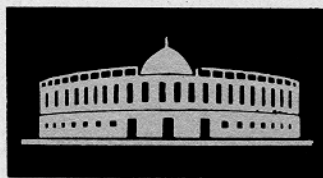


ISSN 0367-2026

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ



ЧАСТИЦ

и АТОМНОГО

ЯДРА

ВЫПУСК

1995 том 26 выпуск 5



JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.26

PART 5

Six issues per year

DUBNA 1995

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 26

ВЫПУСК 5

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1995

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ,

П.И.ЗАРУБИН

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

В.Г.СОЛОВЬЕВ

(зам. главного редактора),

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы **Е.К.Аксенова**, тел. 65-165

Э.В.Ивашевич

ФАЗОТРОН И ПРИНЦИП АВТОФАЗИРОВКИ (К пятидесятилетию открытия принципа автофазировки)

В.П.Джелепов, В.П.Дмитриевский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Изложена история развития в России ускорителей фазотронного типа после открытия В.И.Векслером и Е.М.МакМилланом принципа автофазировки. В основном сообщаются результаты исследований, связанных с созданием таких ускорителей, включая и некоторые работы, которые в свое время не были опубликованы в периодической печати. Рассмотрены отдельные теоретические аспекты применения принципа автофазировки, не имеющие аналогов в действующих фазотронах. Указаны возможные пути дальнейшего развития принципа автофазировки в резонансных ускорителях. В краткой форме для иллюстрации роли фазотронов в развитии ядерной физики сообщается о наиболее важных исследованиях, выполненных в Объединенном институте ядерных исследований на обычном 680 МэВ протонном синхротроклотроне и проводимых на созданном на основе его магнита фазотроне с пространственной вариацией магнитного поля на ту же энергию.

The main moments are exposed of the history of the development in Russia of accelerators of the phasotron type after the discovery by V.I.Veksler and E.M.McMillan of the phase stability principle. The results are presented of studies related to the development and production of these accelerators, including some of those that had not been published in periodicals. Certain theoretical aspects are considered, which are related to the application of the phase stability principle and which have no analogues in phasotrons under operation. Possible ways are indicated for further development of the phase stability principle in resonance accelerators. By way of example illustrating the role of phasotrons in development of nuclear physics, we briefly report the most important investigations carried out at the Joint Institute for Nuclear Research with an ordinary 680 MeV proton synchrocyclotron and a phasotron with spatial variation of the magnetic field for the same energy based on the magnet of the above synchrocyclotron.

Открытие В.И.Векслером [1] в 1944 г. и независимо МакМилланом [2] в 1945 г. принципа автофазировки частиц в ускорителях было повсеместно оценено учеными, работающими в области физики элементарных частиц и

атомного ядра, как выдающееся научное достижение мирового значения. Оно снимало жесткое ограничение на предельную энергию ионов, которую можно было получить при использовании предложенного и реализованного в 30-х годах Е.А.Лоуренсом [3] циклотронного принципа ускорения частиц в постоянном магнитном поле при фиксированной частоте ускоряющего электрического поля, и тем самым открывало возможность для ускорения частиц до практически неограниченно высоких энергий. Принцип автофазировки устранил отмеченное ограничение простейшим способом — путем использования модуляции во времени частоты ускоряющего напряжения. При ускорении частиц до энергий 1 ГэВ используются одновременно и модуляция частоты, и растущее во времени магнитное поле.

К одному из многочисленных применений принципа автофазировки следует отнести создание ускорителей заряженных частиц типа «фазотрон», который часто называют синхроциклотроном.

Разработки первого в СССР синхроциклотрона по инициативе И.В.Курчатова начались в руководимой им Лаборатории № 2 в Москве вскоре после открытия В.И.Векслером принципа автофазировки. Решение правительства о сооружении ускорителя состоялось в августе 1946 г. Все работы, выполнявшиеся в связи с этим решением, шли под грифом «совершенно секретно».

В 1947 г. в Лаборатории № 2 был организован небольшой ускорительный отдел во главе с М.Г.Мещеряковым — научным руководителем проекта синхроциклотрона.

В 1948 г. в целях форсирования работ по созданию ускорителя и подготовки программы и аппаратуры для физических исследований на нем была создана специальная Лаборатория (директор М.Г.Мещеряков), названная из соображений секретности Гидротехнической (ГТЛ). Один из авторов обзора (В.П.Джелепов) был назначен заместителем директора этой лаборатории и зам. научного руководителя проекта синхроциклотрона. Наша лаборатория дала физическое обоснование ускорителя, выполнила необходимые работы по моделированию процесса ускорения и совместно с ведущими проектными организациями выработала проектное задание на ускоритель и весь комплекс сооружений.

Разработка ВЧ-системы и технического проекта ускорителя в целом была возложена на Лабораторию А.Л.Минца — известного специалиста в области мощных радиочастотных систем. Рабочий проект ускорителя, включая электромагнит с диаметром полюсов 5 м, вакуумную камеру, дуантную систему и вариатор частоты, изготовило специальное конструкторское бюро Д.В.Ефремова при заводе «Электросила» в Ленинграде.

Гидротехническую лабораторию и ускоритель было решено построить в 125 км от Москвы близ маленького поселка Ново-Иваньково (в будущем г.Дубна) на берегу реки Волги в нескольких километрах от первой гидро-

электростанции Волжского каскада. На первых порах синхроциклотрон должен был ускорять дейтроны и α -частицы до энергий 280 и 560 МэВ соответственно, а позднее (после увеличения диаметра полюсов до 6 м) протоны до энергии 680 МэВ.

В обзоре излагаются в краткой форме теоретические исследования по принципу автофазировки, выполненные применительно к двум ускорителям:

- к обычному синхроциклотрону со спадающим по радиусу магнитным полем, созданному в Дубне в 1949 г. [4];
- к фазотрону (на энергию 680 МэВ), сооруженному также в Дубне, со спиральной вариацией и нарастающим по радиусу средним магнитным полем.

Этот ускоритель заменил изношенный за 30 лет работы синхроциклотрон.

Новый фазотрон был создан под научным руководством В.П.Джелепова, В.П.Дмитриевского и Л.М.Онищенко на основе ярма электромагнита синхроциклотрона. Он введен в действие в 1984 г. [5] и обладает существенно лучшими, по сравнению со старым синхроциклотроном, параметрами: в несколько раз больший ток, в 20 раз большая интенсивность выведенного пучка протонов, лучшая временная растяжка пучка и т.д.

Принцип действия обоих ускорителей основан на резонансном взаимодействии высокочастотного, модулируемого по частоте электрического поля с ионами, циркулирующими около замкнутых орбит в стационарном магнитном поле.

При наличии модуляции частоты ускоряющего поля во времени $f(t)$ было очевидно, что для сохранения резонансного условия ускорения $\omega = \omega_s$ необходимо дополнительное условие

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_s}{dt}, \quad (1)$$

сохраняющее резонанс во времени, где $\omega_s = 2\pi f$ — угловая частота ускоряющего поля, ω — угловая частота иона на замкнутых орбитах в заданной структуре магнитного поля. Для азимутально-симметричного магнитного поля $B(r)$ замкнутыми орбитами являются окружности радиуса r , на которых

$$\omega = \frac{e c B}{\sqrt{e^2 B^2 r^2 + E_0^2}}, \quad (2)$$

где E_0 — энергия покоя иона, e — заряд.

Из (2) следует, что каждому радиусу однозначно соответствует определенная частота и полная энергия иона:

$$E = \sqrt{e^2 B^2 r^2 + E_0^2}. \quad (3)$$

Условие (1) для резонансного иона в этом случае записывается в виде

$$K_s \frac{dE_s}{dt} = - \frac{E_s}{\omega_s} \frac{d\omega_s}{dt}, \quad (4)$$

где $K_s = - \frac{E_s}{\omega_s} \frac{d\omega_s}{dE_s}$ определяется структурой магнитного поля и энергией на каждом радиусе, индекс s относится к резонансному иону. Для такого магнитного поля фазотрона

$$K_s = 1 + \frac{n}{1-n} \frac{1}{\beta^2}, \quad n = - \frac{r}{B} \frac{dB}{dr}, \quad (5)$$

где v — скорость иона на радиусе r , $\beta = \frac{v}{c}$.

Для магнитных структур с растущей по радиусу средней индукцией

$$K_s = 1 - \frac{n_1}{1+n_1} = \frac{1}{\beta^2}, \quad n_1 = \frac{r}{B} \frac{dB}{dr}. \quad (5')$$

Условие (4) указывает на необходимое увеличение энергии для сохранения резонанса; так, за один оборот (период высокочастотного ускоряющего поля) эта величина должна быть равна

$$\Delta E_s = \frac{dE_s}{dt} \frac{2\pi}{\omega_s} = - \frac{2\pi E_s}{\omega_s^2 K_s} \frac{d\omega_s}{dt}. \quad (6)$$

Если максимальное значение набора энергии ионом за один оборот обозначить eV , то резонансная частица может ускоряться на фазе ϕ_s при условии

$$\cos \phi_s = - \frac{2\pi E_s}{eV \omega_s^2 K_s} \frac{d\omega_s}{dt} = \text{const} \quad (7)$$

как угодно долго. При этом критерием выбора параметров ускорителя является условие

$$0 < \cos \phi_s < 1, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{K_s} \frac{d\omega_s}{dt} < 0. \quad (8)$$

Однако такая система, в которой резонансным способом можно ускорить одну частицу, еще не является ускорителем. Только принцип автофазировки превратил эту систему в ускоритель.

Физический смысл автофазировки для фазотронного режима ускорения при наличии источника ионов в центре магнита ($r = 0$) заключался в опре-

делении конечного промежутка времени, в течение которого ионы, отсасываемые из ионного источника, могут устойчиво колебаться по фазам высокочастотного поля со средним набором энергии больше нуля.

Определению этого промежутка времени (τ), отнесенного к периоду модуляции ($T = 1/F_m$), и были посвящены первые теоретические работы 1947—1948 гг. по использованию принципа автофазировки в фазотронном режиме ускорения [6,7].

Теория базировалась на выводе и анализе фазового уравнения в предположении малости смещения фазы иона за один оборот, когда возможен переход от системы в конечных разностях (микротрон) к системе дифференциальных уравнений.

Использовались очевидные соотношения для нерезонансного иона:

$$\frac{2\pi}{\omega} \frac{dE}{dt} - \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{dE_s}{dt} = eV \cos \varphi - eV \cos \varphi_s, \\ \Delta\omega = -\omega K \frac{\Delta E}{E}, \quad \Delta E = E - E_s. \quad (9)$$

Так как φ — фаза высокочастотного поля, при которой нерезонансный ион пересекает ускоряющий промежуток, смещение фазы за один оборот иона составляет

$$\frac{d\varphi}{dt} \frac{2\pi}{\omega} = \omega_s \frac{2\pi}{\omega} - 2\pi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_s - \omega. \quad (10)$$

При заданной структуре магнитного поля известны временные характеристики только для резонансного иона E_s , ω_s , K_s ; система (9) при условиях $\frac{\Delta\omega}{\omega_s} \ll 1$, $\frac{\Delta E}{E_s} \ll 1$ и $K = -\frac{d \ln \omega}{d \ln E} = K_s$ в линейном приближении преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) = \frac{eV}{2\pi} (\cos \varphi - \cos \varphi_s), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_s K_s \frac{\Delta E}{E_s}. \quad (11)$$

Равенство $K = K_s$ вытекает из справедливости (2) и (3) для нерезонансных ионов, если не учитывать поперечных колебаний, которые вносят пренебрежимо малый вклад при реально используемых эмиттансах пучка.

Для аналитического исследования решений система (11) записывается в виде одного уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E_s \dot{\varphi}}{\omega_s^2 K} \right) - \frac{eV}{2\pi} \cos \varphi = -\frac{eV}{2\pi} \cos \varphi_s, \quad \text{где } \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (12)$$

При условии постоянства коэффициентов из (12) непосредственно следует, что для малых отклонений фазы нерезонансного иона $\varphi = \varphi_s + \delta$, $\delta \ll 1$, уравнение (12) можно записать в форме

$$\frac{E_s}{\omega_s^2 K} \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{eV}{2\pi} \sin \varphi_s \delta = 0. \quad (13)$$

Из (13) следует, что в фазотронном режиме имеются две устойчивые фазы $\pm \varphi_s$, соответствующие двум знакам коэффициента $\pm K$, которые определяют режимы с уменьшением (+) и возрастанием (−) частоты ускоряющего поля в процессе ускорения.

Анализ эффективности инжекции в фазотронном режиме ускорения был выполнен на основе рассмотрения первого интеграла уравнения (12).

При условиях $\frac{E_s}{\omega_s^2 K} = \text{const}$, $\cos \varphi_s = \text{const}$ и $eV = \text{const}$ на первом фазовом колебании

$$\frac{\pi E_s}{eV \omega_s^2 K} (\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2) = \sin \varphi - \sin \varphi_0 - \varphi \cos \varphi_s + \varphi_0 \cos \varphi_s. \quad (14)$$

Так как замена φ на φ_0 не меняет уравнения (14), анализ устойчивости, выполненный для $(\varphi, \dot{\varphi})$, автоматически переносится на область начальных условий $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$.

Из (14) следует, что уравнение

$$\frac{\pi E_s}{eV \omega_s^2 K} \dot{\varphi}^2 = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s + C \quad (15)$$

совместно с

$$\frac{dE}{d\varphi} = \frac{eV \omega \cos \varphi}{2\pi \dot{\varphi}} \quad (16)$$

определяет интервал устойчивых фаз и увеличение энергии за полупериод фазовых колебаний T_f :

$$\Delta E = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{eV \omega \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{eV \omega_s^2 K}{\pi E} \sqrt{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s + C}}} = eV \cos \varphi_s \frac{\omega T_f}{2\pi} \quad (17)$$

при условии $\dot{\varphi}(\varphi_1) = \dot{\varphi}(\varphi_2) = 0$; $T_f = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}$.

Так как $\frac{\omega T_f}{2\pi}$ есть число оборотов иона на полупериоде, средний набор энергии для всех ионов за один оборот одинаков и равен $eV \cos \varphi_s$. Постоянная C в уравнении (15) определяет амплитуды фазовых колебаний, с которыми ионы колеблются в потенциальной яме:

$$U(\varphi) = \varphi \cos \varphi_s - \sin \varphi \quad \text{для } K > 0, \quad (18)$$

$$U(\varphi) = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s \quad \text{для } K < 0. \quad (19)$$

Минимумы эти кривых, соответствующие устойчивым фазовым колебаниям, расположены при $\varphi = \varphi_s$ ($K > 0$) и $\varphi = -\varphi_s$ ($K < 0$), а максимумы при $\varphi = -\varphi_s$ и $\varphi = \varphi_s$ соответственно. Последние определяют максимальные значения постоянной C для $K > 0$ и $K < 0$:

$$C_{\max} = -\varphi_s \cos \varphi_s + \sin \varphi_s \quad (K > 0),$$

$$C_{\max} = \varphi_s \cos \varphi_s - \sin \varphi_s \quad (K < 0), \quad (20)$$

что непосредственно следует из (15) при условии $\dot{\varphi} (\mp \varphi_s) = 0$. Естественно, что эти значения совпадают, так как глубина потенциальной ямы $U(\varphi)$ одинакова при обоих вариантах ($K > 0$, $K < 0$). Второе максимальное отклонение фазы φ_2 вычисляется из условия $\dot{\varphi}(\varphi_2) = 0$:

$$\sin \varphi_2 - \varphi_2 \cos \varphi_s + \sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s = 0 \quad (K > 0),$$

$$-\sin \varphi_2 + \varphi_2 \cos \varphi_s - \sin \varphi_s + \varphi_s \cos \varphi_s = 0 \quad (K < 0), \quad (21)$$

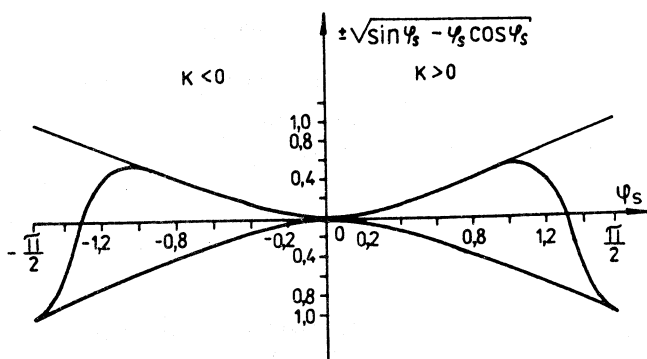
т.е. второе равенство отличается от первого только знаком устойчивой фазы $\varphi_s = -|\varphi_s|$:

$$\sin \varphi_2 - \varphi_2 \cos |\varphi_s| + \sin |\varphi_s| - |\varphi_s| \cos \varphi_s = 0. \quad (22)$$

Максимальное значение $\dot{\varphi}$ в обоих случаях одинаково и соответствует равновесной фазе $\varphi = \pm \varphi_s$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{\max} &= \omega_s \sqrt{\frac{2eVK}{\pi E_s}} \sqrt{\sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s}, \\ \dot{\varphi}_{\max} &= \omega_s \sqrt{\frac{2eV|K|}{\pi E_s}} \sqrt{\sin |\varphi_s| - |\varphi_s| \cos \varphi_s}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $|K|$ и $|\varphi_s|$ — модульные значения.

Рис.1. Функции $L(\varphi_s)$ для $K > 0$ и $K < 0$

На рис.1 приведен график этой функции в зависимости от φ_s для интервала $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_s \leq \frac{\pi}{2}$.

Для фазотронов с неразрезной структурой магнитного поля (сплошной магнит) эта область уменьшается вследствие механизма потери энергии до нулевого значения на первом фазовом колебании в области отрицательных значений $\cos \varphi \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2, K > 0 \text{ и } \frac{\pi}{2} - \varphi_2, K < 0 \right)$, что непосредственно следует из (21) и (22).

Из (17) следует, что набор энергии ионом ΔE на первом фазовом колебании может обращаться в нуль при условиях

$$\Delta E \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s + \sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s}} +$$

$$+ 2 \int_{\pi/2}^{\varphi_{\max}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s + \sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s}} = 0,$$

где $\varphi_{\max} < \varphi_2$ определяет новую константу C при $\dot{\varphi}_0 > 0$ и

$$\Delta E \equiv 2 \int_0^{-\varphi_s} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s + \sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s + \sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s}} + \\
 & + 2 \int_{\pi/2}^{\varphi_{\max}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi_s + \sin \varphi_s - \varphi_s \cos \varphi_s}} = 0 \quad \text{для } \dot{\varphi}_0 < 0. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Начальная фаза равна нулю в (24) из-за наличия процесса фазировки ионов после отсоса из ионного источника (если отсутствует специальное приспособление для отсоса типа пулера).

Удвоение интегралов в (24) соответствует двойному проходу области изменения энергии на первом фазовом колебании. Имеются два значения $\cos \varphi_s$, при которых этот эффект или полностью закрывает возможность набора энергии для режима $\cos \varphi_s = 0$, или полностью отсутствует — $\cos \varphi_s \approx 0,5$. Промежуточные значения $\dot{\varphi}_0$ численно определяются из (24). Графики этих функций для $K > 0$ и $K < 0$ приведены на рис.1.

Таким образом, теоретически эффективность захвата в фазотроне

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2\omega_s \sqrt{2eV|K|}}{T \left| \frac{d\omega_s}{dt} \right|} L(\varphi_s), \quad (25)$$

где величина $L(\varphi_s)$ берется из замкнутой области графиков рис.1.

Теория справедлива как для спадающей по радиусу средней индукции магнитного поля ($K > 0$), так и для растущей $K < 0$. Следует, однако, отметить, что возрастающее среднее магнитное поле приводит к отрицательным значениям величины K только при условии $|n| > \frac{r^2}{r_\infty^2}$ в области пер-

вого фазового колебания $\left(r_\infty = \frac{c}{\omega_0}, \omega_0 = \frac{eB(0)}{E_0} \right)$.

Для проверки теории в 1948 г. в Лаборатории № 2 (Институт им. И.В.Курчатова) под руководством М.Г.Мещерякова была создана модель фазотрона на базе магнита диаметром 90 см. На модели экспериментально было установлено, что эффект автофазировки действительно существует, однако были замечены некоторые отклонения от разработанной теории. К основным замеченным отклонениям следует отнести наличие интенсивности (масштаба нескольких процентов от максимального тока) в режимах $\cos \varphi_s > 1$, а также потери интенсивности вдоль радиуса ускорителя.

Оба эффекта оказались связанными между собой, так как потерянные в одном цикле ионы, время жизни которых превышало период модуляции,

могли быть подхвачены в последующих циклах даже при отсутствии условий автофазировки. Аналогичный результат был получен в работе [8].

Существенным результатом проведенного моделирования был вывод о возможности использования принципа автофазировки при условии нарушения постоянства коэффициентов фазового уравнения (14), включая условие $\cos \varphi_s = \text{const}$, на котором базировалось теоретическое рассмотрение.

При запуске и исследовании характеристик 184-дюймового фазотрона в Беркли [9] была сделана первая попытка расширить теорию автофазировки при медленном (по сравнению с периодом фазовых колебаний) изменении параметров фазового уравнения (14). Теория базировалась на использовании инвариантности во времени интеграла $J = \oint \frac{E_s}{\omega_s^2 K} \dot{\varphi} d\varphi$ при адиабатиче-

ском изменении параметров во время ускорения, что соответствует сохранению одномерного фазового объема на всех фазовых колебаниях.

Авторы работы [9] рассмотрели изменение интеграла для малых фазовых колебаний, для которых $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{\max} \sin \omega_f t$, $\omega_f = \omega_s \sqrt{\frac{eVK \sin \varphi_s}{2\pi E_s}}$.

В этом случае на всех фазовых колебаниях

$$\frac{E_s}{\omega_s^2 K} \frac{\dot{\varphi}_{\max}^2}{\omega_f} = \text{const.} \quad (26)$$

Предполагая возможность использования этой закономерности для сепаратрисных значений $\dot{\varphi}_{\max}$, можно внести коррективы в функцию $L(\varphi_s)$ при учете реальных экспериментальных изменений параметров при ускорении. В результате было получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными, несмотря на нестрогость предположения о возможности использования малых колебаний при рассмотрении сепаратрис. К наиболее важным результатам такого теоретического рассмотрения следует отнести появление более плоского максимума функции $L(\varphi_s)$ и уменьшение предельного значения $\cos \varphi_s$, соответствующего нулевой интенсивности.

Пятиметровый синхротрон введен в действие в декабре 1949 г. [4], и на нем в соответствии с проектом были ускорены дейтроны и α -частицы до энергии 280 и 560 МэВ соответственно, а в 1953 г. (после увеличения диаметра полюсов магнита до 6 м) — и протоны с энергией 680 МэВ (интенсивность $\approx 0,3$ мкА) [10]. На рис.2 показан общий вид шестиметрового синхротрона.

В 1956 г. в момент организации Объединенного института ядерных исследований синхротрон на энергию протонов 680 МэВ стал базовой

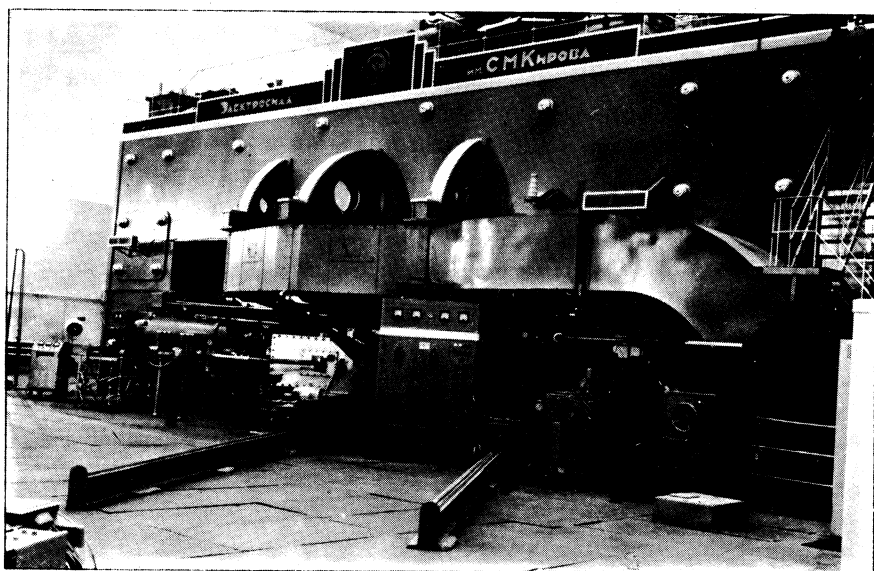


Рис.2. Общий вид синхроциклотрона ОИЯИ на энергию протонов 680 МэВ

установкой Лаборатории ядерных проблем (директор В.П.Джелепов) Объединенного института ядерных исследований.

В качестве ускоряющей системы синхроциклотрона использовалась полуволновая резонансная линия с механическим вращающимся вариатором, который обеспечивал модуляцию частоты ускоряющего напряжения на дуанте в диапазоне $25,6 + 13,6$ МГц при амплитуде до 15 кВ [11].

В этом режиме синхроциклотрон проработал до 1979 г. Путем улучшения частотной характеристики вариатора частоты [12], а также некоторой оптимизации фазового режима ускорения интенсивность внутреннего пучка в 1964 г. была доведена до 2,3 мкА [13].

На ускорителе был создан большой комплекс пучков протонов и нейтронов (поляризованных и неполяризованных), $\pi^\pm$ -мезонов, а также жестко-фокусирующий тракт для пучков μ -мезонов различных энергий.

В результате этих работ с начала 60-х годов 680 МэВ синхроциклотрон стал лидирующим в мире ускорителем среди машин своего класса. В течение 30 лет работы ускорителя на его пучках была выполнена обширная программа исследований по физике элементарных частиц и атомного ядра в области промежуточных энергий. Во многих из этих исследований получены результаты высокого мирового уровня. В ряде работ были сделаны фундаментальные открытия.

Несколько примеров для иллюстрации.

Эксперименты по проверке общих принципов симметрии, лежащих в основе сильного взаимодействия частиц. В 50-х и начале 60-х годов в опытах по упругому рассеянию нуклонов нуклонами была доказана зарядовая симметрия ядерных сил при высоких энергиях, а в экспериментах по образованию пионов в неупругих соударениях нуклонов с нуклонами — изотопическая инвариантность этих сил. Результаты изучения упругого рассеяния неполяризованных и поляризованных нуклонов на нуклонах позволили выполнить фазовый анализ данных и определить матрицу рассеяния.

В 1951—1953 гг. на основании теоретических соображений Б.Понтекорво независимо от А.Пайса предсказал явление совместного рождения тяжелого мезона с гипероном. Это впоследствии было подтверждено прямыми опытами, проведенными на космотроне в США. Однако на синхротроне ОИЯИ Б.Понтекорво поставил специальные опыты с целью наблюдать рождение Λ^0 -частиц при бомбардировке углерода протонами с энергией 680 МэВ, вполне достаточной для их образования. Опыты показали, что Λ^0 -частицы в этих условиях не рождаются. Это явилось дополнительным и сильным аргументом в пользу справедливости гипотезы о совместном рождении Λ^0 -частицы и тяжелого мезона.

В 1962 г. с помощью тонкой методики было открыто очень редкое явление бета-распада пиона ($\pi^+ \rightarrow e^+ + \pi^0 + \nu_e$) и тем самым доказана справедливость предсказанного теоретиками закона о сохранении векторного тока в слабом взаимодействии.

Результаты экспериментов по захвату отрицательных мюонов ядрами гелия-3 (1962 г.) и протонами (1974 г.) (использовались газообразные водород и гелий-3) убедительно доказали принципиально важный факт тождественности свойств мюонов и электронов в слабом взаимодействии.

В 1976 г. в опытах по исследованию редких распадов мюонов на магнитном спектрометре с 4 π -детектором получено на несколько порядков более низкое из известных тогда значений вероятности процесса распада $\mu \rightarrow 3e$ $R < 2 \cdot 10^{-9}$. Это явилось ярким свидетельством справедливости закона сохранения лептонных чисел.

В 1957 г. было открыто явление прямого выбивания из атомных ядер протонами высоких энергий дейтронов, а несколько позднее также ядер ^3He и ^4He с импульсами порядка 1500 ÷ 1900 МэВ/с. Это явилось прямым свидетельством существования флуктуаций плотности — образования нуклонных кластеров в ядерном веществе. При исследовании взаимодействия пионов с ядрами в 1963 г. было обнаружено и впоследствии подробно изучалось явление двойной перезарядки пионов.

Новые явления в физике мюонов наблюдались также с помощью μSR -метода. Это обнаружение существования мюония в конденсированных средах (1965 г.), наблюдение в 70-х годах некогерентной квантовой диффузии μ^+ -мезонов в твердом веществе и др.

Значительные исследования были выполнены в области ядерной спектроскопии. Было открыто более 100 новых нейтронодефицитных радиоактивных изотопов, некоторые из которых оказались расположенными очень близко к границе протонной устойчивости ядер и т.д. Более подробные сведения об отмеченных выше и других работах, выполненных на синхроциклотроне ОИЯИ до 1978 г., содержатся в специальных обзорах [14] со ссылками на оригинальные публикации.

В процессе систематических исследований на синхроциклотроне мю-атомных и мю-молекулярных процессов в изотопах водорода (1964—1977 гг.) было открыто явление резонансного образования мюонных молекул дейтерия (резкого возрастания скорости их образования в узком интервале энергий $d\mu$ -атомов), а в 1979 г. в опытах с дейтерий-третиевой смесью также впервые было установлено, что скорость образования $dt\mu$ -молекул $\lambda_{dt\mu} > 10^8 \text{ с}^{-1}$ и почти в 100 раз превышает таковую для $dd\mu$ -молекул. Одновременно было найдено, что скорость изотопного обмена мюона ($d\mu + t \rightarrow t\mu + d$) также велика и составляет величину $\lambda_{dt} \sim 2,9 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ [15]. Полученные опытные данные для $\lambda_{dt\mu}$ и λ_{dt} хорошо согласовались с предсказанными в 1977—1978 гг. дубненскими теоретиками [16] и свидетельствовали в пользу их утверждения о том, что в этих условиях с учетом вычисленной вероятности прилипания мюона к ядрам ${}^4\text{He} \simeq 10^{-2}$ каждый мюон за время своей жизни может осуществить порядка 100 реакций dt -синтеза и освободить энергию $\sim 2 \text{ ГэВ}$ [16].

Эти открытия, сделанные в Дубне, и данная им здесь адекватная теоретическая интерпретация позволяют с достаточной объективностью считать Дубну местом второго рождения мюонного катализа. Они воскресили утраченный к тому времени в США и на Западе интерес к мю-катализу и инициировали бурное развитие экспериментальных и теоретических исследований проблемы во многих ядерных центрах мира — поначалу в основном в связи с поисками новых источников энергии и нейтронов, а позднее в связи с возможностью изучения различных тонких эффектов, таких, например, как поляризация вакуума или исследование взаимодействия самых легких ядер в чистых спиновых состояниях при супермалых скоростях относительного движения этих ядер и т.п.

Следует отметить, что в 1967 г. второй обычный синхроциклотрон со спадающим к краю магнитным полем, как и в Дубне, был построен в филиале Физико-технического института им.Б.П.Константинова Академии

наук СССР (ныне ПИЯФ РАН) в Гатчине. Это самый большой в мире синхроциклотрон. Диаметр полюса магнита 6,85 м, вес магнита 7600 тонн. На нем ускоряются протоны до энергии 1000 МэВ [17]. На пучках этого ускорителя также было проведено много исследований и получен ряд результатов высокой научной значимости, в особенности в области нуклон-нуклонного и упругого протон-ядерного рассеяния, изучения свойств конденсированного вещества μSR -методом, мюонного катализа и т.п.

Следующим этапом использования принципа автофазировки в фазотронах было применение возрастающей по радиусу средней индукции магнитного поля. Изложенная теория фазовых колебаний не связана с поперечной устойчивостью ионов в процессе ускорения, вследствие чего она остается справедливой для произвольных структур магнитного поля $n \geq 0$.

После предложения об использовании в ускорителях азимутально-неоднородных магнитных полей [18] — секторных и спиральных [19,20], проблема поперечной устойчивости была решена для широкого класса структур.

Для зеркально-симметричных структур магнитных полей с нулевыми значениями поперечных компонент в медианной плоскости форма уравнений (2) и (3) не изменяется, так как

$$\omega = \frac{2\pi\beta c}{L} = \frac{ec \oint B_z ds}{EL} = \frac{ec\hat{B}}{E}, \quad (27)$$

где $L = 2\pi\hat{r}$ — длина замкнутой орбиты в периодической структуре поля, $\oint B_z ds = \hat{B}L$, $E = \sqrt{p^2c^2 + E_0^2}$, $p = \frac{e}{2\pi c} \oint B_z ds$, ds — элемент замкнутой орбиты.

Таким образом, формулы (2) и (3) сохраняются, если $B = \hat{B}$ — средняя индукция на замкнутой орбите, а $r = \hat{r}$ — средний радиус замкнутой орбиты.

Существенное отличие в характере фазового движения для магнитных полей с растущей вдоль радиуса средней индукцией поля заключается в значениях параметра K (5').

Если величина $n_1 = \frac{\hat{r}}{\hat{B}} \frac{dB}{dr} < \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$ в диапазоне радиусов ускорения, то

частота ускоряющего поля будет убывающей $\left(\frac{d\omega_s}{dt} < 0 \right)$, при обратном неравенстве — возрастающей $\left(\frac{d\omega_s}{dt} > 0 \right)$. При $n_1 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$ в диапазоне ускорения, что соответствует критической энергии, автофазировка нарушается.

В течение длительного времени (в отличие от синхрофазотронов) теоретическое рассмотрение возможности прохождения пучком зоны критической энергии в фазотронном режиме ускорения не проводилось в связи с тем, что во всех действующих фазотронах критическая энергия отсутствовала. Однако эта проблема возникла в связи с разработкой в 70-х годах в Колумбийском университете США [21] и в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ, Дубна [22] фазотронов с растущей средней индукцией магнитного поля вдоль радиуса, на которых, как показали расчеты, можно получить существенно большую интенсивность ускоренного пучка, чем на обычных фазотронах.

Устойчивость аксиальных колебаний в таких магнитных полях создается вариацией магнитного поля. Однако создать необходимую вариацию можно, только начиная с радиусов, превышающих вертикальный зазор между ферромагнитными элементами [20].

Рассмотрение проблемы устойчивости показало, что ее можно решить двумя способами.

1. Сделать так, чтобы радиусы первых оборотов ионов после отсоса из ионного источника располагались в зоне вертикальной устойчивости.

2. Создать в зоне малых радиусов спадающую по величине индукцию магнитного поля с последующим переходом в растущую («бамп магнитного поля») при нарушении фазовой устойчивости в зоне первого фазового колебания.

Первый способ был реализован на фазотроне Колумбийского университета. Второй — на новом фазотроне Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ в Дубне.

Основная трудность при реализации первого способа заключалась в необходимости размещения железных масс (шимм) в дуантной ускоряющей системе, что повлекло за собой необходимость разработки силовых изоляторов и создало некоторые трудности при их эксплуатации. Вскоре этот ускоритель был закрыт.

Второй способ привел к необходимости исследования принципа автофазировки в зоне неустойчивости при существенных изменениях параметров в области первого фазового колебания, а также радиальной неустойчивости вблизи $n = 0$ (ограничения на первую гармонику в структуре поля).

На рис.3 приведен график изменения параметра K (кривая 2) в центральной области фазотрона ОИЯИ. Кривая 1 — расчетная в отсутствие «бампа».

Естественно, что при таком характере изменения K (наличие двух нулевых его значений) классическая теория неприменима. Однако численные расчеты, выполненные в Лаборатории ядерных проблем для различных структур магнитного поля, показали возможность использования принципа автофазировки даже в таких нестандартных условиях. Эффективность

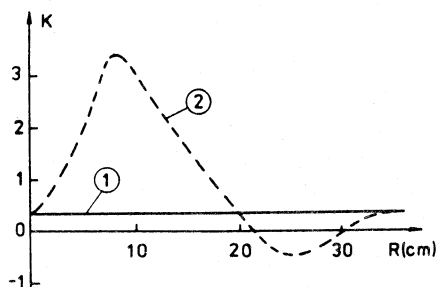


Рис.3. График изменения параметра K в центральной области нового фазотрона ОИЯИ на энергию протонов 680 МэВ

захвата оказалась близкой к сепаратрисному значению после прохождения зоны неустойчивости [23].

В таком режиме фазотрон ОИЯИ на энергию протонов 680 МэВ работает с 1984 года [5].

Внутреннее устройство магнитной системы нового ускорителя показано на рис.4. Видны железные шиммы, имеющие форму спиралей Архимеда, размещенные на диске нижнего полюса электромагнита. Такие же шиммы располагаются на диске верхнего полюса. В совокупности они создают необходимую пространственную вариацию поля. Рост средней напряженности поля на 30% от центра, где она составляет 1,2 Тл, до крайних орбит в основном обеспечивается формой железных дисков, на которых закреплены спиральные шиммы.

Возрастающее вдоль радиуса магнитное поле дало возможность уменьшить почти в 3 раза интервал частот ускоряющего высокочастотного напряжения по сравнению с ранее работавшим синхроциклотроном, увеличить вдвое напряжение на дуанте (от 15 до 45 кВ) и использовать в резонансной системе однородную полуволновую линию. Это позволило во всем диапазоне частот иметь напряжение на вариаторе, не превышающее напряжение на дуанте.

Максимальная интенсивность внутреннего пучка фазотрона была зафиксирована на уровне 9,2 мкА [24], что примерно в 4 раза больше, чем у ранее работавшего синхроциклотрона, коэффициент вывода в 10 раз превышает имевшийся ранее, растяжка пучка больше, а интенсивность растянутого пучка равномернее.

На этом ускорителе создан целый ряд каналов пучков частиц, включая пучок поверхностных мюонов (рис.5), которые используются для ядерно-физических исследований. Сооружен также шестикабинный клинично-физический комплекс, на котором физиками Лаборатории ядерных проблем совместно с радиологами Онкологического центра России проводится лечение онкологических больных пучками частиц высоких энергий [25].

Существенно большие интенсивности и лучшее качество пучков от нового фазотрона по сравнению с отработавшим синхроциклотроном позволяют, с одной стороны, выполнять ранее недоступные эксперименты, а с дру-



Рис.4. Магнитная система фазотрона ОИЯИ

гой — сокращают время работы ускорителя, необходимое для получения опытных данных в любых экспериментах.

На новом ускорителе уже выполнена значительная программа исследований. Отметим лишь несколько наиболее важных результатов.

Проведен очень трудный эксперимент по поиску редкого явления — перехода мюония в антимюоний ($\mu^+e^- \rightarrow \mu^-e^+$). Этот процесс сильно запрещен, так как лептонные числа участвующих в нем частиц изменяются сразу на две единицы. В результате опытов была установлена новая, самая низкая пока граница для вероятности этого процесса [26].

В опытах по мю-катализу получены новые, важные для теории данные о скоростях образования $dd\mu$ - и $pd\mu$ -молекул в не изученном ранее интервале давлений от 0,4 до 1,5 кбар при температурах до 300 К, а также о спин-овых эффектах в резонансном образовании мюонных молекул дейтерия [27].

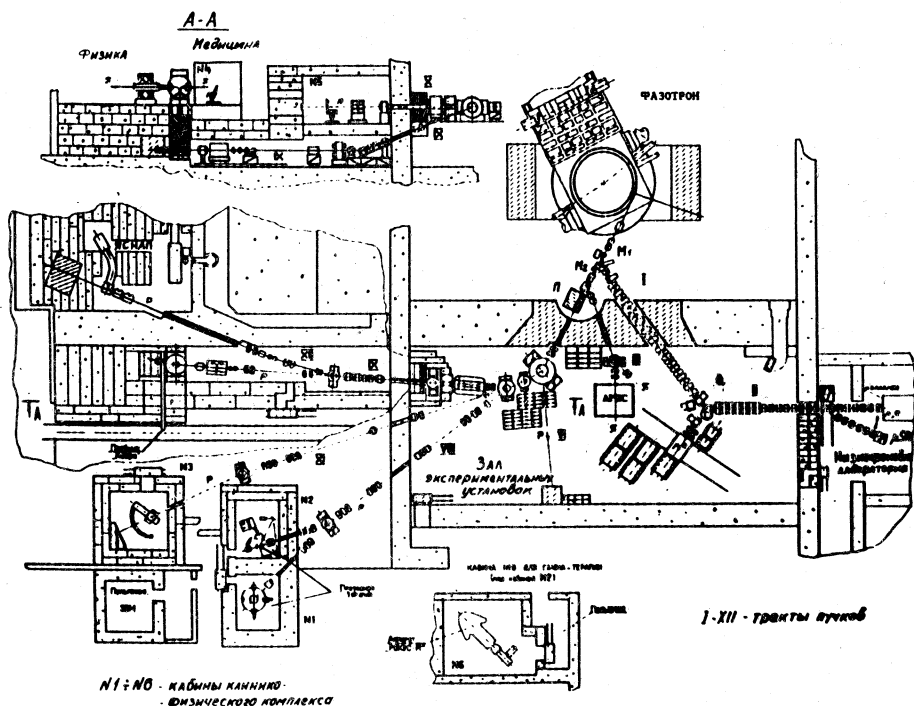


Рис.5. Каналы пучков частиц фазотрона ОИЯИ

В экспериментах по изучению μSR -методом магнитных свойств поликристаллических высокотемпературных сверхпроводников определены глубины проникновения в них магнитного поля, а также зависимости глубин проникновения от температуры [28]. Результаты опытов позволят провести сравнение с имеющимися теоретическими расчетами и выяснить их адекватность опыту.

В исследованиях на созданном крупном магнитном спектрометре (АРЕС) с 4π -детектором в 1991 г. получена новая оценка верхней границы вероятности процесса распада $\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$: $R < 3,6 \cdot 10^{-11}$ [29]. Этот результат в 50 раз улучшает оценку, полученную в 1976 г. в опытах на синхротроне. В этих же экспериментах получена оценка парциальной вероятности разрешенного распада $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e e^+ e^-$, обусловленного наличием

структуры пиона. Найдено, что эта вероятность составляет $R_{SD} \approx 4,6 \cdot 10^{-10}$ от распада $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ [30].

Основной целью представления в этом обзоре наиболее ценных и разнообразных научных результатов, полученных в экспериментах на фазотронах ОИЯИ, является стремление продемонстрировать, насколько широкие возможности для исследований по ядерной физике предоставили физикам ускорители этого типа, основанные на принципе автофазировки.

Классические фазотроны со спадающим к крайним орбитам магнитным полем были построены в разные годы в нескольких странах: в США в Беркли (первый в мире фазотрон, 1946 г.), Чикаго (1950 г.), Нью-Йорке (1950 г.), в Швейцарии, ЦЕРН (1957 г.) и, как отмечалось, в 1967 г. в нашей стране в Гатчине. На этих ускорителях было получено много ценных и важных научных результатов.

Сейчас, просматривая сквозь лупу времени все эти события, можно констатировать без всякого преувеличения, что с ускорителями типа фазотрон в мировой науке связана целая эпоха плодотворного развития физики частиц и атомного ядра в области так называемых промежуточных энергий.

Говоря об этом, не следует забывать, что принцип автофазировки Векслера — МакМиллана является очень универсальным. Он позволил в течение второй половины текущего столетия построить в разных странах ускорители типа синхрофазотрон-синхротрон на энергии частиц, в десятки, сотни и тысячи раз превышающие энергии фазотронов. Это создало необозримо широкие возможности для исследований строения материи на ранее недостижимом субадронном (кварковом) уровне и привело к результатам, которые в огромной степени обогатили наши знания о мире микрочастиц, законах их образования и взаимодействия.

Но эта большая тема уже для другой статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Широкое применение принципа автофазировки в различных типах резонансных ускорителей не исчерпало всех его возможностей. Он может быть использован как при адиабатическом, так и при быстром (по сравнению с периодом фазовых колебаний) изменении параметров, а в отдельных случаях даже при локальных нарушениях автофазировки. Исследование таких режимов может существенно расширить область применения принципа Векслера — МакМиллана.

Кратко изложенные в статье, в качестве примера, результаты основных физических исследований, выполненных на фазотронах ОИЯИ (обычном и с пространственной вариацией растущего с радиусом среднего магнитного

поля), позволяют получить определенное представление о той важной роли, которую сыграли такого типа ускорители (основанные на принципе автофазировки) в получении нового знания в области современной физики элементарных частиц и атомного ядра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векслер В.И. — ДАН СССР, 1944, т.43, No 8, с.346; 1944, т.44, No 9, с.393; Journ.Phys., 1945, vol.9, p.153.
2. MacMillan E.M. — Phys.Rev., 1945, vol.68, p.143.
3. Lowrence E.O., Livingston M.S. — Phys.Rev., 1931, vol.37, p.1707.
4. Мещеряков М.Г., Джелепов В.П., Честной А.В., Катышев В.С. и др. — Отчет ГТЛ о пуске пятиметрового синхроциклотрона, 1951.
5. Джелепов В.П., Дмитриевский В.П., Онищенко Л.М. и др. — Препринт ОИЯИ Р9-85-358, Дубна, 1985;
Глазов А.А., Джелепов В.П., Дмитриевский В.П., Онищенко Л.М. и др. — Труды 9-го Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, 1985, т.1, с.289.
6. Bohm D., Foldy I. — Phys.Rev., 1947, vol.72, p.649.
7. Рабинович М.С. — Диссертация. ФИАН СССР, 1948.
8. Richardson J.R., Wright B.T., Lofgren E.S., Peters B. — Phys.Rev., 1948, vol.73, p.424.
9. Henrich L.R., Sewell D.C., Vale J. — Rev.Sci.Instr., 1949, vol.20, p.887.
10. Efremov D.V., Meshcheriakov M.G., Mints A.L., Dzhelepov V.P. et al. — Proc. of the Intern. Symposium of High Energy Physics. CERN, 1956, p.148.
11. Mints A.L., Neviazhski I.M., Poliakov B.Y. — Proc. of the International Symposium on High Energy Physics. CERN, 1956, p.419.
12. Байчер К.А., Богомолов А.В., Василенко А.Т. и др. — Труды IV Всесоюзного совещания по ускорителям. М., 1974, т.1, с.234.
13. Данилов В.И. и др. — Труды Международной конференции по ускорителям. М., Атомиздат, 1964, с.591.
14. Джелепов В.П., Понтекорво Б.М. — Атомная энергия, 1957, т.3, No 11, с.413;
Джелепов В.П., Лапидус Л.И. — Атомная энергия, 1978, т.44, No 1, с.50.
15. Bystritsky V.M., Dzhelepov V.P., Ershova Z.V. et al. — JINR Communication D1-12691, Dubna, 1979; Письма в ЖЭТФ, 1980, т.31, с.249; Phys.Lett., 1980, vol.94B, No 4, p.496; ЖЭТФ, 1981, т.80, с.1700.
16. Gerstein S.S., Ponomarev L.I. — Phys.Lett., 1977, vol.72B, No 1, p.801;
Виницкий С.И., Пономарев Л.И., Пузынин И.В. и др. — ЖЭТФ, 1978, т.47, с.849.
17. Абросимов Н.К., Алхазов Д.Г., Дмитриев С.П. и др. — Труды Международной конференции по ускорителям. Ереван, 1969, т.1, с.317.
18. Thomas L.H. — Phys.Rev., 1938, vol.54, p.580.
19. Kerst D.W., Tetwilliger K.M., Symon K.R., Jones L.W. — Bull.Amer.Phys.Soc., 1955, vol.30, p.14.

20. Danilov V.I., Denisov Yu.N., Dmitrievskij V.P., Dzhelepov V.P. — Proc. of the Int.Conf. on High Energy Acc. and Instr. CERN, 1959, p.211.
21. Cohen R., Rainwater J. — IEEE Trans. Nucl.Sci., 1966, NS 3—13, vol.4, p.522.
22. Glazov A.A., Denisov Yu.N., Dmitrievskij V.P., Dzhelepov V.P. et al. — Proc. of the Sixth Conf. on High Energy Acc. Cambridge Mass., 1967, p.303.
23. Ворожцов С.Б., Дмитриевский В.П., Онищенко Л.М. — Сообщение ОИЯИ Р9-84-28, Дубна, 1984;
Vorozhtsov S.B., Dmitrievskij V.P., Onishchenko L.M. — JINR Rapid Communication No. 7-85, Dubna, 1985, p.27.
24. Онищенко Л.М., Шакур Н.Г., Шишкин А. Л., Шишлянников П.Т. — Сообщение ОИЯИ Р9-91-226, Дубна, 1991.
25. Дзепелов В.П., Савченко О.В., Астрахан Б.В., Рудерман А.И. — Медицинская радиология, 1987, № 8, с.81.
26. Абазов В.М., Гордеев В.А., Савченко О.В. и др. — Краткие сообщения ОИЯИ № 2 (59)–93, Дубна, с.65;
Гордеев В.А., Савченко О.В. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1993, т.57, вып.5, с.262;
Гордеев В.А. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1994, т.59, вып.9, с.565;
Gordeev V.A. et al. — Phys.Rev.D, 1994, vol.50, part 1, p.1399.
27. Bystritsky V.M., Dzhelepov V.P., Filchenkov V.V., Zinov V.G. et al. — Muon Catalyzed Fussion, 1990/91, vol.5/6, p.141;
Dzhelepov V.P., Filchenkov V.V. et al. — Muon Catalyzed Fusion, 1992, vol.7, p.387;
Дзепелов В.П., Зинов В.Г. и др. — ЖЭТФ, 1992, т.101, вып.4, с.1105;
Дзепелов В.П., Зинов В.Г. и др. — ЖЭТФ, 1993, т.103, вып.3, с.730.
28. Grebinnik V.G., Duginov V.N., Zhukov V.A. et al. (JINR, Russia); Gurevich I.I., Krasnoperov E.P., Ponomarev A.N. et al. (RNCKI, Russia); Boroviuskaya I.P. et al. (ISM, Russia); Eltzer Yu.F. (P.I.RAN, Russia). — Hyperfine Interactions, 1990, vol.61, p.1093;
Duginov V.N., Pomjakushin V.Yu., Zhukov V.A. et al. (JINR, Russia); Schenk A. et al. (PSI, Switzerland); Maletta H. (HMI, Germany); Bock I. (Hoechst AG, Germany); Ponomarev A.N. et al. (RNCKI, Russia); Kapusta S. (IPCAS, Czech. Rep.); — Phys.Rev.B, 1993, vol.4B, No 17, p.13022.
29. Баранов В.А. и др. — ЯФ, 1991, т.53, с.1302.
30. Баранов В.А. и др. — ЯФ, 1991, т.55, с.2940.

THE FAMILY PROBLEM IN THE 4D SUPERSTRING GRAND UNIFIED THEORIES

*A.A.Maslikov, I.A.Naumov, G.G.Volkov**

Institute for High Energy Physics 142284 Protvino, Moscow Region, Russia

The one of the main points of the investigations in high energy physics is to study the next chain: a law of the quark and lepton mass spectra $\rightarrow$ the puzzles of the quark and lepton family mixing $\rightarrow$ a possible new family dynamics.

The new family symmetry dynamics might be connected to the existence of some exotic gauge or matter fields or something else. For this, it will be better to study the possibilities of the appearance of this gauge symmetry in the framework of the Grand Unified String Theories. In the framework of the four-dimensional heterotic superstring with free fermions we investigate the rank eight Grand Unified String Theories (GUST) which contain the $SU(3)_H$ -gauge family symmetry. We explicitly construct GUST with gauge symmetry $G = SU(5) \times U(1) \times (SU(3) \times U(1))_H$ and $G = SO(10) \times (SU(3) \times U(1))_H \subset SO(16)$ or $E(6) \times SU(3)_H \subset E(8)$ in free complex fermion formulation. As the GUSTs originating from Kac-Moody algebras (KMA) contain only low-dimensional representations, it is usually difficult to break the gauge symmetry. We solve this problem by taking for the observable gauge symmetry the diagonal subgroup G^{sym} of the rank 16 group $G \times G \subset SO(16) \times SO(16)$ or $(E(6) \times SU(3)_H)^2 \subset E(8) \times E(8)$. We discuss the possible fermion matter and Higgs sectors in these models. In these GUST, there has to exist «superweak» light chiral matter ($m_H^f < M_W$). The understanding of quark and lepton mass spectra and family mixing leaves a possibility for the existence of an unusually low mass breaking scale of the $SU(3)_H$ family gauge symmetry (some TeV).

Одно из основных направлений исследований в физике высоких энергий — это изучение следующей цепочки взаимосвязей: закономерности спектра масс кварков и лептонов $\rightarrow$ загадка смешивания кварк-лептонных поколений $\rightarrow$ возможная новая динамика поколений.

Новая динамика симметрии поколений может быть связана с существованием экзотических полей материи и калибровочных полей. Поэтому полезно изучить возмож-

*ITP University of Bern Sidlerstr.5, CH-3012 Bern, Switzerland

*INFN Sezione di Padova and Dipartimento di Fisica Università di Padova, Via Marzolo 8, 35100 Padua, Italy

ность возникновения такой калибровочной симметрии в Струнных Теориях Великого Объединения (СТВО). В рамках 4-мерной гетеротической суперструны со свободными фермионами исследуются СТВО ранга 8, содержащие $SU(3)_H$ калибровочную симметрию поколений. Мы явно конструируем СТВО с калибровочной симметрией $G = SU(5) \times U(1) \times (SU(3) \times U(1))_H$ и $G = SO(10) \times (SU(3) \times U(1))_H \subset SO(16)$ или $E(6) \times SU(3)_H \subset E(8)$ в формулировке свободных комплексных фермионов. Так как СТВО, основанные на Кац-Муди алгебрах (КМА), содержат только представления низких размерностей, то обычно имеется трудность с нарушением калибровочной симметрии. Мы решаем эту проблему выбирая в качестве наблюдаемой калибровочной симметрии диагональную подгруппу G^{sym} группы ранга 16 $G \times G \subset SO(16) \times SO(16)$ или $(E(6) \times SU(3)_H)^2 \subset E(8) \times E(8)$. Мы обсуждаем допустимые сектора фермионов материи и Хитса в этих моделях. В таких СТВО возникает «суперслабая» легкая киральная материя ($m_H^f < M_W$). Анализ кварк-лептонного массового спектра и смешивания поколений оставляет возможность существования необычно низкого масштаба нарушения $SU(3)_H$ калибровочной симметрии поколений (несколько ТэВ).

1. THEORETICAL TRENDS BEYOND THE STANDARD MODEL

1.1. The Family Mixing State in SM and Quark and Lepton Mass Origin.

There are no experimental indications which would impel one to go beyond the framework of the $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ Standard Model (SM) with three generations of quarks and leptons. None of the up-to-date experiments contradicts, within the limits of accuracy, the validity of the SM predictions for low energy phenomena. The fermion mass origin and generation mixing, CP -violation problems are among most exciting theoretical puzzles in SM.

One has ten parameters in the quark sector of the SM with three generations: six quark masses, three mixing angles and the Kobayashi — Maskawa (KM) CP -violation phase ($0 < \delta^{KM} < \pi$). The CKM (Cabibbo — Kobayashi — Maskawa) matrix in Wolfenstein parametrization is determined by the four parameters — Cabibbo angle $\lambda \approx 0.22$, A , ρ and η :

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1/2\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - 1/2\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

In the complex plane the point (ρ, η) is a vertex of the unitarity triangle and describes the CP -violation in SM. The unitarity triangle is constructed from the following unitarity condition of V_{CKM} : $V_{ub}^* + V_{td} \approx A\lambda^3$.

Recently, the interest in the CP -violation problem was excited again due to the data on the search for the direct CP -violation effects in neutral K -mesons [1,2]:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) = (7.4 \pm 6) \cdot 10^{-4}, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) = (23 \pm 7) \cdot 10^{-4}. \quad (3)$$

The major contribution to the CP -violation parameters ε_K and ε'_K (K^0 -decays), as well as to the $B_d^0 - \bar{B}_d^0$ mixing parameter $x_d = \frac{\Delta m_{(B_d)}}{\Gamma_{(B_d)}}$ is due to

the large t -quark mass contribution. The same statement holds also for some amplitudes of K - and B -meson rare decays. The CDF collaboration gives the following region for the top quark mass: $m_t = 174 \pm 25$ GeV [3]. The complete fit which is based on the low energy data as well as the latest LEP and SLC data and comparing with the mass indicated by CDF measurements gives $m_t = 162 \pm 9$ GeV [4].

The main drawbacks of SM now are going from our non-understanding the generation problem, their mixing and hierarchy of quark and lepton mass spectra. For example, for quark masses $\mu \approx 1$ GeV we can get the following approximate relations [5]:

$$\begin{aligned} m_{ik} &\approx (q_H^u)^{2k} m_0, \quad k=0,1,2; \quad i_0=u, \quad i_1=c, \quad i_2=t, \\ m_{ik} &\approx (q_H^d)^{2k} m_0, \quad k=0,1,2; \quad i_0=d, \quad i_1=s, \quad i_2=b, \end{aligned} \quad (4)$$

where $q_H^u \approx (q_H^d)^2$, $q_H^d \approx 4-5 \approx 1/\lambda$ and $\lambda \approx \sin \theta_C$.

Here we used the conventional ratios of the «running» quark masses [6]

$$\begin{aligned} m_d/m_s &= 0.051 \pm 0.004, \quad m_u/m_c = 0.0038 \pm 0.0012, \\ m_s/m_b &= 0.033 \pm 0.011, \quad m_c(\mu = 1 \text{ GeV}) = (1.35 \pm 0.05) \text{ GeV}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{and } m_t^{\text{phys}} \approx 0.6 m_t(\mu = 1 \text{ GeV}).$$

This phenomenological formula (6) predicts the following value for the t -quark mass:

$$m_t^{\text{phys}} \approx 180-200 \text{ GeV}. \quad (6)$$

In SM these mass matrices and mixing come from the Yukawa sector:

$$L_Y = QY_u \bar{q}_u h^* + QY_d \bar{q}_d h + LY_e \bar{l}_e h + \text{h.c.}, \quad (7)$$

where Q_i and L_i are three quark and lepton isodoublets, q_{u_i} , q_{d_i} and e_i are three right-handed antiquark and antilepton isosinglets, respectively, h is the ordinary Higgs doublet. In SM, the 3×3 -family Yukawa matrices, $(Y_u)_{ij}$ and $(Y_d)_{ij}$, have no any particular symmetry. Therefore, it is necessary to find some additional mechanisms or symmetries beyond the SM which could diminish the number of the independent parameters in Yukawa sector L_Y . These new structures can be used for the determination of the mass hierarchy and family mixing.

To understand the generation mixing origin and fermion mass hierarchy several models beyond the SM suggest special forms for the mass matrix of «up» and «down» quarks (Fritzsch ansatz, «improved» Fritzsch ansatz, «Democratic» ansatz, etc. [7]). These mass matrices have less than ten independent parameters or they could have some matrix elements equal to zero («texture zeroes») [8]. This allows us to determine the diagonalizing matrix U_L and D_L in terms of quark masses:

$$Y_d^{\text{diag}} = D_L Y_d D_R^+, \quad Y_u^{\text{diag}} = U_L Y_u U_R^+. \quad (8)$$

For simplicity the symmetric form of Yukawa matrices has been taken, therefore: $D_L = D_R^*$, $U_L = U_R^*$. These ansatzes or zero «textures» could be checked experimentally in predictions for the mixing angles of the CKM matrix: $V_{\text{CKM}} = U_L D_L^+$. For example, one can consider the following approximate form at the scale M_X for the symmetric «texture» used in paper [8]:

$$Y_u = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^6 & 0 \\ \lambda^6 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_d = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda^4 & 0 \\ 2\lambda^4 & 2\lambda^3 & 2\lambda^3 \\ 0 & 2\lambda^3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Given these conditions it is possible to evolve down to low energies via the renormalization group equations all quantities including the matrix elements of Yukawa couplings $Y_{u,d}$, the values of the quark masses (see (4)) and the CKM matrix elements (see (1)). Also, using these relations we may compute U_L (or D_L) in terms of CKM matrix and/or of quark masses.

In GUT extensions of the SM with the family gauge symmetry embedded Yukawa matrices can acquire particular symmetry or an ansatz, depending on the Higgs multiplets to which they couple. The family gauge symmetry could help us to study in an independent way the origin of the up- (U) and down- (D) quark mixing matrices and consequently the structure of the CKM matrix

$V_{CKM} = UD^+$. Due to the local gauge family symmetry a low energy breaking scale gives us a chance to define the quantum numbers of quarks and leptons and thus establishes a link between them in families. For the mass fermion ansatz considered above in the extensions of SM there could exist the following types of the $SU(3) \times SU(2)_L$ Higgs multiplets: (1,2), (3,1), (8,1), (3,2), (8,2), (1,1),..., which in turn could exist in the spectra of the String Models.

In the framework of the rank eight Grand Unified String Theories we will consider an extension of SM due to local family gauge symmetry, $G_H = SU(3)_H \times SU(3)_H \times U(1)_H$ models and their developments and their possible Higgs sector. Thus, for understanding the quark mass spectra and the difference between the origins of the up- (or down) quark and charged lepton mass matrices in GUSTs we have to study the Higgs content of the model, which we must use from the one hand for breaking the GUT-, Quark-Lepton-, $G_H = SU(3)_H, \dots, SU(2)_L \times U(1)$ - symmetries and from the other hand — for Yukawa matrix constructions. The vital question arising here is the nature of the v mass.

2. TOWARDS A LOW ENERGY «EXACTLY SOLVABLE» GAUGE FAMILY SYMMETRY

2.1. The «Bootstrap» Gauge Family Models. The underlying analysis for this family symmetry breaking scale is lying on the modern experimental probability limitations for the typical rare flavour-changing processes. The estimates for the family symmetry breaking scale have certain regularities depending on the particular symmetry breaking schemes and generation mixing mechanisms (different ansatzes for quark and lepton mass matrices with 3_H or $3_H + 1_H$ generations have been discussed in [5]). As noted there, the current understanding of quark and lepton mass spectra leaves place for the existence of an unusually low mass breaking scale of non-abelian gauge $SU(3)_H$ or $(SU(3) \otimes U(1))_H$ family symmetry $\sim$ some TeV. Some independent experiments for verifying the relevant hypotheses can be considered: light (π, K), heavy (B, D)-meson and charged lepton flavour changing rare decays [24, 25, 26, 5], family symmetry violation effects in e^+e^- , ep - and pp -collider experiments (LEP, HERA, FNAL, LHC).

The including into the model of the Higgs fields which are transformed under the $SU(3)_H \times SU(2)_L$ symmetry, like $H^a = (\underline{8}, \underline{1})$ (or $H_p^a = (\underline{8}, \underline{2}), p = 1, 2$) and $X^i = (\underline{3}, \underline{1})$ (or $X_p^i = (\underline{3}, \underline{2}), p = 1, 2$), gives the following contribution to the family gauge boson mass matrix:

$$(M_H^2)_8^{ab} = g_H^2 \sum_{d=1}^8 f^{adc} f^{bdc'} \langle H^c \rangle \langle H^{c'} \rangle^*, \quad (10)$$

$$(M_H^2)_3^{ab} = g_H^2 \sum_{k=1}^3 \frac{\lambda_{ik}^a}{2} \frac{\lambda_{kj}^b}{2} \langle X^i \rangle \langle X^j \rangle^*. \quad (11)$$

The lowest bound on M_H can be obtained from the analysis of the branching ratios of μ , π , K , D , B , ... rare decays ($\text{Br} \geq 10^{-15-17}$).

In the paper [5] we investigated the samples of different scenarios of $SU(3)_H$ -breakings down to the $SU(2)_H \times U(1)_{3H}$, $U(1)_{3H} \times U(1)_{8H}$ and $U(1)_{8H}$ -subgroups, as well as the mechanism of the complete breaking of the base group $SU(3)_H$. We tried to realize the SUSY conserving program on the scales where the relevant gauge symmetry is broken. In the framework of these versions of the gauge symmetry breaking, we were searching for the spectra of horizontal gauge bosons and gauginos and calculated the amplitudes of some typical rare processes. Theoretical estimates for the branching ratios of some rare processes obtained from these calculations have been compared with the experimental data on the corresponding values. Further we have got some bounds on the masses of H_μ -bosons and the appropriate H -gauginos. Of particular interest was the case of the $SU(3)_H$ -group which breaks completely on the scale M_{H_0} . We

calculated the splitting of eight H -boson masses in a model dependent fashion. This splitting, depending on the quark mass spectrum, allows us to reduce considerably the predictive ambiguity of the model — «almost exactly solvable model».

We assume that when the $SU(3)_H$ -gauge symmetry of quark-lepton generations is violated, all of the 8 gauge bosons acquire the same mass equal to M_{H_0} . Such a breaking is not difficult to get by, say, introducing the Higgs fields transforming in accordance with the triplet representation of the $SU(3)_H$ group. These fields are singlet under the Standard Model symmetries: $(z \in (3, 1, 1, 0) \text{ and } \bar{z} \in (\bar{3}, 1, 1, 0), \langle \bar{z}^{i\alpha} \rangle_0 = \delta^{i\alpha} V, \langle z_i^\alpha \rangle_0 = \delta_i^\alpha V, i, \alpha = 1, 2, 3, \text{ where } V = M_{H_0})$. We understand that here we need a more beautiful way to break this symmetry like dynamical way. But at this stage it is very important to establish a link between the mass spectra of the horizontal gauge bosons and known heavy fermions like t -quark. The degeneracy of the masses of 8 gauge horizontal vector bosons is eliminated by using the VEV's of the Higgs fields violating the electroweak symmetry and determining the mass matrix of up- and down-quarks (leptons). Thus, there is a set of the Higgs fields (see

corresponding Table 1): $H(8, 2)$, $h(8, 2)$, $Y(\bar{3}, 2)$, $X(3, 2)$, $\kappa_{1,2}(1, 2)$ which could violate the $SU(2) \times U(1)$ symmetry and could determine the mass matrix of up- and down-quarks. On the other hand, in order to calculate the splitting between the masses of horizontal gauge bosons, one has to take into account the VEV's of this set of the Higgs fields.

Now we can come to constructing the horizontal gauge boson mass matrix M_{ab}^2 ($a, b = 1, 2, \dots, 8$):

$$(\Delta M_H^2)_{ab} = M_{H_0}^2 \delta_{ab} + (\Delta M_d^2)_{ab} + (\Delta M_u^2)_{ab}. \quad (12)$$

Here (ΔM_d^2) and $(\Delta M_u^2)_{ab}$ are the «known» functions of heavy fermions, $(\Delta M_{u,d}^2)_{ab} = F_{ab}(m_t, m_b, \dots)$, which mainly get the contributions due to the vacuum expectations of the Higgs bosons that were used for construction of the mass matrix ansatzes for d -(u)-quarks.

For example in the case of $N_g = \underline{3} + \underline{1}$ families with Fritzsch ansatz for quark mass matrices and using $SU(3_H) \times SU(2)$ Higgs fields, $(8, 2)$, [5], we can write down some rough relations between the masses of horizontal gauge bosons («bootstrap» solution):

$$\begin{aligned} M_{H_1}^2 &\approx M_{H_2}^2 \approx M_{H_3}^2 \approx M_{H_0}^2 + \frac{g_H^2}{4} \left[\frac{1}{\lambda^2} \frac{m_c m_t}{1 - m_t/m_t'} \right] + \dots, \\ M_{H_4}^2 &\approx M_{H_5}^2 \approx M_{H_6}^2 \approx M_{H_7}^2 \approx M_{H_0}^2 + \frac{g_H^2}{4} \left[\frac{1}{\tilde{\lambda}^2} m_t m_t' \right] + \dots, \\ M_{H_8}^2 &\approx M_{H_0}^2 + \frac{g_H^2}{3} \left[\frac{1}{\tilde{\lambda}^2} m_t m_t' \right] + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

where λ and $\tilde{\lambda}$ are Yukawa couplings.

We were interested in how the unitary compensation for the contributions of horizontal forces to rare processes [5] depends on different versions of the $SU(3)_H$ -symmetry breaking. The investigation of this dependence allows one, firstly, to understand how low the horizontal symmetry breaking scale M_H may be, and, secondly, how this scale is determined by a particular choice of a mass matrix ansatz both for quarks and leptons.

We would like to stress a possible existing of a local family symmetry with a low energy symmetry breaking scale, i.e., the existence of rather light H -bosons: $m_H \geq (1-10)$ TeV [5]. We have analyzed, in the framework of the «minimal» horizontal supersymmetric gauge model, the possibilities of obtaining a satisfactory hierarchy for quark masses and of connecting it with the

splitting of horizontal gauge boson masses. We expect that due to this approach the horizontal model will become more definite since it will allow one to study the amplitudes of rare processes and the CP -violation mechanism more thoroughly. In this way we hope to get a deeper insight into the nature of interdependence between the generation mixing mechanism and the local horizontal symmetry breaking scale.

2.2. The $N = 1$ SUSY Character of the $SU(3)_H$ -Gauge Family Symmetry.

We will consider the supersymmetric version of the Standard Model extended by the family (horizontal) gauge symmetry (and if one will need, we will also extend this model by the $G_R = SU(2)_R$ right-hand gauge group). The supersymmetric Lagrangian of strong electroweak and horizontal interactions, based on the $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times SU(3)_H$... (where the G_R -gauge group and the Abelian gauge factor $U(1)_H$ also can be taken into consideration), has the general form:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{N=1} = & \int d^2\theta \operatorname{Tr}(W^k W^k) + \int d^4\theta S_I^+ e^{\sum_k 2g_k \hat{V}_k} S_I + \\ & + \int d^4\theta \operatorname{Tr}(\Phi^+ e^{2g_H \hat{V}_H} \Phi e^{-2g_H \hat{V}_H}) \\ & + \int d^4\theta \operatorname{Tr}(H_y^+ e^{2g_2 \hat{V}_2 + y 2g_1 \hat{V}_1} e^{2g_H \hat{V}_H} H_y e^{-2g_H \hat{V}_H}) \\ & + (\int d^2\theta P(S_i, \Phi, H_y, \eta, \xi, \dots) + \text{h.c.}) \end{aligned} \quad (14)$$

(see for comparing $\mathcal{L}^{N=2}$ in Appendix A). In formula (14) the index k runs over all the gauge groups: $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$, $SU(3)_H$. $\hat{V} = \mathbf{T}^a V^a$, where V^a are the real vector superfields, and $\mathbf{T}^a$ are the generators of the $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$, $SU(3)_H$ -groups; S_I are left-chiral superfields from fundamental representations, and $I = i, 1, 2$; $S_i = Q, u^c, d^c, L, e^c, \nu^c$ are matter superfields, $S_1 = \eta$, $S_2 = \xi$ are Higgs fundamental superfields; the Higgs left chiral superfield Φ is transformed as the adjoint representation of the $SU(3)_H$ -group, the Higgs left chiral superfields H_y : $H_{Y=+\frac{1}{2}} = H$, $H_{Y=-\frac{1}{2}} = h$ are transformed nontrivially under the horizontal $SU(3)_H$ - and electroweak $SU(2)_L$ -symmetries (see Table 1). P in formula (14) is a superpotential to be specified below. To construct it, we use the internal $U(1)_R$ -symmetry which is habitual for a simple $N = 1$ supersymmetry.

Table 1. The Higgs superfields with their $SU(3)_H$, $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$ (and possible $U(1)_{H'}$ -factor) quantum numbers

	H	C	L	Y	Y_H
Φ	8	1	1	0	0
H	8	1	2	-1/2	$-y_{H_1}$
h	8	1	2	1/2	y_{H_1}
ξ	$\bar{3}$	1	1	0	0
η	3	1	1	0	0
Y	$\bar{3}$	1	2	1/2	$-y_{H_2}$
X	3	1	2	-1/2	y_{H_2}
κ_1	1	1	1 (2)	0 (1/2)	$-y_{H_3}$
κ_2	1	1	1 (2)	0 (-1/2)	y_{H_3}

In models with a global supersymmetry it is impossible to have simultaneously a SUSY breaking and a vanishing cosmological term. The reason is the semipositive definition of the scalar potential in the rigid supersymmetry approach (in particular, in the case of a broken SUSY we have $V_{\min} > 0$). The problem of supersymmetry breaking, with the cosmological term $\Lambda = 0$ vanishing, is solved in the framework of the $N=1$ SUGRA models. This may be done under an appropriate choice of the Kaehler potential, in particular, in the frames of «mini-maxi»- or «maxi» type models [27]. In such approaches, the spontaneous breaking of the local SUSY is due to the possibility to get nonvanishing VEVs for the scalar fields from the «hidden» sector of SUGRA [27]. The appearance in the observable sector of the so-called soft breaking terms comes as a consequence of this effect.

In the «flat» limit, i.e., neglecting gravity, one is left with lagrangian (14) and soft SUSY breaking terms, which on the scales $\mu \ll M_{Pl}$ have the form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SB} = & \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 |\phi_i|^2 + \frac{1}{2} m_1^2 \text{Tr}|h|^2 + \frac{1}{2} m_2^2 \text{Tr}|H|^2 + \\
& + \frac{1}{2} \mu_1^2 |\eta|^2 + \frac{1}{2} \mu_2^2 |\xi|^2 + \frac{1}{2} M^2 \text{Tr}|\Phi|^2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_k M_k \lambda_k^a \lambda_k^a + \text{h.c.} + \text{trilinear terms},
\end{aligned} \tag{15}$$

where $H_1 = H$, $H_2 = h$ and i runs over all the scalar matter fields $\tilde{Q}$, $\tilde{u}^c$, $\tilde{d}^c$, $\tilde{L}$, $\tilde{e}^c$, $\tilde{\nu}^c$ and k runs over all the gauge groups: $SU(3)_H$, $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_Y$. At the energies close to the Plank scale all the masses, as well as the gauge coupling, are correspondingly equal (this is true if the analytic kinetic function satisfies $f_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta}$) [27], but at low energies they have different values depending on the corresponding renormgroup equation (RGE). The squares of some masses may be negative, which permits the spontaneous gauge symmetry breaking.

Considering the SUSY version of the $SU(3)_H$ -model, it is natural to ask: why do we need to supersymmetrize the model? Basing on our present-day knowledge of the nature of supersymmetry [27, 28], the answer will be:

(a) First, it is necessary to preserve the hierarchy of the scales: $M_{EW} < M_{SUSY} < M_H < \dots < M_{GUT}$. Breaking the horizontal gauge symmetry, one has to preserve SUSY on that scale. Another sample of hierarchy to be considered is: $M_{EW} < M_{SUSY} \sim M_H$. In this case, the scale M_H should be rather low ($M_H \leq \text{a few TeV}$).

(b) To use the SUSY $U(1)_R$ degrees of freedom for constructing the superpotential and forbidding undesired Yukawa couplings.

(c) Super-Higgs mechanism — it is possible to describe Higgs bosons by means of massive gauge superfields [28].

(d) To connect the vector-like character of the $SU(3)_H$ -gauge horizontal model and $N=2$ SUSY (see Appendix A).

Since the expected scale of the horizontal symmetry breaking is sufficiently large: $M_H \gg M_{EW}$, $M_H \gg M_{SUSY}$ (where M_{EW} is the scale of the electroweak symmetry breaking, and M_{SUSY} is the value of the splitting into ordinary particles and their superpartners), it is reasonable to search for the SUSY-preserving stationary vacuum solutions.

Let us construct the gauge invariant superpotential P of Lagrangian (14). With the fields given in Table 1, the most general superpotential will have the form

$$P = \lambda_0 \left[\frac{1}{3} \text{Tr}(\hat{\Phi}^3) + \frac{1}{2} M_I \text{Tr}(\hat{\Phi}^2) \right] + \lambda_1 [\eta \hat{\Phi} \xi + M' \eta \xi] + \lambda_2 \text{Tr}(\hat{h} \hat{\Phi} \hat{H}) + (\text{Yukawa couplings}) + (\text{Majorana terms } \nu^c), \quad (16)$$

where Yukawa Couplings could be constructed, for example, using the Higgs fields, H and h , transforming under $SU(3)_H \times SU(2)_L$, like (8,2):

$$P_Y = \lambda_3 \hat{Q} \hat{H} d^c + \lambda_4 \hat{L} \hat{H} e^c + \lambda_5 \hat{Q} \hat{h} u^c. \quad (17)$$

Also, one can consider another type of superpotential P_Y , using the Higgs fields from Table 1.

Note, the fields Φ , H , h can be obtained on the level 2 of Kac-Moody algebra g or effectively on the level 1 of algebras g^I , g^{II} after «integration» over heavy fields, when $G^I \times G^{II} \rightarrow G^{\text{sym}}$ (see section 3). Higgs fields X and Y are very important in models with fourth $SU(3)_H$ -singlet generation. In the construction of the stationary solutions, only the following contributions of the scalar potential are taken into account:

$$V = \sum_i |F_i|^2 + \sum_a |D^a|^2 = V_F + V_D \geq 0, \quad (18)$$

where

$$V_F = \sum \left| \frac{\partial P_F}{\partial F_i} \right|^2 = \left| \frac{\partial P_F}{\partial F_{\Phi^a}} \right|^2 + \left| \frac{\partial P_F}{\partial F_{\xi_i}} \right|^2 + \left| \frac{\partial P_F}{\partial F_{\eta_i}} \right|^2. \quad (19)$$

The case $\langle V \rangle = 0$ of supersymmetric vacuum can be realized within different gauge scenarios [5]. By switching on the SUGRA, the vanishing scalar potential is no more required to conserve the supersymmetry with the necessity. The different gauge breaking scenarios do not result in obligatory vacuum degeneracy, as in the case of the global SUSY version. Let us write down each of the terms of formula (19):

$$\begin{aligned} P_F(\Phi, \xi, \eta) = & \lambda_0 \left[\frac{i}{4 \times 3} f^{abc} \Phi^a \Phi^b \Phi^c + \frac{1}{4 \times 3} d^{abc} \Phi^a \Phi^b \Phi^c + \frac{1}{4} M_I \Phi^c \Phi^c \right]_F + \\ & + \lambda_1 \left[\eta_i (T^c)_j^i \xi^j \Phi^c + M' \eta_i \xi^i \right]_F + \\ & + \lambda_2 \left[\frac{i}{4} f^{abc} h_i^a \Phi^b H_j^c \epsilon^{ij} + \frac{d^{abc}}{4} h_i^a \Phi^b H_j^c \epsilon^{ij} \right]_F + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (20)$$

The contribution of D -terms into the scalar potential will be:

$$\begin{aligned} V_D = & g_H^2 |\eta^+ T^a \eta - \xi^+ T^a \xi + i/2 f^{abc} \Phi^a \Phi^b \Phi^{c+} + i/2 f^{abc} h^b h^{c+} + i/2 f^{abc} H^b H^{c+}|^2 + \\ & + g_2^2 |h^+ \tau^i / 2h + H^+ \tau^i / 2H|^2 + (g')^2 |1/2 h^+ h - 1/2 H^+ H|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

The SUSY-preserving condition for scalar potential (18) is determined by the flat F_i and D^a directions: $\langle F_i \rangle_0 = \langle D^a \rangle_0 = 0$. It is possible to remove the degeneracy of the supersymmetric vacuum solutions taking into account the interaction with supergravity, which was endeavored in SUSY GUT's, e.g., in the $SU(5)$ one [27] ($SU(5) \rightarrow SU(5)$, $SU(4) \times U(1)$, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$).

The horizontal symmetry spontaneous breaking to the intermediate subgroups in the first three cases of [5] can be realized, using the scalar compo-

nents of the chiral complex superfields Φ , which are singlet under the standard gauge group. The Φ -superfield transforms as the adjoint representation of $SU(3)_H$. The intermediate scale M_I can be sufficiently large: $M_I > 10^5 - 10^6$ GeV. The complete breaking of the remnant symmetry group V_H on the scale M_H will occur due to the nonvanishing VEV's of the scalars from the chiral superfields $\eta(3_H)$ and $\xi(\bar{3}_H)$. The $V_{\min}$, again, corresponds to the flat directions: $\langle F_{\eta, \xi} \rangle_0 = 0$. The version (iv) corresponds to the minimum of the scalar potential in the case when $\langle \Phi \rangle_0 = 0$.

As for the electroweak breaking, it is due to the VEV's of the fields h and H , providing masses for quarks and leptons. Note that VEV's of the fields h and H must be of the order of M_W as they determine the quark and lepton mass matrices. On the other hand, the masses of physical Higgs fields h and H , which mix generations, must be some orders higher than M_W , so that not to contradict the experimental restrictions of FCNC. As a careful search for the Higgs potential shows, this is the picture that can be attained.

2.3. The Superweak-Like Source of CP-Violation, the Baryon Stability and Neutrino Mass Problems in GUST with the Non-Abelian Gauge Family Symmetry. The existence of horizontal interactions might be closely connected to the CP-violation problem [5]. This interaction is described by the relevant part of the SUSY $SU(3)_H$ -Lagrangian and has the form

$$\mathcal{L}_H = g_H \bar{\Psi}_d \Gamma_\mu \left(D \frac{\Lambda^a}{2} D^+ \right) \Psi_d O_{ab} Z_\mu^b. \quad (22)$$

Here we have ($a, b = 1, 2, \dots, 8$). The matrix O_{ab} determines the relationship between the bare, H_μ^b , and physical Z_μ^b , gauge fields and is calculated for the mass matrix $(M_H^2)_{ab}$ diagonalized; $\Psi_d = (\psi_d, \psi_s, \psi_b)$; g_H is the gauge coupling of the $SU(3)_H$ group.

After the calculations in «bootstrap» model with the Higgs fields $\langle H \rangle = (\lambda_a \phi_a) \sqrt{2}$, $\langle h \rangle = (\lambda_a \tilde{\phi}_a) \sqrt{2}$ the expressions for the $(K_L^0 - K_S^0)$, $(B_{dL}^0 - B_{dS}^0)$, $(B_{sL}^0 - B_{sS}^0)$, $(D_L^0 - D_S^0), \dots$ meson mass differences (pure quark processes) at tree level take the following general forms:

$$\left[\frac{(M_{12}^K)_{ij}}{m_K} \right]_H = \frac{1}{2} \frac{g_H^4}{2M_{H_0}^4} \left\{ \left[\tilde{\phi}_a \left(D \frac{\lambda^a}{d} D^+ \right)_{ij} \right]^2 + \left[\phi_a \left(D \frac{\lambda^a}{d} D^+ \right)_{ij} \right]^2 \right\} f_{K_{ij}}^2 R_K,$$

$$\left[\frac{(M_{12}^D)_{ij}}{m_D} \right]_H = \frac{1}{2} \frac{g_H^4}{2M_{H_0}^4} \left\{ \left[\tilde{\varphi}_a \left(U \frac{\lambda^a}{2} U^+ \right)_{ij} \right]^2 + \left[\varphi_a \left(U \frac{\lambda^a}{2} U^+ \right)_{ij} \right]^2 \right\} f_{D_{ij}}^2 R_{D_{ij}}, \quad (23)$$

where $i, j = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ — the K or D , B_d or T_u , B_s or T_c -meson systems.

The coefficients in formulas (23) are calculated from (22) using formula (10) and the following useful relation

$$\sum_a (DT^a D^+)_{ik} (DT^a D^+)_{mn} = \frac{1}{2} (\delta_{in} \delta_{km} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{mn}). \quad (24)$$

For example, for K -meson systems we find the following contribution (if $D_L = D_R = D$)

$$\begin{aligned} & g_H^2 / 4 (D \lambda^a O^{ab} D^+)_{12} \frac{1}{M_0^2 + \Delta M_b^2} (D \lambda^c O^{cb} D^+)_{12} = \\ & = \frac{g_H^2}{4M_0^2} (D \lambda^a O^{ab} D^+)_{12} \left(1 - \frac{\Delta M_b^2}{M_0^2} \right) (D \lambda^c O^{cb} D^+)_{12} = \\ & = - \frac{g_H^2}{4M_0^4} (D \lambda^a D^+)_{12} \Delta M_{ac}^2 (D \lambda^c D^+)_{12} = \\ & = - \frac{g_H^4}{4M_0^4} (D \lambda^a D^+)_{12} f^{kal} f^{kcl'} \varphi^l \bar{\varphi}^{l'} (D \lambda^c D^+)_{12} = \\ & = \frac{g_H^4}{4M_0^4} (D [\lambda^k \lambda^m] D^+)_{12} \varphi^l \bar{\varphi}^{l'} (D [\lambda^k \lambda^{m'}] D^+)_{12} = \frac{g_H^4}{M_0^4} (D \varphi D^+)_{12} (D \varphi^+ D^+)_{12}. \quad (25) \end{aligned}$$

It is interesting, that if a difference between the gauge boson's masses is generated by Higgs fields in representation (3, 2) (see (11)), then the contribution in $\left[\frac{\Delta m}{m} \right]_H$ is equal to zero in considering order (for case $D_L = D_R$), since we will use Higgs fields (8, 2) for these evaluations. However, for processes including three equivalent indices (like $\mu \rightarrow 3e$), Higgs fields (3, 2) give nonzero contribution $\sim (\varphi D^+)_{i'} (D \bar{\varphi})_j$.

Note, that formula (25) is true for the case when D_L differs from D_R by diagonal phase multiply too. For us the case $D_L = -D_R$ which corresponds to

axial-vector terms is important. In general if $D_L \neq D_R$ (or $U_L \neq U_R$) then in formulas (23) there is a quadratic term $g_H^2/M_0^2 (D_L D_R^\dagger)_{ij} (D_R D_L^\dagger)_{ij}$, $i \neq j$.

Substituting in formula (23) the expressions for ϕ , $\tilde{\phi}$ and the elements d_{ij} of the D mixing matrix («bootstrap» solution), we can obtain the lower limit for the value M_{H_0} ($M_{H_0} < O$ (some TeV)). So, we could analyse the ratios (similar for $B_{d,s}$ -meson system):

$$\left[\frac{\Delta m_K}{m_K} \right]_H = \frac{g_H^2}{M_{H_0}^2} \operatorname{Re}[C_K] f_K^2 R_K < 7 \cdot 10^{-15} \quad (26)$$

and

$$\left[\frac{\operatorname{Im} M_{12}}{m_K} \right]_H = \frac{1}{2} \frac{g_H^2}{2M_{H_0}^2} \operatorname{Im}[C_K] f_K^2 R_K < 2 \cdot 10^{-17}. \quad (27)$$

In these formulas the expressions for $C_{K,D}$ are known functions in «bootstrap» models [5], namely

$$C_{K,D} = \frac{g_H^2}{2\lambda_Y^2} \frac{m_t^2}{M_{H_0}^2} \times f \left(\frac{m_i^{\text{up}}}{m_i^{\text{up}}}, \frac{m_k^{\text{down}}}{m_l^{\text{down}}} \right), \quad (28)$$

where f 's are known complex functions and their forms depend on quark fermion mass ansatzes [5].

Here noteworthy are the following two points: a) The appearance of the phase in the CKM mixing matrix may be due to new dynamics working at short distances $\left(r \ll \frac{1}{M_W} \right)$. Horizontal forces may be the source of this new dynamics [5]. Using this approach, we might have the CP -violation effects — both due to electroweak and horizontal interactions.

(b) The CP is conserved in the electroweak sector ($\delta^{KM} = 0$), and its breaking is provided by the structure of the horizontal interactions. Let us consider the situation when $\delta^{KM} = 0$. In the SM, such a case might be realized just accidentally. The vanishing phase of the electroweak sector ($\delta^{KM} = 0$) might arise spontaneously due to some additional symmetry. Again, such a situation might occur within the horizontal extension of the electroweak model.

In particular, this model gives rise to a rather natural mechanism of superweak-like CP -violation due to the ($CP = -1$) part of the effective Lagrangian of horizontal interactions — $(\epsilon'/\epsilon)_K \leq 10^{-4}$. That part of $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ includes the product of the $SU(3)_H$ -currents $I_{\mu i}$; $I_{\mu j}$ ($i = 1, 4, 6, 3, 8$; $j = 2, 5, 7$ or, vice versa, $i \leftrightarrow j$) [5].

In the case of a vector-like $SU(3)_H$ -gauge model the CP -violation could be only due to the charge symmetry breaking.

In electroweak and horizontal interactions we might also have two CP -violating contributions to the amplitudes of B -meson decays. But it is possible to construct a scheme where CP -violation will occur only in the horizontal interactions. The last fact might lead to a very interesting CP -violation asymmetry $A_f(t)$ for the decays of neutral B_d^0 - and $\bar{B}_d^0$ -mesons to final hadron CP -eigenstates, for example, to $f = (J/\Psi K_S^0)$ or $(\pi\pi)$

$$A_f(t) \approx \sin(\Delta m_{B_d} t) \operatorname{Im} \left(\frac{p}{q} \times \rho_f \right), \quad \rho_f = \frac{A(\bar{B} \rightarrow f)}{A(B \rightarrow f)}. \quad (29)$$

In the standard model with the Kobayashi — Maskawa mechanism of CP -violation the asymmetry of the decay of B_d^0 - and $\bar{B}_d^0$ -meson to the $J/\Psi K_S^0$ averaged by time is:

$$A(J/\Psi K_S^0) \approx \eta_f \frac{x_d}{1+x_d^2} \sin 2\phi_3 = - \frac{x_d}{1+x_d^2} \frac{2\eta(1-\rho)}{(1-\rho)^2 + \eta^2},$$

where $\eta_f = -1$ for a CP -odd $J/\Psi K_S^0$ -final state; $\phi_3 = \arg V_{td}$ is one of the angles ($\phi_i, i=1,2,3$) of the unitary triangle. Let us compare this asymmetry with the analogous asymmetry of the B^0 and $\bar{B}^0$ -decays to the CP -even final state (π^+, π^-), the latter being known to depend on the phase magnitudes of V_{ub} and V_{td} . Then:

$$A(\pi^+\pi^-) \approx -\eta_f \frac{x_d}{1+x_d^2} \sin 2\phi_2 = - \frac{x_d}{1+x_d^2} \frac{2\eta[(\rho^2 + \eta^2) - \rho]}{[(1-\rho)^2 + \eta^2][\rho^2 + \eta^2]},$$

where $\phi_2 = \pi - \phi_1 - \phi_3$ and $\phi_1 = \arg V_{ub}^* = \delta_{13}(\delta^{KM} = \phi_1 + \phi_3)$.

The contributions of CP -violating horizontal interactions to the asymmetries for both B^0 -decays could vary large (10% — 30%). They are identical for both decays but the signs differ.

The space-time structure of horizontal interactions depends on the $SU(3)_H$ quantum numbers of quark and lepton superfields and their C -conjugate superfields. One can obtain vector (axial)-like horizontal interactions as far as the G_H particle quantum numbers are conjugate (equal) to those of antiparticles. The question arising in these theories is how such horizontal interactions are related with strong and electroweak ones. All these interactions can be unified within one gauge group, which would allow one to calculate the value of the

coupling constant of horizontal interactions. Thus, unification of horizontal, strong and electroweak interactions might rest on the GUTs $\tilde{G} \equiv G \times SU(3)_H$ (where, for example, $\tilde{G} \equiv E(8)$, $G \equiv SU(5)$, $SO(10)$ or E_6), which may be further broken down to $SU(3)_H \times SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. For including «vector»-like horizontal gauge symmetry into GUT we have to introduce «mirror» superfields. Speaking more definitely, if we want to construct GUTs of the $\tilde{G} \equiv G \times SU(3)_H$ type, each generation must encompass double G -matter supermultiplets, mutually conjugate under the $SU(3)_H$ -group. In this approach the first supermultiplet consists of the superfields f and $f_m^c \in 3_{H^*}$, while the second is constructed with the help of the supermultiplets f^c and $f_m \in \bar{3}_H$. In this scheme, proton decays are only possible in the case of mixing between ordinary and «mirror» fermions. In its turn, this mixing must, in particular, be related with the $SU(3)_H$ -symmetry breaking.

The GUSTs spectra also predict the existing of the new neutral neutrino-like particles interacting with the matter only by «superweak»-like coupling. It is possible to estimate the masses of these particles, and, as will be shown further, some of them have to be light (superlight) to be observed in modern experiment.

A variant for unusual nonuniversal family gauge interactions of known quarks and leptons could be realized if for each generation we introduce new heavy quarks ($F = U, D$), and leptons (L, N) which are singlets (it is possible to consider doublets also) under $SU(2)_L$ - and triplets under $SU(3)_H$ -groups. (This fermion matter could exist in string spectra. See all the three models with $SU(3_H) \times SU(3_H)$ family gauge symmetry). Let us consider for concreteness a case of charged leptons: $\Psi_l = (e, \mu, \tau)$ and $\Psi_L = (E, M, T)$. Primarily, for simplicity we suggest that the ordinary fermions do not take part in $SU(3)_H$ -interactions («white» color states). Then the interaction is described by the relevant part of the SUSY $SU(3)_H$ -Lagrangian and gets the form

$$\mathcal{L}_H = g_H \bar{\Psi}_L \gamma_\mu \frac{\Lambda_{6 \times 6}^a}{2} \Psi_L O_{ab} Z_\mu^b, \quad (30)$$

where

$$\Lambda_{6 \times 6}^a = \begin{pmatrix} S(L\lambda^a L^+)S & -S(L\lambda^a L^+)C \\ -C(L\lambda^a L^+)S & C(L\lambda^a L^+)C \end{pmatrix}.$$

Here we have $\Psi_L = (\Psi_l; \Psi_L)$. The matrix O_{ab} ($a, b = 1, 2, 3, 8$) determines the relationship between the bare, H_μ^b , and physical, Z_μ^b , gauge fields. The

diagonal 3×3 matrices $S = \text{diag}(s_e, s_\mu, s_\tau)$ and $C = \text{diag}(c_e, c_\mu, c_\tau)$ define the nonuniversal character for lepton horizontal interactions, as the elements s_i depend on the lepton masses, like $s_i \sim \sqrt{m_i/M_0}$ ($i = e, \mu, \tau$). The same suggestion we might accept for local quark family interactions.

For the family mixing we might suggest the next scheme. The primary 3×3 mass matrix for the light ordinary fermions is equal to zero: $M_{ff}^0 \approx 0$. The 3×3 -mass matrix for heavy fermions is approximately proportional to unit $M_{FF}^0 \approx M_0^Y \times 1$, where $M_0^Y \approx 0.5 - 1.0$ TeV and might be different for F_{up}^- , F_{down}^- -quarks and for F_L -leptons. We assume that the splitting between new heavy fermions in each class F_Y ($Y = \text{up, down, } L$) is small and, at least in quark sector, might be described by the t -quark mass. Thus we think that at the first approximation it is possible to neglect the heavy fermion mixing. The mixing in the light sector is completely explained by the coupling of the light fermions with the heavy fermions. As a result of this coupling the 3×3 -mass matrix M_{ff}^0 could be constructed by «democratic» way which could lead to the well-known mass family hierarchy:

$$M_{6 \times 6}^0 = \begin{pmatrix} M_{ff}^0 & M_{fF}^0 \\ M_{Ff}^0 & M_{FF}^0 \end{pmatrix},$$

where

$$M_{fF}^0 \approx M_{fF}^{\text{dem}} + M_{fF}^{\text{corr}}. \quad (31)$$

The diagonalization of the M_{fF}^0 -mass matrix $XM_{fF}^0 X^+$ ($X = L^-, D^-, U$ -mixing matrices) gives us the eigenvalues, which define the family mass hierarchy — $n_1^Y \ll n_2^Y \ll n_3^Y$ and the following relations between the masses of the known light fermions and a new heavy mass scale:

$$n_i^Y = \sqrt{m_i M_0^Y}, \quad i = 1, 2, 3; \quad Y = \text{up-}, \text{down-fermions}.$$

In this «see-saw» mechanism the common mass scale of new heavy fermions might be not very far from the energy ~ 1 TeV, and as a consequence of it the mixing angles s_i -might be not too small. There is another interesting relation between the mass scales n_i^Y that might be in this mechanism, at least for the quark case:

$$n_t/n_c = n_c/n_u = q_H^u, \quad q_H^u \approx 1/\lambda^2,$$

$$n_b/n_s = n_s/n_d = q_H^d, \quad q_H^d \approx 1/\lambda.$$

An explicit example of nonuniversal $SU(3_H) \times SU(3_H)$ local family interactions will be considered later (see model 3 section 2).

3. THE HETEROTIC SUPERSTRING THEORY WITH RANK 8 AND 16 GRAND UNIFIED GAUGE GROUPS

3.1. Conformal Symmetry in Heterotic Superstring. In the heterotic string theory in left-moving (supersymmetric) sector there are $d-2$ (in the light-cone gauge) real fermions ψ^μ , their bosonic superpartners X^μ , and $3(10-d)$ real fermions χ^I . In the right-moving sector there are $d-2$ bosons $\bar{X}^\mu$ and $2(26-d)$ real fermions.

In the supersymmetric sector world-sheet supersymmetry is non-linearly realized via the supercharge

$$T_F = \psi^\mu \partial X_\mu + f_{IJK} \chi^I \chi^J \chi^K, \quad (32)$$

where f_{IJK} are the structure constants of a semi-simple Lie group G of dimension $3(10-d)$.

The possible Lie algebras of dimension 18 for $d=4$ are $SU(2)^6$, $SU(3) \times SO(5)$, and $SU(2) \times SU(4)$. However, $N=1$ space-time supersymmetry cannot be attained in two last cases [34].

If we take the moments of the energy-momentum operator we will get the conformal generators with the following Virasoro algebra:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1) \delta_{n,-m}. \quad (33)$$

Using Virasoro algebra we can construct representations of the conformal group where the highest weight state is specified by two quantum numbers, conformal weight h , and central charge c , such that:

$$L_0 |h, c\rangle = h |h, c\rangle$$

$$L_n |h, c\rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

For massless state the conformal weight $h=1$.

A Sugawara — Sommerfeld construction of the Virasoro algebra in terms of bilinears in the Kac-Moody generators [17, 18] allows one to get the following expression for the central Virasoro «charge»:

$$c_g = \frac{2k \dim g}{2k + Q_\psi} = \frac{x \dim g}{x + \tilde{h}}. \quad (35)$$

In heterotic string theories [9, 10] $(N=1 \text{ SUSY})_{\text{left}}$ with $(N=0 \text{ SUSY})_{\text{right}} \oplus \mathcal{M}_{c_L; c_R}$ with $d \leq 10$, the conformal anomalies of the space-time sector are canceled by the conformal anomalies of the internal sector $\mathcal{M}_{c_L; c_R}$, where $c_L = 15 - 3d/2$ and $c_R = 26 - d$ are the conformal anomalies in the left- and right-moving string sectors, respectively.

In the fermionic formulation of the four-dimensional heterotic string theory in addition to the two transverse bosonic coordinates X_μ , $\bar{X}_\mu$ and their left-moving superpartners ψ_μ , the internal sector $\mathcal{M}_{c_L; c_R}$ contains 44 right-moving ($c_R = 22$) and 18 left-moving ($c_L = 9$) real fermions (each real world-sheet fermion has $c_f = 1/2$).

For a couple of years superstring theories, and particularly the heterotic string theory, have provided an efficient way to construct the Grand Unified Superstring Theories (GUST) of all known interactions, despite the fact that it is still difficult to construct unique and fully realistic low energy models resulting after decoupling of massive string modes. This is because of the fact that only 10-dimensional space-time allows existence of two consistent (invariant under reparametrization, superconformal, modular, Lorentz and SUSY transformations) theories with the gauge symmetries $E(8) \times E(8)$ or $spin(32)/Z_2$ [9,10] which after compactification of the six extra space coordinates (into the Calabi — Yau [11, 12] manifolds or into the orbifolds) can be used for constructing GUSTs. Unfortunately, the process of compactification to four dimensions is not unique and the number of possible low energy models is very large. On the other hand, constructing the theory directly in 4-dimensional space-time requires including a considerable number of free bosons or fermions into the internal string sector of the heterotic superstring [13,14,15, 16]. This leads to as large internal symmetry group such as, e.g., rank 22 group. The way of breaking this primordial symmetry is again not unique and leads to a huge number of possible models, each of them giving different low energy predictions.

Because of the presence of the affine Kac-Moody algebra (KMA) $\hat{g}$ (which is a 2-dimensional manifestation of gauge symmetries of the string itself) on the world sheet, string constructions yield definite predictions concerning representation of the symmetry group that can be used for low energy models building [17, 18]. Therefore the following longstanding questions have a chance to be answered in this kind of unification schemes:

1. How are the chiral matter fermions assigned to the multiplets of the unifying group?
2. How is the GUT gauge symmetry breaking realized?

3. What is the origin and the form of the fermion mass matrices?

The first of these problems is, of course, closely connected to the quantization of the electromagnetic charge of matter fields. In addition, string constructions can shed some light on the questions about the number of generation and possible existence of mirror fermions which remain unanswered in conventional GUTs [19].

There are not so many GUSTs describing the observable sector of Standard Models. They are well known: the SM gauge group, the Pati-Salam ($SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$) gauge group, the flipped $SU(5)$ gauge group and $SO(10)$ gauge group, which includes flipped $SU(5)$ [16].

There are good physical reasons for including the horizontal $SU(3)_H$ group into the unification scheme. Firstly, this group naturally accomodates three fermion families presently observed (explaining their origin) and, secondly, can provide correct and economical description of the fermion mass spectrum and mixing without invoking high dimensional representation of conventional $SU(5)$, $SO(10)$ or $E(6)$ gauge groups. Construction of a string model (GUST) containing the horizontal gauge symmetry provides additional strong motivation to this idea. Moreover, the fact that in GUSTs high dimensional representations are forbidden by the KMA is a very welcome feature in this context.

3.2. The Possible Ways of $E(8)$ -GUST Breaking Leading to the $N_G = 3$ or $N_G = 3 + 1$ Families. All this leads us naturally to consider possible forms for horizontal symmetry G_H and G_H quantum number assignments for quarks (anti-quarks) and leptons (anti-leptons) which can be realized within GUSTs framework. To include the horizontal interactions with three known generations in the ordinary GUST it is natural to consider rank eight gauge symmetry. We can consider $SO(16)$ (or $E(6) \times SU(3)$) which is the maximal subgroup of $E(8)$ and which contains the rank eight subgroup $SO(10) \times (U(1) \times SU(3))_H$ [20]. We will be, therefore, concerned with the following chains (see Fig. 1):

$$\begin{aligned} E(8) &\rightarrow SO(16) \rightarrow SO(10) \times (U(1) \times SU(3))_H \rightarrow \\ &\quad \rightarrow SU(5) \times U(1)_{Y_5} \times (SU(3) \times U(1))_H \end{aligned}$$

or

$$E(8) \rightarrow E(6) \times SU(3) \rightarrow (SU(3))^{\times 4}.$$

According to this scheme one can get $SU(3)_H \times U(1)_H$ gauge family symmetry with $N_g = 3 + 1$ (there are also other possibilities as, e.g., $E(6) \times SU(3)_H \subset E(8)$ $N_g = 3$ generations can be obtained due to the second way of $E(8)$ gauge symmetry breaking via $E(6) \times SU(3)_H$, see Fig.1), where the

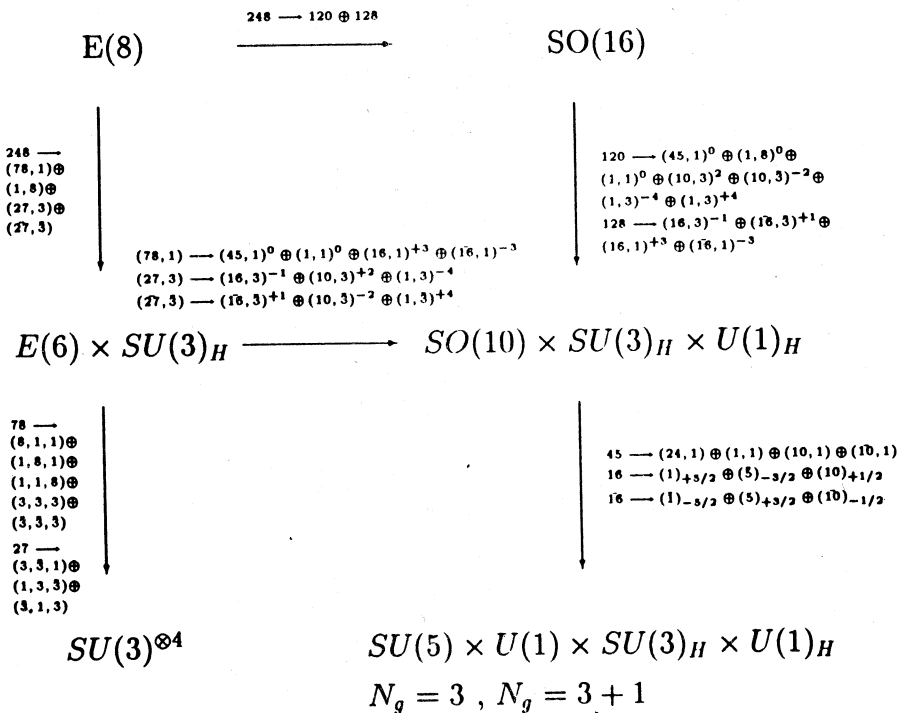


Fig.1. The possible ways of $E(8)$ gauge symmetry breaking leading to the $3 + 1$ or 3 generations

possible additional fourth massive matter superfield could appear from $\underline{78}$ as a singlet of $SU(3)_H$ and transforms as $\underline{16}$ under the $SO(10)$ group.

In this note starting from the rank 16 grand unified gauge group (which is the minimal rank allowed in strings) of the form $G \times G$ [21, 22] and making use of the KMA which select the possible gauge group representations we construct the string models based on the diagonal subgroup $G^{\text{sym}} \subset G \times G \subset SO(16) \times SO(16)$ ($\subset E_8 \times E_8$) [21]. We discuss and consider $G^{\text{sym}} = SU(5) \times U(1) \times (SU(3) \times U(1))_H \subset SO(16)$ where the factor $(SU(3) \times U(1))_H$ is interpreted as the horizontal gauge family symmetry. We explain how the unifying gauge symmetry can be broken down to the Standard Model group. Furthermore, the horizontal interaction predicted in our model can give an alternative description of the fermion mass matrices without invoking high dimensional Higgs repre-

sentations. In contrast with other GUST constructions, our model does not contain particles with exotic fractional electric charges [23, 21]. This important virtue of the model is due to the symmetric construction of the electromagnetic charge Q_{em} from Q^I and Q^{II} — the two electric charges of each of the $U(5)$ groups [21]:

$$Q_{em} = Q^{II} \oplus Q^I. \quad (36)$$

We consider the possible forms of the $G_H = SU(3)_H$, $SU(3)_H \times U(1)$, $G_{HL} \times G_{HR}$...-gauge family symmetries in the framework of Grand Unification Superstring Approach. Also we will study the matter spectrum of these GUST, the possible Higgs sectors. The form of the Higgs sector is very important for GUST-, G_H - and SM-gauge symmetries breaking and for constructing Yukawa couplings.

3.3. The Superstring Theory Scale of Unification and the Estimates on the Horizontal Coupling Constant. Really, the estimates on the M_{H_0} -scale depend on the value of the family gauge coupling. These estimates can be made in GUST using the string scale

$$M_{SU} \approx 0.73 g_{\text{string}} \cdot 10^{18} \text{ GeV} \quad (37)$$

and the renormalization group equations (RGE) for the gauge couplings, α_{em} , α_3 , α_2 , to the low energies:

$$\alpha_{em}(M_Z) \approx 1/128,$$

$$\alpha_3(M_Z) \approx 0.11,$$

$$\sin^2 \theta_W(M_Z) \approx 0.233. \quad (38)$$

The string unification scale could be contrasted with the $SU(3^c) \times SU(2) \times U(1)$ naive unification scale, $M_{GUT} \approx 10^{16} \text{ GeV}$, obtained by running the SM particles and their SUSY-partners to high energies. The simplest solution to this problem is the introduction of the new heavy particles with SM quantum numbers, which can exist in string spectra [16].

However there are some other ways to explain the difference between scales of string (M_{SU}) and ordinary (M_{GUT}) unifications. If one uses the breaking scheme $G^I \times G^{II} \rightarrow G^{\text{sym}}$ (where $G^{I,II} = U(5) \times U(3)_H \subset E_8$) described above, then unification scale $M_{GUT} \sim 10^{16} \text{ GeV}$ is the scale of breaking the $G \times G$ group, and string unification does supply the equality of coupling constant $G \times G$ on the string scale $M_{SU} \sim 10^{18} \text{ GeV}$. Otherwise, we can have an

addition scale of the symmetry breaking $M_{\text{sym}} > M_{\text{GUT}}$. In any case on the scale of breaking $G \times G \rightarrow G^{\text{sym}}$ the gauge coupling constants satisfy the equation

$$g_{\text{sym}}^2 = 1/4(g_I^2 + g_{II}^2). \quad (39)$$

Thus in this scheme knowing of scales M_{SU} and M_U gives us a principal possibility to trace the evolution of coupling constant of the original group $G \times G$ to the low energy and estimate the value of horizontal gauge constant g_{3H} .

The coincidence of $\sin^2\theta_W$ with experiment will show how realistic this model is.

Let us consider some relations which determine the value of $\sin^2\theta_W$ for different unification groups and for different ways of the breaking.

Firstly let us consider the case of $SO(10) \times U(3) \rightarrow SU(5) \times U(1) \times [SU(3) \times U(1)]_H$ breaking, which can be illustrated by Model 2. In this case matter fields are generated by world-sheet fermions with periodic boundary conditions. Consequently all representations of matter fields can be considered as the result of destruction of $\underline{16}$ and $\overline{16}$ representations of the $SO(10)$ group.

If we write the general expansion for a world-sheet fermion in the form

$$f(\sigma, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_{n+\frac{1-\alpha}{2}}^+ \exp \left[-i \left(n + \frac{1-\alpha}{2} \right) (\sigma + \tau) \right] + d_{n+\frac{1+\alpha}{2}} \exp \left[i \left(n + \frac{1+\alpha}{2} \right) (\sigma + \tau) \right] \right], \quad (40)$$

where the quantization conditions are given by the anti-commutation relations

$$\{b_a^+, b_b\} = \{d_a^+, d_b\} = \delta_{ab},$$

then the representation $\overline{16}$ of $SO(10)$ in terms of the creation (b_0^{i+}) and annihilation (b_0^i) operators will have the form

$$\overline{16} = \underline{1} + \overline{10} + \underline{5} = (1 + b_0^{i+} b_0^{j+} + b_0^{i+} b_0^{j+} b_0^{k+} b_0^{l+}) |0\rangle, \quad (41)$$

where $i, j, k, l = 1, \dots, 5$.

The Clifford algebra is realized via the γ -matrix for $SO(10)$ group $\gamma_k = (b_k + b_k^+)$ and $\gamma_{5+k} = -i(b_k - b_k^+)$. Generators of the $U(5)$ subgroup can be

written in terms b_0^i as $T[U(5)] = 1/2 [b_i, b_i^+]$. Then the operator of the $U(1)_5$ hypercharge is

$$Y_5 = 1/2 \sum_i [b_i, b_i^+] = 5/2 - \sum_i b_i^+, b_i. \quad (42)$$

But this generator is not normalized, since $Y_5(\underline{1}, \underline{10}, \underline{5}) = 5/2, 1/2, -3/2$, correspondingly, and $\text{Tr}_{16} Y_5^2 = 20$.

In our scheme the electromagnetic charge is

$$Q_{EM} = T_5 - 2/5 Y_5, \quad (43)$$

where $T_5 = \text{diag}(1/15, 1/15, 1/15, 2/5, -3/5)$. For representation $\underline{5}$ of the $SU(5)$ this means that

$$\begin{aligned} Q_{EM}(\underline{5}) &= [\text{diag}(0^3, 1/2, -1/2) + \text{diag}(2/30^3, -3/30^2)] - 2/5 \cdot (-3/2) = \\ &= \text{diag}(0^3, 1/2, -1/2) + 1/2 [\text{diag}(2/15^3, -3/15^2) + 6/5] = \\ &= t_3 + 1/2 [\tilde{t}_0 - 4/5 Y_5] = t_3 + 1/2 \text{diag}(4/3^3, 1^2) = t_3 + 1/2 y, \end{aligned} \quad (44)$$

where y is the electroweak hypercharge.

Now let us write down the principal equation for coupling constants

$$g_5 t_0 A_\mu + (kg_5) Y A'_\mu = g_1 y B_\mu + g'_1 y' B'_\mu. \quad (45)$$

In this equation (kg_5) is $U(1)_5$ coupling constant on the scale, where $U(5)$ is breaking down (on the $SO(10) \rightarrow U(5)$ scale $k=1$); operators $t_0 \sim \tilde{t}_0$, $Y \sim Y_5$ and have equal norm; A and B are gauge fields.

Diagonal generators can be written in terms of creation-annihilation operators as

$$\text{diag}(A_i) = \sum_{i=1}^5 A_i (1 - b_i^+ b_i) = - \sum_i A_i b_i^+ b_i. \quad (46)$$

Consequently $\text{Tr}_{16} \tilde{t}_0^2 = 8/15$. If we shall normalize generators as $\text{Tr}_{16} t_0^2 = \text{Tr}_{16} Y^2 = 8$, then $Y(\underline{5}) - \sqrt{2/5} Y_5(\underline{5}) = -3/\sqrt{10}$ and $t_0 = 1/\sqrt{15} \text{diag}(2^3, -3^2)$. Now after rewriting the equation (45) separately for three up components and two down components, and substitution $B_\mu = cA_\mu + sA'_\mu$, $B'_\mu = -sA_\mu + cA'_\mu$ where $c^2 + s^2 = 1$, we find from equation (45)

$$\sin^2 \theta_w = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_5^2} = \frac{15k^2}{16k^2 + 24} \Big|_{k^2=1} = \frac{3}{8}. \quad (47)$$

Now let us consider the breaking $E_6 \rightarrow U(5) \times U(1)$, which corresponds to models like Model 4. The expansion of matter representation $\underline{27}$ of the E_6 group under the group $SU(5) \times U(1)_5$ is

$$\begin{aligned} \underline{27} &= (\bar{5}_{3/2} + \underline{10}_{-1/2} \underline{1}_{-5/2}) + (\bar{5}_1 + \bar{5}_{-1}) + \underline{1}_0 = \\ &= [(b_0^{i+} + b_0^{i+} b_o^{j+} b_0^{k+} + b_0^{i+} b_0^{j+} b_0^{k+} b_0^{l+} b_0^{m+}) + (d_{1/2}^{i+} + b_{1/2}^{i+} + 1)|0\rangle]. \end{aligned} \quad (48)$$

The generalization of the formula (42) for the case when representation contains states from different sectors with different boundary conditions is

$$Y_5 = \sum_i \left(\frac{\alpha_i}{2} + \sum_E [d_E^+(f_i) d_E(f_i) - b_E^+(f_i^*) b_E(f_i^*)] \right) \quad (49)$$

and analogically for formula (46)

$$\text{diag}(A_i) = \sum_i \left[A_i \cdot \sum_E (d_E^+(f_i) d_E(f_i) - b_E^+(f_i^*) b_E(f_i^*)) \right], \quad \left(\sum A_i = 0 \right).$$

Now we have $\text{Tr}_{\underline{27}} Y_5^2 = 30$ and $\text{Tr}_{\underline{27}} t_0^2 = 4/5$. By comparison with preceding case both norms are 1.5 times greater, hence formula (47) is true for this case, too. But now the B'_μ is some linear combination of gauge fields.

Further, let us consider the Model 1. This case corresponds to breaking $SO(16) \rightarrow U(8) \rightarrow U(5) \times U(3)$. The matter fields arise from sectors with $\alpha = \pm 1/2$ and correspond to chips of the $SU(8)$ representations

$$\left. \begin{aligned} 8 &\rightarrow [(1, 3)] + (5, 1) \\ \underline{56} &\rightarrow [(1, 1) + (10, 3)] + (\bar{10}, 1) + (\underline{5}, \bar{3}) \\ \underline{56} &\rightarrow [(10, 1) + (\underline{5}, 3)] + (1, 1) + (10, 3) \\ 8 &\rightarrow [(5, 1)] + (1, 3) \end{aligned} \right\} \sim 128_{SO(16)},$$

where only the fields in square brackets survive after the GSO projection.

For these model it is necessary to change $Y_5 \rightarrow \tilde{Y}_5 = -1/4(Y_5 + 5Y_3)$ in formula (44). Now we can calculate the norms of t_0 and $\tilde{Y}_5$ operators for this model.

$$\text{Tr}_{128} \tilde{Y}_5^2 = 160 = 20 \times 8,$$

$$\text{Tr}_{128} t_0^2 = \frac{64}{15} = \frac{8}{15} \times 8.$$

Hence we find again formula (47), but A'_μ is linear combination of gauge fields, which corresponds to $\tilde{Y}_5$ hypercharge and kg_5 is his coupling constant.

Finally, let us consider the model with following chain of the gauge group breaking $E_6 \times SU(3)_H \rightarrow SU(3)^3 \times SU(3)_H$. Then representation $\underline{27}$ of E_6 group looks like $27 = (1, 3, \bar{3}) + (3, \bar{3}, 1) + (\bar{3}, 1, 3)$.

Let us write down quantum numbers for breaking: $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_C \times [SU(2) \times U(1)]_L \times U(1)_R^n$ (we consider one generation). For this construction the electromagnetic charge is

$$Q_{EM} = t_3^L + 1/2(Y_L + Y_R) = t_3^L + 1/2y_{EW},$$

where $t_3^L = \text{diag}(1/2, -1/2, 0)$, $Y_L = \text{diag}(-1/3, -1/3, 2/3)$, $Y_R = \text{diag}(2/3, 2/3, -4/3)$. This corresponds to the following set of fields:

$$(1, 3, \bar{3}) \sim \begin{pmatrix} (v & l)_L & v_R^c \\ L_1^U & L_1^D & L \\ L_2^U & L_2^D & e_R^c \end{pmatrix}, \quad (3, \bar{3}, 1) \sim 3 \times [(d-u)_L D_L],$$

$$(\bar{3}, 1, 3) \sim \bar{3} \times \begin{pmatrix} D_R^c \\ d_R^c \\ u_R^c \end{pmatrix},$$

where capital letters correspond to additional heavy quarks and leptons.

Now we can calculate norms of Y_L, Y_R

$$\text{Tr}_{27} Y_L^2 = 4, \quad \text{Tr}_{27} Y_R^2 = 16,$$

and write down the equation for gauge coupling constants

$$g_L Y_L A_L^\mu + 1/2 g_R Y_R A_R^\mu = g_1 y_{EW} B^\mu + g'_1 y' B'^\mu, \quad (50)$$

where $g_R = k g_L$ and on the scale of the breaking $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(2)_L \times U(1)_L \times U(1)_R$ $k = 1$.

For example, for (v, e, v_R^c) we have $Y_L = \text{diag}(-1/3, -1/3, 2/3)$, $Y_R = -2/3$ and $y_{EW} = \text{diag}(-1, -1, 0)$. Then from equation (50) (analogically with (45, 47)) we find

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_L^2} = \frac{k^2}{2k^2 + 4}. \quad (51)$$

The analysis of RG-equations allows one to state that horizontal coupling constant g_{3H} does not exceed electro-weak one g_2 .

For example, if below the M_{GUT} scale in non-horizontal sector we have effectively the standard model with four generations and two Higgs doublets (like Model 1, 2) then the evolution of gauge coupling constants is described by equations

$$\alpha_s^{-1}(\mu) = \alpha_s^{-1}(M_{GUT}) + 8\pi b_3 \ln(\mu/M_{GUT}) \quad (52)$$

$$\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W = \alpha_s^{-1}(M_{GUT}) + 8\pi b_2 \ln(\mu/M_{GUT}) \quad (53)$$

$$\frac{15}{k^2 + 24} \alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = (k^2 \alpha_s(M_{GUT}))^{-1} + 8\pi b_1 \ln(\mu/M_{GUT}), \quad (54)$$

where

$$b_3 = \frac{1}{16\pi^2}, \quad b_2 = -\frac{3}{16\pi^2}, \quad b_1 = -\frac{21}{40\pi^2}.$$

From these equations and from (38) we can find

$$M_{GUT} = 1.3 \cdot 10^{16} \text{ GeV}, \quad k^2 = 0.9, \quad \alpha_s^{-1} = 14. \quad (55)$$

Now we can get the relation between $g_{str} \equiv g$ and M_{sym} from RG equations for gauge running constants $g_5^{sym} \equiv g_5$, g_5^I and g_5^{II} on $M_{GUT} - M_{SU}$ scale. For example, for Model 1

$$b_5^{sym} = -\frac{3}{4\pi^2}, \quad b_5^I = -\frac{5}{16\pi^2}; \quad b_5^{II} = \frac{3}{16\pi^2},$$

and from RGE we find the following relation

$$\begin{aligned} & \frac{g_5^2}{4\pi^2 + 6g_5^2 \ln(M_{GUT}/M_{sym})} = \\ & = g^2 \frac{8\pi^2 - g^2 \ln(M_{sym}/M_{SU})}{[8\pi^2 - 5g^2 \ln(M_{sym}/M_{SU})] \cdot [8\pi^2 + 3g^2 \ln(M_{sym}/M_{SU})]}. \end{aligned} \quad (56)$$

According to this equation we obtain that if $M_{SU} \approx 10^{18}$ GeV and the scale of breaking down to symmetric subgroup changes in region $M_{sym} + 1.5 \cdot 10^{16}$ GeV — 10^{18} GeV, then $g_{str} \sim O(1)$. Note that these values agree with formula (37).

Using RG equations for the running constant g_{3H} and the value of the string coupling constant g_{str} we can estimate a value of the horizontal coupling constant at low energies. For Model 1 we have

$$b_{3H}^{sym} = -\frac{5}{2\pi^2}, \quad b_{3H}^I = -\frac{21}{16\pi^2}, \quad b_5^{II} = -\frac{13}{16\pi^2},$$

and taking into account the relation (39), we find from RGE for g_{3H} that

$$g_{3H}^2(O(1 \text{ TeV})) \approx 0.05,$$

and this value depends very slightly on the scale M_{sym} . However, note that for all our estimations the presence of the breaking $G \times G$ group to diagonal subgroup G_{sym} played the crucial role.

The above calculations show that for evaluation of intensity of processes with a gauge horizontal bosons at low energies we can use inequality

$$\alpha_{3H}(\mu) \leq \alpha_2(\mu).$$

4. WORLD-SHEET KAC-MOODY ALGEBRA AND MAIN FEATURES OF RANK EIGHT GUST

4.1. The Representations of Kac-Moody Algebra and Vertex Operators.

Let us begin with a short review of the KMA results [17, 18]. In heterotic string, the KMA is constructed by the operator product expansion (OPE) of the fields J^a of the conformal dimension (0,1):

$$J^a(z)J^b(\omega) = \frac{1}{z-\omega^2} k\delta^{ab} + \frac{1}{z-\omega} if^{abc}J^c + \dots \quad (57)$$

The structure constants f^{abc} for the group g are normalized so that

$$f^{acd}f^{bcd} = Q_\psi \delta^{ab} = \tilde{h}\psi^2 \delta^{ab}, \quad (58)$$

where Q_ψ and ψ are the quadratic Casimir and the highest weight of the adjoint representation and $\tilde{h}$ is the dual Coxeter number. The $\frac{\psi}{\psi^2}$ can be expanded as in integer linear combination of the simple roots of g :

$$\frac{\psi}{\psi^2} = \sum_{i=1}^{\text{rank } g} m_i \alpha_i. \quad (59)$$

The dual Coxeter number can be expressed through the integers numbers m_i

$$\tilde{h} = 1 + \sum_{i=1}^{\text{rank } g} m_i \quad (60)$$

and for the simply laced groups (all roots are equal and $\psi^2 = 2$): A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 they are equal to $n+1$, $2n-2$, 12, 18 and 30, respectively.

The KMA $\hat{g}$ allows one to grade the representations R of the gauge group by a level number x (a non-negative integer) and by a conformal weight $h(R)$. An irreducible representation of the affine algebra $\hat{g}$ is characterized by the

vacuum representation of the algebra g and the value of the central term k , which is connected to the level number by the relation $x = 2k/\psi^2$. The value of the level number of the KMA determines the possible highest weight unitary representations which are present in the spectrum in the following way

$$x = \frac{2k}{\psi^2} \geq \sum_{i=1}^{\text{rank } g} n_i m_i, \quad (61)$$

where the sets of non-negative integers $\{m_i = m_1, \dots, m_r\}$ and $\{n_i = n_1, \dots, n_r\}$ define the highest root and the highest weight of a representation R , respectively [17,18]:

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{\text{rank } g} n_i \alpha_i. \quad (62)$$

In fact, the KMA on the level one is realized in the 4-dimensional heterotic superstring theories with free world sheet fermions which allow a complex fermion description [14,15,16]. One can obtain KMA on a higher level working with real fermions and using some tricks [29]. For these models the level of KMA coincides with the Dynkin index of representation M to which free fermions are assigned

$$x = x_M = \frac{Q_M \dim M}{\psi^2 \dim g} \quad (63)$$

(Q_M is a quadratic Casimir eigenvalue of representation M) and equals one in cases when real fermions form vector representation M of $SO(2N)$, or when the world sheet fermions are complex and M is the fundamental representation of $U(N)$ [17,18].

Thus, in strings with KMA on the level one realized on the world-sheet, only very restricted set of unitary representations can arise in the spectrum:

1. singlet and totally antisymmetric tensor representations of $SU(N)$ groups, for which $m_i = (1, \dots, 1)$;
2. singlet, vector, and spinor representations of $SO(2N)$ groups with $m_i = (1, 2, 2, \dots, 2, 1, 1)$;
3. singlet, $\underline{27}$ and $\overline{27}$ -plets of $E(6)$ corresponding to $m_i = (1, 2, 2, 3, 2, 1)$;
4. singlet of $E(8)$ with $m_i = (2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2)$.

Therefore only these representations can be used to incorporate matter and Higgs fields in GUSTs with KMA on the level 1.

In principle it might be possible to construct explicitly an example of level-1 KMA-representation of the simply laced algebra $\hat{g}$ (A -, D -, E -types) from the level-one representations of the Cartan subalgebra of g . This construction is

achieved using the vertex operator of string, where these operators are assigned to a set of lattice point corresponding to the roots of a simply-laced Lie algebra g . In heterotic string approach the vertex operator for a gauge boson with momentum p and polarization ζ is a primary field of conformal dimension $(1/2, 1)$ and could be written in the form:

$$V^a = \zeta_\mu \psi_\mu(\bar{z}) J^a \exp(ipX), \quad p_\mu p^\mu = \zeta_\mu p^\mu = 0. \quad (64)$$

X_μ is the string coordinate and ψ^μ is a conformal dimension $(1/2, 0)$ Ramond-Neveu-Schwartz fermion.

4.2. The Features of the Level-One KMA in Matter and Higgs Representations in Rank 8 and 16 GUST Constructions. For example, to describe chiral matter fermions in GUST with the gauge symmetry group $SU(5) \times U(1) \subset SO(10)$ the following sum of the level-one complex representations: $\underline{1}(-5/2) + \underline{5}(+3/2) + \underline{10}(-1/2) = \underline{16}$ can be used. On the other side, as real representations of $SU(5) \times U(1) \subset SO(10)$, from which Higgs fields can arise, one can take, for example, $\underline{5} + \underline{5}$ representations arising from real representation $\underline{10}$ of $SO(10)$. Also, real Higgs representations like $\underline{10}(-1/2) + \underline{10}(+1/2)$ of $SU(5) \times U(1)$ originating from $\underline{16} + \underline{16}$ of $SO(10)$, which has been used in Ref.[6] for further symmetry breaking, are allowed.

Another example is provided by the decomposition of $SO(16)$ representations under $SU(8) \times U(1) \subset SO(16)$. Here, only singlet $v = \underline{16}$, $s = \underline{128}$ and $s' = \underline{128}'$ representations of $SO(16)$ are allowed by the KMA ($s = \underline{128}$ and $s' = \underline{128}'$ are the two nonequivalent, real spinor representations with the highest weights $\pi_{7,8} = 1/2(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_7 \mp \epsilon_8)$, $\epsilon_i \epsilon_j = \delta_{ij}$). From item 2, we can obtain the following $SU(8) \times U(1)$ representations: singlet, $\underline{8} + \underline{8} (= \underline{16})$, $\underline{8} + \underline{56} + \underline{56} + \underline{8} (= \underline{128})$, and $\underline{1} + \underline{28} + \underline{70} + \underline{28} + \underline{1} (= \underline{128}')$. The highest weights of $SU(8)$ representations $\pi_1 = \underline{8}$, $\pi_7 = \underline{8}$ and $\pi_3 = \underline{56}$, $\pi_5 = \underline{56}$ are:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 1/8(7\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 - \epsilon_8), \\ \pi_7 &= (1/8\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 - 7\epsilon_8), \\ \pi_3 &= 1/8(5\epsilon_1 + 5\epsilon_2 + 5\epsilon_3 - 3\epsilon_4 - 3\epsilon_5 - 3\epsilon_6 - 3\epsilon_7 - 3\epsilon_8), \\ \pi_5 &= 1/8(-3\epsilon_1 - 3\epsilon_2 - 3\epsilon_3 - 3\epsilon_4 - 3\epsilon_5 + 5\epsilon_6 + 5\epsilon_7 + 5\epsilon_8). \end{aligned} \quad (65)$$

Similarly, the highest weights of $SU(8)$ representations $\pi_2 = \underline{28}$, $\pi_6 = \underline{28}$ and $\pi_4 = \underline{70}$ are:

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= 1/4(3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 - \varepsilon_8), \\
\pi_6 &= 1/4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 3\varepsilon_7 - 3\varepsilon_8), \\
\pi_4 &= 1/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 - \varepsilon_8).
\end{aligned} \tag{66}$$

However, as we will demonstrate, in each of the string sectors the generalized Gliozzi — Scherk — Olive projection (the GSO projection in particular guarantees the modular invariance and supersymmetry of the theory and also gives some nontrivial restrictions on gauge groups and their representations) necessarily eliminates either $\underline{128}$ or $\underline{128}'$. It is therefore important that, in order to incorporate chiral matter in the model, only one spinor representation is sufficient. Moreover, if one wants to solve the chirality problem applying further GSO projections (which break the gauge symmetry), the representation $\underline{10}$ which otherwise, together with $\underline{10}$, could form real Higgs representation, also disappears from this sector. Therefore, the existence of $\underline{10}_{-1/2} + \underline{10}_{1/2}$, needed for breaking $SU(5) \times U(1)$ is incompatible (by our opinion) with the possible solution of the chirality problem for the family matter fields.

Thus, in the rank eight group $SU(8) \times U(1) \subset SO(16)$ with Higgs representations from the level-one KMA only, one cannot arrange for further symmetry breaking. Moreover, construction of the realistic fermion mass matrices seems to be impossible. In old-fashioned GUTs (see, e.g., [19]), not originating from strings, the representations of the level-two were commonly used to solve these problems.

The way out from this difficulty is based on the following important observations. Firstly, all higher-dimensional representations of (simple laced) groups like $SU(N)$, $SO(2N)$ or $E(6)$, which belong to the level two representation of the KMA (according to equation 61), appear in the direct product of the level-one representations:

$$R_G(x=2) \subset R_G(x=1) \times R_G'(x=1). \tag{67}$$

For example, the level-two representations of $SU(5)$ will appear in the corresponding direct products of

$$\underline{15}, \underline{24}, \underline{40}, \underline{45}, \underline{50}, \underline{75} \subset \underline{5}, \underline{5}, \underline{5} \times \underline{5}, \underline{5} \times \underline{10}, \text{ etc.} \tag{68}$$

In the case of $SO(10)$ the level-two representations can be obtained by the suitable direct products:

$$\begin{aligned}
\underline{45}, \underline{54}, \underline{120}, \underline{126}, \underline{210}, \underline{144} &\subset \underline{10} \times \underline{10}, \\
\underline{16} \times \underline{10}, \underline{10} \times \underline{16}, \underline{16} \times \underline{16}, \underline{16} \times \underline{16}.
\end{aligned} \tag{69}$$

The level-two representations of $E(6)$ are the corresponding factors of the decomposition of the direct products:

$$\underline{78}, \underline{351}, \underline{351}', \underline{650} \subset \overline{27} \times 27 \text{ or } 27 \times \overline{27}. \quad (70)$$

The only exception from this rule is the $E(8)$ group, two level-two representations (248 and 3875) of which cannot be constructed as a product of level-one representations [20].

Secondly, the diagonal (symmetric) subgroup G^{sym} of $G \times G$ effectively corresponds to the level-two KMA $g(x=1) \oplus g(x=1)$ [21,22] because taking the $G \times G$ representations in the form (R_G, R'_G) of the $G \times G$, where R_G and R'_G belong to the level-one of G , one obtains representations of the form $R_G \times R'_G$ when one considers only the diagonal subgroup of $G \times G$. This observation is crucial, because such a construction allows one to obtain level-two representations. (This construction has implicitly been used in [22] (see also [21] where we have constructed some examples of GUST with gauge symmetry realized as a diagonal subgroup of direct product of two rank eight groups $U(8) \times U(8) \subset SO(16) \times SO(16)$).

In strings, however, not all level-two representations can be obtained in that way because, as we will demonstrate, some of them become massive (with masses of order of the Planck scale). The condition ensuring that states in the string spectrum transforming as a representation R are massless reads:

$$h(R) = \frac{Q_R}{2k + Q_{\text{ADJ}}} = \frac{Q_R}{2Q_M} \leq 1, \quad (71)$$

where Q_i is the quadratic Casimir invariant of the corresponding representations, and M has been already defined before (see eq.63). Here the conformal weight is defined by $L_0 |0\rangle = h(R) |0\rangle$,

$$L_0 = \frac{1}{2k + Q_\Psi} \left(\sum_{a=1}^{\dim g} \left(T_0^a T_0^a + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_{-n}^a T_n^a \right) \right), \quad (72)$$

where $T_n^a |0\rangle = 0$ for $n > 0$. The condition (71), when combined with (61), gives a restriction on the rank of GUT's group ($r \leq 8$), whose representations can accommodate chiral matter fields. For example, for antisymmetric representations of $SU(n=l+1)$ we have the following values correspondingly: $h = p(n-p)/(2n)$. More exactly, for $SU(8)$ group: $h(\underline{8}) = 7/16$, $h(\underline{28}) = 3/4$, $h(\underline{56}) = 15/16$, $h(\underline{70}) = 1$; for $SU(5)$, correspondingly $h(\underline{5}) = 2/5$ and $h(\underline{10}) = 3/5$; for $SU(3)$ group $h(\underline{3}) = 1/3$ although for adjoint representation of $SU(3)$ — $h(\underline{8}) = 3/4$; for $SU(2)$ doublet representation we have $h(\underline{2}) = 1/4$. For

vector representation of orthogonal series D_f $h = 1/2$, and, respectively, for spinor — $h(\text{spinor}) = 1/8$.

There are some other important cases. The values of conformal weights for $G = SO(16)$ or $E(6) \times SU(3)$, representations $\underline{128}$, $(\underline{27}, \underline{3})$ ($h(\underline{128}) = 1$, $h(\underline{27}, \underline{3}) = 1$), respectively, satisfy both conditions. Obviously, these (important for incorporation of chiral matter) representations will exist in the level-two KMA of the symmetric subgroup of the group $G \times G$.

In general, condition (71) severely constrains massless string states transforming as $(R_G(x=1), R'_G(x=1))$ of the direct product $G \times G$. For example, for $SU(8) \times SU(8)$ and for $SU(5) \times SU(5)$ constructed from $SU(8) \times SU(8)$ only representations of the form

$$R_{N,N} = ((\underline{N}, \underline{N}) + \text{h.c.}), \quad ((\underline{N}, \overline{\underline{N}}) + \text{h.c.}), \quad (73)$$

with $h(R_{N,N}) = (N-1)/N$, where $N = 8$ or 5 , respectively, can be massless. For $SO(2N) \times SO(2N)$ massless states are contained only in representations

$$R_{v,v} = (\underline{2N}, \underline{2N}) \quad (74)$$

with $h(R_{v,v}) = 1$. Thus, for the GUSTs based on a diagonal subgroup $G^{\text{sym}} \subset G \times G$, G^{sym} high dimensional representations, which are embedded in $R_G(x=1) \times R'_G(x=1)$ are also severely constrained by condition (71).

For spontaneous breaking of $G \times G$ gauge symmetry down to $G^{\text{sym}0}$ (rank $G^{\text{sym}} = \text{rank } G$) one can use the direct product of representations $R_G(x=1) \times R'_G(x=1)$, where $R_G(x=1)$ is the fundamental representation of $G = SU(N)$ or vector representation of $G = SO(2N)$. Furthermore, $G^{\text{sym}} \subset G \times G$ can subsequently be broken down to a smaller dimension gauge group (of the same rank as G^{sym}) through the VEVs of the adjoint representations which can appear as a result of $G \times G$ breaking. Alternatively, the real Higgs superfields (73) or (74) can directly break the $G \times G$ gauge symmetry down to a $G_1^{\text{sym}} \subset G^{\text{sym}}$ (rank $G_1^{\text{sym}} \leq \text{rank } G^{\text{sym}}$). For example when $G = SU(5) \times U(1)$ or $SO(10) \times U(1)$, $G \times G$ can directly be broken in this way down to $SU(3^c) \times G_{EW}^I \times G_{EW}^{II} \times \dots$

The above examples show clearly, that within the framework of GUSTs with the KMA one can get interesting gauge symmetry breaking chains including the realistic ones when $G \times G$ gauge symmetry group is considered. However the lack of the higher dimension representations (which are forbidden by 71) on the level-two KMA prevents the construction of the realistic fermion mass matrices. That is why we consider an extended grand unified string model of rank eight $SO(16)$ or $E(6) \times SU(3)$ of $E(8)$.

The full chiral $SO(10) \times SU(3) \times U(1)$ matter multiplets can be constructed from $SU(8) \times U(1)$ -multiplets

$$(\underline{8} + \underline{56} + \overline{\underline{8}} + \overline{\underline{56}}) = \underline{128} \quad (75)$$

of $SO(16)$. In the 4-dimensional heterotic superstring with free complex world-sheet fermions, in the spectrum of the Ramond sector there can appear also representations which are factos in the decomposition of $\underline{128}'$, in particular, $SU(5)$ -decouplets $(\underline{10} + \overline{\underline{10}})$ from $(\underline{28} + \overline{\underline{28}})$ of $SU(8)$. However their $U(1)_5$ hypercharge does not allow one to use them for $SU(5) \times U(1)_5$ -symmetry breaking. Thus, in this approach we have only singlet and $(\underline{5} + \overline{\underline{5}})$ Higgs fields which can break the grand unified $SU(5) \times U(1)$ gauge symmetry. Therefore it is necessary (as we already explained) to construct rank eight GUST based on a diagonal subgroup $G^{\text{sym}} \subset G \times G$ primordial symmetry group, where in each rank eight group G the Higgs fields will appear only in singlets and in the fundamental representations as in (see 73).

A comment concerning $U(1)$ factors can be made here. Since the available $SU(5) \times U(1)$ decouplets have non-zero hypercharges with respect to $U(1)_5$ and $U(1)_H$, these $U(1)$ factors may remain unbroken down to the low energies in the model considered which seems to be very interesting.

5. MODULAR INVARIANCE IN GUST CONSTRUCTION WITH NON-ABELIAN GAUGE FAMILY SYMMETRY

5.1. Spin-Basis in Free World-Sheet Fermion Sector. The GUST model is completely defined by a set Ξ of spin boundary conditions for all these world-sheet fermions (see Appendix B). In a diagonal basis the vectors of Ξ are determined by the values of phases $\alpha(f) \in (-1, 1]$, fermions f acquire $(f \rightarrow -\exp(i\pi\alpha(f))f)$ when parallel transported around the string.

To construct the GUST according to the scheme outlined at the end of the previous section we consider three different bases each of them with six elements $B = b_1, b_2, b_3, b_4 \equiv S, b_5, b_6$ (See Tables 2, 5, 8).

Following [15] (see Appendix B) we construct the canonical basis in such a way that the vector $\bar{1}$, which belongs to Ξ , is the first element b_1 of the basis. The basis vector $b_4 = S$ is the generator of supersymmetry [16] responsible for the conservation of the space-time SUSY.

In this chapter we have chosen a basis in which all left movers $(\Psi_\mu; \chi_i, y_i, \omega_i; i = 1, \dots, 6)$ (on which the world-sheet supersymmetry is realized nonlinearly) as well as 12 right movers $(\bar{\varphi}_k; k = 1, \dots, 12)$ are real

whereas $(8 + 8)$ right movers $\bar{\Psi}_A, \bar{\Phi}_M$ are complex. Such a construction corresponds to $SU(2)^6$ group of automorphisms of the left supersymmetric sector of a string. Right- and left-moving real fermions can be used for breaking G^{comp} symmetry [16]. In order to have a possibility to reduce the rank of the compactified group G^{comp} , we have to select the spin boundary conditions for the maximal possible number, $N_{LR} = 12$, of left-moving, $\chi_{3,4,5,6}, \gamma_{1,2,5,6}, \omega_{1,2,3,4}$, and right-moving, $\bar{\phi}^{1,\dots,12}$ ($\bar{\phi}^p = \bar{\phi}_p, p = 1, \dots, 12$) real fermions. The KMA based on 16 complex right-moving fermions gives rise to the «observable» gauge group G^{obs} with:

$$\text{rank}(G^{\text{obs}}) \leq 16. \quad (76)$$

The study of the Hilbert spaces of the string theories is connected to the problem of finding all possible choices of the GSO coefficients $C \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ (see Appendix B), such that the one-loop partition function

$$Z = \sum_{\alpha, \beta} C \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \prod_f Z \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{bmatrix} \quad (77)$$

and its multiloop counterparts are all modular invariant. In this formula $C \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ are GSO coefficients, α and β are $(k + l)$ -component spin-vectors $\alpha = [\alpha(f_1'), \dots, \alpha(f_k'); \alpha(f_1''), \dots, \alpha(f_l'')]$, the components α_f, β_f specify the spin structure of the f -th fermion and $Z[\dots]$ — corresponding one-fermion partition functions on torus: $Z[\dots] = \text{Tr} \exp[2\pi i H_{(\text{sect})}]$.

The physical states in the Hilbert space of a given sector α are obtained acting on the vacuum $|0\rangle_\alpha$ with the bosonic and fermionic operators with frequencies

$$n(f) = 1/2 + 1/2\alpha(f), \quad n(f^*) = 1/2 - 1/2\alpha(f^*) \quad (78)$$

and subsequently applying the generalized GSO projections. The physical states satisfy the Virasoro condition:

$$M_L^2 = -1/2 + 1/8(\alpha_L, \alpha_L) + N_L = -1 + 1/8(\alpha_R, \alpha_R) + N_R = M_R^2, \quad (79)$$

where $\alpha = (\alpha_L, \alpha_R)$ is a sector in the set Ξ , $N_L = \sum_L$ (frequencies) and

$$N_R = \sum_R \text{ (freq.)}.$$

We keep the same sign convention for the fermion number operator F as in [16]. For complex fermions we have $F_\alpha(f) = 1$, $F_\alpha(f^*) = -1$ with the exception of the periodic fermions for which we get $F_{\alpha=1}(f) = -1/2(1 - \gamma_{5p})$, where $\gamma_{5f}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$, $\gamma_{5f}b_0^+|\Omega\rangle = -b_0^+|\Omega\rangle$.

The full Hilbert space of the string theory is constructed as a direct sum of different sectors $\sum_i m_i b_i$, ($m_i = 0, 1, \dots, N_i$), where the integers N_i define additive groups $Z(b_i)$ of the basis vectors b_i . The generalized GSO projection leaves in sectors α those states, whose b_i -fermion number satisfies:

$$\exp(i\pi b_i F_\alpha) = \delta_\alpha C^* \begin{bmatrix} \alpha \\ b_i \end{bmatrix}, \quad (80)$$

where the space-time phase $\delta_\alpha = \exp(i\pi\alpha(\psi_\mu))$ is equal to -1 for the Ramond sector and $+1$ for the Neveu-Schwarz sector.

5.2. $SU(5) \times U(1) \times SU(3) \times U(1)$ -Model 1. Model 1 is defined by 6 basis vectors given in Table 2 which generates the $Z_2 \times Z_4 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_8 \times Z_2$ group under addition.

Table 2. Basis of the boundary conditions for all world-sheet fermions. Model 1

Vectors	$\Psi_{1,2}$	$\chi_{1,\dots,6}$	$y_{1,\dots,6}$	$\omega_{1,\dots,6}$	$\bar{\phi}_{1,\dots,12}$	$\Psi_{1,\dots,8}$	$\Phi_{1,\dots,8}$
b_1	11	111111	111111	111111	1^{12}	1^8	1^8
b_2	11	111111	000000	000000	0^{12}	$1/2^8$	0^8
b_3	11	111100	000011	000000	$0^4 1^8$	0^8	1^8
$b_4 = S$	11	110000	001100	000011	0^{12}	0^8	0^8
b_5	11	001100	000000	110011	1^{12}	$1/4^5 - 3/4^3$	$-1/4^5 3/4^3$
b_6	11	110000	000011	001100	$1^2 0^4 1^6$	1^8	0^8

In our approach the basis vector b_2 is constructed as a complex vector with the $1/2$ spin-boundary conditions for the right-moving fermions Ψ_A , $A = 1, \dots, 8$. Initially it generates chiral matter fields in the $\underline{8} + \underline{56} + \underline{\bar{56}} + \underline{\bar{8}}$ representations of $SU(8) \times U(1)$, which subsequently are decomposed under $SU(5) \times U(1) \times SU(3) \times U(1)$ to which $SU(8) \times U(1)$ gets broken by applying the b_5 GSO projection.

Generalized GSO projection coefficients are originally defined up to fifteen signs but some of them are fixed by the supersymmetry conditions. Below, in Table 3, we present a set of numbers

$$\gamma \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix} = \frac{1}{i\pi} \log C \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix},$$

which we use as a basis for our GSO projections.

**Table 3. The choice of the GSO basis $\gamma[b_i, b_j]$.
Model 1 (i , numbers rows; and j , columns)**

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	0	1	1	1	1	0
b_2	1	1/2	0	0	1/4	1
b_3	1	- 1/2	0	0	1/2	0
b_4	1	1	1	1	1	1
b_5	0	1	0	0	- 1/2	0
b_6	0	0	0	0	1	1

In our case of the $Z_2^4 \times Z_4 \times Z_8$ model, we initially have 256×2 sectors. After applying the GSO-projections we get only 49×2 sectors containing massless states, which depending on the vacuum energy values, E_L^{vac} and E_R^{vac} , can be naturally divided into some classes and which determine the GUST representations.

Generally RNS (Ramond — Neveu — Schwarz) sector (built on vectors b_1 and $S = b_4$) has high symmetry including $N = 4$ supergravity and gauge $SO(44)$ symmetry. Corresponding gauge bosons are constructed as follows:

$$\begin{aligned} & \Psi_{1/2}^\mu |0\rangle_L \otimes \Psi_{1/2}^I \Psi_{1/2}^J |0\rangle_R, \\ & \Psi_{1/2}^\mu |0\rangle_L \otimes \Psi_{1/2}^I \Psi_{1/2}^{*J} |0\rangle_R, \quad I, J = 1, \dots, 22. \end{aligned} \quad (81)$$

While $U(1)_J$ charges for Cartan subgroups are given by formula $Y = \frac{\alpha}{2} + F$ (where F — fermion number, see (80)), it is obvious that states (81) generate root lattice for $SO(44)$:

$$\pm \varepsilon_I \pm \varepsilon_J \quad (I \neq J); \quad \pm \varepsilon_I \mp \varepsilon_J. \quad (82)$$

The other vectors break $N = 4$ SUSY to $N = 1$ and gauge group $SO(44)$ to $SO(2)_{1,2,3}^3 \times SO(6)_4 \times [SU(5) \times U(1) \times SU(3)_H \times U(1)_H]^2$, see Figure 1.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{N=2 SUSY : } V & = & (1, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 0) \quad SU(8) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \text{N=1 SUSY : } V_{N=2} & \rightarrow & V_{N=1} + S_{N=1} \quad SU(5) \times SU(3) \times U(1)
 \end{array}$$

	J=1	J=1/2	J=1/2	J=0
$E_{vac} = [-1/2; -1]$ NS sector	(63)	—	—	(63)
$E_{vac} = [0; -1]$ SUSY sector	—	(63) × 2	(63) × 2	—
Gauge multiplets				

$\Downarrow$ b_5 GSO projection

	J=1	J=1/2	J=1/2	J=0
$E_{vac} = [-1/2; -1]$ NS sector	(24,1)+(1,1)+(1,8)	—	—	(5,3)+(5,3)
$E_{vac} = [0; -1]$ SUSY sector	—	((24,1)+(1,1)+(1,8)) × 2	((5,3)+(5,3)) × 2	—
Gauge multiplets			Higgs multiplets	

Fig.2. Supersymmetry breaking

Generally, additional basis vectors can generate extra vector bosons and extend gauge group that remains after applying GSO-projection to RNS-sector. In our case dangerous sectors are: $2b_2 + nb_5$, $n = 0, 2, 4, 6$; $2b_5$; $6b_5$. But our choice of GSO coefficients cancels all the vector states in these sectors. Thus gauge bosons in this model appear only from RNS-sector.

In NS sector the b_3 GSO projection leaves $(5, \bar{3}) + (\bar{5}, 3)$ Higgs superfields (see Figure 2):

$$\chi_{1/2}^{1,2} | \Omega \rangle_L \otimes \Psi_{1/2}^a \Psi_{1/2}^{i*}; \Psi_{1/2}^{a*} \Psi_{1/2}^i | \Omega \rangle_R \quad (83)$$

and exchange $\Psi \rightarrow \Phi$, where $a, b = 1, \dots, 5$, $i, j = 1, 2, 3$.

Four $(3_H + 1_H)$ generations of chiral matter fields from $(SU(5) \times SU(3))_I$ group forming $SO(10)$ -multiplets $(\underline{1}, \underline{3}) + (\bar{\underline{5}}, \underline{3}) + (\underline{10}, \underline{3})$; $(\underline{1}, \underline{1}) + (\bar{\underline{5}}, \underline{1}) + (\underline{10}, \underline{1})$ are contained in b_2 and $3b_2$ sectors. Applying b_3 GSO projection to the $3b_2$ section yields the following massless states:

$$b_{\Psi_{12}}^+ b_{\chi_{34}}^+ b_{\chi_{56}}^+ | \Omega \rangle_L \otimes \left\{ \Psi_{3/4}^{i*}, \Psi_{1/4}^a \Psi_{1/4}^b \Psi_{1/4}^c, \Psi_{1/4}^a \Psi_{1/4}^i \Psi_{1/4}^j \right\} | \Omega \rangle_R,$$

$$b_{\chi_{12}}^+ b_{\chi_{34}}^+ b_{\chi_{56}}^+ |\Omega\rangle_L \otimes \left\{ \Psi_{3/4}^{a*}, \Psi_{1/4}^a \Psi_{1/4}^b \Psi_{1/4}^i, \Psi_{1/4}^i \Psi_{1/4}^j \Psi_{1/4}^k \right\} |\Omega\rangle_R \quad (84)$$

with the space-time chirality $\gamma_{5\psi_{12}} = -1$ and $\gamma_{5\psi_{12}} = 1$, respectively. In these formulae the Ramond creation operators $b_{\psi_{1,2}}^+$ and $b_{\chi_{\alpha,\beta}}^+$ of the zero modes are built of a pair of real fermions (as indicated by double indices): $\chi_{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta) = (1, 2), (3, 4), (5, 6)$. Here, as in (83) indices take values $a, b = 1, \dots, 5$ and $i, j = 1, 2, 3$, respectively.

We stress that without using the b_3 projection we would get matter supermultiplets belonging to real representations only, i.e., «mirror» particles would remain in the spectrum. The b_6 projection instead, eliminates all chiral matter superfields from $U(8)^{\text{II}}$ group.

Since the matter fields form the chiral multiplets of $SO(10)$, it is possible to write down $U(1)_{Y_5}$ -hypercharges of massless states. In order to construct the right electromagnetic charges for matter fields we must define the hypercharges operators for the observable $U(8)^{\text{I}}$ group as

$$Y_5 = \int_0^\pi d\sigma \sum_a \Psi^{a*} \Psi^a, \quad Y_3 = \int_0^\pi d\sigma \sum_i \Psi^{*i} \Psi^i \quad (85)$$

and analogously for the $U(8)^{\text{II}}$ group.

Then the orthogonal combinations

$$\tilde{Y}_5 = \frac{1}{4} (Y_5 + 5Y_3), \quad \tilde{Y}_3 = \frac{1}{4} (Y_3 - 3Y_5) \quad (86)$$

play the role of the hypercharge operators of $U(1)_{Y_5}$ and $U(1)_{Y_H}$ groups, respectively. In Table 4 we give the hypercharges $\tilde{Y}_5^{\text{I}}, \tilde{Y}_3^{\text{I}}, \tilde{Y}_5^{\text{II}}, \tilde{Y}_3^{\text{II}}$.

The full list of states in this model is given in Table 4. For fermion states only sectors with positive (left) chirality are written. Superpartners arise from sectors with $S = b_4$ -component changed by 1. Chirality under hidden $SO(2)_{1,2,3}^3 \times SO(6)_4$ is defined as $\pm_1, \pm_2, \pm_3, \pm_4$, respectively. Lower signs in items 5 and 6 correspond to sectors with components given in brackets.

In the next section we discuss the problem of rank eight GUST gauge symmetry breaking. The matter is that according to the results of section 4 the Higgs fields ($\underline{10}_{1/2} + \underline{10}_{-1/2}$) do not appear.

Table 4. The list of quantum numbers of the states. Model 1

No.	$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$	SO_{hid}	$U(5)^I$	$U(3)^I$	$U(5)^{II}$	$U(3)^{II}$	$\tilde{Y}_5^I$	$\tilde{Y}_3^I$	$\tilde{Y}_5^{II}$	$\tilde{Y}_3^{II}$
1	RNS		5	3	1	1	-1	-1	0	0
$\hat{\Phi}$	02012(6)0		1	1	5	$\bar{3}$	0	0	-1	-1
			5	1	5	1	-1	0	-1	0
			1	3	1	3	0	1	0	1
			5	1	1	3	-1	0	0	1
			1	3	5	1	0	1	-1	0
2	010000		1	3	1	1	5/2	-1/2	0	0
$\hat{\Psi}$			$\bar{5}$	3	1	1	-3/2	-1/2	0	0
	030000		10	1	1	1	1/2	3/2	0	0
			1	1	1	1	5/2	3/2	0	0
			$\bar{5}$	1	1	1	-3/2	3/2	0	0
			10	3	1	1	1/2	-1/2	0	0
3	001130	-1 ± 2	1	1	1	3	0	-3/2	0	-1/2
$\hat{\Psi}^H$	001170	-1 ± 2	1	$\bar{3}$	1	1	0	1/2	0	3/2
	021130	$+1 \pm 2$	1	$\bar{3}$	1	3	0	1/2	0	-1/2
	021170	$+1 \pm 2$	1	1	1	1	0	-3/2	0	+3/2
4	111011	$\mp 1 \pm 3$	1	1	1	$\bar{3}$	0	-3/2	0	1/2
$\hat{\Phi}^H$	111051	$\mp 1 \pm 3$	1	$\bar{3}$	1	1	0	1/2	0	-3/2
	131011	$\mp 1 \pm 3$	1	$\bar{3}$	1	$\bar{3}$	0	1/2	0	1/2
	131051	$\mp 1 \pm 3$	1	1	1	1	0	-3/2	0	-3/2
5	01(3)102(6)1	-1 ± 3	1	$3(\bar{3})$	1	1	$\pm 5/4$	$\pm 1/4$	$\pm 5/4$	$\mp 3/4$
$\hat{\Phi}$		$+1 \pm 3$	$5(\bar{5})$	1	1	1	$\pm 1/4$	$\mp 3/4$	$\pm 5/4$	$\mp 3/4$
	01(3) 1041	-1 ± 3	1	1	1	$3(\bar{3})$	$\pm 5/4$	$\mp 3/4$	$\pm 5/4$	$\pm 1/4$
		$+1 \pm 3$	1	1	$5(\bar{5})$	1	$\pm 5/4$	$\mp 3/4$	$\pm 1/4$	$\mp 3/4$
6	12003(5)1	$\pm 1 - 4$	1	1	1	1	$\pm 5/4$	$\pm 3/4$	$\mp 5/4$	$\mp 3/4$
$\hat{\sigma}$	11(3)015(3)1	$+1 \mp 4$	1	1	1	1	$\pm 5/4$	$\pm 3/4$	$\pm 5/4$	$\pm 3/4$
	00102(6)0	$\mp 3 + 4$	1	1	1	1	$\pm 5/4$	$\mp 3/4$	$\pm 5/4$	$\mp 3/4$

5.3. $SU(5) \times U(1) \times SU(3) \times U(1)$ -Model 2. Consider then another $[U(5) \times U(3)]^2$ model which after breaking gauge symmetry by Higgs mechanism leads to the spectrum similar to Model 1.

This model is defined by basis vectors given in Table 5 with the $Z_2^4 \times Z_6 \times Z_{12}$ group under addition.

GSO coefficients are given in Table 6.

Table 5. Basis of the boundary conditions for Model 2

Vectors	$\Psi_{1,2}$	$\chi_{1,...,6}$	$y_{1,...,6}$	$\omega_{1,...,6}$	$\bar{\varphi}_{1,...,12}$	$\Psi_{1,...,8}$	$\Phi_{1,...,8}$
b_1	11	1^6	1^6	1^6	1^{12}	1^8	1^8
b_2	11	1^6	0^6	0^6	0^{12}	$1^5 1/3^3$	0^8
b_3	11	$1^2 0^2 1^2$	0^6	$0^2 1^2 0^2$	$0^8 1^4$	$1/2^5 1/6^3$	$-1/2^5 1/6^3$
$b_4 = S$	11	$1^2 0^4$	$0^2 1^2 0^2$	$0^4 1^2$	0^{12}	0^8	0^8
b_5	11	$1^4 0^2$	$0^4 1^2$	0^6	$1^8 0^4$	$1^5 0^3$	$0^5 1^3$
b_6	11	$0^2 1^2 0^2$	$1^2 0^4$	$0^4 1^2$	$1^2 0^2 1^6 0^2$	1^8	0^8

Table 6. The choice of the GSO basis $\gamma[b_i, b_j]$.Model 2 (i , numbers rows; and j , columns)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	0	1	1/2	0	0	0
b_2	0	2/3	-1/6	1	0	1
b_3	0	1/3	5/6	1	0	0
b_4	0	0	0	0	0	0
b_5	0	1	-1/2	1	1	1
b_6	0	1	1/2	1	0	1

The given model corresponds to the following chain of the gauge symmetry breaking:

$$E_8^2 \rightarrow SO(16)^2 \rightarrow U(8)^2 \rightarrow [U(5) \times U(3)]^2.$$

Here the breaking of $U(8)^2$ -group to $[U(5) \times U(3)]^2$ is determined by basis vector b_5 , and the breaking of $N = 2$ SUSY $\rightarrow N = 1$ SUSY is determined by basis vector b_6 .

It is interesting to note that in the absense of vector b_5 $U(8)^2$ gauge group is restored by sectors $4b_3, 8b_3, 2b_2 + \text{c.c.}$ and $4b_2 + \text{c.c.}$

The full massless spectrum for the given model is given in Table 7. By analogy with Table 4 only fermion states with positive chirality are written and obviously vector supermultiplets are absent. Hypercharges are determined by formula:

$$Y_n = \sum_{k=1}^n (\alpha_k/2 + F_k).$$

Table 7. The list of quantum numbers of the states. Model 2

N_{e}	$b_1, b_2, b_3,$ b_4, b_5, b_6	SO_{hid}	$U(5)^{\text{I}}$	$U(3)^{\text{I}}$	$U(5)^{\text{II}}$	$U(3)^{\text{II}}$	Y_5^{I}	Y_3^{I}	Y_5^{II}	Y_3^{II}
1	RNS	$6_1 2_2$	1	1	1	1	0	0	0	0
		$2_3 2_4$	1	1	1	1	0	0	0	0
		5	1	$\bar{5}$	1	1	0	-1	0	
	004100	1	3	1	3	0	-1	0	-1	
	008100	1	$\bar{3}$	1	$\bar{3}$	0	1	0	1	
2	010000		5	$\bar{3}$	1	1	-3/2	-1/2	0	0
		1	$\bar{3}$	1	1	5/2	-1/2	0	0	
	030000	$\bar{10}$	1	1	1	1/2	3/2	0	0	
3	0110000		1	1	$\bar{10}$	3	0	0	1/2	1/2
	036000		1	1	5	1	0	0	-3/2	-3/2
			1	1	1	1	0	0	5/2	-3/2
4	023000	-3 ± 4	1	3	1	1	-5/4	-1/4	5/4	3/4
5	003000	$+3 \pm 4$	1	1	$\bar{5}$	1	-5/4	3/4	1/4	3/4
6	009000	$+3 \pm 4$	1	1	5	1	5/4	-3/4	-1/4	-3/4
7	049000	-3 ± 4	1	$\bar{3}$	1	1	5/4	1/4	-5/4	-3/4
8,9	050101	-1 ± 3	1	3	1	1	0	-1	0	0
	030101	$+1 + 3$	5	1	1	1	1	0	0	0
		$+1 - 3$	$\bar{5}$	1	1	1	-1	0	0	0
		$-1 + 3$	1	1	5	1	0	0	1	0
		$-1 - 3$	1	1	$\bar{5}$	1	0	0	-1	0
	058101	$+1 + 3$	1	1	1	$\bar{3}$	0	0	0	1
10	033001	$+1 \pm 4$	1	1	1	1	-5/4	3/4	5/4	3/4
11	103001	$\pm 2 - 3$	1	1	5	1	-1/4	3/4	-5/4	-3/4
	1211001	$\pm 2 - 3$	1	1	1	$\bar{3}$	-5/4	3/4	-5/4	1/4
12	109001	$\pm 2 + 3$	$\bar{5}$	1	1	1	1/4	-3/4	5/4	3/4
	149001	$\pm 2 + 3$	1	$\bar{3}$	1	1	5/4	1/4	5/4	3/4
13	000111	$\pm 2 + 3$	1	1	1	1	0	-3/2	0	3/2
	020111	$\pm 2 - 3$	1	3	1	1	0	1/2	0	3/2
	028111	$\pm 2 - 3$	1	1	1	$\bar{3}$	0	-3/2	0	-1/2
	048111	$\pm 2 + 3$	1	3	1	$\bar{3}$	0	1/2	0	-1/2
	103111	$+1 + 3$	1	1	1	1	5/4	3/4	-5/4	3/4
	109111	$+1 + 3$	1	1	1	1	-5/4	-3/4	5/4	-3/4
	133011	$-1 - 3$	1	1	1	1	-5/4	-3/4	-5/4	3/4
	139011	$-1 + 3$	1	1	1	1	5/4	3/4	5/4	-3/4

The given model possesses the hidden gauge symmetry $SO(6)_1 \times SO(2)_{2,3,4}^3$. The corresponding chirality is given in column SO_{hid} . The sectors are divided by horizontal lines and without including the b_5 -vector form $SU(8)$ -multiplets.

For example, let us consider row No.2. In sectors b_2 , $5b_2$ in addition to the states $(1, \bar{3})$ and $(5, \bar{3})$, the state $(10, 3)$ appears, and in sector $3b_2$ besides the state $(10, 1)$, the states $(1, 1)$ and $(\bar{5}, 1)$ survive, too. All these states form $\bar{8} + 56$ representation of the $SU(8)^I$ group.

Analogically we can get the full structure of the theory according to the $U(8)^I \times U(8)^{II}$ -group. (For correct restoration of the $SU(8)^{II}$ -group we must invert 3 and $\bar{3}$ representations).

In Model 2 matter fields appear both in $U(8)^I$ and $U(8)^{II}$ groups. This is the main difference between this model and Model 1. However, note that in the Model 2 similarly to the Model 1 all gauge fields appear in RNS-sector only and $10 + 10$ representation (which can be the Higgs field for gauge symmetry breaking) is absent.

5.4. $SO(10) \times SU(4)$ -Model 3. As an illustration we can consider the GUST construction involving $SO(10)$ as GUT gauge group. We consider the set consisting of six vectors $B = b_1, b_2, b_3, b_4 \equiv S, b_5, b_6$ given in Table 8.

Table 8. Basis of the boundary conditions for the Model 3

Vectors	$\Psi_{1,2}$	$\chi_{1,\dots,6}$	$y_{1,\dots,6}$	$\omega_{1,\dots,6}$	$\bar{\Phi}_{1,\dots,12}$	$\Psi_{1,\dots,8}$	$\Phi_{1,\dots,8}$
b_1	11	111111	111111	111111	1^{12}	1^8	1^8
b_2	11	111111	000000	000000	0^{12}	$1^5 1/3^3$	0^8
b_3	11	000000	111111	000000	$0^8 1^4$	$0^5 1^3$	$0^5 1^3$
$b_4 = S$	11	110000	001100	000011	0^{12}	0^8	0^8
b_5	11	111111	000000	000000	0^{12}	0^8	$1^5 1/3^3$
b_6	11	001100	110000	000011	$1^2 0^2 1^6 0^2$	1^8	0^8

GSO projections are given in Table 9. It is interesting to note that in this model the horizontal gauge symmetry $U(3)$ extends to $SU(4)$. Vector bosons which are needed for this appear in sectors $2b_2(4b_2)$ and $2b_5(4b_5)$. For further breaking $SU(4)$ to $SU(3) \times U(1)$ we need an additional basis spin-vector.

So, the given model possesses gauge group $G^{\text{comp}} \times [SO(10) \times SU(4)]^2$ and matter fields appear both in the first and in the second group symmetrically.

Table 9. The choice of the GSO basis $\gamma[b_i, b_j]$.**Model 3** (i , numbers rows; and j , columns)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
b_1	0	1	0	0	1	0
b_2	0	2/3	1	1	1	1
b_3	0	1	0	1	1	1
b_4	0	0	0	0	0	0
b_5	0	1	1	1	2/3	0
b_6	0	1	0	1	1	1

Sectors $3b_2$ and $5b_2 + \text{c.c.}$ give the matter fields ($\underline{16}, \underline{4}; \underline{1}, \underline{1}$) (first group) and sectors $3b_5$ and $5b_5 + \text{c.c.}$ give the matter fields ($\underline{1}, \underline{1}; \underline{16}, \underline{4}$) (second group).

Of course for getting a realistic model we must add some basis vectors which give additional GSO-projections.

The condition of generation chirality in this model results in the choice of Higgs fields as vector representations of $SO(10)$ ($\underline{16} + \overline{\underline{16}}$ are absent). According to conclusion (74) the only Higgs fields ($\underline{10}, \underline{1}; \underline{10}, \underline{1}$) of $(SO(10) \times SU(4))^{\times 2}$ appear in the model (from RNS-sector) which can be used for GUT gauge symmetry.

6. MORE EXPLICIT METHODS OF MODEL BUILDING

In the previous models we had to guess how to obtain certain algebra representation and select boundary conditions vectors and GSO coefficients basing only on basis building rules. Below we will develop some methods that help to build models for more complicated cases such as $E_6 \times SU(3)$ and $SU(3) \times SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$.

6.1. Normalization of Algebra Roots. As is known, $U(1)$ eigenvalue when acting on state in sector α is $\alpha_i / 2 + F_i$. So square of a root represented by the state in sector α is $\sum_i (\alpha_i / 2 + F_i)$.

Consider then a mass condition. It reads (for right mass only)

$$M_R^2 = -1 + \frac{1}{8} (\alpha_R \cdot \alpha_R) + N_R = 0.$$

In general we can write n_f as

$$n(f) = F^2 \frac{1 + F\alpha(f)}{2} = \frac{F^2}{2} + F \frac{\alpha}{2}$$

for any $F = 0, \pm 1$ ($F^3 = F$ for that values).

Now M_R^2 formulae read

$$M_R^2 = -1 + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{22} (\alpha_i^2) + \sum_{i=1}^{22} \left(\frac{F_i^2}{2} + F_i \frac{\alpha_i}{2} \right).$$

Hence

$$2 = \sum_{i=1}^{22} \left(\frac{\alpha}{2} + F \right)^2.$$

Clearly it is the square of algebra root and it equals 2 for any massless state. Obviously for massive states normalization will differ from that.

On the other hand, if we desire to obtain gauge group like $G^I \times G^{II} \times G^{\text{hid}}$, then sectors that give gauge group should be like this

$$\begin{aligned} (0^{10} | \alpha^I \ 0^8 \ 0^6) & \text{ for } G^I, \\ (0^{10} | 0^8 \ \alpha^{II} \ 0^6) & \text{ for } G^{II}, \\ (0^{10} | 0^8 \ 0^8 \ \alpha^{\text{hid}}) & \text{ for } G^{\text{hid}}, \end{aligned}$$

where we assume that both of G^I, II are rank eight groups (I divides left and right movers). With other vectors we will get roots that mix some of our algebras.

With all this in mind, we can develop some methods of building GSO-projectors (vectors that apply appropriate GSO-projection on the states in order to obtain certain representation) for several interesting cases.

6.2. Building GSO-Projectors for a Given Algebra. As we follow certain breaking chain of E_8 , then it is very natural to take E_8 construction as a starting point. Note that root lattice of E_8 arises from two sectors: NS sector gives 120 of $SO(16)$ while sector with 1^8 gives 128 of $SO(16)$. This corresponds to the following choice of simple roots

$$\begin{aligned} \pi_1 &= -e_1 + e_2, \\ \pi_2 &= -e_2 + e_3, \\ \pi_3 &= -e_3 + e_4, \\ \pi_4 &= -e_4 + e_5, \\ \pi_5 &= -e_5 + e_6, \end{aligned}$$

$$\pi_6 = -e_6 + e_7,$$

$$\pi_7 = -e_7 + e_8,$$

$$\pi_8 = \frac{1}{2} (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 - e_8).$$

Basing on this choice of roots it is very clear how to build basis of simple roots for any subalgebra of E_8 . One can just find out appropriate vectors π_i of the form as in E_8 with needed scalar products or build weight diagram and break it in a desirable fashion to find roots corresponding to certain representation in terms of E_8 roots.

After the basis of simple roots is written down one can build GSO-projectors in a following way.

GSO-projection is defined by operator $(b_i F)$ acting on given state. The goal is to find those b_i that allow only states from algebra lattice to survive. Note that $F_i = \gamma_i - \alpha_i / 2$ (γ_i — components of a root in basis of e_i), so value of GSO-projector for sector α depends on γ_i only. So, if scalar products of all simple roots that arise from a given sector with vector b_i is equal to mod 2, then they surely will survive GSO-projection. Taking several such vectors b_i one can eliminate all extra states that do not belong to a given algebra.

Suppose that simple roots of the algebra are in the form

$$\pi_i = \frac{1}{2} (\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8),$$

$$\pi_j = (\pm e_k \pm e_m).$$

In this choice we have to find vectors b which gives 0 or 1 in a scalar product with all simple roots. Note that $(b \cdot \pi_i) = (b \cdot \pi_j) \bmod 2$ for all i, j so $c_i = (b \cdot \pi_i)$ either all equal 0 mod 2 or equal 1 mod 2 (for $\pi_j = (\pm e_k \pm e_m)$ it should be 0 mod 2 because they arise from NS sector). Value 0 or 1 is taken because if root $\pi \in$ algebra lattice, then $-\pi$ is a root also. With such choice of simple roots and scalar products with b all states from sector like 1^8 will have the same projector value. Roots like $\pm e_i \pm e_j$ rise from NS sector and are sum of roots like $\pi_i = \frac{1}{2} (\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$ and therefore have scalar products equal to 0 mod 2 as is needed for NS sector.

Now vectors b are obtained very simple. Consider

$$c_i = (b \cdot \pi_i) = b_j A_{ji},$$

where $A_{ji} = (\pi_i)_j$ — matrix of roots component in e_j basis. Hence $b = A^{-1} \cdot c$, where either all $c_j = 0 \bmod 2$ or $c_j = 1 \bmod 2$. One has to try some combination of c_j to obtain appropriate set of b . The next task is to combine those b_i that satisfy modular invariance rules and do not give extra states to the spectrum.

6.3. Breaking Given Algebra Using GSO-Projectors. It appears that this method of constructing GSO-projectors allows one to break a given algebra down to its subalgebra.

Consider root system of a simple Lie algebra. It is well known that if $\pi_1, \pi_2 \in \Delta$, where Δ is a set of positive roots, then $(\pi_1 - \pi_2(\pi_1 \cdot \pi_2)) \in \Delta$ also. For simply laced algebras it means that if $\pi_i, \pi \in \Delta$ and $(\pi_i \cdot \pi) = -1$, where π_i is a simple root, then $\pi + \pi_i$ is a root also. This rule is hold automatically in string construction: if a sector gives some simple roots, then all roots of algebra and only they also exist (but part of them may be found in another sector). Because square of every root represented by a state is 2, then if $(\pi_i \cdot \pi) \neq -1$, then $(\pi + \pi_i)^2 \neq 2$. So one must construct GSO-projectors checking only simple roots. On the other hand, if one cuts out some of simple roots, then algebra will be broken. For example, if a vector b has non-integer scalar product with simple root π_1 of E_6 , then we will obtain algebra $SO(10) \times U(1)$ ($(b \cdot \pi_1)$ even could be 1 if other products are equals 0 mod 2).

More complicated examples are $E_6 \times SU(3)$ and $SU(3) \times SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$. For the former we must forbid the π_2 root but permit it to form $SU(3)$ algebra. Note that in E_8 root system there are two roots with $3\pi_2$. We will use them for $SU(3)$. So the product $(b \cdot \pi_2)$ must be $2/3$ while others must be 0 mod 2.

We can also get GSO-projectors for all interesting subgroups of E_8 in such a way, but so far choosing of constant for scalar products (c_i in a previous subsection) is rather experimental, so it is more convenient to follow certain breaking chain.

Below we will give some results for $E_6 \times SU(3)$, $SU(3) \times SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ and $SO(10) \times U(1) \times SU(3)$. We will give algebra basis and vectors that give GSO-projection needed for obtaining this algebra.

$E_6 \times SU(3)$. This case follows from E_8 using root basis from a previous subsection and choosing

$$c_i = \left(-2, -\frac{2}{3}; 0, 2, -2, -2, 2, 0 \right).$$

This gives GSO-projector of the form

$$b_1 = \left(1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Basis of simple roots arises from sector with 1^8 in right part and reads

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{1}{2} (+e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8), \\ \pi_2 &= \frac{1}{2} (+e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8), \\ \pi_3 &= \frac{1}{2} (+e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 + e_8), \\ \pi_4 &= \frac{1}{2} (-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 + e_6 + e_7 - e_8), \\ \pi_5 &= \frac{1}{2} (+e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 - e_8), \\ \pi_6 &= \frac{1}{2} (-e_1 + e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 + e_8), \\ \pi_7 &= \frac{1}{2} (+e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8), \\ \pi_8 &= \frac{1}{2} (-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8).\end{aligned}\tag{87}$$

$SO(10) \times U(1) \times SU(3)$. This case follows from $E_6 \times SU(3)$. In addition to b_1 we must find a vector that cuts out π_3 . Using

$$c_i = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

and inverse matrix of $E_6 \times SU(3)$ basis we get GSO-projector of the form

$$b_2 = \left(0, 0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Basis of simple roots is the same as for $E_6 \times SU(3)$ excluding π_3 .

$SU(3) \times SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$. Using $E_6 \times SU(3)$ basis inverse matrix with

$$c_i = \left(1, -1, -1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, -1, -1 \right).$$

We get GSO-projector of the form

$$b_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

Easy to see that such a c_i cuts out π_4 and π_6 roots but due to appropriate combination in E_6 root system two $SU(3)$ groups will remain. Basis of simple roots is

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{1}{2} (+e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 + e_8), \\ \pi_2 &= \frac{1}{2} (+e_1 + e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 - e_8), \\ \pi_3 &= \frac{1}{2} (+e_1 - e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 + e_7 + e_8), \\ \pi_4 &= \frac{1}{2} (-e_1 + e_2 + e_3 - e_4 + e_5 + e_6 - e_7 - e_8), \\ \pi_5 &= \frac{1}{2} (+e_1 - e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 - e_8), \\ \pi_6 &= \frac{1}{2} (-e_1 + e_2 - e_3 - e_4 + e_5 - e_6 + e_7 + e_8), \\ \pi_7 &= \frac{1}{2} (-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 + e_7 - e_8), \\ \pi_8 &= \frac{1}{2} (+e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 + e_6 + e_7 - e_8).\end{aligned}\tag{88}$$

Using all this methods we could construct a model described in the next section.

6.4. $E_6 \times SU(3)$ Three Generations Model — Model 4. This model illustrates a branch of E_8 breaking $E_8 \rightarrow E_6 \times SU(3)$ and is an interesting result on a way to obtain three generations with gauge horizontal symmetry. Basis of the boundary conditions (see Table 10) is rather simple but there are some subtle points. In [34] the possible left parts of basis vectors were worked out, see it for details. We just use the notation given in [34] (hat on left part means complex fermion, other fermions on the left sector are real, all of the right movers are complex) and an example of commuting set of vectors.

A construction of an $E_6 \times SU(3)$ group caused us to use rational left boundary conditions. It seems that it is the only way to obtain such a gauge group with appropriate matter contents.

The model has $N = 2$ SUSY. We can also construct model with $N = 0$ but according to [34] using vectors that can give rise to $E_6 \times SU(3)$ (with realistic matter fields) one cannot obtain $N = 1$ SUSY.

Table 10. Basis of the boundary conditions for the Model 4

Vectors	$\Psi_{1,2}$	$\chi_{1,\dots,9}$	$\omega_{1,\dots,9}$	$\bar{\Phi}_{1,\dots,6}$	$\Psi_{1,\dots,8}$	$\Phi_{1,\dots,8}$
b_1	11	1^9	1^9	1^6	1^8	1^8
b_2	11	$\hat{\frac{1}{3}}, 1; -\hat{\frac{2}{3}}, 0, 0, \hat{\frac{2}{3}}$	$\hat{\frac{1}{3}}, 1; -\hat{\frac{2}{3}}, 0, 0, \hat{\frac{2}{3}}$	$\frac{2^3}{3} - \frac{2^3}{3}$	$0^2 - \frac{2^6}{3}$	$1^2 \frac{1^6}{3}$
b_3	00	0^9	0^9	0^6	1^8	0^8
b_4	11	$\hat{1}, 1; \hat{0}, 0, 0, \hat{0}$	$\hat{1}, 1; \hat{0}, 0, 0, \hat{0}$	0^6	0^8	0^8

 Table 11. The choice of the GSO basis $\gamma[b_i, b_j]$.

 Model 4. (i , numbers rows; and j , columns)

	b_1	b_2	b_3	b_4
b_1	0	1/3	1	1
b_2	1	1	1	1
b_3	1	1	0	1
b_4	1	1/3	1	1

Let us give a brief review of the model contents. First notice that all superpartners of states in sector α are found in sector $\alpha + b_4$ as in all previous models. Although the same sector may contain, say, matter fields and gauginos simultaneously.

The observable gauge group $(SU(3)_H^I \times E_6^I) \times (SU(3)_H^{II} \times E_6^{II})$ and hidden group $SU(6) \times U(1)$ are rising up from sectors NS, b_3 and $3b_2 + b_4$. Matter fields in representations $(\mathbf{3}, \mathbf{27}) + (\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{27}})$ for each $SU(3)_H \times E_6$ group are found in sectors $3b_2, b_3 + b_4$ and b_4 . Also there are some interesting states in sectors $b_2, b_2 + b_3, 2b_2 + b_3 + b_4, 2b_2 + b_4$ and $5b_2, 5b_2 + b_3, 4b_2 + b_3 + b_4, 4b_2 + b_4$ that form representation $(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3})$ and $(\mathbf{3}, \bar{\mathbf{3}})$ of the $SU(3)_H^I \times SU(3)_H^{II}$ group. These states are singlets under both E_6 groups but have nonzero $U(1)_{\text{hidden}}$ charge.

We suppose that the model permits further breaking of E_6 down to other grand unification groups, but problem with breaking supersymmetry $N = 2 \rightarrow N = 1$ is a great obstacle on this way.

7. GUST SPECTRUM (MODEL 1)

7.1. Gauge Symmetry Breaking. Let us consider Model 1 in detail. In Model 1 there exists a possibility to break the GUST group $(U(5) \times U(3))^I \times$

$\times (U(5) \times U(3))^{\text{II}}$ down to the symmetric group by the ordinary Higgs mechanism [9]:

$$G^{\text{I}} \times G^{\text{II}} \rightarrow G^{\text{sym}} \rightarrow \dots \quad (89)$$

To achieve such breaking one can use nonzero vacuum expectation values of the tensor Higgs fields (see Table 4, row No.1), contained in the $2b_2 + 2(6)b_5(+S)$ sectors which transform under the $(SU(5) \times U(1) \times SU(3) \times U(1))^{\text{sym}}$ group in the following way:

$$\begin{aligned} (\underline{5}, \underline{1}; \underline{5}, \underline{1})_{(-1,0; -1,0)} &\rightarrow (\underline{24}, \underline{1})_{(0,0)} + (\underline{1}, \underline{1})_{(0,0)}; \\ (\underline{1}, \underline{3}; \underline{1}, \underline{3})_{(0,1; 0,1)} &\rightarrow (\underline{1}, \underline{8})_{(0,0)} + (\underline{1}, \underline{1})_{(0,0)}, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} (\underline{5}, \underline{1}; \underline{1}, \underline{3})_{(-1,0; 0,1)} &\rightarrow (\bar{\underline{5}}, \underline{3})_{(1,1)}; \\ (\underline{1}, \underline{3}; \underline{5}, \underline{1})_{(0,1; -1,0)} &\rightarrow (\underline{5}, \bar{\underline{3}})_{(-1,-1)}. \end{aligned} \quad (91)$$

The diagonal vacuum expectation values for Higgs fields (90) break the GUST group $(U(5) \times U(3))^{\text{I}} \times (U(5) \times U(3))^{\text{II}}$ down to the «skew»-symmetric group with the generators Δ_{sym} of the form:

$$\Delta_{\text{sym}}(t) = -t^* \times 1 + 1 \times t. \quad (92)$$

The corresponding hypercharge of the symmetric group reads:

$$\bar{Y} = \tilde{Y}^{\text{II}} - \tilde{Y}^{\text{I}}. \quad (93)$$

Similarly, for the electromagnetic charge we get:

$$Q_{em} = Q^{\text{II}} - Q^{\text{I}} = (T_5^{\text{II}} - T_5^{\text{I}}) + \frac{2}{5} (\tilde{Y}_5^{\text{II}} - \tilde{Y}_5^{\text{I}}) = \bar{T}_5 + \frac{2}{5} \bar{Y}_5, \quad (94)$$

where $T_5 = \text{diag} \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right)$. Note, that this charge quantization does not lead to exotic states with fractional electromagnetic charges (e.g., $Q_{em} = \pm 1/2, \pm 1/6$).

Thus, in breaking scheme (92) it is possible to avoid colour singlet states with fractional electromagnetic charges, to achieve desired GUT breaking and moreover to get the usual value for the weak mixing angle at the unification scale (see (47)).

Adjoint representations which appear on the r.h.s. of (90) can be used for further breaking of the symmetric group. This can lead to the final physical symmetry

$$(SU(3^c) \times SU(2_{EW}) \times U(1_\nu) \times U(1)') \times (SU(3_H) \times U(1_H)) \quad (95)$$

with low-energy gauge symmetry of the quark-lepton generations with an additional $U(1)'$ -factor.

Note, that when we use the same Higgs fields as in (90), there exists also another interesting way of breaking the $C^I \times G^{II}$ gauge symmetry:

$$G^I \times G^{II} \rightarrow SU(3^c) \times SU(2)_{EW}^I \times SU(2)_{EW}^{II} \times U(1_{\bar{Y}}) \times \\ \times SU(3_H)^I \times SU(3_H)^{II} \times U(1_{\bar{Y}_H}) \rightarrow \dots \quad (96)$$

It is attractive because it naturally solves the Higgs doublet-triplet mass splitting problem with rather low energy scale of GUST symmetry breaking [30].

In turn, the Higgs fields $\hat{h}_{(\Gamma, N)}$ from the NS sector

$$(\underline{5}, \underline{\bar{3}})_{(-1, -1)} + (\underline{\bar{5}}, \underline{3})_{(1, 1)} \quad (97)$$

are obtained from $N = 2$ SUSY vector representation 63 of $SU(8)^I$ (or $SU(8)^{II}$)

by applying the b_5 GSO projection (see Fig.2 and Appendix A). These Higgs fields (and fields (91)) can be used for constructing chiral fermion (see Table 4, row No.2) mass matrices.

The b spin boundary conditions (Table 2) generate chiral matter and Higgs fields with the GUST gauge symmetry $G_{\text{comp}} \times (G^I \times G^{II})_{\text{obs}}$ (where $G_{\text{comp}} = U(1)^3 \times SO(6)$ and $G^{I, II}$ have been already defined). The chiral matter spectrum, which we denote as $\hat{\Psi}_{(\Gamma, N)}$ with $(\Gamma = \underline{1}, \underline{\bar{5}}, \underline{10}; N = \underline{3}, \underline{1})$, consists of $N_g = 3_H + 1_H$ families. See Table 4, row No.2 for the $((SU(5) \times U(1)) \times (SU(3) \times U(1))_H)^{\text{sym}}$ quantum numbers.

The $SU(3_H)$ anomalies of the matter fields (row No.2) are naturally canceled by the chiral «horizontal» superfields forming two sets: $\hat{\Psi}_{(1, N; 1, N)}^H$ and $\hat{\Phi}_{(1, N; 1, N)}^H$, $\Gamma = \underline{1}$, $N = \underline{1}, \underline{3}$, (with both $SO(2)$ chiralities, see Table 4, row No.3, 4, respectively).

The horizontal fields (No.3, 4) cancel all $SU(3)^I$ anomalies introduced by the chiral matter spectrum (No.2) of the $(U(5) \times U(3))^I$ group (due to b_6 GSO projection the chiral fields of the $(U(5) \times U(3))^{II}$ group disappear from the final string spectrum). Performing the decomposition of fields (No.3) under $(SU(5) \times SU(3))^{\text{sym}}$ we get (among others) three «horizontal» fields $\hat{\Psi}^H$:

$$2 \times (\underline{1}, \underline{\bar{3}})_{(0, -1)}, \quad (\underline{1}, \underline{1})_{(0, -3)}, \quad (\underline{1}, \underline{\bar{6}})_{(0, 1)}, \quad (98)$$

coming from $\hat{\Psi}_{(1,\bar{3};1,1)}^H$ (and $\hat{\Psi}_{(1,1;1,3)}^H$), $\hat{\Psi}_{(1,1;1,1)}^H$ and $\hat{\Psi}_{(1,\bar{3};1,3)}^H$, respectively,

which make the low energy spectrum of the resulting model (96) $SU(3_H)^{\text{sym}}$ -anomaly free. The other fields arising from rows No.3, 4, Table 4 form anomaly-free representations of $(SU(3_H) \times U(1_H))^{\text{sym}}$:

$$2(1, 1)_{(0,0)}, \quad (1, \bar{3})_{(0,2)} + (1, 3)_{(0,-2)}, \quad (1, 8)_{(0,0)}. \quad (99)$$

The superfields $\phi_{(\Gamma, N)} + \text{h.c.}$, where $(\Gamma = \underline{1}, \underline{5}; N = \underline{1}, \underline{3})$ from Table 4, row

No.5 forming representations of $(U(5) \times U(3))^{\text{I,II}}$ have either Q^{I} or Q^{II} exotic fractional charges. Because of the strong G^{comp} gauge forces these fields may develop the double scalar condensate $\langle \hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle$, which can also serve for $U(5) \times U(5)$ gauge symmetry breaking. For example, the composite condensate $\langle \hat{\phi}_{(5,1;1,1)}, \hat{\phi}_{(1,1;\bar{5},1)} \rangle$ can break the $U(5) \times U(5)$ gauge symmetry down to the symmetric diagonal subgroup with generators of the form

$$\Delta_{\text{sym}}(t) = t \times 1 + 1 \times t, \quad (100)$$

so for the electromagnetic charges we would have the form

$$Q_{em} = Q^{\text{II}} + Q^{\text{I}}, \quad (101)$$

leading again to no exotic, fractionally charged states in the low-energy string spectrum.

The superfields which transform nontrivially under the compactified group $G^{\text{comp}} = SO(6) \times SO(2)^{\times 3}$ (denoted as $\hat{\sigma} + \text{h.c.}$), and which are singlets of $(SU(5) \times SU(3)) \times (SU(5) \times SU(3))$, arise in three sectors, see Table 4, row No.6. The superfields $\hat{\sigma}$ form the spinor representations $\underline{4} + \bar{\underline{4}}$ of $SO(6)$ and they are also spinors of one of the $SO(2)$ groups. They have following hypercharges $\tilde{Y}_5^{\text{I,II}}, \tilde{Y}_3^{\text{I,II}}$:

$$\tilde{Y} = (5/4, \mp 3/4; 5/4, \mp 3/4), \quad \tilde{\bar{Y}} = (5/4, 3/4; -5/4, -3/4). \quad (102)$$

With respect to the diagonal G^{sym} group with generators given by (92) or (100), some fields $\hat{\sigma}$ are of zero hypercharges and can, therefore, be used for breaking the $SO(6) \times SO(2)^{\times 3}$ group.

Note, that for the fields $\hat{\phi}$ and for the fields $\hat{\sigma}$ any other electromagnetic charge quantization different from (94) or (101) would lead to «quarks» and «leptons» with the exotic fractional charges, for example, for the $\underline{5}$ - and $\underline{1}$ -

multiplets according to the values of hypercharges (see eqs. 102) the generator

Q^{II} (or Q^{I}) has the eigenvalues $(\pm 1/6, \pm 1/6, \pm 1/6, \pm 1/2, \mp 1/2)$ or $\pm 1/2$, respectively.

Scheme of the breaking of the gauge group to the symmetric subgroup, which is similar to the scheme of Model 1, works for Model 2, too. In this case vector-like multiplets $(\underline{5}, \underline{1}; \bar{\underline{5}}, \underline{1})$ from RNS-sector and $(\underline{1}, \underline{3}, \underline{1}, \underline{3})$ from $4b_3$ ($8b_3$) play the role of Higgs fields. Then generators of the symmetric subgroup and electromagnetic charges of particles are determined by formulas:

$$\Delta_{\text{sym}}^{(5)} = t^{(5)} \times 1 \oplus 1 \times t^{(5)},$$

$$\Delta_{\text{sym}}^{(3)} = (-t^{(3)}) \times 1 \oplus 1 \times t^{(3)},$$

$$Q_{em} = t_5^{(5)} - 2/5 Y^5, \text{ where } t_5^{(5)} = (1/15, 1/15, 1/15, 2/5, -3/5). \quad (103)$$

After this symmetry breaking matter fields (see Table 7 rows No.2, 3) as usual for flip models take place in representations of the $U(5)$ -group and form four generations $(\underline{1} + \underline{5} + \bar{\underline{10}}; \bar{\underline{3}} + \underline{1})_{\text{sym}}$. And Higgs fields form adjoint representation of the symmetric group, similar to Model 1, which is necessary for breaking of the gauge group to the Standard group. Besides, due to quantization of the electromagnetic charge according to the formula (103), states with exotic charges in low energy spectrum also do not appear in this model.

7.2. Superpotential. The ability of making a correct description of the fermion masses and mixings will, of course, constitute the decisive criterion for selection of a model of this kind. Therefore, within our approach one has to

1. study the possible nature of the G_H horizontal gauge symmetry ($N_g = 3_H$ or $3_H + 1_H$),

2. investigate the possible cases for G_H -quantum numbers for quarks (anti-quarks) and leptons (anti-leptons), i.e., whether one can obtain vector-like or axial-like structure (or even chiral $G_{HL} \times G_{HR}$ structure) for the horizontal interactions.

3. find the structure of the sector of the matter fields which are needed for the $SU(3)_H$ anomaly cancelation (chiral neutral «horizontal» or «mirror» fermions),

4. write out all possible renormalizable and relevant non-renormalizable contributions to the superpotential W and their consequences for fermion mass matrices.

All these questions are currently under investigation. Here we restrict ourselves to some general remarks only.

With the chiral matter and «horizontal» Higgs fields available in Model 1 constructed in this paper, the possible form of the renormalizable (trilinear) part of the superpotential responsible for fermion mass matrices is well restricted by the gauge symmetry:

$$W_1 = g\sqrt{2} \left[\hat{\Psi}_{(1,3)} \hat{\Psi}_{(\bar{5},1)} \hat{h}_{(5,\bar{3})} + \hat{\Psi}_{(1,1)} \hat{\Psi}_{(\bar{5},3)} \hat{h}_{(5,\bar{3})} + \right. \\ \left. + \hat{\Psi}_{(10,3)} \hat{\Psi}_{(\bar{5},3)} \hat{h}_{(\bar{5},3)} + \hat{\Psi}_{(10,3)} \hat{\Psi}_{(10,1)} \hat{h}_{(5,\bar{3})} \right]. \quad (104)$$

From the above form of the Yukawa couplings follows that two (chiral) generations have to be very light (comparing to M_W scale).

The construction of realistic quarks and leptons mass matrices depends, of course, on the nature of the horizontal interactions. In the construction described in Sec.5 there is a freedom of choosing spin boundary conditions for $N_R = 12$ right fermions in the basis vectors $b_3, b_5, b_6, \dots$, which in the Ramond sector $2b_2$, may yield another Higgs fields, denoted as $\tilde{h}_{(\Gamma, N)}$ and transforming as $(\underline{5}, \underline{3})_{(-1,1)} + (\underline{5}, \underline{3})_{(1,-1)} \subset \underline{28} + \underline{28}$ of $SU(8)$. Using these Higgs fields we get the following alternative form of the renormalizable part of the superpotential W :

$$W'_1 = g\sqrt{2} \left[\hat{\Psi}_{(1,3)} \hat{\Psi}_{(\bar{5},3)} \tilde{h}_{(5,3)} + \hat{\Psi}_{(10,1)} \hat{\Psi}_{(\bar{5},3)} \tilde{h}_{(\bar{5},3)} + \right. \\ \left. + \hat{\Psi}_{(10,3)} \hat{\Psi}_{(10,3)} \tilde{h}_{(5,3)} + \hat{\Psi}_{(10,3)} \hat{\Psi}_{(\bar{5},1)} \tilde{h}_{(\bar{5},3)} \right]. \quad (105)$$

To construct the realistic fermion mass matrices one has to also use Higgs fields (90, 91) and (Table 4, No.5) and also to take into account all relevant non-renormalizable contributions [16].

Higgs fields (90) can be used for constructing Yukawa couplings of the horizontal superfields (No.3 and 4). The most general contribution of these fields to the superpotential is:

$$W_2 = g\sqrt{2} \left[\hat{\Phi}_{(1,1;1,\bar{3})}^H \hat{\Phi}_{(1,\bar{3};1,1)}^H \hat{\Phi}_{(1,3;1,\bar{3})} + \hat{\Phi}_{(1,1;1,1)}^H \hat{\Phi}_{(1,\bar{3};1,\bar{3})}^H \hat{\Phi}_{(1,3;1,3)} + \right. \\ \left. + \hat{\Phi}_{(1,\bar{3};1,\bar{3})}^H \hat{\Phi}_{(1,\bar{3};1,\bar{3})}^H \hat{\Phi}_{(1,\bar{3};1,\bar{3})} + \hat{\Psi}_{(1,\bar{3};1,1)}^H \hat{\Psi}_{(1,\bar{3};1,3)}^H \hat{\Phi}_{(1,\bar{3};1,\bar{3})} + \right. \\ \left. + \hat{\Psi}_{(1,1;1,3)}^H \hat{\Psi}_{(1,\bar{3};1,3)}^H \hat{\Phi}_{(1,3;1,3)} \right]. \quad (106)$$

From this expression it follows that some of the horizontal fields in (99) (No.3, 4) remain massless at the tree-level. This is a remarkable prediction: fields (99) interact with the ordinary chiral matter fields only through the $U(1_H)$ and $SU(3_H)$ gauge boson and therefore are very interesting in the context of the experimental searches for the new gauge bosons.

Finally, we remark that the Higgs sector of our GUST allows conservation of the G_H gauge family symmetry down to the low energies ($\sim \mathcal{O}(1 \text{ TeV})$ [5]). Thus in this energy region we can expect new interesting physics (new gauge bosons, new chiral matter fermions, superweak-like CP -violation in K -, B -, D -meson decays with $\delta_{KM} < 10^{-4}$ [5]).

ACKNOWLEDGMENTS

The part of this paper was made up in ITP of Bern University. One of us (G.V.) is grateful to Profs. H.Bebie, J.Gasser, H.Leutwyller for warm hospitality. He also would like to thank INFN for financial support and the staff of the Physics Department in Padova, especially, Professor C.Voci for warm hospitality during his stay in Padova. Also, he is grateful to the University of Padova and to the Physical Department in Trieste and to Professor G.Costa and Professor N.Paver for hospitality and the financial support. It is a great pleasure for him to thank Professors H.Bebie, G.Costa, L.Fellin, J.Ellis, J.-P.Deren-dinger, J.Gasser, R.Gatto, G.Harrigel, H.Leutwyller, A.Masiero, P.Minkowski, D.Nanopoulos, N.Paver, V.Petrov, F.Quevedo, P.Ramond, P.Sorba, M.Tonin and C.Voci for useful discussions and for the help and support. Many interesting discussions with colleagues from Theory Department in Padova INFN Sezione, especially, to Professor S.Sartory, during this work are also acknowledged. He would like to express his gratitude to Professor P.Drigo and the colleagues of the Medical School of the University of Padova and Doctor C.Bassetti from Bern Inselspital. He also thanks Doctors P.Chankowski and G.Colangelo for help and discussions. The research described in this publication was made possible in part by Grant No.RMP000, RMP300 from the International Science Foundation and by Grant No. 95-02-06121a from the Russian Foundation for Fundamental Researches.

8. APPENDIX A. SHORT INTRODUCTION TO $N = 2$ SUSY MODELS

Let us consider a gauge interaction of the vector (gauge) hypermultiplet and Fayet-Sohnius (matter) hypermultiplet. On the language of $N = 1$ SUSY these hypermultiplets consist of $N = 1$ superfields as follows:

vector hypermultiplet — vector superfield $V = (V_m; \lambda)$ and chiral superfield $\Phi = (N; \phi)$;

Fayet-Sohnius hypermultiplet — two chiral superfields: $\mathbf{X} = (X, \psi)$ and mirror $\mathbf{Y} = (Y, \chi)$. (In brackets we have written bosonic components on the first place).

Suppose, we have matter multiplets in some representations of a gauge group G with generators t_a :

$$\text{Tr } (t_a t_b) = k \delta_{ab}, \quad [t_a t_b] = if_{abc} t_c.$$

Then $N = 2$ gauge Lagrangian on the language of $N = 1$ superfields looks like

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{N=2} = & \left[\frac{1}{16kg^2} \text{Tr } W^\alpha W_\alpha \right]_F + \text{h.c.} + [1/k \text{Tr } (\Phi^+ e^{2gV} \Phi e^{-2gV}) + \\ & + \mathbf{X}_j^+ e^{2gV} \mathbf{X}^j + \mathbf{Y}_j^+ e^{-2gV} \mathbf{Y}^j]_D + [i\sqrt{2}g \mathbf{Y}_j^T \Phi \mathbf{X}^j]_F + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (107)$$

where superstrength $W_\alpha = -1/4 \bar{D}_\alpha \bar{D}^{\dot{\alpha}} e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}$, $V = V^a t_a$ and analogically for Φ . It is interesting that the Yukawa coupling of $N = 2$ theories is entirely determined by the gauge structure.

Under following gauge transformations this Lagrangian is invariant

$$e^{2gV} \rightarrow \exp (ig\Lambda_a^+ t_a) e^{2gV} \exp (-ig\Lambda_b^- t_b),$$

$$\Phi \rightarrow \exp (ig\Lambda_a^+ t_a) \Phi \exp (-ig\Lambda_b^- t_b),$$

$$\mathbf{X} \rightarrow \exp (ig\Lambda_a^+ t_a) \mathbf{X}, \quad \mathbf{Y} \rightarrow \exp (-ig\Lambda_a^+ t_a) \mathbf{Y}. \quad (108)$$

We can see that ordinary fields (superfields $\mathbf{X}$) and mirror fields (superfields $\mathbf{Y}$) are transformed as mutual conjugating representations of a gauge group.

After excluding of auxiliary fields the Lagrangian $\mathcal{L}^{N=2}$ looks like (we suppose that $k = 1/2$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{N=2} = & \text{Tr } (-1/2 V_{mn} V^{mn} - 2i \lambda \sigma^m \nabla_m \bar{\lambda} + 2N^+ \nabla^2 N + 2i \nabla_m \phi \sigma^m \bar{\phi} + \\ & + 2\sqrt{2} ig \lambda [\phi N^+] + 2\sqrt{2} ig \bar{\lambda} [\bar{\phi} N] - g^2 [NN^+]^2) + \\ & + X^+ \nabla^2 X + i \nabla_m \bar{\psi} \bar{\sigma}^m \psi + Y^+ \nabla^2 Y + i \nabla_m \bar{\chi} \bar{\sigma}^m \chi + \\ & + \sqrt{2} ig (X^+ \lambda \psi - Y^+ \lambda^T \chi - \chi^T \phi X - Y^T \phi \psi - \chi^T N \psi) + \text{h.c.} - \\ & - g^2 X^+ \{N^+ N\} X - g^2 Y^T \{NN^+\} Y^* - g^2/4 (X_i^+ X_j) (X_j^+ X_i) - \\ & - g^2/4 (Y_i^+ Y_j) (Y_j^+ Y_i) + g^2/2 (Y_j^T X_i) (X_i^+ Y_j^*) - g^2 (T_i^T Y_j^*) (X_j^+ X_i), \end{aligned} \quad (109)$$

where i and j indices are numbers of matter hypermultiplets. Note, that covariant derivative for $\mathbf{X}$ -fields $\nabla_m^X = \partial_m + igV_m$, but for $\mathbf{Y}$ -fields $\nabla_m^Y = \partial_m - igV_m^T$. Since the $N = 2$ SUSY is present, this Lagrangian possesses the hidden global internal $SU(2)$ symmetry. The component fields $(\lambda, -\phi)$ and

(X, Y^*) are doublets under internal $SU(2)$ group and remaining fields are singlets.

The attractive feature of the $N = 2$ SUSY theory is that the β -function differs from zero at the one-loop level only.

$$\beta(g_A) = \frac{g^3}{8\pi^2} \left(\sum_{\sigma} T_A(R_{\sigma}) - C_2(G_A) \right), \quad (110)$$

where

$$f_{ijk} f_{ljk} = C_2(G) \delta_{il}, \quad \text{Tr } t_a^{(\sigma)} t_b^{(\sigma)} = T(R_{\sigma}) \delta_{ab},$$

and we suppose that gauge group is like $G = \prod_A \otimes G_A$, and R_{σ} are representations for chiral superfields.

We can see that this theory can be made finite for some gauge group through a certain choice of representations of matter fields if the following relation is true [31]:

$$C_2(G_A) = \sum_{\sigma} T_A(R_{\sigma}). \quad (111)$$

Let us write down representations of some subgroup of E_8 which warrant the finiteness of the $N = 2$ theory [32]:

$SU(5)$ p, q and r matter multiplets in representations $(5 + \bar{5})$, $(10 + \bar{10})$ and $(15 + \bar{15})$ correspondingly, for which $p + 3q + 7r = 10$.

$SU(10)$ p and q matter multiplets in representations $(10 + 10)$ and $(16 + \bar{16})$ correspondingly for which $p + 2q = 8$.

E_6 4 multiplets in representation $(27 + \bar{27})$.

E_7 3 multiplets in representation $(56 + \bar{56})$.

E_8 one multiplet in the lowest (adjoint) representation $(248 + 248)$. This means presence of $N = 4$ SUSY.

There are five types of soft SUSY-breaking operators, and their addition to the Lagrangian does not destroy the finiteness of the theory [32,33].

1) Any gauge invariant $N = 1$ supersymmetric mass addition. For example $m \text{Tr } \Phi^2|_F + \text{h.c.}$, $m Y_i^T X_i|_F + \text{h.c.}$ First addition can be written in component fields as

$$\text{Tr } (-m\phi\phi - m^* \bar{\phi}\bar{\phi} - 2|m|^2 N^+ N) + i\sqrt{2} g m X^+ N Y^* - i\sqrt{2} g m^* Y^T N^+ X. \quad (112)$$

This addition breaks $N = 2$ to $N = 1$ SUSY.

2) Any gauge invariant masses for scalar fields of view $A^2 - B^2$. We suppose that scalar is $\frac{A + iB}{\sqrt{2}}$.

3) Certain mass terms of view $A^2 + B^2$.

$$U_1 N_a^* N_a + \sum_i (U_2^i X_i^* X_i + U_3^i Y_i^* Y_i). \quad (113)$$

If for each $i U_1 + U_2^i + U_3^i = 0$.

4) Certain combination of mass addition and three-linear scalar addition.

$$\text{Tr} (-m\lambda\lambda - m^*\bar{\lambda}\bar{\lambda} - 2|m|^2 N^+ N) - i\sqrt{2}gmY^T NX + i\sqrt{2}gm^*X^+ N^+ Y^*. \quad (114)$$

This combination is simply the addition 1) under the transformation of internal $SU(2)$ group. It breaks $N = 2$ to $N = 1$ SUSY, too.

5) Gauge invariant scalar three-linear operators of view

$$a) k^{ijk}(X_i X_j X_k + Y_i^* Y_j^* Y_k^*) + \text{h.c.},$$

b) $k^{ijk}(X_i X_j X_k + Y_i^* Y_j^* Y_k^*) + \text{h.c.}$, joint with certain set of scalar mass $A^2 + B^2$ and scalar three-linear addition $\text{Tr} N^3 + \text{h.c.}$, where X and Y don't lie in adjoint representation and the gauge group must be $SU(n)$ with $n \geq 3$ or their direct production. However, these terms lead to unbounded below potential.

9. APPENDIX B. RULES FOR CONSTRUCTING CONSISTENT STRING MODELS OUT OF FREE WORLD-SHEET FERMIONS

The partition function of the theory is a sum over terms corresponding to world-sheets of different genus g . For consistence of the theory we must require that partition function to be invariant under modular transformation, which is reparametrization not continuously connected to the identity. For this we must sum over the different possible boundary conditions for the world-sheet fermions with appropriate weights [35].

If the fermions are parallel transported around a nontrivial loop of a genus- g world-sheet M_g , they must transform into themselves:

$$\chi^I \rightarrow L_g(\alpha)_J^I \chi^J \quad (115)$$

and similar for the right-moving fermions. The only constraints on $L_g(\alpha)$ and $R_g(\alpha)$ are that it be orthogonal matrix representation of $\pi_1(M_g)$ to leave the energy-momentum current invariant and supercharge (32) invariant up to a sign. It means that

$$\psi^\mu \rightarrow -\delta_\alpha \psi^\mu, \quad \delta_\alpha = \pm 1, \quad (116)$$

$$L_{gI}^I L_{gJ}^J L_{gK}^K f_{IJK} = -\delta_\alpha f_{IJK} \quad (117)$$

and consequently $-\delta_\alpha L_g(\alpha)$ is an automorphism of the Lie algebra of G .

Further, the following restrictions on $L_g(\alpha)$ and $R_g(\alpha)$ are imposed:

(a) $L_g(\alpha)$ and $R_g(\alpha)$ are abelian matrix representations of $\pi_1(M_g)$. Thus all of the $L_g(\alpha)$ and all of the $R_g(\alpha)$ can be simultaneously diagonalized in some basis.

(b) There is commutativity between the boundary conditions on surfaces of different genus.

When all of the $L(\alpha)$ and $R(\alpha)$ have been simultaneously diagonalized the transformations like (116) can be written as

$$f \rightarrow -\exp(i\pi\alpha) f. \quad (118)$$

Here and in eqs.(117), (118) the minus signs are conventional.

The boundary conditions (116), (117) are specified in this basis by a vector of phases

$$\alpha = [\alpha(f_1^L), \dots, \alpha(f_k^L) \mid \alpha(f_1^R), \dots, \alpha(f_l^R)]. \quad (119)$$

For complex fermions and $d=4$, $k=10$ and $l=22$. The phases in this formula are reduced mod (2) and are chosen to be in the interval $(-1, +1]$.

Modular transformations mix spin-structures amongst one another within a surface of a given genus. Thus, requiring the modular invariance of the partition

function imposes constraints on the coefficients $C \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_g \\ \beta_1 & \dots & \beta_g \end{bmatrix}$ (weights in the partition function sum, for example, see eq.(77)) which in turn imposes constraints on what spin-structures are allowed in a consistent theory. According to the assumptions (a) and (b) these coefficients factorize:

$$C \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_g \\ \beta_1 & \dots & \beta_g \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dots C \begin{bmatrix} \alpha_g \\ \beta_g \end{bmatrix}. \quad (120)$$

The requirement of modular invariance of the partition function thus gives rise to constraints on the one-loop coefficients C and hence on the possible spin structures (α, β) on the torus.

For rational phases $\alpha(f)$ (we consider only this case) the possible boundary conditions α comprise a finite additive group $\Xi = \sum_{i=1}^k \oplus Z_{N_i}$ which is generated by a basis $(b_1, \dots, b_k)$, where N_i is the smallest integer for which $N_i b_i = 0 \pmod{2}$. A multiplication of two vectors from Ξ is defined by

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha_L^i \beta_L^i - \alpha_R^j \beta_R^j)_{\text{complex}} + 1/2(\alpha_L^k \beta_L^k - \alpha_R^l \beta_R^l)_{\text{real}}. \quad (121)$$

The basis satisfies following conditions derived in [15]:

(A1) The basis $(b_1, \dots, b_k)$ is chosen to be canonical:

$$\sum m_i b_i = 0 \Leftrightarrow m_i = 0 \pmod{N_i} \quad \forall i.$$

Then an arbitrary vector α from Ξ is a linear combination $\alpha = \sum a_i b_i$.

(A2) The vector b_1 satisfies $1/2N_1 b_1 = 1$. This is clearly satisfied by $b_1 = 1$.

(A3) $N_{ij} b_i \cdot b_j = 0 \pmod{4}$, where N_{ij} is the least common multiple of N_i and N_j .

(A4) $N_i b_i^2 = 0 \pmod{4}$; however, if N_i is even, we must have $N_i b_i^2 = 0 \pmod{8}$.

(A5) The number of real fermions that are simultaneously periodic under any four boundary conditions b_i, b_j, b_k, b_l is even, where i, j, k and l are not necessarily distinct. This implies that the number of periodic real fermions in any b_i be even.

(A6) The boundary condition matrix corresponding to each b_i is an automorphism of the Lie algebra that defines the supercharge (32). All such automorphisms must commute with one another, since they must be simultaneously diagonalizable.

For each group of boundary conditions Ξ there are a number of consistent choices for coefficients $C[\dots]$, which are determined from requirement of invariance under modular transformation. The number of such theories corresponds to the number of different choices of $C \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix}$. This set must satisfy equations:

$$(B1) \quad C \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix} = \delta_{b_i} e^{2\pi i n / N_j} = \delta_{b_j} e^{i\pi(b_i \cdot b_j) / 2} e^{2\pi i m / N_i}.$$

$$(B2) \quad C \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \pm e^{i\pi b_1^2 / 4}.$$

The values of $C \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ for arbitrary $\alpha, \beta \in \Xi$ can be obtained by means of the following rules:

$$(B3) \quad C \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = e^{i\pi(\alpha \cdot \alpha + 1) / 4} C \begin{bmatrix} \alpha \\ b_1 \end{bmatrix}^{N_1 / 2}.$$

$$(B4) \quad \mathcal{C} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = e^{i\pi(\alpha \cdot \beta)/2} \mathcal{C} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}^*.$$

$$(B5) \quad \mathcal{C} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta + \gamma \end{bmatrix} = \delta_\alpha \mathcal{C} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mathcal{C} \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

The relative normalization of all the $\mathcal{C}[\dots]$ is fixed in these expressions conventionally to be $\mathcal{C} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv 1$.

For each $\alpha \in \Xi$ there is a corresponding Hilbert space of string states $\mathcal{H}_\alpha$ that potentially contribute to the one-loop partition function. If we write $\alpha = (\alpha_L | \alpha_R)$, then the states in $\mathcal{H}_\alpha$ are those that satisfy the Virasoro condition:

$$\begin{aligned} M_L^2 &= -c_L + 1/8 \alpha_L \cdot \alpha_L + \sum_{L-\text{mov.}} (\text{frequencies}) = \\ &= -c_R + 1/8 \alpha_R \cdot \alpha_R + \sum_{R-\text{mov.}} (\text{freq.}) = M_R^2. \end{aligned} \quad (122)$$

Here $c_L = 1/2$ and $c_R = 1$ in the heterotic case. In $\mathcal{H}_\alpha$ sector the fermion $f(f^*)$ has oscillator frequencies

$$\frac{1 \pm \alpha(f)}{2} + \text{integer}. \quad (123)$$

The only states $|s\rangle$ in $\mathcal{H}_\alpha$ that contribute to the partition function are those that satisfy the generalized GSO conditions

$$\left\{ e^{i\pi(b_i \cdot F_\alpha)} - \delta_\alpha \mathcal{C} \begin{bmatrix} \alpha \\ b_i \end{bmatrix}^* \right\} |s\rangle = 0 \quad (124)$$

for all b_i , where $F_\alpha(f)$ is a fermion number operator. If α contains periodic fermions, then $|0\rangle_\alpha$ is degenerate, transforming as a representation of an $SO(2n)$ Gliiford algebra.

REFERENCES

1. **E731 Collaboration, Gibbons L.K. et al.** —Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 70, p.1203.
2. **NA31 Collaboration, Barr G.D. et al.** —Phys. Lett., 1993, vol. B317, p.233.
3. **D0 Collaboration, Abachi F. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1994, vol. 72, p.2138.
4. **Ellis J., Figli G.L., Lisi B.** — CERN-TH/177-94, 1994.
5. **Amaglobeli A.N., Kereselidze A.R., Liparteliani A.G., Volkov G.G.** —Phys. Lett., 1990, vol. B237, p.417; **Maslikov A.A., Volkov G.G.** — Towards a Low Quark-

- Lepton Family with Non-Abelian Gauge Symmetry, ENSLAPP-A-382/92, 1992; **Monich V.A., Struminsky B.V., Volkov G.G.** — Phys. Lett., 1981, vol. B104, p.382; **Lipartieliani A.G., Monich V.A., Nikitin Yu.P., Volkov G.G.** — Proc. of the Int. Conf. Neutrino-77, Baksan Valley, USSR, Moscow, Nauka, 1978, vol. 2, p.541; Sov. J. Nucl. Phys., 1978, vol. 27, p.735; **Maslikov A., Naumov I., Volkov G.** — Non-Abelian Gauge Family Symmetry in Rank 8 and 16 Grand Unified String Theories, INFN Sezione di Padova DF-PD/94/TH/46, 1994.
6. **Gasser J., Leutwyler H.** — Phys. Rep., 1982, 87, p.77; **Leitwyller H.** — Nucl. Phys., 1990, vol. B337, p.108.
 7. a) **Fritzsch H., Plankl J.** — Phys. Lett., 1990, vol. 237, p.451; b) **Fritzsch H.** — Nucl. Phys., 1979, vol. B155, p.189; c) **Matumoto K.M., Matsuoka T.** — Progr. Theor. Phys. Progress Letters, 1990, vol. 83, p.373.
 8. a) **Ramond P., Roberts R., Ross G.** — Nucl. Phys., 1993, vol. B406, p.19; b) **Dimopoulos S., Hall L., Raby S.** — Phys. Rev., 1992, vol. D45, p.4195.
 9. **Green M.B., Schwarz J.H.** — Phys. Lett., 1984, vol. B149, p.117.
 10. **Gross D.J., Harvey J.A., Martinec E., Rohm R.** — Nucl. Phys., 1985, vol. B256, p.253.
 11. **Candelas P., Horowitz G.T., Strominger A., Witten E.** — Nucl. Phys., 1985, vol. B258, p.46; **Greene B., Kirklin K., Miron R., Ross G.** — Nucl. Phys., 1986, vol. B278, p.667.
 12. **Witten E.** — Nucl. Phys., 1986, vol. B268, p.79.
 13. **Narain K.S.** — Phys. Lett., 1986, vol. B169, p.246; **Lerche W., Lust D., Schellekens A.N.** — Nucl. Phys., 1987, vol. B287, p.477.
 14. **Kawai H., Lewellen D., Tye S.-H.H.** — Phys. Rev. Lett., 1986, vol. 57, p.1832; Nucl. Phys., 1987, vol. 288B, p.1.
 15. **Antoniadis I., Bachas C., Kounnas C.** — Nucl. Phys., 1988, vol. B289, p.87; **Antoniadis I., Bachas C.** — Nucl. Phys., 1988, vol. B298, p.586.
 16. **Antoniadis I., Ellis J., Hagelin J.S., Nanopoulos D.V.** — Phys. Lett., 1987, vol. B194, p.231; 1988, vol. B208, p.209; **Ellis J., Lopez J.I., Nanopoulos D.V.** — Phys. Lett., 1990, vol. B245, p.375; **Kalara S., Lopez J.I., Nanopoulos D.V.** — Nucl. Phys., 1991, vol. B353, p.650; **Lopez J.I., Nanopoulos D.V., Zichichi A.** — CERN-TH 6934/93, 1993; **Antoniadis I., Leontaris G., Rizos J.** — Phys. Lett., 1990, vol. B245, p.161.
 17. **Goddard P., Olive D.** — Int. J. Mod. Phys., 1986, vol. A1, p.1.
 18. **Alvarez-Gaume L., Sierra G., Gomez C.** — Topics in Conformal Field Theory. In: Physics and Mathematics of Strings, World Scientific, Singapore, 1990, p.p.16—184.
 19. **Langacker P.** — Phys. Rep., 1981, vol. 72, p.p.185—385.
 20. **Vinberg E.B., Onichik A.L.** — Seminar on Group Lee. In: Russian Nauka, Moscow, 1988; **Slansky R.** — Phys. Rep., 1981, vol. 79, p.p.1—128.
 21. **Sergeev S.M., Volkov G.G.** — Preprint DFPD/TH/51 1992; Rus. Nucl. Phys., 1994, vol. 57, No.1; **Maslikov A.A., Sergeev S.M., Volkov G.G.** — Phys. Lett., 1994, vol. B328, p.319; **Maslikov A.A., Sergeev S.M., Volkov G.G.** — Phys. Rev. D, 1994, vol. 50, p.7740.
 22. **Font A., Ibanez L.E., Quevedo F.** — Nucl. Phys., 1990, vol. B345, p.389.
 23. **Schellekens A.** — Phys. Lett., 1990 vol. B237, p.363.
 24. **Cahn R.N., Harari H.** — Nucl. Phys., 1980, vol. B176, p.136.

25. **Liparteliani A.G., Monich V.A., Volkov G.G.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1983, vol. 37, p.393; The Problems of CP Violation, Preprint IHEP 85-9, Serpukhov, 1985; **Volkov G.G., Liparteliani A.G., Monich V.A., Nikitin Yu.P.** — Yadernaya Fizika (Sov. J. Nucl. Phys.), 1981, vol. 34, p.435; **Volkov G.G. et al.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1989, vol. 49.
26. **Jones D.R.T., Kane G.L., Leveille J.P.** — Nucl. Phys., 1982, vol. B198, p.45; **Frampton P.H., Kephart T.W.** — Nucl. Phys., 1983, vol. B211, p.239.
27. **Nilles H.P.** — Phys. Rep., 1984, vol. 110, p.1; **Lahanas A.B., Nanopoulos D.V.** — Phys. Rep., 1987, vol. 145, p.1.
28. **Fayet P.** — Nucl. Phys., 1984, vol. B237, p.367.
29. **Lewellen D.C.** — Nucl. Phys., 1990, vol. B337, p.61.
30. **Masiero A., Nanopoulos D.V., Tamvakis K., Yanagida T.** — Phys. Lett., 1982, vol. B115, p.380.
31. **Howe P., Stelle K., West P.** — Phys. Lett., 1983, vol. B124, p.55.
32. **Parkes A., West P.** — Phys. Lett., 1983, vol. B127, p.353.
33. **F. del Aguila et al.** — Nucl. Phys., 1985, vol. B250, p.225.
34. **Dreiner H., Lopez J.L., Nanopoulos D.V., Reiss D.** — Nucl. Phys., 1989, vol. B320, p.401.
35. **Seiberg N., Witten E.** — Nucl. Phys., 1986, vol. B276, p.272.

КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ И УРАВНЕНИЯ ЯНГА — БАКСТЕРА

А.П.Исаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре изложены основы теории квантовых групп, с точки зрения возможности их применения для деформаций симметрий в физических моделях. Подробно обсуждается R -матричный подход к теории квантовых групп, на основе которого проведено квантование классических групп Ли, а также некоторых супергрупп Ли. Приведены рациональные и тригонометрические решения уравнения Янга — Бакстера, связанные с квантовыми группами $GL_q(N)$, $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. Приведены также эллиптические решения уравнения Янга — Бакстера. Кратко обсуждаются приложения теории квантовых групп и уравнений Янга — Бакстера в различных областях теоретической физики.

The principles of the quantum group theory are summarized from the point of view of possible deformations of symmetries in physics. R -matrix approach to the theory of quantum groups is discussed in details and used for the quantizing of the classical Lie groups and some Lie supergroups. Rational and trigonometric solutions of the Yang — Baxter equation which are related to the quantum groups $GL_q(N)$, $SO_q(N)$ and $Sp_q(2n)$ are presented. We also reproduce elliptic solutions of the Yang — Baxter equations. The applications of the theory of the quantum groups and Yang — Baxter equations in various areas of theoretical physics are briefly discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной теоретической физике идеи симметрии и инвариантности играют весьма заметную роль. Преобразования симметрии, как правило, образуют группы, следовательно, наиболее естественным языком описания симметрий является язык теории групп.

Примерно 15 лет назад, при изучении двумерных интегрируемых систем, в рамках квантового метода обратной задачи [1] возникли новые алгебраические структуры, обобщения которых позднее получили название «квантовые группы». Отметим, что похожие структуры появлялись также и при решении некоторых моделей статистической механики [2] и при изу-

чении факторизованного рассеяния солитонов и струн [3,4]. Объединяющим началом всех этих исследований были так называемые уравнения Янга — Бакстера (УЯБ).

Важнейшими нетривиальными примерами квантовых групп являются квантовые группы Ли и квантовые алгебры Ли, которые можно рассматривать как деформацию или квантование обычных классических групп и алгебр Ли (более точно рассматривается квантование алгебры функций на группе Ли и универсальной обертывающей алгебры Ли). Данное квантование сопровождается введением дополнительного параметра q (параметра деформации), который играет роль, аналогичную роли постоянной Планка в квантовой механике. При $q \rightarrow 1$ квантовые группы и алгебры Ли переходят в классические.

Хотя квантовые группы не являются группами в математическом смысле, они, тем не менее, обладают рядом свойств, которые позволяют говорить о них как о «группах симметрии». Так, известны примеры статистических систем (анизотропные магнетики Гайзенберга), а также систем деформированных осцилляторов с гамильтонианами, инвариантными относительно специального действия квантовых групп (см., например, [5]). В связи с этим возникает естественная идея о поиске и конструировании других физических моделей, обладающих такими квантовыми симметриями.

Перечислим несколько существующих направлений, связанных с реализацией идей о квантовании симметрий в физике. Часть этих направлений использует совпадение теории представлений квантовых и классических групп и алгебр Ли (для q , не равного корням из единицы). В результате мы имеем, например, совпадение размерностей неприводимых представлений (мультиплетов) для группы $SU(N)$ и (копредставлений) для квантовой группы $SU_q(N)$. Таким образом, мы можем применять квантовые группы Ли как для классификации элементарных частиц, так и в исследованиях по ядерной спектроскопии. Далее, естественным является желание исследовать уже существующие теоретико-полевые модели (такие, например, как модель Салама — Вайнберга или стандартная модель) на предмет их связи с некоммутативной геометрией (см. [6]) и, в частности, возможной их инвариантности относительно квантово-групповых преобразований. При этом весьма привлекательной кажется идея о связи параметров деформации квантовых групп с углами смешивания, присутствующими в стандартной модели в качестве свободных параметров. Одна из возможных реализаций этой идеи была предложена в работе [7]. Упомянем здесь также многочисленные попытки деформации групп Лоренца и Пуанкаре и соответствующие этим деформациям построения квантовых версий пространства-времени [8,9].

Перечисленные выше направления, связанные с квантованием симметрий в физике, составляют лишь малую часть всех применений теории кван-

товых групп. Квантовые группы и УЯБ естественно возникают во многих задачах теоретической физики, и это позволяет говорить о них и их теориях как о новой парадигме в математической физике. К сожалению, жесткие рамки обзора не позволяют подробно обсудить все применения квантовых групп и УЯБ. Поэтому автор ограничился лишь кратким перечислением некоторых областей в теоретической физике и математике, где квантовые группы и УЯБ играют существенную роль. Это перечисление сделано в заключении. Во втором разделе излагаются математические основы теории квантовых групп. Значительная часть третьего раздела является подробным изложением некоторых результатов из работы Л.Д.Фаддеева, Н.Ю.Решетихина и Л.А.Тахтаджяна [10], где сформулирован R -матричный подход к теории квантовых групп. Кроме того, в этом разделе мы рассматриваем вопросы инвариантной бастеризации R -матриц, многопараметрические деформации групп Ли, а также квантование некоторых супергрупп Ли. В конце третьего раздела мы приводим эллиптические решения уравнений Янга — Бакстера, алгебраическая основа которых (типа квантовых групп Ли в случае тригонометрических решений) до сих пор не прояснена. Читателям, которые совсем не знакомы с теорией квантовых групп, мы советуем начать чтение обзора с пп. 3.3 из третьего раздела.

В заключении, как мы уже упоминали выше, кратко рассматриваются некоторые приложения квантовых групп и УЯБ.

2. АЛГЕБРЫ ХОПФА

Данный раздел основывается на публикациях [11—15].

Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ с единичным элементом (над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$; в дальнейшем все алгебры, которые будут вводиться, будут также пониматься над полем комплексных чисел), каждый элемент которой выражается в виде линейной комбинации базисных элементов $\{e_i\}$, где $i = 1, 2, 3, \dots$ и $E^i e_i = I$ ($E^i \in \mathbb{C}$) есть единичный элемент. Это значит, что для любых двух элементов e_i и e_j мы можем определить их умножение в виде

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{m} \mathcal{A} \Rightarrow e_i e_j = m_{ij}^k e_k, \quad (2.1)$$

где m_{ij}^k — некоторый набор комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$E^i m_{ij}^k = m_{ji}^k E^i = \delta_j^k \quad (2.2)$$

для единичного элемента, а также условию

$$m_{ij}^l m_{lk}^n = m_{il}^n m_{jk}^l \equiv m_{ijk}^n, \quad (2.3)$$

эквивалентному условию ассоциативности для алгебры $\mathcal{A}$

$$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k). \quad (2.4)$$

Условие ассоциативности (2.4) для умножения (2.1), очевидно, можно представить в виде диаграммы (имеется в виду ее коммутативность),

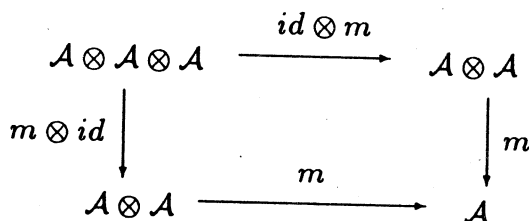


Рис.1. Аксиома ассоциативности

где m — отображение умножения, а id обозначает тождественное отображение. Наличие единичного элемента I означает существование отображения $i: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ (вложение $\mathbb{C}$ в $\mathcal{A}$):

$$k \xrightarrow{i} kI, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (2.5)$$

Для I мы имеем условие (2.2), которое эквивалентно диаграмме,

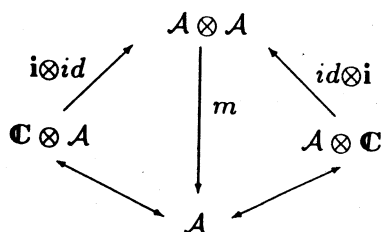


Рис.2. Аксиомы для единичного элемента

где отображения $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \leftrightarrow \mathcal{A}$ являются естественными изоморфизмами. Одно из достоинств диаграммного языка, использованного выше, заключается в том, что он моментально приводит к определению нового фундаментального объекта — коалгебры, если мы все стрелки на приведенных диаграммах повернем в обратном направлении.

Определение 1. Коалгеброй C называется векторное пространство (с базисом $\{e_i\}$), снабженное отображением $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$

$$\Delta(e_i) = \Delta_i^{kj} e_k \otimes e_j, \quad (2.6)$$

которое называется коумножением, а также снабженное отображением $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{C}$, которое называется коединицей. Коалгебра называется коассоциативной, если отображение Δ удовлетворяет условию коассоциативности (ср. с первой диаграммой со стрелками в обратном направлении)

$$(id \otimes \Delta) \Delta = (\Delta \otimes id) \Delta \Rightarrow \Delta_i^{nl} \Delta_l^{kj} = \Delta_i^{lj} \Delta_l^{nk} \equiv \Delta_i^{nkj}. \quad (2.7)$$

Для коединицы ϵ необходимо выполнение следующих условий (ср. со второй диаграммой):

$$(\epsilon \otimes id) \Delta = (id \otimes \epsilon) \Delta = id \Rightarrow \epsilon_i \Delta_k^{ij} = \Delta_k^{ji} \epsilon_i = \delta_k^j. \quad (2.8)$$

Здесь комплексные числа ϵ_i определяются из соотношений $\epsilon(e_i) = \epsilon_i$.

Для алгебр и коалгебр можно ввести понятия модулей и комодулей. Так, если A является алгеброй, то левый A -модуль может быть определен как векторное пространство N и отображение $\psi_L : A \otimes N \rightarrow N$ (действие A на N) такое, что

Рис.3. Аксиомы для левого A -модуля

Другими словами, пространство N является пространством представления для алгебры A .

Если N является (ко)алгеброй и отображение ψ_L сохраняет (ко)алгебраическую структуру N (см. ниже), то N называется левой A -модульной (ко)алгеброй. Аналогично вводится понятие правого модуля и модульной (ко)алгебры. Если N является одновременно левым и правым A -модулем, то N называется двухсторонним A -модулем. Очевидно, что сама алгебра A

является двухсторонним $\mathcal{A}$ -модулем, для которого левое и правое действие задается левым и правым умножением в алгебре.

Пусть C есть коалгебра, тогда левый C -комодуль может быть определен как пространство M вместе с отображением $\Delta_L : M \rightarrow C \otimes M$ (кодействие C на M), удовлетворяющим аксиомам (в диаграммах на рис.3, определяющих модули, необходимо заменить все стрелки на обратные).

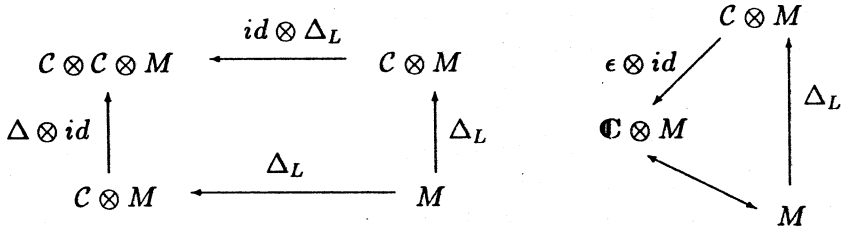


Рис.4. Аксиомы для левого $\mathcal{A}$ -комодуля

Если M является (ко)алгеброй и отображение Δ_L сохраняет (ко)алгебраическую структуру (например, является гомоморфизмом; см. ниже), то M называется левой C -комодульной (ко)алгеброй. Правые комодули вводятся аналогичным образом, после чего естественным образом определяются двухсторонние комодули. Очевидно, что коалгебра C является двухсторонним C -комодулем.

Пусть $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}$ — два векторных пространства с базисам $\{e_i\}, \{\tilde{e}_i\}$. Обозначим $\mathcal{V}^*, \tilde{\mathcal{V}}^*$ соответствующие дуальные линейные пространства, базисными элементами которых являются линейные функционалы $\{e^i\} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$, $\{\tilde{e}^i\} : \tilde{\mathcal{V}} \rightarrow \mathbb{C}$. Для значений этих функционалов будем использовать формулы: $\langle e^i | e_j \rangle$ и $\langle \tilde{e}^i | \tilde{e}_j \rangle$. Для каждого отображения $L : \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$ можно определить единственное отображение $L^* \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}^* \rightarrow \mathcal{V}^*$, индуцированное равенствами

$$\langle \tilde{e}^i | L(e_j) \rangle = \langle L^*(\tilde{e}^i) | e_j \rangle. \quad (2.9)$$

Кроме того, для дуальных объектов существует линейная инъекция

$$\rho : \mathcal{V}^* \otimes \tilde{\mathcal{V}}^* \rightarrow (\mathcal{V} \otimes \tilde{\mathcal{V}})^*,$$

которая задается равенствами

$$\langle \rho(e^i \otimes \tilde{e}^j) | e_k \otimes \tilde{e}_l \rangle = \langle e^i | e_k \rangle \langle \tilde{e}^j | \tilde{e}_l \rangle.$$

Следствием этих фактов является то, что для каждой коалгебры (C, Δ, ε) можно определить алгебру $C^* = \mathcal{A}$ (как дуальный объект к C) с умножением $m = \Delta^*$ и единицей I , которые удовлетворяют соотношениям

$$\langle aa' | c \rangle = \langle a \otimes a' | \Delta(c) \rangle = \langle a | c_{(1)} \rangle \langle a' | c_{(2)} \rangle,$$

$$\langle I | c \rangle = \varepsilon(c), \quad \forall a, a' \in \mathcal{A}, \quad \forall c \in C.$$

Здесь мы использовали удобные обозначения Свидлера [11] для коумножения в C : $\Delta(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ (ср. с (2.6)). Знак суммы $\sum_c$ в формулах

обычно опускается.

Итак, дуальность в диаграммных определениях алгебр и коалгебр (замена стрелок на обратные), в частности, приводит к тому, что алгебры и коалгебры действительно дуальны друг к другу.

Естественно ожидать, что аналогичная дуальность прослеживается и для модулей и комодулей. Пусть $\mathcal{V}$ — левый комодуль для C . Тогда левое кодействие C на $\mathcal{V}$: $v \rightarrow \sum_v \bar{v}^{(1)} \otimes v^{(2)}$ ($\bar{v} \in C$) индуцирует правое действие

$\mathcal{A} = C^*$ на $\mathcal{V}$:

$$(v \otimes a) \xrightarrow{\Psi_R} v \triangleleft a = \langle a | \bar{v}^{(1)} \rangle v^{(2)}$$

(знак суммы $\sum_v$ здесь и в дальнейшем мы опускаем) и, следовательно,

$\mathcal{V}$ является правым модулем для $\mathcal{A}$. И наоборот, правое кодействие C на $\mathcal{V}$: $v \rightarrow v^{(1)} \otimes \bar{v}^{(2)}$ индуцирует левое действие $\mathcal{A} = C^*$ на $\mathcal{V}$:

$$(a \otimes v) \xrightarrow{\Psi_L} a \triangleright v = v^{(1)} \langle a | \bar{v}^{(2)} \rangle.$$

Отсюда мы сразу же получаем, что коассоциативная коалгебра C (которая кодействует сама на себя посредством копроизведения) является естественным модулем для своей дуальной алгебры $\mathcal{A}$. Действительно, правое действие $C \otimes \mathcal{A} \rightarrow C$ задается равенствами

$$(c, a) \rightarrow c \triangleleft a = \langle a | c_{(1)} \rangle c_{(2)}, \quad (2.10)$$

в то время как для левого действия $\mathcal{A} \otimes C \rightarrow C$ мы имеем

$$(a, c) \rightarrow a \triangleright c = c_{(1)} \langle a | c_{(2)} \rangle. \quad (2.11)$$

Здесь $a \in \mathcal{A}$, $c \in C$. Модульные аксиомы (изображенные в виде диаграмм на рис.3) выполняются в силу коассоциативности C .

Наконец заметим, что действие некоторой алгебры H на C слева (справа) индуцирует действие H на $A = C^*$ справа (слева). Это очевидно следует из соотношений типа (2.9).

Следующими важными объектами, которые используются в теории квантовых групп, являются так называемые биалгебры.

Определение 2. Ассоциативная алгебра с единичным элементом, являющаяся одновременно еще и коассоциативной коалгеброй с коединицей, называется биалгеброй, если алгебраическая и коалгебраическая структуры самосогласованы. А именно: коумножение и коединица должны быть гомоморфизмами алгебры

$$\Delta(e_i) \Delta(e_j) = \Delta(e_i e_j) = m_{ij}^k \Delta(e_k) \Rightarrow \Delta_i^{i' i''} \Delta_j^{j' j''} m_{i' j'}^{k'} m_{i'' j''}^{k''} = m_{ij}^k \Delta_k^{k' k''},$$

$$\Delta(I) = I \otimes I, \quad \varepsilon(e_i e_j) = \varepsilon(e_i) \varepsilon(e_j), \quad \varepsilon(I) = 1. \quad (2.12)$$

Заметим, что для каждой биалгебры мы имеем некоторую свободу в определениях умножения (2.1) и коумножения (2.6). Действительно, все аксиомы (2.3), (2.7) и (2.12) выполняются, если мы вместо (2.1) возьмем

$$e_i e_j = m_{ji}^k e_k,$$

или вместо (2.6) выберем

$$\Delta'(e_i) = \Delta_i^{jk} e_k \otimes e_j, \quad (2.13)$$

при этом если $m_{ij}^k \neq m_{ji}^k$, то алгебра называется некоммутативной, а если $\Delta_k^{ij} \neq \Delta_k^{ji}$, то некокоммутативной.

В квантовой физике обычно подразумевают, что все алгебры наблюдаемых являются биалгебрами. Действительно, коалгебраическая структура необходима для определения действия алгебры наблюдаемых на состояние $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ системы, являющейся композицией двух независимых систем с волновыми функциями $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$. Другими словами, только для биалгебр возможно построение теории представлений, в которой новые представления можно получать путем перемножения старых.

Классическим примером биалгебры является универсальная обертывающая алгебры Ли, и, в частности, алгебра спинов в трехмерном пространстве. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим алгебру Ли g с генераторами J_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющими структурным соотношениям

$$J_\alpha J_\beta - J_\beta J_\alpha = t_{\alpha\beta}^\gamma J_\gamma.$$

Здесь $t_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы. Обертывающей этой алгебры является алгебра U_g с базисными элементами: единичным элементом I и элемен-

тами $e_i = J_{\alpha_1} \dots J_{\alpha_n} \forall n \geq 1$, где произведения генераторов J лексикографически упорядочены, т.е. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$. Коалгебраическая структура для алгебры U_g задается с помощью отображений

$$\Delta(J_\alpha) = J_\alpha \otimes I + I \otimes J_\alpha, \quad \varepsilon(J_\alpha) = 0, \quad \varepsilon(I) = 1, \quad (2.14)$$

которые удовлетворяют всем аксиомам биалгебры. Отображение Δ в (2.14) есть не что иное, как правило сложения спинов.

Рассматривая экспоненты от элементов алгебры Ли, можно прийти к определению групповой биалгебры группы G со структурными отображениями:

$$\Delta(h) = h \otimes h, \quad \varepsilon(h) = 1 \quad (\forall h \in G), \quad (2.15)$$

которые очевидно вытекают из (2.14). Следующим важным примером биалгебры является алгебра $\mathcal{A}(G)$ функций на группе ($f: G \rightarrow \mathbb{C}$). Эта алгебра является дуальной к групповой алгебре группы G , и ее структурные отображения имеют вид ($f, f' \in \mathcal{A}(G)$; $h, h' \in G$):

$$(ff')(h) = f(h)f'(h), \quad (\Delta(f))(h, h') = f(hh'), \quad \varepsilon(f) = f(I_G),$$

где I_G — единичный элемент в группе G . В частности, если функции T_j^i реализуют матричное представление группы G (функции T_j^i можно рассматривать как образующие в алгебре $\mathcal{A}(G)$), то мы имеем

$$T_j^i(hh') = T_k^i(h) T_j^k(h') \Rightarrow \Delta(T_j^i) = T_k^i \otimes T_j^k.$$

Заметим, что, если g — неабелева, то U_g и G являются некоммутативными, но кокоммутативными биалгебрами, в то время как $\mathcal{A}(G)$ является коммутативной, но некокоммутативной биалгеброй. Забегая вперед, скажем, что наиболее интересные квантовые группы связаны с некоммутативными и некокоммутативными биалгебрами.

Очевидно, что для биалгебры $\mathcal{H}$ также можно ввести понятия левых (ко)модулей и (ко)модульных (ко)алгебр (правые (ко)модули и (ко)модульные (ко)алгебры вводятся абсолютно параллельно). Более того, для биалгебры $\mathcal{H}$ можно ввести понятие левого (правого) бимодуля B , т.е. левого (правого) $\mathcal{H}$ -модуля, который является одновременно и левым (правым) $\mathcal{H}$ -комодулем, причем модульная и комодульная структуры должны быть самосогласованы:

$$\Delta_L(\mathcal{H} \triangleright B) = \Delta(\mathcal{H}) \triangleright \Delta_L(B),$$

$$(\varepsilon \otimes id) \Delta_L(b) = b, \quad b \in B.$$

С другой стороны, в случае биалгебр условия сохранения (ко)алгебраической структуры (ко)модулей могут быть представлены в более явной фор-

ме. Например, для левой $\mathcal{H}$ -модульной алгебры $\mathcal{A}$ мы имеем ($a, b \in \mathcal{A}$; $h \in \mathcal{H}$):

$$h \triangleright (ab) = (h_{(1)} \triangleright a) (h_{(2)} \triangleright b), \quad h \triangleright I_{\mathcal{A}} = \varepsilon(h) I_{\mathcal{A}}.$$

Кроме того, для левой $\mathcal{H}$ -модульной коалгебры $\mathcal{A}$ должны выполняться соотношения:

$$\Delta(h \triangleright a) = \Delta(h) \triangleright \Delta(a) = h_{(1)} \triangleright a_{(1)} \otimes h_{(2)} \triangleright a_{(2)}, \quad \varepsilon(h \triangleright a) = \varepsilon(h) \varepsilon(a).$$

Аналогично алгебра $\mathcal{A}$ является левой $\mathcal{H}$ -комодульной алгеброй, если

$$\Delta_L(ab) = \Delta_L(a) \Delta_L(b), \quad \Delta_L(I_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{H}} \otimes I_{\mathcal{A}},$$

и, наконец, коалгебра $\mathcal{A}$ является левой $\mathcal{H}$ -комодульной коалгеброй, если

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta) \Delta_L(a) &= m_{\mathcal{H}}(\Delta_L \otimes \Delta_L) \Delta(a), \\ (id \otimes \varepsilon_{\mathcal{A}}) \Delta_L(a) &= I_{\mathcal{H}} \varepsilon_{\mathcal{A}}(a), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$m_{\mathcal{H}}(\Delta_L \otimes \Delta_L)(a \otimes b) = \bar{a}^{(1)} \bar{b}^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes b^{(2)}.$$

Рассмотрим теперь биалгебру $\mathcal{H}$, которая действует на некоторую модульную алгебру $\mathcal{A}$. Еще одним важным свойством биалгебр является то, что мы можем определить новую ассоциативную алгебру $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$ как кросс-произведение (smash product) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$. А именно:

- 1) как векторное пространство $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$ совпадает с $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$;
- 2) произведение определяется в виде:

$$(a \# g)(b \# h) = \sum_g a(g_{(1)} \triangleright b) \# (g_{(2)} h) \equiv (a \# I) (\Delta(g) \triangleright (b \# h)); \quad (2.17)$$

- 3) единичный элемент совпадает с $I \# I$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ является биалгеброй, дуальной к биалгебре $\mathcal{H}$, то формулы (2.17) и (2.11) определяют правила перестановки элементов ($I \# g$) и ($a \# I$):

$$(I \# g)(a \# I) = (a_{(1)} \# I) \langle g_{(1)} \mid a_{(2)} \rangle (I \# g_{(2)}). \quad (2.18)$$

Таким образом, подалгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ в $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$ не коммутируют друг с другом. Кросс-произведение зависит от того, какое действие алгебры $\mathcal{H}$ на $\mathcal{A}$ мы выберем. Кроме того, кросс-произведение обобщает понятие полупрямого произведения. В частности, если мы возьмем в качестве биалгебры $\mathcal{H}$ групповую алгебру Лоренца (см. (2.15)), а в качестве модуля $\mathcal{A}$ — группу трансляций в пространстве Минковского, то кросс-произведение $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$ определяет структуру группы Пуанкаре.

Коаналог кросс-произведения — кросс-копроизведение $\mathcal{A} \# \mathcal{H}$ также может быть определено. Рассмотрим для этого биалгебру $\mathcal{H}$ и ее комодуль-

ную коалгебру $\mathcal{A}$. Тогда на пространстве $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ можно определить структуру коассоциативной коалгебры:

$$\Delta(a \# h) = (a_{(1)} \# \bar{a}_{(2)}^{(1)} h_{(1)}) \otimes (a_{(2)}^{(2)} \# h_{(2)}),$$

$$\varepsilon(a \# h) = \varepsilon(a) \varepsilon(h). \quad (2.19)$$

Доказательство коассоциативности сводится к проверке тождества

$$(m_{\mathcal{H}}(\Delta_L \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \otimes id)(id \otimes \Delta_L) \Delta_{\mathcal{A}}(a) = (id \otimes id \otimes \Delta_L)(id \otimes \Delta_{\mathcal{A}}) \Delta_L(a),$$

которое выполняется с учетом аксиомы (2.16) и комодульной аксиомы

$$(id \otimes \Delta_L) \Delta_L(a) = (\Delta_{\mathcal{H}} \otimes id) \Delta_L(a). \quad (2.20)$$

Заметим, что из двух биалгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$, специальным образом действующих и кодействующих друг на друга, можно организовать новую биалгебру, которая одновременно является кросс-произведением и кросс-копроизведением $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$ (бикросс-произведением; см. [14]).

Теперь мы введем основное понятие в теории квантовых групп, а именно понятие алгебры Хопфа.

Определение 3. Биалгебра $\mathcal{A}$, снабженная дополнительным отображением $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, таким, что

$$m(S \otimes id) \Delta = m(id \otimes S) \Delta = i \cdot \varepsilon, \quad (2.21)$$

называется алгеброй Хопфа (AX). Отображение S называется антиподом и является антигомоморфизмом по отношению как к умножению, так и к коумножению

$$S(ab) = S(b) S(a), \quad (S \otimes S) \Delta(a) = \sigma \Delta(S(a)), \quad (2.22)$$

где $a, b \in \mathcal{A}$, и σ обозначает оператор перестановки $\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$. Если мы положим

$$S(e_i) = S_i^j e_j, \quad (2.23)$$

то аксиома (2.21) переписывается в виде

$$\Delta_k^{ij} S_i^n m_{nj}^l = \Delta_k^{ij} S_j^n m_{in}^l = \varepsilon_k E^l. \quad (2.24)$$

Из аксиом для структурных отображений AX можно получить полезные равенства:

$$S_j^i \varepsilon_i = \varepsilon_j, \quad S_j^i E^j = E^i,$$

$$\Delta_k^{ji} (S^{-1})_i^n m_{nj}^l = \Delta_k^{ji} (S^{-1})_j^n m_{in}^l = \varepsilon_k E^l, \quad (2.25)$$

которые мы будем использовать в дальнейшем. Отметим, что, вообще говоря, антипод S не обязательно обратим. Обратимый антипод называется биективным.

Примерами кокоммутативных АХ опять могут служить универсальная обертывающая алгебра U_g и групповая биалгебра группы G , рассмотренные выше. Примером коммутативной АХ служит биалгебра $\mathcal{A}(G)$, также рассмотренная выше. Антиподы для этих алгебр выглядят следующим образом:

$$U_g : S(J_\alpha) = -J_\alpha, \quad S(I) = I,$$

$$G : S(h) = h^{-1},$$

$$\mathcal{A}(G) : S(f)(h) = f(h^{-1}),$$

и удовлетворяют соотношению $S^2 = id$, справедливому для всех коммутативных или кокоммутативных АХ.

С точки зрения аксиомы (2.21) $S(a)$ выглядит как обратный элемент к a , хотя в общем случае $S^2 \neq id$. Напомним, что если множество элементов $\mathcal{G}$ с ассоциативным умножением $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ и с единицей (полугруппа) содержит и все обратные элементы, то такое множество $\mathcal{G}$ становится группой. Таким образом, с точки зрения наличия отображения S , АХ является обобщением групповой алгебры (для которой $S(h) = h^{-1}$), хотя сама по себе, очевидно, групповой алгеброй может и не быть. Согласно определению Дринфельда [13], понятия АХ и квантовой группы являются эквивалентными. Конечно, наиболее интересные примеры квантовых групп возникают при рассмотрении некоммутативных и некокоммутативных АХ.

Рассмотрим некокоммутативную АХ $\mathcal{A}$, для которой $\Delta \neq \Delta'$.

Определение 4. АХ $\mathcal{A}$, для которой существует обратимый элемент $R \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ такой, что $\forall a \in \mathcal{A}$ выполняются уравнения

$$\Delta'(a) = R\Delta(a)R^{-1}, \quad (2.26)$$

$$(\Delta \otimes id)(R) = R_{13}R_{23}, \quad (id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} \quad (2.27)$$

называется квазитреугольной. Здесь элемент

$$R = \sum_{ij} R^{(ij)} e_i \otimes e_j \quad (2.28)$$

называется универсальной R -матрицей, а символы $R_{12}, \dots$ имеют следующий смысл:

$$R_{12} = \sum_{ij} R^{(ij)} e_i \otimes e_j \otimes I, \quad R_{13} = \sum_{ij} R^{(ij)} e_i \otimes I \otimes e_j,$$

$$R_{23} = \sum_{ij} R^{(ij)} I \otimes e_i \otimes e_j.$$

Соотношение (2.26) показывает, что некокоммутативность в квазитреугольной АХ (КАХ) держится «под контролем». Можно показать, что для КАХ универсальная R -матрица (2.28) удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned}(S \otimes id) R &= R^{-1}, & (id \otimes S) R^{-1} &= R, \\ (id \otimes \varepsilon) R &= (\varepsilon \otimes id) R = I,\end{aligned}\quad (2.29)$$

кроме того, для нее выполняется УЯБ:

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}, \quad (2.30)$$

которому будет посвящена значительная часть обзора. Доказательство уравнения (2.30) сводится к расписыванию выражения $(id \otimes \Delta')(R)$ двумя различными способами:

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta')(R) &= R^{ij} e_i \otimes R \Delta(e_j) R^{-1} = \\ &= R_{23} (id \otimes \Delta)(R) R_{23}^{-1} = R_{23} R_{13} R_{12} R_{23}^{-1}.\end{aligned}\quad (2.31)$$

С другой стороны, мы имеем

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta')(R) &= (id \otimes \sigma)(id \otimes \Delta)(R) = \\ &= (id \otimes \sigma) R_{13} R_{12} = R_{12} R_{13},\end{aligned}\quad (2.32)$$

где σ обозначает оператор перестановки. Сравнивая (2.31) и (2.32), легко получить (2.30).

Следующим важным понятием, которое понадобится нам в дальнейшем, является понятие дуальной АХ $\mathcal{A}^*$ к АХ $\mathcal{A}$. Выберем в $\mathcal{A}^*$ базисные элементы $\{e^i\}$ и определим умножение, единицу, коумножение, коединицу и антипод для $\mathcal{A}^*$ в виде

$$\begin{aligned}e^i e^j &= m_k^{ij} e^k, & I &= \bar{E}_i e^i, & \Delta(e^i) &= \Delta_{jk}^i e^j \otimes e^k, \\ \varepsilon(e^i) &= \bar{E}^i, & S(e^i) &= \bar{S}_j^i e^j.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Определение 5. Две АХ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ с соответствующими базисами $\{e_i\}$ и $\{e^i\}$ называются дуальными друг к другу, если существует невырожденное спаривание $\langle ., . \rangle : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что

$$\begin{aligned}\langle e^i e^j | e_k \rangle &\equiv \langle e^i \otimes e^j | \Delta(e_k) \rangle = \langle e^i | e_{k'} \rangle \Delta_k^{k'k''} \langle e^j | e_{k''} \rangle, \\ \langle e^i | e_j e_k \rangle &\equiv \langle \Delta(e^i) | e_j \otimes e_k \rangle = \langle e^i | e_j \rangle \Delta_{i'i''}^i \langle e^{i''} | e_k \rangle, \\ \langle S(e^i) | e_j \rangle &= \langle e^i | S(e_j) \rangle, & \langle e^i | I \rangle &= \varepsilon(e^i), & \langle I | e_i \rangle &= \varepsilon(e_i).\end{aligned}\quad (2.34)$$

В силу невырожденности спаривания $\langle ., . \rangle$ (2.34) мы всегда можем выбрать базисные элементы $\{e^i\}$ так, что

$$\langle e^i | e_j \rangle = \delta_j^i. \quad (2.35)$$

Тогда из аксиом для спаривания (2.34) и из определений структурных операций в АХ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ (2.1), (2.23), (2.33) легко выводятся равенства

$$m_k^{ij} = \Delta_k^{ij}, \quad m_{ij}^k = \Delta_{ij}^k, \quad \bar{S}_j^i = S_j^i, \quad \bar{E}^i = E^i, \quad \bar{E}_i = \varepsilon_i. \quad (2.36)$$

Таким образом, умножение, единица, коумножение, коединица и антипод в АХ определяют соответственно коумножение, коединицу, умножение, единицу и антипод в дуальной АХ.

Обозначим $\mathcal{A}^o$ алгебру $\mathcal{A}^*$ с противоположным коумножением: $\Delta(e^i) = m_{kj}^i e^j \otimes e^k$. При этом из формул (2.25) следует, что антиподом для $\mathcal{A}^o$ будет являться не S , а косой антипод S^{-1} . Структурные отображения для $\mathcal{A}^o$ имеют вид

$$e^i e^j = \Delta_k^{ij} e^k, \quad \Delta(e^i) = m_{kj}^i e^j \otimes e^k, \quad S(e^i) = (S^{-1})_j^i e^j. \quad (2.37)$$

Алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^o$ называются антидуальными, и для них можно ввести антидуальное спаривание $\langle\langle \cdot | \cdot \rangle\rangle : \mathcal{A}^o \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, которое удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \langle\langle e^i e^j | e_k \rangle\rangle &\equiv \langle\langle e^i \otimes e^j | \Delta(e_k) \rangle\rangle = \Delta_k^{ij}, \\ \langle\langle e^i | e_k e_j \rangle\rangle &\equiv \langle\langle \Delta(e^i) | e_j \otimes e_k \rangle\rangle = m_{kj}^i, \\ \langle\langle S(e^i) | e_j \rangle\rangle &= \langle\langle e^i | S^{-1}(e_j) \rangle\rangle = (S^{-1})_j^i, \\ \langle\langle e^i | S(e_j) \rangle\rangle &= \langle\langle S^{-1}(e^i) | e_j \rangle\rangle = S_j^i, \\ \langle\langle e^i | I \rangle\rangle &= E^i, \quad \langle\langle I | e_i \rangle\rangle = \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (2.38)$$

В.Г.Дринфельд показал [13], что существует КАХ $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, которая является специальным кросс-произведением АХ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^o$: $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}^o$ и называется квантовым дублем. Причем универсальная R -матрица выражается в виде

$$R = (e_i \bowtie I) \otimes (I \bowtie e^i), \quad (2.39)$$

а умножение в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ задается по формуле (знаки сумм опущены):

$$(a \bowtie \alpha) (b \bowtie \beta) = a((\alpha_{(3)} \triangleright b) \triangleleft S(\alpha_{(1)})) \bowtie \alpha_{(2)} \beta, \quad (2.40)$$

где $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^o$; $a, b \in \mathcal{A}$; $\Delta^2(\alpha) = \alpha_{(1)} \otimes \alpha_{(2)} \otimes \alpha_{(3)}$ и

$$\alpha \triangleright b = b_{(1)} \langle\langle \alpha | b_{(2)} \rangle\rangle, \quad b \triangleleft \alpha = \langle\langle \alpha | b_{(1)} \rangle\rangle b_{(2)}. \quad (2.41)$$

Коалгебраическая структура на квантовом дубле определяется прямым произведением коалгебраических структур на АХ $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^o$:

$$\Delta(e_i \bowtie e^j) = \Delta(e_i \bowtie I) \Delta(I \bowtie e^j) = \Delta_i^{nk} m_{lp}^j (e_n \bowtie e^p) \otimes (e_k \bowtie e^l). \quad (2.42)$$

Наконец, антипод и коединица для $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ имеют вид

$$S(a \bowtie \alpha) = S(a) \bowtie S(\alpha), \quad \varepsilon(a \bowtie \alpha) = \varepsilon(a) \varepsilon(\alpha). \quad (2.43)$$

Проверка всех аксиом АХ для $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ проводится прямым вычислением. Простое доказательство ассоциативности умножения (2.40) и коассоциативности коумножения (2.42) можно найти в [15].

Учитывая (2.41), формулу (2.40) можно переписать как коммутатор для элементов $(I \bowtie \alpha)$ и $(b \bowtie I)$:

$$(I \bowtie \alpha) (b \bowtie I) = \langle\langle S(\alpha_{(1)}) \mid b_{(1)} \rangle\rangle (b_{(2)} \bowtie I) (I \bowtie \alpha_{(2)}) \langle\langle \alpha_{(3)} \mid b_{(3)} \rangle\rangle,$$

или в терминах базисных элементов $\alpha = e^t$ и $b = e_s$ имеем [13]:

$$\begin{aligned} (I \bowtie e^t) (e_s \bowtie I) &= m_{klp}^t \Delta_s^{nj} (S^{-1})_n^p (e_j \bowtie I) (I \bowtie e^l) \equiv \\ &\equiv (m_{ip}^t (S^{-1})_n^p \Delta_s^{nr}) (m_{kl}^i \Delta_r^{jk}) (e_j \bowtie I) (I \bowtie e^l), \end{aligned} \quad (2.44)$$

где m_{klp}^t и Δ_s^{nj} определяются в (2.3) и (2.7), а $(S^{-1})_n^p$ — матрица косого антипода. Из равенств (2.3), (2.7) и из тождеств для косого антипода (2.25) следует соотношение

$$(m_{ik}^q \Delta_m^{ks}) (m_{ip}^t (S^{-1})_n^p \Delta_s^{nr}) = \delta_i^q \delta_m^r, \quad (2.45)$$

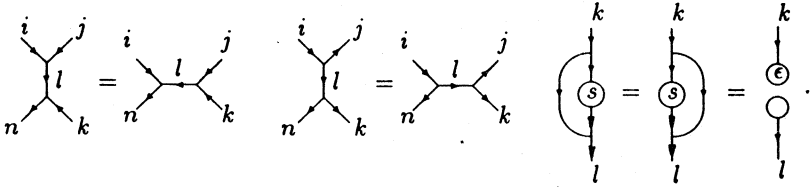
которое позволяет переписать (2.44) в виде

$$(m_{ik}^q \Delta_m^{ks}) (I \bowtie e^t) (e_s \bowtie I) = (m_{kl}^q \Delta_m^{jk}) (e_j \bowtie I) (I \bowtie e^l).$$

Это равенство эквивалентно тому, что R (2.39) удовлетворяет аксиоме (2.26). Соотношения (2.27) для R (2.39) проверяются элементарно. Таким образом, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ действительно является КАХ с универсальной R -матрицей, представленной формулой (2.39).

В заключение отметим, что многие соотношения для структурных констант АХ (например, соотношение (2.45)) могут быть получены и наглядно записаны с помощью следующей диаграммной техники:

Например, аксиомы ассоциативности (2.3), коассоциативности (2.7) и аксиомы для антипода (2.24) представимы в виде



Сделаем два важных замечания, касающихся дальнейшего развития теории алгебр Хопфа.

Замечание 1. Рассмотрим квазитреугольную АХ (КАХ) (A, Δ, R) , для которой можно определить элемент

$$F = F^{ij} e_i \otimes e_j \in A \otimes A,$$

удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id) F &= F_{13} F_{23}, & (id \otimes \Delta) F &= F_{13} F_{12}, \\ F_{12} F_{13} F_{23} &= F_{23} F_{13} F_{12}, & F_{12} F_{21} &= I \otimes I. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Определим

$$\Delta^{(F)}(a) = F \Delta(a) F^{-1}, \quad R^{(F)} = F_{21} R F_{12}^{-1}, \quad U = m(id \otimes S) F.$$

Теорема ([16]). $(A, \Delta^{(F)}, R^{(F)})$ является КАХ с антиподом и ко-единицей:

$$S^{(F)}(a) = US(a)U^{-1}, \quad \epsilon^{(F)}(a) = \epsilon(a).$$

Новая КАХ $(A, \Delta^{(F)}, R^{(F)})$ называется скрученной (twisted) КАХ.

Замечание 2. Можно ввести деформацию АХ, называемую квазихопфовой алгеброй [17], которая определяется как ассоциативная алгебра A с единицей, с гомоморфизмом $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, гомоморфизмом $\epsilon : A \rightarrow \mathbb{C}$, с антиавтоморфизмом $S : A \rightarrow A$ и обратимым элементом $\Phi \in A \otimes A \otimes A$. Причем для Φ и S для выполнены следующие аксиомы:

$$(id \otimes \Delta) \Delta(a) = \Phi \cdot (\Delta \otimes id) \Delta(a) \cdot \Phi^{-1}, \quad a \in A, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} (id \otimes id \otimes \Delta) (\Phi) \cdot (\Delta \otimes id \otimes id) (\Phi) &= \\ = (I \otimes \Phi) \cdot (id \otimes \Delta \otimes id) (\Phi) \cdot (\Phi \otimes I), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes id) \Delta &= id = (id \otimes \epsilon) \Delta, & (id \otimes \epsilon \otimes id) \Phi &= I \otimes I, \\ S(a_{(1)}) b a_{(2)} &= \epsilon(a) b, & a_{(1)} c S(a_{(2)}) &= \epsilon(a) c, \\ \Phi_{(1)} c S(\Phi_{(2)}) b \Phi_{(3)} &= I, & S(\bar{\Phi}_{(1)}) b \bar{\Phi}_{(2)} c S(\bar{\Phi}_{(3)}) &= I, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где b, c — некоторые фиксированные элементы из A , $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ и

$$\Phi = \phi_{(1)} \otimes \phi_{(2)} \otimes \phi_{(3)}, \quad \Phi^{-1} = \bar{\phi}_{(1)} \otimes \bar{\phi}_{(2)} \otimes \bar{\phi}_{(3)}.$$

Таким образом, квазихопфова алгебра отличается от обычной АХ тем, что аксиома коассоциативности заменяется более слабым условием (2.47). Другими словами, квазихопфова алгебра некоассоциативна, однако эта некоассоциативность держится под контролем с помощью элемента Φ . В работах [17] представлен явный пример квазихопфовой алгебры, связанный с решениями уравнения Книжника — Замолодчикова. С другой стороны, естественно предположить, что в силу возникновения пентагонального соотношения (2.48) для элемента Φ квазихопфовы алгебры связаны с многомерными обобщениями уравнений Янга — Бакстера.

3. КВАНТОВАНИЕ ГРУПП ЛИ И УРАВНЕНИЯ ЯНГА — БАКСТЕРА

В данном разделе обсуждается R -матричный подход к теории квантовых групп [10], на основе которого проведено квантование классических групп Ли, а также некоторых супергрупп Ли. Мы представим тригонометрические решения уравнения Янга — Бакстера (УЯБ), инвариантные относительно присоединенного действия квантовых групп $GL_q(N)$, $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. Кратко обсуждаются соответствующие янгианские (рациональные) решения, а также $Z_N \otimes Z_N$ симметричные эллиптические решения УЯБ.

3.1. RTT-алгебры. Мы будем рассматривать алгебру $\mathcal{A}$, генераторами которой являются единичный элемент 1 и элементы $N \times N$ -матрицы $T = \|T_j^i\|$, $i, j = 1, \dots, N$, удовлетворяющие следующим квадратичным RTT-соотношениям :

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} T_{k_1}^{j_1} T_{k_2}^{j_2} = T_{j_2}^{i_2} T_{j_1}^{i_1} R_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \Leftrightarrow R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12} \Leftrightarrow \mathbf{RTT}' = \mathbf{TT}'\mathbf{R}. \quad (3.1.1)$$

Здесь индексы 1, 2 обозначают номера матричных пространств; $\mathbf{T} \equiv T_1 \equiv T \otimes I$, $\mathbf{T}' \equiv T_2 \equiv I \otimes T$; I обозначает $N \times N$ -единичную матрицу; $\mathbf{R} \equiv R_{12} \equiv P_{12} R_{12} \in \text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$ — числовая обратимая матрица и $P_{12} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2}$ — матрица перестановок. Мы будем предполагать, что R_{12} является блочной нижнетреугольной матрицей и удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера:

$$\begin{aligned} R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} R_{k_1 j_3}^{j_1 i_3} R_{k_2 k_3}^{j_2 i_3} &= R_{j_2 j_3}^{i_2 i_3} R_{j_1 k_3}^{i_1 i_3} R_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \Rightarrow R_{12} R_{13} R_{23} = \\ &= R_{23} R_{13} R_{12} \Leftrightarrow R_{12} R_{31}^{-1} R_{32}^{-1} = R_{32}^{-1} R_{31}^{-1} R_{12}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

или в кратких обозначениях:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{R}'\mathbf{R}\mathbf{R}', \quad (3.1.3)$$

где $\mathbf{R}' \equiv \hat{R}_{23} \equiv P_{23} R_{23}$, а индексы 1, 2, 3 обозначают номера матричных пространств, в которых соответствующие R -матрицы действуют нетривиально. Заметим, что прямым следствием (3.1.3) являются равенства

$$\mathbf{X}(\mathbf{R})\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{R}'\mathbf{R}\mathbf{X}(\mathbf{R}'), \quad \mathbf{R}\mathbf{R}'\mathbf{X}(\mathbf{R}) = \mathbf{X}(\mathbf{R}')\mathbf{R}\mathbf{R}', \quad (3.1.4)$$

которые позволяют пронести произвольную функцию $X(\mathbf{R})$ через операторы $\mathbf{R}\mathbf{R}'$ и $\mathbf{R}'\mathbf{R}$. Условие (3.1.2) и (3.1.3) является достаточным для того, чтобы на мономы третьей степени по T не возникали дополнительные к (3.1.1) соотношения. Мы будем рассматривать случай, когда R -матрица зависит от числового параметра $q = \exp(h)$, который называется параметром деформации.

Пусть алгебра $\mathcal{A}$ расширена так, что она содержит и все элементы $(T^{-1})_j^i$:

$$(T^{-1})_k^i T_j^k = T_k^i (T^{-1})_j^k = \delta_j^i \cdot 1.$$

Тогда $\mathcal{A}$ становится $\mathbf{A}\mathbf{X}$ со структурными отображениями:

$$\Delta(T_k^i) = T_j^i \otimes T_k^j, \quad \varepsilon(T_j^i) = \delta_j^i, \quad S(T_j^i) = (T^{-1})_j^i, \quad (3.1.5)$$

которые, как легко проверить, удовлетворяют следующим аксиомам (см. предыдущий раздел):

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta) \Delta(T_j^i) &= (\Delta \otimes id) \Delta(T_j^i), \\ (\varepsilon \otimes id) \Delta(T_j^i) &= (id \otimes \varepsilon) \Delta(T_j^i) = T_j^i, \\ m(S \otimes id) \Delta(T_j^i) &= m(id \otimes S) \Delta(T_j^i) = \varepsilon(T_j^i) \cdot 1. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Антипод S не является инволютивной операцией, т.к. вместо $S^2 = id$ мы имеем равенство

$$S^2(T_j^i) = D_k^i T_l^k (D^{-1})_j^l \quad (3.1.7)$$

(мы докажем это равенство и определим числовую матрицу D чуть ниже), которое можно переписать в виде

$$D_l^j T_k^l S(T_j^i) = D_k^i. \quad (3.1.8)$$

Соотношения (3.1.7) и (3.1.8) можно интерпретировать как правила перестановки операций взятия обратной матрицы и транспонирования (t):

$$D^t (T^{-1})^t = (T^{-1})^t D^t.$$

Из RTT -соотношений (3.1.1) следует, что числовая матрица D , с точностью до константы c , задается равенствами

$$\frac{1}{c} D_j^i = \tilde{R}_{jk}^{ki} = \text{Tr}_{(2)}(P_{12} \tilde{R}_{12}), \quad \tilde{R}_{12} = ((R_{12}^{t_1})^{-1})^{t_1}, \quad (3.1.9)$$

где t_1 обозначает операцию транспонирования в первом матричном пространстве, $\text{Tr}_{(2)}$ — след по второму матричному пространству, и мы считаем, что матрица $R_{12}^{t_1}$ обратима. Действительно, соотношения (3.1.1) можно переписать в виде

$$(T^{-1})_{j_2}^{i_2} T_{j_1}^{i_1} = [R_{12}^{t_1} T_1^{t_1} T_2^{-1} (R_{12}^{t_1})^{-1}]_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}.$$

Положим в этом равенстве $j_2 = i_1$, просуммируем по i_1 и результат умножим слева на $(R_{12}^{t_1})^{-1}$. После этого, вводя матрицу D (3.1.9), мы приходим к соотношениям (3.1.8). Заметим также, что, согласно определению (3.1.9), для матрицы D можно получить равенства:

$$\frac{1}{c} \text{Tr}_{(2)}(RD_2)_{j_1}^{i_1} = (R_{12})_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \tilde{R}_{i_2 k}^{k j_2} \equiv \delta_{j_1}^{i_1}, \quad (3.1.10)$$

кроме того, для матрицы D всегда существует обратная матрица D^{-1} , и из УЯБ следует, что $cD^{-1} = \text{Tr}_{(2)}(P_{12} \tilde{R}_{12}^{-1})$ [18,15].

Матрица D_j^i (3.1.9), удовлетворяющая условиям (3.1.7) и (3.1.8), определяет квантовый след [10,18]. Для того чтобы объяснить понятие квантового следа, рассмотрим N^2 -мерный присоединенный $\mathcal{A}$ -комодуль E . Мы представим его базисные элементы в виде $N \times N$ -матрицы $E = \|E_j^i\|$, $i, j = 1, \dots, N$. Присоединенное кодействие есть

$$E_j^i \rightarrow T_i^i S(T_j^{j'}) \otimes E_j^{j'}, \equiv (TET^{-1})_j^i, \quad (3.1.11)$$

где в последней части формулы (3.1.11) мы ввели краткие обозначения, которые будем использовать в дальнейшем. Заметим, что имеется другой вариант присоединенного кодействия:

$$E_j^i \rightarrow E_j^{i'} \otimes S(T_i^{i'}) T_j^{j'} \equiv (T^{-1}ET)_j^i. \quad (3.1.12)$$

Ясно, что (3.1.11) является левым, а (3.1.12) — правым комодулями. И левый, и правый комодули E приводимы, и неприводимые подпространства в E могут быть выделены с помощью квантовых следов. Для случая (3.1.11) квантовый след имеет вид

$$\text{Tr}_q E \equiv \text{Tr}(DE) \equiv \sum_{i,j=1}^N D_j^i E_i^j \quad (3.1.13)$$

и удовлетворяет следующему свойству инвариантности, вытекающему из равенств (3.1.7), (3.1.8):

$$\mathrm{Tr}_q(TET^{-1}) = \mathrm{Tr}_q(E). \quad (3.1.14)$$

Для случая (3.1.12) определение квантового следа должно быть изменено:

$$\overline{\mathrm{Tr}}_q E \equiv \mathrm{Tr}(D^{-1}E) \equiv \sum_{i,j=1}^N (D^{-1})_j^i E_i^j, \quad \overline{\mathrm{Tr}}_q(T^{-1}ET) = \overline{\mathrm{Tr}}_q(E), \quad (3.1.15)$$

что также следует из (3.1.7), (3.1.8). Таким образом, $\mathrm{Tr}_q(E)$ и $\overline{\mathrm{Tr}}_q(E)$ являются, соответственно, скалярными частями комодулей E (3.1.11) и (3.1.12), в то время как q -бесследовая часть E формирует $(N^2 - 1)$ -мерные (приводимые в общем случае и неприводимые в случае линейных квантовых групп) A -присоединенные комодули.

Важным следствием определения квантового следа (3.1.14), (3.1.15) и RTT -соотношений (3.1.1) является следующий факт:

$$T_1^{-1} \mathrm{Tr}_{q_2}(f(\mathbf{R})) T_1 = \mathrm{Tr}_{q_2}(f(\mathbf{R})), \quad T_2 \overline{\mathrm{Tr}}_{q_1}(f(\mathbf{R})) T_2^{-1} = \overline{\mathrm{Tr}}_{q_1}(f(\mathbf{R}))$$

(здесь $f(\cdot)$ — произвольная функция и $\mathrm{Tr}_{q_1}, \mathrm{Tr}_{q_2}$ — квантовые следы по первому и второму пространству соответственно), который указывает на то, что матрицы $\mathrm{Tr}_{q_2}(f(\mathbf{R}))$ и $\overline{\mathrm{Tr}}_{q_1}(f(\mathbf{R}))$ должны быть пропорциональны единичным матрицам, в случае если R -матрица действует в неприводимом представлении квантовой группы. В частности, мы должны иметь

$$\mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^{\pm 1}) = c_{\pm} I_{(1)}, \quad \overline{\mathrm{Tr}}_{q_1}(\mathbf{R}^{\pm 1}) = \bar{c}_{\pm} I_{(2)}, \quad (3.1.16)$$

где $c_{\pm}, \bar{c}_{\pm}$ — некоторые константы, связанные соотношениями $c_+ \bar{c}_- = c_- \bar{c}_+$, а $I_{(k)}$ — единичная матрица в k -м пространстве. Заметим, что прямым следствием (3.1.10) является равенство

$$\mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}) = c I_{(1)}, \quad (3.1.17)$$

которое выполняется для любого невырожденного представления R -матрицы. Как мы увидим ниже, для квантовых групп классических серий факт (3.1.16) действительно имеет место. В дальнейшем мы будем стараться ограничиваться рассмотрением либо левых, либо правых присоединенных комодулей с квантовыми следами (3.1.13) и (3.1.15). Аналогичные формулы для, соответственно, правых или левых комодулей рассматриваются абсолютно параллельно.

Из сравнения соотношений (3.1.1) и (3.1.2) видно, что для генераторов T_j^i можно выбрать следующие конечномерные матричные представления:

$$(T_j^i)_l^k = R_{jl}^{ik} \equiv (R^{(+)}_j)^i_l, \quad (T_j^i)_l^k = (R^{-1})_{lj}^{ki} \equiv (R^{(-)}_j)^i_l. \quad (3.1.18)$$

Так как R -матрица удовлетворяет УЯБ, то существуют линейные функционалы $(L^\pm)_j^i$, осуществляющие гомоморфизмы (3.1.18), т.е. имеют место равенства

$$\langle L_2^+, T_1 \rangle = R_{12}, \quad \langle L_2^-, T_1 \rangle = R_{21}^{-1}, \quad (3.1.19)$$

или в общем (матричном) виде

$$\langle L^\pm, T_1, T_2 \dots T_k \rangle = R_1^{(\pm)} R_2^{(\pm)} \dots R_k^{(\pm)}.$$

Теперь УЯБ (3.1.2) можно воспроизвести из RTT -соотношений (3.1.1) путем усреднения их с L -операторами.

Из требования, чтобы $(L^\pm)_j^i$ образовывали алгебру, дуальную к алгебре A (определение дуальной алгебры дано во втором разделе), мы получаем следующие коммутационные соотношения для генераторов $L^{(\pm)}$:

$$RL^\pm L^\pm = L^\pm L^\pm R, \quad RL^+ L^- = L^- L^+ R. \quad (3.1.20)$$

Данная алгебра, очевидно, является АХ с коумножением, антиподом и ко-единицей:

$$\Delta(L^\pm)_j^i = (L^\pm)_k^i \otimes (L^\pm)_j^k, \quad S(L^\pm) = (L^\pm)^{-1}, \quad \varepsilon((L^\pm)_j^i) = \langle (L^\pm)_j^i, 1 \rangle = \delta_j^i,$$

где мы предположили обратимость матриц $L^\pm$. Как было показано в [10], для квантовых групп классических серий A_N, B_n, C_n, D_n (соответственно $SL_q(N), SO_q(2n+1), Sp_q(2n), SO_q(2n)$), соотношения (3.1.20) определяют квантовые алгебры Ли, где часть образующих $(L^\pm)_j^i$ играют роль квантового аналога базиса Картана — Вейля. Заметим, что алгебра (3.1.20) является ковариантной алгеброй относительно левых и правых копреобразований:

$$\begin{aligned} (L^\pm)_j^i &\rightarrow (T^{-1})_j^k \otimes (L^\pm)_k^i \equiv (L^\pm T^{-1})_j^i, \\ (L^\pm)_j^i &\rightarrow (L^\pm)_j^k \otimes (T^{-1})_k^i \equiv (T^{-1} L^\pm)_j^i. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Таким образом, матрицы $L_j^i = (S(L^-) L^+)_j^i$ и $\bar{L} = L^+ S(L^-)$ реализуют, соответственно, присоединенный левый и правый комодули (3.1.11), (3.1.12). Легко проверить, что коинварианты

$$C_M = \text{Tr}_q((L)^M) = \frac{c_-}{c_+} \overline{\text{Tr}}_q((\bar{L})^M) \quad (3.1.22)$$

являются центральными элементами для алгебры (3.1.20). Последнее равенство в (3.1.22) доказывается следующим образом:

$$C_M = \text{Tr}_q(S(L^-) (\bar{L})^M L^-) = \frac{1}{c_-} \overline{\text{Tr}}_{q1} \text{Tr}_{q2}(S(L^-) (\bar{L})^M \mathbf{R}^{-1} L^-) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{c_-} \overline{\text{Tr}}_{q1} \text{Tr}_{q2}(S(L^-) \mathbf{R}^{-1} L'^-(\bar{L})^M) = \\
 &= \frac{1}{c_-} \overline{\text{Tr}}_{q1} \text{Tr}_{q2}(L^- \mathbf{R}^{-1} S(L^-) (\bar{L})^M) = \frac{c_-}{c_-} \overline{\text{Tr}}_q((\bar{L})^M),
 \end{aligned}$$

где мы учли (3.1.16) и воспользовались равенствами (3.1.20), из которых, в частности, следуют соотношения

$$L^{\mp}(\bar{L})^M = \mathbf{R}^{\pm 1}(\bar{L}')^M \mathbf{R}^{\mp 1} L^{\mp}, \quad (L')^M L^{\pm} = L^{\pm} \mathbf{R}^{\pm 1} (L)^M \mathbf{R}^{\mp 1},$$

которые и демонстрируют центральность элементов (3.1.22).

Отметим также, что генераторы L_j^i и $\bar{L}_j^i$ удовлетворяют уравнениям отражения:

$$\mathbf{R} L \mathbf{R} L = L \mathbf{R} L \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} \bar{L}' \mathbf{R} \bar{L}' = \bar{L}' \mathbf{R} \bar{L}' \mathbf{R}. \quad (3.1.23)$$

Первая алгебра из (3.1.23) (аналогично и вторая алгебра) распадается в прямую сумму двух подалгебр, а именно на абелеву алгебру с генератором $C_1 = \text{Tr}_q(L)$ и алгебру с $(N^2 - 1)$ бесшпуровыми генераторами:

$$\lambda \tilde{L}_j^i = L_j^i \frac{\text{Tr}_q(I)}{C_1} - \delta_j^i, \quad (3.1.24)$$

где множитель $\lambda = q - q^{-1}$ введен для того, чтобы операторы $\tilde{L}$ имели корректный классический предел при $q \rightarrow 1$. Для последней алгебры легко получить коммутационные соотношения:

$$\mathbf{R} \tilde{L} \mathbf{R} \tilde{L} - \tilde{L} \mathbf{R} \tilde{L} \mathbf{R} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{R}^2 \tilde{L} - \tilde{L} \mathbf{R}^2), \quad (3.1.25)$$

которые можно рассматривать (для произвольной R -матрицы, удовлетворяющей УЯБ) как деформацию коммутационных соотношений для алгебр Ли. Соотношения (3.1.23) и (3.1.25) являются чрезвычайно важными и возникают, например, при построении дифференциального исчисления на квантовых группах как коммутационные соотношения для инвариантных векторных полей.

Заметим, что из (3.1.14), (3.1.15) и (3.1.18) сразу можно получить следующие полезные формулы:

$$\text{Tr}_{q2}(\mathbf{R}^{\pm 1} \mathbf{E} \mathbf{R}^{\mp 1}) = \text{Tr}_q E I_{(1)}, \quad \overline{\text{Tr}}_{q1}(\mathbf{R}^{\pm 1} \mathbf{E}' \mathbf{R}^{\mp 1}) = \overline{\text{Tr}}_q E' I_{(2)}, \quad (3.1.26)$$

где $\mathbf{E} \equiv E_1 \equiv E \otimes I$ и $\mathbf{E}' \equiv E_2 \equiv I \otimes E$.

Будем теперь считать, что R -матрица удовлетворяет характеристическому уравнению

$$(\mathbf{R} - \lambda_1) (\mathbf{R} - \lambda_2) \dots (\mathbf{R} - \lambda_M) = 0, \quad (\lambda_i \neq \lambda_j, \text{ если } i \neq j). \quad (3.1.27)$$

В этом случае спаривания (3.1.19) автоматически являются вырожденными. Для R -матриц, удовлетворяющих (3.1.27), удобно ввести набор M проекторов:

$$P_k = \prod_{j \neq k} \frac{(R - \lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_j)}, \quad (3.1.28)$$

которые можно использовать для спектрального разложения

$$F(R) = \sum_{k=1}^M F(\lambda_k) P_k \quad (3.1.29)$$

произвольной функции F от R -матрицы. В частности, для $F = 1$ мы получаем условие полноты. Наконец, отметим, что иногда бывает полезным использовать вместо проекторов (3.1.28) следующие операторы:

$$\sigma_k = 1 - 2P_k, \quad \sigma_k^2 = 1, \quad (3.1.30)$$

связанные соотношениями

$$(M - 2) \mathbf{1} = \sum_{k=1}^M \sigma_k. \quad (3.1.31)$$

3.2. Квазиклассический предел. Предположим, что R -матрица, введенная в (3.1.1), имеет следующее разложение в пределе $\hbar \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 1$):

$$R_{12} = \mathbf{1} + \hbar r_{12} + O(\hbar^2). \quad (3.2.1)$$

Здесь $\mathbf{1} = I \otimes I$ обозначает $(N^2 \times N^2)$ -единичную матрицу. Говорят, что такие R -матрицы обладают квазиклассическим поведением, а r_{12} называют квазиклассической r -матрицей. Из квантового УЯБ (3.1.3) легко получить, что r_{12} удовлетворяет так называемому классическому УЯБ:

$$[r_{12}, r_{13} + r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \quad (3.2.2)$$

Подставив разложение (3.2.1) в RTT -соотношения (3.1.1), мы получаем

$$[T_1, T_2] = \hbar [T_1 T_2, r_{12}] + O(\hbar^2). \quad (3.2.3)$$

Это равенство демонстрирует нам, что RTT -соотношения (3.1.1) можно интерпретировать как квантование (деформацию) классической скобки Пуассона (скобки Складина [19]):

$$\{T_1, T_2\} = [T_1 T_2, r_{12}]. \quad (3.2.4)$$

Классическое УЯБ (3.2.2) гарантирует выполнение тождества Якоби для скобки (3.2.4). Из требования антисимметричности скобки Пуассона (3.2.4) мы получаем

$$\{T_1, T_2\} = [T_1 T_2, -r_{21}]. \quad (3.2.5)$$

Таким образом, квазиклассическая r -матрица $r_{12}^{(-)} = -r_{21}$, соответствующая представлению $R^{(-)}$ (3.1.18), также должна быть решением уравнения (3.2.2), в чем легко убедиться, сделав замену $3 \leftrightarrow 1$ в (3.2.2). С другой стороны, сравнивая (3.2.4) и (3.2.5), мы получаем

$$T_1 T_2 (r_{12} + r_{21}) = (r_{12} + r_{21}) T_1 T_2. \quad (3.2.6)$$

Таким образом, величина

$$t_{12} = \frac{1}{2} (r_{12} + r_{21}) \quad (3.2.7)$$

является инвариантом относительно присоединенного действия матрицы $T_1 T_2$ (ад-инвариантом). Введем новую квазиклассическую r -матрицу

$$\tilde{r}_{12} = \frac{1}{2} (r_{12} - r_{21}). \quad (3.2.8)$$

Тогда скобка Складина представляется в явно антисимметричном виде

$$\{T_1, T_2\} = [T_1 T_2, \tilde{r}_{12}], \quad (3.2.9)$$

и матрица $\tilde{r}$ (3.2.8) удовлетворяет модифицированному классическому УЯБ:

$$\begin{aligned} & [\tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13} + \tilde{r}_{23}] + [\tilde{r}_{13}, \tilde{r}_{23}] = \\ & = (1/4) [r_{23} + r_{32}, r_{13} + r_{31}] = [t_{23}, t_{13}]. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Заметим, что алгебры (3.1.23) также можно рассматривать как результат квантования некоторой пуассоновой структуры. Например, для первой из этих алгебр мы имеем

$$\{L_2, L_1\} = [L_1, [L_2, \tilde{r}_{12}]] + L_1 t_{12} L_2 - L_2 t_{12} L_1,$$

где опять же мы должны считать, что $[L_1 L_2, t_{12}] = 0$ (ср. с (3.2.6)). С другой стороны, соотношения (3.1.25) в нулевом порядке по $\hbar$ дают равенства

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = [t_{12}, \tilde{L}_1],$$

что и позволяет говорить о (3.1.25) как о деформации соотношений алгебры Ли.

3.3. Квантовые группы $GL_q(N)$ и $SL_q(N)$ и соответствующие квантовые гиперплоскости. Обсудим наиболее простые квантовые группы, являющиеся квантованием (деформацией) линейных групп Ли $GL(N)$ и $SL(N)$. Начнем с определения соответствующей квантовой гиперплоскости. Напомним, что группа Ли $GL(N)$ есть совокупность невырожденных $(N \times N)$ -матриц T_j^i , действующих в N -мерном векторном пространстве, координаты

которого мы обозначим $\{x^i, i = 1, \dots, N\}$. Таким образом, мы имеем преобразования

$$x^i \rightarrow \tilde{x}^i = T_j^i x^j, \quad (3.3.1)$$

на которые мы можем взглянуть с иной точки зрения. А именно: пусть $\{T_j^i\}$ и $\{x^i\}$ ($i, j = 1, \dots, N$) являются генераторами двух абелевых (коммутирующих) алгебр:

$$[x^i, x^j] = [T_j^i, T_l^k] = [T_j^i, x^k] = 0. \quad (3.3.2)$$

Тогда преобразование (3.3.1) можно рассматривать как действие алгебры $\{T\}$ на алгебру $\{x\}$, сохраняющее абелеву структуру последней, т.е. мы имеем $[\tilde{x}^i, \tilde{x}^j] = 0$.

Введем деформированное N -мерное «векторное пространство», координаты $\{x^i\}$ которого коммутируют следующим образом:

$$x^i x^j = q x^j x^i, \quad i < j, \quad (3.3.3)$$

где q — некоторое число (параметр деформации). Другими словами, теперь мы имеем некоммутативную ассоциативную алгебру с N генераторами $\{x^i\}$. В соответствии с (3.3.3) любой элемент этой алгебры, представляющий собой моном произвольной степени

$$x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_K}, \quad (3.3.4)$$

может быть однозначно упорядочен лексикографически, т.е. так, что $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_K$. О таких алгебрах говорят, что они обладают свойством Пуанкаре — Биркгофа — Витта (ПБВ). Алгебра с N -генераторами, удовлетворяющими (3.3.3), называется N -мерной квантовой гиперплоскостью [20,21]. Соотношения (3.3.3) могут быть записаны в матричной форме

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} x^{j_1} x^{j_2} = q x^{i_2} x^{i_1} \Leftrightarrow R_{12} x_1 x_2 = q x_2 x_1 \Leftrightarrow R x x' = q x x'. \quad (3.3.5)$$

Здесь индексы 1, 2 обозначают номера векторных пространств, на которые действует R -матрица, реализованная в тензорном квадрате $\text{Mat}(N)_1 \otimes \text{Mat}(N)_2$. Таким образом, индексы 1, 2 у R -матрицы показывают, каким образом R -матрица действует на прямое произведение первого и второго векторных пространств. Подчеркнем, что R -матрица зависит от параметра q и, вообще говоря, ее явный вид неоднозначно восстанавливается из соотношений (3.3.3). Однако, если мы потребуем, чтобы R -матрица (3.3.5) конструировалась с помощью двух $GL(N)$ -инвариантных тензоров 1_{12} и P_{12} , т.е.

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = (\delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}) a_{i_1 i_2} + (\delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2}) b_{i_1 i_2},$$

а также удовлетворяла УЯБ (3.1.1) и имела блочный нижнетреугольный вид $(R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = 0, i_1 < j_1)$, то мы получим следующее явное представление:

$$R_{12} = R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = q \sum_i (e_{ii}^{i_1} \otimes (e_{ii}^{j_2}) + \sum_{i \neq j} (e_{ii}^{i_1} \otimes (e_{jj}^{j_2}) + \\ + \lambda \sum_{i > j} (e_{ij}^{i_1} \otimes (e_{ji}^{j_2}) = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} (1 + (q - 1) \delta_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}) + \lambda \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \Theta_{i_1 i_2}, \quad (3.3.6)$$

$$\Theta_{ij} = \{1 - \text{если } i > j, 0 - \text{если } i \leq j\}.$$

Здесь $i, j = 1, \dots, N$, $(e_{ij}^k)_l^k = \delta^{ik} \delta_{jl}$ и $\lambda = q - q^{-1}$. Можно проверить (используя диаграммную технику п.3.4, то данная R -матрица удовлетворяет соотношению Гекке (частный случай формулы (3.1.27))

$$R^2 = \lambda R + 1 \Leftrightarrow R - R^{-1} - \lambda 1 = 0. \quad (3.3.7)$$

Из явного вида (3.3.6) для $GL(N)$ R -матрицы, кроме того, следуют полезные равенства:

$$R_{12}^{t_1 t_2} = R_{21}, \quad R_{12} \left(\frac{1}{q} \right) = R_{12}^{-1}(q).$$

В квазиклассическом пределе (3.2.1) соотношение (3.3.7) переписывается в виде

$$r_{12} + r_{21} = 2P_{12}. \quad (3.3.8)$$

Таким образом, для ли-пуассоновой структуры на группе $GL(N)$ в качестве ад-инвариантного тензора выбирается матрица перестановки $t_{12} = P_{12}$. Для $\tilde{r}$ -матрицы (3.2.8), определяющей скобку Складина, мы получим из (3.3.6) выражение

$$\tilde{r}_{12} = \sum_{i > j} [(e_{ij}^{i_1}) \otimes (e_{ji}^{j_2}) - (e_{ji}^{i_1}) \otimes (e_{ij}^{j_2})] \in gl(N) \wedge gl(N). \quad (3.3.9)$$

В соответствии с (3.3.7), (3.1.28) и (3.1.29) для $q^2 \neq -1$ матрица R имеет спектральное разложение

$$R = qP^+ - q^{-1}P^-, \quad (3.3.10)$$

где проекторы

$$P^\pm = (q + q^{-1})^{-1} \{q^{\mp 1} 1 \pm R\}, \quad (3.3.11)$$

являются квантовыми аналогами симметризатора (P^+) и антисимметризатора (P^-), в чем можно убедиться, положив в (3.3.11) $q = 1$. Используя проектор P^- , определение (3.3.3) квантовой гиперплоскости можно представить в виде

$$P^- x x' = 0. \quad (3.3.12)$$

Заметим, что соотношения

$$P^+ x x' = 0 \Leftrightarrow (x^i)^2 = 0, \quad x^i x^j = -q^{-1} x^j x^i \quad (i < j) \quad (3.3.13)$$

определяют фермионную N -мерную квантовую гиперплоскость, являющуюся деформацией алгебры N -фермионов $x^i x^j = -x^j x^i$.

Для данной R -матрицы квантовый след (3.1.13) и матрица D (3.1.9) могут быть выбраны в виде

$$\text{Tr}_q A \equiv \text{Tr} (DA) \equiv \sum_{i=1}^N q^{-N-1+2i} A_i^i, \\ D \equiv q^N \text{Tr}_{(2)} (P_{12} \tilde{R}_{12}) = \text{diag} \{q^{-N+1}, q^{-N+3}, \dots, q^{N-1}\}. \quad (3.3.14)$$

Мы также отметим следующие полезные формулы (ср. с (3.1.16)):

$$\text{Tr}_{q(2)} R^{\pm 1} = q^{\pm N} I_{(1)}, \quad \text{Tr}_q (I) = \text{Tr} (D) = [N]_q, \quad (3.3.15)$$

где $[N]_q = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}$. В силу диагональности D -матрицы легко получить циклическое свойство

$$\text{Tr}_{q1} \text{Tr}_{q2} (R E_{12}) = \text{Tr}_{q1} \text{Tr}_{q2} (E_{12} R) \quad (3.3.16)$$

для любой квантовой матрицы $E_{12} \in \text{Mat} (N) \otimes \text{Mat} (N)$.

Естественным теперь является вопрос о том, каким свойствам должны удовлетворять элементы T_j^i $N \times N$ -матрицы, определяющие преобразования (3.3.1) квантовой бозонной (3.3.3), (3.3.12) и фермионной (3.3.13) гиперплоскостей, чтобы преобразованные координаты $\tilde{x}^i$ образовывали те же квантовые алгебры (q -гиперплоскости) (3.3.12), (3.3.13). Легко понять, что элементы T_j^i $N \times N$ -матрицы должны удовлетворять условиям

$$P^{\pm} T T' P^{\mp} = 0, \quad (3.3.17)$$

которые эквивалентны RTT -соотношениям (3.1.1).

Определение. AX с единичным генератором 1 и N^2 генераторами T_j^i , удовлетворяющими соотношениям (3.1.1), где R -матрица определена в (3.3.6), называется алгеброй функций на квантовой группе $GL_q(N)$ и обозначается $\text{Fun} (GL_q(N))$.

Для квантовой группы $GL_q(N)$ можно определить квантовый детерминант $\det_q(T)$, который является деформацией обычного детерминанта, а также является центральным элементом для алгебры $\text{Fun} (GL_q(N))$:

$$\begin{aligned} \det_q(T) \mathcal{E}^q_{j_1 j_2 \dots j_N} &= \mathcal{E}^q_{i_1 i_2 \dots i_N} T_{j_1}^{i_1} T_{j_2}^{i_2} \dots T_{j_N}^{i_N}, \\ \det_q(T) \mathcal{E}^{q i_1 i_2 \dots i_N} &= T_{j_1}^{i_1} T_{j_2}^{i_2} \dots T_{j_N}^{i_N} \mathcal{E}^{q j_1 j_2 \dots j_N}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Здесь q — деформированный антисимметричный тензор, $\mathcal{E}^q_{j_1 j_2 \dots j_N} = \mathcal{E}^{q j_1 j_2 \dots j_N}$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}^q_{12 \dots N} = 1, \quad \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} \mathbf{P}_{k, k+1}^+ = 0, \quad 1 \leq k < N, \quad (3.3.19)$$

где во втором равенстве мы понимаем индексы $1, 2, \dots, N$ как номера векторных пространств, а $\mathbf{P}_{k, k+1}^+ = I^{\otimes (k-1)} \otimes \mathbf{P}^+ \otimes I^{\otimes (N-k-1)}$ определяет симметризатор (3.3.10), действующий в k -м и $(k+1)$ -м пространствах. Пользуясь таким способом записи, мы можем представить определения квантового детерминанта (3.3.18) в виде

$$\begin{aligned} \det_q(T) \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} &= \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} T_1 \cdot T_2 \dots T_N, \\ \det_q(T) | \mathcal{E}^q \rangle_{12 \dots N} &= T_1 \cdot T_2 \dots T_N | \mathcal{E}^q \rangle_{12 \dots N}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Здесь $T_m = I^{\otimes (m-1)} \otimes T \otimes I^{\otimes (N-m)}$. То, что $\det_q(T)$ действительно является центральным элементом в алгебре $GL_q(N)$, можно установить, используя определение (3.3.20), RTT -соотношения и равенства

$$\begin{aligned} q I_{N+1} \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} &= \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} R_{1, N+1} \cdot R_{2, N+1} \dots R_{N, N+1}, \\ q^{-1} I_{N+1} \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} &= \langle \mathcal{E}^q |_{12 \dots N} R_{N+1, 1}^{-1} \cdot R_{N+1, 2}^{-1} \dots R_{N+1, N}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

где индексы $1, 2, \dots, N+1$ понимаются как номера пространств. Соотношения (3.3.21) следуют из выражений для квантовых детерминантов

$$\det_q(R^{(\pm)}) = q^{\pm 1}, \quad (3.3.22)$$

где $R^{(\pm)}$ — матричные представления для T_j^i , приведенные в (3.1.18). В свою очередь, соотношения (3.3.22) следует из того факта, что $R^{(+)}$ и $R^{(-)}$ являются, соответственно, блочными ниже- и верхнетреугольными матрицами с диагональными блоками вида

$$(R^{(\pm)})_i^i = \delta_i^i q^{\pm \delta_{ik}}.$$

Сопряженные к (3.3.21) соотношения для тензора $| \mathcal{E}^q \rangle_{12 \dots N}$ легко могут быть получены из (3.3.21) и тождества для $GL_q(N)$ R -матрицы

$(\mathbf{R}_{12})^{t_1 t_2} = \mathbf{R}_{12}$. Заметим, что иногда удобно использовать равенства (3.3.21) и их сопряженные в виде [22]:

$$q^{\pm 1} \langle \psi |_1 \langle \varepsilon^q |_{23 \dots N+1} = \langle \psi |_{N+1} \langle \varepsilon^q |_{12 \dots N} \mathbf{R}_N^{\pm 1} \dots \mathbf{R}_2^{\pm 1} \mathbf{R}_1^{\pm 1},$$

$$q^{\pm 1} | \psi \rangle_1 | \varepsilon^q \rangle_{23 \dots N+1} = \mathbf{R}_1^{\pm 1} \cdot \mathbf{R}_2^{\pm 1} \dots \mathbf{R}_N^{\pm 1} | \psi \rangle_{N+1} | \varepsilon^q \rangle_{12 \dots N},$$

где

$$\mathbf{R}_k = I^{\otimes (k-1)} \otimes \mathbf{R} \otimes I^{\otimes (N-k)} \in \text{Mat}(N)^{\otimes (N+1)}. \quad (3.3.23)$$

Теперь алгебра $\text{Fun}(SL_q(N))$ может быть получена из алгебры $\text{Fun}(GL_q(N))$ наложением дополнительного условия $\det_q(T) = 1$ и, согласно формулам (3.3.22), матричные представления (3.1.19) для $T_j^i \in \text{Fun}(SL_q(N))$ имеют вид

$$\langle L_2^+, T_1 \rangle = \frac{1}{q^{1/N}} R_{12}, \quad \langle L_2^-, T_1 \rangle = q^{1/N} R_{21}^{-1}.$$

Обсудим теперь, каким образом можно определить комплексификацию линейных квантовых групп. Рассмотрим для начала случай группы $GL_q(N)$ и будем считать, что q — действительное число.

Мы должны определить инволютивную операцию $*$ на алгебре $\text{Fun}(GL_q(N))$ или, другими словами, мы должны определить сопряженную алгебру $\text{Fun}(\widetilde{GL_q(N)})$ с генераторами $\tilde{T} = (T^\dagger)^{-1}$ ($T^\dagger = (T^*)'$) и структурными соотношениями, совпадающими с (3.1.1):

$$R_{12} \tilde{T}_1 \tilde{T}_2 = \tilde{T}_2 \tilde{T}_1 R_{12}. \quad (3.3.24)$$

Введем теперь расширенную алгебру с генераторами $\{T, \tilde{T}\}$, являющуюся кросс-произведением алгебр (3.3.1) и (3.3.24) с дополнительными кросс-коммутационными соотношениями (см., например, [10,9]):

$$\mathbf{R} T \tilde{T}' = \tilde{T} T' \mathbf{R}. \quad (3.3.25)$$

Эту алгебру естественно связать с $\text{Fun}(GL_q(N, \mathbb{C}))$.

Случай $SL_q(N, \mathbb{C})$ получается из $GL_q(N, \mathbb{C})$ наложением двух дополнительных условий на центральные элементы:

$$\det_q(T) = 1, \quad \det_q(\tilde{T}) = 1. \quad (3.3.26)$$

Вещественная форма $U_q(N)$ выделяется из $GL_q(N, \mathbb{C})$, если мы потребуем

$$T = \tilde{T} = (T^\dagger)^{-1} \quad (3.3.27)$$

и если в дополнение к этому наложить условия (3.3.26), то выделяется группа $SU_q(N)$.

В случае $|q| = 1$ определение инволюций на линейных квантовых группах оказывается нетривиальной проблемой, которая решается [23] только после расширения алгебры функций на квантовых группах до алгебры функций на их кокасательных расслоениях.

3.4. Многопараметрическая деформация $GL_{q,r_{ij}}(N)$. Рассмотрим многопараметрическую деформацию линейной группы $GL(N)$ [16,21,24—27]. Многопараметрическая квантовая гиперплоскость определяется соотношениями

$$x^i x^j = r_{ij} x^j x^i, \quad i < j, \quad (3.4.1)$$

которые можно записать в R -матричном виде (3.3.5), если ввести дополнительный параметр q . Таким образом, мы имеем $\frac{N(N-1)}{2} + 1$ параметров деформации: r_{ij} , $i < j$, и q . Соответствующая R -матрица имеет вид [27]:

$$R_{12} = R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \left(q \delta_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} + \Theta_{i_2 i_1} \frac{q}{r_{i_1 i_2}} + \Theta_{i_1 i_2} \frac{r_{i_2 i_1}}{q} \right) + (q - q^{-1}) \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \Theta_{i_1 i_2}, \quad (3.4.2)$$

где Θ_{ij} определяется в (3.3.6). Непосредственным вычислением можно убедиться, что R -матрица (3.4.2) удовлетворяет УЯБ (3.1.3) и условию Гекке (3.3.7), такому же, как и в однопараметрическом случае. При этих вычислениях удобно пользоваться диаграммной техникой:

$$\hat{R} = \hat{R}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} (a_{i_1 i_2}^0 \delta_{i_1 i_2}^{i_1 i_2} + \Theta_{i_2 i_1} a_{i_1 i_2}^- + \Theta_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2}^+) + b_{i_1 i_2} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \Theta_{i_2 i_1} = \quad (3.4.3)$$

$$= \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} a_{i_1 i_2}^0 \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_1 \quad j_2 \end{array} + \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} a_{i_1 i_2}^- \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_1 \quad j_2 \end{array} + \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} a_{i_1 i_2}^+ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_1 \quad j_2 \end{array} + \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \\ | \quad | \\ \text{---} b_{i_1 i_2} \text{---} \\ | \quad | \\ j_1 \quad j_2 \end{array}.$$

Оказывается, что не все решения УЯБ (3.1.3), представимые в виде (3.4.3), исчерпываются многопараметрическими R -матрицами (3.4.2). Действительно, если мы подставим матрицу (3.4.3) в УЯБ (3.1.3), то получим следующие условия на коэффициенты a_i^0 , $a_{ij}^\pm$, b_{ij} :

$$b_{ij} = b, \quad a_{ij}^+ a_{ji}^- = c, \quad (a_i^0)^2 - ba_i^0 - c = 0 \quad (\forall i, j). \quad (3.4.4)$$

Выберем для удобства вместо параметра c другой параметр — q , положив $c = q(q - b)$. После этого отнормируем (3.4.3) так, что $b = q - q^{-1}$. Тогда $c = 1$, а a_i^0 могут принимать два значения $\pm q^{\pm 1}$. При такой нормировке R -матрица (3.4.3) удовлетворяет соотношению Гекке (3.3.7). Если мы положим $a_i^0 = q$ (или $a_i^0 = -q^{-1}$) для всех i , то мы придем к многопараметрическому случаю $GL_{q,r_{ij}}(N)$ (3.4.2). Если же мы положим

$$a_i^0 = q \quad (1 \leq i \leq K), \quad a_i^0 = -q^{-1} \quad (K + 1 \leq i \leq N), \quad (3.4.5)$$

то R -матрица (3.4.3) не сводится к (3.4.2) и будет соответствовать многопараметрической деформации супергруппы $GL(K|N - K)$ (этот случай мы рассмотрим ниже в п. 3.6).

В силу выполнения тождества Гекке (3.3.7) для многопараметрического случая мы можем ввести те же проекторы P^- и P^+ , что и в однопараметрическом случае (3.3.10), причем первый из них определяет бозонную квантовую гиперплоскость (3.4.1) (соотношения (3.3.5) с R -матрицей (3.4.2)), а второй определяет фермионную квантовую гиперплоскость:

$$P^+ x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow (x^i)^2 = 0, \quad q^2 x^i x^j = -r_{ij} x^j x^i \quad (i > j). \quad (3.4.6)$$

Рассматривая (3.4.1) и (3.4.6) как комодули для многопараметрической квантовой группы $GL_{q,r_{ij}}(N)$, мы получим, что генераторы T_j^i алгебры $\text{Fun}(GL_{q,r_{ij}}(N))$ удовлетворяют тем же R TT-соотношениям (3.1.1), но с R -матрицей (3.4.2). Отметим, однако, что квантовый детерминант $\det_q(T)$ (3.3.18) в многопараметрическом случае не является центральным [26]. Это связано с тем, что для многопараметрической R -матрицы не выполняются равенства типа (3.3.21). Следовательно, редукция к SL -случаю с помощью соотношения $\det_q(T) = 1$ возможна только при некоторых ограничениях на параметры q, r_{ij} . Подробное обсуждение этих фактов можно найти в [26, 27]. Заметим, что подходящим «твистованием» R -матрицы (3.4.2) можно свести многопараметрический случай к однопараметрическому (см. [16, 27] и замечание 1 в конце второго раздела).

3.5. $GL_q(N)$ -инвариантная бакстеризованная R -матрица. Под бакстеризацией мы понимаем построение R -матрицы, зависящей не только от параметра деформации q , но и от дополнительного комплексного спектрального параметра x . При этом $R(x)$ должно удовлетворять новому УЯБ,

зависящему также от x (см. ниже). Если мы хотим найти такое решение $R(x)$, подчиняющееся условию квантовой инвариантности:

$$T_1 T_2 R(x) (T_1 T_2)^{-1} = R(x), \quad (T_j^i \in \text{Fun}(GL_q(N))),$$

то мы должны искать его в виде

$$R(x) = b(x) (1 + a(x) R), \quad (3.5.1)$$

(здесь $a(x)$ и $b(x)$ — некоторые функции от x), так как в силу условия Гекке (3.3.7), существуют только две базисные матрицы 1 и R , являющиеся инвариантами в смысле соотношений (3.1.1). УЯБ, зависящее от спектрального параметра, выбирается в виде

$$R(x) R'(xy) R(y) = R'(y) R(xy) R'(x). \quad (3.5.2)$$

Из этого уравнения фиксируется только функция $a(x)$. Действительно, подставим сюда (3.5.1) и учтем (3.1.3) и условие Гекке (3.3.7), тогда мы получим уравнение

$$a(x) + a(y) + \lambda a(x) a(y) = a(xy), \quad (3.5.3)$$

которое легко решается заменой переменных $a(x) = (1/\lambda) (\tilde{a}(x) - 1)$. После этого для a получаем следующее общее решение:

$$a(x) = (1/\lambda) (x^\xi - 1), \quad (3.5.4)$$

где произвольный параметр ξ для простоты можно положить равным -2 . Выберем для удобства нормирующую функцию $b(x) = \lambda x$. Тогда бакстеризованная R -матрица, удовлетворяющая УЯБ (3.5.2), будет иметь вид

$$R(x) = b(x) (1 + (1/\lambda) (x^{-2} - 1) R) = x^{-1} R - x R^{-1}. \quad (3.5.5)$$

Замечательным фактом является то, что соотношения (3.1.20) можно представить следующим образом:

$$R(x) L'(xy) L(y) = L'(y) L(xy) R(x), \quad (3.5.6)$$

где спектральные параметры x, y произвольны и

$$L(x) = x^{-1} L^+ - x L^-. \quad (3.5.7)$$

Более того, если мы усредним соотношение (3.5.6) с матрицей T_j^i , действующей в третьем пространстве, то мы получим УЯБ (3.5.2). Таким образом, в определенном смысле (3.5.6) обобщает (3.5.2). Напомним также, что (3.5.2) является условием однозначного упорядочивания мономов третьей степени $L_1(x) L_2(y) L_3(z)$ для алгебры (3.5.6) («diamond»-условие):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L(y)L(x)L(z) \longrightarrow & L(y)L(z)L(x) & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 L(x)L(y)L(z) & & & & L(z)L(y)L(x). \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & L(x)L(z)L(y) \longrightarrow & L(z)L(x)L(y) &
 \end{array}$$

Заметим теперь, что из алгебры (3.5.6), отвлекаясь от частного представления (3.5.7) для $L(x)$ -оператора, можно получить реализацию для янгiana $Y(gl(N))$ (см. [13]). Действительно, сделаем в (3.5.2) и (3.5.6) замену спектральных параметров

$$x = \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda(\theta - \theta') \right), \quad y = \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda \theta' \right). \quad (3.5.8)$$

Тогда соотношения (3.5.2) и (3.5.6) переписываются в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(\theta - \theta') \mathbf{R}'(\theta) \mathbf{R}(\theta') &= \mathbf{R}'(\theta') \mathbf{R}(\theta) \mathbf{R}'(\theta - \theta') \Rightarrow \\
 R_{23}(\theta - \theta') R_{13}(\theta) R_{12}(\theta') &= R_{12}(\theta') R_{13}(\theta) R_{23}(\theta - \theta'), \quad (3.5.9)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}(\theta - \theta') L'(\theta) L(\theta') = L'(\theta') L(\theta) \mathbf{R}(\theta - \theta'). \quad (3.5.10)$$

Заметим, что уравнения (3.5.9) имеют красивое графическое изображение в виде уравнения треугольников [3]:

$$\begin{array}{c}
 \text{Left Triangle:} \\
 \text{Top vertex: } 1, \text{ angle } \theta - \theta' \\
 \text{Bottom-left vertex: } 3, \text{ angle } \theta \\
 \text{Bottom-right vertex: } 2, \text{ angle } \theta' \\
 \text{Right Triangle:} \\
 \text{Top vertex: } 1, \text{ angle } \theta \\
 \text{Bottom-left vertex: } 3, \text{ angle } \theta - \theta' \\
 \text{Bottom-right vertex: } 2, \text{ angle } \theta'
 \end{array}
 \quad (3.5.9')$$

где $R_{ij}(\theta) =$

Осуществим теперь в (3.5.10) предельный переход $\lambda = q - q^{-1} \rightarrow 0$. Исходя из (3.5.5), выбирая $b(x) = 1$, легко получить, что R -матрица в этом пределе пропорциональна матрице Янга:

$$\mathbf{R}(\theta) = (1 + \theta P_{12}). \quad (3.5.11)$$

Для операторов $L(\theta)$ мы будем предполагать справедливость следующего разложения:

$$L(\theta)_j^i = \delta_j^i + \sum_{k=1}^{\infty} T_j^{(k)i} \theta^{-k}, \quad (3.5.12)$$

где $T_j^{(k)i}$ являются образующими янгиана $Y(gl(N))$ [13]. Определяющие соотношения для янгиана $Y(gl(N))$ получаются из (3.5.10) подстановкой (3.5.11) и (3.5.12). Коумножение для $Y(gl(N))$, очевидно, имеет вид

$$\Delta(L(\theta)_j^i) = L(\theta)_k^i \otimes L(\theta)_j^k. \quad (3.5.13)$$

Янгиан $Y(sl(N))$ может быть получен из $Y(gl(N))$ после наложения дополнительного условия на генераторы $T_j^{(k)i}$:

$$\det_q(L(\theta)) = 1.$$

Соотношения (3.5.10) играют важную роль в квантовом методе обратной задачи [1]. Матричные представления для операторов (3.5.7), удовлетворяющих (3.5.6), ведут к формулировке решеточных интегрируемых систем (см., например, [28]). Уравнения (3.5.9) являются условиями факторизации S -матриц в некоторых точно решаемых двумерных моделях квантовой теории поля (см. [3]). Эти вопросы более подробно обсуждаются в последнем разделе обзора.

3.6. Квантовые супергруппы $GL_q(N|M)$ и $SL_q(N|M)$. Выберем R -матрицу (3.4.3) в виде (см. [29]):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \hat{R}_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = & (-1)^{(i_1)(i_2)} \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} (q^{1-2(i_1)(i_2)} \delta_{i_1 i_2} + \Theta_{i_2 i_1} + \Theta_{i_1 i_2}) + \\ & + (q - q^{-1}) \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \Theta_{i_2 i_1}, \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

т.е. мы положили

$$a_i^0 = (-1)^{(i)} q^{1-2(i)}, \quad a_{ij}^+ = (a_{ij}^-)^{-1} = (-1)^{(i)(j)}, \quad b = q - q^{-1}.$$

Здесь $(i) = 0, 1$ и, следовательно, a_i^0 могут принимать два значения: $\pm q^{\pm 1}$. Таким образом, как мы предположили в п.3.4, R -матрица (3.6.1) должна соответствовать некоторой супергруппе. Действительно, пусть R -матрица действует в пространстве прямого произведения двух супервекторов $x^{j_1} \otimes y^{j_2}$, и $(j) = 0, 1 \pmod{2}$ обозначает четность компонент x^j супервектора. Для определенности будем считать, что $(j) = 0$ ($1 \leq j \leq N$) и $(j) = 1$ ($N+1 \leq j \leq N+M$). В пределе $q \rightarrow 1$ мы получаем, что $\mathbf{R}$ стремится к оператору суперперестановки

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \rightarrow (-)^{(i_1)(i_2)} \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \equiv P_{12}.$$

Как было отмечено в п.3.4, R -матрица (3.6.1) удовлетворяет УЯБ (3.1.3) и соотношению Гекке (3.3.7). Введем вместо матрицы R новую R -матрицу:

$$R_{12} = P_{12} R \Rightarrow R = P_{12} R_{12} = (-)^{(1)(2)} P_{12} R_{12}.$$

Тогда из УЯБ (3.1.3) для новой R -матрицы следует градуированный вариант УЯБ [32]:

$$R_{12}(-)^{(2)(3)} R_{13}(-)^{(2)(3)} R_{23} = R_{23}(-)^{(2)(3)} R_{13}(-)^{(2)(3)} R_{12}. \quad (3.6.2)$$

Здесь мы положили $(-)^{(1)(2)} = (-1)^{(i_1)(i_2)} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}$ и учли тот факт, что R_{12} является четной R -матрицей, т.е.

$$\begin{aligned} R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \neq 0, \text{ если } (i_1) + (j_1) + (i_2) + (j_2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-)^{(3)((1)+(2))} R_{12} = R_{12}(-)^{(3)((1)+(2))}. \end{aligned}$$

Наконец, квантовые многомерные суперплоскости для введенных R -матриц имеют вид (см., например, [30,31]):

$$\begin{aligned} (R - q) x_1 x_2 = 0 &\Leftrightarrow x^i x^j = (-)^{(i)(j)} q x^j x^i \quad (i < j), \\ (x^i)^2 = 0, \text{ если } (i) = 1, \\ (R + q^{-1}) x_1 x_2 = 0 &\Leftrightarrow q x^i x^j = -(-)^{(i)(j)} x^j x^i \quad (i < j), \\ (x^i)^2 = 0, \text{ если } (i) = 0. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Вторая гиперплоскость может интерпретироваться как внешняя алгебра дифференциалов dx^i от координат x^i для первой гиперплоскости.

Рассмотрим действие (3.3.1) квантовой супергруппы на квантовые суперпространства (3.6.3). Из условия ковариантности суперкомодулей (3.6.3) легко вывести градуированный аналог RTT -соотношений:

$$\begin{aligned} RT_1(-)^{(1)(2)} T_2(-)^{(1)(2)} = T_1(-)^{(1)(2)} T_2(-)^{(1)(2)} R \Leftrightarrow \\ R_{12} T_1(-)^{(1)(2)} T_2(-)^{(1)(2)} = (-)^{(1)(2)} T_2(-)^{(1)(2)} T_1 R_{12}, \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

которые являются определяющими соотношениями для генераторов T_j^i алгебры $\text{Fun}(GL_q(MM))$. Матрица $\|T_j^i\|$ может быть представлена в блочном виде:

$$T_j^i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (3.6.5)$$

где элементы $N \times N$ -матрицы A и $M \times M$ -матрицы D образуют, соответственно, алгебры $\text{Fun}(GL_q(N))$ и $\text{Fun}(GL_q(M))$. Отсюда следует, что некоммутативные матрицы D и $A - BD^{-1}C$ обратимы, а следовательно обратима и матрица $\|T_j^i\|$, что вытекает из разложения Гаусса:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & BD^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D^{-1}C & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.6)$$

Таким образом, алгебра $\text{Fun}(GL_q(N|M))$ с определяющими соотношениями (3.6.4) является АХ со структурными отображениями (3.1.15), где в определении Δ тензорное произведение понимается как градуированное тензорное произведение.

Сравним теперь соотношения (3.6.4) с градуированным УЯБ (3.6.2). Из этого сравнения нетрудно увидеть, что конечномерные матричные представления для генераторов T_j^i квантовой алгебры $\text{Fun}(GL_q(N|M))$ (супераналоги представлений (3.1.18)) могут быть выбраны в виде

$$T_1 = (-)^{(1)(3)} R_{13}(-)^{(1)(3)} \equiv R^{(+)}, \quad T_1 = (R^{-1})_{31} \equiv R^{(-)}. \quad (3.6.7)$$

Отсюда очевидным образом следуют определения квантовых супералгебр, дуальных алгебрам $\text{Fun}(GL_q(N|M))$ (ср. с формулами (3.1.19)):

$$\langle L_2^+, T_1 \rangle = (-)^{(1)(2)} R_{12}(-)^{(1)(2)}; \quad \langle L_2^-, T_1 \rangle = R_{21}^{-1}. \quad (3.6.8)$$

Отметим, что для $GL_q(N|M)$ можно определить квантовый суперслед (см. [31]) и квантовый супердетерминант [33]. Алгебра $\text{Fun}(SL_q(N|M))$ выделяется соотношением $\text{sdet}_q(T) = 1$.

Квантовая супергруппа $GL_q(N|M)$ подробно изучалась с несколько иных позиций в работе [33]. Простейший пример квантовой супергруппы $GL_q(1|1)$ исследовался во многих работах (см., например, [31, 34]). R -матрицы (3.4.3) могут быть использованы для построения суперсимметричных бакстеризованных решений УЯБ (3.5.5), полученных впервые в [35]. Янгианские пределы этих решений применялись для формулировки интегрируемых суперсимметричных магнетиков [36]. Универсальные R -матрицы для линейных квантовых супергрупп были построены в [37].

3.7. Квантовые группы $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ (В, С, D-серии). В работе [10] изучались квантовые группы с определяющими соотношениями (3.1.1), являющиеся квантовыми деформациями групп Ли $SO(N)$, где $N = 2n + 1$ (B_n -серия) и $Sp(N)$, $SO(N)$, где $N = 2n$ (C_n - и D_n -серии). Было показано, что

R -матрицы для групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(N)$ (их явный вид [10] приведен ниже в п.3.8) удовлетворяют кубическому характеристическому уравнению (3.1.27)

$$(\mathbf{R} - q\mathbf{1})(\mathbf{R} + q^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{R} - \varepsilon q^{\varepsilon - N}\mathbf{1}) = 0, \quad (3.7.1)$$

где случай $\varepsilon = +1$ соответствует ортогональным группам $SO_q(N)$ (B -, D -серии), а случай $\varepsilon = -1$ соответствует симплектическим группам $Sp_q(2n)$ (C -серия). Проекторы (3.1.28), соответствующие характеристическому уравнению (3.7.1), могут быть записаны следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\pm} &= \frac{(\mathbf{R} \pm q^{\mp 1}\mathbf{1})(\mathbf{R} - v\mathbf{1})}{(q + q^{-1})(q^{\pm 1} \mp v)} \equiv \frac{1}{q + q^{-1}} (\pm \mathbf{R} + q^{\mp 1}\mathbf{1} + \mu_{\pm}\mathbf{K}), \\ \mathbf{P}^0 &= \frac{(\mathbf{R} - q\mathbf{1})(\mathbf{R} + q^{-1}\mathbf{1})}{(v - q)(q^{-1} + v)} \equiv \mu^{-1}\mathbf{K}. \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Здесь $v = \varepsilon q^{\varepsilon - N}$,

$$\mu = \frac{(q - v)(q^{-1} + v)}{\lambda v} = \frac{\lambda + v^{-1} - v}{\lambda} = (1 + \varepsilon[N - \varepsilon]_q),$$

$$\mu_{\pm} = \pm \frac{\lambda}{(1 \mp q^{\pm 1}v^{-1})} = \mp \frac{v \pm q^{\mp 1}}{\mu}.$$

Приведем также соотношения, связывающие введенные параметры $v, \mu, \mu_{\pm}$:

$$q\mu_+ - q^{-1}\mu_- = v(\mu_+ + \mu_-), \quad \mu_+ + \mu_- = -\frac{q + q^{-1}}{\mu},$$

которые весьма удобны при различных вычислениях, использующих проекторы (3.7.2). Для удобства мы ввели в (3.7.2) перенормированный проектор $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}^2 = \mu\mathbf{K}$), проецирующий $\mathbf{R}$ на «синглетное» собственное значение v :

$$\mathbf{K}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{K} = v\mathbf{K}. \quad (3.7.3)$$

Заметим, что для $\mathbf{K}$ мы имеем равенство (ср. с формулой (3.3.7))

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}^{-1} - \lambda + \lambda\mathbf{K} = 0, \quad (3.7.4)$$

которое есть не что иное, как переписанное характеристическое уравнение (3.7.1). Заметим также, что проекторы $\mathbf{P}^{\pm}$ (3.7.2) можно представить в удобном виде

$$\mathbf{P}^{\pm} = \frac{1}{q + q^{-1}} (\pm \tilde{\mathbf{R}} + q^{\mp 1}\mathbf{1}) - \frac{1}{2\mu} (1 \pm \varepsilon) \mathbf{K}, \quad (3.7.5)$$

где матрица

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - \frac{1}{2} [\mu_{-}(1 + \varepsilon) + \mu_{+}(\varepsilon - 1)] \mathbf{K}$$

удовлетворяет условию Гекке (3.3.7).

В квазиклассическом пределе характеристическое уравнение (3.7.4) переписывается следующим образом:

$$\frac{1}{2} (r_{12} + r_{21}) = P_{12} - \varepsilon \mathbf{K}_{12}^{(0)}, \quad (3.7.6)$$

т.е., как и в случае $GL_q(N)$ (3.3.8), квазиклассический предел (3.7.6) характеристического уравнения фиксирует ад-инвариантную часть квазиклассической r -матрицы. Здесь мы использовали разложение матрицы $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(0)} + \hbar \mathbf{K}^{(1)} + O(\hbar^2)$, первый член которого равен

$$(\mathbf{K}^{(0)})_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = (C_0)^{i_1 i_2} (C_0^{-1})_{j_1 j_2} \Rightarrow \mathbf{K}_{12}^{(0)} = |C_0\rangle_{12} \langle C_0^{-1}|_{12},$$

где матрицы $(C_0)^{ij} : (C_0)^2 = \varepsilon I$, $(C_0)^t = \varepsilon C_0$ являются метрической (симметричной) и симплектической (антисимметричной) матрицами, соответственно, для $SO(N)$ и $Sp(2n)$ групп. Квазиклассическое разложение для проекторов (3.7.2), (3.7.5) имеет вид

$$\mathbf{P}_{cl}^{\pm} = \frac{1}{2} ((1 \pm P) \pm \hbar P \tilde{r} - (1 \pm \varepsilon) \mathbf{P}_{cl}^0),$$

$$\mathbf{P}_{cl}^0 = \frac{\varepsilon}{N} (\mathbf{K}^{(0)} + \hbar \mathbf{K}^{(1)}), \quad (3.7.7)$$

где $P = P_{12}$, а квазиклассическая матрица $\tilde{r}$, удовлетворяющая модифицированному классическому УЯБ, определяется в (3.2.8) и равна

$$\tilde{r} = r_{12} - P_{12} + \varepsilon K_{12}^{(0)} = -r_{21} + P_{12} - \varepsilon K_{12}^{(0)}.$$

Ранги квантовых проекторов (3.7.2) равны (для q , не равного корням из единицы) рангам проекторов (3.7.7), легко вычисляемым в классическом пределе $\hbar = 0$. Соответственно мы имеем [10]:

1) для групп $SO_q(N)$

$$\text{rang } (P^{(+)}) = \frac{N(N+1)}{2} - 1,$$

$$\text{rang } (P^{(-)}) = \frac{N(N-1)}{2}, \quad \text{rang } (P^{(0)}) = 1; \quad (3.7.8)$$

2) для групп $Sp_q(2n)$

$$\text{rang } (P^{(+)}) = \frac{N(N+1)}{2},$$

$$\text{rang } (P^{(-)}) = \frac{N(N-1)}{2} - 1, \quad \text{rang } (P^{(0)}) = 1. \quad (3.7.9)$$

Число образующих для алгебр $\text{Fun}(SO_q(N))$ и $\text{Fun}(Sp_q(2n))$ должно совпадать с числом образующих в недеформированном случае, таким образом, на генераторы T_j^i (3.1.1) в квантовом случае накладываются дополнительные условия

$$TCT^t C^{-1} = CT^t C^{-1} T = 1I \Rightarrow \quad (3.7.10)$$

$$T_1 T_2 |C\rangle_{12} = |C\rangle_{12}, \quad \langle C^{-1}|_{12} T_1 T_2 = \langle C^{-1}|_{12}, \quad (3.7.11)$$

являющиеся прямым обобщением классических условий на элементы групп $SO(N)$ и $Sp(2n)$. Матрицы C^{ij} , C_{kl}^{-1} , которые понимаются в (3.7.11) как объекты в $\text{Vect}(N) \otimes \text{Vect}(N)$ (1, 2 — номера пространств), являются q -аналогами метрической и симплектической матриц C_0 для $SO(N)$ и $Sp(N)$ соответственно. Явный вид этих матриц, который приведен в [10] (см. также п.3.8), для нас пока не существует, отметим, однако, равенство

$$C^{-1} = \varepsilon C. \quad (3.7.12)$$

Подставляя матричные представления (3.1.18) для T_j^i в соотношения (3.7.10), мы получаем следующие условия на R -матрицы:

$$R_{12} = C_1 (R_{12}^t)^{-1} C_1^{-1} = C_2 (R_{12}^{-1})^t C_2^{-1}, \quad (3.7.13)$$

где, как обычно, $C_1 = C \otimes I$ и $C_2 = I \otimes C$. Следствиями (3.7.13) являются дополнительные условия на образующие дуальной алгебры (3.1.20):

$$L_2^\pm L_1^\pm |C\rangle_{12} = |C\rangle_{12}, \quad \langle C^{-1}|_{12} L_2^\pm L_1^\pm = \langle C^{-1}|_{12},$$

а также равенство

$$R_{12}^{t,t} = C_1^{-1} C_2^{-1} R_{12} C_1 C_2, \quad (3.7.14)$$

которое понадобится нам ниже. Квазиклассические аналоги условий (3.7.13) и (3.7.14) имеют вид

$$r_{12} = - (C_0)_1 r_{12}^t (C_0)_1^{-1} = - (C_0)_2 r_{12}^t (C_0)_2^{-1} = (C_0)_1 (C_0)_2 r_{12}^{t,t} (C_0)_1^{-1} (C_0)_2^{-1}.$$

Из равенств (3.7.10) и (3.7.12) следует, что антипод $S(T) = CT^t C^{-1}$ для $AX \text{ Fun}(SO_q(N))$ и $\text{Fun}(Sp_q(N))$ удовлетворяет соотношению

$$S^2(T) = (\bar{C} C^t) T (C C^t)^{-1}, \quad (3.7.15)$$

которое аналогично (3.1.7). Таким образом, матрица D , определяющая квантовый след для квантовых групп B -, C -, D -серий, может быть выбрана в виде:

$$D = C C^t \Leftrightarrow D_j^i = C^{ik} C^{jk}. \quad (3.7.16)$$

Заметим теперь, что матрица $|C\rangle_{12}\langle C^{-1}|_{12} \in \text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$ проецирует любой вектор $|X\rangle_{12}$ на вектор $|C\rangle_{12}$, т.е. ранг проектора $|C\rangle\langle C^{-1}|$ равен 1. Кроме того, из (3.7.11) мы имеем

$$|C\rangle\langle C|TT' = TT'|C\rangle\langle C|.$$

Следовательно, $|C\rangle\langle C^{-1}| \sim P^0$, и, как было установлено в [10],

$$|C\rangle\langle C^{-1}| \equiv K. \quad (3.7.17)$$

Используя это соотношение, равенства (3.7.10), (3.7.11) можно представить в другой эквивалентной форме:

$$TT'K = KTT' = K. \quad (3.7.18)$$

Теперь мы приведем ряд важных соотношений для матриц R и K , многие из которых в той или иной форме содержатся в [10]. Прежде всего заметим, что согласно (3.1.4) мы имеем

$$KR'R = R'RK' \Leftrightarrow RR'K = K'RR'. \quad (3.7.19)$$

Далее из уравнений (3.7.13) и (3.7.17) (или подставляя матричные представления (3.1.18) в (3.7.18)) мы получаем

$$R^{\pm 1}R^{\pm 1}K = PP'K = K'PP', \quad KR^{\pm 1}R^{\pm 1} = KP'P = P'PK', \quad (3.7.20)$$

где $P = P_{12}$ и $P' = P_{23}$. Следствием этих соотношений являются равенства

$$R^{\pm 1}KR^{\pm 1} = R^{\mp 1}K'R^{\mp 1} \Leftrightarrow RR'K = K'R^{-1}R^{-1}, \\ R'RK' = KR'^{-1}R^{-1}. \quad (3.7.21)$$

В частности, учитывая характеристическое уравнение (3.7.4), мы получим тождество

$$RK'R = R^{-1}KR^{-1} = \\ = R'KR' + \lambda(RK' - KR' - R'K + K'R) + \lambda^2(K - K'), \quad (3.7.22)$$

которое будет использовано в п.3.9. Равенство (3.7.17) приводит к тождествам

$$KK' = KP'P = P'PK', \quad K'K = PP'K = K'PP', \quad (3.7.23)$$

откуда мы сразу же получаем

$$KK'K = K, \quad K'KK' = K'. \quad (3.7.24)$$

Сравним теперь соотношения (3.7.20) и (3.7.23). Результатом этого сравнения являются равенства

$$R^{\pm 1}R^{\pm 1}K' = KK' = KR^{\pm 1}R^{\pm 1}, \quad R^{\pm 1}R^{\pm 1}K = K'K = K'R^{\pm 1}R^{\pm 1}. \quad (3.7.25)$$

Подействуем теперь на первую цепочку равенства в (3.7.25) справа матрицей $\mathbf{K}$ (или слева $\mathbf{K}'$) и учтем (3.7.3), (3.7.24). Тогда имеем

$$\mathbf{K}'\mathbf{R}^{\pm 1}\mathbf{K}' = v^{\mp 1}\mathbf{K}', \quad \mathbf{K}\mathbf{R}^{\pm 1}\mathbf{K} = v^{\mp 1}\mathbf{K}. \quad (3.7.26)$$

Как мы увидим в п. 3.9, соотношений (3.7.19)+(3.7.26) будет достаточно для построения $SO_q(N)$ - и $Sp_q(2n)$ -симметричных бакстеризованных $\mathbf{R}(x)$ -матриц. Соотношения (3.7.19), (3.7.21), (3.7.24) + (3.7.26) имеют естественное графическое представление, если мы воспользуемся диаграммой техникой

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \mathbf{R}^{-1} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad I_1 I_2 = \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \quad \mathbf{K} = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \cdot \quad (3.7.26')$$

Выведем теперь ряд важных формул для квантового следа (3.1.13), соответствующего квантовым группам $SO_q(N)$ и $Sp_q(N)$. Аналогичные формулы для q -следа (3.1.15) выводятся абсолютно таким же образом. Из определений матрицы $\mathbf{K}$ (3.7.17) и матрицы D (3.7.16) получаем

$$\mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{K}) = \varepsilon I_{(1)}. \quad (3.7.27)$$

Воспользуемся соотношениями (3.7.14) и определением квантового следа (3.1.13) с матрицей D (3.7.16); тогда для произвольной квантовой матрицы E_j^i мы получаем формулы ($E \equiv E_1$):

$$\mathbf{R}^n \mathbf{E} \mathbf{K} = \varepsilon \mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{R}^n) \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{R}^n = \varepsilon \mathbf{K} \mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^n \mathbf{E} \mathbf{K}), \quad \forall n. \quad (3.7.28)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{K} = \varepsilon \mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{E}) \mathbf{K}. \quad (3.7.29)$$

Вычисляя Tr_{q_2} от (3.7.28), мы выводим равенство

$$\mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^n \mathbf{E} \mathbf{K}) = \mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{R}^n), \quad \forall n. \quad (3.7.30)$$

Далее из первого тождества (3.7.26), усредняя его с помощью Tr_{q_2} , легко получить для алгебр $\mathrm{Fun}(SO_q(N))$ и $\mathrm{Fun}(Sp_q(N))$ аналоги формул (3.1.16), которые выглядят следующим образом:

$$\mathrm{Tr}_{q_2}(\mathbf{R}^{\pm}) \equiv \mathrm{Tr}_2(CC' \mathbf{R}^{\pm}) = q^{\pm(N-\varepsilon)} I_{(1)} = \varepsilon v^{\mp 1} I_{(1)}. \quad (3.7.31)$$

Используя это соотношение и равенство (3.7.4), можно вычислить

$$\mathrm{Tr}_q(I) = \varepsilon + [N - \varepsilon]_q = \varepsilon \mu. \quad (3.7.32)$$

Произведем теперь выделение неприводимых представлений для присоединенных левых комодулей (3.1.11). Для произвольной $N \times N$ квантовой матрицы E_j^i имеем

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(EK) = \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(P^0 EK + P^+ EK + P^- EK) \equiv E^{(1)} + E^{(+)} + E^{(-)}, \\ E &= \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(KE) = \varepsilon \text{Tr}_{q_2}(KEP^0 + KEP^+ + KEP^-) \equiv \\ &\equiv E^{(1)} + E^{(+)} + E^{(-)}. \end{aligned} \quad (3.7.33)$$

Очевидно, что тензоры $E^{(i)}$ ($i = \pm, 1$) инвариантны относительно присоединенного кодействия (3.1.11) и $\text{Tr}_{q_2}(P^{(j)}E^{(i)}K) = 0$ (если $i \neq j$) в силу (3.7.28). Таким образом, (3.7.33) есть искомое разложение присоединенного комодуля E на неприводимые компоненты. Ясно, что компонента $E^{(1)}$ пропорциональна единичной матрице $(E^{(1)})_j^i = E^{(1)} \delta_j^i$, таким образом, применяя Tr_{q_1} к (3.7.33), мы получаем

$$\text{Tr}_q(E) = E^{(1)} \text{Tr}_q(I) = \varepsilon \mu E^{(1)}, \quad (3.7.34)$$

при этом мы воспользовались свойством (3.3.16), которое выполняется и для случая квантовых групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$.

В конце этого подраздела заметим, что так же, как и в случае линейных квантовых групп, мы можем определить фермионные и бозонные квантовые гиперплоскости, ковариантные относительно кодействий групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(N)$. Учитывая ранги проекторов (3.7.8), (3.7.9), мы можем сформулировать определения гиперплоскостей для $SO_q(N)$ ($\varepsilon = 1$) и для $Sp_q(N)$ ($\varepsilon = -1$) в виде

$$(P^- + (\varepsilon - 1) K) xx' = 0 \quad (3.7.35)$$

— бозонная гиперплоскость (число соотношений $N(N - 1)/2$) и

$$(P^+ + (\varepsilon + 1) K) xx' = 0 \quad (3.7.36)$$

— фермионная гиперплоскость (число соотношений $N(N + 1)/2$). Для всех этих алгебр элементы Kxx' являются центральными, и, очевидно, для $Sp_q(N)$ -бозонов и $SO_q(N)$ -фермионов мы имеем $Kxx' = 0$. Отметим, что условия (3.7.10), (3.7.11) можно понимать как условия инвариантности квадратичных форм $x_{(1)} C^{-1} x_{(2)}$, $y_{(1)} C y_{(2)}$ относительно левых и правых преобразований гиперплоскостей $x_{(k)}$, $y_{(k)}$:

$$x_{(k)}^i \rightarrow T_j^i \otimes x_{(k)}^j, \quad y_{(k)_i} \rightarrow y_{(k)_j} \otimes T_i^j.$$

3.8. Многопараметрический случай $SO_{q,a_{ij}}(N)$ и $Sp_{q,a_{ij}}(N)$ -групп и квантовые супергруппы $Osp_q(N|2m)$. В этом разделе мы покажем, что можно определить многопараметрические деформации групп $SO(N)$ и $Sp(2n)$, а также квантовые супергруппы $Osp_q(N|2m)$, если рассмотреть следующий анзац для R -матрицы [27]:

$$R = \hat{R}_{j_1, j_2}^{i_1, i_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} a_{i_1 i_2} + \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} b_{i_1 i_2} \Theta_{i_2 i_1} + \delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}^{i_2 i_1} d_{j_1 j_2}^{i_2 i_1} \Theta_{j_1 j_2}^{i_2 i_1} = \quad (3.8.1)$$

$$= \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ a_{i_1 i_2} \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_1 \quad j_2 \end{array} + \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \\ | \quad | \\ b_{i_1 i_2} \\ | \quad | \\ j_1 \quad j_2 \end{array} + \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ d_{j_1 j_2}^{i_2 i_1} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ j_1 \quad j_2 \end{array},$$

где $\Theta_j^i = \Theta_{ij}$, $j' = K + 1 - j$, $K = N$ для групп $SO(N)$, $Sp(N)$ и $K = N + 2m$ для групп $Osp(N|2m)$. Выражение (3.8.1) является естественным обобщением выражения (3.4.3) для многопараметрической R -матрицы, соответствующей линейным квантовым группам. А именно третье слагаемое в (3.8.1) сконструировано из SO -инвариантного тензора $\delta_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$, учитывающего наличие инвариантных метрик для рассматриваемых групп. Функции Θ введены в формулу (3.8.1) для того, чтобы матрица $R_{12} = P_{12} R$ имела блочный нижнетреугольный вид. Это необходимо для корректного определения операторов $L^{(\pm)}$ с помощью формул (3.1.19).

Подставим R -матрицу (3.8.1) в УЯБ (3.1.3). Очевидно, что первые два члена из (3.8.1) дадут в УЯБ вклады, аналогичные вкладам в УЯБ для многопараметрического случая линейных квантовых групп (см. п.3.4). Поэтому ясно, что для параметров a_{ij} и b_{ij} мы воспроизведем условия (3.4.4), которые в удобной нормировке $c = 1$, $b = q - q^{-1}$ имеют вид

$$b_{ij} = b = \lambda, \quad a_{ii} = a_i^0 = \pm q^{\pm 1} (\forall i, j), \quad a_{ij} a_{ji} = 1 \text{ (для } i \neq j, i \neq j'). \quad (3.8.2)$$

Заметим, что последнее условие в (3.8.2) несколько ослаблено по сравнению с (3.4.4) (из-за наличия ограничения $i \neq j'$). Это связано с тем, что вклады в УЯБ, пропорциональные a_{ii} , начинают сокращаться с вкладками

от третьего слагаемого из (3.8.1). Соответствующее условие на $a_{ii'}$, необходимое для выполнения УЯБ, может быть записано следующим образом:

$$a_{jj'} = a_{j'j} = \kappa_j (a_j^0 - b) \quad (j \neq j') \Leftrightarrow a_j^0 a_{jj'} = a_{j'}^0 a_{j'j} = \kappa_j \quad (j \neq j'), \quad (3.8.3)$$

где для констант κ_j мы имеем $\kappa_j = \pm 1$. С учетом равенств (3.8.2) соотношения (3.8.3) эквивалентны двум возможностям ($j \neq j'$):

$$1) a_j^0 = q \rightarrow \frac{a_{jj'}}{\kappa_j} = q^{-1}, \quad 2) a_j^0 = -q^{-1} \rightarrow \frac{a_{jj'}}{\kappa_j} = -q. \quad (3.8.4)$$

Нижe мы увидим, что если мы ограничимся рассмотрением только первой возможности (или только второй), то получим R -матрицы для квантовых групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. Если же мы рассмотрим смешанный случай, когда выполняются обе возможности (для разных j), то мы вправе ожидать (по аналогии с линейными квантовыми группами, см. п.3.6), что соответствующая R -матрица будет связана с супергруппами $Osp_q(N|2m)$. Случай $j = j'$, очевидно, реализуется только для групп серии B ($SO_q(2n+1)$) и для супергрупп $Osp_q(2n+1|2m)$, и из УЯБ (3.1.3) следует, что

$$a_{jj'} \Big|_{j=j'=\frac{K+1}{2}} = 1. \quad (3.8.5)$$

Для групп $SO_q(2n)$ и $Sp_q(2n)$ параметр $a_{jj'}$, ($j = j'$) просто отсутствует. Дальнейший учет вкладов в УЯБ от третьего слагаемого из (3.8.1) приводит к уравнениям

$$a_{ij} a_{i'j} = \kappa_j, \quad a_{ji} a_{ji'} = \kappa_j, \quad \kappa_i = (\kappa_i')^{-1} = \pm 1, \quad (3.8.6)$$

$$\lambda d_k^j \kappa_i + d_i^j d_k^i = 0 \quad (3.8.7)$$

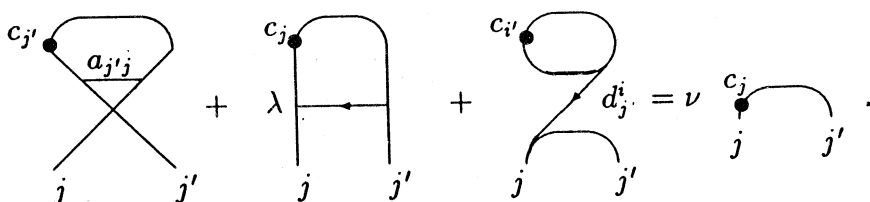
(по повторяющимся индексам суммирования нет). Общее решение уравнения (3.8.7) имеет вид

$$d_j^i = -\lambda \kappa_i \frac{c_j}{c_i}, \quad (3.8.8)$$

где пока c_k — произвольные параметры. Оставшиеся члены в УЯБ, не сокращающиеся при выполнении условий (3.8.2)—(3.8.8), дают рекуррентные соотношения на коэффициенты c_i :

$$c_j \cdot a_{j'j} + \lambda c_j \Theta_{j'j} - \lambda c_j \sum_{i>j} \kappa_i \frac{c_{i'}}{c_i} = \nu c_j. \quad (3.8.9)$$

Данные соотношения графически изображаются в виде:



Отметим, что соотношения (3.8.9) автоматически приводят к характеристическому уравнению (3.7.4) и эквивалентны равенствам (3.7.3), если мы определим метрические (симплектические) матрицы C (см. (3.7.17)) в виде

$$C^{ij} = \varepsilon \delta^{ij'} \frac{1}{c_j}, \quad (C^{-1})_{ij} = \varepsilon \delta_{ij'} c_i. \quad (3.8.10)$$

Здесь параметр $\varepsilon = \pm 1$ (см. п.3.7) введен для согласования определения матриц C с определением в [10]. Отметим также, что постоянная ν фиксируется соотношениями (3.8.9) однозначно.

Займемся теперь решением уравнений (3.8.9), которые перепишем в виде

$$\gamma_j a_{j'j} + \lambda \Theta_{j'j} - \lambda \sum_{i=j+1}^K \kappa_i \gamma_i = \nu, \quad (3.8.11)$$

где

$$\gamma_j = \frac{1}{\gamma_{j'}} = \frac{c_{j'}}{c_j}. \quad (3.8.12)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только случая $\kappa_i = +1$, т.к. случай $\kappa_i = -1$ дает те же R -матрицы. Уравнение (3.8.11) легко решается подстановкой

$$X_j = q^{2j} \sum_{i>j} \gamma_i,$$

после чего мы находим параметры $\gamma_j = q^{-2j}(q^2 X_{j-1} - X_j)$ и фиксируем ν , учитывая свойство (3.8.12).

А) Для групп $SO_q(N)$ ($\varepsilon = +1$) и $Sp_q(N)$ ($\varepsilon = -1$) мы используем возможность 1 из (3.8.4) (возможность 2 дает аналогичный результат с точностью до замены $q \rightarrow -q^{-1}$). Соответствующее решение (3.8.11) имеет вид

$$\gamma_j \equiv \frac{c_{j'}}{c_j} = \nu q^{2(N-j)+1} (j > j'), \quad \nu = \varepsilon q^{\varepsilon - N}. \quad (3.8.13)$$

Б) Для групп $Osp(N | 2m)$ мы выбираем градуировку согласно правилам: $(j) = 0$ для $m + 1 \leq j \leq m + N$ и $(j) = 1$ для $1 \leq j \leq m$, $m + N + 1 \leq j \leq N + 2m$. Таким образом, при $(j) = 0$ реализуется возможность 1, а при $(j) = 1$ реализуется возможность 2, указанные в (3.8.4). Соответственно мы получаем

$$\gamma_j = (-1)^{(j)\vee q} (-1)^{(j)2(N-j)+1-(j)4m}, \quad \vee = q^{1+2m-N}. \quad (3.8.14)$$

Очевидно, что для групп $SO_q(2n+1)$ и $Osp_q(2n+1|2m)$ мы имеем $\gamma_j = \gamma_{j'} = 1$ при $j = j'$. Заметим, что, полагая в (3.8.14) $m = 0$ или $N = 0$, $q \rightarrow -q^{-1}$, мы воспроизводим (3.8.13).

Для того, чтобы определить из условий (3.8.13) параметры c_j и фиксировать матрицы C (3.8.10), мы потребуем выполнения соотношения (3.7.12). Подстановка (3.8.10) в (3.7.12) дает равенство $c_j c_{j'} = \epsilon$, которое вместе с (3.8.13) позволяет выбрать c_j в виде [10]:

$$c_j = -q^{j - \frac{1}{2}(N + \epsilon + 1)} (j > j') \Rightarrow c_j = \epsilon_j q^{-p_j}, \quad (3.8.15)$$

где $\epsilon_i = +1 \forall i$ (группы $SO_q(N)$), $\epsilon_i = +1 (1 \leq i \leq n)$, $\epsilon_i = -1 (n+1 \leq i \leq 2n)$ (группы $Sp_q(2n)$) и

$$(\rho_1, \dots, \rho_N) = \begin{cases} \left(n - \frac{1}{2}, n - \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, -n + \frac{1}{2} \right) B : (SO_q(2n+1)), \\ (n, n-1, \dots, 1, -1, \dots, -n) C : (Sp_q(2n)), \\ (n-1, n-2, \dots, 1, 0, 0, -1, \dots, -n+1) D : (SO_q(2n)). \end{cases}$$

Аналогом соотношения (3.7.12) для групп $Osp_q(N | M)$ является равенство

$$C^{ij} = (-1)^{(i)} (C^{-1})_{ij} \Rightarrow (-1)^{(i)} c_i c_{i'} = 1,$$

и с учетом (3.8.14) мы имеем

$$c_j = -q^{(-1)^{(j)}(j-m-\frac{N}{2})-1+(j)(N+1)} (j > j'),$$

где $(j) = 0, 1$.

В заключение приведем окончательный вид для R -матрицы (3.8.1), соответствующей многопараметрической деформации групп $SO(N)$ и $Sp(2n)$ [27]:

$$\begin{aligned} R_{12} = & R_{j_1' j_2}^{i_1' i_2} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \times \\ & \times \left(q \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \Big|_{i_1 \neq i_2'} + q^{-1} \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2'} \Big|_{i_1 \neq i_2} + \Theta_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1} \Big|_{i_1 \neq i_2'} + \Theta_{i_2 i_1} \frac{1}{a_{i_1 i_2}} \Big|_{i_1 \neq i_2'} + \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2'} \right) + \\ & + \lambda \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \Theta_{i_1 i_2} - \lambda \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2'} \Theta_{j_1 j_2'} \Theta_{j_1}^{i_1} \epsilon_{i_1} \epsilon_{j_1} q^{p_{i_1} - p_{j_1}}. \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

Здесь мы учли соотношения (3.8.2), (3.8.4), (3.8.5), (3.8.8), (3.8.15) и положили $\kappa_i = +1$. Необходимо также учесть условия (3.8.6), которые показывают, что независимыми параметрами являются q и a_{ij} при $i < j \leq j'$ (число этих параметров равно: $n(n-1)/2 + 1$ и $n(n+1)/2 + 1$ соответственно для групп серий C, D и B). Заметим, что последнее слагаемое в круглых скобках в выражении (3.8.16) присутствует лишь для групп серии B . Если мы положим $a_{ij} = 1$, то R -матрицы (3.8.16) совпадут с однопараметрическими R -матрицами, приведенными в [10].

Построенные в данном подпункте R -матрицы для квантовых супергрупп можно получить исходя из результатов работы [35], где получены бакстеризованные тригонометрические решения УЯБ, связанные с классическими супергруппами $Osp(N|2m)$. Рациональные решения, некоторые частные случаи и другие вопросы, относящиеся к теме квантовых супергрупп $Osp_q(N|2m)$, обсуждались также в работах [36,38].

3.9. $SO_q(N)$ - и $Sp_q(N)$ -инвариантные бакстеризованные R -матрицы.

Рассуждая так же, как в п.3.5, мы приходим к заключению, что $SO_q(N)$ - и $Sp_q(N)$ -инвариантные бакстеризованные матрицы $R(x)$ необходимо искать (в силу кубичности характеристического уравнения (3.7.1)) в виде линейной комбинации трех базисных матриц $1, R, R^2$. Выражая R^2 через K , мы можем представить $R(x)$ в виде

$$R(x) = c(x) (1 + a(x) R + b(x) K), \quad (3.9.1)$$

где $a(x), b(x), c(x)$ — некоторые функции, зависящие от спектрального параметра x . Функции $a(x), b(x)$ мы определим из УЯБ (3.5.2), для чего рассмотрим выражение

$$X(a_i, \bar{a}_i, b_j, \bar{b}_j) = (1 + a_1 R + b_1 K) (1 + a_2 R' + b_2 K') (1 + a_3 R + b_3 K) - \\ - (1 + \bar{a}_3 R' + \bar{b}_3 K') (1 + \bar{a}_2 R + \bar{b}_2 K) (1 + \bar{a}_1 R' + \bar{b}_1 K'). \quad (3.9.2)$$

Здесь $1 = I^{\otimes 3}$, $K = K_{12}$, $K' = K_{23}$. Воспользовавшись равенствами (3.7.19) — (3.7.26) мы получаем для величины $X(a, \bar{a}, b, \bar{b})$ (3.9.2) следующее выражение:

$$X(a, \bar{a}, b, \bar{b}) = (a_1 a_3 - \overline{a_1 a_3}) + (\kappa + \lambda^2 \eta) K - (\bar{\kappa} + \lambda^2 \bar{\eta}) K' + \\ + (a_1 + a_3 + \lambda a_1 a_3 - \bar{a}_2) R - (\bar{a}_1 + \bar{a}_3 + \lambda \bar{a}_1 \bar{a}_3 - a_2) R' + \\ + (\beta - \bar{\beta}) K K' + (\gamma - \bar{\gamma}) K' K + (a_1 a_2 - \overline{a_1 a_2}) R R' + (a_2 a_3 - \overline{a_2 a_3}) R' R + \\ + (\rho - \lambda \eta) K R' - (\bar{\rho} - \lambda \eta) R K' + (\sigma - \lambda \eta) R' K - (\bar{\sigma} - \lambda \eta) K' R + \\ + (a_1 a_2 a_3 - \overline{a_1 a_2 a_3}) R R' R + (\eta - \bar{\eta}) R' K R'. \quad (3.9.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \kappa &= b_3 - \bar{b}_2 + a_1(vb_3 - \lambda va_3 - \lambda b_2 b_3) + b_1(1 + va_3 - \lambda a_3 b_2) + \\
 &\quad + b_1 b_3(\mu + v^{-1}a_2 + b_2), \\
 \beta &= b_1 b_2 + a_2 a_3 b_1 + \lambda a_3 b_1 b_2, \quad \gamma = b_2 b_3 + a_1 a_2 b_3 + \lambda a_1 b_2 b_3, \\
 \rho &= a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 - \overline{a_1 b_2}, \quad \sigma = a_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 - \overline{a_3 b_2}, \\
 \eta &= a_1 a_3 b_2,
 \end{aligned} \tag{3.9.4}$$

и мы полагаем $\overline{\kappa(a, \bar{a}, b, \bar{b})} = \kappa(\bar{a}, a, \bar{b}, b)$ и так далее.

Рассмотрим уравнение $X(a, \bar{a}, b, \bar{b}) = 0$, где будем считать, что $\bar{a}_i = a_i$, $\bar{b}_i = b_i$ и положим

$$a_1 = a(x), \quad a_2 = a(xy), \quad a_3 = a(y), \quad b_1 = b(x), \quad b_2 = b(xy), \quad b_3 = b(y).$$

Тогда уравнение $X = 0$ сведется к УЯБ (3.5.2), а на переменные a_i и b_i возникают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_3 + \lambda a_1 a_3 &= a_2, \\
 b_3 - b_2 - \lambda va_1 a_3 + va_1 b_3 - \lambda a_1 b_2 b_3 + b_1(1 + va_3 - \lambda a_3 b_2 + \\
 &\quad + \mu b_3 + v^{-1}a_2 b_3 + b_2 b_3) + \lambda^2 a_1 a_3 b_2 = 0, \\
 a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 &= a_1 b_2 + \lambda a_1 a_3 b_2, \\
 a_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 &= a_3 b_2 + \lambda a_1 a_3 b_2.
 \end{aligned} \tag{3.9.5}$$

Приведенные четыре соотношения эквивалентны трем функциональным уравнениям:

$$a(x) + a(y) + \lambda a(x) a(y) = a(xy), \tag{3.9.6}$$

$$\begin{aligned}
 b(y) - b(xy) + a(x) [vb(y) - \lambda va(y) - \lambda b(xy) b(y) + \lambda^2 a(y) b(xy)] + \\
 + b(x) [1 + va(y) - \lambda a(y) b(xy) + \mu b(y) + \\
 + v^{-1}a(xy) b(y) + b(xy) b(y)] = 0,
 \end{aligned} \tag{3.9.7}$$

$$a(xy) b(y) + a(x) b(xy) b(y) = b(xy) (a(y) + \lambda a(x) a(y)), \tag{3.9.8}$$

так как третье и четвертое соотношения в (3.9.5) дают одно и то же уравнение (3.9.8). Уравнение (3.9.6), как и следовало ожидать, совпадает с уравнением (3.5.3), полученным в случае $GL_q(N)$, и его общее решение приведено в (3.5.4). С помощью (3.9.6) можно преобразовать правую часть уравнения (3.9.8) так, что (3.9.8) сводится к равенству

$$\frac{a(x)}{a(xy)} = \frac{b(xy) - b(y)}{b(xy)(b(y) + 1)} \equiv 1 - \frac{b(y)(1 + b(y))^{-1}}{b(xy)(1 + b(xy))^{-1}}. \quad (3.9.9)$$

Заметим теперь, что уравнение (3.9.6) можно переписать в виде

$$\frac{a(x)}{a(xy)} = 1 - \frac{a(y)(\lambda a(y) + 1)^{-1}}{a(xy)(\lambda a(xy) + 1)^{-1}}. \quad (3.9.10)$$

Сравнивая (3.9.9) и (3.9.10), мы приходим к утверждению

$$\frac{a(y)(b(y) + 1)}{(\lambda a(y) + 1)b(y)} = \text{const} \equiv \frac{\alpha + 1}{\lambda}, \quad (3.9.11)$$

где α — произвольный параметр. Специфический выбор константной величины в правой части (3.9.11) сделан из соображений дальнейших удобств. Подставив решение (3.5.4) в (3.9.11), мы получаем следующее общее выражение для $b(y)$:

$$b(y) = \frac{y^\xi - 1}{\alpha y^\xi + 1}. \quad (3.9.12)$$

Замечательным фактом является то, что уравнение (3.9.7) выполняется тождественно на функциях (3.5.4) и (3.9.12), если константа α удовлетворяет квадратному уравнению

$$\alpha^2 - \frac{\lambda}{v} \alpha - \frac{1}{v^2} = 0, \quad (3.9.13)$$

два решения которого легко находятся:

$$\alpha_{\pm} = \pm \frac{q^{\pm 1}}{v} = \pm \varepsilon q^{N - \varepsilon \pm 1}. \quad (3.9.14)$$

Таким образом, решения УЯБ (3.5.2) представимы в виде

$$\mathbf{R}(x) = c(x) \left(\mathbf{1} + \frac{1}{\lambda} (x^\xi - 1) \mathbf{R} + \frac{x^\xi - 1}{\alpha x^\xi + 1} \mathbf{K} \right), \quad (3.9.15)$$

и мы имеем две возможности $\alpha = \alpha_{\pm}$ (3.9.14), которые являются неэквивалентными (как для $SO_q(N)$ -, так и для $Sp_q(N)$ -случая), так как никакими функциональными преобразованиями спектрального параметра полученные решения нельзя свести одно к другому. Выберем для удобства в (3.9.15) $c(x) = \lambda x$ и $\xi = -2$, тогда для R -матриц (3.9.15) можно предложить четыре эквивалентные формы записи:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(x) &= x^{-1} \mathbf{R} - x \mathbf{R}^{-1} + \lambda \frac{\alpha_{\pm} + 1}{\alpha_{\pm} x^{-1} + x} \mathbf{K} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{\pm} x^{-1} + x} (-\mathbf{R}^{-1} x^2 + (\mathbf{R} - \alpha_{\pm} \mathbf{R}^{-1} + \lambda(\alpha_{\pm} + 1) \mathbf{K}) + \alpha_{\pm} \mathbf{R} x^{-2}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x - x^{-1}}{x + \alpha_{\pm} x^{-1}} \left(-x\mathbf{R}^{-1} - \alpha_{\pm} x^{-1}\mathbf{R} + \frac{\lambda(\alpha_{\pm} + 1)}{x - x^{-1}} \right) = \\
 &= (x^{-1}q - xq^{-1}) \mathbf{P}^{+} + (xq - (xq)^{-1}) \mathbf{P}^{-} + \\
 &\quad + \frac{(\alpha_{\pm} + x^{-2})(v\alpha_{\pm} + (\lambda + v\alpha_{\pm})x^2)}{x + \alpha_{\pm} x^{-1}} \mathbf{P}^0.
 \end{aligned} \tag{3.9.16}$$

Последняя формула определяет спектральное разложение $\mathbf{R}(x)$, из которого, например, можно легко получить

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(1) &= \lambda \mathbf{1}, \quad \mathbf{R}(i) = \pm i(q + q^{-1})(1 - 2\mathbf{P}^{\pm}) = \pm i(q + q^{-1}) \sigma^{\pm}, \\
 \mathbf{R}(x) \mathbf{R}(x^{-1}) &= (\lambda^2 - (x - x^{-1})^2) \mathbf{1}.
 \end{aligned} \tag{3.9.17}$$

Соотношения (3.9.17) согласуются с УЯБ (3.5.2). Второе соотношение из (3.9.17) дает связь $\mathbf{R}(i)$ с операторами, введенными в (3.1.30) (знаки $\pm$ соответствуют выбору параметра $\alpha = \alpha_{\pm}$).

Бакстеризованные $\mathbf{R}$ -матрицы (3.9.15), (3.9.16) должны определять алгебры с определяющими соотношениями (3.5.6). Однако реализация операторов $L(x)$ в терминах генераторов $L^{(\pm)}$ квантовых алгебр $U_q(so(N))$ и $U_q(sp(N))$, (аналогичная (3.5.7)), автору, к сожалению, не известна. Данная реализация была бы чрезвычайно полезной для многих приложений.

В заключение приведем выражения для R -матриц янгианов $Y(so(N))$ и $Y(sp(N))$. Эти R -матрицы получаются из (3.9.15) после подстановки

$$\xi = -2, \quad x = \exp(-\lambda\theta/2),$$

подходящего выбора нормировочной функции $c(x)$ и предельного перехода $h \rightarrow 0$ ($q = \exp(h) \rightarrow 1$). Далее легко увидеть, что случаи $\alpha = \alpha_{+}$, $\varepsilon = 1$ ($SO_q(N)$) и $\alpha = \alpha_{-}$, $\varepsilon = -1$ ($Sp_q(2n)$) сводятся к R -матрице Янга (3.5.11). Нетривиальные $SO(N)$ и $Sp(N)$ симметричные янгианские R -матрицы для $Y(so(N))$ и $Y(sp(N))$ соответствуют выбору в (3.9.15): $c(x) = 2 - \varepsilon(N + 2\theta)$,

$$\alpha = \alpha_{-}, \quad \varepsilon = 1 \text{ } (SO_q(N)); \quad \alpha = \alpha_{+}, \quad \varepsilon = -1 \text{ } (Sp_q(N)), \tag{3.9.18}$$

и имеют вид

$$\mathbf{R}(\theta) = (2 - \varepsilon(N + 2\theta)) \mathbf{1} + \theta(2 - \varepsilon(N + 2\theta)) P_{12} + \varepsilon 2\theta K_{12}^{(0)}. \tag{3.9.19}$$

Далее все формулы для янгианов $Y(so(N))$ и $Y(sp(N))$ совпадают с формулами (3.5.10), (3.5.12) и (3.5.13).

Янгианная R -матрица (3.9.19) для случая группы $SO(N)$ была найдена в [3], а для $Sp(2n)$ — в [39]. Эти R -матрицы использовались в [28] для построения и исследования точно решаемых $SO(N)$ - и $Sp(2n)$ -симметричных маг-

нетиков. Бакстеризованные тригонометрические R -матрицы (3.9.15), соответствующие значениям параметров (3.9.18), были впервые найдены В.В.Бажановым в 1984 г. и опубликованы в [40]. Эти же R -матрицы независимо были построены в [41].

3.10. Эллиптические решения УЯБ. Рассмотрим $Z_N \otimes Z_N$ симметричные решения УЯБ (3.5.9) [42]. Элементы $R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(\theta)$ соответствующей R -матрицы будут выражаться через эллиптические функции от спектрального параметра θ .

Построим это решение явно, следуя методике работы [42]. Рассмотрим две матрицы g и h такие, что $g^N = h^N = 1$:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^{N-1} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10.1)$$

где $\omega = \exp(2\pi i/N)$ и $hg = \omega gh$. Матрицы g и h являются Z_N градуированными генераторами алгебры $\text{Mat}(N)$, градуированный базис для которой может быть выбран в виде

$$I_\alpha = I_{\alpha_1 \alpha_2} = g^{\alpha_1} h^{\alpha_2}, \quad \alpha_{1,2} = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.10.2)$$

С другой стороны, матрицы (3.10.2) реализуют проективное представление группы $Z_N \otimes Z_N$: $I_\alpha I_\beta = \omega^{\alpha_2 \beta_1} I_{\alpha+\beta}$. Теперь любая матрица $R_{12}(\theta) = R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(\theta)$ может быть записана в виде

$$R_{12}(\theta) = W_{\alpha, \beta}(\theta) I_\alpha \otimes I_\beta.$$

Рассмотрим $Z_N \otimes Z_N$ инвариантное подмножество таких матриц:

$$R_{12}(\theta) = W_\alpha(\theta) I_\alpha \otimes I_\alpha^{-1}, \quad (3.10.3)$$

где $I_\alpha^{-1} = h^{-\alpha_2} g^{-\alpha_1} = \omega^{\alpha_1 \alpha_2} I_{-\alpha}$. Инвариантность матриц (3.10.3) выражается соотношениями

$$R_{12}(\theta) = I_\gamma^{\otimes 2} R_{12}(\theta) (I_\gamma^{\otimes 2})^{-1}, \quad (3.10.4)$$

которые с очевидностью следуют из тождества

$$I_\gamma I_\alpha I_\gamma^{-1} = \omega^{\langle \alpha, \gamma \rangle} I_\alpha, \quad \langle \alpha, \gamma \rangle = \alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1.$$

В работе [42] было замечено, что соотношения

$$\begin{aligned}
 R_{12}(\theta + 1) &= g_1^{-1} R_{12}(\theta) g_1 = g_2 R_{12}(\theta) g_2^{-1}, \\
 R_{12}(\theta + \tau) &= \exp(-i\pi\tau) \exp(-2\pi i\theta) h_1^{-1} R_{12}(\theta) h_1 = \\
 &= \exp(-i\pi\tau) \exp(-2\pi i\theta) h_2 R_{12}(\theta) h_2^{-1}, \\
 R_{12}(0) &= I_\alpha \otimes I_\alpha^{-1} \equiv P_{12}, \quad (3.10.5)
 \end{aligned}$$

где τ — некоторый комплексный параметр (период), не противоречит УЯБ (3.5.9) и могут рассматриваться как дополнительные условия к этим уравнениям. Более того, для $Z_N \otimes Z_N$ инвариантной R -матрицы (3.10.3) условия (3.10.5) определяют решение УЯБ однозначно. Действительно, подстановка (3.10.3) в (3.10.5) приводит к уравнениям:

$$W_\alpha(\theta + 1) = \omega^{\alpha_1} W_\alpha(\theta),$$

$$W_\alpha(\theta + \tau) = \exp(-i\pi\tau) \exp(-2\pi i\theta) \omega^{-\alpha_2} W_\alpha(\theta), \quad W_\alpha(0) = 1, \quad (3.10.6)$$

решение которых может быть найдено с помощью разложения в ряд Фурье и имеет вид

$$W_\alpha(\theta) = \frac{\Theta_\alpha(\theta + \eta)}{\Theta_\alpha(\eta)}, \quad (3.10.7)$$

где

$$\Theta_\alpha(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \left[i\pi\tau \left(m + \frac{\alpha_2}{N} \right)^2 + 2\pi i \left(m + \frac{\alpha_2}{N} \right) \left(u + \frac{\alpha_1}{N} \right) \right]. \quad (3.10.8)$$

Параметр η в (3.10.7) является произвольным. Для $N = 2$ решение (3.10.7) совпадает с решением, полученным Бакстером [2] в связи с исследованием так называемой восьмивершинной решеточной модели.

Непосредственная подстановка выражения (3.10.3) в УЯБ (3.5.9) показывает, что функции $W_\alpha(\theta)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{\gamma} W_\gamma(\theta - \theta') W_{\alpha - \gamma}(\theta) W_{\beta + \gamma}(\theta') (\omega^{\langle \gamma, \beta \rangle} - \omega^{\langle \alpha - \gamma, \beta \rangle}) = 0. \quad (3.10.9)$$

Интересно отметить, что, по-видимому, до сих пор не существует прямого доказательства того, что тождество (3.10.9) выполняется при подстановке функций (3.10.7), (3.10.8). Все известные автору доказательства [43] используют, в той или иной мере, обходные пути.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре изложены основы теории квантовых групп. Мы обсудили также, каким образом можно получить тригонометрические и рациональ-

ные (янг-иановы) решения УЯБ, исходя из теории квантовых групп Ли. К сожалению, в предыдущих разделах у нас не было возможности подробно остановиться на обсуждении многочисленных приложений теории квантовых групп и УЯБ как в теоретической физике, так и в математике. В заключении мы ограничимся лишь кратким перечислением таких приложений, представляющих, по мнению автора, определенный интерес.

Прежде чем перейти к этому перечислению, напомним, что в физике конденсированных сред двумерные точно решаемые модели применяются для описания различных слоистых структур, контактных поверхностей в электронике, поверхностей сверхпроводящих жидкостей типа He II и т.д. Двумерные интегрируемые теории поля применяются для описания динамических явлений в одномерных пространственных системах (типа световодов, нервных волокон, и т.д.). Кроме того, такие теории поля (а также интегрируемые системы на одномерных цепочках) могут возникать и при редукции многомерных теорий поля (см., например, [44]).

1. Мы уже упоминали, что квантовый метод обратной задачи [1] (понятное для широкого круга читателей введение в квантовый метод обратной задачи можно найти в [45]) предназначен для конструктивной процедуры решения квантовых двумерных интегрируемых систем. Кроме того, квантовый метод обратной задачи позволяет строить квантовые интегрируемые системы на одномерных цепочках (см., например, [28, 36, 46]). Отправным пунктом является соотношение (3.5.10) для L -операторов, которое можно переписать в виде

$$R_{ij}(\theta - \theta') L_{jk}(\theta) L_{ik}(\theta') = L_{ik}(\theta') L_{jk}(\theta) R_{ij}(\theta - \theta'). \quad (4.1)$$

Здесь $L_{ik}(\theta)$ являются $(N \times N)$ -матрицами во вспомогательном пространстве V_i с матричными коэффициентами — операторами в пространстве состояний k -го узла цепочки, состоящей из M узлов:

$$L_{ik}(\theta) = I^{\otimes (k-1)} \otimes L_i(\theta) \otimes I^{\otimes (M-k)} \rightarrow [L_{ik}, L_{i'k'}] = 0 \quad (k \neq k'). \quad (4.2)$$

В формуле (4.2) символ $\otimes$ обозначает прямое произведение операторных пространств. Ясно, что из УЯБ (3.5.9) всегда следуют представления для L -операторов в виде R -матриц:

$$L_{ik}(\theta) = (R_{ik}(\theta))^{-1}, \quad L_{ik}(\theta) = R_{ki}(\theta). \quad (4.3)$$

В данном случае $L_{ik}(\theta)$ нетривиально действуют в пространстве $V_i \otimes V_k$. Для того чтобы построить интегрируемую систему, введем в рассмотрение матрицу монодромии:

$$T_i(\theta) = D_i^{(M)} L_{iM}(\theta) D_i^{(M-1)} L_{iM-1} \dots D_i^{(1)} L_{i1}(\theta). \quad (4.4)$$

Если матрицы $D^{(k)}$ удовлетворяют соотношениям

$$R_{ji}(\theta) D_i^{(k)} D_j^{(k)} = D_j^{(k)} D_i^{(k)} R_{ji}(\theta),$$

$$[D_i^{(k)}, D_j^{(r)}] = [D_i^{(k)}, L_{jr}] = 0,$$

то из (4.1) следует, что

$$R_{ji}(\theta - \theta') T_i(\theta) T_j(\theta') = T_j(\theta') T_i(\theta) R_{ji}(\theta - \theta'). \quad (4.5)$$

След матрицы монодромии (4.4) по вспомогательному пространству i образует трансфер-матрицу $t(\theta) = \text{Tr}_{(i)}(T_i(\theta))$, которая дает коммутирующее семейство операторов: $[t(\theta), t(\theta')] = 0$, что немедленно следует из (4.5). Из этого семейства выбирается некоторый локальный оператор H , который интерпретируется как гамильтониан системы. Локальность гамильтониана является естественным физическим требованием и означает, что H описывает взаимодействие только ближайших узлов цепочки. Остальные операторы из коммутирующего набора $t(\theta)$ дают бесконечный набор интегралов движения, что и указывает на интегрируемость построенной системы. Во многих известных случаях локальные гамильтонианы совпадают с логарифмическими производными трансфер-матриц:

$$H = \frac{d}{d\theta} \ln(t(\theta)) \Big|_{\theta=0}.$$

Например, если мы выберем в качестве L -операторов (4.3) янгианские R -матрицы (3.9.19), то получим $SO(N)$ ($\epsilon = +1$) и $Sp(N)$ ($N = 2n$, $\epsilon = -1$) — инвариантные модели магнетиков с гамильтонианами [28]:

$$H = \sum_{l=1}^M \left(P_{l,l+1} - \frac{2}{N-2\epsilon} K_{l,l+1} \right) + M, \quad O_{M,M+1} = O_{M,1},$$

где $K_{l,l+1} = C_{l,l+1}^{i,l+1} C_{j,l+1}^{j,l+1}$, а $P_{l,l+1} = \delta_{j,l+1}^i \delta_{i,l}^{j,l+1}$ — матрицы перестановки.

Эти модели являются обобщениями XXX-модели магнетиков Гайзенберга.

2. Уравнение Янга — Бакстера (3.5.9):

$$S_{23}(\theta - \theta') S_{13}(\theta) S_{12}(\theta') = S_{12}(\theta') S_{13}(\theta) S_{23}(\theta - \theta') \quad (4.6)$$

вместе с дополнительными соотношениями унитарности и кроссинг-симметрии:

$$S_{12}(\theta) S_{21}(-\theta) = I_{12}, \quad S_{12}(\theta) = (S_{21}(i\pi - \theta))^t, \quad (4.7)$$

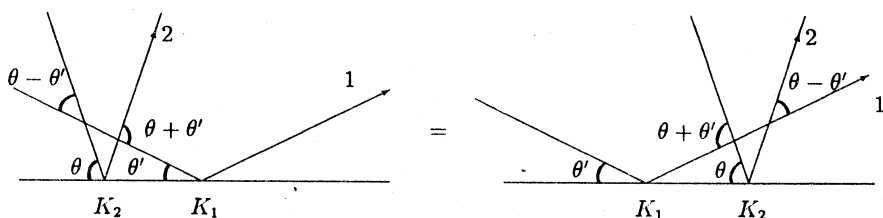
определяют однозначно факторизованные S -матрицы (с минимальным набором полюсов), описывающие рассеяние частично-подобных возбуждений в $(1+1)$ -мерных интегрируемых релятивистских моделях [3]. Матри-

ца $S_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}(\theta)$ интерпретируется как S -матрица рассеяния двух частиц с изотопическими спинами i_1, i_2 в две частицы со спинами j_1, j_2 (с сохранением первоначальных импульсов), а спектральный параметр θ есть не что иное, как разность быстрот этих частиц. Многочастичные S -матрицы распадаются на произведения двухчастичных (факторизация). В этом смысле УЯБ (4.6) есть условие однозначности определения многочастичных S -матриц.

Уравнение отражения [47,48], зависящее от спектральных параметров:

$$\begin{aligned} S_{12}(\theta - \theta') K_2(\theta) S_{21}(\theta + \theta') K_1(\theta') = \\ = K_1(\theta') S_{12}(\theta + \theta') K_2(\theta') S_{21}(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (4.8)$$

вместе с соотношениями (4.6), (4.7) определяет факторизованное рассеяние частиц (солитонов) на полупрямой [47,48]. Операторная матрица $K_1(\theta) = K_{j_1}^{i_1}(\theta)$ в этом случае описывает акт отражения частицы с быстротой θ в конечной точке полупрямой. Графически соотношение (4.8) представляется в виде



Сделаем теперь в (4.8) предельный переход $\theta, \theta' \rightarrow \pm \infty$ так, что $\theta - \theta' \rightarrow \pm \infty$, и при этом положим

$$\begin{aligned} K(\theta)|_{\theta \rightarrow \infty} = L, \quad S_{12}(\theta)|_{\theta \rightarrow \infty} = R_{21}, \\ K(\theta)|_{\theta \rightarrow -\infty} = L^{-1}, \quad S_{12}(\theta)|_{\theta \rightarrow -\infty} = (R_{12})^{-1}. \end{aligned}$$

Тогда (4.8) перейдет в (3.1.23), и это является причиной того, что все алгебры с определяющими соотношениями типа (3.1.23) называются алгебрами уравнения отражения [48].

Отметим, что всякое решение УЯБ (4.6) с условиями (4.7) определяет класс эквивалентности релятивистских интегрируемых систем с данной факторизованной S -матрицей. Таким образом, всякая классификация решений УЯБ в какой-то степени является классификацией интегрируемых систем с указанными выше свойствами.

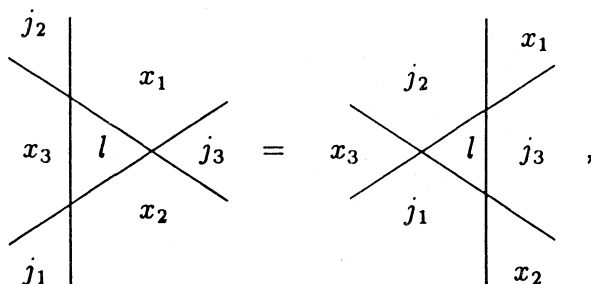
3. УЯБ, записанное в форме (3.1.3), показывает, что матрицы R_k (3.3.23), удовлетворяющие условиям локальности

$$[R_k, R_{k'}] = 0, \quad |k - k'| > 1,$$

реализуют представления алгебры кос B_{N+1} (см., например [10,49]). Произвольную косу (с $N + 1$ нитями) можно построить путем перемножения матриц R_k и их обратных. Графически косу можно изобразить, пользуясь диаграммным представлением R -матриц (3.7.26'). После этого данную косу можно замкнуть в узел с помощью $(N + 1)$ -го кантового следа Tr_q и $\overline{\text{Tr}}_q$. Полученное выражение будет, очевидно, инвариантом соответствующего узла.

Рассматривая наряду с R -матрицами (3.3.23) R -матрицы, действующие в двойственных пространствах (см. [18]), можно обобщить приведенную выше конструкцию и построить инварианты заузленных ленточных связок [18].

4. Упомянем о применении УЯБ в многопетлевых вычислениях в квантовой теории поля. Известен вариант УЯБ (см. [2,50,51]), который также представляется в виде уравнения треугольников (3.5.9'), но индексы приписываются не «ребрам», а «граням»:



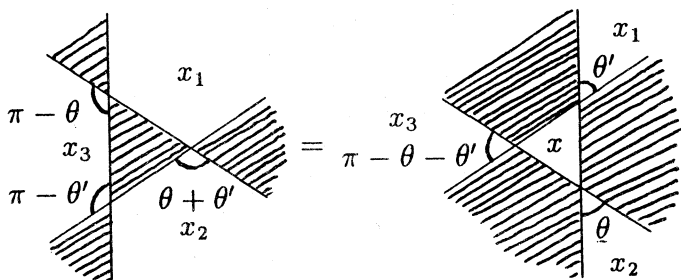
$$(4.8')$$

где $R_{kl}^{ij}(\theta) = \ell_{\kappa}^{i\theta} j_{\kappa} = R_{ij}^{kl}(\theta)$ и суммирование ведется по индексу l .

Соотношение (4.8') так же, как и (3.5.9), дает условия интегрируемости двумерных решеточных статистических систем с весами, определяемыми R -матрицами $R_{kl}^{ij}(\theta)$. Заметим теперь, что УЯБ (4.8') имеет решение в виде $R_{kl}^{ij}(\theta) = G_k^i(\theta) G_l^j(\pi - \theta)$, где матрицы $G_x^x = G_x^{x'}$ удовлетворяют звездно-треугольному соотношению (см., например, [2,50]):

$$\begin{aligned} f(\theta, \theta') G_{x_2}^{x_1}(\theta + \theta') G_{x_3}^{x_2}(\pi - \theta') G_{x_1}^{x_3}(\pi - \theta) = \\ = \sum_x G_x^{x_1}(\theta') G_x^{x_2}(\theta) G_x^{x_3}(\pi - \theta - \theta'), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $f(.,.)$ — произвольная функция. Соотношения (4.9) при $f = 1$ графически представляются в виде



Рассмотрим теперь безмассовый пропагатор Фейнмана:

$$G_D(x - x' | \alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(x - x')^{2\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha)}{((x - x')_\mu (x - x')^\mu)^\alpha}, \quad (4.10)$$

где $\alpha = D/2 - 1 + \beta$, $D = 4 - 2\epsilon$ — размерность пространства-времени, x_μ — его координаты, а ϵ и β — параметры размерной и аналитической регуляризации соответственно. Пропагатор (4.10) удовлетворяет соотношению

$$G_D\left(x_1 - x_2 \middle| \frac{D}{2} - \alpha_3\right) G_D\left(x_2 - x_3 \middle| \frac{D}{2} - \alpha_1\right) G_D\left(x_3 - x_1 \middle| \frac{D}{2} - \alpha_2\right) \sum \alpha_i = D = \int \frac{d^D x}{\pi^{D/2}} \prod_{i=1}^3 G_D(x - x_i | \alpha_i), \quad (4.11)$$

которое легко получается, если в правой части (4.11) выбрать $x_3 = 0$ и сделать одновременное преобразование инверсии переменных интегрирования: $x^\mu \rightarrow x^\mu/x^2$ и координат $x_{1,2}^\mu$. Соотношения (4.9) и (4.11) эквивалентны, если мы положим

$$G_x^f(\theta) = G_D\left(x - x' \middle| \frac{D}{2} - \frac{D\theta}{2\pi}\right), \quad f(\theta, \theta') = 1. \quad (4.12)$$

Таким образом, аналитически и размерно регуляризованный безмассовый пропагатор (4.10) удовлетворяет бесконечномерному звездно-треугольному соотношению (4.9) и, соответственно, исходя из (4.10), (4.12), можно строить решения УЯБ (4.8'). Данное замечание сделано в работе [50], где были вычислены вакуумные диаграммы с бесконечным числом вершин, соответствующие планарной квадратной решетке (теория ϕ^4 , $D = 4$), пла-

нарной треугольной решетке (теория ϕ^6 , $D = 3$) и шестиугольной решетке «пчелиные соты» (теория ϕ^3 , $D = 6$). Звездно-треугольное соотношение (4.11) (известное также как соотношение уникальности) применялось, кроме того, для аналитического вычисления диаграмм, дающих вклады в 5-петлевую β -функцию теории $\phi_{D=4}^4$, безмассовых лестничных диаграмм, а также для исследования групп симметрий размерно- и аналитически-регуляризованных безмассовых диаграмм Фейнмана (см., соответственно, [52]). Подчеркнем, что чрезвычайно интересной представляется задача о массивной деформации функции пропагатора (4.10) и соответствующей деформации звездно-треугольного соотношения (4.11).

5. Отметим, что мы совершенно не затронули многочисленные приложения квантовых групп Ли с параметрами деформации q , удовлетворяющими условиями $q^N = 1$, т.е. когда параметры q равны корням из единицы. Эти приложения (см., например, [53]) связаны со спецификой теории представлений таких квантовых групп, которые, вообще говоря, уже нельзя рассматривать как деформацию классических групп Ли.

В заключение мне хотелось бы поблагодарить Л.Д.Фаддеева и А.Т.Филиппова за внимание и всестороннюю поддержку. Автор также благодарен Р.М.Кашаеву, О.В.Огиевскому, П.П.Кулишу, Н.Ю.Решетихину, В.Н.Плечко и особенно А.А.Владимирову, Г.Э.Арутюнову, Ж.Поповичу и П.Н.Пятову за стимулирующие обсуждения и плодотворное сотрудничество. Работа над данным обзором частично поддержана РФФИ (грант 95-02-05679а) и Международным научным фондом (грант RFF 300).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Склинин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. — ТМФ, 1979, т.40, 2, с.194; Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. — Успехи мат. наук, 1979, т.34, 5, с.13; Фаддеев Л.Д. — «Проблемы квантовой теории поля» (Труды V Международного совещания по нелокальным и нелинейным теориям поля, Алушта, 1979), ОИЯИ, Дубна, 1979, с.249.
2. Baxter R.J. — Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Acad. Press, London, New York, 1982.
3. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov A.I.B. — Ann. Phys., 1979, vol.120, p.253. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov A.I.B. — Nucl. Phys., 1978, vol.B133, p.525.
4. Замолодчиков А.Б. — ЖЭТФ, 1980, т.79, с.641; Zamolodchikov A.B. — Comm. Math. Phys., 1981, vol.79, p.489.
5. Pasquier V., Saleur H. — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.523; Kulish P.P. — Preprint YITP/K-959, 1991; Karowski M., Zapletal A. — Nucl. Phys., 1994, vol.B419, p.567.

6. Connes A. — Geometrie non Commutative. Interditions, Paris, 1990; Connes A., Lott J. — Nucl. Phys., 1990, vol. 18B, p.29.
7. Isaev A.P., Popowicz Z. — Phys. Lett., 1992, vol.B281, p.271.
8. Podles P., Woronowicz S.L. — Comm. Math. Phys., 1990, vol.130, p.381.
Carow-Watamura U., Schlieker M., Scholl M., Watamura S. — Z. Phys. C, 1990, vol.48, p.159;
- Mir-Kasimov R.M. — Brussel Univ. Preprint, 1991; Montreal Univ. Preprint CRM-2186, 1994;
- Ogievetsky O., W.B.Schmidke, Wess J., Zumino B. — Comm. Math. Phys., 1992, vol.150, p.495;
- Kulish P.P — Algeb. i Anal, 1994, vol.6, 2, p.195;
- Majid S. — J. Math. Phys., 1993, vol.34, p.2045;
- Lukierski J., Nowicki A., Ruegg H., Tolstoy V.N. — Phys. Lett., 1991, vol.B264, p.331.
9. Schmidke W., Wess J., Zumino B. — Z. Phys., 1991, vol.C52, p.471;
De Azcarraga J.A., Kulish P.P., Rodenas F. — Lett. Math. Phys., 1994, vol.32, p.173.
10. Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. — Алгебра и анализ, 1989, т.1, 1, с.178.
11. Sweedler M.E. — Hopf Algebras, Benjamin, 1969.
12. Abe E. — Hopf Algebras, Cambridge University Press, 1977.
13. Drinfeld V.G. — In.: Proc. Inter. Congress of Mathematics. Berkley, 1986, vol.1, p.798.
14. Majid Sh. — Int. J. Mod. Phys., 1990, vol.A5, 1, p.1.
15. Vladimirov A.A. — Z. Phys., 1993, vol.C58, p.659.
16. Reshetikhin N. — Lett. Math. Phys., 1990, vol.20, p.331.
17. Дринфельд В.Г. — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып.6, с.114;
Дринфельд В.Г. — Алгебра и анализ, 1990, т.2, вып.4, с.149.
18. Решетихин Н.Ю. — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып.2, с.169.
19. Склянин Е.К. — Функциональный анализ, 1982, т.16, 4, с.27; 1983, т.17, 4, с.34.
20. Manin Yu.I. — Montreal University Preprint CRM-1561, 1989.
21. Manin Yu.I. — Comm. Math. Phys., 1989, vol.122, p.163.
22. Faddeev L.D., Pyatov P.N. — «The Differential Calculus on Quantum Linear Groups», hep-th/9402070, 1994 (в сборнике, посвященном памяти Ф.А.Березина (в печати)).
23. Алексеев А.Ю., Фаддеев Л.Д. — Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, 1992, т.200, с.3.
24. Demidov D.D., Manin Yu.I., Mukhin E.E., Zhdanovich D.V. — Progr. Theor. Phys., Suppl., 1990, vol.102, p.203
25. Sudbery A. — J. Phys., 1990, vol.A23, p.L697;
Fairlie D.B., Zachos C.K. — Phys. Lett., 1991, vol.B256, p.43.
26. Schirrmacher A. — Z. Phys., 1991, vol.C50, p.321.
27. Schirrmacher A. — J. Phys., 1991, vol.A50, p.L1249.
28. Решетихин Н.Ю. — ТМФ, 1985, т.63, 3, с.347.
29. Chaichian M., Kulish P. — Phys. Lett., 1990, vol.B234, p.72;
Damaskinsky E.V., Kulish P.P., Sokolov M.A. — Preprint ESI-95-217, q-alg 9505001.

30. Chaichian M., Kulish P., Lukierski J. — Phys. Lett., 1991, vol.B262, p.43.
31. Isaev A.P., Malik R.P. — Phys. Lett., 1992, vol.B280, p.219.
32. Кулиш П.П., Склянин Е.К. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1980, т.95, с.129.
33. Lubashenko V., Sudbery A. — Preprint York, 1993.
34. Schwenk J., Schmidke W.B., Vokos S.P. — Z. Phys., 1990, vol.C46, p.643;
 Schmidke W.B., Vokos S.P., Zumino B. — Z. Phys., 1990, vol.C48, p.249;
 Кулиш П.П. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1990, т.180, с.89;
 Dabrowski L., Wang L.Y. — Phys. Lett., 1991, vol.B266, p.51.
35. Bazhanov V., Shadrnikov A. — Teor. Mat. Phys., 1987, vol.73, p.402.
36. Кулиш П.П. — Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1985, т.145, с.140.
37. Khoroshkin S.M., Tolstoy V.N. — Comm. Math. Phys., 1989, vol.18, p.143.
38. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu. — Lett. Math. Phys., 1989, vol.18, p.143.
39. Berg B., Karowski M., Kurak V., Weisz P. — Nucl. Phys., 1978, vol.B134, p.125.
40. Bazhanov V.V. — Comm. Math. Phys., 1987, vol.113, p.471; Phys. Lett., 1985, vol.B159, p.321.
41. Jimbo M. — Comm. Math. Phys., 1986, vol.102, p.537.
42. Belavin A.A. — Nucl. Phys., 1981, vol.B180[FS2], p.189.
43. Чередник И.В. — ЯФ, 1982, т.36, с.549; Tracy C.A. — Physica, 1985, vol.16D, p.203; Bovier A. — J. Math. Phys., 1983, vol.24, p.631;
 Felder G., Pasquier V. — Lett. Math. Phys., 1994, vol.32, p.167.
44. Rubakov V.A. — Nucl. Phys., 1982, vol.B203, p.311;
 Lipatov L.N. — Nucl. Phys., 1991, vol.B365, p.614;
 Faddeev L.D., Korchemsky G.P. — Phys. Lett., 1995, vol.B342, p.311;
45. Владимиров А.А. — Введение в квантовые интегрируемые системы. Метод - матрицы. Лекции для молодых ученых, вып.32. ОИЯИ, P17-85-742, Дубна, 1985.
46. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu. — J. Math. Phys., 1983, vol.A16, p.L591.
47. Чередник И.В. — ТМФ, 1984, т.61, с.35.
48. Kulish P.P., Sklyanin E.K. — J. Phys., 1992, vol.A25, p.5963;
 Kulish P.P., Sasaki R. — Prog. Theor. Phys., 1993, vol.89, p.741.
49. Reshetikhin N.Yu. — LOMI Preprint E-4,17-87, 1987;
 Turaev V.G. — LOMI Preprint E-3-87, 1987;
 Reshetikhin N.Yu., Turaev V.G. — Comm. Math. Phys., 1990, vol.127, p.1.
50. Zamolodchikov A.B. — Phys. Lett., 1980, vol.B97, p.63.
51. Бажанов В.В., Строганов Ю.Г. — ТМФ, 1982, т.52, с.105.
52. Kazakov D.I. — Phys. Lett., 1983, vol.B133, p.406;
 Belokurov V.V., Ussyukina N.I. — J. Phys., 1983, vol.A16, p.2811;
 Горишний С.Г., Исаев А.П. — ТМФ, 1985, т.62, с.345.
53. Witten E. — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.285;
 Alvarez-Gaume L., Gomez C., Sierra G. — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.347;
 Bazhanov V.V., Kashaev R.M., Mangazeev V.V., Stroganov Yu. — Comm. Math. Phys., 1991, vol.138, p.393;
 Date E., Jimbo M., Miki K., Miwa T. — Comm. Math. Phys., 1991, vol.138, p.393;
 Furlan P., Ganchev A., Petkova V.B. — Nucl. Phys., 1990, vol.343, p.205.

СУПЕРСТРУННЫЙ Z' -БОЗОН В e^-e^+ -АННИГИЛЯЦИИ

С.К.Абдуллаев, А.И.Мухтаров

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

В рамках калибровочных моделей $SU(2) \times U(1)$ и $SU(2) \times U(1) \times U'(1)$ изучены про-

цессы $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}\tilde{f}$, $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\tilde{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^-e^+ \rightarrow BX$. Получены выражения для спиральных амплитуд и эффективных сечений. Рассмотрены следующие характеристики: право-левая асимметрия A_{RL} , асимметрия вперед-назад A_{FB} , поляризационные асимметрии вперед $A_F(\lambda_2)$ и назад $A_B(\lambda_2)$, поляризационная асимметрия вперед-назад $\tilde{A}_{FB}(\lambda_2)$, степень продольной поляризации фермиона P , поперечная спиновая асимметрия $A_\phi^{(1)}$ и др. Найдены общие выражения для этих характеристик и даны количественные оценки их в рамках стандартной и суперструнной E_6 -моделей. Обсуждены нули спиральных амплитуд и электрослабых асимметрий.

The processes $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}\tilde{f}$, $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\tilde{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^-e^+ \rightarrow BX$ have been studied in the framework of the $SU(2) \times U(1)$ and $SU(2) \times U(1) \times U'(1)$ gauge models. The general expressions for the helicity amplitudes and differential cross sections are obtained. The following characteristics are considered: the right-left asymmetry A_{RL} , the forward-backward asymmetry A_{FB} , the forward $A_F(\lambda_2)$ and backward $A_B(\lambda_2)$ polarization asymmetries, the polarized forward-backward asymmetry $\tilde{A}_{FB}(\lambda_2)$, the degrees of longitudinal polarization of fermion P , the transversal spin asymmetry $A_\phi^{(1)}$ etc. The general expressions for these characteristics are found and their quantitative estimates are given in the framework of standard and superstring E_6 models. The zeroes of the helicity amplitudes and electroweak asymmetries are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

В развитии современной физики элементарных частиц существенную роль сыграло изучение процессов неупругого лептон-нуклонного рассеяния и аннигиляции встречных электрон-позитронных пучков. Именно в этих экспериментах, последовательно проводимых при все более возрастающих

энергиях, было открыто большинство явлений, сыгравших важную роль в понимании природы фундаментальных взаимодействий и структуры элементарных частиц. Так, масштабная инвариантность, обнаруженная в глубоко-неупругом лептон-нуклонном рассеянии, и струйная картина инклюзивного адронобразования в электрон-позитронной аннигиляции привели к созданию кварк-партонной модели адронов, а затем к квантово-хромодинамической теории сильного взаимодействия.

Экспериментальное исследование электрон-позитронной аннигиляции в адроны оказалось удивительно плодотворным для физики элементарных частиц. За короткий срок в этих экспериментах были открыты целые семейства адронных резонансов Ψ и Υ , для описания которых пришлось ввести тяжелые c - и b -кварки с новыми квантовыми числами «очарование» и «прелесть». Изучение уровней «чармония» и «бьютиония», а также их распадов позволило проверить ряд предсказаний квантовой хромодинамики (КХД), оценить такой важный параметр, как константа сильного взаимодействия α_s , дало убедительное доказательство существования векторного глюона.

Одним из важнейших открытий в области слабых взаимодействий явилось обнаружение в 1973 г. слабых нейтральных токов (СНТ) в ЦЕРН в пузырьковой камере «Гаргамель». Еще до этого Глэшоу, Вайнбергом и Саламом [1] (ГВС) была построена модель единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий, которая предсказала существование СНТ. После их экспериментального обнаружения изучение структуры СНТ заняло одно из центральных мест в экспериментальных и теоретических исследованиях [2—7]. Исследование эффектов СНТ в различных лабораториях мира убедительно подтвердило справедливость стандартной модели (СМ), но тем не менее ее всесторонняя проверка продолжается [8].

Несмотря на успехи теории ГВС, существуют причины, вызывающие неудовлетворенность стандартной моделью. Так, неясны причины повторения поколений лептонов и кварков, нет обоснования их числа, неизвестен механизм генерации масс частиц и нет теоретического обоснования их спектра. До сих пор не доказано существование скалярного хиггсовского бозона, не обнаружен t -кварк. Пространственно-временная структура слабых взаимодействий не следует из каких-либо внутренних требований теории, а введена феноменологически, в соответствии с экспериментальными фактами. Ряд параметров СМ известен с недостаточной точностью.

Все эти причины приводят к необходимости дальнейшей, более глубокой проверки СМ, а также к поискам более общей теории, которая устранила бы присущую модели феноменологичность.

Большим достижением последних лет в развитии физики высоких энергий является разработка теории суперструн [9]. Суперструнная модель

элементарных частиц, основанная на калибровочной симметрии $E_8 \times E_8'$, рассматривается в качестве реального кандидата на роль последовательной единой теории всех фундаментальных взаимодействий, включая и гравитацию [10]. После компактификации десятимерная группа $E_8 \times E_8'$ -суперструны приводит к 4-мерной $N=1$ суперсимметричной теории с калибровочной группой E_6 . Наблюдаемые поля материи группируются при этом в 27-плеты E_6 . Интересным следствием этой модели является то, что она предсказывает существование новых экзотических фермионов и, как минимум, одного дополнительного векторного Z' -бозона с массой ниже 1 ТэВ [11]. Наличие дополнительного Z' -бозона должно приводить к характерному отклонению результатов эксперимента от СМ во всех процессах, обусловленных СМ.

Поэтому, переходя к области более высоких энергий и передач импульсов, мы надеемся обнаружить сигналы «новой физики». Именно это обстоятельство стимулирует прецизионные измерения параметров СМ [8]. Возможность интерпретации отклонений от СМ как указание на суперструнный Z' -бозон требует изучения широкого класса процессов с участием Z' -бозона.

В настоящее время поискам проявлений дополнительного векторного бозона уделяется значительное внимание [12—19]. Одним из эффективных методов является изучение электрослабых асимметрий в электрон-позитронной аннигиляции при энергиях $\sqrt{s} \geq 100$ ГэВ. В работах [20—29] нами получены общие выражения для различных интегральных характеристик

реакций $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow \bar{q}\bar{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^-e^+ \rightarrow BX$, $e^-e^+ \rightarrow \gamma X$ и проведен детальный анализ этих характеристик в рамках СМ и суперструнной E_6 -модели.

В настоящей работе приведен краткий обзор результатов исследования эффектов суперструнного Z' -бозона в процессах рождения частиц в электрон-позитронной аннигиляции.

1. НЕЙТРАЛЬНЫЕ ТОКИ В СУПЕРСТРУННОЙ E_6 -МОДЕЛИ

В низкоэнергетическом пределе суперструны нарушение симметрии группы E_6 может происходить по схеме

$$E_6 \rightarrow SO(10) \times U_\Psi(1).$$

Группа $SO(10)$ содержит $SU(5)$ в качестве своей подгруппы. Схема нарушения $SO(10)$ выглядит следующим образом:

$$SO(10) \rightarrow SU(5) \times U_\chi(1),$$

причем

$$SU(5) \rightarrow SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1).$$

Следовательно, группа E_6 может нарушаться до подгрупп 5-го или 6-го ранга:

$$G_5 = SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_\eta(1), \quad (1.1)$$

$$G_6 = SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \times U_\psi(1) \times U_\chi(1). \quad (1.2)$$

В G_5 с необходимостью возникает одно дополнительное (к СМ) нейтральное бозонное поле Z_η , соответствующее $U_\eta(1)$ -симметрии. В группе G_6 мы имеем два дополнительных нейтральных бозона Z_ψ и Z_χ , отвечающих подгруппам $U_\psi(1)$ и $U_\chi(1)$ соответственно. Однако считается, что существует промежуточный масштаб $M_I \approx 10^{10-11}$ ГэВ, на котором за счет спонтанного нарушения одно из этих полей приобретает массу $M \approx M_I$. Такое нарушение может быть индуцировано ненулевыми вакуумными средними скалярных суперпартнеров ν^c и n из 27-плета E_6 . В результате и в этом случае остается только один легкий ($M < 1$ ТэВ) Z' -бозон [11].

Модель с калибровочной группой $SU_L(2) \times U_Y(1) \times U'(1)$ считается сейчас наиболее вероятным низкоэнергетическим пределом теории суперструны. В этой модели возникает дополнительный Z' -бозон, рассматриваемый как линейная комбинация Z_ψ и Z_χ :

$$Z' = Z_\psi \cos \theta_E + Z_\chi \sin \theta_E. \quad (1.3)$$

Здесь θ_E — угол смешивания, который определяется схемой нарушения симметрии на промежуточном масштабе. В случае группы ранга 6 угол θ_E произволен, а для группы G_5 $\theta_E = 142,24^\circ$. Значения угла $\theta_E = 0^\circ$ и 90° соответствуют чистым состояниям Z_ψ и Z_χ . Углы $\theta_E = -\arctg \sqrt{3/5}$ и $\theta_E = -\arctg \sqrt{5/3}$ описывают Z_η - и Z_I -бозоны [13].

Собственные значения генераторов групп $U_\eta(1)$, $U_\chi(1)$ и $U_\psi(1)$ для полей из 27-плета E_6 приведены в табл.1.

Дополнительному Z' -бозону (3) отвечает генератор

$$Q_{Z'} = Q_\psi \cos \theta_E + Q_\chi \sin \theta_E, \quad (1.4)$$

где Q_ψ и Q_χ — генераторы $U_\psi(1)$ и $U_\chi(1)$.

Таблица 1. Квантовые числа полей 27-плета E_6 ($Q_i(\Psi_R) = -Q_i(\Psi_L^c)$)

$SO(10)$	$SU(5)$	$SU_c(3)$	Левое поле	I_{3L}	Q_f	$2\sqrt{15} Q_\eta$	$2\sqrt{10} Q_\chi$	$\sqrt{24} Q_\psi$
16	$\bar{5}$	$\bar{3}$	d^c	0	1/3	1	3	1
		1	e^-	-1/2	-1	1	3	1
		1	ν_e	1/2	0	1	3	1
		1	e^{-c}	0	1	-2	-1	1
		3	d	-1/2	-1/3	-2	-1	1
	10	3	u	1/2	2/3	-2	-1	1
		$\bar{3}$	u^c	0	-2/3	-2	-1	1
		1	ν^c	0	0	-5	-5	1
		$\bar{5}$	h^c	0	1/3	1	-2	-2
		1	E^-	-1/2	-1	1	-2	-2
10	5	1	ν_E	1/2	0	1	-2	-2
		3	h	0	-1/3	4	2	-2
		1	E^{-c}	1/2	1	4	2	-2
		1	N_E^c	-1/2	0	4	2	-2
		1	n	0	0	-5	0	4

Лагранжиан взаимодействия фундаментальных фермионов с калибровочными бозонами имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{e}{2} \left[J_\mu^\gamma A_\mu + J_\mu^Z Z_\mu + J_\mu^{Z'} Z'_\mu \right], \quad (1.5)$$

где

$$J_\mu^i = \bar{\Psi}_f \gamma_\mu \left[g_{Lf}^i (1 + \gamma_5) + g_{Rf}^i (1 - \gamma_5) \right] \Psi_f, \quad (1.6)$$

g_{Lf}^i и g_{Rf}^i — киральные константы связи фермиона f с калибровочными i -бозонами ($i = \gamma, Z, Z'$), значения которых равны

$$g_{Lf}^\gamma = g_{Rf}^\gamma = O_f, \quad g_{Lf}^Z = \frac{2}{\sin 2\theta_W} (I_3^f - Q_f x_W),$$

$$g_{Rf}^Z = \frac{2}{\sin 2\theta_W} (-Q_f x_W),$$

$$g_{Lf}^{Z'} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\cos \theta_W} [Q_\psi(f_L) \cos \theta_E + Q_\chi(f_L) \sin \theta_E], \quad (1.7)$$

$$g_{Rf}^{Z'} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\cos \theta_W} [-Q_\psi(f_L^c) \cos \theta_E - Q_\chi(f_L^c) \sin \theta_E].$$

Здесь $x_W = \sin^2 \theta_W$ — параметр Вайнберга, Q_f и I_3^f — электрический заряд и третья проекция слабого изоспина фермиона f .

Массовая матрица полей Z и Z' в общем случае недиагональна:

$$M^2 = \begin{pmatrix} M_Z^2 & \delta M^2 \\ \delta M^2 & M_{Z'}^2 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Это приводит к $(Z-Z')$ -смешиванию. В результате диагонализации матрицы (1.8) находим поля Z_1 и Z_2 :

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

с определенными массами M_{Z_1} и M_{Z_2} , которые, как и угол смешивания Φ , выражаются через исходные параметры:

$$M_{Z_1}^2 \equiv M_Z^2 - \frac{(\delta M^2)^2}{M_{Z'}^2 - M_Z^2}, \quad M_{Z_2}^2 \equiv M_{Z'}^2 + \frac{(\delta M^2)^2}{M_{Z'}^2 - M_Z^2},$$

$$\text{tg}^2 \Phi = (M_Z^2 - M_{Z_1}^2) / (M_{Z_2}^2 - M_Z^2). \quad (1.10)$$

В суперструнной E_6 -модели с промежуточной группой G_5 имеется два $SU_L(2)$ -дублета $(H, \bar{H})$ и один синглет N хиггсовских полей. В этом случае

$$\delta M^2 = M_Z^2 \sqrt{x_W} \frac{4v^2 - \bar{v}^2}{3(v^2 + \bar{v}^2)}, \quad M_{Z'}^2 = M_Z^2 \frac{16v^2 + \bar{v}^2 + 25x^2}{9(v^2 + \bar{v}^2)}, \quad (1.11)$$

где $v = \langle H^0 \rangle \equiv \langle \tilde{N}_E^c \rangle$, $\bar{v} = \langle \bar{H}^0 \rangle \equiv \langle \bar{\nu}_E \rangle$, $x = \langle N \rangle \equiv \langle \tilde{n} \rangle$, $\tilde{N}_E$, $\tilde{\nu}_E$ и $\tilde{n}$ — скалярные суперпартнеры соответствующих фермионов из 27-плета. Такая структура хиггсовских полей приводит к следующему ограничению для угла смешивания Φ [30]:

$$-\frac{8}{3} \frac{x_W}{M_{Z'}^2 / M_Z^2 - 1} < \text{tg} 2\Phi < \frac{2}{3} \frac{x_W}{M_{Z'}^2 / M_Z^2 - 1}. \quad (1.12)$$

Выражение для лагранжиана взаимодействия фермионов с калибровочными бозонами Z_1 и Z_2 следует из (1.5):

$$\mathcal{L} = \frac{e}{2} (J_\mu^{Z_1} Z_{1\mu} + J_\mu^{Z_2} Z_{2\mu}), \quad (1.13)$$

где токи $J_\mu^{Z_1}$ и $J_\mu^{Z_2}$ имеют общий вид (1.6), но при этом

$$g_{L(R)f}^{Z_1} = \cos \Phi \cdot g_{L(R)f}^Z + \sin \Phi \cdot g_{L(R)f}^{Z'},$$

$$g_{L(R)f}^{Z_2} = -\sin \Phi \cdot g_{L(R)f}^Z + \cos \Phi \cdot g_{L(R)f}^{Z'} \quad (1.14)$$

Слабый нейтральный ток фермиона f можно представить и в виде

$$J_\mu^i = \bar{\Psi}_f \gamma_\mu (g_{Vf}^i + \gamma_5 g_{Af}^i) \Psi_f, \quad (1.15)$$

где

$$g_{Vf}^i = g_{Lf}^i + g_{Rf}^i, \quad g_{Af}^i = g_{Lf}^i - g_{Rf}^i \quad (1.16)$$

— векторная и аксиальная константы СНТ фермиона.

2. СПИРАЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ И ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ

АСИММЕТРИИ ПРОЦЕССОВ $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}\tilde{f}$

Аннигиляция электрон-позитронной пары в различные частицы с γ -квантом и Z -бозоном может идти и через дополнительный Z' -бозон. Наличие в промежуточных состояниях массивных частиц приводит к изменению энергетической зависимости сечения и к появлению ряда специфических P -нечетных асимметрий, связанных с существованием аксиальной компоненты у СНТ. Исследование этих эффектов на встречных e^-e^+ -пучках может помочь в изучении свойств СНТ как начальных, так и конечных частиц.

В настоящее время эксперименты, проводимые на встречных e^-e^+ -пучках РЕР, PETRA и TRISTAN, позволили изучить эффекты СНТ в процессах аннигиляции $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$, $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ при энергиях $\sqrt{s} \sim 30-60$ ГэВ [31—35]. Недавно введены в строй новые установки со встречными e^-e^+ -пучками SLC и LEP и получены некоторые данные по измерению параметров стандартного бозона в области Z -резонанса ($\sqrt{s} \sim 90$ ГэВ) [36—44]. Измерены масса, полная и парциальные ширины распада Z -бозона, извлечены константы связи СНТ лептонов и кварков с Z -бозоном. Результаты этих экспериментов находятся в удовлетворительном согласии с предсказаниями СМ.

Для извлечения информации о свойствах суперструнного Z' -бозона огромный интерес представляет изучение поляризационных характеристик образующихся частиц (лептонов, барионов, векторных мезонов) в электрон-позитронной аннигиляции. Недавно совместно в американских и европейских ускорительных центрах подготовлены программы новых прецизионных экспериментов по проверке СМ с использованием поляризованных e^-e^+ -пучков [45]. При этом станет возможным детальное изучение различных поляризационных характеристик в процессах рождения частиц в

e^-e^+ -аннигиляции, что позволит решить многие важные проблемы физики электрослабых взаимодействий при высоких энергиях.

Здесь обсуждается ряд качественных свойств спиральных амплитуд и электрослабых асимметрий процессов аннигиляции e^-e^+ -пары в пару фундаментальных фермионов (лептонов, кварков) и скалярных фермионов:

$$e^- + e^+ \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2, \dots) \rightarrow f + \bar{f} \quad (2.1)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2, \dots) \rightarrow \tilde{f} + \tilde{\bar{f}}. \quad (2.2)$$

В низшем порядке теории возмущений процесс (2.1) описывается матричным элементом

$$M = e^2 \sum_i D_i(s) \bar{\nu}_\mu [g_{Le}^i(1 + \gamma_5) + g_{Re}^i(1 - \gamma_5)] u \times \\ \times \bar{u}_f \gamma_\mu [g_{Lf}^i(1 + \gamma_5) + g_{Rf}^i(1 - \gamma_5)] \nu_f, \quad (2.3)$$

где суммирование проводится по всем калибровочным бозонам ($i = \gamma, Z_1, Z_2$ и т.д.); $D_i(s) = (M_i^2 - s - iM_i \Gamma_i)^{-1}$ — пропагатор векторного бозона i ; M_i и Γ_i — масса и полная ширина i -бозона; s — квадрат суммарной энергии e^-e^+ -пары в с.ц.и.; $g_{Le}^i(g_{Lf}^i)$ и $g_{Re}^i(g_{Rf}^i)$ — левые и правые константы связи электрона (фермиона f) с калибровочным бозоном i (они приведены в разд.1).

Сперва обсудим ряд качественных свойств процессов (2.1) при столкновении продольно-поляризованных электронов и позитронов. Взаимодействие фундаментальных фермионов с калибровочными бозонами носит векторный и аксиально-векторный характер. Это обстоятельство приводит к сохранению спиральности фермионов при высоких энергиях. Сохранение спиральности требует, чтобы сталкивающиеся электрон и позитрон имели противоположные спиральности ($e_L^-e_R^+$ или $e_R^-e_L^+$, где e_L^- — электрон со спиральностью, равной -1 , e_R^+ — позитрон со спиральностью, равной $+1$, и т.д.). То же верно и для фермионов в конечном состоянии. Поэтому для реакций (2.1) должны возникать только четыре независимые спиральные амплитуды F_{LL} , F_{LR} , F_{RL} и F_{RR} (первый и второй индексы соответствуют спиральностям электрона и фермиона f), которые описывают следующие процессы:

$$e_L^- + e_R^+ \rightarrow f_L + \bar{f}_R, \quad e_L^- + e_R^+ \rightarrow f_R + \bar{f}_L, \\ e_R^- + e_L^+ \rightarrow f_L + \bar{f}_R, \quad e_R^- + e_L^+ \rightarrow f_R + \bar{f}_L.$$

Дифференциальные сечения, соответствующие этим четырем процессам, равны [23]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^+ \rightarrow f_L \bar{f}_R) = \frac{\alpha^2}{4} N_c s |F_{LL}|^2 (1 + \cos \theta)^2,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^+ \rightarrow f_R \bar{f}_L) = \frac{\alpha^2}{4} N_c s |F_{LR}|^2 (1 - \cos \theta)^2,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^+ \rightarrow f_L \bar{f}_R) = \frac{\alpha^2}{4} N_c s |F_{RL}|^2 (1 - \cos \theta)^2,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^+ \rightarrow f_R \bar{f}_L) = \frac{\alpha^2}{4} N_c s |F_{RR}|^2 (1 + \cos \theta)^2.$$

Здесь

$$F_{AB} = \sum_i D_i(s) g_{Ae}^i g_{Bf}^i (A, B = L; R) \quad (2.4)$$

— спиральные амплитуды, N_c — цветовой множитель ($N_c = 3$ для кварков и $N_c = 1$ для лептонов), θ — угол между импульсами фермиона и электрона.

Спиральные амплитуды процессов (2.1) в СМ определяются выражениями

$$F_{AB}^{(CM)} = \frac{Q_f}{s} + D_Z(s) g_{Ae}^Z g_{Bf}^Z (A, B = L, R). \quad (2.5)$$

Легко убедиться, что в пределе нулевой ширины Z-бозона спиральные амплитуды (5) имеют нули при определенных энергиях сталкивающихся e^-e^+ -пучков [23,27]. Амплитуды $F_{LR}^{(CM)}$ и $F_{RR}^{(CM)}$ обращаются в нуль при энергиях $\sqrt{s} = \sqrt{2}M_Z \cos \theta_W$ и $\sqrt{s} = M_Z \cos \theta_W$ независимо от природы рождаемой $f\bar{f}$ -пары.

Спиральные амплитуды $F_{RL}^{(CM)}$ и $F_{LL}^{(CM)}$ имеют нули при энергиях e^-e^+ -пучков:

$$\sqrt{s} = M_Z \cos \theta_W [Q_f / (Q_f - I_3^f)]^{1/2}$$

и

$$\sqrt{s} = \frac{1}{2} M_Z \sin 2\theta_W \left[x_W / \left(x_W \left(\frac{1}{2} Q_f - I_3^f \right) + \frac{1}{2} I_3^f \right) \right]^{1/2}$$

соответственно. В частности, при рождении пары лептонов $\mu^-\mu^+(\tau^-\tau^+)$ мы имеем

$$F_{RL}^{(CM)} = 0 \text{ при } \sqrt{s} = \sqrt{2}M_Z \cos \theta_W,$$

$$F_{LL}^{(CM)} = 0 \text{ при } \sqrt{s} = M_Z \sin 2\theta_w.$$

Обозначим $\lambda_1(\eta_1)$ и $\lambda_2(\eta_2)$ величины продольных (поперечных) поляризаций электрона и позитрона, h_1 и h_2 — спиральности фермиона и антифермиона. Тогда в случае произвольных поляризаций начальных и продольных поляризаций конечных частиц дифференциальное сечение процессов (2.1) может быть представлено в виде [27]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{\alpha^2 N_c}{64} s \{ |F_{LL}|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 - h_1)(1 + h_2) + \\ & + |F_{RR}|^2 (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 + h_1)(1 - h_2) \} (1 + \cos \theta)^2 + \\ & + |F_{LR}|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + h_1)(1 - h_2 + |F_{RL}|^2 (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2) \times \\ & \times (1 - h_1)(1 + h_2)) (1 - \cos \theta)^2 - 2\eta_1 \eta_2 \sin^2 \theta \times \\ & \times [(1 - h_1)(1 + h_2)(\operatorname{Re}(F_{LL} F_{RL}^*) \cos 2\varphi + \operatorname{Im}(F_{LL} F_{RL}^*) \sin 2\varphi) + \\ & + (1 + h_1)(1 - h_2)(\operatorname{Re}(F_{LR} F_{RR}^*) \cos 2\varphi + \operatorname{Im}(F_{LR} F_{RR}^*) \sin 2\varphi)] \}, \quad (2.6) \end{aligned}$$

где φ — азимутальный угол вылета фермиона f , отсчитываемый от плоскости поперечной поляризации начальных лептонов.

Эффекты суперструнного Z'-бозона проявляются в различных характеристиках, выражения которых могут быть получены из общей формулы эффективного сечения (2.6). Сначала рассмотрим дифференциальные характеристики процессов $e^- e^+ \rightarrow f \bar{f}$.

Проводя усреднение по поляризационным состояниям электрона и суммирование по поляризациям антифермиона для дифференциального сечения процессов (2.1), получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \cos \theta} = & \frac{\pi \alpha^2}{16} N_c s [|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2] (1 + \cos^2 \theta) \times \\ & \times [1 + A_{FB}(s, \theta)] [1 + \lambda_2 A_{RL}(s, \theta) + h_1 P(s, \theta)], \quad (2.7) \end{aligned}$$

где $A_{FB}(s, \theta)$, $A_{RL}(s, \theta)$ и $P(s, \theta)$ — угловая асимметрия вперед-назад, правая поляризационная асимметрия и степень продольной поляризации фермиона. Эти дифференциальные характеристики, измеряемые на опыте, определяются следующими выражениями:

$$A_{FB}(s, \theta) = A_{FB}(s) f(\theta), \quad (2.8)$$

$$A_{RL}(s, \theta) = \frac{A_{RL}^{(1)}(s) + A_{RL}^{(2)}(s) f(\theta)}{1 + A_{FB}(s) f(\theta)}, \quad (2.9)$$

$$P(s, \theta) = \frac{P^{(1)}(s) + P^{(2)}(s) f(\theta)}{1 + A_{FB}(s) f(\theta)}. \quad (2.10)$$

Здесь

$$f(\theta) = 2 \cos \theta / (1 + \cos^2 \theta),$$

$$A_{FB}(s) = \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{RR}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}, \quad (2.11)$$

$$A_{RL}^{(1)}(s) = -P^{(2)}(s) = \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2 - |F_{RR}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}, \quad (2.12)$$

$$A_{RL}^{(2)}(s) = -P^{(1)}(s) = \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 - |F_{RR}|^2 - |F_{LR}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}. \quad (2.13)$$

Экспериментальное исследование угловой и энергетической зависимостей асимметрий $A_{FB}(s, \theta)$, $A_{RL}(s, \theta)$ и степени продольной поляризации фермиона $P(s, \theta)$ может дать ценную информацию о киральных константах связи фундаментальных фермионов с калибровочными бозонами.

Рассмотрим режим $\sqrt{s} = M_i$, который может быть изучен на ускорителях LEP и SLC. В этом случае вклад в сечение калибровочного i -бозона ($i = Z$ или Z') становится доминирующим. В резонансе дифференциальные характеристики процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$ имеют вид

$$A_{RL}^{(1)}(M_i^2) = -P^{(2)}(M_i^2) = \frac{(g_{Le}^i)^2 - (g_{Re}^i)^2}{(g_{Le}^i)^2 + (g_{Re}^i)^2} = A_e^i,$$

$$A_{RL}^{(2)}(M_i^2) = -P^{(1)}(M_i^2) = \frac{(g_{Lf}^i)^2 - (g_{Rf}^i)^2}{(g_{Lf}^i)^2 + (g_{Rf}^i)^2} = A_f^i, \quad (2.14)$$

$$A_{FB}(M_i^2) = A_e^i A_f^i.$$

Отсюда следует, что право-левая асимметрия $A_{RL}^{(1)}(s)$ (или степень продольной поляризации фермиона $P^{(2)}(s)$) в Z - или Z' -резонансе не зависит от природы образовавшихся частиц и определяется только константами связи электрона, в то время как асимметрия $A_{RL}^{(2)}(s)$ (или степень продольной поляризации фермиона $P^{(1)}(s)$) определяется параметрами СНТ конечных частиц.

Степень продольной поляризации τ -лептона в процессе $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$ при $s = M_Z^2$ измерена в LEP различными коллаборациями (ALEPH, DELPHI, L3,

OPAL) [40—42]. Поляризация τ -лептона измерялась по спектру частиц в распадах $\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$, $\tau^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$, $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$, $\tau^- \rightarrow \rho^- \nu_\tau$.

В Z-резонансе поляризация τ -лептона (2.10) принимает вид

$$P(M_Z^2, \cos \theta) = - \frac{A_\tau^Z (1 + \cos^2 \theta) + 2A_e^Z \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta + 2A_\tau^Z A_e^Z \cos \theta},$$

где

$$A_l^Z = [(g_{Ll}^Z)^2 - (g_{Rl}^Z)^2] / [(g_{Ll}^Z)^2 + (g_{Rl}^Z)^2] \quad (l = e, \tau).$$

В табл.2 приведены данные по измерению степени продольной поляризации τ -лептона, полученные группой ALEPH [41]. Там же даны предсказания СМ при значении параметра Вайнберга $\sin^2 \theta_W = 0,232$. Как видно из таблицы, в пределах ошибок экспериментальные данные удовлетворительно согласуются с предсказаниями стандартной теории.

Таблица 2. Поляризация τ -лептона как функция полярного угла (погрешности статистические)

Область $\cos \theta$	Поляризация	
	Эксперимент [41]	СМ ($x_W = 0,232$)
[-0,9; -0,7]	$-0,056 \pm 0,053$	-0,004
[-0,7; -0,5]	$-0,026 \pm 0,051$	-0,017
[-0,5; -0,3]	$-0,065 \pm 0,056$	-0,045
[-0,3; -0,1]	$-0,056 \pm 0,060$	-0,088
[-0,1; 0,1]	$-0,141 \pm 0,063$	-0,143
[0,1; 0,3]	$-0,118 \pm 0,059$	-0,196
[0,3; 0,5]	$-0,226 \pm 0,054$	-0,238
[0,5; 0,7]	$-0,281 \pm 0,050$	-0,264
[0,7; 0,9]	$-0,235 \pm 0,050$	-0,243

Перейдем к рассмотрению интегральных характеристик процессов $e^- e^+ \rightarrow f \bar{f}$. Наиболее часто обсуждаемыми характеристиками являются:

1) асимметрия вперед-назад в случае неполяризованных частиц

$$A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \frac{3}{4} \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{RR}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}, \quad (2.15)$$

где σ_F и σ_B — сечения рождения фермиона в передней и задней полу-сферах;

2) право-левая поляризационная асимметрия

$$A_{RL} = \frac{\sigma_R - \sigma_L}{\sigma_R + \sigma_L} = \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2 - |F_{RR}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}, \quad (2.16)$$

где σ_R и σ_L — сечения аннигиляции право- и левополяризованного позитрона;

3) степень продольной поляризации фермиона

$$P = \frac{\sigma(f_R) - \sigma(f_L)}{\sigma(f_R) + \sigma(f_L)} = - \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RR}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RR}|^2}, \quad (2.17)$$

где $\sigma(f_R)$ и $\sigma(f_L)$ — интегральные сечения рождения фермиона f в конечном состоянии с измеряемой в эксперименте правой и левой поляризацией.

Следует отметить, что в СМ эти интегральные характеристики зануляются при энергиях e^-e^+ -пучков:

$$s = 2Q_f M_Z^2 (2Q_f - g_{V_e}^Z g_{V_f}^Z)^{-1},$$

$$s = 2Q_f M_Z^2 g_{V_f}^Z [2Q_f g_{V_f}^Z - g_{V_e}^Z ((g_{L_f}^Z)^2 + (g_{R_f}^Z)^2)]^{-1},$$

$$s = 2Q_f M_Z^2 g_{V_e}^Z [2Q_f g_{V_e}^Z - g_{V_f}^Z ((g_{L_e}^Z)^2 + (g_{R_e}^Z)^2)]^{-1}$$

соответственно. В частности, при рождении пары лептонов $\mu^-\mu^+$ и при экспериментальном значении параметра Вайнберга $\sin^2\theta_W = 0,232$ [41] мы имеем

$$A_{FB}^{(CM)} = 0 \text{ при } \sqrt{s} = \sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_W / \sqrt{1 + 8x_W^2} \approx M_Z,$$

$$A_{RL}^{(CM)} = P^{(CM)} = 0 \text{ при } \sqrt{s} = \sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_W / \sqrt{1 + 4x_W^2} = 0,86 M_Z.$$

Асимметрия вперед-назад углового распределения лептонов в реакциях $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$ недавно измерена в LEP различными коллаборациями [39—42]. На рис.1 показана энергетическая зависимость асимметрии A_{FB} в СМ при значении параметра Вайнберга $\sin^2\theta_W = 0,232$. Там же приведены экспериментальные данные, полученные группой ALEPH [41] по измерению асимметрии A_{FB} в реакциях $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$. Как видно, асимметрия вперед-назад обращается в нуль в точке $\sqrt{s} = M_Z = 91,2$ ГэВ, что согласуется с экспериментальными результатами [43], где определена масса Z -бозона с высокой точностью $M_Z = (91,187 \pm 0,007)$ ГэВ.

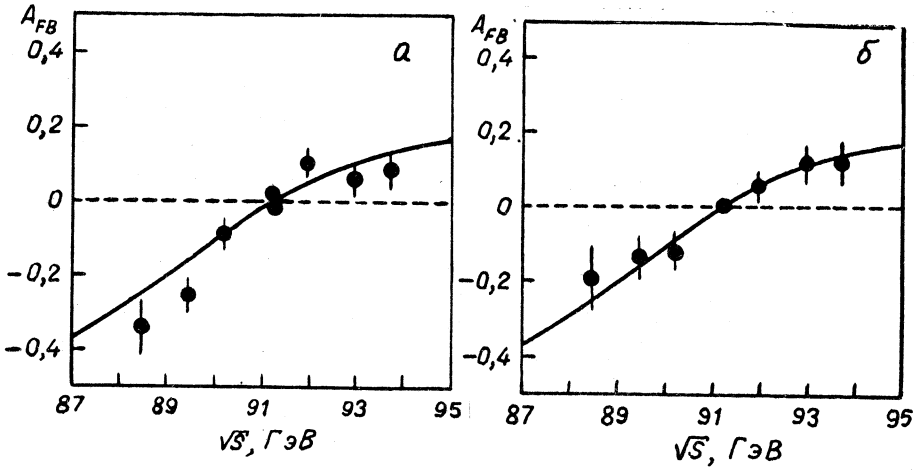


Рис.1. Зависимость асимметрии A_{FB} от энергии в процессах а) $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ и б) $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$ при $\sin^2\theta_W = 0,232$

При аннигиляции поперечно-поляризованной e^-e^+ -пары сечение (2.6) приводит к спиновым асимметриям

$$A_{\varphi}^{(1)} = \frac{2}{\eta_1 \eta_2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) =$$

$$= -\text{Re} (F_{LL} F_{RL}^* + F_{LR} F_{RR}^*) / (|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2), \quad (2.18)$$

$$A_{\varphi}^{(2)} = \frac{2}{\eta_1 \eta_2} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) =$$

$$= -\text{Im} (F_{LL} F_{RL}^* + F_{LR} F_{RR}^*) / (|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2). \quad (2.19)$$

В СМ асимметрия $A_{\varphi}^{(1)}$ обращается в нуль при двух значениях энергии электрон-позитронных пучков

$$s = \frac{M_Z^2 Q_f \{4Q_f - g_{Ve}^Z g_{Vf}^Z \pm [(g_{Ve}^Z)^2 (g_{Vf}^Z)^2 - 8g_{Le}^Z g_{Re}^Z ((g_{Lf}^Z)^2 + (g_{Rf}^Z)^2)]^{1/2}\}}{2[2Q_f^2 - Q_f g_{Ve}^Z g_{Vf}^Z + g_{Le}^Z g_{Re}^Z ((g_{Lf}^Z)^2 + (g_{Rf}^Z)^2)]}$$

В процессе $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+(\tau^-\tau^+)$ мы имеем

$$A_{\varphi}^{(1)(\text{CM})} = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{s} = \begin{cases} \sqrt{2} M_Z \cos \theta_W \\ \sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_W / \sqrt{1 + 4x_W} \end{cases}$$

Теперь рассмотрим новые характеристики — комбинированные коэффициенты асимметрий [20—22]. К таким характеристикам относятся:

1) асимметрия вперед-назад с учетом продольной поляризации позитрона

$$\begin{aligned} A_{FB}(\lambda_2) &= [\sigma_F(\lambda_2) - \sigma_B(\lambda_2)] / [\sigma_F(\lambda_2) + \sigma_B(\lambda_2)] = \\ &= \frac{3}{4} \frac{(|F_{LL}|^2 - |F_{LR}|^2)(1 + \lambda_2) + (|F_{RR}|^2 - |F_{RL}|^2)(1 - \lambda_2)}{(|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2)(1 + \lambda_2) + (|F_{RR}|^2 + |F_{RL}|^2)(1 - \lambda_2)}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

2) поляризационная асимметрия вперед

$$A_F(\lambda_2) = \frac{\sigma_F(\lambda_2) - \sigma_F(-\lambda_2)}{\sigma_F(\lambda_2) + \sigma_F(-\lambda_2)} = \lambda_2 \frac{7(|F_{LL}|^2 - |F_{RR}|^2) + |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2}{7(|F_{LL}|^2 + |F_{RR}|^2) + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2}; \quad (2.21)$$

3) поляризационная асимметрия назад

$$A_B(\lambda_2) = \frac{\sigma_B(\lambda_2) - \sigma_B(-\lambda_2)}{\sigma_B(\lambda_2) + \sigma_B(-\lambda_2)} = \lambda_2 \frac{7(|F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2) + |F_{LL}|^2 - |F_{RR}|^2}{7(|F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2) + |F_{LL}|^2 + |F_{RR}|^2}; \quad (2.22)$$

4) поляризационная асимметрия вперед-назад

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{FB}(\lambda_2) &= \frac{\sigma_F(\lambda_2) - \sigma_F(-\lambda_2) - [\sigma_B(\lambda_2) - \sigma_B(-\lambda_2)]}{\sigma_F(\lambda_2) + \sigma_F(-\lambda_2) + \sigma_B(\lambda_2) + \sigma_B(-\lambda_2)} = \\ &= \frac{3}{4} \lambda_2 \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RR}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RR}|^2}; \end{aligned} \quad (2.23)$$

5) асимметрия вперед-назад с учетом продольной поляризации фермиона

$$\begin{aligned} A_{FB}(h_1) &= [\sigma_F(h_1) - \sigma_B(h_1)] / [\sigma_F(h_1) + \sigma_B(h_1)] = \\ &= \frac{3}{4} \frac{(|F_{LL}|^2 - |F_{RL}|^2)(1 - h_1) + (|F_{RR}|^2 - |F_{LR}|^2)(1 + h_1)}{(|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2)(1 - h_1) + (|F_{RR}|^2 + |F_{LR}|^2)(1 + h_1)}; \end{aligned} \quad (2.24)$$

6) асимметрия вперед, обусловленная поляризацией фермиона

$$A_F(h_1) = \frac{\sigma_F(h_1) - \sigma_F(-h_1)}{\sigma_F(h_1) + \sigma_F(-h_1)} = h_1 \frac{7(|F_{RR}|^2 - |F_{LL}|^2) + |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2}{7(|F_{RR}|^2 + |F_{LL}|^2) + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2}; \quad (2.25)$$

7) асимметрия назад, обусловленная поляризацией фермиона

$$A_B(h_1) = \frac{\sigma_B(h_1) - \sigma_B(-h_1)}{\sigma_B(h_1) + \sigma_B(-h_1)} = h_1 \frac{7(|F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2) + |F_{RR}|^2 - |F_{LL}|^2}{7(|F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2) + |F_{RR}|^2 + |F_{LL}|^2}; \quad (2.26)$$

8) поляризационная асимметрия вперед-назад, обусловленная поляризацией фермиона

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{FB}(h_1) &= \frac{\sigma_F(h_1) - \sigma_F(-h_1) - [\sigma_B(h_1) - \sigma_B(-h_1)]}{\sigma_F(h_1) + \sigma_F(-h_1) + \sigma_B(h_1) + \sigma_B(-h_1)} = \\ &= \frac{3}{4} h_1 \frac{|F_{RR}|^2 + |F_{RL}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{LL}|^2}{|F_{RR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{LL}|^2}.\end{aligned}\quad (2.27)$$

В стандартной теории комбинированные поляризационные асимметрии (2.20)—(2.27) также обращаются в нуль при определенных энергиях сталкивающихся e^-e^+ -пучков. Так, например,

$$\begin{aligned}A_{FB}^{(CM)}(\lambda_2 = 1) &= 0 \text{ при } s = 2Q_f M_Z^2 [2Q_f - g_{Le}^Z g_{Vf}^Z]^{-1}, \\ A_{FB}^{(CM)}(\lambda_2 = -1) &= 0 \text{ при } s = 2Q_f M_Z^2 [2Q_f - g_{Re}^Z g_{Vf}^Z]^{-1}, \\ A_{FB}^{(CM)}(h_1 = 1) &= 0 \text{ при } s = 2Q_f M_Z^2 [2Q_f - g_{Rf}^Z g_{Ve}^Z]^{-1}, \\ A_{FB}^{(CM)}(h_1 = -1) &= 0 \text{ при } s = 2Q_f M_Z^2 [2Q_f - g_{Lf}^Z g_{Ve}^Z]^{-1}.\end{aligned}$$

Что касается поляризационных асимметрий вперед $A_F^{(CM)}(\lambda_2)$ и назад $A_B^{(CM)}(\lambda_2)$, то они зануляются при энергиях

$$\begin{aligned}s &= 2Q_f M_Z^2 [7(g_{Le}^Z g_{Lf}^Z - g_{Re}^Z g_{Rf}^Z) + g_{Le}^Z g_{Rf}^Z - g_{Re}^Z g_{Lf}^Z] \times \\ &\times \{ 2Q_f [7(g_{Le}^Z g_{Lf}^Z - g_{Re}^Z g_{Rf}^Z) + g_{Le}^Z g_{Rf}^Z - g_{Re}^Z g_{Lf}^Z] - 7(g_{Le}^Z g_{Lf}^Z - \\ &- g_{Re}^Z g_{Rf}^Z)(g_{Le}^Z g_{Lf}^Z + g_{Re}^Z g_{Rf}^Z) + (g_{Re}^Z g_{Lf}^Z - g_{Le}^Z g_{Rf}^Z)(g_{Le}^Z g_{Rf}^Z + g_{Re}^Z g_{Lf}^Z) \}^{-1}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}s &= 2Q_f M_Z^2 [7(g_{Le}^Z g_{Rf}^Z - g_{Re}^Z g_{Lf}^Z) + g_{Le}^Z g_{Lf}^Z - g_{Re}^Z g_{Rf}^Z] \times \\ &\times \{ 2Q_f [7(g_{Le}^Z g_{Rf}^Z - g_{Re}^Z g_{Lf}^Z) + g_{Le}^Z g_{Lf}^Z - g_{Re}^Z g_{Rf}^Z] - 7(g_{Le}^Z g_{Rf}^Z - \\ &- g_{Re}^Z g_{Lf}^Z)(g_{Le}^Z g_{Rf}^Z + g_{Re}^Z g_{Lf}^Z) + (g_{Re}^Z g_{Rf}^Z - g_{Le}^Z g_{Lf}^Z)(g_{Le}^Z g_{Rf}^Z + g_{Re}^Z g_{Lf}^Z) \}^{-1}\end{aligned}$$

соответственно. В частности, при рождении пары лептонов мы имеем

$$A_{F(B)}^{(CM)}(\lambda_2) = A_{F(B)}^{(CM)}(h_1) = 0 \text{ при } s = 2M_Z^2 [2 + (g_{Le}^Z)^2 + (g_{Re}^Z)^2]^{-1}.$$

В табл.3 приводятся нули спиральных амплитуд и электрослабых асимметрий процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$.

Для сравнения результатов стандартной и суперструнной E_6 -моделей друг с другом, а также с данными планируемых экспериментов нами проведены расчеты поляризационных характеристик процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$ при значении параметра Вайнберга $x_W = 0,23$. Принято, что угол $(Z - Z')$ -смеси

**Таблица 3. Нули спиральных амплитуд
и электрослабых асимметрий процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$**

Амплитуда	Процесс		
Асимметрия	$e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+ (\tau^+\tau^-)$	$e^-e^+ \rightarrow u\bar{u} (c\bar{c})$	$e^-e^+ \rightarrow d\bar{d} (s\bar{s}, b\bar{b})$
F_{RR}	$M_Z \cos \theta_w$	$M_Z \cos \theta_w$	$M_Z \cos \theta_w$
F_{LR}	$\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w$	$\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w$	$\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w$
F_{RL}	$\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w$	$2M_Z \cos \theta_w$	—
F_{LL}	$M_Z \sin 2\theta_w$	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3 - 2x_w}}$	$\frac{M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3 - 4x_w}}$
A_{FB}	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{1 + 8x_w^2}}$	$\frac{2 M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3 - 4x_w + 16x_w^2}}$	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3 - 8x_w(1 - x_w)}}$
A_{RL}	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{1 + 4x_w}}$	$\frac{2 M_Z \sin 2\theta_w \sqrt{1,5 - 4x_w}}{\sqrt{4,5 - 6x_w - 24x_w^2}}$	$\frac{2 M_Z \sin 2\theta_w \sqrt{1,5 - 2x_w}}{\sqrt{9 - 24x_w}}$
P	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{1 + 4x_w}}$	$\frac{2 M_Z \sin 2\theta_w \sqrt{0,5 - 2x_w}}{\sqrt{1,5 - 2x_w - 12x_w^2}}$	$\frac{2 M_Z \sin 2\theta_w \sqrt{0,5 - 2x_w}}{\sqrt{3 - 8x_w}}$
$A_{FB}(\lambda_2 = 1)$	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{1 + 2x_w}}$	$\frac{2M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3 + 2x_w}}$	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3 - 2x_w}}$
$A_{FB}(\lambda_2 = -1)$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \cos \theta_w$	$\sqrt{\frac{8}{5}} M_Z \cos \theta_w$	$2M_Z \cos \theta_w$
$A_{FB}(h_1 = 1)$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \cos \theta_w$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \cos \theta_w$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \cos \theta_w$
$A_{FB}(h_1 = -1)$	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{1 + 2x_w}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \sin 2\theta_w$	$\frac{\sqrt{2} M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3(1 - 2x_w)}}$

шивания $\Phi = 0$, а для массы и ширины распада дополнительного бозона выбраны значения $M_{Z'} = 150, 200, 250, 300$ ГэВ и $\Gamma_{Z'} = M_{Z'}/40$. Некоторые результаты числовых оценок электрослабых асимметрий представлены на рис.2 и 3. Штриховые кривые демонстрируют поведение электрослабых асимметрий в СМ.

Чувствительность асимметрий A_{FB} и A_{RL} к выбору массы суперструнного Z' -бозона иллюстрирует рис.2, где представлена зависимость асимметрий от энергии $\sqrt{s}$. Как видно, при $M_{Z'} = 150$ ГэВ с ростом энергии асимметрия A_{FB} сперва возрастает, а затем уменьшается и, достигнув минимального значения вблизи $\sqrt{s} \sim 150$ ГэВ, снова начинает расти до максимального значения

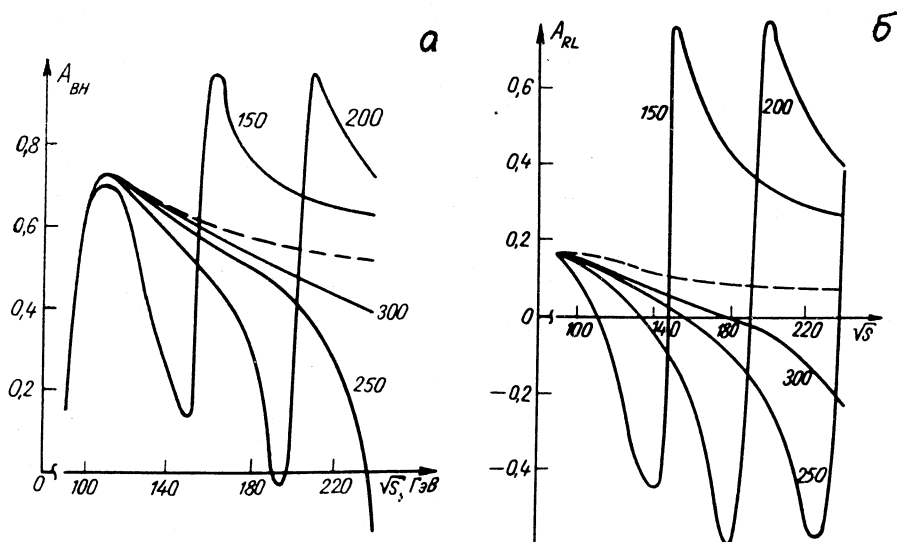


Рис.2. Энергетическая зависимость асимметрий а) $A_{FB}(\theta_E = 0^\circ)$ и б) $A_{RL}(\theta_E = 90^\circ)$ в процессе $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ при различных массах Z' -бозона (цифры у кривых — масса $M_{Z'}$, в ГэВ)

чения. Дальнейший рост энергии приводит к спаду асимметрии A_{FB} . Увеличение массы дополнительного бозона не меняет характер зависимости A_{FB} от энергии, однако ее максимумы и минимумы смещаются в сторону высоких энергий. Аналогичное поведение наблюдается и для других электрослабых асимметрий.

Рассмотрим режим работы e^-e^+ -коллайдеров $s = M_i^2$. В этом случае вклад в сечение от i -бозона ($i = Z$ или Z') становится доминирующим, так как мы имеем дело с резонансным рождением бозона. В резонансе интегральные характеристики процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$ равны

$$A_{FB} = \frac{3}{4} A_e^i A_f^i, \quad A_{RL} = A_e^i, \quad P = -A_f^i,$$

$$A_F(\lambda_2) = \lambda_2 \frac{4A_e^i + 3A_f^i}{4 + 3A_e^i A_f^i}, \quad A_B(\lambda_2) = \lambda_2 \frac{4A_e^i - aA_f^i}{4 - 3A_e^i A_f^i},$$

$$A_{FB}(\lambda_2) = \frac{3}{4} \frac{A_e^i + \lambda_2}{1 + \lambda_2 A_e^i} A_f^i, \quad \tilde{A}_{FB}(\lambda_2) = \frac{3}{4} \lambda_2 A_f^i,$$

$$A_F(h_1) = -h_1 \frac{4A_f^i + 3A_e^i}{4 + 3A_e^i A_f^i}, \quad A_B(h_1) = -h_1 \frac{4A_f^i - 3A_e^i}{4 - 3A_e^i A_f^i},$$

$$A_{FB}(h_1) = \frac{3}{4} \frac{A_f^i - h_1}{1 - h_1 A_f^i} A_e^i, \quad \tilde{A}_{FB}(h_1) = -\frac{3}{4} h_1 A_e^i,$$

$$A_\phi^{(1)} = -g_{Le}^i g_{Re}^i / [(g_{Le}^i)^2 + (g_{Re}^i)^2].$$

Здесь

$$A_e^i = \frac{(g_{Le}^i)^2 - (g_{Re}^i)^2}{(g_{Le}^i)^2 + (g_{Re}^i)^2}, \quad A_f^i = \frac{(g_{Lf}^i)^2 - (g_{Rf}^i)^2}{(g_{Lf}^i)^2 + (g_{Rf}^i)^2}.$$

Отсюда следует, что информация о константах связи электрона с i -бозонами ($i = Z$ или Z') может быть получена путем изучения асимметрий

A_{RL} , $A_\phi^{(1)}$, $\tilde{A}_{FB}(h_1)$ и $A_{FB}(h_1 = \pm 1)$. Степень продольной поляризации фермиона P , асимметрия вперед-назад $A_{FB}(\lambda_2 = \pm 1)$ и поляризационная асимметрия вперед-назад $\tilde{A}_{FB}(\lambda_2)$ содержат сведения о параметрах СНТ конечных частиц.

В табл.4 приведены значения различных электрослабых асимметрий при рождении пары фундаментальных фермионов в Z - и Z' -резонансной области энергий при значении параметра Вайнберга $x_W = 0,23$.

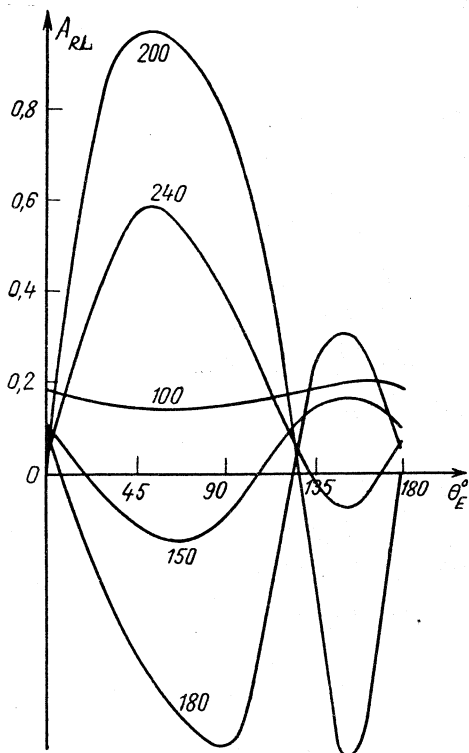


Рис.3. Зависимость право-левой асимметрии от угла θ_E в процессе $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ при разных энергиях $\sqrt{s}$ (цифры у кривых — энергия $\sqrt{s}$ в ГэВ)

Таблица 4. Электрослабые асимметрии процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$
в Z- или Z'-резонансе при $\sin^2\theta_W = 0,23$

Фермион	Z-резонанс						
	A_{RL}	P	$A_F(\lambda_2)$	$A_B(\lambda_2)$	$A_{FB}(\lambda_2)$	$\tilde{A}_{FB}(\lambda_2)$	$A_\phi^{(1)}$
μ, τ	0,16	-0,16	$0,28\lambda_2$	$0,04\lambda_2$	$0,12 \frac{\lambda_2 + 0,16}{1 + 0,16\lambda_2}$	$0,12\lambda_2$	0,5
u, c	0,16	-0,67	$0,61\lambda_2$	$-0,37\lambda_2$	$0,5 \frac{\lambda_2 + 0,16}{1 + 0,16\lambda_2}$	$0,5\lambda_2$	0,5
d, s, b	0,16	-0,94	$0,68\lambda_2$	$-0,6\lambda_2$	$0,7 \frac{\lambda_2 + 0,16}{1 + 0,16\lambda_2}$	$0,7\lambda_2$	0,5
Z' $\equiv$ Z _x -резонанс ($\theta_E = 90^\circ$)							
μ, τ	0,8	-0,8	$0,95\lambda_2$	$0,4\lambda_2$	$0,6 \frac{\lambda_2 + 0,8}{1 + 0,8\lambda_2}$	$0,6\lambda_2$	-0,3
u, c	0,8	0	$0,8\lambda_2$	$0,8\lambda_2$	0	0	-0,3
d, s, b	0,8	0,8	$0,4\lambda_2$	$0,95\lambda_2$	$-0,6 \frac{\lambda_2 + 0,8}{1 + 0,8\lambda_2}$	$-0,6\lambda_2$	-0,3

Как известно, в суперсимметричных теориях каждому фундаментальному фермиону f соответствует суперпартнер — скалярный фермион $\tilde{f}$. Скалярные партнеры известных фермионов имеют те же квантовые числа по внутренним симметриям и отличаются от них только спинами. В различных лабораториях мира интенсивно ведутся поиски суперчастиц, однако обнаружить их пока не удалось.

В электрон-позитронных столкновениях процесс аннигиляции $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}\bar{\tilde{f}}$ является основным источником рождения скалярных фермионов. Эта реакция с учетом вклада СНТ в СМ исследована в [54—56]. В частности, С.М.Биленьким и Н.П.Неделчевой в рамках $N=1$ суперсимметрии получены общие соотношения между поляризационными характеристиками

процессов $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}\bar{\tilde{f}}$ [56].

Существуют скалярные фермионы $\tilde{f}_L$ и $\tilde{f}_R$, входящие в супермультиплеты $(\tilde{f}_L, f_L)$ и $(\tilde{f}_R, f_R)$, где f_L и f_R — левый и правый фермионы. Частицы, входящие в один супермультиплет, обладают одинаковыми константами связи с калибровочными бозонами [57].

Процессу аннигиляции e^-e^+ -пары в пару скалярных фермионов (2.2) соответствуют две спиральные амплитуды

$$M_A = \sum_{i=\gamma, Z_1, Z_2} D_i(s) g_{Ae}^i g_f^i \quad (A=L, R), \quad (2.28)$$

описывающие реакции $e_L^- e_R^+ \rightarrow \tilde{f} \tilde{f}$ и $e_R^- e_L^+ \rightarrow \tilde{f} \tilde{f}$. Здесь g_f^i — константы связи скалярного фермиона с калибровочными i -бозонами, причем для суперпартнера $\tilde{f}_L$ $g_{\tilde{f}}^i \equiv g_{Lf}^i$, а для $\tilde{f}_R$ $g_{\tilde{f}}^i \equiv g_{Rf}^i$.

В СМ спиральные амплитуды процессов $e^- e^+ \rightarrow \tilde{f} \tilde{f}$ даются выражениями

$$M_L^{(CM)} = \frac{Q_{\tilde{f}}}{s} + D_Z(s) g_{Le}^Z g_{\tilde{f}}^Z, \quad (2.29)$$

$$M_R^{(CM)} = \frac{Q_{\tilde{f}}}{s} + D_Z(s) g_{Re}^Z g_{\tilde{f}}^Z. \quad (2.30)$$

Амплитуды $M_L^{(CM)}$ и $M_R^{(CM)}$ обращаются в нуль при энергиях

$$s = \frac{2M_Z^2 Q_{\tilde{f}} x_W (1 - x_W)}{Q_{\tilde{f}} x_W - I_3^{\tilde{f}} (2x_W - 1)} \quad \text{и} \quad s = \frac{M_Z^2 Q_{\tilde{f}} (1 - x_W)}{Q_{\tilde{f}} - I_3^{\tilde{f}}}$$

соответственно. Для пары скалярных фермионов $\tilde{f}_R \tilde{f}_R$ мы имеем ($I_3^{\tilde{f}} = 0$)

$$M_L^{(CM)} = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{s} = \sqrt{2} M_Z \cos \theta_W,$$

$$M_R^{(CM)} = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{s} = M_Z \cos \theta_W$$

независимо от природы скалярных фермионов.

Дифференциальное сечение реакций $e^- e^+ \rightarrow \tilde{f} \tilde{f}$ равно [25,27]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \beta^3}{16} N_c s \sin^2 \theta \{ |M_L|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2) + |M_R|^2 (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2) - 2\eta_1 \eta_2 [\operatorname{Re}(M_L M_R^*) \cos 2\phi + \operatorname{Im}(M_L M_R^*) \sin 2\phi] \}, \quad (2.31)$$

где β — скорость скалярного фермиона.

Основными измеряемыми на опыте интегральными характеристиками

процессов $e^- e^+ \rightarrow \tilde{f} \tilde{f}$ являются право-левая поляризационная асимметрия

$$A_{RL} = [|M_L|^2 - |M_R|^2] / [|M_L|^2 + |M_R|^2], \quad (2.32)$$

P -четная поперечная спиновая асимметрия

$$A_{\phi}^{(1)} = -2\operatorname{Re}(M_L M_R^*) / [|M_L|^2 + |M_R|^2] \quad (2.33)$$

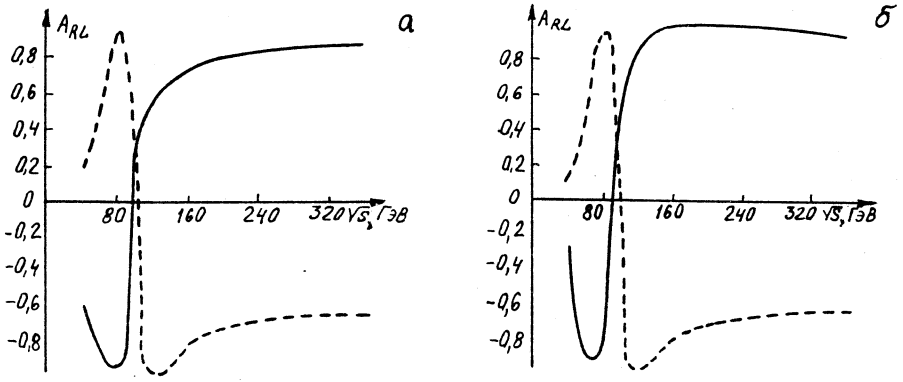


Рис.4. Зависимость асимметрии A_{RL} от энергии в процессах а) $e^-e^+ \rightarrow \tilde{u}\tilde{u}$ и б) $e^-e^+ \rightarrow \tilde{d}\tilde{d}$

и P -нечетная поперечная спиновая асимметрия

$$A_{\phi}^{(2)} = -2\text{Im}(M_L M_R^*) / [|M_L|^2 + |M_R|^2]. \quad (2.34)$$

На рис.4 и 5 представлена энергетическая зависимость право-левой асимметрии A_{RL} и поперечной спиновой асимметрии $A_{\phi}^{(1)}$ в рамках СМ при $x_W = 0,23$. Здесь сплошные кривые отвечают процессам $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}_L \tilde{q}_L$, а пунктирные — процессам $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}_R \tilde{q}_R$. Для скалярных кварков $\tilde{q}_R \tilde{q}_R$ ($\tilde{q}_L \tilde{q}_L$) с ростом энергии право-левая асимметрия A_{RL} увеличивается (уменьшается) и, достигнув максимума (минимума) при $\sqrt{s} \sim 80$ ГэВ, начинает уменьшаться (возрастать) и обращается в нуль при $\sqrt{s} \sim 93$ ГэВ ($\sqrt{s} \sim 90$ ГэВ), затем асимметрия достигает минимума (максимума) и постепенно выходит на плато.

Аналогичное поведение наблюдается и для P -четной поперечной спиновой асимметрии $A_{\phi}^{(1)}$. Так, в начале спектра $A_{\phi}^{(1)} = -1$, с ростом энергии она увеличивается и, достигнув максимума при $\sqrt{s} \sim 80$ —100 ГэВ, начинает уменьшаться. В процессах $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}_R \tilde{q}_R$ у асимметрии $A_{\phi}^{(1)}$ наблюдаются две нулевые точки: при $\sqrt{s} \approx 80$ ГэВ и $\sqrt{s} \approx 114$ ГэВ. Для скалярных фермионов $\tilde{u}_L \tilde{u}_L$, $\tilde{c}_L \tilde{c}_L$ ($\tilde{t}_L \tilde{t}_L$) асимметрия $A_{\phi}^{(1)}$ также обращается в нуль в двух точках: при $\sqrt{s} \approx 70$ ГэВ и $\sqrt{s} \approx 160$ ГэВ; а для процессов $e^-e^+ \rightarrow \tilde{d}_L \tilde{d}_L$, $\tilde{s}_L \tilde{s}_L$, $\tilde{b}_L \tilde{b}_L$ наблюдается одна нулевая точка при $\sqrt{s} \approx 54$ ГэВ.

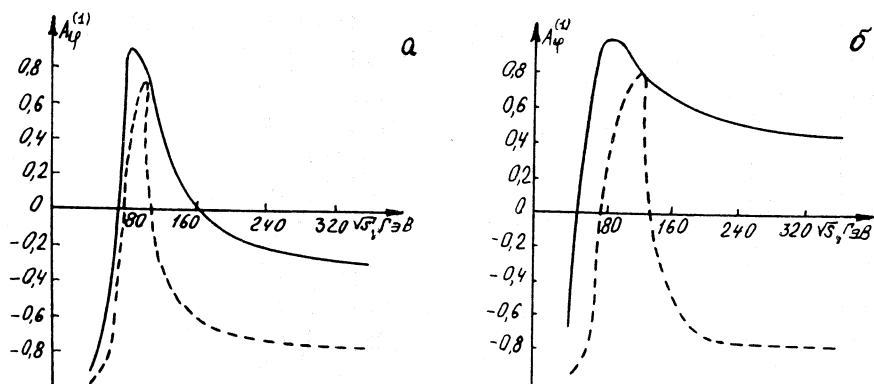


Рис.5. Зависимость асимметрии $A_\phi^{(1)}$ от энергии в процессах а) $e^-e^+ \rightarrow \bar{u}u$ и б) $e^-e^+ \rightarrow \bar{d}d$

Таблица 5. Нули спиральных амплитуд и асимметрий процессов $e^-e^+ \rightarrow \bar{f}f$

Процесс	Амплитуда		Асимметрия	
	M_L	M_R	A_{RL}	$A_\phi^{(1)}$
$e^-e^+ \rightarrow \bar{\mu}_R \bar{\mu}_R$ ($\bar{\tau}_R \bar{\tau}_R$)	$\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w$	$M_Z \cos \theta_w$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \cos \theta_w$	$\frac{M_Z \cos \theta_w}{\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w}$
$e^-e^+ \rightarrow \bar{\mu}_L \bar{\mu}_L$ ($\bar{\tau}_L \bar{\tau}_L$)	$M_Z \sin 2\theta_w$	$\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w$	$\frac{M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{0,5 + x_w}}$	$\frac{M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w}$
$e^-e^+ \rightarrow \bar{u}_R \bar{u}_R$ ($\bar{c}_R \bar{c}_R$)	$\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w$	$M_Z \cos \theta_w$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \cos \theta_w$	$\frac{\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w}{M_Z \cos \theta_w}$
$e^-e^+ \rightarrow \bar{u}_L \bar{u}_L$ ($\bar{c}_L \bar{c}_L$)	$\frac{M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{1,5 - x_w}}$	$2M_Z \cos \theta_w$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \sin 2\theta_w$	$\frac{M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{1,5 - x_w} \cdot 2M_Z \cos \theta_w}$
$e^-e^+ \rightarrow \bar{d}_R \bar{d}_R$ ($\bar{s}_R \bar{s}_R, \bar{b}_R \bar{b}_R$)	$\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w$	$M_Z \cos \theta_w$	$\frac{2}{\sqrt{3}} M_Z \cos \theta_w$	$\frac{\sqrt{2} M_Z \cos \theta_w}{M_Z \cos \theta_w}$
$e^-e^+ \rightarrow \bar{d}_L \bar{d}_L$ ($\bar{s}_L \bar{s}_L, \bar{b}_L \bar{b}_L$)	$\frac{M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3 - 4x_w}}$	—	$\frac{M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{1,5 - 3x_w}}$	$\frac{M_Z \sin 2\theta_w}{\sqrt{3 - 4x_w}}$

В табл.5 приводятся нули спиральных амплитуд и электрослабых асимметрий процессов $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}\tilde{f}$ в рамках СМ.

Что касается P -нечетной поперечной спиновой асимметрии $A_\phi^{(2)}$, то она не обладает нулевыми точками, для процессов $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}_L\tilde{f}_L$ она положительна, а для $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}_R\tilde{f}_R$ — отрицательна. Эта асимметрия сначала по модулю увеличивается с ростом энергии, достигая наибольших значений в области $\sqrt{s} \sim M_Z$, а затем спадает до нуля.

Асимметрии A_{RL} и $A_\phi^{(1)}$, вычисленные в рамках суперструнной E_6 -модели, в начале спектра, имея примерно одинаковый характер зависимости от энергии, существенно отличаются от предсказаний СМ в области энергий $\sqrt{s} \geq 100$ ГэВ, где у асимметрий наблюдаются дополнительные нули, минимум и максимум.

3. СПИРАЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ И ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ АСИММЕТРИИ ПРОЦЕССОВ $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\tilde{q}g$.

В процессах $e^-e^+ \rightarrow X$ при высоких энергиях в большинстве случаев адроны рождаются в виде двух струй. Однако, как показывают опыты, в некоторых случаях образуются и дополнительные струи. В ряде работ (см. обзор [48]) обсуждался механизм рождения трех струй в e^-e^+ -аннигиляции за счет тормозного излучения жесткого глюона, приводящего к возникновению глюонной струи.

Глюонные струи должны иметь ряд отличий от кварковых струй. Прежде всего, множественность рождения адронов в глюонной струе должна быть больше, чем в кварковой. Это обусловлено тем, что глюон может превращаться в дальнейшем в кварк-антикварковую пару. Далее, в глюонной струе должны образовываться преимущественно η - и η' -мезоны. Эти свойства позволяют различать кварковые и глюонные струи. Кроме того, экспериментально можно различить адронные струи, образованные кварками с различными ароматами. Это имеет исключительное значение для определения структуры СНТ тяжелых c -, b - и, возможно, t -кварков.

Трехструйная аннигиляция e^-e^+ -пары в СМ теоретически изучалась многими авторами [49—53]. Здесь рассматриваются эффекты суперструнного Z' -бозона в процессах трехструйного рождения адронов при аннигиляции произвольно поляризованной электрон-позитронной пары.

Процессу рождения пары кварк-антикварк с излучением тормозного глюона при аннигиляции электрона и позитрона

$$e^- + e^+ \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2, \dots) \rightarrow q + \bar{q} + g \quad (3.1)$$

соответствует матричный элемент (массами частиц пренебрегается)

$$M = e^2 g_s \sum_i D_i(s) \bar{v} \gamma_\mu [g_{Le}^i (1 + \gamma_5) + g_{Re}^i (1 - \gamma_5)] u \times \\ \times \bar{u}_\alpha \left(\frac{\lambda_m}{2} \right)_{\alpha\beta} e_\rho^m \Gamma_{\mu\rho} [g_{Lq}^i (1 + \gamma_5) + g_{Rq}^i (1 - \gamma_5)] v_\beta, \quad (3.2)$$

где

$$\Gamma_{\mu\rho} = \gamma_\rho \frac{\hat{q}_1 + \hat{k}}{2k q_1} \gamma_\mu - \gamma_\mu \frac{\hat{q}_2 + \hat{k}}{2k q_2} \gamma_\rho,$$

g_s — константа кварк-глюонного взаимодействия; q_1, q_2 и k — 4-импульсы кварка, антикварка и глюона; λ_m — матрицы Гелл-Манна; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $m = 1+8$ — цветовые индексы кваркового и глюонного полей.

Из выражения матричного элемента (3.2) следует, что процессу $e^- e^+ \rightarrow q \bar{q} g$ соответствуют четыре спиральные амплитуды F_{LL}, F_{LR}, F_{RL} и F_{RR} , которые описывают следующие реакции:

$$e_L^- + e_R^+ \rightarrow q_L + \bar{q}_R + g, \quad e_L^- + e_R^+ \rightarrow q_R + \bar{q}_L + g$$

$$e_R^- + e_L^+ \rightarrow q_L + \bar{q}_R + g, \quad e_R^- + e_L^+ \rightarrow q_R + \bar{q}_L + g.$$

В суперструнной E_6 -модели спиральные амплитуды процесса $e^- e^+ \rightarrow q \bar{q} g$ определяются такими же выражениями, как и амплитуды процесса $e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}$:

$$F_{AB} = \sum_i D_i(s) g_{Ae}^i g_{Bq}^i \quad (A, B = L; R). \quad (3.3)$$

Выражение для квадрата матричного элемента $|M|^2$ запишем как

$$|M|^2 = (4\pi)^3 \alpha_s^2 \alpha_s N_c \sum_i \sum_k D_i(s) D_k^*(s) L_{\mu\nu}^{ik} H_{\mu\nu}^{ik}, \quad (3.4)$$

где $N_c = 4$ — цветовой множитель, учитывающий суммирование по цветовым степеням свободы глюона и кварков; $\alpha_s = g_s^2/4\pi$; $L_{\mu\nu}^{ik}$ и $H_{\mu\nu}^{ik}$ — лептонные и адронные тензоры. Отметим, что все лептонные и адронные тензоры сохраняются:

$$L_{\mu\nu}^{ik} q_\mu = L_{\mu\nu}^{ik} q_\nu = H_{\mu\nu}^{ik} q_\mu = H_{\mu\nu}^{ik} q_\nu = 0,$$

и вследствие этого в с.п.и. вклад в сечение дают только пространственные компоненты тензоров

$$L_{\mu\nu}^{ik} H_{\mu\nu}^{ik} = L_{mn}^{ik} H_{mn}^{ik} \quad (m, n = 1, 2, 3).$$

В случае произвольно поляризованных e^-e^+ -пучков тензор L_{mn}^{ik} имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} L_{mn}^{ik} = & [(g_{Le}^i g_{Le}^k + g_{Re}^i g_{Re}^k)(1 - \lambda_1 \lambda_2) + (g_{Le}^i g_{Le}^k - g_{Re}^i g_{Re}^k)(\lambda_2 - \lambda_1)] L_{mn}^{(1)} + \\ & + [(g_{Le}^i g_{Le}^k + g_{Re}^i g_{Re}^k)(\lambda_2 - \lambda_1) + (g_{Le}^i g_{Le}^k - g_{Re}^i g_{Re}^k)(1 - \lambda_2 \lambda_1)] L_{mn}^{(2)} + \\ & + (g_{Le}^i g_{Re}^k + g_{Re}^i g_{Le}^k) L_{mn}^{(3)} + (g_{Re}^i g_{Le}^k - g_{Le}^i g_{Re}^k) L_{mn}^{(4)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$L_{mn}^{(1)} = s(\delta_{mn} - N_m N_n),$$

$$L_{mn}^{(2)} = is\epsilon_{mnr} N_r,$$

$$L_{mn}^{(3)} = s[\eta_{1m} \eta_{2n} + \eta_{1n} \eta_{2m} - \eta_1 \eta_2 (\delta_{mn} - N_m N_n)],$$

$$L_{mn}^{(4)} = is(\eta_{1m} \epsilon_{nrq} + \eta_{1n} \epsilon_{mrq}) N_r \eta_{2q},$$

$\mathbf{N}$ — единичный вектор вдоль импульса электрона; λ_1 и λ_2 (η_1 и η_2) — величины продольных (поперечных) поляризаций электрона и позитрона.

Выражение для адронного тензора H_{mn}^{ik} имеет вид

$$\begin{aligned} H_{mn}^{ik} = & [(g_{Lq}^i g_{Lq}^k + g_{Rq}^i g_{Rq}^k)(1 - h_1 h_2) + (g_{Lq}^i g_{Lq}^k - g_{Rq}^i g_{Rq}^k)(h_2 - h_1)] H_{mn}^{(s)} + \\ & + [(g_{Lq}^i g_{Lq}^k + g_{Rq}^i g_{Rq}^k)(h_2 - h_1) + (g_{Lq}^i g_{Lq}^k - g_{Rq}^i g_{Rq}^k)(1 - h_1 h_2)] H_{mn}^{(a)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где h_1 и h_2 — спиральности кварка и антикварка, $H_{mn}^{(s)}$ и $H_{mn}^{(a)}$ — симметричная и антисимметричная части адронного тензора:

$$\begin{aligned} H_{mn} = & \frac{1}{2(1-x_1)(1-x_2)} [\delta_{mn}(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2 n_{1m} n_{1n} - x_2^2 n_{2m} n_{2n} + \\ & + i\epsilon_{mnr}(x_1^2 n_{1r} - x_2^2 n_{2r})], \end{aligned}$$

$x_1 = 2E_1/\sqrt{s}$ и $x_2 = 2E_2/\sqrt{s}$ — энергии кварка и антикварка в единицах энергии электрона, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы вдоль импульсов кварка и антикварка.

Введем так называемые корреляционные сечения σ_a ($a = 1 \div 9$) посредством соотношений [50,53]:

$$\begin{aligned}
\sigma_U &= H_{11} + H_{22}, \quad \sigma_L = H_{33}, \quad \sigma_T = \frac{1}{2} (H_{22} - H_{11}), \\
\sigma_4 &= -\frac{1}{2} (H_{12} + H_{21}), \quad \sigma_5 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} (H_{23} + H_{32}), \\
\sigma_6 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} (H_{31} + H_{13}), \quad \sigma_7 = i(H_{21} - H_{12}), \\
\sigma_8 &= \frac{i}{2\sqrt{2}} (H_{32} - H_{23}), \quad \sigma_9 = \frac{i}{2\sqrt{2}} (H_{13} - H_{31}). \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Здесь введены специальные индексы U, L, T для $a = 1, 2, 3$. Формулы для корреляционных сечений σ_a даны в приложении 1.

Произведение тензоров $L_{mn}^{(k)} H_{mn}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) можно выразить через сечения σ_a :

$$\begin{aligned}
L_{mn}^{(k)} H_{mn} &= \frac{1}{2} (L_{11}^{(k)} + L_{22}^{(k)}) \sigma_U + L_{33}^{(k)} \sigma_L + \\
&+ (L_{22}^{(k)} - L_{11}^{(k)}) \sigma_T - (L_{21}^{(k)} + L_{12}^{(k)}) \sigma_4 - \sqrt{2} (L_{23}^{(k)} + L_{32}^{(k)}) \sigma_5 - \\
&- \sqrt{2} (L_{13}^{(k)} + L_{31}^{(k)}) \sigma_6 + \frac{i}{2} (L_{12}^{(k)} - L_{21}^{(k)}) \sigma_7 + \\
&+ i\sqrt{2} (L_{23}^{(k)} - L_{32}^{(k)}) \sigma_8 + i\sqrt{2} (L_{31}^{(k)} - L_{13}^{(k)}) \sigma_9. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Воспользуемся системой координат, в которой плоскость xz совпадает с плоскостью событий $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{k} = 0$, и введем углы θ, χ и ϕ , где θ — полярный угол между осью z и направлением электронного пучка, χ — азимутальный угол между плоскостью событий и плоскостью, определяемой осью z и пучком e^- , ϕ — азимутальный угол между плоскостями событий и поперечной поляризации. Тогда дифференциальное сечение процессов (3.1) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d^5\sigma}{d\phi d\chi d\cos\theta dx_1 dx_2} &= \frac{2\alpha^2}{3\pi^2} \alpha_s \{ (\sigma_A + \sigma_D) [|F_{LL}|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2) \times \\
&\times (1 - h_1)(1 + h_2) + |F_{RR}|^2 (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 + h_1)(1 - h_2)] + (\sigma_A - \sigma_D) \times \\
&\times [|F_{LR}|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + h_1)(1 - h_2) + |F_{RL}|^2 (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - h_1)(1 + h_2)] - \\
&- 2\eta_1 \eta_2 [(1 - h_1)(1 - h_2)(\cos 2\phi (\sigma_B \operatorname{Re}(F_{LL} F_{RL}^*) + \sigma_C \operatorname{Im}(F_{LL} F_{RL}^*)) + \\
&+ \sin 2\phi (\sigma_B \operatorname{Im}(F_{LL} F_{RL}^*) - \sigma_C \operatorname{Re}(F_{LL} F_{RL}^*))) + \\
&+ (1 + h_1)(1 - h_2)(\cos 2\phi (\sigma_B \operatorname{Re}(F_{LR} F_{RR}^*) + \sigma_C \operatorname{Im}(F_{LR} F_{RR}^*)) +
\end{aligned}$$

$$+ \sin 2\varphi (\sigma_B \operatorname{Im} (F_{LR} F_{RR}^*) - \sigma_C \operatorname{Re} (F_{LR} F_{RR}^*))]]\}. \quad (3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \theta) \sigma_U + \frac{3}{4} \sin^2 \theta (\sigma_L + \cos 2\chi \cdot \sigma_T) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin 2\theta \cos \chi \cdot \sigma_I, \\ \sigma_B &= \frac{3}{8} \sin^2 \theta (\sigma_U - 2\sigma_L) + \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\chi \cdot \sigma_T + \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin 2\theta \cos \chi \cdot \sigma_I, \\ \sigma_C &= \frac{3}{2} \cos \theta \sin 2\chi \cdot \sigma_T + \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \theta \sin \chi \cdot \sigma_I, \\ \sigma_D &= \frac{3}{4} \cos \theta \cdot \sigma_P - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \chi \cdot \sigma_F, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где приняты обозначения $\sigma_I = \sigma_6$, $\sigma_P = \sigma_7$, $\sigma_F = \sigma_8$ и учтено, что $\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_9 = 0$ (см. приложение 1).

Корреляционные сечения σ_a зависят от переменных x_1 и x_2 , они могут быть измерены только в том случае, если известно, из какого партона рождается данная струя адронов, но экспериментально это трудно определить. Поэтому эффективное сечение процессов (3.1) выражается через измеряемую величину T , называемую трастом или вытянутостью.

В случае безмассовых партонов диаграмма Далица определяется из законов сохранения энергии и импульса:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x_1 \mathbf{n}_1 + x_2 \mathbf{n}_2 + x_3 \mathbf{n}_3 = 0,$$

где $x_3 = 2\omega/\sqrt{s}$ — энергия глюона, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ — единичные векторы вдоль импульсов партонов. Границы разрешенной области определяются уравнениями

$$x_k = |x_i \pm x_j| \quad (i \neq j \neq k).$$

Кривые $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ и $x_1 = x_3$ разделяют диаграмму Далица на шесть различных областей. В области i_j энергии партонов удовлетворяют условиям

$$x_i \geq x_j \geq x_k \quad (i \neq j \neq k).$$

Обозначим $T_1 = T = \max(x_1, x_2, x_3)$, T_2 и T_3 — скейлинговые энергии более энергичной, второй энергичной и менее энергичной струи $T = T_1 \geq T_2 \geq T_3$. Выбирая ось z вдоль более энергичного партона и проводя интегрирование по T_2 (T_3 выражается через T и T_2 как $T_3 = 2 - T - T_2$) при фиксированном T в различных областях диаграммы Далица, находим корреляционные сечения σ_a как функции траста.

Спектрально-угловое распределение энергичной кварковой струи дается формулой

$$\begin{aligned}
\frac{d^4\sigma}{d\phi d\chi d\cos\theta dT} = & \frac{2}{3} \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} \alpha_s \{ [|F_{LL}|^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2)(1-h_1)(1+h_2) + \\
& + |F_{RR}|^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)(1+h_1)(1-h_2)](\sigma_A + \sigma_D) + (\sigma_A - \sigma_D) \times \\
& \times [|F_{LR}|^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+h_1)(1-h_2) + |F_{RL}|^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-h_1)(1+h_2)] - \\
& - 2\eta_1\eta_2 [(1-h_1)(1+h_2)(\cos 2\phi (\sigma_B \operatorname{Re}(F_{LL}F_{RL}^*) + \sigma_C \operatorname{Im}(F_{LL}F_{RL}^*)) + \\
& + \sin 2\phi (\sigma_B \operatorname{Im}(F_{LL}F_{RL}^*) - \sigma_C \operatorname{Re}(F_{LL}F_{RL}^*))) + \\
& + (1+h_1)(1-h_2)(\cos 2\phi (\sigma_B \operatorname{Re}(F_{LR}F_{RR}^*) + \sigma_C \operatorname{Im}(F_{LR}F_{RR}^*)) + \\
& + \sin 2\phi (\sigma_B \operatorname{Im}(F_{LR}F_{RR}^*) - \sigma_C \operatorname{Re}(F_{LR}F_{RR}^*))) \} \}, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

где σ_A , σ_B , σ_C и σ_D определяются прежними выражениями (3.10), но в них корреляционные сечения имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_U}{dT} &= \frac{1+T^2}{1-T} \ln \frac{2T-1}{1-T} - \frac{(3T-2)(2+2T-T^2)}{2T(1-T)}, \\
\frac{d\sigma_L}{dT} &= 2 \frac{d\sigma_T}{dT} = \frac{3T-2}{T}, \\
\frac{d\sigma_I}{dT} &= \frac{\sqrt{2(2T-1)}}{T} - \frac{1}{\sqrt{2(1-T)}}, \\
\frac{d\sigma_P}{dT} &= \frac{d\sigma_F}{dT} = \frac{1+T^2}{1-T} \ln \frac{2T-1}{1-T} - \frac{(3T-2)(4-2T+T^2)}{2T(1-T)}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Рассмотрим распределение кварковой струи по углам θ и ϕ . Интегрируя сечение (3.11) по углам χ , получим формулу

$$\begin{aligned}
\frac{d^3\sigma}{d\phi d\cos\theta dT} = & \frac{\alpha_s^2}{\pi} \alpha_s s(\sigma_U + 2\sigma_L) \{ [|F_{LL}|^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2)(1-h_1)(1+h_2) + \\
& + |F_{RR}|^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)(1+h_1)(1-h_2)] [1 + \alpha(T) \cos^2\theta + 2\beta(T) \cos\theta] + \\
& + [|F_{LR}|^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+h_1)(1-h_2) + |F_{RL}|^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-h_1)(1+h_2)] \times \\
& \times [1 + \alpha(T) \cos^2\theta - 2\beta(T) \cos\theta] - 2\eta_1\eta_2 \sin^2\theta \times \\
& \times [(1+h_1)(1-h_2)(\cos 2\phi \operatorname{Re}(F_{LR}F_{RR}^*) + \sin 2\phi \operatorname{Im}(F_{LR}F_{RR}^*)) + \\
& + (1-h_1)(1+h_2)(\cos 2\phi \operatorname{Re}(F_{LL}F_{RL}^*) + \sin 2\phi \operatorname{Im}(F_{LL}F_{RL}^*)) \} \}, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

где $\alpha(T) = (\sigma_U - 2\sigma_L)/(\sigma_U + 2\sigma_L)$, $\beta(T) = \sigma_P/(\sigma_U + 2\sigma_L)$.

Определим следующим образом сечения рождения кварковой струи в передней и задней полусферах при аннигиляции поляризованного позитрона и неполяризованного электрона (по поляризациям кварка и антикварка суммируются):

$$\sigma_F(\lambda_2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d \cos \theta \left(\frac{d^3 \sigma}{d\varphi d \cos \theta dT} \right), \quad (3.14)$$

$$\sigma_B(\lambda_2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^0 d \cos \theta \left(\frac{d^3 \sigma}{d\varphi d \cos \theta dT} \right). \quad (3.15)$$

Тогда на основе формулы (3.13) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{F(B)}(\lambda_2) = & \frac{8}{3} \alpha^2 \alpha_s s(\sigma_U + 2\sigma_L) \{ |F_{LL}|^2(1 + \lambda_2) + \\ & + |F_{RR}|^2(1 - \lambda_2)[3 + \alpha(T) \pm 3\beta(T)] + |F_{LR}|^2(1 + \lambda_2) + \\ & + |F_{RL}|^2(1 - \lambda_2)[3 + \alpha(T) \mp 3\beta(T)] \}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Эта формула приводит к следующим измеряемым на опыте интегральным характеристикам:

1) асимметрии вперед-назад в случае неполяризованных частиц

$$A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \chi(T) \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{RR}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}, \quad (3.17)$$

где

$$\chi(T) = 3\beta(T)/[3 + \alpha(T)] = \frac{3}{4} \sigma_P / (\sigma_U + \sigma_L);$$

2) асимметрии вперед-назад с учетом продольной поляризации позитрона

$$\begin{aligned} A_{FB}(\lambda_2) &= \frac{\sigma_F(\lambda_2) - \sigma_B(\lambda_2)}{\sigma_F(\lambda_2) + \sigma_B(\lambda_2)} = \\ &= \chi(T) \frac{(|F_{LL}|^2 - |F_{LR}|^2)(1 + \lambda_2) + (|F_{RR}|^2 - |F_{RL}|^2)(1 - \lambda_2)}{(|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2)(1 + \lambda_2) + (|F_{RR}|^2 + |F_{RL}|^2)(1 - \lambda_2)}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

3) поляризационной асимметрии вперед-назад

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{FB}(\lambda_2) &= \frac{\sigma_F(\lambda_2) - \sigma_F(-\lambda_2) - \sigma_B(\lambda_2) + \sigma_B(-\lambda_2)}{\sigma_F(\lambda_2) + \sigma_F(-\lambda_2) + \sigma_B(\lambda_2) + \sigma_B(-\lambda_2)} = \\ &= \lambda_2 \chi(T) \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RR}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RR}|^2}; \end{aligned} \quad (3.19)$$

4) поляризационной асимметрии вперед(назад)

$$A_{F(B)}(\lambda_2) = \frac{\sigma_{F(B)}(\lambda_2) - \sigma_{F(B)}(-\lambda_2)}{\sigma_{F(B)}(\lambda_2) + \sigma_{F(B)}(-\lambda_2)} =$$

$$= \lambda_2 \frac{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2 - |F_{RR}|^2 \pm \gamma(T)[|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RR}|^2]}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2 \pm \gamma(T)[|F_{LL}|^2 + |F_{RR}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2]}; \quad (3.20)$$

5) право-левой поляризационной асимметрии

$$A_{RL} = \frac{\sigma_R - \sigma_L}{\sigma_R + \sigma_L} = \frac{|F_{LE}|^2 + |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2 - |F_{RR}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}, \quad (3.21)$$

где $\sigma_R = \sigma_F(\lambda_2 = 1) + \sigma_B(\lambda_2 = 1)$ и $\sigma_L = \sigma_F(\lambda_2 = -1) + \sigma_B(\lambda_2 = -1)$ — сечения аннигиляции право- и левополяризованного позитрона.

Интегральные сечения рождения продольно-поляризованной кварковой струи при аннигиляции неполяризованной e^-e^+ -пары имеют вид

$$\sigma_{F(B)}(h_1) = \frac{4}{3} \alpha^2 \alpha_s s(\sigma_U + 2\sigma_L) \{ [|F_{LL}|^2(1 - h_1) +$$

$$+ |F_{RR}|^2(1 + h_1)][3 + \alpha(T) \pm 3\beta(T)] + [|F_{LR}|^2(1 + h_1) +$$

$$+ |F_{RL}|^2(1 - h_1)][3 + \alpha(T) \mp 3\beta(T)] \}. \quad (3.22)$$

Отсюда могут быть определены следующие P -нечетные электрослабые асимметрии:

$$P = \frac{\sigma(h_1 = 1) - \sigma(h_1 = -1)}{\sigma(h_1 = 1) + \sigma(h_1 = -1)} = \frac{|F_{RR}|^2 + |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2 - |F_{LL}|^2}{|F_{RR}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{LL}|^2}, \quad (3.23)$$

где $\sigma(h_1) = \sigma_F(h_1) + \sigma_B(h_1)$;

$$A_{FB}(h_1) = \frac{\sigma_F(h_1) - \sigma_B(h_1)}{\sigma_F(h_1) + \sigma_B(h_1)} =$$

$$= \gamma(T) \frac{(|F_{LL}|^2 - |F_{RL}|^2)(1 - h_1) + (|F_{RR}|^2 - |F_{LR}|^2)(1 + h_1)}{(|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2)(1 - h_1) + (|F_{RR}|^2 + |F_{LR}|^2)(1 + h_1)}; \quad (3.24)$$

$$\tilde{A}_{FB}(h_1) = \frac{\sigma_F(h_1) - \sigma_F(-h_1) - \sigma_B(h_1) + \sigma_B(-h_1)}{\sigma_F(h_1) + \sigma_F(-h_1) + \sigma_B(h_1) + \sigma_B(-h_1)} =$$

$$= h_1 \gamma(T) \frac{|F_{RR}|^2 + |F_{RL}|^2 - |F_{LL}|^2 - |F_{LR}|^2}{|F_{LL}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RR}|^2}; \quad (3.25)$$

$$A_{F(B)}(h_1) = \frac{\sigma_{F(B)}(h_1) - \sigma_{F(B)}(-h_1)}{\sigma_{F(B)}(h_1) + \sigma_{F(B)}(-h_1)} =$$

$$= h_1 \frac{|F_{RR}|^2 + |F_{LR}|^2 - |F_{LL}|^2 - |F_{RL}|^2 \pm \gamma(T)[|F_{RR}|^2 + |F_{RL}|^2 - |F_{LL}|^2 - |F_{LR}|^2]}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2 \pm \gamma(T)[|F_{LL}|^2 + |F_{RR}|^2 - |F_{LR}|^2 - |F_{RL}|^2]} \quad (3.26)$$

При аннигиляции поперечно-поляризованной электрон-позитронной пары сечение (3.13) приводит к следующим спиновым асимметриям:

$$A_{\pi}^{(1)} = \frac{\frac{2}{\eta_1 \eta_2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d^3 \sigma}{d\varphi d \cos \theta dT} \right)}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d^3 \sigma}{d\varphi d \cos \theta dT} \right)} =$$

$$= - \frac{\sigma_U - 2\sigma_L}{\sigma_U + \sigma_L} \frac{\operatorname{Re}(F_{LL} F_{RL}^* + F_{LR} F_{RR}^*)}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}; \quad (3.27)$$

$$A_{\varphi}^{(2)} = \frac{\frac{2}{\eta_1 \eta_2} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d^3 \sigma}{d\varphi d \cos \theta dT} \right)}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d^3 \sigma}{d\varphi d \cos \theta dT} \right)} =$$

$$= - \frac{\sigma_U - 2\sigma_L}{\sigma_U + 2\sigma_L} \frac{\operatorname{Im}(F_{LL} F_{RL}^* + F_{LR} F_{RR}^*)}{|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2}. \quad (3.28)$$

Отметим, что спиральные амплитуды и все рассмотренные выше поляризованные характеристики процессов $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$ в СМ обращаются в нуль при определенных энергиях сталкивающихся электрон-позитронных пучков. Интересно, что эти нули наблюдаются при тех же энергиях сталкивающихся e^-e^+ -пучков, что и для реакций двухструйного рождения адронов $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ (см. табл.3).

Распределение антикварковой струи по углам и трасту определяется той же формулой (3.13), что и кварковой струи, но при этом необходимо провести замены $\sigma_P \rightarrow -\sigma_P$ и $\sigma_F \rightarrow -\sigma_F$. Что касается распределения глюонной струи, то та же формула остается в силе, но при этом корреляционные сечения равны

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_U}{dT} &= \frac{2}{T} (2 - 2T + T^2) \left(\ln \frac{2T-1}{1-T} - \frac{3T-2}{T} \right), \\
\frac{d\sigma_L}{dT} &= 2 \frac{d\sigma_T}{dT} = \frac{4(1-T)(3T-2)}{T^2}, \\
\frac{d\sigma_I}{dT} &= \sqrt{2} \frac{(1-T)(2-T)}{T^2} \left(2\sqrt{2T-1} - \frac{T}{\sqrt{1-T}} \right), \\
\frac{d\sigma_P}{dT} &= \frac{d\sigma_F}{dT} = 0.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

В случае регистрации глюонной струи из-за $\sigma_P = 0$ асимметрии A_{FB} , $A_{FB}(\lambda_2)$, $\tilde{A}_{FB}(\lambda_2)$, $A_{FB}(h_1)$ и $\tilde{A}_{FB}(h_1)$ обращаются в нуль, поэтому по наличию этих асимметрий можно различать кварковую (антикварковую) и глюонную струи.

При суперсимметричном расширении КХД адронные струи могут быть рождены как кварками и глюонами, так и их суперсимметричными партнерами — скалярными кварками ($\tilde{q}$) и глюино ($\tilde{g}$). Так, в e^-e^+ -аннигиляции наряду с обычными двух- и трехструйнными рождениями адронов $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$, $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$ возможны и процессы рождения суперсимметричных струй, полученных в элементарных подпроцессах $e^-e^+ = \tilde{q}\bar{\tilde{q}}$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\bar{\tilde{q}}g$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\bar{\tilde{q}}\tilde{g}$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\bar{\tilde{q}}\tilde{g}$ [53,58].

В суперструнной E_6 -модели процесс рождения пары скалярных кварков и глюона при электрон-позитронной аннигиляции

$$e^- + e^+ \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2, \dots) \rightarrow \tilde{q} + \bar{\tilde{q}} + g \tag{3.30}$$

описывается матричным элементом

$$M = e^2 \sum_i D_i(s) \bar{v}_\mu [g_{Le}^i (1 + \gamma_5) + g_{Re}^i (1 - \gamma_5)] u_\mu^i, \tag{3.31}$$

где

$$J_\mu^i = g_s \left(\frac{\lambda_m}{2} \right)_{\alpha\beta} e_\rho^m \left[\frac{2q_{1\rho}q_{2\mu}}{q_1 k} + \frac{2q_{2\rho}q_{1\mu}}{q_2 k} + 2\delta_{\rho\mu} \right] g_{\tilde{q}}^i,$$

q_1 , q_2 и k — 4-импульсы скалярного кварка, антикварка и глюона соответственно, $g_{\tilde{q}}^i$ — константы СНТ скалярного кварка, причем для $\tilde{q}_L(\tilde{q}_R)$ $g_{\tilde{q}_L}^i \equiv g_{Lq}^i$ ($g_{\tilde{q}_R}^i \equiv g_{Rq}^i$).

Процессу аннигиляции $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\bar{\tilde{q}}g$ соответствуют две спиральные амплитуды

$$M_A = \sum_i D_i(s) g_{Ae}^i g_{\bar{q}}^i \quad (A = R; L), \quad (3.32)$$

описывающие реакции $e_R^- e_L^+ \rightarrow \tilde{q} \bar{\tilde{q}} g$, $e_L^- e_R^+ \rightarrow \tilde{q} \bar{\tilde{q}} g$.

Дифференциальное сечение процесса (3.30) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \sigma}{d\phi d\chi d\cos\theta dx_1 dx_2} = & \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{\pi^2} \alpha_s s \{ [|M_L|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2) + \\ & + |M_R|^2 (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)] \sigma_A - 2\eta_1 \eta_2 [\cos 2\phi (\operatorname{Re} (M_L M_R^*) \sigma_B + \\ & + \operatorname{Im} (M_L M_R^*) \sigma_C) + \sin 2\phi (\operatorname{Im} (M_L M_R^*) \sigma_B - \operatorname{Re} (M_L M_R^*) \sigma_C)] \}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где σ_A , σ_B и σ_C даны формулой (3.10), а выражения корреляционных сечений σ_U , σ_L , σ_T и σ_I приведены в приложении 2.

Распределение скалярной кварковой или скалярной антикварковой струи в процессе $e^- e^+ \rightarrow \tilde{q} \bar{\tilde{q}} g$ по углам θ , ϕ и трасту T определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \sigma}{d\phi d\cos\theta dT} = & \frac{\alpha^2}{\pi} \alpha_s s (\sigma_U + 2\sigma_L) \{ [|M_L|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2) + \\ & + |M_R|^2 (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)] [1 + \alpha(T) \cos^2 \theta] - \\ & - 2\eta_1 \eta_2 \alpha(T) \sin^2 \theta [\operatorname{Re} (M_L M_R^*) \cos 2\phi + \operatorname{Im} (M_L M_R^*) \sin 2\phi] \}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где

$$\alpha(T) = (\sigma_U - 2\sigma_L) / (\sigma_U + 2\sigma_L),$$

а выражения корреляционных сечений как функции траста даны в приложении 3.

Дифференциальное сечение (3.34) приводит к следующим асимметриям:

право-левой поляризационной асимметрии

$$A_{RL} = [|M_L|^2 - |M_R|^2] / [|M_L|^2 + |M_R|^2], \quad (3.35)$$

P -четной поперечной спиновой асимметрии

$$A_{\phi}^{(1)} = - \frac{\sigma_U - 2\sigma_L}{\sigma_U + \sigma_L} \frac{\operatorname{Re} (M_L M_R^*)}{|M_L|^2 + |M_R|^2}, \quad (3.36)$$

P -нечетной поперечной спиновой асимметрии

$$A_{\phi}^{(2)} = - \frac{\sigma_U - 2\sigma_L}{\sigma_U + \sigma_L} \frac{\operatorname{Im} (M_L M_R^*)}{|M_L|^2 + |M_R|^2}. \quad (3.37)$$

Поведение асимметрий (3.35)—(3.37) такое же, как и в процессах двух-струйного рождения скалярных кварков $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\tilde{q}$, анализ их проводился в разд.2.

Важной характеристикой процессов (3.30) является распределение суперсимметричных струй по углам θ и χ , которое следует из формулы (3.33):

$$\frac{d^3\sigma}{d\chi d\cos\theta dT} = \frac{\alpha^2\alpha_s}{\pi} s(\sigma_U + 2\sigma_L)[|M_L|^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2) + |M_R|^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)] \times \\ \times [1 + \alpha(T)\cos^2\theta + \beta_1(T)\sin^2\theta\cos 2\chi + \gamma_1(T)\sin 2\theta\cos\chi], \quad (3.38)$$

где $\beta_1(T)$ и $\gamma_1(T)$ — параметры асимметрии, определяемые корреляционными сечениями:

$$\beta_1(T) = 2\sigma_T/(\sigma_U + 2\sigma_L), \quad \gamma_1(T) = -2\sqrt{2}\sigma_I/(\sigma_U + 2\sigma_L).$$

Экспериментальное изучение асимметрий A_{RL} , $A_\phi^{(1)}$ и $A_\phi^{(2)}$, а также параметров асимметрии $\alpha(T)$, $\beta_1(T)$ и $\gamma_1(T)$ открывает большие перспективы для тщательного испытания СМ электрослабого взаимодействия и установления точной структуры СХТ при высоких энергиях.

4. СПИРАЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ И ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ АСИММЕТРИИ ПРОЦЕССОВ $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

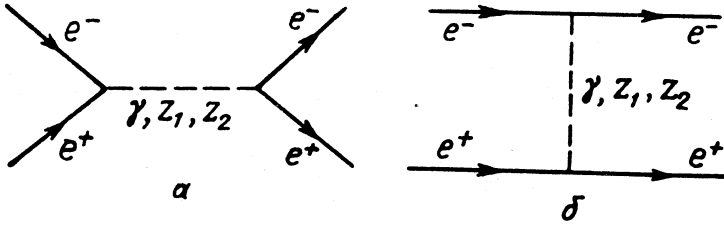
Одними из наиболее интересных электрослабых процессов являются процессы упругого электрон-позитронного и электрон-электронного рассеяния:

$$e^- + e^+ \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2, \dots) \rightarrow e^- + e^+, \quad (4.1)$$

$$e^- + e^- \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2, \dots) \rightarrow e^- + e^-, \quad (4.2)$$

которые в настоящее время интенсивно исследуются экспериментально. Изучение процессов упругого электрон-позитронного и электрон-электронного рассеяния при высоких энергиях, где вклад дополнительного гипотетического Z' -бозона становится заметным, может явиться следующим этапом проверки теоретических представлений о слабых взаимодействиях лептонов.

В суперструнной E_6 -модели процесс упругого электрон-позитронного рассеяния (4.1) описывается s - и t -канальными диаграммами, приведенными на рис.6,а и б.

Рис.6. Диаграммы процесса $e^-e^+ \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2) \rightarrow e^-e^+$

Аннигиляционным диаграммам соответствуют четыре независимые спиральные амплитуды, которые описывают следующие процессы:

$$\begin{aligned} e_L^- + e_R^+ &\rightarrow e_L^- + e_R^+, & e_L^- + e_R^+ &\rightarrow e_R^- + e_L^+, \\ e_R^- + e_L^+ &\rightarrow e_L^- + e_R^+, & e_R^- + e_L^+ &\rightarrow e_R^- + e_L^+. \end{aligned}$$

Дифференциальные сечения, соответствующие этим четырем процессам, имеют вид [23]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow e_L^- e_R^+) &= \frac{\alpha^2}{s} u^2 |F_{LL}(s)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow e_R^- e_L^+) &= \frac{\alpha^2}{s} t^2 |F_{LR}(s)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow e_L^- e_R^+) &= \frac{\alpha^2}{s} t^2 |F_{RL}(s)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow e_R^- e_L^+) &= \frac{\alpha^2}{s} u^2 |F_{RR}(s)|^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь

$$F_{AB}(s) = \sum_{i=\gamma, Z_1, Z_2} D_i(s) g_{Ae}^i g_{Be}^i \quad (A, B = L; R) \quad (4.4)$$

— s -канальные спиральные амплитуды; $u = (s/2)(1 + \cos \theta)$, $t = (s/2) \times (1 - \cos \theta)$ — кинематические переменные; $D_i(s)$ — пропагатор векторного i -бозона; θ — угол рассеяния электрона.

Сохранение спиральности фермионов при высоких энергиях приводит к тому, что и для t -канальных диаграмм должны возникать только четыре независимые спиральные амплитуды, описывающие процессы

$$e_L^- + e_R^+ \rightarrow e_L^- + e_R^+, \quad e_L^- + e_R^+ \rightarrow e_L^- + e_L^+,$$

$$e_R^- + e_L^+ \rightarrow e_R^- + e_L^+, \quad e_R^- + e_R^+ \rightarrow e_R^- + e_R^+.$$

Этим процессам соответствуют следующие дифференциальные сечения:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow e_L^- e_R^+) &= \frac{\alpha^2}{s} u^2 |F_{LL}(t)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^+ \rightarrow e_L^- e_L^+) &= \alpha^2 s |F_{LR}(t)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow e_R^- e_L^+) &= \frac{\alpha^2}{s} u^2 |F_{RR}(t)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_R^+ \rightarrow e_R^- e_R^+) &= \alpha^2 s |F_{RL}(t)|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь

$$F_{AB}(t) = \sum_{i=\gamma, Z_1, Z_2} D_i(t) g_{Ae}^i g_{Be}^i \quad (A, B = L; R), \quad (4.6)$$

— t -канальные спиральные амплитуды.

Из четырех s - и четырех t -канальных спиральных амплитуд интерферируют между собой только две амплитуды, описывающие процессы

$$e_L^- + e_R^+ \rightarrow e_L^- + e_R^+, \quad e_R^- + e_L^+ \rightarrow e_R^- + e_L^+.$$

Таким образом, процесс упругого электрон-позитронного рассеяния характеризуется всего шестью независимыми спиральными амплитудами, описывающими процессы

$$\begin{aligned} 1) \quad & e_L^- + e_R^+ \rightarrow e_L^- + e_R^+, \quad 2) \quad e_R^- + e_L^+ \rightarrow e_R^- + e_L^+, \quad 3) \quad e_L^- + e_L^+ \rightarrow e_L^- + e_L^+ \\ 4) \quad & e_R^- + e_R^+ \rightarrow e_R^- + e_R^+, \quad 5) \quad e_L^- + e_R^+ \rightarrow e_R^- + e_L^+, \quad 6) \quad e_R^- + e_L^+ \rightarrow e_L^- + e_R^+. \end{aligned}$$

Дифференциальные сечения, соответствующие этим процессам:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow e_L^- e_R^+) &= \frac{\alpha^2}{s} u^2 |F_{LL}(s, t)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow e_R^- e_L^+) &= \frac{\alpha^2}{s} u^2 |F_{RR}(s, t)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^+ \rightarrow e_L^- e_L^+) &= \alpha^2 s |F_{LR}(t)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_R^+ \rightarrow e_R^- e_R^+) &= \alpha^2 s |F_{RL}(t)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow e_R^- e_L^+) &= \frac{\alpha^2}{s} t^2 |F_{LR}(s)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow e_L^- e_R^+) &= \frac{\alpha^2}{s} t^2 |F_{RL}(s)|^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь введены обозначения

$$F_{LL}(s, t) = F_{LL}(s) + F_{LL}(t), \quad F_{RR}(s, t) = F_{RR}(s) + F_{RR}(t).$$

В СМ спиральные амплитуды $F_{LR}(s)$ и $F_{RL}(s)$, описывающие процессы $e_L^- e_R^+ \rightarrow e_R^- e_L^+$ и $e_R^- e_L^+ \rightarrow e_L^- e_R^+$, имеют нули при энергии сталкивающихся $e^- e^+$ -пучков $\sqrt{s} = \sqrt{2} M_Z \cos \theta_W$. В связи с этим становится актуальным тщательное исследование данного процесса в случае поляризованных $e^- e^+$ -пучков.

Эксперименты по $e^- e^+$ -рассеянию с продольно-поляризованными пучками вблизи указанных энергий могут рассматриваться как альтернативный тест СМ, а также как способ исследования новой физики.

Если поляризация конечных частиц не изменяется, то процесс упругого электрон-позитронного рассеяния характеризуется четырьмя амплитудами

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^+ \rightarrow e^- e^+) &= \frac{\alpha^2}{s} [u^2 |F_{LL}(s, t)|^2 + t^2 |F_{LR}(s)|^2], \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^+ \rightarrow e^- e^+) &= \frac{\alpha^2}{s} [u^2 |F_{RR}(s, t)|^2 + t^2 |F_{RL}(s)|^2], \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^+ \rightarrow e^- e^+) &= \alpha^2 s |F_{LR}(t)|^2, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_R^+ \rightarrow e^- e^+) &= \alpha^2 s |F_{RL}(t)|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Обозначим λ_1 и h_1 (λ_2 и h_2) спиральности начального и конечного электронов (позитронов). Тогда дифференциальное сечение процесса $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$ может быть представлено в виде [23]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{16s} \{ u^2 [|F_{LL}(s, t)|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 - h_1)(1 + h_2) + \\ &+ |F_{RR}(s, t)|^2 (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 + h_1)(1 - h_2)] + \\ &+ s^2 |F_{LR}(t)|^2 [(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - h_1)(1 - h_2) + (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + h_1)(1 + h_2)] + \\ &+ t^2 |F_{LR}(s)|^2 [(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + h_1)(1 - h_2) + (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - h_1)(1 + h_2)] \}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Эффекты суперструнного Z'-бозона проявляются в различных характеристиках процесса $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$, выражения которых могут быть получены из общей формулы эффективного сечения (4.9). Среди этих характеристик особый интерес представляет P-нечетная право-левая асимметрия A_{RL} , которая определяется как

$$A_{RL} = (d\sigma_R - d\sigma_L) / (d\sigma_R + d\sigma_L) = B_4 / (B_1 + B_2 + B_3), \quad (4.10)$$

где

$$B_1 = 2s^2 |F_{LR}(t)|^2, \quad B_2 = 2t^2 |F_{LR}(s)|^2,$$

$$B_{3,4} = u^2 [|F_{RR}(s, t)|^2 \pm |F_{LL}(s, t)|^2],$$

$d\sigma_R$ и $d\sigma_L$ — сечения рассеяния право- и левополяризованного электрона на неполяризованном позитроне.

С целью выявления эффектов суперструнного Z' -бозона наряду с право-левой асимметрией A_{RL} рассмотрим и следующие поляризационные характеристики процесса (4.1):

$$A_{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{d\sigma(\lambda_1) - d\sigma(-\lambda_1)}{d\sigma(\lambda_1) + d\sigma(-\lambda_1)} = -A_{\lambda_2} = A_{RL}, \quad (4.11)$$

$$A_{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) - d\sigma(-\lambda_1, -\lambda_2)}{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) + d\sigma(-\lambda_1, -\lambda_2)} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) B_4}{B_1(1 + \lambda_1 \lambda_2) + (B_2 + B_3)(1 - \lambda_1 \lambda_2)}, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\lambda_1 \lambda_2} &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) - d\sigma(-\lambda_1, \lambda_2) - d\sigma(\lambda_1, -\lambda_2) + d\sigma(-\lambda_1, -\lambda_2)}{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) + d\sigma(-\lambda_1, \lambda_2) + d\sigma(\lambda_1, -\lambda_2) + d\sigma(-\lambda_1, -\lambda_2)} = \\ &= (B_1 - B_2 - B_3) / (B_1 + B_2 + B_3), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$N_{\lambda} = \frac{d\sigma(\lambda_1) - d\sigma(\lambda_1 = 0)}{d\sigma(\lambda_1) + d\sigma(\lambda_1 = 0)} = \frac{\lambda_1 B_4}{2(B_1 + B_2 + B_3) + \lambda_1 B_4}, \quad (4.14)$$

$$P = \frac{d\sigma(h_1 = 1) - d\sigma(h_1 = -1)}{d\sigma(h_1 = 1) + d\sigma(h_1 = -1)} = A_{RL}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} P(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2, h_1 = 1) - d\sigma(\lambda_1, \lambda_2, h_1 = -1)}{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2, h_1 = 1) + d\sigma(\lambda_1, \lambda_2, h_1 = -1)} = \\ &= \frac{B_1(\lambda_1 + \lambda_2) + (B_3 - B_2)(\lambda_1 - \lambda_2) + B_4(1 - \lambda_1 \lambda_2)}{B_1(1 + \lambda_1 \lambda_2) + (B_2 + B_3)(1 - \lambda_1 \lambda_2) + B_4(\lambda_1 - \lambda_2)}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Заметим, что если спины электрона и позитрона до рассеяния антипараллельны ($\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$), то, как следует из формулы (4.16), рассеянные электроны останутся полностью продольно-поляризованными $P(\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1) = (\lambda_1 + \lambda_2) / (1 + \lambda_1 \lambda_2) = \pm 1$.

Такой же результат был получен в работе [59] за счет электромагнитного механизма электрон-позитронного рассеяния.

Дифференциальное сечение процесса (4.1) при поперечных поляризациях начальных частиц имеет вид (по поляризациям конечных частиц проводится суммирование):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} [B_1 + B_2 + B_3 + \eta_1 \eta_2 (B_5 \cos 2\varphi + B_6 \sin 2\varphi)], \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} B_5 = & -2ut [\operatorname{Re} (F_{LL}(s)F_{RL}^*(s)) + \operatorname{Re} (F_{LR}(s) \cdot F_{RR}^*(s)) + \\ & + \operatorname{Re} (F_{LR}(s) \cdot (F_{LL}^*(t) + F_{RR}^*(t)))], \\ B_6 = & -2ut [\operatorname{Im} (F_{LL}(s)F_{RL}^*(s)) + \operatorname{Im} (F_{LR}(s)F_{RR}^*(s)) + \\ & + \operatorname{Im} (F_{LR}(s)(F_{LL}^*(t) - F_{RR}^*(t)))], \end{aligned}$$

φ — азимутальный угол вылета электрона, η_1 и η_2 — поперечные поляризации электрона и позитрона.

Из (4.17) могут быть определены измеряемые на опыте поперечно-спиновые асимметрии

$$A_{\varphi}^{(1)} = \frac{\frac{e}{\eta_1 \eta_2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)}{\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)} = \frac{B_5}{B_1 + B_2 + B_3}, \quad (4.18)$$

$$A_{\varphi}^{(2)} = \frac{\frac{2}{\eta_1 \eta_2} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)}{\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)} = \frac{B_6}{B_1 + B_2 + B_3}. \quad (4.19)$$

Перейдем теперь к рассмотрению процесса упругого электрон-электронного рассеяния (4.2). Реакции $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, как и упругому электрон-позитронному рассеянию, соответствуют всего шесть спиральных амплитуд, которые описывают следующие процессы:

- 1) $e_L^- + e_L^- \rightarrow e_L^- + e_L^-$; 2) $e_R^- + e_R^- \rightarrow e_R^- + e_R^-$; 3) $e_L^- + e_R^- \rightarrow e_L^- + e_R^-$;
- 4) $e_R^- + e_L^- \rightarrow e_R^- + e_L^-$; 5) $e_L^- + e_R^- \rightarrow e_R^- + e_L^-$; 6) $e_R^- + e_L^- \rightarrow e_L^- + e_R^-$.

Этим процессам соответствуют следующие дифференциальные сечения:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^- \rightarrow e_L^- e_L^-) = \alpha^2 s |F_{LL}(u) + F_{LL}(t)|^2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_R^- \rightarrow e_R^- e_R^-) &= \alpha^2 s |F_{RR}(u) + F_{RR}(t)|^2, \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^- \rightarrow e_L^- e_R^-) &= \frac{\alpha^2}{s} u^2 |F_{LR}(t)|^2, \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^- \rightarrow e_R^- e_L^-) &= \frac{\alpha^2}{s} u^2 |F_{RL}(t)|^2, \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^- \rightarrow e_R^- e_L^-) &= \frac{\alpha^2}{s} t^2 |F_{LR}(u)|^2, \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^- \rightarrow e_L^- e_R^-) &= \frac{\alpha^2}{s} t^2 |F_{RL}(u)|^2.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Здесь

$$F_{AB}(u) = \sum_{i=\gamma, Z_1, Z_2} D_i(u) g_{Ae}^i g_{Be}^i \quad (A, B = L; R).$$

Если поляризация конечных частиц не измеряется, то процесс (4.2) характеризуется четырьмя амплитудами:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_L^- \rightarrow e^- e^-) &= \alpha^2 s |F_{LL}(u) + F_{LL}(t)|^2, \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_R^- \rightarrow e^- e^-) &= \alpha^2 s |F_{RR}(u) + F_{RR}(t)|^2, \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_L^- e_R^- \rightarrow e^- e^-) &= \frac{\alpha^2}{s} [u^2 |F_{LR}(t)|^2 + t^2 |F_{LR}(u)|^2], \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} (e_R^- e_L^- \rightarrow e^- e^-) &= \frac{\alpha^2}{s} [u^2 |F_{RL}(t)|^2 + t^2 |F_{RL}(u)|^2].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Наиболее общее выражение для дифференциального сечения реакции $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ с учетом продольных поляризаций всех частиц представляется в виде [23]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{16s} \left\{ s^2 [|F_{LL}(u) + F_{LL}(t)|^2 (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - h_1)(1 - h_2) + \right. \\
&\quad + |F_{RR}(u) + F_{RR}(t)|^2 (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + h_1)(1 + h_2)] + \\
&\quad + u^2 |F_{LR}(t)|^2 [(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 - h_1)(1 + h_2) + (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 + h_1)(1 - h_2)] + \\
&\quad \left. + t^2 |F_{RL}(u)|^2 [(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + h_1)(1 - h_2) + (1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - h_1)(1 + h_2)] \right\}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Здесь λ_1 и λ_2 (h_1 и h_2) — спиральности электронов до (после) рассеяния.

Пользуясь формулой (22), можно получить следующие выражения для измеряемых на опыте поляризационных характеристик процесса:

$$A_{RL} = \frac{d\sigma_R - d\sigma_L}{d\sigma_R + d\sigma_L} = \frac{C_4}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad (4.23)$$

$$A_{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{d\sigma(\lambda_1) - d\sigma(-\lambda_1)}{d\sigma(\lambda_1) + d\sigma(-\lambda_1)} = A_{\lambda_2} = A_{RL}, \quad (4.24)$$

$$A_{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) - d\sigma(-\lambda_1, -\lambda_2)}{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) + d\sigma(-\lambda_1, -\lambda_2)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)C_4}{(C_1 + C_3)(1 + \lambda_1 \lambda_2) + C_2(1 - \lambda_1 \lambda_2)}, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\lambda_1 \lambda_2} &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) - d\sigma(-\lambda_1, \lambda_2) - d\sigma(\lambda_1, -\lambda_2) + d\sigma(-\lambda_1, -\lambda_2)}{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2) + d\sigma(-\lambda_1, \lambda_2) + d\sigma(\lambda_1, -\lambda_2) + d\sigma(-\lambda_1, -\lambda_2)} = \\ &= (C_1 - C_2 + C_3) / (C_1 + C_2 + C_3), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$N_\lambda = \frac{d\sigma(\lambda_1) - d\sigma(\lambda_1 = 0)}{d\sigma(\lambda_1) + d\sigma(\lambda_1 = 0)} = \frac{\lambda_1 C_4}{2(C_1 + C_2 + C_3) + \lambda_1 C_4}, \quad (4.27)$$

$$P = \frac{d\sigma(h_1 = 1) - d\sigma(h_1 = -1)}{d\sigma(h_1 = 1) + d\sigma(h_1 = -1)} = A_{RL}, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} P(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2, h_1 = 1) - d\sigma(\lambda_1, \lambda_2, h_1 = -1)}{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2, h_1 = 1) + d\sigma(\lambda_1, \lambda_2, h_1 = -1)} = \\ &= \frac{(C_1 - C_2)(\lambda_1 - \lambda_2) + C_3(\lambda_1 + \lambda_2) + C_4(1 + \lambda_1 \lambda_2)}{(C_1 + C_2)(1 - \lambda_1 \lambda_2) + C_3(1 + \lambda_1 \lambda_2) + C_4(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Здесь введены обозначения

$$C_1 = 2u^2 |F_{LR}(t)|^2, \quad C_2 = 2t^2 |F_{LR}(u)|^2,$$

$$C_{3,4} = s^2 [|F_{RR}(t) + |F_{RR}(u)|^2 \pm |F_{LL}(t) + F_{LL}(u)|^2].$$

Из формулы (4.29) следует, что при рассеянии электронов с одинаковыми спиральностями ($\lambda_1 = \lambda_2$) степень продольной поляризации электрона равна

$$P(\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1) = \pm 1,$$

т.е., если спины электронов первоначально антипараллельны, то рассеянные электроны останутся полностью продольно-поляризованными. Такой результат был получен в [59] за счет электромагнитного механизма рассеяния $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$.

Мы провели расчеты поляризационных характеристик процессов (4.1) и (4.2) при углах ($Z - Z'$)-смешивания $\Phi = -0,1; -0,05; 0; 0,05$ и $0,1$ рад. Для угла рассеяния электрона выбрано значение $\theta = 90^\circ$.

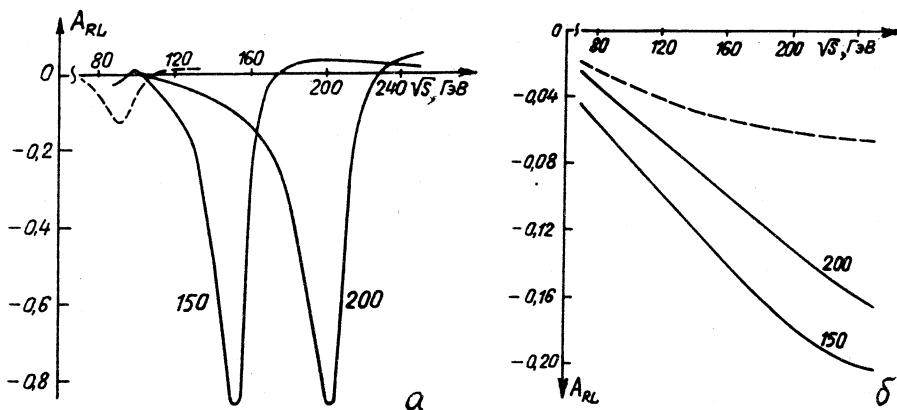


Рис.7. Зависимость асимметрии A_{RL} от энергии в процессах а) $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ и б) $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ при $\Phi = 0,1$ рад, $\theta_E = 90^\circ$ и различных массах Z_2 -бозона (цифры у кривых — масса M_{Z_2} в ГэВ). Штриховые кривые описывают предсказания СМ

На рис.7 представлена энергетическая зависимость право-левой асимметрии A_{RL} при $\theta_E = 90^\circ$, $\Phi = 0,1$ рад и различных массах M_{Z_2} . Видно, что в СМ в реакции $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ с ростом энергии асимметрия A_{RL} по модулю увеличивается и достигает максимума в Z -пике (при $\sqrt{s} = M_Z$), затем A_{RL} уменьшается и обращается в нуль при энергии $\sqrt{s} = 1,15M_Z$. При переходе через точку $\sqrt{s} = 2M_Z$ поляризационная асимметрия A_{RL} вторично меняет знак на противоположный. Наблюдение предсказанного поведения асимметрии A_{RL} при высоких энергиях явилось бы новым доказательством справедливости СМ.

В суперструнной E_6 -модели нули и максимум асимметрии A_{RL} сохраняются, но сдвинуты вправо. Максимум асимметрии наблюдается в Z_2 -пике (при $\sqrt{s} = M_{Z_2}$). Изучение право-левой асимметрии A_{RL} представляет большой интерес для определения массы дополнительного Z' -бозона.

В СМ в процессе упругого электрон-электронного рассеяния увеличение энергии приводит к монотонному спаду асимметрии A_{RL} . Предсказания E_6 -модели значительно отличаются от результатов СМ, причем отклонение от СМ увеличивается с ростом энергии $e^-e^-(e^-e^+)$ -пучков и уменьшением массы дополнительного бозона.

Аналогичное поведение наблюдается и для эффекта поляризации электронного пучка N_λ . Значение N_λ очень чувствительно к знаку λ_1 . Например, при $\lambda_1 = -1$ N_λ достигает 80%, а при $\lambda_1 = 1$ $N_\lambda \sim 30\%$.

Поперечная спиновая асимметрия $A_\phi^{(2)}$ определяется мнимыми частями пропагаторов бозонов и поэтому достигает максимального значения вблизи резонансной энергии $\sqrt{s} = M_i$. В Z-полюсе ($\sqrt{s} \sim 90$ ГэВ) асимметрия $A_\phi^{(2)} = -0,8\%$. Однако в Z'-резонансе $A_\phi^{(2)}$ достигает десятков процентов и чувствительна к углам смешивания θ_E и Φ .

Заметим, что в СМ право-левая асимметрия A_{RL} , поперечно-спиновая асимметрия $A_\phi^{(2)}$ и эффект поляризации электронного пучка N_λ , возникающие в процессах $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ за счет $(\gamma-Z)$ -интерференции, оказываются пропорциональными векторной константе g_{Ve}^Z , и при $\sin^2\theta_W = 0,23$ они сильно подавлены. Однако в суперструнной E_6 -модели с двумя бозонами в асимметриях A_{RL} , $A_\phi^{(2)}$ и N_λ появляется дополнительный $(\gamma-Z')$ -интерференционный член, играющий решающую роль в области энергий $\sqrt{s} \sim M_{Z'}$.

Что касается асимметрий $A_\phi^{(1)}$, $A_{\lambda_1\lambda_2}$ и степени продольной поляризации электрона $P(\lambda_1, \lambda_2)$, то они достигают значений порядка 100% и в СМ, а заметное влияние дополнительного бозона на эти характеристики наблюдается при более высоких энергиях.

5. СУПЕРСТРУННЫЙ Z'-БОЗОН В $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}$ АННИГИЛЯЦИИ

В настоящее время центральное место в физике элементарных частиц занимает экспериментальное и теоретическое исследование образования адронов на встречных e^-e^+ -пучках высоких энергий, т.к. это создает наиболее благоприятные условия для изучения структуры частиц и проверки справедливости предсказаний различных составных моделей (кварковых, партонных и т.д.). Особый интерес представляют реакции типа $e^-e^+ \rightarrow N + \text{адроны}$, так как эти процессы кросс-сопряжены к реакциям неупругого рассеяния $eN \rightarrow e + \text{адроны}$ и вместе с ними позволяют получить информацию о структурных функциях адронов во всей области изменения квадрата передаваемого импульса.

В этом разделе изучаются эффекты суперструнного Z'-бозона в процессах инклюзивной аннигиляции продольно-поляризованной e^-e^+ -пары в ад-

роны с одним выделенным барионом B в конечном состоянии с измеряемой в эксперименте поляризацией [22,24]:

$$e^- + e^+ \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2, \dots) \rightarrow B + X. \quad (5.1)$$

Здесь X — система недетектируемых адронов.

Процесс инклюзивного рождения бариона B с 4-импульсом p и спиральностью h в e^-e^+ -аннигиляции описывается матричным элементом

$$M = e^2 \sum_i \bar{v} \gamma_\mu [G_L^i(1 + \gamma_5) + G_R^i(1 - \gamma_5)] u \langle B(p, h) X | J_\mu^i | 0 \rangle, \quad (5.2)$$

где $G_{L(R)}^i = g_{L(R)e}^i D_i(s)$; суммирование проводится по всем калибровочным бозонам $i = \gamma, Z_1, Z_2$ (в дальнейшем знак суммы опускается); J_μ^i — адронный ток, описывающий переход $i \rightarrow BX$.

Дифференциальное сечение реакции (5.1) может быть представлено в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4} \beta x dx L_{\mu\nu}^{ik} \bar{H}_{\mu\nu}^{ck}, \quad (5.3)$$

где $x = 2E_B/\sqrt{s}$ — энергия бариона в единицах энергии электрона; β и $\Omega(\theta, \varphi)$ — скорость и телесный угол вылета бариона; $L_{\mu\nu}^{ik}$ и $\bar{H}_{\mu\nu}^{ik}$ — лептонные и адронные тензоры. Черта над тензором $H_{\mu\nu}^{ik}$ означает суммирование по поляризациям и интегрирование по импульсам недетектируемых адронов:

$$\bar{H}_{\mu\nu}^{ik} = (2\pi)^3 \int \langle B(p, h) X | J_\mu^i | 0 \rangle \langle B(p, h) X | J_\nu^k | 0 \rangle^* \delta(q - p - p_x) d\Phi_x. \quad (5.4)$$

Здесь q — передаваемый адронам 4-импульс; p_x и $d\Phi_x$ — суммарный 4-импульс и фазовый объем адронной системы X .

Из (5.4) следует, что тензор $\bar{H}_{\mu\nu}^{ik}$ зависит от спиральности бариона h и 4-импульсов p, q и представляет собой сумму тензора и псевдотензора. В общем случае для тензора $\bar{H}_{\mu\nu}^{ik}$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\mu\nu}^{ik} = & (W_1^{ik} + hT_1^{ik})(\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2) - (W_2^{ik} + hT_2^{ik}) \frac{1}{q^2} \times \\ & \times \left(q_\mu - p_\mu \frac{q^2}{pq} \right) \left(q_\nu - p_\nu \frac{q^2}{pq} \right) + (W_3^{ik} + hT_3^{ik}) \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma / pq + \\ & + (W_4^{ik} + hT_4^{ik}) q_\mu q_\nu / q^2 + (W_5^{ik} + hT_5^{ik})(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) / pq + \\ & + (W_6^{ik} + hT_6^{ik})(p_\mu q_\nu - p_\nu q_\mu) / pq. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь W_r^{ik} и $T_r^{ik}(r=1+6)$ — структурные функции адронов, зависящие от двух инвариантов s и $v = -pq$ (или от s и $x = 2v/s$). Из них $W_{1,2,4,5,6}^{ik}$ и T_3^{ik} сохраняют P -инвариантность, а W_3^{ik} и $T_{1,2,4,5,6}^{ik}$ ее нарушают.

В пределе нулевой массы электрона лептонные тензоры сохраняются: $L_{\mu\nu}^{ik} q_\mu = L_{\mu\nu}^{ik} q_\nu = 0$, поэтому структурные функции $W_{4,5,6}^{ik}$ и $T_{4,5,6}^{ik}$ вклада в сечение не дают. В результате сечение процесса (5.1) определяется структурными функциями $W_{1,2,3}^{ik}$ и $T_{1,2,3}^{ik}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega dx} = \frac{\alpha^2}{4} s \beta x \{ & [g_1^{ik}(1 - \lambda_1 \lambda_2) + g_2^{ik}(\lambda_2 - \lambda_1)] [2(W_1^{ik} + hT_1^{ik}) + \\ & + (W_2^{ik} + hT_2^{ik}) \beta^2 \sin^2 \theta] + 2[g_2^{ik}(1 - \lambda_1 \lambda_2) + g_1^{ik}(\lambda_2 - \lambda_1)] \times \\ & \times (W_3^{ik} + hT_3^{ik}) \beta \cos \theta - \eta_1 \eta_2 (g_3^{ik} \cos 2\varphi + ig_4^{ik} \sin 2\varphi) \times \\ & \times (W_2^{ik} + hT_2^{ik}) \beta^2 \sin^2 \theta \}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$g_{1(2)}^{ik} = G_L^i G_L^{k*} \pm G_R^i G_R^{k*}, \quad g_{3(4)}^{ik} = G_R^i G_L^{k*} \pm G_L^i G_R^{k*}.$$

Если электрон (позитрон) обладает правой (левой) спиральностью, то из формулы (5.6) имеем сечение

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(e_R^- e_L^+ \rightarrow BX)}{d\Omega dx} = \alpha^2 s \beta x G_R^i G_R^{k*} [& 2W_1^{ik} + W_2^{ik} \beta^2 \sin^2 \theta - \\ & - 2W_3^{ik} \beta \cos \theta + h(2T_1^{ik} + T_2^{ik} \beta^2 \sin^2 \theta - 2T_3^{ik} \beta \cos \theta)]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Если же электрон (позитрон) лево(право) поляризован, то сечение равно

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow BX)}{d\Omega dx} = \alpha^2 s \beta x G_L^i G_L^{k*} [& 2W_1^{ik} + W_2^{ik} \beta^2 \sin^2 \theta + \\ & + 2W_3^{ik} \beta \cos \theta + h(2T_1^{ik} + T_2^{ik} \beta^2 \sin^2 \theta + 2T_3^{ik} \beta \cos \theta)]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отсюда следует, что изучение реакций (5.1) с левополяризованными электронами e_L^- (или правополяризованными позитронами e_R^+) позволяет получить информацию о левых константах связи с калибровочными бозонами g_{Le}^i , в то время как сечение аннигиляции правополяризованных электронов e_R^- (или левополяризованных позитронов e_L^+) содержит сведения о правых константах связи g_{Re}^i .

Найдем структурные функции в кварк-партонной модели, согласно которой процесс (5.1) происходит в два этапа: сначала калибровочным бозоном i рождается кварк-антикварковая пара, которая затем фрагментирует в адроны. Предположим, что в конечном состоянии регистрируется быстрый барион B , несущий долю импульса кварка $x = E_B/E_q = 2E_B/\sqrt{s} \sim 1$. Естественно считать, что такой барион формируется из быстрого кварка, летящего в том же направлении, быстрый кварк подхватывает недостающие кварки из моря и образует быстрый барион B .

Дифференциальное сечение реакции (5.1) в кварк-партонной модели может быть записано в виде

$$\frac{d\sigma}{dx d\Omega} = \sum_{q, h_q} \frac{d\sigma_q(h_q)}{d\Omega_q} D_{q, h_q}^{B, h}(x) + \sum_{\bar{q}, h_{\bar{q}}} \frac{d\sigma_{\bar{q}}(h_{\bar{q}})}{d\Omega_{\bar{q}}} D_{\bar{q}, h_{\bar{q}}}^{B, h}(x). \quad (5.9)$$

Здесь сумма берется по всем кварковым ароматам; $D_{q, h_q}^{B, h}(x)(D_{\bar{q}, h_{\bar{q}}}^{B, h}(x))$ — функция фрагментации кварка (антикварка) со спиральностью $h_q(h_{\bar{q}})$ в барион с продольной поляризацией h , а дифференциальное сечение элементарного подпроцесса $e^-e^+ \rightarrow (\gamma, Z_1, Z_2) \rightarrow q\bar{q}$, определяющее угловое распределение продольно-поляризованных кварков, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_q(h_q)}{d\Omega_q} = \frac{\alpha^2 N_c s}{2} \{ & [g_1^{ik}(1 - \lambda_1 \lambda_2) + g_2^{ik}(\lambda_2 - \lambda_1)](g_1^{ik} - h_q q_2^{ik}) \times \\ & \times (1 + \cos^2 \theta) + 2[g_2^{ik}(1 - \lambda_1 \lambda_2) + g_1^{ik}(\lambda_2 - \lambda_1)](q_2^{ik} - h_q q_1^{ik}) \cos \theta - \\ & - \eta_1 \eta_2 (g_3^{ik} \cos 2\varphi + i g_4^{ik} \sin 2\varphi)(q_1^{ik} - h_q q_2^{ik}) \sin^2 \theta \}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где

$$q_{1(2)}^{ik} = g_{Lq}^i g_{Lq}^k \pm g_{Rq}^i g_{Rq}^k,$$

$N_c = 3$ — цветовой множитель; g_{Lq}^i и g_{Rq}^i — киральные константы СНТ кварка.

Угловое распределение продольно-поляризованных антикварков получается из формулы (5.10) при помощи замен: $h_q \rightarrow -h_{\bar{q}}$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$.

Сохранение P -инвариантности в процессе фрагментации приводит к соотношениям

$$D_{q, -h_q}^{B, -h}(x) = D_{q, h_q}^{B, h}(x).$$

Для краткости введем обозначения

$$D_q^B(x) \equiv D_{q, +1}^{B, +1}(x) + D_{q, -1}^{B, +1}(x),$$

$$\Delta_q^B(x) \equiv D_{q,+1}^{B,+1}(x) - D_{q,-1}^{B,+1}(x).$$

Из сравнения формул (5.6) и (5.9) с учетом угловых распределений кварков (5.10) и антикварков для структурных функций адронов получаем выражения (массой бариона пренебрегается):

$$\begin{aligned} xW_1^{ik} &= -xW_2^{ik} = 2N_c \sum_q q_q^{ik} [D_q^B(x) + D_{\bar{q}}^B(x)], \\ xW_3^{ik} &= 2N_c \sum_q q_2^{ik} [D_q^B(x) - D_{\bar{q}}^B(x)], \\ xT_1^{ik} &= -xT_2^{ik} = 2N_c \sum_q [\Delta_q^B(x) - \Delta_{\bar{q}}^B(x)] q_2^{ik}, \\ xT_3^{ik} &= 2N_c \sum_q q_1^{ik} [\Delta_q^B(x) + \Delta_{\bar{q}}^B(x)]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В случае аннигиляции продольно-поляризованных позитронов дифференциальное сечение процесса (5.1) примет вид (здесь учтены соотношения $W_2^{ik} = -W_1^{ik}$ и $T_2^{ik} = -T_1^{ik}$, предсказываемые кварк-партоновой моделью):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx d\Omega} &= \frac{\alpha^2 s}{4} g_1^{ik} W_1^{ik} (1 + \cos^2 \theta) [1 + A_{FB}(s, x, \theta)] \times \\ &\times [1 + \lambda_2 A_{RL}(s, x, \theta) + h P_B(s, x, \theta)], \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $A_{FB}(s, x, \theta)$, $A_{RL}(s, x, \theta)$ и $P_B(s, x, \theta)$ — угловая асимметрия вперед-назад, право-левая асимметрия и степень продольной поляризации бариона. Измеряемые на опыте, эти дифференциальные характеристики определяются выражениями

$$A_{FB}(s, x, \theta) = A_{FB}(s, x) f(\theta), \quad (5.13)$$

$$A_{RL}(s, x, \theta) = \frac{A_{RL}^{(1)}(s, x) + A_{RL}^{(2)}(s, x) f(\theta)}{1 + A_{FB}(s, x) f(\theta)}, \quad (5.14)$$

$$P_B(s, x, \theta) = \frac{P_B^{(1)}(s, x) + P_B^{(2)}(s, x) f(\theta)}{1 + A_{FB}(s, x) f(\theta)}. \quad (5.15)$$

Здесь

$$f(\theta) = 2 \cos \theta / (1 + \cos^2 \theta),$$

$$A_{FB}(s, x) = g_2^{ik} W_3^{ik} / g_1^{ik} W_1^{ik},$$

$$A_{RL}^{(1)}(s, x) = g_2^{ik} W_1^{ik} / g_1^{ik} W_1^{ik}, \quad A_{RL}^{(2)}(s, x) = g_1^{ik} W_3^{ik} / g_1^{ik} W_1^{ik},$$

$$P_B^{(1)}(s, x) = -g_1^{ik} T_1^{ik} / g_1^{ik} W_1^{ik}, \quad P_B^{(2)}(s, x) = -g_2^{ik} T_3^{ik} / g_1^{ik} W_1^{ik}.$$

Экспериментальное исследование угловой и энергетической зависимостей асимметрий $A_{FB}(s, x, \theta)$, $A_{RL}(s, x, \theta)$ и степени продольной поляризации бариона $P_B(s, x, \theta)$ является источником информации о киральных константах связи СНТ кварков и о функциях фрагментации кварков в барионы.

В настоящее время функции фрагментации поляризованных кварков в поляризованные барионы совершенно неизвестны. Поэтому для количественных оценок основных характеристик процессов $e^-e^+ \rightarrow \Lambda^0 X$, $e^-e^+ \rightarrow \Sigma^+ X$ будем исходить из модели, использовавшейся в работе [46]. Нас в особенности интересует степень продольной поляризации быстрых Λ^0 - и Σ^+ -гиперонов, легко наблюдаемая по угловой асимметрии распадов Λ , $\Sigma \rightarrow N\pi$.

Согласно [46] поляризация быстрых Λ^0 - и Σ^+ -гиперонов определяется выражениями

$$h_\Lambda = h_s, \quad \frac{1 + h_{\Sigma^+}}{1 - h_{\Sigma^+}} = \frac{5Q_u^2(1 + h_u) + Q_s^2(1 + h_s)}{5Q_u^2(1 - h_u) + Q_s^2(1 - h_s)}, \quad (5.16)$$

где h_u и h_s (Q_u и Q_s) — поляризации (заряды) u - и s -кварков.

Строгая $SU(6)$ -симметрия приводит к следующим значениям спиральностей барионов [46]:

$$\frac{1 + h_\Lambda}{1 - h_\Lambda} = \frac{Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2(1 + h_s)}{Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2(1 - h_s)},$$

$$\frac{1 + h_{\Sigma^+}}{1 - h_{\Sigma^+}} = \frac{Q_u^2[5(1 + h_u) + (1 - h_u)] + Q_s^2[(1 + h_s) + 2(1 - h_s)]}{Q_u^2[5(1 - h_u) + (1 + h_u)] + Q_s^2[(1 - h_s) + 2(1 + h_s)]}. \quad (5.17)$$

Что касается поляризаций барионов, содержащих тяжелые кварки, то, следуя [47], предположим, что в случае, когда в реакции $e^-e^+ \rightarrow$ адроны рождается быстрый очарованный барион B_c или прелестный барион B_b с $x \sim 1$, ему передается продольная поляризация тяжелого c - или b -кварка, т.е. при рождении B_c - или B_b -барионов вклад в функцию фрагментации c - или b -кварков преобладает над вкладом легких кварков:

$$D_{Q, h_Q}^{B, h}(x) \gg D_{q, h_q}^{B, h}(x); \quad Q = c, b; \quad q = u, d, s.$$

Таблица 6. Значения поляризаций $P_B^{(1)}$ и $P_B^{(2)}$ в резонансе

Процесс	Модель	Z-резонанс		Z'-резонанс ($\theta_E = 90^\circ$)	
		$P_B^{(1)}$	$P_B^{(2)}$	$P_B^{(1)}$	$P_B^{(2)}$
$e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$		-0,16	-0,16	-0,8	-0,8
$e^-e^+ \rightarrow \Lambda^0 X$	[46]	-0,94	-0,16	0,8	-0,8
	[47]	-0,88	-0,16	0,73	-0,8
	$SU(6)$	-0,16	-0,03	0,13	-0,13
$e^-e^+ \rightarrow \Sigma^+ X$	[46]	-0,68	-0,16	0,04	-0,72
	[47]	-0,78	-0,16	0,57	-0,8
	$SU(6)$	-0,36	-0,08	-0,03	-0,44
$e^-e^+ \rightarrow \Sigma^- X$	[47]	-0,94	-0,16	0,8	-0,8
$e^-e^+ \rightarrow B_c X$	[47]	-0,67	-0,16	0	-0,8
$e^-e^+ \rightarrow B_b X$	[47]	-0,94	-0,16	0,8	-0,8

В табл.6 приводятся значения поляризаций $P_B^{(1)}$ и $P_B^{(2)}$ в Z- или Z'-резонансной области энергий ($s = M_i^2$) при значении параметра Вайнберга $x_W = 0,23$. Как видно, результаты моделей [46] и [47] отличаются друг от друга всего на несколько процентов (исключение составляет значение поляризации $P_\Sigma^{(1)}$ в Z'-резонансе). Строгая $SU(6)$ -симметрия приводит к заниженным значениям поляризаций $P_B^{(1)}$, $P_B^{(2)}$ для Λ^0 - и Σ^+ -гиперонов.

На рис.8 и 9 приведены энергетические зависимости продольной поляризации Λ^0 - и Σ^+ -гиперонов при различных массах дополнительного бозона. Штриховые кривые иллюстрируют поведение поляризаций в СМ при $x_W = 0,23$. Как видно, при фиксированном значении массы $M_{Z'} = 150$ ГэВ с ростом энергии e^-e^+ -пучков степени продольных поляризаций $P_\Lambda^{(1)}$ и $P_\Sigma^{(1)}$ увеличиваются и, достигнув максимального значения вблизи $\sqrt{s} \sim 140$ ГэВ, начинают уменьшаться. Увеличение массы дополнительного бозона не меняет характер зависимости степени продольной поляризации от энергии, однако ее максимумы смещаются в сторону высоких энергий.

Перейдем к рассмотрению интегральных характеристик процесса (5.1). Определим следующим образом сечения рождения бариона B в передней и

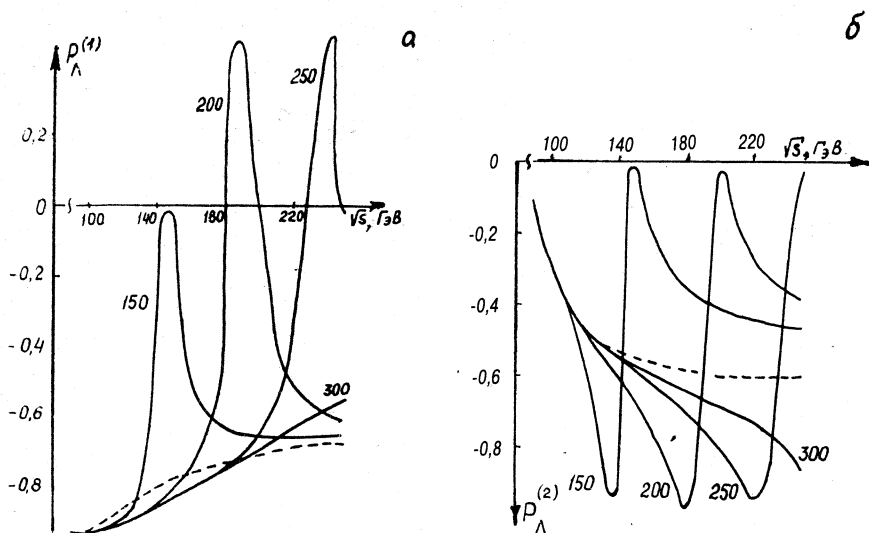


Рис.8. Зависимость степени продольной поляризации $P_{\Lambda}^{(1)}$ (а) и $P_{\Lambda}^{(2)}$ (б) от энергии в процессе $e^-e^+ \rightarrow \Lambda^0 X$ при различных массах дополнительного бозона (цифры у кривых — масса $M_{Z'}$ в ГэВ) и $\theta_E = 0^\circ$

задней полусферах при аннигиляции поляризованного позитрона и неполяризованного электрона:

$$\sigma_F(\lambda_2) = \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d \cos \theta (d\sigma/dx d\Omega),$$

$$\sigma_B(\lambda_2) = \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^0 d \cos \theta (d\sigma/dx d\Omega). \quad (5.18)$$

Из формулы (5.6) имеем

$$\sigma_{F(B)}(\lambda_2) = \frac{\pi}{3} \alpha^2 s [4(g_1^{ik} + \lambda_2 g_2^{ik}) I_1^{ik} \pm 3(g_2^{ik} + \lambda_2 g_1^{ik}) I_3^{ik}], \quad (5.19)$$

где

$$I_n^{ik} = \int_0^1 x W_n^{ik} dx \quad (n = 1, 3).$$

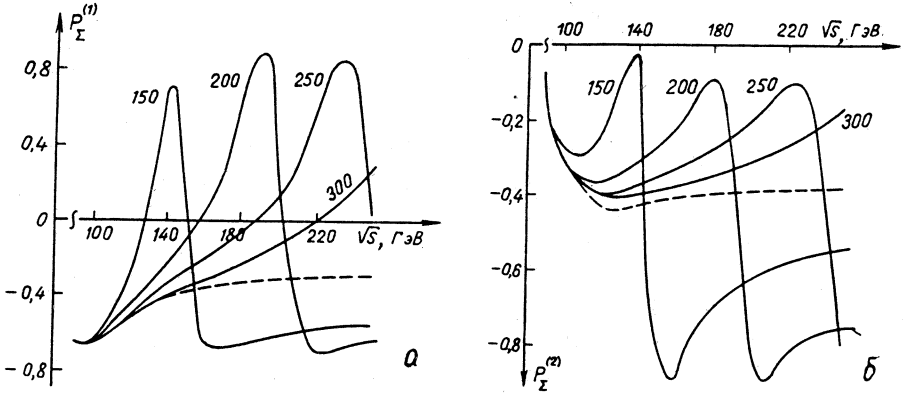


Рис.9. Зависимость степени продольной поляризации $P_\Sigma^{(1)}$ (a) и $P_\Sigma^{(2)}$ (б) от энергии в процессе $e^-e^+ \rightarrow \Sigma^+X$ при различных массах $M_{Z'}$ и $\Theta_E = 0^\circ$

Формула (5.19) приводит к следующим электрослабым асимметриям:

1) поляризационной асимметрии вперед(назад)

$$A_{F(B)}(\lambda_2) = \frac{\sigma_{F(B)}(\lambda_2) - \sigma_{F(B)}(-\lambda_2)}{\sigma_{F(B)}(\lambda_2) + \sigma_{F(B)}(-\lambda_2)} = \lambda_2 \frac{4g_2^{ik}I_1^{ik} \pm 3g_1^{ik}I_3^{ik}}{4g_1^{ik}I_1^{ik} \pm 3g_2^{ik}I_3^{ik}}; \quad (5.20)$$

2) асимметрии вперед-назад

$$A_{FB}(\lambda_2) = \frac{[\sigma_F(\lambda_2) - \sigma_B(\lambda_2)]}{[\sigma_F(\lambda_2) + \sigma_B(\lambda_2)]} = \frac{3}{4} \frac{(g_2^{ik} + \lambda_2 g_1^{ik})I_3^{ik}}{(g_1^{ik} + \lambda_2 g_2^{ik})I_1^{ik}}; \quad (5.21)$$

3) поляризационной асимметрии вперед-назад

$$\tilde{A}_{FB}(\lambda_2) = \frac{\sigma_F(\lambda_2) - \sigma_F(-\lambda_2) - \sigma_B(\lambda_2) + \sigma_B(-\lambda_2)}{\sigma_F(\lambda_2) + \sigma_F(-\lambda_2) + \sigma_B(\lambda_2) + \sigma_B(-\lambda_2)} = \frac{3}{4} \lambda_2 \frac{g_1^{ik}I_3^{ik}}{g_1^{ik}I_1^{ik}}; \quad (5.22)$$

4) право-левой асимметрии

$$A_{RL} = (\sigma_R - \sigma_L)/(\sigma_R + \sigma_L) = g_2^{ik}I_1^{ik}/g_1^{ik}I_1^{ik}, \quad (5.23)$$

где $\sigma_R = \sigma_F(\lambda_2 = 1) + \sigma_B(\lambda_2 = 1)$ и $\sigma_L = \sigma_F(\lambda_2 = -1) + \sigma_B(\lambda_2 = -1)$ — сечения аннигиляции право- и левополяризованного позитрона.

Сечения аннигиляции неполяризованной e^-e^+ -пары с рождением поляризованного бариона в передней и задней полусферах:

$$\sigma_{F(B)}(h) = \frac{\pi}{6} \alpha^2 s [4g_1^{ik}(I_1^{ik} + hF_1^{ik}) \pm 3g_2^{ik}(I_3^{ik} + hF_3^{ik})]. \quad (5.24)$$

Здесь введены обозначения

$$F_n^{ik} = \int_0^1 x T_n^{ik} dx \quad (n = 1, 3).$$

Формула (5.24) приводит к следующим поляризационным асимметриям:

1) поляризационной асимметрии вперед(назад)

$$A_{F(B)}(h) = \frac{\sigma_{F(B)}(h) - \sigma_{F(B)}(-h)}{\sigma_{F(B)}(h) + \sigma_{F(B)}(-h)} = h \frac{4g_1^{ik}F_1^{ik} \pm 3g_2^{ik}F_3^{ik}}{4g_1^{ik}I_1^{ik} \pm 3g_2^{ik}I_3^{ik}}; \quad (5.25)$$

2) асимметрии вперед-назад при рождении поляризованного бариона

$$A_{FB}(h) = \frac{\sigma_F(h) - \sigma_B(h)}{\sigma_F(h) + \sigma_B(h)} = \frac{3g_2^{ik}(I_3^{ik} + hF_3^{ik})}{4g_1^{ik}(I_1^{ik} + hF_1^{ik})}; \quad (5.26)$$

3) поляризационной асимметрии вперед-назад

$$\tilde{A}_{FB}(h) = \frac{\sigma_F(h) - \sigma_F(-h) - \sigma_B(h) + \sigma_B(-h)}{\sigma_F(h) + \sigma_F(-h) + \sigma_B(h) + \sigma_B(-h)} = \frac{3}{4} h \frac{g_2^{ik}F_3^{ik}}{g_1^{ik}I_1^{ik}}; \quad (5.27)$$

4) степени продольной поляризации бариона

$$P_B = \frac{\sigma_F(h=1) + \sigma_B(h=-1) - \sigma_B(h=-1) - \sigma_B(h=1)}{\sigma_F(h=1) + \sigma_B(h=1) + \sigma_F(h=-1) + \sigma_B(h=-1)} = \frac{g_1^{ik}F_1^{ik}}{g_1^{ik}I_1^{ik}}. \quad (5.28)$$

При аннигиляции поперечно-поляризованной e^-e^+ -пары сечение (5.6) приводит к следующим спиновым асимметриям:

$$A_{\varphi}^{(1)} = \frac{\frac{2}{\eta_1 \eta_2} \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{dx d\Omega} \right)}{\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{dx d\Omega} \right)} = \frac{-g_3^{ik}I_1^{ik}}{(2g_1^{ik}I_1^{ik})}; \quad (5.29)$$

$$A_{\varphi}^{(2)} = \frac{\frac{2}{\eta_1 \eta_2} \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{dx d\Omega} \right)}{\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{dx d\Omega} \right)} = \frac{-ig_4^{ik}I_1^{ik}}{(2g_1^{ik}I_1^{ik})}. \quad (5.30)$$

Результаты числовых оценок интегральных характеристик процессов $e^-e^+ \rightarrow B_c X$ и $e^-e^+ \rightarrow B_b X$ приведены в работах [22,24]. Здесь только перечислим некоторые специфические свойства поведения интегральных поляризационных характеристик:

- 1) при энергиях встречных e^-e^+ -пучков $\sqrt{s} \geq 140$ ГэВ поведение поляризационных характеристик существенно зависит от угла смешивания θ_E ;
- 2) асимметрии достигают максимального или минимального значений вблизи порога рождения калибровочного Z' -бозона;
- 3) с ростом массы дополнительного бозона максимумы и минимумы асимметрий смещаются в сторону высоких энергий;
- 4) предсказания суперструнной E_6 -модели значительно отличаются от результатов СМ при $\sqrt{s} > 100$ ГэВ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Электрослабые асимметрии A_{FB} , $A_F(\lambda_2)$, $A_B(\lambda_2)$, $A_{FB}(\lambda_2)$, $\tilde{A}_{FB}(\lambda_2)$, A_{RL} , $A_F(h)$, $A_B(h)$, $A_\phi^{(1)}$ и др. в процессах $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\bar{\tilde{q}}g$, $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^-e^+ \rightarrow BX$ являются экспериментально наблюдаемыми величинами. Эти эффекты вполне могут быть доступны изучению в e^-e^+ -коллайдерах SLC и LEP, и в ближайшем будущем большое количество информации позволит проверить ряд соотношений между наблюдаемыми величинами в указанных выше процессах.

Проведенный нами анализ показывает, что в СМ спиральные амплитуды и электрослабые асимметрии процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e \rightarrow f\bar{f}\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\bar{\tilde{q}}g$ зануляются при определенных энергиях сталкивающихся e^-e^+ -пучков. Зануление спиральных амплитуд и электрослабых асимметрий вышеприведенных процессов является непроверенным еще предсказанием СМ. Наблюдение предсказанного поведения асимметрий явилось бы новым доказательством справедливости модели. Нарушение соответствующих предсказаний СМ потребовало бы выхода за ее пределы, например, могло бы объясняться за счет дополнительного Z' -бозона. Наличие такого бозона должно приводить к смещению уже имеющихся нулей и к появлению дополнительных нулей в характеристиках процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}\bar{f}$ и т.д., расположение которых определяется как массой Z' -бозона, так и его константами связи с другими частицами. Следует, однако, отметить, что при

точной обработке данных конкретного эксперимента необходимо уточнить вышеприведенные результаты с учетом всех радиационных поправок. Так, например, учет ширины Z -бозона приводит к устранению нулей спиральных амплитуд, хотя нули в асимметриях, конечно, остаются.

Как следует из проведенного анализа, рассмотренные поляризационные

характеристики процессов $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow \tilde{f}\tilde{f}$, $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^-e^+ \rightarrow BX$ чувствительны к параметрам дополнительного Z' -бозона (массе $M_{Z'}$, ширине $\Gamma_{Z'}$, киральным константам связи $g_{L'}^{Z'}$, $g_{R'}^{Z'}$, углам смешивания θ_E и Φ), поэтому изучение этих характеристик даст возможность тщательно проверить СМ при высоких энергиях, укажет пути ее возможного расширения и поможет в решении вопроса о существовании в природе дополнительного нейтрального Z' -бозона.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Выражения корреляционных сечений σ_a для процесса $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$:

$$\sigma_1 \equiv \sigma_U = \frac{1}{2(1-x_1)(1-x_2)} [x_1^2(1+n_{1z}^2) + x_2^2(1+n_{2z}^2)],$$

$$\sigma_2 \equiv \sigma_L = \frac{1}{2(1-x_1)(1-x_2)} [x_1^2(1-n_{1z}^2) + x_2^2(1-n_{2z}^2)],$$

$$\sigma_3 \equiv \sigma_T = \frac{1}{2} \sigma_L,$$

$$\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_9 = 0,$$

$$\sigma_6 = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-x_1)(1-x_2)} (x_1^2 n_{1x} n_{1z} + x_2^2 n_{2x} n_{2z}),$$

$$\sigma_7 = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} (x_1^2 n_{1z} - x_2^2 n_{2z}),$$

$$\sigma_8 = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-x_1)(1-x_2)} (x_1^2 n_{1x} - x_2^2 n_{2x}).$$

Здесь $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы вдоль импульсов кварка и антикварка, x_1 и x_2 — их скейлинговые энергии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Выражения корреляционных сечений для процесса $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\tilde{q}^*g$:

$$\sigma_U = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} n_{1x} n_{2x} \right],$$

$$\sigma_L = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} n_{1z} n_{2z} \right],$$

$$\sigma_T = \frac{1}{4} \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} n_{1x} n_{2x},$$

$$\sigma_I = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} (n_{1x} n_{2z} + n_{1z} n_{2x}).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Выражения корреляционных сечений $\sigma_a(T)$ для процесса $e^-e^+ \rightarrow \tilde{q}\tilde{q}^*g$:

1) скалярной кварковой (или скалярной антикварковой) струи

$$x_1 = T \quad (x_2 = T)$$

$$\frac{d\sigma_U}{dT} = 3T - 2,$$

$$\frac{d\sigma_L}{dT} = \frac{T}{2(1-T)} \ln \frac{2T-1}{1-T} - \frac{3T-2}{2(1-T)},$$

$$\frac{d\sigma_T}{dT} = 0,$$

$$\frac{d\sigma_I}{dT} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{T}{\sqrt{1-T}} - 2\sqrt{2T-1} \right);$$

2) глюонной струи $x_3 = T$

$$\frac{d\sigma_U}{dT} = \frac{3T-2}{T^2} (T^2 - 2T + 2),$$

$$\frac{d\sigma_L}{dT} = \frac{1-T}{T} \ln \frac{2T-1}{1-T} - \frac{2(1-T)(3T-2)}{T^2},$$

$$\frac{d\sigma_T}{dT} = - \frac{(1-T)(3T-2)}{T^2},$$

$$\frac{d\sigma_I}{dT} = \frac{(1-T)(2-T)}{\sqrt{2} T^2} \left(\frac{T}{\sqrt{1-T}} - 2\sqrt{2T-1} \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glashow S.L. — Nucl. Phys., 1961, vol.22, p.579.
Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1967, vol.19, p.1264.
Salam A. — Elementary Particle Theory. Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968, p.367.
2. Bilenky S.M., Hasek J. — Phys. Repts., 1982, vol.90, p.73.
3. Ермолов П.Ф., Мухин А.И. — УФН, 1978, т.124, с.385.
Цукерман И.С. — Элементарные частицы. М., 1981, вып.1, с.55.
4. Рекало М.П. — Нейтральные слабые токи. Киев, 1988.
5. Окунь Л.Б. — Лептоны и кварки. М., 1981.
6. Иоффе Б.Л., Хозе В.А. — ЭЧАЯ, 1978, т.9, с.118.
7. Исаев П.С., Царев В.А. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, с.997.
8. Бардин Д.Ю. — Прецизионные проверки стандартной теории. Дубна, 1988.
9. Green M., Schwarz J. — Phys. Lett., 1984, vol.B148, p.17.
10. Gross D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1985, vol.54, p.502.
Candelas P. et al. — Nucl. Phys., 1985, vol.B258, p.46.
11. Robinett R.W. — Phys. Rev., 1986, vol.D33, p.1908.
Dine M. et al. — Nucl. Phys., vol.B259, p.549.
Rizzo T.G. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.1438.
12. Angelopoulos V.D. et al. — Phys. Lett., 1986, vol.B176, p.203.
London D., Rosner J. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.1530.
Ellis J. et al. — Nucl. Phys., 1986, vol.B276, p.436.
13. Belanger G., Godfrey S. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.1309.
Duncan M.J., Langacker P. — Nucl. Phys., 1986, vol.B277, p.285.
Rosner J.L. — Phys. Rev., 1987, vol.D35, p.2244.
14. Полюбин И.В. — Письма в ЖЭТФ, 1987, т.45, с.553.
Алиев Т.М., Гулиев Н.А., Мустафаев Х.А. — ЯФ, 1989, т.50, с.1078.
Алиев Т.М., Добролюбов М.И. — ЯФ, 1989, т.50, с.1392.
15. Алтайский М.В., Бедняков В.А. — ЯФ, 1989, т.50, с.1398.
16. Панков А.А. — ЯФ, 1994, т.57, с.472.
17. Бедняков В.А., Коваленко С.Г. — ЯФ, 1989, т. 49, с.866; Препринт ОИЯИ Р2-89-56, Дубна, 1989.
18. Бедняков В.А. — Препринт ОИЯИ Р2-90-104, Дубна, 1990.
19. Bendyakov V.A., Kovalenko S.G. — Phys. Lett., 1988, vol.B214, p.640; vol.B219, p.96; Preprint JINR E2-88-157, Dubna, 1988.
20. Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И. — Препринт ОИЯИ Р2-89-217, Дубна, 1989.
21. Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И. — ЯФ, 1989, т.50, с.1084.
22. Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И. — ЯФ, 1990, т.52, с.1455.
23. Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И., Алиев Л.П. — ЯФ, 1991, т.53, с.516.
24. Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И., Алиев Л.П. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1989, т.53, с.936.
25. Абдуллаев С.К., Алиев Л.П. — Изв. вузов СССР. Физика, 1989, № 5, с.78.
26. Абдуллаев С.К., Алиев Л.П. — Изв. вузов СССР. Физика, 1987, № 4, с.117; № 5, с.111.
27. Абдуллаев С.К. — ЯФ (в печати).

28. Абдуллаев С.К. — ЯФ (в печати).
29. Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И. — ЯФ (в печати).
30. Cvetic M., Lynn B.W. — Phys. Rev., 1987, vol.D35, p.51.
31. Fernandez E. et al. — Phys. Rev. Lett., 1985, vol.54, p.1620.
32. Collaboration AMY — KEK Preprint № 88, 1988.
33. Collaboration TASSO — Z. Phys., 1988, vol.C40, p.163.
34. Collaboration TOPAZ — Phys. Lett., 1988, vol.B208, p.319.
35. Ford W.T. et al. — Phys. Rev., 1987, vol.D36, p.1971.
36. Decamp D. et al. — Phys. Lett., 1990, vol.B241, p.435.
37. Adeva B. et al. — Phys. Lett., 1990, vol.B237, p.136.
38. Akrawy M.Z. et al. — Phys. Lett., 1990, vol.B240, p.497.
39. Collaboration LEP — Phys. Lett., 1992, vol.B276, p.247.
40. Collaboration L3 — Preprint CERN-PPE/93-31, 1993.
41. Collaboration ALEPH — Preprint CERN-PPE/93-40, 1993; CERN-PPE/93-39, 1993.
42. Ting S.C.C. — Preprint CERN-PPE/93-34, 1993.
43. The Working Group on LEP Energy and the LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL — Preprint CERN-PPE/93-53, 1993.
44. Abrams G.S. et al. — Preprint SLAC-PUB-5113, 1989.
45. Chanowitz M.S. — Science, 1990, vol.249, p.36.
46. Смилга А.В. — ЯФ, 1977, т.25, с.461.
47. Nieves J.F. — Phys. Rev., 1979, vol.D20, p.2775.
48. Kramer G. — Preprint DESY 83-086, 1983.
49. Olsen H.A., Oslando P., Overbo I. — Nucl. Phys., 1981, vol.B171, p.209; Nucl. Phys., 1981, vol.B192, p.33.
50. Schierholz G., Schiller D.H. — Preprint DESY 80/88, 1980.
51. Risso T.G. — Phys. Rev., 1979, vol.D20, p.2207.
52. Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И. — Столкновение частиц с ядрами, атомами и молекулами. Тем. сб. научных трудов. Баку, 1982, с.3.
53. Dahmen H.D., Schiller D.H., Wahner D. — Nucl. Phys., 1983, vol.B227, p.291.
54. Chiappetta P. et al. — Nucl. Phys., 1985, vol.B259, p.365.
55. Schiller D.H., Wahner D. — Nucl. Phys., 1985, vol.B255, p.505.
56. Bilenky S.M., Nedelcheva N.P. — Nucl. Phys., 1987, vol.B283, p.295.
57. Высоцкий М.И. — УФН, 1985, т.146, с.591.
58. Schiller D.H., Wahner D. — Nucl. Phys., 1985, vol.B259, p.597.
59. Мухтаров А.И., Перов Ю.С. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1958, т.22, с.883.

УДК 539.12.01+539.12....142+539.145.7

АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

М.В.Чижев

Центр космических исследований и технологий,
Физический факультет, Софийский университет
1126 София, Болгария
E-mail: mih@phys.uni-sofia.bg

Обсуждается существование двух различных сортов частиц со спином единица, описываемых двумя неэквивалентными представлениями группы Лоренца: вектор-потенциалом и антисимметричным тензорным полем второго ранга. Обзор посвящен изучению свойств антисимметричных тензорных полей, определению их места в теории и феноменологическим следствиям. Представлены уравнения движения для безмассовых частиц произвольного спина, из которых следует существование новых частиц высших спинов.

The existence of two different sorts of particles with spin one is discussed. They are described by two nonequivalent representations of the Lorentz group: the vector potential and the antisymmetric tensor field of the second rank. The present review is devoted to studying the properties of the antisymmetric tensor fields, their role in theory, and phenomenological consequences. The equations of motion are presented for massless particles of an arbitrary spin. It follows from the equations that new particles with higher spins should exist.

ВВЕДЕНИЕ

Ключевым понятием всей фундаментальной физики является понятие поля. Введение новых полей в теорию с неизбежностью приводит к новым физическим следствиям, и это не должно противоречить существующим экспериментальным данным. В обзоре мы рассмотрим свойства фундаментального антисимметричного тензорного поля второго ранга. Вне массовой поверхности оно переносит взаимодействие со спином единица и является дополнительным фотону. Логическая непротиворечивость такой теории и анализ последних экспериментальных данных приводят к выводу о возможности существования в природе таких частиц.

Огромное разнообразие элементарных частиц может быть описано в рамках квантовой теории поля ограниченным набором полей. Скалярное, спинорное, векторное и симметричное тензорное поля достаточны для описания всех известных в природе четырех видов взаимодействий и материальных частиц, участвующих в них. Это достигается благодаря тому, что параметры соответствующих полей изменяются в очень широких преде-

лах. Например, частицы могут быть безмассовыми и иметь бесконечный радиус взаимодействия, или, напротив, очень массивными — с массой порядка 100 ГэВ — и приводить к почти точечному взаимодействию на расстояниях 10^{-16} см. Основой построения всех четырех видов взаимодействия: сильного, электромагнитного, слабого и гравитационного являются калибровочные теории [1]. Частицы, осуществляющие эти взаимодействия, называются калибровочными бозонами.

Калибровочная симметрия требует отсутствия затравочного массового члена в лагранжиане для калибровочных бозонов. Поэтому трудности в квантовой теории поля возникают тогда, когда мы пытаемся «руками» сделать калибровочные частицы массивными. Это приводит к перенормируемой теории. Чтобы сохранить перенормируемость теории и в то же время придать массы калибровочным бозонам, в настоящее время используют так называемый механизм Хиггса [2]. Для этого необходимо добавить в теорию скалярные поля, которые, впрочем, еще не открыты, с ненулевым вакуумным средним $\langle \phi \rangle_0 = v \neq 0$. Их взаимодействие с калибровочными бозонами приводит к динамическому приобретению массы последними. Ввиду того, что ненулевое вакуумное среднее скалярных полей может также являться источником масс и для материальных частиц, принято считать, что при построении теории все частицы берутся безмассовыми. Это хорошо еще и потому, что только частицы с одинаковыми массами могут быть членами одного мультиплета. Поэтому в данном случае не возникает никаких трудностей при построении объединенных теорий. Все необходимые массы возникают в результате спонтанного нарушения симметрии, когда скалярные поля приобретают ненулевые вакуумные средние. Скалярные поля дают массы всем частицам, которые с ними взаимодействуют.

Кроме массы, другим инвариантом группы Пуанкаре является спин, а для безмассовых частиц — спиральность. Известные в настоящее время фундаментальные частицы имеют спин $1/2$, 1 и 2 . Вейлевский спинор ψ_α и ему сопряженный $\psi_\alpha^* \equiv \bar{\psi}_\alpha$ являются фундаментальными спинорными представлениями группы Лоренца $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ соответственно. Эти спиноры первого ранга описывают частицы со спином $1/2$. Спинорные пунктирные $\dot{\alpha}$ и непунктирные α индексы принимают значения 1 и 2 . Вейлевские спиноры с различными типами индексов связаны P -преобразованием пространственного отражения и по отдельности не являются по отношению к нему инвариантными. Дираковские спиноры строятся как прямая сумма вейлевского спинора и ему сопряженного и преобразуются по приводимому представлению $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. Поэтому они инвариантны к преобразованию четности. Ввиду того, что P -инвариантность в природе нарушена, естествен-

но с самого начала выбрать в качестве фундаментальных частиц материи вейлевские спиноры, а не спиноры Дирака.

Спиноры высшего ранга можно построить, используя фундаментальные вейлевские спиноры [3]. Произвольная комбинация вейлевских спиноров является приводимой, так как спинорная алгебра содержит инвариантные антисимметричные спиноры $\epsilon^{\alpha\beta}$ и $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ с непунктирными и пунктирными индексами. Неприводимый спинор высшего ранга может быть образован из симметричной комбинации вейлевских спиноров с непунктирными индексами и из симметричной комбинации сопряженных вейлевских спиноров с пунктирными индексами умножением. Всевозможные неприводимые комбинации n -непунктирных и m -пунктирных фундаментальных вейлевских спиноров преобразуются по представлениям группы Лоренца $(n/2, m/2)$ и описывают частицы со спином $j = (n + m)/2$.

В случае целого спина наиболее хорошо изученным и используемым является действительное представление $(j/2, j/2)$. С помощью матриц Паули $(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma_0, \sigma)_{\alpha\dot{\beta}}$, где σ_0 — единичная матрица, можно перейти от спинорных индексов к лоренцевым. Здесь и в дальнейшем мы будем использовать буквы греческого алфавита для спинорных индексов, а латинские буквы — для лоренцевых. Симметричный по лоренцевым индексам $\phi_{m_1 \dots m_j}$ бесследовый тензор $g^{m_1 m_2} \phi_{m_1 m_2 \dots m_j} = 0$ описывает бозе-частицы со спином j [4].

Действительно, легко проверить, что размерность представления $(j/2, j/2)$ равна $(j + 1)^2$ и совпадает с числом компонент симметричного бесследового тензора: $\phi_{m_1 \dots m_j} : C_{j+3}^j - C_{j+1}^{j-2} = (j + 1)^2$, что равно числу степеней свободы вне массовой поверхности. Однако, чтобы получить физическое число компонент для частицы со спином $j : 2j + 1$, необходимо наложить j^2 дополнительных связей типа условий Лоренца: $\partial_{m_1} \phi^{m_1 \dots m_j} = 0$. В безмассовом случае, кроме того, калибровочные преобразования выделяют физические компоненты с максимальными значениями спиральности $\lambda = \pm j$. Аналогичная процедура построения полей с высшими спинами используется и для ферми-частиц, которые описываются представлениями $(j/2 + 1/4, j/2 - 1/4)$ и $(j/2 - 1/4, j/2 + 1/4)$ или эквивалентными им симметричными по лоренцевым индексам бесследовыми спин-тензорами $\psi_{m_1 \dots m_{j-1/2}}^\alpha$ и $\psi_{m_1 \dots m_{j-1/2}}^{\dot{\alpha}}$.

Такое описание подразумевает, что для безмассовой частицы со спином j физическими являются компоненты с максимальным значением спиральности $\lambda = \pm j$. Действительно, все известные частицы описываются только этими представлениями. Реальный фотон поперечен, что отвечает макси-

мальному значению спиральности $\lambda = \pm 1$, а гравитон имеет физические компоненты со спиральностью $\lambda = \pm 2$. Естественно здесь задать вопрос о возможности существования частиц со спином j , но с физическими компонентами, отвечающими другим, немаксимальным значениям спиральности $\lambda = \pm(j-1), \pm(j-2), \dots$, т.е. частиц, как бы дополнительных существующим, скажем, фотону и гравитону — их партнеров. Такие частицы могут быть описаны другими представлениями группы Лоренца, неэквивалентными бесследовым симметричным тензорам $\phi_{m_1 \dots m_j}$ (спин-тензорам $\psi_{m_1 \dots m_{j-1/2}}^\alpha$).

В данном обзоре мы сосредоточим наше внимание на представлениях спина единица (1,0) и (0,1), которые отвечают симметричным по спинорным индексам спинорам ранга 2: $\psi_{\alpha\beta}$ и $\psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ соответственно. Чтобы перейти от спинорных индексов к лоренцевым, можно использовать разложение произведения матриц Паули на симметричную и антисимметричную части:

$$\begin{aligned}(\sigma^m \hat{\sigma}^n C)_{\alpha\beta} &= g^{mn} C_{\alpha\beta} - \frac{i}{2} \epsilon^{mnab} (\sigma_a \hat{\sigma}_b C)_{\alpha\beta}, \\(C \hat{\sigma}^m \sigma^n)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= g^{mn} C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \frac{i}{2} \epsilon^{mnab} (C \hat{\sigma}_a \sigma_b)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}},\end{aligned}\quad (1)$$

где $(\hat{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\beta} = (C^{-1} \sigma_m^T C)^{\dot{\alpha}\beta}$, а $C_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\alpha\beta}$ — матрица зарядового сопряжения, ϵ^{nmab} — полностью антисимметричный тензор, причем $\epsilon^{0123} = +1$. Из (1) видно, что трем комплексным компонентам симметричного спинора $\psi_{\alpha\beta}$ можно поставить в соответствие три комплексные компоненты антисимметричного самоантidualного тензора $T_{mn}^- = (T_{mn} - \tilde{T}_{mn})/\sqrt{2}$ [5]:

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= (iT_{02}^- - T_{01}^-)/\sqrt{2}, \\ \psi_{22} &= (iT_{02}^- + T_{01}^-)/\sqrt{2}, \\ \psi_{12} &= \psi_{21} = T_{03}^-/\sqrt{2},\end{aligned}\quad (2)$$

где $\tilde{T}_{mn} = i/2 \epsilon_{mnab} T^{ab}$ — тензор, дуальный действительному антисимметричному тензору T^{ab} . Комплексно-сопряженные компоненты симметричного спинора $\psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ соответствуют компонентам антисимметричного самоантidualного тензора $T_{mn}^+ = (T_{mn} + \tilde{T}_{mn})/\sqrt{2} = (T_{mn}^-)^*$. Впервые антисимметричное тензорное поле, как фундаментальное поле, а не как тензор напряженности Максвелла, было введено Кеммером [6]. Дальнейшее изучение свойств этого поля и его взаимодействий с другими полями было продолжено в работе Огиевского и Полубаринова [7]. В их работе антисимметричное тензорное поле второго ранга A_{mn} было введено как калибровочное поле с калибровочными преобразованиями $A_{mn} \rightarrow A_{mn} + \partial_m \lambda_n - \partial_n \lambda_m$. Авторы ввели для этого

поля очень подходящее название «нотиф», так как его свойства оказались дополнительными фотону. Калибровочные антисимметричные тензорные поля будут рассмотрены во втором разделе.

Особый интерес к калибровочным антисимметричным тензорным полям возник после работ [8], где было показано, что такие поля естественным образом возникают в дуальных моделях теорий струны. В настоящее время они являются неотъемлемой частью расширенных моделей супергравитации [9] и обеспечивают сокращение аномалий в этих теориях [10]. Усилия, предпринятые по квантованию калибровочных антисимметричных тензорных полей, привели к открытию новой конструкции: «духи для духов» или пирамиды духов [11]. К сожалению, расширенные модели супергравитации достаточно далеки от феноменологии, и их изучение представляет чисто теоретический интерес. Поэтому калибровочные антисимметричные тензорные поля не нашли на сей день еще физических приложений.

Кроме калибровочной симметрии, в физике элементарных частиц существует еще одна важная симметрия — конформная [12]. В четырехмерном пространстве-времени свободное максвелловское действие для электромагнитного поля оказывается одновременно калибровочно- и конформноинвариантным. Однако это свойство не сохраняется для действия калибровочного антисимметричного тензорного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{gauge}} &= \frac{1}{2 \cdot 3!} \int d^4x F_{mnk} F^{mnk} = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{4} (\partial_k A_{mn}) \partial^k A^{mn} - \frac{1}{2} (\partial_m A^{mk}) \partial^n A_{nk} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $F_{mnk} = \partial_m A_{nk} + \partial_k A_{mn} + \partial_n A_{km}$ — калибровочно-инвариантный полностью антисимметричный тензор напряженности третьего ранга. Конформноинвариантное действие для антисимметричного тензорного поля T_{mn}

$$\mathcal{A}_{\text{conformal}} = \int d^4x \left[\frac{1}{4} (\partial_k T_{mn}) \partial^k T^{mn} - (\partial_m T^{mk}) \partial^n T_{nk} \right] \quad (4)$$

отличается от (3) и приводит к другим уравнениям движения. Эти поля мы будем называть материальными антисимметричными тензорными полями. Их рассмотрению посвящен третий раздел.

Функции Грина для материальных антисимметричных тензорных полей можно однозначно построить в рамках конформной теории поля [13]. Они также естественным образом возникают в расширенных моделях конформной супергравитации [14—16] и приводят к сокращениям аксиальных и конформных аномалий [17]. Модели, построенные с использованием таких полей, являются перенормируемыми и проявляют интересные свойства [18]. Например, константа связи калибровочного псевдовекторного поля с ма-

териальным антисимметричным тензорным полем даже в абелевом случае обладает асимптотически-свободным поведением.

В отличие от калибровочных антисимметричных тензорных полей, материальные антисимметричные тензорные поля могут взаимодействовать с известными частицами материи спина $1/2$ посредством обычной юкавской связи $i\bar{\psi}\sigma^{mn}\psi T_{mn}$, обходя проблему внутренней самосогласованности. Если бы антисимметричные тензорные частицы были безмассовыми, это привело бы к новому взаимодействию с бесконечным радиусом. Чтобы такое взаимодействие не противоречило экспериментальным данным, необходимо предположить неестественную малость юкавской константы t . Однако существует и другое, более естественное решение этой проблемы, когда материальные антисимметричные тензорные поля приобретают массу динамическим образом в результате спонтанного нарушения симметрии.

Массивное антисимметричное тензорное поле приводит к почти точечному эффективному тензорному взаимодействию, которое может интерферировать со стандартным слабым V—A-взаимодействием. Уже в настоящее время существуют экспериментальные данные в пользу такой возможности [19,20]. Однако лишь дальнейшие прецизионные эксперименты, в частности, по измерению энергетического электронного спектра в распаде мюона и непосредственное рождение тензорных частиц на будущих ускорителях, смогут окончательно дать ответ на этот вопрос.

2. КАЛИБРОВОЧНЫЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Изучение различных представлений группы Лоренца, и в частности, представлений, связанных с антисимметричными тензорными полями, имеет долгую историю в теории поля [6]. Однако отсутствие экспериментальных данных в пользу существования таких частиц не привлекает еще достаточного внимания к этому вопросу. Основные монографии по квантовой теории поля [21] не рассматривают поля, преобразующиеся по нестандартным представлениям группы Лоренца. Нашей задачей будет изучение самых простых нестандартных представлений группы Лоренца, которые возникают уже при описании частиц со спином единица. Ввиду того, что частицы со спином единица могут преобразовываться как симметричный спинор второго ранга $\chi_{\alpha\beta}$ и ему сопряженный $\chi^{\alpha\beta}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ или как смешанный спинор $\psi^{\alpha}_{\dot{\beta}}$, можно говорить о двух типах частиц со спином единица. Известно, что смешанный спинор $\psi^{\alpha}_{\dot{\beta}}$ соответствует 4-вектору и в безмассовом пределе описывает фотон. Тогда какую частицу описывает симметричный спинор второго ран-

га $\chi_{\alpha\beta}$ и ему сопряженный $\chi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$? Чтобы ответить на данный вопрос, необходимо записать уравнения движения для этих полей. При построении уравнений движения мы постараемся следовать исторической последовательности.

2.1. Массивные частицы со спином единица. Впервые уравнения движения для спинорных полей высшего ранга были получены Дираком [22]. Если в теории существует массовый параметр m_0 , то можно записать систему уравнений первого порядка, связывающую различные спиноры:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}^{\dot{\alpha}\beta} \chi_{\beta\lambda} &= m_0 \psi_{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\ \hat{p}^{\dot{\alpha}\beta} \psi_{\lambda}^{\dot{\alpha}} &= m_0 \chi_{\beta\lambda} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta} = p^n (\hat{\sigma}_n)^{\dot{\alpha}\beta}$. Кеммер переписал эти уравнения в более привычных тензорных обозначениях, перейдя от спинорных индексов к лоренцевым [6]. Он нашел, что эти уравнения эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} \partial_a f^{ab} &= m_0 A^b, \\ \partial_a A_b - \partial_b A_a &= m_0 f_{ab}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь антисимметричный тензор второго ранга f_{ab} соответствует симметричному спинору $\chi_{\alpha\beta}$, а вектор A_a отвечает смешанному спинору $\psi_{\beta}^{\dot{\alpha}}$. Если вектор A_a интерпретировать как вектор-потенциал частицы со спином единица, а второе уравнение в (6) — как определение напряженности поля $F_{ab} = m_0 f_{ab}$ для этой частицы, то эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \partial_a F^{ab} &= m_0^2 A^b, \\ F_{ab} &= \partial_a A_b - \partial_b A_a. \end{aligned} \quad (7)$$

Они являются ничем другим, как уравнениями Прока [23]. В силу антисимметрии напряженности F_{ab} из первого уравнения (7) автоматически следует условие Лоренца $\partial_a A^a = 0$. Это условие убирает лишнюю скалярную степень свободы. Поэтому уравнения (7) описывают векторную частицу со спином единица и с массой m_0 . Хорошо известно, что если перейти к пределу $m_0 \rightarrow 0$, то эти уравнения вместе с условием Лоренца будут описывать безмассовый фотон.

Кеммер дал и другую интерпретацию уравнениям (6). Он предположил, что частица со спином единица может описываться антисимметричным тен-

зор-потенциалом $A_{ab} = i/2 \epsilon_{abmn} f^{mn}$, а роль напряженности поля для этой частицы тогда будет играть вектор A^a или, точнее, ему дуальный полностью антисимметричный тензор третьего ранга $f_{abc} = i \epsilon_{abcd} A^d$. Уравнения движения, дуальные (6), имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_a A_{bc} + \partial_b A_{ca} + \partial_c A_{ab} &= m_0 f_{abc}, \\ \partial_a f^{abc} &= m_0 A^{bc}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (6) и (8) для свободных массивных частиц эквивалентны, так как существует дуальное преобразование, их связывающее. Однако эта эквивалентность теряется, когда включено взаимодействие [24].

Если переопределить напряженность для антисимметричного тензорного поля A_{ab} как $F_{abc} = m_0 f_{abc}$, уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned} F_{abc} &= \partial_a A_{bc} + \partial_b A_{ca} + \partial_c A_{ab}, \\ \partial_a F^{abc} &= m_0^2 A^{bc}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу антисимметрии напряженности F_{abc} , из второго уравнения (9) следует условие типа Лоренца

$$\partial_a A^{ab} = 0. \quad (10)$$

В силу же антисимметрии A^{ab} , из четырех условий (10) только три являются независимыми. Эти условия позволяют из 6 степеней свободы антисимметричного тензорного поля A^{ab} убрать 3. Поэтому уравнения (9) также описывают частицу со спином единица и с массой m_0 .

В силу дуальности уравнений (6) и (8), они представляют два эквивалентных способа описания свободных массивных частиц со спином единица. Покажем, что для антисимметричного тензорного поля существует еще одно уравнение, эквивалентное предыдущим, также описывающее массивную частицу со спином единица.

Лучше всего это показать, используя формализм проекционных операторов [25]. Свободное действие квадратично по полям, поэтому самый общий вид кинетического члена для антисимметричного тензорного поля есть $A_{ab} \square O^{abcd} A_{cd}$, где оператор O^{abcd} может быть разложен по полному набору проекционных операторов спина единица:

$$\begin{aligned} P_{abcd}^- &= \frac{1}{2} [g_{ac} \pi_{bd} - g_{ad} \pi_{bc} - g_{bc} \pi_{ad} + g_{bd} \pi_{ac}] \\ P_{abcd}^+ &= \mathbf{1}_{abcd} - P_{abcd}^-. \end{aligned} \quad (11)$$

Единичный оператор в (11) имеет вид $\mathbf{1}_{abcd} = 1/2[g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}]$, а $\pi_{ab} = \partial_a \square^{-1} \partial_b$. Это еще один способ показать, что антисимметричное тензорное поле описывается представлением $(1,0) \oplus (0,1)$. Операторы $P^\pm$ удовлетворяют трем свойствам:

а) ортонормированности: $P_{abef}^\lambda P_{efcd}^{\lambda'} = \delta^{\lambda\lambda'} P_{abcd}^\lambda$;

б) разложимости единицы: $\mathbf{1}_{abcd} = \Sigma_\lambda P_{abcd}^\lambda$;

в) полноты: $O_{abcd} = \Sigma_\lambda \omega_\lambda P_{abcd}^\lambda$.

Используя проекционные операторы, запишем уравнение $\square P_{abcd}^+ A^{cd} = m_0^2 A_{ab}$, которое в точности совпадает с уравнением для антисимметричного тензорного поля, следующим из (9). Если на его обе части подействовать оператором P^- , то в силу свойства ортогональности (а), мы придем к условию связи $P_{abcd}^- A^{cd} = 0$, которое эквивалентно (10). На языке проекционных операторов это означает «вырезание» состояния со спином единица из антисимметричного тензорного поля. Для оставшихся физических степеней свободы, которые отвечают частице со спином единица, в силу свойства (б) мы получим уравнение Клейна — Гордона: $(\square - m_0^2) P_{abcd}^+ A^{cd} = 0$.

Если теперь построить аналогичные уравнения с оператором P^- , мы придем к еще одному уравнению для антисимметричного тензорного поля $\square P_{abcd}^- A^{cd} = m_0^2 A_{ab}$ или

$$\partial_a \partial^c A_{cb} - \partial_b \partial^c A_{ca} = m_0^2 A_{ab}. \quad (12)$$

Это уравнение используется в киральной теории для альтернативного описания ρ -мезона антисимметричным тензорным полем [26]. Если использовать подстановку $\partial^a A_{ab} = m_0 A_{ab}$, можно сразу увидеть эквивалентность (12) уравнениям Прока (7). Свойство полноты (в) гарантирует нам, что не существует других уравнений для массивных антисимметричных тензорных полей.

2.2. Безмассовые частицы со спином единица. Нас будет интересовать случай безмассовых антисимметричных тензорных частиц. Поэтому перейдем в (9) к пределу $m_0 \rightarrow 0$. Именно этот случай рассмотрели Огиевецкий и Полубаринов [7]. Они показали, что даже свободные уравнения (7) и (9) в безмассовом пределе описывают различные частицы и неэквивалентны. Чтобы увидеть это, запишем в безмассовом случае уравнение движения для вектор-потенциала A_m , следующее из (7) (уравнение Максвелла):

$$\square A_m - \partial_m \partial_n A^n = 0, \quad (13)$$

и уравнение движения для тензор-потенциала A_{mn} , следующее из (9) (уравнение для нотофа):

$$\square A_{mn} - \partial_m \partial_k A^{kn} + \partial_n \partial_k A^{km} = 0. \quad (14)$$

Заметим, что последнее уравнение (14) может быть получено из принципа наименьшего действия для (3). Уравнения (13) и (14) инвариантны относительно калибровочных преобразований $\delta A_m = \partial_m \lambda$ вектор-потенциала и

$$\delta A_{mn} = \partial_m \lambda_n - \partial_n \lambda_m \quad (15)$$

тензор-потенциала соответственно, где $\lambda(x)$ и $\lambda_m(x)$ — произвольные функции.

Покажем, что свободный нотоф обладает только одним состоянием с продольной поляризацией, а физический фотон имеет два состояния с поперечной поляризацией. Из дополнительных условий

$$\partial_m A^m = 0, \quad \partial_m A^{mn} = 0 \quad (16)$$

следует, что все компоненты вектор-потенциала A_m и тензор-потенциала A_{mn} удовлетворяют уравнениям Даламбера

$$\square A_m = 0, \quad \square A_{mn} = 0. \quad (17)$$

Поэтому они могут быть разложены в импульсном пространстве по плоским волнам с положительной и отрицательной частотами

$$A_m(x) = \int d^3p A_m(\mathbf{p}) e^{ipx} + \text{h.c.}, \quad A_{mn}(x) = \int d^3p A_{mn}(\mathbf{p}) e^{ipx} + \text{h.c.},$$

где $p_0 = |\mathbf{p}|$. Для подсчета числа состояний разложим $A_m(\mathbf{p})$ и $A_{mn}(\mathbf{p})$ по полному базису $e_m^{(1)}, e_m^{(2)}, p_m = (p_0, -\mathbf{p})$ и $\bar{p}_m = (p_0, \mathbf{p})$ со свойствами

$$(e^{(i)} e^{(j)}) = -\delta_{ij}, \quad (e^{(i)} p) = (e^{(i)} \bar{p}) = 0, \quad p^2 = \bar{p}^2 = 0, \quad (18)$$

где вектор $\bar{p}_m$ получен из p_m обращением направления движения частицы. Разложения можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_m(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^2 \alpha_i e_m^{(i)} + \beta p_m + \gamma \bar{p}_m, \\ A_{mn}(\mathbf{p}) &= \delta(e_m^{(1)} e_n^{(2)} - e_n^{(1)} e_m^{(2)}) + \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i (e_m^{(i)} p_n - e_n^{(i)} p_m) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \eta_i (e_m^{(i)} \bar{p}_n - e_n^{(i)} \bar{p}_m) + \xi (p_m \bar{p}_n - p_n \bar{p}_m). \end{aligned}$$

Дополнительные условия (16) исключают все члены, содержащие $\bar{p}_m$ (то есть $\gamma = \eta_i = \xi - 0$), а калибровочная инвариантность делает несущественными компоненты, содержащие p_m . Введем единичные векторы правой и левой круговой поляризации $e_m^\pm = (e_m^{(1)} \pm i e_m^{(2)}) / \sqrt{2}$, отвечающие проекциям спина на направление движения (спиральностям) $\lambda = \pm 1$. Теперь легко можно показать, что свободный фотон действительно обладает одним состоянием поляризации с нулевой спиральностью

$$A_{mn}(\mathbf{p}) = i\delta [e_m^+(\mathbf{p}) e_n^-(\mathbf{p}) - e_n^+(\mathbf{p}) e_m^-(\mathbf{p})], \quad (19)$$

а свободный фотон имеет две компоненты со спиральностями $\lambda = \pm 1$:

$$A_m(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=\pm 1} \alpha_\lambda^* e_m^\lambda(\mathbf{p}), \quad (20)$$

где $\alpha_\pm = (\alpha_1 \pm i\alpha_2) / \sqrt{2}$. Таким образом, действие (3) представляет собой калибровочную теорию бесспиновой частицы.

2.3. Неабелево антисимметричное тензорное поле. С помощью метода дуальных преобразований [27] мы сейчас еще одним способом продемонстрируем, что теория свободного калибровочного антисимметричного тензорного поля на классическом уровне эквивалентна теории однокомпонентного скалярного поля. Для этого перепишем действие (3), используя формализм производных первого порядка

$$A_{\text{gauge}} = \int d^4x \left[\frac{1}{6} A_m \epsilon^{mnpq} F_{npq} + \frac{1}{2} A_m A^m \right], \quad (21)$$

с помощью введения вспомогательного поля A_m . Уравнения движения для этого поля имеют вид

$$A^m = -\frac{1}{6} \epsilon^{mnpq} F_{npq} = -\frac{1}{2} \epsilon^{mnpq} \partial_n A_{pq}. \quad (22)$$

Если это решение подставить в (21), то мы опять придем к действию (3) для калибровочного антисимметричного тензорного поля A_{mn} . С точностью до интеграла от полной производной действие (21) можно переписать в виде

$$A_{\text{gauge}} = \int d^4x \left[\frac{1}{64} A_{mn} \epsilon^{mnpq} F_{pq} + \frac{1}{2} A_m A^m \right], \quad (23)$$

где $F_{pq} = \partial_p A_q - \partial_q A_p$ — антисимметричный тензор напряженности для вспомогательного поля A_m . Варьируя теперь (23) по калибровочному

антисимметричному тензорному полю A_{mn} , мы приходим к следующим уравнениям движения:

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m = 0, \quad (24)$$

что, по существу, является условием связи на вспомогательное поле A_m . Решение уравнения (24) есть градиент от произвольного скалярного поля: $A_m = \partial_m \phi$. Подставляя это решение в (23), мы приходим к обычному действию для скалярного поля

$$\mathcal{A}_{\text{scalar}} = \frac{1}{2} \int d^4x (\partial_m \phi) \partial^m \phi,$$

которое описывает частицу с одной степенью свободы и спиральностью ноль.

Действие для калибровочного антисимметричного тензорного поля A_{mn} , записанное в виде (23), допускает прямое обобщение на неабелев случай [28]:

$$\mathcal{A}_G = \int d^4x \left[\frac{1}{4} A_{mn}^a \epsilon^{mnpq} F_{pq}^a + \frac{1}{2} (A_m^a)^2 \right], \quad (25)$$

где $F_{pq}^a = \partial_p A_q^a - \partial_q A_p^a + f_{bc}^a A_p^b A_q^c$, а индексы a, b и c параметризуют присоединенное представление некоторой компактной группы Ли G со структурными константами f_{bc}^a . Это действие инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\delta A_{mn}^a = \nabla_m \xi_n^a - \nabla_n \xi_m^a, \quad \delta A_m^a = 0, \quad (26)$$

где $\nabla_m \xi_n^a = \partial_m \xi_n^a + f_{bc}^a A_m^b \xi_n^c$ — ковариантная производная.

Чтобы перейти к действию второго порядка по производным для калибровочного антисимметричного тензорного поля A_{mn}^a , нам нужно исключить вспомогательное поле A_m^a из (25) с помощью уравнений движения

$$A_m^a = -\frac{1}{2} K_{mn}^{-1 a} \epsilon^{npqr} \partial_p A_{qr}^b, \quad (27)$$

где $K_{mn}^{-1 a}{}_b$ — матрица, обратная $K^{mna}{}_b$:

$$K^{mna}{}_b = g^{mn} \delta_b^a + \frac{1}{2} \epsilon^{mnpq} f_{bc}^a A_{pq}^c,$$

$$K^{mla}{}_c K_{ln}^{-1 c}{}_b = \delta_n^m \delta_b^a. \quad (28)$$

Полученное таким образом действие является неполиномиальным. С другой стороны, вариация (25) по калибровочному антисимметричному тензорному полю A_{mn}^a приводит к условию на вспомогательное поле A_m^a :

$$F_{mn}^a = \partial_m A_n^a - \partial_n A_m^a + f_{bc}^a A_m^b A_n^c = 0. \quad (29)$$

Его решение, как хорошо известно, можно выразить через матрицы g , действующие в присоединенном представлении группы Ли G :

$$A_m = g^{-1} \partial_m g, \quad (30)$$

где матрицы A_m принадлежат алгебре Ли этой группы: $A_m = i A_m^a T_a / 2$. Здесь T_a — линейно независимые матрицы в присоединенном представлении алгебры Ли, нормированные условием $\text{Sp } T_a T_b = 2\delta_{ab}$. Подставляя решение (30) в (25), мы приходим к действию для δ -модели:

$$A_G = \int d^4x \text{Sp } (\partial_m g^{-1}) \partial^m g.$$

Таким образом, мы показали, что теория неабелева калибровочного антисимметричного тензорного поля на классическом уровне эквивалентна σ -модели.

2.4. Квантование антисимметричного тензорного поля. Прежде чем перейти к квантованию калибровочного антисимметричного тензорного поля, построим гамильтониан для действия (25) и выясним смысл введенных вспомогательных полей. Для этого исключим переменную A_0^a с помощью уравнений движения

$$A_0^a = \nabla_i B_i^a$$

и перепишем действие (25) в явно гамильтоновой форме:

$$A_G = \int d^4x \left(A_i^a \partial_0 B_i^a - \frac{1}{2} (A_i^a)^2 - \frac{1}{2} (\nabla_i B_i^a)^2 + A_{0i}^a T_i^a \right), \quad (31)$$

где $B_i^a = -1/2 \epsilon_{ijk} A_{jk}^a$, $T_i^a = 1/2 \epsilon_{ijk} F_{jk}^a$; $i, j, k = 1, 2, 3$. Отсюда видно, что A_i^a и B_i^a — канонические переменные, $H = 1/2 (A_i^a)^2 + 1/2 (\nabla_i B_i^a)^2$ — гамильтониан, A_{0i}^a — множители Лагранжа, и T_i^a — связи на канонические переменные.

Хотя классическая теория калибровочного антисимметричного тензорного поля эквивалентна теории скалярного поля, квантование калибровочных антисимметричных тензорных полей не является простой задачей. Дело в том, что действия (23) и (25) описывают системы с функционально зависимыми связями первого рода. Ввиду тождества Бианки

$$\nabla_i T_i^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \nabla_i F_{jk}^a \equiv 0,$$

из трех связей T_i^a только две независимы. С помощью этих связей мы можем исключить две из трех компонент канонически сопряженного импульса A_i^a , оставляя лишь одну независимую. Калибровочная инвариантность (26), в свою очередь, позволяет нам также избавиться от двух из трех компонент антисимметричного тензорного поля $A_{ij}^a = -\varepsilon_{ijk} B_k^a$.

Таким образом, при каноническом квантовании, как и следовало ожидать, мы остаемся лишь с одной парой независимых канонических переменных.

Каноническое квантование свободного (абелева) калибровочного антисимметричного тензорного поля было проведено в работе [29]. Попытки ковариантного квантования такого поля [11] привели к открытию нового явления: «духи для духов». Функциональная зависимость связей приводит к необходимости модифицировать процедуру квантования, развитую для полей Янга — Миллса [30]. Ввиду того, что действие для духов Фаддеева — Попова само оказывается калибровочно-инвариантным, необходимо еще раз к нему применить ковариантную процедуру квантования с введением дополнительных духовых полей. Калибровка $\nabla^m A_{mn}^a = 0$ требует введения антикоммутирующих векторных духовых полей $\bar{C}_m^a$ и C_m^a с БРСТ-преобразованиями $\delta C_n^a = (\nabla^m A_{mn}^a) \Lambda$, где Λ — антикоммутирующая грассманова переменная, не зависящая от пространственно-временной точки. Откуда сразу видно, что на духовые векторные поля накладываются связи $\nabla^m C_m^a = 0$. Подробный анализ показывает: чтобы решить эту проблему, необходимо ввести еще два коммутирующих скалярных духовых поля $\bar{\phi}^a$ и ϕ^a , и «третий дух» Нильсена — Каллош [31].

Основным требованием при квантовании калибровочных полей является унитарность S -матрицы [32]. На примерах теорий для поля Янга — Миллса и поля тяготения Фейнман показал, что для восстановления унитарности необходимо введение фиктивных частиц с аномальной статистикой — суть духовых полей. Введенные выше духовые поля удовлетворяют формальному условию унитарности, позволяя в петлях распространяться лишь одной физической степени свободы. Действительно, антисимметричное тензорное поле второго ранга имеет 6 степеней свободы вне массовой поверхности, векторные духовые поля аномальной статистики имеют по 4 степени свободы каждое, и 3 степени свободы скалярных духовых полей составляют одну физическую степень свободы: $6 - 2 \times 4 + 3 = 1$. Один из методов квантования систем с зависимыми связями был предложен в работе [33], в которой было проведено каноническое квантование неабелева калибровочного

антисимметричного тензорного поля в унитарной калибровке и осуществлен корректный переход к ковариантным калибровкам. Таким образом, в работе [33] была получена явно унитарная S -матрица.

Другим методом квантования является метод квантования Бекки — Рюэ — Стора — Тютина (БРСТ) [34]. Свободное калибровочное антисимметричное тензорное поле было проквантовано этим методом в работах [35]. Общий метод гамильтонова БРСТ-квантования систем с зависимыми связями первого рода был развит Баталиным и Фрадковым [36]. Однако доказательство унитарности S -матрицы в физическом подпространстве является сложной задачей, не решенной в общем случае. Например, метод лагранжева БРСТ-квантования неабелева калибровочного антисимметричного тензорного поля, предложенный в работе [37], приводит к неунитарной S -матрице в физическом подпространстве. В работах [38] метод гамильтонова БРСТ-квантования был применен к теории взаимодействующего (неабелева) калибровочного антисимметричного тензорного поля и показана эквивалентность эффективных лагранжианов, полученных этим методом и методом работы [33]. Причем, как мы уже отметили, последний приводит к унитарной S -матрице.

2.5. Антисимметричные тензорные поля в теориях гравитации. Наиболее известный пример, где мы встречаемся с антисимметричными тензорными полями, — это квантовая гравитация. Локализация группы Лоренца приводит к необходимости вводить духовые антисимметричные тензорные поля C^{ab} [39].

Впервые взаимодействие калибровочных антисимметричных тензорных частиц с гравитационным полем было рассмотрено в [40]. В этой работе изучались свойства перенормируемости такой модели и эквивалентность на квантовом уровне теории калибровочных антисимметричных тензорных полей, взаимодействующих с гравитационным полем, теории взаимодействующего с гравитацией скалярного поля. Она явилась продолжением ранних работ по изучению свойств перенормируемости эйнштейновской гравитации, взаимодействующей со скалярными полями [41], фотонами [42], полями Янга — Миллса [43], спинорами без кручения [44], спинорами с кручением [45] и квантовой электродинамикой [46]. Используя метод фонового поля, авторы на уровне однопетлевых вычислений получили для внешнего гравитационного поля, взаимодействующего с калибровочным антисимметричным тензорным полем, те же контрчлены, что и в случае скалярного поля. Существенным моментом в этих вычислениях был учет всех введенных выше духовых полей во внутренних петлях. Однако для квантового гравитационного поля эквивалентность была показана лишь с использованием уравнений движения.

Еще более интересным свойством моделей теории поля, содержащих поля в нестандартных представлениях группы Лоренца, является их различный вклад в аномалии [47]. Так, например, полностью антисимметричное тензорное поле третьего ранга [48], которое не имеет ни одной степени свободы на массовой поверхности, дает ненулевой вклад в аномалию тензора энергии-импульса [47—49]. Аномальный вклад в след эффективного тензора энергии-импульса в теориях гравитации в однопетлевом приближении пропорционален на массовой поверхности $\epsilon^{mnab} R_{abcd} \epsilon^{cdpq} R_{mnpq}$ [50]. Интеграл от этой величины, взятый по всему пространству, дает топологический инвариант — эйлерову характеристику χ :

$$\chi \equiv \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} (R_{mnab} R^{mnab} - 4R_{mn} R^{mn} + R^2).$$

Этот интеграл отличен от нуля в пространствах с нетривиальной топологией. Численный коэффициент A этой аномалии был вычислен для полей, преобразующихся по стандартным представлениям группы Лоренца, после фиксации калибровки и вычитания вклада духов [51]. Была получена простая формула для вычисления вклада в этот коэффициент частицы со спином, преобразующейся по представлению группы Лоренца $(m/2, n/2)$ [52]:

$$360A = (-1)^{2s} [8 - 150s^2 + 90s^2 + 30t^2 (1 - t^2 + 6s^2)], \quad (32)$$

где $s = (m + n)/2$ — спин поля, а $t = (m - n)/2$. Для скалярной частицы $A = 1/90$. Заметим, что любая частица со спином от нуля до двух дает ненулевой вклад в A .

Чтобы добиться сокращения этой аномалии, необходимо выбрать такой мультиплет полей, который бы давал суммарный нулевой вклад в A . Например, можно выбрать мультиплет полей расширенных теорий супергравитации с произвольным N . Однако стандартный полевой набор в этих теориях приводит к аномалии, за исключением случая $N = 3$. Действительно, вычислим этот коэффициент для максимально расширенной теории супергравитации с $N = 8$. Ее стандартный полевой состав есть 1 гравитон, 8 гравитино, 28 векторных частиц, 56 спиноров и 70 скаляров. Непосредственное использование (32) дает $A = [848 + 8 \times (-233) + 28 \times (-52) + 7 \times 56 + 4 \times 70]/360 = -5$. Решение этой проблемы возникло совсем неожиданно. Креммер, Джулиа и Шерк, используя элегантный прием размерной редукции из большего числа измерений в меньшее [53], смогли построить $N = 8$ супергравитацию в 4 измерениях [54].

В работе [53] было показано, что безмассовые состояния открытой струны Неве — Шварца — Рамона [55] дают супермультиплет Янга — Миллса в пространстве 10 измерений, а безмассовые состояния закрытой струны приводят к мультиплету супергравитации с $N = 1$ в $d = 10$. Но Наам

[56] показал, что в $d = 10$ может существовать и $N = 2$ супергравитация, а максимальным числом измерений, где возможно существование теории со спином 2, является $d = 11$. Креммер, Джулиа и Шерк нашли потерянные безмассовые состояния закрытой струны и построили супергравитацию с $N = 1$ в $d = 11$. Ее суперполевым состав очень прост: тетрада V_M^A , майорановский спинор со спином $3/2$ ψ_M и калибровочное полностью антисимметричное тензорное поле третьего ранга A_{MNP} , где индексы, обозначенные заглавными буквами, принимают значения от 0 до 10. Редукция в четыре измерения для тетрады и майорановского спинора не приводит к появлению нестандартных полей. Редукция же калибровочного полностью антисимметричного тензорного поля третьего ранга дает, кроме известных полей, 7 калибровочных антисимметричных тензорных полей второго ранга A_{mna} (здесь $a = 1, \dots, 7$ — индексы компактифицированного пространства), которые по числу физических компонент эквивалентны 7 скалярам ϕ_α , а также одно полностью антисимметричное тензорное поле третьего ранга A_{mnp} , которое является вспомогательным и не имеет физических степеней свободы.

Построенная таким образом максимально расширенная супергравитация с $N = 8$ содержит вместо 70 скаляров только 63 истинно скалярные частицы, остальные 7 физических степеней свободы заменяются физическими степенями свободы 7 калибровочных антисимметричных тензорных полей второго ранга. Этот набор с необходимостью включает также и новое полностью антисимметричное тензорное поле третьего ранга. В работе [47] были вычислены вклады в аномалию тензора энергии-импульса для калибровочных антисимметричных полей второго ранга $A = 1 + 1/90$ и для полностью антисимметричного тензорного поля третьего ранга $A = -2$. Теперь, если пересчитать вклад в аномалию тензора энергии-импульса от нового супермультиплета, мы получим тождественный ноль.

Это свойство нестандартных полей было использовано также, чтобы построить аномально-свободные суперполевые модели гравитации с $N \geq 3$. В работе [57] было показано, что такие теории супергравитации могут быть построены из трех базисных мультиплетов с $N = 3$, один из которых содержит калибровочное антисимметричное тензорное поле.

Наибольший резонанс получила работа Грина и Шварца [58], где авторы продемонстрировали сокращение аномалий в суперсимметричной теории Янга — Миллса в $d = 10$, взаимодействующей с $N = 1$, $d = 10$ супергравитацией для выделенных калибровочных групп $SO(32)$ и $E_8 \times E_8$. Ключевая роль в этих сокращениях принадлежит калибровочным антисимметричным тензорным полям. Эта работа показала возможность

построения непротиворечивой квантовой теории суперструн, базирующейся на этих выделенных калибровочных группах.

В последнее время большое внимание привлекают вопросы, связанные с использованием низкоэнергетического эффективного действия струны в космологии. Это действие для закрытой струны содержит три дальнедействующих поля: дилатон ϕ , калибровочное антисимметричное поле A_{mn} и гравитон, которые являются безмассовыми возбуждениями струны. Космологические решения с дилатоном и нетривиальным тензором напряженности для калибровочного антисимметричного тензорного поля были получены Цейтлиным [59]. В работе [60] было дано общее аналитическое решение для эволюции в ранней, но не настолько, эре струны, где только безмассовые бозонные поля доминируют в ее динамике. Авторы показали, что присутствие калибровочного антисимметричного тензорного поля очень сильно влияет на эволюцию дилатона в четырех измерениях и может также приводить к анизотропному расширению в моделях с большим числом измерений. Предпочтительным здесь оказывается расширение только трехмерного пространства.

Если говорить о низкоэнергетической феноменологии калибровочного антисимметричного тензорного поля, то необходимо указать механизм, с помощью которого это поле становится массивным. Действительно, такой механизм был найден в калибровочных суперсимметричных теориях гравитации с ненулевым топологическим массовым параметром h [61]. В таких теориях калибровочное антисимметричное тензорное поле A_{mn} из гравитационного супермультиплета всегда входит в комбинации $A_{mn} + hF_{mn}$ с тензором напряженности F_{mn} для калибровочного векторного поля A_m из векторного супермультиплета. В результате калибровочных преобразований (15) для антисимметричного тензорного поля с $\lambda_m = -h^{-1}A_m$ оно поглощает векторное поле и становится массивным. Такой механизм приобретения массы во многом аналогичен механизму Хиггса. Подобное явление было обнаружено и в других обобщенных моделях калибровочных супергравитаций с ненулевым массовым параметром m [62].

3. МАТЕРИАЛЬНЫЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Здесь мы будем рассматривать антисимметричное тензорное поле не как калибровочное поле с преобразованиями (15), а как поле материи. Мы также откажемся от условия связи (10). Это позволит нам ввести самодействие для абелева антисимметричного тензорного поля и взаимодействие с

антисимметричным тензорным током J_{mn} , свободным от условия $\partial^m J_{mn} = 0$. Отказавшись от калибровочной симметрии, мы сможем записать конформно-инвариантное действие (4) для антисимметричного тензорного поля. Функции Грина для таких полей однозначно определены в рамках конформно-инвариантной теории поля [13]. Впервые такие поля использовались как вспомогательные в $N = 2$ конформной супергравитации [14,15] для замыкания суперконформных преобразований для мультиплета полей вне массовой поверхности. Материальные антисимметричные тензорные поля могут быть введены в стандартную модель электрослабых взаимодействий как физические поля аналогично хиггсовскому дублету. Последние эксперименты по полуплептонным трехчастичным распадам мезонов [19,20] подтверждают эту возможность.

3.1. Безмассовые частицы произвольного спина. Простейшими спинорными представлениями группы Лоренца являются непунктирный Ψ_α и сопряженный ему пунктирный $\Psi_{\dot{\alpha}}$ фундаментальные вейлевские спиноры. Матрицы Паули $(\hat{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\beta}$ связывают спинорные и лоренцевы индексы. Простейшее действие для свободной безмассовой спинорной частицы со спином можно найти в виде инвариантной билинейной комбинации фундаментальных спиноров и 4-импульса p_m :

$$A_{1/2} = \int d^4p \Psi_{\dot{\alpha}} \hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}, \quad (33)$$

где $\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta} = p^m (\hat{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\beta}$. Для стандартного представления матриц Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

уравнения движения принимают вид [63]:

$$\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta} \Psi_{\beta} = \begin{pmatrix} p_+ & q_- \\ q_+ & p_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (34)$$

Здесь мы ввели продольные $p_{\pm} = p_0 \pm p_3$ и поперечные $q_{\pm} = p_1 \pm ip_2$ компоненты импульса по отношению к третьей оси, проекция спина на которую имеет определенные значения $\pm 1/2$. Оператор $\hat{p}$ имеет два собственных значения $\lambda_+ = p_0 - |\mathbf{p}|$ и $\lambda_- = p_0 + |\mathbf{p}|$, отвечающих решениям с положительной $p_0 = |\mathbf{p}|$ и отрицательной $p_0 = -|\mathbf{p}|$ частотами соответственно.

Эти две ветви решений описывают безмассовую частицу с левовинтовой спиральностью и античастицу с правовинтовой спиральностью. Такие частицы существуют в природе и называются нейтрино. Уравнение движения для сопряженного спинора имеет вид

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}} \equiv (C^{-1})^{\alpha\dot{\beta}}p_{\beta\dot{\alpha}}C^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}} = 0.$$

Матрицы зарядового сопряжения $C^{\alpha\dot{\beta}}$ и $C^{\dot{\alpha}\beta}$ служат для поднятия спинорных индексов у оператора $p_{\alpha\dot{\beta}} = p_m(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}}$.

Чтобы обобщить полученные выше уравнения на случай высших спинов, рассмотрим произвольные представления группы Лоренца $(m/2, n/2)$ и $(n/2, m/2)$. Спинор $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n}$ и ему сопряженный $\psi_{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m \beta_1 \dots \beta_n}$, симметричные по обоим типам индексов, описывают частицу и античастицу со спином $j = (m+n)/2$. По аналогии с предыдущим мы можем построить простейшее инвариантное действие, если каждому непунктирному (пунктирному) индексу первого спинора с помощью оператора $\hat{p}^{\dot{\alpha}\beta}(p^{\alpha\dot{\beta}})$ поставим в соответствие пунктирный (непунктирный) индекс сопряженного ему спинора:

$$A_j^{(m/2, n/2)} = \int d^4p \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n} \hat{p}^{\dot{\alpha}_1 \alpha_1} \dots \hat{p}^{\dot{\alpha}_m \alpha_m} p^{\beta_1 \dot{\beta}_1} \dots p^{\beta_n \dot{\beta}_n} \psi_{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m \beta_1 \dots \beta_n}. \quad (35)$$

Частица со спином j имеет $2j+1 = m+n+1$ компонент. Однако спинор $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n}$ имеет $(m+1) \times (n+1)$ независимых компонент. Только в случае, когда он содержит индексы лишь одного типа (m или n равно нулю), число его компонент совпадает с числом степеней свободы частицы со спином j . Поэтому в этом случае дополнительное условие связи, типа условия Лоренца, на компоненты спинора не необходимо. Используя именно это наиболее экономное описание частиц со спином j , Вайнберг, исходя лишь из самых общих принципов квантовой теории поля — лоренц-инвариантности и причинности, нашел функции Грина для $2j+1$ компонентных функций [64]. Если от наших спинорных обозначений перейти к $2j+1$ компонентным функциям, кинетический член в (35) в точности воспроизведет операторную структуру функций Грина, полученных Вайнбергом.

В том случае, когда спинор содержит индексы обоих типов, необходимо наложить дополнительное условие поперечности

$$p^{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n} = 0, \quad (36)$$

которое приведет к нужному редуцированию степеней свободы: $(m+1) \times (n+1) - m \times n = m+n+1$. Варьируя (35), получим уравнения движения для спинора $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_n}$:

$$\hat{p}^{\dot{\alpha}_1 \alpha_1} \dots \hat{p}^{\dot{\alpha}_m \alpha_m} p^{\beta_1 \dot{\beta}_1} \dots p^{\beta_n \dot{\beta}_n} \psi_{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_m \beta_1 \dots \beta_n} = 0. \quad (37)$$

Для частиц со спином больше единицы уравнения движения содержат производные выше второго порядка, и мы сталкиваемся с проблемой унитарности, которая в настоящее время еще не решена. Поэтому мы ограничимся рассмотрением единичного спина и изучим уравнения движения, которые возникают в этом случае.

3.2. Безмассовые частицы единичного спина. Рассмотрим сначала обычное представление $(1/2, 1/2)$ для частицы со спином единица. Перепишем действие

$$\mathcal{A}_1^{(1/2, 1/2)} = \int d^4 p \, \psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \hat{p}^{\dot{\alpha}\alpha} p^{\beta\dot{\beta}} \psi_{\alpha\dot{\beta}}, \quad (38)$$

следующее из (35), в более привычном для нас виде, вводя вектор-потенциал A_m : $\psi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 1/2(\sigma^m)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} A_m$. Суммирование по спинорным индексам приводит к следу от четырех σ -матриц: $\text{Sp } \hat{p} \sigma_n \hat{p} \sigma_m = 4p_m p_n - 2g_{mn} p^2$. Поэтому (38) принимает вид

$$\mathcal{A}_1^{(1/2, 1/2)} = -\frac{1}{2} \int d^4 p A_m^*(p) p^2 \bar{g}^{mn}(p) A_n(p), \quad (39)$$

где $\bar{g}_{mn}(p) = g_{mn} - 2p_m p_n / p^2$. Заметим, что оператор $\bar{g}_{mn}(p) = P_{mn}^1 - P_{mn}^0$ представим в виде разности двух проекционных операторов спина единица $P_{mn}^1 = g_{mn} - p_m p_n / p^2$ и спина ноль $P_{mn}^0 = p_m p_n / p^2$. Таким образом, вклад в действие (39) дают все компоненты вектор-потенциала A_m .

С помощью преобразования Фурье

$$A_m(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 x A_m(x) e^{-ipx}$$

запишем действие (39) в x -пространстве в виде

$$\mathcal{A}_1^{(1/2, 1/2)} = \int d^4 x \left[-\frac{1}{4} F_{mn} F^{mn} + \frac{1}{2} (\partial_m A^m)^2 \right]. \quad (40)$$

Здесь F_{mn} — калибровочно-инвариантный тензор напряженности поля A_m . Мы видим, что действие (40) не является калибровочно-инвариантным и соответствует действию для электромагнитного поля в определенной калибровке. Если наложить условие Лоренца $\partial_m A^m = 0$, то мы придем к обычному описанию безмассовой поперечной частицы — фотона.

Давайте теперь на время забудем об этом условии и построим для действия (40) гамильтониан без использования каких бы то ни было связей. Нам будут необходимы решения уравнений движения, следующие из (39) или (40). Для этого удобно работать в p -пространстве, поэтому будем использовать действие (39). Введем систему отсчета, связанную с вектором $\mathbf{p}$, и пред-

ставим $A_m(p)$ в виде суммы поперечных, продольной и временной составляющих:

$$A_m(p) = e_m^1 a_1(k) + e_m^2 a_2(k) + e_m^3 a_3(k) + e_m^0 a_0(k). \quad (41)$$

Здесь e^1 и e^2 — единичные пространственные векторы поляризации, ортогональные друг другу и орту e^3 вектора импульса:

$$(e^i \cdot e^j) = \delta_{ij}, \quad [e^i \times e^j] = \epsilon_{ijk} e^k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

$$e^3 = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad e^1(-\mathbf{p}) = -e^2(\mathbf{p}), \quad e_0^i = 0, \quad (42)$$

а e^0 — единичный временной вектор: $e_m^0 = \delta_{m0}$. Тогда действие (39) примет вид:

$$A_1^{(1/2, 1/2)} = \frac{1}{2} \int d^4 p \{ a_1^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_1(p) + a_2^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_2(p) +$$

$$+ a_0^*(p)(p_0^2 + \mathbf{p}^2) a_0(p) + a_3^*(p)(p_0^2 + \mathbf{p}^2) a_3(p) -$$

$$- 2p_0 |\mathbf{p}| [a_0^*(p) a_3(p) + a_3^*(p) a_0(p)] \}.$$

Это действие можно диагонализировать, если ввести следующие линейные комбинации временной и продольной компонент: $a_{\pm} = [a_0(p) \pm a_3(p)]/\sqrt{2}$. В этих обозначениях имеем:

$$A_1^{(1/2, 1/2)} = \frac{1}{2} \int d^4 p \{ a_1^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_1(p) + a_2^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_2(p) +$$

$$+ a_+^*(p)(p_0 - |\mathbf{p}|)^2 a_+(p) + a_-^*(p)(p_0 + |\mathbf{p}|)^2 a_-(p) \}. \quad (43)$$

Сейчас мы легко можем записать уравнения движения, варьируя действие (43):

$$(p_0 - |\mathbf{p}|)(p_0 + |\mathbf{p}|) a_1(p) = 0, \quad (p_0 + |\mathbf{p}|)(p_0 - |\mathbf{p}|) a_2(p) = 0,$$

$$(p_0 - |\mathbf{p}|)^2 a_+(p) = 0, \quad (p_0 + |\mathbf{p}|)^2 a_-(p) = 0. \quad (44)$$

Решения уравнений (44) для поперечных компонент, с учетом действительности поля $A_m(x)$,

$$a_1(p_0, \mathbf{p}) = \delta(p_0 + |\mathbf{p}|) a_1(\mathbf{p}) - \delta(p_0 - |\mathbf{p}|) a_2^*(-\mathbf{p}),$$

$$a_2(p_0, \mathbf{p}) = \delta(p_0 + |\mathbf{p}|) a_2(\mathbf{p}) - \delta(p_0 - |\mathbf{p}|) a_1^*(-\mathbf{p})$$

содержат как положительно-частотные $a_{1,2}^*(-\mathbf{p})$, так и отрицательно-частотные $a_{1,2}(\mathbf{p})$ части. А решения для введенных линейных комбинаций временной и продольной компонент найдем в виде

$$a_+(p_0, \mathbf{p}) = \delta(p_0 - |\mathbf{p}|)a_s(\mathbf{p}) + \delta'(p_0 - |\mathbf{p}|)a'_s(\mathbf{p}),$$

$$a_-(p_0, \mathbf{p}) = \delta(p_0 + |\mathbf{p}|)a_s^*(-\mathbf{p}) - \delta'(p_0 + |\mathbf{p}|)a_s'^*(-\mathbf{p}).$$

Эти решения содержат, во-первых, лишь одночастотные части для каждой из компонент $a_{\pm}$ и, во-вторых, производные от δ -функций, которые приводят к линейно растущим по времени решениям. Если мы ограничим свое рассмотрение классом функций, убывающих на бесконечности, то мы должны потребовать отсутствия таких решений, т.е.

$$a'_s(\mathbf{p}) = 0. \quad (45)$$

Это условие в точности совпадает с условием Лоренца. В этом случае мы получаем решения для $A_{\pm}(x)$ в виде одночастотных плоских волн.

Теперь мы можем записать выражение для гамильтониана и подставить в него полученные решения. Непосредственные вычисления приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_0 \mathbf{A})^2 + (\partial_i \mathbf{A})^2 + (\partial_0 A_0)^2 - (\partial_i A_0)^2 + 2(\partial_i A_i)^2] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^3p p^2 [a_1^*(\mathbf{p})a_1(\mathbf{p}) + a_2^*(\mathbf{p})a_2(\mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (46)$$

Отсюда видно, что, во-первых, гамильтониан положительно определен, и, во-вторых, только поперечные компоненты дают вклад в энергию. Продольные и временные компоненты являются как бы нефизическими в этой калибровке. Если вычислить другие динамические инварианты, такие как полный импульс и спин системы, то мы опять обнаружим сокращение нефизических степеней свободы. Конечно, мы не открыли здесь ничего нового, кроме как еще раз подтвердили поперечность фотона. Однако этот пример нам поможет при анализе физических степеней свободы для материального антисимметричного тензорного поля, к чему мы сейчас и переходим.

Действие для полей, преобразующихся по представлениям группы Лоренца (1,0) и (0,1), следующее из (35), имеет вид

$$A_1^{(1,0)} = \int d^4p \Psi_{\alpha\beta} \hat{p}^{\alpha\alpha} \hat{p}^{\beta\beta} \Psi_{\alpha\beta}. \quad (47)$$

Как и в случае электромагнитного поля, перейдем от спинорных к лоренцевым индексам. Симметричный спинор $\Psi_{\alpha\beta}$ в (47) может быть выражен через антисимметричное тензорное поле второго ранга T_{mn} :

$$\Psi_{\alpha\beta} = \frac{i}{8} \epsilon^{abmn} (\sigma_a \hat{\sigma}_b C)_{\alpha\beta} T_{mn} \quad (48)$$

(см. уравнения (2)). Выполняя суммирование по спинорным индексам и вычисляя след от шести σ -матриц, мы приходим к действию для материального антисимметричного тензорного поля:

$$A_1^{(1,0)} = \frac{1}{4} \int d^4 p T_{ab}^*(p) p^2 \Pi^{abmn}(p) T_{mn}(p), \quad (49)$$

где

$$\Pi_{abmn}(p) = \frac{1}{2} [\bar{g}^{am}(p) \bar{g}^{bn}(p) - \bar{g}^{an}(p) \bar{g}^{bm}(p)]. \quad (50)$$

Как и в случае электромагнитного поля, мы можем представить оператор кинетического члена $\Pi(p) = P^+(p) - P^-(p)$ в виде разности проекционных операторов единичного спина (11). Из этого представления видно, что вклад в действие для материального антисимметричного тензорного поля дают все шесть его компонент — вектор и псевдовектор.

Действие для материального антисимметричного тензорного поля в x -пространстве (4) оказывается конформно-инвариантным. Поэтому так же, как и в случае калибровочной симметрии, здесь важен факт изначальной безмассовости этого поля. Покажем, что физическими компонентами материального антисимметричного тензорного поля являются продольные компоненты вектора $A_i = T_{0i}$ и псевдовектора $B_i = 1/2 \epsilon_{ijk} T_{jk}$ [65]. Для этого вычислим полный гамильтониан системы с учетом уравнений движения.

Разложим вектор $A(p) = e^i a_i(p)$ и псевдовектор $B(p) = e^i b_i(p)$ по полной системе ортонормированных векторов e^i (42). Тогда действие (49) можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_1^{(1,0)} = & \int d^4 p \left\{ \sum_{\lambda=1}^2 [a_\lambda^*(p)(p_0^2 + \mathbf{p}^2) a_\lambda(p) + b_\lambda^*(p)(p_0^2 + \mathbf{p}^2) b_\lambda(p)] + \right. \\ & + 2p_0 |\mathbf{p}| [a_1^*(p) b_2(p) + b_2^*(p) a_1(p) - a_2^*(p) b_1(p) - b_1^*(p) a_2(p)] + \\ & \left. + a_3^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) a_3(p) + b_3^*(p)(p_0^2 - \mathbf{p}^2) b_3(p) \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Линейная подстановка

$$\begin{aligned} a_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(p) + d_2(p)], & a_2(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_2(p) + d_1(p)], & a_3(p) &= c_3(p), \\ b_1(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_1(p) - c_2(p)], & b_2(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [d_2(p) - c_1(p)], & b_3(p) &= d_3(p) \end{aligned}$$

диагонализует действие (51):

$$\begin{aligned} A_1^{(1,0)} = & \int d^4 p [c_1^*(p)(p_0 - |\mathbf{p}|)^2 c_1(p) + c_2^*(p)(p_0 + |\mathbf{p}|)^2 c_2(p) + \\ & + c_3^*(p)(p_0 - |\mathbf{p}|)(p_0 + |\mathbf{p}|) c_3(p) + (c \rightarrow d)]. \end{aligned} \quad (52)$$

Принцип минимальности действия приводит к следующим уравнениям движения для c -компонент:

$$\begin{aligned}(p_0 - |\mathbf{p}|)^2 c_1(p_0, \mathbf{p}) &= 0, & (p_0 + |\mathbf{p}|)^2 c_2(p_0, \mathbf{p}) &= 0, \\ (p_0 - |\mathbf{p}|)(p_0 + |\mathbf{p}|) c_3(p_0, \mathbf{p}) &= 0.\end{aligned}\quad (53)$$

Точно такие же уравнения движения справедливы и для d -компонент. Решения уравнений (53), с учетом действительности поля T_{mn} , можно найти в виде

$$\begin{aligned}c_1(p_0, \mathbf{p}) &= \delta(p_0 - |\mathbf{p}|) c_T(\mathbf{p}) + \delta'(p_0 - |\mathbf{p}|) c'_T(\mathbf{p}), \\ c_2(p_0, \mathbf{p}) &= \delta(p_0 + |\mathbf{p}|) c_T^*(-\mathbf{p}) + \delta'(p_0 + |\mathbf{p}|) c_T^*(-\mathbf{p}), \\ c_3(p_0, \mathbf{p}) &= \delta(p_0 + |\mathbf{p}|) c_L(\mathbf{p}) - \delta(p_0 - |\mathbf{p}|) c_L^*(-\mathbf{p}).\end{aligned}\quad (54)$$

Заметим здесь, что только продольные компоненты содержат положительно-частотную и отрицательно-частотную части, поперечные компоненты c_1 и d_1 обладают лишь решениями с положительной частотой $p_0 = |\mathbf{p}|$, а c_2 и d_2 — с отрицательной частотой $p_0 = -|\mathbf{p}|$. Кроме того, решения для поперечных компонент содержат производные от δ -функций, что приводит к линейно растущим по времени решениям. Поэтому, если мы хотим ограничиться решениями только в виде плоских волн, необходимо потребовать, чтобы компоненты c'_T и d'_T равнялись нулю:

$$c'_T(\mathbf{p}) = 0; \quad d'_T(\mathbf{p}) = 0. \quad (55)$$

Подставляя решения (54) в гамильтониан

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int d^3x [\partial_0 \mathbf{A}]^2 - (\partial_i \mathbf{A})^2 + 2(\partial_i A_i)^2 + (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^3p \mathbf{p}^2 [a_3^*(\mathbf{p}) a_3(\mathbf{p}) + b_3^*(\mathbf{p}) b_3(\mathbf{p})],\end{aligned}\quad (56)$$

мы найдем, что он положительно определен и содержит вклад только продольных компонент векторного и псевдовекторного полей. Аналогично можно показать, что вклад поперечных компонент также сокращается при вычислении других динамических инвариантов, и полный спин равен нулю. Таким образом, материальное антисимметричное тензорное поле описывает скалярную и псевдоскалярную степени свободы.

Материальное антисимметричное тензорное поле описывает на одну степень свободы больше, чем калибровочное антисимметричное тензорное поле. Это следует из того, что условие (10) исключает две поперечные и одну продольную компоненты векторного поля A_i , в то время как условия (55) исключают лишь две поперечные компоненты. Чтобы записать (55) в

ковариантном виде, мы должны ввести одно вспомогательное скалярное поле φ и обобщить условие (10):

$$\partial^n T_{mn} = \partial_n \varphi. \quad (57)$$

Ввиду произвольности поля φ , условие (57) приводит к двум независимым условиям (55). Поэтому при ковариантном квантовании материального антисимметричного тензорного поля необходимо введение вспомогательного скалярного поля и связи (57). Обратим внимание также на то, что условия (55) убирают лишь две из четырех поперечных компонент вектора и псевдовектора; оставшиеся две компоненты удачно сокращаются при вычислении динамических инвариантов. Это находится в полной аналогии со случаем электромагнитного поля, когда одно условие Лоренца, или условие (45), приводит к исключению из динамических инвариантов вклада также еще одной скалярной степени свободы.

Материальное антисимметричное тензорное поле, как и электромагнитное поле, обладает нефизическими степенями свободы, которые на массовой поверхности никак себя не проявляют. Однако из опыта работы с калибровочными полями мы знаем, что нефизические степени свободы могут давать вклад в замкнутые петли, приводя к нарушению унитарности [32]. Даже в случае абелева электромагнитного поля, взаимодействующего с гравитацией, необходимо введение духовых полей [66], которые бы компенсировали этот вклад. Поэтому и в нашем случае, видимо, необходимо введение соответствующих духовых полей, т.к. вклад в действие дают все компоненты антисимметричного тензорного поля. Аналогично калибровочному антисимметричному тензорному полю здесь также возникает пирамида компенсирующих духовых полей. Наивный подсчет степеней свободы для необходимого выполнения условия унитарности ведет к следующему набору духовых полей: паре антикоммутирующих векторных полей $C_m, \bar{C}_m$ и двум парам коммутирующих скалярных полей $D, \bar{D}$ и $E, \bar{E}$ [65]. Однако последовательное квантование взаимодействующего материального антисимметричного тензорного поля пока отсутствует. Основная трудность заключается в отсутствии (или незнании) принципа симметрии, типа калибровочной инвариантности, который бы позволил нам провести последовательное квантование [67]. Тем не менее это не мешает нам вычислять процессы в низших порядках теории возмущений: на древесном уровне и с однопетлевыми квантовыми поправками с внешними и незамкнутыми линиями, соответствующими материальным антисимметричным тензорным полям.

3.3. Взаимодействия антисимметричного тензорного поля. Между компонентами антисимметричного тензорного поля второго ранга T_{mn} и симметричными спинорами второго ранга $\Psi_{\alpha\beta}$, $\bar{\Psi}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ существует взаимно

однозначное соответствие (2), (48). Запишем простейшее лоренц-инвариантное эрмитово затравочное взаимодействие этого поля с фундаментальными вейлевскими спинорами, используя спинорные обозначения:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = t [\psi_{\alpha} \psi^{\alpha\beta} \psi_{\beta} + \psi_{\dot{\alpha}} \psi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}]. \quad (58)$$

В силу требования эрмитовости, взаимодействие (58) содержит вейлевские спиноры ψ_{α} и сопряженные им $\psi_{\dot{\alpha}}$. Определим биспинор Дирака Ψ и γ -матрицы в спиральном представлении как

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ iC^{\dot{\alpha}\beta} \psi_{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}, \quad \gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \hat{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{mn} = \frac{i}{2} [\gamma^m, \gamma^n]. \quad (59)$$

Используя эти определения и связь (2), (48), перепишем (58) в более привычном виде:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{t}{4\sqrt{2}} (\bar{\Psi}_R \sigma^{mn} T_{mn}^{-} \Psi_L + \bar{\Psi}_L \sigma^{mn} T_{mn}^{+} \Psi_R) = \frac{t}{4} \bar{\Psi} \sigma^{mn} \Psi T_{mn}. \quad (60)$$

При получении последнего равенства, мы воспользовались тождеством

$$\frac{i}{2} \epsilon^{mnab} \sigma_{ab} = \gamma^5 \sigma^{mn}. \quad (61)$$

Теперь мы можем легко подсчитать однопетлевую квантовую поправку (рис.1,а) к действию материального антисимметричного тензорного поля (4), (49), считая дираковские частицы безмассовыми. Расходящаяся часть поляризационного оператора

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{mnab}(p) &= i \left(\frac{t}{4} \right)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Sp} [\sigma_{mn} (\not{p} - \not{l})^{-1} \sigma_{ab} \not{l}^{-1}] = \\ &= \frac{1/\epsilon}{12\epsilon} \left(\frac{t}{4\pi} \right)^2 \Pi_{mnab}(p) \end{aligned} \quad (62)$$

определяет перенормировку классического действия (4), (49) и в точности воспроизводит структуру его кинетического члена (50), что является признаком перенормируемости. Свойство квантовых поправок воспроизводить структуру классического действия было положено в основу динамической теории составных частиц [68]. Таким образом, это является еще одним способом получения классического свободного действия для антисимметричного тензорного поля.

Затравочное взаимодействие (58), (60) на квантовом уровне порождает также самодействие материального антисимметричного тензорного поля (рис.2,б):

$$\Delta \mathcal{L} = - \frac{1}{48\epsilon} \frac{t^4}{16\pi^2} \left[\frac{1}{4} (T_{mn} T^{mn})^2 - T_{mn} T^{na} T_{ab} T^{bm} \right]. \quad (63)$$

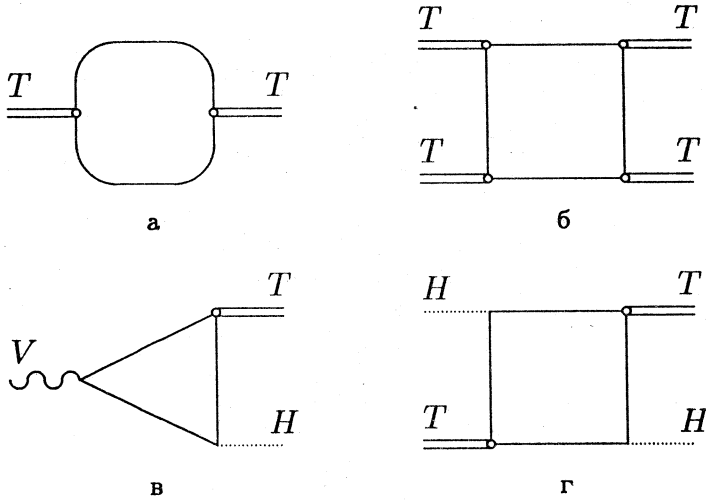


Рис.1

Это самодействие проявляет исключительно важное свойство симметрии к дуальным преобразованиям:

$$\begin{aligned} T_{mn} &\rightarrow T_{mn} \cos(h\lambda) + i\tilde{T}_{mn} \sin(h\lambda); \\ \tilde{T}_{mn} &\rightarrow iT_{mn} \sin(h\lambda) + \tilde{T}_{mn} \cos(h\lambda). \end{aligned} \quad (64)$$

И наоборот, требование симметрии по отношению к преобразованиям (64) однозначно приводит к самодействию (63). Свободное действие (4) также оказывается инвариантным по отношению к глобальным преобразованиям (64), когда параметр λ не зависит от точки пространства-времени. Это легко можно увидеть, переписав действие (4) через самодуальный T_{mn}^+ и самоантидуальный T_{mn}^- тензоры:

$$\mathcal{A}_{\text{conformal}} = - \int d^4x (\partial^m T_{mk}^+) \partial^n T_{nk}^-, \quad (65)$$

для которых преобразования (64) приобретают мультипликативный вид

$$T_{mn}^\pm \rightarrow \exp(\pm i h \lambda) T_{mn}^\pm. \quad (66)$$

Локализация преобразований (66) приводит к необходимости введения калибровочного псевдоскалярного поля A_m и замены обычных производных $\partial^m T_{mn}^\pm$ ковариантными производными $D^m T_{mn}^\pm = (\partial^m + i h A^m) T_{mn}^\pm$, которые

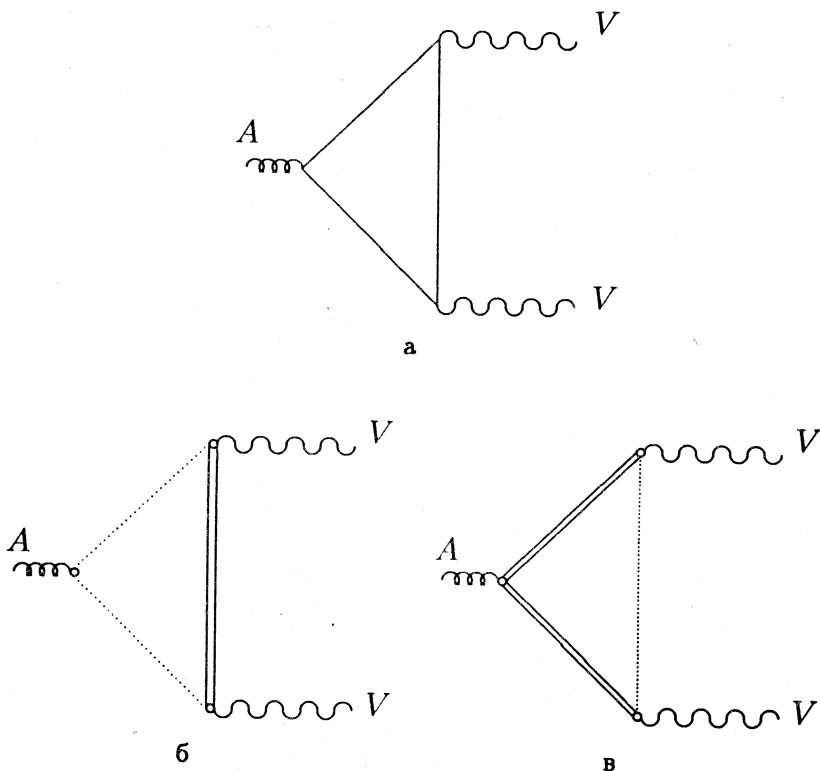


Рис.2

обеспечивают инвариантность (65) по отношению к преобразованиям (66) с произвольными функциями $\lambda(x)$. Калибровочное поле A_m преобразуется как обычно: $A_m \rightarrow A_m + \partial_m \lambda$. Инвариантность затравочного взаимодействия (60) по отношению к преобразованиям (64) требует следующего закона преобразования для дираковского спинора $\Psi \rightarrow \exp(-i/2h\lambda)\Psi$ и соответствующих ковариантных производных в кинетическом члене: $D_m \Psi = (\partial_m + i/2hA_m)\Psi$. Обратим внимание, что аксиальный заряд дираковского спинора вдвое меньше, чем антисимметричного тензорного поля. Подробный анализ перенормируемости введенных выше взаимодействий на однопетлевом уровне был выполнен в работе [18].

Для физических приложений к перечисленным выше полям необходимо добавить, по крайней мере, одно векторное поле V_m (фотон) и скаляр-

ное хиггсовское поле $H^\pm$. Векторное поле, как обычно, вводится через ковариантную производную $(\partial_m - ieV_m)\Psi$. Одновременное введение векторных и псевдовекторных полей, как хорошо известно, приводит к аксиальным аномалиям Адлера — Белла — Джекива [69], которые могут разрушить перенормируемость модели. Аксиальные аномалии были открыты при вычислении треугольной фермионной петли с двумя векторными и с одной аксиальной вершинами (рис.2,а). Наличие таких квантовых поправок не позволяет одновременно обеспечить сохранение векторного $\partial_m V^m = 0$ и аксиального токов:

$$\partial_m A^m = \frac{h}{2} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \epsilon^{mnab} F_{mn} F_{ab} \neq 0.$$

Здесь $F_{mn} = \partial_m V_n - \partial_n V_m$ — напряженность векторного поля.

Простейший путь борьбы с такими аномалиями состоит во введении дополнительных фермионов с противоположными аксиальными зарядами, чтобы скомпенсировать вклады от таких диаграмм. На этом бы история и закончилась, если бы не было антисимметричных тензорных полей. За счет их нового взаимодействия (рис.1,б)

$$\mathcal{L}_3 = g[H^+ T_{mn}^- + H^- T_{mn}^+] F^{mn} \quad (67)$$

со скалярными полями и напряженностью векторного поля они приводят к новому типу аномальных диаграмм (рис.2,б,в). Опуская детали вычислений, приведем конечный ненулевой результат для дивергенции псевдовекторного поля:

$$\partial_m A^m = h \frac{e^2}{(4\pi)^2} \epsilon^{mnab} F_{mn} F_{ab} - \frac{h}{2} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \epsilon^{mnab} F_{mn} F_{ab}. \quad (68)$$

Первый член в правой части (68) соответствует вкладам от диаграмм на рис.2,б, в которых скалярное поле непосредственно взаимодействует с псевдоскалярным полем, а второй член — от диаграмм на рис.2,в, где антисимметричное тензорное поле образует аксиальную вершину.

Здесь необходимо подчеркнуть следующее: если формальной причиной аномалии в случае фермионной петли (рис.2,а) явилась ее линейная расходимость, то в нашем случае диаграммы на рис.2,б и 2,в сходятся. Этот факт подтверждает мнение, что возникновение аномалий и нарушение классических законов сохранения не связано с регуляризационной процедурой, а классические и квантовые свойства симметрии, вообще говоря, различны [70].

Обратим внимание на то, что антисимметричные тензорные поля также являются источником аномалий, и, в принципе, при некотором специальном подборе группы внутренней симметрии и мультиплетов частиц возмож-

но взаимное сокращение вкладов от диаграмм на рис.2. Однако мы будем действовать значительно проще: потребуем удвоения числа хиггсовских частиц и антисимметричных тензорных полей, чтобы скомпенсировать аномальные вклады в диаграммах на рис.2,б и 2,в. Этим принципом мы воспользуемся при введении в стандартную модель электрослабых взаимодействий материальных антисимметричных тензорных полей.

И, наконец, обсудим один из самых важных вопросов феноменологии: как сделать частицы массивными. Заметим, что непосредственный способ придать массу материальному антисимметричному тензорному полю, записав массовый член в виде $M^2 T_{mn} T^{mn} = M^2 (B^2 - A^1)$, не проходит. Ввиду того, что положительная определенность гамильтониана (56) нарушается знаконеопределенностью этого массового члена, появляются тахионные решения, и первоначальная непротиворечивая формулировка теории для безмассового материального антисимметричного тензорного поля полностью теряет свои хорошие свойства. Поэтому, чтобы сохранить свойства симметрии, мы должны сделать материальное антисимметричное тензорное поле массивным динамическим образом, используя механизм спонтанного нарушения симметрии. В отличие от обычного механизма Хиггса, здесь нам, кроме скалярного поля $H^\pm$ с ненулевым вакуумным средним $\langle H^\pm \rangle_0 = M/(2g)$, понадобится также безмассовое векторное поле V_m . Взаимодействие (67) приводит к поляризации оператору $\mathcal{P}(p^2) = -(\langle H \rangle_0^2/p^2 + O(g^0))$ (рис.3,а), с необходимым полюсом $1/p^2$ [71], который эффективно обеспечит массовый член в знаменателе пропагатора материального антисимметричного тензорного поля: $p^2[1 + 4g^2\mathcal{P}(p^2)] = (p^2 - M^2) + O(g^2)$.

Однако учет лишь диаграммы на рис.3,а приведет к нарушению структуры оператора $\Pi(p^2)$ в кинетическом члене для материального антисимметричного тензорного поля. Чтобы сохранить конформно-инвариантный вид операторной структуры $\Pi(p^2)$, необходимо добавить возникающее из радиационных поправок (рис.1,з) взаимодействие

$$\mathcal{L}_4 = -\lambda[(H^+ T_{mn}^-)^2 + (H^- T_{mn}^+)^2] \quad (69)$$

с фиксированной константой $\lambda = g^2/2$. Тогда эффективный пропагатор для материального антисимметричного тензорного поля приобретает вид

$$\langle T(T_{mn} T_{ab}) \rangle_0 = \frac{2i\Pi_{mnab}(p)}{p^2 - M^2}. \quad (70)$$

Конечно, такое соотношение между константами взаимодействия (67) и (69) невозможно обеспечить без привлечения некоторого принципа сим-

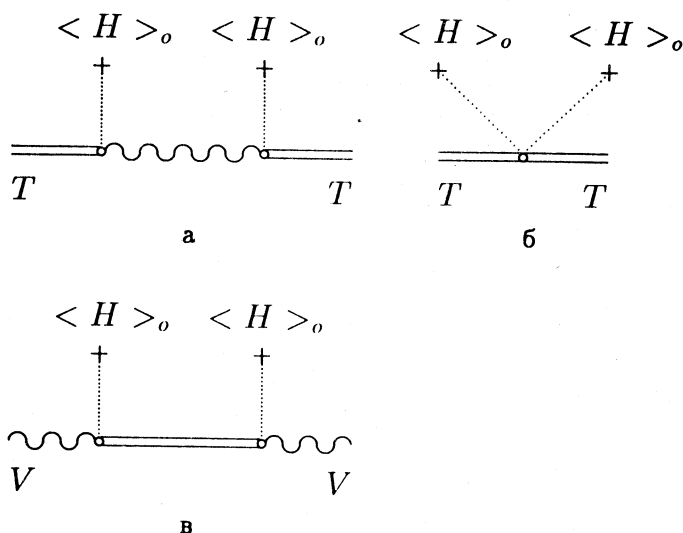


Рис.3

метрии. Действительно, точно такая же связь между константами возникает в расширенных теориях конформной супергравитации, взаимодействующей с суперконформной расширенной теорией Янга — Миллса [72]. Надо отметить, что калибровочное векторное поле в этом случае также становится массивным [15] за счет обмена антисимметричными тензорными частицами (рис.3,б). Теперь мы готовы перейти к расширению стандартной модели электрослабых взаимодействий материальными антисимметричными тензорными полями.

3.4. Расширенная модель электрослабых взаимодействий. Введение материальных антисимметричных тензорных полей в стандартную модель электрослабых взаимодействий представляет как теоретический, так и чисто практический интерес. До настоящего времени не построено ни одной феноменологической модели с таким типом необычной материи. Интерпретация некоторых последних экспериментальных данных [19,20] также требует введения новых тензорных взаимодействий [73]. Подробный анализ, проведенный в работе [74], позволяет снять противоречия и согласовать все предыдущие экспериментальные данные [75] по полулептонному радиационному распаду пиона $\pi^- \rightarrow e^- \tilde{\nu} \gamma$.

Мы предполагаем, как обычно, локальную $SU_L(2) \times U_Y(1)$ симметрию слабых взаимодействий [76], с калибровочными полями A_m и B_m . Фермионный сектор материальных полей содержит несколько поколений двухкомпонентных вейлевских спиноров: левые лептонные дублеты $L_i = (v'_L e'_L)_i$ и правые лептонные синглеты $(e'_R)_i$; левые кварковые дублеты $Q_i = (u'_L d'_L)_i$ и правые кварковые синглеты $(u'_R)_i, (d'_R)_i$. Здесь i — индекс поколения, цветовые индексы у кварковых полей мы опускаем. Штрих у поля означает, что оно является калибровочным собственным состоянием.

Рассмотрим теперь бозонный сектор материальных полей. Стандартная модель электрослабых взаимодействий содержит один дублет скалярных хиггсовских полей. Расширим этот сектор материальными антисимметричными тензорными полями. Эти поля, так же, как и скалярные хиггсовские поля, взаимодействуют с левыми и правыми фермионами (60). Чтобы такое юкавское взаимодействие было $SU(2) \times U(1)$ инвариантно, материальное антисимметричное тензорное поле должно быть дублетом. Требование отсутствия аномалий в расширенной модели электрослабых взаимодействий заставляет нас удвоить число полей и ввести два дублета хиггсовских скалярных полей $H_1 = (H_1^0 H_1^-)$, $H_2 = (H_2^+ H_2^0)$ и два дублета антисимметричных тензорных полей $U_{mn} = (U_{mn}^0 U_{mn}^-)$, $T_{mn} = (T_{mn}^+ T_{mn}^0)$ с противоположными гиперзарядами: $Y(H_1) = Y(U) = -1$, $Y(H_2) = Y(T) = +1$. Их минимальные взаимодействия с калибровочными полями вводятся через ковариантную производную $D_m = \partial_m - ig/2T \cdot A_m - ig'/2YB_m$, где g и g' — константы взаимодействия, а T и Y — генераторы групп $SU(2)$ и $U(1)$ соответственно.

Расширение хиггсовского сектора стандартной модели электрослабых взаимодействий еще одним дублетом хиггсовских частиц не приводит к нарушению соотношения $\rho = m_W^2 / (m_Z^2 \cos^2 \theta_W) = 1$ на древесном уровне, что, как хорошо известно, соответствует экспериментальным данным $\rho_0 = (1,0004 \pm 0,0022 \pm 0,0020)$ [77]. Однако существует еще одна трудность, связанная с расширением хиггсовского сектора. Если допустить произвольные взаимодействия хиггсовских частиц с фермионами, то при нарушении симметрии возможно появление нейтральных токов с изменением ароматов. Элегантное решение этой проблемы было дано Глэшоу и Вайнбергом [78]. Переходы с изменением ароматов в нейтральных токах на древесном уровне будут отсутствовать, если нейтральные компоненты одного хиггсовского дублета взаимодействуют только с верхними типами кварков с зарядами $2/3$, а нейтральные компоненты другого хиггсовского дублета — с нижними типами кварков с зарядами $-1/3$ и заряженными лептонами. Естественно, это влечет за собой наличие дополнительной симметрии, такой, например,

как суперсимметрия. Самый общий вид такого $SU(2) \times U(1)$ инвариантного юкавского взаимодействия есть

$$\mathcal{L}_H = h_{ij}^u \bar{Q}_i(u'_R)_j H_1 + [h_{ij}^d \bar{Q}_i(d'_R)_j + h_{ij}^e \bar{L}_i(e'_R)_j] H_2 + \text{h.c.}, \quad (71)$$

где h^u , h^d и h^e , вообще говоря, произвольные недиагональные матрицы.

Аналогичное взаимодействие со спинорными полями мы можем записать и для антисимметричных тензорных полей:

$$\mathcal{L}_T = t_{ij}^u \bar{Q}_i \sigma^{mn}(u'_R)_j U_{mn} + [t_{ij}^d \bar{Q}_i \sigma^{mn}(d'_R)_j + t_{ij}^e \bar{L}_i \sigma^{mn}(e'_R)_j] T_{mn} + \text{h.c.} \quad (72)$$

Отсутствие принципа симметрии приводит к большому числу произвольных параметров. Это является слабым местом в стандартной модели. Давайте максимально упростим модель, потребовав универсальности тензорного взаимодействия:

$$t_{ij}^u = t_{ij}^d = t_{ij}^e = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{ij}. \quad (73)$$

После спонтанного нарушения симметрии нейтральные компоненты хиггсовских полей приобретают ненулевые вакуумные средние: $\langle H_1^0 \rangle_0 = v_1$ и $\langle H_2^0 \rangle_0 = v_2$. В суперсимметричных обобщениях стандартной модели электрослабых взаимодействий с двумя дублетами хиггсовских частиц вводится параметр β , который характеризует отношение их вакуумных средних: $\tan \beta = v_1/v_2$. Подстановка

$$\begin{aligned} (u'_L)_i &= [S_u]_{ij}(u_L)_j, & (u'_R)_i &= [T_u]_{ij}(u_R)_j, \\ (d'_L)_i &= [S_d]_{ij}(d_L)_j, & (d'_R)_i &= [T_d]_{ij}(d_R)_j, \\ (e'_L)_i &= [S_e]_{ij}(e_L)_j, & (e'_R)_i &= [T_e]_{ij}(e_R)_j \end{aligned}$$

диагонализует массовые матрицы кварков и заряженных лептонов. Такие преобразования в нашем простейшем случае (73) могут породить в (72) нейтральные токи с изменением ароматов, если не потребовать равенства унитарных матриц $S_{u,d,e} = T_{u,d,e}$ для левых и правых кварков. Из этого немедленно следует, что матрицы юкавских констант связи $h^{u,d,e}$ должны быть эрмитовыми, чтобы они могли быть диагонализированы. То есть требование равенства юкавских констант связи (73) для антисимметричных тензорных полей и отсутствие нейтральных токов с изменением ароматов влечет за собой более высокую симметрию юкавских констант связи для хиггсовских частиц. Действительно, такая возможность в последнее время интенсивно обсуждается в связи с поиском симметрий для юкавских констант связи [79].

Вводя матрицу Кабиббо — Кобаяши — Маскавы $V_{ij} = [S_u^\dagger S_d]_{ij}$, можно рассматривать смешивание для верхних типов или для нижних типов кварков в заряженных токах. Мы будем считать нейтрино безмассовыми. Поэтому, используя вырожденность нейтринных состояний, можно отфакторизоваться от матрицы смешивания $[S_\nu^\dagger S_e]_{ij}$ в лептонном секторе.

Взаимодействия типа (67):

$$\mathcal{L}_3 = (g'_1 \bar{H}_1 T^{mn} + g'_2 \bar{H}_2 U^{mn}) F_{mn} + (g_1 \bar{H}_1 \tau T^{mn} + g_2 \bar{H}_2 \tau U^{mn}) G_{mn} + \text{h.c.}, \quad (74)$$

где $\bar{H} = H^T i \tau_2$ — транспонированные дублеты, а $F_{mn} = \partial_m B_n - \partial_n B_m$ и $G_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m + g A_m \times A_n$ — тензоры напряженности калибровочных полей, при нарушении симметрии дают массы тензорным частицам и калибровочным полям. Чтобы после нарушения симметрии фотон оставался безмассовым, необходимо потребовать выполнения равенств $g'_1/g_1 = -g'_2/g_2 = \tan \theta_W$, где θ_W — угол Вайнберга. Обратим внимание на то, что взаимодействия (74) приводят к смешиванию тензорных полей T_{mn} и U_{mn} .

Теперь мы имеем все необходимое, чтобы перейти к обсуждению феноменологических следствий. Еще раз отметим, что наша модель, по сравнению со стандартной моделью электрослабых взаимодействий, содержит дополнительный дублет хиггсовских частиц и два дублета материальных антисимметричных тензорных частиц. Их минимальные взаимодействия с калибровочными полями вводятся однозначно через ковариантные производные. Мы выписали также их основные взаимодействия с фермионами и неминимальное взаимодействие с калибровочными полями, которые при спонтанном нарушении симметрии должны приводить к физическому спектру масс. Основным критерием при этом было требование отсутствия нейтральных токов с изменением ароматов. Разумеется, существует еще много других взаимодействий, на которых мы не будем здесь останавливаться, так как нашей задачей будет анализ низкоэнергетических процессов.

3.5. Феноменологические следствия. Взаимодействия антисимметричных тензорных полей с фермионами (72) порождают новые эффективные взаимодействия типа «ток × ток», дополнительно к известным взаимодействиям, возникающим в результате обмена электрослабыми калибровочными бозонами. Эти взаимодействия также содержат заряженные и нейтральные токи. Чтобы избежать противоречия с экспериментальными данными, мы должны предположить относительную слабость этих взаимодействий по отношению к стандартным электрослабым взаимодействиям. Новые тензорные взаимодействия оказываются как бы экранированными. Заряженные слабые токи были открыты задолго до обнаружения

нейтральных слабых токов, которые, в случае взаимодействий заряженных частиц, экранировались электромагнитными взаимодействиями. Поэтому первые экспериментальные подтверждения существования новых тензорных взаимодействий надо искать на фоне слабых взаимодействий заряженных токов.

В дальнейшем мы рассмотрим взаимодействия, обусловленные только заряженными антисимметричными тензорными полями $T_{mn}^{\pm}$ и $U_{mn}^{\pm}$. Самая общая структура пропагаторов для этих частиц после нарушения симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(q) &= \begin{pmatrix} \langle T(T^{-}T^{+}) \rangle_0 & \langle T(T^{-}U^{+}) \rangle_0 \\ \langle T(U^{-}T^{+}) \rangle_0 & \langle T(U^{-}U^{+}) \rangle_0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{4i}{\Delta_q} \begin{pmatrix} (q^2 - m^2) \Pi^{-}(q) & \mu^2 \mathbf{1}^{-} \\ \mu^2 \mathbf{1}^{+} & (q^2 - M^2) \Pi^{+}(q) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (75)$$

где $\Delta_q = (q^2 - m^2)(q^2 - M^2) - \mu^4$, а μ , m и M — произвольные массовые параметры, причем $M/m = \tan \beta$, так как диагональные массовые члены для T_{mn} и U_{mn} обусловлены вакуумными средними v_1 и v_2 соответственно.

Из вида взаимодействия (72) и тождества (61) следует, что поля T^{+} и U^{-} являются самодуальными, а T^{-} и U^{+} — самоантидуальными, поэтому пропагатор (75) содержит самодуальные и самоантидуальные $\mathbf{1}_{mnab}^{\pm} = 1/2(\mathbf{1}_{mnab} \pm i/2\epsilon_{mnab})$, $\Pi_{mnab}^{\pm} = \mathbf{1}_{mnkl}^{\pm} \Pi_{klab}$ операторы.

Основное отличие тензорных взаимодействий от стандартного варианта V—A связано с изменением спиральности участвующих в процессе фермионов. Ввиду того, что стандартные слабые взаимодействия сохраняют спиральность, распад псевдоскалярного π -мезона сильно подавлен [80]. Поэтому самое первое условие на параметры нового тензорного взаимодействия мы можем получить из экспериментальных ограничений, следующих из этих распадов [81]. Пренебрегая импульсом передачи $q^2 \ll \mu^2, m^2, M^2$, запишем эффективный лагранжиан для полулептонных тензорных взаимодействий:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{t^2}{\Delta_0} \bar{u}_i \sigma^{ml} [m^2(1 + \gamma^5) + \mu^2(1 - \gamma^5)] V_{ij} d_j \frac{4q_m q^n}{q^2} (\bar{e}_R \sigma_{nl} \nu_L) + \text{h.c.} \quad (76)$$

Первый член в кварковом токе обусловлен обменом T_{mn} -частицами, а второй член возникает из-за смешивания T_{mn} - и U_{mn} -полей. При получении окончательного вида взаимодействия (76), мы использовали полезные тождества:

$$\frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma^{mn} \otimes \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma_{mn} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma^{ml} \otimes \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma_{nl} \frac{4q_m q^n}{q^2},$$

$$\frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \sigma^{mn} \otimes \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^5) \sigma_{mn} = 0. \quad (77)$$

Само по себе тензорное взаимодействие (76), по кинематическим соображениям, не дает вклада в полулептонный двухчастичный распад π -мезона π_{e_2} . Однако в работе [82] было показано, что за счет электромагнитных радиационных поправок к тензорному взаимодействию (76) псевдотензорный член $\bar{u} \sigma_{mn} \gamma^5 d$ приводит к генерации взаимодействия лептонного с псевдоскалярным кварковым током, к которому очень чувствителен распад пиона [83]. Отсюда следует сильное ограничение на константу тензорного взаимодействия и практически исключает возможность его проявления в современном эксперименте. Это, естественно, закрывает возможность объяснения последних экспериментальных данных [19,20] наличием нового тензорного взаимодействия. Наша модель [84] позволяет обойти эту трудность, если предположить равенство двух массовых параметров $\mu^2 = m^2$, возникших при спонтанном нарушении симметрии. Тогда псевдотензорный кварковый член $\bar{u} \sigma_{mn} \gamma^5 d$ исчезает из (76), а тензорный член $\bar{u} \sigma_{mn} d$ не дает вклада в распад псевдоскалярного пиона из-за сохранения четности в электромагнитных взаимодействиях.

Рассмотрим теперь массовую матрицу для антисимметричных тензорных полей

$$\mathcal{M}^2 = \frac{M^2}{\text{tg}^2 \beta} \begin{pmatrix} \text{tg}^2 \beta \Pi^+ & \mathbf{1}^+ \\ \mathbf{1}^- & \Pi^- \end{pmatrix}, \quad (78)$$

которая параметризуется только двумя параметрами: размерным массовым параметром M и отношением вакуумных средних $\text{tg} \beta$ нейтральных компонент двух хиггсовских дублетов.

Переход к новым полям

$$T'_{mn} = T_{mn} \cos \varphi + \Pi_{mnab} U^{ab} \sin \varphi,$$

$$U'_{mn} = -\Pi_{mnab} T^{ab} \sin \varphi + U_{mn} \cos \varphi \quad (79)$$

приводит к диагональной массовой матрице $\mathcal{M}^2 = M^2 \text{diag} (\lambda_T \Pi^+, \lambda_U \Pi^-)$ с собственными значениями

$$\lambda_T = \frac{1}{2} [1 + \text{tg}^2 \beta + \sqrt{(1 - \text{tg}^2 \beta)^2 + 4}] / \text{tg}^2 \beta,$$

$$\lambda_U = [1 + \text{tg}^2 \beta - \sqrt{(1 - \text{tg}^2 \beta)^2 + 4}] / \text{tg}^2 \beta,$$

когда $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{tg}^2 \beta + \sqrt{(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)^2 + 4} \right]$. Неотрицательность собственных значений матрицы квадратов масс приводит к условию $0 \leq \operatorname{ctg}^2 \beta \leq 1$. Вид кривых для собственных значений λ_T и λ_U в этом интервале изменения параметра смешивания представлен на рис.4.

Замечательным свойством этих кривых является наличие максимума для массы тензорного U'_{mn} -поля. Поэтому энергия взаимодействия спинорных частиц посредством обмена U'_{mn} -полями в статическом пределе имеет минимум при $\operatorname{ctg}^2 \beta_0 = 0,4$. Ввиду того, что взаимодействие «ток $\times$ ток» всегда генерируется парой тензорных U_{mn} - и T_{mn} -частиц и масса T_{mn} -частиц монотонно растет с увеличением параметра смешивания $\operatorname{ctg}^2 \beta$, минимум энергии

$$U \sim \frac{1}{\lambda_U} + \frac{1}{\lambda_T}$$

достигается при немного большем значении параметра смешивания $\operatorname{ctg}^2 \beta = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41$. Другими словами, мы, совсем неожиданно, фиксировали величину отношения вакуумных средних

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1,55 \quad (80)$$

нейтральных компонент двух дублетов хиггсовских частиц.

Значение $\operatorname{tg} \beta$ находится в прекрасном согласии с недавними результатами анализа возможных значений параметров минимальной суперсимметричной модели с объединением констант связи и масс [85], с учетом того, что масса t -кварка лежит в интервале $m_t = (174 \pm 16)$ ГэВ [86]. Интересно также заметить, что такое значение $\operatorname{tg} \beta$ соответствует углу смешивания φ полей U_{mn} и T_{mn} : $\sin^2 \varphi = (1 - 1/\sqrt{3})/2 \approx 0,211$, который удивительно

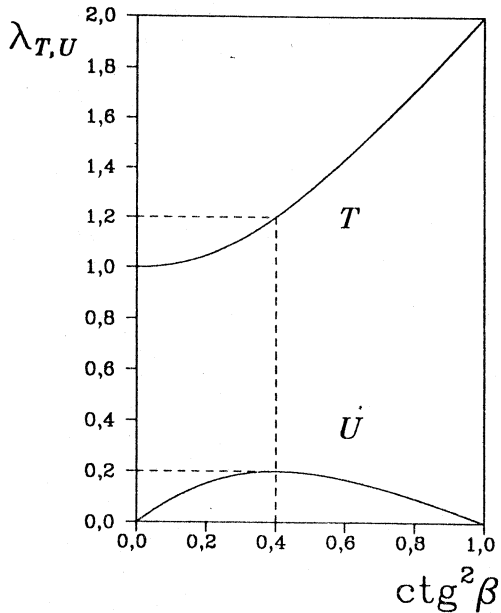


Рис.4

близок углу Вайнберга θ_W . Находясь в рамках стандартной модели, нельзя понять такое совпадение численных значений углов смешивания в калибровочном и материальном секторах. Вероятно, этот факт найдет свое объяснение в объединенной суперсимметричной модели с материальными антисимметричными тензорными частицами.

Для феноменологических приложений в области низких энергий выпишем все эффективные взаимодействия лептонов и кварков, обусловленные обменом антисимметричными тензорными частицами. Например, в случае распада мюона на электрон и (анти)нейтрино, кроме обычного V-A-взаимодействия, необходимо учесть также тензорное взаимодействие:

$$\mathcal{L}_{\mu e} = -\sqrt{2}G_F f_T \bar{\nu}_{\mu L} \sigma_{ml} \mu_R - \frac{4q^n q_n}{q^2} \bar{e}_R \sigma^{nl} \nu_{eL} + \text{h.c.}, \quad (81)$$

где q_m — 4-импульс передачи между мюонной и электронной парами, а положительная безразмерная константа

$$f_T = \frac{\sqrt{2}}{G_F} \frac{t^2}{(1 - \text{ctg}^2 \beta) M^2} > 0$$

определяет относительную силу новых тензорных взаимодействий по отношению к обычным слабым взаимодействиям. Дополнительное взаимодействие для полулептонных распадов имеет вид

$$\mathcal{L}_{qe} = -\sqrt{2}G_F f_T \bar{u} \sigma_{ml} d^\theta \frac{4q^n q_n}{q^2} \bar{e}_R \sigma^{nl} \nu_L + \text{h.c.}, \quad (82)$$

где $d_i^\theta = V_{ij} d_j$ — смешанные состояния для нижних типов кварков. Более богатая структура тензорного взаимодействия возникает в чисто кварк-кварковом секторе:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ud} = & -\sqrt{2}G_F f_T [\bar{u}_L \sigma_{ml} d_R^\theta \bar{d}_R^\theta \sigma^{nl} u_L + \bar{u}_L \sigma_{ml} d_R^\theta \bar{d}_L^\theta \sigma^{nl} u_R + \\ & + \bar{u}_R \sigma_{ml} d_L^\theta \bar{d}_R^\theta \sigma^{nl} u_L + \text{tg}^2 \beta \bar{u}_R \sigma_{ml} d_L^\theta \bar{d}_L^\theta \sigma^{nl} u_R] \frac{4q^n q_n}{q^2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Все эффективные тензорные взаимодействия содержат лишь одну неизвестную константу взаимодействия f_T . Естественно попытаться фиксировать ее значение из эксперимента по полулептонному радиационному распаду пиона [19], результаты которого нельзя интерпретировать, оставаясь в рамках стандартной модели электрослабых взаимодействий [87] и ее суперсимметричных расширений [88]. Стандартный матричный элемент для этого распада можно представить в виде [80]:

$$M = M_{IB} + M_{SD}, \quad (84)$$

где

$$M_{IB} = -i \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} F_\pi m_e \varepsilon_m \bar{e} \left[\left(\frac{k}{kq} - \frac{p}{pq} \right)^m - \frac{i\sigma^{mn} q_n}{2kq} \right] (1 - \gamma^5) v \quad (85)$$

— квантовые электродинамические поправки (тормозное излучение) к распаду пиона $\pi \rightarrow e\nu$, а

$$M_{SD} = -\frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}M_\pi} \varepsilon^m \bar{e} [F_V e_{mnab} p^a q^b - \\ - iF_A(pq \cdot g_{mn} - p_m q_n)] \gamma^n (1 - \gamma^5) v \quad (86)$$

— структурно-зависимые амплитуды, параметризованные двумя формфакторами F_V и F_A ; ε^m — вектор поляризации фотона; p , k и q — 4-импульсы пиона, электрона и фотона соответственно.

Для того чтобы найти матричный элемент M_T тензорного взаимодействия (82) для данного распада, необходимо вычислить матричный элемент $\langle \pi | \bar{u} \sigma_{mn} \gamma^5 d | \gamma \rangle$ для кваркового тензорного тока. Используя гипотезу частичного сохранения аксиального тока и правила сумм квантовой хромодинамики, его можно представить в виде [88]:

$$\langle \pi | \bar{u} \sigma_{mn} \gamma^5 d | \gamma \rangle = \frac{e}{3} \chi \frac{\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle}{F_\pi} (q_m \varepsilon_n - q_n \varepsilon_m),$$

где $F_\pi = 131$ МэВ — константа распада пиона, а $\chi = (-5,7 \pm 0,6)$ ГэВ⁻² — магнитная восприимчивость [89] кваркового конденсата $\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle = -(0,24 \text{ ГэВ})^3$. Тогда матричный элемент дополнительного тензорного взаимодействия имеет вид

$$M_T = \frac{eG_F V_{ud}}{\sqrt{2}} F_T \left[\varepsilon^m q^n + \frac{(\varepsilon p) q^m - (pq) \varepsilon^m}{(p - q)^2} (p - q)^n \right] \times \\ \times \bar{e} \sigma_{mn} (1 - \gamma^5) v, \quad (87)$$

где

$$F_T = \frac{4}{3} \chi \frac{\langle 0 | \bar{q} q | 0 \rangle}{F_\pi} f_T. \quad (88)$$

Первый член в (87) совпадает с тензорным матричным элементом, предложенным в [73]. В нашем случае появляется также характерный нелокальный матричный элемент, обусловленный обменом материальными антисимметричными тензорными частицами $T_{mn}^\pm$. Надо отметить, что представ-

ленные в (87) два члена исчерпывают все возможные калибровочно-инвариантные структуры.

Основной вклад в амплитуду распада пиона, в пренебрежении массой электрона, дают квадраты матричных элементов M_{IB} и M_{SD} , а также интерференция между матричными элементами тензорного взаимодействия M_T и тормозного излучения M_{IB} :

$$\frac{d^2\Gamma}{dx d\lambda} = \frac{\alpha}{2\pi} \Gamma_{\pi \rightarrow e\nu} \{ IB(x, \lambda) + a_{SD}^2 [(F_V + F_A)^2 SD^+(x, \lambda) + (F_V - F_A)^2 SD^-(x, \lambda)] - a_{SD} F_T I(x, \lambda) \}, \quad (89)$$

где $a_{SD} = M_\pi^2 / 2F_\pi m_e$,

$$IB(x, \lambda) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{(1-x)^2 + 1}{x}, \quad SD^+(x, \lambda) = \lambda^2(1-x)x^3,$$

$$SD^-(x, \lambda) = (1-\lambda)^2(1-x)x^3, \quad I(x, \lambda) = (1-\lambda)x^2.$$

В системе покоя пиона переменные x и λ определяются как $x = 2E_\gamma / M_\pi$,

$$\lambda = 2E_e / M_\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Эксперимент по полулептонному радиационному распаду пиона [19] проведен в широкой кинематической области: $0,3 < x < 1,0$, $0,2 < \lambda < 1,0$. Измеренная полная вероятность распада $B^{\text{exp}} = (1,61 \pm 0,23) \cdot 10^{-7}$ оказалась меньше теоретически ожидаемой: $B^{\text{th}} = (2,41 \pm 0,07) \cdot 10^{-7}$. Подробный анализ экспериментальных данных для дифференциального сечения (89) без учета последнего члена дает отрицательный коэффициент перед $SD^-(x, \lambda)$ членом. Ввиду того, что вид функций $I(x, \lambda)$ и $SD^-(x, \lambda)$ примерно одинаков, этот результат может быть объяснен деструктивной интерференцией между тензорным взаимодействием и тормозным излучением. Отметим, что наша модель предсказывает и знак интерференции. Если выбрать $F_T = (1,57 \pm 0,45) \cdot 10^{-2}$, то дифференциальное сечение (89) будет адекватно описывать экспериментальные данные. Из (88) мы получаем численное значение константы эффективного тензорного взаимодействия

$$f_T = (1,96 \pm 0,56) \cdot 10^{-2}. \quad (90)$$

Наличие тензорного матричного элемента было также экспериментально обнаружено и в полулептонном трехчастичном распаде каона $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ [20]. В работе [84] в рамках релятивистской кварковой модели был проведен анализ полулептонного радиационного распада пиона

$\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu} \gamma$ и полулептонного трехчастичного распада каона $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$. Показано, что результаты этих экспериментов одновременно могут быть описаны одной константой f_T эффективного тензорного взаимодействия (82).

Естественно, что новое тензорное взаимодействие будет давать вклад и в ядерный β -распад. Тщательный анализ экспериментальных данных [73,90] показывает, что тензорное взаимодействие с константой $f_T \sim 10^{-2}$ не противоречит существующим экспериментам. В этой связи интересна постановка новых экспериментов. Например, в лаборатории DAΦNE [91] почти половина распадов ϕ -мезонов, рожденных в аннигиляции e^+e^- , будет идти в K^+K^- -мезоны. Это является хорошей возможностью исследования полулептонных трехчастичных распадов каонов.

Учет нового тензорного кварк-кваркового взаимодействия (83) в чисто нелептонных процессах затрудняется вследствие присутствия непертурбативных квантово-хромодинамических эффектов. Однако успех стандартной модели в объяснении разности масс $K_L - K_S$ [92] является вызовом любому ее расширению. Хотя неопределенность в теоретических оценках разности масс $K_L - K_S$ довольно большая (до 50%) [93], эта разность остается основным источником получения ограничений на параметры новых взаимодействий. В работе [94] было показано, что вклад в разность масс $K_L - K_S$ от нового тензорного взаимодействия (83) с константой f_T (90) и параметром $\tan \beta$ (80) имеет правильный знак и составляет половину ее экспериментальной величины. Интересным, на наш взгляд, и пока не исследованным вопросом остается анализ правила $\Delta T = 1/2$ в свете новых тензорных кварк-кварковых взаимодействий (83).

Наиболее прямым методом поиска проявления тензорных взаимодействий может явиться анализ энергетического спектра электронов в распаде мюона [95]. Надо отметить, что этот распад был обойден вниманием как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения. Свободный от трудностей, связанных с учетом сильных взаимодействий, он может быть рассчитан с любой точностью. Однако до сих пор электромагнитные радиационные поправки к этому распаду остаются вычисленными лишь в одной петле [96], а основной параметр распада — ρ -параметр Мишеля [97] — не измерялся с 1969 г. [98]. Кроме того, ситуация даже с однопетлевыми электромагнитными поправками остается до конца не ясной [99].

Распад мюона является основным процессом слабых взаимодействий. Константа Ферми G_F определяется из теоретической формулы [100] для времени жизни мюона, полученной в рамках стандартной модели, и используется как основной параметр при анализе радиационных поправок

электрослабых взаимодействий. Однако ее точность зависит от точности измерения основных параметров распада мюона (о чем очень часто забывают) и в настоящий момент неоправданно завышена [101].

Новые тензорные взаимодействия (81) приводят к новым параметрам в распаде мюона, которые раньше не учитывались при теоретическом анализе и экспериментальной обработке данных. Обычно предполагалось, что эффективное четырехфермионное взаимодействие лептонов не зависит от импульсов. Однако, так как оно возникает в результате обмена промежуточным бозоном с 4-импульсом q_m , то ничто не мешает ему зависеть от импульса передачи. Именно такой тип взаимодействий и порождают антисимметричные тензорные частицы.

Наиболее общий вид гамильтониана распада мюона параметризуется [12], вообще говоря, комплексными константами $f_i^{\varepsilon\chi}$:

$$\mathcal{H} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{i=S,V,T \\ \varepsilon, \chi=R,L}} \{f_i^{\varepsilon\chi} [\bar{e}_\varepsilon \Gamma^i \nu_n^e] [\bar{\nu}_m^\mu \Gamma^i \mu_\chi] + \text{h.c.}\}, \quad (91)$$

где скалярное, векторное и тензорное взаимодействия определены как

$$\Gamma^S \otimes \Gamma^S \equiv 1 \otimes 1; \quad \Gamma^V \otimes \Gamma^V \equiv \gamma_m \otimes \gamma^n; \\ \Gamma^T \otimes \Gamma^T \equiv \frac{1}{2} \sigma^{ml} \otimes \sigma_{nl} \frac{4q_m q^n}{q^2}. \quad (92)$$

Если использовать старое определение $\Gamma^T \otimes \Gamma^T \equiv 1/2 \sigma^{mn} \otimes \sigma_{mn}$, то в силу тождеств (77) нормировка констант f_T^{RL} и f_T^{LR} не изменится, а две константы f_T^{RR} и f_T^{LL} можно положить тождественно равными нулю. В этом смысле новое определение (92) является обобщением старого и вводит новые параметры.

Тензорное взаимодействие (81) соответствует вполне определенному выбору констант: $f_T^{RL} = f_T^{LR} = f_T^{LL} = 0$, $f_T^{RR} = f_T$. Мы также предположим, что кроме стандартного V-A-взаимодействия $f_V^{LL} = 1$, других взаимодействий нет, и соответствующие константы равны нулю. Тогда энергетический спектр электронов при распаде поляризованного мюона имеет вид

$$\frac{d^2\Gamma}{dx d\cos\theta} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left\{ 3 - 2x + rf_T \frac{1}{x} + f_T^2(15 - 14x) + \frac{\alpha}{2\pi} f(x) + \right. \\ \left. + \cos\theta \left[1 - 2x + rf_T \frac{2-x}{x} + f_T^2(13x - 14) + \frac{\alpha}{2\pi} g(x) \right] \right\} x^2, \quad (93)$$

где оставлены члены первого порядка малости по $r = 12m_e/m_\mu \approx 5,8 \cdot 10^{-2}$, θ — угол между импульсом вылетающего электрона и спином мюона, $x = 2E_e/m_\mu$, а $f(x)$ и $g(x)$ — известные функции однопетлевых электромагнитных поправок [96].

Новые члены в энергетическом спектре электронов эффективно приведут к отклонению измеренных старых параметров распада мюона от их стандартных значений. Параметр Мишеля ρ определяется из изотропного энергетического спектра электронов и известен с наиболее высокой экспериментальной точностью $\rho = (0,7518 \pm 0,0026)$ [98]; по сравнению с другими параметрами, однако, малость тензорной константы f_T еще не позволяет выделить вклад в него новых структур. Поэтому необходимы новые, более прецизионные эксперименты, которые бы включали обработку экспериментальных данных с учетом новых параметров.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был сделан обзор литературы, посвященной введению и использованию антисимметричных тензорных полей второго ранга в квантовой теории поля. Мы не ставили перед собой цель дать полный список публикаций на эту тему. Нашей задачей было проследить историю вопроса введения таких полей, сохраняя при этом последовательность изложения. На базе сделанных обобщений представлены новые результаты, дополняющие и углубляющие связи между различными подходами. Ключевые, на наш взгляд, вопросы рассмотрены с такой подробностью, что для полного их понимания не требуется обращения к оригинальной литературе. Напротив, отдельные факты, дополняющие и обобщающие тот или иной вопрос, даны в виде ссылок, чтобы при необходимости можно было обратиться за подробностями к оригинальной литературе или обзорам.

Триумф стандартной модели электрослабых взаимодействий затмил на время интерес к изучению и введению в теорию новых полей, преобразующихся по нестандартным представлениям группы Лоренца. Феноменологические модели элементарных частиц, включая и их суперсимметричные расширения, используют лишь поля, подчиняющиеся стандартным уравнениям движения. Однако вне этого рассмотрения остается большой класс не изученных полей. Настоятельная необходимость введения таких полей возникает, например, при построении расширенных теорий супергравитации и теорий струн. Антисимметричное тензорное поле второго ранга естественно возникает в таких теориях.

Поля, преобразующиеся по нестандартным представлениям группы Лоренца, описывают частицы с немаксимальными значениями спиральности. Поэтому они могут выполнять роль частиц с меньшими значениями спина. Например, антисимметричное тензорное поле может заменить скалярную частицу. На массовой поверхности они имеют одинаковое число скалярных степеней свободы и эквивалентны. Однако вне массовой поверхности в игру вступают дополнительные степени свободы антисимметричного тензорного поля, приводя к более богатому взаимодействию. Являясь скаляром на массовой поверхности, оно при взаимодействии переносит спин единица и проявляет себя как векторная частица.

Представления группы Лоренца для единичного спина (1,0), (0,1) и (1/2, 1/2) описывают на массовой поверхности скалярную и векторную частицы. Вне массовой поверхности первая частица, кроме скалярных сил, приводит к векторному взаимодействию, в точности так же, как фотон вне массовой поверхности приводит к скалярным силам — закону Кулона. Покажем это, используя аргументы Фейнмана [32]. Закон Кулона возникает из лоренц-инвариантного взаимодействия токов:

$$\frac{J_m^\dagger J^m}{q^2} = \frac{J_0^\dagger J_0}{q^2} - \frac{\mathbf{J}_T^\dagger \mathbf{J}_T}{q^2},$$

если воспользоваться условием поперечности тока $q_m J^m = 0$ и исключить продольную составляющую $J_L = q_0 J^0 / |\mathbf{q}|$. Точно так же взаимодействие антисимметричных тензорных токов $J_{mn} (J_{0i} = A_i, J_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k)$ с условием $q_m J^{mn} = 0$ ($A_L = 0, \mathbf{B}_T = q_0 \mathbf{A}_T / |\mathbf{q}|$):

$$\frac{1}{2} \frac{J_{mn}^\dagger J^{mn}}{q^2} = \frac{\mathbf{A}_T^\dagger \mathbf{A}_T}{q^2} + \frac{B_L^\dagger B_L}{q^2}$$

приводит к закону $1/r$ для поперечных составляющих векторного тока.

Перейдем теперь к рассмотрению высших спинов. Обычно уравнения движения для волновых функций искали в виде дифференциальных уравнений первого порядка. Это объясняется желанием записать волновые уравнения подобно уравнениям Шредингера в надежде избавиться от отрицательных решений. Например, частица со спином 3/2 может быть описана как в формализме Рариты — Швингера [102], так и в формализме Баргмана — Вигнера [103] дифференциальными уравнениями первого порядка. Волновые функции для спина 3/2 в формализме Рариты — Швингера преобразуются по представлениям (1, 1/2) и (1/2, 1), а в формализме Баргмана — Вигнера — по представлениям (3/2, 0) и (0, 3/2). В случае свободных массивных частиц эти описания эквивалентны.

Однако, даже используя дифференциальные уравнения первого порядка, не удастся избавиться от отрицательных решений, которые, как мы знаем, описывают античастицы. Поэтому ограничение дифференциальными уравнениями первого порядка необязательно. В нашем случае частицы со спином $3/2$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям третьего порядка (см.(37)). Уравнения для волновых функций, преобразующихся по представлениям группы Лоренца $(1, 1/2)$, $(1/2, 1)$ и $(3/2, 0)$, $(0, 3/2)$, неэквивалентны и описывают различные частицы. Уравнения третьей степени для волновых функций, преобразующихся по представлениям $(1, 1/2)$, $(1/2, 1)$, используются в конформной супергравитации [17] для описания гравитино со спиральностью $3/2$ и эквивалентны нашим.

Рассмотрим уравнения движения для волновой функции $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$, преобразующейся по представлению группы Лоренца $(3/2, 0)$. Четыре компоненты $\Psi_1 = \Psi_{111}$, $\Psi_2 = \sqrt{3}\Psi_{112}$, $\Psi_3 = \sqrt{3}\Psi_{122}$ и $\Psi_4 = \Psi_{222}$ удовлетворяют матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} p_+^3 & \sqrt{3}p_+^2q_- & \sqrt{3}p_+q_-^2 & q_-^3 \\ \sqrt{3}p_+^2q_+ & p_+(p_+p_- + 2q_+q_-) & q_-(2p_+p_- + q_+q_-) & \sqrt{3}p_-q_-^2 \\ \sqrt{3}p_+q_+^2 & q_+(2p_+p_- + q_+q_-) & p_-(p_+p_- + 2q_+q_-) & \sqrt{3}p_-^2q_- \\ q_+^3 & \sqrt{3}p_-q_+^2 & \sqrt{3}p_-^2q_+ & p_-^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (94)$$

где символ $\{\alpha\beta\gamma\}$ обозначает полную симметризацию индексов с множителем $1/3!$. Когда вектор импульса $\mathbf{p}$ направлен по третьей оси ($q_{\pm} = 0$), матрица становится диагональной, и анализ (94) упрощается. Волновые функции Ψ_1 и Ψ_4 соответствуют максимальным значениям спиральности $\pm 3/2$ и удовлетворяют уравнениям движения с частотой одного знака. Такие компоненты аналогичны продольным и временным компонентам электромагнитного поля или поперечным компонентам векторных полей, преобразующихся по представлениям $(1,0)$ и $(0,1)$, и нефизичны. Физическими здесь являются компоненты Ψ_2 и Ψ_3 со спиральностью $\pm 1/2$, которые удовлетворяют уравнениям Вейля, но с дополнительным множителем p^2 .

Если от спинорных индексов перейти к лоренцевым индексам, то данная частица будет описываться спинором $\Lambda_{\alpha}^{[mn]}$ с двумя лоренцевыми индексами, со свойством антисимметрии и самоантидуальности по ним: $1_{mnab}^{+} \Lambda_{\alpha}^{[ab]} = 0$. Спинор $\Lambda_a^{[mn]}$ имеет шесть компонент. Условие $(\sigma_m \hat{\sigma}_n)_{\alpha}^{\beta} \Lambda_{\beta}^{[mn]} = 0$ убирает две лишние компоненты, которые появились при переходе к лоренцевым индексам, и приводит к четырем компонентам

спинорного поля, введенного выше. Такое новое поле может быть использовано в расширенных $N \geq 3$ конформных теориях супергравитации вместо спинора Λ_α , аналогично использованию антисимметричных тензорных полей вместо скаляров.

Представления группы Лоренца спина 2, наряду с (1,1), содержат также $(3/2, 1/2)$, $(1/2, 3/2)$ и $(2,0)$, $(0,2)$. Волновые функции, преобразующиеся по этим представлениям, в нашем случае удовлетворяют дифференциальным уравнениям четвертого порядка. Волновая функция, преобразующаяся по самому первому представлению, в конформных суперсимметричных теориях гравитации описывает гравитон со спиральностью ± 2 . Можно показать, что из восьми компонент

$$\begin{array}{lll} \psi_1 = \psi_{1112} & \psi_8 = \psi_{222i} & \\ \psi_2 = \psi_{111i} & \psi_3 = \sqrt{3} \psi_{\{112\}2} & \psi_6 = \sqrt{3} \psi_{\{122\}i} \quad \psi_7 = \psi_{2222} \\ \psi_4 = \sqrt{3} \psi_{\{112\}i} & \psi_5 = \sqrt{3} \psi_{\{122\}2} & \end{array}$$

волновой функции, преобразующейся по представлению $(3/2, 1/2)$, на массовой поверхности физическими являются только две компоненты ψ_3 и ψ_6 , соответствующие двум поперечным степеням свободы векторной частицы со спиральностью ± 1 , так как только эти компоненты удовлетворяют уравнениям: $(p^2)^2 \psi = 0$. В обозначениях с лоренцевыми индексами такая частица описывается действительным тензором третьего ранга, антисимметричным по одной паре индексов: $V_{a[mn]}$. Условия $g^{am} V_{a[mn]} = 0$ и $\epsilon^{abmn} V_{a[mn]} = 0$ убирают лишние компоненты поля $V_{a[mn]}$, которые неизбежно появляются при таком описании.

Еще одно поле спина 2, которое может быть введено таким образом, это пятикомпонентная волновая функция: $\psi_1 = \psi_{1111}$, $\psi_2 = 2\psi_{\{1112\}}$, $\psi_3 = \sqrt{6} \psi_{\{1122\}}$, $\psi_4 = 2\psi_{\{1222\}}$ и $\psi_5 = \psi_{2222}$, преобразующаяся по представлению $(2,0)$. На массовой поверхности физической является только одна компонента ψ_3 со спиральностью ноль. Таким образом, это поле в свободном случае эквивалентно скалярному полю ϕ , которое появляется в конформной $N = 4$ супергравитации и удовлетворяет уравнению $(p^2)^2 \phi = 0$.

Вне массовой поверхности это поле имеет еще четыре степени свободы и переносит спин 2. Его волновую функцию с лоренцевскими индексами можно представить в виде действительного тензора четвертого ранга $\Phi_{[ab][mn]}$, антисимметричного по двум парам индексов и симметричного по этим парам. Это поле имеет точно такие же свойства симметрии, как тензор Римана R_{abmn} . Чтобы редуцировать число степеней свободы до 10: 5 — для

частицы со спином 2 $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и 5 — для ее античастицы $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, необходимо наложить дополнительные условия $g^{am} \Phi_{[ab][mn]} = 0$ и $\epsilon^{abmn} \Phi_{[ab][mn]} = 0$.

Таким образом, антисимметричные тензорные поля естественно возникают при анализе спинорных представлений группы Лоренца спина $j \geq 1$. Вне массовой поверхности число компонент их волновой функции совпадает с размерностью пространства данного спина. На массовой поверхности происходит редукция степеней свободы, и их безмассовые возбуждения эквивалентны частицам меньшего спина. Эта эквивалентность теряется при включении взаимодействия. Обмен антисимметричными тензорными полями приводит к более богатому взаимодействию элементарных частиц. Их необычные свойства заслуживают внимательного дальнейшего изучения.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. М.Д.Матееву за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения, а также проф. В.Г.Кадышевскому за предложение написать эту работу, что способствовало более глубокому пониманию затронутой в обзоре темы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коноплева Н.П., Попов В.Н. — Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1980.
2. Higgs P.W. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.12, p.132; Phys. Rev., 1966, vol.145, p.1156;
Englert F., Brout R. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.13, p.321;
Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W.E. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.13, p.585.
3. Картан Э. — Теория спиноров. М.: ИЛ, 1947.
4. Швингер Ю. — Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1973.
5. Van der Waerden B. — Nachr. Ges. Wiss. Gött., 1929, p.100;
Laporte O., Uhlenbeck G.E. — Phys. Rev., 1931, vol.37, p.1380.
6. Kemmer N. — Proc. Roy. Soc. A, 1938, vol.166, p.127.
7. Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В. — ЯФ, 1966, т.4, с.216.
8. Kalb U., Ramon P. — Phys. Rev. D, 1974, vol.9, p.2273;
Cremmer E., Scherk J. — Nucl. Phys. B, 1974, vol.72, p.117.
9. Supergravities in Diverse Dimensions (eds. Salam A., Sezgin E.), North-Holland and World Scientific, 1989.
10. Введение в супергравитацию (под ред. Феррары С., Тейлора Дж.), М.: Мир, 1985.
11. Namazie M.A., Storey D. — Nucl. Phys. B, 1979, vol.157, p.170;
Townsend P.K. — Phys. Lett. B, 1979, vol.88, p.97;
Siegel W. — Phys. Lett. B, 1980, vol.93, p.170.
12. Wess J. — Nuovo Cim., 1960, vol.18, p.1086;

- Fulton T., Rohrlich F., Witten L. — *Rev. Mod. Phys.*, 1962, vol.34, p.442.
13. Todorov I.T., Mintchev M.C., Petkova V.B. — *Conformal Invariance in Quantum Field Theory*. ETS, Pisa, 1978, p.89.
14. Fradkin E.S., Vasiliev M.A. — *Nuovo Cim. Lett.*, 1979, vol.25, p.79; *Phys. Lett. B*, 1979, vol.85, p.47.
15. De Wit B., van Holten J.W. — *Nucl. Phys. B*, 1979, vol.155, p.530.
16. Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B. — *Nucl. Phys. B*, 1981, vol.182, p.183.
17. Fradkin E.S., Tseytlin A.A. — *Phys. Rep.*, 1985, vol.119, p.233.
18. Avdeev L.V., Chizhov M.V. — *Phys. Lett. B*, 1994, vol.321, p.212.
19. Болотов В.Н. и др. — *ЯФ*, 1990, т.51, с.717; Bolotov V.N. et al. — *Phys. Lett. B*, 1990, vol.243, p.308.
20. Akimenko S.A. et al. — *Phys. Lett. B*, 1991, vol.259, p.225; Stainer H. et al. — *Phys. Lett. B*, 1971, vol.36, p.521.
21. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — *Введение в теорию квантованных полей*. М.: Наука, 1976; Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. — *Релятивистская квантовая теория*. М.: Наука, 1978; Ишксон К., Зюбер Ж.Б. — *Квантовая теория поля*. М.: Мир, 1984.
22. Dirac P.A.M. — *Proc. Roy. Soc. A*, 1936, vol.155, p.447.
23. Proca A.J. — *Phys. Radium*, 1936, vol.7, p.347.
24. Kemmer N. — *Helv. Phys. Acta*, 1960, vol.33, p.829.
25. Van Nieuwenhuizen P. — *Nucl. Phys. B*, 1973, vol.60, p.478.
26. Gasser J., Leutwyler H. — *Ann. Phys. (NY)*, 1984, vol.158, p.142; Ecker G. et al. — *Nucl. Phys. B*, 1989, vol.321, p.311; Kalafatis D. — *Phys. Lett. B*, 1993, vol.313, p.115.
27. Cremmer E., Julia B. — *Nucl. Phys. B*, 1979, vol.159, p.141.
28. Freedman D.Z. — *Caltech Report No. 68-624*, 1977; Freedman D.Z., Townsend P.K. — *Nucl. Phys. B*, 1981, vol.177, p.282.
29. Kaul R.K. — *Phys. Rev. D*, 1978, vol.18, p.1127.
30. Попов В.Н., Фаддеев Л.Д. — *Препринт ИТФ 67-36*, Киев, 1967; Faddeev L.D., Popov V.N. — *Phys. Lett. B*, 1967, vol.25, p.30.
31. Nielsen N.K. — *Nucl. Phys. B*, 1978, vol.140, p.499; Kallosh R.E. — *Nucl. Phys. B*, 1978, vol.141, p.141.
32. Feynmann R.P. — *Acta Phys. Polon.*, 1963, vol.24, p.697.
33. Славнов А.А., Фролов С.А. — *ТМФ*, 1988, т.75, с.201.
34. Vecchi C., Rouet A., Stora R. — *Phys. Lett. B*, 1974, vol.52, p.344; Тютин И.В. — *Препринт ФИАН 39*, 1975.
35. Kimura T. — *Progr. Theor. Phys.*, 1981, vol.65, p.388; Marchetti P.A., Tonin M. — *Nuovo Cim. A*, 1981, vol.63, p.459.
36. Batalin I.A., Fradkin E.S. — *Phys. Lett. B*, 1983, vol.122, p.157.
37. Baulieu L., Thierry-Mieg J. — *Nucl. Phys. B*, 1983, vol.228, p.259.
38. Фролов С.А. — *ТМФ*, 1988, т.76, с.314; Frolov S.A., Slavnov A.A. — *Phys. Lett. B*, 1989, vol.218, p.461.
39. Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P. — *Nucl. Phys. B*, 1977, vol.120, p.301.
40. Sezgin E., van Nieuwenhuizen P. — *Phys. Rev. D*, 1980, vol.22, p.301.
41. 't Hooft G., Veltman M. — *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1974, vol.1, p.69.
42. Deser S., van Nieuwenhuizen P. — *Phys. Rev. D*, 1974, vol.10, p.401.
43. Deser S., Tsao H.-S., van Nieuwenhuizen P. — *Phys. Rev. D*, 1974, vol.10, p.3337.

44. Deser S., van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rev. D, 1974, vol.10, p.411.
45. Van Nieuwenhuizen P. — In: Relativity, Fields, Strings and Gravity. Caracas, 1977.
46. Grisaru M.T., van Nieuwenhuizen P., Wu C.C. — Phys. Rev. D, 1975, vol.12, p.1813.
47. Duff M.J., van Nieuwenhuizen P. — Phys. Lett. B, 1980, vol.94, p.179.
48. Aurilia A., Christodoulou D., Legovini F. — Phys. Lett. B, 1978, vol.73, p.429.
49. Aurilia A., Nicolai H., Townsend P.K. — Nucl. Phys. B, 1980, vol.176, p.509.
50. Duff M.J. — Nucl. Phys. B, 1977, vol.125, p.334.
51. Christensen S.M., Duff M.J. — Phys. Lett. B, 1978, vol.76, p.571.
52. Christensen S.M., Duff M.J. — Nucl. Phys. B, 1979, vol.154, p.301.
53. Gliozzi F., Scherk J., Olive D. — Nucl. Phys. B, 1977, vol.122, p.253.
54. Cremmer E., Julia B., Scherk J. — Phys. Lett. B, 1978, vol.76, p.409.
55. Neveu A., Schwarz J.H. — Nucl. Phys. B, 1971, vol.31, p.86; Ramond P. — Phys. Rev. D, 1971, vol.3, p.2415.
56. Nahm W. — Nucl. Phys. B, 1978, vol.135, p.149.
57. Nicolai H., Townsend P.K. — Phys. Lett. B, 1981, vol.98, p.257.
58. Green M.B., Schwarz J.H. — Phys. Lett. B, 1984, vol.149, p.117.
59. Tseytlin A.A. — Int. J. Mod. Phys. D, 1992, vol.1, p.223.
60. Copeland E.J., Lahiri A., Wands D. — Phys. Rev. D, 1994, vol.50, p.4868.
61. Giani F., Pernici M., van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rev. D, 1984, vol.30, p.1680.
62. Romans L.J. — Nucl. Phys. B, 1986, vol.276, p.71; Romans L.J. — Phys. Lett. B, 1986, vol.169, p.374.
63. Weyl H. — Z. Phys., 1929, vol.56, p.330.
64. Weinberg S. — Phys. Rev., 1964, vol.133, p.B1318; Phys. Rev., 1964, vol.134, p.B882.
65. Avdeev L.V., Chizhov M.V. — Preprint JINR E2-94-263 (hep-th/9407067), Dubna, 1994.
66. Stermann G., Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P. — Phys. Rev. D, 1978, vol.17, p.1501.
67. Henneaux M., Teitelboim C. — Quantization of Gauge Systems, Princeton. NJ, 1992.
68. Чижев М.В. — Автореферат канд. диссертации. ОИЯИ P2-82-112, Дубна, 1982; Chizov A.V., Chizhov M.V. — Phys. Lett. B, 1983, vol.125, p.190; Чижев М.В. — Препринт ОИЯИ, P2-84-172, Дубна, 1984.
69. Adler S.L. — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.2426; Bell J.S., Jackiw R. — Nuovo Cim. A, 1969, vol.60, p.47.
70. Fradkin E.S., Vilkovisky G.A. — Phys. Lett. B, 1975, vol.55, p.224; Batalin I.A., Vilkovisky G.A. — Phys. Lett. B, 1977, vol.69, p.309.
71. Schwinger J. — Phys. Rev., 1962, vol.125, p.397.
72. De Wit B., van Holten J.W., Van Proeyen A. — Nucl. Phys. B, 1981, vol.184, p.77; de Wit B., Lauwers P.G., Philippe R., Van Proeyen A. — Phys. Lett. B, 1984, vol.135, p.295.
73. Poblaguev A.A. — Phys. Lett. B, 1990, vol.238, p.108.
74. Poblaguev A.A. — Phys. Lett. B, 1992, vol.286, p.169.
75. Depommier P. et al. — Phys. Lett., 1963, vol.7, p.285; Stetz A. et al. — Nucl. Phys. B, 1978, vol.138, p.285; Bay A. et al. — Phys. Lett. B, 1986, vol.174, p.445;

- Piilonen L.E. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.57, p.1402; **Egly S. et al.** — Phys. Lett. B, 1986, vol.175, p.97; Phys. Lett. B, 1989, vol.222, p.533.
76. **Glashow S.L.** — Nucl. Phys., 1961, vol.22, p.579.
77. **Langacker P., Erler J.** — Phys. Rev. D, 1994, vol.50, p.1304.
78. **Glashow S.L., Weinberg S.** — Phys. Rev. D, 1977, vol.15, p.1958.
79. **Ramond P., Roberts R.G., Ross G.G.** — Nucl. Phys. B, 1993, vol.406, p.19; **Harrison P.F., Scott W.G.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.333, p.471; **Fritzsch H., Holtmannspötter D.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.338, p.290.
80. **Bryman D.A., Depommier P., Leroy C.** — Phys. Rep., 1982, vol.88, p.151.
81. **Marciano W.J., Sirlin A.** — Phys. Rev. Lett., 1993, vol.71, p.3629.
82. **Voloshin M.B.** — Phys. Lett. B, 1992, vol.283, p.120.
83. **Campbell B.A., Peterson K.A.** — Phys. Lett. B, 1987, vol.192, p.401; **Shankar O.** — Nucl. Phys. B, 1982, vol.204, p.375.
84. **Chizhov M.V.** — Mod. Phys. Lett. A, 1993, vol.8, p.2753.
85. **Kolda C. et al.** — Phys. Rev. D, 1994, vol.50, p.3498; **de Boer W., Ehret R., Kazakov D.I.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.334, p.220.
86. **Abe F. et al. (CDF collaboration)** — Phys. Rev. D, 1994, vol.50, p.2966.
87. **Никитин И.Н.** — Препринт ИФВЭ, 90-176, Протвино, 1990; **Комаченко Ю.Я.** — ЯФ, 1992, т.55, с.2487; **Komachenko Yu.Ya., Rogalyov R.N.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.334, p.132.
88. **Belyaev V.M., Kogan Ia. I.** — Phys. Lett. B, 1992, vol.280, p.238.
89. **Иоффе Б.Л., Смилга А.В.** — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.37, с.250; **Ioffe B.L., Smilga A.V.** — Nucl. Phys. B, 1984, vol.232, p.109; **Беляев В.М., Коган Я.И.** — ЯФ, 1984, т.40, с.1035.
90. **Quinn P.A. et al.** — Phys. Rev. D, 1993, vol.47, p.1247; **Herczeg P.** — Phys. Rev. D, 1994, vol.49, p.247.
91. **The DAΦNE Physics Handbook** (eds. Maiani L., Panzeri G., Paver N.), INFN, Frascati, 1992.
92. **Gaillard M.K., Lee B.W.** — Phys. Rev. D, 1974, vol.10, p.897.
93. **Shifman M.A.** — Int. J. Mod. Phys. A, 1988, vol.3, p.2769; **Bijnens J., Gerard J.-M., Klein G.** — Phys. Lett. B, 1991, vol.257, p.191; **Herrlich S., Nierste U.** — Nucl. Phys. B, 1994, vol.419, p.292.
94. **Chizhov M.V.** — Preprint JINR, E2-94-253 (hep-ph/9407237), Dubna, 1994.
95. **Chizhov M.V.** — Mod. Phys. Lett. A, 1994, vol.9, p.2979.
96. **Kinoshita T., Sirlin A.** — Phys. Rev., 1959, vol.113, p.1652.
97. **Michel L.** — Proc. Phys. Soc. A, 1950, vol.63, p.514.
98. **Derenzo S.E.** — Phys. Rev., 1969, vol.181, p.1854.
99. **Arbuzov A.B., Kuraev E.A., Merenkov N.P., Makhaldiani N.V.** — Comm. JINR, E4-93-196, Dubna, 1993.
100. **Marciano W.J., Sirlin A.** — Phys. Rev. Lett., 1988, vol.61, p.1815.
101. **Fetscher W., Gerber H.-J.** — In: Precision Tests of the Standard Electroweak Model (ed. Langacker P.), World Scientific, Singapore, 1993.
102. **Rarita W., Schwinger J.** — Phys. Rev., 1941, vol.60, p.61.
103. **Bargmann V., Wigner E.P.** — Proc. Nat. Acad. Sci., 1948, vol.34, p.211.

УДК 617.741-004.1-02:617-001.29-092.9

ВЛИЯНИЕ УСКОРЕННЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВЫСОКИХ И РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭНЕРГИЙ НА ХРУСТАЛИК ГЛАЗА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЖИВОТНЫХ

Б.С.Федоренко, А.Н.Абросимова, О.А.Смирнова

Государственный научный центр РФ — Институт медико-биологических проблем, Москва

Представлен обзор результатов проведенных исследований и литературных материалов по проблеме радиационного катарактогенеза после воздействия излучений различного качества. Лабораторных животных облучали на ускорителях Объединенного института ядерных исследований (Дубна) протонами различных энергий, ионами гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон и углерода с энергией 300 МэВ/нуклон в широком диапазоне доз. Показана равная относительная биологическая эффективность (ОБЭ) протонов с энергией 50 и 645 МэВ и стандартного излучения, а также более высокая ОБЭ ускоренных заряженных частиц высоких и релятивистских энергий. Выявлена зависимость коэффициентов ОБЭ излучений как от ЛПЭ, так и от уровня использованных доз. Проанализировано действие низких доз радиации, а также влияние мощности дозы и фракционирования дозы ионизирующих излучений на катарактогенез. Обсуждается возможность использования данных по пострadiационному катарактогенезу у экспериментальных животных при оценке риска развития помутнений хрусталика у космонавтов при длительных космических полетах.

A review of the experimental results and literature data on the radiation cataractogenesis after exposure to different kinds of radiation is presented. On the accelerators of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna), the laboratory animals were exposed to protons of different energies, to helium ions with the energy of 4 GeV and to 300 MeV/nucleon carbon ions. It is shown that the 50 and 645 MeV protons and the standard rays have equal relative biological effectiveness (RBE) while charged accelerated particles of high and relativistic energies exhibit greater RBE. The dependence of the RBE coefficients for radiations of different kinds on both the LET and the dose levels is revealed. The action of the low dose ionizing radiation and the effects of the dose rate and of the dose fractionation on the cataractogenesis in laboratory animals are analyzed. The possibility of employing the data on the postradiation cataractogenesis in laboratory animals for estimation of the lens clouding risk in cosmonauts during long space missions is discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, основным источником радиационной опасности в космосе являются галактические космические лучи (ГКЛ), излучения солнечных вспышек и радиационных поясов Земли. Некоторое увеличение дозы ионизирующих излучений может происходить за счет ядерных энергетических установок на борту космических аппаратов. В составе ГКЛ присутствуют почти все ядра элементов периодической системы, но преобладают протоны высоких энергий (~85%) и альфа-частицы (~13%) [1,2]. Большая проникающая способность ГКЛ обуславливает фактически равномерное распределение поглощенной дозы в теле космонавта и создает большие проблемы в плане физической защиты. При прохождении ГКЛ через защиту корабля и попадании на тело человека возникают вторичные излучения с большими линейными потерями энергии (ЛПЭ), вклад которых в суммарную дозу может достигать 50+100%. С учетом вторичных излучений мощность дозы ГКЛ в межпланетном пространстве достигает 200+250 мбэр в сутки [3]. Суммарная доза от всех источников излучений может достигать 100 бэр и более за один год полета, а реакция со стороны кроветворной системы человека (костный мозг) возможна уже при достижении дозы 50 бэр. Чрезвычайно высокой радиочувствительностью отличается также хрусталик глаза млекопитающих. Согласно расчетам, проведенным на основании наблюдений частоты офтальмологических нарушений у переживших атомную бомбардировку в Японии, порог действия излучений с низкой ЛПЭ находится на уровне 0,6+1,5 Гр [4]. В условиях длительных воздействий редкоизирующих излучений доза излучения, которая может привести к развитию помутнений хрусталика с нарушением зрения, должна составлять более 8 Гр [5]. Однако ситуация существенно изменяется при действии заряженных частиц с высокой ЛПЭ. За трехлетний период полета на Марс в корабле с защитой из алюминия толщиной 4 г/см² поглощенная хрусталиком глаза суммарная доза таких компонентов ГКЛ, как ядра углерода и железа, составит 0,1 Гр [6]. Коэффициенты ОБЭ ионов углерода и железа при низких дозах достигают 50 [4]. Таким образом, в связи с более высокой биологической эффективностью тяжелых ядер ГКЛ риск возникновения помутнений хрусталика у космонавтов значительно возрастает. Это дает основание полагать, что предлагаемые методы физической защиты не смогут с достаточной эффективностью защитить космонавтов от действия космической радиации при длительных межпланетных полетах.

Настоящее сообщение посвящено анализу результатов собственных исследований и литературных материалов, касающихся оценки радиационной опасности для хрусталика при действии тяжелых заряженных частиц с различными ЛПЭ. Последние можно рассматривать как аналоги отдельных

составляющих космического излучения. Основной целью проведенных исследований являлось установление величины коэффициентов ОБЭ ускоренных заряженных частиц с различными физическими характеристиками. Получение таких сведений необходимо для оценки зависимости развивающихся эффектов от качества излучения, при обеспечении радиационной безопасности длительных космических полетов. С другой стороны, вопросы нормирования радиационных воздействий для человека в значительной степени основываются на изучении отдаленной лучевой патологии, куда относятся и постлучевые помутнения хрусталика. При действии ионизирующих излучений, естественно, могут повреждаться и другие ткани глаза. Однако они значительно более радиорезистентны, по сравнению с хрусталиком, и их описание не входит в нашу задачу.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Изучение катарактогенной активности ускоренных заряженных частиц и стандартного излучения проведено на 3090 мышах линии $F_1(BCA \times C_{57}BL_6)$ обоего пола массой 14—16 г. Животных подвергали общему или локальному (на голову) однократному облучению протонами с энергией 50, 645 МэВ и 9 ГэВ, ионами гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон и углерода с энергией 300 МэВ/нуклон (табл.1). Дозы однократного облучения в различных экспериментах варьировали от 0,25 до 6,0 Гр. Облучение мышей ионами углерода осуществляли в дозах 0,03±0,5 Гр. Кроме того, животных облучали фракционированно протонами с энергией 50 МэВ в суммарной дозе 6,0 Гр и протонами с энергией 645 МэВ в суммарных дозах 2, 4 и 6 Гр. Число фракций было равно двум, а интервал времени между ними составлял 7 суток. Дозы первого и второго радиационных воздействий совпадали. Облучение протонами с энергией 50 МэВ, рентгеновскими лучами и ионами углерода было локальным (на голову).

Использование мышей линии F_1 в данных экспериментах имеет целый ряд важных преимуществ. Во-первых, они отличаются достаточно высокой радиочувствительностью. Во-вторых, практически у всех здоровых мышей данной линии хрусталики абсолютно прозрачны. В-третьих, относительно небольшая продолжительность жизни этих животных (около 2 лет) дает возможность относительно быстро получить необходимую информацию о динамике происходящих изменений в хрусталике.

Протонами с энергией 50 и 645 МэВ животных облучали на синхротроне Лаборатории ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований (до его реконструкции). Циклотрон является источником протонов с энергией 680 МэВ, с плотностью потока протонов около

Таблица 1. Условия облучения животных

Вид и энергия излучения	Уровни доз, Гр	Мощность дозы, сГр/с	ЛПЭ, кэВ/мкм	Кол-во мышей	Способ облучения
Протоны, 50 МэВ	1,0—6,0	0,4	1,25	350	Локальное однократное или фракционированное
Протоны, 645 МэВ	1,0—6,0 1,0+1,0 2,0+2,0 3,0+3,0	6,3	0,25	600	Общее однократное или фракционированное
Протоны, 645 МэВ	4,0	0,3 3,0 30,0	0,25	100	Общее однократное
Протоны, 9 ГэВ	0,25—5,0	2,0	0,23	200	—
Ионы гелия, 4 ГэВ/нуклон	0,5—4,0	1,5	0,82	200	—
Ионы углерода, 300 МэВ/нуклон	0,03—1,0	0,004	12,0	200	Локальное однократное
Гамма-лучи ^{60}Co	0,5—6,0	6,0	0,25	560	Общее однократное
Гамма-лучи ^{137}Cs	0,1—1,0	0,06	0,25	100	—
Рентгеновские лучи, 180 кВ	1,0—6,0 3,0+3,0	1,0	0,25	350	Общее однократное или фракционированное
Необлученные животные	—	—	—	240	—

10^7 част.·см²·с⁻¹. Площадь сечения пучка протонов, выходящего из окна ускорителя, составляла 1—2 см². Для получения дозного поля протонов с энергией 645 МэВ использован свинцовый фильтр толщиной 1 см. В результате многократного рассеяния в фильтре пучок протонов расширялся, что обеспечивало равномерность дозного поля $\pm 5\%$ по коллиматору диаметром 10 см. Моноэнергетичность пучка протонов такой энергии не нарушалась на выходе из коллиматора [7,8].

Для создания дозного поля протонов с энергией 50 МэВ в качестве замедлителя протонов использован полиэтиленовый фильтр толщиной около 170 г·см². С целью улучшения моноэнергетичности пучка протонов и снижения вклада вторичных излучений выходящий из фильтра пучок пропускали через магнитное поле, отклоняющее в нужном направлении лишь заряженные частицы с заданной энергией. Заторможенный и очищенный от вторичного излучения пучок протонов направляли в один из коллиматоров, на выходе из которого размещали лабораторных животных. Энергию выведенного пучка оценивали по кривой ослабления в органическом стекле [7].

Максимальная интенсивность пучка протонов с энергией 50 МэВ, определяемая с помощью активационных детекторов, составляла $1,5 \cdot 10^6$ част. $\cdot \text{см}^2/\text{с}$, что соответствует мощности дозы 0,003 Гр/с. Перепад дозы в пределах поля облучения диаметром 10 см составлял $\pm 7\%$. Специально разработанная установка, включенная в цепь управления синхроциклотроном, контролировала величину заданных доз протонов и автоматически отключала ускоритель.

Для облучения биологических объектов ускоренными заряженными частицами (протонами, ионами гелия и углерода) на синхрофазотроне Лаборатории высоких энергий ОИЯИ также были специально созданы физические условия [9,10]. С помощью дублетов квадрупольных линз площадью до 30 см^2 сформировано поле облучения, неравномерность которого по дозе составляет $\pm 10\%$. Определение равномерности дозного поля в месте облучения биологических объектов проводилось с помощью дистанционного устройства с цилиндрическими ионизационными камерами. При этом вклад сопутствующего излучения в дозу по флюенсу не превышал 0,5%, а по дозе — 5,0%. Он контролировался с помощью полупроводникового детектора. Дозиметрию проводили, используя конденсаторные ионизационные камеры со сферическим чувствительным объемом $0,1 \text{ см}^3$. Эффективность собирания ионов в этой камере — не менее 95% при максимальных мощностях доз. Утечка заряда не превышает 5% в сутки. Энергия ускоренных протонов составляла 9 ГэВ ($dE/dx = 0,23 \text{ кэВ/мкм}$), а ионов гелия — 4 ГэВ/нуклон ($dE/dx = 0,82 \text{ кэВ/мкм}$). Максимальная интенсивность ядер релятивистской энергии — 10 частиц за цикл. Циклы длительностью 450 мс следовали через каждые 8 с. Выведенный из камеры ускорителя пучок частиц имел геометрические размеры $10 \times 20 \text{ мм}$. Более широкий пучок получали путем формирования исходного пучка с помощью дублетов квадрупольных линз. Расширенный пучок имел размеры $55 \times 55 \text{ мм}$. Местонахождение и профиль пучка регистрировались с помощью пропорциональных многонитевых камер. Равномерность поля облучения определялась с помощью координатного устройства и щелевых ионизационных камер. Для мониторингирования процесса облучения использована проходная плоскопараллельная двухсекционная ионизационная камера с диаметром рабочего объема 190 мм, равным диаметру ионопровода.

Система медленного вывода ускоренных ядер из камеры синхрофазотрона позволяет также получить пучки ионов углерода со сниженной энергией 300 МэВ/нуклон ($dE/dx = 12,6 \text{ кэВ/мкм}$), с интенсивностью потока до 10^7 частиц за цикл, продолжительность цикла составляла 9 с при длительности импульса до 50 мс. Формирование пучка для проведения радиобиологических исследований на лабораторных животных осуществлялось путем дефокусировки при использовании дублетов квадрупольных линз так-

же до размеров 55×55 мм с неравномерностью $\pm 10\%$ и вкладом сопутствующего излучения по интегральному флюенсу менее 1%, а по дозе — менее 5%. Поглощенная доза определялась и мониторировалась с точностью $\pm 10\%$. Характеристика дозных полей включала сведения о составе и энергетическом распределении вторичных заряженных частиц, необходимые для оценки их вклада в поглощенную дозу [11].

В качестве стандартного излучения использовали гамма- или рентгеновское излучение. Животных облучали на установке РХ- γ -30 с источником излучения ^{60}Co или на установке «Свет» с источником ^{137}Cs . В случае локального облучения животных использовали рентгеновские лучи 180 кВ (установка РУТ-250-15-1, сила тока 15 мА, фильтры 0,5 мм Cu и 1,0 мм Al).

Учитывали частоту и сроки появления помутнений хрусталика начальной стадии, а также динамику их созревания в зависимости от дозы излучений, ЛПЭ и длительности постлучевого периода. Частоту помутнений хрусталика определяли как процентное отношение числа глаз с помутнениями хрусталика к числу обследованных глаз в каждой группе экспериментальных животных. Полученные данные сравнивали с результатами аналогичных наблюдений, полученными после облучения животных стандартным излучением, а также в группе необлученных мышей. Осмотр хрусталиков проводили с помощью электроофтальмоскопа и линзы $\pm 15,0$ Д перед каждым облучением и далее через каждые четыре недели до конца жизни животных. Для расширения зрачка использовали 1% раствор гидробромистого гоматропина. Облучение и осмотр животных проводили без анестезии. Помутнения хрусталика диагностировали по стадиям, используя методику, предложенную для мелких лабораторных животных [12], согласно которой выделяют четыре стадии помутнений хрусталика. Первая стадия характеризуется появлением мелких точек под задней капсулой хрусталика, которые группируются и образуют небольшие скопления. На второй стадии количество точечных помутнений увеличивается, часть их сливается, образуя непрозрачный диск в центре хрусталика. При третьей стадии диск увеличивается в размерах и от него во все стороны расходятся лучи, помутнение приобретает хлопьевидную структуру. Четвертая стадия — это полное помутнение хрусталика. Использование данной методики позволило сопоставить результаты проведенных нами исследований с данными других авторов, полученными в экспериментах на мелких лабораторных животных.

При оценке значений коэффициентов ОБЭ излучений релятивистских энергий и тяжелых заряженных частиц нами был использован непараметрический метод, предложенный в [13]. Метод заключается в следующем. Пусть при воздействии на биологические объекты стандартного излучения в дозах $D_{A1}, D_{A2}, \dots, D_{AN}$ зарегистрированы уровни эффекта $A_1, A_2, \dots, A_N$, а при воздействии исследуемого излучения в дозах $D_{B1}, D_{B2}, \dots, D_{BM}$ —

уровни эффекта $B_1, B_2, \dots, B_M$. С помощью статистических тестов уровень эффекта B_1 , обусловленный дозой исследуемого излучения D_{B1} , сравнивается с уровнем эффекта A_1 , вызванного дозой D_{A1} стандартного излучения. Если разница между уровнями эффекта A_1 и B_1 статистически недостоверна, то коэффициент ОБЭ, равный отношению доз стандартного и исследуемого видов излучений $\text{ОБЭ}_1(D_{B1}) = D_{A1}/D_{B1}$, считается значимым. В противном случае величина коэффициента $\text{ОБЭ}_1(D_{B1})$ рассматривается как статистически недостоверная. Далее производится последовательное сравнение уровня эффекта B_1 с уровнем $A_2, \dots, A_N$. В результате получается интервал значимых коэффициентов ОБЭ ($\text{ОБЭ}_{\min}(D_{B1}) \div \text{ОБЭ}_{\max}(D_{B1})$), соответствующих дозе исследуемого излучения D_{B1} . Подобная процедура проводится для всех других уровней эффекта $B_2, \dots, B_M$, вызванных дозами $D_{B2}, \dots, D_{BM}$ исследуемого излучения. Тем самым определяется дозовая зависимость коэффициентов ОБЭ. Что касается статистических тестов, то при сравнении уровней эффекта типа «все или ничего», используется критерий χ^2 или тест Fisher [13,14]. В тех случаях, когда биологический эффект имеет несколько градаций, применяется непараметрический критерий Wilcoxon [13]. Результаты представляются либо в виде таблиц, в которых приводятся граничные значения интервала значимых коэффициентов ОБЭ ($\text{ОБЭ}_{\min} \div \text{ОБЭ}_{\max}$), либо в виде графиков. На графиках по оси абсцисс откладываются дозы исследуемого излучения, а по оси ординат — значения коэффициентов ОБЭ. Границы интервала значимых коэффициентов ОБЭ обозначают стрелками. Вертикальные линии соответствуют области статистически недостоверных значений ОБЭ.

В данной работе коэффициенты ОБЭ исследуемых излучений по сравнению со стандартным излучением оценивали по частоте пострадиационных помутнений хрусталика. При этом рассматривалось пять градаций степени помутнения хрусталика, включая нулевую, которая обозначала отсутствие помутнения. Поэтому при расчете статистически значимых коэффициентов ОБЭ использовался критерий Wilcoxon.

В ряде случаев коэффициенты ОБЭ рассчитывали традиционным методом — путем сопоставления равноэффективных доз стандартного и исследуемого излучений для каждого срока наблюдения. В частности, это имело место при обработке экспериментальных данных по облучению животных протонами с энергией 50 и 645 МэВ.

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕДЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Особенности формирования помутнений хрусталика после облучения животных протонами высоких энергий. Исследование катарактогенной активности нейтронов и рентгеновских лучей, а также изучение морфологических изменений хрусталика, развивающихся в более ранний период после облучения, не выявили каких-либо качественных различий воздействия этих излучений [15,16]. В равной мере это относится и к ускоренным заряженным частицам различных энергий [17,18]. Появлению видимых изменений хрусталика предшествует скрытый или латентный период, длительность которого зависит от уровня доз, интенсивности излучения и других условий облучения. В частности, первые точечные помутнения хрусталика у мышей возникали через 8 недель после общего облучения протонами с энергией 645 МэВ и гамма-лучами в дозах 4 и 6 Гр и через 10 недель — после локального облучения протонами с энергией 50 МэВ в тех же дозах. Облучение животных протонами в дозах 1 и 2 Гр приводит к развитию помутнений хрусталика начальной стадии через 10 и 15 недель после общего и локального воздействия соответственно. Следует отметить, что у определенной части необлученных животных развиваются старческие помутнения хрусталика, которые выявляются, как правило, спустя 19—20 недель от начала эксперимента. Развитие их протекает более медленно, чем у облученных животных, и они редко достигают полного созревания у этой линии мышей. В несколько замедленном темпе развивалось также помутнение хрусталика у мышей, облученных протонами с энергией 50 МэВ, что может быть обусловлено низкой мощностью дозы. Причем дозовая зависимость длительности латентного периода (интервала времени между облучением и появлением первых признаков помутнения) была близка к линейной:

$$\lambda = \lambda_0 - \alpha D, \quad (1)$$

где λ — длительность латентного периода, [сут]; D — доза, [Гр]; α — коэффициент регрессии, [сут·Гр⁻¹]; λ_0 — длительность латентного периода образования помутнений хрусталика у необлученных животных, считая от момента рождения, [сут]. Эксперименты по облучению мышей протонами с энергией 645 МэВ и гамма-лучами показали, что частота образования помутнений хрусталика возрастает с увеличением дозы. Статистический анализ полученных результатов не выявил достоверных различий в эффектах, вызываемых этими видами излучений. Полученные данные позволили также найти зависимость частоты помутнений хрусталика у мышей от дозы протонов и гамма-излучения в различные сроки наблюдения (рис. 1). Эта зависимость близка к линейной:

$$v = v_0 + 100\% \cdot \beta D, \quad (2)$$

где v — частота помутнений хрусталика у облученных животных, %; D — доза, [Гр]; v_0 — частота помутнений хрусталика у необлученных животных, %; β — коэффициент регрессии, [Гр⁻¹].

Как видно из рис.1 и как показали расчеты (табл.2), при увеличении срока наблюдения от 10 до 40 недель коэффициенты v_0 и β увеличиваются. В более отдаленные сроки (56 и 68 недель) коэффициент v_0 продолжает расти, а значения коэффициента β остаются практически неизменными. Данный результат указывает на то, что к 40 неделям после облучения потенциальные повреждения хрусталика уже проявились полностью. Дальнейшее нарастание их частоты происходит, по-видимому, только за счет увеличения частоты старческих помутнений хрусталика, которые возникали у части старых необлученных животных.

Для более полной характеристики действия протонов с энергией 645 МэВ на процесс формирования помутнений хрусталика у мышей нами

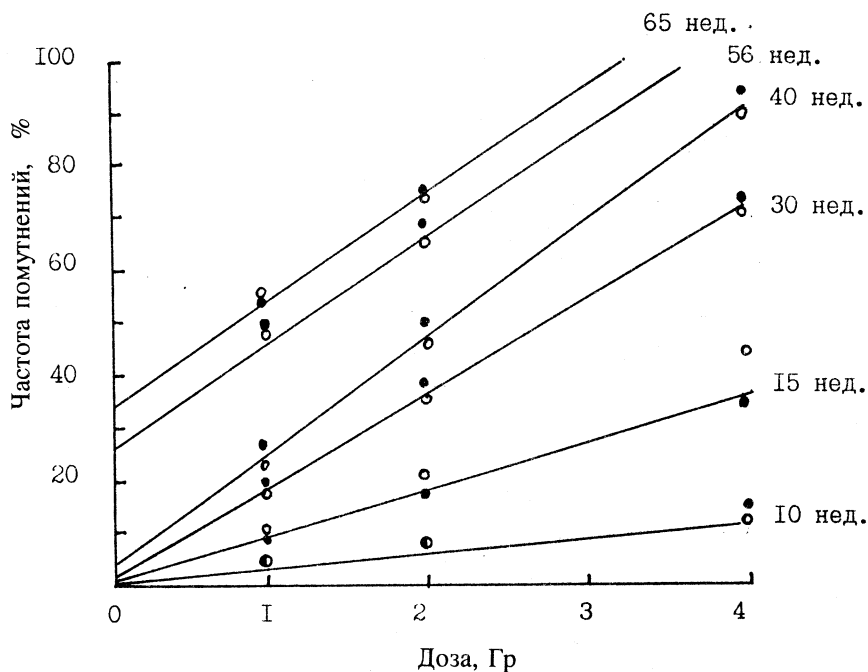


Рис.1. Зависимость частоты помутнений хрусталика у мышей от дозы протонов с энергией 645 МэВ (•) и гамма-излучения ^{60}Co (о) в разные сроки после облучения

Таблица 2. Значения коэффициента β в уравнении (2), вычисленные для разных сроков исследования частоты помутнений хрусталика у мышей

Время наблюдения, нед.	Коэффициент β , Гр ⁻¹
10	0,03
15	0,09
30	0,17
40	0,22
56	0,21
68	0,22

прослежены сроки, необходимые для развития отдельных стадий помутнения хрусталика. Было установлено, что длительность периода, необходимого для формирования первой стадии помутнения хрусталика, находится в пределах 55+70 дней, второй стадии — 175+280 дней, третьей стадии — 370+450 дней и четвертой стадии — 460+570 дней. При этом сопоставление данных по развитию отдельных стадий помутнения хрусталика, индуцированных протонами с энергией 645 МэВ и гамма-лучами ⁶⁰Со, не выявило достоверных различий и, таким образом, подтвердило мнение о равной биологической эффективности двух видов излучения.

Изучение закономерностей развития помутнений хрусталика у мышей, облученных протонами с энергией 50 МэВ и рентгеновскими лучами 180 кВ при локальном воздействии на голову животных, выявило следующие закономерности. Сроки развития помутнений хрусталика при действии протонов 50 МэВ и рентгеновских лучей различны. После облучения протонами в дозе 6 Гр частота помутнений хрусталика до 30 недель была почти в два раза ниже, чем после рентгеновского облучения. В дальнейшем происходило выравнивание эффектов после воздействия протонов и рентгеновских лучей, и к 50-недельному сроку достоверных различий в эффективности этих излучений не обнаружено. Зависимость частоты помутнений хрусталика от дозы, как и в рассмотренном выше случае, имела линейный характер.

Изучение динамики созревания катаракты у экспериментальных животных показало, что первая стадия помутнений хрусталика у мышей развивается не ранее, чем через 10 недель после облучения, и достигает максимальной частоты (21, 36 и 76%) к 30—40 неделям после облучения протонами в дозах 1, 2 и 4 Гр соответственно. В дальнейшем происходит уменьшение частоты помутнений хрусталика начальных стадий за счет перехода помутнений хрусталика к следующей стадии зрелости. Этот процесс также зависит от величины дозы излучения. После облучения мышей протонами в дозе 4 Гр частота помутнений второй стадии достигала максимального уров-

ня (83%) к 44 неделям, у животных, облученных в дозах 1 и 2 Гр, — к 68 неделям. В последующие сроки частота помутнений хрусталика снижалась при всех уровнях воздействующих доз в связи с дальнейшим созреванием катаракты, однако помутнения хрусталика третьей стадии обнаруживались лишь у мышей, облученных протонами и гамма-излучением в дозах не ниже 2 Гр. Они формировались к 65 неделям, а к 81 неделе после облучения частота их достигала 40%. Зрелые катаракты (3%) появлялись после 65 недель, и через 81 неделю частота их достигала 27%. К этому сроку большинство облученных животных погибло, и поэтому проследить динамику созревания помутнений хрусталика в более поздние сроки оказалось невозможным.

Динамика созревания помутнений хрусталика у животных, облученных протонами с энергией 50 МэВ и рентгеновскими лучами, имела некоторые особенности. Развитие отдельных стадий помутнений хрусталика в этом случае происходило в замедленном темпе. У животных формировались преимущественно помутнения хрусталика первой и второй стадии. Катаракты третьей стадии развивались лишь у 1—2% животных и не раньше, чем через 30-35 недель после облучения. После воздействия рентгеновского излучения развитие помутнений хрусталика происходило более интенсивно. Животные, облученные протонами 50 МэВ, обычно не доживали до появления зрелой катаракты, тогда как после рентгеновского облучения частота зрелых катаракт (четвертая стадия) достигала 30% к 80 неделям после воздействия. Эти различия обусловлены разной мощностью дозы протонов и рентгеновского излучения, что было подтверждено результатами специально поставленных экспериментов [19].

Большой интерес представляют экспериментальные исследования катарактогенной активности протонов на крупных лабораторных животных. Более чем 20-летние наблюдения за обезьянами, подвергнутыми облучению в двухлетнем возрасте протонами с энергиями от 32 до 2300 МэВ в широком диапазоне доз, свидетельствуют о прогрессирующем нарастании частоты помутнений хрусталика спустя 18—20 лет после воздействия [20,21]. Коэффициент ОБЭ протонов с энергией 55 МэВ в этом случае также был близок к единице. Таким образом, сопоставление равноэффективных по катарактогенной активности доз протонов и стандартного излучения свидетельствует о том, что коэффициенты ОБЭ протонов в диапазоне энергий от 50 до 645 МэВ равны единице. О равной биологической эффективности протонов с энергией 60 МэВ и стандартного излучения свидетельствуют также результаты экспериментов [22], в которых о катарактогенной активности излучений судили по величине отношения объемов измененной и неизмененной частей хрусталика экспериментальных животных. Вместе с тем следует учитывать, что не только снижение энергии протонов, но и межвидовые различия лабораторных животных, а также другие биологичес-

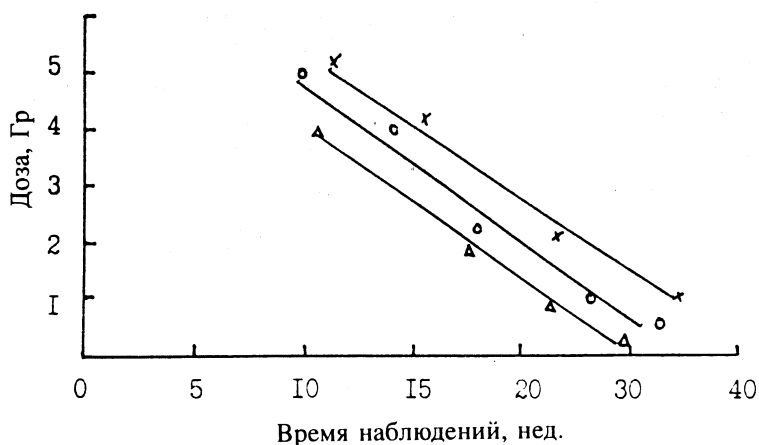


Рис.2. Зависимость длительности латентного периода образования 30%-ного уровня помутнений хрусталика от дозы ионов гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон (Δ), протонов, 9 ГэВ ($\circ$) и гамма-лучей ^{60}Co ($\times$)

кие и физические факторы могут изменить это отношение. В частности, исследования состояния хрусталика у кроликов при фракционированном облучении рентгеновскими лучами и протонами показали, что коэффициент ОБЭ протонов с энергией 100 МэВ достигал примерно 2, а протонов с энергией 20 МэВ — 3 [23].

Помутнения хрусталика у мышей, облученных заряженными частицами релятивистских энергий. Несколько иные закономерности развития помутнений хрусталика отмечены у экспериментальных животных, облученных протонами с энергией 9 ГэВ и ионами гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон, по сравнению с особенностями формирования катаракты, индуцированной протонами более низких энергий и стандартным излучением [17,24]. Различия носили в основном количественный характер и касались прежде всего сроков появления первых видимых помутнений хрусталика. После воздействия ионов гелия и протонов релятивистских энергий в дозах 4+5 Гр первые точечные помутнения хрусталика обнаруживались спустя 4 недели, а в дозах 0,5+2,0 Гр — через 8 недель после облучения. Соответственно после гамма-облучения аналогичные эффекты выявлялись через 8 и 10 недель. Иначе говоря, после облучения протонами и ионами гелия сроки развития помутнений хрусталика существенно сокращались в зависимости от величины дозы излучений (рис.2).

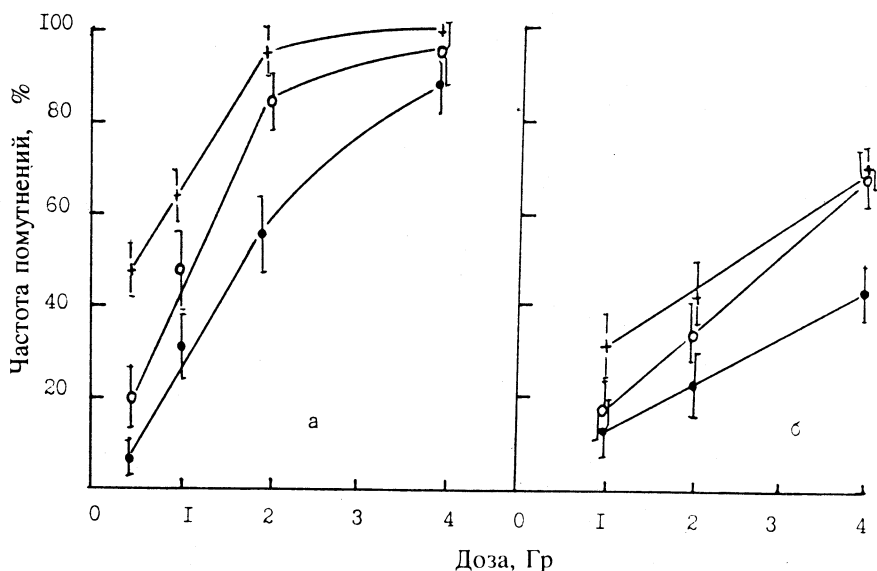


Рис.3. Зависимость частоты образования помутнений хрусталика от дозы ионов гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон (а), и гамма-излучения (б) через 20 (•), 30 (○) и 40 (+) недель после облучения

Анализ полученных результатов показал, что при выбранных сроках наблюдения зависимость частоты помутнений хрусталика от дозы имеет линейный характер в интервале доз 0,5÷2,0 Гр (рис.3). При увеличении дозы ионов гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон от 2,0 до 4,0 Гр частота помутнений хрусталика растет нелинейно и достигает приблизительно одинакового уровня (95—100%) при всех трех выбранных сроках исследования.

Аналогичный характер имеет зависимость частоты помутнений хрусталика от дозы протонов с энергией 9 ГэВ в наиболее отдаленный от момента облучения срок наблюдения (рис.4). В интервале доз 0,5÷1,0 Гр она линейна, а затем выходит на постоянный уровень (95%). При более ранних сроках исследования эта зависимость линейна на всем исследованном интервале доз 0,5÷5,0 Гр.

Что касается зависимости частоты помутнений хрусталика от гамма-излучения, то при выбранных сроках наблюдения она линейна во всем интервале исследованных доз (рис.3, 4).

Важно отметить, что результаты, представленные на рис. 3 и 4, указывают на более высокую интенсивность образования помутнений хрусталика

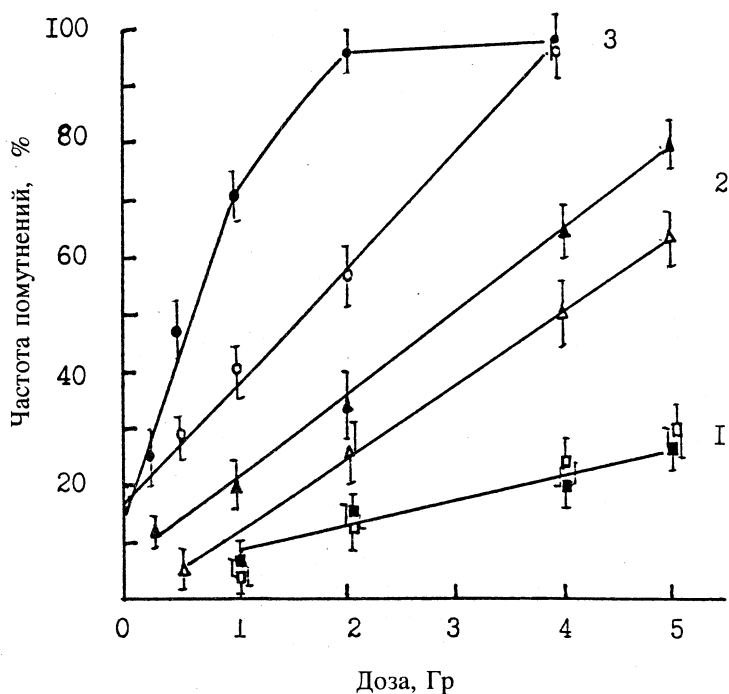


Рис.4. Зависимость частоты образования помутнений хрусталика у мышей от дозы протонов с энергией 9 ГэВ (●, ▲, ■) и гамма-излучения ^{60}Co (○, △, □) через 13 (1), 20 (2) и 40 (3) недель после облучения

у животных, облученных ионами гелия и протонами релятивистских энергий, чем у животных, подвергнутых гамма-облучению.

Результаты экспериментов свидетельствуют о том, что частота помутнений хрусталика является линейной функцией времени, прошедшего после облучения ионами гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон в дозах 1-4 Гр (рис.5):

$$v = v_0 + 100\% \cdot \delta t, \quad (3)$$

где v — частота помутнений хрусталика у облученных животных, %; t — время, прошедшее после облучения, недели; v_0 — частота помутнений хрусталика животных перед облучением, %; δ — коэффициент регрессии, нед. $^{-1}$. Значения коэффициента δ , рассчитанные для ионов гелия и протонов, а также отношения этих величин, рассчитанные для исследуемых и стандартных излучений, указывают на более высокую интенсивность обра-

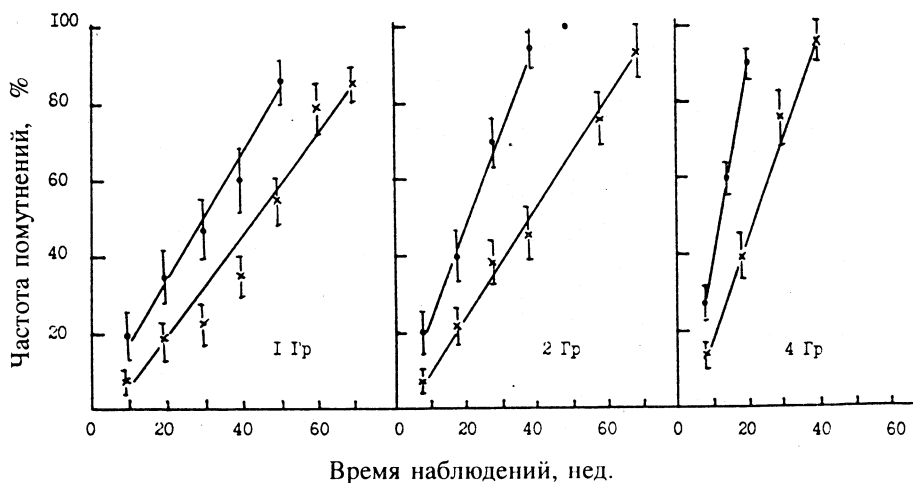


Рис.5. Зависимость частоты образования помутнений хрусталика у мышей от времени, прошедшего после облучения ионами гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон (•), и гамма-лучами ^{60}Co (x) в дозах 1, 2 и 4 Гр

Таблица 3. Значения коэффициента δ , рассчитанные для разных доз ускоренных заряженных частиц релятивистских энергий и стандартного гамма-излучения

Доза, Гр	Значения коэффициента δ			Отношения	
	Гелий	Протоны	γ -лучи	$\frac{\delta\text{-гелий}}{\delta\text{-гамма}}$	$\frac{\delta\text{-прот.}}{\delta\text{-гамма}}$
0,5	—	1,47	1,20	—	1,22
1,0	1,83	2,30	1,46	1,25	1,74
2,0	3,25	3,75	1,55	2,09	2,37
4,0	5,20	7,0	2,12	2,45	1,48

зования помутнений хрусталика после воздействия ускоренных заряженных частиц (табл.3).

Результаты проведенных исследований позволили определить величину коэффициентов ОБЭ протонов и ионов гелия релятивистских энергий. На рис.6 представлена дозовая зависимость коэффициентов ОБЭ протонов (a) и ионов гелия (б) в различные сроки после воздействия излучений. Как можно видеть, характерно снижение значений коэффициентов ОБЭ при увеличении дозы. Для срока наблюдения 25 недель коэффициенты ОБЭ

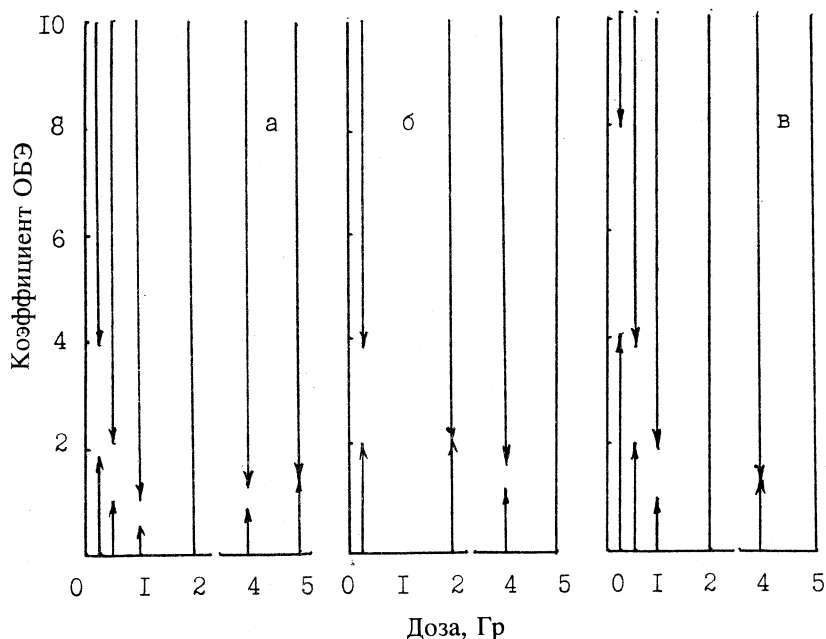


Рис.6. Зависимость величины коэффициентов ОБЭ протонов с энергией 9 ГэВ от дозы через 25 (а), 40 (б) и 67 (в) недель после облучения

протонов уменьшались от 2—4 при дозе 0,25 Гр до 1—2 при дозе 5,0 Гр, а спустя 67 недель после облучения коэффициенты ОБЭ уменьшались от 4—8 для дозы 0,25 Гр до 1,0 для дозы 4,0 Гр.

Ближние значения коэффициентов ОБЭ установлены для протонов с энергией 3 ГэВ [25].

Таким образом, исследования ОБЭ протонов и ионов гелия релятивистских энергий, а также высокоэнергетических ускоренных заряженных частиц с различными ЛПЭ установили более высокую катарактогенную эффективность этих излучений по отношению к протонам в диапазоне энергий 50+645 МэВ и стандартному излучению. Частота образования помутнений хрусталика является функцией дозы и времени, прошедшего после облучения.

Влияние низких доз ускоренных заряженных частиц на частоту помутнений хрусталика. Изучение биологических эффектов, обусловленных низкими дозами ионизирующих излучений, является одной из наиболее актуальных проблем космической радиобиологии. Анализ радиационной

обстановки на трассе Земля — Марс, проведенный американскими специалистами, свидетельствует о том, что риск развития помутнений хрусталика у космонавтов достаточно высок [6]. Доза на хрусталик в результате воздействия только ядер углерода и железа за трехлетний период полета к Марсу может достичь 0,1 Гр [6].

В экспериментах на животных, однократно облученных ионами углерода с энергией 300 МэВ/нуклон, первые мелкоточечные помутнения хрусталика в виде отдельных вакуолек обнаруживались уже через 6 недель после облучения в дозах 0,1÷0,5 Гр [26]. Более низкие дозы ионов углерода (0,03 и 0,05 Гр) приводили к появлению первых признаков нарушения прозрачности хрусталика спустя 14 недель после лучевого воздействия, тогда как после гамма-облучения в дозах 4,0÷6,0 Гр аналогичные изменения хрусталика были обнаружены лишь спустя 8-10 недель, а при дозах 0,5÷2,0 Гр — через 15 недель после облучения. Помутнения хрусталика постоянно прогрессировали, и через 17,5 недель после облучения ионами углерода в дозах 0,03 и 0,05 Гр, а также через 30 недель после гамма-облучения в дозах 2,0÷6,0 Гр, у некоторых животных была отмечена вторая стадия помутнения хрусталика. При дозах 0,5 и 1,0 Гр помутнения хрусталика второй стадии у мышей появились через 42 недели после облучения. К этому сроку у некоторых животных, облученных гамма-лучами в дозе 6,0 Гр, помутнения хрусталика достигали третьей стадии, тогда как у мышей, облученных ионами углерода, развитие помутнений хрусталика задерживалось на второй стадии до 70 недель после облучения. Как указывалось выше, задержка созревания лучевых помутнений хрусталика у экспериментальных животных в значительной степени может быть связана с величиной мощности дозы излучения. Подобная динамика развития помутнений хрусталика характерна также для облучения протонами с энергиями 50÷645 МэВ в дозах 1,0÷2,0 Гр.

Изучение динамики помутнений хрусталика начальной стадии у мышей, облученных ионами углерода, выявило интересный феномен: в более отдаленные сроки исследования их частота у некоторых групп животных могла оказаться несколько ниже, чем в предыдущие сроки. Эта особенность формирования помутнений хрусталика известна как для редкоионизирующих, так и для плотноионизирующих излучений и, по-видимому, обусловлена вариабельностью индивидуальной радиочувствительности хрусталика. Вместе с тем тенденция нарастания частоты помутнений хрусталика с увеличением длительности постлучевого периода сохранялась, и к 49 неделям после облучения в дозе 0,5 Гр частота помутнений хрусталика начальных стадий достигала 100% (табл.4).

Процесс формирования отдельных стадий помутнений хрусталика у мышей, облученных ионами углерода и гамма-лучами, протекал сходным образом, хотя дозы этих излучений различались на порядок. Зависимость частоты помутнений хрусталика от дозы ионов углерода имела нелинейный ха-

Таблица 4. Частота помутнений хрусталика у мышей в разные сроки после облучения ионами углерода с энергией 300 МэВ/нуклон и гамма-излучением ^{60}Co

Сроки после облучения, недели	Ионы углерода		Гамма-лучи	
	Доза, Гр	Частота помутнений, %	Доза, Гр	Частота помутнений, %
6—10	0,03	—	1,0	6,8±3,3
	0,05	—	2,0	7,3±2,6
	0,10	4,0±4,0	4,0	13,0±5,8
	0,25	16,7±7,1	5,0	33,4±6,9
	0,50	15,6±6,5	6,0	50,0±8,0
	Контроль	—		—
20—23	0,03	13,6±7,3	0,5	6,5±3,4
	0,05	35,7±12,0	1,0	16,0±5,9
	0,10	32,3±12,0	2,0	27,1±4,2
	0,20	58,4±15,0	4,0	52,06±6,7
	0,25	64,2±12,8	5,0	65,0±7,0
	0,50	64,2±11,8	6,0	83,2±5,0
	Контроль	—		—
30	0,03	20,8±8,3	0,5	18,0±3,8
	0,05	19,3±7,0	1,0	28,1±5,2
	0,10	35,7±13,0	2,0	46,6±6,5
	0,20	37,5±15,0	4,0	93,0±3,8
	0,25	42,8±13,2	5,0	100,0
	0,50	50,0±18,0	6,0	100,0
	Контроль	12,5±5,9		—
40—43	0,03	15,8±8,4	0,5	22,2±4,2
	0,05	20,0±12,6	1,0	35,0±5,7
	0,10	50,0±12,0	2,0	60,1±3,1
	0,25	54,6±15,7	4,0	100,0
	0,50	77,0±11,6	5,0	100,0
	Контроль	15,6±3,1	6,0	100,0

ракти, тогда как в случае гамма-облучения дозовая зависимость была линейной (рис.7). Подобный характер зависимости доза — эффект, как указывалось выше, характерен и для заряженных частиц релятивистских энергий [18, 24].

Статистический анализ полученных результатов позволил установить, что дозу ионов углерода 0,05 Гр можно считать пороговой для образования помутнений хрусталика у мышей, поскольку частота помутнений хрусталика у этих животных достоверно превышала уровень старческих помут-

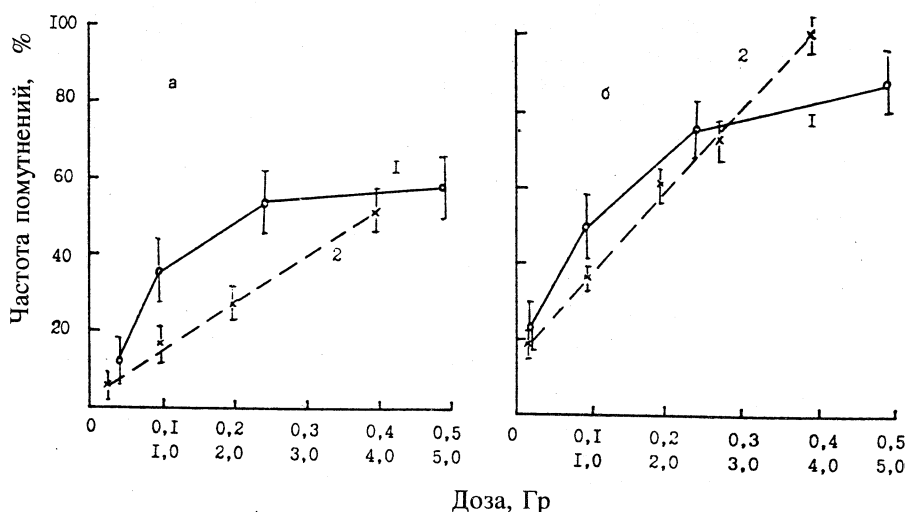


Рис. 7. Зависимость частоты помутнений хрусталика от дозы ионов углерода с энергией 300 МэВ/нуклон (1), и гамма-излучения ^{60}Co (2) через 20 (а) и 40 (б) недель после облучения. По оси абсцисс — доза, [Гр], верхняя шкала для ионов углерода, нижняя — для гамма-лучей

нений хрусталика у необлученных (интактных) мышей. На этом уровне находится также пороговая доза для индукции катаракт ускоренными ионами железа с энергией 600 МэВ/нуклон [27], тогда как для гамма-излучения пороговая доза была близка к 2,0 Гр [26].

Расчеты коэффициентов ОБЭ ионов углерода, проведенные на основании экспериментальных результатов в трех повторностях, показали, что наиболее высокие значения коэффициентов ОБЭ получены в области доз от 0,03 до 0,25 Гр (табл.5). Так, при дозе 0,03 Гр значимые интервалы коэффициентов ОБЭ составляли $16,7 \pm 33,3$ через 30 недель и $16,7 \pm 66,7$ через 50 недель после облучения. При дозе 0,1 Гр коэффициент ОБЭ возрастал от 10,0 к 30 неделям до 20 к 50 неделям. После облучения животных ионами углерода в дозе 0,5 Гр диапазон изменения коэффициентов ОБЭ находился в пределах 1+4, то есть был таким же, как и для протонов с энергией 9 ГэВ. И только в ранние сроки исследования (20 недель) величина его варьировала от 8 до 12 [26].

Высокая катарактогенная эффективность характерна для низких доз ионов углерода с энергией 400 МэВ/нуклон [28]. В экспериментах на мышах, облученных однократно и фракционированно ионами углерода в дозах

Таблица 5. Дозовая зависимость коэффициентов ОБЭ ионов углерода с энергией 300 МэВ/нуклон при различных сроках исследования. Приведены интервалы статистически значимых коэффициентов ОБЭ ($ОБЭ_{min} - ОБЭ_{max}$)

Доза, сГр	Сроки наблюдения, недели			
	31	43	50	64
3,0	16,7—33,3	—	16,7—66,7	—
5,0	10,0—20,0	10,0—20,0	10,0	—
10,0	10,0	—	5,0—20,0	10,0—20,0
15,0	13,3	13,3—40,0	3,3—26,7	6,7—13,3
20,0	2,5—10,0	—	2,5—10,0	5,0—10,0
25,0	8,0	2,0—4,0	2,0—8,0	4,0—8,0
50,0	2,0—4,0	4,0	1,0—4,0	2,0—4,0

от 0,05 до 0,9 Гр, коэффициенты ОБЭ изменялись от 5 до 1—2 в зависимости от величины дозы.

Такие же закономерности развития помутнений хрусталика установлены у крыс, облученных локально (голова) ускоренными ионами аргона с энергией 570 МэВ/нуклон и рентгеновским излучением 185 кВ в различных дозах [29]. Самые ранние нарушения прозрачности хрусталика после облучения ионами аргона в дозе 1 Гр обнаруживались в центральной и задней подкапсулярной областях хрусталика, тогда как у животных, облученных в дозе 3,5 Гр — в центральной передней субкапсулярной зоне. Скорость их развития также проявляла отчетливую зависимость от дозы излучения. Коэффициенты ОБЭ ионов аргона увеличивались со снижением величины дозы и составляли 6—10 после облучения в дозе 10 Гр [30] и около 40 — при дозе 0,05 Гр [29].

Очень высокие значения коэффициентов ОБЭ найдены при обработке непараметрическим методом результатов экспериментов по катарактогенному действию низких доз (0,01—0,25 Гр) ионов аргона с энергией 570 МэВ/нуклон на хрусталик 28-дневных крысят линии Columbia-Sherman. Для срока наблюдения 62 недели после облучения коэффициенты ОБЭ ионов аргона находились между 50 и 100 при дозе 0,01 Гр, между 10 и 50 при дозе 0,05 Гр и между 4 и 8 при дозе 0,25 Гр [6]. Причем не исключено, что для более ранних сроков наблюдения коэффициенты ОБЭ могли быть еще более высокими.

Таким образом, анализ полученных результатов свидетельствует о высокой опасности малых доз тяжелых заряженных частиц в плане возрастания риска развития помутнений хрусталика глаза в отдаленные сроки после лучевого воздействия.

Формирование помутнений хрусталика при различной мощности дозы ионизирующих излучений. Влияние мощности дозы ионизирующих

излучений на частоту и сроки возникновения помутнений хрусталика до настоящего времени остается мало исследованным. Между тем в проблеме нормирования радиационных воздействий этот вопрос имеет важное значение.

С целью выяснения возможности влияния мощности дозы излучений на частоту и сроки образования помутнений хрусталика мышей облучали протонами с энергией 645 МэВ в дозе 4 Гр при значениях мощности дозы: 0,18; 1,8 и 18,0 Гр/мин. На рис.8 представлена зависимость частоты образования помутнений хрусталика от времени, прошедшего после облучения животных протонами с тремя указанными мощностями доз. Расчеты показали, что у мышей первой группы (0,18 Гр/мин) помутнения хрусталика возникали со скоростью $(1,1 \pm 0,2)\%$ в неделю, у мышей второй группы (1,8 Гр/мин) — со скоростью $(1,6 \pm 0,2)\%$ в неделю и, наконец, у животных третьей группы, облученных протонами с мощностью дозы 18,0 Гр/мин, скорость возникновения помутнений хрусталика составляла $(1,9 \pm 0,2)\%$ в неделю.

Аналогичная закономерность получена при анализе результатов эксперимента, в котором мыши подвергались облучению протонами 645 МэВ в дозах 0,5; 1,0 и 2,0 Гр и с мощностями доз 0,7 и 7,0 сГр/мин (табл.6). Анализ дозовых зависимостей частоты помутнений хрусталика у мышей, облученных протонами 645 МэВ, показал следующее. Для всех сроков наблюдения изменение указанного показателя в расчете на единицу дозы тем значительнее, чем больше мощность дозы радиационного воздействия N . В частности, при сроках наблюдения 8, 25 и 40 недель увеличение частоты помутнений хрусталика при росте дозы на 1 сГр составляет 0,06; 0,22 и 0,34%, если $N = 0,7$ сГр/мин, и 0,15; 0,41 и 0,65%, если $N = 7,0$ сГр/мин.

Таким образом, дозовые и динамические характеристики развития помутнений хрусталика у животных, облученных протонами с энергией 645 МэВ, находятся в прямой зависимости от мощности дозы радиации.

Сопоставление биологических эффектов кратковременного и протяженного гамма-облучения морских свинок с различной мощностью дозы показало, что восстановление нарушений, развивающихся в организме животных, после длительного облучения наступает раньше, чем после кратковременного. Одной из причин различия в эффектах протяженного и кратковременного лучевого воздействия являются различия в продолжительности жизни клеток и длительности облучения. Предполагают, что различия в «устойчивости» к протяженному облучению различных клеток могут быть связаны с дозой, приходящейся на ту или иную фазу клеточного цикла. С другой стороны, ослабление пролонгированных облучений может определяться ролью восстановительных процессов, происходящих непосредственно на протяжении лучевого воздействия. С увеличением продолжительности облучения должна возрастать доля лучевых повреждений, репарирующих в процессе облучения [31, 32].

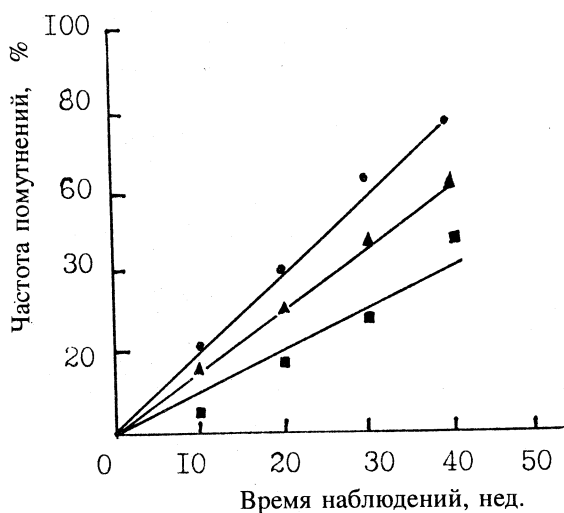


Рис.8. Зависимость частоты помутнений хрусталика у мышей от срока наблюдения после облучения протонами с энергией 645 МэВ в дозе 4 Гр с мощностью дозы 0,18 (■), 1,8 (▲) и 18,0 (•) Гр/мин

Таблица 6. Скорость возникновения (ν) помутнений хрусталика у мышей, облученных протонами 645 МэВ с различными дозами и мощностями доз

Мощность дозы, сГр/мин	Доза, Гр	ν , % в неделю
0,7	0,5	0,40
	1,0	0,55
	2,0	2,35
7,0	0,5	0,85
	1,0	1,55
	2,0	3,10

Чрезвычайно высокой радиопоражаемостью, также зависящей от мощности дозы излучений, отличаются структурные образования глаза в процессе эмбриогенеза. Как установлено в эксперименте на крысах, облученных на 11 день беременности, высокая частота различных аномалий глаз у потомства отмечалась, если доза рентгеновских лучей была выше 50 рад. При облучении в дозе 100 рад при мощностях доз 0,1; 2,0; 3,3; 5,0; 10,0; 25,0 и 47,0 рад/мин авторы выявили быстрое увеличение частоты повреждений глаз животных, подвергнутых облучению в перинатальном периоде с

мощностью дозы 3,3 и 10,0 рад/мин. Дальнейшее увеличение мощности дозы до 47,0 рад/мин не приводило к значительному увеличению эффекта [33].

Частота образования помутнений хрусталика после фракционированного облучения. Для изучения процессов пострadiaционного восстановления в хрусталике глаза экспериментальных животных были предприняты эксперименты с облучением мышей протонами с энергией 50 и 645 МэВ. При этом использован метод сопоставления величины эффектов, наблюдаемых при одно- и двукратном облучениях в равных суммарных дозах. Изучено также влияние длительности интервала между двумя фракциями на динамику формирования помутнений хрусталика у мышей, облученных гамма-лучами ^{60}Co .

Как показали результаты исследований катарактогенной активности протонов с энергией 645 МэВ [19], через 35 недель после однократного облучения животных протонами в дозе 6 Гр частота помутнений хрусталика достигала 100%. Материалы, полученные при фракционированном воздействии гамма-излучения, позволили заключить, что на протяжении 30-недельного периода после облучения частота помутнений хрусталика при всех использованных интервалах (3, 7, 14 и 30 сут) между облучениями равными фракциями (2 раза по 3 Гр) была ниже, чем после однократного облучения. Иначе говоря, фракционирование дозы гамма-излучения увеличивает латентный период образования помутнений хрусталика. Однако к 40 неделям после воздействия гамма-излучения этот эффект постепенно сглаживается. Длительность интервала между отдельными фракциями облучения не оказывает существенного влияния на частоту помутнений хрусталика у экспериментальных животных. Интервал между облучениями, равный 7 сут, является вполне достаточным периодом для проявления процессов репарации постлучевых повреждений в эпителии хрусталика, если они имеют место. Эксперименты с облучением мышей протонами с энергией 645 МэВ двумя равными фракциями в суммарных дозах 2, 4 и 6 Гр, а также протонами с энергией 50 МэВ в суммарной дозе 6 Гр подтвердили вывод о том, что фракционирование дозы замедляет образование и формирование помутнений хрусталика до определенного срока. В частности, при фракционированном облучении протонами 645 МэВ частота помутнений хрусталика в течение 30—45 недель после воздействия излучения была в 1,5—2 раза ниже по сравнению с однократным облучением в тех же дозах (табл.7).

В более отдаленные сроки (50 недель и более) после облучения различия в эффектах фракционированного и однократного облучения были статистически недостоверны. Не обнаружено также различий в эффектах после фракционированного и однократного облучения в дозе 6 Гр. Однако развитие зрелой катаракты после фракционированного облучения протонами задерживалось на 14 недель. Подобный эффект наблюдался после

Таблица 7. Частота помутнений хрусталика у мышей в разные сроки после однократного и фракционированного облучения протонами 50 и 645 МэВ и рентгеновскими лучами с интервалом 7 суток между равными фракциями

Срок наблюдения, недели	Протоны, 645 МэВ		Протоны, 50 МэВ		Рентген. лучи	
	Доза, Гр	Частота помутнений, %	Доза, Гр	Частота помутнений, %	Доза, Гр	Частота помутнений, %
20	2,0	29,3±5,9				
	1,0+1,0	16,1±3,8*				
	4,0	57,5±5,1				
	2,0+2,0	37,8±5,6*				
	6,0	77,9±4,4	6,0	11,3±4,0	6,0	12,4±3,8
	3,0+3,0	91,4±4,7	3,0+3,0	10,0±3,1	3,0+3,0	7,7±2,8
30	2,0	43,3±6,5				
	1,0+1,0	27,5±4,7*				
	4,0	85,9±4,1				
	2,0+2,0	69,0±5,3*				
	6,0	94,6±2,6	6,0	68,4±7,5	6,0	100,0
	3,0+3,0	94,1±3,9	3,0+3,0	83,3±4,4	3,0+3,0	97,2±1,9
40	2,0	92,0±3,5				
	1,0+1,0	34,8±5,1*				
	4,0	100,0				
	2,0+2,0	96,1±2,3				
	6,0	100,0	6,0	100,0	6,0	100,0
	3,0+3,0	92,0±3,0	3,0+3,0	83,9±3,3	3,0+3,0	100,0
50	2,0	81,7±5,2				
	1,0+1,0	72,8±4,9				
	4,0	100,0				
	2,0+2,0	96,1±2,2				
	6,0	100,0	6,0	100,0	6,0	100,0
	3,0 + 3,0	89,5±7,0	3,0+3,0	96,0±2,3	3,0+3,0	100,0

*Различия в эффектах однократного и фракционированного облучения статистически достоверны.

фракционированного облучения рентгеновскими лучами, но задержка развития зрелой катаракты в этом случае была менее продолжительной (5 недель). Конечный эффект от фракционированного и однократного облучений был практически одинаковым ($P \geq 0,05$).

Фракционированное облучение мышей протонами 50 МэВ в суммарной дозе 6 Гр приводило к задержке развития помутнений хрусталика на начальных стадиях. У этих животных в течение 70 недель после лучевого воздействия отмечалась лишь 1—2 стадии развития помутнений хрусталика, тогда как у животных, подвергшихся острому однократному облучению в той же дозе, через 65 недель наблюдалось развитие 3 стадии катаракты в 7% случаев.

Таким образом, после фракционированного облучения мышей протонами с энергией 50 и 645 МэВ, а также рентгеновскими лучами, вероятно, происходят процессы пострадиационного восстановления, скорость и полнота которых зависит от дозы и мощности дозы. Энергия протонов в диапазоне 50+645 МэВ не оказывает существенного влияния на скорость и полноту репаративных процессов в хрусталике. Фракционирование дозы протонов приводит к замедлению процесса формирования и снижению частоты образования помутнений хрусталика у мышей в 1,5—2 раза по сравнению с однократным облучением в тех же дозах, как это происходит и при воздействии стандартного излучения. Однако в последующем, фактически в конце жизни животных, различия в частоте помутнений хрусталика выравниваются.

Эффект снижения частоты образования помутнений хрусталика наблюдался также при фракционированном облучении мышей рентгеновскими лучами [34] и кроликов рентгеновскими лучами или протонами с энергией 20 и 100 МэВ [35]. С повышением ЛПЭ излучений эффект снижения частоты помутнения хрусталика исчезает. Так, в экспериментах на мышках линии CB_6F_1 , облученных ионами углерода с энергией 225 МэВ с высокой ЛПЭ в дозах 0,4; 0,8 и 1,2 Гр, показано, что фракционирование дозы не влияет на катарактогенный эффект [36]. В случае облучения крыс ионами аргона с энергией 570 МэВ фракционирование дозы не только не снижало катарактогенной активности тяжелых заряженных частиц, но вызывало зависимое от дозы сокращение латентного периода образования помутнений хрусталика [37]. Большой интерес представляют исследования катарактогенной активности ускоренных ионов железа. В экспериментах с облучением животных ионами железа с энергией 600 МэВ установлено, что фракционирование дозы в этом случае приводит к увеличению частоты помутнений хрусталика [38].

ЛПЭ и катарактогенное действие излучений. Известно, что большинство радиобиологических эффектов, обусловленных плотноионизиру-

щими излучениями, проявляют отчетливую зависимость от ЛПЭ. Однако на уровне отдаленной постлучевой патологии эта зависимость не всегда достаточно очевидна. В экспериментах с облучением лабораторных животных (мышей, кроликов, обезьян) ускоренными ионами неона, углерода, аргона и железа с различными энергиями установлена отчетливая зависимость катарактогенного действия заряженных частиц от их ЛПЭ (табл.8). Как можно видеть, величина коэффициентов ОБЭ является функцией ЛПЭ исследуемых излучений. Наиболее высокие значения коэффициентов ОБЭ получены для ионов аргона и железа. Причем максимальных значений коэффициенты ОБЭ обычно достигают при низком уровне доз [27]. Рассчитанные по критерию катарактогенной эффективности коэффициенты ОБЭ ионов аргона составляли 3—5, тогда как для ионов углерода и неона они незначительно превышали 1 [39]. Дозы ионов аргона $0,6 \pm 0,9$ Гр по своей эффективности близки к дозе рентгеновского излучения 3,0 Гр, а доза ионов аргона 0,3 Гр сравнима с дозой 1,5 Гр рентгеновских лучей.

Как видно из табл.8, несмотря на низкие значения ЛПЭ, коэффициенты ОБЭ протонов с энергией 3 и 9 ГэВ, а также ионов гелия с энергией

Таблица 8. Зависимость величины коэффициентов ОБЭ от ЛПЭ тяжелых заряженных частиц

Вид и энергия излучения	ЛПЭ, кэВ/мкм	Уровни доз, Гр	Биологический объект	Коэффициент ОБЭ	Ссылка
p , 50 МэВ	1,25	1,0—6,0	мыши	1,0	[40]
p , 160 МэВ		15—100	обезьяны	0,94—1,19	[41]
p , 645 МэВ	0,25	1,0—6,0	мыши	1,0	[17]
p , 3 ГэВ		0,85—57,0	кролики	0,55—2,0	[25]
p , 9 ГэВ	0,23	0,25—5,0	мыши	1,3—2,4	[24]
^4He , 4 ГэВ/нукл.	0,88	0,5—4,0	мыши	1,2—2,6	[18]
^{20}Ne , 365 МэВ/нукл.	35,0	0,05—5,0	кролики	2,0	[42]
^{40}Ar , 530 МэВ/нукл.	90,0	— " —	— " —	3,5	
^{56}Fe , 460 МэВ/нукл.	223,0	— " —	— " —	4,5—5,0	
^{20}Ne , 365 МэВ/нукл.	35,0	1,4—12,8	кролики	2,07—2,22	[43]
^{40}Ar , 530 МэВ/нукл.	90,0	0,7—8,1	— " —	3,28—3,61	
^{56}Fe , 600 МэВ/нукл.		0,05—1,6	мыши	40,0	[27]
^{12}C , 400 МэВ/нукл.	10	0,05—9,0	мыши	1,0	[39]
^{20}Ne , 425 МэВ/нукл.	30	— " —	— " —	1,0	
^{40}Ar , 570 МэВ/нукл.	100	— " —	— " —	3—5	
^{12}C , 300 МэВ/нукл.	12,65	0,03—0,5	мыши	1—66,7	[26]

4 ГэВ/нуклон, достаточно велики. Одной из основных причин, определяющих более высокую эффективность данных излучений, являются ядерные взаимодействия, в результате которых образуются вторичные излучения с более высокими ЛПЭ, чем у первичного излучения. Расчеты показывают, что с увеличением энергии заряженных частиц вклад в дозу вторичного излучения увеличивается [44]. Вклад вторичного излучения на пучке ионов гелия с энергией 4 ГэВ/нуклон в зависимости от толщины фантома изменяется от 6 до 13%. Он создается флюенсом вторичных заряженных частиц, составляющим от 0,4 до 10% от флюенса первичного излучения [11].

Важно отметить, что при более высоких значениях ЛПЭ заряженных частиц созревание помутнений хрусталика происходит более интенсивно [39]. Кроме того, повышение дозы и ЛПЭ излучений приводит к сокращению латентного периода развития помутнений хрусталика.

Влияние возраста на частоту постлучевых помутнений хрусталика. Радиочувствительность хрусталика в значительной степени зависит от возраста экспериментальных животных и человека. Независимо от вида исследуемых излучений наиболее высокий уровень частоты помутнений хрусталика отмечается у самых молодых животных. В экспериментах на мышах, облученных рентгеновскими лучами в дозе 300 рад, наиболее чувствительными к облучению хрусталика были животные в возрасте 1—3 сут [45]. К пятисуточному возрасту мышата оказались максимально резистентными, затем высокая чувствительность возрастала до 5—7 недель, после чего она вновь снижалась. Причины волнообразной радиочувствительности хрусталика окончательно не установлены. Анализ динамики развития капсулы хрусталика не позволил объяснить механизмы различий в радиочувствительности хрусталика мышей различного возраста.

Крупные лабораторные животные молодого возраста также в большей степени подвержены развитию помутнений хрусталика [28]. Установлено, что количество ранних катаракт было более высоким у кроликов, облученных локально ионами неона в дозе 9 Гр (ЛПЭ = 425 МэВ/нуклон) в возрасте 8 недель, однако развитие поздних катаракт и потеря зрения происходили раньше у кроликов, облученных во второй половине жизни [46].

Морфологические исследования клеток эпителия хрусталика у кроликов, лягушек и мышей разного возраста после локального облучения глаз рентгеновскими лучами в дозах 20÷50 Гр показали, что наиболее чувствительными к развитию фрагментации ядер клеток экваториального эпителия хрусталика среди крыс были животные 4-недельного возраста. Для возникновения такого же числа повреждений у более старших животных требовались значительно большие дозы рентгеновских лучей [47]. Вместе с тем, несмотря на то, что у молодых животных повреждения хрусталика развивались раньше, прогрессирование помутнений в дальнейшем происходит в замедленном темпе [48, 46]. Глубокие деструктивные нарушения не только

хрусталика, но и других образований органа зрения развивались у потомства в случае облучения беременных собак-самок гамма-лучами ^{60}Co в дозах 125 и 435 рад в различные сроки после оплодотворения, а также у новорожденных щенков. Сообщается, что глаза собак наиболее радиочувствительны на 28-е и 55-е сутки внутриутробного развития и на вторые сутки после рождения [49].

Обращает на себя внимание высокая частота начальных помутнений хрусталика (24,5%) у детей 4-6-летнего возраста, которые проживают в сельской местности в регионах, подвергшихся радиоактивному загрязнению в результате аварии на Чернобыльской АЭС [50]. Остается пока неизвестным, будут ли они прогрессировать дальше и приведут ли к снижению остроты зрения.

Таким образом, в развитии радиационных помутнений хрусталика возраст имеет первостепенное значение.

Радиационный катарактогенез у человека. Хрусталик глаза человека, как и других млекопитающих, является одним из наиболее радиочувствительных образований. Вместе с тем его радиочувствительность не выше, чем у экспериментальных животных. Минимальная катарактогенная доза редкоизирующих излучений для человека колеблется от 2,0 Гр по одним данным [34, 51] до 4,0 Гр — по другим [52—54]. Большой объем информации о лучевых катарактах у человека получен при исследовании людей, переживших атомную бомбардировку в Хиросиме и Нагасаки [55]. Согласно проведенным на основе этих наблюдений расчетам, порог действия излучений с низкой ЛПЭ находится на уровне $0,6 \pm 1,5$ Гр [4]. Дальнейшие обследования и анализ данных о зависимости между действием ионизирующих излучений и развитием катаракт у лиц, переживших атомную бомбардировку, показали, что вклад нейтронов в суммарную дозу облучения в Хиросиме был в 4,2 раза выше, чем в Нагасаки. С учетом переоценки индивидуальных доз облучения, проведенной в 1986 г., риск развития катаракт стал в 1,6 раза выше, чем при использовании доз, рассчитанных в 1965 г. [56]. В условиях профессионального воздействия ионизирующих излучений (сильно растянутое во времени воздействие в малых дозах) доза редкоизирующего излучения, которая может привести к развитию помутнения хрусталика с нарушением зрения, должна быть более 8 Гр [5]. В работе [57] сообщают о неизбежности образования радиационной катаракты при суммарной дозе, превышающей 40 Гр, полученной во время лечения опухолей глазного яблока рентгенотерапией и имплантацией радиоактивного радона и золота. Из 38 больных у 18 через 3—11 лет после лечения развилась радиационная катаракта.

Анализ результатов 30-летнего изучения состояния здоровья жертв атомного нападения в Японии свидетельствует о различиях в степени выра-

женности и частоте развития катаракты в зависимости от дозы облучения и возраста пострадавших. Среди лиц, облученных в Хиросиме в дозе ~5 Гр, лучевая катаракта диагностирована в 70—98% случаев. Со снижением дозы облучения частота помутнений хрусталика интенсивно уменьшается, а при дозах порядка 0,2—0,025 Гр катаракты не развивались. У жителей Хиросимы, облученных в раннем детстве в дозе свыше 4,5 Гр, лучевые катаракты встречаются в 55,6%.

В последнее время появились сведения о развитии лучевых помутнений хрусталика у лиц, подвергшихся радиоактивному облучению в результате аварии на Чернобыльской АЭС, особенно у детей [50]. У взрослых также среди патологии органа зрения значительный удельный вес принадлежит катарактам [59]. Суммарные дозы гамма-лучей в обследуемых регионах по официальным данным не превышали 7 бэр. Имеются также другие сведения о различных аспектах развития лучевых катаракт у человека [60, 61]. Однако эти данные не могут быть использованы непосредственно для оценки опасности космической радиации. Они лишь дополняют сведения, полученные в экспериментах на животных, облученных тяжелыми ионами на ускорителях. В межпланетных полетах, как известно, космонавты могут подвергаться непродолжительному облучению в относительно высоких дозах излучениями высоких энергий при солнечных вспышках, а также воздействию тяжелых ядер галактического космического излучения с различными ЛПЭ в небольших дозах на протяжении длительного времени [62].

Исходя из результатов экспериментов, полученных на крупных лабораторных животных, в частности, на кроликах, облученных стандартным излучением, разумно предположить наличие линейной зависимости эффекта от дозы в диапазоне доз 0,5+10 Гр [35]. Такая же зависимость характерна для электромагнитного излучения при облучении мелких лабораторных животных. Некоторые различия касаются количественных аспектов катарктогенного эффекта. Однако ускоренные заряженные частицы вызывают существенно более тяжелые повреждения на молекулярном, клеточном и тканевом уровнях по сравнению с редкоионизирующим излучением [62—66]. Очевидно и соответствующее увеличение риска развития помутнений хрусталика в отдаленные сроки после воздействия тяжелых заряженных частиц. В этих условиях наиболее вероятным методом оценки риска развития радиационных катаракт у человека является получение необходимых сведений на модельных биологических системах и их экстраполяция на человека. При этом возникает неизбежный вопрос: насколько обоснована такая экстраполяция? Однако этот вопрос настолько важен, что он требует специального рассмотрения вне пределов данного обзора. Здесь целесообразно лишь еще раз подчеркнуть, что эксперимент на животных — это единственный путь получения объективной информации, необходимой для понимания механизмов действия и оценки радиационной опасности тяже-

лых заряженных частиц для человека. К тому же хрусталики крыс, кроликов, собак, обезьян и человека обладают сопоставимой чувствительностью к редкоионизирующим излучениям в отношении индукции помутнений хрусталика [43], тогда как хрусталик мышей более чувствителен к действию рентгеновского излучения по сравнению с хрусталиком человека [67]. Тем не менее на основании полученных результатов можно утверждать, что заряженные частицы с высокими ЛПЭ будут представлять существенно более высокий риск повреждения хрусталика для человека по отношению к стандартному излучению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Освоение космического пространства не только интенсифицировало развитие новых направлений в области радиобиологии ранее мало известных видов ионизирующих излучений, но и поставило задачу разработки научно-обоснованных подходов в оценке радиационной опасности космических излучений для экипажей космических кораблей и систем жизнеобеспечения. Кроме того, виды ионизирующих излучений, полученные с помощью ускорителей, находят все большее применение в медицине и других отраслях деятельности человека.

Наличие заряженных частиц в составе космических излучений может быть серьезным препятствием в осуществлении космических полетов за пределы магнитосферы Земли. Как установлено, тяжелые частицы, взаимодействуя с биологическими тканями, обладают некоторыми специфическими свойствами. Создавая высокую плотность ионизации в ограниченном объеме ткани, доза в котором может достигать нескольких десятков грэй, они приводят клетки к гибели. Наблюдение космонавтами так называемых солнечных вспышек [68, 69], экспериментальные и клинические исследования на испыталелях [70] показывают, что возможность воздействия тяжелых заряженных частиц космического излучения на структурные образования органа зрения человека в условиях космического полета вполне реальна. Как показали радиобиологические исследования, особенно высок риск развития помутнений хрусталика, относящихся к отдаленным последствиям воздействия радиации. Об отдаленной лучевой патологии хрусталика можно судить на основании наблюдений за пережившими атомную бомбардировку в Японии, за пострадавшими во время аварии на Чернобыльской АЭС, а также за контингентами лиц, подвергающихся воздействию ионизирующих излучений в профессиональных условиях. Хотя неопластические процессы более опасны в отношении риска для здоровья человека в отдаленные сроки после воздействия ионизирующих излучений, поздние дегенеративные процессы неопухолевого характера, включая и катаракту, также представляют важную проблему. Не представляя непосредственной угро-

зы для жизни человека, они, несомненно, приводят к снижению качества последующей жизни. Вместе с тем, несмотря на большую практическую значимость имеющихся экспериментально-клинических наблюдений, их результаты мало пригодны для оценки радиобиологической опасности космических излучений и разработки мероприятий для обеспечения радиационной безопасности при космических полетах. Основным источником информации о действии тяжелых ускоренных частиц на клетки и ткани организма млекопитающих являются исследования на ускорителях заряженных частиц. Проведенные исследования показали, что тяжелые заряженные частицы отличаются более высокой биологической эффективностью при действии на хрусталик глаза лабораторных животных по сравнению с редкоионизирующим излучением. Это проявляется в увеличении частоты развития помутнений хрусталика и сокращении длительности латентного периода их возникновения. Развивающиеся нарушения являются функцией дозы и времени, прошедшего после воздействия ускоренных заряженных частиц. При действии излучений с низкой ЛПЭ зависимость доза — эффект близка к линейной. При облучении мелких лабораторных животных тяжелыми заряженными частицами кривая доза — эффект выходит на «плато» в области доз около 2 Гр.

Длительность латентного периода образования помутнений хрусталика у человека и крупных лабораторных животных после воздействия относительно небольших доз ионизирующих излучений может исчисляться многими годами, тогда как в эксперименте на мелких лабораторных животных его продолжительность определяется неделями. В целом можно считать, что длительность латентного периода развития помутнений хрусталика обратно пропорциональна величине дозы излучения. Особенно эффективными являются низкие дозы плотноионизирующих излучений. Об этом свидетельствует значительное увеличение коэффициентов ОБЭ ускоренных заряженных частиц со снижением величины дозы. Механизмы, лежащие в основе этого явления, требуют тщательного выяснения. Важным фактором в развитии помутнений хрусталика у млекопитающих является возраст в период воздействия ионизирующих излучений: чем моложе животные, тем в большей степени и в более короткие сроки хрусталики их глаз подвержены повреждению.

Специально проведенные исследования свидетельствуют о том, что в возникновении нарушений прозрачности хрусталика после облучения редкоионизирующими излучениями важную роль играет мощность дозы и способ ее сообщения. Снижение мощности дозы ионизирующих излучений приводит к увеличению длительности латентного периода развития помутнений хрусталика, замедленному и неполному их созреванию. Характерной особенностью воздействия тяжелых заряженных частиц на хрусталик глаза высших животных является отсутствие эффекта фракционирования дозы.

Необходимо отметить, что помутнение хрусталика причиняет значительный ущерб здоровью человека, когда оно достигает стадии, снижающей остроту зрения. Известно, что вызванные облучением незначительные помутнения хрусталика, выявляемые лишь при квалифицированном исследовании, не приводят к нарушению зрения, не прогрессируют во времени и могут исчезать. Это возможно при действии как редко-, так и плотно-ионизирующих излучений.

Для космической биологии и медицины значительный интерес представляет хроническое воздействие заряженных частиц в низких дозах, однако до настоящего времени изучение этого вопроса остается проблематичным.

В развитии помутнений хрусталика, обусловленных воздействием излучений различного качества, не установлено каких-либо клинко-морфологических особенностей. Различия носят количественный характер.

Тяжелые заряженные частицы отличаются более высокой катарактогенной активностью по отношению к стандартному излучению. Значения коэффициентов ОБЭ зависят от величины дозы излучений ЛПЭ и времени, прошедшего после облучения.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую признательность дирекции Объединенного института ядерных исследований, Лаборатории высоких энергий и Лаборатории ядерных проблем за предоставленную возможность проведения физико-биологических исследований на ускорителях заряженных частиц, направленных на решение задач, связанных с обеспечением радиационной безопасности при длительных космических полетах, а также постоянное внимание и помощь, без которых не могли быть проведены в полном объеме исследования, основные результаты которых изложены в настоящем обзоре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винклер Дж.Р. — Радиационная опасность при космических полетах. М.: Мир, 1964, с.25.
2. Curtis C.B. — Space Radiat. Biol. and Related Topics (Eds. C.F.Tobias and P.W.Todd), New York, Acad.Press, ch.2, 1974.
3. Дудкин В.Е., Ковалев Е.Е., Нефёдов Н.А. и др. — Тез. докл. 5 Всесоюз. научн. конф. по защите от иониз. излучений ядерно-техн. установок. Протвино, 1989. М., 1989, с.180.
4. Otake M., Schull W. — Radiat. Res., 1982, vol.92, No.3, p.574.
5. Радиочувствительность и пространственное распределение дозы. Публикация №14 МКРЗ. М.: Медицина, 1974.

6. **Brenner D.J., Medvedovsky C., Huang G. et al.** — *Radiat. Res.*, 1991, vol.128, p.73.
7. **Сычков М.А.** — Автореф. дисс. канд. техн. наук. М.: Институт медико-биологических проблем Минздрава СССР, 1974.
8. **Джелепов В.П., Абазов В.М., Комаров В.И. и др.** — Протонные пучки высоких энергий и лучевая терапия злокачественных опухолей. Дубна, ОИЯИ, 1975, с.21.
9. **Зиновьев Л.П., Иссинский И.Б., Кириллов А.Д. и др.** — Препринт ОИЯИ, 18-82-65, Дубна, 1982.
10. **Портман А.И.** — Автореф. дисс. канд. техн. наук. М.: Институт медико-биологических проблем МЗ СССР, 1984.
11. **Попов В.И., Портман А.И., Василев Г.** — Вопросы биологического действия и дозиметрии тяжелых заряженных частиц и адронов высоких энергий. Пушкино, АН СССР, 1984, с.56.
12. **Christenberry K.W., Furth J.** — *Proc. Soc. Exp. Biol. Med.*, 1951, vol.77, No.3, p.559.
13. **Kellerer A.M., Brenot I.** — *Radiat. Res.*, 1973, vol.56, No.1, p.28.
14. **Ван дер Варден Б.Л.** — Математическая статистика: Пер. с нем. М.: ИИЛ, 1960.
15. **Волкова К.В.** — Медиц. радиология. М.: АН СССР, 1960, с.203.
16. **Ковалев И.Ф.** — Действие ионизирующих излучений на животный организм. Киев: Госмедиздат УССР, 1960, с.33.
17. **Кабаченко А.Н.** — Космич. биол. и медиц., 1974, №5, с.31.
18. **Кабаченко А.Н., Федоренко Б.С.** — Космич. биол. и авиакосмич. медиц., 1985, №1, с.56.
19. **Кабаченко А.Н.** — Катарактогенная эффективность протонов различных энергий. Автореф. дисс. канд. биол. наук, М.: Институт медико-биологических проблем МЗ СССР, 1974.
20. **Lett J.T., Lee A.C., Cox A.B.** — *Radiat. Res.*, 1991, vol.126, No.2, p.147.
21. **Cox A.B., Lee A.C., Williams G.R., Lett J.T.** — *Adv. Space Res.*, 1992, vol.12, No.2-3, p.379.
22. **Darden E.B., Christenberry K.W., Beauchamp J.J. et al.** — *Radiat. Res.*, 1970, vol.43, p.598.
23. **Cleary S.F., Geeraets W.J., Williams R.C. et al.** — *Health Phys.*, 1973, vol.24, No.3, p.269.
24. **Кабаченко А.Н., Федоренко Б.С., Смирнова О.А.** — Радиобиология, 1986, т.26, вып.3, с.318.
25. **Legeay G., Haye C., Drouet J., Bazin J.P.** — *Int. Congr. on Protect. against Accelerator and Space Radiat.* CERN, Geneva, April 26-30, 1971. Geneva, 1971, vol.1, p.62.
26. **Кабаченко А.Н., Федоренко Б.С., Смирнова О.А. и др.** — Радиобиология, 1990, т.30, вып.5, с.695.
27. **Worgul B.V., Medvedovsky C., Powers-Risius P., Alpen E.L.** — *Radiat. Res. Proc.* 8th Int. Congr. Radiat. Res., Edinburg, 1987, vol.1, p.249.
28. **Cox A.B., Ainsworth E.J., Jose J.G. et al.** — *Adv. Space Res.*, 1983, vol.3, No.8, p.211.
29. **Merriam G.R., Worgul B.V., Medvedovsky C. et al.** — *Radiat. Res.*, 1984, vol.98, No.1, p.129.
30. **Worgul B.V., Low S., Merriam G.R.** — *Radiat. Res.*, 1982, vol.91, No.1, p.181.
31. **Акоев И.Г.** — Проблемы постлучевого восстановления. М.: Атомиздат, 1970.

32. Кознова Л.Б., Остроумова Л.М. — Радиобиология, 1973, т.13, №2, с.249.
33. Strong J.R., Murphee R.L. — Radiat. Res., 1972, vol.51, p.674.
34. Merriam G.R., Focht E.F. — Amer. J. Roentgenol., Radium Therapy, Nuclear Med., 1957, vol.77, p.759.
35. Geeraets W.J. — Med. Coll. Va Quart, 1972, vol.8, No.4, p.259.
36. Ainsworth E.J., Jose J.G., Berkeley L. — Radiat. Res., 1982, vol.91, No.2, p.371.
37. Worgul B.V. — Adv. Space Res., 1986, vol.6, No.11, p.285.
38. Worgul B.V., Medvedovsky C., Brenner D.J. et al. — World Space Congr: 43rd Congr. Int. Astronaut. Fed. (IAF) and 29th Plen. Meet. Comm. Space Res. (COSPAR). Washington, 28 Aug.—5 Sept., 1992: Book Abstr., Washington, 1992, p.559.
39. Gribrok J.J., Ainsworth E.J. — Radiat. Res., 1983, vol.94, No.3, p.513.
40. Кабаченко А.Н., Федоренко Б.С. — Космич. биол. и медиц., 1977, №4, с.59.
41. Constable I.J., Goitein M., Kochler A.M., Schmidt R.A. — Radiat. Res., 1976, vol.65, p.304.
42. Lett J.T., Lee A.C., Cox A.B., Wood D.H. — Life Sci. and Space Res., Radiat. Biol. Proceed. Top. Meet. COSPAR, 1988, July 18—29. Adv. Space Res., 1989, vol.9, No.10, p.325.
43. Keng P.C., Lee A.C., Cox A.B. et al. — Int. J. Radiat. Biol., 1982, vol.41, No.2, p.127.
44. Бобков В.Г., Демин В.П., Кеирим-Маркус И.Б. и др. — Радиационная безопасность при космических полетах. М.: Атомиздат, 1964.
45. Gajewski A.K., Majewska K., Stowikowska M.G. et al. — Radiat. Res., 1977, vol.71, No.2, p.471.
46. Lett T., Cox A.B., Bergtold D.S. et al. — Adv. Space Res., 1984, vol.4, No.10, p.251.
47. Worgul B.V., Low S., Merriam G. — Radiat. Res., 1982, vol.91, No.1, p.181.
48. Worgul B.V., Rothstein H., Medvedovsky C. et al. — Ophthalm. Res. 1982, vol.14, No.2, p.73.
49. Lee A., Phemister R.D. — Radiat. Res., 1974, vol.59, No.1, p.252.
50. Сухина Л.А., Смирнова А.Ф., Чубарь С.В., Али З. — Офтальмол. журн., 1993, №3, с.133.
51. Merriam G.R. — Radiology, 1956, vol.22, No.66, p.240.
52. Cogan D.G., Dreisler K.K. — Arch. Ophthalm., 1953, vol.50, No.1, p.30.
53. Вишневецкий Н.А., Абдуллаева В.М., Иванов Е.А. и др. — Мед. радиология, 1960, т.5, №11, с.77.
54. Киммельдорф Д., Хант Э. — Действие ионизирующей радиации на функции нервной системы. М.: Атомиздат, 1969, с.173.
55. Masuda Y. — Последствия взрыва атомной бомбы в Хиросиме. М.: ИИЛ, 1960, с.122.
56. Otake M., Schull W.J.G. — Radiat. Res., 1991, vol.32, Sup., p.283.
57. Britten M.J.A., Halman K.E., Meredith W.J. — Brit. J. Radiol., 1966, vol.39, No.464, p.612.
58. A Review of Thirty Years Study of Hiroshima and Nagasaki Atomic Bomb Survivors. The Japan Radiat. Res. Soc. Chiba. Japan, September, 1975. Гуськова А.К., Садчикова Э.Н. — Мед. радиология, 1977, №8, с.69.
59. Сердюченко В.И., Бушуева Н.Н., Козина Л.В. и др. — Офтальмологич. журн., 1992, №3, с.164.

60. Вишнеvский Н.А. — Вестник офтальмол., 1962, №3, с.26.
61. Михайлина Т.Н., Виноградова М.Е. — Вестник офтальмол., 1992, т.108, №1, с.40.
62. Григорьев Ю.Г. — Космическая радиобиология. М.: Энергоиздат, 1982.
63. Корогодин В.И., Красавин Е.А. — Радиобиология, 1982, т.22, вып.6, с.727.
64. Красавин Е.А. — Проблемы ОБЭ и репарация ДНК. М.: Энергоатомиздат, 1989.
65. Невзгодина Л.В., Григорьев Ю.Г., Маренный А.М. — Действие тяжелых ионов на биологические объекты. М.: Энергоатомиздат, 1990.
66. Федоренко Б.С. — ЭЧАЯ, 1991, т.22, вып.5, с.1199.
67. Merriam G.R., Biavati B.J., Bateman J.L. et al. — Radiat. Res., 1965, vol.25, p.123.
68. Budinger T.F., Tobias C.A., Huesman R.H. et al. — Life Sci. and Space Res., Oxford e.a., 1977, vol.15, p.141.
69. McNulty P.J., Pease V.P., Bond V.P. — Life Sci. and Space Res., Berlin, 1976, vol.14, p.205.
70. Budinger T.F., Bichsel H., Tobias C.A. — Science, 1971, vol.172, p.878.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 621.384.63; 621.3.038.625

Фазотрон и принцип автофазировки (к пятидесятилетию открытия принципа автофазировки). Дзелепов В.П., Дмитриевский В.П. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1995, том 26, вып.5, с.1119.

Изложена история развития в России ускорителей фазотронного типа, после открытия В.И.Векслером и Е.М.МакМилланом принципа автофазировки. В основном сообщаются результаты исследований, связанных с созданием таких ускорителей, включая и некоторые работы, которые в свое время не были опубликованы в периодической печати. Рассмотрены отдельные теоретические аспекты применения принципа автофазировки, не имеющие аналогов в действующих фазотронах. Указаны возможные пути дальнейшего развития принципа автофазировки в резонансных ускорителях. В краткой форме для иллюстрации роли фазотронов в развитии ядерной физики сообщается о наиболее важных исследованиях, выполненных в Объединенном институте ядерных исследований на обычном 680 МэВ протонном синхротроне и о проводимых на созданном на основе его магнита фазотроне с пространственной вариацией магнитного поля на ту же энергию.

Ил.5. Библиогр.: 30.

УДК 539.1.01

Проблема поколений в четырехмерных суперструнных теориях великого объединения. Масликов А.А., Наумов И.А., Волков В.Г. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1995, том 26, вып.5, с.1140.

Одно из основных направлений исследований в физике высоких энергий — это изучение следующей цепочки взаимосвязей: закономерности спектра масс кварков и лептонов → загадка смешивания кварк-лептонных поколений → возможная новая динамика поколений. Новая динамика симметрии поколений может быть связана с существованием экзотических полей материи и калибровочных полей. Поэтому полезно изучить возможность возникновения такой калибровочной симметрии в струнных теориях великого объединения (СТВО). В рамках 4-мерной гетеротической суперструны со свободными фермионами исследуются СТВО ранга 8, содержащие $SU(3)_H$ калибровочную симметрию поколений. Мы явно конструируем СТВО с калибровочной симметрией $G = SU(5) \times U(1) \times (SU(3) \times U(1))_H$ и $G = SO(10) \times (SU(3) \times U(1))_H \subset SO(16)$ или $E(6) \times SU(3)_H \subset E(8)$ в формулировке свободных комплексных фермионов. Так как СТВО, основанные на Кац-Муди алгебрах (КМА), содержат только представления низких размерностей, то обычно имеется трудность с нарушением калибровочной симметрии. Мы решаем эту проблему, выбирая в качестве наблюдаемой калибровочной симметрии диагональную подгруппу G^{sym} группы ранга 16 $G \times G \subset SO(16) \times SO(16)$ или $(E(6) \times SU(3)_H)^2 \subset E(8) \times E(8)$. Мы обсуждаем допустимые сектора фермионов материи и Хигса в этих моделях. В таких СТВО возникает «суперслабая» легкая киральная материя ($m_H^f < M_W$). Анализ кварк-лептонного массового спектра и смешивания поколений оставляет возможность существования необычно низкого масштаба нарушения $SU(3)$ калибровочной симметрии поколений (несколько ТэВ).

Табл.11. Ил.2. Библиогр.: 35.

УДК 512.667.7; 514.8

Квантовые группы и уравнения Янга — Бакстера. *Исаев А.П.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1995, том 26, вып.5, с.1204.

В обзоре изложены основы теории квантовых групп с точки зрения возможностей деформаций симметрий в физических моделях. Дано краткое введение в теорию алгебр Хопфа, где обсуждаются такие вопросы, как квазитреугольные алгебры Хопфа и квантовый дубль. Подробно изложен R -матричный подход к теории квантовых групп, на основе которого проведено квантование простых групп Ли, а также супергрупп $GL(N|M)$ и $Osp(N|M)$. Рассмотрены многопараметрические деформации простых групп Ли. Приведены тригонометрические решения уравнений Янга — Бакстера (выражающиеся через тригонометрические функции от спектрального параметра), инвариантные относительно присоединенного действия квантовых групп $GL_q(N)$, $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. Из этих решений предельным переходом выведены рациональные (янг-ианские) решения. Приведены также $Z_N \otimes Z_N$ -симметричные эллиптические решения уравнений Янга — Бакстера. Кратко обсуждаются некоторые приложения теории квантовых групп и уравнений Янга — Бакстера в различных областях теоретической физики. В частности, изложено, каким образом, используя квантовый метод обратной задачи, можно строить интегрируемые системы магнетиков на одномерных цепочках. Затронуты вопросы факторизованного рассеяния солитонов в двумерных интегрируемых моделях. Упомянуто о возможности применения уравнений Янга — Бакстера для многопетлевых вычислений в квантовой теории поля.

Ил.4. Библиогр.: 53.

УДК 539.12

Суперструнный Z' -бозон в e^-e^+ -аннигиляции. *Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1995, том 26, вып.5, с.1264.

Дан обзор современного состояния проблем суперструнного Z' -бозона в e^-e^+ -аннигиляции. Рассматриваются процессы $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, $e^-e^+ - \bar{q}qg$, $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$, $e^-e^+ \rightarrow BX$. Подробно обсуждаются возможности прецизионной проверки стандартной модели электрослабых взаимодействий, в частности, по измерению электрослабых асимметрий в e^-e^+ -аннигиляции. Рассматриваются нули спиральных амплитуд и электрослабых асимметрий, детально исследуется влияние дополнительного суперструнного Z' -бозона на угловые и поляризационные характеристики рассматриваемых процессов.

Табл.6. Ил.9. Библиогр.: 59.

УДК 539.12.01+539.12...142+539.145.7

Антисимметричные тензорные поля. *Чижов М.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1995, том 26, вып.5, с.1322.

Обсуждается существование двух различных сортов частиц со спином единица, описываемых двумя неэквивалентными представлениями группы Лоренца: вектор-потенциалом и антисимметричным тензорным полем второго ранга. Обзор посвящен изучению свойств антисимметричных тензорных полей, определению их места в теории и феноменологическим следствиям. Представлены уравнения движения для безмассовых частиц произвольного спина, из которых следует существование новых частиц высших спинов.

Ил.4. Библиогр.: 103.

УДК 617.741-004.1-02: 617-001.29-092.9

Влияние ускоренных заряженных частиц высоких и релятивистских энергий на хрусталик глаза экспериментальных животных. Федоренко Б.С., Абросимова А.Н., Смирнова О.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1995, том 26, вып.5, с.1373.

В обзоре представлен анализ результатов собственных исследований, а также литературные данные по проблеме постлучевого катарактогенеза. Основные эксперименты проведены на ускорителях Объединенного института ядерных исследований. Лабораторных животных облучали протонами различных энергий, ускоренными ионами гелия и углерода релятивистских и высоких энергий в широком диапазоне доз. Показано, что коэффициенты относительной биологической эффективности (ОБЭ) протонов с энергией 50 и 645 МэВ равны единице, тогда как значения коэффициентов ОБЭ ускоренных заряженных частиц высоких и релятивистских энергий были выше этого уровня. Величина коэффициентов ОБЭ зависела от линейных передач энергии, уровня использованных доз, возраста животных и других факторов. Обсуждаются вопросы высокой эффективности низких доз ионизирующих излучений, влияния мощности и фракционирования дозы излучений. Представленные материалы имеют определенный интерес для специалистов в области космической биологии и медицины, медицинской радиологии, радиоэкологии.

Табл.8. Ил.8. Библиогр.: 70.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Джелепов В.П., Дмитриевский В.П.</i>	
Фазотрон и принцип автофазировки (к пятидесятилетию открытия принципа автофазировки)	1119
<i>Масликов А.А., Наумов И.А., Волков Г.Г.</i>	
Проблема поколений в четырехмерных суперструнных теориях великого объединения	1140
<i>Исаев А.П.</i>	
Квантовые группы и уравнения Янга — Бакстера	1204
<i>Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И.</i>	
Суперструнный Z'-бозон в e^-e^+-аннигиляции	1264
<i>Чижов М.В.</i>	
Антисимметричные тензорные поля	1322
<i>Федоренко Б.С., Абросимова А.Н., Смирнова О.А.</i>	
Влияние ускоренных заряженных частиц высоких и релятивистских энергий на хрусталик глаза экспериментальных животных	1373

CONTENTS

<i>Dzhelepov V.P., Dmitrievsky V.P.</i>	
The Phasotron and the Phase Stability Principle (to the Fiftieth Anniversary of Discovery of Phase Stability Principle)	1119
<i>Maslikov A.A., Naumov I.A., Volkov G.G.</i>	
The Family Problem in the 4D Superstring Grand Unified Theories	1140
<i>Isaev A.P.</i>	
Quantum Groups and Yang — Baxter Equations	1204
<i>Abdullayev S.K., Mukhtarov A.I.</i>	
Superstring Z'-Boson in e^-e^+-Annihilation	1264
<i>Chizhov M.V.</i>	
Antisymmetric Tensor Fields	1322
<i>Fedorenko B.S., Abrosimova A.N., Smirnova O.A.</i>	
Action of Charged Accelerated Particles on Lens of Laboratory Animals at High and Relativistic Energies	1373

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху ($\underline{S}$ и $\bar{s}$, $\underline{C}$ и $\bar{c}$). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы $\underline{O}$ и $\bar{o}$ отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\underline{}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнения, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. Лезнов А.Н., Савельев М.В. — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. Годен М. — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. Turbinger A.V. — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. Ушверидзе А.Г. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. Endo I., Kasai S., Harada M. et al. — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректура с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**
Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**
Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 5.06.95. Подписано в печать 7.09.95. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 18,0. Уч.-изд.л. 22,38.
Тираж 500. Заказ 48549. Цена 2800 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1995. Том 26. Вып.5. 1115—1414.