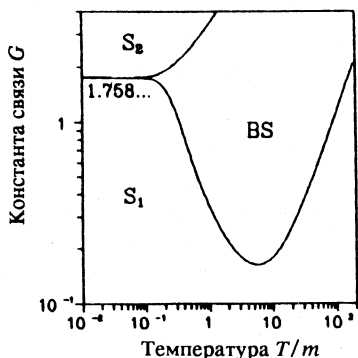


Рис.22. Фазовая диаграмма для симметричной $(\varphi^4)_3$

где функция $\sigma_{\beta\beta}$ определена в (11.4). Уравнение (11.12) имеет два решения в областях S_1 и S_2 на рис.22, а в области BS решения отсутствуют, причем

$$t_2(G, \theta) < t_1(G, \theta) \neq 1, \quad \text{если } (\theta, G) \in S_1$$

$$t_2(G, \theta) > t_1(G, \theta) \neq 1, \quad \text{если } (\theta, G) \in S_2.$$

Согласно критерию отбора фаз по эффективному взаимодействию необходимо положить:

$$t(G, \theta) = \begin{cases} t_1(G, \theta), & \text{если } (\theta, G) \in S_1 \\ t_2(G, \theta), & \text{если } (\theta, G) \in S_2. \end{cases} \quad (11.13)$$

Подчеркнем, что при ненулевой температуре ни t_1 , ни t_2 не соответствуют исходному представлению (6.2).

Высокотемпературная асимптотика ($\theta \gg 1, t \gg 1$) определяется линейным по G членом. Это становится очевидным, если заметить, что (см. (11.4))

$$\sigma_{\beta\beta}(t, \theta) \xrightarrow{\theta \gg t \gg 1} C \frac{\theta^2}{t^2} + O\left(\frac{\theta}{t} \ln \frac{\theta}{t}\right),$$

$$C = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{dx dy}{xy} \left[\frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + xy) - 3}} + \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2 - xy) - 3}} \right] \quad (11.14)$$

и

$$\theta \gg \frac{\theta}{t}, \quad \theta \ln \theta \gg \frac{\theta^2}{t^2}.$$

Асимптотики массы $M = mt$ и эффективной константы связи $G_{\text{eff}} = G/t$ имеют вид

$$\begin{aligned} t \xrightarrow{\theta \gg G} \sqrt{3G\theta \ln \theta}, \quad t \xrightarrow{\theta \gg G} \sqrt{\frac{3}{2} G^2 \ln G}, \\ G_{\text{eff}} \xrightarrow{\theta \gg G} \sqrt{\frac{G}{3\theta \ln \theta}} \ll 1, \quad G_{\text{eff}} \xrightarrow{\theta \gg G} \sqrt{\frac{2}{3 \ln G}} \ll 1. \end{aligned} \quad (11.15)$$

BS-фаза. В этом случае имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{t^2}{G}, \\ t^2 - 3Gt + 3G^2 \ln t - 18G^2 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) - \\ &- 6G\left(\theta - 3 \ln 3G \frac{\theta}{t}\right) \ln\left(1 - \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\}\right) = 0, \end{aligned} \quad (11.16)$$

для вывода которых использовались формулы (11.11), (11.10) и (11.3).

Второе уравнение (11.16) при любых (θ, G) имеет единственное решение. Можно убедиться, что решение с асимптотиками типа $1 \ll t \ll \theta$ или $t \gg \theta$ при $\theta \gg 1$ отсутствует. Это означает, что при высокой температуре $G_{\text{eff}}(G, \theta)$ в S-фазе меньше, чем в BS-фазе. Отсюда заключаем, что система симметрична при высокой температуре. Численное решение уравнений (11.12) и (11.16) показывает, что то же самое имеет место при любых $(\theta, G) \in S_1, S_2$.

Результат удобно представить в виде фазовой диаграммы на рис.22. Границы фаз соответствуют переходам первого рода, поскольку параметр порядка разрывен в критических точках. Асимптотики эффективной константы связи показывают (см. (11.15)), что наш подход достаточно точен вне критической области.

Суммируем выводы этого пункта:

- Нарушение симметрии отсутствует в трехмерной модели (1.1) $\forall \theta$, если $G \ll 1$.
- Имеются две S-фазы и одна BS-фаза, переход с перестройкой симметрии системы происходит при промежуточных значениях G, θ (рис.22).
- Система симметрична, если температура θ или константа связи G достаточно велики.

11.3. Исходно нарушенная симметрия. Рассмотрим фазовую структуру модели (1.2) с исходно нарушенной симметрией. Уравнения на параметры t и b получаются из (11.9) подстановкой

$$G_4 = G, \quad G_3 = \frac{1}{2} \sqrt{G}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} t^2 - 1 - \frac{3}{2} G(b^2 - d(t, \theta)) - 3\sqrt{Gb} - \frac{3}{2} G^2(\ln t - 6\sigma_{\beta}(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0, \\ 2b + Gb(b^2 - 3d(t, \theta)) + 3\sqrt{G}(b^2 - d(t, \theta)) + \\ + 3G\sqrt{G}(1 + \sqrt{Gb})(\ln t - 6\sigma_{\beta}(t, \theta) - 6\sigma_{\beta\beta}(t, \theta)) = 0. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Два решения для b следуют из (11.17):

$$b = -\frac{1}{\sqrt{G}} \text{ (симметричное), } \quad b = -\frac{1}{\sqrt{G}} \pm \frac{t}{\sqrt{G}} \text{ (несимметричное).}$$

Используя несимметричное решение, получаем уравнение

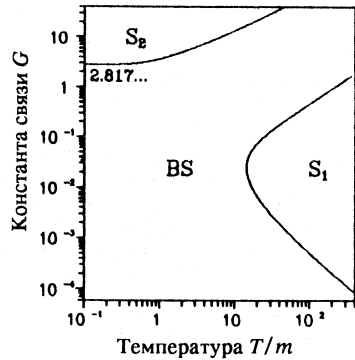
$$\begin{aligned} t^2 - 3Gt - 1 + 3G + 3G^2 \ln t - 18G^2 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) - \\ - 6G \left(\theta - 3 \ln 3G \frac{\theta}{t} \right) \ln \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right) = 0, \end{aligned} \quad (11.18)$$

в то время как для симметричного ($b = -1/\sqrt{G}$) имеем

$$\begin{aligned} 2t^2 + 3Gt + 1 - 3G - 3G^2 \ln t + 18G^2 \sigma_{\beta\beta}(t, \theta) + \\ + 6G \left(\theta - 3 \ln 3G \frac{\theta}{t} \right) \ln \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\theta} \right\} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11.19)$$

S-фаза. Имеется два решения (11.19) в областях S_1, S_2 на рис.23, а в области BS решений нет. Асимптотики массы $M = mt$ и эффективной константы связи $G_{\text{eff}} = G/t$ — те же, что и в (11.15).

Рис.23. Фазовая диаграмма для $(\varphi^4)_3$ с исходно нарушенной симметрией



BS-фаза. Уравнение (11.18) имеет единственное решение для любых (G, θ) . Анализ асимптотик, численное решение уравнений (11.19) и (11.18) и сравнение эффективных констант связи дают фазовую диаграмму, представленную на рис.23. Граница фаз при $G \ll 1$ согласуется с той, которая могла бы ожидаться из пертурбативного вычисления эффективного потенциала [3]. Описание является достаточно точным вне критических областей (см. (11.15)). Вместе с тем границы фаз определены лишь приблизительно, т.к. эффективная константа связи достаточно велика в окрестности фазовых переходов.

Параметр порядка разорван на границе, так что мы имеем фазовые переходы первого рода. Подчеркнем, что этот результат не может рассматриваться как хорошо установленный в нашем подходе. Подведем итоги.

- В системе (1.2) симметрия восстанавливается, если температура или константа связи достаточно велики.
- Имеются фазовые переходы между BS- и S-фазами, границы между которыми приблизительно показаны на рис.23.
- Метод канонических преобразований дает возможность определить температурную зависимость массы. Процедура определения достаточно точна вне критических областей.
- Если $G_{\text{eff}}(G, \theta) \ll 1$, то можно производить обычные пертурбативные вычисления, используя гамильтониан (11.1), (11.2).

11.4. Системы в R^2 и R^3 . Сравним фазовую структуру моделей (1.1), (1.2) в R^3 и R^2 при конечной температуре. Фазовые диаграммы для двумерных моделей показаны на рис.13 и 19. Поведение систем по переменной G совершенно различно в R^2 и R^3 (см. также таблицу). Имеем BS-фазу в пространстве-времени R^2 и S-фазу в R^3 при $G \gg 1$ независимо от симметрии исходных лагранжианов (1.1), (1.2). В то же время поведение по переменной θ качественно одно и то же в R^2 и R^3 . Системы симметричны, если температура достаточно велика.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coleman S., Weinberg E. — *Phys.Rev.D*, 1973, vol.7, p.1888.
2. Киржниц Д.А. — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.15, с.745.
3. Linde A.D. — *Rep.Prog.Phys.*, 1979, vol.42, p.389; Линде А.Д. — Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.
4. Dolan L., Jackiv R. — *Phys.Rev.D*, 1974, vol.9, p.3320.
5. Su R., Bi P., Ni G. — *J.Phys.A*, 1983, vol.16, p.2445.
6. Осипов В.А., Федянин В.К. — ТМФ, 1987, т.73, с.393.
7. Roditi I. — *Phys.Lett.B*, 1986, vol.169, p.264.
8. Simon B. — *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*. Princeton University Press, Princeton, 1974.
9. Simon B., Griffiths R. — *Comm.Math.Phys.*, 1973, vol.33, p.145.
10. Glimm J., Jaffe A. — *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. Berlin, Springer-Verlag, 1981.
11. Glimm J., Jaffe A. — *Phys.Rev.D.*, 1975, vol.10, p.536.
12. Mc Bryan O., Rosen J. — *Comm.Math.Phys.*, 1976, vol.51, p.97.
13. Wilson K.G. — *Phys.Rev.D*, 1972, vol.6, p.419; Fox I.A., Hallihey I.G. — *Phys.Lett.B*, 1985, vol.159, p.148.
14. Aizenman M. — *Phys.Rev.Lett.*, 1981, vol.47, No.1, p.1; Frohlich J. — *Nucl.Phys.B.*, 1982, vol.200, No.2, p.281; Arago de Carvalho C., Caracciolo S., Frohlich J. — *Nucl.Phys.B.*, 1983, vol.215, No.2, p.209.
15. Barnes T., Chandour G.I. — *Phys.Rev.D*, 1980, vol.22, No.4, p.924.
16. Bardeen W.A., Moshe M. — *Phys.Rev.D*, 1983, No.6, p.1372.
17. Stevenson P.M. — *Phys.Rev.D*, 1984, vol.30, No.8, p.1712; *Z.Phys.C*, 1984, vol.24, No.1, p.87.
18. Consoli M., Giansito A. — *Nucl.Phys.B*, 1985, vol.254, No.3&4, p.653; Consoli M., Passarino A. — *Phys.Lett.B*, 1985, vol.165, No.1,2&3, p.113; Brihaye Y., Consoli M. — *Phys.Lett.B*, 1985, vol.157, No.1, p.48.
19. Chang S.-J. — *Phys.Rev.D*, 1975, vol.12, No.4, p.1071.
20. Magruder S.F. — *Phys.Rev.D*, 1976, vol.14, No.6, p.1602.
21. Baym G., Grinstein G. — *Phys.Rev.D*, 1977, vol.15, No.10, p.2897.
22. Grassi F., Hakim R., Sivak H.D. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1991, vol.6, No.26, p.4579.
23. Polli L., Ritchel U. — *Phys.Lett.B*, 1989, vol.221, No.1, p.44.
24. Feynman R.P. — In: *Proc. of the Int. Workshop: Variational Calculations in Quantum Field Theory*, eds L.Polley and D.Pottinger, World Scientific, Singapore, 1988.
25. Wudka J. — *Phys.Rev.D*, 1988, vol.37, No.6, p.1464.
26. Tarrach R. — *Class. Quantum Grav.*, 1986, vol.3, No.6, p.1207.
27. Ritschel U. — *Z.Phys.C*, 1991, vol.51, No.3, p.469.
28. Munoz-Tapia R., Taron J., Tarrach R. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1988, vol.3, No.9, p.2143.
29. Chang S.-J. — *Phys.Rev.D*, 1976, vol.13, No.10, p.2778.
30. Stevenson P.M., Alles B., Tarrach R. — *Phys.Rev.D*, 1987, vol.35, No.8, p.2407.
31. Efimov G.V. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1989, vol.4, No.18, p.4977.
32. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1992, vol.7, p.987.
33. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *Heidelberg University Preprint No.693*, 1991.
34. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *J.Phys.A*, 1992, vol.25, No.6, p.2721.
35. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *Int.J.Mod.Phys.A*, 1992, vol.7, No.19, p.4539.
36. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *JINR Preprint E2-92-287*, Dubna, 1992.
37. Stevenson P.M. — *Phys.Rev.D*, 1985, vol.32, No.6, p.1389.
38. Stevenson P.M., Roditi I. — *Phys.Rev.D*, 1986, vol.33, No.8, p.2305.
39. Tarrach R., Alles B. — *Phys.Rev.D*, 1986, vol.33, No.6, p.1718.
40. Kovner A., Rosenstein B. — *Phys.Rev.D*, 1989, vol.40, No.2, p.504.

41. Coleman S., Jackiw R., Politzer H.D. — *Phys.Rev.D*, 1974, vol.10, No.8, p.2491; Root R.J. — *Phys.Rev.D*, 1974, vol.10, p.3322.
42. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
43. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
44. Ефимов Г.В. — Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985.
45. Коллинз Дж. — Перенормировка. М.: Мир, 1988.
46. Efimov G.V., Nedelko S.N. — *JINR Preprint E2-89-478*, Dubna, 1989.
47. Бартон Г. — Дисперсионные методы в теории поля. М.: Атомиздат, 1968.
48. Coquereaux R. — *Ann.Phys.*, 1980, vol.125, No.2, p.401.
49. t'Hooft G. — *Nucl.Phys.B*, 1973, vol.61, p.455.
50. Завьялов — Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
51. van Hove L. — *Physica*, 1952, vol.18, No.3, p.145.
52. Friedrichs K.O. — *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*. Interscience. New York, 1953.
53. Wightman A.S., Scheweber S.S. — *Phys.Rev.*, 1955, vol.98, p.812.
54. Haag R. — *Dan.Mat.Fys.Medd.*, 1955, vol.29, No.12, p.1.
55. Hall D., Wightman A.S. — *Dan.Mat.Fys.Medd.*, 1957, vol.31, No.5, p.1.
56. Greenberg O.W. — *Phys.Rev.*, 1959, vol.115, No.3, p.706.
57. Вайтман А. — Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. М.: Наука, 1968.
58. Умедзава Х., Мацумото Х., Татики М. — Термополевая динамика и конденсированные состояния. М.: Мир, 1985.
59. Завьялов О.И., Сушко В.Н. — В сб.: *Статистическая физика и квантовая теория поля* (под ред. Н.Н.Боголюбова). М.: Наука, 1973.
60. Bogoliubov N.N. — *Nuovo Cim.*, 1958, vol.7, No.6, p.794.
61. Боголюбов Н.Н. — *ЖЭТФ*, 1958, т.34, 1, с.73.
62. Valatin J. — *Nuovo Cim.*, 1958, vol.7, No.6, p.843.
63. Gandbold G., Efimov G.V. — *JINR Preprint, E2-92-176*, Dubna, 1992.
64. Landsman N.P., van Weert Ch.F. — *Phys.Rep.*, 1987, vol.145, No.3 4, p.141.
65. Matsumoto H., Ojima I., Umezawa H. — *Ann.Phys.*, 1984, vol.152, No.2, p.348.
66. Казаков Д.И., Ширков Д.В. — *Препринт ОИЯИ, P2-80-462*, Дубна, 1980.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.12.01

О конфайнменте в калибровочных теориях. *Прохоров Л.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1994, том 25, вып.3, с. 559.

Анализируется проблема конфайнмента в калибровочных теориях. Исследуется широкий класс моделей с калибровочной симметрией, начиная от квантовой механики и кончая квантовой хромодинамикой. Подчеркнута целесообразность отделения чисто кинематического аспекта проблемы (запрет на появление определенных состояний, конфайнмент в широком смысле слова) от динамического (линейно растущий потенциал). При расширительном толковании термина конфайнмент имеет место в любой калибровочной теории.

Обсуждается природа удерживающих сил. Показана принципиальная роль вторичных связей первого рода в формировании окружающих заряды внешних полей, ответственных за статическое взаимодействие. Учет связей эквивалентен задаче о перечислении всех калибровочно-инвариантных структур полей. Интерпретация векторных калибровочных полей как связностей в расслоенном пространстве позволяет свести эту проблему к стандартной чисто математической задаче. В рамках данного подхода подробно изучаются внешние поля зарядов в теории с калибровочными группами $SU(n)$, $n = 1, 2, 3$.

Изучается эволюция струноподобных возбуждений электромагнитного поля в свободной электродинамике и в теории со статическими источниками; показана их неустойчивость. Это означает, что в электродинамике массивных зарядов линейный конфайнмент невозможен при любой силе взаимодействия.

Дана классификация различных видов конфайнмента в зависимости от физических параметров струны.

Ил.3. Библиогр.: 52.

УДК 539.12

Локальные вектор-параметры групп, формы Картана и приложения к теориям калибровочных и киральных полей. *Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1994, том 25, вып.3, с.603.

В обзоре рассмотрено развитие метода векторной параметризации групп и его применение к теориям калибровочных и киральных полей. Приведены сведения о естественных линейных параметризациях групп вращения, Лоренца, унитарных групп, группы и супергруппы Пуанкаре. Установлена связь между формами Картана и законом композиции вектор-параметров групп, которая позволяет вычислить простым образом формы Картана для ряда групп, не решая дифференциальных уравнений Картана — Мауэра. Получен явный вид конечных калибровочных преобразований групп унитарных, пространственно-временных симметрий и суперсимметрий, а также нелинейных реализаций калибровочных гравитации и супергравитации. Найдены формы Картана и лагранжианы главных киральных и голдстоуновских полей для групп $U(2)$, $SU(2)$, $U(3)$, $SU(3)$, обладающие новыми типами нелинейности (отношение полиномов). Получено простое выражение лагранжиана $SU(2)$ -модели Скимра в векторной параметризации группы $SU(2)$, содержащее только три независимые полевые переменные, которые можно отождествить с триплетом пионных полей. На основе этого лагранжиана рассмотрены сохраняющиеся токи модели и схема квантования вращательных коллективных возбуждений, в которой используются вектор-параметры $SO(3)$ в качестве коллективных координат скирмионов. В аналогичном плане исследован модифицированный вариант модели со стабилизирующим членом шестого порядка.

Библиогр.: 72.

УДК 539.12.01

Новые методы исследования радиационных поправок. Теория асимптотической операции. *Ткачев Ф.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1994, том 25, вып.3, с.649.

Обзор посвящен проблеме построения асимптотических разложений многопетлевых фейнмановских диаграмм по массам и внешним импульсам, являющейся центральной в пертурбативной квантовой теории поля. Обзор состоит из двух частей. В первой части анализируются особенности постановки этой задачи по сравнению с общематематической проблемой об асимптотическом разложении функций, заданных параметрическими интегралами. Для этого рассматриваются типичные физические задачи теории элементарных частиц, в существенном сводящиеся к построению таких разложений (глубоконеупругое лептон-нуклонное рассеяние, теория струй, задача о судаковском формфакторе и проч.). При этом особое внимание уделяется задачам, приводящим к неевклидовым асимптотическим режимам. Подчеркиваются два аспекта проблемы: во-первых, так называемое требование совершенной факторизации, сводящееся в техническом плане к требованию, чтобы разложения шли по чистым степеням и логарифмам параметра разложения; во-вторых, рекурсивный аспект задачи, связанный с иерархической структурой бесконечных совокупностей диаграмм, подлежащих изучению, и с необходимостью выполнения так называемой факторизации, т.е. преобразования разложений отдельных диаграмм к разложениям в терминах глобально определенных объектов (к операторному виду). Точная постановка задачи на содержательном уровне позволяет во второй части обзора обратиться к ее анализу с математической точки зрения. Показано, что получающаяся математическая задача наиболее адекватно формулируется в терминах теории обобщенных функций как задача о разложении подынтегральных выражений в смысле теории обобщенных функций. Вводится понятие асимптотической операции — конструктивной процедуры, доставляющей такие разложения. Показано, что асимптотическая операция по структуре подобна R-операции Боголюбова в том смысле, что требует введения (по сравнению с формальным разложением Тэйлора подынтегрального уравнения) контрчленов, локальных в импульсном представлении. Объясняется связь теории асимптотической операции со стандартными методами (теория БПХЦ, метод главного логарифмического приближения и т.п.). Обсуждается проблема изучения неевклидовых асимптотических режимов и указываются пути ее полного решения. Анализируются технические трудности, препятствовавшие решению задачи стандартными методами, и объясняется, как эти трудности обходятся или решаются в теории асимптотической операции.

Табл. 4. Ил. 9. Библиогр.: 108.

УДК 539.12...185+539.122

Метод измерения линейной поляризации фотонных пучков по асимметрии электронов отдачи при фотообразовании e^+e^- -пар на электронах. *Болдышев В.Ф., Винокуров Е.А., Меренков Н.П., Пересунько Ю.П.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1994, том 25, вып.3, с. 696.

В обзоре приводятся результаты исследований, связанных с разработкой метода измерения степени линейной поляризации фотонных пучков по азимутальной асимметрии электронов отдачи при рождении e^+e^- -пар на электронах. Рассматриваются некоторые вопросы кинематики процесса, оценивается вклад различных диаграмм Фейнмана в сечение рождения триплетов, роль кулоновских, радиационных поправок и поправки на связь электронов атомов. Приводятся различные дифференциальные и интегральные сечения

рождения триплетов линейно поляризованными фотонами, соответствующие диаграммам Борселлино, дающим основной вклад в полное сечение.

Проанализированы зависимости этих сечений от различных кинематических параметров процесса. Определены оптимальные условия для проведения эксперимента по измерению степени линейной поляризации фотонных пучков. Оценены возможности метода при использовании трековых приборов и быстродействующих детекторов. Приведены результаты проверочного эксперимента по измерению с помощью стримерной камеры СК-600, заполненной гелием, линейной поляризации пучка когерентного тормозного излучения электронов на харьковском линейном ускорителе ЛУЭ-2000 с энергией фотонов в когерентном пике 60 МэВ.

Показано, что метод асимметрии электронов отдачи может использоваться для измерения линейной поляризации фотонных пучков с энергией фотонов от нескольких десятков МэВ до нескольких ТэВ, при которых справедливы выражения для сечения, полученные в пределе высоких энергий.

Табл.17. Ил.27. Библиогр.: 95.

УДК 530.145

Неэквивалентные представления и фазовая структура $(\varphi^4)_d$ -теории поля. *Ефимов Г.В., Неделько С.Н.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1994, том 25, вып.3, с. 779.

Обсуждаются различные методы исследования фазовой структуры и режима сильной связи $(\varphi^4)_d$ -теории поля (вариационный подход, конструктивная квантовая теория поля, метод канонических преобразований и др.). Подробно рассмотрена фазовая структура суперперенормируемых моделей $(\varphi^4)_d$ ($d \leq 3$) при произвольных константе связи и температуре. Прослежена связь проблемы фазовой структуры квантово-полевых систем с унитарно неэквивалентными представлениями канонических коммутационных соотношений и ренормгруппой. Большое внимание уделено методу, основанному на канонических преобразованиях и формализме ренормгруппы. В этом подходе с помощью канонических преобразований вводится набор пробных вакуумных векторов (неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений). Лидирующие динамические вклады, формирующие основное состояние системы, учитываются посредством ренормгрупповых уравнений. Критерии отбора основного состояния базируются на сравнении плотностей свободной энергии и эффективных констант связи, характеризующих каждое представление. Механизмы перестройки основного состояния, исследованные в работе, могут найти применение при анализе реалистических квантово-полевых теорий.

Табл.1. Ил.23. Библиогр.: 66.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Прохоров Л.В.</i> О конфайнменте в калибровочных теориях	559
<i>Кувшинов В.И., Нгуен Вьен Тхо</i> Локальные вектор-параметры групп, формы Картана и приложения к теориям калибровочных и киральных полей	603
<i>Ткачев Ф.В.</i> Новые методы исследования радиационных поправок. Теория асимптотической операции	649
<i>Болдышев В.Ф., Винокуров Е.А., Меренков Н.П., Пересунько Ю.П.</i> Метод измерения линейной поляризации фотонных пучков по асимметрии электронов отдачи при фотообразовании e^+e^- -пар на электронах	696
<i>Ефимов Г.В., Неделько С.Н.</i> Неэквивалентные представления и фазовая структура $(\varphi^4)_d$ -теории поля	779

CONTENTS

<i>Prokhorov L. V.</i> On Confinement in Gauge Theories	559
<i>Kuvshinov V. I., Nguyen Vien Tho</i> Local Vector-Parameters of Groups, Cartan Forms and Applications to the Gauge and Chiral Field Theories	603
<i>Tkachov F. V.</i> Advanced Methods for Studing Radiative Corrections. Theory of Asymptotic Operation	649
<i>Boldyshev V. F., Vinokurov E. A., Merenkov N. P., Peresun'ko Yu. P.</i> A Method for Measurement of the Photon Beam Linear Polarization by Means of Recoil Electrons Asymmetry in the e^+e^- Pair Photoproduction on the Electrons	696
<i>Efimov G. V., Nedelko S. N.</i> Nonequivalent Representations and Phase Structure of the $(\varphi^4)_d$ Field Theory	779

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v , U и u , W и w , O и o , K и k , S и s , C и c , P и p , Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху ($\underline{S}$ и $\overline{s}$, $\underline{C}$ и $\overline{c}$). Необходимо делать четкое различие между буквами e , l , O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и 0 отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\underline{}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребляемых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны:

для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация), год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи.

Например:

1. Лезнов А.Н., Савельев М.В. — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. Годен М. — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. Turbiter A.V. — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. Ушверидзе А.Г. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректурa с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редактор Е.К.Аксенова.
Художественный редактор А.Л.Вульфсон.
Корректор Т.Е.Попеко.

Сдано в набор 18.02.94. Подписано в печать 5.05.94. Формат 60×90/16.
Бумага типографская № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 24,0. Уч.-изд.л. 29,68.
Тираж 800. Заказ 47190. Цена 800 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1994. Том 25. Вып.3. 555—850.