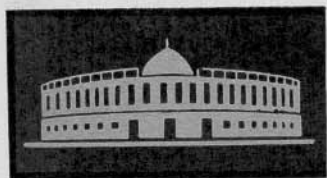


ISSN 0367-2026

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА



ВЫПУСК

1996 том 27 выпуск 1



JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES AND ATOMIC NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.27

PART 1

Six issues per year

DUBNA 1996

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 27

ВЫПУСК 1

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1996

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ,

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

В.Г.СОЛОВЬЕВ

(зам. главного редактора),

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редактор **Е.К.Аксенова**, тел. 65-165

КВАРК-АДРОННАЯ ДУАЛЬНОСТЬ В ФИЗИКЕ МЕЗОНОВ И КОНФАЙНМЕНТ КВАРКОВ

В.В.Анисович, А.В.Саранцев

Санкт-Петербургский институт ядерной физики, Гатчина, Россия

Исследуется концепция кварк-адронной дуальности в физике мезонов при низких и промежуточных энергиях. Используя релятивистский пропагатор кварка, учитывающий явления конфайнмента, и включая рассеяние псевдоскалярных и векторных мезонов в динамику взаимодействия, мы вычислили массы и ширины мезонов, являющихся S - и P -волновыми состояниями кварк-антикварковой пары, а также амплитуды мезон-мезонного рассеяния вплоть до энергий $\sqrt{s} = 1,3$ ГэВ. Наше исследование показало, что включение псевдоскалярных и векторных мезонов в динамику взаимодействия приводит к следующим результатам:

- 1) масса конститuentного кварка увеличивается на величину порядка 200 МэВ;
- 2) появляется обусловленный силами конфайнмента барьер, ответственный за образование высоковозбужденных состояний;
- 3) наблюдается подавление инстантон-индуцированных сил, необходимых при построении чисто кварковой модели.

We investigate the concept of quark-hadron duality in the meson physics at low and intermediate energies. Using relativistic propagator for the confined quarks, we calculated masses and widths of the mesons, which are S - and P -wave states of $q\bar{q}$ ($J^P = 0^-, 1^-, 0^+, 1^+, 2^+$), as well as meson-meson scattering amplitudes at energies up to $\sqrt{s} \leq 1.3$ GeV, light mesons (pseudoscalar and vector) included into interaction dynamics. Our investigation proves that the inclusion of light mesons results in:

- 1) the increase of masses of the constituent quarks (the mass shift is about 200 MeV);
- 2) the rise of the confinement force barrier responsible for the formation of the highly excited meson states;
- 3) the suppression of the instanton-induced forces which were needed in the pure quark consideration.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее важных проблем физики сильных взаимодействий является объяснение конфайнмента цветных объектов: кварков и глюонов [1,2]. С этой проблемой тесно переплетается проблема расчета или объяс-

нения характеристик конstituентного кварка на основе фундаментальных принципов квантовой хромодинамики: эта проблема, всегда привлекавшая внимание физиков, особенно интенсивно начала обсуждаться в последнее время [3—6]. Широко распространена точка зрения, что нарушение киральной симметрии, ответственное за формирование конstituентных кварков, проявляется на расстояниях $r \simeq (0,1-0,2)$ фм. Таким образом, процессы при больших r могут быть описаны в терминах конstituентных кварков и эффективных глюонов, которые существенно отличаются от кварков и глюонов хромодинамики.

Более того, успех кварковой модели при описании легких адронов показал, что на расстояниях менее 1 фм конstituентные кварки могут рассматриваться как обычные частицы, поэтому, работая с ними, можно забыть о конфайнменте. Однако при расчете возбужденных состояний и амплитуд мезонного рассеяния при низких и промежуточных энергиях проблема конфайнмента становится центральной. Моделирование механизма конфайнмента дает возможность прояснить различные аспекты этого явления. В ряде статей, посвященных спектроскопии адронов, конфайнмент моделируется как бесконечная потенциальная стенка (см., например, [7—9]). Качественно правильное описание высоковозбужденных адронных состояний было получено при линейно растущем потенциале $V(r) \sim \alpha r$ (см. дискуссии в [10—13]). Это показывает, что силы конфайнмента не малы на больших расстояниях и что радиус возбужденных адронов увеличивается с ростом их массы. Однако потенциальный подход не описывает другую важную сторону этого явления: кварки могут легко покинуть ловушку конфайнмента, если их энергия достаточно велика для самонейтрализации при помощи создания новой кварк-антикварковой пары.

Явление мягкой нейтрализации кварков было впервые открыто в процессах рождения вторичных частиц во взаимодействиях адронов при высоких энергиях (см. [14] и цитируемую литературу). В области фрагментации образовавшиеся частицы несут импульсы кварков-спектаторов начального адрона, и это явление довольно трудно объяснить, исходя из модели линейно растущего кваркового потенциала или в релятивистском обобщении такой модели.

Ниже мы предлагаем обзор цикла исследований, отдельные результаты которых были опубликованы в статьях [15—17], посвященных построению релятивистской модели конфайнмента на базе переходов $q\bar{q} \rightarrow$ мезоны и $q\bar{q} \rightarrow$ мезоны $\rightarrow q\bar{q}$: именно эти процессы должны формировать эффективную «потенциальную стенку», ответственную за образование высоковозбужденных адронных состояний. Весьма вероятно, что такой механизм может также прояснить явление кварк-адронной дуальности, т.е. возможности описывать процессы как на языке адронов, так и на языке кварков. Хорошо

известным и наиболее простым примером является аннигиляция $e^+e^- \rightarrow$ адроны. Полное сечение $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$ равно мнимой части кварковой однопетлевой диаграммы, которая имеет только кварк-антикварковую пороговую сингулярность. Но условие унитарности записывается в терминах адронных особенностей, а не кварковых. Это означает, что, используя соответствующий кварковый (или глюонный) пропагатор, можно выразить кварковую особенность через набор адронных особенностей. Эти адронные особенности, как будет видно в дальнейшем, тесно связаны с массой конstituентного кварка, и определение этой связи является одним из центральных пунктов нашего исследования.

Таким образом, построение модели конфайнмента основывается на следующих принципах:

1. Кварковые пропагаторы определены таким образом, что кварки, связанные силами конфайнмента, не проявляются в виде свободных асимптотических состояний.
2. Кварковые диаграммы, служащие для расчета наблюдаемых процессов, имеют правильные аналитические свойства: они соответствуют адронным особенностям рассматриваемого процесса.

Чтобы удовлетворить этим требованиям, удобно использовать спектральное представление кваркового пропагатора, выраженное с помощью интеграла по массе кварка [18] — аналог представления Лемана — Калена. В рамках такого подхода вычисляются массы и ширины связанных состояний $q\bar{q}$: мезонов с $J^P = 0^-, 1^-$ (S -волновых состояний $q\bar{q}$) и мезонов с $J^P = 0^+, 1^+, 2^+$ (P -волновых состояний $q\bar{q}$). Включение процессов $q\bar{q} \rightarrow$ два мезона также позволяет вычислить амплитуды рассеяния псевдоскалярных и векторных мезонов вплоть до энергии $\sqrt{s} \leq 1,3$ ГэВ.

Построенная модель имеет ряд общих черт с подходами, развитыми для описания мезонов при низких и промежуточных энергиях. Одним из примеров может служить гибридная модель [19], где пионы вместе с кварками и глюонами включены в эффективный лагранжиан в качестве голдстоуновских бозонов. Амплитуды мезон-мезонного рассеяния вычислялись в работах [20,21] в рамках нерелятивистской кварковой модели. Возможность введения мезонных степеней свободы для описания высоковозбужденных состояний обсуждалась, например, в [22—26].

Обзор построен следующим образом: в разд.2 обсуждается динамическая кварковая модель без учета конфайнмента, являющаяся отправной точкой нашего исследования. В разд.3 рассматривается механизм конфайнмента, способ учета этого механизма в модели и метод расчета мезонного спектра и амплитуд мезон-мезонного рассеяния. Результаты расчетов, параметры, используемые в модели, и их влияние на результаты вычислений

обсуждаются в разд.4. Краткое заключение дается в разд.5, технические детали представлены в трех приложениях.

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ КВАРКОВАЯ МОДЕЛЬ БЕЗ УЧЕТА СИЛ КОНФАЙНМЕНТА

Потенциальные модели, включая их релятивистские обобщения, помогли прояснить многие проблемы мезонной спектроскопии. Поэтому уместно начать обсуждение, используя результаты и язык потенциального подхода.

Стандартная версия потенциальной модели изображена на рис.1. Потенциал, ответственный за образование $q\bar{q}$ -состояний, может быть разделен на две области: 1) область сравнительно малых расстояний (короткодействующие силы), меньше или порядка 0,3—0,5 фм, и 2) область больших расстояний (дальнодействующие силы), порядка или более 1 фм. Короткодействующая часть определяется главным образом эффективным взаимодействием типа глюонного обмена и/или силами, индуцированными инстан-тонами. Дальнодействующую часть обычно параметризуют линейно расту-

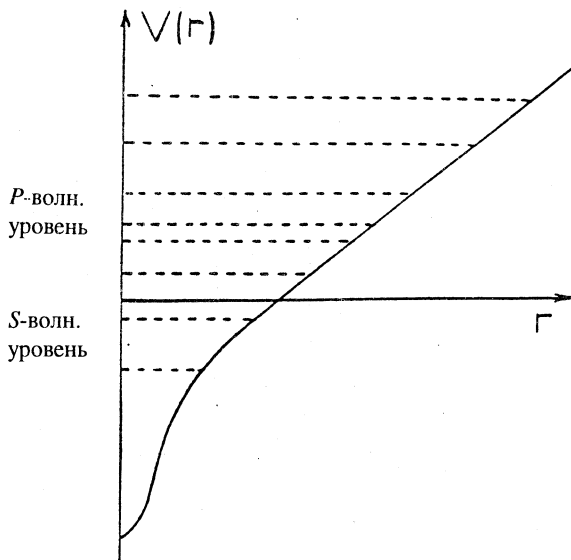
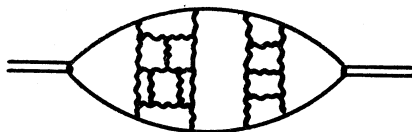


Рис.1. Кварковый потенциал, определяемый короткодействующим взаимодействием и линейно растущим потенциалом конфайнмента

Рис.2. а) Пример планарной диаграммы в вычислении собственно-энергетической части мезона, б) блок взаимодействия глюонов КХД, в) диаграмма обмена эффективной частицей



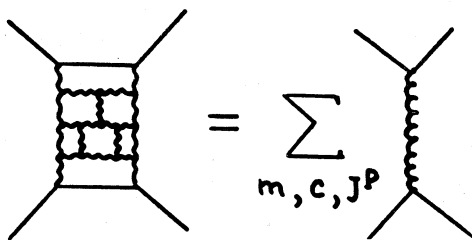
а

щим потенциалом $V(r) \sim \alpha r$, именно эта часть соотносится с силами конфайнмента [27—30].

Короткодействующие потенциальные силы ответственны за образование низколежащих мезонов, которые являются S -волновыми состояниями $q\bar{q}$ с $J^P = 0^-$ и 1^- . Дальнедей-

ствующие силы конфайнмента необходимы для построения высоковозбужденных состояний мезонов с $J^P = 1^+, 2^+$, т.е. P -волновых состояний $q\bar{q}$, а также других мезонных состояний (D -волновых мезонов, радиальных возбуждений и так далее). Особенно загадочными являются 0^+ -состояния, находящиеся непосредственно на границе между двумя областями. Проблема образования этих состояний требует специального рассмотрения.

В работе [15] была построена релятивистская модель qq - и $q\bar{q}$ -взаимодействий при низкой энергии без учета сил конфайнмента, т.е. кварки рассматривались как обычные частицы. Короткодействующая компонента кваркового взаимодействия строилась следующим образом. Рассмотрим собственно-энергетическую диаграмму мезона, обусловленную взаимодействием КХД кварков и глюонов. Согласно правилам $1/N_c$ разложения главный вклад в этот процесс дают планарные диаграммы, типа показанной на рис.2,а, где волнистыми линиями обозначены КХД глюоны. Диаграммы такого типа могут быть разделены на блоки взаимодействия и состояния с распространяющейся $q\bar{q}$ -парой (например, диаграмма рис.2,а содержит два блока взаимодействия и три промежуточных $q\bar{q}$ -состояния). Блок взаимодействия, отдельно показанный на рис.2,б, может быть аппроксимирован суммой диаграмм с обменом мезонами и эффективными цветными частицами (см. рис.2,в). В этом случае амплитуда блока рис.2,б, которую мы обозначим V , равна сумме пропагаторов эффективных частиц с различными массой, цветом, полным моментом и четностью (m, c, J^P) :



б

в

$$V = \sum_{m,c,J^P} B_{m,c,J^P}(s) d_{m,c,J^P}(t),$$

где

$$d_{m,c,J^P} \sim (m^2(c, J^P) - t)^{-1}. \quad (1)$$

Амплитуда V является функцией квадрата полной энергии s и квадрата переданного импульса t . Если ограничить рассмотрение взаимодействия кварков низкоэнергетической областью, то фактор $B_{m,c,J^P}(s)$ можно считать слабо зависящим от s и вычисление взаимодействия ограничить вкладом низших по J^P состояний. Расчеты кварковой модели показывают, что наиболее важным является обмен эффективным глюоном, который имеет сравнительно большую массу и квантовые числа КХД глюона. Такое взаимодействие приводит к цветомагнитным силам, качественно правильно расщепляющим $SU(6)$ мультиплет [7,31]. Однако для количественного описания массы пиона и расщепления $\eta - \eta'$ -мезонов необходимо дополнительно ввести белое взаимодействие с квантовыми числами $J^P = 0^-$. Хорошим кандидатом на такое взаимодействие являются силы, индуцированные инстантонами.

Рассмотрим, что означает появление эффективной массы глюона с точки зрения эффективного феноменологического лагранжиана, описывающего мягкие процессы. Такой лагранжиан должен строиться на основе лагранжиана КХД и, следовательно, должен быть перенормируемым, как и лагранжиан исходной теории. Кроме того, эффективный лагранжиан должен обладать глобальной цветовой симметрией. Одним из естественных способов нарушить локальную цветовую симметрию лагранжиана КХД с сохранением глобальной симметрии является спонтанное нарушение, осуществляемое введением трех цветных триплетов хиггсовских полей [32,33]. Такое нарушение приводит к появлению эффективного массивного глюона и десяти скалярных частиц (например, октета цветных и двух белых хиггсовских бозонов). При этом параметры модели могут быть выбраны таким образом, чтобы при массе составного глюона ~ 700 МэВ массы хиггсовских бозонов оказались в районе 1—1,5 ГэВ. Таким образом, в такой модели [32], в дополнение к кварк-антикварковым связанным состояниям, в скалярном секторе появляются два белых хиггсовских бозона в районе 1—1,5 ГэВ, глюболы с массой в районе 1,4—1,9 ГэВ. Отметим, что, несмотря на кажущееся слишком большое число экзотических состояний, такая модель не противоречит сегодняшним экспериментальным данным: число найденных связанных состояний в скалярном секторе (см., например, [33,34] и обзор Particle Data Group [35]) заметно превышает число состояний, предсказываемых $q\bar{q}$ -систематикой.

Для вычисления кварк-антикварковых связанных состояний в работе [15] используется итерационная бутстрапная процедура. В качестве затравочного взаимодействия были введены два типа сил: (i) обмен эффективным глюоном и (ii) инстантон-индуцированное взаимодействие. Оба типа сил параметризованы как четырехточечное взаимодействие:

$$\begin{aligned}
 g_V^{(qq)} (\bar{q} \lambda \gamma_\mu q)^2 + 2g_V^{(qs)} (\bar{q} \lambda \gamma_\mu I_f q) (\bar{s} \lambda \gamma_\mu s) + g_V^{(ss)} (\bar{s} \lambda \gamma_\mu s)^2 + \\
 + \frac{1}{2} \tilde{g}_I (\bar{q}(1 + \gamma_5) I_f q)^2 - \frac{1}{2} \tilde{g}_I (\bar{q}(1 + \gamma_5) \tau_f q)^2 - \\
 - 2\tilde{g}_S (\bar{s}(1 + \gamma_5) q) (\bar{q}(1 + \gamma_5) s) + \tilde{g}_S (\bar{s}(1 + \gamma_5) s) (\bar{q}(1 + \gamma_5) q). \quad (2)
 \end{aligned}$$

Здесь τ — изотопические матрицы Паули, λ — цветовые матрицы, q — изотопический столбец биспиноров нестранных кварков, а s — биспинор странного кварка. Коэффициент g_V характеризует величину сил, обусловленных обменом эффективным глюоном, а коэффициенты $\tilde{g}_I$ и $\tilde{g}_S$ характеризуют инстантонное взаимодействие в нестранном и странном секторах. Использованное затравочное взаимодействие близко по форме к взаимодействию Намбу — Йона-Лазинио [36—38]. Нарушение цветовой $SU(3)$ симметрии параметризовано в виде:

$$\begin{aligned}
 g_V = \frac{m_q^2}{\pi^2} g_V^{(qq)} = \frac{(m_q + m_s)^2}{4\pi^2} g_V^{(qs)} = \frac{m_s^2}{\pi^2} g_V^{(ss)}, \\
 g_I = \frac{m_q^2}{\pi^2} \tilde{g}_I, \quad g_S = \frac{m_q m_s}{\pi^2} \tilde{g}_S. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Масса нестранных кварка m_q выбрана равной 385 МэВ, а масса странного кварка m_s — 510 МэВ. Чтобы ликвидировать расходимость в однопетлевых кварковых диаграммах, однопетлевой интеграл регуляризован при помощи функции обрезания:

$$F(\Lambda, s, m_1, m_2) = \exp \left[-\Lambda \left(\frac{s}{(m_1 + m_2)^2} - 1 \right) \right]. \quad (4)$$

Здесь Λ — параметр обрезания, s — квадрат полной энергии кварк-антикварковой пары в дисперсионном представлении петлевой диаграммы, а m_1 и m_2 — массы кварка и антикварка. Отметим, что исследование модели показало ее слабую чувствительность к форме параметризации функции обрезания. Например, использование Θ -функции или функции со степенным убыванием по s дает очень близкие результаты.

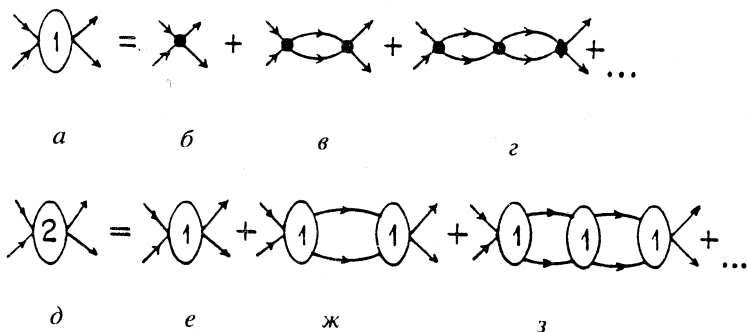


Рис.3. Диаграммы, вычисляемые в итерационной процедуре: а) диаграммы первой итерации, равные сумме диаграмм б, в, г. Диаграммы второй итерации, при вычислении которых диаграммы первой итерации используются в качестве «сил» в s -, t - и u -каналах (е, ж, з и так далее)

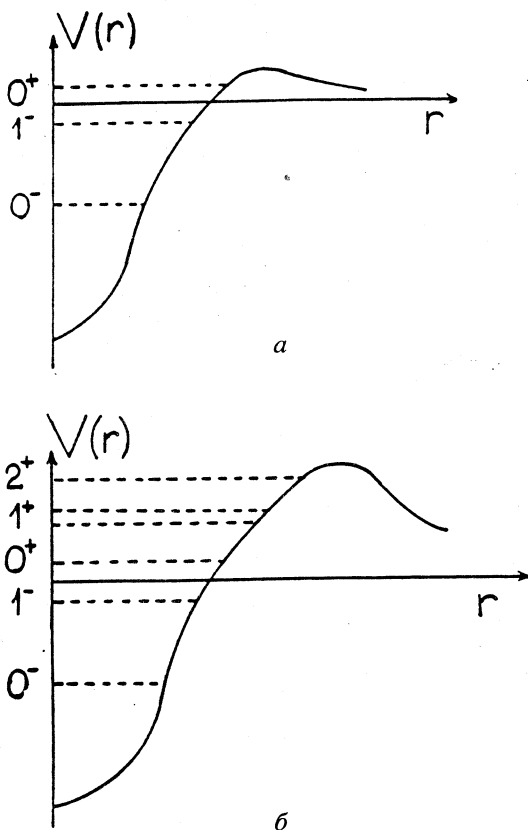
Амплитуда рассеяния, полученная после первой итерации (рис.3,а), равна сумме диаграмм, изображенных на рис.3,б,в,г, где точечная вершина определяется взаимодействием (2). Четыре параметра модели g_V , g_P , g_S и Λ фиксированы экспериментальными массами π -, K -, η' - и ρ -мезонов. Далее была применена итерационная бутстрапная процедура, что означает, что вычисленные амплитуды использовались как затравочное взаимодействие при следующей итерации (см. рис.3,е,ж,з). Параметры взаимодействия перепределялись, чтобы восстановить правильные массы вышеупомянутых мезонов. Такая итерационная процедура сходится довольно быстро: обычно вполне достаточно двух итераций (для проверки сходимости выполнялись пять итераций).

Результаты вычислений представлены в первых столбцах табл.1 и 2: видно, что массы и углы смешивания η -, ω -, K^* - и Φ -мезонов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Это является указанием на то, что при вычислении характеристик низколежащих мезонов можно пренебречь силами конфайнмента. Более того, скалярные мезоны, полученные в модели, имеют массы ~ 1000 МэВ. Это важный результат, ниже мы обсудим его более подробно.

Другой интересный результат касается массы составляющего глюона. В качестве затравочного взаимодействия итерационной процедуры был использован лагранжиан (2), где взаимодействие глюонного типа является точечным, что соответствует бесконечной эффективной массе составляющего глюона. Однако, после выполнения итерационной процедуры, учитывающей переходы $G_{\text{eff}} \rightarrow q\bar{q} \rightarrow G_{\text{eff}}$, получен составляющий глюон с конечной

Рис.4. Потенциал, соответствующий силам, используемым в модели без конфайнмента (а), и потенциал после включения мезонных бокс-диаграмм (б)

массой $M_G \sim 700$ МэВ. Эта величина достаточно жестко связана с массой ρ -мезона, которая использовалась для фиксации параметров. Рассмотрим это явление более подробно, используя язык потенциального взаимодействия (однако нужно иметь в виду, что подобная интерпретация лишь весьма грубо отражает результаты бутстрапного подхода, который является релятивистским методом, учитывающим динамику взаимодействия в кроссинговых каналах). Эффективный потенциал, эквивалентный бутстрапному взаимодействию, показан



схематически на рис.4,а. Этот потенциал соответствует короткодействующей части потенциала на рис.1 (т.е. дальнодействующая часть, непосредственно связанная с силами конфайнмента при $r > 1$ фм, отсутствует). Средний радиус потенциала на рис.4 определяется главным образом обратной массой составляющего глюона $\langle r \rangle_{\text{well}} \sim 1/M_G$. С другой стороны, этот же радиус определяется мезонными массами, выбранными для фиксации параметров. Это и приводит к тому, что масса глюона близка к массе ρ -мезона. При такой массе составляющего глюона масса низшего глюбола ($J^{PC} = 0^{++}$) должна быть около $2M_G \sim 1400$ МэВ. Это значение очень близко к величине, полученной в рамках механизма квенчинговой аппроксимации [39,40] решеточной КХД, где масса низшего глюбола равна $m_{\text{glueball}}(0^{++}) \sim 1550$ МэВ [41].

Отметим, что бутстрапная кварковая модель без учета сил конфайнмента правильно дает другие низкоэнергетические величины, например, массы нуклона и Δ -изобары, пионный и каонный формфакторы [15,42].

Просуммируем основные результаты рассмотренной выше модели.

1. Эта модель весьма хорошо описывает короткодействующую часть взаимодействия, где обмен составляющим глюоном с массой 700 МэВ играет центральную роль. Инстантонные силы малы по сравнению с глюонными, $g_V/g_I \sim 1/4$, но они необходимы для объяснения массы пиона и получения правильного расщепления и угла смешивания η - η' -мезонов.
2. Скалярные мезоны имеют массу ~ 1 ГэВ.

3. ПЕРЕХОД $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ КАК ПРОЦЕСС, ОТВЕТСТВЕННЫЙ ЗА МЕХАНИЗМ КОНФАЙНМЕНТА

В предыдущем разделе мы рассмотрели итерационную бутстрапную модель, в рамках которой была исследована короткодействующая компонента сил кваркового взаимодействия. Дальнейшим шагом является построение дальнедействующей компоненты — сил конфайнмента. В потенциальных моделях эта проблема решается с помощью линейно растущего потенциального барьера $V \sim \alpha r$. Этот потенциальный барьер призван обеспечить два главных свойства конфайнмента: образование высоковозбужденных связанных состояний и отсутствие асимптотически свободных кварков. Хотя первое свойство выполняется весьма удовлетворительно (получаемый в потенциальных моделях спектр хорошо согласуется с экспериментальными данными), выполнение второго свойства в этом подходе оставляет много открытых вопросов. В действительности силы конфайнмента не должны работать как абсолютно непроницаемый барьер: большинство возбужденных адронов легко распадаются на мультиадронные состояния; следовательно, рождение дополнительной кварк-антикварковой пары легко обеспечивает цветовую нейтрализацию. На рис.5,а показан пример такого процесса: кварки, составляющие возбужденное $q\bar{q}$ -состояние, разлетаются, рождая новую кварк-антикварковую пару и образуя таким образом два выходящих мезона. Такой переход, который мы будем обозначать $q + \bar{q} \rightarrow MM$, показан отдельно на рис.5,б; он играет главную роль в физике конфайнмента.

Важность процесса, показанного на рис.5,б, была понята довольно давно. Более того, исследование вторичных частиц в области фрагментации при высокоэнергетических столкновениях адронов предоставляет непосредственную информацию о «мягком» рождении новых кварк-антикварковых пар: импульсное распределение спектаторного кварка повторяется с хоро-

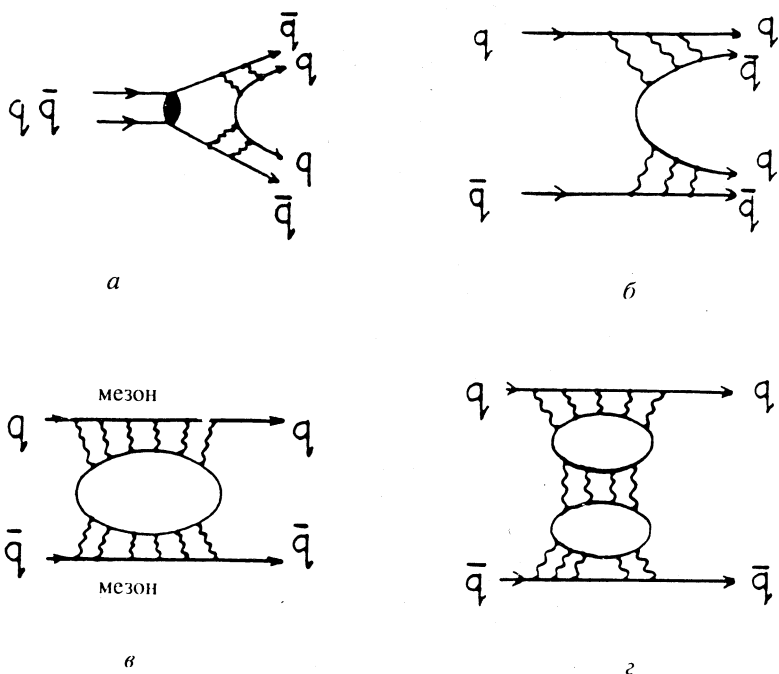


Рис.5. Диаграммы, соответствующие деконфайнменту кварков (а, б); мезонные бокс-диаграммы, ответственные за формирование конфайнментного барьера (в, г)

шей точностью в распределении вторичных частиц (см. [14] и цитируемую там литературу).

Процесс перехода кварк-антикварковой пары в мезоны является главным объектом нашего исследования. Если мы исследуем только кварк-антикварковые переходы, тогда бокс-диаграмма, показанная на рис.5,в и соответствующая произведению двух $(q + \bar{q} \rightarrow M + M)$ -амплитуд, определяет силы конфайнмента при $r \geq 1$ фм. Другими словами, диаграмма рис.5,в должна создавать потенциальный барьер для первых возбужденных состояний типа рис.4,б, если низколежащие мезоны формируют промежуточные состояния в бокс-диаграмме. Можно надеяться, что набор диаграмм, показанных на рис.5,в,г и т.д., способен восстановить весь «барьер», определяющий силы конфайнмента. С другой стороны, все эти диаграммы имеют мнимую часть, обусловленную рождением мезонов и, следовательно, отражают другую сторону конфайнмента: процесс мягкой нейтрализации цвета.

4. КВАРК-АДРОННАЯ ДУАЛЬНОСТЬ

Учет бокс-диаграммы рис.5,в не запрещает кваркам покидать область взаимодействия в виде асимптотически свободных частиц. Следовательно, необходимо сделать следующий шаг: модифицировать кварковый пропагатор.

Модификация кваркового пропагатора, обеспечивающая поведение кварка при $|r| \rightarrow \infty$ как экспоненциально подавленной волны, привлекает внимание с давних пор. Пропагаторы, содержащие только полюса в комплексной плоскости k^2 , могут давать такое подавление, и простейшие диаграммы, например, кварковая однопетлевая диаграмма, не будут содержать никаких кварковых особенностей на первом физическом листе. Однако остается открытым вопрос о существовании кварковых сингулярностей в более сложных кварковых диаграммах. В любом случае такой подход содержит существенный недостаток: здесь никоим образом не учитывается кварк-адронная дуальность. Одним из путей, позволяющим учесть это свойство, является использование представления Лемана — Калена для описания кваркового пропагатора:

$$\mathcal{G}(k) = \int_{\mu^2}^{\infty} dm^2 \rho(m) \frac{1}{m - k}, \quad (5)$$

где $\rho(m)$ — функция распределения массы кварка со свойствами, которые будут обсуждены в дальнейшем. Сразу же оговоримся, что это представление не должно рассматриваться буквально как пропагатор отдельного свободного кварка; оно отражает, главным образом, свойства кварка в кварк-антикварковом взаимодействии.

Хорошо известный процесс $e^+e^- \rightarrow$ адроны дает пример кварк-адронной дуальности, где мнимая часть кварковой однопетлевой диаграммы соответствует сумме мнимых частей адронных диаграмм. Рассмотрим этот процесс более детально. Кварковая однопетлевая диаграмма, описывающая процесс $\gamma^* \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \gamma^*$ (рис.6,а), равна:

$$\Pi_{q\bar{q}}^{\nu\nu'} = -N \int_{\mu^2}^{\infty} dm_1^2 \rho(m_1) \int_{\mu^2}^{\infty} dm_2^2 \rho(m_2) \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \Gamma_{\nu} \frac{1}{m_1 - \hat{k}_1} \Gamma_{\nu'} \frac{1}{m_2 - \hat{k}_2} \right\}, \quad (6)$$

где ν, ν' — фотонные индексы, а N — число цветов (мы рассматриваем диаграмму при фиксированном цвете кварков). Для мнимой части этой амплитуды получаем следующее выражение:

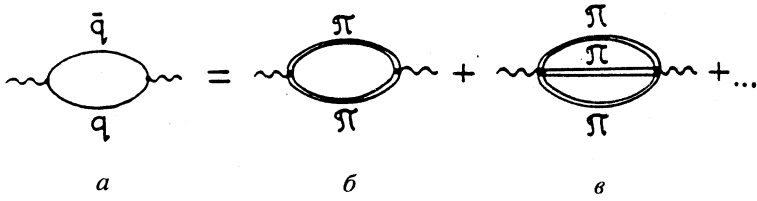


Рис.6. Однопетлевая диаграмма $q\bar{q}$ (а) и соответствующие мезонные диаграммы (б, в)

$$\text{Im } \Pi_{q\bar{q}}^{VV'}(p) = N \int_{4\mu^2}^{(m_1 + m_2)^2 \leq s} dm_1^2 dm_2^2 \rho(m_1) \rho(m_2) \Phi(s, m_1, m_2) \times \\ \times \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}}}{4\pi} \text{Tr} \{ \Gamma_V(m_1 + \hat{k}) \Gamma_{V'}(m_2 + \hat{k} - \hat{p}) \}, \quad (7)$$

где p — импульс фотона, $s = p^2$ и $\Phi(s, m_1, m_2)$ — двухчастичный фазовый объем:

$$\Phi(s, m_1, m_2) = \frac{1}{16\pi s} \sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}. \quad (8)$$

Интегрирование по телесному углу $d\Omega_{\mathbf{k}}$ — это интегрирование по всем направлениям вектора $\mathbf{k}$ при фиксированных значениях четырехвекторов k и $p - k$, а именно: $k^2 = m_1^2$ и $(p - k)^2 = m_2^2$. Интегрирование по массам кварков ограничено условием $2\mu \leq m_1 + m_2 \leq \sqrt{s}$. При $\sqrt{s} \leq 2\mu$ это ведет к равенству

$$\text{Im } \Pi_{q\bar{q}}^{VV'} = 0. \quad (9)$$

Полное сечение аннигиляции $e^+e^- \rightarrow$ адроны пропорционально мнимой части амплитуды (7):

$$\Pi_{q\bar{q}}^{VV'}(s) = (-p^2 \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \Pi(s), \\ \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}) \sim \sum_{\text{цвет}} \text{Im } \Pi(s). \quad (10)$$

Наблюдаемыми в эксперименте процессами являются $e^+e^- \rightarrow 2\pi$, $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ и т.д. Эти процессы определяются мнимой частью диаграмм, показанных на рис.6,б,в и др. Таким образом, получаем следующее соответствие:

$$\sum_{\text{цвет}} \text{Im } \Pi_{q\bar{q}}^{\nu\nu'}(s) = \text{Im } \Pi_{2\pi}^{\nu\nu'}(s) + \text{Im } \Pi_{3\pi}^{\nu\nu'}(s) + \dots, \quad (11)$$

где сумма в правой стороне уравнения включает все адронные вклады в собственно-энергетические части. Уравнение (11) является условием дуальности для кварковой однопетлевой диаграммы в пренебрежении глюонной эмиссией. Видно, что в уравнениях (5)—(7) следует положить $\mu = \mu_\pi$, так как первый разрешенный по энергии процесс рождения адронов — это процесс $e^+e^- \rightarrow 2\pi$.

Как уже отмечалось, правая сторона уравнения (11) содержит только адронные особенности; это отражает тот факт, что наблюдаемыми частицами являются адроны, а не кварки. Таким образом, кварковая однопетлевая диаграмма (левая сторона уравнения (11)) должна содержать те же самые адронные сингулярности. Это означает, что интегрирование по массе кварков не только должно уничтожить кварковые особенности, но также ввести соответствующие адронные особенности. В действительности уравнение (11) может рассматриваться как уравнение, определяющее распределение массы кварка. Оно позволяет реконструировать особенности $\rho(m)$ — например, особенность при $s = 9\mu_\pi^2$ (пороговая сингулярность, отвечающая рождению 3π) соответствует особенности в $\rho(m)$ при $m = 2\mu_\pi$.

Распространение уравнения (6) на область больших энергий приводит к результату пертурбативной КХД. Действительно, при больших виртуальностях можно пренебречь массой кварков в пропагаторе (т.е. заменить $(m - \hat{k}) \rightarrow (-\hat{k})$) и тем самым свести уравнение (6) к нормальному выражению КХД:

$$\Pi_{q\bar{q}}^{\nu\nu'}(p) = -N \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \Gamma_\nu \frac{1}{-\hat{k}_1} \Gamma_{\nu'} \frac{1}{-\hat{k}_2} \right\} \quad (12)$$

при выполнении условия нормировки

$$\int_{\mu^2}^{\infty} dm^2 \rho(m) = 1. \quad (13)$$

Таким образом, представление кваркового пропагатора в форме спектрального интеграла (5), впервые предложенное в [18], не нарушает перехода к высокоэнергетическому пределу и одновременно в области мягкой КХД генерирует правильные сингулярности амплитуды рассеяния на действительной оси при $s > 4\mu_\pi^2$, позволяя непосредственно удовлетворить требованию кварк-адронной дуальности. Интегрирование по массам кварков удаляет кварковые особенности в амплитуде рассеяния с первого физического листа и вводит новые особенности, соответствующие реальным адронным

состояниям. Это является ключевым моментом для выполнения пунктов 1 и 2, сформулированных во введении.

Опыт работы с кварковой моделью показал, что функция распределения ρ может быть выбрана не зависящей от типа реакций и сильно локализованной вокруг определенной массы. В рассматриваемой модели была выбрана следующая форма параметризации этой функции:

$$\rho(m) = \frac{C \sqrt{m^2 - \mu^2}}{(m^2 - m_0^2)^2 + \Delta^4}, \quad (14)$$

где μ равна массе пиона для нестранных кварков и массе каона для странных, а C есть нормировочная константа, определяемая уравнением (13). Для узкого распределения $\Delta \ll m_0$ размерная величина m_0 выполняет роль массы конституентного кварка.

5. УРАВНЕНИЕ БЕТЕ — СОЛПИТЕРА ДЛЯ АМПЛИТУДЫ МЕЗОННОГО РАССЕЯНИЯ

Как было обсуждено в предыдущем разделе, взаимодействие конституентных кварков эффективно учитывает вклад всех разрешенных в данном канале адронных состояний. Давайте рассмотрим, что произойдет с $q\bar{q}$ -взаимодействием, если учесть некоторые из этих адронных каналов в явном виде — как дополнительные каналы к $q\bar{q}$. Для расчета мезонного спектра и мезон-мезонных амплитуд рассеяния в этом случае мы будем пользоваться уравнением Бете — Солпитера, графически показанным на рис.7. Здесь и далее мы используем индекс 1 для $q\bar{q}$ -состояния и индекс 2 для двухмезонного состояния. Таким образом, для парциальной амплитуды с квантовыми числами J^P (индекс j) блок A_{11}^j описывает амплитуду перехода $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$, блок A_{12}^j описывает переход $q\bar{q} \rightarrow MM$ и блок A_{22}^j — амплитуду $MM \rightarrow MM$. В качестве затравочного взаимодействия введено непосредственное кварк-антикварковое взаимодействие, характеризуемое функцией N_{11} , и переход $q\bar{q} \rightarrow MM$, характеризуемый функцией N_{12} .

Напомним, что в бутстрапной кварковой модели [15] переход $q\bar{q} \rightarrow MM$ не учитывался и, следовательно, решалось одно уравнение для A_{11}^j , без мезонной петли. Полное кварк-антикварковое взаимодействие должно содержать две части: короткодействие и дальноедействие (силы конфайнмента). В работе [15] была учтена только короткодействующая компонента, и мы надеемся учесть значительную часть дальноедействующей компоненты за счет соответствующих мезонных однопетлевых диаграмм. Для того, чтобы более ясно увидеть вклад мезонных диаграмм в кварк-антикварковое взаимодействие, подставим уравнение для A_{12}^j в урав-

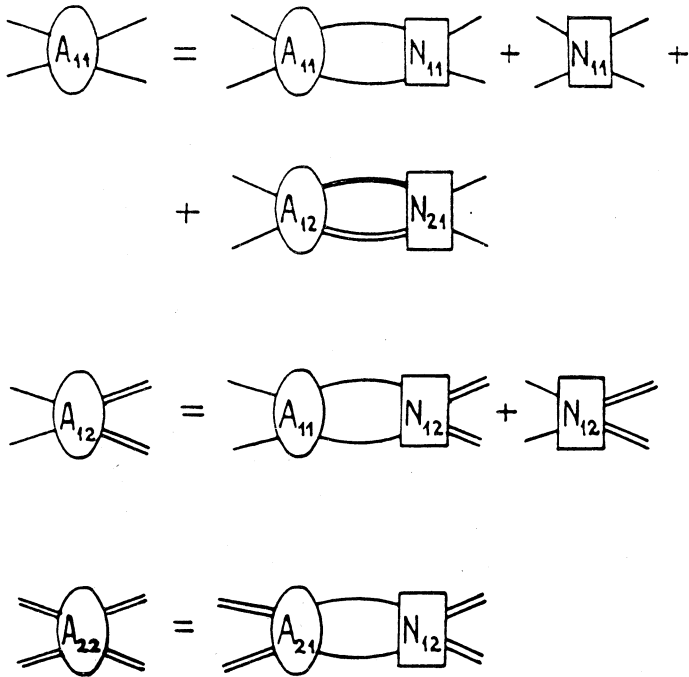


Рис.7. Уравнение Бете — Солпитера в случае связанных кварк-антикваркового и мезонных каналов

нение для блока A_{11}^j . Полученные в результате уравнения для A_{11}^j и A_{22}^j показаны в графической форме на рис.8.

При записи уравнения в такой форме ясно видно, что эффективное взаимодействие $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ в нашей модели состоит из двух частей: часть, обусловленная непосредственным кварк-антикварковым взаимодействием (рис.8,в), и часть, обусловленная бокс-диаграммой с двумя мезонами в промежуточном состоянии (рис.8,д). Первая часть соответствует короткодействующим силам и выбрана в той же форме, что и в [15]: она параметризуется инстантон-индуцированными силами и обменом эффективным глюоном. Вторая часть моделирует силы конфайнмента, но, конечно, имеет гораздо более сложную структуру, чем линейно растущий потенциальный барьер в нерелятивистском подходе. Взаимодействие, описываемое мезонными бокс-диаграммами, имеет мнимую часть, определяемую переходом в двухмезонное состояние. Отметим, что хотя переход $q\bar{q} \rightarrow M\bar{M}$ может быть параметризован в довольно простой форме, эффективное $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ -взаимодействие,

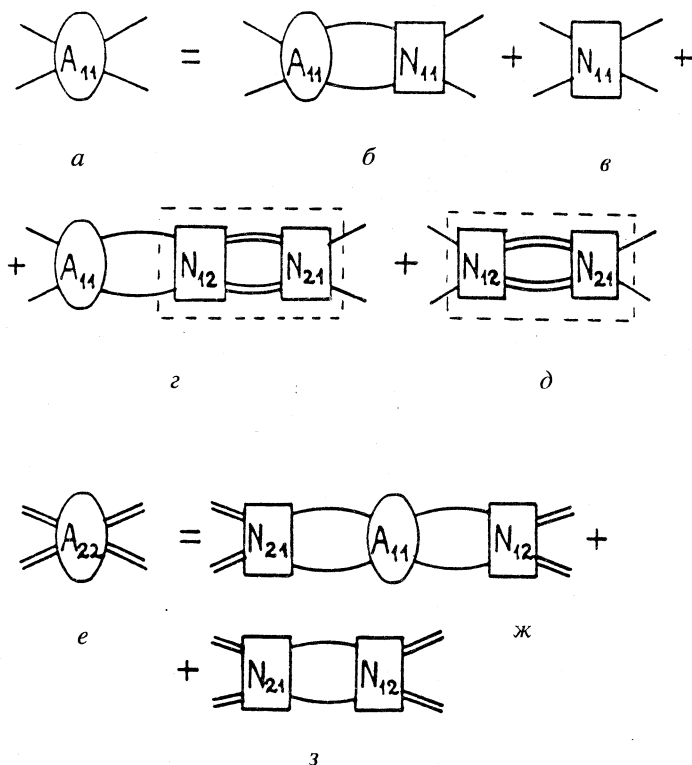


Рис.8. Уравнение Бете — Солпитера с мезонными бокс-диаграммами в качестве эффективного $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ -взаимодействия

равное сумме бокс-диаграмм с различными мезонами в промежуточном состоянии, имеет весьма сложную структуру.

При учете некоторых мезонных каналов в явном виде видно, что не только параметры кварк-антикваркового взаимодействия должны быть переопределены (по сравнению с [15]), но также и характеристики кваркового пропагатора. Если мы учтем в явной форме каналы рассеяния низших мезонов (например, S -волновые $q\bar{q}$ -состояния 0^- и 1^-), то средняя масса m_0 в функции распределения $\rho(m)$ сдвинется в сторону больших величин, а само распределение станет шире. Это происходит оттого, что при явном учете низших двухмезонных каналов кварк-антикварковый канал связан условием дуальности только с каналами рассеяния более тяжелых мезонов и с мультимезонными каналами рассеяния. С ренормализованным кварковым пропагатором и с учетом двухчастичных каналов рассеяния низших мезонов необ-

ходимо восстановить спектр низших мезонов (условие самосогласованности) и одновременно получить возбужденные мезонные состояния (такие, как P -волновые $q\bar{q}$ -состояния). После этого процедура может быть повторена с учетом в явном виде каналов рассеяния этих P -волновых мезонов и, следовательно, с новым переопределением кваркового пропагатора, для расчета еще более высоких мезонных состояний (например, радиального возбуждения S -волновых мезонов) и так далее. Одной из главных идей создания такой модели и является возможность на основе простого начального взаимодействия, шаг за шагом, учитывая все больше мезонных степеней свободы в явном виде, воспроизвести эффективное взаимодействие конфайнмента.

Структура распада высоковозбужденных мезонов, получаемая на промежуточном шаге нашей модели, на первый взгляд, довольно необычна: с одной стороны, существует переход высоковозбужденного мезона в реальное двухмезонное состояние $M^* \rightarrow MM$, а с другой — амплитуда все еще может содержать «нефизический» переход $M^* \rightarrow q\bar{q}$. Полная распадная ширина такого мезона равна сумме этих ширин. Физическая интерпретация ширины распада на $q\bar{q}$ -состояние состоит в следующем: она отражает распады высоковозбужденного состояния на адронные состояния, не учтенные в явном виде, например, на мультимезонные состояния. Ожидается, что при учете большего числа мезонных состояний в явном виде и, соответственно, при сдвиге эффективной массы кварков парциальная ширина перехода в $q\bar{q}$ -состояние будет уменьшаться до полного исчезновения (и рассматриваемая модель перейдет в мезонную модель типа предложенных в [43,44]).

После этого общего обсуждения обратимся к вычислению конкретных амплитуд. Для этого рассмотрим структуру матричных элементов в уравнении Бете — Солпитера при фиксированных квантовых числах J^P (характеризуемых индексом j). Эта структура может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} & (\bar{\Psi}_2 Q_j^B \Psi_1) A_{11}^j (\bar{\Psi}_3 Q_j^B \Psi_4), \\ & (\bar{\Psi}_2 Q_j^B \Psi_1) A_{12}^j (\Phi_3^{A*} O_j^{ABC} \Phi_4^C), \\ & (\Phi_2^{A*} O_j^{ABC} \Phi_1^C) A_{22}^j (\Phi_3^{D*} O_j^{DBE} \Phi_4^E), \end{aligned} \quad (15)$$

где Ψ_i — спиноры фермионов в начальном и конечном состояниях, Φ^A — волновые функции бозонов, а Q_j^B и O_j^{ABC} — фермионные и бозонные парциальные операторы в канале j . Индексы A, B, C, D, E являются мультииндексами, характеризующими как векторную структуру операторов, так и поляризации бозонов.

Операторы Q_j^B и O_j^{ABC} могут быть построены с помощью условия ортогональности для мнимой части однопетлевой диаграммы при энергии выше порога рождения конститuentов:

1) для фермионного (кварк-антикваркового) канала

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \text{Tr} \{ Q_i^C(m_1 + \hat{k}) Q_j^B(m_2 + \hat{k} - \hat{P}) \} \times \\ \times \delta(m_1^2 - k^2) \delta(m_2^2 - (P - k)^2) = \delta_{CB} \delta_{ij} \Phi_j^1(s, m_1, m_2); \quad (16)$$

2) для бозонного канала (два псевдоскалярных мезона, псевдоскалярный и векторный мезоны или два векторных мезона)

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} O_j^C O_j^B \delta(\mu_1^2 - k^2) \delta(\mu_2^2 - (P - k)^2) = \delta_{CB} \delta_{ij} \Phi_j^2(s, \mu_1, \mu_2), \quad (17)$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} O_i^{CA} \left(g_{AD} - \frac{k_A k_D}{\mu_1^2} \right) O_j^{DB} \delta(\mu_1^2 - k^2) \delta(\mu_2^2 - (P - k)^2) = \\ = \delta_{CB} \delta_{ij} \Phi_j^2(s, \mu_1, \mu_2), \quad (18)$$

$$\int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} O_i^{ACD} \left(g_{DE} - \frac{k_D k_E}{\mu_1^2} \right) O_j^{EBF} \left(g_{FA} - \frac{(P - k)_F (P - k)_A}{\mu_2^2} \right) \times \\ \times \delta(\mu_1^2 - k^2) \delta(\mu_2^2 - (P - k)^2) = \delta_{CB} \delta_{ij} \Phi_j^2(s, \mu_1, \mu_2). \quad (19)$$

Функции Φ_j^1 и Φ_j^2 — это фазовые объемы для двухфермионного и двухбозонного рассеяний в состоянии j , δ_{ij} — символ Кронекера для состояний с различным J^P и g_{ab} — метрический тензор.

Такое определение ортогональности особенно удобно при использовании дисперсионной техники для вычисления диаграмм: в этом случае равенство нулю мнимой части однопетлевой диаграммы перехода между различными состояниями автоматически приводит к равенству нулю и реальной части такого перехода. Список фермионных и бозонных операторов Q_j^C , O_j^{ACB} и выражений для фазовых объемов $\Phi_j^i(s)$ для рассеяний фермионов и псевдоскалярных и векторных бозонов приведен в приложении А.

Для вычисления однопетлевых диаграмм удобно использовать технику дисперсионного интегрирования. Эта техника релятивистски-инвариантна и относительно проста в случае вычисления амплитуд, имеющих несколько каналов рассеяния, что весьма важно для данной модели. Дисперсионная техника интегрирования по массе составной частицы развита в [45,46], где

она применена к описанию двухнуклонной системы и показала свою способность адекватного описания как амплитуд рассеяния, так и свойств связанного состояния. Эта техника естественна для учета каналов мезонного рассеяния, однако возникает вопрос о возможности использования этой техники для кварков и глюонов: эти частицы никогда не проявляют себя как свободные асимптотические состояния. Отметим прежде всего, что такая проблема существует не только при использовании дисперсионной техники, но и в любом релятивистском подходе к взаимодействию цветных объектов, например, при использовании фейнмановских диаграмм или переменных светового конуса (подробное сравнение этих трех подходов может быть найдено в [47]). Общая проблема, которая возникает вне зависимости от того, какая техника используется, может быть сформулирована на языке сингулярностей амплитуд: в амплитуде наблюдаемых процессов на первом физическом листе должны присутствовать только адронные особенности. Использование спектрального представления по массе кварков решает эту проблему: на первом этапе можно рассматривать кварки как реальные частицы и, следовательно, использовать любую технику для вычисления кварковых диаграмм, а затем, выполнив интегрирование по массам кварков, удалить кварковые особенности с первого листа, вводя вместо них соответствующие адронные особенности.

Таким образом, для расчета спектра мезонов и мезон-мезонных амплитуд рассеяния использовалась следующая схема.

1. На первом этапе кварки рассматриваются как асимптотически свободные частицы, но с различными массами в начальном, конечном и промежуточном состояниях. Для решения уравнения Бете — Солпитера используется техника дисперсионного интегрирования. Переход от уравнения Бете — Солпитера, написанного на языке фейнмановских диаграмм, к уравнению, записанному на языке дисперсионного интегрирования, приведен в [47]. В дисперсионном подходе как ядро взаимодействия N_{ik}^j (содержащее только левые сингулярности парциальной амплитуды), так и сама парциальная амплитуда A_{ik}^j (где $i, k = 1, 2, j = J^P$) зависят от двух параметров: квадратов полной энергии двух частиц в начальном и конечном состояниях, которые мы будем обозначать, соответственно, s и s' . Выражение для уравнения Бете — Солпитера, записанное в рамках дисперсионной техники, имеет вид

$$A_{11}^j(s, s_1) = \int \frac{ds'}{\pi} A_{11}^j(s, s') \frac{\Phi_j^1(s', m_1, m_2) N_{11}^j(s', s_1)}{s' - s} + \\ + \int \frac{ds'}{\pi} A_{12}^j(s, s') \frac{\Phi_j^2(s', \mu_1, \mu_2) N_{21}^j(s', s_1)}{s' - s} + N_{11}^j(s, s_1),$$

$$\begin{aligned}
 A_{12}^j(s, s_1) &= \int \frac{ds'}{\pi} A_{11}^j(s, s') \frac{\Phi_j^1(s', m_1, m_2) N_{12}^j(s', s_1)}{s' - s} + N_{12}^j(s, s_1), \\
 A_{22}^j(s, s_1) &= \int \frac{ds'}{\pi} A_{12}^j(s, s') \frac{\Phi_j^1(s', m_1, m_2) N_{21}^j(s', s_1)}{s' - s}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Это уравнение удобно решать в предположении факторизации ядер $N_{ik}(s, s')$ в виде суммы произведений вершин G_{ik}^m , содержащих, подобно ядру, только левые особенности парциальной амплитуды рассеяния (для упрощения выражений опустим в уравнениях (21)—(23) индекс, характеризующий J^P):

$$N_{ik}(s, s') = \sum_m G_{ik}^m(s) G_{ki}^m(s'). \quad (21)$$

В этом случае уравнение Бете — Солпитера может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
 A_{ik}(s, s') &= \sum_{mp} G_{ip}^m(s) a_{ipk}^m(s'), \\
 a_{ipk}^m &= \sum_{nl} a_{ilp}^n B_{lpk}^{nm} + G_{ik}^m \delta_{ip}, \quad (22)
 \end{aligned}$$

где a_{ipk}^m — блок взаимодействий, характеризующий переход из состояния i в состояние с правой вершиной G_{pk}^m в последней однопетлевой диаграмме. Однопетлевая функция:

$$\begin{aligned}
 B_{lpk}^{nm}(s, m_1, m_2) &= \int_{(m_1 + m_2)^2}^{\infty} \frac{ds'}{\pi} G_{lp}^n(s', m_1, m_2) \frac{\Phi_p(s', m_1, m_2)}{s' - s'} \times \\
 &\times G_{pk}^m(s', m_1, m_2). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Подчеркнем, что функция B_{ijk}^{nm} , характеризующая однопетлевые кварк-антикварковые диаграммы, зависит от бегущих масс кварка и антикварка. Уравнение (22) легко переписывается в матричной форме и решается в явном виде.

2. В качестве следующего шага мы заменяем кварковые сингулярности на первом физическом листе на адронные сингулярности, выполняя в каждой кварк-антикварковой петле интегрирование по распределениям массы кварка и антикварка:

$$B(s) = \int_{\mu^2}^{\infty} dm_1^2 \rho(m_1) \int_{\mu^2}^{\infty} dm_2^2 \rho(m_2) B(s, m_1, m_2) \Theta(m_1 + m_2 - M_{\text{thr}}). \quad (24)$$

Здесь Θ -функция представляет собой обрезание, которое должно быть выполнено в случае, когда масса кварков меньше порога первого разрешенного по энергии адронного канала с массой M_{thr} . Если все низшие двухмезонные состояния учтены при расчете в явном виде, то M_{thr} выбирается равной порогу низшего трехмезонного состояния, разрешенного в данной парциальной амплитуде. Например, при расчете амплитуды с квантовыми числами $J^{PC} = 1^{--}$ мнимая часть кварк-антикварковой однопетлевой диаграммы должна начинаться с трехпионного порога для изоспина 0 и с порога $\pi\eta\pi$ для изоспина 1.

Рассмотрим структуру ядер $N_{ik}(s, s')$, которые используются для вычисления амплитуд в нашей модели. Начальное кварк-антикварковое взаимодействие выбрано в форме эффективного лагранжиана (2), (3), используемого для расчета мезонного [15] и барионного [16] спектров в рамках бутстрапной модели. Ядро парциальной амплитуды (рис.8,а) может быть вычислено с помощью проектирования этого взаимодействия в s -канал. После этого полученное выражение необходимо разложить на сумму произведений вершинных функций $G(s)$, содержащих только левые особенности (такое разложение проведено в приложении Б). Для ликвидации расходимости в кварк-антикварковой диаграмме интеграл (23) регуляризуется введением функции обрезания в форме (4).

Вершина виртуального перехода S -волновых мезонов в кварк-антикварковую пару выбрана в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{q} \frac{\tau}{2} [\gamma_5 \pi g_\pi + \gamma_\mu \rho_\mu g_\rho] q \right) + \left(\bar{q} \frac{I}{2} [\gamma_5 (\eta g_\eta \cos \alpha + \eta' g_{\eta'} \sin \alpha) + \gamma_\mu \omega_\mu g_\omega] q \right) + \\ & + (\bar{s} [\gamma_5 (-\eta g_\eta \sin \alpha + \eta' g_{\eta'} \cos \alpha + \gamma_\mu \Phi_\mu g_\Phi) s] + \\ & + (\bar{q}_i [\gamma_5 K_i g_K + \gamma_\mu K_{i\mu}^* g_{K^*}] s) + (\bar{s} [\gamma_5 \bar{K}_i g_K + \gamma_\mu \bar{K}_{i\mu}^* g_{K^*}] g_i), \end{aligned} \quad (25)$$

где α — угол смешивания псевдоскалярных мезонов, тогда как векторные мезоны ω и Φ взяты как чистые состояния нестранных и странных кварков. Для простоты выбираются $SU(3)$ симметричные коэффициенты:

$$g_\pi = g_K = g_\eta = g_{\eta'} \equiv g_1,$$

$$g_\rho = g_\omega = g_\Phi = g_{K^*} \equiv g_2. \quad (26)$$

Переход кварк-антикварковой пары в два мезона описывается диаграммой, показанной на рис.9. Амплитуда такой диаграммы равна

$$A = (\bar{\psi}_2 Q^C \mathcal{G}(k) Q^B \psi_1) \phi_3^{*B} \phi_4^C F_1(k^2) F_2(k^2), \quad (27)$$

где k — импульс обменного кварка, $\mathcal{G}(k)$ — его пропагатор, а $F_i(k^2)$ — формфакторы мезонов.

Операторы Q^C и Q^B описывают переход мезон $\rightarrow q\bar{q}$ и определяются уравнением (25).

Пропагатор обменного кварка может довольно сильно отличаться от пропагатора конstituентного кварка. В рассматриваемом подходе мы не пытались решить вопрос о конкретной форме этого

пропагатора, так же как и определить вид формфакторов F_i , а параметризовали в простейшей форме парциального взаимодействия (результат проекции взаимодействия (27) в различные парциальные волны) и определяли параметры, исходя из наилучшего описания экспериментальных данных. Полное взаимодействие (27) может быть записано как сумма парциальных взаимодействий в следующем виде:

$$A = \sum (\bar{\Psi}_2 Q_j^C \Psi_1) (\Phi_3^* O_j^C \Phi_4) N_{12}^j(s) = \sum (\bar{\Psi}_2 Q_j^C \Psi_1) (\Phi_3^* O_j^C \Phi_4) f_i(s) \beta_f. \quad (28)$$

Здесь функции $f_j(s)$ определяют парциальные взаимодействия, а коэффициенты β_f являются изотопическими коэффициентами проекции диаграммы рис.9 в различные кварк-антикварковые и мезон-мезонные изотопические каналы. Список этих коэффициентов дан в приложении В. Функции f_j имеют только левые сингулярности полной амплитуды (включающей перерасcеяния частиц), и мы параметризовали эти функции в виде произведения двух вершинных функций, также имеющих только левые сингулярности:

$$f_j(s) = 4\pi^2 C_j G_{q\bar{q}}(s) G_{\mu\mu}(s), \quad (29)$$

где C_j — параметры, зависящие от квантовых чисел J^P . Функции $G(s)$ были выбраны в форме, обеспечивающей сходимость мезонных однопетлевых диаграмм:

$$G_{q\bar{q}} = \lambda_q \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 - s_q}{s - s_q}},$$

$$G_{\mu\mu} = \sqrt{\frac{(\mu_1 + \mu_2)^2 - s'_q}{s - s'_q}} \left(1 + \frac{s - (\mu_1 + \mu_2)^2}{s} \alpha \right), \quad (30)$$

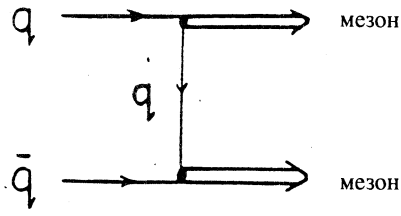


Рис.9. Диаграмма, описывающая переход $q\bar{q} \rightarrow M\bar{M}$

где

$$\begin{aligned}s_q &= (m_1 + m_2)^2 - a_q, \\ s'_q &= (\mu_1 + \mu_2)^2 - a_q.\end{aligned}\quad (31)$$

Коэффициент λ_q служит для того, чтобы отличить процесс обмена нестранным кварком от процесса обмена странным. Этот коэффициент равен единице при обмене нестранным кварком ($\lambda_u = \lambda_d = 1$), а в случае обмена странным кварком используется как фитирующий параметр. Подобным же образом коэффициент a_q выбран равным 1 ГэВ^2 для обмена нестранным кварком и равным $a_s = a_q m_s^2 / m_q^2$ для обмена странным. Параметр α выбран одинаковым для всех каналов.

6. ПАРАМЕТРЫ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Обсудим результаты расчета спектра мезонов, полученные с помощью модели, представленной в разд.5, где в дополнение к кварк-антикварковому каналу учтены в явном виде каналы рассеяния псевдоскалярных и векторных мезонов (S -волновые состояния кварк-антикварковой пары). При этом мы сдвинули в область больших значений среднюю массу кварков: в функции распределения $\rho(m)$ величина m_0 выбрана равной 625 МэВ для нестрannого кварка и 800 МэВ — для странного. Результаты расчета спектра S - и P -волновых $q\bar{q}$ связанных состояний для различных ширин функции распределения масс приведены в табл.1—5. Значения параметров, используемых при этих вычислениях, даны в табл.6.

Данные о мезонных амплитудах рассеяния представлены в терминах фазовых сдвигов и неупругостей в мезонных каналах. В случае наличия трех каналов рассеяния S -матрица может быть записана в следующем виде:

$$S = \begin{pmatrix} \eta_{11}e^{2i\varphi_{11}} & \eta_{12}e^{2i\varphi_{12}} & \eta_{13}e^{2i\varphi_{13}} \\ \eta_{21}e^{2i\varphi_{21}} & \eta_{22}e^{2i\varphi_{22}} & \eta_{23}e^{2i\varphi_{23}} \\ \eta_{31}e^{2i\varphi_{31}} & \eta_{32}e^{2i\varphi_{32}} & \eta_{33}e^{2i\varphi_{33}} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Используя условие унитарности $SS^\dagger = 1$, легко показать, что только шесть элементов S -матрицы являются независимыми. В качестве этих независимых элементов удобно выбрать три фазовых сдвига в диагональных переходах φ_{ii} и три неупругости η_{ii} . В случае двухканального взаимодействия

имеется только три независимых переменных: два фазовых сдвига Φ_{11} , Φ_{22} и параметр неупругости $\eta = \eta_{11} = \eta_{22}$.

Параметры неупругости и фазовые сдвиги для рассеяния псевдоскалярных и векторных мезонов в состояниях $J^{PC} = 1^{-}, 0^{++}, 1^{++}, 1^{+-}, 2^{++}$, вплоть до энергии $\sqrt{s} = 1,250$ ГэВ, приведены на рис.10—20.

Обсудим параметры рассматриваемой модели. Для описания спектра низколежащих мезонов ($J^P = 0^{-}, 1^{-}$) используются пять параметров: константа связи при обмене эффективным глюоном g_V , константы связи инстантонного взаимодействия в нестранном канале g_I и в странном канале g_S , параметр обрезания Λ и константа связи для $q\bar{q} \rightarrow MM$ перехода, выбранная одинаковой как для $J^P = 0^{-}$, так и для 1^{-} -каналов: $C(0^{-}) = C(1^{-})$. Эти параметры находятся из фита масс π -, K -, η' -, ρ -мезонов и ширины ρ -мезона.

Для описания мезон-мезонного рассеяния в канале $J^{PC} = 0^{++}$ используются еще три параметра: константа связи $C(0^{++})$ для перехода кварк-антикварковой пары в мезоны и параметры двухмезонной вершинной функции (30) α и λ_s . Отметим, что два последних параметра являются общими для всех каналов рассеяния $J^{PC} = 0^{++}, 1^{+-}, 1^{++}, 2^{++}$. Параметр α наиболее важен для описания фазового сдвига в S -волне рассеяния пионов при низкой энергии. Если положить этот параметр равным нулю, то можно восстановить спектр мезонов без ощутимых изменений, но в S -волне пион-пионного рассеяния появится пик вблизи двухпионного порога. В других каналах такого практически не произойдет, так как там мезон-мезонная амплитуда находится либо в P -, либо в D -волне и, следовательно, подавлена у порога, либо константа связи $q\bar{q} \rightarrow MM$ недостаточно сильна, чтобы вызвать такой эффект. Параметр α не может быть выбран большим, так как в этом случае он начинает влиять на область энергий 1 ГэВ, существенно нарушая спектр 0^{+} -мезонов. Отметим, что усиление пион-пионной S -волны при малых энергиях является также следствием выбора очень простой параметризации $q\bar{q} \rightarrow MM$ перехода.

Как показали последние исследования [33,34,44], амплитуда пион-пионного рассеяния в S -канале вблизи K -мезонного порога имеет двойную полюсную структуру: сравнительно узкий полюс, называемый f_0 -резонансом с массой $M = 975$ и шириной 70—100 МэВ, и широкий резонанс с массой около 1 ГэВ. В нашей модели мы не получили узкий полюс, но получили широкий, с массой $M = 900 - i320$ МэВ. Этот полюс напоминает старый ϵ (или σ)-резонанс, играющий важную роль в нуклон-нуклонных взаимодействиях. Тот факт, что узкий f_0 -резонанс не появился в нашей модели как

Таблица 1. Массы и парциальные ширины $J^{PC} = 0^{-+}$ и $J^{PC} = 1^{-+}$ мезонов (все величины приведены в МэВ)

Вычисляемая величина	$m_q = 390$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 100$	$m_q = 625$ $\Delta = 200$	Эксперимент
$m(\pi)$	140	140	140	140	140
$m(K)$	495	495	495	495	495
$m(\eta)$	550	562	564	565	548
Θ_p , град	- 18	- 10	- 10	- 10	- 10 ÷ - 20
$m(\eta')$	960	960	960	960	958
$m(\rho)$	770	775	775	775	768
$\Gamma_{\pi\pi}$	—	150	150	150	149 ± 3
$m(K^*)$	890	886	885	885	892
$\Gamma_{K\pi}$	—	48	48	50	50 ± 1
$m(\omega)$	765	767	766	766	782
$\Gamma_{3\pi}$	—	—	—	—	8
$m(\Phi)$	1025	1044	1046	1048	1020
Γ_{kk}	—	4	4	5	4,5

Таблица 2. Массы и парциальные ширины $J^{PC} = 0^{++}$ мезонов. Масса резонанса определена как положение максимума в квадрате амплитуды рассеяния (все величины приведены в МэВ)

Вычисляемая величина	$m_q = 390$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 100$	$m_q = 625$ $\Delta = 200$	Эксперимент
$m(f_0)$	780	875	877	875	880 ± 20
$m(a_0)$	950	998	998	998	985
Γ_{tot}	—	84	76	70	57 ± 11
$\Gamma_{K\bar{K}}$	—	72%	75%	73%	набл.
$\Gamma_{\pi\eta}$	—	28%	25%	27%	набл.
$m(K_0)$	1080	1250	1242	1236	1430 ± 6
Γ_{tot}	—	300	316	320	287 ± 23
$\Gamma_{K\pi}$	—	88%	84%	87%	93%

Вычисляемая величина	$m_q = 390$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 100$	$m_q = 625$ $\Delta = 200$	Эксперимент
$\Gamma_{K\eta}$	—	12%	16%	13%	—
$m(f_0)$	1200	1715	1718	1720	1710 ± 5
Γ_{tot}	—	144	190	230	150 ± 15
$\Gamma_{q\bar{q}}$	—	18%	18%	17%	—
$\Gamma_{s\bar{s}}$	—	48%	48%	50%	—
$\Gamma_{K\bar{K}}$	—	22%	21%	21%	набл.
$\Gamma_{\pi\pi}$	—	8%	7%	7%	—
$\Gamma_{\eta\eta}$	—	4%	6%	7%	—

Таблица 3. Массы и парциальные ширины $J^{PC} = 1^{+-}$ мезонов.
 Определение масс резонансов аналогично данному в табл.2
 (все величины приведены в МэВ)

Вычисляемая величина	$m_q = 390$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 100$	$m_q = 625$ $\Delta = 200$	Эксперимент
$m(h_1)$	—	1190	1190	1188	1170 ± 20
Γ_{tot}	—	102	146	192	360 ± 40
$\Gamma_{\rho\pi}$	—	100%	100%	100%	набл.
$m(b_1)$	—	1240	1245	1242	1233 ± 10
Γ_{tot}	—	30	44	98	150 ± 10
$\Gamma_{\omega\pi}$	—	100%	100%	100%	домин.
$m(K_1)$	—	1245	1235	1190	1270 ± 10
Γ_{tot}	—	86	100	90	90 ± 20
$\Gamma_{K^*\pi}$	—	95%	100%	100%	20%
$\Gamma_{K\rho}$	—	5%	—	—	40%
$\Gamma_{K_0^*\pi}$	—	—	—	—	30%
$m(h_1)$	—	1610	1610	1608	—
Γ_{tot}	—	130	160	190	—
$\Gamma_{q\bar{q}}$	—	23%	23%	23%	—
$\Gamma_{s\bar{s}}$	—	14%	13%	12%	—
$\Gamma_{K^*\pi}$	—	35%	36%	37%	—
$\Gamma_{\rho\pi}$	—	14%	14%	14%	—
$\Gamma_{\Phi\eta}$	—	14%	14%	14%	—

Таблица 4. Массы и парциальные ширины $J^{PC} = 1^{++}$ мезонов.
Определение масс резонансов аналогично данному в табл.2
(все величины приведены в МэВ)

Вычисляемая величина	$m_q = 390$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 100$	$m_q = 625$ $\Delta = 200$	Эксперимент
$m(f_1)$	—	1283	1286	1287	1282 ± 5
Γ_{tot}	—	38	46	70	24 ± 3
$\Gamma_{q\bar{q}}$	—	100%	100%	100%	—
$m(a_1)$	—	1286	1274	1270	1260 ± 30
Γ_{tot}	—	50	84	120	$350 \div 500$
$\Gamma_{\rho\pi}$	—	62%	60%	71%	домин.
$\Gamma_{q\bar{q}}$	—	38%	40%	29%	—
$m(K_1)$	—	1350	1310	1260	1400 ± 10
Γ_{tot}	—	128	100	92	175 ± 20
$\Gamma_{K^*\pi}$	—	57%	85%	95%	94%
$\Gamma_{K\rho}$	—	33%	10%	5%	3%
$\Gamma_{K\omega}$	—	10%	5%	—	1%

Таблица 5. Массы и парциальные ширины $J^{PC} = 2^{++}$ мезонов.
Определение масс резонансов аналогично данному в табл.2
(все величины приведены в МэВ)

Вычисляемая величина	$m_q = 390$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 100$	$m_q = 625$ $\Delta = 200$	Эксперимент
$m(f_2)$	—	1260	1263	1260	1275 ± 5
Γ_{tot}	—	180	194	216	185 ± 20
$\Gamma_{\pi\pi}$	—	80%	71%	65%	85%
$\Gamma_{K\bar{K}}$	—	15%	14%	10%	5%
$\Gamma_{q\bar{q}}$	—	5%	17%	25%	10%
$m(a_2)$	—	1280	1282	1281	1318 ± 1
Γ_{tot}	—	44	44	42	110 ± 5
$\Gamma_{K\bar{K}}$	—	29%	21%	15%	6%
$\Gamma_{\pi\eta}$	—	11%	7%	5%	14%

Вычисляемая величина	$m_q = 390$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $\Delta = 100$	$m_q = 625$ $\Delta = 200$	Эксперимент
$\Gamma_{\rho\pi}$	—	3%	2%	2%	70%
$\Gamma_{q\bar{q}}$	—	57%	70%	78%	10%
$m(K_2)$	—	1440	1445	1450	1425 ± 1
Γ_{tot}	—	60	60	96	98 ± 3
$\Gamma_{K\pi}$	—	64%	56%	44%	50%
$\Gamma_{K\eta}$	—	5%	5%	4%	—
$\Gamma_{K^* \pi}$	—	2%	2%	2%	25%
$\Gamma_{q\bar{q}}$	—	29%	37%	50%	25%

Таблица 6. Параметры модели.

Массы кварков и ширины распределения массы кварков приведены в МэВ

Вычисляемая величина	$m_q = 625$ $m_s = 800$ $\Delta = 0$	$m_q = 625$ $m_s = 800$ $\Delta = 100$	$m_q = 625$ $m_s = 800$ $\Delta = 200$
g_V	13,108	13,244	13,842
g_I	- 2,3110	- 2,3054	- 2,4574
g_S	- 1,2360	- 1,2430	- 1,2760
Λ	4,6821	4,6768	4,6846
$C(0^-) = C(1^-)$	7,85	7,98	8,38
$C(0^+)$	14,34	14,46	15,01
$C(1^+)$	29,89	31,41	36,03
$C(1^+)$	25,58	28,37	32,54
$C_S(2^+)$	25,20	44,33	64,44
$C_D(2^+)$	55,44	48,76	38,66
α	0,75	0,75	0,75
λ_s	1,3	1,3	1,3
g_1/g_2	2	2	2

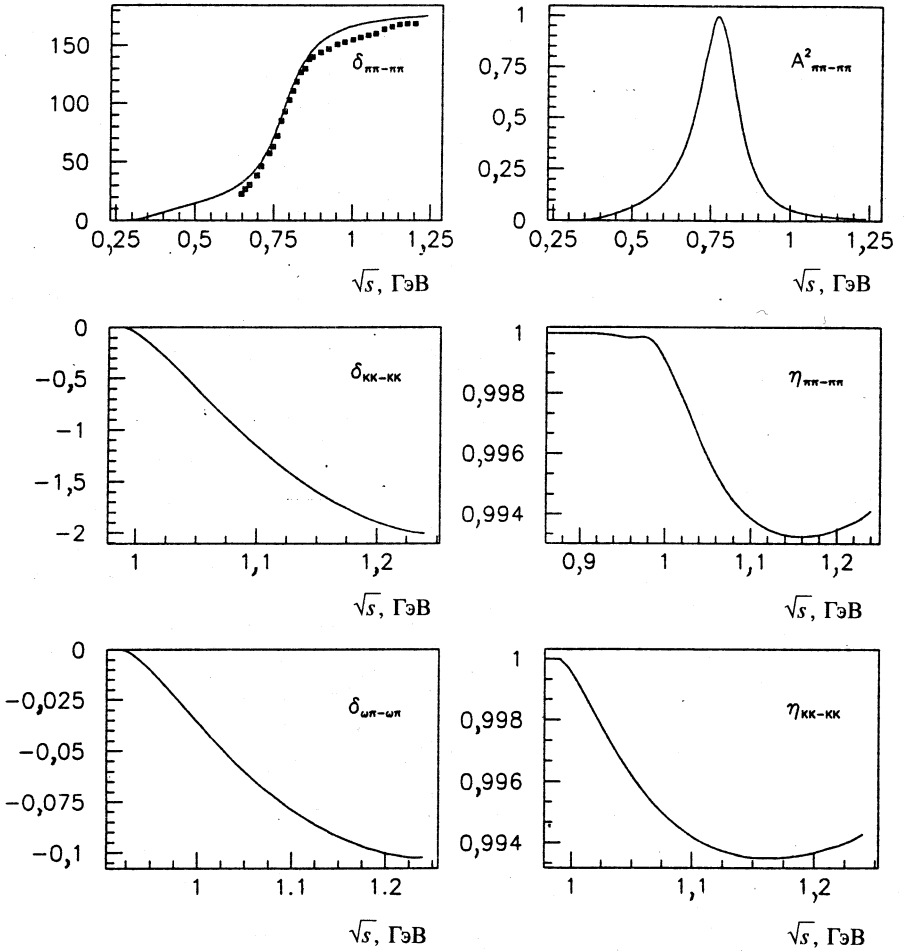


Рис.10. Квадрат амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $G^{PC} = 1^+1^-$. Экспериментальные данные по фазовому сдвигу $\pi\pi$ взяты из [49]

$q\bar{q}$ -состояние, оставляет возможность объяснить этот резонанс как некоторое экзотическое состояние (см., например, дискуссию в [33] и ссылки, данные там). Наши результаты в скалярном и изовекторном секторах согласуются довольно хорошо с параметризацией Флатте a_0 -резонанса [48]. Хотя детерминант амплитуды $\pi\eta$ -рассеяния становится чисто мнимым при $M_{\pi\eta} = 1,020$ ГэВ, квадрат амплитуды имеет максимум на $K\bar{K}$ -пороге, и при

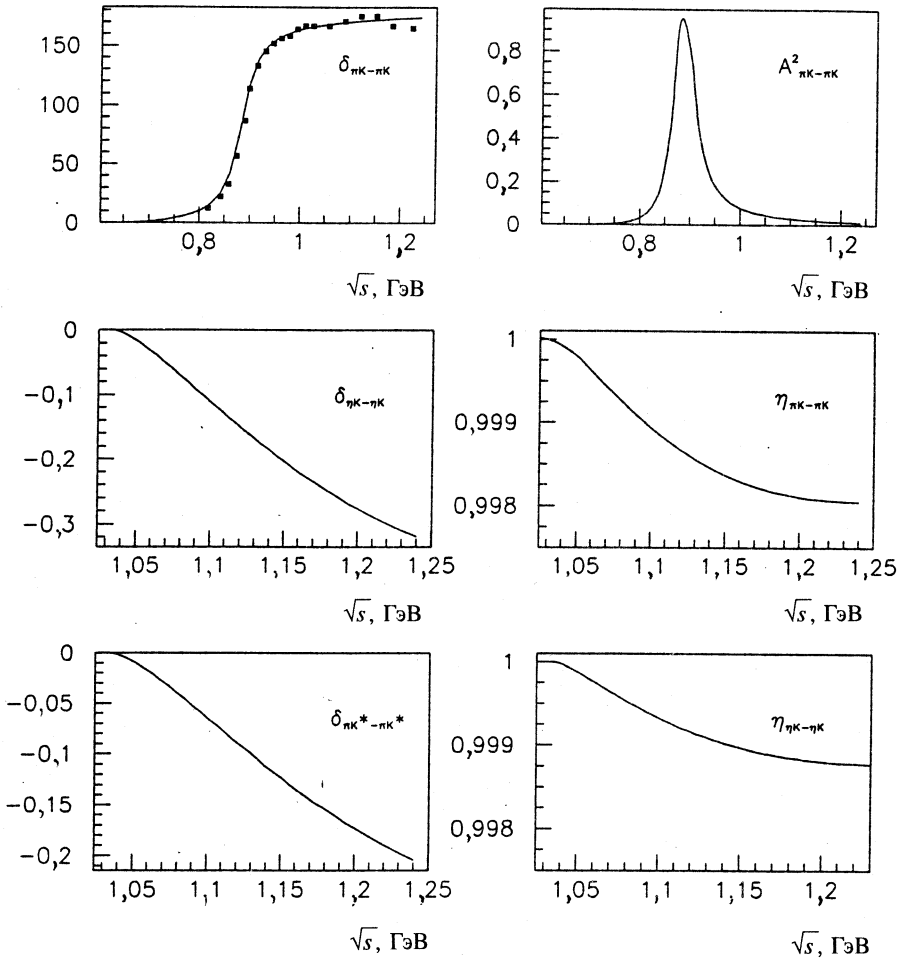


Рис.11. Квадрат амплитуды πK -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $J^P = 1/2^-$. Экспериментальные данные по фазовому сдвигу πK взяты из [50,51]

фитировании этой амплитуды брейт-вигнеровским полюсом полученные масса и ширина очень близки к приведенным в Particle Data Group [35].

В каналах $J^{PC} = 1^{+-}$ и $J^{PC} = 1^{++}$ вводятся два новых параметра: константы связи $C(1^{+-})$ и $C(1^{++})$ перехода $q\bar{q} \rightarrow M\bar{M}$. В странном секторе эти каналы смешиваются и характеристики K_1 -мезонов вычисляются с учетом этого смешивания.

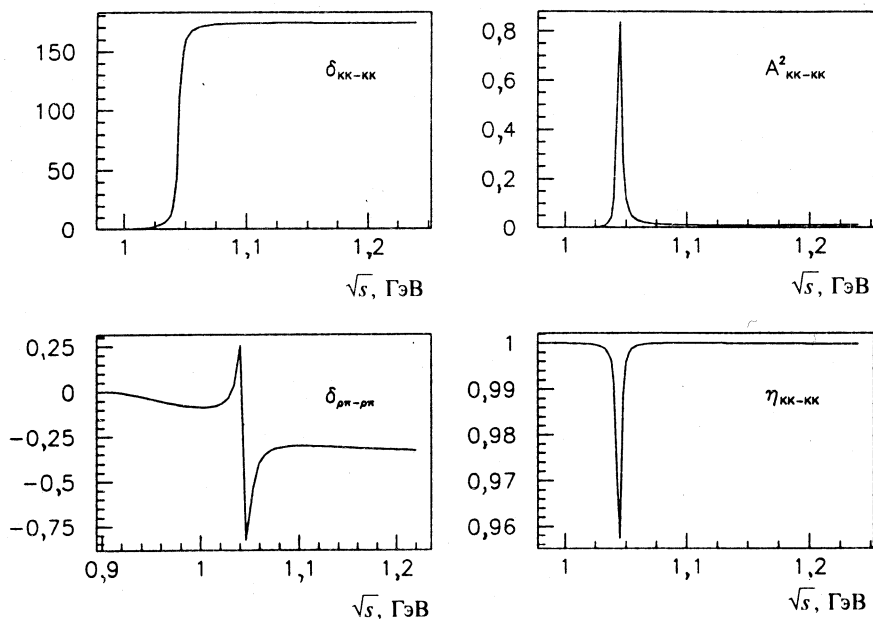


Рис.12. Квадрат амплитуды $K\bar{K}$ -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $J^{PC} = 0^{-}1^{-}$

В канале $J^{PC} = 2^{++}$ также вводятся два дополнительных параметра: константы связи $q\bar{q}$ с мезонами в S -волне, $C_S(2^{++})$, и с мезонами в D -волне, $C_D(2^{++})$. Второй параметр фиксирован так, чтобы дать правильную ширину $f_2(J^{PC} = 0^{+}2^{++})$ -мезона, а первый подбирался, исходя из наилучшего описания мезонного спектра в этом канале. Отметим, что модель не описала резонанс с массой $M = 1525$ МэВ в изоскалярном канале, который обычно считается связанным состоянием странных кварков. По-видимому, этот мезон образуется в результате сильного смешивания всех каналов и, следовательно, должен появиться на следующем шаге модели при учете каналов с рассеянием P -волновых мезонов.

Кроме вышеперечисленных параметров, используемых в модели, вводятся два других параметра, общих для всех каналов: средняя масса не-странного кварка m_q и отношение констант связи для перехода псевдоскалярных и векторных мезонов в кварк-антикварковую пару: g_1/g_2 (см. уравнение (26)).

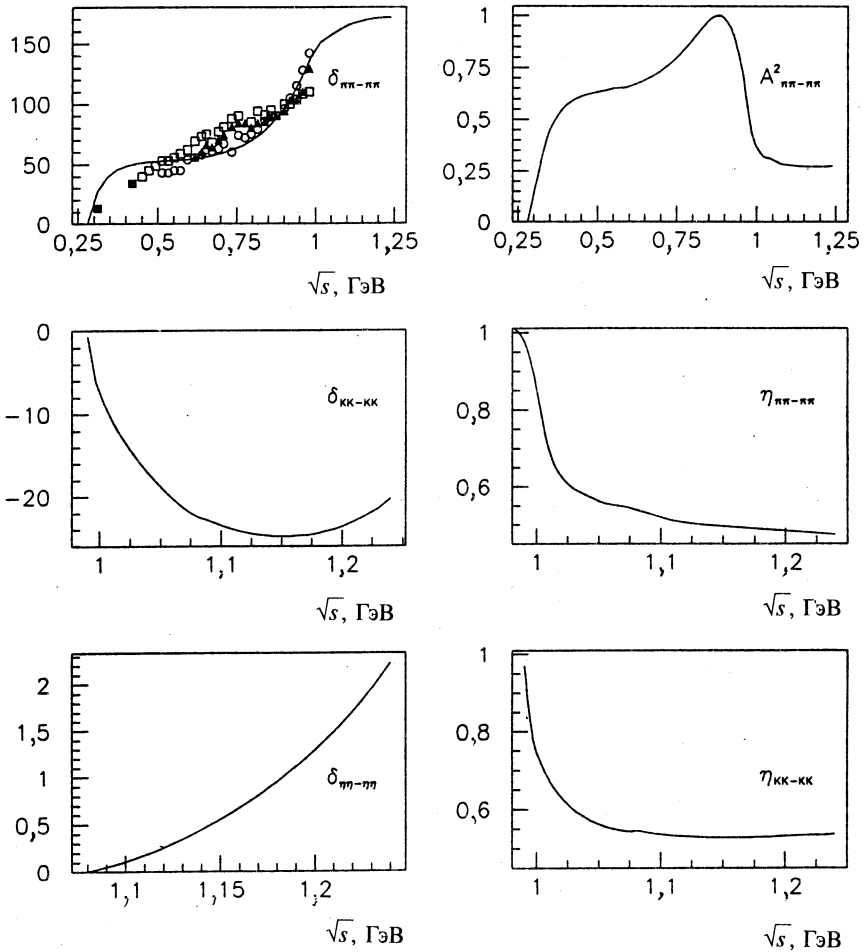


Рис.13. Квадрат амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $J^G J^P C = 0^+ 0^+ 0^+$. Экспериментальные данные по фазовому сдвигу $\pi\pi$ взяты из [49,52,53]

Спектр $J^P = 0^-, 1^-, 0^+$ мезонов практически не зависит от массы не-странного кварка при изменении этой массы в пределах $500 + 800$ МэВ. Выбранная нами масса нестранного кварка 625 МэВ дает наилучшее описание мезонного спектра в $J^{PC} = 1^{++}, 2^{+-}, 2^{++}$ каналах.

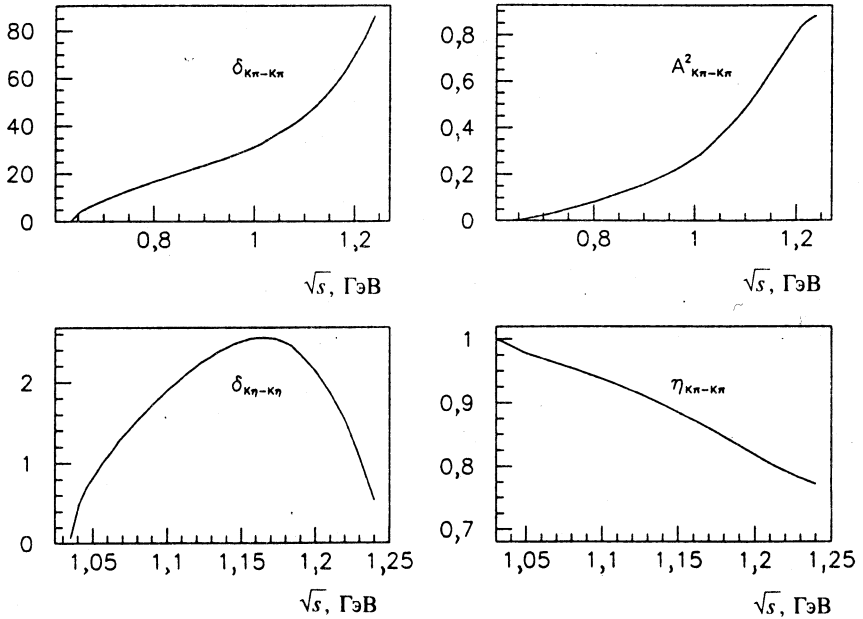


Рис.14. Квадрат амплитуды πK -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $I J^P = 1/2 0^+$

Масса странного кварка была сдвинута с сохранением отношения масс странного и нестранного кварков, полученного в работе [15]:

$$\frac{m_q}{m_s} = \frac{m_q^{\text{old}}}{m_s^{\text{old}}}, \quad (33)$$

где $m_q^{\text{old}} = 390$ МэВ и $m_s^{\text{old}} = 500$ МэВ.

Параметр g_1/g_2 довольно сильно коррелирует с параметром λ_s и используется для получения разумного расщепления ω - и Φ -мезонов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Низкоэнергетические мягкие процессы успешно описываются в КХД мотивированной кварковой моделью. Хотя базовая теория КХД не дает возможности непосредственно вычислить большинство характеристик кварковой модели, тем не менее успех этой модели в описании физических про-

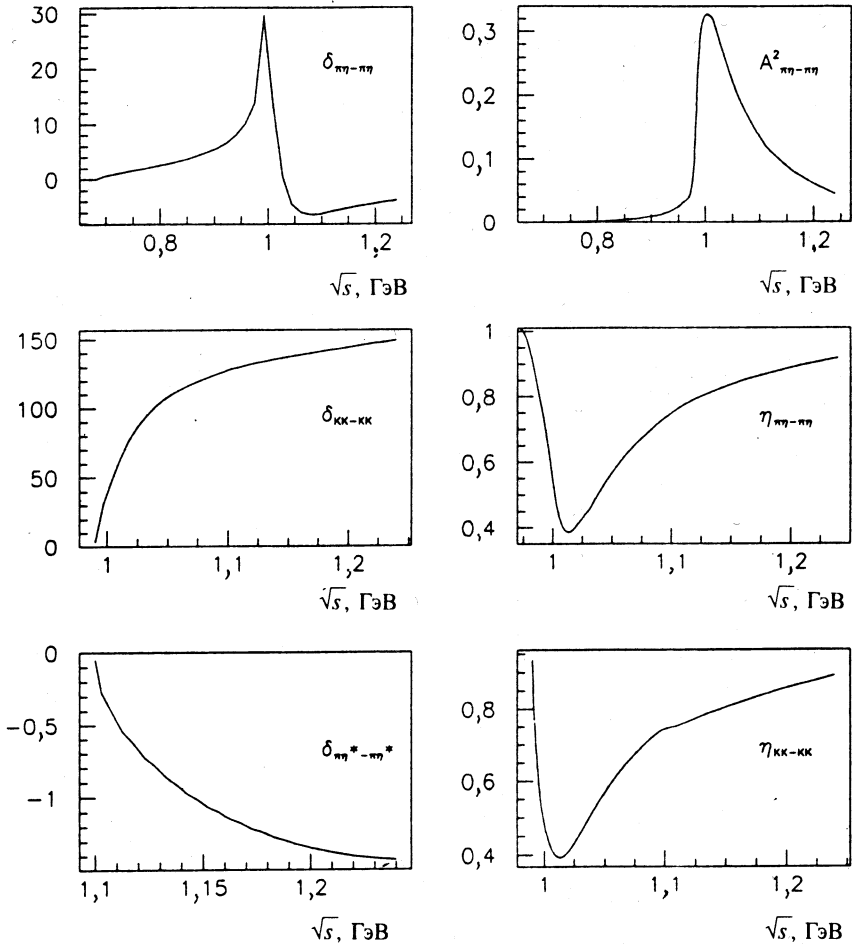


Рис.15. Квадрат амплитуды $\pi\eta$ -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $I^G J^{PC} = 1^- 0^{++}$

цессов указывает на то, что основные черты физики на расстояниях около 0,3—1,0 фм учитываются правильно.

Одной из целей построения модели было исследование возможности включения в рассмотрение сил конфайнмента, индуцируемых за счет переходов $q\bar{q} \rightarrow$ мезон + мезон. Для этого мы стартовали с бутстрапной модели, где в рамках чисто кваркового описания был получен спектр низколежащих мезонов и где включение соответствующих адронных степеней свободы мо-

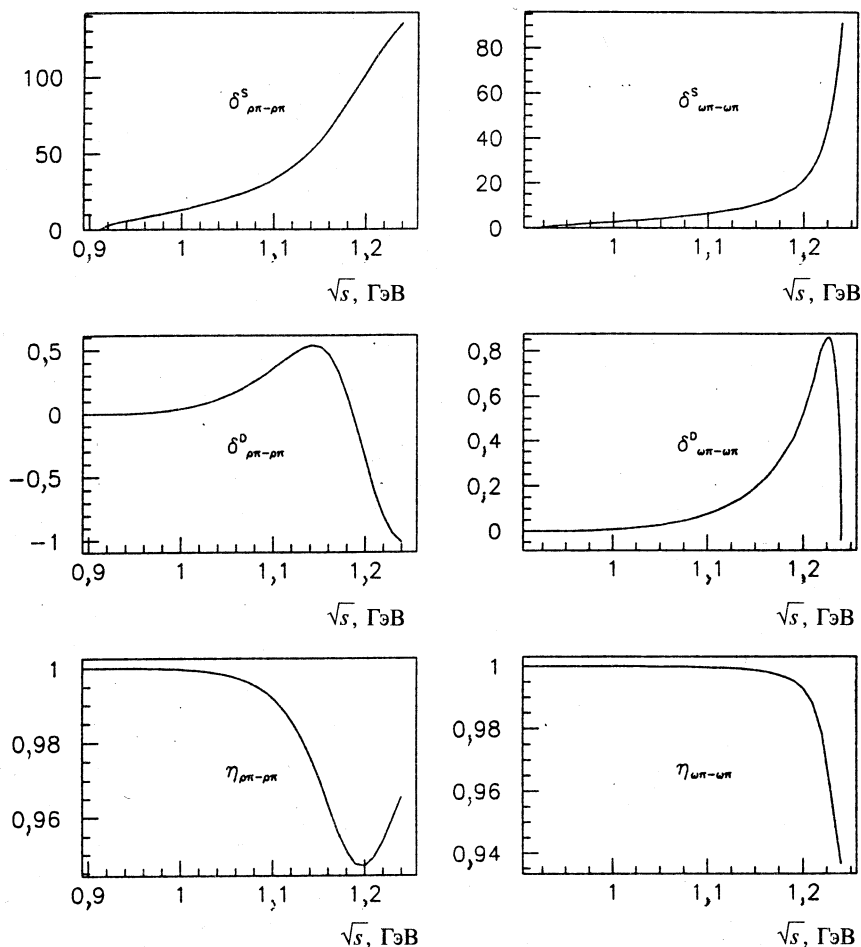


Рис.16. S- и D-волновые фазовые сдвиги и параметры смешивания в канале $I^G J^P = 0^- 1^{+-}$ ($\rho\pi$ -рассеяние) и в канале $I^G J^P = 1^+ 1^{+-}$ ($\omega\pi$ -рассеяние)

жет быть сделано довольно просто. На первом этапе — этапе бутстрапных вычислений — составляющий кварк имел массу 350—400 МэВ (масса странного кварка выше на 150—200 МэВ), а взаимодействие обусловлено обменом эффективным глюоном и инстантон-индуцированными силами. Такая модель хорошо описывает спектр $J^P = 0^-, 1^-$ мезонов и дает качественно правильное описание спектра $J^P = 0^+$ мезонов.

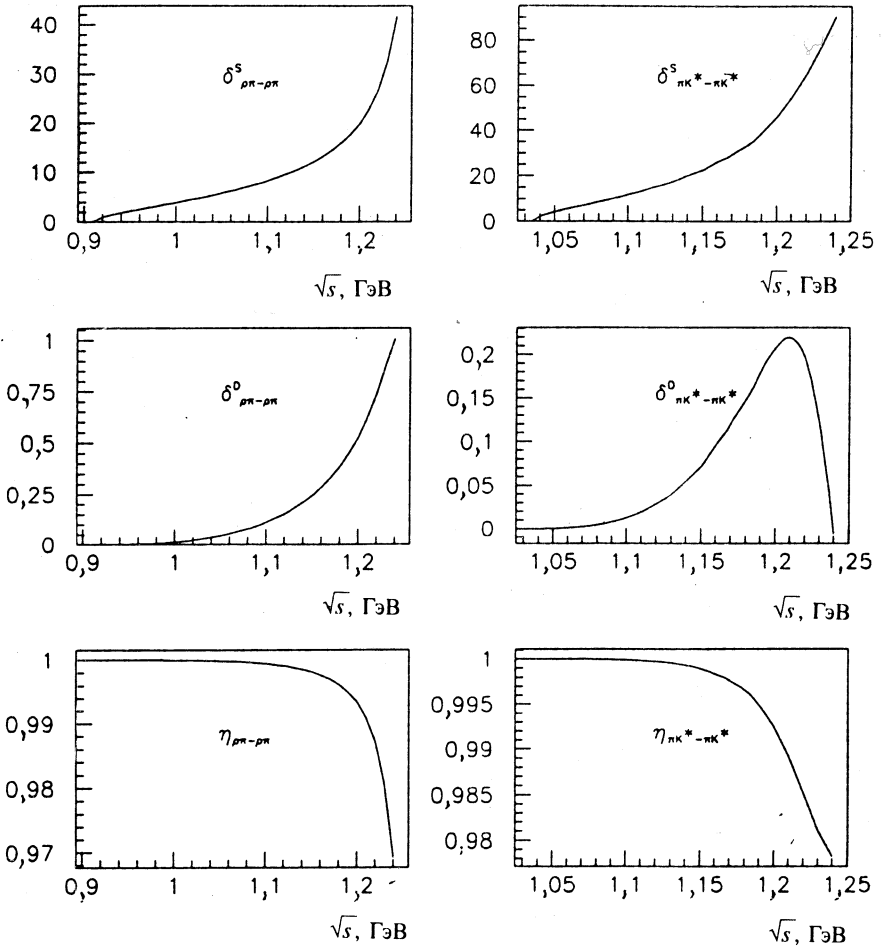


Рис.17. S- и D-волновые фазовые сдвиги и параметры смешивания в канале $I^G J^{PC} = 1^- 1^{++}$ ($\rho\pi$ -рассеяние) и в канале $I J^P = 1/2 \ 1^+$ (πK^* -рассеяние)

Мезонные степени свободы включены в модель с помощью амплитуд переходов $q + \bar{q} \rightarrow q + \bar{q}$ и $q + \bar{q} \rightarrow M + M$, которые тесно связаны с механизмом конфайнмента: выходящие кварки рожают кварк-антикварковые пары, переходящие в мезоны. На данном, втором этапе в расчеты включены только каналы рассеяния низколежащих мезонов, то есть состояний, полученных в рамках бутстрапной процедуры. Переходы $q\bar{q} \rightarrow M + M \rightarrow q\bar{q}$ приводят к эффективному $\bar{q}q$ -взаимодействию, которое играет роль кон-

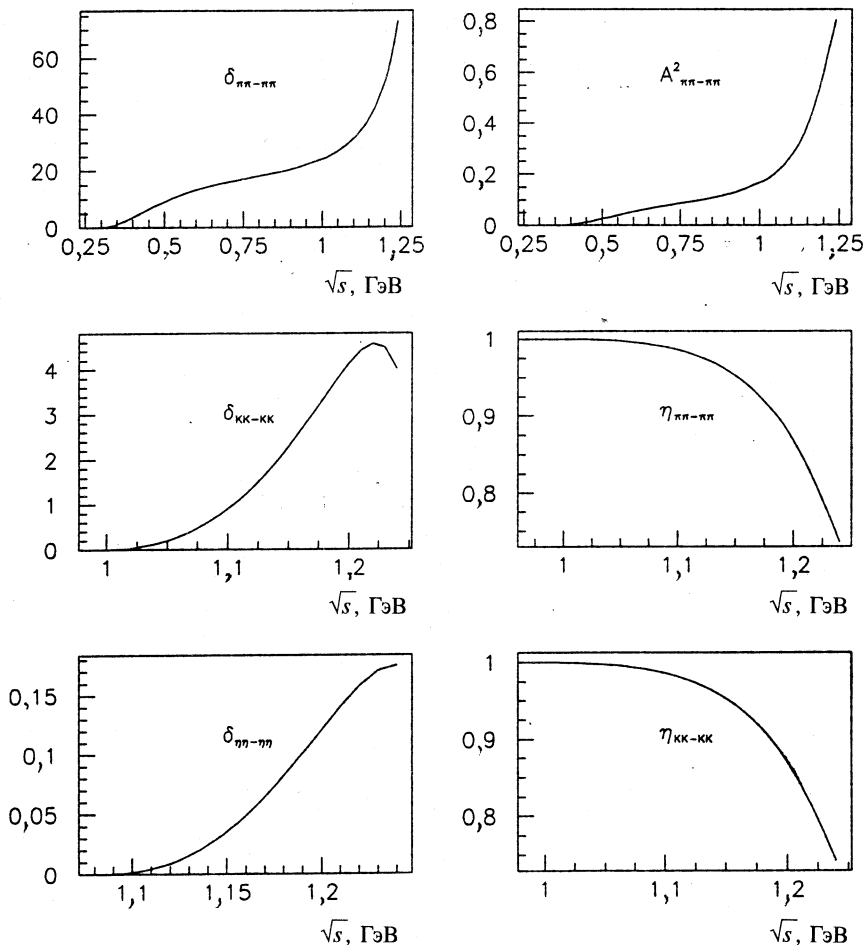


Рис.18. Квадрат амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $I^G J^{PC} = 0^+2^+$

файнментного барьера, ответственного за силы в области 1 фм, и, следовательно, за формирование мезонных состояний с массой более 1 ГэВ.

В рамках предложенной модели с учетом переходов $q + \bar{q} \rightarrow M + M$ получены следующие результаты.

1. Вычислены массы и ширины 0^- - и 1^- -мезонов, которые находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными.

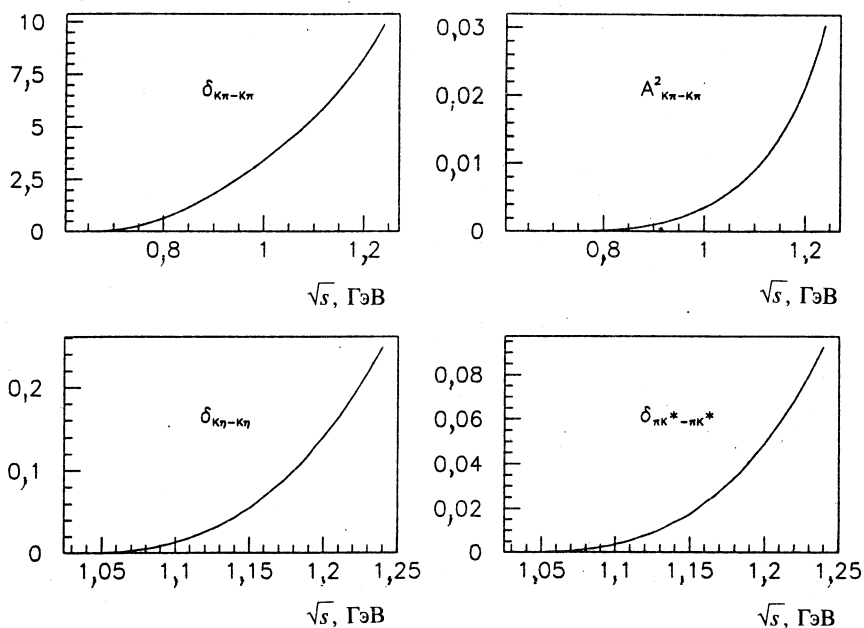


Рис.19. Квадрат амплитуды πK -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $I J^P = 1/2 2^+$

2. Вычислены спектроскопические характеристики высоковозбужденных мезонов с массами 1,0—1,5 ГэВ (P -волновых $q\bar{q}$ -состояний): они находятся в качественном согласии с экспериментальными данными.

3. Получены амплитуды мезон-мезонного рассеяния, которые также удовлетворительно согласуются с экспериментом.

Включение в модель в явном виде мезонных степеней свободы приводит к следующим изменениям кварковой динамики.

1. Существенная часть расщепления и смешивания низколежащих мезонных состояний определяется $\bar{q}q \rightarrow MM$ взаимодействием. Соответственно ослабляется вклад инстантон-индуцированных сил.

2. Масса кварков увеличивается на ~ 200 МэВ как для нестранных, так и для странных кварков.

Фактически это прямо указывает на механизм кварк-адронной дуальности: кварковые характеристики тесно связаны с определенным набором адронных состояний. Если низколежащие мезоны учтены в модели в явном виде и, следовательно, исключены из этого набора, то для кварков уста-

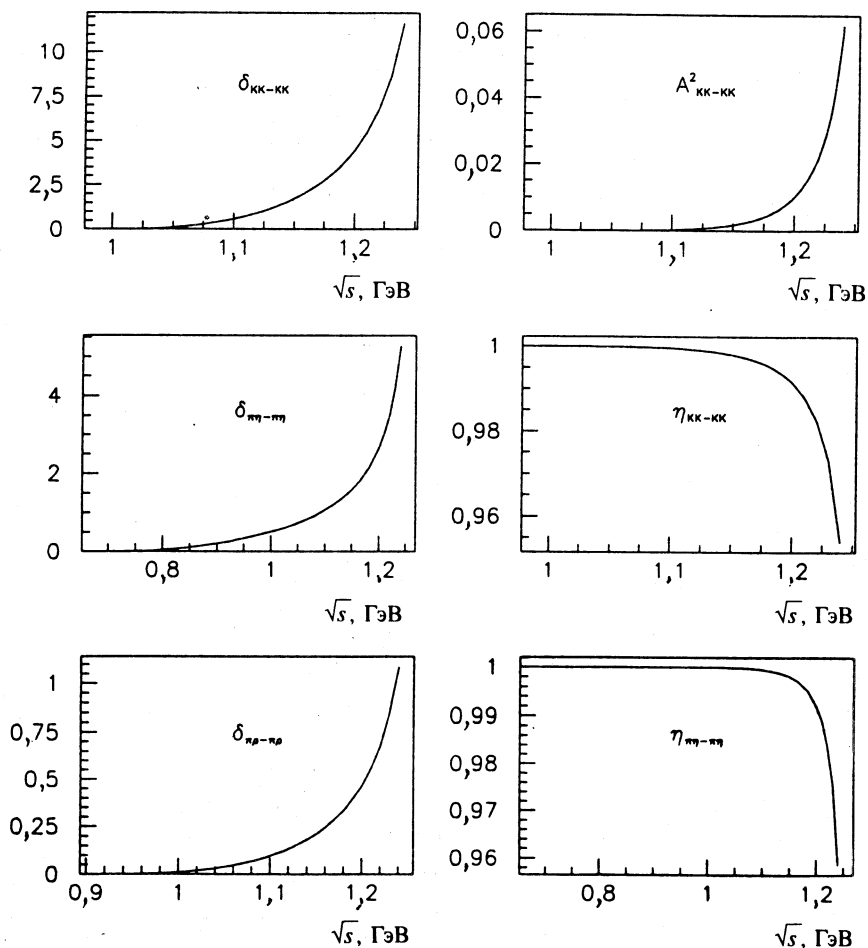


Рис.20. Квадрат амплитуды KK -рассеяния, фазовые сдвиги и неупругости в канале $J^{PC} = 1^{-}2^{++}$

навливается новая, более высокая шкала энергий-масс, что приводит к эффективно более высокой массе нового «конституентного кварка».

Авторы признательны В.Н.Грибову, Б.К.Мечу, Х.Р.Петри и другим теоретикам Института ядерной физики Боннского университета за многочисленные плодотворные обсуждения.

8. ПРИЛОЖЕНИЕ А

Рассмотрим структуру операторов парциальных волн в рассеянии двух частиц. Эти операторы могут быть построены с помощью условия ортогональности, приведенного в уравнении (16). Другим условием, используемым при построении операторов, является условие совпадения в системе центра инерции этих операторов с обычными нерелятивистскими операторами. Исходя из этого, получаем следующий спектр операторов для S - и P -волновых состояний двух фермионов:

$$\begin{aligned}
 i\gamma_5 \text{ для } {}^1S_0 \quad J^{PC} &= 0^{-+} \\
 i\Gamma_\mu \text{ для } {}^3S_1 \quad J^{PC} &= 1^{--} \\
 1 \text{ для } {}^1P_0 \quad J^{PC} &= 0^{++} \\
 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{s}} \gamma_5 k_\mu^\perp \text{ для } {}^1P_1 \quad J^{PC} &= 1^{+-} \\
 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}s} \epsilon_{\mu ijk} k_i^\perp P_j \gamma_k \text{ для } {}^3P_1 \quad J^{PC} &= 1^{++} \\
 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{s}} \Gamma_i k_j^\perp O_{\mu\nu}^{ij} \text{ для } {}^3P_2 \quad J^{PC} &= 2^{++},
 \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
 k_\mu^\perp &= \frac{1}{2} \left[(p_1 - p_2)_\mu - \frac{m_1^2 - m_2^2}{P^2} P_\mu \right], \\
 \gamma_\mu^\perp &= \gamma_\mu - \frac{P_\mu \hat{P}}{P^2}, \\
 \Gamma_\mu &= \gamma_\mu^\perp - \frac{2k_\mu^\perp}{m_1 + m_2 + \sqrt{P^2}}, \\
 g_{\mu\nu}^\perp &= g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2}, \\
 O_{ij}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(g_{\mu i}^\perp g_{\nu j}^\perp + g_{\mu j}^\perp g_{\nu i}^\perp - \frac{2}{3} g_{\mu\nu}^\perp g_{ij}^\perp \right).
 \end{aligned} \tag{35}$$

Оператор δ_{BC} , введенный в уравнении (16), является проекционным оператором и равен единице для состояний с полным моментом $J=0$ и

$g_{\mu\nu}^\perp$ для состояний с $J = 1$. Парциальные операторы нормированы на функции фазового объема $\Phi(k)$, равные

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= 2(s - (m_1 - m_2)^2) \Phi_S(s) \text{ для } J^P = 0^-, 1^- \\ \Phi(s) &= 2(s - (m_1 + m_2)^2) \Phi_S(s) \text{ для } J^P = 0^+ \\ \Phi(s) &= 2(s - (m_1 - m_2)^2) \frac{k^2}{s} \Phi_S(s) \text{ для } J^P = 1^+, 2^+, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_S(s) &= \frac{|\mathbf{k}|}{8\pi\sqrt{s}}, \\ \mathbf{k}^2 = -k^{\perp 2} &= \frac{(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)}{4s}. \end{aligned} \quad (37)$$

Операторы парциальных волн при рассеянии двух бозонов должны удовлетворять условию ортогональности, приведенному в (17)–(19). Это приводит к следующему спектру операторов рассеяния двух псевдоскалярных (или скалярных) бозонов:

$$\begin{aligned}1 \text{ для } {}^1S_0 \quad J^{PC} &= 0^+ \\ \frac{i}{\sqrt{s}} k_\mu^\perp \text{ для } {}^1P_1 \quad J^{PC} &= 1^- \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}s} K_{\mu\nu} \text{ для } {}^1D_2 \quad J^{PC} &= 2^+, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$K_{\mu\nu} = k_\mu^\perp k_\nu^\perp - \frac{1}{3} g_{\mu\nu}^\perp k^{\perp 2}, \quad (39)$$

а вектор $k_\mu^\perp$ и оператор $g_{\mu\nu}^\perp$ определены так же, как и в случае рассеяния фермионов.

Для построения спектра операторов рассеяния векторного и псевдоскалярного бозонов введем следующие операторы:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^1 &= g_{\alpha\beta}^\perp - \frac{k_\alpha^\perp k_\beta^\perp}{k^{\perp 2}} \frac{(\sqrt{s} - M)(\sqrt{s} - \delta)}{s + M\delta}, \\ \tilde{k}_{1\alpha}^\perp &= k_\beta^\perp \Gamma_{\alpha\beta}^1, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$M = \mu_1 + \mu_2, \quad \delta = \mu_1 - \mu_2. \quad (41)$$

В системе центра инерции составной системы оператор $\Gamma_{\alpha\beta}^1$ переводит релятивистский четырехмерный вектор поляризации бозона в нерелятивистский трехмерный вектор. С помощью этих операторов спектр парциальных операторов рассеяния векторного и псевдоскалярного бозонов записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_{\mu\alpha}^1 \text{ для } {}^3S_1 \quad J^P = 1^+ \\
 & \frac{i}{\sqrt{s}} \tilde{k}_{1\alpha}^\perp \text{ для } {}^3P_0 \quad J^P = 0^- \\
 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}s} \epsilon_{\mu\alpha ij} k_i^\perp P_j \text{ для } {}^3P_1 \quad J^P = 1^- \\
 & i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{s}} \left[\Gamma_{\mu\alpha}^1 k_v^\perp P_j + \Gamma_{v\alpha}^2 k_\mu^\perp P_j - \frac{2}{3} g_{\mu\nu}^\perp \tilde{k}_{1\alpha} \right] \text{ для } {}^3P_2 \quad J^P = 2^- \\
 & \frac{3}{\sqrt{2}s} \left[\tilde{k}_{1\alpha}^\perp k_\mu^\perp - \frac{1}{3} k^{\perp 2} \Gamma_{\mu\alpha}^1 \right] \text{ для } {}^3D_1 \quad J^P = 1^+ \\
 & i \frac{\sqrt{5}}{2s\sqrt{s}} (k_\mu^\perp \epsilon_{v\alpha ij} k_i^\perp P_j + k_v^\perp \epsilon_{\mu\alpha ij} k_i^\perp P_j) \text{ для } {}^3D_2 \quad J^P = 2^+,
 \end{aligned} \tag{42}$$

где α — индекс поляризации векторного мезона. Для построения спектра операторов рассеяния двух векторных бозонов введем оператор $\Gamma_{\alpha\beta}^2$, являющийся аналогом оператора $\Gamma_{\alpha\beta}^1$, но действующий на вторую частицу:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta}^2 &= g_{\alpha\beta}^\perp - \frac{k_\alpha^\perp k_\beta^\perp (\sqrt{s} - M)(\sqrt{s} + \delta)}{k^{\perp 2} (s - M\delta)}, \\
 \tilde{k}_{2\alpha}^\perp &= k_\beta^\perp \Gamma_{\alpha\beta}^2,
 \end{aligned} \tag{43}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 = \Gamma_{\alpha\nu}^1 \Gamma_{\nu\beta}^2. \tag{44}$$

Операторы состояний системы двух векторных частиц выражаются через введенные выше операторы следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \text{ для } {}^1S_0 \quad J^P = 0^+ \\
 & \frac{i}{\sqrt{2}s} \epsilon_{\mu\alpha'\beta'j} \Gamma_{\alpha'\alpha}^1 \Gamma_{\beta'\beta}^2 P_j \text{ для } {}^3S_1 \quad J^P = 1^+ \\
 & \frac{1}{2} \left[\Gamma_{\mu\alpha}^1 \Gamma_{\nu\beta}^2 + \Gamma_{\nu\alpha}^1 \Gamma_{\mu\beta}^2 - \frac{2}{3} g_{\mu\nu}^\perp \Gamma_{\alpha\beta}^0 \right] \text{ для } {}^5S_2 \quad J^P = 2^+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{\sqrt{3}s} k_{\mu}^{\perp} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \text{ для } {}^1P_1 \quad J^P = 1^- \\
& \frac{1}{\sqrt{2}s} \varepsilon_{\alpha\beta ij} k_i^{\perp} P_j \text{ для } {}^3P_0 \quad J^P = 0^- \\
& \frac{i}{2\sqrt{s}} [\Gamma_{\mu\alpha}^1 \tilde{k}_{2\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^2 \tilde{k}_{1\alpha}] \text{ для } {}^3P_1 \quad J^P = 1^- \\
& \frac{\sqrt{3}}{4s} \left[k_{\mu}^{\perp} \varepsilon_{\nu\alpha'\beta'j} + k_{\nu}^{\perp} \varepsilon_{\mu\alpha'\beta'j} - \frac{2}{3} g_{\mu\nu}^{\perp} \varepsilon_{i\alpha'\beta'j} k_i \right] P_j \Gamma_{\alpha'\alpha}^1 \Gamma_{\beta'\beta}^2 \text{ для } {}^3P_2 \quad J^P = 2^- \\
& \frac{\sqrt{3}i}{\sqrt{20}s} \left[\Gamma_{\mu\alpha}^1 \tilde{k}_{2\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^2 \tilde{k}_{1\alpha} - \frac{2}{3} k_{\mu}^{\perp} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \right] \text{ для } {}^5P_1 \quad J^P = 1^- \\
& \frac{1}{4s} [\Gamma_{\mu\alpha}^1 \varepsilon_{\nu i\beta j} k_i^{\perp} P_j + \Gamma_{\mu\beta}^2 \varepsilon_{\nu i\alpha j} k_i^{\perp} P_j + (\mu \rightarrow \nu)] \text{ для } {}^5P_2 \quad J^P = 2^- \\
& \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}s} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \left(k_{\mu}^{\perp} k_{\nu}^{\perp} - \frac{k^{\perp 2}}{3} g_{\mu\nu}^{\perp} \right) \text{ для } {}^1D_2 \quad J^P = 2^+ \\
& \frac{3i}{2s\sqrt{2}s} \left[k_{\mu}^{\perp} \varepsilon_{i\alpha\beta j} k_i^{\perp} P_j - \frac{k^{\perp 2}}{3} \varepsilon_{\mu\alpha'\beta'j} P_j \Gamma_{\alpha'\alpha}^1 \Gamma_{\beta'\beta}^2 \right] \text{ для } {}^3D_1 \quad J^P = 1^+ \\
& \frac{\sqrt{5}}{2s\sqrt{6}} [k_{\nu}^{\perp} (\Gamma_{\mu\alpha}^1 \tilde{k}_{2\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^2 \tilde{k}_{1\alpha}) + (\mu \rightarrow \nu)] \text{ для } {}^3D_2 \quad J^P = 2^+ \\
& \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}s} \left[\tilde{k}_{1\alpha} \tilde{k}_{2\beta} - \frac{k^{\perp 2}}{3} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \right] \text{ для } {}^5D_0 \quad J^P = 0^+ \\
& \frac{\sqrt{3}i}{2s\sqrt{2}s} [\tilde{k}_{1\alpha} \varepsilon_{\mu i\beta j} k_i^{\perp} P_j + \tilde{k}_{2\beta} \varepsilon_{\mu i\alpha j} k_i^{\perp} P_j] \text{ для } {}^5D_1 \quad J^P = 1^+.
\end{aligned} \tag{45}$$

Все приведенные выше операторы рассеяния бозонов нормированы таким образом, чтобы после суммирования по различным спиновым состояниям дать следующие фазовые объемы:

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= 1 \text{ для } S\text{-волнового состояния,} \\
\Phi(s) &= (s - M^2)(s - \delta^2)/4s^2 \text{ для } P\text{-волнового состояния,} \\
\Phi(s) &= (s - M^2)^2(s - \delta^2)^2/16s^4 \text{ для } D\text{-волнового состояния.}
\end{aligned} \tag{46}$$

9. ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Приведем метод расчета парциальных вершинных функций для взаимодействия, определяемого лагранжианом (2). Этот лагранжиан определяет

как s -, так и t -канальные взаимодействия $q\bar{q}$ -пары. Для вычисления N -функции необходимо разложить t -канальное взаимодействие по s -канальным парциальным амплитудам. Эта процедура, являясь, по сути, трансформацией Фирца, может быть выполнена как вычисление произведения скачков амплитуды в двухпетлевой диаграмме, показанной на рис.21. Так как операторы парциальных состояний Q_j^B , введенные с помощью условия ортогональности (15)–(18), образуют полный набор, они автоматически выделяют требуемое s -волновое взаимодействие из t -канального взаимодействия. В результате мы получаем s -канальную вершинную функцию, умноженную на функции двухчастичных фазовых объемов $\Phi_j(s)$.

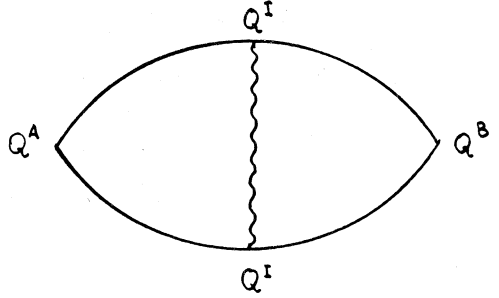


Рис.21. Двухпетлевая диаграмма для вычисления проекции t -канального взаимодействия, определяемого оператором Q_I , на s -канальную парциальную волну, определяемую оператором Q_j^B

Блок взаимодействия N_s^{ic} , где индекс i относится к изоспину, s — к цвету, а s — к спиновым переменным, подчиняется преобразованию Фирца:

$$N_s^{ic} (s\text{-канал}) = U^{ij} V^{cp} \hat{P}_{st} N_t^{jp} (t\text{-канал}), \quad (47)$$

где

$$V = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

а оператор $\hat{P}$ является оператором преобразования спиновых переменных. Матричные элементы этого преобразования вычисляются следующим образом. Пусть t -канальное взаимодействие определяется с помощью операторов $Q^I(t) \otimes Q^I(t)$, где подразумевается суммирование по индексу I ; t показывает, что эти операторы действуют в t -канале, и в отличие от (15) опущен для простоты индекс, характеризующий полный момент. Проекция таких операторов на s -канальные операторы $Q^{C(s)} \otimes Q^{C(s)}$ равна (см. рис.21):

$$\begin{aligned} & P(Q^{C(s)} \otimes Q^{C(s)} \leftarrow Q^I(t) \otimes Q^I(t)) = \\ & = \frac{\langle \text{Tr} [Q^B(m_1 + \hat{k}_1) Q_I(m_1 + \hat{k}_1) Q^A(m_2 - \hat{k}_2) Q_I(m_2 - \hat{k}_2)] \rangle}{\langle \text{Tr} [Q^B(m_1 + \hat{k}_1) Q^{C(m_2 - \hat{k}_2)}] \text{Tr} [Q^{C(m_1 + \hat{k}_1)} Q^A(m_2 - \hat{k}_2)] \rangle}, \quad (49) \end{aligned}$$

где $\langle \dots \rangle$ означает интегрирование по угловым переменным двухпетлевой диаграммы рис.21. Напомним, что при вычислении произведения скачков амплитуды необходимо держать частицы 1, 2 и 1', 2' на массовой поверхности. Для рассматриваемых в нашем случае векторного взаимодействия $\gamma_\mu \otimes \gamma_\mu$ и инстантонного взаимодействия $(1 + \gamma_5) \otimes (1 + \gamma_5)$ разложение на s -канальные парциальные волны дает следующий результат:

$$\text{для } J^P = 0^-$$

$$P(i\gamma_5 \otimes i\gamma_5 \leftarrow \gamma_\mu \otimes \gamma_\mu) = -1 + (m_1 + m_2)^2 / (2s),$$

$$P(i\gamma_5 \otimes i\gamma_5 \leftarrow (1 + \gamma_5) \otimes (1 + \gamma_5)) = 1/2,$$

$$\text{для } J^P = 0^+$$

$$P(1 \otimes 1 \leftarrow \gamma_\mu \otimes \gamma_\mu) = -1 + (m_1 - m_2)^2 / (2s),$$

$$P(1 \otimes 1 \leftarrow (1 + \gamma_5) \otimes (1 + \gamma_5)) = -1/2,$$

$$\text{для } J^P = 1^-$$

$$P(i\Gamma_\mu \otimes i\Gamma_\mu \leftarrow \gamma_\mu \otimes \gamma_\mu) = -1/2 - (s - (m_1 + m_2)^2) / (6s) + \\ + (\sqrt{s} - m_1 - m_2)^2 / (9s),$$

$$P(i\Gamma_\mu \otimes i\Gamma_\mu \leftarrow (1 + \gamma_5) \otimes (1 + \gamma_5)) = - (s - (m_1 + m_2)^2) / (12s). \quad (50)$$

10. ПРИЛОЖЕНИЕ В

Приведем изотопические коэффициенты $\beta(j_1, j_2, J | i_1, i_2, I)$ для перехода $q\bar{q} \rightarrow MM$, где индексы j_1, j_2, J относятся соответственно к изоспину кварка, антикварка и изоспину $q\bar{q}$ -составной системы, а индексы i_1, i_2, I описывают изоспины мезонов и их составной системы.

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 | 1, 1, 1\right) = -1 \quad \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 | 1, 0, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = 1 \quad \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 | 1, 1, 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 | 0, 0, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = 1$$

$$\beta\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} | 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \beta\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\beta \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \middle| 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \beta \left(0, 0, 0 \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) = \sqrt{2}$$

$$\beta(0, 0, 0 \middle| 0, 0, 0) = 1. \quad (51)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Häbel U., Könning R., Reusch H.-G. et al. — Z. Phys., 1990, vol.A336, p.423; ibid, 1990, vol.A336, p.435.
2. Gribov V.N. — Preprint LU TP-91-7, 1991.
3. Weindberg S. — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.65, p.1181.
4. Jaffe R.L. — Phys. Lett., 1990, vol.B245, p.221.
5. Ellis J., Frishman Y., Karliner M. — Phys. Lett., 1991, vol.B272, p.333.
6. Fritzsch H. — Preprint CERN-TH. 7079/93, 1993.
7. Isgur N., Karl G. — Phys. Rev., 1978, vol.D18, p.4187; ibid. 1979, vol.D19, p.2653; ibid, 1979, vol.D20, p.1191.
8. Startor R., Stancu Fl. — Phys. Rev., 1985, vol.D31, p.128.
9. Capstick S., Isgur N. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.2809.
10. Adler S.L., Piran T. — Rev. Mod. Phys., 1984, vol.56, p.1.
11. Baker M., Ball J.S., Zachariasen F. — Phys. Rev., 1985, vol.D31, p.2575; 1986, vol.D34, p.3894.
12. Creutz M. — Quarks, Gluons and Lattices. Cambridge U.P., Cambridge, 1983.
13. Rebbi C. — Lattice Gauge Theories and Monte Carlo Simulations. World Scientific, Singapore, 1983.
14. Anisovich V.V., Kobrinsky M.N., Nyiri Y., Shabelski Yu.M. — Quark Model and High Energy Collisions. World Scientific, Singapore, 1985.
15. Anisovich V.V., Gerasyuta S.M., Sarantsev A.V. — Int. Jour. of Modern Phys., 1991, vol.A6, p.625.
16. Герасюта С.М., Саранцев А.В. — ЯФ, 1990, т.52, в.5, с.1483.
17. Anisovich V.V., Metsch B.Ch., Petry H.R., Sarantsev A.V. — To be published in «Z. Phys. A».
18. Анисович В.В. — ЯФ, 1980, т.31, с.859.
19. Monohar A., Georgi H. — Nucl. Phys. 1984, vol.B234, p.189.
20. Weinstein J., Isgur N. — Phys. Rev., 1983, vol.D27, p.588; ibid. 1990, vol.D41, p.2236.
21. Barnes T., Swanson E.S. — Phys. Rev., 1992, vol.D46, p.131.
22. Герасимов С.В. — ЯФ, 1979, т.29, с.513; ЯФ, 1980, т.32, с.304.
23. Morgan D. — Nucl. Phys., 1992, vol.A543, p.632.
24. Morgan D., Pennington M.R. — Phys. Rev., 1993, vol.D48, c.1185.
25. Törnqvist N. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.67, p.556.
26. Dooley K., Swanson E.S., Barnes T. — Phys. Lett., 1992, vol.B275, p.478.
27. Hershbach H. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.3027.
28. Bürger W., Faber M., Markum H., Müller M. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.3034.
29. Kahana D.E., Maung K.M., Norbury J.W. — Phys. Rev., 1993, vol.D48, p.3408.
30. Semey C., Ceuleneer R. — Phys. Rev., 1993, vol.D48, p.4361.

31. De Rujula A., Georgy H., Glashow S.L. — Phys. Rev., 1975, vol.D12, p.147.
32. Ma E. — Phys. Rev., 1978, vol.D17, p.623.
33. Anisovich V.V. et al. — Phys. Lett., 1994, vol.B323, p.233.
34. Anisovich V.V., Bugg D.V., Sarantsev A.V., Zou B.S. — Phys. Rev., 1994, vol.D50, p.1972.
35. Particle Data Group. — Phys. Rev., 1994, vol.D50.
36. Nambu Y., Yona-Lasinio G. — Phys. Rev., 1961, vol.122, p.345; 1961, vol.124, p.246.
37. Bernard V., Meissner U. — Phys. Lett., 1991, vol.B266, p.403.
38. Волков М.К. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.433.
39. Mackenzie P. — Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.), 1993, vol.30, p.35.
40. Sharpe S. — Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.), 1993, vol.30, p.213.
41. Davies C. (UKQCD Collaboration). — UKQCD Review, Paper presented at the Int. Conf. on Nuclear and Particle Physics, 1993, ed.I.J.D.MacGregor and A.T.Doyle, Inst. of Phys. Publishing, Bristol and Philadelphia.
42. Герасюта С.М., Куперин Ю.А., Саранцев А.В., Ярьевский Е.А. — ЯФ, 1991, т.53, с.1397.
43. Roos M., Törnqvist N. — Z. Physik C, 1980, vol.5, p.205.
44. Törnqvist N. — Nucl. Phys., 1982, vol.203, p.268.
45. Anisovich V.V., Kobrinsky M.N., Melikhov D.I., Sarantsev A.V. — Nucl. Phys., 1992, vol.A544, p.747.
46. Anisovich V.V., Bugg D.V., Sarantsev A.V. — Nucl. Phys., 1992, vol.A501.
47. Anisovich V.V., Melikhov D.I., Metsch B.Ch., Petry H.R. — Nucl. Phys., 1993, vol.A563, p.549.
48. Flatté S.M. — Phys. Lett., 1976, vol.B63, p.224.
49. Hyams B. et al. — Nucl. Phys., 1973, vol.B64, p.134.
50. Aston D. et al. — Nucl. Phys., 1988, vol.B296, p.493.
51. Estabrooks P. et al. — Nucl. Phys., 1978, vol.B133, p.491.
52. Froggat C.D., Petersen J.L. — Nucl. Phys., 1977, vol.B129, p.89.
53. Protopopescu S.D. et al. — Phys. Rev., 1973, vol.D7, p.1280.

СМЕШИВАНИЕ НЕЙТРИНО И ПРОБЛЕМА СОЛНЕЧНЫХ НЕЙТРИНО

Х.М.Бештоев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматривается теория смешивания и осцилляций нейтрино. Наряду со старой теорией осцилляций нейтрино, основанной на аналогии с K^0 -, $\bar{K}^0$ -осцилляциями, приводятся модифицированная теория смешивания и осцилляций нейтрино и теория резонансных осцилляций нейтрино (МСВ-эффект) в веществе. Сделан критический анализ уравнения Вольфенштейна, из которого получен этот эффект. Рассматривается теория усиления осцилляций нейтрино разных масс в веществе, которое возникает за счет слабого взаимодействия виртуально осциллирующего нейтрино с веществом очень большой толщины (Солнце). Анализируются возможные способы решения проблемы дефицита солнечных нейтрино. Проведена оценка вакуумного угла смешивания нейтрино в предположении, что дефицит солнечных нейтрино связан с усилением осцилляций нейтрино в веществе. Сделан следующий вывод: для того, чтобы доказать существование осцилляций солнечных нейтрино, необходим эксперимент по модельно-независимой его проверке.

The theory of neutrino mixing and oscillations is given. Together with the old neutrino oscillation theory, constructed by analogy with the K^0 , $\bar{K}^0$ oscillation, the modified neutrino oscillation theory, taking into account the dynamical nature of this process, is considered. The theory of resonance neutrino oscillations in matter (the MSW effect) is presented. A critical analysis of the Wolfenstein equation from which the effect was deduced is given. The theory is presented of the enhancement of neutrino oscillations in matter for neutrinos of different masses. This mechanism arises in the case of virtually oscillating neutrinos interacting weakly in passage through a bulk of matter (the Sun). Some possible methods are considered for solving the problem of the deficit of Sun neutrinos. Estimation of the vacuum neutrino mixing angle is made under the assumption that the deficit of Sun neutrinos is due to enhancement of neutrino oscillations in matter. The following conclusion is made: to provide a proof for the existence of Sun neutrino oscillations a model-independent verification experiment must be performed.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена обсуждению проблемы смешивания (осцилляций) нейтрино и дефицита солнечных нейтрино.

История физики нейтрино началась с письма В.Паули Тюбингенскому физическому обществу [1], в котором он постулировал существование но-

вой частицы — нейтрино, чтобы объяснить наблюдаемый непрерывный спектр электронов от ядерного бета-распада. Ознакомившись с этой гипотезой, Ферми предложил свою знаменитую теорию бета-распада [2]. Впервые взаимодействие, вызванное нейтрино, наблюдалось в эксперименте Райниса и Коуэна [3].

Помимо электронного нейтрино, испускаемого в ядерном бета-распаде, были открыты два других нейтрино: мюонное [4] и тау-нейтрино [5]. Дальнейшее развитие эксперимента и теории привели к созданию современной теории электрослабого взаимодействия [6], которая в расширенном виде с включением всех поколений лептонов и кварков получила название — стандартная модель электрослабого взаимодействия.

Предложение о возможности осцилляций нейтрино, по аналогии с K^0 -, $\bar{K}^0$ -осцилляциями (т.е. возможность нейтрино-антинейтринных осцилляций $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$), было рассмотрено Б.Понтекорво [7] в 1957 г. В последующем была выдвинута гипотеза о возможности смешивания (и осцилляций) нейтрино разных типов Маки и др. [8] (1962) и Понтекорво [9] (1967).

Несмотря на большие успехи стандартной модели, все же она нуждается в расширении и обобщении, так как в нынешнем виде модель не объясняет существование семейств кварков и лептонов и не описывает их массы и смешивания. Изучение свойств нейтрино является одним из путей, которые могут привести к новой физике, и это делает весьма важным изучение нейтрино. Одним из интересных вопросов является существование массы у нейтрино, на которое имеются экспериментальные указания [10]. Кроме того, участие нейтрино симметрично вместе с заряженными лептонами в заряженном токе слабого взаимодействия указывает на то, что нейтрино, возможно, является массивной частицей [11].

Другой аспект физики нейтрино — проблема лептонных семейств и связанные с ними законы сохранения лептонных чисел. С помощью нейтрино можно с большой точностью проверить законы сохранения лептонных чисел.

Проблема солнечных нейтрино возникла после первого опыта по измерению потока нейтрино от Солнца ^{37}Cl - ^{37}Ar -методом [12]. Поток оказался в несколько раз меньше, чем ожидался из расчетов по стандартной солнечной модели (ССМ) [13]. В работе [14] была высказана идея о возможности объяснения дефицита солнечных нейтрино за счет осцилляций нейтрино.

Дж.Бокал и др. уточнили параметры ССМ и произвели расчет светимости и потока нейтрино от Солнца [15], обеспечиваемых ядерными процессами [16], протекающими внутри него. Впоследствии, когда результаты эксперимента в Камиоканде [17] подтвердили наличие дефицита солнечных нейтрино относительно расчетов по ССМ, одним из привлекательных подходов для объяснения дефицита солнечных нейтрино стало резо-

нансное усиление осцилляций нейтрино в веществе [18], оно было получено из уравнения Вольфенштейна для нейтрино в веществе (МСВ-эффект) [19]. В работе [20] отмечено, что уравнение Вольфенштейна для нейтрино в веществе является уравнением, где нейтрино взаимодействует с веществом не через слабое, а через гипотетическое взаимодействие, которое является лево-право-симметричным (более детальное обсуждение этого вопроса см. в разд.3). В результате возник вопрос об обоснованности механизма резонансного усиления нейтрино в веществе.

Далее были получены первые результаты в ^{71}Ga - ^{71}Ge -эксперименте в Гран-Сассо [21], который в пределах 3σ не противоречил расчетам по ССМ. Новые данные из эксперимента SAGE [22] достаточно близки к результатам [21].

В работе [23] предложен новый механизм усиления осцилляций нейтрино в веществе, который реализуется за счет слабого взаимодействия осциллирующего нейтрино с веществом, если толщина этого вещества достаточно большая (см. разд.3). Появились данные [24], которые можно интерпретировать как проявление осцилляций атмосферных нейтрино, прошедших сквозь толщу Земли. Кроме отмеченных выше установок, регистрирующих солнечные нейтрино, в настоящее время готовятся новые установки Super-Kamiokande [25], SNO [26] для регистрации нейтрино от Солнца, и полученные на них данные (SNO) можно использовать для модельно-независимого анализа осцилляций нейтрино.

Второй раздел посвящен обсуждению теории смешивания и осцилляций нейтрино, в нем рассматриваются лептонные числа, элементы стандартной теории электрослабого взаимодействия, схема смешивания нейтрино; осцилляции нейтрино. В третьем разделе обсуждаются вопросы осцилляций нейтрино в веществе: резонансные осцилляции нейтрино, усиление осцилляций нейтрино разных масс в веществе. В четвертом разделе обсуждаются возможные способы решения проблемы дефицита солнечных нейтрино, кратко описываются экспериментальные установки по измерению потока нейтрино от Солнца.

2. ТЕОРИЯ СМЕШИВАНИЯ И ОСЦИЛЛЯЦИЙ НЕЙТРИНО

Прежде чем переходить к вопросу о смешивании и осцилляциях нейтрино, сформулируем законы сохранения лептонных чисел и рассмотрим элементы теории электрослабых взаимодействий.

1. Лептонные числа. В настоящее время установлено существование трех семейств лептонов и кварков (кварковый сектор нами приводится, т.к.

мы будем в дальнейшем использовать аналогию лептонного и кваркового секторов):

$$\begin{aligned} &u\nu_e; c\nu_\mu; t\nu_\tau; \\ &de; s\mu; b\tau. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Следуя имеющимся экспериментальным данным, будем считать, что каждое семейство лептонов имеет свое сохраняющееся лептонное число $\ell_e, \ell_\mu, \ell_\tau$ [27]:

$$\begin{aligned} \sum_i \ell_e^i &= \text{const}, \\ \sum_i \ell_\mu^i &= \text{const}, \\ \sum_i \ell_\tau^i &= \text{const}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

т.е. электронное, мюонное, тау-лептонное числа сохраняются в процессах по отдельности. Но при этом имеется в виду, что сохранение этих лептонных чисел нужно связать с определенными типами взаимодействия. Например, лептонные числа (по отдельности) сохраняются в сильных, электромагнитных и слабых (имеется в виду обмен W -, Z^0 -бозонами) процессах. А в расширенной теории электрослабого взаимодействия с включением матрицы типа Кобаяши — Маскавы эти лептонные числа уже не сохраняются, так как эта матрица содержит недиагональные элементы, которые отвечают за смешивание лептонных чисел. Матрица типа Кобаяши — Маскавы параметризует процессы с учетом нарушения лептонных чисел, видимо, в основе таких нарушений должны лежать динамические теории [20].

В табл.1 приводятся верхние пределы для относительных вероятностей процессов, запрещенных законом сохранения лептонных чисел (2.2), кото-

Таблица 1. Верхние пределы на относительные вероятности процессов, запрещенных законом сохранения лептонных зарядов [27]

Процесс	R
$\mu \rightarrow e \gamma$	$< 4,9 \cdot 10^{-11}$
$\mu \rightarrow e e \bar{e}$	$< 1,0 \cdot 10^{-12}$
$\mu \rightarrow e 2\gamma$	$< 7,2 \cdot 10^{-11}$
$K_L \rightarrow e^\pm + \mu^\mp$	$< 8 \cdot 10^{-6}$
$\mu^- + I \rightarrow e^+ + S_b$	$< 3 \cdot 10^{-10}$

рые могут использоваться для получения соответствующих ограничений на параметры матриц типа Кобаяши — Маскавы или соответствующих теорий с нарушением лептонных чисел.

Из выражения (2.1) можно увидеть аналогию между кварковым и лептонным секторами. Тогда, исходя из экспериментального факта смешивания d -, s -, b -кварков, можно сделать предположение, что нейтрино ν_e , ν_μ , ν_τ также могут смешиваться, т.е. будет иметь место нарушение лептонных чисел, которое приведет к осцилляциям нейтрино.

2. Элементы стандартной теории электрослабого взаимодействия. В настоящее время все имеющиеся экспериментальные данные хорошо согласуются со стандартной теорией электрослабого взаимодействия [6], предложенной Глэшоу — Вайнбергом — Саламом. Приведем основные элементы этой теории. В лагранжиан входят левые дублеты лептонов и кварков:

$$\Psi_{lL} = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L, \quad \Psi_{lR}, \quad l = e, \mu, \tau, \quad (2.3)$$

$$\Psi_{iL} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \end{matrix}$$

$$\Psi_{iR} = u_R, d_R; \quad c_R, s_R; \quad t_R, b_R$$

и правые синглеты заряженных лептонов и кварков.

Теория строится на локальной группе $SU(2)_L \times U(1)$ и содержит две константы связи g, g' ; удлиненные производные имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \Psi_{lL} &\rightarrow \left[\partial_\alpha - ig \frac{\tau^i}{2} A_\alpha^i - ig' \Upsilon_L^{\text{lep}} B_\alpha \right] \Psi_{lL}, \\ \partial_\alpha \Psi_{iL} &\rightarrow \left[\partial_\alpha - ig \frac{\tau^i}{2} A_\alpha^i - ig' \Upsilon_L^{\text{quark}} B_\alpha \right] \Psi_{iL}, \\ \partial_\alpha \Psi_{lR} &\rightarrow \left[\partial_\alpha - i \frac{g'}{2} \Upsilon_R^{\text{lep}} B_\alpha \right] \Psi_{lR}, \\ \partial_\alpha \Psi_{iR} &\rightarrow \left[\partial_\alpha - i \frac{g'}{2} \Upsilon_R^{\text{quark}} B_\alpha \right] \Psi_{iR}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где A_α^i, B_α — калибровочные поля, ассоциированные с $SU(2)_L$ и $U(1)$ группами; Υ — гиперзаряд лептонов и кварков.

Аналогом соотношения Гелл-Манна — Нишиджимы в рассматриваемом случае является соотношение

$$Q = T_3^W + \frac{Y}{2}, \quad (2.5)$$

где Q — электрический заряд, а T_3^W — третья проекция слабого изоспина.

Для гиперзаряда лептонов и кварков из выражения (2.5) получаем значения

$$\begin{aligned} Y_L^{\text{lep}} &= -1, & Y_L^{\text{quark}} &= \frac{1}{3}, \\ Y_R^{\text{lep}} &= -2, & Y_R^{\text{quark}} &= 2e_q, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где e_q — электрический заряд соответствующих кварков.

Из (2.4) и (2.6) по стандартной схеме можно прийти к следующему выражению для лагранжиана взаимодействия:

$$\mathcal{L}_I = igj^{K, \alpha} A_\alpha^K + ig' \frac{1}{2} j^{Y, \alpha} B_\alpha, \quad (2.7)$$

где

$$j^{K, \alpha} = \sum_{i=1}^3 \bar{\Psi}_{i,L} \gamma^\alpha \frac{\tau^K}{2} \Psi_{i,L} + \sum_{l=e, \mu, \tau} \bar{\Psi}_{l,L} \gamma^\alpha \frac{\tau^K}{2} \Psi_{l,L}, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{2} j^{Y, \alpha} = j^{em, \alpha} - j^{3, \alpha} \quad (2.9)$$

($j^{em, \alpha}$ — электромагнитный ток кварков и лептонов).

При переходе от полей A_α^3, B_α к полям Z_α, A_α

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= A_\alpha^3 \cos \theta_W - B_\alpha \sin \theta_W, \\ A_\alpha &= A_\alpha^3 \sin \theta_W + B_\alpha \cos \theta_W \end{aligned} \quad (2.10)$$

лагранжиан взаимодействия для полей Z_α, A_α приобретает следующий вид:

$$\mathcal{L}_I^0 = i \frac{g}{2 \cos \theta_W} j^{0, \alpha} Z_\alpha + ie j^{em, \alpha} A_\alpha, \quad (2.11)$$

где $j^{0, \alpha} = 2j^{3, \alpha} - 2 \sin^2 \theta_W \cdot j^{em, \alpha}$ — нейтральный ток стандартной модели.

Заметим, что лагранжианы (2.7) и (2.11) получены для дираковских (частиц) лептонов и кварков с зарядами g, g' или e, g с использованием принципа локальной калибровочной инвариантности. При требовании $SU(2)_L \times U(1)$ калибровочной инвариантности массы всех частиц должны равняться нулю (т.е. в этой теории не могут появляться массы у частиц [28,29]). Чтобы получить массы у частиц, стандартная теория электрослабого взаимодействия, основанная на предположении $SU(2)_L \times U(1)$ калибровочной инвариантности, нарушается спонтанно (до $U(1)$) через механизм Хиггса [30]. Кратко рассмотрим этот механизм.

Вводится дублет скалярных хиггсовских полей

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(0)} \end{pmatrix}$$

с гиперзарядом, равным единице (2.5). Предполагается, что этот дублет взаимодействует с векторными и фермионными полями таким образом, что локальная калибровочная инвариантность не нарушается. К лагранжиану электрослабой теории подключается хиггсовский потенциал $V(\Phi^+, \Phi)$:

$$V(\Phi^+, \Phi) = k(\Phi^+, \Phi)^2 - \mu^2(\Phi^+, \Phi), \quad (2.12)$$

k, μ^2 — положительные константы, которые приводят к вырождению вакуума и к ненулевому вакуумному среднему $\langle \Phi^0 \rangle$ поля Φ^0 :

$$\langle \Phi^0 \rangle = \sqrt{\frac{\mu^2}{2k}}, \quad (2.13)$$

т.е. (фиксируя вакуумное состояние) мы можем генерировать массовый член полей промежуточных бозонов, фермионов и хиггсовского бозона. В качестве примера рассмотрим схему получения массы кварков. Для этой цели используется лагранжиан юкавского типа, который является инвариантом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{\lambda} \sum_i \bar{\Psi}_{iL} M_{iq}^{(1)} q_R \bar{\Psi} + \text{h.c.}, \\ &\quad q = d, s, b \\ \mathcal{L}_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{\lambda} \sum_i \bar{\Psi}_{iL} M_{iq}^{(2)} q_R \bar{\Psi} + \text{h.c.}, \\ &\quad q = u, c, t \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $M^{(1)}, M^{(2)}$ — комплексные 3×3 матрицы,

$$\bar{\Phi} = i \tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \Phi^{0*} \\ -\Phi^{+*} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

есть дублет хиггсовских полей с гиперзарядом, равным -1 .

Учитывая (2.13) и используя калибровочную инвариантность лагранжиана (2.12), (2.14), можно выбрать (в унитарной калибровке)

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\lambda + H^0(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda + H^0(x)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

где $H^0(x)$ — нейтральное скалярное поле Хиггса.

Подставляя (2.16) в (2.14), получим следующие выражения для масс кварков:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -\bar{p}_L M'_1 p_R + \text{h.c.} \\ \mathcal{L}_2 &= -\bar{n}_L M'_2 n_R + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$p_{L,R} = \begin{pmatrix} u_{L,R} \\ c_{L,R} \\ t_{L,R} \end{pmatrix}, \quad n_{L,R} = \begin{pmatrix} d_{L,R} \\ s_{L,R} \\ b_{L,R} \end{pmatrix}.$$

Итак, элементы массовой матрицы кварков M'_1 , M'_2 совпадают с константами юкавской связи кварк — хиггс-бозон с точностью до фактора $\sqrt{2}/\lambda$.

Диагонализацию матриц M'_1 и M'_2 в (2.17) можно осуществить стандартным способом:

$$\begin{aligned} M'_1 &= U_L m_1 U_R^+, \\ M'_2 &= V_L m_2 V_R^+, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $U_{L,R}$ и $V_{L,R}$ — унитарные матрицы, а m_1 , m_2 — диагональные матрицы с положительными элементами. Тогда выражение для массового лагранжиана (2.17) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = -\bar{p}' m_1 p' - \bar{n}' m_2 n' = \\ &= \sum_{q=u,\dots} m_q \bar{q}' q'; \quad p' = p'_L + p'_R, \quad n' = n'_L + n'_R, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$p'_{L,R} = U_{L,R}^+ p_{L,R}, \quad n'_{L,R} = V_{L,R}^+ n_{L,R} \quad (2.20)$$

и $q'(x) \rightarrow d'(x), s'(x), \dots, t'(x)$ — кварковые поля с определенными массами.

При учете (2.20) выражение для заряженного и нейтрального токов кварков приобретает вид

$$j^{(+)\alpha} = 2\bar{p}_L \gamma^\alpha n_L = 2\bar{p}'_L \gamma^\alpha U_{KM} n'_L,$$

$$j^{0,\alpha} = \bar{p}'_L \gamma^\alpha p'_L - \bar{n}'_L \gamma^\alpha n'_L - 2 \sin^2 \theta_w \left[\frac{2}{3} \bar{p}' \gamma^\alpha p' + \left(-\frac{1}{3} \right) \bar{n}' \gamma^\alpha n' \right], \quad (2.21)$$

где $U_{KM} = U_L^+ V_L$.

Индекс КМ матрицы U связан с именами ученых Кобаяши и Маскавы, впервые получивших вид этой матрицы в параметризованном виде [31].

В принципе можно всю процедуру (2.14)—(2.21) с кварковыми массами повторить для лептонов, если предположить, что нейтрино является массивным, и ввести для них правые компоненты. Прежде чем переходить к следующему разделу, отметим, что вся вышеприведенная процедура с массами кварков является чисто формальной, т.к. при более строгом подходе нужно сформулировать общую группу, которая объединяет кварки и бозоны. В рамках этой группы уже должно происходить нарушение ароматических чисел и, в принципе, должны вычисляться массы (или возникать соотношения между массами) кварков и лептонов. В этом направлении была проделана большая работа [32]. Однако проблема с массами кварков и лептонов пока остается нерешенной. По этой причине, видимо, более корректным является рассмотрение матриц типа U_{KM} как феноменологических матриц, параметризующих смешивание кварков (как уже отмечалось выше, такую же феноменологическую матрицу можно ввести и для случая лептонов). В качестве примера построения динамической теории со смешиванием кварков укажем на работу [33], где с помощью введения трех дублетов $B^\pm, C^\pm, D^\pm$ тяжелых векторных бозонов решалась эта проблема.

3. Схема смешивания нейтрино. Следуя установившейся традиции, опишем смешивание нейтрино с помощью введения массового лагранжиана. Кроме того, по причине, указанной в [34], мы не будем рассматривать майорановские нейтрино. (Из всей совокупности имеющихся экспериментальных результатов, видимо, можно сделать вывод, что все существующие фермионы являются дираковскими частицами). Взаимодействие между фермионами в электрослабой теории вводится с помощью принципа локальной калибровочной инвариантности (2.4), т.е. фермионы посредством принципа локальной калибровочной инвариантности приобретают заряд, а

майорановскую частицу в силу ее нейтральности (эта частица не имеет калибровочного слабого заряда g) не удастся подключить к электрослабому взаимодействию.

Сперва рассмотрим случай смешивания двух типов нейтрино (которое строится по аналогии с K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонами (см. работу [9] Понтекорво)), а потом рассмотрим более общий случай.

Массовый лагранжиан двух типов нейтрино (ν_e, ν_μ) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_M &= -[m_{\nu_e \nu_e} \bar{\nu}_e \nu_e + m_{\nu_\mu \nu_\mu} \bar{\nu}_\mu \nu_\mu + m_{\nu_e \nu_\mu} (\bar{\nu}_e \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \nu_e)] \equiv \\ &\equiv -(\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu) \begin{pmatrix} m_{\nu_e \nu_e} & m_{\nu_e \nu_\mu} \\ m_{\nu_\mu \nu_e} & m_{\nu_\mu \nu_\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.22)$$

В выражении (2.22) третий член отвечает за смешивание нейтрино и нарушает лептонные числа ℓ_e, ℓ_μ , очевидно, введение такого члена эквивалентно введению взаимодействия, нарушающего лептонные числа. С помощью замены

$$\begin{aligned}\nu_e &= \cos \theta \cdot \nu_1 + \sin \theta \cdot \nu_2, \\ \nu_\mu &= -\sin \theta \cdot \nu_1 + \cos \theta \cdot \nu_2\end{aligned}\quad (2.23)$$

мы можем диагонализировать массовый лагранжиан $\mathcal{L}'_M$, и тогда

$$\mathcal{L}'_M = -[m_1 \bar{\nu}_1 \nu_1 + m_2 \bar{\nu}_2 \nu_2], \quad (2.24)$$

где

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} [(m_{\nu_e \nu_e} + m_{\nu_\mu \nu_\mu}) \pm [(m_{\nu_e \nu_e} - m_{\nu_\mu \nu_\mu})^2 + 4m_{\nu_e \nu_\mu}^2]^{1/2}],$$

а угол θ определяется выражением

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2m_{\nu_e \nu_\mu} / (m_{\nu_\mu \nu_\mu} - m_{\nu_e \nu_e}). \quad (2.25)$$

Как видно из выражения (2.25), если $m_{\nu_e \nu_e} = m_{\nu_\mu \nu_\mu}$, то угол смешивания равен $\pi/4$ независимо от величины $m_{\nu_e \nu_\mu}$.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Тогда массовый лагранжиан будет иметь вид

$$\mathcal{L}_M = -\bar{\nu}_R M \nu_L + \text{h.c.} \equiv \sum_{l, l' = e, \mu, \tau} \nu_{lR} M_{ll'} \nu_{lL} + \text{h.c.}, \quad (2.26)$$

где M — комплексная 3×3 матрица. Необходимо отметить, что v_R отсутствует в лагранжиане электрослабого взаимодействия (2.3), (2.4). С помощью преобразования

$$M = VmU^+, \quad (2.27)$$

где V, U — унитарные матрицы, приведем $\mathcal{L}_M$ к диагональному виду

$$\mathcal{L}_M = -\bar{v}_R m v_L + \text{h.c.} \equiv \sum_{k=1}^3 m_k \bar{v}_k v_k + \text{h.c.}, \quad (2.28)$$

где

$$m_{ik} = m_k \delta_{ik},$$

$$v'_L = U^+ v_L, \quad v'_R = V^+ v_R, \quad v' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Отметим, что лагранжиан (2.26) инвариантен относительно глобального калибровочного преобразования

$$v_k(x) \rightarrow e^{i\Lambda} v_k(x)$$

или

$$l(x) \rightarrow e^{i\Lambda} l(x), \quad l = e, \mu, \tau,$$

т.е. лептонные числа по отдельности уже не сохраняются (нейтрино смешиваются), но появляется лептонное число ζ связанное с калибровочным преобразованием $e^{\pm i\Lambda}$, которое будет сохраняться.

4. Осцилляции нейтрино. Теория осцилляций нейтрино строится по аналогии с $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ осцилляциями (более детальное рассмотрение $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ осцилляций будет приведено ниже). Предположим, что вектор состояния нейтрино (v_e, v_μ, v_τ) , принимающего участие в слабых взаимодействиях, является суперпозицией векторов состояния с различными массами. Тогда как будет себя вести нейтринный пучок? Ясно, что на некотором расстоянии от источника вектор состояния нейтрино приобретет дополнительные фазы из-за того, что разные нейтрино имеют различные массы. Тогда вероятность найти нейтрино заданного типа будет периодической функцией расстояния между источником и детектором. Это явление названо осцилляциями нейтрино [7].

Сначала рассмотрим осцилляции двух типов нейтрино ν_e, ν_μ , а затем приведем формулы для осцилляций в случае трех нейтрино. Частицы ν_1, ν_2 (см. (2.23), (2.24)) с массами m_1 и m_2 эволюционируют во времени по закону

$$\nu_1(t) = e^{-iE_1 t} \nu_1(0); \quad \nu_2(t) = e^{-iE_2 t} \nu_2(0), \quad (2.30)$$

где $E_k^2 = (p^2 + m_k^2)$, $k = 1, 2$.

Если эти частицы распространяются без взаимодействия, то

$$\begin{aligned} \nu_e(t) &= \cos \theta \cdot e^{-iE_1 t} \nu_1(0) + \sin \theta \cdot e^{-iE_2 t} \nu_2(0), \\ \nu_\mu(t) &= -\sin \theta \cdot e^{-iE_1 t} \nu_1(0) + \cos \theta \cdot e^{-iE_2 t} \nu_2(0). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Используя выражения для ν_1 и ν_2 из (2.23) и подставляя его в (2.31), получим

$$\begin{aligned} \nu_e(t) &= [e^{-iE_1 t} \cos^2 \theta + e^{-iE_2 t} \sin^2 \theta] \nu_e(0) + \\ &+ [e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t}] \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \nu_\mu(0), \\ \nu_\mu(t) &= [e^{-iE_1 t} \sin^2 \theta + e^{-iE_2 t} \cos^2 \theta] \nu_\mu(0) + \\ &+ [e^{-iE_1 t} - e^{-iE_2 t}] \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \nu_e(0). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Вероятность того, что нейтрино, образовавшееся как ν_e в момент $t=0$, будет в момент t в состоянии ν_μ , дается квадратом абсолютной величины амплитуды $\nu_\mu(0)$ в (2.32), т.е.

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = |(\nu_\mu(0)/\nu_e(t))|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta [1 - \cos((m_2^2 - m_1^2)/2p)t], \quad (2.33)$$

где предполагается, что $p \gg m_1, m_2$; $E_k \approx p + m_k^2/2p$. Выражение (2.33) описывает осцилляции нейтринного аромата. Угол θ — угол смешивания — характеризует степень смешивания. Вероятность $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ изменяется по периодическому закону с расстоянием с периодичностью, определяемой выражением $L_0 = 2\pi (2p / |m_2^2 - m_1^2|)$. Эти осцилляции являются

типичным интерференционным эффектом, обусловленным недиагональной формой массовой матрицы (2.22).

Вероятность $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ того, что нейтрино ν_e , образовавшееся в момент времени $t = 0$, остается ν_e в момент времени t , дается квадратом абсолютной величины амплитуды $\nu_e(0)$ в (2.32); т.к. состояние (2.32) — нормированное, то

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) + P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 1. \quad (2.34)$$

Таким образом, мы видим, что осцилляции аромата, обусловленные недиагональностью массовой матрицы нейтрино, нарушают закон сохранения лептонных чисел ℓ_e и ℓ_μ . Однако при этом полное лептонное число $\ell = \ell_e + \ell_\mu$ сохраняется, как это видно из (2.34).

Перейдем теперь к рассмотрению осцилляций трех типов нейтрино. Для этой цели будем использовать выражение типа (2.20) и запишем его в компонентах

$$\nu_e = \sum_{k=1}^3 U_{lk}^* \nu_k, \quad l = e, \mu, \tau, \quad (2.35)$$

где ν_k — вектор состояния нейтрино с импульсом p и массой m_k . Выражение (2.35) базируется на том, что разности масс нейтрино ν_k так малы, что когерентная суперпозиция векторов состояния нейтрино с различными массами формируется в слабых взаимодействиях

$$\nu_k(t) = e^{-iE_k t} \nu_k(0). \quad (2.36)$$

Тогда

$$\nu_l(t) = \sum_{k=1}^3 e^{-iE_k t} U_{lk}^* \nu_k(0). \quad (2.37)$$

Используя унитарность матрицы U , можно переписать (2.37) в виде

$$\nu_l(t) = \sum_{l'=e, \mu, \tau} \nu_{l'}(0) \sum_{k=1}^3 U_{l'k} e^{-iE_k t} U_{lk}^*, \quad (2.38)$$

и, вводя обозначение

$$a_{\nu_{l'} \nu_l}(t) = \sum_{k=1}^3 U_{l'k} e^{-iE_k t} U_{lk}^*, \quad (2.39)$$

получим

$$v_l(t) = \sum_{l'=e, \mu, \tau} a_{v_{l'}, v_l}(t) v_{l'}(0), \quad (2.40)$$

где $a_{v_{l'}, v_l}(t)$ — амплитуда вероятности перехода $v_l \rightarrow v_{l'}$. Соответствующая вероятность перехода $v_l \rightarrow v_{l'}$:

$$P_{v_{l'}, v_l}(t) = \left| \sum_{k=1}^3 U_{l'k} e^{-iE_k t} U_{lk}^* \right|^2. \quad (2.41)$$

Очевидно, что

$$\sum_{l'=e, \mu, \tau} P_{v_{l'}, v_l}(t) = 1. \quad (2.42)$$

Используя $E_k \equiv p + \frac{m_k^2}{2p}$, выражение (2.41) можно переписать в виде

$$P_{v_{l'}, v_l}(R, p) = \sum_{k=1}^3 |U_{lk}|^2 |U_{l'k}|^2 + 2 \sum_{k>j} |U_{l'k} U_{lk}^* U_{l'j} U_{lj}| \cos \left[\frac{m_k^2 - m_j^2}{2p} R - \Phi_{kj, l'l} \right], \quad (2.43)$$

где R — расстояние от источника до детектора, а

$$\Phi_{kj, l'l} = \arg (U_{l'k} U_{lk}^* U_{l'j} U_{lj}).$$

Выражение (2.43) можно переписать в виде

$$P_{v_{l'}, v_l}(R, p) = \delta_{ll} + 2 \sum_{k>j} |U_{l'j} U_{lj}^* U_{l'k} U_{lk}| \times \\ \times \left[\cos \left(\frac{m_j^2 - m_k^2}{2p} R - \Phi_{jk, l'l} \right) - \cos \Phi_{jk, l'l} \right]. \quad (2.44)$$

Из выражений (2.33) и (2.44) видно, что длина осцилляций нейтрино определяется выражением

$$L_0(m) = \frac{2,48E \text{ (МэВ)}}{|m_k^2 - m_j^2| \text{ (эВ}^2\text{)}}; \quad k \neq j; \quad k, j = 1 + 3, \quad (2.45)$$

где $E = pc$ — энергия.

Как видно из (2.33), (2.43) и (2.45), осцилляции нейтрино зависят от отношения расстояния R к энергии E . На рис.1 для наглядности показаны

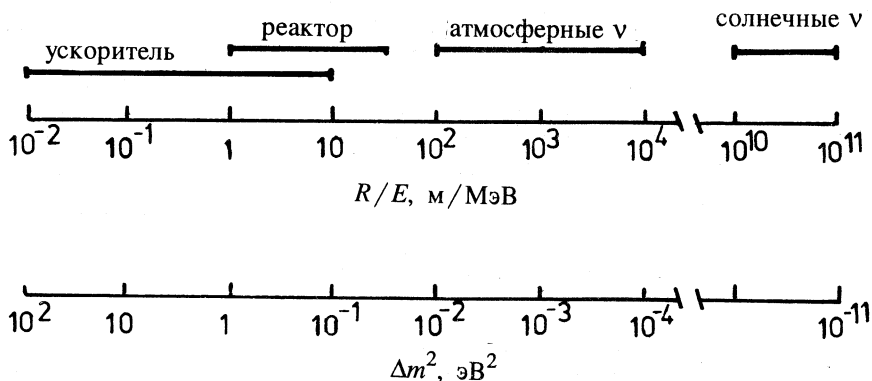


Рис. 1. Области значений R/E и $\Delta m^2(\text{эВ})^2$, доступные в различных экспериментах

диапазоны чувствительности различных осцилляционных экспериментов и разности масс в квадрате Δm^2 .

До сих пор мы рассматривали стандартную теорию осцилляций нейтрино. Однако нужно отметить, что эта теория описывает осцилляции нейтрино чисто кинематическим способом, т.е. все параметры массовой матрицы M в (2.26) являются постоянными величинами и не зависят от времени. Однако, как мы отмечали ранее, такой недиагональной массовой матрице должна соответствовать динамическая теория, которая нарушает лептонные числа. Если это так, то постоянные параметры недиагональной массовой матрицы являются усредненными величинами, получаемыми из динамической теории. Тогда та картина осцилляций нейтрино, которую мы приводили выше, является грубым усредненным описанием реальной картины осцилляций нейтрино. При более детальном динамическом описании проявляются новые черты осцилляций нейтрино. Перейдем к качественному динамическому анализу осцилляций K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов, т.к. этот процесс изучен достаточно хорошо, а затем к применению полученных результатов в случае осцилляций нейтрино [28,29,23].

K^0 -, $\bar{K}^0$ -осцилляции. Предположим, что K^0 , $\bar{K}^0$ рождаются в сильных взаимодействиях (случай, когда K^0 , $\bar{K}^0$ рождаются в слабых процессах, мы обсудим ниже), тогда массовая матрица $\bar{K}^0$, K^0 -мезонов будет иметь диагональный вид (т.е. странность в сильных взаимодействиях сохраняется). Время рождения K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов есть характерное время сильного взаимодействия $\Delta t_{\text{strong}} \cong 10^{-23}$ с.

$$\begin{vmatrix} m_{K^0 K^0} & 0 \\ 0 & m_{\bar{K}^0 \bar{K}^0} \end{vmatrix}, \quad m_{K^0 K^0} = m_{\bar{K}^0 \bar{K}^0} \equiv m_{K^0}. \quad (2.46)$$

Но, наряду с сильным, имеет место и слабое взаимодействие кварков, которое приводит к нарушению странности, тогда массовая матрица (2.46) станет недиагональной:

$$\begin{vmatrix} m_{K^0 K^0} & m_{K^0 \bar{K}^0} \\ m_{\bar{K}^0 K^0} & m_{\bar{K}^0 \bar{K}^0} \end{vmatrix} \quad (2.47)$$

(оценки недиагонального члена массовой матрицы (2.47) и соответствующие ссылки можно найти в [34]). Теперь мы видим, что так как массовый член $m_{K^0 \bar{K}^0}$ возникает динамическим путем, то для его возникновения требуется определенное время — характерное время слабого взаимодействия $\Delta t_{\text{weak}} \cong 10^{-8}$ с. В результате при более детальном рассмотрении процесса эволюции K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов мы видим, что процесс рождения K^0 , $\bar{K}^0$ и процесс нарушения странности, приводящий к осцилляциям K^0 , $\bar{K}^0$ -мезонов, идут со своими характерными временами, и очевидно, что эти процессы нужно рассматривать по отдельности (как уже отмечалось выше, в стандартном подходе [7,9,35] производится лишь усредненно кинематическое описание осцилляций K^0 , $\bar{K}^0$).

Теперь, учитывая динамику, произведем феноменологическое описание процесса осцилляций K^0 , $\bar{K}^0$ -мезонов. Рассмотрим процесс рождения K^0 , $\bar{K}^0$ -мезонов как квазистационарный процесс с характерным временем $\Delta t_{\text{strong}} \cong 10^{-23}$ с. За это характерное время слабое взаимодействие будет нарушать странность и в результате массовая матрица K^0 , $\bar{K}^0$ станет недиагональной. Оценим вероятность этого процесса:

$$W(t = \pi \Delta t_{\text{strong}}) = \frac{(1 - e^{-t/\Delta t_{\text{weak}}})}{(1 - e^{-t/\Delta t_{\text{strong}}})} \cong \pi \frac{\Delta t_{\text{strong}}}{\Delta t_{\text{weak}}} \cong \pi \cdot 10^{-15}, \quad (2.48)$$

где $1 - e^{-t/\Delta t}$ — вероятность распада квазистационарного состояния за характерное время Δt . За время $t \cong 10^{-23} \pi$ с вероятностью $\pi \cdot 10^{-15}$ массовая матрица K^0 , $\bar{K}^0$ будет недиагональной. В этом случае, чтобы определить, что будет происходить с квазистационарной системой, нужно диагонализировать массовую матрицу (2.47):

$$\begin{vmatrix} m_{K^0 K^0} & m_{K^0 \bar{K}^0} \\ m_{\bar{K}^0 K^0} & m_{\bar{K}^0 \bar{K}^0} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} m_{K_1^0 K_1^0} & 0 \\ 0 & m_{K_2^0 K_2^0} \end{vmatrix},$$

$$K_1^0 = \frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}}, \quad K_2^0 = \frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}},$$

$$m_{K_1^0 K_1^0} = m_{K^0 K^0} + m_{K^0 \bar{K}^0},$$

$$m_{K^0 K^0} = \frac{(m_{K_1^0 K_1^0} + m_{K_2^0 K_2^0})}{2}, \quad (2.49)$$

и угол смешивания $\theta = \pi/4$, так как $m_{K^0 K^0} = m_{\bar{K}^0 \bar{K}^0}$. Из (2.49) видно, что собственными массовыми состояниями в этом случае будут состояния K_1^0 , K_2^0 , т.е. с вероятностью $\pi \cdot 10^{-15}$ будут рождаться K_1^0 , K_2^0 , а в остальных случаях K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезоны.

Посмотрим, что будет происходить в дальнейшем с K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонами (будем считать, что они двигаются в вакууме) из-за присутствия слабого взаимодействия, нарушающего странность.

Как уже отмечалось выше, K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезоны, рождающиеся в сильных взаимодействиях, являются собственным состоянием этого взаимодействия и рождаются на определенных массовых поверхностях [36]:

$$P_{K^0}^2 = m_{K^0}^2, \quad P_{\bar{K}^0}^2 = m_{\bar{K}^0}^2. \quad (2.50)$$

Из-за наличия слабого взаимодействия странность будет нарушаться, в результате чего массовая матрица станет недиагональной (см. (2.49)). Диагонализация этой массовой матрицы приведет к возникновению состояний K_1^0 и K_2^0 . Далее, т.к. K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезоны родились и двигаются в вакууме и находятся на соответствующих массовых поверхностях, то состояния K^0 -, $\bar{K}^0$ превратятся в суперпозицию K_1^0 и K_2^0 , и этот процесс должен быть динамическим (очевидно, такой процесс можно грубо описать кинематически по средним характеристикам, но при этом будет теряться информация о деталях процесса). Далее K_1^0 и K_2^0 распадаются [37], и на фоне этих распадов происходят осцилляции K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов. Длина осцилляций (см. (2.33), (2.45))

$$L_{\text{osc}}(M) = \frac{2,48p \text{ (МэВ)}}{4m_{K^0\bar{K}^0} m_{K^0}(\text{эВ})^2}. \quad (2.51)$$

Интересно отметить, что благодаря тому, что K^0 - и $\bar{K}^0$ -мезоны состоят из $\bar{s}$ -, d - и $\bar{d}$ -, s -кварков (массы s -, d -кварков различаются), массы K^0 - и $\bar{K}^0$ -мезонов равны, и имеют место реальные, а не виртуальные осцилляции K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов.

Обсудим вкратце смешивание и осцилляции K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов в случае, когда они рождаются в слабых взаимодействиях. Нужно отметить, что такие каналы рождения этих мезонов трудно наблюдать из-за конкуренции других каналов. Но, в принципе, рождение K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов в слабых взаимодействиях возможно. Это связано с тем, что заряженный ток

$$j_F^\mu = (\bar{u} \bar{c})_L \gamma^\mu V \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L, \quad (2.52)$$

где $V = \begin{vmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{vmatrix}$ — матрица Кабиббо [38], можно разбить на два члена: диагональный член, пропорциональный $\cos \theta_C$, и недиагональный, пропорциональный $\sin \theta_C$, т.е. слабое взаимодействие без учета и с учетом смешивания кварков. В слабых взаимодействиях без смешивания кварков (с сохранением странности) собственными массовыми состояниями являются K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезоны, которые совпадают с собственным массовым состоянием сильного взаимодействия. А в слабых взаимодействиях, со смешиванием кварков, собственными массовыми состояниями являются K_1^0 -, K_2^0 -состояния. Разбив ток слабого взаимодействия таким образом и зная, что вклады этих частей соотносятся как $\text{tg } \theta_C$ (θ_C — угол Кабиббо), мы можем оценить вероятность, с которой будут рождаться состояния K^0 , $\bar{K}^0$ и K_1^0 , K_2^0 в слабых взаимодействиях. Отношение амплитуд таких процессов

$$\frac{A(K_1^0, K_2^0)}{A(K^0, \bar{K}^0)} \equiv \text{tg}^2 \theta_C, \quad (2.53)$$

$$P = \left| \frac{A(K_1^0, K_2^0)}{A(K^0, \bar{K}^0)} \right|^2 \equiv \text{tg}^4 \theta_C, \quad (2.54)$$

т.е. в слабых взаимодействиях с вероятностью P рождаются K_1^0 -, K_2^0 -мезоны, а с вероятностью $1 - P$ рождаются K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезоны. Осцилляции

родившихся при этом K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов происходят аналогично описанным выше.

Возникает вопрос: как происходили бы осцилляции K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов в вакууме, если бы массы K^0 - и $\bar{K}^0$ -мезонов были различны? Детальное обсуждение этого вопроса с учетом ширин распадов проведено в работе [36].

Чтобы далее применить полученные результаты к случаю нейтринных осцилляций, мы здесь кратко обсудим широко известный пример из физики частиц — модель векторной доминантности, где происходит смешивание частиц с разными массами.

$\gamma \leftrightarrow \rho^0$ *осцилляции*. Рассмотрим смешивания (осцилляции), которые возникают в модели векторной доминантности [39]. В этой модели рассматривается смешивание векторных полей сильного $V_\mu(\rho^0)$ и электромагнитного A_μ взаимодействий. Начальные поля $\begin{pmatrix} V_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$ смешиваются, когда сильное и электромагнитные взаимодействия включаются [40]:

$$\begin{aligned} V'_\mu &= \cos \varphi \cdot V_\mu - \sin \varphi \cdot A_\mu, \\ A'_\mu &= \sin \varphi \cdot V_\mu + \cos \varphi \cdot A_\mu, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$\cos \varphi = \frac{G}{\sqrt{G^2 + e^2}}$$

и G , e — константы сильного и электромагнитного взаимодействия.

Благодаря калибровочной инвариантности электромагнитного взаимодействия и сохранению изоспина в сильных взаимодействиях массовая матрица полей V_μ , A_μ должна быть диагональной

$$\begin{vmatrix} m_A^2 & \mu^2 \\ \mu^2 & m_V^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_\rho^2 \end{vmatrix}. \quad (2.56)$$

Как будут происходить осцилляции $\gamma \leftrightarrow \rho^0$? Так как поля A_μ и V_μ имеют заметно различные массы, здесь не должно быть реальных осцилляций между ними, как это имеет место между K^0 и $\bar{K}^0$ ($m_{K^0} = m_{\bar{K}^0}$). Между этими полями (частицами) должны быть виртуальные осцилляции. Это означает, что переходы к полям A'_μ , V'_μ виртуальные (нет реального перехода γ -кванта в ρ^0 -мезон с последующим его распадом). Для того, чтобы

сделать такой переход $\gamma \leftrightarrow \rho^0$ реальным (а не виртуальным), γ -квант должен принимать участие во взаимодействии, с тем чтобы перейти на массовую поверхность ρ^0 -мезона.

Рассмотрим систему осциллирующих частиц как связанную систему. Феноменологически степень связанности этих частиц определяется недиагональными членами массовой матрицы (это массовая матрица (2.49) в случае K^0 -, $\bar{K}^0$ -мезонов и M в (2.27) в случае нейтрино), или, точнее, отношением недиагональных членов к диагональным членам массовой матрицы:

$$A_{ik} = m_{ik}/m_{ii}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1 + 2(3). \quad (2.57)$$

Если $A_{ik} \ll 1$, то заданную систему можно рассматривать как слабосвязанную систему, и физические состояния ν_e , ν_μ , ν_τ или K^0 существуют как реальные (а не виртуальные) состояния, т.е. в основном рождаются эти состояния. Если $A_{ik} < 1$, то в основном рождаются собственные состояния, соответствующие диагонализированной массовой матрице, т.е. ν_1 , ν_2 , ν_3 и K_1^0 , K_2^0 . Асимптотические состояния (когда ν_e , ν_μ , ν_τ и K^0 , $\bar{K}^0$ становятся суперпозицией ν_1 , ν_2 , ν_3 и K_1^0 , K_2^0) появляются, когда $A_{ik} \ll 1$. Являются ли эти асимптотические состояния и осцилляции реальными или виртуальными, определяется отношениями диагональных элементов массовой матрицы (например, в случае K^0 , $\bar{K}^0$, когда $m_{K^0} = m_{\bar{K}^0}$, осцилляции будут реальными).

Зная, что лептонные числа ℓ_e , ℓ_μ , ℓ_τ хорошо сохраняются в стандартной теории слабого взаимодействия [6], мы можем сделать заключение, что система нейтрино (см. массовую матрицу (2.27)) является слабосвязанной системой (т.е. $m_{ik}/m_{ii} \ll 1$, где $i \neq k$; $i, k = 1 + 3$). Тогда в основном рождаются физические состояния нейтрино ν_e , ν_μ , ν_τ (массовая матрица диагональна). Асимптотические состояния (т.е. когда ν_e , ν_μ , ν_τ являются суперпозицией ν_1 , ν_2 , ν_3 , при этом происходит нарушение ℓ_e , ℓ_μ , ℓ_τ) возникают при движении родившихся нейтрино ν_e , ν_μ , ν_τ в вакууме.

Вернемся теперь к вопросу осцилляций нейтрино, имея в качестве примера $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ и $\gamma \leftrightarrow \rho^0$ осцилляции, и проведем классификацию возможных типов осцилляций нейтрино.

1) Если массы ν_e , ν_μ , ν_τ равны, то должны иметь место реальные осцилляции между этими нейтрино в полной аналогии с K^0 -, $\bar{K}^0$ -осцилляциями.

В этом случае асимптотические состояния (т.е. состояния ν_1, ν_2, ν_3) существуют в вакууме как реальные состояния (по аналогии с K_1^0, K_2^0 -мезонами).

2) Если массы ν_e, ν_μ, ν_τ разные, то должны быть виртуальные осцилляции между ними по аналогии с $\gamma \leftrightarrow \rho^0$ осцилляциями (асимптотические состояния также существуют как виртуальные). Чтобы обнаружить в этом случае реальные осцилляции нейтрино, они должны участвовать во взаимодействии для перехода на соответствующую массовую поверхность. Например, если нейтрино ν_e осциллируют в ν_μ, ν_τ , и эти нейтрино имеют моды распада, то эти осцилляции и моды распада могут быть обнаружены, если ν_e участвуют во взаимодействии, и происходит переход на соответствующие массовые поверхности ν_μ, ν_τ .

Не представляет труда, исходя из сказанного, проанализировать промежуточные случаи, когда массы двух нейтрино одинаковы. Анализ показывает, что если массы нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ различны, то осцилляции, описываемые формулами (2.33), (2.43), виртуальные, и длины осцилляции L_0 (см. (2.45)) определяются квадратами разностей масс ν_1, ν_2, ν_3 . Существенное отличие этой картины осцилляций нейтрино от старой заключается в том, что нейтрино остаются на своих массовых поверхностях, если они двигаются в вакууме.

К каким последствиям может привести это отличие, мы обсудим в следующем разделе.

3. ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЙТРИНО В ВЕЩЕСТВЕ

Рассматривается теория резонансных осцилляций нейтрино в веществе [18,41] (эффект МСВ), получаемая из уравнения Вольфенштейна [19]. Дается критический анализ уравнения Вольфенштейна. Далее приводится теория усиления осцилляций нейтрино разных масс в веществе [23].

1. Теория резонансных осцилляций нейтрино в веществе. Для описания осцилляций нейтрино в веществе Вольфенштейн предложил уравнение [23]:

$$i \frac{d\nu_\phi}{dt} = \left(p\hat{I} + \frac{\hat{M}^2}{2p} + \hat{W} \right) \nu_\phi, \quad (3.1)$$

где $p, \hat{M}^2, \hat{W}$ — импульс, квадрат массовой матрицы нейтрино в вакууме и матрица, учитывающая взаимодействия нейтрино с веществом,

$$v_\phi = \begin{pmatrix} v_{v_e} \\ v_{v_\mu} \end{pmatrix}; \quad \hat{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Смешивание в (3.1) обусловлено недиагональностью матрицы $\hat{M}^2$. Если энергия нейтрино не слишком велика, $S \ll G_F^{-1}$, и размер слоя вещества меньше длины поглощения, то взаимодействие нейтрино с веществом сводится к упругому рассеянию вперед на угол θ^0 . Выражения для W_e , W_μ можно получить, рассматривая изменение волновой функции за время dt . Оно связано с появлением дополнительной волны, являющейся результатом сложения волн рассеяния на частицы в слое $dR \equiv cdt$:

$$dv_\alpha = -iW_\alpha v_\alpha dR, \\ W_\alpha = \sum f_i^\alpha(0) N_i p^{-1} \quad (\alpha = e, \mu), \quad (3.2)$$

где $f_i^\alpha(0)$ — амплитуда рассеяния v_α на i -й компоненте вещества ($i = e, p, n$). N_i — концентрация распределения компонент.

Физические следствия для осцилляций определяются разностью диагональных членов в матрицах M^2 и W :

$$W = W_e - W_\mu = \sum \Delta f_i N_i p^{-1}, \quad (3.3)$$

где $\Delta f_i = f_i^e(0) - f_i^\mu(0)$.

Как видно из (3.3), если взаимодействие v_e и v_μ одинаково, то влияние вещества исчезает. Для существования эффекта необходимо несимметричное взаимодействие нейтрино — v_e , v_μ . Так как при низких энергиях нет рассеяния через заряженный ток у v_μ , v_τ , то

$$\Delta f_i(0) = \sqrt{2} G_F p, \quad W = \sqrt{2} G_F N_e. \quad (3.4)$$

С.П.Михеев и А.Ю.Смирнов [18,42] показали, что уравнение (3.1) имеет решения резонансного характера (эффект МСВ), которые приводят к большим осцилляциям нейтрино. Этот эффект усиления осцилляций нейтрино в веществе вызвал большой интерес в связи с возможностью объяснения расхождения между измеренными в экспериментах потоками нейтрино от Солнца и расчетами по ССМ.

В вакууме $W = 0$, и тогда (3.1) имеет вид

$$i \frac{dv_\phi}{dt} = \left(p \hat{I} + \frac{\hat{M}^2}{2p} \right) v_\phi. \quad (3.5)$$

Связь между v_ϕ и $v = (v_1, v_2)$ (2.33) устанавливается диагонализацией массовой матрицы M^2 :

$$v_\phi = U(\theta)v, \quad U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$U(\theta)^+ M U(\theta) = m^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Длина осцилляций нейтрино определяется формулой (2.45):

$$L_0 = \frac{4\pi p}{|m_1^2 - m_2^2|}, \quad E = pc. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.1), при учете вклада взаимодействия нейтрино с веществом (3.3), имеет вид

$$i \frac{dv_\phi}{dt} = \hat{H} v_\phi, \quad \text{где } \hat{H} = \begin{vmatrix} H_e & \frac{1}{2} \bar{H} \\ \frac{1}{2} \bar{H} & H_\mu \end{vmatrix},$$

$$\bar{H} = -\frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{2p}; \quad H = H_e - H_\mu = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2p} + \frac{\sum \Delta f_i N_i}{2p}. \quad (3.8)$$

В среде с переменной плотностью $N_i = N_i(x)$, и уравнение (3.8) есть система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Собственная длина (длина дифракции) определяется как

$$L^0 = 2\pi W^{-1} = 2\pi \left(\frac{\sum \Delta f(0) N_i}{p} \right)^{-1} =$$

$$= 2\pi m_N (\sqrt{2} G_F \rho Y_e)^{-1} = (3 \cdot 10^7 \text{ м}) (\rho (\text{г/см}^3) \cdot 2 Y_e)^{-1}, \quad (3.9)$$

где Y_e — число электронов на один нуклон.

Используя (3.9), $H, \bar{H}$ можно представить в виде

$$H = -2\pi L_0^{-1} \left(\cos 2\theta - \frac{L_0}{L^0} \right),$$

$$\bar{H} = 2\pi L_0^{-1} \sin 2\theta. \quad (3.10)$$

Определим матрицу $U_m(\theta_m)$, диагонализующую массовую матрицу в случае взаимодействия нейтрино с веществом:

$$v_\phi = \hat{U}_m(\theta_m) v_m, \quad \hat{U}_m(\theta_m) = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix},$$

$$\hat{U}_m^\dagger(\theta_m) \hat{H} \hat{U}_m(\theta_m) = \hat{H}_m = \text{diag}(H_1^d, H_2^d), \quad (3.11)$$

где θ_m — угол смешивания в веществе.

Из (3.8) и (3.11) следует

$$\sin 2\theta_m = \overline{H}(H^2 + \overline{H}^2)^{-1/2}, \quad (3.12)$$

$$H_{1,2}^d = \frac{1}{2} [H_e + H_\mu \pm (H^2 + \overline{H}^2)^{-1/2}],$$

$$M_i^2 = 2pH_i^d, \quad (3.13)$$

где v_{im} , M_i^2 — аналоги v_i , m_i^2 в веществе.

Зависимость параметра смешивания $\sin^2 2\theta_m$ от энергии нейтрино или плотности среды имеет резонансный характер. Из (3.12) и из выражения для H , $\overline{H}$ (3.10) следует

$$\sin^2 2\theta_m = \sin^2 2\theta \cdot [(\cos 2\theta - L_0(L^0)^{-1})^2 + \sin^2 2\theta]^{-1}, \quad (3.14)$$

при (условие резонанса!)

$$\cos 2\theta \equiv \frac{L_0}{L^0}, \quad \sin^2 2\theta_m \equiv 1, \quad \theta_m \equiv \frac{\pi}{4}. \quad (3.15)$$

Напомним, что из (2.45) и (3.9) следует $L_0/L^0 \sim \rho E$ ($E \equiv pc$).

Полуширина резонанса на полувывоте определяется углом смешивания в вакууме

$$\Delta(L_0/L^0) = \frac{L_0}{L^0} \tan 2\theta = \sin 2\theta. \quad (3.16)$$

Из (3.16) видно, что чем меньше угол вакуумного смешивания, тем уже резонансный пик.

Как видно из (3.15), резонансная плотность ($\rho_R = \rho Y_e$) есть

$$\rho_R = -m_N \Delta m^2 \cos 2\theta (2\sqrt{2} G_F E)^{-1}. \quad (3.17)$$

Перепишем (3.17) в виде

$$\frac{E\rho_R}{\Delta m^2} = -m_N (2\sqrt{2} G_F)^{-1}. \quad (3.18)$$

Из (3.18) видно, что если среда имеет переменную плотность (например, Солнце), то условие резонанса будет выполняться для нейтрино в широком диапазоне энергии.

Вероятность обнаружить нейтрино ν_e на расстоянии R от источника

$$P(E, R, \dots) = 1 - \sin^2 2\theta_m \cdot \sin \frac{2\pi R}{L_m}, \quad (3.19)$$

$$\text{где } L_m = \frac{\sin 2\theta_m}{\sin 2\theta}.$$

Из (3.14) видно, что

$$\text{при } L_0/L^0 \rightarrow 0 \quad \sin^2 2\theta_m \cong \sin^2 2\theta,$$

$$\text{при } L_0/L^0 \rightarrow \infty \quad \sin^2 2\theta_m \cong \sin^2 2\theta \cdot (L_0/L^0)^{-2}.$$

Более полное изложение теории МСВ-эффекта можно найти в обзоре [41].

В работах [20] проведен анализ уравнения Вольфенштейна (3.1). Это есть уравнение Шредингера (точнее, Паули) для функции $\psi = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix}$, где

$\psi_e = \psi_{Le} + \psi_{Re}$, $\psi_\mu = \psi_{L\mu} + \psi_{R\mu}$, т.е. оно является лево-право-симметричным уравнением для спинорных функций. В этом уравнении присутствует член $\hat{W}$, возникающий от слабого взаимодействия (вклад W -бозонов), содержащий только левое взаимодействие спиноров (2.8) (нейтрино), который подставляется в лево-право-симметричное уравнение (3.1) без указания его левого происхождения. И тогда мы видим, что это уравнение включает в себя член $\hat{W}$, происходящий не от слабого взаимодействия, а от гипотетического лево-право-симметричного взаимодействия, и получаемый эффект резонансного усиления осцилляций нейтрино в веществе связан именно с этим гипотетическим лево-право-симметричным взаимодействием. Для правильного учета левого характера слабого взаимодействия, видимо, необходимо сформулировать не уравнение типа Шредингера, а уравнение типа Дирака.

Как видно из уравнений (3.1) и (3.13), для существования эффекта усиления осцилляций нейтрино в веществе необходимо, чтобы результат от взаимодействия нейтрино с веществом сводился к изменению эффективной массы ν_e нейтрино. Если эффективная масса ν_e нейтрино будет расти в веществе за счет вклада гипотетического взаимодействия и $m_{\nu_e} \cong m_{\nu_\mu}$, то

угол смешивания $\theta \equiv \frac{\pi}{4}$. В связи с этим интересно проследить, может ли вклад слабого взаимодействия нейтрино в веществе привести к изменению эффективной массы ν_e .

Стандартный массовый лагранжиан фермионов имеет вид

$$L_{M_0} = -\bar{\Psi} M_0 \Psi. \quad (3.21)$$

Во всех существующих методах и подходах в нерелятивистской и релятивистской квантовой теории [43], используемых для получения (вычисления) масс (или собственных энергий) частиц, предполагается, что левые и правые компоненты фермионов симметричным образом принимают участие во взаимодействиях. Тогда при учете вклада взаимодействия в массу фермионов M_{ef} массовый лагранжиан приобретает вид:

$$L_{M'} = -\bar{\Psi} M_0 \Psi - \bar{\Psi} M_{ef} \Psi = -\bar{\Psi} (M_0 + M_{ef}) \Psi = -\bar{\Psi} M' \Psi. \quad (3.22)$$

Определим теперь массовый лагранжиан фермиона (нейтрино) с учетом того, что правая компонента фермиона (нейтрино) не принимает участия в (слабых) взаимодействиях (2.8). Тогда массовый лагранжиан фермиона (нейтрино) имеет вид

$$L_M = -\bar{\Psi} M_0 \Psi - \bar{\Psi}_L M_{ef} \Psi_R - \bar{\Psi}_R M_{ef} \Psi_L. \quad (3.23)$$

Так как Ψ_R , $\bar{\Psi}_R$ не принимают участия в (слабых) взаимодействиях, то получаем

$$L_M = -\bar{\Psi} M_0 \Psi + 0; \quad M = M_0. \quad (3.24)$$

Итак, слабое взаимодействие не может давать вклад в массовый лагранжиан.

Естественно тогда задаться вопросом: что происходит с нейтрино при его прохождении в веществе? Из предыдущих обсуждений мы приходим к такому выводу. При прохождении через вещество левая компонента нейтрино, взаимодействующая с веществом через W -бозоны, получает дополнительную кинетическую энергию, которую мы не можем пересчитать в эффективную массу (как, например, это можно сделать для электрона в металле, где эффективная масса электрона может меняться), т.к. правая компонента нейтрино не взаимодействует с веществом через W -бозоны.

Более полное обсуждение вопроса, связанного с массой нейтрино, можно найти в [28,29].

Вернемся снова к уравнению Вольфенштейна и посмотрим, может ли это уравнение с содержащимся в нем гипотетическим (лево-правосимметричным) взаимодействием привести к существованию резонансного усиления осцилляций в веществе? Ответ, видимо, является однозначным.

Это уравнение в таком виде приводит к резонансному усилению осцилляций в веществе. Однако опять возникает вопрос, относящийся к самому уравнению: можно ли в это уравнение одновременно подставлять недиагональный массовый член $\frac{\hat{M}^2}{2p}$, ответственный за смешивание нейтрино, и член $\hat{W}$, связанный с гипотетическим лево-право-симметричным взаимодействием? Появление этого вопроса связано с тем, что в области действия гипотетического взаимодействия (действие которого совпадает со слабым взаимодействием), т.е. на расстояниях порядка $\frac{1}{m_W}$, не обнаружено заметного нарушения лептонных чисел. Тогда можно сделать вывод, что нарушение лептонных чисел происходит на более малых расстояниях, т.е. недиагональный массовый член $\hat{M}^2$ должен возникать на более малых расстояниях. Тогда встает вопрос: может ли этот массовый член, возникающий на более малых расстояниях, чувствовать массу, возникающую на расстояниях порядка $\frac{1}{m_W}$? Ответ на этот вопрос, видимо, является однозначным: массовый член $\hat{M}^2$ может чувствовать только те массы, которые возникают на расстояниях, сравнимых с расстоянием, при котором возникает сам этот массовый член, т.е. если мы хотим учесть вклад гипотетического взаимодействия в уравнении (3.1), в массе нейтрино мы должны учитывать только ту часть, которая возникает от этого гипотетического взаимодействия на расстояниях порядка расстояний, при которых возникает массовый член $\hat{M}^2$. Итак, мы пришли к выводу, что уравнение (3.1) в таком виде не учитывает то, что члены $\hat{M}^2$ и $\hat{W}$ возникают на разных расстояниях, и для правильной формулировки уравнения необходимо их совмещение.

В подтверждение отмеченной проблемы приведем пример, связанный со смешиванием кварков. В рассматриваемом примере аналогом гипотетического лево-право-симметричного взаимодействия в уравнении (3.1) является сильное взаимодействие, а аналогом массового члена $\hat{M}^2$, ответственного за смешивание нейтрино (видимо, можно предположить, что за этой матрицей стоит взаимодействие, нарушающее лептонные числа), является смешивание s - и d -кварков или слабое взаимодействие, ответственное за это смешивание. Рассмотрим слабый распад Λ^0 [37]. Матричный элемент этого распада пропорционален $\sin \theta_C$ (θ_C — угол Кабиббо [38]). Так как странный кварк в Λ^0 -гипероне является конституентным кварком (как известно [44], конституентные кварки имеют массы 300 МэВ) и $m_s^0 \equiv m_d^0$, то угол смешивания θ_C , который можно выразить через массы этих кварков

($\sin \theta_C \sim \sqrt{m_d^0/m_s^0}$ [45]), должен быть большим из-за вклада сильного взаимодействия массы s - и d -кварков в Λ^0 -гипероне $\left(\theta_C \cong \frac{\pi}{4} \right)$. На самом деле, так как слабое взаимодействие, смешивающее s - и d -кварки, действует на малых расстояниях и не чувствует массы, генерируемые сильным взаимодействием на характерных для него расстояниях, то угол смешивания θ_C должен определяться токовыми массами кварков [45] m_d, m_s , и в результате этот угол смешивания θ_C не увеличивается за счет вклада сильного взаимодействия.

В заключение отметим, что эффект усиления осцилляций, полученный из уравнения (3.1), является красивым эффектом, но, к сожалению, отмеченные выше два недостатка этого уравнения приводят к необходимости дальнейшего обоснования возможности существования этого эффекта.

Перейдем к обсуждению другого механизма [23] усиления осцилляций нейтрино в веществе.

2. Теория усиления осцилляций нейтрино разных масс в веществе.

Как указывалось во втором разделе, если массы различных типов нейтрино различаются, то возможны только виртуальные осцилляции нейтрино, и для того, чтобы осуществить реальные осцилляции нейтрино, необходимо их участие во взаимодействиях для перехода на соответствующие массовые поверхности по аналогии с переходом γ -кванта в ρ^0 -мезон в модели векторной доминантности.

Оценим вероятность перехода нейтрино одного типа ν_l в нейтрино другого типа $\nu_{l'}$ ($m_{\nu_l} \neq m_{\nu_{l'}}$) при его прохождении через вещество. Переход на массовую поверхность соответствующего нейтрино будет происходить при слабом взаимодействии нейтрино в веществе (по аналогии с γ - ρ^0 -переходом). Будем предполагать, что разность масс $\nu_l, \nu_{l'}$ нейтрино достаточно мала, и поэтому можно считать, что вероятность перехода на массовую поверхность $\nu_{l'}$ пропорциональна полному упругому сечению слабого взаимодействия нейтрино $\sigma^{\text{el}}(p)$ (для упрощения рассматриваем осцилляции двух нейтрино). Тогда длина упругого взаимодействия нейтрино в веществе с плотностью, зарядом и атомным номером ρ, z, A и импульсом p определяется выражением

$$\Lambda_0 \sim \frac{1}{\sigma^{\text{el}}(p) \rho (z/A)}. \quad (3.25)$$

Если разность масс нейтрино достаточно большая, то можно это учесть, используя технику модели векторной доминантности [39]. Как отмечалось

выше, мы считаем эту разность очень маленькой величиной, и поэтому используем формулу (3.25).

За упругое рассеяние нейтрино в веществе отвечает действительная часть амплитуды рассеяния вперед $\text{Re } f_i(p, 0)$, которая связана с коэффициентом рефракции выражением

$$p(n_i - 1) \equiv \frac{2\pi N_e f_i(p, 0)}{p}, \quad i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau. \quad (3.26)$$

Учитывая, что [19]

$$f_i(p, 0) \equiv \frac{\sqrt{2}}{2\pi} G_F p \left(\frac{M_i^2}{M_W^2} \right), \quad (3.27)$$

$$\text{если } i = \nu_e, \quad M_i^2 = M_W^2,$$

$$\text{если } i = \nu_\mu, \nu_\tau, \quad M_i^2 = M_{\tau^0}^2,$$

получаем

$$p(n_i - 1) \equiv \sqrt{2} G_F N_e \left(\frac{M_i^2}{M_H^2} \right).$$

Фаза амплитуды упругого рассеяния изменяется на 2π на длине

$$\Lambda_0 \equiv \frac{2\pi}{\sqrt{2} G_F \rho (z/A)} = 2\pi L^0. \quad (3.28)$$

(Поглощением или мнимой частью амплитуды рассеяния вперед можно пренебречь для нейтрино невысоких энергий).

Теперь, зная, что длина упругого взаимодействия нейтрино в веществе есть Λ_0 , нужно оценить вероятность осцилляций нейтрино при прохождении через вещество толщиной L . Эта вероятность равна

$$P(L) = 1 - e^{-2\pi L / \Lambda_0}. \quad (3.29)$$

Тогда, используя формулы (3.28), (3.29), можно определить вероятность осцилляций нейтрино $P_{\nu_l \nu_{l'}}(L)$ для различных толщин L . Для этого усредним по R выражение для вероятности осцилляции нейтрино [35]:

$$P_{\nu_l \nu_{l'}}(R) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{\nu_l \nu_{l'}} \left(1 - \cos 2\pi \frac{R}{L_0} \right), \quad (3.30)$$

где $L_0 = \frac{4\pi p}{\Delta m^2}$, в результате чего получаем

$$\bar{P}_{\nu_l \nu_{l'}}(R) = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{\nu_l \nu_{l'}}.$$

Тогда вероятность осцилляций $\rho_{\nu_l \nu_{l'}}(L)$ или угол смешивания β для случая $\Lambda_0 \geq L_0$ определяется выражениями:

а) для толщин L , сравнимых с Λ_0 ,

$$\rho_{\nu_l \nu_{l'}}(L) = \frac{1}{2} \sin^2 2\beta \equiv \bar{P}_{\nu_l \nu_{l'}} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{\nu_l \nu_{l'}}, \quad (3.31)$$

где $\beta \equiv \theta_{\nu_l \nu_{l'}}$;

б) для очень больших толщин L , $\frac{L}{\Lambda_0} > \frac{1}{\sin^2 2\theta_{\nu_l \nu_{l'}}} \gg 1$,

$$\rho_{\nu_l \nu_{l'}}(L) = \frac{1}{2} \sin^2 2\beta \equiv \frac{1}{2} \quad (3.32)$$

при $\beta \equiv \frac{\pi}{4}$;

в) для промежуточных толщин L

$$\frac{1}{2} \sin^2 2\theta_{\nu_l \nu_{l'}} \leq \rho_{\nu_l \nu_{l'}}(L) \leq \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

или

$$\theta_{\nu_l \nu_{l'}} \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}.$$

В случае $L_0 \geq \Lambda_0$ также выполняются (3.31)—(3.33), но тогда необходимо заменить Λ_0 на L_0 , и толщина вещества будет определяться в единицах L_0 . Кроме того, т.к. длина осцилляций L_0 в этом случае увеличивается с ростом импульса нейтрино (см. (3.30)), то число длин осцилляций $n = L/L_0$, укладывающихся на заданную толщину L , будет падать с ростом импульса нейтрино, и, соответственно, вероятность осцилляций нейтрино $\rho_{\nu_l \nu_{l'}}(L)$ будет уменьшаться с ростом импульса.

Рассмотрим более детально вопрос о вероятности осцилляций нейтрино для промежуточных значений числа взаимодействий n . Распределение вероятностей n кратного упругого взаимодействия нейтрино для толщин L со средним значением $\bar{n} = L/\Lambda_0$ при не очень больших $\bar{n}$ определяется формулой Пуассона:

$$f(n, \bar{n}) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (3.34)$$

которая при больших $\bar{n}$ переходит в гауссово распределение

$$f(n, \bar{n}, \bar{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}. \quad (3.35)$$

А вероятность перехода нейтрино ν_l в ν_l и $\nu_{l'}$ при n -кратном упругом взаимодействии нейтрино определяется рекуррентными соотношениями, $\theta \equiv \theta_{\nu_l \nu_{l'}}$.

$$\begin{aligned} \rho_{\nu_l \nu_l}^{(1)} &= 1 - (1 - e^{-B}) \frac{1}{2} \sin^2 2\theta, \\ \rho_{\nu_l \nu_{l'}}^{(1)} &= (1 - e^{-B}) \frac{1}{2} \sin^2 2\theta, \\ &\vdots \\ \rho_{\nu_l \nu_{l'}}^{(n)} &= \rho_{\nu_l \nu_{l'}}^{(n-1)} (1 - (1 - e^{-B}) \frac{1}{2} \sin^2 2\theta) + \rho_{\nu_l \nu_{l'}}^{(n-1)} (1 - e^{-B}) \frac{1}{2} \sin^2 2\theta, \\ \rho_{\nu_l \nu_{l'}}^{(n)} &= \rho_{\nu_l \nu_{l'}}^{(n-1)} (1 - (1 - e^{-B}) \frac{1}{2} \sin^2 2\theta) + \rho_{\nu_l \nu_{l'}}^{(n-1)} (1 - e^{-B}) \frac{1}{2} \sin^2 2\theta. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Если положить $B = 2\pi$, то членом e^{-B} в (3.36) можно пренебречь. Для средних оценок можно воспользоваться тем, что

$$\bar{n} = \int f(n, \bar{n}, \bar{n}) dn = \bar{n}. \quad (3.37)$$

Тогда средняя вероятность осцилляций нейтрино равна

$$\begin{aligned} \rho(\nu_l \rightarrow \nu_l) &\equiv \rho_{\nu_l \nu_l}^{(\bar{n})}, \\ \rho(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) &\equiv \rho_{\nu_l \nu_{l'}}^{(\bar{n})}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из (3.36) и (3.38), если $\sin^2 2\theta$ является достаточно малой величиной ($\sin^2 2\theta \ll 1$), можно получить (в (3.36) сохранены члены первого порядка по $\sin^2 2\theta$):

$$\begin{aligned} \rho(\nu_e \rightarrow \nu_e) &= 1 - \bar{n} \frac{1}{2} \sin^2 2\theta, \\ \rho(\nu_l \rightarrow \nu_{\mu}) &= \bar{n} \frac{1}{2} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.39)$$

При получении выражений (3.31)—(3.33) использовалось приближение (которое хорошо работает при высоких энергиях) $L^0 = L_e^0 \cong L_\mu^0 \cong L_\tau^0$. На самом деле длины взаимодействия ν_e и ν_μ , ν_τ при низких энергиях различаются, так как рассеяние ν_e происходит через нейтральный и заряженный токи (2.8), (2.11), в то время как рассеяние ν_μ , ν_τ проходит через нейтральный ток. Отношение $L_\mu^0(L_\tau^0)$ к L_e^0 можно найти из (2.8) и (2.11) [23]:

$$L_\mu^0 = L_\tau^0; \quad \delta = \frac{L_\mu^0}{L_e^0} \cong 2,49. \quad (3.40)$$

Тогда отношение средних чисел длин взаимодействия ν_e , ν_μ , ν_τ равно

$$\bar{n}_e / \bar{n}_\mu = \bar{n}_e / \bar{n}_\tau \cong 2,49. \quad (3.41)$$

Если учесть (3.40) (при низких энергиях), то картина усиления осцилляций нейтрино в веществе будет существенно зависеть от вакуумного угла смешивания θ . Если

$$\sin^2 2\theta \geq \frac{1}{\delta}, \quad (3.42)$$

то происходит преимущественный переход в ν_e нейтрино. Это означает, что при прохождении ν_e , ν_μ , ν_τ нейтрино через вещество происходит преимущественный переход к ν_e нейтрино, а ν_e нейтрино преимущественно будет оставаться в том же состоянии (этот эффект усиления осцилляций нейтрино сильно влияет на состав нейтрино при взрыве сверхновой).

В случае, когда

$$\sin^2 2\theta \ll 1, \quad (3.42)$$

происходит усиление осцилляций нейтрино в веществе (т.е. переход ν_e в ν_μ , ν_τ), но при этом нужно учесть, что среднее число длин взаимодействия ν_μ , ν_τ меньше в δ раз, и, соответственно, в выражении (3.39) $\bar{n}$ заменяется на $\bar{n}_\mu$, $\bar{n}_\tau$.

В выражении (3.39) можно восстановить временную зависимость, по которой произведено усреднение в (3.30), тогда

$$\rho(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \bar{n} \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{2\pi R}{L_0} \right). \quad (3.43)$$

В заключение отметим, что рассмотренные механизмы усиления осцилляций нейтрино в веществе приводят только к изменению угла

смешивания нейтрино, и для их реализации требуется существование вакуумного угла смешивания нейтрино.

4. ВОЗМОЖНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ДЕФИЦИТА СОЛНЕЧНЫХ НЕЙТРИНО

Прежде чем приступить к обсуждению возможных способов решения проблемы дефицита солнечных нейтрино, приведем необходимые для этого материалы: элементы ССМ и расчетные результаты по этой модели; краткое описание экспериментальных установок по изучению потоков нейтрино от Солнца вместе с измеренными на них потоками нейтрино.

1. Элементы ССМ. Хорошо известно [16], что светимость Солнца (звезд) обеспечивается ядерными процессами, происходящими внутри звезд. В простейшем виде уравнение баланса гравитационных сил и сил давления, возникающих за счет энерговыделения, имеет вид

$$\frac{dP(r)}{dr} = - \frac{GM(r) \rho(r)}{r^2}, \quad (4.1)$$

где r — расстояние от центра, $P(r)$, $\rho(r)$, $T(r)$ и $M(r)$ — давление, плотность, температура и масса соответственно. Величины $M(r)$ и $\rho(r)$ связаны соотношением

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (4.2)$$

Поток энергии $L(r)$ (при заданном r) в единицу времени через сферу радиуса r выражается формулой

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{ac}{3k \rho(r)} \frac{dT^4(r)}{dr},$$

где k — коэффициент непрозрачности, который зависит от ядерного состава звезды, a — постоянная Стефана — Больцмана, c — скорость света. Полная генерируемая энергия (без учета энтропийного члена, которым можно пренебречь)

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi \rho(r) \epsilon. \quad (4.3)$$

И, наконец, наблюдаемая полная светимость

$$L_{\odot} = \int_0^{R_{\odot}} \frac{dL(r)}{dr} dr. \quad (4.4)$$

В (4.3) и (4.4) ε — энергия, производимая в единицу времени и массы

$$\varepsilon = \sum_{i,j} (Q - \langle q_v \rangle)_{ij} n_i(r) n_j(r) \langle \sigma v \rangle_{ij} \frac{1}{(1 + \delta_{ij})}, \quad (4.5)$$

где Q — энергия от реакции ядер i и j , $\langle q_v \rangle$ — средняя энергия, уносимая нейтрино, $n_i(r)$, $n_j(r)$ — плотность содержания ядер i , j , σ — полное сечение, v — относительная скорость между i и j , δ_{ij} — символ Кронекера, $\langle \sigma v \rangle$ — усреднение по максвелл-больцмановскому распределению.

Величину $\sigma(E)$ можно записать в виде

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{(-2\pi\eta)}, \quad (4.6)$$

$$\eta = Z_i Z_j \left(\frac{e^2}{\hbar v} \right).$$

Величина $S(E)$ слабо зависит от энергии, поэтому

$$\langle \sigma v \rangle = \left[\frac{8}{\pi \mu (KT)^3} \right]^{1/2} f_0 \int_0^\infty dE S(E) \exp \left(-2\pi\eta - \frac{E}{KT} \right), \quad (4.7)$$

где μ — приведенная масса ядер i и j , f_0 — величина, учитывающая эффект экранирования.

При решении уравнения (4.4) необходимо учесть начальную температуру Солнца, которая обычно считается равной $\sim 10^7$ К или 1 кэВ.

В табл.2 и 3 приведены два цикла реакций pp и CNO, являющихся основными источниками потока энергии и нейтрино от Солнца.

Кроме того, для решения уравнения (4.4) необходима детальная информация о коэффициенте непрозрачности k и химическом составе Солнца. Тогда, зная $L_\odot$, $M_\odot$ и $R_\odot$, уже можно численно решить уравнение (4.4) и получить все выходные параметры Солнца. На рис.2 приведен энергетический спектр нейтрино [15] от различных источников. Также были оценены [15] температурные зависимости потоков нейтрино, которые оказались пропорциональны T^{18} , T^8 и $T^{-1,2}$ для ^8B , ^7Be и pp нейтрино соответственно. В табл.4 приведены вычисленные потоки солнечных нейтрино от некоторых источников, а также оценка их погрешности (3σ).

2. Краткое описание экспериментальных установок по измерению потока нейтрино от Солнца. Приводятся измеренные на этих установках и рассчитанные по ССМ потоки нейтрино.

^{37}Cl — ^{37}Ag эксперимент (Хоумстейк, США). С 70-х годов в Брукхейвенской национальной лаборатории [12,46] проводятся измерения потока

Таблица 2. *pp*-цикл на Солнце

Реакция	Доля, %	Энергия ν , МэВ
$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ \nu_e$	100	$\leq 0,420$
$p + e^- + p \rightarrow {}^2\text{H} + \nu_e$	0,4	1,442
${}^2\text{H} + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	100	
${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow \alpha + 2p$	85	
${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$ или	15	
${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	15 (90%) (10%)	0,861 0,383
${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2\alpha$	15	
${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	0,02	
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$	0,02	≤ 15
${}^7\text{Be}^* \rightarrow 2\alpha$		

Таблица 3. Основные реакции цикла CNO на Солнце

Реакция	Энергия ν , МэВ
${}^{12}\text{C} + p \rightarrow {}^{13}\text{N} + \gamma$	$\leq 1,199$
${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^- + \bar{\nu}_e$	
${}^{13}\text{C} + p \rightarrow {}^{14}\text{N} + \gamma$	
${}^{14}\text{N} + p \rightarrow {}^{15}\text{O} + \gamma$	$< 1,732$
${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ \nu_e$	
${}^{15}\text{N} + p \rightarrow {}^{12}\text{C} + \alpha$	

Таблица 4. Вычисленные потоки солнечных нейтрино
(ошибки соответствуют 3σ)

Источники	Поток, $10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$
<i>pp</i>	6,0 ($1 \pm 0,2$)
<i>pep</i>	0,014 ($1 \pm 0,05$)
${}^7\text{Be}$	0,47 ($1 \pm 0,15$)
${}^8\text{B}$	$5,8 \cdot 10^{-6}$ ($1 \pm 0,37$)
${}^{13}\text{N}$	0,06 ($1 \pm 0,50$)
${}^{13}\text{O}$	0,05 ($1 \pm 0,58$)

Таблица 5. Скорости реакции (в SNU) для Cl-детектора, рассчитанные по ССМ, и среднее число атомов (в SNU), зарегистрированных в $^{37}\text{Cl} - ^{37}\text{Ar}$ эксперименте (Хоумстейк)

Источники	<i>реп</i>	^7Be	^8B	^{15}O	Итого
Потоки (расчет)	0,23	1,7	6,1	0,3	$\cong 7,9 \pm 2,6$
Потоки (эксперимент)	—	—	—	—	2,55 ($\pm 10\%$)

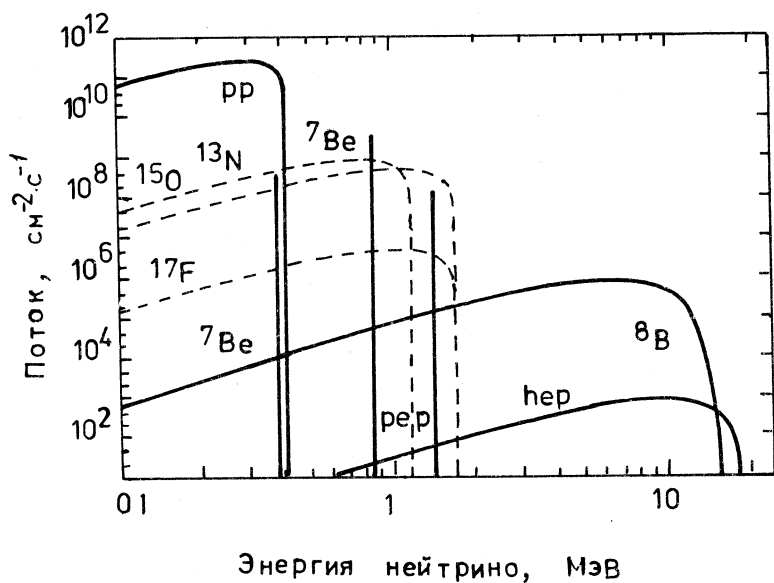


Рис. 2. Спектр солнечных нейтрино, рассчитанный по стандартной модели. Ордината — плотность потока солнечных нейтрино у поверхности Земли. Плотность потока моноэнергетических нейтрино (*реп*, ^7Be) дана в единицах $\text{см}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$, а нейтрино с непрерывным спектром — в единицах $\text{см}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{МэВ}^{-1}$

солнечных нейтрино на детекторе, который представляет собой большой резервуар, заполненный $3,8 \cdot 10^5$ л перхлорэтилена (C_2Cl_4) ($2,2 \cdot 10^{30}$ атомов), расположенный на глубине 1400 м (4000 м водного эквивалента). Изотоп ^{37}Ar , образующийся вследствие взаимодействия нейтрино с ядрами ^{37}Cl , периодически извлекался для определения числа его атомов. Период полураспада ^{37}Ar составляет $T_{1/2} \cong 35$ суток. Порог регистрации нейтрино $E_{thres} = 0,814$ МэВ. В табл.5 приводится среднее число образовавшихся атомов ^{37}Ar в SNU вместе с расчетами по CCM (1 SNU — 1 захват в секунду на 10^{36} атомов мишени). Как видно из табл.5, расхождение между расчетом и экспериментом составляет более трех единиц.

Камиоканде (Япония). Детектор Kamiokande — это цилиндр высотой 16 м и диаметром 19 м, заполненный 3000 т воды (H_2O) [17], который расположен на глубине 2700 м водного эквивалента (полезный объем детектора 680 т). Порог регистрации 7,5 МэВ. Нейтрино регистрируются в процессе рассеяния нейтрино на электроне $\nu + e^- \rightarrow e^- + \nu$.

Измеренный поток солнечных нейтрино относительно расчетных данных по CCM и другим моделям:

Данные/CCM	$0,5 \pm 0,04 \pm 0,06$	Bahcall [15]
—	$0,66 \pm 0,05 \pm 0,08$	Turch-Chieze [47]
—	$0,80 \pm 0,06$	Dar-Shaviv [48].

$^{71}Ga - ^{71}Ge$ эксперимент в Гран-Сассо (Италия). $^{71}Ga - ^{71}Ge$ детектор GALLEX [21] в Гран-Сассо — это танк, заполненный 29,5 т ^{71}Ga (в растворе гидрохлорида галлия $GaCl_3$). Порог регистрации нейтрино $E_{thres} = 0,233$ МэВ. Атомы ^{71}Ge , образовавшиеся в танке, периодически извлекаются (период полураспада $T_{1/2} = 11,43$ сут) и подсчитываются.

$^{71}Ga - ^{71}Ge$ эксперимент на Баксане — SAGE (Россия). $^{71}Ga - ^{71}Ge$ детектор на Баксане [22] содержит 55 т металлического галлия и состоит из 7 реакторов. Так же, как и в эксперименте GALLEX, образовавшиеся атомы ^{71}Ge периодически извлекаются из реакторов и подсчитывается их число.

В табл.6 приводятся полученные в этих экспериментах данные по потоку нейтрино вместе с расчетами по CCM. Из этой таблицы можно сделать вывод о наличии определенного дефицита солнечных нейтрино.

Super-Kamiokande (Япония). Детектор Super-Kamiokande [25] будет содержать 50000 т H_2O (полезный объем 22000 т (m^3)). Порог регистрации $E_{thres} = 5-7$ МэВ. Нейтрино наблюдаются в реакции рассеяния нейтрино на

Таблица 6. Измеренные в экспериментах GALLEX и SAGE средние потоки нейтрино и расчетные по CCM потоки нейтрино (в SNU)

Источники	Расчет по CCM	GALLEX	SAGE
$pp + pep$	74		
${}^7\text{Be}$	36		
${}^8\text{B}$	14		
${}^{15}\text{N} + {}^{15}\text{O}$	8		
Итого	132	79± 10 стат. ± 6 сист.	73± 18 стат. ± 5 сист.

электроне. На этом детекторе будет определяться энергетический спектр нейтрино. Запуск этой установки планируется в конце 1996 г.

SNO (Канада). Детектор SNO [26], содержащий 1000 т тяжелой воды (D_2O), размещен в шахте Садбери на глубине 2073 м в.э. (нейтринная обсерватория в Садбери). Начало работы детектора планируется в 1996 г.

Нейтрино наблюдаются в реакциях:

$$1) \nu_X + e^- \rightarrow \nu_X + e^- \quad E_{\text{thres}} \cong 6 \text{ МэВ}$$

$$2) \nu_e + d \rightarrow p + p + e^- \quad E_{\text{thres}} \cong 1,45 \text{ МэВ}$$

$$3) \nu_X + d \rightarrow p + n + \nu_X \quad E_{\text{thres}} \cong 2,23 \text{ МэВ}$$

$$X = e, \mu, \tau.$$

Реакция 1 идет через заряженный ток, если $X = e$, и через нейтральный, если $X = \mu, \tau$; реакция 2 идет только через нейтральный ток. Сравнение результатов, полученных в этих двух реакциях (или других пар), позволит модельно-независимым путем проверить существование осцилляций нейтрино.

Borexino (Гран-Сассо, Италия). В новом варианте этого детектора [49] используется $\cong 300$ т жидкого сцинтиллятора, находящегося в сферическом сосуде, который размещен внутри емкости, заполненной сверхчистой водой (H_2O). Полезный объем детектора будет содержать $\cong 100$ т жидкого сцинтиллятора. Нейтрино наблюдаются в реакциях упругого рассеяния и возбуждения ядер сцинтиллятора. Энергетический порог регистрации нейтрино $E_{\text{thres}} > 0,4 \text{ МэВ}$ (при чистоте 10^{-16} г примеси урана или тория на 1 г детектора). Запуск установки планируется в 1996—1997 гг.

3. Возможные способы решения проблемы дефицита солнечных нейтрино. Наиболее традиционными способами, предлагаемыми для решения проблемы солнечных нейтрино, являются:

- а) вакуумные осцилляции нейтрино,
- б) осцилляции нейтрино в веществе,
- в) переворот спина нейтрино в магнитном поле Солнца,
- г) модификация ССМ,
- д) распад нейтрино.

Кратко обсудим указанные способы решения проблемы солнечных нейтрино.

Вакуумные осцилляции нейтрино. Приведенные выше экспериментальные результаты, полученные в Хоумстейке, Камиоканде, Гран-Сассо (GALLEX) и Баксане (SAGE), показывают, что относительные потоки нейтрино ($P_{\text{exp}}/P_{\text{theor}}$) зависят от порогов регистрации нейтрино, т.е. от энергии нейтрино. Поэтому, видимо, представляет большие трудности объяснить эти результаты вакуумными осцилляциями нейтрино.

Осцилляции нейтрино в веществе (толще Солнца). В настоящее время существуют многочисленные публикации, в которых эффект МСВ используется для объяснения дефицита солнечных нейтрино.

Приведенный в третьем разделе критический анализ уравнения Вольфенштейна показывает, что этот эффект не был теоретически обоснован. Поэтому формулу, используемую для описания дефицита солнечных нейтрино (3.19), мы будем рассматривать как параметризационную.

С использованием этой параметризационной формулы осцилляций нейтрино для одновременной обработки результатов экспериментов $^{37}\text{Cl} - ^{37}\text{Ar}$, Камиоканде и $^{71}\text{Ga} - ^{71}\text{Ge}$ (GALLEX) в сравнении с расчетными по ССМ потоками нейтрино в работе [50] были получены следующие значения для Δm^2 и $\sin^2 2\theta$:

$$\text{а) } \Delta m^2 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}^2, \quad \sin^2 2\theta = 7 \cdot 10^{-3},$$

$$\text{б) } \Delta m^2 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}^2, \quad \sin^2 2\theta = 0,6.$$

Используя механизм усиления осцилляций нейтрино разных масс в веществе (разд.3, п.2), можно провести оценку вакуумного угла смешивания. Для этого определим среднее число упругих взаимодействий электронных нейтрино, родившихся внутри Солнца, по формуле (3.28):

$$\bar{n}_{\nu_e} \cong 40. \quad (4.8)$$

Тогда $\bar{n}_{\nu_\mu}, \bar{n}_{\nu_\tau}$ можно получить, используя выражение (3.41):

$$\bar{n}_{\nu_{\mu}} \cong \bar{n}_{\nu_{\tau}} \cong 16. \quad (4.9)$$

Для вероятности перехода $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu}, \nu_{\tau}$ из (3.39) имеем

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_{\mu}) \cong \bar{n}_{\nu_{\mu}} \frac{1}{2} \sin^2 2\theta. \quad (4.10)$$

Если предположить, что дефицит солнечных нейтрино связан с осцилляциями нейтрино, то, используя данные эксперимента GALLEX [21] и предсказания ССМ [15] по потоку нейтрино ($P_{\text{exp}}/P_{\text{theor}} \cong 0,7$) и формулу (4.10), получим

$$\sin^2 2\theta \cong 3,75 \cdot 10^{-2}. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) получено в предположении, что $\sin^2 2\theta \ll 1$. По поводу зависимости n (или $\bar{n}$) от импульса нейтрино, когда $L_0 > \Lambda_0$, см. формулу (3.30) и с.82. обзора.

Переверот спина нейтрино в магнитном поле Солнца. Результаты, полученные в эксперименте $^{37}\text{Cl} - ^{37}\text{Ar}$ (Хоумстейк), указывают на существование антикорреляции потоков нейтрино с солнечной активностью [46]. Возможным объяснением этого наблюдения может быть наличие магнитного момента у нейтрино [51], который должен быть достаточно большим: $\mu_{\nu} \geq 10^{-11} \mu_B$ (μ_B — магнетон Бора). Тогда при прохождении нейтрино через магнитные поля в верхних слоях Солнца спин нейтрино может перевернуться и в результате нейтрино станет стерильным. Однако экспериментальные результаты на Камиоканде [17] не подтверждают существование указанной антикорреляции. С другой стороны, теоретически трудно обосновать возникновение такого большого магнитного момента у нейтрино [52]. В принципе, видимо, необходимо учитывать возможность вклада такого механизма в поток активных нейтрино.

Модификация ССМ. В общем, нельзя исключить, что ССМ [15] требует определенной поправки, и тогда расчеты потоков нейтрино по ССМ могут измениться. Это, в свою очередь, повлечет изменение интерпретации экспериментальных результатов [48,53].

Распад нейтрино. Распад нейтрино может существовать только в теории с реальными вакуумными осцилляциями нейтрино (критику старой теории осцилляций нейтрино см. в разд.2, п.3). Распад нейтрино может происходить при прохождении нейтрино через Солнце в рассмотренном выше механизме усиления осцилляций нейтрино разных масс в веществе, т.е. когда ν_e переходят в ν_{μ}, ν_{τ} . Тогда, если при распаде ν_{μ}, ν_{τ} в ν_e, ν_e имеют малую энергию, из-за чего они уходят за порог регистрации нейтрино на существующих экспериментальных установках, то может наблюдаться дефицит солнечных нейтрино. Однако из-за того, что нейтрино имеют

большие времена жизни [54,35], видимо, не представляется возможным с помощью такого механизма объяснить заметное уменьшение потока солнечных нейтрино.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Проведен анализ старой теории осцилляций нейтрино, построенной по аналогии с K^0 -, $\bar{K}^0$ -осцилляциями. В этой теории осцилляции нейтрино являются реальными и в случае, когда нейтрино имеют разные массы. Это является следствием предположения, что нейтрино рождаются с нарушенными лептонными числами (т.е. в смешанном состоянии). Показано, что такая возможность может реализоваться с малой вероятностью, и в этом случае рождаются не физические нейтрино (ν_e , ν_μ , ν_τ), а ν_1 , ν_2 , ν_3 .

Показано, что когда нейтрино имеют разные массы, то должны быть виртуальные осцилляции нейтрино (см. разд.2). Этот вывод основан на том, что нейтрино (ν_e , ν_μ , ν_τ) рождаются в слабых взаимодействиях и находятся на своих массовых поверхностях, и если далее существует (действует) взаимодействие, нарушающее лептонные числа, т.е. имеют место осцилляции нейтрино, то это происходит без схода с массовой поверхности (т.е. осцилляции будут виртуальными) по аналогии с γ - ρ^0 -переходами в модели векторной доминантности.

В рамках этого подхода построена теория усиления осцилляций нейтрино в веществе. Механизм этого усиления следующий: в результате слабого взаимодействия (виртуально) осциллирующих нейтрино с веществом происходит переход на массовую поверхность соответствующих нейтрино (например, ν_e переходит в ν_μ). Если толщина вещества (Солнца) достаточно большая (см. (3.39), (4.10)), то нейтрино (ν_μ , ν_τ) накапливаются, и это может происходить (если толщина вещества очень большая) вплоть до установления равновесия между различными типами нейтрино.

2. Показано, что уравнение Вольфенштейна, из которого получен эффект резонансного усиления осцилляций нейтрино (МСВ-эффект), не имеет отношения к слабому взаимодействию, которое является левым взаимодействием. В этом уравнении содержится вклад гипотетического лево-право-симметричного взаимодействия, т.е. МСВ-эффект возникает от этого гипотетического взаимодействия. Кроме того, при выводе уравнения Вольфенштейна на учитывалось также то, что можно использовать только часть эффективной массы, генерируемой этим гипотетическим взаимодействием, возникающей на расстояниях, где происходит нарушение лептонных чисел (см. разд.3, п.1), а не всю эффективную массу.

3. Из полной энергии, выделяемой на Солнце, только несколько процентов (2—4%) энергии уносится нейтрино (точность, с которой определяется поток тепловой энергии Солнца, ~1%). Если учесть очень сильную температурную зависимость (T^{18}) потоков высокоэнергичных солнечных нейтрино и неопределенность, которая может содержаться в ССМ, то, видимо, трудно сделать однозначные выводы из сравнения этих расчетов с измеренными потоками высокоэнергичных нейтрино.

4. Все имеющиеся указания на возможность существования осцилляций нейтрино основываются на сравнении измеренных потоков нейтрино с расчетами по ССМ. Поэтому представляет принципиальный интерес дальнейшее уточнение и подтверждение ССМ.

5. Видимо, для доказательства существования осцилляций нейтрино требуется прямой эксперимент по его обнаружению. Поэтому представляет принципиальный интерес эксперимент SNO (Канада), где возможна (безмодельная) прямая проверка существования осцилляций нейтрино.

6. Как уже отмечалось, аналогия со смешиванием кварков дает надежду на возможность существования осцилляций нейтрино. Обнаружение осцилляций нейтрино послужило бы толчком к выбору дальнейшего пути развития физики высоких энергий и элементарных частиц за рамками стандартной модели.

Я благодарен профессорам Р.Г.Позе и А.А.Тяпкину за постоянную поддержку и профессору А.Н.Сисацяну за внимание и обсуждения данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паули В. — Письмо Физическому обществу Тюбингена.
Воспроизведено в статье: Brown L.M. — *Physics Today*, 1930, vol.31, No.9, p.23.
2. Fermi E. — *Z. Physik*, 1934, vol.88, p.161.
3. Reines F., Cowan C.L. — *Phys. Rev.*, 1953, vol.90, p.492.
4. Danby G. et al. — *Phys. Rev. Lett.*, 1962, vol.9, p.36.
5. Perl M.L. et al. — *Phys. Rev. Lett.*, 1975, vol.35, p.1489.
6. Glashow S.L. — *Nucl. Phys.*, 1961, vol.22, p.579;
Weinberg S. — *Phys. Rev. Lett.*, 1967, vol.19, p.1264;
Salam A. — In: *Proc. of the 8-th Nobel Symp.* (ed. by N.Svarthholm). Almqvist and Wiksell, Stockholm; 1968, p.367.
7. Понтекорво Б.М. — *ЖЭТФ*, 1957, т.33, с.549; *ЖЭТФ*, 1958, т.34, с.247.
8. Maki Z. et al. — *Prog. Theor. Phys.*, 1962, vol.28, p.870.
9. Понтекорво Б.М. — *ЖЭТФ*, 1967, т.53, с.1717.
10. Belotti E. — In: *Proc. 27-th Intern. Conf. on High Energy Physics, Glasgow, July 1994*.
11. Бештовев Х.М. — *ИЯИ АН СССР*, П-577, М., 1988.
12. Davis R. et al. — *Phys. Rev. Lett.*, 1968, vol.20, p.1205.

13. **Bahcall J. et al.** — Phys. Lett. B, 1968, vol.26, p.1;
Bahcall J., Bahcall N., Shaviv G. — Phys. Rev. Lett., 1968, vol.20, p.1209.
14. **Gribov V., Pontecorvo B.M.** — Phys. Lett. B, 1969, vol.28, p.493.
15. **Bahcall J.N.** — 1989, Neutrino Astrophysics (Cambridge, Cambridge Univ. Press).
16. **Bethe H., Peierls C.I.** — Nature, 1934, vol.133, p.532;
Burbidge E.M. et al. — Rev. Mod. Phys., 1957, vol.29, p.547;
Koshiha M. — Phys. Rep., 1992, vol.220, p.231.
17. **Hirata K.S. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1989, vol.63, p.16.
18. **Mikheyev S.P., Smirnov A.Ju.** — Nuovo Cim., 1986, vol.9, p.17.
19. **Wolfenstein L.** — Phys. Rev. D, 1978, vol.17, p.2369.
20. **Beshtoev Kh. M.** — JINR, E2-91-183, Dubna, 1991; Proc. of III Int. Symp. on Weak and Electromag. Int. in Nucl. World Scient., Singapore, p.781, 1992.
21. **Anselmann P. et al.** — Phys. Lett. B, 1992, vol.285, p.376; 1992, vol.285, p.391.
22. **Abdurashitov J.N. et al.** — Phys. Lett. B, 1994, vol.328, p.234.
23. **Beshtoev Kh. M.** — JINR, E2-93-297, Dubna, 1993; JINR, E2-94-46, Dubna, 1994; IL Nuovo Cim., 1995, vol.108A, p.175; Hadronic Journal, 1995, vol.18, No.2, p.169; JINR Rapid Comm. No.3(71)-95, p.35; Proc. of 24-th Intern. Conf. on Cosmic Rays, Rome, 1995, vol.4, p.1237.
24. **Suzuki A.** — In: Proc. of V-th Intern. Workshop on Neutrino Telescopes (ed. by H.B.Ceolin) Venezia, 1993, p.221.
25. **Totsuka Y.** — In: Proc. Intern. Symp. on Underground Exp. (ed. K.Nakamura), Tokyo, 1990, p.129.
26. **Aardsma G. et al.** — Phys. Lett. B, 1987, vol.194, p.321.
27. **Review of Part. Prop.** — Phys. Rev. D, 1994, vol.50, No.3.
28. **Бештоев Х.М.** — ОИЯИ, P2-93-44, Дубна, 1993.
29. **Beshtoev Kh.M.** — JINR, E2-93-167, Dubna, 1993.
30. **Higgs P.W.** — Phys. Lett., 1964, vol.12, p.132; Phys. Rev., 1966, vol.145, p.1156;
Englert F., Brout R. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.13, p.321;
Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W.B. — Phys. Rev. Lett., 1964, vol.13, p.585.
31. **Kobayashi M., Maskawa K.** — Prog. Theor. Phys., 1973, vol.49, p.652.
32. **Langacker P.** — Phys. Rep., 1981, vol.72, No.4.
33. **Beshtoev Kh.M.** — JINR, E2-94-293, Dubna, 1994.
34. **Beshtoev Kh.M.** — JINR, E2-92-195, Dubna, 1992.
35. **Bilenky S.M., Pontecorvo B.M.** — Phys. Rep., 1978, vol.41, p.226.
Bilenky S.M., Petcov S.T. — Rev. of Mod. Phys., 1987, vol.99, p.671;
Боум Ф., Фогель П. — Физика массивных нейтрино. М.: Мир, 1990.
36. **Beshtoev Kh.M.** — JINR, E2-92-318, Dubna, 1992.
37. **Окунь Л.Б.** — Лептоны и кварки. М.: Наука, 1990.
38. **Cabibbo N.** — Phys. Rev. Lett., 1963, vol.10, p.531.
39. **Sakurai J.J.** — Currents and Mesons. Univ. of Chicago Press, 1967.
40. **Бештоев Х.М.** — ИЯИ АН СССР, П-217, М., 1981.
41. **Mikheyev S.P., Smirnov A.Yu.** In: Proc. in Part and Nucl. Physics, Pergamon Press, 1989, vol.23, p.41.
42. **Михеев С.П., Смирнов А.Ю.** — ЯФ, 1985, т.42, с.1491.
43. **Heitler W.** — The Quantum Theory of Radiation. London, 1936;

- Bethe H.A., Salpiter E.E. — Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Systems. Hand. der Physik, 1957, Bd. 35, Berlin;
- Dirac P.A.M. — The Principles of Quantum Mechanics. Oxford, 1947;
- Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. — Nuovo Cim., 1963, vol.20, p.380;
- Kadyshevsky V.G. — Nucl. Phys. B, 1968, vol.6, p.125;
- Kadyshevsky V.G., Mateev M.D. — Nuovo Cim. A, 1968, vol.55, p.275;
- Nambu Y., Jona-Lasinio G. — Phys. Rev., 1961, vol.122, p.345.
44. Cheng T.-P., Li L.-F. — Gauge Theory of Elementary Particle Physics. Oxford Univ. Press, 1984.
45. Cheng T.P., Li Hing-Fong — Phys. Rev. Lett., 1985, vol.55, p.224.
46. Davis B.R. — In: Proc. 21-st Intern. Cosmic Ray Conf. (ed. R.J. Protheroe), 1990, vol.12 (Univ. of Adelaide Press, Adelaide, Australia), p.143;
- Зацепин Г.Т. и др. — ЯФ, 1981, т.33, с.200.
47. Turch-Cheize S., Lopes I. — Astrophys. J., 1993, vol.408, p.347.
48. Dar A., Shaviv G. — In: Proc. of Int. Conf. Neutrino-94.
49. Raghavan R.S. et al. — In: Proc. 25-th Int. Conf. High Energy Phys. (ed. K.K.Phua, K.Yamaguchi) South Asia Phys. Soc. 1992, p.482.
50. Anselmann P. et al. — Phys. Lett. B, 1992, vol.285, p.391.
51. Волошин М.В., Высоцкий М.И., Окунь Л.Б. — ЯФ, 1986, т.44, с. 677; ЖЭТФ, 1986, т.91, с.754.
52. Ораевский В.Н., Семикоз В.Б., Смородинский Я.А. — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.312.
53. De Rujula A., Glashow S.L. — CERN-TH 6608/92, 1992.
54. Петков С.Т. — ЯФ, 1977, т.25, с.641.

РЕЗОНАНСЫ В СУБАТОМНОЙ ФИЗИКЕ И ПРИНЦИПЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

Ф.А.Гареев, Г.С.Казача

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Ю.Л.Ратис

Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара

В обзоре систематизируются и детально обсуждаются с точки зрения методов подобия, размерности и автомодельности экспериментальные данные по адронным резонансам, дибарионным резонансам, дармштадтскому эффекту и АВС-эффекту. Проводится физическая аналогия между α -распадом и распадом резонансов в субатомной физике. На основе этой аналогии воспроизведены ширины для большой группы адронных резонансов. Излагается дифракционный подход к анализу резонансных явлений в области промежуточных энергий. Обсуждаются пути дальнейшего развития подобных исследований.

In the review we systematize and discuss in detail the experimental data on the hadronic resonances, dibaryonic resonances, Darmstadt's effect and ABC-effect from the point of view of the methods of similitude, dimension and automodelity. We stress the physical analogy between α -decay in nuclear physics and decay of resonances physics. On the base of this analogy we reproduce the widths for the number of hadronic resonances. The diffractive approach for the analysis of the resonance phenomena in the intermediate energy physics is described. Perspectives and trends of the further investigations are discussed as well.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения теории адронных резонансов вот уже несколько десятилетий остается одной из наиболее актуальных в современной физике элементарных частиц. Дело в том, что, несмотря на впечатляющие успехи квантовой хромодинамики, расчет из первых принципов масс, ширин и магнитных моментов адронных резонансов по-прежнему невозможен, поскольку квантово-полевая теория возмущений оказывается малоприменимой для этих целей в интересующей нас области промежуточных энергий. Наиболее распространенные на сегодняшний день практические методы анализа силь-

ных процессов [1—9] (эффективные полевые подходы [3—6], глауберовское приближение [7] и т.п.) являются модельными в смысле присутствия в расчетных формулах большого числа феноменологических параметров. Модельность физики промежуточных энергий в значительной степени связана с отсутствием малых параметров типа безразмерной константы связи [5]. Характерные для физики адронных резонансов передачи импульса q также, вообще говоря, не малы по сравнению с импульсом налетающих частиц P . В области промежуточных энергий не выполняется условие длинноволнового приближения $kR \ll 1$, где k — волновой вектор падающей частицы, R — характерный размер мишени.

Однако не только отсутствие подходящих малых параметров феноменологизирует теории сильных процессов. Хорошо известно, что даже для ядерной физики низких энергий невозможно построение теории из первых принципов. В случае высоких энергий ряд жестких процессов успешно описывается в рамках КХД [9]. Однако при переходе к области промежуточных энергий мы сталкиваемся с чрезвычайно сложными как с физической, так и с вычислительной точки зрения непertурбативными задачами КХД.

В результате все известные на сегодняшний день подходы в физике элементарных частиц, за исключением чисто кинематических [8], являются гибридными. Они основаны на использовании как фундаментальных принципов квантовой теории, так и феноменологических параметризаций некоторых дополнительных формфакторов, присутствующих в расчетах различных наблюдаемых величин.

Проблема усложняется тем, что степень полноты системы первых принципов квантовой теории неизвестна, а традиционно используемые в физике промежуточных энергий мезонные теории (см., например, [6]) неперенормируемы.

За последние 30 лет было исследовано огромное количество конкретных реакций и разработано множество моделей, достаточно хорошо воспроизводящих эксперимент. Однако в силу отмеченной выше феноменологичности сами эти модели и подходы требуют дополнительного исследования для выяснения физической картины явления. Таким образом, возникает проблема анализа общезначимой концентрации резонанса (квазистационарного состояния) как в физике элементарных частиц, так и в стандартной ядерной физике.

Исторически первой задачей о нахождении энергии и времени жизни квазистационарного состояния в квантовой механике была теория α -распада. В 1928 году Гамов [10], Кондон и Гэрни [11] теоретически объяснили закон Гейгера — Неттола [12] на основе представлений о туннельном эффекте. При этом с первой же работы распад любого квазистационарного состояния в квантовой теории трактовался как двухступенчатый процесс.

На первой стадии распада во внутренней области квантовой системы происходит формирование кластера, а на второй стадии этот кластер туннелирует через потенциальный барьер как единое целое. В соответствии с представлением о двухступенчатости распада квазистационарных состояний в квантовой механике возникло несколько широко распространенных подходов к описанию подобных процессов [13]. Почти все они так или иначе связаны с факторизацией выражения для ширины квазистационарного состояния. При этом используются разные модификации R -матричной теории ядерных реакций Вигнера и Айзенбуда [14] с вещественными граничными условиями на «радиусе» канала реакции [15] или с комплексными граничными условиями (условиями излучения) [16].

Формально R -матричная теория является строгой. В принципе она может быть использована для описания всех типов ядерных реакций. Действительно, результаты применения R -матричной теории для описания различных резонансных реакций в ядерной физике впечатляющие (см., например, монографии [17,18]), и эта теория стала мощным средством для интерпретации ядерных данных.

Здесь следует подчеркнуть, что R -матричная интерпретация экспериментальных данных по резонансным ядерным реакциям является однозначной только при описании узких резонансов. Более того, можно показать [19], что все приближенные методы вычисления положений и ширин узких ($\Gamma \rightarrow 0$) резонансных состояний эквивалентны. Для широких (перекрывающихся) резонансов однозначного определения резонанса (параметров резонанса) дать нельзя, поскольку в этом случае возникает неразрешимая задача отделения фона от резонанса, резонансы перекрываются, да и сами параметры резонанса становятся функциями энергии. Таким образом, задача теоретического описания положений и ширин широких резонансов становится многопараметрической и модельно-зависимой.

В физике элементарных частиц в большинстве случаев имеют дело с широкими резонансами. Как стандартный пример, рассмотрим рассеяние

$$\pi + N \rightarrow N^* \rightarrow \pi + N. \quad (1)$$

Общепринятая интерпретация этой реакции заключается в том, что в процессе столкновения образуются сильновозбужденные промежуточные состояния N^* -нуклона с ширинами $\Gamma \approx 100 + 600$ МэВ и временами жизни $\tau_R \approx (6-1)10^{-24}$ с. Такие состояния получили название нуклонных (барионных) резонансов. Время жизни τ_R нуклонных резонансов приблизительно равно или немножко больше времени пролета частиц τ_n ($\tau_n \approx d/v$, где $d \approx 1$ фм и v — скорость относительного движения сталкивающихся частиц) через область взаимодействия. Тем не менее такое определение

резонансов полезно, поскольку некоторые их свойства (квантовые числа) напоминают свойства узких резонансов и стабильных частиц, и оно позволяет полуколичественно описывать процессы типа (1) на языке моделей, заимствованных из ядерной физики [22,23]. Такой подход дал возможность провести систематику адронных резонансов на основе современных (кварковых) моделей [24].

Несколько сотен адронных резонансов были классифицированы на основе хорошо известной наивной кварковой модели (модель $SU(3)$ супермультиплетов) [24]. Мезоны в этой модели рассматриваются как связанные состояния валентных кварк-антикварковых пар ($M = q\bar{q}$), а барионы состоят из трех валентных кварков ($B = qqq$). Однако вскоре стала очевидной ограниченность такой наивной кварковой модели (см. [24,25]). Поэтому в дальнейшем в эту модель ввели более сложные состояния: мультикварковые состояния ($M = qq\bar{q}\bar{q}$, $B = qq\bar{q}\bar{q}$), глюболы ($M = gg, ggg$) и гибриды ($M = q\bar{q}g$, $B = qqg$). Все такие новые частицы называли экзотическими адронами. В результате модель стала многопараметрической, неоднозначной и трудоемкой. Например, даже в простом случае ($M = qq\bar{q}\bar{q}$) современные вычисления [26] ограничены конфигурациями $(q^2\bar{q}^2)_{L=0}$.

Сейчас стало очевидным, что современные модели не в состоянии описывать многие резонансные явления в субатомной физике: дибарионные резонансы [27—30], резонансы в двухпионных системах — АВС-эффект [31,32], резонансы в системах e^+e^- , обнаруженные при столкновении тяжелых ионов [33] и т.д.

Таким образом, современное развитие кварковых моделей идет в полной аналогии с историей развития оболочечной модели в ядерной физике: сперва были введены в рассмотрение простые квазичастичные состояния, затем многоквазичастичные состояния и, наконец, коллективные состояния — когерентная суперпозиция большого числа простых квазичастичных конфигураций. Оказалось, что коллективные моды движения в ядрах можно рассматривать на языке простых коллективных переменных [18,34,35], и это наблюдение дало мощный толчок к пониманию чрезвычайно сложного спектра ядерных состояний.

Собственно говоря, речь идет о выработке определенной культуры анализа и интерпретации экспериментальных данных, о поиске способов выделения вклада различных механизмов в сечения сильных процессов на основе модельно-независимых критериев.

Возникновение многих из указанного комплекса проблем может быть отнесено к концу 20-х — началу 30-х гг., т.е. к периоду формулировки основных принципов квантовой теории. Вопросы, касающиеся непосредственно физики барионных резонансов, начали появляться после 1953 г., т.е. после открытия группой Ферми $\Delta(1232)$ -изобары.

В течение последующих 40 лет было опубликовано не поддающееся учету число работ по физике адронных резонансов. В результате анализа их свойств был открыт целый «зоопарк» частиц (N^* , Δ , Λ , Σ , Ξ , Ω , ...), а также совокупность соответствующих квантовых чисел, таких как странность, гиперзаряд, барионное число и т.п. Более того, можно сказать, что вся кварковая проблематика, включая КХД, в конце концов выросла из физики резонансов.

Несмотря на огромное количество впечатляющих результатов, полученных со времени открытия Δ -изобары, понимание истинной роли этого резонанса в физике промежуточных энергий начало приходить только к началу 80-х годов, когда стало ясно, что многие эффекты, ранее интерпретировавшиеся как проявление короткодействующих нуклон-нуклонных корреляций, на самом деле связаны с вкладом барионных резонансов (в первую очередь, $\Delta(1232)$ -изобары). В настоящее время имеются веские основания считать, что этот резонанс в пионной ядерной физике промежуточных энергий выживает как отдельная разновидность барионов даже в сильновзаимодействующем ядерном окружении и может рассматриваться как квазичастица, точно так же, как и нуклон [6].

В работах [36—40] был предложен полуфеноменологический подход для описания спектра масс адронных и дибарионных резонансов. При этом оказалось, что простая массовая формула (24) (см. ниже), близкая как по своей физической природе, так и по способу вывода к формуле Бальмера в старой квантовой теории Нильса Бора, описывает не только гросс-структуру (т.е. положение «центров тяжести» мультиплетов) спектра адронных масс, но и положение отдельных уровней с точностью не меньшей, чем их ширина. Результат этот оказался в высшей степени неожиданным, поскольку указанная бальмероподобная массовая формула вовсе не содержала подгоночных параметров. При этом было сделано предсказание ряда новых резонансов.

В физике известно сравнительно небольшое число примеров так называемых «грубых» систем, интегральные свойства которых прекрасно описываются в простейших подходах, однако точность описания физической картины падает в процессе ее детализации. Впервые подобное поведение систем в классической механике было открыто Анри Пуанкаре, который, собственно, и предложил удачное название для таких систем. С математической точки зрения снижение точности описания физической системы с ростом числа параметров модели очень подробно изучено в теории аппроксимации многочленами таблично заданных функций. Хорошо известно, что с ростом порядка аппроксимирующего многочлена начинается раскачка аппроксимации в межузловых интервалах, а задача корректной интерполяции экспериментальных данных становится вообще невыполнимой. В физике

классическим примером корректной работы с грубыми системами является теория дифракции.

И, наконец, укажем на еще одно фундаментальное направление в физике высоких энергий: объединение принципа автомодельности с общими принципами квантовой теории. Именно на таком пути были установлены знаменитые правила кваркового счета Матвеева, Мурадяна и Тавхелидзе [41]. Дальнейшее развитие это направление получило в работах А.М.Балдина [42], посвященных релятивистской теории динамических систем. В настоящем обзоре мы изложим приложение методов теории подобия, размерности и автомодельности к задаче расчета масс резонансов в субатомной физике.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ

Однозначное и общепринятое определение условий квантования может быть дано только для замкнутых (изолированных) квантово-механических систем. При этом дискретный спектр имеют только системы, совершающие финитное движение, для которых соответствующие волновые функции в нуле ($r = 0$) и на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) равны нулю. Примерами замкнутых систем, имеющих дискретный спектр, являются атомы, ядра и т.д. Для расчета дискретных спектров квантовых систем было предложено несколько квазиклассических вариантов теории (включая старую квантовую теорию Нильса Бора), опирающихся на принцип соответствия. В теории колебаний и волн хорошо известен общефизический принцип взаимности, утверждающий, что результат остается инвариантным, если поменять местами наблюдателя и источник. Математически это означает, что соответствующая краевая задача для замкнутых систем является самосопряженной. Общепринятый способ решения таких краевых задач — разложение в ряд Фурье по собственным колебаниям системы. Таким образом, получается простая модель замкнутой системы как совокупности независимых осцилляторов.

Эренфест доказал, что для систем, совершающих периодические движения, величины

$$\oint P_i dx_i = I_i \quad (2)$$

являются инвариантами (адиабатическими) движения при медленном (адиабатическом) изменении параметров системы. Здесь P_i — обобщенный импульс и x_i — обобщенная координата. Именно этот факт сыграл решающую роль при установлении правил квантования для водородоподобного атома в «старой» квантовой теории Бора — Зоммерфельда (еще до работ Шредингера и Гейзенберга):

$$\frac{1}{2\pi} \oint P_i dx_i = n\hbar, \quad (3)$$

где n — так называемое главное квантовое число, принимающее только целочисленные значения: 1, 2, 3, ... Другими словами, условие квантования Бора — Зоммерфельда представляет собой условие квантования адиабатического инварианта.

Следуя де Бройлю, квантовые условия теории Бора — Зоммерфельда можно интерпретировать на основе волновых представлений. Согласно этой теории условие квантования для углового момента имеет вид

$$L = rP = n\hbar = n \frac{h}{2\pi}, \quad (4)$$

где $P = mv$ означает импульс электрона. Соотношение (4) можно переписать в виде

$$2\pi r = n \lambda_D, \quad (5)$$

где λ_D — длина дебройлевских волн:

$$\lambda_D = \frac{h}{P}. \quad (6)$$

Левая часть (5) есть длина окружности, так что условие квантования Бора — Зоммерфельда означает, что на этой длине должно укладываться целое число длин дебройлевских волн. Таким образом, условие квантования (6) совпадает с условием существования собственных колебаний для замкнутых микро- и макросистем, совершающих финитное движение.

Условие квантования (5) допускает еще одну изящную интерпретацию. Если ввести комптоновскую длину волны

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \quad (7)$$

и переписать (5) в виде

$$\lambda_D \alpha = n \lambda'_C, \quad \text{то } v = \alpha \frac{c}{n}, \quad (8)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры (здесь и далее $\lambda = \hbar/P$). Система квантуется, если длина дебройлевской волны соизмерима с длиной комптоновской волны, поделенной на постоянную тонкой структуры α .

Резонансы представляют собой одно из наиболее замечательных явлений в микро- и макрофизике. В простейшем своем проявлении они приводят к острым пикам в полном сечении рассеяния как функции энергии сталкивающихся частиц. В настоящее время предложено множество различных моделей для объяснения резонансных явлений (см. [19—21]). Общим для этих моделей является то, что хорошо выделенным максимумам сечений при $E = E_R$ сопоставляется существование **долгоживущих почти связанных состояний**, состоящих из мишени и падающей частицы. Если энергия пада-

ющей частицы равна E_R , то падающая частица «захватывается» в такое долгоживущее промежуточное состояние. Далее это состояние распадается, излучая соответствующие частицы на бесконечность. Такое объяснение резонансного рассеяния является стандартным. Другим примером резонансных явлений может служить распад радиоактивных ядер или нестабильных частиц. Распадающаяся система в строгом смысле не обладает дискретным спектром энергий, частицы из нее вылетают на бесконечность, то есть движение системы инфинитно.

Некоторые распадающиеся системы имеют малую вероятность распада. Для таких систем обычно вводят понятие о «квазистационарных» состояниях. В таких состояниях частицы движутся в течение большого промежутка времени τ в ограниченной области пространства, затем покидают эту область и уходят на бесконечность. Для таких состояний можно ввести понятие плотности состояний в континууме [43,44] в виде

$$\rho(E) = \frac{1}{\pi} \frac{d\delta(E)}{dE}, \quad (9)$$

где $\delta(E)$ — фаза рассеяния. Энергетический спектр таких состояний называется «квазидискретным», ширина Γ определяет время жизни τ системы в ограниченной области пространства согласно соотношению

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (10)$$

Такое определение «квазистационарных» состояний как почти связанных состояний не противоречит принципу соответствия. Действительно, при $\Gamma \rightarrow 0$ плотность квазистационарных состояний (9) переходит [19] в плотность состояний дискретного спектра

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \rho(E) = \delta(E - E_v), \quad (11)$$

где E_v — энергии дискретного спектра системы.

Связанные состояния для замкнутых систем рассматривают, решая уравнение Шредингера с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Несвязанные системы распадаются, излучая частицы на бесконечность. Поэтому кажется естественным в этом случае искать решения уравнения Шредингера, представляющие собой расходящиеся сферические волны на бесконечности, что адекватно физике задачи. Поскольку в этом случае граничные условия комплексны, то и собственные значения энергии тоже комплексны. Заметим, что метод комплексных собственных значений в 1884 г. впервые применил Дж.Томсон [45], который этим методом рассмотрел проблему электромагнитных колебаний заряда на идеально проводящей сфере. Естественное обобщение решений уравнения Шредингера, соответ-

ствующих дискретным связанным состояниям, для положительной (комплексной $E = E_R - i\Gamma/2$, $E_R > 0$ и $\Gamma > 0$) величины энергии введено Гамовым [10] при описании α -распада. Как и связанные состояния, состояния с комплексными собственными значениями имеют энергии, которые соответствуют полюсам S -матрицы. Представление S -матрицы с помощью ее полюсов дано Пайерлсом [46]. Теория ядерных реакций, в которой эти полюсы используются для разложения амплитуды реакции, развита Хамблетом и Розенфельдом [47]. В дальнейшем метод комплексных собственных значений нашел применение во многих областях физики [48], а в теории дифракции и распространения электромагнитных волн [49] и теории резонаторов [50] стал общепринятым.

Поскольку гамовские функции экспоненциально растут с увеличением r , обычные определения нормировки, ортогональности и полноты для них неприменимы. Позже был предложен ряд способов нормировки гамовских функций, однако все они эквивалентны методу Зельдовича [51] и неприменимы для функций антисвязанных состояний и для функций с $|\operatorname{Re} k_n| < |\operatorname{Im} k_n|$. Совсем недавно в нашей работе [19] была доказана полнота гамовских волновых функций в ограниченной области пространства $r \leq R$, где R — расстояние, на котором ядерные силы можно полагать равными нулю. В доказательстве полноты важную роль сыграла теорема Миттаг — Леффлера в формулировке Коши [48]. Таким образом, волновые функции непрерывного спектра, функции Грина и S -матрица могут быть разложены в ряд Миттаг — Леффлера, при этом полученные ряды сходятся равномерно (при $r \leq R$).

Резонансные явления, связанные с нестабильными квантовыми системами, можно описать с помощью полной системы гамовских функций. Хотя мы разлагаем волновую функцию нестабильной системы по гамовским функциям в ограниченной области пространства ($0 \leq r \leq R$), фактически она известна во всем пространстве, так как S -матрица разложена по тем же резонансным полюсам. Базисные гамовские функции имеют адекватные физике исследуемой задачи асимптотические свойства (условия излучения), поэтому в этом подходе можно исследовать многие важные вопросы теории нестабильных состояний на примере точно решаемых моделей: аналитические свойства волновых функций таких состояний, определение среднего времени жизни нестабильной частицы по рассеянию продуктов ее распада друг на друге и т.д. Поэтому в рамках данного подхода можно исследовать точность других приближенных методов и указать границы их применимости. Ранее [19] мы показали, что все приближенные методы вычисления положений и ширин узких ($\Gamma \rightarrow 0$) квазистационарных состояний эквивалентны. В этом случае соответствующие сечения рассеяния друг на друге продуктов распада нестабильной частицы описываются стандартной форму-

лой типа Брейта — Вигнера, параметры которой могут быть однозначно определены из экспериментальных данных. Физические основы этого вывода очевидны и обсуждаются детально в [17,19,52]. Здесь же отметим, что хотя волновая функция квазистационарного состояния с малой шириной ($\Gamma \rightarrow 0$ и $E_R \gg \Gamma$) формально и принадлежит к непрерывному спектру и в принципе простирается на все пространство, на самом деле она локализована во внутренней области классического движения (т.е. в области действия короткодействующего притягивающего потенциала), отделенной от внешней области широким и высоким потенциальным барьером с малой проницаемостью [17].

Этот вывод несправедлив для широких резонансов. Если даже такой широкий резонанс изолирован от других, то возникает вопрос об отделении резонансного вклада от фона (который может быть разрешен только в рамках модельных предположений), и неизвестна зависимость ширины резонанса Γ от энергии.

Итак, мы должны констатировать, что на сегодняшний день невозможно дать универсальное и точное определение резонанса, поскольку характерные свойства этого явления постепенно исчезают с увеличением ширины квазистационарного состояния, и перекрывающиеся резонансные и неупругие пороговые эффекты неотделимы друг от друга.

На наш взгляд, квантово-механическое определение резонансов, изложенное выше, является наиболее последовательным. Такое определение резонансов сейчас общепринято в ядерной физике, а в 70-е годы также использовалось при интерпретации резонансов в физике элементарных частиц. Реанимация такого определения резонансов в физике элементарных частиц произошла совсем недавно [23].

На практике при определении резонанса как полюса S -матрицы и извлечении параметров этого полюса из экспериментальных данных используют ряд дополнительных допущений. Обычно предполагают, что взаимодействие имеет конечный радиус действия. Тогда можно ввести временной интервал (это понятие впервые было введено Вигнером [53]), равный разнице времени прибытия и времени ухода волнового пакета из области взаимодействия. В некоторых случаях временной интервал имеет характерную энергетическую зависимость с сильно выделенным максимумом в узком интервале энергий. Эта задержка во времени волного пакета в области взаимодействия интерпретируется как образование короткоживущей нестабильной частицы, распадающейся далее в соответствующие открытые каналы [52,54,55].

Время задержки можно вычислить с помощью S -матрицы. Поскольку параметры резонанса обычно определяются в рамках фазового анализа (диаграммы Аргана), то рассматривают величины [23]:

$$T(W) = \frac{1}{2i} (\eta(W) \exp [2i\delta(W)] - 1), \quad (12)$$

$$SP(W) = \left| \frac{dT(W)}{dW} \right|, \quad (13)$$

где $\delta(W)$ — реальная часть фазового сдвига, $\eta(W)$ — параметр поглощения и W — полная энергия в с.ц.м. Задержка во времени пропорциональна $SP(W)$. Она не всегда связана с временем жизни нестабильной частицы. Задержка может быть вызвана открытием нового канала распада системы (пороговый эффект) или же образованием виртуального состояния (подробности см. в [17]). Классическим примером виртуального состояния может служить низкоэнергетическое протон-нейтронное рассеяние в 1S -состоянии.

Подчеркнем, что задержка во времени является необходимым, но недостаточным условием возникновения резонанса. Далее положение резонансов ассоциируется с полюсами функции $T(W)$, расположенными недалеко от вещественной оси. Обычно параметризуют функцию $T(W)$ в виде формулы Брейта — Вигнера с массой M и константой Γ , тогда максимальное значение времени задержки будет при $W = M$. И последняя тонкость: резонанс должен наблюдаться в других каналах распада.

Результаты исследований возбужденных состояний нуклона в рамках вышеизложенных концепций хорошо известны [23]. Другой, так называемый стандартный метод принят в PARTICLE DATA GROUP [24]. Сравнительный анализ показывает, что имеется кардинальное отличие результатов анализа двух групп, что важно для современных кварковых моделей резонансов. Следует подчеркнуть, что **наблюдаются большие различия результатов, полученных разными группами** (см. компиляцию [24]). На наш взгляд, это означает модельную зависимость результатов обработки экспериментальных данных по резонансам и незавершенность современных подходов к описанию резонансных явлений в физике элементарных частиц. Здесь следует отметить общую незавершенность теории резонансов с большими ширинами $E_R \sim \Gamma$ не только в физике элементарных частиц, но и в ядерной [19,56] и атомной [57] физике.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

Наблюдение ярких резких линий — одно из интереснейших явлений в геометрической оптике. Эти линии, обусловленные концентрацией световых лучей (световые лучи их касаются), получили название «каустики». Классическим примером каустики является радуга. Объяснение этого явления, по-видимому, впервые, было дано преподобным Хэмнетом Холдичем

еще в 1857 г. (см. [58])*. Отраженные лучи света в случае радуги имеют огибающую — это и есть каустика. Стандартное объяснение яркости каустики очень простое: лучи света, образующие каустику, касательны к ней и почти совпадают друг с другом, то есть на каустике собираются бесконечно близкие лучи. Вследствие этого в ограниченной области пространства сосредоточивается гораздо больше лучей, чем в других областях, и этим обусловлена яркость каустики. Следует напомнить, что хотя классическое описание радуги на языке геометрической оптики правильно отражает положение и форму каустики, однако оно предсказывает бесконечно большую интенсивность радуги, что в принципе неверно.

Для нас важно то, что каустика разделяет пространство на две части: одна заполнена лучами (освещенная часть), а в другую лучи не проникают (каустическая тень). В освещенной части через каждую точку проходят два луча — один из них коснулся каустики, а другой еще нет. При подходе к каустике со стороны освещенной зоны возникает рост амплитуды поля, то есть наблюдается локальный максимум. Поле спадает при переходе через каустику и удалении от нее в область тени. В направлении нормали к каустике поле в освещенной части пространства имеет характер стоячей волны, обусловленной интерференцией двух лучевых полей. Вдоль каустики поле имеет характер бегущей волны.

В теории дифракции электромагнитных и акустических волн известны так называемые **волны соскальзывания** [59], скользящие вдоль каустики (сосредоточенные на каустике) и непрерывно отдающие свою энергию окружающему пространству. Существование волн соскальзывания в общем случае не доказано, однако в случае разделения переменных их можно построить в явном виде [59]. В теории открытых резонаторов (в частности, теории излучения антенн) такие волны играют фундаментальную роль [50]. Аналогом волн соскальзывания для замкнутых систем могут служить так называемые **волны шепчущей галереи**, впервые обнаруженные Рэлеем (1910) [60] при рассмотрении явления шепчущей галереи в акустике для круговой области. Эти волны локализованы около поверхности галереи из-за их отражения от границы под скользящим углом. Волны соскальзывания и волны шепчущей галереи детально изучены [17,59,61], и условием их существования в случае сферической симметрии является выполнение соотношения

$$L \approx kr_0, \quad (14)$$

* Авторы благодарны Ф.М.Пенькову за то, что он обратил их внимание на работу Р.Декарта, в которой дано правильное объяснение явления радуги еще в 1637 г. [177].

где L — индекс функции Бесселя — Ханкеля, а kr_0 — ее аргумент, причем окружность $r = r_0$ служит каустикой для волн соскальзывания. Для волн шепчущей галереи окружность $r = r_0$ является стенкой галереи. Очевидно, условие (14) означает не что иное, как условие сохранения соответствующего адиабатического инварианта в классической механике, в данном случае сохранение момента импульса L . В квантовой механике это означает квантование углового момента $L\hbar$.

Наиболее прозрачно этот хорошо известный факт можно проиллюстрировать в квазиклассическом приближении, когда волновую функцию можно записать в следующем виде [17]:

$$\Psi(q_i, t) = A(q_i) e^{iS(q_i, t)/\hbar}, \quad (15)$$

где $S(q_i, t)$ — полное действие, а функция $A(q_i)$ является однозначной функцией координат q_i . Из требования однозначности волновой функции следует, что для любой замкнутой кривой в q_i -пространстве должно выполняться равенство:

$$\Delta S = \oint P_i dq_i = 2\pi\hbar n_i. \quad (16)$$

Это условие квантования с целыми числами, однако оно не всегда верно. В случае осциллятора n_i нужно заменить на $n_i + 1/2$. В общем случае условие квантования имеет вид

$$\Delta S = \oint P_i dq_i = 2\pi\hbar(n_i + \gamma_i), \quad (16a)$$

где γ_i — число порядка единицы, зависящее от характера граничных условий для рассматриваемой степени свободы.

Итак, сильно локализованные волны возникают на границе раздела двух сред. Классическим примером этого явления могут служить боковые волны [62] в гидродинамике, возникающие при отражении сферической волны от границы раздела двух сред с разными плотностями. От характера неоднородностей среды зависит, как разовьется рассеяние волн на таких особенностях среды. Общего ответа нет как в классической, так и в квантовой теории. Многообещающие наблюдения накапливаются в теории катастроф [63] и теории хаотических систем и их полуклассического квантования [64], однако эти вопросы выходят за рамки нашего обзора. Здесь же мы только отметим, что забытая и через 40 лет обнаруженная Келлером [65] (см. также [66], где приведено много интересных примеров) работа Эйнштейна [67] имеет прямое отношение к пониманию условия квантования Бора — Зоммерфельда. Эйнштейн ввел условие квантования на торе, а именно потребовал непрерывности волновой функции для любой замкну-

той кривой на торе. Сейчас это квантование получило название ЕВК-квантование (Einstein, Brillouin, Keller):

$$\Delta S = \oint P_i dq_i = 2\pi\hbar \left(n_i + \frac{\beta_i}{4} \right), \quad (166)$$

где $n_i \geq 0$ и $\beta_i \geq 0$ должны быть целыми числами. Целое число β_i называется числом Маслова [68,69]. Подход Эйнштейна — Бриллюэна — Келлера является весьма общим, и **условия ЕВК-квантования справедливы и в тех случаях, когда переменные не разделяются**. Практические вычисления чисел Маслова проведены относительно недавно [70].

Сейчас можно считать общепринятой в ядерной физике точку зрения [18,71,72], что особую роль в появлении значительных разрежений и сгущений уровней ядер играет квазиклассическое квантование движения по многомерным периодическим орбитам.

Как общий итог наших обсуждений, мы примем в качестве рабочей гипотезы следующее физическое определение резонансов: **это периодическое движение, отражение волн в ограниченной области пространства и их интерференция, приводящие к сильной локализации волн около неоднородностей среды**. В рамках R -матричной теории ядерных реакций [15] мы используем граничное условие излучения для физических частиц, на которые может распадаться рассматриваемая система. При этом все пространство разделяется на две части: область взаимодействия, где система «живет» определенное время, и асимптотическая область, где продукты распада нестабильной частицы не взаимодействуют между собой. Согласно концепции этой теории можно вводить полную систему волновых функций в области взаимодействия $r \leq r_0$ и, следовательно, определить логарифмические радиальные производные для внутренних волновых функций

$$\left(\frac{r}{u_{in}(r)} \frac{du_{in}(r)}{dr} \right) \Big|_{r=r_0-0} = f = \frac{1}{R}. \quad (17)$$

Эти внутренние волновые функции могут быть вычислены в рамках современных кварковых моделей, затем они должны быть спроектированы на физические наблюдаемые состояния (эта процедура детально разработана в рамках P -матричного подхода [73—76]) и сшиты с внешними волновыми функциями.

Для простоты рассмотрим нестабильные системы, распадающиеся только по одному доминирующему открытому каналу. Как мы уже говорили, распад адронных резонансов можно рассматривать в полной аналогии с излучением открытых классических электродинамических резонаторов [50]. Поэтому соответствующий математический аппарат может быть использован с незначительными модификациями (см. приложение). Следо-

вательно, граничные условия для продуктов распада нестабильной частицы должны соответствовать условию излучения

$$\left(\frac{r}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \right) \bigg|_{r=r_0+0} = f, \quad (18)$$

где $h_L^{(1)}(Pr)$ — сферические функции Риккати — Бесселя. В рамках излагаемого подхода нам кажется вполне естественным потребовать, **чтобы внутренняя волновая функция в точке сшивания с внешней волновой функцией $r=r_0$ имела максимум, т.е.**

$$\frac{du_{in}(r)}{dr} \bigg|_{r=r_0-0} = 0. \quad (19)$$

Физически это означает, что мы требуем максимальной локализации волновой функции нестабильной системы на поверхности $r=r_0$. В приближении P -матричного подхода граничное условие было противоположным, а именно: внутренняя волновая функция в точке сшивания с внешней волновой функцией $r=r_0$ должна быть равной нулю

$$u_{in}(r) \big|_{r=r_0-0} = 0, \quad (20)$$

чтобы удовлетворить требованию конфайнмента.

Здесь мы хотим сделать одно существенное замечание. Никто никогда не обращал внимания, за исключением наших работ [36—39], на тот факт, что имеется глубокая физическая аналогия между общепринятыми моделями открытых резонаторов в классической электродинамике и в волновой механике и R -матричным подходом для описания резонансных реакций в ядерной физике. Открытые резонаторы имеют реальную физическую поверхность, разделяющую пространство на две части: внутреннюю часть резонатора, где генерируются соответствующие собственные состояния резонатора, и внешнюю, куда и уходят волны из резонатора. В R -матричном подходе объявляется, что радиус сшивания внешней и внутренней волновых функций $r=r_0$ должен быть выбран там, где влиянием ядерных сил можно пренебречь. Это правильно, однако такое утверждение можно уточнить. Действительно, при построении инвариантного тора Эйнштейна необходимо определить каустические поверхности, и тогда можно доказать, что собственные волновые функции сосредоточены внутри этих каустических поверхностей. Таким образом, каустики в задачах определения собственных колебаний любых систем играют роль «физических поверхностей», запирающих на определенное время систему внутри такого тора. Мы приходим к выводу, что граничное условие излучения должно выполняться около внешней каустической поверхности. Причем можно строго доказать [61],

что задание определенных граничных условий на радиусе канала $r = r_0$ однозначно определяет потенциал взаимодействия между продуктами распада нестабильной системы в этой точке. И, наконец, условие определения собственных частот открытых резонаторов [50] полностью аналогично условию квантования (166) по ЕВК-методу.

Итак, резонансы в волновых системах возникают в случае, когда отношение размеров r_0 резонирующей системы («полости») к длине соответствующей волны λ определяется выражением типа

$$Pr_0 = (n + \gamma); \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

$$2\pi r_0 \equiv r_{\text{eff}} = (n + \gamma) \lambda, \quad (21a)$$

где $P = 2\pi/\lambda$ и γ — число порядка 1 ($0 \leq \gamma \leq 1$), зависящее от граничных условий для заданной степени свободы и типа волнового уравнения для резонирующей системы. В приложении мы показали, что условие квантования асимптотического импульса (21) для адронных резонансов может быть получено в рамках R -матричного подхода с использованием граничного условия излучения на поверхности резонанса, распадающегося на два адрона. Мы пришли к выводу, что $\gamma = 0$ или $1/2$ (можно привести аргументы [67] в пользу того, что в принципе могут быть случаи $\gamma = 1/4$ и $3/4$). Случай $Pr_0 = n + 1/2$ интерпретируется как радиальное квантование, а случай $Pr_0 = L$ может рассматриваться как хорошо известное условие орбитального квантования по Бору — Зоммерфельду. Попробуем с этих позиций проанализировать спектр Δ -изобар.

Если отвлечься от эффектов L -зависимости и спин-орбитального взаимодействия и рассматривать только грубую структуру этого спектра, то можно заметить, что мы имеем дело с 4 мультиплетами, отстоящими друг от друга примерно на 400 МэВ. «Квазиосцилляторный» характер gross-структуры Δ -спектра заставляет предположить, что Δ -резонансное состояние πN -системы можно приближенно описать с помощью осцилляторного потенциала с параметром $\langle r_0 \rangle = \sqrt{\hbar/m\omega} \approx 0,86$ фм, близким к электромагнитному размеру нуклона.

Из табл.1 видно, что для пионов, образующихся при распаде Δ -изобар, величины импульсов в СЦИ не противоречат подобной оценке, сделанной в предположении, что $\gamma = 0$, и практически совпадают с аналогичными значениями импульсов пионных пучков, возбуждающих Δ -резонансы. Кроме того, импульсы испускаемых пионов с хорошей степенью точности являются целыми кратными от характерного импульса $\tilde{P}_\pi^{(0)} \approx 0,23$ ГэВ/с, определяемого размерами нуклона $\langle r_0 \rangle = 1/\tilde{P}_\pi^{(0)}$ (СЦИ) = 0,86 фм.

Таблица 1

Резонанс	P_π (СЦИ) (расс.), ГэВ/с	$1/\tilde{P}_\pi$ (СЦИ), фм	$\frac{\langle r_0 \rangle}{n + \gamma}$, фм	$n + \gamma$
$\Delta(1232)$	0,227	0,86	0,86	1
$\Delta(1620)$	0,526	0,38	0,43	2
$\Delta(1950)$	0,741	0,27	0,29	3
$\Delta(2420)$	1,023	0,19	0,21	4

Таблица 2

Резонанс	P_π (СЦИ) (расс.), ГэВ/с	$1/\tilde{P}_\pi$ (СЦИ), фм	$\frac{\langle r_0 \rangle}{n + \gamma}$, фм	$n + \gamma$
$N^*(1125)$	0,114	1,73	1,73	1/2
$N^*(1440)$	0,397	0,50	0,57	3/2
$N^*(1710)$	0,587	0,34	0,34	5/2
$N^*(2200)$	1,897	0,22	0,25	7/2
$N^*(2600)$	1,126	0,18	0,19	9/2

Аналогичные вычисления были сделаны для случая N^* -резонансов. В табл.2 приведена систематика N^* -резонансов, основанная на использовании «главного квантового числа» n и «постоянной граничных условий» $\gamma = 1/2$. Очевидно, что отсутствие «пробелов» в систематике Δ - и N^* -резонансов при $1 \leq n \leq 4$ можно рассматривать как указание на возможность существования гипотетического $N^*(1125)$ -резонанса с массой $m_{N^*} \approx 1115-1130$ МэВ и шириной $\Gamma < 30$ МэВ, что согласуется с результатами статистической обработки π^-p -сечений (рис.1).

Отличительной особенностью нуклон-нуклонного взаимодействия с образованием Δ -изобары является то, что 1) она возбуждается виртуальным, а не реальным пионом; 2) сталкивающиеся нуклоны являются тождественными частицами, и, следовательно, в реакцию $NN \rightarrow N\Delta$ дают вклад, как минимум, два когерентных процесса.

Например, реакция перезарядки $p(p, n)_\Delta$ описывается суперпозицией прямой (D) и обменной (E) диаграмм. Поэтому, в отличие от свободного πN -рассеяния, в реакциях типа $(p, n)_\Delta$ и аналогичных процессах должны проявляться, как минимум, два характерных масштаба, соответствующих двум инвариантным переданным импульсам:

$$t_d \equiv (P_1 - P_n)^2 = (P_2 - P_\Delta)^2 \equiv t,$$

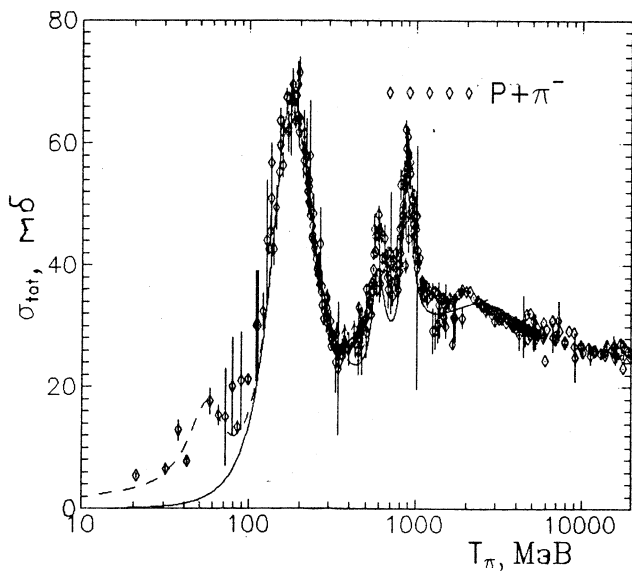


Рис.1. Полные сечения π^-p -рассеяния. Штриховая кривая построена с учетом вклада гипотетического $N^*(1125)$ -резонанса

$$t_{ex} \equiv (P_2 - P_n)^2 = (P_1 - P_\Delta)^2 \equiv u,$$

где t и u — стандартные мандельштамовские переменные, которым в шкале расстояний соответствуют величины

$$r_d \equiv 1/\sqrt{-t_d},$$

$$r_{ex} \equiv 1/\sqrt{-t_{ex}}.$$

Как видно из рис.2, для всех основных изобар ($\Delta(1232)$, $\Delta(1620)$, $\Delta(1950)$ и $\Delta(2420)$) значения r_d и r_{ex} для реакции перезарядки «вперед» (под углом $\theta = 0^\circ$) близки только в окрестности порога рождения Δ -резонанса (на пороге $u = t$, $s = s_{\min}$, где $s = (P_1 + P_2)^2$ — третья переменная Мандельштама — квадрат инвариантной массы системы). С ростом энергии налетающего протона величина r_d относительно быстро растет, в то время как r_{ex} плавно убывает. При переходе от одной Δ -изобары к другой положение кривой r_d в целом меняется скачкообразно (грубо говоря, по закону $1/n$, где $n = 1, 2, 3, 4$ для $\Delta(1232)$, $\Delta(1620)$, $\Delta(1950)$ и $\Delta(2420)$ соответственно). Кривая r_{ex}

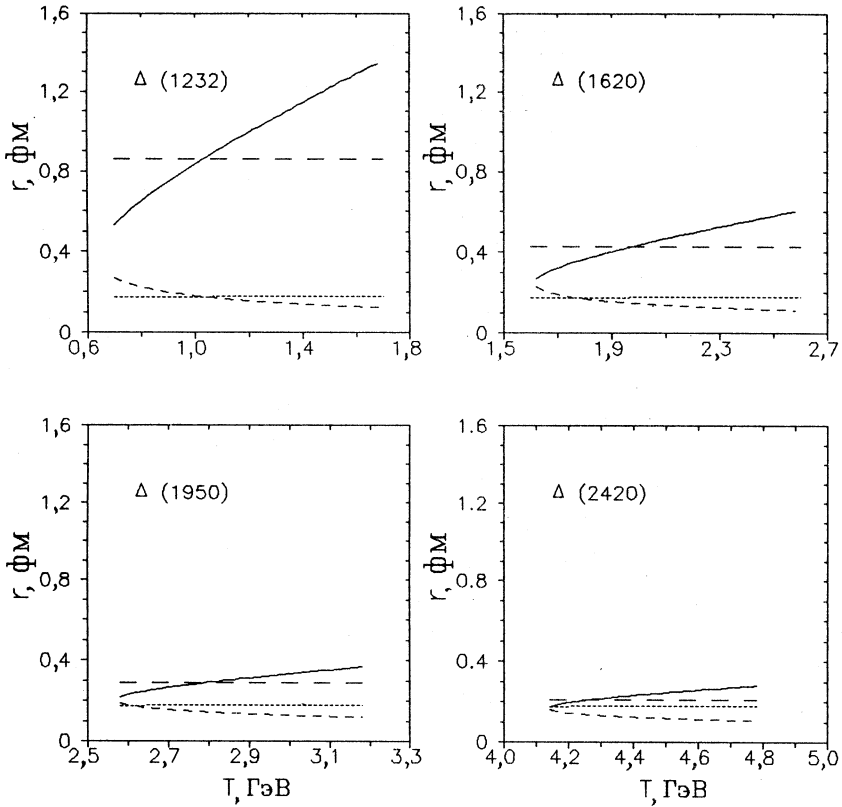


Рис.2. Зависимость скейлинговых переменных r_d и r_{ex} от энергии налетающего протона для типичных Δ -изобар, входящих в состав четырех основных мультиплетов барионов с изоспином $3/2$

как функция кинетической энергии снаряда T_p также скачкообразно меняется при переходе от одной Δ -изобары к другой. Однако амплитуда этого скачка существенно меньше, и для всех исследованных случаев r_{ex} лежит в диапазоне $0,1 \leq r_{ex} \leq 0,3$ фм, т.е. достаточно близко по порядку величины к характерному «жесткому» размеру нуклона $r_q \sim 0,2$ фм. Величина r_q может интерпретироваться как радиус жесткой сердцевины или ястровских корреляций, как размер конститuentного кварка, длина комптоновской волны нуклона или каким-либо сходным образом. В дальнейшем мы будем говорить об r_q как о размере нуклонных конститuentов, не делая акцента на какой-либо конкретной модельной интерпретации.

В связи с этим целесообразно ввести характеристические функции

$$\delta x_d \equiv 1 - \left[\frac{r_d - \langle r_0 \rangle}{\langle r_0 \rangle} \right]^2,$$

$$\delta x_{ex} \equiv 1 - \left[\frac{r_{ex} - \langle r_q \rangle}{\langle r_q \rangle} \right]^2.$$

Как видно из рис.3, энергетическая зависимость δx_d и δx_{ex} носит выраженный резонансный характер; для $\Delta(1232)$ -изобары положение максимумов δx_d и δx_{ex} совпадают ($\langle r_0 \rangle = 0,86$ фм, $\langle r_q \rangle = 0,18$ фм). Резонансные кривые $\delta x_d(T)$ и $\delta x_{ex}(T)$ хорошо коррелируют как между собой, так и с нормированной на единицу в максимуме функцией

$$\hat{\sigma}_{\Delta}(T) \equiv \sigma_{p+p \rightarrow n+\Delta^{++}} / \sigma_{p+p \rightarrow n+\Delta^{++}}^{\max},$$

описывающей энергетическую зависимость полного сечения образования P_{33} -резонанса [77,78].

С увеличением массы Δ -изобары положения максимумов функций $\delta x_d(T)$ и $\delta x_{ex}(T)$ раздвигаются, причем максимум δx_{ex} быстро приближается к порогу рождения Δ -резонанса, а для $\Delta(2420)$ попадает в кинематически запрещенную область.

Описанное поведение величин δx_d и δx_{ex} может быть интерпретировано следующим образом. В области энергий $T \approx 1$ ГэВ «прямой» виртуальный пион резонирует на нуклоне как целом, а «обменный» пион одновременно резонирует на нуклонном конститuentе. Конструктивная интерференция «прямой» и «обменной» амплитуд приводит к резонансному усилению сечения Δ -изобары, а также к заметному увеличению полного и неупругого сечений NN -взаимодействия [77,78]. С ростом энергии пучка «нуклонный» и «конституентный» резонансы раздвигаются, поэтому при $T_p > 3$ ГэВ изобара $\Delta(1232)$ возбуждается слабо. Образование же более тяжелых Δ -резонансов в нуклон-нуклонных соударениях всегда подавлено из-за рассогласования резонансных условий для прямой и обменной амплитуд.

Предложенная двухмасштабная модель рождения Δ -изобар также позволяет качественно объяснить обрыв спектра Δ -резонансов. В самом деле, при $n = 5$ согласно табл.1 перестает выполняться условие

$$\frac{\langle r_0 \rangle}{n + \gamma} \geq r_q, \quad (22)$$

т.е. длина дебройлевской волны пиона становится меньше размеров длины комптоновской волны нуклона, и стенка «нуклонной потенциаль-

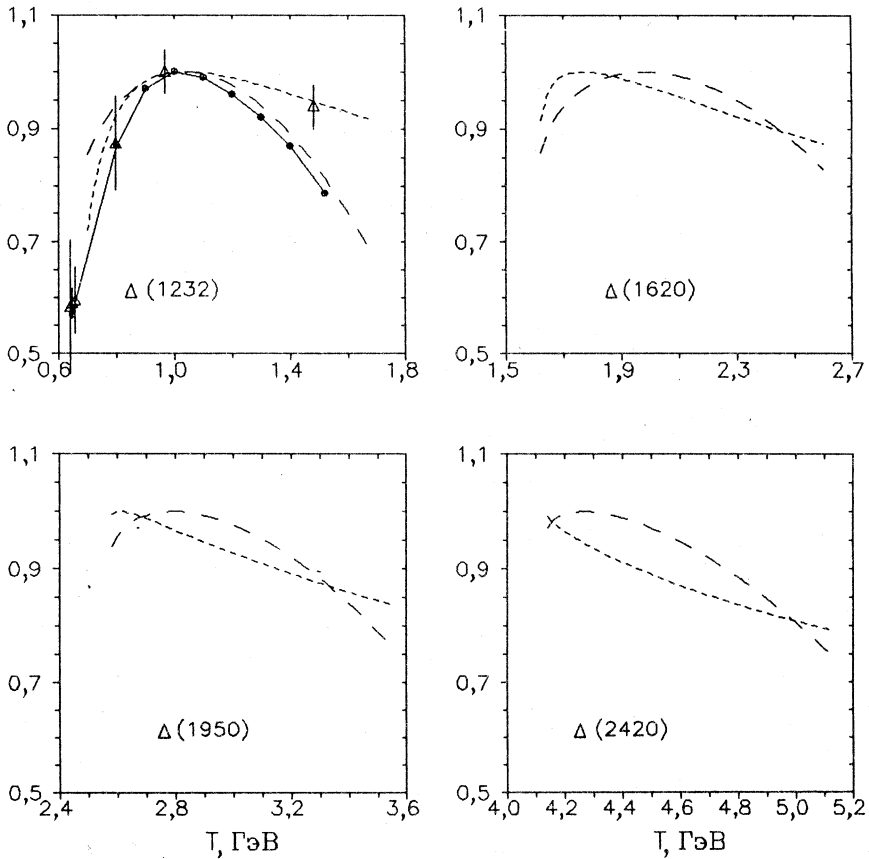


Рис.3. Зависимость характеристических функций Δx_d и Δx_{ex} от энергии налетающего протона для типичных Δ -изобар, входящих в состав четырех основных мультиплетов барионов с изоспином $3/2$. Экспериментальные точки на графике для $\Delta(1232)$ -изобары описывают энергетическую зависимость сечения реакции $pp \rightarrow n\Delta$ (кружки) и $pp \rightarrow p\pi\pi^+$ (треугольники)

ной ямы» экранируется. Следовательно, ограниченность спектра барионных резонансов сверху служит дополнительным указанием на жизнеспособность двухмасштабной модели резонансного пион-нуклонного рассеяния.

Таким образом, селективное возбуждение $\Delta(1232)$ -резонанса в области энергий $T_p \sim 1$ ГэВ в рамках излагаемого подхода может рассматриваться

как проявление двойного резонанса формы. С точки зрения формальной теории рассеяния подобный резонанс можно трактовать как аномальное усиление процесса из-за одновременного выполнения условия взаимодействия в конечном (начальном) состоянии двух пар частиц [79,80] (в нашем случае — виртуальных пионов с нуклоном и конститuentом).

Рассмотрим барион как резонирующую систему, распадающуюся на мезон и барион с суммарной массой, меньшей, чем масса исходного бариона. Инвариантная масса исходной системы задается формулой

$$\sqrt{s} = \sqrt{P_{\mu}^2 + m_{\mu}^2} + \sqrt{P_b^2 + m_b^2}, \quad (23)$$

где индексы μ и b соответствуют мезону и бариону. Согласно (21) и (23) масса барионного резонанса определяется соотношением

$$M_n(B) = \sqrt{m_{\mu}^2 + \left[\frac{n+\gamma}{r_0} \right]^2} + \sqrt{m_b^2 + \left[\frac{n+\gamma}{r_0} \right]^2} + \Delta M_n, \quad (24)$$

где $\Delta M_n < \Gamma$ — поправочный член к массовой формуле, описывающий зависимость величины $M_n(B)$ от остальных квантовых чисел ($I, l, J, P, S, \dots$) и по определению равный

$$\Delta M(I, l, J, P, S, C, \dots) = \sqrt{s} - \sqrt{m_{\mu}^2 + \left[\frac{n+\gamma}{r_0} \right]^2} - \sqrt{m_b^2 + \left[\frac{n+\gamma}{r_0} \right]^2}. \quad (25)$$

Формула (24) для спектра барионных масс является физическим аналогом формулы Бальмера, а также аналогична формуле Вайцеккера для масс ядер в том смысле, что (24) содержит доминирующее слагаемое, описывающее положение «центров тяжести» мультиплетов, а также поправочный член, зависящий от конкретных квантовых чисел резонанса.

Еще раз подчеркнем, что основной член в массовой формуле (24) был получен на основе общего условия возникновения резонанса, не зависящего от конкретного вида волнового уравнения, тогда как для расчета поправки ΔM_n необходимо привлечение модельных представлений.

Все реакции, в которых за счет сильного взаимодействия происходит рождение и последующий распад барионного резонанса, описываются диаграммами, общий вид которых представлен на рис.4. Символы m_{in} (m_{out}) и B_{in} (B_{out}) обозначают налетающие (улетающие) мезон и барион, а толстая линия соответствует пропагатору барионного резонанса, возбуждаемого в реакции

$$m_{in} + B_{in} \rightarrow \tilde{B} \rightarrow m_{out} + B_{out}. \quad (26)$$

Структура (26) универсальна в том смысле, что она не зависит ни от того, являются ли входящие и выходящие частицы реальными или виртуальными, ни от способа регистрации конечных состояний. Например, в случае

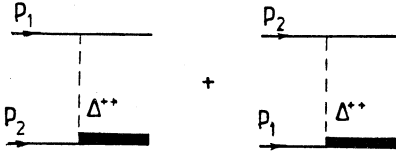


Рис.4. Диаграмма рождения и последующего распада барионного резонанса

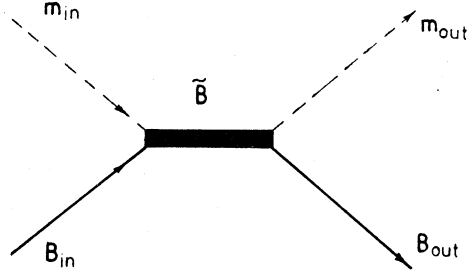


Рис.5. Прямая и обменная диаграммы реакции инклюзивной перезарядки $NN \rightarrow N\Delta$

реакции $p + p \rightarrow n + \Delta^{++} \rightarrow n + p + \pi^+$ мы можем пренебречь вкладом диаграмм, в которых нейтрон образуется в результате распада Δ -изобары и описать инклюзивное сечение перезарядки с помощью двух диаграмм (см. рис.5).

Тогда согласно [81,82]

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_n} = \frac{2m^2 P_n}{\lambda^{1/2}(s, m^2, m^2)(2\pi)^3} \Gamma_{\Delta}(s_{\Delta}) |G_{\Delta}(s_{\Delta})|^2 \langle 0 | M(p + p \rightarrow n + \Delta^{++}) | 0 \rangle^2, \quad (27)$$

где

$$\Gamma_{\Delta}(s_{\Delta}) = \frac{1}{6\pi} \left[\frac{f_{\pi N \Delta}}{m_{\pi}} \right]^2 P_{\pi}^3 \frac{m}{\sqrt{s_{\Delta}}}, \quad (28)$$

$$G_{\Delta}(s_{\Delta}) = \frac{2M_{\Delta}}{M_{\Delta}^2 - s_{\Delta} - iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}(s_{\Delta})}. \quad (29)$$

Формула получается интегрированием по $d\Omega_{\pi}$ аналогичной формулы из работы [81,82] (ниже используются обозначения, формулы и терминология из работ [1,2,83,84]), которое выполняется аналитически в случае отсутствия распадных диаграмм в амплитуде рождения Δ -изобары $M(p + p \rightarrow n + \Delta^{++})$. При этом $\langle 0 | M(p + p \rightarrow n + \Delta^{++}) | 0 \rangle^2$ — это усредненный по проекциям спина квадрат модуля эффективной амплитуды рождения Δ -изобары, зависящий как от наблюдаемых кинематических переменных, так и от кинематических переменных виртуальных частиц:

$$s_{\Delta} = 3m^2 + 2mE_1 - 2mE_n - 2E_1E_n + 2P_1P_n \cos \theta_n, \quad (30)$$

$$t_1 = -q_1^2 = 2m^2 - 2E_1 E_n + P_1 P_n \cos \theta_n, \quad (31)$$

$$t_2 = -q_2^2 = 2m^2 - 2mE_n, \quad (32)$$

$$\cos \theta_{12} = \frac{m(m^2 - s_\Delta)}{\sqrt{s_\Delta} t_1 t_2}, \quad (33)$$

$$s = 2m(E_1 + m), \quad (34)$$

где E_1 — полная энергия налетающего протона, $P_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$ — его импульс, а E_n и P_n — энергия и импульс регистрируемого нейтрона. Как уже отмечалось выше, формулы (27)—(34) получены в спектаторном приближении [6] для $\pi + p + g'$ -модели [81,82], которое является удовлетворительным для реакций $p + p \rightarrow n + X$ и $n + p \rightarrow p + X$ только вблизи максимума Δ -резонанса.

Выражение (27) содержит «нуклонный» ($\langle r_0 \rangle = 0,86$ фм) и «конституентный» ($r_q \approx 0,2$ фм) размеры в факторизованной форме. В самом деле, резонансный член $\Gamma_\Delta(s_\Delta) |G_\Delta(s_\Delta)|^2$ достигает максимума при $s_\Delta = M_\Delta^2$, что согласно (23), (24) и табл.1 возможно лишь в случае $n = 1$, $\gamma = 0$, $r_0 = 0,86$ фм. Следовательно,

$$M_\Delta = \sqrt{m_\pi^2 + \left[\frac{1}{r_0}\right]^2} + \sqrt{m^2 + \left[\frac{1}{r_0}\right]^2} + \Delta M_\Delta, \quad (35)$$

причем $\Delta M_\Delta \ll \Gamma_\Delta(M_\Delta)$. Таким образом, «нуклонный» размер $\langle r_0 \rangle \approx 0,86$ фм «спрятан» в пропагаторе Δ -изобары.

Амплитуда рождения Δ -изобары $M(p + p \rightarrow n + \Delta^{++})$ содержит формфакторы $F_{\pi NN}$ и $F_{\pi N\Delta}$, в которых «скрыт» конституентный размерный параметр $r_q \approx 0,2$ фм. (Например, для JAIN-набора [82] формфактор $F_{\pi N\Delta}$ содержит параметр обрезания $\Lambda_\pi = 1,2$ ГэВ, и величина $1/\Lambda_\pi \approx 0,17$ фм находится в прекрасном согласии с используемым нами значением $r_q \approx 0,18$ фм). Таким образом, математическая структура теории такова, что существенное усиление сечения $d^2\sigma/d\Omega dE$ или σ_{tot} возможно лишь тогда, когда резонанс на размере $\langle r_0 \rangle = 0,86$ фм возникает одновременно с резонансом на размере $r_q \approx 0,2$ фм. Формула (27) является первым членом миттаг-леффлеровского разложения NN -амплитуды по резонансам и может быть обобщена на случай произвольного резонанса посредством замены $M_\Delta \rightarrow M_n$ (n — «главное квантовое число»).

Отметим, что резонансная параметризация электромагнитных формфакторов нуклона, аналогичных вершинным функциям $F_{\pi NN}$ и $F_{\pi N\Delta}$ как по форме записи, так и по физическому смыслу, широко использовалась в 50-е годы [85]. В те же годы интенсивно исследовалась модель двойных резонансов для электрон-нуклонного рассеяния [86]. Однако в этих работах резонансные формфакторы для «керна» и «резонанса» вводились аддитивно. В результате согласование существующих экспериментальных данных с первыми принципами квантовой теории поля оказалось невозможным [87].

Суммируем изложенные выше результаты. Показано, что общесфизическое (инвариантное относительно конкретного вида волнового уравнения) условие возникновения резонанса в волновых системах позволяет описать gross-структуру барионного спектра. При этом оказалось, что все барионы имеют приблизительно одинаковый «размер» $\langle r_0 \rangle = 0,86$ фм, близкий к электромагнитному размеру нуклона. Это позволяет трактовать их как резонансы формы, причем только $\Delta(1232)$ -изобара может рассматриваться как двойной резонанс формы, что объясняет ее уникальную выделенность и селективность в пион-нуклонной и пион-ядерной физике.

Главный член в массовой формуле (24) не зависит от конкретной динамической модели. В теории низкоэнергетического потенциального рассеяния хорошо известно приближение эффективного радиуса, не зависящее от конкретного вида потенциала взаимодействия, что позволяет рассматривать формулу (24) как эвристический инструмент для поиска новых низкоэнергетических приближений в квантовой теории поля (включая КХД). Попутно отметим, что формула (24) близка по структуре к аналогичным формулам в модели мешка [88,89], что может служить дополнительным аргументом в пользу ее глубокой физической обоснованности.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ШИРИН РЕЗОНАНСОВ

Целью настоящего раздела является обобщение формализма С.Г.Кадменского на случай распада короткоживущих квазипотенциальных состояний в квантовой механике, а также получение асимптотических оценок ширин подобных состояний и приложение развиваемого подхода к проблеме оценки ширин адронных и дибарионных резонансов [90]. Следует отметить, что в работах [91,92] развит квазиклассический метод вычисления ширин короткоживущих квазистационарных состояний. Ниже мы изложим метод [90], основанный на аналитическом продолжении решений уравнения Шредингера в комплексную плоскость энергии.

В наивной модели α -распада [93] ширина квазистационарного уровня в квазиклассическом приближении определяется формулой

$$\Gamma = \frac{P_{\alpha} \hbar^2 K}{2mR} \exp \left[-2 \int_R^{C/Q} dr k(r) \right], \quad (36)$$

где P_{α} — вероятность формирования α -частицы, m — ее приведенная масса, R — радиус канала, $C = 2(Z-2)e^2$ — произведение зарядов α -частицы и дочернего ядра, Q — энергия α -частицы в системе центра масс родительского ядра, K и $k(r)$ — волновой вектор α -частицы внутри ямы и под барьером соответственно:

$$K = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(Q + V_N - \frac{C}{R} \right) \right]^{1/2},$$

$$k(r) = \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{C}{r} - Q \right) \right]^{1/2},$$

причем V_N — глубина эффективной прямоугольной потенциальной ямы. Следует отметить, что даже такой упрощенный подход позволяет получить разумное описание экспериментальных данных путем подбора параметра R .

В рамках стандартного R -матричного формализма [15] ширина квазистационарного состояния вычисляется согласно формуле

$$\Gamma = 2\gamma_{CL}^2 P_{CL},$$

где γ_{CL}^2 — приведенная ширина уровня:

$$\gamma_{CL} = \left(\frac{\hbar^2}{2mR} \right)^{1/2} \int \Phi_C^* X_{LJM} dS,$$

Φ_C — поверхностная волновая функция канала, X_{LJM} — решение задачи на собственные значения во внутренней области распадающейся системы, а P_{CL} — фактор проницаемости барьера:

$$P_{CL} = \frac{kR}{F_L^2(\eta, kR) + G_L^2(\eta, kR)},$$

где F_L и G_L — регулярная и нерегулярная кулоновские функции соответственно. Строго говоря, R -матричный подход лежит в основе большинства распространенных в ядерной физике низких энергий вариантов теории резонансных ядерных реакций.

Весьма плодотворный подход к проблеме α -распада был предложен в работах группы С.Г.Кадменского (см. монографию [13] и ссылки в ней). Он основан на использовании так называемого интегрального формализма, который в случае наивной кластерной модели приводит к следующему выражению для ширины уровня:

$$\Gamma = 2\pi \left| \int_0^R \tilde{F}_L(\eta, kr) V_{00}(r) \tilde{\phi}_L(r) dr \right|^2. \quad (37)$$

Обозначения в формуле (37) будут пояснены ниже.

Во всех перечисленных выше подходах естественным малым параметром теории служил фактор проницаемости барьера

$$P_{CL} \ll 1. \quad (38)$$

Однако в случае α -распада высоковозбужденных состояний ядер, а также в физике адронных резонансов постоянно приходится сталкиваться с нарушением условия (38). Покажем, как можно рассчитать ширину квазистационарного состояния без использования предложения о малости фактора проницаемости барьера (38).

Для определенности рассмотрим в одночастичном приближении задачу об α -распаде короткоживущих состояний атомных ядер.

Обозначим U_L — радиальную волновую функцию α -частицы, движущуюся в потенциале $V_{\alpha A}(r)$, а F_L — аналогичную регулярную функцию Кулона. Уравнения Шредингера для U_L и F_L имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_L}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (Q - V_c(r) - \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2m r^2} - V_{\alpha A}(r)) U_L &= 0, \\ \frac{d^2 F_L}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (Q - V_{cp}(r) - \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2m r^2}) F_L &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где L — орбитальный момент, V_c — кулоновский потенциал, рассчитанный с учетом конечности размеров ядра, V_{cp} — кулоновский потенциал точечного заряда, $V_{\alpha A}$ — потенциал взаимодействия α -частицы с ядром-остатком.

Воспользуемся стандартным методом Грина и сделаем следующие преобразования:

$$F_L \frac{d^2 U_L}{dr^2} - U_L \frac{d^2 F_L}{dr^2} = \frac{2m}{\hbar^2} V_{00}(r) U_L F_L, \quad (40)$$

где

$$V_{00}(r) = V_{\alpha A}(r) + V_c(r) - V_{cp}(r).$$

Интегрируя выражение (40) по частям, получаем

$$F_L(\eta, kR)U'_L(R) - U_L(R)F'_L(\eta, kR) = \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^R V_{00}(r)U_L(r)F_L(\eta, kr)dr. \quad (41)$$

Здесь и далее штрих обозначает первую производную по R .

Если R_0 — радиус обрезания ядерного потенциала, то при $R > R_0$ выполняется соотношение

$$U_L(R) = \frac{i}{2}([G_L - iF_L] - S_L[G_L + iF_L]),$$

откуда немедленно получаем

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}([G'_L - iF'_L] - S_L[G'_L + iF'_L])F_L - \frac{i}{2}([G_L - iF_L] - S_L[G_L + iF_L])F'_L = \\ = \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^R F_L(\eta, kR)V_{00}(r)U_L(r)dr. \end{aligned} \quad (42)$$

Воспользуемся свойством вронскиана:

$$F'_L G_L - F_L G'_L = k,$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} Q.$$

Введем функцию

$$\varphi_L(r) = S_L^{-1} U_L(r), \quad (43)$$

имеющую асимптотику:

$$\varphi_L(r) \propto \frac{i}{2}[S_L^{-1}(G_L(\eta, kr) - iF_L(\eta, kr)) - (G_L(\eta, kr) + iF_L(\eta, kr))]. \quad (44)$$

В резонансе по определению

$$S_L^{-1} = 0, \quad (45)$$

и асимптотика (44) резко упрощается:

$$\bar{\varphi}_L(r) \propto -\frac{i}{2}[G_L(\eta, kr) + iF_L(\eta, kr)]. \quad (46)$$

Для того чтобы подчеркнуть, что мы работаем только в окрестности резонанса, волновую функцию $\varphi_L(r)$ при $S_L^{-1} = 0$ в формуле (46) и далее мы

будем обозначать $\bar{\Phi}_L(r)$. Выразим ее через нормированную на единицу во внутренней области резонанса волновую функцию $\tilde{\Phi}_L(r)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_L(r) &= A_L \bar{\Phi}_L(r), \\ \int_0^R |\tilde{\Phi}_L(r)|^2 dr &= 1.\end{aligned}\quad (47)$$

Далее, чтобы не удлиннять формулы, мы обозначим $C_L, F_L, \dots$ значения соответствующих функций в точке R . Во избежание путаницы в обозначениях производную по r мы будем обозначать точкой. Введем поправочную функцию $\kappa(k, k^*)$:

$$\begin{aligned}\kappa^{-2}(k, k^*) &= \frac{1}{2k} ([G_L^* \dot{F}_L k - F_L^* \dot{G}_L k + G_L \dot{F}_L^* k^* - F_L \dot{G}_L^* k^*] + \\ &+ i[G_L \dot{G}_L^* k^* - G_L^* \dot{G}_L k + F_L \dot{F}_L^* k^* - F_L^* \dot{F}_L k]).\end{aligned}\quad (48)$$

Очевидно, что в приближении малых ширин

$$\kappa(k, k^*) = 1. \quad (49)$$

Введем кулоновскую функцию, нормированную на δ -функцию по энергии на вещественной оси:

$$\tilde{F}_L(\eta, kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi \hbar v}} F_L(\eta, kr). \quad (50)$$

Собирая вместе соотношения (42)—(50), мы немедленно получаем точную формулу для расчета ширин:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\kappa^2(k, k^*)} \left| \int_0^R \tilde{F}_L(\eta, kr) V_{00}(r) \tilde{\Phi}_L(r) dr \right|^2. \quad (51)$$

В силу соотношения (49) в пределе малых ширин формула (51) переходит в известную формулу Кадменского. Соотношение (51) является результатом аналитического продолжения формализма Кадменского в комплексную плоскость энергии.

Подынтегральное выражение в (51) имеет хорошую структуру с точки зрения возможности построения асимптотических оценок ширины квазистационарных состояний. В самом деле, потенциал $V_{\alpha\alpha}(r)$ быстро убывает с ростом r , кулоновская функция $F_L(\eta, kr)$, напротив, экспоненциально растет при увеличении r , однако правее классической точки поворота она

ограничена. Волновая функция $\tilde{\varphi}_L$ осциллирует во внутренней области ядра и имеет максимум вблизи его поверхности. Произведение этих трех функций имеет острый максимум в поверхностной области ядра, и, следовательно, интеграл в (51) может быть оценен методом перевала.

Как результат, имеем

$$\Gamma_{s.p} = \xi_L(Q, r_0) \frac{kr_0}{2Q} [F_L(\eta, kr_0) V_{00}(r_0)]^2, \quad (52)$$

где $\Gamma_{s.p}$ — предельная одночастичная оценка ширины Γ , r_0 — радиус канала, выбираемого из условия максимума подынтегральной функции в формуле (51), а ξ_L — поправочный фактор порядка единицы:

$$\xi_L(Q, r_0) = \frac{8\pi |\tilde{\varphi}_L(r_0)|^2 \sigma^2}{r_0^2 \kappa^2(k, k^*)}. \quad (53)$$

В свою очередь, величина σ находится по формуле

$$\sigma^{-2} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{V_{00}} \frac{\partial V_{00}}{\partial r} + \frac{1}{F_L} \frac{\partial F_L}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{\varphi}_L} \frac{\partial \tilde{\varphi}_L}{\partial r} \right]_{r=r_0}. \quad (54)$$

В соответствии с общей идеологией развиваемого подхода соотношения (52)—(54) получены в предположении, что радиус канала определяется из условия

$$\frac{\partial}{\partial r} [\tilde{F}_L(\eta, kr) V_{00}(r) \tilde{\varphi}_L(r)]_{r=r_0} = 0, \quad (55)$$

причем

$$\tilde{\varphi}_L(r_0) \approx 0. \quad (56)$$

Аналитичность соотношений (52)—(54) позволяет использовать их для оценки ширин адронных резонансов, т.е. в тех случаях, когда потенциал взаимодействия фрагментов распадающейся системы во внутренней области плохо известен. Влияние кулоновского барьера в этом случае невелико, и оценка (52) упрощается:

$$\Gamma_{s.p} = \tilde{\xi}_L(Q, r_0) \frac{(kr_0)^{2L+1}}{2Q} [V_{00}(r_0)]^2. \quad (57)$$

Новый поправочный фактор возникает при замене кулоновской функции на ее асимптотическое значение. Для оценок примем

$$\tilde{\varphi}_L(r_0) \approx r_0^{-1/2}, \quad \sigma \approx 0,2 \text{ фм},$$

тогда $\tilde{\xi} \approx 1,3$. Точнее значение $\tilde{\xi}$ оценить нельзя, поскольку величину σ определяет вторая производная от $\ln(\tilde{\phi}_L(r))$, которая может быть найдена лишь численно.

Учет многочастичности задачи может быть произведен посредством введения спектроскопического фактора w : $\Gamma = w\Gamma_{s,p}$.

В качестве иллюстрации работоспособности излагаемого подхода приведем численные примеры. Так, при рассмотрении α -распада изотопов свинца ширина отдельных состояний может изменяться на 18 порядков. Несмотря на это из табл.3 видно, что перевальные оценки ширин разумно согласуются с точными расчетами в рамках интегрального формализма Кадменского.

Таблица 3. Ширина α -распада изотопов свинца

Ядро	$\Gamma^{\text{теор}}, \text{МэВ}$	$\Gamma^{\text{теор}}(R_0), \text{МэВ}$	$\Gamma_{\text{эксп}}, \text{МэВ}$ [94]
^{182}Pb	$1,06 \cdot 10^{-19}$	$0,55 \cdot 10^{-19}$	$0,82 \cdot 10^{-20}$
^{184}Pb	$0,75 \cdot 10^{-20}$	$0,42 \cdot 10^{-20}$	$0,83 \cdot 10^{-21}$
^{186}Pb	$0,49 \cdot 10^{-21}$	$0,30 \cdot 10^{-21}$	$0,97 \cdot 10^{-22}$
^{188}Pb	$0,17 \cdot 10^{-22}$	$0,11 \cdot 10^{-22}$	$0,41 \cdot 10^{-23}$
^{190}Pb	$0,20 \cdot 10^{-24}$	$0,15 \cdot 10^{-24}$	$0,57 \cdot 10^{-25}$
^{192}Pb	$0,69 \cdot 10^{-27}$	$0,60 \cdot 10^{-27}$	$0,13 \cdot 10^{-27}$
^{194}Pb	$0,16 \cdot 10^{-30}$	$0,17 \cdot 10^{-30}$	$0,41 \cdot 10^{-31}$
^{210}Pb	$0,66 \cdot 10^{-37}$	$0,10 \cdot 10^{-36}$	$0,12 \cdot 10^{-37}$

При расчетах мы полагали $R_0 = 1,25A^{1/3}$ фм и использовали потенциал Саксона — Вудса с параметром диффузности $a = 0,55$ фм. Глубина потенциала подбиралась в соответствии с энергией α -частицы Q по процедуре подгонки глубины ямы.

В многочисленных работах, выполненных в рамках подхода С.Г.Кадменского (см. монографию [13]), было установлено, что интеграл в (37) набирается в поверхностной области ядра. При этом ни наличие связи каналов (см. [95]), ни учет сверхтекучих корреляций и перенормировки взаимодействия при переходе от свободных нуклонов к связанным внутриядерным [96] не меняет указанного фундаментального вывода о том, что ширина α -распада формируется в кластерной (поверхностной) области ядра.

Используем изложенное выше обобщение формализма Кадменского для численной оценки ширин нестранных барионных резонансов. Сначала рассмотрим задачу резонансного P -волнового πN -рассеяния в рамках диаграммной техники, изложенной в [6].

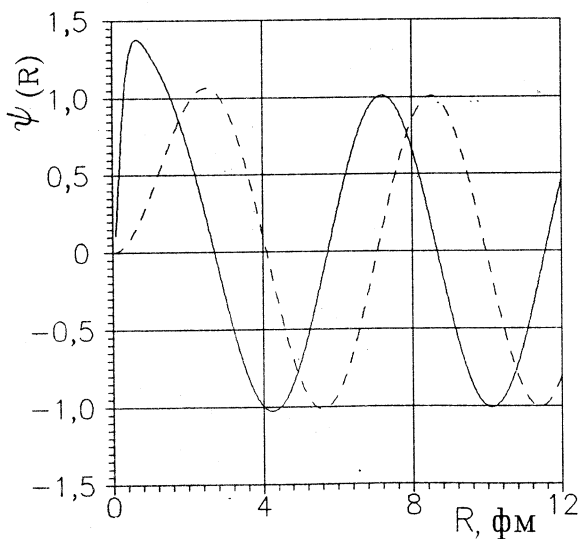


Рис.6. Волновая функция пиона в СЦИ распадающейся $\Delta(1232)$ -изобары. Штриховая кривая соответствует волновой функции свободного пиона с орбитальным моментом $L = 1$

Для этого в первом борновском приближении рассчитаем дальнедействующую часть эффективного потенциала πN -взаимодействия [38]:

$$U_{\text{eff}}^{\pi N}(r) = -f_{\pi NN}^2 \frac{m + m_\pi}{mm_\pi} \left[\frac{m}{m_\pi} \right]^2 \frac{P_\pi^2}{\sqrt{s}} \frac{\exp(-\alpha r)}{r}, \quad (58)$$

где $m(m_\pi)$ — масса нуклона (пиона), $f_{\pi NN} = 1$ — сильная константа связи, $\alpha = \sqrt{2mE_\pi}$; $E_\pi = \sqrt{P_\pi^2 + m_\pi^2}$; $P_\pi = \lambda^{1/2}(s, m^2, m_\pi^2)/(2\sqrt{s})$, а треугольная функция λ определяется стандартным соотношением $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$.

Для анализа проблемы ширины адронных резонансов воспользуемся принципом соответствия.

Рассчитаем волновую функцию $\psi(r)$ пиона, образующегося при распаде Δ -изобары посредством численного интегрирования уравнения Клейна — Гордона, линеаризованного по потенциалу $U_{\text{eff}}^{\pi N}$. Из рис.6 видно, что потенциал $U_{\text{eff}}^{\pi N}(r)$ затягивает волновую функцию (ВФ) пиона во внутреннюю

область нуклона, причем положение максимума ВФ практически совпадает с первым боровским радиусом $r_0 = 0,86$ фм для $L = 1$.

Отсюда следует, что резонансы формируются на относительно больших расстояниях между разлетающимися продуктами распада. Это позволяет провести аналогию между физикой адронных резонансов и α -распадом (т.е. между физикой кварковых и нуклонных кластеров), при котором α -частица формируется в поверхностной области ядра [13,95,96]. В табл.4 представлены ширины адронных резонансов, рассчитанные в приближении (57), физическим обоснованием которого служит указанная выше аналогия между α -распадом и распадом адронных резонансов. Из табл.4 видно, что согласие теории с экспериментом хорошее.

Таблица 4. Массы и ширины πN -резонансов (в МэВ)

	Резонанс	$\Delta(1232)$	$N^*(1440)$
	$n + \gamma$	1	$1 + 1/2$
М	теория	1234	1370
	эксп. [24]	1230—1234	1430—1470
Г	теория	100	260
	эксп. [24]	115—125	250—450

Тот факт, что положение внешнего максимума волновой функции пиона $\psi(r)$, образующегося при распаде Δ -изобары (или $N^*(1440)$ -резонанса), практически совпадает с $r_0 = 0,86$ фм, говорит о том, что в физике адронных резонансов мы имеем дело с квантово-механическим аналогом открытых резонаторов [50]. В известной монографии [17] были проанализированы некоторые общие свойства квантовых аналогов открытых резонаторов.

Весьма серьезным тестом на справедливость излагаемого подхода является проверка его применимости к анализу свойств дибарионов. История узких дибарионных резонансов драматична. Существующая литература по данному вопросу очень богата (см., например, обзоры [97—99,28,27] и ссылки в них), но противоречива. Несмотря на то, что имеются расхождения экспериментальных данных из разных групп, мы решили использовать обширные результаты, полученные дубненской коллаборацией [100].

Расчеты ширин дибарионных резонансов проводились с потенциалом Хьюлтена

$$V_{00}(r) = V_0 \frac{\exp(-\mu r)}{1 - \exp(-\mu r)}, \quad (59)$$

причем для протон-нейтронных резонансов глубина потенциала принималась равной 35 МэВ, а для протон-протонных резонансов — 49 МэВ.

Таблица 5. Инвариантные массы и ширины (МэВ) дипротонных резонансов.
Приведены наблюдаемые экспериментальные ширины без коррекции
на разрешающую способность аппаратуры

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2
М	теория	1890	1932	1998	2088	2198	2326	2468
	эксп. [100]	1886	1937	1999	2087	2172		
Г	теория	4	9	12	17	22		
	эксп. [100]	4 $\mp$ 1	7 $\mp$ 2	9 $\mp$ 4	12 $\mp$ 7	7 $\mp$ 3		

Таблица 6. Инвариантные массы и ширины нейтрон-протонных резонансов
(в МэВ)

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2
М	теория	1892	1933	2000	2089	2200	2327	2469
	эксп. [100]			1998	2084			
Г	теория	2	4	6	8	10		
	эксп. [100]			14 $\mp$ 4	11 $\mp$ 5			

Параметр $\mu = 1,1 \text{ фм}^{-1}$. При этом, как видно из табл.5 и 6, имеет место хорошее согласие теории с экспериментом [100].

Таким образом, в табл.4—6 демонстрируется хорошее согласие теоретических и экспериментальных значений ширин. Причем во всех расчетах масс и ширин барионных и дибарионных резонансов использовалось одно и то же значение параметра $r_0 = 0,86 \text{ фм}$.

Необходимо особо отметить, что в рамках одного и того же подхода без подгоночных параметров удалось описать как широкие адронные резонансы (Δ -изобару и ропер), так и узкие дибарионные резонансы, имеющие ширину на 1—2 порядка меньшую. Происхождение этой малости ширины дибарионных резонансов хорошо иллюстрирует рис.7, на котором представлены в одном масштабе πN -потенциал (58) и потенциал Хюльтена для нейтрон-протонного взаимодействия. Малая глубина последнего в окрестности радиуса канала связана с тем, что при низких энергиях NN -взаимодействие определяется обменом пиона вдали от массовой поверхности. А малость потенциала взаимодействия, согласно (52), приводит к узости соответствующего резонанса.

В случае πN -взаимодействия пион лежит на массовой поверхности, и соответствующий потенциал имеет большую глубину. Следовательно, все

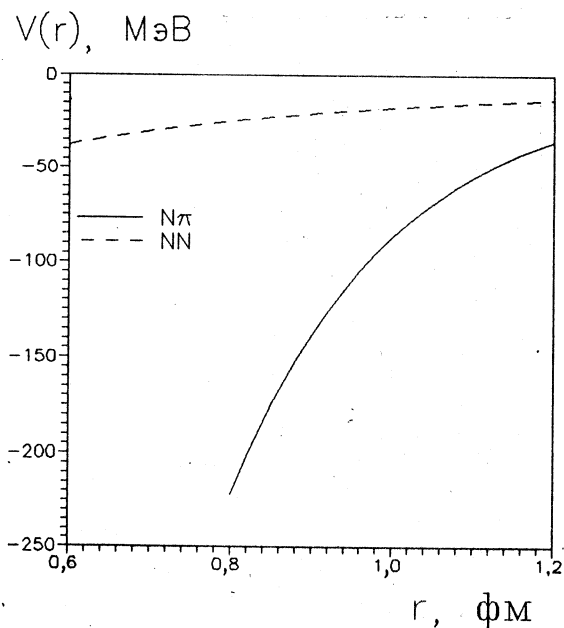


Рис.7. Потенциал Хюльтена для нейтрон-протонного взаимодействия (штриховая кривая) и эффективный потенциал πN -взаимодействия (сплошная кривая)

известные барионы, распадающиеся в результате сильных процессов, имеют характерные ширины порядка 100 МэВ.

Таким образом, ширины адронных и дибарионных резонансов допускают достаточно точное воспроизведение в рамках принципа соответствия на основе глубокой физической аналогии с теорией α -распада. Опыт, накопленный в процессе решения многочисленных задач в физике α -распада, однозначно свидетельствует о нечувствительности результатов расчета к выбору потенциалов αA -взаимодействия во внутренней области ядра. Теоретическая ширина α -распада также практически не зависит от поведения эффективной волновой функции α -частицы во внутренней области ядра. Физика α -распада — это кластерная физика. Все наблюдаемые величины определяются потенциалом αA -взаимодействия на поверхности ядра.

Перенесение этого подхода на физику адронных резонансов особенно важно, поскольку потенциальное описание подобных резонансов возможно только в поверхностной области распадающихся адронов. Поэтому систематическое исследование ширин адронных и дибарионных резонансов способно дать полезную информацию о потенциалах взаимодействия в окрест-

ности радиуса канала, ответственного за формирование резонанса. По нашему мнению малость ширин дибарионных резонансов, по сравнению с ширинами адронных резонансов, обусловлена малостью NN -взаимодействия по отношению к πN -взаимодействию в области формирования резонанса.

5. ПРИНЦИП ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Использование принципов подобия, размерности и автомодельности оказалось весьма плодотворным в механике сплошных сред, гидродинамике, теории горения и т.п. [101—103]. В физику частиц гипотеза автомодельности была введена Матвеевым, Мурадяном и Тавхелидзе [41]. Дальнейшее развитие принципы подобия, размерности и автомодельности получили в работах А.М.Балдина [42], посвященных релятивистской теории динамических систем.

Проиллюстрируем работоспособность методов теории подобия на хорошо известных примерах из нерелятивистской ядерной физики.

Согласно Вайцзеккеру [104] имеет место следующая зависимость радиуса ядра от числа нуклонов в ядре A :

$$R = R_0 A^{1/3}. \quad (60)$$

Из формулы (60) немедленно следует, что объем ядра пропорционален числу нуклонов. Это свойство сближает ядро с обычными однородными веществами. Ландау на основе разработанной им теории ферми-жидкости ввел понятие квазичастиц [105]. Важнейшей характеристикой ферми-жидкости оказалась дебройлевская длина волны $\lambda_f = 1/k_f$ квазичастицы, лежащей на поверхности Ферми. Введение понятия о квазичастицах представляется достаточно обоснованным только при выполнении условия

$$k_f R \gg 1, \quad R \gg \lambda_f, \quad (61)$$

что совпадает с условием применимости квазиклассического приближения в квантовой механике.

В рамках теории конечных ферми-систем энергию основного состояния ядра можно представить в виде суммы

$$E = E_0 + E_1,$$

где E_0 и E_1 — плавная и осциллирующая функции числа квазичастиц соответственно. Согласно работе [106] энергия E_1 имеет период $\pi/2$ в шкале $k_f R$. Действительно, для квазичастиц в ядре выполняется условие при-

менимости квазиклассического приближения. Поэтому можно применить правило радиального квантования Бора — Зоммерфельда. В итоге получается правило квантования для уровня Ферми [106]:

$$k_f R = \frac{\pi}{2} n, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (62)$$

достаточно хорошо воспроизводящее магические числа нуклонов в ядре. Приведенный результат можно интерпретировать следующим образом: наибольшей стабильностью обладают ядра, у которых **на диаметре $d = 2R$ укладывается целое число дебройлевских полуволен квазичастицы, лежащей на поверхности Ферми.**

Для ядерных резонансов коллективной природы [18] также выполняется соотношение

$$k = \beta \frac{1}{R} = \beta_1 A^{-1/3},$$

аналогичное (62). Таким образом, в приведенных примерах наблюдаемые квантовые эффекты объясняются существованием резонансных собственных частот для дебройлевских волн внутри сферической полости радиуса R .

В этом разделе мы кратко рассмотрели гросс-структуру ядра, отвлекаясь от ее тонких деталей. Ядро рассматривалось как грубая система, динамику которой можно описать в общих чертах в рамках теории ферми-жидкости. Указанный подход был использован В.Г.Носовым в монографии [106]. Для применимости такого подхода необходимо выполнение соотношений (60) и (61). **При этом оказывается, что важнейшей характеристикой ядра как грубой системы является величина $k_f R$, по определению совпадающая с угловым моментом $L = k_f R$ квазичастицы, лежащей на поверхности Ферми.**

Гипотеза автомодельности, введенная в физику частиц Матвеевым, Мурадяном и Тавхелидзе [41], подразумевает инвариантность по отношению к преобразованию импульсного пространства $P_i \rightarrow \xi P_i$.

Применим изложенные выше принципы для анализа спектра адронных (и других субатомных) резонансов. Воспользуемся тем, что для сферически-симметричных систем угловой момент L является интегралом движения. Кроме того, он остается неизменным при преобразовании дилатации

$$P \rightarrow \xi P, \quad r \rightarrow \xi^{-1} r, \quad (63)$$

где $P = \hbar k$: В этом случае длина волны де Бройля преобразуется как $\lambda_D \rightarrow \xi^{-1} \lambda_D$. Итак, в квазиклассическом приближении $L = R/\lambda_D$, т.е. интеграл движения L определяется характерным размером системы и соответствующей длиной дебройлевской волны. В работах [36—39] было показано на конкретных примерах, что условие квантования (21) может

быть применено для адронных резонансов, распадающихся как за счет сильного, так и за счет слабого взаимодействия. Поэтому мы примем следующую рабочую гипотезу: условие квантования (21) справедливо для резонансов любой природы, независимо от вида взаимодействия при выполнении условия квазиклассичности (61). Другими словами, здесь мы имеем дело с принципом автомодельности второго рода, т.е. к принципам теории размерности и автомодельности добавляются определенные свойства асимптотического поведения рассматриваемых величин. В нашем случае это требование выполнения условия квазиклассичности (61).

Перепишем формулу

$$m_n(R) = \sqrt{m_1^2 + P^2} + \sqrt{m_2^2 + P^2}, \quad (64)$$

используя соотношения $\lambda_D = \hbar/P$, $\lambda_C = \hbar/mc$:

$$m_n(R) = \hbar c \sqrt{\lambda(1)_C^{-2} + \lambda_D^{-2}} + \hbar c \sqrt{\lambda(2)_C^{-2} + \lambda_D^{-2}}, \quad (64a)$$

где λ_C — комптоновская длина волны для продуктов бинарного распада резонанса. Здесь λ_D/λ_C , r_0/λ_D — параметры подобия, и при их фиксированных значениях величина инвариантной массы остается подобной самой себе при изменении всех остальных параметров задачи.

При масштабных преобразованиях вида

$$P \rightarrow \xi P, \quad m_i \rightarrow \xi m_i \quad (63a)$$

инвариантные массы резонансов меняются как однородная функция параметра масштабного преобразования ξ :

$$m_n(R) \rightarrow \xi m_n(R). \quad (63b)$$

Таким образом, мы сформулировали принцип автомодельности для распределения масс резонансов.

Следует заметить, что в приведенной выше формулировке принципа автомодельности для распределения масс резонансов одинаково важную роль играют длины волн де Бройля и Комптона. Только при определенных соотношениях между ними возникают резонансы

$$\frac{r_0}{\lambda_D} \propto \frac{\lambda_C}{\lambda_D} \propto n.$$

Несмотря на приближенный характер полученных соотношений (при их установлении было использовано асимптотическое условие квазиклассичности (61)), их точность оказалась удивительно высокой (см. работы [36—39]). Ниже мы применим эти соотношения для систематического

исследования резонансов в системах (pp) , $(\pi\pi)$ и (e^+e^-) и на основе сравнительного анализа этих систем дадим интерпретацию «дармштадтского эффекта».

6. НЕСТРАННЫЕ ДИБАРИОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

История дибарионных резонансов драматична и противоречива. Современный статус дибарионных резонансов представлен в недавних обзорах [27—29], где анализируются экспериментальные данные об узких дибарионных резонансах в области инвариантных масс до 2300 МэВ. Характерной особенностью дибарионных резонансов является их аномально малая ширина. Объяснение этой особенности является весьма серьезным тестом для любой теоретической модели. Обзор теоретических работ представлен в [107] (см. также недавние публикации [108,109]). Существующие теоретические модели не в состоянии объяснить узость ширин дибарионных резонансов. Последняя доступная нам работа [110] дает оценку для ширины $\Gamma \leq 40$ МэВ. Как отмечалось выше, малость ширин дибарионных резонансов по сравнению с ширинами адронных резонансов обусловлена малостью NN -взаимодействия по отношению к πN -взаимодействию в области формирования резонанса (подробнее см. выше). Значения инвариантных масс дибарионных резонансов, вычисленные в существующих теоретических моделях [107], систематически больше на 300 МэВ, чем экспериментальные значения.

Однако следует заметить, что экспериментальный спектр дибарионных резонансов очень богатый, и, естественно, наш подход не в состоянии описать все наблюдаемые дибарионные состояния, поскольку он изначально претендует лишь на воспроизведение положения центров тяжести соответствующих мультиплетов. Поэтому ниже мы проанализируем экспериментальный спектр дипротонных резонансов, привлекая для этой цели все доступные нам экспериментальные данные. Для этого используем соотношение (64), из которого находится импульс P наблюдаемого протона (антипротона) в системе центра инерции распадающегося дибарионного резонанса. Применим полученное для разных дипротонных и антипротонных состояний распределение импульсов для вычисления спектра масс e^+e^- -системы, используя принцип масштабной инвариантности. Экспериментальные данные в совокупности с результатами наших расчетов на основе формул (21) и (24) представлены в табл.7 [111] (заметим, что в нашем подходе массы дипротонных и протон-антипротонных резонансов должны быть равными, и, как видно из табл.7, такое равенство в самом деле выполняется с хорошей точностью).

Таблица 7. Спектр масс дипротонных и протон-антипротонных резонансов (в МэВ). Экспериментальные данные для протон-антипротонных резонансов взяты из компиляции [24]

Теория	Эксперимент NN	Эксперимент $\overline{N\overline{N}}$
	1877,5 $\pm$ 0,5 [116]	
	1886 $\pm$ 1 [100]	
1890	1892 [100]	
	1898 $\pm$ 1 [100], 1902 [28]	1897 $\pm$ 1
	1916 $\pm$ 2 [100,28],	1920
	1918 $\pm$ 3 [112]	
1932	1937 $\pm$ 2 [100],	1930 $\pm$ 2
	1932 $\pm$ 3 [112]	
	1941 [28]	1942 $\pm$ 5, 1949 $\pm$ 10
	1955 $\pm$ 2 [100],	
	1956 $\pm$ 3 [113]	
	1965 $\pm$ 2 [100], 1969 [28]	1968
	1980 $\pm$ 2 [100]	
1999	1999 $\pm$ 2 [100]	
	2008 $\pm$ 3 [100], 2016 [28],	2022 $\pm$ 6
	2017 $\pm$ 3 [100]	
	2035 $\pm$ 8 [113]	
	2046 $\pm$ 3 [100], 2052 [28]	
2089	2087 $\pm$ 3 [100,28]	2080 $\pm$ 10, 2090 $\pm$ 20
	2106 $\pm$ 2 [100], 2122 [28]	2110 $\pm$ 10
	2129 $\pm$ 5 [100], 2155 [28]	
	2172 $\pm$ 5 [100]	2180 $\pm$ 10
2199	2194 [28]	2207 $\pm$ 13
	2220 [114], 2236 [28],	2229
	2238 $\pm$ 3 [100]	
	2282 $\pm$ 4 [100,28]	2260
2327		2307 $\pm$ 6
	2350 [114]	2380
2470		2480 $\pm$ 30, 2450 $\pm$ 10
		$\approx$ 2500
2625		
2790	2735 [115]	2710 $\pm$ 20
		2850 $\pm$ 5
2964		
3145		
3332		3370 $\pm$ 10
3524		3600 $\pm$ 20
3720		

7. ДАРМШТАДТСКИЙ ЭФФЕКТ

Современное состояние экспериментов и теоретических моделей по дармштадтскому эффекту дано в обзоре Ю.Н.Покотиловского [117] (литература по данной проблеме чрезвычайно богата, см. [117]). Суть дармштадтского эффекта состоит в том, что при столкновении тяжелых ионов при энергии ниже кулоновского барьера наблюдаются узкие позитронные линии и электронно-позитронные пары в диапазоне эффективных масс $1,4 \div 1,9$ МэВ с ширинами $2 \div 40$ кэВ. Сейчас можно считать общепризнанным фактом наличие самого эффекта. Постоянство, с которым узкие линии наблюдаются в независимых экспериментах совместно с их статистической значимостью $5\sigma - 6\sigma$, не позволяет интерпретировать их как статистические флуктуации. Также можно отметить как общепризнанный вывод о том, что гипотеза двухчастичного распада на позитрон и электрон свободной элементарной или составной частицы, покоящейся в системе центра масс сталкивающихся ионов, не может быть признана адекватной физике рассматриваемого эффекта. Аналогичный эффект наблюдался также при упругом рассеянии позитронов при низких энергиях на атомных электронах. Однако поиски резонансных состояний при рассеянии позитронов на электронах при соответствующих энергиях дают значительно более сильные ограничения на их ширину: $\Gamma < 10^{-3}$ эВ (см. ссылки на экспериментальные данные в [24], а также теоретическую работу [118]).

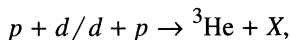
Привлекательность эффекта состоит в необычности ситуации: прекрасная известная система e^+e^- проявляет свойства, никак ранее не предполагавшиеся и никогда не предсказанные.

Последнее десятилетие ситуация подогревалась еще в связи с проблемой **гипотетического аксиона** — нейтральной ($J^P = 0^-$) частицы с непредсказываемой теорией массой. Проблема аксиона вызвала много безуспешных экспериментов по его обнаружению. Поэтому для объяснения дармштадтского эффекта были созданы модели, зачастую основанные на фантастических идеях. В качестве вывода приведем заключение из обзора [117]: **основные особенности дармштадтского эффекта представляют серьезную проблему для интерпретации и не находят объяснения.**

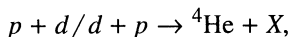
Еще раз подчеркнем: резонансные пики при рассеянии позитронов на свободных электронах не обнаружены, однако они обнаружены в e^+e^- -системе при рассеянии тяжелых ионов, а также при рассеянии позитронов на (связанных) атомных электронах. Другими словами, **дармштадтский эффект наблюдается только при условии присутствия внешнего силового центра.**

Нам представляется чрезвычайно важным указать некоторые хорошо известные аналогичные случаи в разных областях физики.

Рассмотрим АВС-«частицы» или АВС-эффект. Сообщение о наблюдении АВС-«частицы» впервые было приведено в [31] (название этой частице было присвоено по первым буквам фамилий авторов Abashian, Booth, Crowe) в реакции:



при энергии падающих протонов от 624 до 743 МэВ. В распределении импульса ${}^3\text{He}$ в лабораторной системе координат наблюдался острый пик, который в дальнейшем был интерпретирован как проявление резонансной структуры в системе двух пионов при массе 315 МэВ. Поскольку не было найдено такого же четкого эффекта в реакции



то авторы работ пришли к выводу, что изоспин АВС-«частицы» равен нулю. Литература по экспериментальному изучению АВС-эффекта довольно богата, современное состояние вопроса отражено в обзоре [32]. Отметим, что этот эффект экспериментально исследовался в различных реакциях (авторы обзора [32] отмечают 54 реакции). АВС-эффект наблюдается только тогда, когда в продуктах реакции наряду с двумя пионами присутствует третья частица (или много частиц). Согласно этому обзору не исключается возможность существования четырех резонансноподобных состояний $I = 0$, $J^\pi = 0^+$ с большими ширинами при энергиях 315, 455, 550 и 750 МэВ. Следует особо отметить, что (в противоположность случаю дармштадтского эффекта, который вызвал большой поток теоретических работ) АВС-эффект остался фактически незамеченным.

Компиляция доступных нам экспериментальных данных и результаты их теоретического анализа приведены в табл.8.

Содержащиеся в табл.8 указания на возможность существования новых резонансов могут открыть чрезвычайно интересную область физики резонансов немного выше порогов рождения n -частиц, например двух, трех, четырех,... пионов, мезонов, нуклонов и т.д.

Обратимся к истории открытия резонансов. Так, ρ -мезон с массой 770 МэВ и шириной $\Gamma = 152$ МэВ был открыт [124] при изучении угловых и энергетических зависимостей $\pi\pi$ -рассеяния. ρ -мезон распадается на два пиона ($\approx 100\%$) и является единственным твердо установленным двухпионным резонансом с минимальной массой 770 МэВ. Изучение трехпионных систем привело к открытию $\omega(782)$ -мезона с $\Gamma = 8,4$ МэВ при рассеянии антипротонов на протонах [125] и $\eta(547)$ -мезона [126] с $\Gamma = 1,2$ кэВ в реакции $\pi^+ + d \rightarrow p + p + \pi^+\pi^-\pi^0$. Действительно, трехпионный канал распада является доминирующим для этих мезонов: для $\eta(547)$ -мезона 55%, для $\omega(782)$ -мезона 89%. Совсем недавно было объявлено [127] о наблюдении резонанса 0^- с массой (749 ± 30) МэВ и $\Gamma = (32 \pm 17)$ МэВ в системе трех

Таблица 8. Спектр масс дипионных резонансов (в МэВ)

Теория	Эксперимент $\pi\pi$
361	315, $\Gamma = 25$ [32], 313 ± 3 [100]
	332 ± 3 [100]
	350 ± 10 [120]
	395 [119], 400 [122], 388 ± 2 [100]
537	425 [121]
	455 [32], 470 ± 7 [100]
	550 [32], 520 [119]
	583 ± 3 [100]
	600, $\Gamma = 600$ [123]
743	652 ± 2 [100]
959	750 [32], $769,9 \pm 0,8$, $\Gamma = 151,2 \pm 1,2$ [24]
1180	980 ± 10 , $\Gamma =$ от 40 до 400 [24]
1405	1275 ± 5 , $\Gamma = 185 \pm 20$ [24]
	1465 ± 25 , $\Gamma = 310 \pm 60$ [24]

пионов в реакции $\pi^- + A \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^- + A$. Были предсказаны векторные мезоны ρ и ω (см. ссылки в обзоре [32]), а также было предсказано [128] существование резонанса 0^- с массой (749 ± 30) МэВ в системе трех мезонов, однако о возможности существования η -мезона никто и не подозревал.

Итак, нижайший резонанс в трехпионной системе — η -мезон имеет инвариантную массу, меньшую на 225 МэВ, чем масса нижайшего резонанса в двухпионной системе (ρ -мезона), при этом $\Gamma_\rho/\Gamma_\eta \approx 10^5$ [24]. Более того, все вышеупомянутые резонансы, имеющие доминирующие трехпионные каналы распада, живут гораздо дольше, чем ρ -мезон. Далее, $\eta'(958)$ -мезон, распадающийся преимущественно на $\pi\pi\eta$ (65%), имеет ширину 200 кэВ, то есть живет дольше ρ -мезона в 760 раз.

Приведем еще один интересный пример. Дипионные массовые распределения, наблюдаемые при распаде Y -мезонов, невозможно объяснить в рамках существующих теоретических моделей (см. обзор [129]). Так, при распаде $Y(3S) \rightarrow Y(2S) + \pi^+\pi^-$ наблюдается пик в распределении масс двух пионов при энергии (350 ± 10) МэВ [120], а при распаде $Y(2S) \rightarrow Y(1S) + \pi^+\pi^-$ при энергии ≈ 310 МэВ [130]. Более того, при распаде $Y(3S) \rightarrow Y(1S) + \pi^+\pi^-$ наблюдаются два пика — при энергиях ≈ 400 и ≈ 800 МэВ [130] соответственно. Следовательно, система из двух пионов при наличии третьей частицы проявляет резонансные свойства при более низких значениях инвариантной массы двухпионной подсистемы по сравнению со случаем свободного $\pi\pi$ -взаимодействия.

Резюме: АВС-эффект, как и дармштадтский эффект, наблюдается только в случае присутствия третьей частицы (или частиц).

Для полноты картины приведем несколько примеров, хорошо известных в ядерной физике низких энергий. Два протона не имеют связанного состояния, упругое рассеяние протона на протоне при малых энергиях не проявляет никаких особенностей, однако есть экспериментальные указания на то, что в реакции $p + n \rightarrow (pp) + \pi^-$ при инвариантной массе двух протонов $(1877,5 \pm 0,5)$ МэВ [116] наблюдается узкая статистически обеспеченная нерегулярность. В работе [131] наблюдался дипротонный резонанс в реакции $dd \rightarrow 2n + (2p)$: пиковое значение энергии развала резонанса — $(0,43 \pm 0,09)$ МэВ, среднее ее значение — $(0,45 \pm 0,05)$ МэВ, полная ширина резонанса — $(0,14 \pm 0,13)$ МэВ. При добавлении к двум протонам нейтрона образуется связанная система (тритон) с полной энергией связи 8,48 МэВ. В реакции $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li} + (nn)$ обнаружена [132] резонансноподобная структура в системе двух нейтронов при энергии относительного движения 50 кэВ или при импульсе $P = 5$ МэВ/с в СЦИ двух нейтронов. Следовательно, в этом случае дебройлевская длина волны нейтрона равна ≈ 40 фм, т.е. **эффективное расстояние между двумя нейтронами ≈ 40 фм**. Известно, что тритон t не имеет резонансных состояний (сечение упругого $p + d$ -рассеяния не имеет никаких особенностей), однако в реакции $^6\text{He} + \text{H} \rightarrow \alpha + t$ обнаружен [133] резонанс у тритона с $E^* = (7,0 \pm 0,3)$ МэВ и шириной $\Gamma = (0,6 \pm 0,3)$ МэВ.

Интенсивные исследования дармштадтского эффекта начались немедленно после обнаружения [33] узких позитронных пиков при рассеянии тяжелых ионов. Экспериментальные значения спектра масс e^+e^- приведены в табл.9. Узкие резонансы в суммарном позитрон-электронном спектре наблюдались группой ORANGE [134] для систем $\text{U} + \text{Ta}$ с энергией пиков $E_{e^+} + E_{e^-} = (634 \pm 5, 803 \pm 6)$ кэВ, $\text{U} + \text{Pb}$ с энергией пиков $E_{e^+} + E_{e^-} = (575 \pm 6, 787 \pm 8)$ кэВ и $\text{U} + \text{U}$ с энергией $E_{e^+} + E_{e^-} = (555 \pm 8, 630 \pm 8, 815 \pm 8)$ кэВ. Группа EPOS [135] наблюдала пики при энергиях 620, 750 и 810 кэВ. Для резонанса с энергией 634 кэВ, наблюдаемого при столкновении $\text{U} + \text{Ta}$, были проведены измерения угловых корреляций лептонов. Результаты этих измерений противоречат предположению о распаде нейтральной свободной частицы с нулевым спином (гипотетического аксиона). Некоторые e^+e^- -пики свидетельствуют о разлете частиц на 180° , что обычно интерпретируется как соответствие сценарию распада свободной частицы, движущейся со скоростью центра масс сталкивающихся ионов. В работе [134] сделан вывод о том, что электрон-позитронная пара не может излучаться из движущегося отдельного ядра и что она излучается в окрестности третьего тяжелого положительно заряженного партнера, движущегося с ма-

Таблица 9. Распределение импульсов P (МэВ/с) и масс (МэВ) для дипротонных, пионных и e^+e^- -резонансов

$P(NN)$	$m(NN)$	$P(\pi\pi)$	$m(\pi\pi)$	$P(e^+e^-)$	$420 * P(e^+e^-)$	$m(e^+e^-)$
20	1877	71	313			
29	1877,5	90	332			
94	1886	105	350			
120	1892	140	395			
155	1902	160	425			
193	1916	206	497	0,4637	195	1,380
230	1932	237	550	0,5476	230	1,498
250	1942	255	583	0,5992	252	1,575
274	1955			0,6553	275	1,662
298	1969	295	652	0,7029	295	1,738
316	1980			0,7566	318	1,826
344	1999	348	750	0,8109	341	1,917
368	2016	359	770			
394	2035					
415	2052					
457	2087					
477	2106	470	980			
502	2129					
529	2155					
547	2172					
568	2194					
593	2220					
609	2238	619	1270			
649	2282					
670	2307					
707	2350	711	1450			

лой трансверсальной скоростью ($|v_{\perp}| < 0,02$ с). Наконец, имеются указания на то, что сечение процесса, как функция энергии налетающих ионов, имеет резонансный характер.

В табл.9 приведены импульсы P для дипротонных, дипионных и e^+e^- -резонансов (см. также рис.8). Для дипротонных и e^+e^- -резонансов в распределении P наблюдается четкая регулярная структура с интервалом ≈ 25 МэВ/с и ≈ 53 кэВ/с соответственно. Что же касается дипионных резонансов, то здесь трудно прийти к определенному выводу из-за большой неопределенности масс и ширин этих резонансов, хотя при желании можно было бы и в этом случае усмотреть некую регулярность в распределении P . Из табл.9 и рис.8 можно заключить, что действительно наблюдается

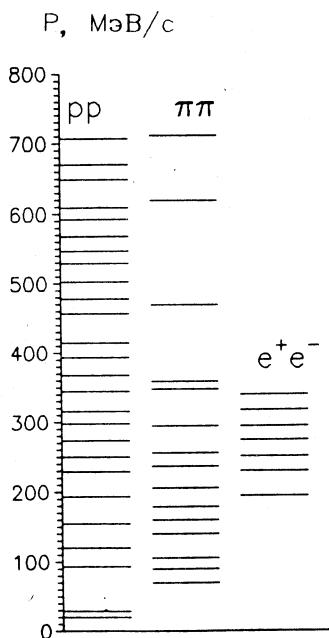


Рис.8. Значения импульсов P для продуктов распада резонансов в системах pp , $\pi\pi$ и e^+e^- , вычисленные из соотношения (64) при экспериментальных значениях масс резонансов

подобие между распределениями $P(pp)$ и $P(e^+e^-)$ для дипротонных и e^+e^- -резонансов. Из сравнения экспериментальных данных между $P(pp)$ и $P(e^+e^-)$ следует, что

$$P(pp) = 420P(e^+e^-). \quad (65)$$

Тем самым определяются значения $P(e^+e^-)$ из экспериментальных данных по протон-протонным и антипротон-протонным резонансам. Инвариантные массы для e^+e^- -резонансов легко вычисляются по таким образом определенным импульсам $P(e^+e^-)$ -пар. Полученные результаты и сравнение с экспериментальными данными по инвариантным массам представлены в табл.10. Как видно

из табл.10, погрешность описания экспериментальных данных составляет менее одного процента. При этом в излагаемом подходе содержится только один варьируемый параметр — параметр масштабного преобразования ξ (см. определение (63а)). В рассматриваемом случае он оказался равным 420.

Наблюдается также подобие между распределениями импульсов $P(pp)$ и $P(\pi\pi)$ для дипротонных и дипионных резонансов (см. табл.9 и рис.8) с параметром масштабного преобразования $\xi \approx 1$.

Итак, имеет место инвариантность дипротонных, дипионных и e^+e^- -резонансов по отношению к преобразованию (63). В первых случаях она выполняется для сильновзаимодействующих систем, а в последнем случае — для системы с электромагнитным взаимодействием. Другими словами, инвариантность относительно преобразования (63) и принцип автомодельности справедливы для всех рассмотренных в настоящем обзоре резонансов независимо от вида взаимодействия.

Таким образом, на основании вышеизложенного мы подходим к выводу о том, что дармштадтский эффект должен интерпретироваться как резонанс в системе e^+e^- в присутствии третьего (тяжелого) партнера, в полной аналогии с физикой дипионов. Исходя из принципа неопределенности Гейзен-

Таблица 10. Спектр масс e^+e^- -резонансов (в кэВ). Параметр подобия $\xi = 420$

Теория	Эксперимент
1026	1043 [138]
1031	1062 [138], 1067 [137]
1116	
1172	
1260	
1375	1380 [134]
1497	1498
1568	1532 [136], 1575 [134]
1657	1662 [136,139], 1652 [134]
1749	1738 [136]
1818	1831, 1837 [134]
1932	1917 [136]
2029	
2134	
2225	
2402	

берга, мы можем оценить характерные размеры e^+e^- -резонансов: 200—4000 фм. Следовательно, e^+e^- -резонансы имеют большие размеры — порядка и больше длины комптоновской волны электрона (386 фм), что полностью согласуется с концепцией квантования асимптотического импульса.

Подобная трактовка дармштадтского эффекта позволяет количественно оценить такую важную характеристику, как величина переданного импульса. В эксперименте среднее значение переданного лептонам импульса равно 800—1000 кэВ/с [134] для резонанса с массой 1652 кэВ, что по порядку величины хорошо согласуется с теоретической оценкой 650 кэВ/с.

Следовательно, дармштадтский эффект может быть объяснен в рамках традиционных физических представлений без введения гипотез о существовании аксионов или каких-либо иных новых «элементарных частиц». Отметим, что в ядерной физике и в физике элементарных частиц имеется много других резонансных явлений, аналогичных дармштадтскому и АВС-эффекту.

Резюмируем вышесказанное следующим образом:

1) Резонансы в субатомных системах подчиняются принципу подобия, в силу которого длины волн де Бройля и Комптона соизмеримы.

2) Во всех исследованных случаях резонансы возникали при условии соизмеримости длины волны де Бройля с геометрическими размерами системы, независимо от физической природы взаимодействия.

3) Дармштадтский эффект и АВС-эффект находят простое и естественное объяснение в рамках предложенной концепции. Они объясняются возникновением резонансов в волновой системе, которая оказалась локализованной в пространстве из-за наличия силового центра (третьей частицы или нескольких дополнительных частиц).

8. ЭКЗОТИЧЕСКИЕ БАРИОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Простейшим возможным мультикварковым состоянием является система $q^2\bar{q}^2$, введенная в [140]. Даже для таких простых систем вычисления в рамках решеточной и других вытекающих из КХД моделях (ссылки см. в [26]) недостаточно точны, чтобы дать удовлетворительный результат. Недавние вычисления [26]) ограничены только случаем $L = 0$ $q^2\bar{q}^2$. Здесь мы хотим представить результаты вычислений [141] и сделать некоторые предсказания по поводу новых кандидатов — резонансов, а также сравнить их с существующими экспериментальными данными, которые имеются в нашем распоряжении. Следует отметить, что многочастичный распад можно рассматривать как цепь бинарных распадов: двухчастичный распад первичного резонанса на два кластера, затем распад этих кластеров снова на две частицы и т.д. Это согласуется с общепринятой моделью рождения мультичастиц через распад промежуточных резонансов. Поэтому многочастичный распад можно интерпретировать как разветвляющийся процесс, в котором промежуточные резонансы играют существенную роль. Такой подход указывает путь для использования массовой формулы (24) при изучении многочастичных распадов резонансов. Указанное приближение дает простейший способ для оценки инвариантных масс резонансов, распадающихся на мультичастицы.

Хорошо известно, что барионные резонансы не распадаются по каналу $N\omega^0$, но резонансная структура наблюдается (см. [142]) в $p\pi^+\pi^-\pi^0$ -системе с массой (1780 ± 40) МэВ и шириной (250 ± 80) МэВ в области ω^0 -резонанса в $\pi^+\pi^-\pi^0$ -системе. Этот резонанс был объяснен как проявление экзотической структуры $uuds\bar{s}$. Мы предлагаем трактовать структуру $N^*(1780)$ -резонанса как молекулярное состояние системы $p\omega^0$ (см. табл.11). N^* -резонанс с массой 1700 МэВ и шириной 150 МэВ был приведен в работе [143]. Он распадается по каналам $p\eta$, $\Delta 2\pi$ и $p3\pi$.

Современный статус узких экзотических барионных резонансов представлен в обзорной статье [25]. Поэтому ниже мы приводим только результаты вычислений в совокупности с экспериментальными данными [25] и краткими замечаниями.

Таблица 11. Спектр инвариантных масс (МэВ) для $p\pi^+\pi^-\pi^0 \equiv \rho\omega^0$ -резонансов

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2	4
M	теория	1736	1781	1854	1951	2069	2205	2355	2517
	эксп.	1700	1780						
		[143]	[142]						

Таблица 12. Спектр инвариантных масс (МэВ) для $\Sigma(1385)K$ -резонансов

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2	4
M	теория	1897	1948	2029	2133	2255	2392	2542	2702
	эксп.		1956	2050					
			[144]	[145]					

Резонанс в системе $\Sigma(1385)K$ с инвариантной массой 1956_{-6}^{+8} МэВ и шириной (27 ± 15) МэВ впервые наблюдался авторами работы [144] и был интерпретирован как $N_\phi(1960)$ -барион. Структура этого резонанса рассматривалась в работе [144] в качестве кандидата на экзотический барионный резонанс со скрытой странностью ($udds\bar{s}$). Резонанс с массой (2050 ± 6) МэВ и шириной ≈ 120 МэВ в работе [145] рассматривался как новый барион со скрытой странностью. Эти выводы следует считать предварительными, требующими подтверждения дальнейшими измерениями с увеличенной статистикой.

Некоторые резонансноподобные структуры с массой 2170 МэВ и $\Gamma \approx 110$ МэВ наблюдались в эксперименте [145] для $p\phi^-$ и $\Lambda(1520)K^+$ -систем. Оба этих экспериментальных спектра имеют подобный характер, и рассматриваемая в настоящем обзоре модель описывает их хорошо. $p\phi^-$ и $\Lambda(1520)K^+$ -системы имеют резонансы при массе 2160 и 2162 МэВ соответственно (см. табл.13), и в результате когерентная сумма амплитуд двух резонансов дает резкий пик в экспериментальном спектре. Совершенно непонятно, как интерпретировать эти резонансы в рамках других существующих моделей. Карнаухов и др. [146] наблюдали резонансноподобную структуру в системе $K_s^0 K^+ p\pi^-\pi^-$ с массой (3521 ± 3) МэВ и шириной 6_{-6}^{+21} МэВ. Статистическая значимость наблюдаемой структуры равна 10σ . Эта структура имеет нулевую странность и названа $R(3520)$ -барионом. $R(3520)$ -барион имеет существенно большую массу, чем порог для системы $K_s^0 K^+ p\pi^-\pi^-$, и рассматривается в работе [146] в качестве кандидата на пятикварковое состояние. Мы можем интерпретировать его как проявление квазимолекулярного резонанса для многочастичной системы $K_s^0 K^+ p\pi^-\pi^-$. Существует много

Таблица 13. Спектр инвариантных масс (МэВ) для $\Lambda(1520)K$ -резонансов

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2	4
М	теория эксп.	2031	2081	2160 2170 [145]	2261	2380	2514	2660	2816

Спектр инвариантных масс (МэВ) для $\phi\rho$ -резонансов

	$n + \gamma$	1/2	1	1 + 1/2	2	2 + 1/2	3	3 + 1/2	4
М	теория эксп.	1972	2011	2075	2162 2170 [145]	2269	2393	2532	2683

комбинаций, которые, в принципе, можно проверить экспериментально. Например, комбинации $(((\bar{K}^0 p)_{1520} K^+)_{2031} (\pi^- \pi^-)_{361})$ с оценочной массой 3532 МэВ или $(((\bar{K}^0 \pi^-)_{892} K^+)_{1406} p)_{2446} \pi^-$ с оценочной массой 3539 МэВ можно считать претендентами на такую структуру. Следовательно, некоторые квазимолекулярные состояния могут перекрываться при массе 3520 МэВ и давать резкий пик в результате когерентного сложения амплитуд. Большинство экспериментальных данных в области странных барионов было получено на пропановой пузырьковой камере дубненской коллаборацией (см. работу [147] и ссылки в ней). Результаты вычислений в рамках нашей модели хорошо согласуются с этими экспериментальными данными.

Ранее указывалось (см. ссылки в работе [148]) на возможное существование узкого бариониама (обозначенного M_S для систем $\Lambda \bar{p} \pi$, $\Lambda \bar{p} \pi \pi$ с $S = -1$ и $\bar{M}_S$ для систем $\Lambda \bar{p} \pi$, $\Lambda \bar{p} \pi \pi$ с $S = +1$) с массой $(3060 \pm 5(\text{st.}) \pm 20(\text{syst.}))$ МэВ и шириной не больше чем (35 ± 5) МэВ. Этот результат подтверждают данные WA-62 [149]. Инвариантные массы резонансов в нашей модели не зависят от странности. Поэтому, например, системы $\Lambda \bar{p} \pi$, $\Lambda \bar{p} \pi$ и $\Lambda \bar{p} \pi$ должны иметь почти одинаковые инвариантные массы. Предсказанная в нашей модели масса таких систем равна 3030 МэВ (см. табл.14). Она близка к значению, приведенному в работе [148]: $(3060 \pm 5(\text{st.}) \pm 20(\text{syst.}))$ МэВ.

Узкий барионий M_ϕ [148] наблюдался в массовом спектре $\Lambda \bar{p} K \pi$, $\Lambda \bar{p} K \pi$, $\Lambda \bar{p} K$, $\Lambda \bar{p} K$, $p \bar{p} K \bar{K}$ с массой $(3260 \pm 5(\text{st.}) \pm 20(\text{syst.}))$ МэВ и шириной $\Gamma \leq (35 \pm 5)$ МэВ. Существует много возможных квазимолекулярных резонансов с очень близкими массами. Например, состояние $(\Lambda \bar{p})_{2166} \bar{K}$ с массой 3251 МэВ, $((p \bar{p})_{1890} K)_{2448} \bar{K}$ -состояние с массой 3270 МэВ и $((\Lambda \bar{p})_{2067} K)_{2624} \pi$ -состояние с массой 3275 МэВ. Все эти квазимолекулярные состояния подсистем могут иметь резонансы с почти одинаковыми массами,

Таблица 14. Массы резонансов (МэВ), распадающихся по каналам $p\Lambda$, $(p\Lambda)_{2067}\pi$, $((p\Lambda)_{2067}\pi)_{2250}\pi$, $((p\Lambda)_{2067}\pi)_{2250}\pi)_{2434}\pi$

$n + \gamma$	Распад $p\Lambda$		Распад $p\Lambda\pi$		Распад $p\Lambda\pi\pi$		Распад $p\Lambda\pi\pi\pi$	
	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.
1/2	2095 [147]	2067		2250		2434		2617
1	2129 [147]	2105		2348		2530		2713
1 + 1/2	2181 [147]	2166	2495 [147]	2466		2647		2829
2	2224 [147] 2263 [147]	2250		2595		2775		2956
2 + 1/2	2357 [147]	2353		2734		2912	3100 [149]	3090
3	2500 [24]*	2473		2879	3060 [148]	3054		3230
3 + 1/2		2608	3060 [148]	3031		3203		3376
4		2755		3188		3357		3528

*Значение массы 2500 МэВ взято из работы [24] для $p\bar{\Lambda}$ -системы.

Таблица 15. Массы резонансов (МэВ), распадающихся по каналам $\Lambda\Lambda$, $(p\Lambda)_{2067}\Lambda$, $\Lambda(\pi\pi)_{361}$, Σp

$n + \gamma$	Распад $\Lambda\Lambda$		Распад $p\Lambda\Lambda$		Распад $\Lambda\pi\pi$		Распад Σp	
	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.
1/2		2243		3192		1500		2148
1	2290 [150]	2278		3219		1566	2173 [147]	2185
1 + 1/2	2365 [147]	2335		3263	1704 [147]	1666	2218 [147]	2245
2		2412		3323		1789		2326
2 + 1/2		2508		3393		1931	2408 [147] 2384 [147]	2426
3		2621		3489	2071 [147]	2087		2544
3 + 1/2		2748	3568 [147]	3591		2253		2675
4		2887		3705		2428		2819
4 + 1/2		3038		3829	2604 [147]	2611		2974
5		3198		3962		2800		3138

и именно это обуславливает большую величину пика рассматриваемого резонанса. Очень интересно исследовать мультибарионные резонансы. В частности, мы хотели бы упомянуть резонанс, наблюдаемый в трехпротонной системе [151], с массой $(3,27 \pm 0,02)$ ГэВ и шириной $(0,07 \pm 0,04)$ ГэВ. Масса, вычисленная в рамках нашей модели, равна 3288 МэВ для квази-молекулярного $((pp)_{1890}p)$ -состояния.

В настоящее время имеются экспериментальные данные [152] по возникновению квазистационарных состояний для многонуклонных (кластеры

содержат до 6 нуклонов) систем. Поэтому изучение кластеров как мульти-частичного резонанса является широкой и интересной областью физики.

9. ПЛОТНОСТЬ МЕЗОННЫХ СОСТОЯНИЙ

Для вычисления числа и плотности мезонных состояний, достаточно хорошо установленных экспериментально [24] (за исключением странных мезонов из-за их скудной статистики), как функций их инвариантных масс можно использовать простейшую версию метода силовых функций [40] (детали см. в монографии [18]).

Рассмотрим плотность мезонных резонансных состояний как сумму нормированных распределений Брейта — Вигнера:

$$\frac{dN}{dm} = \frac{1}{2\pi} \sum_i (2J_i + 1)(2I_i + 1) \frac{\Gamma_i}{(m - m_i)^2 + \Gamma_i^2/4}, \quad (66)$$

где m_i и Γ_i — массы и ширины экспериментально наблюдаемых мезонных резонансных состояний [24]. На рис.9 представлена плотность мезонных резонансных состояний как функция массы m (сплошная кривая). Видно, что эта плотность имеет регулярную периодически осциллирующую структуру с периодом $\Delta m \approx 200$ МэВ (предсказанную в работе [38]) в области легких бесцветных мезонов ($S = C = B = 0$), ψ - и Υ -мезонов.

Результаты наших вычислений коррелируют с экспериментальными данными (см. рис.9; звездочки — вычисленные положения «центра тяжести» n -пионных резонансов) за исключением области дипионной массы

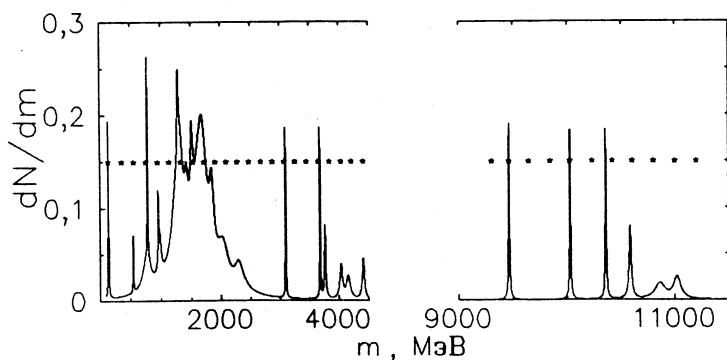


Рис.9. Распределение плотности хорошо установленных экспериментально мезонных состояний (сплошная кривая) и положение «центров тяжести» n -пионных резонансов, вычисленных по формуле (24)

$m(\pi\pi)_S = 360$ МэВ и области 6-пионной $\eta\eta$ -массы, $m(\eta\eta)_S = 1118$ МэВ. По всей видимости, эти области требуют более внимательного экспериментального исследования (см. выше). Из рис.9 хорошо видно, что массовый спектр нижних резонансов имеет почти эквидистантный характер, и расстояние между резонансами («центрами тяжести» резонансов) равно ≈ 200 МэВ, если эти резонансы создаются последовательным добавлением пионов. Добавление K -мезонов дает расстояние около 500 МэВ ($m_{\text{theor}}(K^+K^-)_S = 1014$ МэВ, $m_{\text{theor}}((K^+K^-)_S K)_S = 1533$ МэВ, $m_{\text{theor}}((K^+K^-)_S (K^+K^-)_S)_S = 2052$ МэВ); добавление D -мезонов — 1900 МэВ; добавление B -мезонов — около 5300 МэВ и т.д. В рамках изложенной схемы высоколежащие вращательноподобные состояния должны быть основаны на нижних резонансах [38].

Современный статус ψ -мезонов был представлен в обзорном докладе [153]. ψ -системы можно рассматривать, используя следующие приближения:

1. Свойства этой системы обычно описывают как радиально возбужденные $c\bar{c}$ -состояния (детали см. в [153]).

2. Распределение масс такой системы можно оценить в рамках рассмотренной выше концепции, используя формулу (24) для расчета массы n -пионного резонанса. В этом случае состояние $((8\pi)_S(8\pi)_S)_P$ с массой 3100 МэВ выглядит подходящим кандидатом на $J/\psi(3097)$ -состояние; состояния $(J/\psi(3097)\pi)_S$, $(J/\psi(3097)(2\pi)_S)_S$ и $(J/\psi(3097)(6\pi)_S)_S$ с массами 3280, 3478 и 4240 МэВ соответственно не наблюдались в эксперименте. Состояние $(J/\psi(3097)(4\pi)_S)_S$ с массой 3866 МэВ, возможно, наблюдалось: имеются некоторые указания на существование состояния с массой 3836 МэВ [154]. Состояния $(J/\psi(3097)(3\pi)_S)_S$, $(J/\psi(3097)(5\pi)_S)_S$ и $(J/\psi(3097)(7\pi)_S)_S$ с массами 3668, 4053 и 4438 МэВ могут быть продуктами распада состояний $\psi(3685)$, $\psi(4040)$, $\psi(4415)$ соответственно. Результаты наших вычислений показаны на рис.9.

3. ψ -мезоны (по крайней мере, некоторые из них) можно рассматривать как димезоны в P -состоянии $(D\bar{D})_P$, $(D\bar{D}^*)_P$, $(D^*\bar{D}^*)_P$, или молекулярные состояния в соответствии с предположениями, сделанными Волошиным и Окунем [155], подобно $K\bar{K}$ -молекулярному описанию $f_0(975)$ -, $\alpha_0(980)$ -резонансов, предложенному в работе [156]. Экспериментальные данные и наши вычисления по формуле (24) показывают, что состояния $\psi(3770)$ и $\psi(4040)$ являются кандидатами на такое димезонное молекулярное состояние. Наша модель успешно описывает массы этих резонансов (см. табл.16); состояние $(D\bar{D}^*)_P$ с массой 3906 МэВ (наша оценка) не наблюдалось в эксперименте.

Таблица 16. Вычисленные массы (МэВ) некоторых ψ -мезонов

$\eta_c(2980), I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(\omega(1390)\omega(1600))_S$	—		115	2999	1/2
$((\phi\phi)_S\eta'(958))_S$	—	—	115	3021	1/2
$J/\psi(3097), I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$((8\pi)_S(8\pi)_S)_P$	—		229	3100	1
$(\Xi(1530)\bar{\Xi}(1530))_P$	—	—	229	3098	1
$\psi(3686), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{--})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(J/\psi(3097)\eta(547))_S$	2,7%	196	115	3658	1/2
$(J/\psi(3097)(\pi^0\pi^0)_S)_D$	18,4%	481	—	3704	2
$(J/\psi(3097)(\pi^+\pi^-)_S)_D$	32,4%	477	—	3714	2
$\psi(3770), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{--})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(D\bar{D})_P$	преобладает	242	229	3766	1
$\psi(4040), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{--})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$D^0\bar{D}^0$	видна	774	803	4059	3 + 1/2
$D^*(2010)^0\bar{D}^0$	видна	577	574	4040	2 + 1/2
$(D^*(2010)^0\bar{D}^*(2010)^0)_P$	видна	228	229	4040	1
$\psi(4160), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{--})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(\psi(3770)(\pi^+\pi^-)_S)_S$	не видна	—	115	4150	1/2
$\psi(4415), I^G(J^{PC}) = ?^?(1^{--})$					
Канал распада	Доля Γ_i/Γ	P (эксп.)	P (теория)	m (теория)	$n + \gamma$
$(23\pi)_S$	не видна	—	—	4416	1/2

Наконец, ψ -мезоны могут иметь молекулярные состояния в канале трех-мезонного распада (1^{--}). В связи с этим мы предлагаем следующих кандидатов:

для $\eta_c(2980)$ -распада — система $[[\eta'(958)\eta'(958)]_P\eta'(958)]_P$ с массой 2970 МэВ,

для $J/\psi(3097)$ — система $[[\phi(1020)\phi(1020)]_S\phi(1020)]_S$ с массой 3082 МэВ,

для $\psi(3686)$ — система $[[\phi(1020)\phi(1020)]_S\omega(1600)]_S$ с массой 3660 МэВ.

Современный статус Υ -мезонов был представлен в обзорной работе [157]; см. также результаты коллаборации CLEO [158]. Боттомониум обычно рассматривают как радиально возбужденную bb -систему. Наши результаты, полученные в рамках изложенной выше модели, представлены на рис.9. Они хорошо коррелируют с экспериментальными данными за исключением области масс 9640, 9840 и 10227 МэВ. Подобно случаю чармониума, димезонное $(B\bar{B})_P$ молекулярное состояние с массой 10568 МэВ может быть представлено в соответствие с $\Upsilon(10580)$. Димезонные состояния $(B\bar{B}^*)_P$ и $(B^*B^*)_P$ с массами 10614 и 10660 МэВ соответственно не наблюдались в эксперименте.

Наконец, Υ -мезоны могут иметь молекулярные состояния в канале трех чармониум-мезонного (1^-^-) распада. Мы предлагаем следующих кандидатов:

для $\Upsilon(10023)$ -распада — система $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(3770)]_S$ с массой 9971 МэВ,

для $\Upsilon(10355)$ -распада — система $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(4160)]_S$ с массой 10361 МэВ,

для $\Upsilon(10580)$ -распада — системы $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(4415)]_S$ и $[[J/\psi(3097)\psi(3685)]_S\psi(3770)]_S$ с массами 10615 и 10559 МэВ соответственно,

для $\Upsilon(10860)$ -распада — система $[[J/\psi(3097)\psi(3685)]_S\psi(4040)]_S$ с массой 10829 МэВ.

До сих пор не наблюдались следующие системы:

- 1) $[[\eta_c(2980)\eta_c(2980)]_P\eta_c(2980)]_P$ с массой 8971 МэВ,
- 2) $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S J/\psi(3097)]_S$ с массой 9298 МэВ,
- 3) $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(3685)]_S$ с массой 9886 МэВ (есть некоторые указания на существование такого состояния [159]),
- 4) $[[J/\psi(3097)J/\psi(3097)]_S\psi(4040)]_S$ с массой 10241 МэВ,
- 5) $[[J/\psi(3097)\psi(3685)]_S\psi(4415)]_S$ с массой 11203 МэВ (есть некоторые указания на существование такого состояния [160]).

Мы продемонстрировали, что трехмезонные (1^-^-) молекулярные состояния в каналах распада должны играть существенную роль при изучении массовых распределений ψ - и Υ -мезонов. Интересно, что ψ -частицы приблизительно в 3 раза тяжелее, чем ϕ - и ω -частицы. Υ -частицы приблизительно в 9 раз тяжелее, чем ϕ - и ω -частицы, и в 3 раза тяжелее, чем ψ -частицы.

Основной характерной чертой таких состояний молекулярного типа является то, что относительный импульс в любой бинарной системе очень

мал: ~ 100 МэВ/с. Поэтому мы имеем дело с низкоэнергетическими резонансами, требующими дальнейшего исследования.

Это дает основания сделать следующее предположение: трехмезонные (1^-) молекулярные состояния могут находиться в областях $27 \div 33$ ГэВ, $81 \div 100$ ГэВ (область W^- и Z -бозонов), $240 \div 300$ ГэВ и т.д.

Наконец, интересно отметить, что молекулярные состояния в каналах трехчастичного распада существуют также для различных мезонных и барионных резонансов. Мы указываем здесь в качестве примера некоторые из них:

для $\eta(547)$ -распада — система $[[\pi\pi]_S\pi]_S$ с массой 556 МэВ,

для $\eta'(958)$ -распада — система $[[\pi\pi]_S\eta]_S$ с массой 938 МэВ,

для $N(1440)P_{11}$ -распада — система $[[N\pi]_P\pi]_S$ с массой 1420 МэВ,

для $N(1520)D_{13}$ -распада — система $[[N\pi]_P\pi]_P$ с массой 1522 МэВ,

для $(PP\pi)(2065)$ -распада $[161, 162]$ — система $[[pp]_S\pi]_S$ с массой 2076 МэВ.

10. ПАРАДИГМЫ ПОДОБИЯ

Из изложенного материала видно, что многие свойства адронных резонансов можно понять на основе глубокой физической аналогии с теорией α -распада, с теорией резонансных явлений в ядерной физике. Резонансы мы рассматриваем как результат возбуждения собственных колебаний взаимодействующих систем для случая их инфинитного движения. С понятием «автомодельность» предлагаемую закономерность (21) роднит то, что рассматриваются симметрии решений и свойства граничных условий. Соизмеримость длин волн рассеиваемых частиц с характерными размерами взаимодействующих или образующихся систем (или, другими словами, соизмеримость длин дебройлевских и комптоновских волн) приводит к квантованию импульса и простой формуле спектра масс резонансов типа серий атомных и ядерных линий. Тем самым установлено подобие спектров адронных резонансов, ядерных и атомных спектров.

Приведем еще один интереснейший пример, малоизвестный в физике высоких энергий. Мы имеем в виду физику так называемых металлических кластеров, обнаруженных сравнительно недавно — в 1984 г. Выяснилось, что атомы некоторых металлов образуют связанные системы, состоящие из огромного числа атомов (до 20000). В экспериментах [163] было показано, что в металлических кластерах существуют оболочки, причем с **такими же магическими числами, как в атомных ядрах и атомах**. Это открытие означает, что в природе существует еще одна малая система, обладающая средним полем. Сейчас можно считать общепринятым (по крайней мере,

большинство расчетов проведены в таком представлении), что металлические кластеры представляют собой систему валентных электронов, движущихся в среднем поле положительно заряженных ионов (см. обзоры [164—166] и оригинальные статьи [167, 168]). Наличие среднего поля и, как результат, наличие оболочечных эффектов приводит к тому, что металлические кластеры имеют ряд общих подобных свойств (спектров) как с адронными резонансами, так и с атомами, ядрами и твердым телом. Таким образом, металлические кластеры представляют собой уникальное явление, находящееся на стыке физики элементарных частиц, атомной и ядерной физики, а также физики твердого тела, кристаллографии, термодинамики, квантовой и классической статистической физики и т.д. Поэтому здесь следует ожидать появления новых интересных результатов (см. обзоры [164—166]). Например, в работе [165] уже сделана попытка проследить переход от атома к твердому телу и понять, на каком этапе металлический кластер представляет собой уже «эмбрион» твердого тела, несущий в себе его основные свойства.

Физическая природа такого подобия спектров большого числа разнообразных систем сейчас понятна. Оболочки в ядрах, атомах и металлических кластерах являются общим характерным свойством квантовых замкнутых систем, и сейчас считается общепринятой точка зрения, что оболочки появляются как результат возникновения замкнутых периодических орбит движения частицы в замкнутой полости. Эти орбиты размываются и запутываются из-за квантовых флуктуаций системы, и выживают только простейшие орбиты. Эти орбиты можно интерпретировать как колебания с близкими частотами и амплитудами. Когерентная интерференция этих амплитуд приводит к появлению эффекта биения результирующей амплитуды. В этом состоит физическая суть оболочек.

В связи с вышесказанным возникает вопрос о возможности существования оболочечных эффектов в распределении масс резонансов элементарных частиц. Представленные выше экспериментальные данные (см. рис.9), по всей видимости, не противоречат такой гипотезе. Однако эта гипотеза требует дальнейшей проверки.

Первоначальная теория атома водорода, по существу, была построена Бором по аналогии с планетарной Солнечной системой и называлась «планетарная теория атома водорода». Это было стартовой точкой развития современной квантовой теории или «волновой механики» по старой терминологии. Наоборот, по аналогии с теорией водородоподобных атомов сейчас начинают рассматривать Солнечную систему как волновую динамическую систему [169]. При этом оказалось, что спектр волновых частот Солнечной системы можно представить в форме, напоминающей схему спектроскопических уровней водородоподобного атома. Концепция волнового

резонанса Солнечной системы оказалась весьма успешной при описании ритмов астродинамики (подробности см. в [169]).

Метод аналогии очень широко и успешно применяется при исследовании самых разнообразных явлений. Хорошо известна «тройная аналогия». Родственность процессов переноса теплоты (теплообмен), вещества (массообмен) и количества движения (гидродинамическое сопротивление) при определенных условиях проявляется в виде подобия полей скорости, температуры и концентрации. Во многих учебниках приводятся примеры электрогидродинамической и электротепловой аналогий. Электрическая аналогия является исключительно эффективным методом экспериментального изучения медленных тепловых или гидродинамических явлений. Замена исследуемого процесса его электрическим аналогом дает большие преимущества. Так, например, время изучения годовых колебаний температуры почвы, затрачиваемое в методе электрической аналогии, уменьшается на девять порядков. При этом метод дает прекрасное представление о всех характерных свойствах годовых колебаний температуры почвы.

Естественно, метод аналогии может быть применен только к тем явлениям, которые описываются одним и тем же уравнением и одинаковыми граничными условиями в безразмерном представлении. Другими словами, метод аналогии используется для исследования свойств малоизученного явления путем сопоставления с хорошо известным явлением, причем краевая задача в безразмерном представлении тождественна для обоих случаев. В тождественности математической формы краевой задачи может отражаться реальное единство физического механизма изучаемых явлений, как в случае «тройной аналогии», где все три сопоставляемых эффекта обусловлены одним и тем же процессом перемещения среды [170], если среда — вещество в предельно-газовом состоянии. В этих условиях реализуется чистая форма молекулярного переноса. Носителями служат молекулы, которые в процессе своего перемещения не испытывают никаких влияний и взаимодействуют только при соударениях. В такой обстановке все процессы переноса (поток тепла, поток вещества и поток количества движения) развиваются совершенно идентично. Поэтому должна иметь место строгая физическая аналогия. Тождественность безразмерных закономерностей есть отражение идентичности физических условий, единства физического механизма сопоставляемых процессов.

Для нас более привлекательны случаи, когда сопоставляемые процессы имеют разную физическую сущность. К ним относятся вышеупомянутые случаи **электротепловой и электрогидродинамической аналогий** (подробности см. в монографиях [170,171]). Таким образом, сопоставляемые процессы могут включать в себя явления различной физической природы. Единственный признак, по которому явления сводятся в одну и ту же группу для исследования с помощью метода аналогий, это тождественность без-

размерных представлений. Здесь возникают особого рода соответствия (тождественность всех безразмерных характеристик и их соотношений) между явлениями, сколь угодно далекими по своей физической природе. Процессы подобны (или не подобны) друг другу безотносительно к тому, одинаковы или различны они по своей физической природе.

Следовательно, при использовании метода аналогий возникает вопрос о критерии подобия. Другими словами, возникает вопрос о количественных характеристиках явления, вопрос масштабов соотнесения. Тождественность математической формы уравнений для сопоставляемых явлений в безразмерном представлении может и не обеспечить подобие этих явлений. Соответствующие граничные условия также должны быть тождественны. Во многих случаях можно выделить особое значение комплекса параметров (переменных) задачи, получившее название характеристического значения, в то время как непосредственно заданное значение выделяют как характерное. Равенство характеристического значения комплекса параметров его характерному значению есть необходимое условие подобия различных явлений. Поясним вышесказанное на примере критерия подобия Био [170,171] (случай переноса тепла от твердого тела к жидкости и наоборот), полученного из уравнения непрерывности на поверхности системы:

$$B_i = \frac{l}{\delta}, \quad (67)$$

где l — геометрический параметр, характерный размер системы. Параметр δ , представляющий собой комбинацию теплофизических параметров ($\delta = \lambda/\alpha$), называют характеристической длиной. Этот критерий соединяет в себе один параметр l , характеризующий геометрические свойства системы, и два теплофизических параметра, характеризующих интенсивность переноса тепла: α — от жидкости к твердому телу, λ — внутри тела. Важным обстоятельством для нас является возможность свести определение физических условий на границе тела к одной характеристической длине δ . Сопоставление этой длины с характерным размером l тела и приводит к новой форме критерия подобия Био.

Важнейшая особенность описываемой задачи заключается в том, что она формулируется в граничных условиях третьего рода. Следовательно, по постановке задачи температурные условия считаются известными только для окружающей среды.

Ниже попытаемся заимствовать идеи, изложенные в приведенной задаче теплообмена, для решения квантово-механических задач. Обычно используемые в квантовой теории граничные условия таковы, что бывает трудно напрямую применять здесь методы классической физики, в частности, методы подобия. Рассмотрим несколько примеров из квантовой теории.

Начнем с атома водорода. Электростатическая сила между протоном и электроном приводит к образованию связанных состояний атома водорода. Следуя Бору, потребуем равенства кулоновской и центробежной силы (теорема Эренфеста для записи уравнения движения электрона вдоль квазиклассической траектории):

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = \frac{L^2}{mr^3} = \frac{n^2\hbar^2}{mr^3}. \quad (68)$$

При получении последнего соотношения мы воспользовались условием квантования Бора (4). Из равенства первого и последнего членов в (68) получаются допустимые значения r или боровские радиусы

$$r = \frac{L^2}{me^2} = \frac{n^2\hbar^2}{me^2} = n^2 a_0, \quad (69)$$

где a_0 по определению есть радиус первой боровской орбиты:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \alpha^{-1} \lambda_C = \lambda_D. \quad (70)$$

Следовательно, радиус первой боровской орбиты равен соответствующей длине дебройлевской волны электрона, а отношение длины комптоновской волны к длине дебройлевской волны равно постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$. Далее из (68) легко получить следующие полезные соотношения:

$$\alpha = n \frac{\lambda_C}{\lambda_D} = n \frac{v}{c}, \quad (71)$$

$$\frac{r}{\lambda_D} = n. \quad (72)$$

Итак, комптоновские и дебройлевские волны играют фундаментальную роль в квантовании радиуса орбит атома водорода, причем такое квантование возможно только тогда, когда отношение длины комптоновской волны к длине дебройлевской волны (v/c) соизмеримо с постоянной тонкой структуры α . Отношение (72) может быть интерпретировано как параметр подобия для атома водорода, где r есть радиус боровской орбиты, играющий роль геометрических размеров системы (характерный радиус), а величина $\lambda_D = \hbar/P = \hbar/mv$, имеющая размерность длины, играет роль характеристического радиуса. Следовательно, отношение характерного радиуса к характеристическому есть рациональное (в данном случае целое) число, играющее роль параметра подобия в задаче квантования

атома водорода. Параметр подобия может быть переписан в другой форме $\alpha\lambda_D/\lambda_C$, что очевидно.

В заключение рассматриваемого примера найдем энергию атома водорода, равную сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E = T + V = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r} = -\frac{e^2}{2n^2a_0}. \quad (73)$$

При получении этой формулы мы воспользовались соотношением (68).

Мы сознательно повторили боровский рецепт квантования атома водорода (сейчас известный как принцип соответствия), акцентируя внимание на возможности получения параметра подобия. Легко заметить, что при этом наблюдается аналогия с задачей теплообмена (уравнение непрерывности на поверхности твердого тела $\Leftrightarrow$ равенство кулоновской и центробежной сил на боровской орбите). Отличие же заключается в том, что Бор в своих вычислениях использовал адиабатический инвариант Эренфеста (в данном случае угловой момент системы) и гипотезу его квантования. Далее, твердое тело имеет четко определенную физическую граничную поверхность, в то время как в случае атома водорода такой физической поверхности нет. Однако Бор определил «поверхность» атома водорода как квантованные орбиты, на которых имеет место равенство кулоновской и центробежных сил. Позже появление устойчивых квантованных орбит де Бройль интерпретировал как результат возникновения стоячих волн. Как видим, квантование атома водорода Бор провел на основе метода аналогий. Современное развитие идей Бора для изучения регулярного и хаотического движения замкнутых систем мы кратко обсуждали выше. Отметим еще раз хорошо известный факт, что Бор решил задачу квантования атома водорода в 1913 г. задолго до создания квантовой механики.

Для иллюстрации изложенных выше тезисов используем метод Бора для квантования открытых систем, в частности, для изучения свойств адронных резонансов. При этом мы будем проводить аналогию с теорией α -распада и теорией открытых электромагнитных резонаторов.

Рассмотрим P -волновое пион-нуклонное рассеяние. Как отмечалось выше, дальнедействующая часть эффективного пион-нуклонного притягивающего потенциала описывается формулой (58). Используя второй закон Ньютона для записи уравнения движения вдоль квазиклассической траектории (фактически, теорему Эренфеста)

$$\frac{m_\pi v^2}{r} = \frac{\partial U_{\text{eff}}^N}{\partial r}, \quad (74)$$

и боровское условие квантования углового момента

$$m_\pi v r = L, \quad (75)$$

а также учитывая релятивистские поправки в (75) ($m_\pi \rightarrow E_\pi$), получаем уравнение

$$L^2 = f_{\pi NN}^2 \frac{m + m_\pi}{\sqrt{s}} \frac{m}{m_\pi} \frac{P_\pi^2}{E_\pi} r_0 (1 + \alpha r_0) e^{-\alpha r_0} \equiv F^2(s, r_0), \quad (76)$$

устанавливающее взаимосвязь между константой $f_{\pi NN}$ параметром теории $r_0 = 0,86$ фм и массой P -резонанса $M(R) = \sqrt{s}$. При этом массы основных состояний адронов (т.е. стабильных частиц пиона и протона) считаются заданными. В этом случае оказывается, что если для двух наинизших P -волновых резонансов — $\Delta(1232)$ -резонанса и роуперовского резонанса $N^*(1440)$ в соответствии с общей идеологией фиксировать параметр $r_0 = 0,86$ фм, то мы немедленно воспроизводим пик ($\sqrt{s} = M_\Delta = 1232$ МэВ)

$$F(M_\Delta^2, r_0 = 0,86) = 0,97 \approx 1 = L. \quad (77)$$

Аналогично для роуперовского резонанса $N^*(1440)$ (т.е. $P_{11}, L = 1$ и $M_{N^*} = 1440$ МэВ) получаем

$$F(M_{N^*}^2, r_0 = 0,86) = 0,91 \approx 1 = L. \quad (78)$$

Это означает, что параметр $r_0 = 0,86$ фм имеет физический смысл аналога первой боровской орбиты для сильного взаимодействия. Интересно отметить, что, рассматривая параметр r_0 как функцию константы связи $f_{\pi NN}$ на основании уравнения (76), мы немедленно приходим к асимптотической оценке $r_0 \propto \ln(f_{\pi NN})$, неожиданно иллюстрирующей невозможность построения теории возмущений для стандартного эффективного гамильтониана взаимодействия

$$H_{\pi NN} = - \frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta}) (\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}). \quad (79)$$

Спектр адронных резонансов квазимолекулярен в том смысле, что его gross-структура формируется в поверхностной области родительских адронов, где конечные продукты уже сформированы и за счет взаимодействия в конечном состоянии образуют квазистационарные состояния молекулярного типа. Итак, волновые свойства материи являются важнейшими характеристиками макро- и микромира. Возникающие при этом резонансы (стоячие волны) в соответствующих системах обеспечивают их устойчивость и определяют их «время жизни».

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже отмечалось во введении, в физике хорошо изучено относительно небольшое число «грубых» систем, интегральные свойства которых с разумной точностью описываются в простейших подходах, однако адекватность описания физической картины падает в процессе ее детализации. В физике классическим примером корректной работы с грубыми системами является теория дифракции, в которой определяющими параметрами задачи являются размер мишени и длина волны падающей частицы. Экспериментально наблюдаемая дифракционная картина практически не зависит от физических характеристик материала мишени и конкретной физической природы волны.

Дифракция относится к числу наиболее общих физических явлений, наблюдаемых во всех квазилинейных волновых системах как в классической, так и в квантовой физике. При этом во всех изученных случаях дифракции выполняются соотношения теории подобия и автомодельности: конечный результат с точностью до масштаба задачи определяется только соотношением размеров мишени и длины волны, причем эти величины всегда соизмеримы.

В работах [36-39] изложенная в настоящем обзоре дифракционная концепция описания адронных резонансов была сформулирована следующим образом: периодическое движение, преломление и интерференция дебройлевских волн в ограниченном объеме пространства отвечает за образование резонансов в любой квантовой системе. Если длина волны падающей частицы такова, что она возбуждает собственные колебания мишени, то возникает явление резонанса. В результате возникают хорошо локализованные волны, сосредоточенные на границе раздела двух сред (вакуума и распадающегося адрона). При возникновении подобной локализации решающую роль играют граничные условия. В настоящем обзоре мы рассмотрели граничное условие излучения, которое привело к асимптотическому квантованию импульса и позволило воспроизвести наблюдаемую в эксперименте gross-структуру спектра масс адронных резонансов.

Таким образом, в рамках излагаемой дифракционной теории адронных резонансов мы, фактически, сталкиваемся с задачей нахождения дискретного спектра сильновзаимодействующих элементарных частиц (т.е., по де Бройлю, дискретного набора собственных колебаний в волновой системе) для случая инфинитного движения. В хорошо исследованном в нерелятивистской квантовой механике случае финитного движения задача о нахождении дискретного спектра формулируется в виде уравнения Шредингера для связанных состояний. Для случая инфинитного движения, которому в волновой механике отвечает граничное условие в виде плосковолновой асимптотики, волновой оператор имеет дискретный спектр лишь в случае

постановки условия излучения на радиусе канала. Подобное обобщение теории дифракции на случай физики промежуточных энергий с формальной точки зрения эквивалентно R -матричной теории [15].

В рамках излагаемого дифракционного подхода ширины адронных резонансов были найдены на основании глубокой физической аналогии с теорией α -распада и оказались в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными.

В заключение авторы хотели бы выразить благодарность Е.А.Строковскому, в соавторстве с которым были получены многие представленные в обзоре результаты, а также В.И.Фурману, В.Г.Неудачину, С.Г.Кадменскому и А.Н.Гальперину за многочисленные стимулирующие дискуссии. Один из авторов (Ф.А.Г.) хотел бы отдельно поблагодарить Кристофа Бергольца за то, что он обратил наше внимание на дармштадтский и АВС-эффекты, а также Ю.Н.Покотиловского за многочисленные обсуждения, связанные с этой тематикой. Кроме того, авторы (Ю.Л.Р.) хотели бы поблагодарить Конкурсный центр Санкт-Петербургского университета за финансовую поддержку наших исследований (грант 6.5-2041).

Наконец, авторы хотели бы отметить, что многие из предложенных в обзоре идей родились под влиянием работ А.М.Балдина.

12. ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы получить асимптотическое условие квантования (21), рассмотрим граничное условие (18). Сферические функции Риккати — Ганкеля связаны с функциями Ганкеля соотношением

$$h_L^{(1)}(Pr) = \sqrt{\frac{\pi Pr}{2}} H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr).$$

Используя хорошо известные асимптотические разложения для функции Ганкеля и ее производной [172], можно получить выражения, равномерные при $|\arg Pr| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$:

$$H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr) \approx 2e^{-\frac{\pi i}{3}} \left(\frac{4\zeta}{1-z^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{Ai(\xi)}{(L+\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}, \quad [H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)]' \approx -4 \frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{z} \left(\frac{1-z^2}{4\zeta} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{Ai'(\xi)}{(L+\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}},$$

где $z = Pr/(L + \frac{1}{2})$, $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}} (L + \frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} \zeta$, $\frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} = \log \frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z} - \sqrt{1-z^2}$. Учитывая асимптотику для функции Эйри при больших ξ

$$Ai(\xi) \approx \frac{1}{2}\pi \frac{1}{2} \xi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}} (1 + O(\xi^{-1})), \quad Ai'(\xi) \approx -\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}} (1 + O(\xi^{-1})),$$

получаем

$$Ai'(\xi)/Ai(\xi) \approx -\xi^{1/2}.$$

Логарифмические производные в этом случае имеют вид

$$[H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)]' / H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr) \Big|_{r=r_0+0} \approx -\sqrt{1-z^2}/z. \quad (A1)$$

Предположим, следуя работам [36-39], что для хорошо изолированных резонансов $f=0$. Рассмотрим этот случай. При $|Pr_0| \gg 1$ получаем

$$\frac{[H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)]'}{H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)} \Big|_{r=r_0+0} \approx \frac{1}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \Big|_{r=r_0+0} = 0. \quad (A2)$$

Из (A1)-(A2) следует, что $Pr_0 \approx L + \frac{1}{2}$, и мы должны рассматривать асимптотические разложения вблизи каустической поверхности. При $z = O(1)$ и $(L + \frac{1}{2}) \gg 1$ можно использовать следующие асимптотики:

$$H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr) \approx (Ai(-\tau) - iBi(-\tau))/\nu, \quad [H_{L+\frac{1}{2}}^{(1)}(Pr)]' \approx -(Ai(-\tau) - iBi(-\tau))/\nu^2,$$

где $\tau = (Pr - L - 1/2)/\nu$, $\nu = ((L + 1/2)/2)^{\frac{1}{3}}$. Следовательно,

$$\frac{1}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \Big|_{r=r_0+0} \approx \frac{1}{2r} - \frac{P}{\nu} \frac{Ai'(-\tau) - iBi'(-\tau)}{Ai(-\tau) - iBi(-\tau)} \Big|_{r=r_0+0}.$$

Учитывая, что $(L + \frac{1}{2}) \gg 1$ и $z = O(1)$, имеем

$$\frac{1}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \Big|_{r=r_0+0} \approx -\frac{2\nu^2}{r} \frac{Ai'(-\tau) - iBi'(-\tau)}{Ai(-\tau) - iBi(-\tau)} \Big|_{r=r_0+0}.$$

Используя соотношения между функциями Эйри, получим

$$\frac{1}{h_L^{(1)}(Pr)} \frac{dh_L^{(1)}(Pr)}{dr} \Big|_{r=r_0+0} \approx -\frac{2\nu^2}{r} e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{Ai'(\tau e^{-\frac{\pi i}{3}})}{Ai(\tau e^{-\frac{\pi i}{3}})} \Big|_{r=r_0+0} \approx 0.$$

Следовательно, $Ai'(\tau e^{-\frac{\pi i}{3}}) = 0$. Отсюда получаем

$$Pr_0 = L + \frac{1}{2} + e^{\frac{\pi i}{3}} \nu a'_s, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где a'_s — нули Ai' (a'_s — действительно отрицательные числа).

Вопросы условий квантования резонансных состояний и функционального поведения резонансных волновых функций в пространстве в общем виде не исследованы. На начальном этапе эти вопросы могут быть изучены на модельных примерах. В этом приложении мы предполагаем для простоты, что внутренние волновые функции резонансных состояний являются решениями уравнения Шредингера с оптическим потенциалом — комплексной прямоугольной ямой

$$V(r) = \begin{cases} -(V_0 + iW_0) & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}.$$

Тогда $u_{in}(r) = j_L(Qr) = \sqrt{\frac{\pi Qr}{2}} J_{L+1/2}(Qr)$. Используя асимптотическое разложение $J_{L+1/2}(L+1/2 + \tau\nu) \approx Ai(-\tau)/\nu$ и известную оценку [173] для

функции Эйри $|Ai(x)| \leq (2\sqrt{\pi})^{-1} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}$ при $x > 0$, можно легко получить, что $j_L(Qr)$ экспоненциально уменьшается, когда Qr изменяется от $L+1/2$ до 0. Таким образом, внутри сферы $r \leq r_c$ ($r_c = (L+1/2)/Q$ — радиус каустической поверхности) волновая функция сконцентрирована внутри кольца $L+1/2 \leq Qr \leq Qr_0$, ширина которого приблизительно равна $\nu|a'_s|$. Это соответствует явлению волн «шепчущей галереи» (см. также [50,59]).

Далее потребуем, чтобы резонансные волновые функции имели максимумы на радиусе ямы $r = r_0$, то есть поставим следующие граничные условия:

$$h_L^{(1)'}(Pr_0) = 0. \quad (A3)$$

Тогда из условия равенства на границе логарифмических производных внутренних и внешних волновых функций

$$j'_L(Qr_0)h_L^{(1)}(Pr_0) - j_L(Qr_0)h_L^{(1)'}(Pr_0) = 0 \quad (A4)$$

следует, что

$$j'_L(Qr_0) = 0. \quad (A5)$$

Здесь $Q = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} V(r) + P^2}$. Граничное условие (A3) мы можем рассматривать как условие квантования асимптотического импульса P . Число корней уравнения (A3) равно $L + 1$. Обозначим их как $P_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, L + 1$. С другой стороны, число корней уравнения (A5) бесконечно, обозначим их как $Q_{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Далее мы можем определить значения потенциалов по формуле

$$V_{(k,n)}(r) = \frac{\hbar^2}{2m} (P_{(k)}^2 - Q_{(n)}^2). \quad (A6)$$

Таким образом, исходя только из граничных условий (A3) и (A5), мы имеем возможность вычислить неограниченную дискретную последовательность комплексных потенциалов $V_{(k,n)}$. В рассматриваемом примере мы использовали для простоты потенциалы прямоугольной ямы, и в этом случае задания граничных условий достаточно для определения параметров потенциала. При этом мы получаем эквивалентную неограниченную дискретную последовательность комплексных потенциалов. Физически эти потенциалы можно выбирать по числу нулей внутренних волновых функций $u_{in}(r)$ в области $0 < r \leq r_0$. Например, волновая функция $u_{in}(r)$ нижайшего по энергии резонансного состояния не должна иметь нулей, и так далее. В общем плане можно задать любую разумную с физической точки зрения функциональную форму для потенциала, а далее из граничных условий можно определить некоторые его параметры. Другими словами, задание граничных условий накладывает ограничения на параметры используемых потенциалов, и в этом смысле возникает самосогласованная задача описания резонансов. Такая процедура хорошо разработана в теории прямых ядерных реакций, мы отсылаем читателя к обзорным работам [174-176].

Далее рассмотрим вещественные потенциалы, взяв реальные части вычисленных выше потенциалов $V_{(k,n)}(r)$:

$$\bar{V}_{(k,n)}(r) = \text{Re} V_{(k,n)}(r). \quad (A7)$$

Найдем для них собственные значения $\bar{P}_{(k,n)}$, удовлетворяющие условию равенства логарифмических производных (A4). Значения $P_{(k)} r_0$, $-V_{(k,1)}$ и $\bar{P}_{(k,1)} r_0$ приведены в табл.17. Из таблицы видно, что

$$\bar{P}_{(1,1)} r_0 \approx L. \quad (A8)$$

Таблица 17. Значения $P_{(k)}r_0 - V_{(k,1)}$ и $\bar{P}_{(k,1)}r_0$ в случае $h_L^{(1)'}(Pr_0) = 0$

L	Pr_0	$V_0 + iW_0$	$\bar{P}r_0$
1	$\pm 0,866 - i0,500$	$394,3 \pm i48,6$	$0,979 - i0,356$
2	$\pm 1,807 - i0,702$	$684,7 \pm i142,4$	$1,991 - i0,426$
2	$- i1,60$	$983,3$	$1,191 - i0,081$
3	$\pm 2,758 - i0,843$	$1000,8 \pm i260,8$	$2,991 - i0,468$
3	$\pm 0,871 - i2,157$	$1606,2 \pm i210,7$	$1,028 - i2,143$
4	$\pm 3,715 - i0,954$	$1338,5 \pm i397,7$	$3,988 - i0,500$
4	$\pm 1,752 - i2,571$	$2260,3 \pm i505,6$	$2,024 - i2,539$
4	$- i2,949$	$2549,4$	$- i2,949$
5	$\pm 4,676 - i1,048$	$1695,0 \pm i549,7$	$4,938 - i0,527$
5	$\pm 2,644 - i2,908$	$2942,4 \pm i862,8$	$3,003 - i2,859$
5	$\pm 0,869 - i3,544$	$3522,7 \pm i345,5$	$0,991 - i3,546$
6	$\pm 5,641 - i1,129$	$2068,2 \pm i714,6$	$5,977 - i0,550$
6	$\pm 3,545 - i3,195$	$3650,1 \pm i1270,9$	$3,976 - i3,132$
6	$\pm 1,743 - i4,034$	$4524,7 \pm i788,9$	$1,956 - i4,039$
6	$- i4,285$	$4812,3$	$- i4,285$
7	$\pm 6,610 - i1,201$	$2455,8 \pm i891,7$	$6,972 - i0,571$
7	$\pm 4,452 - i3,448$	$4381,3 \pm i1722,4$	$4,944 - i3,371$
7	$\pm 2,623 - i4,454$	$5553,7 \pm i1311,0$	$2,907 - i4,463$
7	$\pm 0,868 - i4,897$	$6129,9 \pm i477,2$	$0,970 - i4,902$

Таким образом, исходя только из граничных условий мы получили условия квантования асимптотического импульса P (аналог квантования по Бору — Зоммерфельду) для резонансных состояний. Соответствующие волновые функции $\psi_{L=7}^{\text{orb}}(\bar{P}_{(1,1)}r)$ локализованы вблизи поверхности $r=r_0$ (см. рис.10), и мы можем интерпретировать $r=r_0$ как первую боровскую орбиту резонансного состояния с угловым моментом L .

Используя рекуррентные формулы для функций Риккати — Ганкеля и Риккати — Бесселя, преобразуем выражение (A4) к виду

$$j_L(Qr_0)h_{L+1}^{(1)}(Pr_0) - j_{L+1}(Qr_0)h_L^{(1)}(Pr_0) = 0. \quad (\text{A9})$$

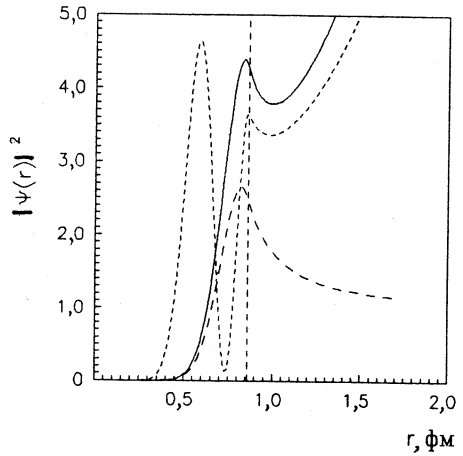
Поставим следующее граничное условие при $r=r_0$:

$$h_{L+1}^{(1)}(Pr_0) = 0. \quad (\text{A10})$$

Тогда

$$j_{L+1}(Qr_0) = 0. \quad (\text{A11})$$

Рис.10. Волновые функции $\Psi_{L=7}^{\text{orb}}$ (сплошная кривая), $\Psi_{L=7}^{\text{rad}}$ (короткий пунктир) и $\Psi_{L=7}^{\text{cau}}$ (длинный пунктир)



Повторив изложенную выше процедуру, получим значения $P_{(k)}$, $Q_{(n)}$, $V_{(k,n)}$, $k = 1, 2, \dots, L+1$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям (A9)-(A11), и вычислим $\bar{P}_{(k,n)}$ для вещественных потенциалов $\text{Re}\bar{V}_{(k,n)}(r)$. Результаты расчетов приведены в табл.18.

Таблица 18. Значения $P_{(k)}r_0$, $V_{(k,1)}$ и $\bar{P}_{(k,1)}r_0$ в случае $h_{L+1}^{(1)}(Pr_0) = 0$

L	Pr_0	$V_0 + iW_0$	$\bar{P}_0$
1	$\pm 0,866 - i1,500$	$1947,8 \pm i145,8$	$1,465 - i0,606$
2	$\pm 1,754 - i1,839$	$2756,6 \pm i362,0$	$2,484 - i0,555$
2	$-i2,322$	$3042,1$	$1,715 - i0,230$
3	$\pm 2,657 - i2,104$	$3608,5 \pm i625,7$	$3,481 - i0,530$
3	$\pm 0,867 - i2,896$	$4184,7 \pm i281,8$	$2,280 - i0,134$
4	$\pm 3,572 - i2,325$	$4498,5 \pm i931,5$	$4,472 - i0,518$
4	$\pm 1,746 - i3,352$	$5370,7 \pm i655,4$	$3,003 - i0,103$
4	$-i3,647$	$5656,9$	$2,369 - i0,075$
5	$\pm 4,493 - i2,516$	$5423,2 \pm i1268,3$	$5,463 - i0,507$
5	$\pm 2,626 - i3,736$	$6596,5 \pm i1100,9$	$3,815 - i0,092$
5	$\pm 0,868 - i4,248$	$7170,8 \pm i413,5$	$2,689 - i0,0075$
6	$\pm 5,421 - i2,686$	$6379,8 \pm i1633,5$	$6,454 - i0,502$
6	$\pm 3,517 - i4,070$	$7859,0 \pm i1606,3$	$4,678 - i0,088$
6	$\pm 1,739 - i4,758$	$8719,6 \pm i926,9$	$3,229 - i0,0037$
6	$-i4,971$	$9010,4$	$2,504 - i0,00027$
7	$\pm 6,364 - i2,839$	$7365,9 \pm i2024,0$	$7,445 - i0,500$
7	$\pm 4,414 - i4,368$	$9155,9 \pm i2163,7$	$5,571 - i0,0865$
7	$\pm 2,616 - i5,205$	$10314,5 \pm i1527,9$	$3,895 - i0,0026$
7	$\pm 0,868 - i5,588$	$10888,2 \pm i544,0$	$2,582 - i0,168e-4$

Как видно из таблицы, с хорошей точностью выполняется условие квантования

$$\bar{P}_{(1,1)} r_0 \approx L + \frac{1}{2}. \quad (\text{A12})$$

Соответствующая волновая функция $\psi_{L=7}^{\text{rad}}(\bar{P}_{(1,1)} r)$ для $L=7$ приведена на рис.10, и по сравнению с волновой функцией $\psi_{L=7}^{\text{orb}}(\bar{P}_{(1,1)} r)$ она имеет один дополнительный нуль в области действия потенциала. Поэтому условие квантования (A12) мы назовем радиальным квантованием.

И, наконец, интересен особый случай, когда каустическая поверхность для свободного движения продуктов распада резонанса совпадает с r_0 , тогда мы получаем следующее условие квантования:

$$P_{\text{cau}} r_0 = \sqrt{L(L+1)} \approx L + \frac{1}{2}. \quad (\text{A13})$$

Соответствующая функция $\psi_{L=7}^{\text{cau}}(\bar{P}_{\text{cau}} r)$ приведена на рис.10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Строковский Е.А., Гареев Ф.А., Ратис Ю.Л. — ЭЧАЯ, 1993, т.24, с.603.
2. Гареев Ф.А., Строковский Е.А., Ратис Ю.Л. — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.855.
3. Мигдал А.Б. — Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М.: Наука, 1983.
4. Мигдал А.Б., Воскресенский Д.Н., Саперштейн Э.Е., Троицкий М.А. — Пионные степени свободы в ядерном веществе. М.: Наука, 1991.
5. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
6. Эрикссон Т., Вайзе В. — Пионы и ядра. М.: Наука, 1991.
7. Алхазов Г.Д., Анисович В.В., Волковицкий П.Э. — Дифракционное взаимодействие адронов с ядрами при высоких энергиях. Л.: Наука, 1991.
8. Балдин А.М., Гольданский В.И., Максименко В.М., Розенталь И.Л. — Кинематика ядерных реакций. М.: Атомиздат, 1968.
9. Индурайн Ф. — Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986.
10. Gamov G.A. — Zeitschrift fur Physik, 1928, vol.51, p.204; vol.52, p.510.
11. Condon E.U., Guernsey R.W. — Phys.Rev., 1929, vol.33, p.127.
12. Geiger H., Nuttall J.M. — Phil.Mag., 1911, vol.22, p.613.
13. Кадменский С.Г., Фурман В.И. — Альфа-распад и родственные ядерные реакции. М.: Энергоатомиздат, 1985.
14. Wigner E.P., Eisenbud L. — Phys.Rev., 1947, vol.72, p.29.
15. Lane A.M., Thomas R.G. — Rev. of Modern Physics, 1958, vol.30, p.257.
16. Kapur P.L., Peierls R.E. — Proc.Roy.Soc., 1938, vol.A166, p.277.

17. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. — Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
18. Бор О., Моттelson Б. — Структура атомного ядра. М.: Мир, 1971, т.1, т.2. М.: Мир, 1977.
19. Гареев Ф.А., Банг Е. — ЭЧАЯ, 1980, т.11, с.813; Bang E., Ershov S.N., Gareev F.A., Kazacha G.S. — Nucl.Phys., 1980, vol.A339, p.89; 1978, vol.A309, p.381.
20. Berggren T., Lind P. — Phys.Rev., 1993, vol.C47, p.768.
21. Lind P. — Phys.Rev., 1993, vol.C47, p.1903.
22. Пилькун Х. — Физика релятивистских частиц. М.: Мир, 1983.
23. Hohler G. — πN Newsletter, 1994, No.9, p.1; Hohler G., Schulte A. — πN Newsletter, 1992, No.7, p.94.
24. Review of Particle Properties — Phys.Rev., 1994, vol.D50.
25. Ландсберг Л.Г. — ЯФ, 1994, т.57, с.47.
26. Silvestre-Brack B., Semay C. — Z.Physik, 1993, vol.C57, p.273.
27. Троян Ю.А. — ЭЧАЯ, 1993, т.24, с.683.
28. Tatischeff B. et al. — In: Proc. of the Xth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, World Scientific, 1990, p.177; Invited talk presented at the XIIth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, Russia, 1994.
29. Komarov E.N. — In: Proc. of the XIIth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, 1994, p.321.
30. Страковский И.И. — ЭЧАЯ, 1991, т.22, с.615.
31. Abashian A., Booth N.E., Crowe K.M. — Phys.Rev.Lett., 1960, vol.5, p.258.
32. Codino A., Plouin F. — Preprint LNS/Ph/94-06, 1994.
33. Bokemeyer H. et al. — GSI Scientific Report 81-2, 1981, p.127; Berderman E. et al. — GSI Scientific Report 81-2, 1981, p.128.
34. Давыдов А.С. — Теория атомного ядра. М.: Физматгиз, 1958.
35. Соловьев В.Г. — Теория сложных ядер. М.: Наука, 1971.
36. Ratis Yu.L., Gareev F.A. — Preprint JINR E2-92-3, Dubna, 1992; In: Proc. of the Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitation XX, Hirshegg, Austria, 1992.
37. Ratis Yu.L., Gareev F.A. — Preprint JINR E2-92-158, Dubna, 1992; In: Proc. of III International Symposium on Weak and Electromagnetic Interactions in Nuclei, Dubna, Russia, 1992. Singapore: World Scien., 1993, p.795.
38. Gareev F.A. et al. — Preprint JINR E2-92-474, Dubna, 1992; In: Proc. of the Intern. Conf. on Nuclear Structure and Nuclear Reactions at Low and Intermediate Energies, Dubna, Russia, 1992, p.272; In: Proc. of the Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitation XXI, Hirshegg, Austria, 1993, p.197.
39. Gareev F.A., Ratis Yu.L., Strokovsky E.A. — Preprint JINR E2-93-426, Dubna, 1993; In: Proc. of the 7th Intern. Conf. on Nucl. Reaction Mechanisms, Varenna, June 6-11, 1994, p.621; In: Proc. of the 14th Intern. IUPAP Conf. on Few Body Problems in Physics, Williamsburg, May 26-31, 1994, p.365.
40. Gareev F.A., Ratis Yu.L., Strokovsky E.A. — Preprint JINR E2-94-131, Dubna, 1994; In: Proc. of the International Symposium «DUBNA DEUTRON-93», Dubna, September 14-18, 1993, E2-94-95, p.300.

41. Матвеев В.А., Мурадян Р.М., Тавхелидзе А.Н. — ТМФ, 1973, т.15, с.332; Lett. Nuovo Cim., 1972, vol.5, p.907.
42. Baldin А.М. — Nucl.Phys., 1985, vol.A447, p.203; Препринт ОИЯИ Р2-94-463, Дубна, 1994.
43. Beth E., Uhlenbeck G.E. — Physica, 1937, vol.4, p.915.
44. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Статистическая физика. М.; 1963.
45. Thomson J.J. — Proc. Lond. Math. Soc., 1884, vol.15(1), p.197.
46. Peierls R.E. — Proc. Roy. Soc., 1959, vol.A253, p.16.
47. Humbelt J., Rosenfeld L. — Nucl.Phys., 1961, vol.A26, p.329.
48. Nussenzveig H.M. — Causality and Dispersion Relations. New York, 1972.
49. Фок В.А. — Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970.
50. Вайнштейн Л.А. — Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Советское радио, 1966.
51. Зельдович Я.Б. — ЖЭТФ, 1961, т.12, с.542.
52. Ньютон Р. — Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
53. Wigner E.P. — Phys.Rev., 1955, vol.98, p.145.
54. Bohm A. — Quantum Mechanics. 3rd Ed., Springer, 1993.
55. Гольдбергер М., Ватсон К. — Теория столкновений. М.: Мир, 1967.
56. Teshigawara M., Kato K., Filippov G.F. — Prog. Theor. Phys., 1994, vol.92, p.79.
57. Muller J., Burgdorfer J., Noid D. — Phys.Rev., 1992, vol.A45, p.1471.
58. Cayley A. — Phil. Trans. Roy. Soc., 1857, vol.147, p.273; Collected Works, 1957, vol.145, p.336.
59. Бабич В.М., Булдырев В.С. — Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
60. Rayleigh (Struut J.W.) — Phil. Mag., 1910, vol.20, p.1001; Рэлей — Теория звука. М.: Гостехиздат, 1944.
61. Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. — Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982.
62. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
63. Постон Т., Стюарт И. — Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.
64. Gutzwiller M.C. — Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990.
65. Keller J.B. — Ann. Phys., New York, 1958, vol.4, p.180.
66. Keller J.B., Rubinow S.I. — Ann. Phys., New York, 1960, vol.9, p.24.
67. Einstein A. — Verh. Dtsch. Phys. Ges., 1917, vol.19, p.82.
68. Маслов В.П. — Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Наука, 1988.
69. Маслов В.П., Федорюк М.В. — Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
70. Littlejohn R.G., Robbins J.M. — Phys. Rev., 1987, vol.A36, p.2953; Phys. Rev. Lett., 1987, vol.58, p.1388.
71. Струтинский В.М., Магнер А.Г. — ЭЧАЯ, 1976, т.7, с.356.
72. Ballian R., Bloch C. — Ann. Phys., 1974, vol.85, p.514.
73. Feshbach H., Lomon E.L. — Ann. Phys., New York, 1964, vol.29, p.19; 1968, vol.48, p.94.

74. Симонов Ю.А. — ЯФ, 1982, т.36, с.722; 1983, т.38, с.1542.
75. Jaffe R.L., Low F.E. — Phys.Rev., 1979, vol.D19, p.2105.
76. Gonzalez P., LaFrance P., Lomon E.L. — Phys.Rev., 1987, vol.D35, p.2142.
77. Барашенков В.С. — Сечение взаимодействия элементарных частиц. М.: Наука, 1966.
78. Flaminio V. et al. — CERN-HERA-84-01, CERN, Geneva, 1989.
79. Watson K.M. — Phys.Rev., 1952, vol.88, p.1163.
80. Мигдал А.Б. — ЖЭТФ, 1955, т.28, с.3.
81. Gareev F.A., Ratis Yu.L., Korovin P.P. et al. — ЯФ, 1994, т.57, с.1020.
82. Gareev F.A., Ratis Yu.L., Korovin P.P. et al. — ЯФ, 1994, т.57, с.1440.
83. Gareev F.A. et al. — In: Proc. of the Intern. Conf. on Spin and Isospin in Nuclear Interactions, Telluride, March 11-15, 1991, ed. by S.W.Wissinik et al., Plenum Press, New York, 1991, p.445.
84. Gareev F.A., Ratis Yu.L., Semtchenkov A.G. et al. — ЯФ, 1994, т.57, с.1411.
85. Hofstadter R.— Nuclear and Nucleon Structure. Benjamin Press, 1963.
86. Дрелл С., Захариазен Ф. — Электромагнитная структура нуклонов. М.: ИЛ, 1962.
87. Федянин В.К. — Электромагнитная структура ядер и нуклонов. М.: Высшая школа, 1967.
88. Bogolubov P.N. — Ann. Inst. Henri Poincare, 1968, vol.8, p.163.
89. Дорохов А.Е., Кочелев Н.И. — ЯФ, 1990, т.52, с.214.
90. Ратис Ю.Л., Гареев Ф.А. — Препринт ОИЯИ Р4-95-15, Дубна, 1995.
91. Попов В.С., Мур В.Д., Сергеев А.В. — ЖЭТФ, 1991, т.100, с.20.
92. Мур В.Д., Попов В.С. — Письма в ЖЭТФ, 1990, т.51, с.499; Phys. Lett., 1991, vol.A157, p.185.
93. Buck B., Merchant A.C., Perez S.M. — Phys.Rev.Lett., 1990, vol.65, p.2975.
94. Browne E., Firestone R.B. — Table of Radioactive Isotopes. New York: Wiley, 1986.
95. Кадменский С.Г., Ратис Ю.Л., Фурман В.И., Хлебостроев В.Г. — ЯФ, 1978, т.27, с.630.
96. Кадменский С.Г., Ратис Ю.Л., Рыбак К.С., Фурман В.И., — ЯФ, 1978, т.27, с.906.
97. Yokosawa A. — Jour. of Phys. Soc. of Japan, Suppl., 1985, vol.55, p.251.
98. Locher M.F., Sainio M.E., Svarc A. — Adv. Nucl. Phys., 1986, vol.17, p.42.
99. Батурин В.Н. и др. — Препринт ЛИЯФ 1750, Ленинград, 1991.
100. Троян Ю.А., Печенов В.Н. — ЯФ, 1993, т.56, с.191. Troyan Yu.A. et al. — In: Proc. of the 10 Int. Seminar on High Energy Phys. Problems, September, 1990; Singapore: World Scien., 1991, p.149; Препринт ОИЯИ Р2-86-35, Дубна, 1986.
101. Баренблат Г.И. — Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
102. Седов Л.И. — Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1987.
103. Birkhoff G. — Hydrodynamics. A study in logic, fact and similitude. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1960.
104. Weizsacker C.F. — Z.Phys., 1935, Bd 96, p.431.

105. Ландау Л.Д. — ЖЭТФ, 1956, т.30, с.1058.
106. Носов В.Г. — Макроскопические квантовые эффекты в атомных ядрах. М.: Атомиздат, 1980.
107. Лукьянов В.К., Титов А.И. — Известия АН СССР, сер. физ., 1990, т.54, с.2082.
108. Glozman L.Ya., et al. — J.Phys.G: Nucl.Part.Phys., 1994, vol.20, p.49.
109. LaFrance P. et al. — Preprint CTP 2133, 1993; Lomon E. — J.Physique 51 Supple, Colloque, 1990, vol.C6, p.363.
110. Bazhanskij I.I. et al. — Preprint JINR P2-88-501, Dubna, 1988.
111. Гареев Ф.А., Ратис Ю.Л., Казаचा Г.С. — Препринт ОИЯИ P2-95-82, Дубна, 1995.
112. Едогооров С.О. и др. — Препринт ФТИ 141-91-ФВЭ, Ташкент, 1991.
113. Andreev V.P. et.al. — Z.Phys., 1987, vol.A327, p.363.
114. Ohashi Y. et al. — Phys.Rev., 1987, vol.C36, p.2422.
115. Ball J. et al. — Phys.Rev.Lett., 1994, vol.B320, p.206.
116. Абрамов Б.М. и др. — ЯФ, 1994, т.57, с.850.
117. Покотиловский Ю.Н. — ЭЧАЯ, 1993, т.24, с.5.
118. Griffin J.J. — Phys.Rev., 1993, vol.47, p.351.
119. Samios N.P. et al. — Phys.Rev.Lett., 1962, vol.9, p.139.
120. Brock I.C. et al. — Phys.Rev., 1991, vol.D43, p.1448.
121. Foster M. et al. — Phys.Rev., 1964, vol.B138, p.812.
122. Abdivaliev A. et al. — Nucl.Phys., 1980, vol.B168, p.385.
123. Plouin F. — In: Proc. of the Workshop on Production and Decay of Light Mesons, 3-4 March 1988, Paris, ed. by P.Fleury. Singapore: World Scien., 1988, p.114.
124. Anderson J.A. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.6, p.365; Stonehill D. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.6, p.624; Erwin A. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.6, p.628.
125. Maglic B. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.7, p.178.
126. Pevsner A. et al. — Phys.Rev.Lett., 1961, vol.7, p.421.
127. Ivanishin Yu.I. et al. — Preprint JINR E1-93-155, Dubna, 1993.
128. Иванишин Ю.И. и др. — Сообщение ОИЯИ P2-83-727, Дубна, 1983.
129. Besson D., Skwarniski T. — Ann.Rev.Nucl.Part.Sci., 1993, vol.43, p.333.
130. Wu Q.W. et al. — Phys.Lett., 1993, vol.B301, p.307.
131. Ying Z. et al. — Phys.Rev., 1992, vol.C45, p.528.
132. Galonsky A. et al. — In: Proc. of CORINNE II — International Workshop on Multi-particle Correlations and Nuclear Reactions, Nantes, France September 6-10, 1994.
133. Александров Д.В. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1994, т.59, с.301.
134. Koinig I. et al. — Z.Phys., 1993, vol.A346, p.153.
135. Salabura P. et al. — Phys.Lett., 1990, vol.B245, p.153.
136. Koenig W. et al. — Phys.Lett., 1989, vol.B218, p.12.
137. Sakai M. et al. — In: Proc. on Nuclear Physics in Our Times, Sanibel Island, FL, November 17-21, 1992.
138. Danzmann K. et al. — Phys.Rev.Lett., 1987, vol.59, p.1885; 1987, vol.62, p.2353.
139. Bargholtz Chr. et al. — J.Phys., 1987, vol.G13, p.L265; Phys.Rev., 1990, vol.C40, p.1188; Erb K.A. et al. — Phys.Lett., 1986, vol.B181, p.52.

140. Jaffe R.L. — Phys.Rev., 1977, vol.D15, p.267; 1979, vol.D17, p.1444.
141. Gareev F.A., Kazacha G.S., Ratis Yu.L. et al. — Preprint JINR E2-95-9, Dubna, 1995.
142. Бровкин Л.Ю. и др. — ЯФ, 1993, т.56, с.762.
143. Алешин Ю.Д., Гузавин В.М. — ЯФ, 1992, т.55, с.3255.
144. Aleev A.N. et al. — Zeitschrift fur Physik, 1984, vol.25C, p.205.
145. Balatz M. et al. — Preprint IHEP 93-5, Protvino, 1993.
146. Karnaukhov V.M. et al. — Phys.Lett., 1992, vol.B281, p.148; ЯФ, 1994, т.57, с.841.
147. Shahbazian E.A. et al. — In: Proc. of the IXth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, 1988, D1,2-86-668, p.337.
148. Aleev A.N. et al. — Preprint JINR D1-92-534, Dubna, 1992.
149. Borquin M. et al. — Phys.Lett., 1986, vol.B172, c.113.
150. Бармин В.В. и др. — ЯФ, 1994, т.57, с.1724.
151. Abidinov O.B. et al. — Preprint JINR P1-86-11, Dubna, 1986.
152. Baldin A.M. et al. — Proc. of the Xth Intern. Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, 1990, p.110. CERN-PPE/91-110, July 9, 1991.
153. Barnes T. — Preprint ORNL-CCIP-93-11/RAL-93-065, Oak Ridge, 1993.
154. Antoniazzi L. et al. — FERMILAB-PUB 92/265 E E705, 1993.
155. Волошин М.В., Окунь Л.Б. — Письма в ЖЭТФ, 1976, т.23, с.369.
156. Weinstein J., Isgur N. — Phys.Rev.Lett., 1982, vol.48, p.659.
157. Besson D., Skwarnicki T. — Preprint CLNS 93/1239 SMU HEP 93-13, 1993.
158. Butler F. et al. — Preprint CLNS 93/1234 CLEO 93-17, 1993.
159. Heintz U. et al. — Phys.Rev., 1992, vol.D46, p.1928.
160. Besson D. et al. — Phys.Rev.Lett., 1985, vol.54, p.381.
161. Schepkin M., Zaboronsky O., Clement H. — Zeitschrift für Physik, 1993, vol.A345, p.407.
162. Efremenko Yu.V. et al. — Preprint ITEP 4-94, 1994, Moscow.
163. Knight W.D. et al. — Phys.Rev.Lett., 1984, vol.52, p.2141; Phys.Rev., 1985, vol.B31, p.2539; vol.B32, p.1366; Katakuse I. et al. — Int. J.Mass Spectr. and Ion Proces., 1986, vol.67, p.229; vol.69, p.109.
164. De Heer W.A. et al. — Solid State Phys., 1987, vol.40, p.93.
165. Bjornholm S. — Contemp.Phys., 1990, vol.31, p.309.
166. Нестеренко В.О. — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.1665.
167. Nishioka H. — Z.Phys., 1991, vol.D19, p.19.
168. Nishioka H., Hansen K., Mottelson B. — Phys.Rev., 1990, vol.B42, p.9377.
169. Чечельницкий А.М. — Экстремальность, устойчивость, резонансность в астеродинамике и космонавтике. М.: Машиностроение, 1980; Доклады АН СССР, 1988, т.303, с.1082.
170. Гухман А.А. — Введение в теорию подобия. М.: Высшая школа, 1973.
171. Гухман А.А. — Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. М.: Высшая школа, 1967.
172. Abramovitz M., Stegun I. — Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover Publications, 1964.

- 173. Olver F. — Asymptotics and Special Functions. Academic Press, 1974.
- 174. Банг Е., Бунаков В.Е., Гареев Ф.А., Шульц Г. — ЭЧАЯ, 1974, т.5, с.263.
- 175. Банг Е., Гареев Ф.А., Иванова С.П. — ЭЧАЯ, 1978, т.9, с.286.
- 176. Bang J., Gareev F.A., Pinkston W.T., Vaagen J. — Phys.Reports, 1985, vol.195, p.253.
- 177. Декарт Р. — Рассуждение о методе с приложениями. Диоптрика, метеоры, геометрия. М.: Изд-во АН СССР, 1953.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е.П.Жидков, Ю.Ю.Лобанов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются последние результаты, полученные различными авторами в области использования метода приближенного континуального интегрирования при решении широкого круга задач физики и математики, в том числе задач квантовой механики, квантовой теории поля, исследования дифференциальных операторов, и решении различных дифференциальных уравнений математической физики. Дается строгое определение континуального интеграла в полном сепарабельном метрическом пространстве. Приводится обзор работ, содержащих исследование континуального предела решеточных моделей, а также результаты использования континуальных интегралов в изучении непертурбативных явлений в квантовой теории поля, топологической структуры вакуума в квантовых калибровочных теориях, вопросов туннелирования, в описании многочастичных квантовых систем, теории струн и квантовой гравитации. Представлены полученные авторами результаты в области континуального интегрирования в рамках нового подхода к интегралам по траекториям на основе функционального анализа и теории меры, относящиеся к теоретическому изучению континуальных интегралов, созданию нового метода их приближенного вычисления и использованию его для исследования ряда квантовых систем.

We discuss the latest results of different authors related to employment of the numerical functional integration method in solution of the wide range of problems of physics and mathematics, including the problems of quantum mechanics, quantum field theory, study of differential operators and solution of various differential equations of mathematical physics. The rigorous definition of functional integral in complete separable metric space is given. The review of papers containing the analysis of continuum limit of lattice models is presented, as well as the survey of results of application of functional integrals to investigation of nonperturbative phenomena in quantum field theory, problems of tunnelling, study of many-particle quantum systems, string theory and quantum gravitation. The results in the field of functional integration obtained in the framework of the new approach to path integrals on the basis of functional analysis and measure theory and related to theoretical study of functional integrals, elaboration of new method for their numerical evaluation and its application to analysis of some quantum systems are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Метод континуального интегрирования представляет собой мощный аппарат для исследования широкого круга проблем в различных областях физики и математики [1]. Впервые использованное в квантовой механике Р.Фейнманом [2], континуальное интегрирование является в настоящее время основой современной конструктивной квантовой теории поля [3], основным методом численного исследования непертурбативных явлений в квантовой калибровочной теории [4—6]. Континуальные интегралы находят широкое применение в квантовой механике, теории поля [7—13], квантовой электродинамике [14—16], статистической физике [9], [17—19], физике ядра [20], физике твердого тела [19], квантовой статистике [21], теории сверхпроводимости [22], ферромагнетизма [23,24], теории гравитации [25], квантовой оптики, в статистической радиотехнике, радиационной физике частиц высоких энергий и во многих других областях [26]. Использованию континуальных интегралов регулярно посвящаются крупные международные конференции, такие как «Path Integration: Achievements and Goals», Trieste, Italy, 1987; Colloquium on Functional Integration Theory and Applications, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1979; Adriatico Research Conference on Path Integration and Its Applications, Trieste, Italy, 1991; International Conference on Path Integrals in Physics, Bangkok, Thailand, 1993; серия регулярно проводимых конференций под общим названием «Path Integrals from meV to MeV» (Albany, New York, 1983; Bielefeld, 1985; Bangkok, 1989; Tutzing, Munich, 1992).

Широкое применение континуальных интегралов стимулировало развитие их теории и методов приближенного вычисления. Поскольку «мера Фейнмана» не удовлетворяет условию счетной аддитивности, т.е. не является мерой в математически строгом смысле, возникло множество различных подходов к фейнмановским интегралам, обосновывавших их конструкцию и предлагавших соответствующие способы их приближенного вычисления. Среди основных подходов можно выделить подходы Нельсона, Ито, де Вит-Моррет, Альбеверио и Хэг-Крона, Трумена (более подробно об этих и других подходах см. работы [27—30], а также цитированную там литературу). Вопросы истории развития теории, методологии использования интегралов по траекториям рассмотрены в [31]. Большинство результатов относится к лагранжевым интегралам по траекториям в конфигурационном пространстве, однако большое внимание уделяется также гамильтоновым интегралам в фазовом пространстве (например, [32—34]). В работе [35] и развивающей ее результаты работе [36] в частном случае интегралов по траекториям на фазовом пространстве, для которых имеет место ВКБ-приближение, получено обобщение теоремы Дьюстермаата — Хекмана, устанавливающей условия точности метода ВКБ. Как отмечается

в [36], тот факт, что интеграл по траектории при определенных условиях может быть ВКБ-точным, представляет интерес в двух аспектах: возможность расширения числа известных примеров квантовых систем, где фейнмановский интеграл берется точно, и возможность более глубокого проникновения в геометрическую структуру квантовых систем. Однако, как отмечается в [35] и [36], результаты этих работ имеют ограниченную область применения и требуют выполнения ряда условий, что не всегда осуществляется на практике. Как отмечается в [36], проведенный в этой работе анализ справедлив лишь в случае фазовых пространств, являющихся двумерными симплектическими множествами, причем обобщение его на случай больших размерностей не представляется возможным.

В ряде работ проводится исследование интегралов по траекториям в искривленном конфигурационном пространстве (см. [7,37]). В работе [37] рассмотрена динамика квантовой системы на сфере и получено представление для функции Грина (матричного элемента оператора эволюции) в виде интеграла по траекториям, для чего использовалось полуклассическое приближение.

В работах [35—37] речь идет об интегралах по мере, задаваемой не на функциональном пространстве, а в виде предела N -кратных римановых интегралов при $N \rightarrow \infty$, и не удовлетворяющей условию счетной аддитивности, что, как уже упоминалось, затрудняет математическое обоснование таких интегралов. В последние годы появились работы, интерпретирующие подобные конструкции как квазимеры или псевдомеры (см. [38]). В работах [35—37] какие-либо численные расчеты не приводятся.

Начало математически строгому изучению континуальных интегралов по счетно-аддитивным мерам было положено в работах Н.Винера [39], который ввел в пространстве непрерывных на отрезке функций меру континуального интегрирования, носящую теперь его имя. Следует отметить, что сам термин континуальный (или функциональный) интеграл следует применять именно к интегралам по определенной мере в заданном пространстве, хотя в русском языке он часто используется как синоним понятия интеграла по траекториям, при определенных условиях являющегося физической интерпретацией континуального интеграла в частном случае квантовой физики. За последние годы в мире были получены значительные результаты в области теории и использования континуальных интегралов. Долгое время наиболее изученными являлись винеровские интегралы (см., например, [40]), связанные с фейнмановскими интегралами операцией перехода к мнимому времени, т.е. к евклидовой формулировке теории, однако в последнее время большое внимание уделяется их обобщению [41], а также исследованию континуальных интегралов по другим мерам в соответствующих пространствах (например, [26,42—48]). Значительные успехи были достигнуты также в области методов приближенного вычисления континуальных интегралов

без предварительной дискретизации пространства и времени и не требующих упрощающих предположений типа приближения среднего поля, квазиклассического приближения и т.д. (см., например, [38,49—52]). Различными авторами ведется также работа по составлению таблиц точно берущихся континуальных интегралов по счетно-аддитивным мерам, а также фейнмановских интегралов по траекториям [53], [54]. Современное состояние математической теории континуального интегрирования представлено в работах [43,38,55].

Использованию континуальных интегралов для численного решения различных задач посвящается в последние годы большое количество работ. Приведем в качестве примера некоторые из них: вычисление пропагатора заряженной частицы в магнитном поле [56]; вычисление специальных функций [57]; численное исследование фазы гелия, поглощенной графитом [58]; вычисление спектра эффективного гамильтониана в $SU(3)$ [59]; решение обратной задачи для трехмерного уравнения Шредингера [60]; численное исследование взаимодействия заряженной частицы с монополюм Калуза — Кляйна [61]; исследование фазовых переходов [62—64], турбулентного потока жидкости [65]; вычисление второго вириального коэффициента анионного газа [66]. Более подробно проблемы использования континуальных интегралов будут рассмотрены ниже. Основное внимание мы уделяем континуальным интегралам евклидовой квантовой физики. При этом мы рассматриваем главным образом вычисление континуальных интегралов по счетно-аддитивным мерам в сепарабельных метрических пространствах; вычисление интегралов по траекториям, не удовлетворяющих этому условию, может составить предмет отдельного обсуждения. В данной работе приводятся также результаты в области приближенного континуального интегрирования, полученные ее авторами за последние несколько лет.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Дадим определение континуального интеграла на основе последних достижений в области теории меры и теории интегрирования в функциональных пространствах (см., например, [43,38]). Пусть задано некоторое пространство X с выделенной на нем σ -алгеброй G подмножеств этого пространства вместе с мерой μ , заданной на G .

Функционал $F[x]$, определенный на $x \in X$ и принимающий действительные значения, называется измеримым на X , если для всякого борелевского множества B действительной прямой соответствующее множество $\{x \in X : F[x] \in B\}$ принадлежит σ -алгебре G .

Простым функционалом называется измеримый функционал, принимающий не более чем счетное число различных значений. Такой функционал представим в виде

$$F[x] = \sum_j a_j \chi_{A_j}[x],$$

где a_j — различные числа; A_j — непересекающиеся множества из G , а $\chi_{A_j}[x]$ — характеристические функции множеств A_j :

$$\chi_{A_j}[x] = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in A_j, \\ 0 & \text{при } x \notin A_j. \end{cases}$$

Интеграл от простого функционала $F[x]$ по пространству X , обозначаемый $\int_X F[x] d\mu$, определяется равенством

$$\int_X F[x] d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A_k), \quad \text{где } A_k = \{x \in X : F[x] = a_k\} \in G,$$

если ряд справа сходится абсолютно. Простой функционал $F[x]$ в этом случае называется интегрируемым по мере μ на пространстве X .

Пусть $F[x]$ — произвольный, измеримый на X функционал. Обозначим $F^+[x] = \max\{F[x], 0\}$; $F^-[x] = -\min\{F[x], 0\}$. Очевидно, что $F[x] = F^+[x] - F^-[x]$, при этом $F^+[x]$ и $F^-[x]$ — неотрицательные и измеримые на X функционалы.

Интегралом от измеримого неотрицательного функционала $F[x]$ по пространству X называется величина

$$\int_X F[x] d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X F_n[x] d\mu,$$

где $\{F_n[x]\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная монотонно неубывающая последовательность неотрицательных простых функционалов, сходящаяся к $F[x]$, и предел в правой части равенства не зависит от выбора последовательности.

Пусть $F[x]$ — произвольный измеримый функционал. Если один из интегралов

$$\int_X F^+[x] d\mu, \quad \int_X F^-[x] d\mu \quad (1)$$

конечен, то интеграл от функционала $F[x]$ определяется равенством

$$\int_X F[x] d\mu = \int_X F^+[x] d\mu - \int_X F^-[x] d\mu. \quad (2)$$

Если оба интеграла (1) конечны, то интеграл (2) также конечен, и функционал $F[x]$ называется интегрируемым по мере μ на пространстве X .

Мы будем рассматривать пространства X , являющиеся полными сепарабельными метрическими пространствами, наиболее часто встречающимися в приложениях. В частности, примером таких пространств является $C[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке функций.

Если имеет место $\mu(X) = 1$, то мера μ называется вероятностной мерой на пространстве X .

Пусть X' — сопряженное к X пространство линейных непрерывных функционалов на X . Для всякого $\varphi \in X'$ и любого $x \in X$ будем обозначать значение функционала на элементе x как $\langle \varphi, x \rangle$.

Цилиндрическим множеством в пространстве X называется множество вида

$$Q_{\varphi_1 \dots \varphi_n}(A_n) = \{x \in X : [\langle \varphi_1, x \rangle, \langle \varphi_2, x \rangle, \dots, \langle \varphi_n, x \rangle] \in A_n\}, \quad (3)$$

где $\varphi_1 \dots \varphi_n$ — любые линейно независимые элементы пространства X' , A_n — произвольное борелевское множество в n -мерном евклидовом пространстве $R^n (n = 1, 2, \dots)$. Множество A_n называется основанием цилиндрического множества $Q_{\varphi_1 \dots \varphi_n}$.

Пусть $K(\varphi, \psi)$ — билинейный, а $M(\varphi)$ — линейный функционалы, заданные на сопряженном пространстве X' , $\varphi, \psi \in X'$. Вероятностную меру μ , заданную на σ -алгебре G , порожденной всеми цилиндрическими множествами пространства X , называют гауссовой, если ее значение на любом цилиндрическом множестве $Q_{\varphi_1 \dots \varphi_n}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} & \mu(Q_{\varphi_1 \dots \varphi_n}(A_n)) = \\ & = (2\pi)^{-n/2} (\det K)^{-1/2} \int_{A_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (K^{-1}[u - M(\varphi)], [u - M(\varphi)]) \right\} du, \end{aligned} \quad (4)$$

где K^{-1} — матрица, обратная к матрице $K = \|K(\varphi_i, \varphi_j)\|$,

$$M(\varphi) = \{M(\varphi_1), M(\varphi_2), \dots, M(\varphi_n)\}; \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n);$$

$$(K^{-1}[u - M(\varphi)], [u - M(\varphi)]) = \sum_{i,j=1}^n K_{ij}^{-1} [u_i - M(\varphi_i)][u_j - M(\varphi_j)],$$

K_{ij}^{-1} — элементы матрицы K^{-1} и $du = du_1 du_2 \dots du_n$.

Гауссова мера, определяемая в соответствии с (4), представляет собой счетно-аддитивную вероятностную меру на борелевской σ -алгебре пространства X . Континуальный интеграл при этом является интегралом Лебега в X по мере μ . Функционал $K(\varphi, \psi)$ называется корреляционным функционалом, а $M(\varphi)$ — средним значением меры μ .

Данное определение меры отличается от общеизвестной меры в n -мерном евклидовом пространстве R^n , поскольку ввести меру обычным способом в бесконечномерном случае ($n \rightarrow \infty$) уже невозможно, т.к. объем n -мерного параллелепипеда будет стремиться к бесконечности. Как будет показано ниже, через континуальные интегралы по гауссовой мере могут быть выражены решения различных дифференциальных и интегральных уравнений, а также наблюдаемые значения операторов в квантовой физике.

Во многих вопросах теории меры важную роль играет определенный на X' функционал

$$\chi(\varphi) = \int_X \exp \{i \langle \varphi, x \rangle\} d\mu(x),$$

называемый характеристическим функционалом. Как показано в [50], в случае гауссовой меры

$$\int_X \exp \{i \langle \varphi, x \rangle\} d\mu(x) = \exp \left\{ iM(\varphi) - \frac{1}{2} K(\varphi, \varphi) \right\}, \quad \varphi \in X',$$

где

$$K(\varphi, \psi) = \int_X [\langle \varphi, x \rangle - M(\varphi)][\langle \psi, x \rangle - M(\psi)] d\mu(x), \quad \varphi, \psi \in X',$$

$$M(\varphi) = \int_X \langle \varphi, x \rangle d\mu(x).$$

Гауссова мера однозначно определяется своим характеристическим функционалом $\chi(\varphi)$ или функционалами $K(\varphi, \psi)$ и $M(\varphi)$ [50].

Понятие гауссовой меры включает в себя широкий класс мер, наиболее часто используемых в приложениях, в том числе условную меру Винера на пространстве непрерывных функций $x(t) \in C[0, 1]$, удовлетворяющих $x(0) = x(1) = 0$. В данном случае $M(\varphi) = 0$. Поскольку в пространстве $C_0 \equiv \{C[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$ имеет место

$$\langle \varphi, x \rangle = \int_0^1 x(t) d\varphi(t)$$

для функций $\varphi(t)$ с ограниченной вариацией, то в данном случае

$$K(\varphi, \psi) = \int_{C_0} \langle \varphi, x \rangle \langle \psi, x \rangle d\mu(x) = \int_0^1 \int_0^1 K(t, s) d\varphi(t) d\psi(s),$$

где интегральное ядро

$$K(t, s) = \int_{C_0} x(t) x(s) d\mu(x)$$

называется корреляционной функцией меры. Условная мера Винера $d_W x$ характеризуется следующей корреляционной функцией:

$$K(t, s) = \min \{t, s\} - ts, \quad t, s \in [0, 1].$$

Более наглядное определение винеровской меры на основе теории броуновского движения содержится, например, в работе И.М.Гельфанда и А.М.Яглома [67].

2. СВЯЗЬ КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С РЕШЕНИЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Связь между дифференциальными уравнениями в частных производных и континуальными интегралами была обнаружена Р.Фейнманом [2] при создании нового подхода к квантовой механике. Математически строгое доказательство представления решения уравнения теплопроводности (уравнения Шредингера с мнимым временем) содержится в работах М.Каца [68]. В соответствии с формулой Фейнмана — Каца (см. также [67]), функция Грина Z уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, x_0, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(x, x_0, t) - V(x)Z(x, x_0, t)$$

$$Z(x, x_0, 0) = \delta(x - x_0), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0$$

$$Z(x, x_0, t) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $V(x)$ — заданная функция, представляется в виде интеграла по условной мере Винера

$$Z(x, x_0, t) = \int_C \exp \left\{ - \int_0^1 V[\omega(\tau)] d\tau \right\} d_W \omega \quad (6)$$

по пространству $C[0, t]$ непрерывных функций $\omega(\tau)$, удовлетворяющих условиям $\omega(0) = x_0$, $\omega(t) = x$.

С помощью функции Грина $Z(x, x_0, t)$ могут быть найдены решения $Z(x, t)$ задачи (5) при различных начальных условиях $Z(x, 0) = Z_0(x)$ в виде

$$Z(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_0(x_0) Z(x, x_0, t) dx_0.$$

В работе [67] связь континуальных интегралов с решениями дифференциальных уравнений была исследована применительно к задачам квантовой физики. Там же была поставлена задача обобщения этой связи на более широкий класс дифференциальных уравнений, в том числе параболических более высокого порядка. Такое обобщение для абстрактных эволюционных уравнений, включающих различные уравнения и системы параболического, гиперболического и шредингеровского типов, получено в работах Ю.Л. Далецкого [69—71].

Представление решения дифференциального уравнения в виде континуального интеграла позволяет свести исходную задачу к квадратурам в функциональном пространстве, что во многих случаях оказывается удобным как для теоретического исследования, так и для численного решения. Континуально-интегральный подход дает дополнительные возможности исследования решения, возможность решения задачи в неограниченной области без замены граничных условий на бесконечности условиями на границе некоторой фиксированной области и др. [72]. К решениям дифференциальных уравнений в данном случае могут быть применены методы, используемые в теории интеграла Лебега (в частности, замена переменных в интеграле, построение квадратурных формул в функциональных пространствах и т.д.) [73]. В работе [67] метод континуального интегрирования применялся, в частности, для исследования асимптотики собственных функций и собственных значений эллиптического дифференциального оператора, классического предела и квазиклассического приближения квантовой механики, вычисления статистической суммы квантовой статистики, оценки наинизшего собственного значения уравнения Шредингера и др.

Представление решений некоторых дифференциальных уравнений в виде континуальных интегралов в фазовом пространстве исследовалось в работах [74, 75].

Интеграл по обобщенной мере Винера в пространстве C_2 непрерывных функций двух переменных $\omega = \omega(t, s)$, заданных на квадрате $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ и удовлетворяющих условиям $\omega(t, 0) = \omega(0, s)$, дает возможность выразить решение задач Коши, Гурса некоторых уравнений гипер-

болического типа, а в случае пространства $C_2^p = C_2 \times C_2 \dots \times C_2$ и систем дифференциальных уравнений гиперболического типа [41]. Так, например, решение задачи

$$\frac{\partial^2 u_k(t, s)}{\partial t \partial s} = \sum_{l=1}^p a_{kl}(t, s) u_l(t, s) + b_k(t, s),$$

$$u_k(t, 0) = u_k(0, s) = 0, \quad k = 1, \dots, p; \quad t, s \in Q$$

в случае, если $a_{kl}(t, s)$ и $b_k(t, s)$ — непрерывные функции на квадрате Q , представимо в виде следующего континуального интеграла [41]:

$$\begin{aligned} u_k(t, s) = & \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^p \int_Q a_{kk}(\tau, \sigma) d\tau d\sigma - \sum_{k=1}^p \int_Q b_k^2(\tau, \sigma) d\tau d\sigma \right\} \times \\ & \times \int_{C_2^p} x_k(t, s) \exp \left\{ 2 \sum_{k=1}^p \int_Q b_k(\tau, \sigma) d_{\tau, \sigma} [x_k(\tau, \sigma) - \right. \\ & \left. - \sum_{l=1}^p \int_0^\tau \int_0^\sigma a_{kl}(\tau_1, \sigma_1) x_l(\tau_1, \sigma_1) d\tau_1 d\sigma_1] + 2 \sum_{k,l=1}^p \int_Q a_{kl}(\tau, \sigma) x_l(\tau, \sigma) dx_k(\tau, \sigma) - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^p \int_Q \left[\sum_{l=1}^p a_{kl}(\tau, \sigma) x_l(\tau, \sigma) \right]^2 d\tau d\sigma \right\} d_W x. \end{aligned}$$

Решение задачи Коши для интегродифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = & a \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \\ & + \int_R \left[u(t, x+y) - u(t, x) - \frac{y^2}{1+y^2} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right] \pi(dy) + c(x)u(t, x), \\ u(0, x) = & f(x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

где $c(x)$, $f(x)$ — заданные функции, мера π удовлетворяет условиям

$$\pi\{0\} = 0, \quad \int_R \frac{y^2}{1+y^2} \pi(dy) < \infty,$$

при некоторых ограничениях на c и f представляется в виде [76,77]:

$$u(t, x) = \int_D \exp \left\{ \int_0^1 c(\xi_t + x) dt \right\} f(\xi_t + x) d\mu(\xi), \quad (7)$$

где μ — мера, заданная на σ -алгебре борелевских множеств пространства D функций на $[0, t]$ без разрывов второго рода и соответствующая случайному однородному процессу с независимыми приращениями ξ_τ , $0 \leq \tau \leq t < \infty$, удовлетворяющему условию $\xi_0 = 0$ и принимающему значения в R . Характеристический функционал $\chi(l)$ меры μ имеет вид [50]:

$$\chi(l) = \exp \left\{ i l(m) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \sigma_k \int_0^1 l^k(\rho(u)) du \right\},$$

где

$$m(t) = t \left(a + \int_R \frac{y^2}{1+y^2} \pi(dy) \right),$$

$$\sigma_2 = b + \int_R y^2 \pi(dy),$$

$$\sigma_k = \int_R y^k \pi(dy), \quad k = 3, 4, \dots$$

$$\rho_t(u) = 1_{[u, t]}(t).$$

В соответствии с (7), используя различные виды случайных процессов (процесс броуновского движения или винеровский, пуассоновский процесс, процесс Лапласа, телеграфный и т.д.), можно получить решения различных дифференциальных уравнений в виде континуальных интегралов в соответствующих пространствах X [50]. В частности, если ξ_t — винеровский процесс ($m(t) = ta$; $\sigma_2 = b$; $\sigma_k = 0$, $k > 2$; $\pi(dy) = 0$), $a = 0$, $b = 1$, то интеграл (7) дает решение задачи Коши для уравнения (5).

С помощью континуальных интегралов могут быть представлены решения различных интегральных уравнений. Так, например, решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(t, s) = x(t, s) + \int_Q K(t, s, t_1, s_1) x(t_1, s_1) dt_1 ds_1, \quad (8)$$

где

$$y(t, s) \in C_2; \quad \frac{\partial^2 y_k(t, s)}{\partial t \partial s} \in L_2(Q),$$

а ядро $K(t, s, t_1, s_1)$ удовлетворяет определенным условиям, может быть записано в виде [41]:

$$\begin{aligned} x(t, s) = & \exp \left\{ - \int_Q \left[\frac{\partial^2 y(t, s)}{\partial t \partial s} \right]^2 dt ds \right\} \times \\ & \times \int_{C_2} z(t, s) \exp \left\{ 2 \int_Q \frac{\partial^2 y(t, s)}{\partial t \partial s} d_{t,s} [z(t, s) + \right. \\ & \left. + \int_Q K(t, s, t_1, s_1) z(t_1, s_1) dt_1 ds_1] - \right. \\ & - \int_Q \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \int_Q K(t, s, t_1, s_1) z(t_1, s_1) dt_1 ds_1 \right]^2 dt ds - \\ & \left. - 2 \int_Q \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \int_Q K(t, s, t_1, s_1) z(t_1, s_1) dt_1 ds_1 \right] dz(t, s) \right\} d_W z. \end{aligned}$$

Аналогичным образом могут быть представлены решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода, а также систем интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода [41]. Нахождение решений систем дифференциальных уравнений в частных производных и систем интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода в виде континуальных интегралов исследовалось также в работах [78, 79].

Континуальное интегрирование — удобный метод исследования дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В частности, через континуальный интеграл, порожденный процессом $x_t = (-1)^{\xi_t}$, где ξ_t — пуассоновский процесс, может быть выражено решение задачи Коши для абстрактного телеграфного уравнения:

$$\begin{aligned} u_{TT} + \alpha u_T &= A^2 u \quad (\alpha > 0) \\ u(0) &= f, \quad u_T(0) = g, \end{aligned} \tag{9}$$

где u_T , u_{TT} — сильные производные функции $u(T)$, принимающей значения в банаховом пространстве Y ; f, g — элементы области определения

линейного оператора A^2 , действующего в Y . Если A порождает сильно-непрерывную группу ограниченных линейных операторов в Y , то решение задачи (9) представимо в виде [80] (см. также [50]):

$$u(T) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 \int_X [w_1((-1)^j \int_0^T x_t dt) + (-1)^j w_2((-1)^j \int_0^T x_t dt)] d\mu(x),$$

где X — пространство непрерывных справа ступенчатых функций, принимающих значения ± 1 , начинающихся в единице и имеющих любое конечное число точек разрыва; w_1 и w_2 — единственные решения задач Коши для абстрактного волнового уравнения

$$w_{i_{TT}} = A^2 w_i, \quad i = 1, 2;$$

$$w_1(0) = f; \quad w_{2_T}(0) = g; \quad w_{1_T}(0) = w_2(0) = 0.$$

В случае, когда A^2 — оператор Лапласа, решения w_1 и w_2 хорошо известны.

С помощью континуальных интегралов по пространству ветвящихся траекторий могут быть представлены решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений [81,43].

Использованию континуальных интегралов при решении различных дифференциальных уравнений математической физики посвящается много работ, в том числе исследование решений параболических уравнений [82], Шредингера [30], дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков [83,84], волнового уравнения [85], уравнения Фоккера — Планка [86], уравнения Дирака [87,88], нелинейного уравнения Ланжевена [89], телеграфного уравнения [90] и т.д.

3. КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

Одной из основных областей использования континуальных интегралов является квантовая физика [67,91]. Подход к квантовой физике на основе континуальных интегралов по гауссовой мере, исследование меры Винера как частного случая гауссовых мер изложены в [92] (новое издание книги). В последние годы были получены значительные результаты в области построения меры континуального интегрирования в квантовой физике (см., например, [93—100]). В том числе получена евклидова мера для электромагнитного поля [97], определена мера в лагранжевых калибровочных теориях [98], построена гауссова мера на расширенной грассмановой алгеб-

ре для континуальных интегралов по фермионным полям [100]. Исследование континуальных интегралов евклидовой квантовой физики и основы разработанного авторами настоящего обзора метода их приближенного вычисления приводится в [101].

В квантовой механике метод интегрирования в функциональных пространствах разработан в наибольшей степени [102,67,10,11]. Использование приближенного континуального интегрирования для различных расчетов в квантовой механике рассмотрено, например, в [103,104]. Основой для нахождения различных физических характеристик является вычисление функции Грина для уравнения Шредингера в виде континуального интеграла [105]. В [106] предложен метод вычисления функции Грина на основе представления ее в виде фейнмановского интеграла (в мнимом времени), дающий значительные преимущества в численных расчетах. Нами развит этот метод на основе приближенного вычисления интегралов по условной мере Винера [73]. Об использовании континуальных интегралов при исследовании энергетических спектров, рассеяния частиц и других проблем см. в работах [107—116]. Разработанный авторами настоящего обзора метод приближенного вычисления континуальных интегралов применительно к задачам квантовой механики изложен в [117,118].

Использование континуальных интегралов при расчетах в квантовой электродинамике содержится, например, в [119—121]; применение их в релятивистской теории представлено в [122—127]. Континуальные интегралы используются в квантовой оптике [128,26], квантовой теории магнетизма [129], они играют важную роль при исследовании конформных аномалий в калибровочной теории [130—137]. Метод континуального интегрирования широко используется для аналитических и численных исследований в теории струн, мембран [138—149], полярона [150—152]. В последние годы много работ посвящается исследованию меры континуального интегрирования и использованию континуальных интегралов в квантовой теории гравитации [153—166], квантовой космологии [167—172]. Многие авторы занимаются теоретическим исследованием континуальных интегралов в различных областях квантовой физики [173—190], а также разработкой методов для их приближенного вычисления [189—201].

Одним из способов определения континуальных интегралов в квантовой теории путем сведения их к обычным (римановым) интегралам высокой кратности является введение пространственно-временной решетки [202]. На этом пути был получен ряд важных численных результатов (см. [203—207]). При проведении расчетов на решетке возникает проблема исследования существования и единственности континуального предела [208—213], зависимости результатов от шага решетки, возникновение эффектов конечного размера и решеточных артефактов [214—216], проблемы с топологией на решетке (неоднозначность определения топологического заряда и др.)

[217—220]. Проблема континуального предела является объектом исследования многих авторов [221—228]. Ряд авторов занимается исследованием непосредственно в континуальном пределе (см. [95, 229—231]), развитием непрерывной квантовой калибровочной теории [6], методов непертурбативной регуляризации на континуальном уровне [231—235], методов вычисления континуальных интегралов без введения решетки [236, 198]. Разрабатываемые нами методы приближенного интегрирования в функциональных пространствах также не требуют предварительной дискретизации пространства и времени типа решеточной [237].

В евклидовой квантовой механике, в соответствии с формулой Фейнмана — Каца, матричный элемент оператора эволюции $\exp \{-\beta H\}$

$$Z(x_i, x_f, \beta) = \langle x_f | e^{-\beta H} | x_i \rangle, \quad (10)$$

где H — гамильтониан системы $H = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + V$, записывается в виде континуального интеграла по условной мере Винера

$$Z(x_i, x_f, \beta) = \int_C \exp \left\{ - \int_0^\beta V(x(t)) dt \right\} d_W x, \quad (11)$$

где интегрирование производится по всем функциям $x(t) \in C[0, \beta]$, удовлетворяющим условию $x(0) = x_i$; $x(\beta) = x_f$. Величина (10) представляет собой плотность вероятности нахождения частицы в точке с координатой x_f в момент времени $t = \beta$ при условии, что в момент $t = 0$ она имела координату x_i . В отличие от записи в виде интеграла по траекториям, в выражении (11) в показателе экспоненты стоит не функционал действия S , а лишь часть его, соответствующая потенциальной энергии. Кинетический член $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ под знаком интеграла отсутствует, т.к. он включен в меру интегрирования (см., например, [67]). Функция Грина Z с периодическими граничными условиями $x_i = x_f = x$ является основой для нахождения различных физических характеристик квантовой системы. После соответствующей замены переменных [238] континуальный интеграл $Z(x, x, \beta)$ может быть записан в виде стандартного интеграла по условной мере Винера в пространстве $C_0 \equiv \{C[0, 1]; x(0) = x(1) = 0\}$:

$$Z(x, x, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_{C_0} \exp \left\{ -\beta \int_0^1 V(\sqrt{\beta} x(t) + x) dt \right\} d_W x. \quad (12)$$

Выражения для свободной энергии $f(\beta)$, энергии основного состояния E_0 , пропагатора $G(\tau)$, волновой функции $\psi_0(x)$, разности энергий основного и

первого возбужденного состояния ΔE в виде континуальных интегралов по условной мере Винера записываются следующим образом [238]:

$$\begin{aligned} f(\beta) &= -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta), \\ E_0 &= \langle 0 | H | 0 \rangle = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\beta)} (2\pi\beta)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{C_0} \exp \left\{ -\beta \int_0^1 V(\sqrt{\beta} x(t) + x) dt \right\} \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} x V'(x) + V(x) \right] d_W x dx; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \langle 0 | x(0)x(\tau) | 0 \rangle = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(\beta)} (2\pi\beta)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{C_0} \exp \left\{ -\beta \int_0^1 V(\sqrt{\beta} x(t) + x) dt \right\} \times \\ &\quad \times [\sqrt{\beta} x(\tau/t) + x] d_W x dx, \\ \Delta E &= E_1 - E_0 = -\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{d}{d\tau} \ln G(\tau), \\ |\psi_0(x)|^2 &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\exp \{E_0 \beta\} Z(x, x, \beta)). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$Z(\beta) = \text{Tr} \exp \{-\beta H\} = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, x, \beta) dx,$$

$\beta = \frac{1}{kT}$, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Аналогичные выражения для наблюдаемых величин в виде континуальных интегралов имеют место в случае евклидовой квантовой теории поля (см. [92]). Так, например, в двумерной евклидовой теории поля с полиномиальными взаимодействиями бозонных полей $P(\varphi)_2$ [239] гауссова мера μ определяется на пространстве Шварца обобщенных функций умеренного роста $S'(R^2)$. Перенормировки в $P(\varphi)_2$ -модели ограничиваются вычитанием, связанным с упорядочением Вика. Более подробно контину-

альные интегралы $P(\varphi)_2$ -модели и их приближенное вычисление будут рассмотрены ниже.

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КONTИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ГАУССОВЫМ МЕРАМ

Первые результаты по приближенному вычислению континуальных интегралов по гауссовым мерам связаны с работами Р.Камерона [240], который получил аналог формулы Симпсона для винеровских интегралов по пространству непрерывных функций, а также с работами И.М.Гельфанда и Н.Н.Ченцова [241]. В.С.Владимиров [242] построил квадратурные формулы третьего порядка точности для интегралов по мере Винера, а также формулы, точные для определенного типа функционалов 4 степени. Идеи построения приближенных формул заданного порядка точности для континуальных интегралов по мере Винера и условной мере Винера развиты в работах [243—246]. Приближенное вычисление континуальных интегралов по произвольным гауссовым мерам исследовалось Л.А.Яновичем (см. [49] и цит. литературу). Им, в частности, были построены для континуальных интегралов приближенные формулы интерполяционного типа, квадратурные формулы для интегралов от функционалов специального типа (например, зависящих от нормы аргумента и т.д.), приближенные формулы заданной степени точности, формулы, основанные на аппроксимации аргумента в функционале и ряд других формул. Были получены также приближенные формулы для интегралов по мерам, соответствующим различным однородным случайным процессам с независимыми приращениями (винеровский, пуассоновский, Лапласа, телеграфного типа и т.д.), приближенные формулы для интегралов по гауссовым мерам, основанные на интерполяции характеристического функционала меры и некоторые другие формулы [50]. Одним из наиболее общих подходов к приближенному вычислению континуальных интегралов является построение приближенных формул, являющихся точными на классе функциональных многочленов заданной степени, идея которого восходит к работам Р.Камерона. В рамках этого подхода нами были построены приближенные формулы произвольного заданного порядка точности для континуальных интегралов по произвольной гауссовой мере [247].

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, плотное почти всюду в полном сепарабельном метрическом пространстве X и порожденное гауссовой мерой μ , и пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Для приближенного вычисления континуального интеграла по мере μ от произвольного

интегрируемого на X вещественного функционала $F[x]$ нами получена приближенная формула, задаваемая следующей теоремой [247].

Теорема 1. Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (e_k, x) e_k, \quad U_n(u) = \sum_{k=1}^n u_k e_k,$$

$$\theta_m(v) = \sum_{k=1}^m c_{m,k} \rho(v_k), \quad v \in R^m, \quad u \in R^n,$$

$$[c_{m,k}]^2, \quad k=1, \dots, m \text{ — корни многочлена } Q_m(r) = \sum_{k=0}^m (-1)^k r^{m-k} / k!; \quad r \in R \text{ и}$$

функция $\rho(r): R \rightarrow X$ удовлетворяет условиям:

$$\rho(r) = -\rho(-r),$$

$$\int_R \langle \xi, \rho(r) \rangle \langle \eta, \rho(r) \rangle d\nu(r) = K(\xi, \eta),$$

$$\prod_{i=1}^j \langle \xi_i, \rho(r) \rangle \in L(R, \nu), \quad 1 \leq j \leq 2m+1, \quad \eta, \xi, \xi_i \in X',$$

$K(\xi, \eta)$ — корреляционный функционал меры μ .

Тогда приближенная формула

$$\begin{aligned} \int_X F[x] d\mu(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} \int_{R^m} F[\theta_m(v) - \theta_{m,n}(v) + \\ &+ U_n(u)] d\nu^{(m)}(v) du + \mathcal{R}_{m,n}(F) \end{aligned} \quad (15)$$

точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m+1$.

Здесь $\mathcal{R}_{m,n}(F)$ — остаточный член формулы, $\theta_{m,n}(v) = S_n(\theta_m(v))$ и мера $\nu^{(m)}(v)$ в R^m является декартовым произведением симметричных вероятностных мер ν на R . В случае $m=1$ формула (15) совпадает с результатом, полученным в [49].

Функциональным многочленом степени m называется функционал вида

$$P_m[x] = \sum_{k=0}^m p_k[x],$$

где $p_k[x]$ — непрерывная на X однородная форма k -го порядка.

Приближенная формула (15) заменяет нахождение континуального интеграла вычислением $n + m$ -кратного риманова интеграла. Как показывают практические расчеты (см. ниже), в ряде случаев для достижения хорошей точности (порядка 0,1% и выше) оказалось достаточным выбрать малые значения n и m , в том числе даже равными единице.

Рассмотрим сходимость приближений, получаемых согласно (15) к точному значению интеграла при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что для почти всех $v \in R^m$ относительно меры ν при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\theta_{m,n}(v) \rightarrow \theta_m(v). \quad (16)$$

В случае пространства $C[a, b]$ выполнение (16) очевидно.

Теорема 2 [247]. Пусть $F[x]$ — непрерывный на X функционал, удовлетворяющий условию

$$|F[x]| \leq g(A(x, x)),$$

где $A(x, x)$ — неотрицательный квадратичный функционал вида

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(x, e_k)^2, \quad (17)$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty, \quad \gamma_k \geq 0,$$

$g(u)$ — неубывающая функция и

$$\int \int_{R^m X} g[A(\theta_m(v), \theta_m(v)) + A(x, x)] d\mu(x) d\nu(v) < \infty.$$

Тогда $\mathcal{R}_{m,n}(F) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Оценка остаточного члена приближенной формулы (15) задается следующей теоремой [247].

Теорема 3. Пусть интегрируемый по мере μ функционал $F[x]$ допускает представление

$$F[x + x_0] = P_{2m+1}[x] + r_{2m+1}(x, x_0), \quad (18)$$

где P_{2m+1} — функциональный многочлен степени $\leq 2m + 1$, а остаток r_{2m+1} оценивается выражением

$$|r_{2m+1}(x, x_0)| \leq (A(x, x))^{m+1} [L_1 \exp \{L_2 A(x + x_0, x + x_0)\} + L_3 \exp \{L_2 A(x_0, x_0)\}]. \quad (19)$$

Здесь $A(x, x)$ определяется согласно (17), x_0 — фиксированный элемент из X , $L_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$);

$$1 - 2L_2 \gamma_k \geq \alpha > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k a_k < \infty,$$

где a_k определяется соотношениями

$$(e_k, \theta_m(v))^2 \leq a_k \text{ для всех } v \in R^m.$$

Тогда для остатка приближенной формулы (15) имеет место оценка

$$|\mathcal{R}_{m,n}(F)| \leq G_m \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k \right)^{m+1} + H_m \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k a_k \right)^{m+1},$$

где G_m и H_m — положительные константы, зависящие от m [247].

В случае $m = 1$ теорема 3 совпадает с результатом, полученным в [49].

В качестве примера рассмотрим скорость сходимости к точному результату приближений, получаемых согласно (15) в случае интеграла по мере Винера в пространстве $C = \{[0, 1], x(0) = 0\}$. Мера Винера характеризуется нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$K(t, s) = \min \{t, s\}, \quad t, s \in [0, 1].$$

В данном случае $e_k(t) = \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, где λ_k и φ_k — собственные значения и собственные функции ядра $K(t, s)$:

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2} \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi t, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_k = \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2}.$$

В случае меры Винера приближенная формула (15) приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_G F[x] d_W x &= (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} \frac{1}{2^m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 F[\theta_m(v, t) - \\ &\quad - \theta_{m,n}(v, t) + U_n(u, t)] dv du + \mathcal{R}_{m,n}(F), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\theta_m(v, t) = \sum_{i=1}^m c_{m,i} \rho(v, t), \quad \rho(v, t) = \begin{cases} \text{sign}(v), & 0 \leq |v| < t \leq 1 \\ 0, & 0 \leq t < |v| \leq 1, \end{cases}$$

$$\theta_{m,n}(v, t) = 4 \sum_{k=1}^n \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi t \frac{1}{(2k-1)\pi} \sum_{i=1}^m c_{m,i} \text{sign}(v_i) \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi v_i,$$

$$U_n(u, t) = 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^n \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi t \frac{u_k}{(2k-1)\pi}.$$

В качестве $A(x, x)$ можно взять $\int_0^1 x^2(t) dt$. Нетрудно видеть, что в этом

случае условия (17) выполняются. На основании теоремы 3 мы получаем, что порядок сходимости приближенной формулы (20) при $n \rightarrow \infty$ в случае, когда функционал $F[x]$ удовлетворяет условиям (18), (19) с выбранным $A(x, x)$, равен $O(n^{-(m+1)})$.

Рассмотрим в качестве примера приближенное вычисление интеграла по мере Винера от функционала

$$F[x] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) dt \right\}.$$

Точное значение континуального интеграла в данном случае известно [67]:

$$I = \int_C \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) dt \right\} d_W x = \frac{1}{\sqrt{\cos 1}} \approx 1,3604468816 \dots$$

Приближенные значения, получаемые согласно (20), обозначим $I_n^{(m)}$, где

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}} \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{2} w_n(v) \right\} dv, \\ I_n^{(2)} &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_k}} 2 \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{4} w_n(v_1) \right\} \times \\ &\times \int_0^{v_1} \exp \left\{ \frac{1}{4} w_n(v_2) \right\} \cos \left[\frac{1}{4} (w_n(v_1) - w_n(v_2)) \right] \times \\ &\times \text{ch} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - v_1 - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos \left(j - \frac{1}{2} \right) \pi v_1 \cos \left(j - \frac{1}{2} \right) \pi v_2 \right) \right\} dv_1 dv_2. \end{aligned}$$

Здесь

$$w_n(v) = 1 - v - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos^2 \left(j - \frac{1}{2} \right) \pi v.$$

Приближенные значения $I_n^{(1)}$ и $I_n^{(2)}$, полученные на ЭВМ, приведены в табл.1.

Таблица 1. Значения винеровского интеграла, вычисленные с помощью составной приближенной формулы

n	$I_n^{(1)}$	$I_n^{(2)}$
1	1,35980945	1,360432541
2	1,36034801	1,360446160
3	1,36041602	1,360446774
4	1,36043360	1,360446855
5	1,36044001	1,360446873
10	1,36044601	1,360446880

Отметим, что для нахождения континуального интеграла по формулам (15), (20) необходимо вычислять $(n + m)$ -кратный интеграл. Как следует из табл.1, при одной и той же кратности интегралов приближенная формула (20) при $m = 2$ обеспечивает более точный результат, чем при $m = 1$.

5. УСЛОВНАЯ МЕРА ВИНЕРА

В случае условной меры Винера $d_W x$ в пространстве $C_0 = \{C[0, 1]; x(0) = x(1) = 0\}$ приближенная формула (15) имеет вид

$$\int_{C_0} F[x] d_W x = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} 2^{-m} \underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{m} F[\tilde{\theta}_m(v, \cdot)] - \\ - \tilde{\theta}_{m,n}(v, \cdot) + \tilde{U}_n(u, \cdot)] dv du + \mathcal{R}_{m,n}(F), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_m(v, t) &= \sum_{k=1}^m c_{m,k} \tilde{\rho}(v_k, t), \quad \tilde{\rho}(v, t) = \begin{cases} -t \operatorname{sign}(v), & t \leq |v| \\ (1-t) \operatorname{sign}(v), & t > |v| \end{cases} \\ \tilde{\theta}_{m,n}(v, t) &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi t) \sum_{j=1}^m c_{m,j} \operatorname{sign}(v_j) \cos(k\pi v_j), \\ \tilde{U}_n(u, t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2}}{k\pi} u_k \sin(k\pi t).\end{aligned}$$

Аналогично (20) скорость сходимости приближений, получаемых согласно (21), имеет порядок $\mathcal{R}_{m,n}(F) = O(n^{-(m+1)})$.

Во многих случаях оказывается удобным выделить часть подынтегрального функционала в качестве весового и использовать приближенные формулы с весом. В работе [248] нами было построено семейство приближенных формул для континуальных интегралов по условной мере Винера

$$\int_{C_0} P[x] F[x] d_W x$$

с весом

$$P[x] = \exp \left\{ \int_0^1 [p(t)x^2(t) + q(t)x(t)] dt \right\}, \quad p(t), q(t) \in C[0, 1]. \quad (22)$$

Теорема 4 [248]. Пусть $B(s)$ — решение дифференциального уравнения

$$(1-s)B'(s) - (1-s)^2 B^2(s) - 3B(s) - 2p(s) = 0, \quad s \in [0, 1] \quad (23)$$

с начальным условием

$$B(1) = -\frac{2}{3}p(1).$$

Пусть

$$\begin{aligned}W(t) &= \exp \left\{ \int_0^t (1-s)B(s) ds \right\}, \\ a(t) &= \int_0^t L(s) ds - \frac{1-t}{W(t)} \int_0^t B(s)W(s) \left[\int_0^s L(u) du \right] ds, \\ L(t) &= \int_0^t [B(s)W(s)H(s) - q(s)] ds + c, \\ H(t) &= \int_t^1 q(s) \frac{1-s}{W(s)} ds,\end{aligned} \quad (24)$$

где константа c определяется из условия $\int_0^1 L(s) ds = 0$.

Тогда приближенная формула

$$\int_{C_0} P[x] F[x] d_W x = [W(1)]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 L^2(t) dt \right\} \times \\ \times 2^{-m} \underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{m} F[\Psi_m(v, \cdot) + a(\cdot)] dv_1 \dots dv_m + \mathcal{R}_m(F), \quad (25)$$

где

$$\Psi_m(v, \cdot) = \sum_{k=1}^m c_{m,k} \Psi(v_k, \cdot), \\ \Psi(r, \cdot) = f(r, \cdot) - \sigma(r, \cdot); \quad \sigma(r, t) = \begin{cases} \text{sign}(r), & t \leq |r| \\ 0, & t > |r| \end{cases} \\ f(r, t) = \text{sign}(r) \frac{1-t}{W(t)} \left[1 + \int_0^{\min\{|r|, t\}} B(s)W(s) ds \right],$$

точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.

Доказательство теоремы 4 основывается на свойствах найденного и исследованного нами линейного преобразования $x(t) \rightarrow y(t)$ [249], задаваемого соотношением $y = x + Ax$, где

$$Ax(t) = (1-t) \int_0^t B(s)x(s) ds, \quad B(s) \in C[0, 1].$$

Данное преобразование взаимно однозначно отображает пространство C_0 само на себя. Обратное преобразование имеет вид [249]:

$$x(t) = \hat{A}y(t) = y(t) - \frac{1-t}{W(t)} \int_0^t B(s)W(s)x(s) ds,$$

где $W(t)$ удовлетворяет (24).

В частном случае $p(t) \equiv p = \text{const}$, $q(t) \equiv q = \text{const}$, часто встречающемся в приложениях, уравнение Риккати (23) решается в явном виде

$$B(s) = \frac{1}{1-s} \left[\sqrt{2p} \operatorname{ctg}(\sqrt{2p}(1-s)) - \frac{1}{1-s} \right]$$

и приближенная формула (25) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \int_{C_0} \exp \left\{ \int_0^1 [px^2(t) + qx(t)] dt \right\} F[x] d_W x = \\ & = \left(\frac{\sqrt{2p}}{\sin \sqrt{2p}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{q^2}{(2p)^{3/2}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{p}{2}} \right] \right\} \times \\ & \times 2^{-m} \underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{m} F[\Psi_m(v, \cdot) + a(\cdot)] dv_1 \dots dv_m + \mathcal{R}_m(F), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$a(t) = q \left(p \cos \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^{-1} \sin \left(\sqrt{\frac{p}{2}} t \right) \sin \left(\sqrt{\frac{p}{2}} (1-t) \right).$$

Оценка остаточного члена приближенной формулы (26) в зависимости от m устанавливается следующей теоремой [248].

Теорема 5. Пусть интегрируемый с весом $P[x]$ по условной мере Винера функционал $F[x]$ допускает представление

$$F[x] = P_{2m+1}[x] + r_{2m+1}[x], \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

где $P_{2m+1}[x]$ — функциональный многочлен степени $\leq 2m+1$, а остаток $r_{2m+1}[x]$ оценивается выражением

$$|r_{2m+1}[x]| \leq c_1(m) \exp \left\{ c_2(m) \int_0^1 x^2(t) dt \right\},$$

$$c_1(m), c_2(m) \geq 0;$$

$$0 \leq c_3(m) < \frac{\pi^2}{2}, \quad c_3(m) = p + c_2(m).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & |\mathcal{R}_m(F)| \leq c_1(m) \left[\left(\frac{\sqrt{2c_3(m)}}{\sin \sqrt{2c_3(m)}} \right)^{1/2} \times \right. \\ & \times \exp \left\{ \frac{q^2}{(2c_3(m))^{3/2}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{1}{2} c_3(m)} - \sqrt{\frac{1}{2} c_3(m)} \right] \right\} + \\ & \left. + \left(\frac{\sqrt{2p}}{\sin \sqrt{2p}} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{q^2}{(2p)^{3/2}} \left[\operatorname{tg} \sqrt{\frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{p}{2}} \right] + \frac{1}{6} c_2(m) b(m) \right\} \right], \end{aligned}$$

Таблица 2. Значения континуального интеграла, полученные с помощью приближенной формулы с весом

$p \backslash q$	0	1	2	3	4
0	1	0,9997	0,9948	0,9756	0,9311
1	0,9900	0,9985	1,0131	1,0071	0,9531
2	0,9550	0,9842	1,0416	1,0568	0,9687
-1	0,9931	0,9896	0,9777	0,9539	0,9138
-2	0,9768	0,9724	0,9589	0,9350	0,8990

где

$$b(m) = (d_1 \sqrt{m} + d_2)^2,$$

d_1 и d_2 — некоторые константы, не зависящие от m [248].

Следствие. Достаточным условием стремления к нулю остаточного члена формулы (26) $\mathcal{R}_m(F)$ при $m \rightarrow \infty$ является такое стремление к нулю остатка $r_{2m+1}[x]$, при котором

$$c_2(m) \equiv c_2 = \text{const},$$

$$c_1(m) \exp \left\{ \frac{1}{6} c_2 (d_1 \sqrt{m} + d_2)^2 \right\} \rightarrow 0.$$

Рассмотрим в качестве иллюстрации приближенное вычисление интеграла

$$I = \int_{C_0} P[x] \exp \left\{ - \int_0^1 [px^2(t) + qx(t)] dt \right\} d_W x, \quad (27)$$

где $P[x]$ определяется согласно (22) при $p(t) \equiv p$, $q(t) \equiv q$. Очевидно, что точный ответ $I = 1$. Результаты $I^{(1)}$ приближенного вычисления интеграла (27) с помощью формулы (26) при $m = 1$ для некоторых значений параметров p и q приведены в табл. 2 и 3. В табл. 3 приведены значения реальной погрешности $\varepsilon^{(1)} = I - I^{(1)}$ и теоретической оценки погрешности $R^{(1)} = \mathcal{R}_1(F)$, полученной на основании теоремы 5, для случая $p = 0$. Из таблиц видно, что хорошая точность приближений, получаемых по «элементарной» формуле (26) при $m = 1$, достигается лишь при малых p и q , т.е. когда подынтегральный функционал не слишком уклоняется от функционального многочлена степени $\leq 2m + 1 = 3$. Более точные результаты для широкого круга функционалов могут быть получены с использо-

Таблица 3. Погрешность вычисления континуального интеграла

q	$I^{(1)}$	$\varepsilon^{(1)}$	$R^{(1)}$
0	1	0	0
0,1	0,9999938	$0,62 \cdot 10^{-5}$	$2,39 \cdot 10^{-5}$
0,2	0,9999972	$0,28 \cdot 10^{-5}$	$4,30 \cdot 10^{-4}$
0,3	0,9999962	$0,38 \cdot 10^{-5}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$
0,4	0,9999891	$0,11 \cdot 10^{-4}$	$9,01 \cdot 10^{-3}$
0,5	0,9999777	$0,22 \cdot 10^{-4}$	$2,58 \cdot 10^{-2}$

ванием «составных» (т.е. содержащих дополнительное интегрирование по R^n) приближенных формул типа (21). Комбинируя методы построения приближенных формул, развитые нами в [247] и [248], мы получаем новые формулы с весом, обладающие достоинствами составных приближенных формул [250].

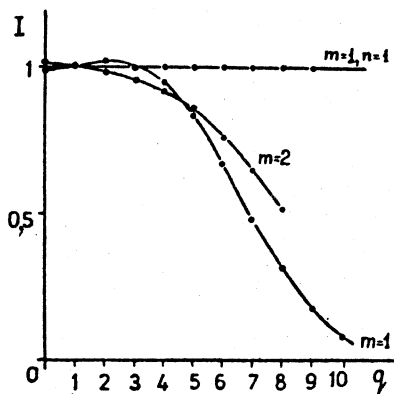
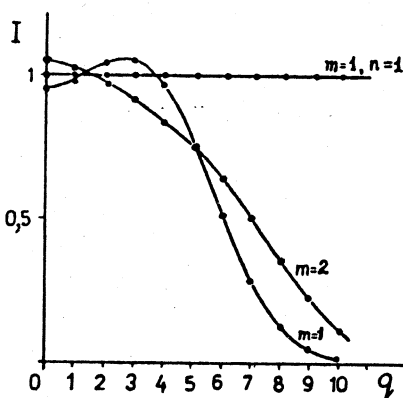
Теорема 6. При выполнении условий теорем 1 и 4 приближенная формула

$$\begin{aligned}
 & \int_{C_0} P[x] F[x] d_w x = 2\pi^{-n/2} [W(1)]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 L^2(t) dt \right\} \times \\
 & \times 2^{-m} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} \underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{m} \Phi[\tilde{\theta}_m(v, \cdot) - \tilde{\theta}_{m,n}(v, \cdot) + \\
 & + \tilde{U}_n(u, \cdot)] dv du + \mathcal{R}_{m,n}(F), \quad (28)
 \end{aligned}$$

где $P[x]$ удовлетворяет (22), $\tilde{\theta}_m$, $\tilde{\theta}_{m,n}$ и $\tilde{U}_n$ соответствуют (21), $\Phi[x] = F[\hat{A}x(\cdot) + a(\cdot)]$, точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.

При определенных условиях нами доказана сходимость приближений, получаемых согласно (28), к точному значению интеграла при $n \rightarrow \infty$ [250] и найдена оценка остаточного члена в зависимости от m и n , из которой следует, в частности, что $\mathcal{R}_{m,n} = O(n^{-(m+1)})$ при $n \rightarrow \infty$ (см. [250]).

Рассмотрим использование составных и элементарных формул на примере вычисления континуального интеграла (27) с точным значением $I = 1$. Результаты [250] вычисления этого интеграла с помощью элементарной формулы (26) с $m = 1$ и с $m = 2$, а также с помощью составной формулы (28) с $m = n = 1$ показаны на рис.1 и 2. Из графиков видно, что составная формула с весом дает более точные приближения, чем элементарная, при

Рис. 1. Результаты вычисления континуального интеграла для $p = 1$ Рис. 2. Результаты вычисления континуального интеграла для $p = 2$

одинаковой кратности содержащихся в них римановых интегралов, и что с помощью составной формулы могут быть получены хорошие результаты даже если подынтегральный функционал значительно уклоняется от функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.

6. МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Рассмотрим применение приближенных формул для континуальных интегралов и их эффективность на некоторых квантово-механических моделях. Вначале рассмотрим простой, но весьма поучительный пример гармонического осциллятора с потенциалом $V(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$. Хорошо известно, что квантово-механическая система с таким потенциалом обладает дискретным энергетическим спектром $E_n = n + \frac{1}{2}$. При исследовании ее методом континуального интегрирования функция Грина Z запишется в виде следующего интеграла по условной мере Винера:

$$Z(x, x, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} x^2 \right\} \int_{C_0} \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \int_0^1 [\beta x^2(t) + 2x\sqrt{\beta}x(t)] dt \right\} d_W x. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что с помощью формулы с весом (26) для интеграла (29) может быть получен точный ответ. Подставляя в (26) $p = \frac{1}{2}\beta^2$; $q = x\beta^{3/2}$, $F[x] \equiv 1$, мы имеем

$$Z(x, x, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \operatorname{sh} \beta}} \exp \left\{ -\operatorname{th} \left(\frac{\beta}{2} \right) x^2 \right\}. \quad (30)$$

В отличие от традиционной формулировки квантовой механики, континуально-интегральный подход позволяет в данном случае аналитически исследовать систему при любой конечной температуре $T = \frac{1}{k\beta}$ и наглядно продемонстрировать стремление ее характеристик к термодинамическому пределу $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$). Так, например, для энергии основного состояния E_0 в соответствии с (13) мы получаем

$$E_0^{(\beta)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 Z(x, x, \beta) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} Z(x, x, \beta) dx}.$$

Подставляя сюда (30), получаем

$$E_0^{(\beta)} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta}{2} \right). \quad (31)$$

Очевидно, что при $\beta \rightarrow \infty$ величина $E_0^{(\beta)}$ стремится к известному из квантовой механики значению

$$E_0^{(\beta)} \rightarrow E_0 = \frac{1}{2}.$$

Аналогично для разности энергий соседних квантовых уровней ΔE и волновой функции основного состояния $\Psi_0(x)$ при конечной температуре мы имеем [238]:

$$\begin{aligned} \Delta E^{(\beta)} &= \operatorname{th} \left(\frac{\beta}{2} \right), \\ |\Psi_0^{(\beta)}(x)|^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \operatorname{sh} \beta}} \exp \left\{ \frac{\beta}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta}{2} \right) \right\} \exp \left\{ -\operatorname{th} \left(\frac{\beta}{2} \right) x^2 \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, что при $\beta \rightarrow \infty$

$$\Delta E^{(\beta)} \rightarrow \Delta E = 1,$$

$$|\Psi_0^{(\beta)}(x)|^2 \rightarrow |\Psi_0(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Характер стремления к термодинамическому пределу виден из табл.4 и 5, в которых приведены значения величин $E_0^{(\beta)}$, $\Delta E^{(\beta)}$ и $|\Psi_0^{(\beta)}(x)|^2$ при различных β .

Таблица 4. Энергия основного состояния гармонического осциллятора

β	$E_0^{(\beta)}$	n	$E_0^{(\beta, n)}$	Счетное время, с
5	0,50678	1	0,5077	1,8
6	0,50248	2	0,5073	3,1
7	0,50091	3	0,5010	5,5
8	0,50034	5	0,5002	9,7

Таблица 5. Разность энергий соседних квантовых уровней и волновая функция основного состояния гармонического осциллятора

β	$\Delta E^{(\beta)}$	$ \Psi_0^{(\beta)}(x) ^2$
5	0,9866	$1,0345 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-0,9866 x^2)$
6	0,9951	$1,0150 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-0,9951 x^2)$
7	0,9982	$1,0064 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-0,9982 x^2)$
8	0,9993	$1,0027 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-0,9993 x^2)$

В табл.4 приведены также результаты приближенного вычисления величины $E_0^{(\beta)}$ с помощью составной приближенной формулы (21) при $m=1$ и различных n , т.е. путем вычисления $(n+2)$ -кратного интеграла, и указано счетное время нахождения $E_0^{(\beta, n)}$ на ЭВМ CDC-6500 при вычислении римановых интегралов с помощью квадратур Гаусса с относительной погрешностью до 10^{-4} .

На рис.3 в логарифмическом масштабе крестиками показаны результаты вычисления пропагатора $G(\tau) = \langle 0 | x(0)x(\tau) | 0 \rangle$ с помощью составной приближенной формулы (21) при $m=1$, $n=2$, $\beta=6$. Счетное время находилось в пределах 10 с на точку τ . Заметим, что точное значение $G^{(\beta)}(\tau)$ при произвольном β , полученное из (13) и (30),

$$G^{(\beta)}(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta}{2} \right) \left(\operatorname{ch} \tau - \operatorname{th} \left(\frac{\beta}{2} \right) \operatorname{sh} \tau \right),$$

откуда

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} G^{(\beta)}(\tau) = G(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau}. \quad (33)$$

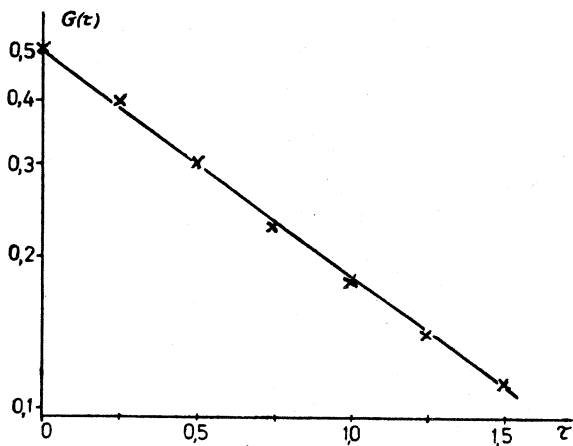


Рис. 3. Пропагатор гармонического осциллятора

Величина $G(\tau)$ в термодинамическом пределе (33) показана на рис.3 сплошной линией. На основании вычисленных значений $G^{(\beta, n)}(\tau)$ (рис.3, крестики) мы получили [238] методом наименьших квадратов

$$\Delta E^{(\beta, n)} = -\frac{d}{d\tau} \ln G^{(\beta, n)}(\tau) = 1,0198.$$

Для сравнения приведем результаты аналогичных расчетов, полученные другими авторами. В работе [103] значение E_0 вычислялось путем аппроксимации континуального интеграла на решетке с числом узлов $N=51$ и шагом решетки $a=0,5$. При точном нахождении N -кратного интеграла результат составил

$$E_0^{(N)} = 0,447; \quad \Delta E^{(N)} = 0,9875,$$

а при вычислении его путем моделирования $N_E=100$ решеточных конфигураций в [103] было получено

$$E_0^{(N, N_E)} = 0,45; \quad \Delta E^{(N, N_E)} = 0,99.$$

В работе [236] путем аппроксимации траекторий в континуальном интеграле при нахождении $(N=4)$ -кратного интеграла с помощью $N_R=100$ моделирований по 10^4 траекторий (без введения решетки) было получено

$$E_0^{(N, N_R)} = 0,4932 \pm 0,145; \quad \Delta E_0^{(N, N_R)} = 0,8801 \pm 0,202,$$

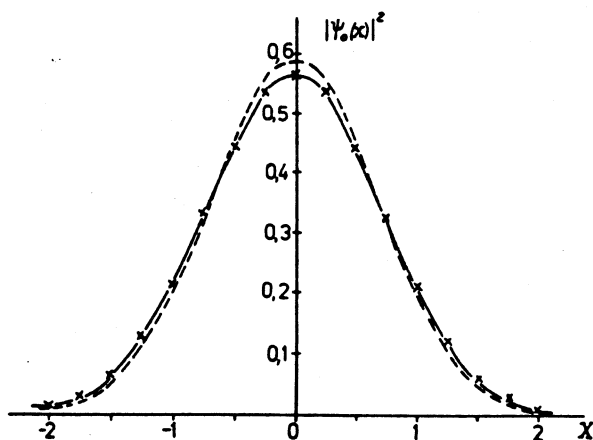


Рис. 4. Волновая функция основного состояния гармонического осциллятора

что потребовало 19×100 с счетного времени на ЭВМ Vax 780. При $N=10$, $N_R=100$ результат работы [236] составил

$$E_0^{(N, N_R)} = 0,4979 \pm 0,051; \quad \Delta E_0^{(N, N_R)} = 0,9331 \pm 0,129,$$

счетное время 67×100 с.

На рис.4 сплошной линией показано теоретическое значение квадрата волновой функции основного состояния в термодинамическом пределе, пунктирной линией — наилучший результат работы [103], полученный на решетке с $N=100$ узлов и шагом $a=1$ при точном нахождении N -кратного интеграла, т.е.

$$|\Psi_0^{(N)}(x)|^2 = 0,59 \exp(-1,1x^2) = 1,05 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-1,1x^2),$$

а крестиками — вычисленные нами значения, полученные с помощью составной приближенной формулы (21) при $m=1$, $n=2$, $\beta=6$. Численное интегрирование осуществлялось с помощью гауссовых квадратур с относительной погрешностью до 10^{-5} . Счетное время на ЭВМ CDC-6500 составляло порядка 0,2 с на точку x .

Приведем также результаты расчетов для ангармонического осциллятора с потенциалом $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + gx^4$. В данном случае континуальный интеграл $Z(x, x, \beta)$ точно не берется. Для его вычисления мы использовали

Таблица 6. Энергия основного состояния и пропагатор ангармонического осциллятора

g	E_0^* [251]	$G^{(N)}(0)$ [236]		β	Формула с весом (26)	
		$N = 4$	$N = 20$		$E_0^{(\beta, 1)}$	$G^{(\beta, 1)}(0)$
0,1	0,559146	$4,33 \pm 0,16$	$0,409 \pm 0,06$	3	0,552	0,406
0,2	0,602405	—	—	2,5	0,592	0,364
0,5	0,696176	$0,296 \pm 0,07$	$0,293 \pm 0,04$	2	0,685	0,293
1,0	0,803771	$0,269 \pm 0,08$	$0,267 \pm 0,08$	1,5	0,774	0,257

Таблица 7. Энергия основного и первого возбужденного состояний ангармонического осциллятора

g	ΔE^* [251]	$G^*(0)$ [236]	$\Delta E^{(N)}$ [236] $N = 20$	β	Составная формула (21)		
					$E_0^{(\beta, 1)}$	$\Delta E^{(\beta, 1)}$	$G^{(\beta, 1)}(0)$
0,1	1,2104	0,4125	$1,03 \pm 0,29$	4,5	0,570	1,14	0,419
0,2	1,3481	—	—	4	0,616	1,32	0,377
0,5	1,6282	0,3058	$1,50 \pm 0,67$	3	0,707	1,55	0,313
1,0	1,9341	0,2571	$1,56 \pm 0,81$	2,5	0,832	1,88	0,263

приближенную формулу с весом (26) и составную приближенную формулу (21). Результаты расчетов [118] приведены в табл.6 и 7. Общее время вычисления $E_0^{(\beta, 1)}$ и $G^{(\beta, 1)}(0)$ составило порядка 0,5 мин на точку g для формулы (21) и порядка 10 мин на точку g для формулы (26). «Точные» результаты [251,236] обозначены через E_0^* , $G^*(0)$, ΔE^* . Результаты расчетов, полученные в работе [236] путем 10 моделирований по 3000 траекторий обозначены $G^{(N)}(0)$ и $\Delta E^{(N)}$. Приведенное в [236] счетное время составляет 10×25 с на точку g для $N=4$ и 10×17 мин на точку g для $N=20$. Через $\Delta E^{(\beta, 1)}$ обозначена логарифмическая производная величины $G^{(\beta, 1)}(\tau)$, полученная нами на основании значений $G^{(\beta, 1)}(\tau)$, вычисленных с помощью (21) при $n = m = 1$ [238].

Результаты расчетов показывают, что путем вычисления континуальных интегралов с помощью приближенных формул с минимальными значениями параметров m и n могут быть найдены значения рассмотренных величин с

такой же (а в ряде случаев и с более высокой) точностью, что и в работах [103] и [236], но при существенно меньшей кратности вычисляемых римановых интегралов, и, как следствие, существенно меньших временах счета на ЭВМ. Это позволяет использовать для вычисления интегралов детерминированные методы (в отличие от метода Монте-Карло, используемого обычно при расчетах на решетке и дающего лишь вероятностную оценку результатов) и приводит к значительной экономии счетного времени и памяти ЭВМ.

7. ТУННЕЛИРОВАНИЕ В ДВУГОРБОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Рассмотрим основное состояние квантово-механической системы, описываемой гамильтонианом $H = -\frac{1}{2} \Delta + V$ с потенциалом

$$V(x) = \lambda(x^2 - f^2)^2, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (34)$$

имеющим минимумы в $\pm f$. Система с двугорбым (двухъямным) потенциалом представляет интерес, поскольку она является удобной моделью для исследования вопросов туннелирования и инстантонных эффектов. Изучению подобных систем посвящается ряд работ (см., например, [252—257]). Свойства данной системы используются при исследовании ферроэлектриков, полупроводников и т.д. [258—259]. Благодаря наличию туннелирования, волновая функция основного состояния является четной суперпозицией волновых функций каждой из ям. Основным эффектом, вызываемым инстантонами, является в данном случае расщепление энергетических уровней (двукратно вырожденных в предположении отсутствия туннелирования). В приближении разреженного инстантонного газа энергия основного состояния квантовой системы с потенциалом (34) равна [260]:

$$E_0 = \frac{\omega}{2} - \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} \frac{\omega}{2} \exp\left\{-\frac{\omega^3}{12\lambda}\right\},$$

где $\omega = 8\lambda f^2$. В этом приближении разность энергий основного и первого возбужденного состояний равна плотности инстантонов

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{dn}{d\tau_0},$$

где

$$\frac{dn}{d\tau_0} = \omega \sqrt{\frac{2\omega^3}{\pi\lambda}} \exp\left\{-\frac{\omega^3}{12\lambda}\right\}.$$

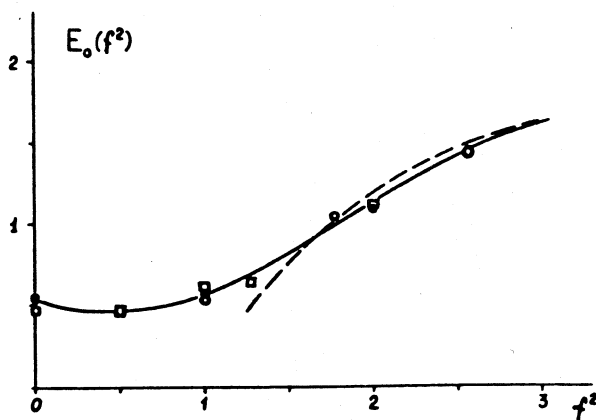


Рис. 5. Энергия основного состояния системы с двугорбым потенциалом

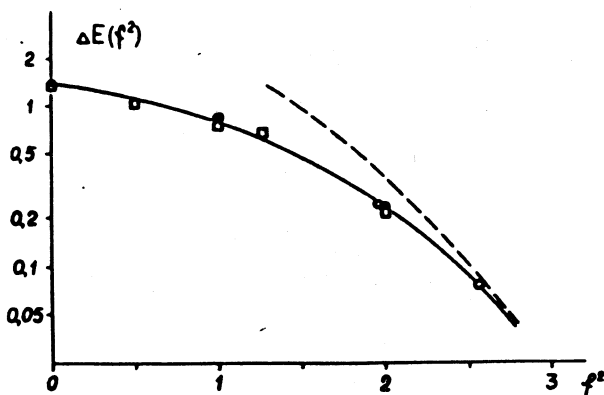


Рис. 6. Разность энергий основного и первого возбужденного состояний системы с двугорбым потенциалом

Метод континуальных интегралов в евклидовой метрике (мнимое время) является удобным аппаратом исследования туннельных эффектов [260—262]. Результаты наших вычислений E_0 и ΔE для системы (34) с $\lambda = \frac{1}{2}$ с помощью составной приближенной формулы (21) при $n = m = 1$ [263] показаны сплошными кружками на рис. 5 и 6. Счетное время для каждого значения f^2 составило порядка 10 с на ЭВМ CDC-6500. Светлыми круж-

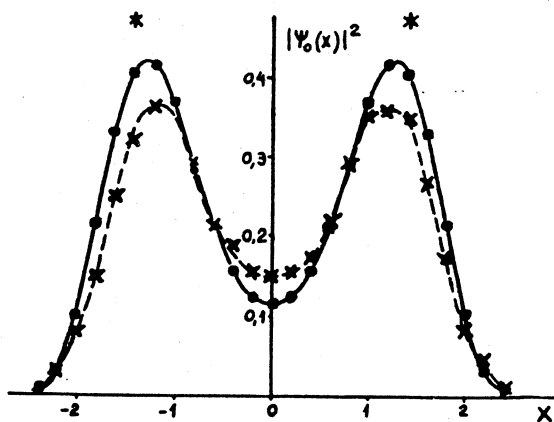


Рис. 7. Волновая функция основного состояния системы с двугорбым потенциалом

ками представлены результаты [104] расчетов на решетке методом Монте-Карло. Квадратиками показаны результаты, полученные в [103] на решетке с числом узлов $N=303$ и шагом $a=0,25$ при вычислении N -кратного интеграла путем усреднения по 10 монте-карловским итерациям. Сплошная линия изображает «точный» результат [264], пунктирная линия — приближение разреженного инстантонного газа.

Квадрат модуля волновой функции основного состояния, вычисленный нами с помощью формулы (21) при $n=m=1$, $\beta=4,5$, $f^2=2$, приведен на рис.7 крестиками. Точки — результаты [103], полученные на решетке с $N=200$ и $a=0,25$ путем усреднения по 100 монте-карловским итерациям.

Звездочками показаны значения $|\Psi_0(\pm f)|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2f}{\pi}}$, получаемые в приближении разреженного инстантонного газа [260]. Сплошная и пунктирная линии соединяют точки для удобства восприятия.

Приведенные результаты демонстрируют эффективность разработанного нами метода приближенного вычисления континуальных интегралов.

8. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ. КВАНТОВЫЙ МАЯТНИК

Одной из важных областей применения континуальных интегралов является исследование топологической структуры вакуума в квантовой калибровочной теории. Значения топологической восприимчивости,

вычисляемые различными авторами с помощью метода Монте-Карло на решетке [265—275], существенно отличаются друг от друга и от феноменологических оценок [276—278]. Причина этого может заключаться [265] как в различии определений топологического заряда на решетке, так и в наличии специфической систематической погрешности, связанной с конечностью шага решеточной дискретизации [104]. Некоторые авторы исследуют топологический заряд непосредственно в континуальном пределе [279—280].

Рассмотрим нахождение топологического заряда и топологической восприимчивости без предварительной дискретизации пространства и времени на примере квантового маятника, т.е. системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \lambda \hat{p}^2 + V, \quad (35)$$

где

$$V(x) = \frac{\omega^2}{\lambda} (1 - \cos x), \quad (36)$$

ω — частота малых осцилляций, λ — константа связи. В случае, когда $V(x)$ является ограниченной периодической функцией (с периодом 2π) на $x \in (-\infty, \infty)$, анализ гамильтониана (35) сводится [281] к изучению оператора

$$H(\theta) = -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)_{\theta} + V,$$

где $\left(\frac{d^2}{dx^2} \right)_{\theta}$ есть оператор $\frac{d^2}{dx^2}$ на $L^2[0, 2\pi]$ с граничными условиями вида

$$\psi(2\pi) = e^{i\theta} \psi(0); \quad \psi'(2\pi) = e^{i\theta} \psi'(0),$$

θ — фиксированный параметр, $|\theta| \leq \pi$. Согласно теореме Блоха (см., например, [282]), если $\psi(x)$ является собственной функцией гамильтониана (35) с периодическим $V(x)$, то

$$\psi(x + 2\pi) = e^{i\theta} \psi(x).$$

В этом случае для континуального интеграла Z будем иметь [263]:

$$Z(x, x + 2\pi N, \beta) = e^{i\theta N} Z(x, x, \beta). \quad (37)$$

Произведя преобразование, устраняющее фазовый множитель [283] $\psi(x) \rightarrow e^{-i(x/2\pi)\theta} \psi(x)$, получаем, что формула Фейнмана — Каца сохраняет свой вид после замены функционала действия новым (« θ -действие»):

$$S_{\theta} = S - i\theta Q,$$

где Q — топологический заряд. В данном случае величина топологического заряда равна [260]

$$Q(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta \dot{x} dt = \left[\frac{x}{2\pi} \right] \quad (x(0)=x, \quad x(\beta) = x \bmod 2\pi),$$

где [...] обозначает целую часть числа.

Представив $Z(\beta)$ в виде

$$Z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, x, \beta) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} Z(x, x, \beta) dx + \sum_{n=-\infty}^0 \int_{2\pi(n-1)}^{2\pi n} Z(x, x, \beta) dx,$$

после замены переменных $x = \bar{x} + 2\pi n$ с учетом (37) получаем

$$Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\theta n} \int_0^{2\pi} Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, \beta) d\bar{x} + \sum_{n=-\infty}^0 e^{i\theta n} \int_{-2\pi}^0 Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, \beta) d\bar{x},$$

где

$$Z(\bar{x} + 2\pi n, \bar{x}, \beta) = e^{-\frac{\omega^2 \beta}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} e^{-2\pi^2 \frac{\lambda}{\beta} n^2} \int_{C_0} \exp \left\{ \frac{\omega^2 \beta}{\lambda} \int_0^1 \cos \left[\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} x(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\pi n t + x \right] dt \right\} d_W x.$$

Таким образом,

$$Z(\beta) = e^{-\frac{\omega^2 \beta}{\lambda}} \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi^2 \frac{\lambda}{\beta} n^2} [e^{i\theta n} Z_n(\beta) + e^{-i\theta n} Z_{-n}(\beta)],$$

где

$$Z_n(\beta) = \int_0^\pi [I_n(x, \beta) + I_n(-x, \beta)] dx;$$

$$I_n(x, \beta) = \int_{C_0} \exp \left\{ \frac{\omega^2 \beta}{\lambda} \int_0^1 \cos \left[\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}} x(t) + 2\pi n t + x \right] dt \right\} d_W x.$$

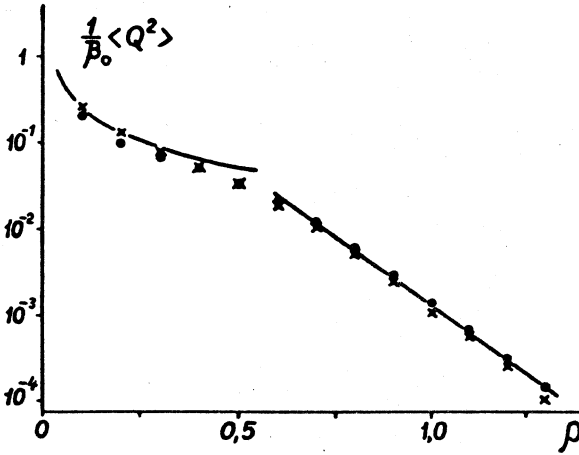


Рис. 8. Топологическая восприимчивость в модели квантового маятника

Используя свойство четности косинуса и свойство континуального интеграла

$$\int_{C_0} F[x(\cdot)] d_W x = \int_{C_0} F[-x(\cdot)] d_W x,$$

мы получаем, что $I_n(x, \beta) = I_{-n}(x, \beta)$, а следовательно, $Z_n(\beta) = Z_{-n}(\beta)$ и

$$Z(\beta) = \frac{2e^{-\frac{\omega^2 \beta}{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\theta n) \cdot \exp \left\{ -2\pi^2 \frac{\lambda}{\beta} n^2 \right\} Z_n(\beta), \quad (38)$$

где $Z_n \rightarrow 2\pi$ при $n \rightarrow \infty$ [263]. Результаты вычисления топологической восприимчивости $\frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle$, где усредненный топологический заряд равен

$$\langle Q^2 \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \frac{2e^{-\frac{\omega^2 \beta}{\lambda}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\theta n) n^2 \exp \left\{ -2\pi^2 \frac{\lambda}{\beta} n^2 \right\} Z_n(\beta), \quad (39)$$

в зависимости от параметра $\rho = \frac{\omega}{\lambda}$, $\beta_0 = \omega\beta$, полученные с помощью «элементарной» (не составной) приближенной формулы для континуального интеграла $Z_n(\beta)$ при $m = 1$, $\beta_0 = 7$, $\theta = 0$, $\lambda = 1$, показаны точками на рис.8

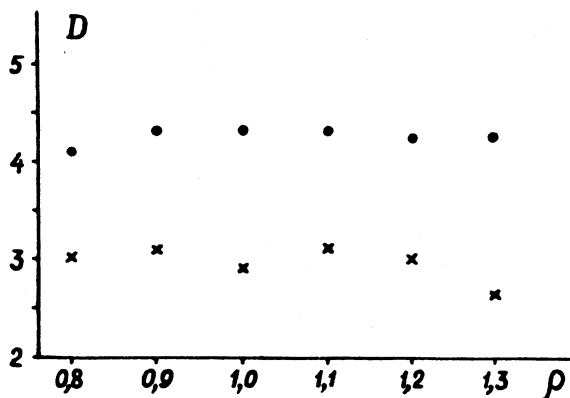


Рис. 9. Сравнение результатов вычисления топологической восприимчивости

в логарифмическом масштабе. Расчеты показали, что для достижения трех верных знаков достаточно четырех членов ряда в (38) и (39). Счетное время на ЭВМ CDC-6500 составило порядка 10 с на точку ρ . Крестиками на рис.8 показана зависимость от ρ величины

$$\frac{1}{\epsilon N} \langle Q^2 \rangle,$$

полученной в [284] методом Монте-Карло на решетке с $N=100$, $\epsilon = \omega a = 1$ (N — число узлов, a — шаг решетки). Сплошной линией при $\rho > 0,5$ изображены результаты, получаемые в приближении разреженного инстантонного газа (см. [284]):

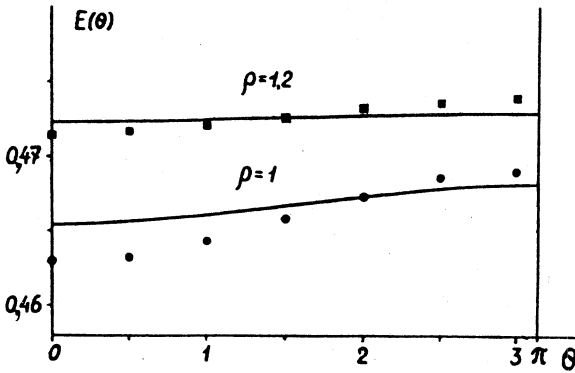
$$\frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\rho} e^{-8\rho} \left[1 - \frac{7}{64} \rho^{-1} - \dots \right]. \quad (40)$$

Кривая при $\rho < 0,5$ представляет собой высокотемпературное разложение в континуальном пределе ($\epsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, ϵN фиксировано):

$$\frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2 \rho}.$$

Для более точного сравнения $\langle Q^2 \rangle$ с теоретическими предсказаниями рассмотрим величину

$$D = \frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle \rho^{-1/2} e^{8\rho}.$$


 Рис. 10. Энергия θ -вакуума в модели квантового маятника

Очевидно, что в континуальном пределе (при этом $S = 8$) и при достаточно больших ρ (полуклассическая область) должно выполняться

$$D = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \simeq 4,51. \quad (41)$$

Результаты наших расчетов показаны точками на рис.9; они хорошо согласуются с (41). Крестиками показаны результаты работы [284], полученные при $\epsilon = 1$, $N = 100$, $S = 7,87$ (действие для инстантона на такой решетке). Отличие результатов [284] от теоретического предсказания не объясняется наличием фактора двухпетлевой поправки в (40). Таким образом, из их результатов, строго говоря, нельзя сделать вывод о справедливости приближения разреженного инстантонного газа. Для прояснения ситуации в работе [284] были проведены также расчеты при $\epsilon = 0,6$ (в точке $\rho = 0,7$) и при этом получено $D = 3,3$, то есть больше, чем при $\epsilon = 1$, но все равно меньше теоретической оценки. Дальнейшее уменьшение ϵ в работе [284] не производилось вследствие возникающих при этом трудностей, связанных с возрастанием размеров инстантонов и замедлением сходимости итераций. Очевидно, что в наших расчетах подобных проблем не возникает, поскольку расчеты ведутся без дискретизации пространства, $\epsilon = 0$.

Путем определения параметров методом наименьших квадратов из соотношения

$$\ln \left[\frac{1}{\beta_0} \langle Q^2 \rangle \right] = \ln D - S \rho + p \ln \rho$$

в работе [284] было получено $D = 2,98$; $p = 0,46$. Согласно полученным нами значениям, показанным точками на рис.9, мы имеем $D = 4,25$;

$p = 0,493$, что хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями (в континуальном пределе теоретический результат $p = 0,5$).

Вычислим теперь величину энергии вакуума. Вследствие инстантонных эффектов энергия основного состояния размывается в зону и характеризуется нарушающим CP -инвариантность углом θ . Значения $E(\theta)$, полученные нами в соответствии с

$$E(\theta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta), \quad \omega = 1, \quad \rho = \frac{1}{\lambda},$$

с помощью «элементарной» приближенной формулы при $m = 1$, показаны на рис.10 для $\rho = 1$ и $\rho = 1,2$ сплошными кружками и квадратами соответственно. Из рис.10 видно, что результаты хорошо согласуются с теоретическими оценками, получаемыми в приближении разреженного инстантонного газа:

$$E(\theta) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 4} \rho^{-1} - \frac{1}{32 \cdot 16} \rho^{-2} - \dots \right) - \cos \theta \frac{8}{\sqrt{\pi}} \rho^{-1/2} e^{-8\rho} \left[1 - \frac{7}{64} \rho^{-1} - \dots \right],$$

показанными на рисунке сплошными линиями.

9. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ КONTИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

При исследовании реальных физических процессов обычно приходится рассматривать системы с числом степеней свободы больше единицы. В континуально-интегральном подходе при этом оказывается необходимым вычислять кратные континуальные интегралы. Это может быть осуществлено, в частности, путем последовательного применения приближенных формул для однократных континуальных интегралов (например, уже рассмотренных нами формул, точных на классе функциональных многочленов). Однако более экономичными являются формулы, обладающие заданной суммарной степенью точности [285]. Рассмотрим построение приближенных формул третьей суммарной степени точности для m -кратных континуальных интегралов по гауссовым мерам:

$$\underbrace{\int \dots \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{X}} F[x_1, \dots, x_m] d\mu(x_1) \dots d\mu(x_m)}_m \equiv \int_{\mathbf{X}^m} F[\mathbf{x}] d\mu^{(m)}(\mathbf{x}), \quad (42)$$

рассматриваемых как интеграл Лебега, построенный на $\mathbf{X}^m = \underbrace{\mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \dots \times \mathbf{X}}_m$ — декартовом произведении полных сепарабельных метрических пространств по декартову произведению гауссовых мер μ ,

задаваемых корреляционным функционалом $K(\xi, \eta)$ и средним значением $M(\xi)$; $\xi, \eta \in X'$.

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, плотное почти всюду в X , порожденное гауссовой мерой μ , и $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Пусть, как и ранее, $\rho(r)$ — нечетная относительно r функция, заданная на R со значением в X , для которой

$$\int_R \langle \xi, \rho(r) \rangle \langle \eta, \rho(r) \rangle d\nu(r) = K(\xi, \eta).$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 7 [285]. Пусть $F[x]$ — произвольный вещественный интегрируемый функционал. Пусть

$$S_{n_i}(x_i) = \sum_{j=1}^{n_i} (e_j, x_i) e_j; \quad U_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{n_i} u_j^{(i)} e_j; \quad N = \sum_{i=1}^m n_i.$$

Тогда приближенная формула (составная)

$$\begin{aligned} \int_{X^m} F[\mathbf{x}] d\mu^{(m)}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{R^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) \right\} \times \\ &\times \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_R F(U_{n_i}(\mathbf{u}^{(1)}), \dots, \underbrace{\sum_i (\sqrt{m} \rho(v_i) \mathbf{u}^{(i)})}_i, \dots, U_{n_m}(\mathbf{u}^{(m)})) d\mathbf{u} d\nu(v) + \mathcal{R}_N(F), \quad (43) \end{aligned}$$

где $\nu(v)$ — симметричная вероятностная мера на R ,

$$\Sigma_i(x_i, \mathbf{u}^{(i)}) = x_i - S_{n_i}(x_i) + U_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)}),$$

точно для функциональных многочленов третьей суммарной степени на X^m .

Функциональным многочленом k -й суммарной степени называется функционал вида

$$F[x_1, \dots, x_m] = \prod_{i=1}^m F_{k_i}(x_i),$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq k$; $F_k(x_i)$ — однородный функциональный многочлен степени k_i по переменной x_i .

В частном случае, когда X является пространством непрерывных функций $C_0 \equiv \{C[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$ с условной мерой Винера, характеризующейся нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(t, s) = \min(t, s) - ts$, мера $dv = \frac{1}{2} dv$, $v \in [0, 1]$, мы получаем составную приближенную формулу для m -кратного континуального интеграла по условной мере Винера:

$$\int_{C^m} F[\mathbf{x}] d_W \mathbf{x} = (2\pi)^{-N/2} \int_{R^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)}) \right\} \times \\ \times \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \int_R F(\tilde{U}_{n_i}(\mathbf{u}^{(1)}), \dots, \underbrace{\sqrt{m} \tilde{\Sigma}_i(\rho(v, \cdot), \mathbf{u}^{(i)})}_{\mathcal{S}}, \dots, \tilde{U}_{n_m}(\mathbf{u}^{(m)})) d\mathbf{u} dv + \mathcal{R}_N(F), \quad (44)$$

где

$$dv = \frac{1}{2} dv, \quad \rho(v, t) = \begin{cases} -t \operatorname{sign}(v), & t \leq |v| \\ (1-t) \operatorname{sign}(v), & t > |v| \end{cases},$$

$$\tilde{\Sigma}_i(\rho(v, t), \mathbf{u}^{(i)}) = \rho(v, t) - S_{n_i}(\rho(v, t)) + \tilde{U}_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)}),$$

$$S_{n_i}(\rho(v, t)) = 2 \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{j\pi} \sin(j\pi t) \operatorname{sign}(v) \cos(j\pi t),$$

$$\tilde{U}_{n_i}(\mathbf{u}^{(i)}) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^{n_i} u_j^{(i)} \frac{1}{j\pi} \sin(j\pi t) \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, m.$$

Достаточное условие сходимости приближений, получаемых согласно (43) и, соответственно, (44), к точному значению интеграла при стремлении n_i ($i = 1, 2, \dots, m$) к бесконечности определяется следующей теоремой [285].

Теорема 8. Пусть для почти всех $v \in R$ относительно меры $\nu(v)$ имеет место сходимость

$$S_{n_i}(\rho(v)) \rightarrow \rho(v) \text{ при } n_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть $F[x]$ — непрерывный на X^m функционал, удовлетворяющий почти всюду на X^m условию

$$|F[x]| \leq g(A^1(x_1, x_2), \dots, A^m(x_m, x_m)),$$

где $A^k(x_k, x_k)$ — неотрицательный квадратичный функционал вида

$$A^k(x_k, x_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^k (x_k, e_i)^2, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^k < \infty, \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

$q(x)$ — неубывающая по всем переменным положительная функция, такая, что

$$\int \int_{X^m R} g(A^1(x_1, x_1), \dots, \underbrace{A^k(\sqrt{m} \rho(v), \sqrt{m} \rho(v))}_{k} + A^k(x_k, x_k), \dots, A^m(x_m, x_m)) dv(v) d\mu^{(m)}(x) < \infty.$$

Тогда

$$\mathcal{R}_N(F) \rightarrow 0 \text{ при } n_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Скорость сходимости приближений, получаемых согласно (43), к точному значению интеграла оценивается следующей теоремой [286].

Теорема 9. Пусть интегрируемый по мере $\mu^{(m)}(x)$ функционал представим в виде:

$$F[x + x_0] = P_3(x) + r(x, x_0),$$

где $P_3(x)$ — функциональный многочлен третьей суммарной степени, а

$$\begin{aligned} |r(x, x_0)| \leq & \prod_{i=1}^m (A^i(x_i, x_i))^2 (c_1 \exp \{c_2 A^i(x_i + x_i^0, x_i + x_i^0)\} + \\ & + c_3 \exp \{c_2 A^i(x_i^0, x_i^0)\}), \end{aligned}$$

где $A^i(x_i, x_i)$ удовлетворяют (45), (46), x_0 — фиксированная точка из X^m , c_i — положительные константы, такие, что

Таблица 8. Значения двукратного континуального интеграла для $p = 0,5$

$I^* = 12,03390688$					
$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	5	10
1	12,0332950				
2	12,0342440	12,0332116			
3	12,0395110	12,0356295	12,0339518		
5	12,0423562	12,0374153	12,0342150	12,0339122	
10	12,0447756	12,0390693	12,0347689	12,0340572	12,0339069

Таблица 9. Значения двукратного континуального интеграла для $p = -0,5$

$I^* = 5,655919950$					
$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	5	10
1	5,65338831				
2	5,65472254	5,65515020			
3	5,65465495	5,65557558	5,65573296		
5	5,65487646	5,65554252	5,65583832	5,65587219	
10	5,65513682	5,65553213	5,65597514	5,65593299	5,65591293

$$\frac{1}{2} - c_2 \gamma_k^{(i)} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} a_k < \infty; \quad (e_k, \sqrt{m} \rho(v))^2 \leq a_k; \quad a_k, v \in R.$$

Тогда для остаточного члена приближенной формулы (43) справедлива оценка

$$\mathcal{R}_N(F) = O \left(\prod_{i=1}^m \left(\sum_{k=n_i+1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^m O \left(\left(\sum_{k=n_i+1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} a_k \right)^2 \right).$$

Рассмотрим в качестве примера приближенное вычисление двукратного континуального интеграла по условной мере Винера

Таблица 10. Зависимость от q значений двукратного континуального интеграла для $p = 0,5$

q	I^*	I	$\hat{I}$
0	$1,188395106 \cdot 10^0$	$1,188394988 \cdot 10^0$	$1,18469738 \cdot 10^0$
2	$1,721203344 \cdot 10^0$	$1,721293187 \cdot 10^0$	$1,65205903 \cdot 10^0$
4	$5,229331352 \cdot 10^0$	$5,229330998 \cdot 10^0$	$3,71647298 \cdot 10^0$
6	$3,332750443 \cdot 10^1$	$3,332750366 \cdot 10^1$	$1,04813216 \cdot 10^1$
8	$4,455557798 \cdot 10^2$	$4,455558015 \cdot 10^2$	$0,32888278 \cdot 10^2$
10	$1,249522331 \cdot 10^4$	$1,249522528 \cdot 10^4$	$0,01094908 \cdot 10^4$

Таблица 11. Зависимость от q значений двукратного континуального интеграла для $p = -0,5$

q	I^*	I	$\hat{I}$
0	$8,509181282 \cdot 10^{-1}$	$8,509180438 \cdot 10^{-1}$	$8,48798027 \cdot 10^{-1}$
2	$1,152142647 \cdot 10^0$	$1,152141525 \cdot 10^0$	$1,14025833 \cdot 10^0$
4	$2,859971347 \cdot 10^0$	$2,859970984 \cdot 10^0$	$2,40410599 \cdot 10^0$
6	$1,301529645 \cdot 10^1$	$1,301529441 \cdot 10^1$	$0,64445955 \cdot 10^1$
8	$1,085883915 \cdot 10^2$	$1,085883710 \cdot 10^2$	$0,19531843 \cdot 10^2$
10	$1,660923723 \cdot 10^3$	$1,660923370 \cdot 10^3$	$0,06347512 \cdot 10^3$

$$I = \int_{C_0^2} \exp \left\{ \int_0^1 (px^2(t) + qx(t) + py^2(t) + qy(t)) dt \right\} d_W x d_W y$$

с помощью формулы (44). Результаты вычисления [287] при $q = 5$ и различных p , n_1 , n_2 приведены в табл.8 и 9. Через I^* обозначено точное значение, найденное нами в [248]. Зависимость значения I от p и q при $n_1 = n_2 = 20$ приведена в табл.10 и 11, где $\hat{I}$ обозначен результат, полученный с использованием «элементарной» приближенной формулы для кратных континуальных интегралов, взятой из [49]. Счетные времена вычисления I и $\hat{I}$ в каждой точке (p, q) составили порядка 1 с на ЭВМ CDC-6500. Из таблиц видно, что использование составных приближенных формул обеспечивает получение более точных приближений.

Аналогично однократным континуальным интегралам, нами была построена и исследована [285] приближенная формула третьей суммарной степени точности для кратных континуальных интегралов по условной мере Винера с весом

$$\int_{C_0^m} P[x] F[x] d_W^{(m)} x,$$

$$x = (x_1, \dots, x_m); \quad d_W^{(m)} x = d_W x_1 \dots d_W x_m;$$

$$P[x] = \exp \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^1 (p_i(t) x_i^2(t) + q_i(t) x_i(t)) dt \right\},$$

$$p_i(t), q_i(t) \in C[0, 1] \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, m.$$

В работе [286] с помощью приближенных формул для кратных континуальных интегралов нами были вычислены энергия основного состояния и волновая функция гармонического осциллятора в случае размерности пространства 2 и 3. Сравнение результатов с теоретическими значениями позволяет сделать вывод о высокой эффективности построенных приближенных формул.

10. МОДЕЛЬ КАЛОДЖЕРО. ЯДРО АТОМА ТРИТИЯ

Рассмотрим квантовую систему из n частиц в одном измерении, характеризующуюся гамильтонианом [288]:

$$H = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i < j}^n (x_i - x_j)^2 + g \sum_{i < j}^n (x_i - x_j)^{-2}, \quad (47)$$

соответствующим попарному взаимодействию частиц силами отталкивания центробежного потенциала и линейного притяжения. Эта модель служит объектом исследования многих авторов [289—293]. Для нее существует точное аналитическое решение [288], что позволяет использовать ее для исследования эффективности различных численных методов. Как отмечается в [291, 294], метод континуального интегрирования является наиболее пригодным способом численного анализа квантовых систем с большим числом степеней свободы, т.е. решения многомерных задач высокой размерности, когда другие методы становятся малоэффективными.

Таблица 12. Энергия основного состояния в модели Калоджеро для трех частиц

ω	E_0	E_{mc} [291]	E^* [288]
0,10	1,346	—	1,3472
0,20	2,700	—	2,6944
0,25	3,366	$3,35 \pm 0,004$	3,3680
0,50	6,738	—	6,7361

Таблица 13. Энергия основного состояния в модели Калоджеро для различного числа частиц

n	E_0	E_{mc} [291]	E^* [288]
5	13,447	$13,37 \pm 0,04$	13,4397
7	32,249	$32,34 \pm 0,09$	32,2718
9	61,473	$61,31 \pm 0,10$	61,5183
11	102,865	$102,31 \pm 0,14$	102,6028

Мы вычисляли [295] функцию Грина Z для системы (47) в виде континуального интеграла по условной мере Винера с использованием приближенной формулы с весом. Полученные на основании этих расчетов значения энергии основного состояния E_0 в случае трех частиц ($n=3$) для $g=1,5$ и различных ω приведены в табл.12. Счетное время вычисления значения E_0 в каждой точке ω составило 11 с на ЭВМ CDC-6500.

Величины E_0 , вычисленные при $g=1,5$, $\omega=0,25$ для различного числа частиц n , показаны в табл.13. Для сравнения приведены результаты, полученные в [291] с помощью метода Монте-Карло (1000 точек дискретизации, 100 итераций), обозначенные E_{mc} . Точный результат обозначен E^* . Счетное время нахождения E_0 для 11 частиц по приближенной формуле с весом составило 3 мин на ЭВМ CDC-6500, вычисление E_{mc} потребовало 15 мин на одностипной ЭВМ [291]. Сравнение численных значений свидетельствует о том, что развиваемый нами детерминированный подход к континуальным интегралам дает более точные результаты за меньшие счетные времена по сравнению с методом Монте-Карло, где даже не везде было обеспечено совпадение результатов с точными значениями [291] в пределах указанной точности.

Численное исследование системы из трех взаимодействующих частиц является одной из фундаментальных задач в математической физике. Рассмотрим основное состояние тритона (ядра атома трития), т.е. системы, описываемой гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} V(|r_{ij}|). \quad (48)$$

Здесь $x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)})$, $i = 1, 2, 3$, обозначены координаты трех нуклонов с массами m_i и $r_{ij} = x_i - x_j$.

Достаточно распространенным методом численного исследования данной системы является вариационный метод, который применительно к рассматриваемой девятимерной задаче последовательно развивался во многих работах с начала 70-х годов (см., например, [296—300]). Результатом этих исследований являются верхние и нижние оценки для энергии связи, причем за достаточно большие счетные времена (порядка нескольких часов) удавалось достигнуть хорошей точности вычислений. В ряде работ для вычисления энергии связи применялся метод Монте-Карло [291, 301—302]. В [291] получено значение энергии основного состояния с точностью порядка 0,1 МэВ при счетном времени в пределах одного часа на ЭВМ CDC-6500.

Рассмотрим модель тритона, использованную в [296] и последующих работах: три идентичные частицы с массой $m = m_p = 938,279$ МэВ взаимодействуют попарно посредством сферически-симметричного спин-независимого потенциала

$$V(r) = -51,5 \exp \left\{ -\frac{r^2}{b^2} \right\} \text{ МэВ}, \quad b = 1,6 \text{ фм}. \quad (49)$$

В работах, о которых упоминалось выше, для энергии основного состояния системы (48) с потенциалом (49) были получены следующие значения (отличающиеся друг от друга больше, чем на величину указанной погрешности):

$$E = (-9,77 \pm 0,06) \text{ МэВ} [291],$$

$$E = -9,42 \text{ МэВ} [296],$$

$$E = (-9,47 \pm 0,4) \text{ МэВ} [301],$$

$$(-9,99 \pm 0,05) < E < (-9,75 \pm 0,04) \text{ МэВ} [297],$$

$$E = -9,78 \text{ МэВ} [297, 299].$$

Мы вычислили [286] энергию основного состояния тритона с помощью приближенной формулы третьей суммарной степени точности для крат-

Таблица 14. Энергия основного состояния ядра атома трития

β	2,0	3,0	4,0	4,5	4,7	4,8	5,0
E_0 , МэВ	-33,4	-15,2	-10,5	-9,9	-9,8	-9,8	-9,7

ных континуальных интегралов. После перехода к безразмерным переменным гамильтониан системы перепишем в следующем виде [286]:

$$H_0 \equiv \frac{1}{R} H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} \frac{1}{R} V(|r_{ij}|),$$

где

$$R = \frac{(197,93)^2}{938,279} \text{ МэВ} \cdot \text{фм}^2.$$

Матричный элемент записывается формулой

$$Z(x_1, \dots, x_9, \beta) = \\ = (2\pi\beta)^{-9/2} \int_{C_0^9} \exp \left\{ -\frac{\beta}{R} \int_0^1 \sum_{i < j}^9 V(|\sqrt{\beta} u_i(t) + x_i| - |\sqrt{\beta} u_j(t) + x_j|) dt \right\} d_W^{(9)} u,$$

$$x_1 = (x_1, x_2, x_3), \quad x_2 = (x_3, x_4, x_5), \quad x_3 = (x_7, x_8, x_9).$$

Значения энергии основного состояния E_0 (МэВ), вычисленные для различных значений β , представлены в табл.14. Вычисление кратных римановых интегралов осуществлялось с помощью метода Коробова с относительной погрешностью $\varepsilon = 1\%$. Счетное время вычисления энергии E_0 для каждого значения β составило порядка 15 мин на ЭВМ CDC-6500. Из таблицы видно, что полученное нами уточненное значение энергии основного состояния $E_0 = -9,7$ МэВ согласуется с данными других авторов, при этом счетное время у нас оказалось меньшим по сравнению с временами, приведенными в других работах.

11. КONTИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В $P(\Phi)_2$ -КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Одной из областей квантовой теории поля, где вопросы меры континуального интегрирования разработаны наиболее глубоко, является двумерная евклидова теория поля с полиномиальными взаимодействиями бозонных

полей [239]. В рамках $P(\varphi)_2$ -модели могут быть исследованы, в частности, такие процессы, как фазовые переходы, критические явления, взаимодействие частиц, рассеяние и связанные состояния. Данная модель является предметом исследования многих авторов (см. [92]). В частности, в работе [303] в рамках этой модели методом континуального интегрирования исследована плотность энергии вакуума в бесконечном объеме.

Лагранжиан $P(\varphi)_2$ -модели записывается следующим образом [92]:

$$L(\varphi(x)) =: \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) + \lambda P(\varphi(x)) : \quad (50)$$

Здесь $x \in R^2$; $\varphi(x) \in S'(R^2)$ — пространство обобщенных функций умеренного роста; P — ограниченный снизу полином. Пространством основных функций является пространство Шварца быстро убывающих функций $S(R^2)$. Значение φ на основной функции $f \in S(R^2)$ определяется как

$$\varphi(f) \equiv \langle \varphi, f \rangle = \int_{R^2} \varphi(x) f(x) dx.$$

Упорядочение Вика (виково двоеточие) задается соотношением

$$: \varphi(x)^n : = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j n!}{(n-2j)! j! 2^j} k_{\kappa}^j(x) (\varphi_{\kappa}(x))^{n-2j},$$

где

$$\varphi_{\kappa}(x) = \int_{R^2} \varphi(y) \delta_{\kappa, x}(y) dy \text{ — импульсное обрезание поля } \varphi;$$

$$\delta_{\kappa, x}(y) = \kappa^2 h(\kappa(x-y)) \text{ — «размазанная» } \delta\text{-функция,}$$

$$h \in C_0^{\infty}(R^2), \quad h(y) \geq 0, \quad \int_{R^2} h(y) dy = 1,$$

$$k_{\kappa}(x) = \langle \delta_{\kappa, x}, K \delta_{\kappa, x} \rangle.$$

Здесь K — корреляционный функционал меры, $K(f, g) = \langle f, Kg \rangle$ (непрерывная невырожденная билинейная форма на произведении пространств $S(R^2) \times S(R^2)$):

$$K(f, g) = \int [\langle \varphi, f \rangle - M(f)][\langle \varphi, g \rangle - M(g)] d\mu(\varphi),$$

где $M(f) = \int \langle \varphi, f \rangle d\mu(\varphi)$ — среднее значение меры $d\mu(\varphi)$.

Континуальная мера в пространстве $S'(R^2)$ определяется следующим образом [92]. В ограниченной области $\Lambda \subset R^2$ вводится мера

$$d\mu_\Lambda = Z^{-1} e^{-V(\Lambda)} d\varphi_{K_{\partial\Lambda}},$$

где

$$V(\Lambda) = \int_\Lambda :P(\varphi(x)) :_{K_\emptyset} dx; \quad Z = Z(\Lambda) = \int e^{-V(\Lambda)} d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}.$$

Упорядочение Вика производится здесь по отношению к свободному корреляционному функционалу $K_\emptyset$ [92]. $d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}$ представляет собой гауссову меру с корреляционным функционалом $K_{\partial\Lambda}$, удовлетворяющим условиям Дирихле на $\partial\Lambda$ — границе области Λ , и нулевым средним значением $M(f) = 0$. Как уже отмечалось, корреляционный функционал и среднее значение определяют гауссову меру единственным образом.

Важным результатом, полученным Дж.Глиммом и А.Джаффе, является доказательство существования меры в неограниченной области. Они показали, что при определенных условиях на P и при $f \in C_0^\infty$ последовательность характеристических функционалов мер в конечных объемах

$$S_\Lambda\{f\} = \int e^{i\varphi(f)} d\mu_\Lambda$$

имеет предел

$$S\{f\} = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} S_\Lambda\{f\},$$

причем предельный функционал $S\{f\}$ удовлетворяет евклидовым аксиомам аналитичности, регулярности, инвариантности относительно сдвигов, поворотов и отражений, что необходимо для построения квантового поля φ [92].

Таким образом, наблюдаемые значения операторов, определяемые как средние по вакуумному состоянию, могут быть найдены путем вычисления континуального интеграла

$$\langle 0|F(\varphi)|0\rangle = \lim_{\Lambda \uparrow R^2} \frac{\int_{S'(\Lambda)} \exp\{-\lambda \int_\Lambda :P(\varphi(x)) :_{K_\emptyset} dx\} F(\varphi) d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}}{\int_{S'(\Lambda)} \exp\{-\lambda \int_\Lambda :P(\varphi(x)) :_{K_\emptyset} dx\} d\varphi_{K_{\partial\Lambda}}}. \quad (51)$$

Существенно, что при $d = 2$ перенормировки в $P(\varphi)_d$ -модели ограничиваются вычитанием, связанным с упорядочением Вика, т.е. в выражении (51) расходимости отсутствуют.

При построении приближенных формул для континуальных интегралов необходимо иметь явное выражение для корреляционного функционала меры. Записав $K(f, g)$ в виде

$$K(f, g) = \int_{R^2 \times R^2} K(x, y) f(x) g(y) dx dy,$$

рассмотрим интегральное ядро $K(x, y)$, $x, y \in R^2$:

$$K(x, y) = \int_{S'(R^2)} \varphi(x) \varphi(y) d\varphi_K.$$

Для интегрального ядра корреляционного функционала $K_{\partial\Lambda}$ с граничными условиями Дирихле на границе произвольной области $\Lambda \subset R^2$ существует представление через континуальный интеграл по условной мере Винера [92]:

$$K_{\partial\Lambda}(x, y) = \int_0^\infty dt e^{-m^2 t} \int_{C_{x,y}[0, t]} \chi_{\partial\Lambda}(\omega) d_W \omega,$$

где интегрирование осуществляется по множеству $C_{x,y}[0, t]$ непрерывных функций $\omega(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, удовлетворяющих условиям $\omega(0) = x$, $\omega(t) = y$. Здесь $\chi_{\partial\Lambda}(\omega)$ — характеристическая функция множества траекторий, не имеющих точек пересечения с $\partial\Lambda$:

$$\chi_{\partial\Lambda}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists \tau_0 \in [0, t]: \omega(\tau_0) \in \partial\Lambda \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку нас будет интересовать предел $\Lambda \uparrow R^2$, без ограничения общности мы можем предположить, что точки $x, y \in \Lambda \setminus \partial\Lambda$; в случае $x \in \partial\Lambda$ и/или $y \in \partial\Lambda$, очевидно, что $K(x, y) = 0$. Если обозначить

$$C_{x,y}^\Lambda[0, t] = \{\omega(\tau) \in C[0, t]: \omega(0) = x, \omega(t) = y, \omega(\tau) \in \Lambda \setminus \partial\Lambda \forall \tau \in [0, t]\},$$

то

$$K_{\partial\Lambda}(x, y) = \int_0^\infty dt e^{-m^2 t} \int_{C_{x,y}^\Lambda} d_W \omega = \int_0^\infty M(x, y, t) e^{-m^2 t} dt,$$

где $M(x, y, t) = \text{mes } C_{x,y}^\Lambda[0, t]$ — винеровский объем множества $C_{x,y}^\Lambda$.

Таким образом, для нахождения ядра $K_{\partial\Lambda}(x, y)$ достаточно определить объем множества двумерных непрерывных на отрезке функций с

фиксированными значениями на концах отрезка и принимающих значения внутри заданной области Λ . Эта величина найдена нами в работе [304]. Следствием этого является выражение для $K_{\partial\Lambda}(x, y)$ [304,305].

Теорема 10. Для произвольной связной ограниченной области $\Lambda \subset R^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Lambda$ интегральное ядро корреляционного функционала $P(\varphi)_2$ -гауссовой меры в пространстве обобщенных функций умеренного роста $S'(R^2)$ может быть представлено в виде:

$$K_{\partial\Lambda}(x, y) = \sum_n \frac{1}{E_n + m^2} \vartheta_n(x) \vartheta_n(y), \quad x, y \in \Lambda \setminus \partial\Lambda,$$

где E_n и ϑ_n — собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta \vartheta(x) = E \vartheta(x), & x \in \Lambda \setminus \partial\Lambda \\ \vartheta(x) = 0, & x \in \partial\Lambda. \end{cases}$$

Конкретное выражение для $K_{\partial\Lambda}(x, y)$ зависит от формы области Λ . В частном случае, когда Λ является прямоугольником $\Lambda = \{[0, 2a] \times [0, 2b]\}$, $K_{\partial\Lambda}(x, y)$ может быть записано в виде [304]:

$$\begin{aligned} K(x, y) = \frac{1}{ab} \sum_{k_1, k_2=1} \frac{1}{m^2 + \left(\frac{\pi k_1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi k_2}{2b}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi k_1}{2a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi k_2}{2b} x_2\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi k_1}{2a} y_1\right) \sin\left(\frac{\pi k_2}{2b} y_2\right), \end{aligned} \quad (52)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

Собственными функциями ядра $K(x, y)$ являются

$$\beta_{k_1, k_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{\pi k_1}{2a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi k_2}{2b} x_2\right),$$

соответствующие собственные значения

$$\lambda_{k_1, k_2} = \frac{1}{m^2 + \left(\frac{\pi k_1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi k_2}{2b}\right)^2}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать области Λ квадратной формы: $b = a$ и полагать $m = 1$.

Поскольку для любого $\varphi \in S'(\Lambda)$ имеет место разложение

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, \varphi) e_k,$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в упоминавшемся нами гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, порожденном гауссовой мерой, сходящееся в топологии пространства $S'(\Lambda)$ для почти всех $\varphi \in S'(\Lambda)$, имеет место следующая доказанная нами теорема [306].

Теорема 11. Пусть $F[\varphi]$ — непрерывный почти всюду на $S'(\Lambda)$ функционал, удовлетворяющий

$$|F[\varphi]| < \Phi[\varphi],$$

где $\Phi[\varphi]$ — неотрицательный интегрируемый функционал, такой, что

$$\Phi\left[\sum_{k=1}^n (e_k, \varphi) e_k\right] \text{ не убывает при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\int_{S'(\Lambda)} F[\varphi] d\mu(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k^2}{2}\right\} F\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k e_k\right] du. \quad (53)$$

Эта теорема позволяет вычислять континуальный интеграл в виде n -кратного риманова интеграла для широкого класса функционалов. Однако скорость сходимости получаемых по ней приближений при $n \rightarrow \infty$ невелика (порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$). Рассмотрим построение приближенных формул,

точных на классе функциональных многочленов заданной степени, дающих хорошие приближения, когда подынтегральный функционал F близок по норме к функциональному многочлену степени $\leq 2m+1$.

Теорема 12 [49]. Пусть ν — симметричная вероятностная мера на R , K — заданный корреляционный функционал меры $d\mu(x)$ в полном сепарабельном пространстве X и пусть функция $\rho(\nu): R \rightarrow X$ удовлетворяет

$$\rho(\nu) = -\rho(-\nu),$$

$$\int_R \langle \xi, \rho(\nu) \rangle \langle \eta, \rho(\nu) \rangle d\nu(\nu) = K(\xi, \eta), \quad (54)$$

$$\prod_{i=1}^l \langle \xi_i, \rho(\nu) \rangle \in L(R, \nu) \text{ для } 1 \leq l \leq 2m+1, \quad \xi, \eta, \xi_i \in X'.$$

Тогда приближенная формула

$$\int_X F[x] d\mu(x) \approx \int_{R^n} F[\theta_m(v)] dv^{(m)}(v) \quad (55)$$

точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m+1$.
Здесь

$$\theta_m(v) = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \rho(v_k),$$

$[c_k^{(m)}]^2$ — корни многочлена $\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{t^{m-k}}{k!}$ и мера $v^{(m)}$ в R^m является декартовым произведением мер v на R .

Рассмотрим целочисленную сетку (n_1, n_2) на R^2 и определим меру v на множестве $Q \in R^2$ следующим образом:

$$v(Q) = \sum_{(n_1, n_2) \in Q} v(n_1, n_2), \quad (56)$$

где

$$v(n_1, n_2) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\pi n_1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{2a} \right)^2 \right]^2 Z},$$

$$Z = \sum_{(n_1, n_2) \in R^2} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\pi n_1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{2a} \right)^2 \right]^2}.$$

Поскольку $v(R^2) = 1$, мера $v(x_1, x_2)$ является симметричной по обоим аргументам вероятностной мерой в R^2 . Интеграл по этой мере записывается следующим образом:

$$\int_{R^2} f(x_1, x_2) dv(x_1, x_2) = \frac{1}{Z} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\pi n_1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{2a} \right)^2 \right]^2} f(n_1, n_2).$$

Мы выбираем функцию $\rho(v)$ в следующем виде:

$$\rho(v) \equiv \rho_v(x) = \frac{1}{2a} \sqrt{Z} \left[1 + \left(\frac{\pi v_1}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi v_2}{2a} \right)^2 \right]^2 \sin \left(v_1 \frac{\pi x_1}{2a} \right) \sin \left(v_2 \frac{\pi x_2}{2a} \right), \quad (57)$$

где $v = (v_1, v_2) \in R^2$; $x = (x_1, x_2) \in \Lambda$.

Функция ρ является нечетной функцией аргументов v_1 и v_2 . В [306] нами показано, что она удовлетворяет также остальным условиям в (54), т.е. что имеет место следующая теорема.

Теорема 13. *Приближенная формула*

$$\int_{S'(\Lambda)} F[\varphi] d\mu(\varphi) \approx \int_{R^{2m}} F[\theta_m(v)] dv^{(m)}(v), \quad (58)$$

где обозначения соответствуют предыдущей теореме, мера v определяется в (56), а функция $\rho(v)$ задается (57), точна для любого функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.

Формулу (58) будем называть «элементарной» в отличие от «составных» формул, построенных нами для интегралов по мере $d\mu_K(\varphi)$ в пространстве $S'(\Lambda)$ аналогично формулам для интегралов по абстрактной гауссовой мере μ в полных сепарабельных пространствах X .

Теорема 14 [306]. *Для любого интегрируемого по мере $d\mu(\varphi)$ вещественного функционала $F[\varphi]$ приближенная формула (составная)*

$$\begin{aligned} \int_{S'(\Lambda)} F[\varphi] d\mu(\varphi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u, u) \right\} \int_{R^{2m}} F[\rho_m(v) - \rho_m^n(v) + \\ + \Psi_n(u)] dv(v) du + \mathcal{R}_m^n(F) \end{aligned} \quad (59)$$

точна для произвольного функционального многочлена степени $\leq 2m + 1$.
Здесь

$$\rho_m(v) = \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \rho(v_k); \quad \rho_m^n(v) = S_n(\rho_m(v)), \quad v \in R^{2m}, \quad u \in R^n,$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (e_k, x) e_k, \quad \Psi_n(u) = \sum_{k=1}^n u_k e_k,$$

$$e_k \text{ — ортонормированный базис в } \mathcal{H}, \quad (u, u) = \sum_{k=1}^n u_k^2.$$

В [306] нами показано, что, аналогично интегралам по абстрактной гауссовой мере, для интегралов по мере $d\mu_K(\varphi)$ в пространстве $S'(\Lambda)$ имеют место теоремы о сходимости приближений в (59) и об оценке остаточного члена, из которой, в частности, следует, что $\mathcal{R}_m^n(F) = O(n^{-(m+1)})$ при $n \rightarrow \infty$.

Таблица 15. Значения континуального интеграла I_1
для различных размеров области Λ

a	$I_1^* \cdot 10^2$	$I_1^{\text{basis}(5)} \cdot 10^2$	$I_1^{\text{simple}(1)} \cdot 10^2$	$I_1^{\text{composite}(1,1)} \cdot 10^2$
1	4,07	3,90	1,98	4,13
2	4,13	3,73	3,83	4,21
3	4,13	1,58	4,76	5,66
4	4,13	0,37	5,28	6,61
5	4,13	0,08	5,61	6,50
10	4,13	0,01	6,30	6,85

Рассмотрим сравнение эффективности различных приближенных формул на численных примерах. Вычислим вначале следующий интеграл:

$$I_1 = \int_{S'(\Lambda)} \langle l, \varphi \rangle^4 d\mu_K(\varphi), \quad \text{где } l(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (60)$$

Данный интеграл является центральным моментом четвертого порядка гауссовой меры $d\mu_K$. Его точное значение известно [50]:

$$I_1^* = 3K^2(l, l).$$

Результаты приближенного вычисления интеграла (60) $I_1^{\text{basis}(5)}$ по формуле (53) с $n=5$, по «элементарной» формуле третьего порядка точности (формула (58) с $m=1$) $I_1^{\text{simple}(1)}$ и по «составной» приближенной формуле (59) с $n=m=1$ $I_1^{\text{composite}(1,1)}$ для различных размеров a области Λ приведены в табл.15. Из таблицы видно, что точность результатов ухудшается с ростом размера области Λ . Однако для каждого фиксированного a результаты, получаемые по формуле (53) $I_1^{\text{basis}(n)}$ и по составной формуле (58) $I_1^{\text{composite}(1,n)}$, сходятся к точному значению интеграла при $n \rightarrow \infty$, что иллюстрируется табл.16 и 17. Из таблиц видно, что составная приближенная формула обеспечивает более высокую скорость сходимости приближений. Элементарная приближенная формула (58) с $m=1$ не дает хороших приближений в данном случае, поскольку функционал (60) не близок к функциональному многочлену третьей степени. Заметим, однако, что при $m=2$ (пятая степень точности) эта формула дает уже точное значение рассмотренного интеграла при произвольном размере области Λ .

Таблица 16. Сходимость к точному значению приближений континуального интеграла I_1 для размера области $a = 1$

$$I_1^* = 4,068 \cdot 10^{-2}; \quad I_1^{\text{simple}(1)} = 1,98 \cdot 10^{-2}$$

n	$I_1^{\text{basis}(n)}$	$I_1^{\text{composite}(1, n)}$
1	$0,673 \cdot 10^{-2}$	$4,133 \cdot 10^{-2}$
2	$3,520 \cdot 10^{-2}$	$4,105 \cdot 10^{-2}$
3	$3,849 \cdot 10^{-2}$	$4,098 \cdot 10^{-2}$
4	$3,850 \cdot 10^{-2}$	$4,097 \cdot 10^{-2}$
5	$3,903 \cdot 10^{-2}$	$4,096 \cdot 10^{-2}$
10	$4,053 \cdot 10^{-2}$	$4,070 \cdot 10^{-2}$
15	$4,063 \cdot 10^{-2}$	$4,069 \cdot 10^{-2}$
20	$4,065 \cdot 10^{-2}$	$4,068 \cdot 10^{-2}$

Таблица 17. Сходимость к точному значению приближений континуального интеграла I_1 для размера области $a = 10$

$$I_1^* = 4,129 \cdot 10^{-2}; \quad I_1^{\text{simple}(1)} = 6,30 \cdot 10^{-2}$$

n	$I_1^{\text{basis}(n)}$	$I_1^{\text{composite}(1, n)}$
1	$4,07 \cdot 10^{-13}$	$7,29 \cdot 10^{-2}$
2	$2,19 \cdot 10^{-10}$	$6,30 \cdot 10^{-2}$
10	$5,56 \cdot 10^{-4}$	$6,04 \cdot 10^{-2}$
20	$2,27 \cdot 10^{-2}$	$5,52 \cdot 10^{-2}$
30	$3,86 \cdot 10^{-2}$	$4,22 \cdot 10^{-2}$
40	$3,91 \cdot 10^{-2}$	$4,21 \cdot 10^{-2}$
50	$3,93 \cdot 10^{-2}$	$4,20 \cdot 10^{-2}$
60	$4,03 \cdot 10^{-2}$	$4,16 \cdot 10^{-2}$
70	$4,09 \cdot 10^{-2}$	$4,13 \cdot 10^{-2}$
80	$4,10 \cdot 10^{-2}$	$4,13 \cdot 10^{-2}$

Таблица 18. Приближенные значения континуального интеграла I_2

$$I_2^{\text{simple}(1)} = 0,74; \quad I_2^{\text{simple}(2)} = 0,622$$

n	$I_2^{\text{basis}(n)}$	$I_2^{\text{composite}(1, n)}$	$I_2^{\text{composite}(2, n)}$
1	1,023	0,888	1,357
2	1,055	1,029	1,124
3	1,058	1,046	1,088
4	1,058	1,052	1,082
5	1,059	1,059	1,073
6	1,060	1,060	1,066
15	1,060	1,060	1,061
50	1,060	1,060	1,060

Рассмотрим теперь вычисление интеграла

$$I_2 = \int_{S'(\Lambda)} \exp \{-\langle l, \Phi \rangle\} d\mu_K(\Phi)$$

с помощью формулы (53) $I_2^{\text{basis}(n)}$, элементарной формулы (58) третьей степени точности $I_2^{\text{simple}(1)}$ и пятой степени точности $I_2^{\text{simple}(2)}$, а также составной формулы (59) третьей и пятой степени точности $I_2^{\text{composite}(1, n)}$ и $I_2^{\text{composite}(2, n)}$. Результаты представлены в табл.18. Видно, что приближения сходятся при $n \rightarrow \infty$ к одному и тому же числу 1,060, которое в соответствии с теоремой о сходимости следует считать точным значением интеграла.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывает анализ литературы последних лет и опыт участия в международных конференциях, посвященных континуальным интегралам, метод континуального интегрирования находит все более широкое применение в различных областях науки. При этом среди тенденций использования этого метода в квантовой физике важную роль играют следующие два направления. С одной стороны, происходит развитие методов, использу-

ющих решеточную регуляризационную схему, в том числе поиск новых модификаций функционала действия с улучшенными свойствами в континууме, совершенствование вычислительных алгоритмов на решетке, включая использование параллельных вычислений на ЭВМ. С другой стороны, последовательно развиваются методы, основанные на непертурбативной континуальной регуляризации и исследованиях непосредственно в континууме. Как отмечается во многих работах, этот подход привлекателен тем, что он позволяет изучать общие непертурбативные явления в квантовой теории поля. В вычислительном аспекте этот подход перспективен, поскольку в нем отсутствуют многие серьезные проблемы, которые не всегда решаются до конца при использовании решеточного подхода, в частности, проблема существования и единственности континуального предела, проблема неоднозначности результатов при различных дискретизациях, отсутствуют проблемы, связанные с возникновением метастабильности и замедлением сходимости итераций при стремлении к нулю шага решетки, отсутствуют т.н. решеточные артефакты, приводящие в ряде случаев расчеты на решетке к неверным результатам (например, появление ложных «решеточных» инстантонов). Некоторые авторы считают, что в решеточной квантовой хромодинамике размеры инстантонов примерно соответствуют шагу решетки, на которых ведутся расчеты в настоящее время (в том числе с помощью суперкомпьютеров и параллельных ЭВМ), и что этим, в частности, может объясняться сильное различие значений топологической восприимчивости, получаемых разными методами. Большое внимание уделяется в последнее время строгим определениям континуальных интегралов квантовой физики на основе понятия цилиндрических множеств, гауссовой меры и т.д. (см. [92]). Современное изложение основ квантовой теории поля также ведется на основе аппарата функционального интегрирования [307]. Развиваемый нами в рамках этого подхода метод приближенного вычисления континуальных интегралов дает возможность получения математически строго обоснованных физических результатов с заранее предсказываемой (на основании теорем) погрешностью вычислений. Он наиболее полезен в случаях, когда существует сильная чувствительность задачи к шагу дискретизации, например, при исследовании сингулярностей типа фазовых переходов второго и более высоких порядков, при возможности нарушения исходной топологии пространства с введением решетки, при исследовании систем высокой размерности (в том числе с многочастичным взаимодействием, поскольку в данном подходе не возникает проблемы обращения заполненных матриц высокого порядка) и т.д. Как показывает сравнение численных результатов, кратность обычных (римановых) интегралов, возникающих при использовании построенных нами приближенных формул на 1—2 порядка меньше, чем в методе Монте-Карло на решетке (в рассмотренных задачах квантовой механики 2—3 против 100—200), что обеспечивает существен-

ную экономию памяти ЭВМ и дает возможность использовать более предпочтительные детерминированные методы, дающие гарантированную, а не вероятностную оценку погрешности. Счетное время при этом также оказалось на порядок меньше, чем в методе Монте-Карло. В настоящее время нами ведутся работы по развитию метода и обобщению его на системы с отличным от нуля спином и модели квантовой теории поля с размерностью $d > 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schulman L.S. — Techniques and Applications of Path Integration. Wiley, New York, 1981; Khandekar D.C., Lawande S.V., Bhagwat K.V. — Path-Integral Methods and Their Applications. World Scientific, Singapore, 1993.
2. Feynman R. — Rev. Mod. Phys., 1948, vol.20, p.367.
3. Glimm J., Jaffe A. — Collected Papers, vol.2. Constructive Quantum Field Theory. Boston, Birkhauser, 1985.
4. Фаддеев Л.Д. — ТМФ, 1969, т.1, с.3.
5. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
6. Зайлер Э. — Калибровочные теории. М.: Мир, 1985.
7. Kleinert H. — Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics. Singapore: World Scientific, 1992.
8. Rivers R.J. — Path Integral Methods in Quantum Field Theory. Cambridge Univ. Press, 1987; Das A. — Field Theory: a Path Integral Approach. Singapore: World Scientific, 1993.
9. Попов В.Н. — Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
10. Блохинцев Д.И., Барбашов Б.М. — УФН, 1972, т.106, №4, с.593.
11. Попов Н.Н. — ДАН СССР, 1988, т.301, №6, с.1366.
12. Inomata A., Kuratsuji H., Gerry C.C. — Path Integrals and Coherent States of SU(2) and SU(1,1). Singapore: World Scientific, 1992.
13. Захаров О.А., Сарданашвили Г.А. — Изв. вузов. Физика, 1990, т.33, №9, с.53.
14. Barut A.O., Duru I.H. — IC/88/4, Trieste, 1988.
15. Dutsch M. — Nuovo Cim. A., 1989, vol.102, №6, p.1469.
16. Халатников И.М. — ЖЭТФ, 1955, т.28, №5, с.633.
17. Brush S.G.. — Rev. Mod. Phys., 1961, vol.33, p.79.
18. Wiegel F.W. — Phys. Rep. (Phys. Lett. C) 1975, vol.16, p.57.
19. Papadopoulos G.J., Devreese J.T. (Eds.) — Path Integrals and Their Applications in Quantum, Statistical and Solid State Physics. Proc. NATO Adv. Study Ins., Antwerp, 1977.
20. Первушин В.Н. и др. — ЭЧАЯ, 1979, т.10, вып.5, с.1114.
21. Xianxi D. — ITP-SB 91-20, Stony Brook, 1991.
22. Свидзинский А.Б. — ТМФ, 1971, т.9, №2, с.273.
23. Hatada K., Yosida K. — Progr. Theor. Phys., 1989, vol.82, No.4, p.702.
24. Kochetov E.A. — JINR, E17-94-264, Dubna, 1994.
25. Hawking S.W. — The Path-Integral Approach to Quantum Gravity. In: General Relativity, Hawking S. and Israel W. (Eds), Cambridge, London, 1979.

26. Мазманишвили А.С. — Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. Киев: Наукова думка, 1987.
27. Albeverio S.A., Hoegh-Krohn R.H. — Mathematical Theory of Feynman Path Integrals. Lect. Notes in Math., 523, Springer, Berlin a.o., 1976.
28. Экснер П. — ЭЧАЯ, 1984, т.15, с.121.
29. Exner P. — Open Quantum Systems and Feynman Integrals. Dordrecht: Reidel, 1985.
30. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. — Континуальные интегралы. М.: Изд. МГУ, 1990.
31. Разумовский О.С., Фирсов В.А. — Вопросы истории естествознания и техники, 1986, №4, с.109.
32. Березин Ф.А. — УФН, 1980, т.132, вып.3, с.497.
33. Прохоров Л.В. — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.5, с.1094.
34. Хренников А.Ю. — Дифф. уравнения, 1992, т.28, №8, с.1434.
35. Blau M., Keski-Vakkuri E., Niemi A.J. — Phys. Lett. B, 1990, vol.246, 1/2, p.92.
36. Szabo R.J., Semenoff G.W. — Nucl. Phys. B, 1994, vol.421, No.2, p.391.
37. Marinov M.S., Terentyev M.V. — Fortschr. Phys., 1979, vol.27, 11/12, p.511.
38. Egorov A.D., Sobolevsky P.I., Yanovich L.A. — Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications. Kluwer Ac. Publ., Dordrecht a.o., 1993.
39. Wiener N. — J. Math. and Phys., 1923, p.131; Proc. London Math. Soc., 1924, vol.22, No.6, p.454.
40. Yeh J. — Stochastic Processes and Wiener Integral. M.Dekker, New York, 1973.
41. Ковальчик И.М., Янович Л.А. — Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения. Минск: Наука и техника, 1989.
42. Klauder J.R. — Measure and Support in Functional Integration. In: Progress in Quantum Field Theory, Ed. Ezawa H. and Kamefuchi S., Elsevier Science Publ., 1986, p.31.
43. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. — Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
44. Cugliandolo L.F. et al. — Phys. Lett. B, 1990, vol.244, No.2, p.249.
45. Cugliandolo L.F. et al. — Phys. Lett. B, 1991, vol.253, No.1,2, p.90.
46. Хренников А.Ю. — Сиб. матем. ж., 1988, т.29, №4, с.180.
47. Ellicott P. et al. — Ann. Phys., 1991, vol.205, No.1, p.70.
48. Reisz T. — BI-TP 90/10, Bielefeld, 1990.
49. Янович Л.А. — Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск: Наука и техника, 1976.
50. Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А. — Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск: Наука и техника, 1985.
51. Pollock E.L., Runge K.J. — Lectures on Path Integral Computations. In: Lectures on Path Integration: Trieste 1991. Singapore: World Scientific, 1993, p.242.
52. Lobanov Yu.Yu. — New Approximation Formulas for Functional Integrals with Gaussian Measures. In: Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92. Singapore: World Scientific, 1993, p.26.
53. Петров В.А. — Ин-т математики АН БССР, №28(264), №29(265), Минск, 1986.
54. Grosche C., Steiner F. — Classification of Solvable Feynman Path Integrals. In: Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92. Singapore: World Scientific, 1993, p.276.
55. Albeverio S. et al. — BiBos 391/89, Bielefeld, 1989.
56. Cheng B.K. — Phys. Rev. A., 1987, vol.36, No.6, p.2964.

57. **McKeon D.G., Sherry T.N.** — *Int. J. Theor. Phys.*, 1993, vol.32, No.7, p.1105.
58. **Abraham F.F., Broughton J.Q.** — *Phys. Lett.*, 1987, vol.59, No.1, p.64.
59. **Tiedemann H.** — DESY 90-161, Hamburg, 1990.
60. **Gestrin G.N.** — *Inverse Problems*, 1991, vol.7, No.1, p.85.
61. **Bernido C.C.** — *Nucl. Phys. B*, 1989, vol.321, No.1, p.108.
62. **Kholodenko A.L.** — *Phys. Lett. A*, 1989, vol.138, No.1,2, p.13.
63. **Efimov G.V., Ganbold G.** — *Mod. Phys. Lett. A*, 1992, vol.47, p.4539.
64. **Mitrjushkin V.K., Zadorozhny A.M.** — *Phys. Lett. B*, 1987, vol.185, 3/4, p.377.
65. **Тепляков В.И.** — ДАН, 1994, т.334, №2, с.177.
66. **Inomata A., Zhu P.C.** — In: *Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92*. Singapore: World Scientific, 1993, p.136.
67. **Гельфанд И.М., Яглом А.М.** — УМН, 1956, т.11, №1, с.77.
68. **Кас М.** — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1949, vol.65, p.1.
69. **Далецкий Ю.Л.** — ДАН СССР, 1961, т.137, 2, с.268.
70. **Далецкий Ю.Л.** — ДАН СССР, 1960, т.134, 5, с.1013.
71. **Далецкий Ю.Л.** — УМН, 1962, т.17, 5, с.3.
72. **Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu.** — *Diff.Equations*, 1993, vol.29, No.9, p.1399.
73. **Lobanov Yu.Yu., Shahbagian R.R., Zhidkov E.P.** — In: *Colloquium on Differential Equations and Applications*, Budapest, 1991 (Abstracts), *J. Bolyai Math. Soc.*, p.24; JINR, E11-91-353, Dubna, 1991.
74. **Алимов А.И.** — ТМФ, 1972, т.2, №2, с.182.
75. **Евграфов М.А.** — ДАН СССР, 1971, 5, с.979.
76. **Ито К.** — *Вероятностные процессы*. М., 1960.
77. **Вентцель А.Д.** — *Курс теории случайных процессов*. М., 1975.
78. **Билушак Г.И.** — *Укр. матем. ж.*, 1987, т.39., 4, с.418.
79. **Lapidus M.L.** — *Stud. Appl. Math.*, 1987, vol.76, 2, p.93.
80. **Grieg R., Hersh R.** — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol.156, 2, p.405.
81. **Далецкий Ю.Л., Заплитная А.Т.** — *Укр. матем. ж.*, 1965, т.5, с.110.
82. **Alicki R., Makowiec D.** — *J.Phys. A (Math. Gen.)*, 1987, vol.20, 5, p.1075.
83. **Сторчак С.Н.** — ТМФ, 1993, т.94, №3, с.375.
84. **Сторчак С.Н.** — ТМФ, 1992, т.93, №1, с.17.
85. **Антонец М.А.** — ДАН, 1988, т.298, №1, с.11.
86. **Drozdov A.N.** — *Phys. Lett. A*, 1992, vol.171, 3/4, p.175.
87. **Gaveau B., Schulman L.** — *Nuovo Cim. D*, 1989, vol.11, 1/2, p.31.
88. **De-Angelis G.F., Serva M.** — *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992, vol.25, 24, p.6539.
89. **Hanggi P.** — In: *Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92*. Singapore: World Scientific, 1993, p.289.
90. **Foong S.K., Nakamura F.E.** — In: *Path Integrals from meV to MeV: Tutzing'92*. Singapore: World Scientific, 1993, p.268.
91. **Simon B.** — *Functional Integration and Quantum Physics*. New York: Acad. Press, 1979; **Roepstorff G.** — *Path Integral approach to Quantum Physics: an Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
92. **Glimm J., Jaffe A.** — *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. New York: Springer-Verlag, 1987.
93. **Anselmi D.** — *Phys. Rev. D*, 1993, vol.48, 2, p.680.
94. **Daubechies I. et al.** — *J. Math. Phys.*, 1987, vol.28, 1, p.85.
95. **Dorlas T.C.** — DIAS-STP-87-35, Dublin, 1987.
96. **Toms D.J.** — *Phys. Rev. D*, 1987, vol.35, 12, p.3796.

97. Леффельхольц Ю. — ОИЯИ, P2-87-386, Дубна, 1987.
98. Фрадкина Т.Е. — ЯФ, 1987, т.46, вып.1, с.309.
99. Garchynski W. — Phys. Lett. B, 1987, vol.198, 3, p.367.
100. Kupsch J. — Fortschr. Phys., 1987, vol.35, 5, p.415.
101. Lobanov Yu.Yu., Shahbagan R.R., Zhidkov E.P. — In: Programming and Mathematical Techniques in Physics. Singapore: World Scientific, 1994, p.25.
102. Фейнман Р., Хибс А. — Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968.
103. Creutz M., Freedman B. — Ann. of Phys., 1981, vol.132, p.427.
104. Shuryak E.V., Zhirov O.V. — Nucl. Phys., 1984, vol.B242, p.393.
105. Rozansky L. — Int. J. Mod. Phys. A, 1992, vol.31, p.7775.
106. Milstein A.I. — Phys. Lett. A, 1987, vol.122, 1, p.1.
107. Barut A.O. et al. — J. Phys. A: Math. Gen., 1987, vol.20, 18, p.6271.
108. Scher G., Smith M., Baranger M. — Ann. of Phys., 1980, vol.130, p.290.
109. Swanson D.R., Edwards D.O. — Phys. Rev. B, 1988, vol.37, 4, p.1539.
110. Behn U. — Functional Integral Method in the Theory of Electron Correlation. Preprint Karl-Marx-Univ., Leipzig, 1986.
111. Sloan J.H. — Nucl. Phys. B., 1988, vol.302, 2, p.349.
112. Carreau M. et al. — Ann. Phys., 1990, vol.204, 1, p.186.
113. Maddox J. — Nature, 1992, vol.358, p.707.
114. Cai J.M., Inomata A. — Phys. Lett. A, 1989, vol.141, 7, p.315.
115. Grosche C. — Phys. Lett. A, 1992, vol.165, 3, p.185.
116. De R. et al. — Phys. Rev. A, 1992, vol.46, 11, p.6869.
117. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P. — Evaluation of Quantum Mechanics Path Integrals by the Approximations Exact on a Class of Polynomial Functionals (Contribution to the Intern. JINR-CERN School of Physics, Varna, Bulgaria, 1987), JINR, E2-87-507, Dubna, 1987.
118. Greguš M., Lobanov Yu.Yu., Sidorova O.V., Zhidkov E.P. — J. Comput. Appl. Math., 1987, vol.20, p.247.
119. Барбашов Б.М. — ЖЭТФ, 1965, т.48, вып.2, с.607.
120. Schmidt M.G., Schubert C. — HD-THEP 94-32, Heidelberg, 1994.
121. Gockeler M. et al. — DESY 89-124, Hamburg, 1989.
122. De Angelis G., Serva M. — J.Phys. A: Math. Gen., 1990, vol.23, 18, p.965.
123. Ichinose T., Tamura H. — Progr. Theor. Phys. Suppl., 1987, No.92, p.144.
124. Fradkin E.S. et al. — IC 90/134, Trieste, 1990.
125. Gur H. — Found. Phys., 1991, vol.21, 11, p.1305.
126. Battle C. — Phys. Rev.D., 1989, vol.40, 6, p.1950.
127. Ikemori H. — Phys. Rev. D., 1989, vol.40, 10, p.3512.
128. Kochetov E.A. — Laser Physics, 1994, vol.4, 1, p.136.
129. Kolokolov I.V. — Ann. Phys., 1990, vol.202, 1, p.165.
130. Barcelos-Neto J., Das A. — Mod. Phys. Lett. A, 1990, vol.5, 30, p.2573.
131. Tremi T.F. — Can. J. Phys., 1990, vol.68, 1, p.96.
132. Inagaki T. — Mod. Phys. Lett. A, 1990, vol.5, 18, p.1423.
133. Harada K., Tsutsui I. — Phys. Lett. B., 1987, vol.183, 3/4, p.311.
134. Maatsuki T. — Phys. Rev. D, 1983, vol.28, 8, p.2107.
135. Umezawa M. — Phys. Rev. D, 1989, vol.39, 12, p.3672.
136. Mehta M.R. — Phys. Rev. D, 1991, vol.44, 4, p.1228.
137. Tsatsui I. — Phys. Rev. D, 1989, vol.40, 10, p.3543.

138. **Functional Integration, Geometry and Strings:** Proc. XXV Karpacz Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, 1989. Basel: Birkhauser, 1989.
139. Weinberg S. — UTTG-17-87, Austin, 1987.
140. Berkovits N. — Nucl. Phys. B, 1988, vol.304, 3, p.537.
141. Birmingham D., Torre C.G. — Imperial/TP/85-86/22, London, 1986.
142. Weisberger W.I. — Nucl. Phys. B, 1987, vol.284, 1, p.171.
143. Chaudhuri S., Kawai H., Henry Tye S.-H. — Phys. Rev. D, 1987, vol.36, 4, p.1148.
144. Hamada K.-J., Takao M. — KEK-TH-182, Ibaraki, 1987.
145. Das A. et al. — Mod. Phys. Lett. A, 1988, vol.3,8, p.759.
146. Mezincescu L. et al. — Nucl. Phys. B, 1989, vol.322, 1, p.127.
147. Berkovits N. — Nucl. Phys. B, 1990, vol.331, 3, p.659.
148. Fujikawa K. — RIK 87-20, Hiroshima, 1987.
149. Gamboa J., Ruiz-Altaba M. — CERN-TH 4912/87, Geneva, 1987.
150. Ganbold G., Efimov G.V. — Phys. Rev. B, 1994, vol.50, 12, p.3733.
151. Кочетов Е.А., Кулешов С.П., Смондырев М.А. — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.3, с.635.
152. Кочетов Е.А., Смондырев М.А. — ТМФ, 1990, т.85, 1, с.74.
153. Anselmi D. — IFUP-TH 18/91, Pisa, 1991.
154. Bernido C.C. — J. Phys. A: Math. Gen., 1993, vol.26,20, p.5461.
155. Maggiore M. — Phys. Lett. B., 1994, vol.333, 1/2, p.39.
156. Van Nieuwenhuizen P. — ITP-SB 87-8, Stony Brook, 1987.
157. Menotti P., Pelissetto A. — IFUP-TH 24/86, Pisa, 1986.
158. Bander M. — Preprint Univ. of California, No.86-16, Irvine, 1986.
159. Hatsuda M. et al. — ITP-SB-89-43, Stony Brook, 1989.
160. Brown J.D., York J.W., Jr. — Phys. Rev D, 1993, vol.47, 4, p.1420.
161. Laenen E., Van-Nieuwenhuizen P. — Ann. Phys., 1991, vol.207, 1, p.77.
162. Guven J., Ryan M.P. — Phys. Rev. D, 1992, vol.45, 10, p.3559.
163. Fukutaka H. — YITP/K 972, Kyoto, 1992.
164. Bershadsky M., Klebanov I.R. — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.65, 25, p.3088.
165. Bern Z. et al. — LA-UR 90-3172, Los Alamos, 1990.
166. Fukutaka H., Kashiwa T. — Progr. Theor. Phys., 1989, vol.82, 4, p.791.
167. Kiefer C. — Ann. Phys., 1991, vol.207, 1, p.53.
168. Linden N., Perry M.J. — Nucl. Phys. B, 1991, vol.357, 1, p.289.
169. Halliwell J.J. — NSF-ITP 88-127, Santa Barbara, 1988.
170. Halliwell J.J., Myers R.C. — NSF-ITP 89-124, Santa Barbara, 1989.
171. Calzetta E., Hu B.L. — Phys. Rev. D, 1987, vol.35, 1, p.495.
172. Hochberg D. — Nucl. Phys. B, 1989, vol.319, 3, p.709.
173. Farhi E., Gutmann S. — Ann. Phys., 1992, vol.213, 1, p.182.
174. Vanzo L. — J. Math. Phys., 1993, vol.34, 12, p.5625.
175. Carreau M. — J. Math. Phys., 1992, vol.33, 12, p.4139.
176. Колоколов И.В. — ИЯФ 93-12, Новосибирск, 1993.
177. Shabanov S.V. — Phys. Lett. B., 1991, vol.255, 3, p.398; JINR, E2-90-402, Dubna, 1990.
178. Blau S.K. — Ann. Phys., 1991, vol.205, 2, p.392.
179. Kondratiev Yu.G. — BiBos 446/90, Bielefeld, 1990.
180. Kijowski J., Rudolph G. — Nucl. Phys. B, 1989, vol.325, 1, p.211.
181. Belvedere L.V. et al. — Z. Phys. C, 1992, vol.56, 4, p.609.

182. **Alonso J.L. et al.** — *Int. J. Mod. Phys. A*, 1990, vol.5, 14, p.2839.
183. **Farhi E., Gutmann S.** — *Int. J. Mod. Phys. A*, 1990, vol.5, 15, p.3029.
184. **Fischer W. et al.** — *Ann. Phys.*, 1993, vol.227, 2, p.206.
185. **Kochetov E.A.** a) *JINR, E17-92-412, Dubna, 1992*; b) *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1992, vol.25, 2, p.411.
186. **Streit L.** — *UMa Mat* 10/92, Funchal, 1992.
187. **Fukui T.** — *RCNP 044, Osaka, 1992*.
188. **Weinstein M.** — *SLAC-PUB 5739, Stanford, 1992*.
189. **Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.** — Приближение эйконала для процессов высокоэнергетического рассеяния частиц. М.: Изд. Моск. Ун-та, 1977.
190. **Efimov G.V., Ganbold G.** — *Phys. Stat. Sol. B*, 1991, vol.168, p.165.
191. **Kashiwa T. et al.** — *KYUSHU HET-12, Fukuoka, 1994*.
192. **Dewey T.G.** — *Phys. Rev. A*, 1990, vol.42, 1, p.32.
193. **Sissakian A.N., Solovtsov I.L.** — *Phys. Lett. A*, 1991, vol.157, 4/5, p.261.
194. **Stump D.R.** — *Phys. Rev. A*, 1987, vol.36, 1, p.365.
195. **Moretti P.** — *J. Math. Phys.*, 1987, vol.28, 4, p.765.
196. **Bolz G.F., Serva M.** — *BiBoS 363/89, Bielefeld, 1989*.
197. **Физиев П.П.** — а) *ОИЯИ, P2-84-229, Дубна, 1984*; б) *Bulg. J. Phys.*, 1983, vol.10, 1, p.27.
198. **Drummond I.T., Horgan R.R.** — *Phys. Lett. B*, 1990, vol.242, 3/4, p.419.
199. **Боос Э.Э., Давыдычев А.И.** — *ТМФ*, 1991, т.89, 1, с.56.
200. **Алексеев А.И., Еднерал В.Ф.** — *ИФВЭ 87-118, Серпухов, 1987*.
201. **Adachi S.** — *Ann. Phys.*, 1989, vol.195, 1, p.45.
202. **Кройц М.** — *Кварки, глюоны и решетки. М.: Мир, 1987*.
203. **Gerdt V.P., Mitryushkin V.K., Zadorozhny A.M.** — *Phys. Lett. B*, 1986, vol.172, No.1, p.65.
204. **Lattice 93:** *Proc. Int. Symposium on Lattice Field Theory, Dallas, USA, 1993. North-Holland, 1994*.
205. **Ukawa A.** — *UTHEP 213, Ibaraki, 1990*.
206. **Kennedy A.D.** — *FSU-SCRI 89-47, Tallahassee, 1989*.
207. **Hoek J.** — *RAL 89-076, Chilton, 1989*.
208. **Sakai S., Iso H.** — *Phys. Rev. D*, 1987, vol.36, 8, p.2545.
209. **Matone M.** — *Phys. Lett. B*, 1987, vol.187, 1/2, p.159.
210. **Michael C., Teper M.** — *Phys. Lett. B*, 1987, vol.199, 1, p.95.
211. **Driver B.K.** — *Comm. Math. Phys.*, 1987, vol.110, 3, p.479.
212. **Wohlert R.** — *DESY 87-069, 87-069, Hamburg, 1987*.
213. **Wu Ch.M., Zhao P.Y.** — *Mod. Phys. Lett. A*, 1987, vol.2, 2, p.113.
214. **Cahill K. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1988, vol.210, 1/2, p.198.
215. **Горенштейн М.И., Могилевский О.А.** — *ЯФ*, 1987, т.46, вып.3, с.975.
216. **Van Baal P.** — *Phys. Lett. B*, 1989, vol.224, 4, p.397.
217. **Ben-Av R., Solomon S.** — *Int. J. Mod. Phys. A*, 1990, vol.5, 2, p.427.
218. **Laursen M.L.** — *ITFA 89-32, Amsterdam, 1989*.
219. **Alles B. et al.** — *IFUP-TH 23/90, Pisa, 1990*.
220. **Di Giacomo A. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1989, vol.224, 3, p.324.
221. **Booth S.P. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1992, vol.275, 3/4, p.424.
222. **Belyaev V.M.** — *CEBAF TH-94-11, Newport News, 1994*.
223. **Gockeler M. et al.** — *Nucl. Phys. B*, 1993, vol.404, 3, p.839.
224. **Kogut J.B. et al.** — *Phys. Lett. B*, 1991, vol.263, 1, p.101.

225. Catterall S. — ILL-(TH) 90-38, Urbana, 1990.
226. Pasquier V. — Nucl. Phys. B, 1988, vol.295, 4, p.491.
227. Pugh D.J.R., Teper M. — Phys. Lett. B, 1989, vol.224, 1/2, p.159.
228. Aoki S. et al. — Phys. Lett. B, 1990, vol.244, 2, p.301.
229. Gonzales-Arroyo A. — Phys. Lett. B, 1987, vol.193, 4, p.499.
230. Mack G. — DESY 85-111, Hamburg, 1985.
231. Karanikas A.I., Ktorides C.N. — Phys. Rev. D, 1987, vol.35, 4, p.1478; 1484.
232. Bern Z. et al. — Nucl. Phys. B, 1987, vol.284, 1, p.1; 35.
233. Chan H.S. — LBL-23148, Berkeley, 1987.
234. Kalivas N.G. — Phys. Rev. D, 1987, vol.36, 4, p.1210.
235. Sadun L. — Z. Phys. C, 1987, vol.36, p.407.
236. Cahill K., Reeder R. — Phys. Lett., 1984, vol.136B, 1/2, p.77.
237. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. — Мат. моделирование, 1989, т.1, вып.8, с.139.
238. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — ОИЯИ, P11-85-765, Дубна, 1985.
239. Саймон Б. — Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
240. Cameron R.H. — Duke Math. J., 1951, vol.18, 1, p.111.
241. Гельфанд И.М., Ченцов Н.Н. — ЖЭТФ, 1956, т.31, вып.6, с.1106.
242. Владимиров В.С. — УМН, 1960, т.15, вып.4, с.129.
243. Тобиас Т. — Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1965, 2, с.214.
244. Konheim A.G., Miranker W.L. — Math. Comput., 1967, vol.21, p.49.
245. Fosdick L.D., Jordan H.F. — J. Comp. Phys., 1968, vol.3, 1, p.1.
246. Finlayson H.C. — a) Canad.J.Math., 1967, vol.19, 1, p.58; b) Trans.Amer.Math.Soc., 1968, vol.132, 2, p.461; c) Pacific J. Math., 1970, vol.34, 1, p.61.
247. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — ОИЯИ, P11-83-867, Дубна, 1983.
248. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — ОИЯИ, P11-84-775, Дубна, 1984.
249. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Сидорова О.В. — Кр. сообщ. ОИЯИ, 1984, №4, с.28.
250. Lobanov Yu.Yu. et al. — J.Comput.Appl.Math., 1990, vol.29, p.51.
251. Biswas S.N. et al. — J.Math.Phys., 1973, vol.14, p.1190.
252. Ивлев Б.И. — ЖЭТФ, 1988, т.94, вып.7, с.333.
253. Доброхотов С.Ю., Колокольцев В.Н. — ТМФ, 1993, т.94, вып.3, с.426.
254. Gangopadhyaya A. et al. — Phys.Rev.A, 1993, vol.47, 4-A, p.2720.
255. Овчинников Ю.Н. — ЖЭТФ, 1998, т.94, вып.5, с.365.
256. Shanley P.E. — Phys. Lett. A, 1989, vol.141, 7, p.331.
257. Kleinert H. — Phys.Lett.A, 1994, vol.190, 2, p.131.
258. Konwent H. — Acta Phys.Pol.A, 1987, vol.71, 4, p.637.
259. Leo K. et al. — Phys.Rev.Lett., 1991, vol.66, 2, p.201.
260. Вайнштейн А.И. и др. — УФН, 1982, т.136, вып.4, с.553.
261. Раджараман Р. — Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
262. Leinaas J.M., Olaussen K. — Ann.Phys., 1989, vol.189, 2, p.243.
263. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. — ОИЯИ, P2-86-433, Дубна, 1986.
264. Blankenbecler R. et al. — Phys.Rev.D, 1980, vol.21, p.1055.
265. Shuryak E.V. — Phys.Rep., 1984, vol.115, 4/5, p.151.
266. Berg B., Lüscher M. — Nucl.Phys., 1981, vol.B190, 2, p.412.
267. Camprostrini M. et al. — Phys.Lett.B, 1988, vol.212, 2, p.206.

268. Di-Giacomo A., Vicari E. — Phys.Lett.B, 1992, vol.275, 3/4. p.249.
269. Lüscher M. — a) Nucl.Phys., 1982, vol.B205, 3, p.483; b) Comm.Math. Phys., 1982, vol.85, 1, p.39.
270. Woit P. — Phys. Rev. Lett., 1983, vol.51, 8, p.638.
271. Polonyi J. — Phys.Rev., 1984, vol.D29, 4, p.716.
272. Fox I.A. et al. — Phys. Rev. Lett., 1985, vol.54, 8, p.749.
273. Teper M. — RAL-85-089, Chilton, 1985.
274. Bhanot G. et al. — Nucl. Phys., 1984, vol.B230, p.291.
275. Iwasaki Y., Yoshie T. — Phys. Lett., 1984, vol.B245, 2, p.259.
276. Veneziano G. — Nucl. Phys., 1979, vol.B159, p.213.
277. Di Vecchia P. et al. — Nucl. Phys., 1981, vol.B181, p.318.
278. Narison S. — CERN TH-3796, Geneva, 1984.
279. Laursen M.L., Schierholz G., Wiese U.-J. — DESY, 85-062, Hamburg, 1985.
280. Göckeler M. et al. — DESY 85-142, Hamburg, 1985.
281. Рид М., Саймон Б. — Методы современной математической физики. М.: Мир, 1982, т.4.
282. Займан Дж. — Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974.
283. Хуанг К. — Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.
284. Bunk B., Wolff U. — Nucl. Phys., 1983, vol.B215, 4, p.495.
285. Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu., Shakhbagyan R.R. — Math. Modelling and Computational Experiment, 1993, 1, p.65.
286. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю., Шахбагян Р.Р. — Мат. моделирование, 1993, т.5, вып.12, с.61.
287. Lobanov Yu.Yu. et al. — In: Algorithms and Programs for Solution of Some Problems in Physics, vol.6, KFKI-1989-62/M, Budapest, 1989, p.1.
288. Calogero F. — J.Math.Phys., 1969, vol.10, p.2191.
289. Camiz P. et al. — J.Math.Phys., 1971, vol.12, p.2040.
290. Goovaerts M.J. — J. Math. Phys., 1975, vol.16, p.720.
291. Grimm R.C., Storer R.G. — J. Comp. Phys., 1971, vol.7, 1, p.134.
292. Turbiner A. — Phys. Lett. B, 1994, vol.320, 3/4, p.281.
293. Gorsky A., Nekrasov N. — Nucl. Phys. B, 1994, vol.414, 1/2. p.213.
294. Negele J.W. — J.Stat.Phys., 1986, vol.43, 5/6. p.991.
295. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P., Shahbagian R.R. — In: Math. Modelling and Applied Mathematics. Elsevier (North-Holland), 1992, p.273.
296. Baker R.A. et al. — Phys. Rev., 1962, vol.125, p.1754.
297. Herndon R.C., Tang Y.C. — Nucl. Phys., 1967, A93, p.692.
298. Rosati S., Barbi M. — Phys. Rev., 1966, vol.147, p.730.
299. Banville M., Kunz P.D. — Can. J. Phys., 1966, vol.44, p.2095.
300. Homan D.H., Kok L.P. — Nucl. Phys., 1968, vol.A117, p.231.
301. Kalos M.H. — Phys. Rev., 1962, vol.128, p.1791.
302. Carlson J. — Phys.Rev. C, 1987, vol.36, 5, p.2026.
303. Gilerak R. — Rep. Math. Phys., 1986, vol.24, 2, p.145.
304. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P. — JINR, E5-88-659, Dubna, 1988.
305. Lobanov Yu.Yu., Zhidkov E.P., Shahbagian R.R. — In: 5-th Intern. Symposium on Selected Topics in Statistical Mechanics, Dubna, 1989. Singapore: World Scientific, 1990, p.469.
306. Lobanov Yu.Yu., Zeinalova O.V., Zhidkov E.P. — JINR, E11-91-352, Dubna, 1991.
307. Brown L. — Quantum Field Theory. Cambridge Univ. Press, 1992.

УДК 612.017, 1.014.482:519.86

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИОНИЗИРУЮЩЕЙ РАДИАЦИИ НА ИММУННУЮ СИСТЕМУ МЛЕКОПИТАЮЩИХ

О.А.Смирнова

Научно-исследовательский испытательный центр радиационной безопасности
космических объектов, Москва

Сделан обзор работ, в которых методы математического моделирования использовались для исследования влияния ионизирующей радиации на иммунную защиту млекопитающих, а также на развитие аутоиммунных болезней, в результате которых происходит разрушение собственных тканей организма. Модели представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений, переменными которых являются концентрации основных компонентов гуморальной иммунной реакции и клеточной аутоиммунной реакции соответственно. Доза острого и мощность дозы хронического облучения входят в модели в качестве переменных параметров. Численное и аналитическое (там, где это было возможно) исследование моделей показало их адекватность экспериментальным и клиническим данным. В рамках моделей удалось не только объяснить целый ряд закономерностей, но и сделать некоторые предсказания. В частности, об эффективности экранирования тимуса в целях предотвращения развития аутоиммунных болезней и о возможности обострения последних при увеличении радиационного фона. Модели могут быть использованы при планировании и анализе экспериментов по изучению иммунных и аутоиммунных процессов у млекопитающих, подвергающихся различным режимам облучения. Полученные при исследовании моделей формулы для расчета критических значений доз и мощностей доз радиации, превышение которых приводит к опасному течению аутоиммунных реакций, могут найти применение при корректировке норм радиационной безопасности. Таким образом, представленные в обзоре работы демонстрируют плодотворность использования методов математического моделирования при исследовании действия радиации на живые организмы.

The survey is devoted to applications of mathematical modeling for investigation of the ionizing radiation effects on the humoral immunity of mammals and on the development of autoimmune diseases resulting in destruction of the organism tissues. The models are systems of nonlinear differential equations whose variables are represented by concentrations of the basis components of the humoral immune reaction and of the cellular

autoimmune reaction, accordingly. The radiation dose and the dose rate of acute and chronic exposures are the variable parameters of the models. The numerical and analytical (where it was available) investigations of the models reveal their consistency with the experimental and clinical data. In the framework of the models, not only a series of particularities were explained but also some predictions were made, for example, about the efficiency of the thymus shielding for preventing the autoimmune diseases and about the possibility of their sharpening under increased radiation background. The models can be used for planing and analyzing the experiments aimed to study of the immune and autoimmune processes in mammals at different conditions of irradiation. In the framework of the models the formulas are obtained that enables to calculate the critical values of the dose and the dose rates the exceeding of which entails the dangerous autoimmune reactions. These formulas can be used for corrections of the radiation safety standards. Thus, the papers presented in the survey exhibit the efficiency of applying the methods of the mathematical modeling for investigating the radiation effects on mammalian organism.

ВВЕДЕНИЕ

Характерной чертой современного научного развития является тенденция к взаимному проникновению методов исследования фундаментальных наук и создание на этой основе новых направлений научных поисков. На стыке биологии, физики, математики и химии возникла биофизика. Одним из ее разделов является математическое моделирование биологических систем [1—9].

В настоящее время методы математического моделирования все шире применяются в исследованиях влияния ионизирующей радиации на организм млекопитающих. Важность этой проблемы связана, прежде всего, с неблагоприятной экологической обстановкой, сложившейся в ряде регионов Земли вследствие аварий на АЭС и проводившихся ранее испытаний атомного оружия в атмосфере. Кроме этого, в результате развития атомной энергетики, применения радиоактивных веществ в промышленности, науке, медицине в последние десятилетия значительно расширился круг лиц, имеющих по роду своей профессиональной деятельности контакт с источниками ионизирующего излучения. Проблема изучения последствий облучения встает и при разработке программы обеспечения безопасности при длительных космических полетах.

Актуальность использования математического моделирования в решении этой проблемы обусловлена следующим. При построении модели проводится систематизация, обобщение, анализ экспериментальных наблюдений и имеющихся теорий и дается причинно-следственная формулировка биологической или биофизической гипотезы, лежащей в основе модели. Исследование моделей позволяет выделить ключевые переменные и пара-

метры, оценить относительную значимость учтенных при моделировании регуляторных механизмов, определить бифуркационные значения коэффициентов, задающих границы различного динамического поведения систем. Все это имеет большое теоретическое значение. Кроме этого, математические модели дают возможность прогнозировать на количественном уровне реакцию организма млекопитающих на различные режимы облучения. Это особенно важно, когда экспериментальное воспроизведение соответствующего режима облучения затруднено или когда опыт требует значительной затраты времени и ресурсов.

Настоящий обзор посвящен работам, в которых методы математического моделирования были использованы для изучения влияния облучения на жизненно важную систему организма млекопитающих — иммунитет. Причем основное внимание уделено математическим моделям динамики гуморального иммунитета (разд.1), а также моделям аутоиммунных болезней у облученных и необлученных млекопитающих (разд.2).

1. РАДИАЦИЯ И ИММУННАЯ ЗАЩИТА

1.1. Современные представления об иммунитете. Одним из проявлений действия ионизирующего излучения на млекопитающих является снижение защитных функций их организма по отношению к инфекциям. Именно экзо- и эндоинфекции, как правило, осложняют течение лучевой болезни, а в ряде случаев вызывают гибель облученных млекопитающих [10]. Эти неблагоприятные последствия облучения обусловлены пострадикационными изменениями иммунитета — системы защиты млекопитающих и других позвоночных от генетически чужеродных веществ (антигенов) [11—16]. Антигенами могут быть макромолекулы (белки, углеводы, нуклеиновые кислоты), бактерии, вирусы, клетки чужеродных органов и тканей, клетки злокачественных опухолей. Попадая в организм, антиген сначала вызывает неспецифические реакции. К месту его скопления устремляются фагоциты — гранулоциты крови и тканевые макрофаги. Эти клетки способны поглощать молекулярные антигены, вирусы и даже целые бактериальные клетки, а также разлагать их на отдельные фрагменты.

К специфическим иммунным реакциям относят, прежде всего, гуморальный иммунитет. Гуморальный иммунитет заключается в выработке определенными клетками организма белковых молекул — антител. Последние способны специфически связывать соответствующий антиген и ускорять его вывод из организма.

В настоящее время известны пять основных классов антител (иммуноглобулинов), обозначаемых *IgG*, *IgM*, *IgA*, *IgD*, *IgE*. Они отличаются друг от друга по химическому строению и функциям. Наиболее важную роль в

иммунных реакциях, развивающихся в организме при инфекционных заболеваниях, играют иммуноглобулины первых двух классов. Молекула *IgG* состоит из четырех цепей (двух идентичных тяжелых и двух идентичных легких), соединенных между собой дисульфидными связями. Каждая половина молекулы содержит антигенсвязывающий участок (активный центр антитела). Он образован небольшой областью легкой и тяжелой цепей и представляет собой мелкий «кратер», в который входит часть молекулы антигена (антигенная детерминанта) при образовании комплексов антиген — антитело. Молекулы *IgG* наиболее эффективны при нейтрализации токсинов, вырабатываемых болезнетворными организмами. Молекула *IgM* состоит из десяти легких и десяти тяжелых цепей. Число активных центров равно десяти. Однако только пять из них способны активно соединяться с антигеном. Антитела *IgM* играют существенную роль на начальных этапах инфекционных заболеваний.

Величиной, характеризующей способность антител связывать антигены, является константа ассоциации *K*. Она равна отношению констант скоростей прямой и обратной реакции взаимодействия антигенной детерминанты и активного центра антитела при образовании комплекса антиген — антитело.

Общепринятой теорией образования антител является клонально-селекционная теория Ф.Бернета [11]. В соответствии с данной теорией в организме взрослых млекопитающих существует популяция «антигенчувствительных» клеток. Только небольшая их доля (10^{-5} часть от общего количества) может быть стимулирована тем или иным антигеном. После стимуляции «антигенчувствительные» клетки (малые лимфоциты) трансформируются в быстро делящиеся бласт-клетки. Деление (пролиферация) последних сопровождается развитием в формы с все более и более совершенным аппаратом белкового синтеза. Конечным этапом развития является зрелая плазматическая клетка, которая не делится, с высокой скоростью вырабатывает антитела и через определенный промежуток времени погибает.

Исследования показали, что «антигенчувствительные» клетки — это потомки стволовых костномозговых клеток, ставших на путь дифференцировки в сторону лимфоидной линии кроветворения и прошедших затем «обучение» в сумке Фабрициуса у птиц и в аналогичном органе у млекопитающих. Эти лимфоциты называют *B*-клетками. *B*-лимфоциты несут на своей поверхности рецепторы. Последние представляют собой молекулы антител определенных классов или их фрагменты. В среднем на *B*-клетке имеется 10^5 рецепторов. Экспериментальные наблюдения свидетельствуют о том, что *B*-лимфоциты не являются инертными клетками в отношении синтеза иммуноглобулинов в отсутствие антигена. В *B*-лимфоцитах постоянно вырабатываются иммуноглобулины. Причем часть из них сек-

ретируется наружу как антитела, а часть становится поверхностными рецепторами, которые, в свою очередь, также могут отделяться от поверхности клетки. Однако скорость выработки антител у *B*-лимфоцитов значительно меньше, чем у плазматических клеток. Следует отметить, что константы ассоциации рецепторов *B*-клетки и синтезированных ею и ее потомками антиген совпадают.

Считается доказанным, что стимуляция *B*-лимфоцита, в результате которой он вступает в фазу интенсивной пролиферации, выражается в связывании некоторого числа рецепторов на его поверхности с соответствующим антигеном. Есть основание полагать, что антиген продолжает оказывать стимуляцию в течение всего процесса деления *B*-клеток.

«Доставка» антигена к иммунокомпетентным *B*-лимфоцитам может происходить как без участия, так и с участием других клеток — макрофагов (*A*-клеток) и *T*-лимфоцитов-помощников. При этом антиген называется, соответственно, *T*-независимым или *T*-зависимым. *T*-помощники, как и *B*-клетки, являются потомками стволовых клеток костного мозга, вставших на путь дифференцировки в сторону лимфоидной линии. Однако после выхода из костного мозга эти лимфоциты проходят «обучение» в иммунном органе — тимусе, который называют также вилочковой железой. Помимо *T*-помощников в регуляции гуморального иммунного ответа на *T*-зависимые антигены участвуют *T*-лимфоциты-супрессоры, запрещающие стимуляцию иммунокомпетентных клеток антигеном. Иммунная система находится также под влиянием нервных, эндокринных и медиаторных воздействий.

Синтез антител происходит в лимфоидных органах. К ним относятся селезенка, лимфатические узлы, пейеровы бляшки, легкие, аппендикс. В дальнейшем антитела переходят в кровь. Динамика накопления антител в крови имеет четыре характерные фазы: 1) латентный период, в течение которого антитела не обнаруживаются (лаг-фаза); 2) фаза экспоненциального увеличения концентрации антител (лог-фаза); 3) плато — период, когда концентрация антител поддерживается на высоком уровне; 4) фаза падения концентрации антител. Латентный период обусловлен временем, необходимым для образования и выхода в кровь такого количества антител, которое бы превысило порог чувствительности метода измерения концентрации антител. Другие фазы являются результатом наложения друг на друга нескольких процессов. К ним относятся деление клеток, увеличение скорости синтеза антител отдельными клетками, стимуляция новых клеток, естественный распад молекул антител, вывод антител в составе комплексов антиген — антитело, гибель зрелых плазматических клеток.

Динамика накопления антителообразующих клеток сходна с рассмотренной выше динамикой антител. Латентный период определяется временем, необходимым для образования достаточного количества клеток, интенсивно синтезирующих антитела. Фаза роста обусловлена делением

клеток, притоком их из других лимфоидных органов, вовлечением в деление новых «антигенчувствительных» клеток, а фаза падения — гибелью антителообразующих клеток.

Основные параметры иммунного ответа — максимальные концентрации антител и антителообразующих клеток, время достижения этих максимумов — зависят от большого количества разнообразных факторов. Но определяющим является антиген. Ответ будет тем интенсивнее, чем больше количество введенного антигена. (Это справедливо только до определенного предельного уровня его начальной концентрации). На интенсивность иммунного ответа существенно влияет и тот факт, контактировал ли раньше организм с данным антигеном. Если введение антигена повторное, то максимальная концентрация антител, как правило, на один-два порядка выше максимальной концентрации антител в первичном ответе на то же количество антигена, а продолжительность латентного периода сокращена. Способность организма к усиленному и ускоренному ответу при повторной встрече с антигеном названа иммунологической памятью. Последняя сохраняется у млекопитающих длительное время, иногда в течение всей жизни. Полагают, что иммунологическая память обусловлена увеличением числа клеток, способных воспринимать стимул данного антигена.

К специфическим иммунным реакциям относят также клеточный иммунитет. Клеточные формы иммунного ответа связаны с функционированием *T*-лимфоцитов-эффекторов. Они способны распознать антиген, ответить на стимуляцию размножением, а затем стать «киллерами» — клетками, уничтожающими чужеродные антигенные субстанции. Клеточный иммунитет имеет место при гиперчувствительности замедленного типа, при отторжении трансплантатов и опухолей, при противовирусной иммунной реакции, а также при аутоиммунных заболеваниях. Последние возникают, когда нарушается естественная невосприимчивость организма к собственным компонентам. Подробно проблема аутоиммунитета будет обсуждена в разд.2.

1.2. Математические модели иммунитета у необлученных млекопитающих. В течение последних двух с половиной десятилетий методы математического моделирования использовались для исследования широкого спектра иммунологических процессов и явлений. Поэтому можно уже говорить о создании нового направления иммунологической науки — математической иммунологии. Первыми в этой области были исследования Дж.Бэлла (США) [17—20], наши совместные с Н.В.Степановой [21—26], М.Йилека и его коллег (ЧСФР) [27—30] и А.М.Молчанова [31,32]. Они были выполнены практически в одно время — в начале 70-х годов. В дальнейшем большой вклад в развитие этого направления внесли Г.И.Марчук и его соратники и ученики [33—44], а также Дж.Бэлл, К.Бруни, Р.Молер и их сотрудники [45—57]. Интересные исследования провели М.В.Волькен-

штейн и его ученики [58—61], В.М.Глушков с сотрудниками [62] и другие авторы [7,63—66].

В некоторых из перечисленных работ явление иммунитета рассматривалось на уровне отдельных молекул при описании реакции антиген — антитело или отдельных клеток при воспроизведении взаимодействия антигенпрезентирующих клеток и лимфоцитов, *T*- и *B*-лимфоцитов. Наибольший интерес представляют собой модели, в рамках которых исследуется иммунитет на уровне целостного организма, а именно: иммунитет к инфекциям, опухолевый иммунитет, иммунитет при СПИДе. С помощью построенных моделей удалось на количественном уровне проверить справедливость ряда иммунологических теорий, объяснить многие экспериментальные закономерности и клинические наблюдения, предложить тактику лечения некоторых заболеваний. Следует отметить, что в рамках перечисленных моделей изучались те или иные аспекты иммунитета у млекопитающих, находящихся в благоприятных с точки зрения экологии условиях. В то же время в литературе имеются модели, которые описывают динамику системы гуморального иммунитета как у необлученных, так и у облученных млекопитающих [67—80]. Они представлены ниже более подробно.

1.3. Модель гуморального иммунного ответа на *T*-независимый антиген у необлученных млекопитающих. В работах [67,68] предложена математическая модель, описывающая гуморальный иммунный ответ на растворимые белковые антигены — наиболее изученную в иммунологии реакцию. При ее разработке авторы ограничились рассмотрением первичного иммунного ответа на растворимый *T*-независимый антиген, когда роль *T*-лимфоцитов, макрофагов, клеток иммунологической памяти можно не учитывать.

В основу модели положена клонально-селекционная теория Ф.Бернета [11], согласно которой в организме млекопитающих имеется лишь небольшое количество *B*-лимфоцитов, способных распознавать определенный антиген. Считалось, что данные клетки поступают в кровь из костного мозга, а по прошествии некоторого времени погибают. Предполагалось также, что с момента выхода из костного мозга *B*-лимфоциты могут проходить все стадии развития, включая тупиковую плазматическую клетку, без антигенной стимуляции, причем в данном случае этот процесс не связан с размножением *B*-клеток [73]. В соответствии с имеющимися данными [74,75] считалось, что процесс созревания *B*-клетки сопровождается увеличением числа антителоподобных рецепторов на ее поверхности, а затем уменьшением этого числа непосредственно перед превращением в плазматическую клетку. Считалось также, что соединение клеточных рецепторов с молекулами антигена может приводить либо к размножению клетки, либо к ее гибели в зависимости от числа связанных рецепторов на клетке. В соот-

ветствии со сделанными предположениями динамика изменения концентраций преддетерминированных к производству антител определенной специфичности В-клеток, находящихся на n различных стадиях созревания ($x_1, \dots, x_n$), плазматических клеток (x_{n+1}), молекул антител (x_{n+2}) и антигенных детерминант (x_{n+3}) описана системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = \eta - kx_1 + P_1(R_1)k_P x_1, \quad (1.1)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = k(x_{i-1} - x_i) + P_i(R_i)k_P x_i \quad (i = 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = kx_n - k_z x_{n+1}, \quad (1.3)$$

$$\frac{dx_{n+2}}{dt} = h x_{n+1} - k_a x_{n+2} - \sigma k_c x_{n+2}, \quad (1.4)$$

$$\frac{dx_{n+3}}{dt} = -k_g x_{n+3} - k_c' x_{n+3}', \quad (1.5)$$

где

$$\sigma = \sum_{l=1}^m C_m^l r^l (1-r)^{m-l}, \quad (1.6)$$

$$x_{n+3}' = (x_{n+3} - L - r'R). \quad (1.7)$$

Блок-схема системы (1.1)—(1.5) представлена на рис.1.1.

В уравнении (1.1) коэффициент η — скорость притока преддетерминированных клеток из костного мозга, k — удельная скорость перехода клетки из одной возрастной группы в другую, равная числу возрастных групп n , деленному на время развития В-клетки. Параметры $P_i(R_i)$ в уравнениях (1.1), (1.2) описывают исход взаимодействий рецепторов на клетке с молекулами антигена. Если число связанных рецепторов R_i на клетках группы i меньше некоторого порогового значения F_1 , то стимуляции к размножению не происходит, то есть $P_i = 0$. Если $F_1 \leq R_i \leq F_2$, то клетка размножается с постоянной удельной скоростью k_P , то есть $P_i = 1$. Если $R_i > F_2$, то все клетки группы i погибают: $x_i = 0$. В модели полагалось, что

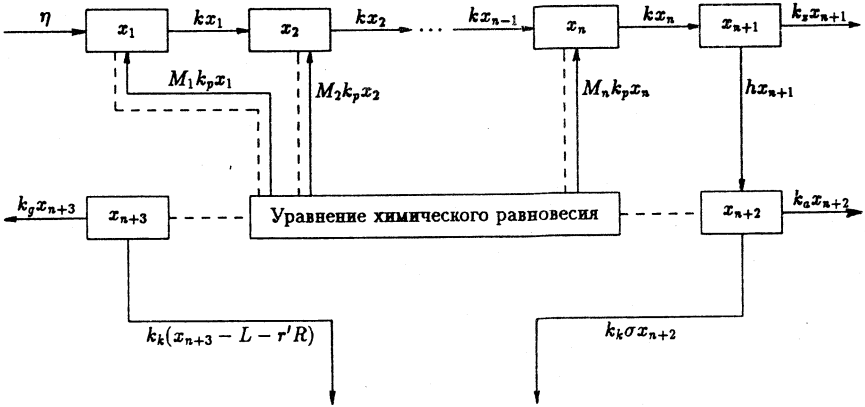


Рис. 1.1. Блок-схема системы (1.1)—(1.5). Стрелками обозначены скорости изменения концентраций В-лимфоцитов ($x_1, \dots, x_n$), плазматических клеток (x_{n+1}), молекул антител (x_{n+2}), антигенных детерминант (x_{n+3}). Направления стрелок внутрь и наружу прямоугольников указывают на знаки обозначаемых ими скоростей — соответственно положительные и отрицательные. Пунктирными линиями обозначены потоки информации

клетки одной возрастной группы i имеют одинаковое число рецепторов ξ_i , определяемое ступенчатой функцией

$$\xi_i = \xi_1 \exp [\alpha(i - 1)], \quad (i = 1, \dots, s), \quad (1.8)$$

$$\xi_j = \xi_s \exp [\beta(s - j)], \quad (j = s + 1, \dots, n). \quad (1.9)$$

Параметр k_z в уравнении (1.3) описывает удельную скорость гибели плазматических клеток, h в уравнении (1.4) — скорость синтеза ими молекул антител. В уравнениях (1.4), (1.5) коэффициенты k_a, k_g — удельные скорости естественного выведения молекул антител и антигена, а k_c — удельная скорость выведения их комплексов. Параметр σ в (1.4) характеризует долю молекул антител, у которых хотя бы один из m активных центров связан с антигеном, в то время как доля занятых активных центров на молекуле антигена равна r (см. уравнение (1.6)). В (1.5) x'_{n+3} — концентрация антигенных детерминант, связанных с активными центрами антител. Она определяется уравнением (1.7), в котором L — концентрация свободных антигенных детерминант; $r'R$ — концентрация антигенных детерминант, связанных с клеточными рецепторами; r' — доля клеточных

рецепторов, связанных с антигенными детерминантами; $R = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ — суммарная концентрация клеточных рецепторов.

Величины r , r' и $R_i = \xi_i r'$ рассчитывались в модели по известным из иммунохимии формулам [16]:

$$r = \frac{KL}{1 + KL}, \quad r' = \frac{K'L}{1 + K'L}, \quad R_i = \xi_i \frac{K'L}{1 + K'L}, \quad (1.10)$$

где K и K' — константы ассоциации в реакции взаимодействия свободных антител и клеточных рецепторов с антигенными детерминантами. Концентрация свободных антигенных детерминант L находилась из уравнения химического равновесия между антигенными детерминантами, активными центрами антител и клеточными рецепторами [16]:

$$x_{n+3} = L \left(1 + \frac{mKx_{n+2}}{1 + KL} + \frac{K'R}{1 + K'L} \right). \quad (1.11)$$

При нулевой концентрации антигена ($x_{n+3} = 0$) уравнения (1.1)—(1.4) представляют собой модель динамики иммунокомпетентных лимфоцитов, плазматических клеток и антител в отсутствие антигенного стимула. Уравнения (1.1)—(1.4) имеют единственное устойчивое стационарное решение

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \eta/k, \quad (i = 1, \dots, n), \\ \bar{x}_{n+1} &= k\bar{x}_n/k_z = \eta/k_z, \\ \bar{x}_{n+2} &= h\bar{x}_{n+1}/k_a = h\eta/(k_z k_a) = h\bar{k}_i/(k_a k_z). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Стационарные концентрации $\bar{x}_i (i = 1, \dots, n)$, $\bar{x}_{n+1}$, $\bar{x}_{n+2}$ можно отождествить с концентрациями иммунокомпетентных лимфоцитов определенной специфичности, находящихся на n различных этапах своего развития, их потомков — плазматических клеток и нормальных антител той же специфичности у неиммунизированных млекопитающих. Этот результат модели согласуется с экспериментальными наблюдениями [15, 76, 77], которые свидетельствуют о том, что в крови млекопитающих присутствуют нормальные антитела, то есть антитела к антигенам, с которыми организм ранее не встречался, а в лимфоидных органах находятся клетки, способные вырабатывать антитела без соответствующего антигенного стимула.

Разработанная модель исследовалась численно. Уравнения (1.1)—(1.5) решались методом Рунге-Кутты, а уравнение (1.11) — методом касательных Ньютона. В рамках модели имитировалась динамика первичного иммунного ответа мышей линии СВА на внутрибрюшинное введение различных количеств T -независимого антигена — капсульного антигена чумного

микроба. Значения исходных параметров и начальные условия определялись на основе литературных данных, а также экспериментальных результатов, полученных профессором М.И.Леви и его сотрудниками [78,79]. В частности, начальные условия для концентраций иммунокомпетентных лимфоцитов, находящихся на различных этапах своего развития, рассчитывались в модели, исходя из концентрации нормальных антител к чумному микробу у мышей ($\bar{x}_{n+2}$), которая была измерена с помощью сверхчувствительных серологических реакций. При этом были использованы следующие формулы:

$$x_i(0) = \bar{x}_i = k_z k_a \bar{x}_{n+2} / (kh), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.13)$$

$$x_{n+1}(0) = \bar{x}_{n+1} = k_a \bar{x}_{n+2} / h. \quad (1.14)$$

По величине $\bar{x}_{n+2}$ в модели была также определена скорость притока иммунокомпетентных клеток из костного мозга

$$\eta = k_z k_a \bar{x}_{n+2} / h. \quad (1.15)$$

Величины параметров и начальных условий приведены в [67,68].

Количество n различных возрастных групп B -клеток было выбрано равным 44. Как показали исследования, увеличение числа n не приводит к существенным изменениям предсказаний модели, а лишь увеличивает время счета на ЭВМ.

В процессе исследования модели на ЭВМ варьировались граничные значения F_1 и F_2 числа занятых антигеном рецепторов на клетке, при котором происходит стимуляция к размножению. Лучшее согласие с результатами экспериментов было получено при $F_1 = 10^3$ и $F_2 = 10^5$. Эти величины соответствуют оценкам, найденным при анализе опытов, в которых иммунизация проводилась очень малыми и очень большими количествами капсульного антигена чумного микроба [67,68].

Система (1.1)–(1.5) решалась при различных начальных условиях для концентрации антигена. Результаты численного расчета модели для двух значений начальных концентраций антигена представлены на рис.1.2, 1.3. На них отражена динамика изменения числа антителообразующих клеток АОК, молекул антител Ат и антигена Аг. На этих же графиках приводятся данные опытов по внутрибрюшинной иммунизации мышей линии *СВА* капсульным антигеном чумного микроба. Это средние значения и среднеквадратичные отклонения числа АОК в селезенке, а также молекул антигена и антител в крови животных, измеренные в различные сроки после иммунизации. Следует отметить, что в опытах для определения концентраций антител и антигенов в крови использовались серологические

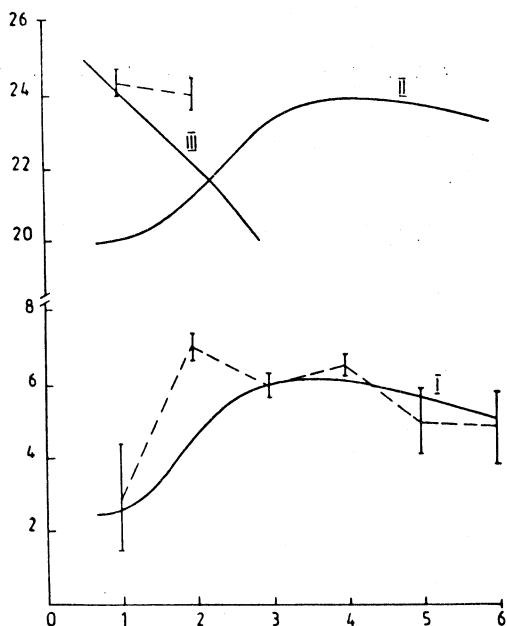


Рис. 1.2. Динамика изменения анти-телообразующих клеток АОК (I), молекул антител Ат (II) и антигена Аг (III) в ходе иммунного ответа на 10^{12} молекул капсульного антигена чумного микроба. Пунктирная линия — эксперимент, сплошная линия — расчет по модели. По оси абсцисс — время после иммунизации в сутках, по оси ординат — натуральный логарифм от числа АОК, Ат, Аг

реакции. Они позволяют измерять только избыток антител над антигеном или избыток антигена над антителами. Поэтому опытные данные по динамике антигена имеются для первых нескольких дней иммунного ответа, когда уро-

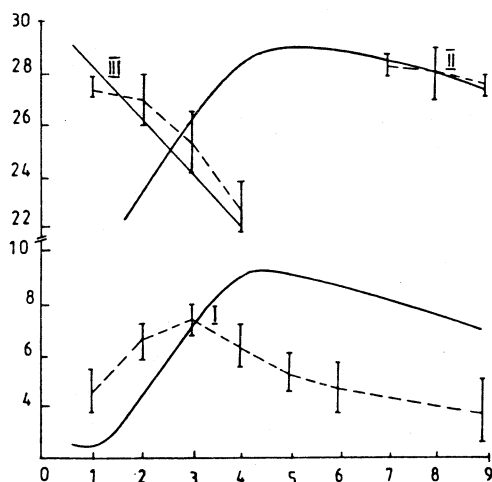
вень антител еще низок, а по динамике антител — для последних дней иммунной реакции, когда концентрация антигена становится значительно меньше концентрации антител.

На рис.1.2, 1.3 видно, что модель воспроизводит на качественном уровне все четыре фазы динамики накопления антителообразующих клеток в селезенке и антител в крови иммунизированных млекопитающих. В течение 1—1,5 суток после введения антигена количества АОК и Ат находятся на очень низких уровнях, которые недоступны для измерения обычными методами (лаг-фаза). Затем эти величины начинают расти по экспоненциальному закону (лог-фаза). При достижении высоких уровней количества АОК и Ат продолжают медленно увеличиваться, а затем медленно уменьшаться (фаза плато). Далее наступает более быстрое снижение этих показателей (фаза падения). На рис.1.2, 1.3 приведена начальная часть этой последней фазы.

Из результатов, представленных на рис.1.2, 1.3, следует, что модель неплохо воспроизводит опытные данные и на количественном уровне. Имеется хорошее согласие модельной и экспериментальной динамики накопления АОК (рис.1.2), динамики выведения антигена (рис.1.2, 1.3), динамики накопления антител (рис.1.3). Что касается некоторого расхождения между модельной и экспериментальной динамикой числа АОК на рис.1.3, то и оно отражает реальную ситуацию. Дело в том, что при внутрибрюшинном введении больших количеств антигена до половины антителообразующих кле-

Рис. 1.3. Динамика изменения анти-телообразующих клеток АОК (I), молекул антител Ат (II) и антигена Аг (III) в ходе иммунного ответа на 10^{13} молекул капсульного антигена чумного микроба. Обозначения те же, что на рис.1.2

ток могут быть расположены не в селезенке, а в других лимфоидных органах. Поэтому между расчетной кривой, описывающей динамику всех плазматических клеток, производящих антитела данной специфичности, и опытными данными, отражающими число



АОК в селезенке, различие имеется, а между модельными и экспериментальными результатами по динамике молекул антител расхождений нет. Хорошее согласие модельных и экспериментальных результатов свидетельствует о возможности использования системы (1.1)—(1.5) как основы для имитации радиационных воздействий на гуморальный иммунитет.

1.4. Двухзвенная модель пострadiационной динамики костномозгового лимфопоэза у неиммунизированных животных. При моделировании динамики гуморальной иммунной реакции облученных млекопитающих на T -независимый антиген можно ограничиться рассмотрением влияния ионизирующего излучения на костномозговой лимфопоэз, так как ведущая роль костного мозга в формировании пула B -лимфоцитов считается доказанной [15]. Математическая модель динамики пострadiационного костномозгового лимфопоэза у неиммунизированных млекопитающих была представлена в [70,71]. В качестве переменных модели использованы концентрации неповрежденных X , поврежденных X_{Π} и тяжелоповрежденных $X_{\Pi\Pi}$ предшественников лимфоцитов в костном мозге, включая стволовые клетки, находящиеся в соответствующем микроокружении, и все последующие фазы дифференцировки этих клеток в направлении лимфоидной линии, а также концентрации неповрежденных Y , поврежденных Y_{Π} и тяжелоповрежденных $Y_{\Pi\Pi}$ лимфоцитов в крови. Динамика изменения концентрации этих клеток ($x, x_{\Pi}, x_{\Pi\Pi}, y, y_{\Pi}, y_{\Pi\Pi}$) описана дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = Bx - \gamma x, \quad (1.16)$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x - \psi y, \quad (1.17)$$

$$\frac{dx_{\text{п}}}{dt} = -\mu x_{\text{п}}, \quad (1.18)$$

$$\frac{dy_{\text{п}}}{dt} = -\mu y_{\text{п}}, \quad (1.19)$$

$$\frac{dx_{\text{тп}}}{dt} = -v x_{\text{тп}}, \quad (1.20)$$

$$\frac{dy_{\text{тп}}}{dt} = -v y_{\text{тп}}. \quad (1.21)$$

Здесь B — удельная скорость размножения предшественников лимфоцитов в костном мозге, γ — удельная скорость выхода лимфоидных клеток из костного мозга в кровь, ψ — удельная скорость естественной гибели лимфоцитов или их выхода из циркуляции, μ и v — удельные скорости гибели поврежденных и тяжелоповрежденных радиацией клеток.

В соответствии с традиционной формой описания скорости размножения клеток в самоподдерживающейся популяции с регуляцией по типу обратной связи величина B представлена в виде функции концентраций клеток X и Y [5,7]:

$$B = \alpha / [1 + \beta(x + \theta y)], \quad (1.22)$$

где α — максимальная удельная скорость деления клеток X , β и $\beta\theta$ — коэффициенты обратной связи в управлении размножением клеток X самими клетками X , а также их потомками — клетками Y .

В отсутствие радиационного воздействия динамика лимфопозеза описывается уравнениями (1.16), (1.17). Система (1.16), (1.17) имеет две особые точки. Первая — тривиальная. Координаты второй равны

$$\bar{x} = (\alpha/\gamma - 1)/[\beta(1 + \theta\gamma/\psi)], \quad \bar{y} = (\gamma/\psi)\bar{x}. \quad (1.23)$$

Из (1.23) следует, что координаты второй особой точки положительны, если параметры удовлетворяют условию

$$\alpha > \gamma. \quad (1.24)$$

Система (1.16), (1.17) исследовалась методами качественной теории дифференциальных уравнений и теории колебаний. Тривиальная особая точка неустойчива (седло), если неравенство (1.24) справедливо, и устойчива (узел), если условие (1.24) не выполняется. Вторая особая точка, лежащая в положительном квадранте, является либо устойчивым фокусом при

$$\left[\psi + \frac{\gamma\psi(\alpha - \gamma)}{\alpha(\psi + \theta\gamma)} \right]^2 < 4 \frac{\Psi\gamma(\alpha - \gamma)}{\alpha}, \quad (1.25)$$

либо устойчивым узлом, если условие (1.25) нарушается. Соответственно, динамика восстановительных процессов в системе лимфопозза имеет либо характер затухающих колебаний, либо аperiodический характер. Условие (1.25), определяющее характер устойчивости второй особой точки, эквивалентно двум другим, налагаемым на параметры θ и ψ :

$$\theta > \frac{\psi}{\gamma} \left[1 - \sqrt{\frac{\gamma}{\psi} \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right)} \right]^2 \left[2 \sqrt{\frac{\gamma}{\psi} \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right)} - 1 \right]^{-1}, \quad (1.26)$$

$$\psi < 4\gamma \left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right). \quad (1.27)$$

Из (1.26), (1.27) следует, что динамика восстановительных процессов в системе лимфопозза имеет характер затухающих колебаний, если коэффициент обратной связи в управлении размножением клеток X клетками Y достаточно велик, а удельная скорость гибели клеток Y не превышает значения некоторой функции удельной скорости перехода клеток из X в Y .

Пребывание системы (1.16), (1.17) во второй особой точке с положительными координатами, когда она устойчива (то есть при выполнении соотношения (1.24)), можно отождествить с состоянием системы костномозгового лимфопозза в норме. Именно эта область изменения параметров, задаваемая неравенством (1.24), и рассматривалась в [70,71].

При переходе к безразмерным переменным $\xi = x/\bar{x}$, $\eta = y/\bar{y}$, $\xi_n = x_n/\bar{x}$, $\xi_{\text{тп}} = x_{\text{тп}}/\bar{x}$, $\eta_n = y_n/\bar{y}$, $\eta_{\text{тп}} = y_{\text{тп}}/\bar{y}$ уравнения (1.18)—(1.21) принимают вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha\xi}{[1 + b[\xi + \theta(\gamma/\psi)\eta]]} - \gamma\xi, \quad (1.28)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \psi(\xi - \eta), \quad (1.29)$$

$$\frac{d\xi_{\pi}}{dt} = -\mu\xi_{\pi}, \quad (1.30)$$

$$\frac{d\eta_{\pi}}{dt} = -\mu\eta_{\pi}, \quad (1.31)$$

$$\frac{d\xi_{\pi\pi}}{dt} = -\nu\xi_{\pi\pi}, \quad (1.32)$$

$$\frac{d\eta_{\pi\pi}}{dt} = -\nu\eta_{\pi\pi}, \quad (1.33)$$

где $b = \beta\bar{x} = (\alpha/\gamma - 1)/(1 + \theta\gamma/\psi)$ — безразмерный параметр. Учитывая, что время пребывания клеток лимфоидного ряда в костном мозге и крови составляет несколько суток, процесс гибели поврежденных радиацией клеток длится, в среднем, 1—2 суток, а тяжелоповрежденных — 4—7 часов, уравнения (1.32), (1.33) можно считать быстрыми по сравнению с (1.28)—(1.31). Поэтому, согласно теореме А.Н.Тихонова [5], уравнения (1.32), (1.33) были заменены стационарными решениями

$$\xi_{\pi\pi}(t) = \bar{\xi}_{\pi\pi} = 0, \quad (1.34)$$

$$\eta_{\pi\pi}(t) = \bar{\eta}_{\pi\pi} = 0. \quad (1.35)$$

Начальные условия для решения уравнений (1.24), (1.31) были определены в соответствии с одномишеннй одноударной теорией радиационного поражения клеток [80]:

$$\xi(0) = \exp(-D/D_1), \quad (1.36)$$

$$\eta(0) = \exp(-D/D_2), \quad (1.37)$$

$$\xi_{\pi}(0) = [1 - \exp(-D/D_1)](1 + \rho_1)^{-1}, \quad (1.38)$$

$$\eta_{\pi}(0) = [1 - \exp(-D/D_2)](1 + \rho_2)^{-1}. \quad (1.39)$$

В (1.38), (1.39) величины ρ_1 и ρ_2 равны отношениям долей тяжелоповрежденных и поврежденных клеток $X_{\pi\pi}$ и X_{π} , а также $Y_{\pi\pi}$ и Y_{π} соответственно. Они вычислялись по формуле, выведенной в работе [81]:

$$\rho_i = \frac{1 - \exp(-D/D_{mi})}{\exp(-D/D_{mi}) - \exp(-D/D_i)}, \quad (i = 1, 2). \quad (1.40)$$

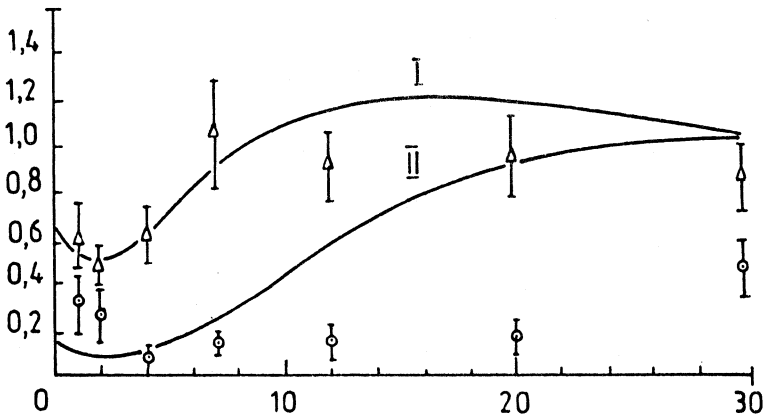


Рис. 1.4. Пострадиационная динамика костномозгового лимфопоза при дозе облучения $D = 2$ Гр. Результаты расчета концентраций $x(t)$ и $y(t)$ (кривые I, II) и соответствующие экспериментальные значения концентраций лимфоцитов крови (○) и кариоцитов костного мозга (△) у облученных крыс [82]. По оси абсцисс — время после облучения в сутках, по оси ординат — безразмерные концентрации клеток

В (1.36)—(1.40) величины D_{mi} и $D_i (i = 1, 2)$ — дозы, традиционно измеряемые в радиобиологии. После воздействия доз D_1 и D_2 число клеток X и Y , оставшихся неповрежденными, в $e = 2, 7 \dots$ раз меньше их исходного количества. После воздействия доз D_{m1} и D_{m2} число клеток X и Y , не подвергшихся интерфазной гибели, в $e = 2, 7 \dots$ раз меньше их исходного уровня.

В рамках модели имитировались процессы пострадиационного поражения и восстановления костномозгового лимфопоза у мелких лабораторных животных (крыс). Значения параметров приведены в [71]. Результаты моделирования сравнивались с данными опытов, выполненных в лаборатории тяжелых ионов филиала Института медико-биологических проблем (Дубна). В ходе этих экспериментов изучалось действие различных доз острого облучения на динамику ядросодержащих клеток (кариоцитов) костного мозга и лимфоцитов крови у крыс [82]. При сравнении модельных и экспериментальных данных принималось во внимание, что динамика суммарного числа кариоцитов костного мозга может служить показателем, характеризующим пострадиационные изменения в популяции клеток костного мозга, являющихся предшественниками лимфоцитов. На рис. 1.4 представлены безразмерные суммарные концентрации неповрежденных и поврежденных радиацией лимфоцитов в крови $y(t) = \eta(t) + \eta_n(t)$ и их предшест-

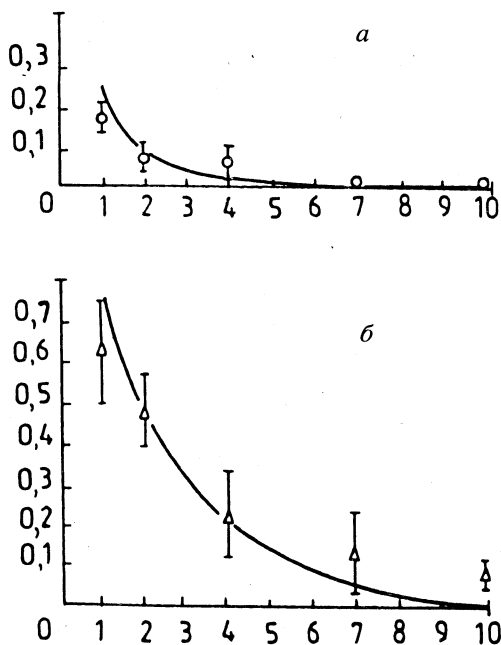


Рис.1.5. Дозовая зависимость минимальных концентраций лимфоцитов в крови $y_{\min}$ (а) и их предшественников в костном мозге $x_{\min}$ (б) в ходе постлучевого опустошения. Результаты моделирования (кривые), а также соответствующие экспериментальные значения для концентраций лимфоцитов крови (○) и кариоцитов костного мозга облученных крыс (Δ) [82]. По оси абсцисс — доза облучения D в Гр, по оси ординат — безразмерные концентрации клеток

венников в костном мозге $x(t) = \xi(t) + \xi_n(t)$, рассчитанные в рамках модели при $D = 2$ Гр. Здесь же приведены средние значения и среднеквадратичные отклонения безразмерных концентраций лим-

фоцитов крови и кариоцитов костного мозга крыс, измеренные в различные сроки после острого облучения в той же дозе [82]. Из рисунка видно, что модель описывает процессы истощения и восстановления популяций лимфоцитов крови и клеток-предшественников костного мозга. В первые двое суток после облучения и в модели, и в эксперименте концентрации клеток пулов X и Y снижаются до некоторых минимальных значений $x_{\min}$ и $y_{\min}$, затем начинают увеличиваться и достигают уровня нормы через 8 и 23 сут соответственно. Далее процесс восстановления имеет характер быстротухающих колебаний концентраций клеток X и Y вокруг своих стационарных значений. На заключительном этапе восстановительного процесса концентрации лимфоцитов в крови в эксперименте ниже, чем в модели. По-видимому, это расхождение связано с некомпенсированным усилением миграции лимфоцитов из крови в лимфу, которое в данной модели не учитывается.

В рамках модели специально исследовалась зависимость величин $x_{\min}$ и $y_{\min}$ от дозы радиационного воздействия D . Результаты представлены на рис.1.5. Как видно из рисунка, модель воспроизводит экспериментальные данные [82] на качественном уровне. Расчеты показали, что между ними

имеется и количественное согласие. Вычисленные значения $\chi^2 = 6,07$ и $\chi^2 = 8,84$ не превышают своего критического уровня $\chi^2_{0,05} = 9,488$ (число степеней свободы $n = 5 - 1 = 4$). Величины $x_{\min}$ и $y_{\min}$ тем меньше нормы, чем больше D .

Разработанная модель (1.28)—(1.31) может быть использована для имитации костномозгового лимфопозза млекопитающих в тех случаях, когда не требуется прогнозирования в отдельности динамики способных и не способных к делению предшественников лимфоцитов в костном мозге, а также, когда детали динамики гибели тяжелоповрежденных радиацией клеток не являются важными. Очевидно, что эти условия заведомо приемлемы в случае использования данной модели для описания динамики гуморально-го иммунитета у облученных млекопитающих.

1.5. Динамика гуморального иммунитета при комбинированном воздействии облучения и антигенной стимуляции. В работах [69,72] моделировалось воздействие ионизирующего излучения на систему гуморального иммунитета млекопитающих. При этом рассматривалось пострadiационное поражение и восстановление клеток лимфоидного ряда и их предшественников в костном мозге. Нарушения работы других систем организма, влияющие опосредованно на систему иммунитета, не учитывались.

В качестве переменных модели использованы концентрации неповрежденных радиацией радиочувствительных B -лимфоцитов, преддетерминированных к производству антител определенной специфичности и находящихся на n различных стадиях развития x_i, x_{ii} , ($i = 1, \dots, n$); концентрация радиорезистентных плазматических клеток, синтезирующих антитела данной специфичности (x_{n+1}); концентрации молекул антител этой специфичности (x_{n+2}) и антигенных детерминант соответствующего антигена (x_{n+3}); концентрации неповрежденных и поврежденных радиацией лимфоцитов крови, которые не являются преддетерминированными к производству антител рассматриваемой специфичности (x_i, x_{ii} , ($i = n + 4$)); концентрации не поврежденных и поврежденных радиацией предшественников лимфоцитов в костном мозге (x_i, x_{ii} , ($i = n + 5$)). В соответствии с моделью динамики гуморального иммунитета на T -независимый антиген (см. п.1.3) концентрации x_i ($i = 1, \dots, n + 3$) описываются системой (1.1)—(1.5). Концентрации x_i, x_{ii} ($i = n + 4, n + 5$) и x_{iii} ($i = 1, \dots, n$) согласно модели пострadiационной динамики костномозгового лимфопозза (см. п.1.4) определяются уравнениями

$$\frac{dx_{n+4}}{dt} = \eta' - \psi x_{n+4}, \quad (1.41)$$

$$\frac{dx_{n+5}}{dt} = Bx_{n+5} - \gamma x_{n+5}, \quad (1.42)$$

$$\frac{dx_{ni}}{dt} = -\mu x_{ni}, \quad (i = 1, \dots, n, n+4, n+5), \quad (1.43)$$

где

$$B = \alpha \left\{ 1 + \beta \left[x_{n+5} + \theta \left(x_{n+4} + \sum_{i=1}^n x_i \right) \right] \right\}^{-1}.$$

Параметры η и η' в (1.1) и в (1.41) пропорциональны скорости выхода лимфоидных клеток из костного мозга

$$\eta = \kappa \gamma x_{n+5}, \quad \eta' = (1 - \kappa) \gamma x_{n+5}. \quad (1.44)$$

В формулах (1.44) коэффициент κ равен доле клеток, предтерминированных к производству антител определенной специфичности, среди всех лимфоидных клеток, покидающих костный мозг.

В отсутствие антигенного стимула ($x_{n+3}(0) = 0$) динамика клеток лимфоидного ряда может быть описана как системой (1.1), (1.2), (1.41)—(1.43), так и уравнениями (1.16)—(1.19), к которым сводится эта система. Причем переменные уравнений (1.16)—(1.19) выражаются через переменные системы (1.1), (1.2), (1.41)—(1.43) следующим образом:

$$\begin{aligned} x &\equiv x_{n+5}, \quad x_n \equiv x_{nj}, \quad j = n+5, \\ y &\equiv x_{n+4} + \sum_{i=1}^n x_i, \\ y_n &\equiv x_{nj} + \sum_{i=1}^n x_{ni}, \quad j = n+4. \end{aligned} \quad (1.45)$$

При имитации в рамках разработанной модели динамики гуморального иммунного ответа на T -независимый антиген у облученных млекопитающих начальные условия для решения системы (1.1)—(1.5), (1.41)—(1.43) зависят от того, когда производится облучение: перед иммунизацией, одновременно с нею или после введения антигена. В первом случае начальные условия задаются формулами

$$x_i(0) = \bar{x}_i \exp(-D/D_2), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.46)$$

$$x_{ni}(0) = \bar{x}_i [1 - \exp(-D/D_2)](1 + \rho_2)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.47)$$

$$x_{n+1}(0) = \bar{x}_{n+1}, \quad (1.48)$$

$$x_{n+2}(0) = \bar{x}_{n+2}, \quad (1.49)$$

$$x_{n+3}(0) = 0, \quad (1.50)$$

$$x_{n+4}(0) = \bar{x}_{n+4} \exp(-D/D_2), \quad (1.51)$$

$$x_{nj}(0) = \bar{x}_j [1 - \exp(-D/D_2)](1 + \rho_2)^{-1}, \quad j = n + 4, \quad (1.52)$$

$$x_{n+5}(0) = \bar{x}_{n+5} \exp(-D/D_1), \quad (1.53)$$

$$x_{nj}(0) = \bar{x}_j [1 - \exp(-D/D_1)](1 + \rho_1)^{-1}, \quad j = n + 5. \quad (1.54)$$

В ходе численного решения системы (1.1)—(1.5), (1.41)—(1.43) с начальными условиями (1.46)—(1.54) концентрация антигенных детерминант x_{n+3} сначала нулевая, а в момент «иммунизации» $T_{\text{и}}$ полагается равной $x_{n+3}(T_{\text{и}}) = (x_{n+3})_0$.

В том случае, когда облучение и иммунизация проводятся одновременно, динамика иммунной реакции описывается системой (1.1)—(1.5), (1.41)—(1.43) с начальными условиями (1.46)—(1.49), (1.51)—(1.54) и с начальной концентрацией антигенных детерминант $x_{n+3}(0) = (x_{n+3})_0$.

Если в рамках разработанной модели имитируется динамика гуморальной иммунной реакции в случае, когда иммунизация предшествует облучению, то начальные условия для решения системы уравнений (1.1)—(1.5), (1.41)—(1.43) равны

$$x_i(0) = \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.55)$$

$$x_{n+1}(0) = \bar{x}_{n+1}, \quad (1.56)$$

$$x_{n+2}(0) = \bar{x}_{n+2}, \quad (1.57)$$

$$x_{n+3}(0) = (x_{n+3})_0, \quad (1.58)$$

$$x_{n+4}(0) = \bar{x}_{n+4}, \quad (1.59)$$

$$x_{n+5}(0) = \bar{x}_{n+5}, \quad (1.60)$$

$$x_{ni}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n, n + 4, n + 5. \quad (1.61)$$

В ходе расчета модели на ЭВМ в момент времени T_0 , который соответствует моменту облучения, концентрации радиочувствительных клеток скачкообразно изменяются:

$$x_i = x_i(T_0) \exp(-D/D_2), \quad i = 1, \dots, n, n+4, \quad (1.62)$$

$$x_{ni} = x_i(T_0)[1 - \exp(-D/D_2)](1 + \rho_2)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n, n+4, \quad (1.63)$$

$$x_{n+5} = x_{n+5}(T_0) \exp(-D/D_1), \quad (1.64)$$

$$x_{nj} = x_j(T_0)[1 - \exp(-D/D_1)](1 + \rho_1)^{-1}, \quad j = n+5. \quad (1.65)$$

В (1.49), (1.57) $\bar{x}_{n+2}$ — это стационарная концентрация молекул антител определенной специфичности. Она определяется из экспериментальных данных [67,68]. В (1.46), (1.47), (1.55) $\bar{x}_i$ — стационарные концентрации *B*-лимфоцитов, преддетерминированных к производству антител данной специфичности и находящихся в *i*-й возрастной группе ($i = 1, \dots, n$), а $\bar{x}_{n+1}$ в (1.48), (1.56) — стационарные концентрации соответствующих плазматических клеток. Величины $\bar{x}_i$ ($i = 1, \dots, n+1$) рассчитываются с использованием значения $\bar{x}_{n+2}$ по формулам (1.13), (1.14) (см. п.1.2). В (1.51)—(1.54), (1.59), (1.60) $\bar{x}_{n+5}$ и $\bar{x}_{n+4}$ — это стационарные значения концентраций предшественников лимфоцитов в костном мозге и лимфоцитов крови, не являющихся преддетерминированными к производству антител рассматриваемой специфичности. Они также вычисляются с использованием значения $\bar{x}_{n+2}$, с помощью соотношений, полученных из (1.15), (1.41), (1.44):

$$\bar{x}_{n+4} = \frac{1 - \kappa}{\kappa} \frac{k_z k_a}{h\psi} \bar{x}_{n+2}, \quad (1.66)$$

$$\bar{x}_{n+5} = \frac{1}{\kappa} \frac{k_z k_a}{h\gamma} \bar{x}_{n+2}. \quad (1.67)$$

Значения коэффициентов k_z , k_a , h , γ , ψ приведены в [67,68,70,71]. Величина параметра κ положена равной 10^{-5} в соответствии с оценками, полученными в иммунологии [11].

В ходе исследования модели рассчитывалась динамика первичной гуморальной иммунной реакции на *T*-независимый антиген (капсульный антиген чумного микроба) у мышей линии *CBA*. При этом рассматривались случаи, когда иммунизация проводилась либо перед радиационным воздействием, либо одновременно с ним, либо после него.

На рис.1.6 представлена динамика антителообразующих клеток (АОК) и молекул антител (Ат), полученная при моделировании иммунной реакции на введение 10^{12} молекул капсульного антигена чумного микроба у необлученных мышей; у мышей, облученных в дозе $D = 2$ Гр за 2 сут до

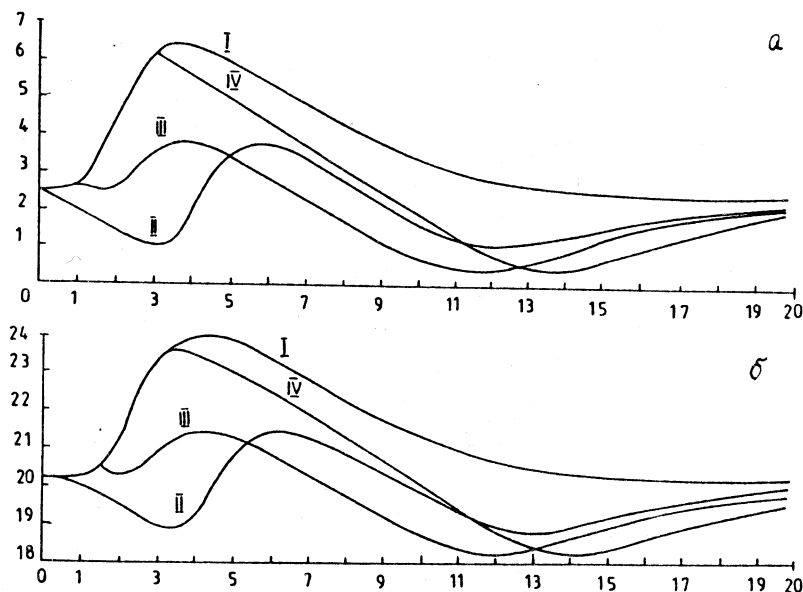


Рис. 1.6. Модельная динамика числа антителиобразующих клеток АОК (а) и молекул антител Ат (б) в ходе гуморальной иммунной реакции на внутрибрюшинное введение 10^{12} молекул капсульного антигена чумного микроба у необлученных (кривая I) и облученных в дозе $D = 2$ Гр мышей (кривая II — облучение на двое суток опережало иммунизацию, кривые III и IV — иммунизация на одни сутки и на трое суток опережала облучение). По оси абсцисс — время после иммунизации (для I, III, IV) или после облучения (для II) в сутках. По оси ординат — натуральный логарифм от числа АОК (а) и Ат (б)

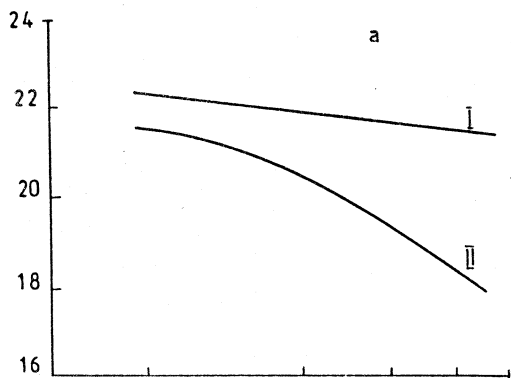
иммунизации; у мышей, иммунизированных за 1 сут и за 3 сут до облучения в той же дозе. Сравнение приведенных кривых показывает, что облучение как до, так и после иммунизации приводит к снижению интенсивности иммунного ответа: максимальные количества АОК и Ат у облученных млекопитающих ниже, чем у необлученных. Этот модельный результат качественно согласуется с экспериментальными наблюдениями [83,84].

Представленные на рис.1.6 четыре варианта иммунного ответа на одно и то же количество антигена имеют и свои особенности. Как уже отмечалось в п.1.2, у необлученных мышей в первые 1—1,5 сут после иммунизации число АОК и Ат увеличивается очень медленно, затем наступает фаза экспоненциального роста, достижение максимальных значений и спад до уровня нормы. В том случае, когда облучение предшествует иммунизации, начальный и конечный этапы динамики АОК и Ат отличаются от рассмотренных выше. После облучения число АОК и Ат снижается в

результате пострадиационной гибели предшественников АОК в крови и в костном мозге. После иммунизации этот спад продолжается до тех пор, пока скорость пополнения пула плазматических клеток остается меньше скорости их естественной гибели. Далее, после достижения некоторых минимальных уровней, количество АОК и Ат начинает увеличиваться до максимальных значений, которые ниже, чем у необлученных животных. После этого число АОК и Ат снова снижается до уровней, меньших нормы, а затем возвращается к своим исходным значениям. Эта особенность завершающего этапа иммунного ответа облученных млекопитающих обусловлена наложением двух процессов: снижения интенсивности накопления АОК и Ат в результате уменьшения концентрации циркулирующего в крови антигена, стимулирующего иммунокомпетентные В-лимфоциты к делению, и увеличения числа АОК и Ат до уровней нормы в ходе продолжающегося процесса восстановления костномозгового лимфопоеза. Расчеты показали, что увеличение интервала времени Δt , прошедшего между облучением и иммунизацией, приводит к укорочению, а затем и полному исчезновению фазы снижения числа АОК и Ат сразу после иммунизации, а также к «сглаживанию» заключительной фазы динамики иммунного ответа. Следует отметить, однако, что величины Δt и D практически не влияют на продолжительность интервалов времени между иммунизацией и моментами достижения максимумов числа АОК и Ат. Они такие же, как и у необлученных животных.

В тех же случаях, когда иммунизация предшествует облучению ($\Delta t < 0$), характер динамики иммунной реакции существенно зависит от $|\Delta t|$. Если время между введением антигена и радиационным воздействием мало и иммунная реакция не успевает развиться в полной мере к моменту облучения, то кинетические кривые, отражающие динамику антителообразующих клеток и антител, имеют «двугорбый» характер. В интервале времени между иммунизацией и облучением число АОК и Ат медленно растет. После облучения происходит уменьшение количества АОК и Ат в результате пострадиационной гибели преддетерминированных к производству антител данной специфичности В-лимфоцитов и их предшественников в костном мозге. Далее деление стимулированных антигеном не поврежденных радиацией преддетерминированных В-лимфоцитов, а также увеличение притока В-лимфоцитов из костного мозга приводят к увеличению количеств АОК и Ат. Они достигают максимальных значений, которые ниже, чем у необлученных животных. Заключительный этап динамики АОК и Ат имеет такой же характер, как и у животных, которых сначала облучали, а потом иммунизировали. Иммунный ответ развивается подобным образом, если $|\Delta t| < 2$ сут. При $|\Delta t| > 2$ сут характер динамических кривых иной — «одногорбый». Это обусловлено тем, что к моменту облучения успевает накопиться большое количество молекул антител, которые связывают циркулирующий в крови антиген и ускоряют его вывод из организма. Поэтому после облучения число АОК и количество молекул Ат уменьшаются как в результате пострадиационной гибели преддетерминированных к

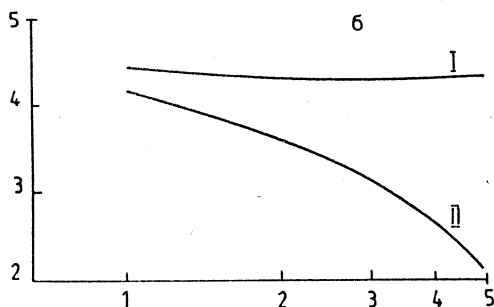
Рис. 1.7. Рассчитанная в модели зависимость максимальных значений числа молекул антител Ат (а), антителообразующих клеток АОК (б) от дозы радиационного воздействия у иммунизированных 10^{12} молекулами капсульного антигена чумного микроба мышей. Иммунизация проводилась на двое суток раньше (I) или позже (II) облучения. По оси абсцисс — доза D в Гр. По оси ординат — натуральный логарифм от числа Ат (а) и АОК (б)



производству антител данной специфичности В-лимфоцитов и их предшественников в костном мозге, так и из-за прекращения деления иммунокомпетентных В-лимфоцитов в отсутствие антигенной стимуляции. Заключительная часть динамики АОК и Ат (фаза подъема) обусловлена процес-

сом восстановления поврежденного радиацией костномозгового лимфопоза. Расчеты показали, что если иммунизация предшествует облучению, то продолжительность интервала времени между введением антигена и моментами достижения максимумов числа АОК и Ат почти не зависит от дозы радиационного воздействия D . Так, при $2 \leq |\Delta t| < 3,5$ сут максимум числа АОК имеет место в момент облучения, а максимум количества Ат — на 0,5 или на 1 сут позже. При других значениях Δt временные интервалы между иммунизацией и моментами достижения максимумов АОК и Ат у облученных животных такие же, как у необлученных.

В рамках модели исследовалась зависимость значений максимальных концентраций антител и антителообразующих клеток от дозы радиационного воздействия D при фиксированном количестве введенного антигена и фиксированном значении Δt . На рис.1.7 представлены результаты расчетов для случаев, когда облучение проводится за 2 сут до и через 2 сут после иммунизации. Количество введенного антигена составляет 10^{12} молекул. Из рисунка видно, что рассматриваемые величины тем меньше значений, соответствующих иммунному ответу необлученных млекопитающих, чем больше доза радиационного воздействия D . Однако зависимость от D максимумов



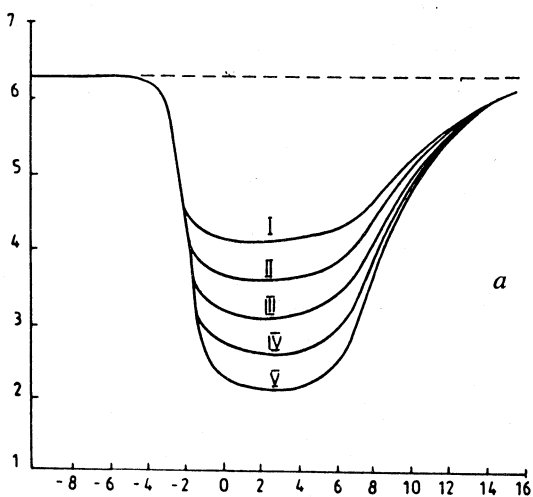
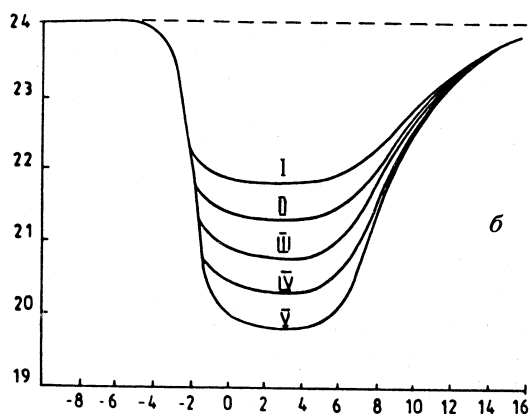


Рис. 1.8. Зависимость максимальных значений числа молекул антител Ат (а) и антителообразующих клеток АОК (б) (в натуральных логарифмах) от интервала времени Δt (в сутках) между облучением в дозах $D = 1, 2, 3, 4, 5$ Гр (кривые I–V) и иммунизацией 10^{12} молекулами антигена. Пунктирные линии — уровни максимумов числа Ат и АОК у необлученных животных



числа АОК и Ат выражена слабее, когда иммунизация на 2 сут опережает облучение, чем когда облучение на 2 сут опережает иммунизацию.

Определялось также влияние величины Δt на максимальные уровни концентраций антителообразующих клеток и антител при фиксированном количестве введенного антигена (10^{12} молекул) и при различных значениях D . Результаты представлены на рис.1.8. Из рисунков видно, что когда

облучение и иммунизация проводятся одновременно ($\Delta t = 0$), максимальные количества АОК и Ат тем меньше соответствующих показателей у необлученного животного, чем больше доза D . Для случаев, когда иммунизация предшествует облучению ($\Delta t < 0$), такая же зависимость от D имеет место при $0 < |\Delta t| < 2$ сут, а при $|\Delta t| > 2$ сут максимальные количества АОК и Ат практически одинаковы при значениях $D = 1 + 5$ Гр. Если облучение предшествует иммунизации ($\Delta t > 0$), то максимальные количества АОК и Ат тем меньше этих же показателей для необлученных животных, чем больше доза D . Это справедливо для всех значений Δt , удовлетворяющих условию

$0 < \Delta t < 16$ сут. При $\Delta t > 16$ сут рассматриваемые величины одинаковы для $D = 1 + 5$ Гр.

Что касается зависимости максимумов числа АОК и A_t от величины Δt при фиксированной дозе радиационного воздействия D (рис.1.8), то необходимо отметить следующее. Если иммунизация опережает облучение не более чем на 3,5 сут, то максимальные количества АОК и A_t тем меньше этих показателей у необлученных животных, чем меньше $|\Delta t|$. При $|\Delta t| > 3,5$ сут рассматриваемые величины у необлученных и облученных животных совпадают, так как облучение производится уже после того, как иммунная реакция достигла своего максимального уровня. Если же облучение опережает иммунизацию, то зависимость максимумов числа АОК и A_t от Δt несколько иная. При $0 < \Delta t < 6$ сут рассматриваемые величины изменяются очень мало: при увеличении интервала Δt от 0 до 2 сут происходит их незначительное уменьшение, а при увеличении Δt от 2 до 6 сут — небольшое увеличение. Дальнейшее увеличение интервала времени Δt между облучением и иммунизацией приводит к быстрому росту значений максимумов числа АОК и A_t . При $\Delta t \sim 23$ сут эти величины подходят к уровням, соответствующим иммунному ответу необлученных животных. Данная закономерность обусловлена пострадиационной динамикой поражения и восстановления популяции лимфоцитов крови (см. рис.1.4). В течение 6 сут после облучения концентрация этих клеток значительно меньше, чем в норме. Причем в течение первых 2 сут она снижается, а затем растет сначала медленно, а после 6 сут быстро, и к 23 сут достигает исходного уровня. Такие изменения числа лимфоцитов, а следовательно, и предтерминированных к производству антител определенной специфичности В-клеток и их потомков, плазматических клеток, к моменту иммунизации и предопределяют снижение, затем рост и полное восстановление интенсивности иммунного ответа при увеличении интервала времени между облучением и иммунизацией.

Полученные результаты качественно соответствуют экспериментальным данным по динамике гуморального иммунного ответа у млекопитающих, которых в различные сроки до или после иммунизации подвергали радиационному воздействию в сублетальных дозах [84—90]. В частности, в опытах было найдено, что в период, когда наступает активный биосинтез антител, радиационное воздействие не приводит к снижению максимальных уровней антител у облученных млекопитающих [86—90]. Например, если облучение кроликов в дозе $D = 8$ Гр проводилось через 3 сут после иммунизации гамма-глобулином быка, то максимальное количество антител у животных, подвергнутых радиационному воздействию, составляло около 95% от уровня максимума антител у необлученных животных [90]. В модели этот показатель равен 70%. В то же время на начальных этапах иммунного ответа система гуморального иммунитета является чувствительной к

действию радиации [90]. Максимальный уровень антител у облученных млекопитающих значительно снижен по сравнению с той же величиной у необлученных животных. Причем при одной и той же дозе облучения и одном и том же количестве введенного антигена этот уровень тем ниже, чем меньше интервал времени между иммунизацией и облучением [90]. Экспериментально было показано также, что иммунный ответ оказывается подавленным, если облучение проводится за $0 + 21$ сут до иммунизации [89].

Между модельными результатами и опытными данными имеется и количественное согласие. Так, в работе [91] мышей линии *СВА* облучали в дозе 4 Гр. Через 7 сут после радиационного воздействия вводили внутрибрюшинно в количестве 50 мкг *T*-независимый антиген — липосахарид *E.coli*, штамм 0111:B4. Найдено, что максимальное количество АОК в селезенке облученных мышей в 15 раз меньше того же показателя у необлученных животных. В рамках модели имитировалась динамика иммунной реакции мыши на внутрибрюшинное введение 10^{14} молекул капсульного антигена чумного микроба для случая, когда облучение с дозой $D = 4$ Гр на 7 сут опережало иммунизацию. Было получено, что максимальное число АОК у облученных мышей в 17,8 раза меньше аналогичного показателя у необлученных животных. Таким образом, модельный и экспериментальный результаты близки друг к другу.

В работе [92] мыши линии *СВА* облучались в дозе 4 Гр. Через 30 сут вводился внутрибрюшинно тот же антиген — липосахарид *E.coli* штамм 0111:B4 в количестве 50 мкг. Число АОК определяли через 5 сут после иммунизации. Найдено, что число АОК в селезенках облученных и необлученных мышей практически одинаково. Это означает, что через 30 суток после облучения в дозе 4 Гр способность к гуморальному ответу на *T*-независимый антиген у животных оказывается полностью восстановленной. Этим опытными данным не противоречит результат, полученный в модели, — максимальные числа АОК у облученных и необлученных мышей равны друг другу, если интервал времени между облучением и иммунизацией превышает 23 сут. Этот результат согласуется и с экспериментальными наблюдениями, согласно которым популяция *B*-лимфоцитов в селезенке у мышей, облученных в дозе $D = 4$ Гр, полностью восстанавливается через 20 сут после облучения [93]. Восстановление системы гуморального иммунитета через 3 недели после радиационного воздействия отмечалось и в работе [89].

Таким образом, разработанная модель отражает основные закономерности динамики гуморального иммунитета у облученных млекопитающих.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ АУТОИММУННЫХ БОЛЕЗНЕЙ

2.1. Современные представления об аутоиммунитете. Действие ионизирующего излучения на иммунную систему млекопитающих может проявляться не только в снижении защитных функций организма, но и в развитии так называемых аутоиммунных реакций, в ходе которых повреждаются собственные органы и ткани [83,94,95]. Клинические наблюдения свидетельствуют о том, что аутоиммунизация играет существенную роль в патогенезе острой лучевой болезни, возникающей после острого облучения в сублетальных и летальных дозах. Аутоиммунные реакции — это и одно из возможных последствий хронического облучения с малыми мощностями доз. В ряде случаев аутоиммунные процессы развиваются также у необлученных млекопитающих.

В норме иммунная система организма находится в состоянии толерантности (невосприимчивости) по отношению к компонентам собственных клеток и тканей (аутоантигенам) [11—16]. В организме здоровых млекопитающих обнаруживаются лишь малые концентрации антител против различных антигенных субстанций собственных органов и тканей. Полагают, что выработка небольшого количества этих аутоантител является нормальным процессом, который обеспечивает транспортировку макромолекул, вышедших из естественно разрушающихся клеточных и субклеточных структур. Потеря толерантности приводит к развитию аутоиммунитета — патологической иммунной реакции. В организме появляются большие количества аутоантител и агрессивных *T*-лимфоцитов (киллеров), направленных против антигенов собственного тела. Аутоиммунные реакции играют главную патогенетическую роль в так называемых аутоиммунных болезнях. К таким болезням относятся аутоиммунная гемолитическая анемия, идиопатическая тромбопеническая пурпура, волчаночный нефрит, системная красная волчанка, ревматоидный артрит, дерматомиозит, аутоиммунный атрофический гастрит, тиреоидит Хашимото и т.д. [15,96].

В настоящее время нет единой точки зрения на природу возникновения аутоиммунных заболеваний. Ряд исследователей придерживается гипотезы Бернета [11], согласно которой аутоиммунитет представляет собой патологический процесс, вызванный появлением «запретного» клона лимфоцитов, специфически взаимодействующих с собственными клетками и белками. По другой гипотезе аутоиммунитет является обычной иммунной реакцией против тех компонентов организма, которые в норме малодоступны для иммунокомпетентных лимфоцитов [12]. «Доступность» может возникать в результате различных повреждений клеток и тканей. Первоначальное разрушение приводит к появлению в крови антигена. Это вызывает иммунный ответ, который ведет к новому повреждению тканей и т.д.

Одна из последних теорий аутоиммунитета является развитием гипотезы Бернета [97—100]. В соответствии с этой теорией толерантность организма к антигенам собственных тканей обеспечивается иммунным органом — тимусом. Нарушение его функционирования, которое может быть вызвано заболеваниями (например, тимитом), лечением кортизоном, воздействием радиации, приводит к появлению запретного клона аутореактивных лимфоцитов.

Остановимся более подробно на механизмах развития клеточных аутоиммунных процессов у облученных млекопитающих. Во-первых, ионизирующее излучение вызывает непосредственное разрушение части клеток радиочувствительных тканей, в результате чего происходит высвобождение аутоантигенов. Во-вторых, радиация нарушает правильное функционирование тимуса. Полагают, что это происходит следующим образом. Среди популяции медуллярных клеток тимуса, резистентных к облучению, имеются иммунокомпетентные клетки-предшественники, способные распознавать некоторые тканеспецифические антигены. Данные клетки могут превращаться в агрессивные *T*-лимфоциты (киллеры), разрушающие клетки соответствующих тканей. Этому превращению препятствуют определенные лимфоциты кортикального слоя тимуса *T*-супрессоры, чувствительные к облучению. В здоровом организме *T*-супрессоры полностью подавляют образование киллеров, направленных против аутологичных тканей. Действие облучения приводит к дефициту *T*-супрессоров и нарушению иммуносупрессорной функции тимуса. А это, в свою очередь, обеспечивает формирование из малочувствительных к облучению иммунокомпетентных клеток-предшественников пулов агрессивных *T*-лимфоцитов, направленных против клеток собственных тканей организма. После созревания и выхода из тимуса эти лимфоциты, взаимодействуя с клетками соответствующей ткани, оказывают на них повреждающее действие. Последнее может выражаться как в утрате клеткой своих функций, так и в ее гибели. Высвобождающийся при разрушении клеток тканеспецифический антиген будет стимулировать иммунный ответ, что приведет к дальнейшему повреждению аутологичной ткани и развитию аутоиммунной болезни.

2.2. Моделирование аутоиммунитета у необлученных млекопитающих. После нашей совместной с Н.В.Степановой работы [101], в которой моделировалась динамика аутоиммунитета у необлученных млекопитающих, в литературе появились единичные публикации по этой проблеме [102—104]. В частности, в [103,104] предложен интересный подход к моделированию гуморальных аутоиммунных процессов. Однако построенная в [103,104] модель содержит большое количество переменных и параметров. Это не только усложняет ее анализ, но и делает затруднительной ее модификацию с целью описания еще более сложного процесса — пострадиационного аутоиммунитета. Поэтому более подробно здесь рассматривается

работа [101], которая в дальнейшем послужила в качестве основы при моделировании аутоиммунных процессов у облученных млекопитающих.

Аутоиммунные заболевания чрезвычайно многообразны. Однако сходство проявляется в том, что в их основе лежит самоподдерживающаяся аутоиммунная реакция, направленная против того или иного компонента организма, а ее ход уже практически не зависит от характера причин, вызвавших потерю толерантности к соответствующему антигену. В [101] рассмотрена математическая модель как раз этой, заключительной стадии аутоиммунного процесса. При этом рассматривался только клеточный аутоиммунитет, так как при длительных аутоиммунных болезнях он играет главную роль [97,98]. В качестве переменных модели использованы концентрация x клеток-мишеней собственной (аутологичной) ткани, имеющих одинаковую антигенную специфичность и не несущих повреждений, концентрация y эффекторных T -лимфоцитов (киллеров), направленных против данных клеток, а также концентрация z тканеспецифического антигена, образующегося при разрушении клеток-мишеней. Концентрации x , y , z выражались в молях на литр крови.

При описании динамики роста здоровой ткани было использовано уравнение Ферхюльста [7]:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - vx^2, \quad (2.1)$$

где μ — удельная скорость размножения клеток ткани, а vx^2 — скорость их гибели, увеличивающаяся по мере роста данной ткани. Уравнение (2.1) имеет устойчивое состояние равновесия $\bar{x} = \mu/v$, которое отождествляют с концентрацией клеток ткани в «норме».

При построении модели полагалось, что взаимодействие клеток ткани с киллерами приводит к их взаимному уничтожению со скоростью βxy . Считалось, что скорость образования тканеспецифического аутоантигена пропорциональна скорости разрушения клеток ткани под действием киллеров, а удельная скорость размножения агрессивных T -лимфоцитов пропорциональна концентрации антигена. Кроме того, в модели учитывались естественный вывод антигена из организма (с удельной скоростью γ) и гибель агрессивных лимфоцитов (с удельной скоростью α). В результате была получена следующая система уравнений [101]:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - vx^2 - \beta xy, \quad (2.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = \sigma \beta xy - \gamma z, \quad (2.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi zy - \beta xy - \alpha y, \quad (2.4)$$

где σ , ψ — константы.

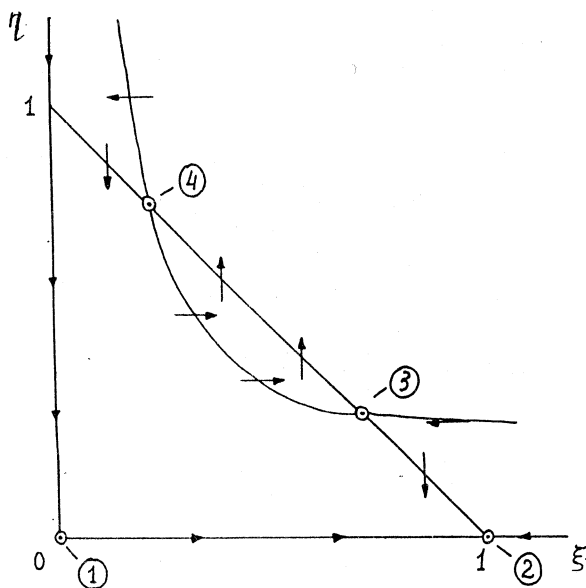


Рис. 2.1. Расположение главных изоклин и особых точек системы (2.6), (2.7) на фазовой плоскости $\{\xi, \eta\}$

Для упрощения задачи было учтено различие постоянных времени аутоиммунных процессов (месяцы), развития ткани (месяцы) и процесса установления равновесных концентраций антигена (сутки). Это дало возможность, пользуясь теоремой А.Н.Тихонова [5], заменить «быстрое» уравнение (2.3) алгебраическим соотношением

нием $z = \sigma\beta xy/\gamma$. В результате уравнение (2.4) приняло вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\psi\sigma\beta}{\gamma}xy^2 - \beta xy - \alpha y. \quad (2.5)$$

В работе [101] уравнения (2.2), (2.5) приведены к безразмерному виду

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi - \xi^2 - \xi\eta, \quad (2.6)$$

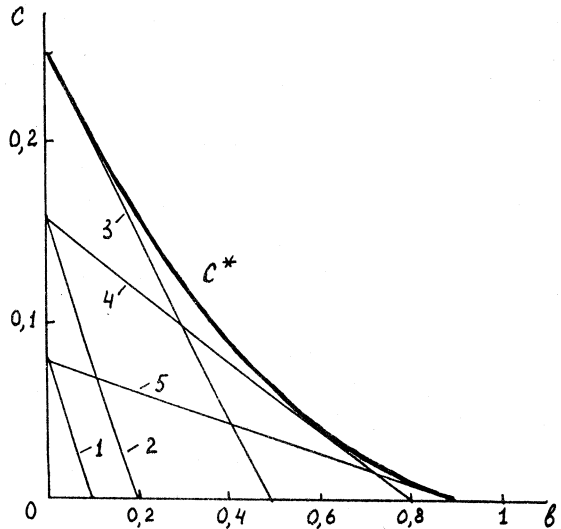
$$\frac{d\eta}{d\tau} = a(\xi\eta^2 - b\xi\eta - c\eta). \quad (2.7)$$

При этом были введены следующие безразмерные переменные и безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \xi &= vx/\mu, \quad \eta = \beta y/\mu, \quad \tau = \mu t; \\ a &= \psi\sigma\mu/(\gamma\nu), \quad b = \beta\gamma/(\psi\sigma\mu), \quad c = \alpha\gamma\nu/(\mu^2\psi\sigma). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Система (2.6), (2.7) исследовалась методами качественной теории дифференциальных уравнений и теории колебаний. На рис.2.1 представлены главные изоклины системы (2.6), (2.7): изоклины горизонтальных касательных $\eta = 0$, $\eta = b + c/\xi$ и изоклины вертикальных касательных $\xi = 0$ и

Рис. 2.2. Бифуркационная диаграмма системы (2.6), (2.7). Жирная кривая — линия c^* седловой бифуркации. Прямые 1—5 — линии c^{**} бифуркации потери устойчивости особой точки 4. Значения параметра a^{-1} : 1 — 0,1; 2 — 0,2; 3 — 0,5; 4 — 0,8; 5 — 0,9



$\eta = 1 - \xi$. Особые точки, расположенные на пересечении главных изоклин, отмечены на рис.2.1 кружками. Тривиальная особая точка

$\xi_1 = 0, \eta_1 = 0$ всегда неустойчива (седло). Точка 2 с координатами $\xi_2 = 1, \eta_2 = 0$ — устойчивый узел. Она соответствует состоянию здорового организма, в котором данная ткань имеет нормальный размер и не несет повреждений. Появление в положительном квадранте точек 3 и 4 (седловая бифуркация) происходит при пересечении границы $c = c^* = (1 - b)^2 / 4$ (при условии $b < 1$). На бифуркационной диаграмме (рис.2.2) область существования особых точек 3 и 4 — ниже жирной кривой $c = c^*$. Исследование устойчивости показывает, что точка 3 — всегда седловая, а 4 — узел или фокус. При пересечении границы $c = c^{**} = (1/a - b)(1 - 1/a)$ (ниже соответствующих прямых на рис.2.2) точка 4 теряет устойчивость, происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла.

Результаты исследования системы (2.6), (2.7) на ЭВМ представлены на рис.2.3—2.5. На рис.2.3 изображен фазовый портрет системы в случае, когда особые точки 3 и 4 не существуют. Все интегральные кривые сходятся в устойчивую точку 2. Такие решения описывают динамику аутоиммунитета у млекопитающих, обладающих потенциальной способностью восстановить ткань или орган, каковы бы ни были их первоначальные повреждения. Однако в реальных случаях эта возможность часто не осуществляется, так как наступает смерть из-за недостаточности поврежденной ткани или органа.

На рис.2.4 приведен типичный фазовый портрет системы, когда она имеет все четыре особые точки, причем четвертая является устойчивым фокусом. Видно, что фазовую плоскость по характеру интегральных кривых

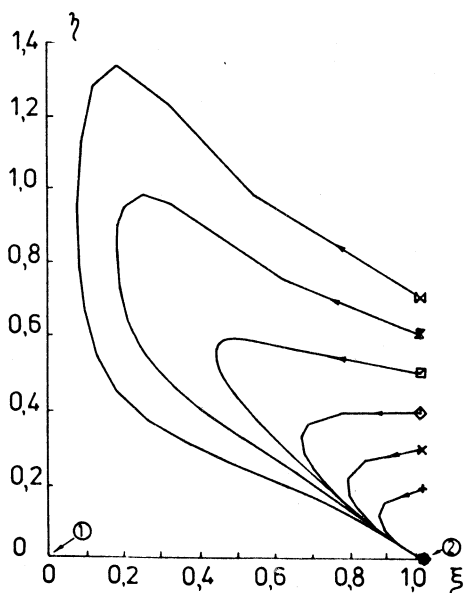


Рис. 2.3. Фазовый портрет системы (2.6), (2.7). Результаты расчета на ЭВМ при $a = 1,2$; $b = 0,17$; $c = 0,21$. Начальная ($\tau = 0$) и конечная ($\tau = 100$) точки интегральных кривых отмечены маркерами. Особые точки обозначены цифрами. Ось абсцисс — безразмерная концентрация клеток ткани-мишени $\xi(\tau)$, ось ординат — безразмерная концентрация агрессивных T -лимфоцитов $\eta(\tau)$

можно разделить на области I–IV. Линиями разделения являются сепаратрисы, проходящие через третью особую точку. Одна из ветвей исходящей сепаратрисы заканчивается во второй особой точке, а другая накручивается на четвертую точку. Интегральные кривые в

области I сходятся в устойчивый узел 2. Эти решения соответствуют случаям, когда имеют место небольшие начальные повреждения тканей и невысокие концентрации агрессивных лимфоцитов. При этом организму не требуется включения дополнительных механизмов, чтобы прийти в состояние нормы.

Решения системы в области II можно трактовать как процесс восстановления ткани в присутствии агрессивных лимфоцитов, направленных против клеток этой ткани. Время t_c , за которое безразмерная концентрация клеток ткани $\xi(\tau)$ изменяется от 0,1 до 0,9 при условии, что концентрация агрессивных лимфоцитов равна нулю ($\eta(\tau) = 0$), можно определить как время формирования соответствующей ткани при эмбриональном развитии организма.

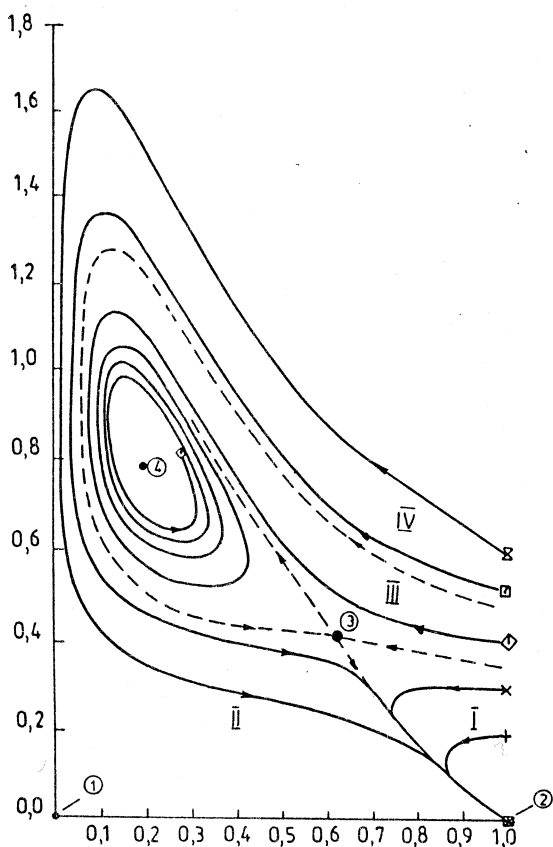
Между ветвями входящей в третью особую точку сепаратрисы лежит область III, в которой интегральные кривые имеют вид скручивающихся в четвертую особую точку спиралей. Соответствующие им динамические кривые представляют собой затухающие колебания. Такие решения описывают динамику прогрессирующих аутоиммунных заболеваний с периодическими обострениями. Решения в области IV характеризуются вначале быстрым нарастанием концентрации агрессивных T -лимфоцитов и уменьшением концентрации неповрежденных клеток ткани. Затем интегральные кривые переходят в область II. По-видимому, эти решения имеют смысл

Рис. 2.4. Фазовый портрет системы (2.6), (2.7). Результаты расчета на ЭВМ при $a = 1,2$; $b = 0,17$; $c = 0,125$. Пунктирные линии — сепаратрисы, разграничивающие области различных динамических режимов. Остальные обозначения те же, что и на рис.2.3

только в ограниченной области фазовой плоскости, так как в живых организмах смерть наступает задолго до полного разрушения жизненно важного органа или ткани.

Особый интерес представляют решения системы (2.6), (2.7), когда четвертая особая точка становится неустойчивой. В таких случаях появляется еще одно устойчивое особое решение — предельный цикл (устойчивые колебания значений переменных ξ и ν вокруг значений ξ_4 и η_4). К предельному циклу сходятся все интегральные кривые из области III (рис.2.5). Подобные решения являются аналогом хронических аутоиммунных заболеваний. При выбранном соотношении параметров период колебаний концентраций ξ и η приблизительно равен $2t_c$. Если принять во внимание, что время формирования органов и тканей человека в эмбриональном развитии составляет $3/4$ года, то периодичность обострений, согласно модели, имеет порядок одного-двух лет. Этот результат соответствует клиническим наблюдениям [96].

На основе качественного исследования модели (2.6), (2.7) можно объяснить эксперименты по искусственному аутоиммунитету, который вызывался у лабораторных животных введением вместе с адьювантом Фрейнда экстрактов их собственных тканей или убитых микробов (стафилококков, стрептококков), имеющих общую антигенную специфичность с некоторыми



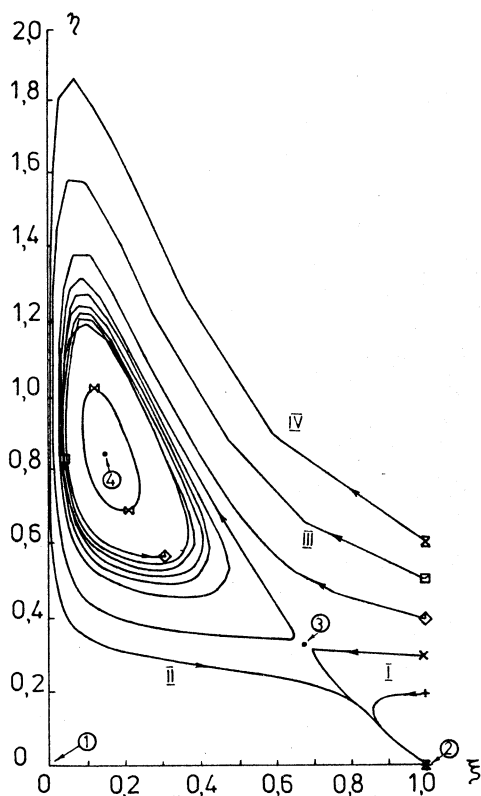


Рис. 2.5. Фазовый портрет системы (2,6), (2,7). Результаты расчета на ЭВМ при $a = 1,2$; $b = 0,17$; $c = 0,1$. Обозначения те же, что и на рис. 2.3, 2.4

тканями организма. При этом у лабораторных животных развивались аутоиммунные болезни, которые либо «спонтанно» излечивались, либо заканчивались гибелью. В рамках модели введение указанных выше компонентов эквивалентно скачкообразному увеличению концентрации аутоантигена и, следовательно, увеличению концентрации агрессивных лимфоцитов. Если при этом система останется в области I на фазовой плоскости (рис.2.5), то с течением времени она вернется в исходное состояние. Такие решения модели эквивалентны спонтанному излечению. Если же система

окажется в области IV, то с течением времени концентрация неповрежденных клеток ткани уменьшится столь значительно, что такие решения эквивалентны острому течению аутоиммунного процесса и гибели.

В рамках модели (2.6), (2.7) имитировалась динамика аутоиммунного процесса при лечении больного иммунодепрессантами (кортикостероидными гормонами). Излишек последних в крови вызывает разрушение лимфоцитов. Поэтому введение кортикостероидных гормонов в организм с точки зрения модели можно рассматривать как скачкообразное уменьшение концентрации агрессивных лимфоцитов. Это может привести к тому, что изображающая точка на фазовой плоскости перейдет из области хронического течения болезни (III) в области выздоровления (I, II) (рис.2.5). Анализ модели показал, что наиболее благоприятным временем введения лекарства является период ремиссии, когда концентрация агрессивных лимфоцитов минимальна.

Таким образом, разработанная в [101] модель передает основные черты аутоиммунного процесса и может быть использована как основа при построении моделей динамики аутоиммунитета у облученных млекопитающих.

2.3. Аутоиммунные реакции, вызванные острым радиационным воздействием. В работе [105] моделировался аутоиммунный процесс, развивающийся в здоровом организме после острого облучения. Действие ионизирующего излучения вызывает гибель части клеток радиочувствительной ткани. В соответствии с одномишенной одноударной моделью радиационного поражения клеток [80] концентрации неповрежденных (x) и поврежденных (x_n) радиацией клеток этой ткани равны

$$x = \bar{x} \exp(-D/D_k), \quad (2.9)$$

$$x_n = \bar{x}[1 - \exp(-D/D_k)]. \quad (2.10)$$

Здесь $\bar{x}$ — концентрация клеток ткани до облучения, D_k — доза D_0 , характеризующая радиочувствительность этих клеток.

Из поврежденных радиацией клеток аутологичной ткани при их разрушении выделяется тканеспецифический аутоантиген. Его концентрация z пропорциональна x_n :

$$z = \sigma x_n = \sigma \bar{x}[1 - \exp(-D/D_k)], \quad (2.11)$$

где σ — константа.

Действие радиации приводит также к гибели части популяции T -супрессоров. Их концентрация S_n определяется формулой, аналогичной (2.10):

$$S_n = \bar{S}[1 - \exp(-D/D_s)]. \quad (2.12)$$

В (2.12) $\bar{S}$ — исходная концентрация T -супрессоров, D_s — доза D_0 , характеризующая их радиочувствительность.

Гибель T -супрессоров, в свою очередь, приводит к освобождению от толерантности части популяции иммунокомпетентных клеток-предшественников, пропорциональной концентрации погибших T -супрессоров S_n . В соответствии с этим концентрация агрессивных T -лимфоцитов y описывается выражением

$$y(t_i) = \kappa S_n = \kappa \bar{S}[1 - \exp(-D/D_s)], \quad (2.13)$$

где κ — константа, t_i — время, необходимое для созревания агрессивных T -лимфоцитов в тимусе.

В ходе рассматриваемого процесса происходит также естественный распад молекул антигена с удельной скоростью γ :

$$\frac{dz}{dt} = -\gamma z. \quad (2.14)$$

В момент выхода (t_f) из тимуса агрессивных T -лимфоцитов концентрация тканеспецифического антигена в соответствии с (2.11), (2.14) равна

$$z(t_f) = \sigma \bar{x} [1 - \exp(-D/D_k)] \exp(-\gamma t_f). \quad (2.15)$$

Время истощения исходной концентрации тканеспецифического антигена, а следовательно, и время размножения стимулированных последним агрессивных T -лимфоцитов (несколько суток) много меньше времени развития аутоиммунных процессов (месяцы). Поэтому в модели сначала рассматривался этот «быстрый» процесс, описываемый уравнением (2.14) и уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \psi y z. \quad (2.16)$$

В свою очередь, решения системы (2.14), (2.16) с начальными условиями (2.15), (2.13) считались начальными условиями для уравнений (2.3), (2.4). Эти начальные условия равны

$$z(0) = 0, \quad (2.17)$$

$$y(0) = \kappa \bar{S} [1 - \exp(-D/D_s)] \times \\ \times \exp\{(\psi \sigma \bar{x} / \gamma) \exp(-\gamma t_f) [1 - \exp(-D/D_k)]\}. \quad (2.18)$$

Начальное условие для решения уравнения (2.2) выражается соотношением (2.9), если время истощения исходной концентрации тканеспецифического антигена меньше характерного времени восстановительных процессов в популяции клеток-мишеней. Именно такие случаи и рассматривались в [105].

Система (2.2)—(2.4) сводится к (2.2), (2.5), если учесть, что «быстрое» уравнение (2.3) можно заменить, как и ранее, стационарным решением. В безразмерных переменных уравнения (2.2), (2.5) принимают вид (2.6), (2.7), а начальные условия (2.9), (2.18) записываются следующим образом:

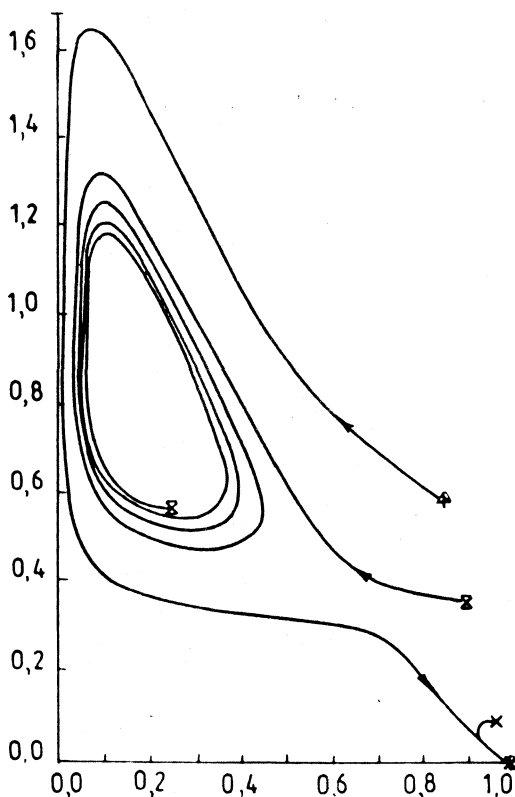
$$\xi(0) = \exp(-D/D_k), \quad (2.19)$$

$$\eta(0) = l [1 - \exp(-D/D_s)] \exp\{m [1 - \exp(-D/D_k)]\}. \quad (2.20)$$

Здесь $l = \kappa \bar{S} \beta / \mu$ и $m = (\psi \sigma \bar{x} / \gamma) \exp(-\gamma t_f)$ — новые безразмерные параметры.

Предложенная форма описания влияния радиации на динамику аутоиммунных процессов, как показали проведенные в [105] исследования

Рис. 2.6. Изменение концентраций клеток ткани-мишени ξ и агрессивных T -лимфоцитов η после воздействия различных доз радиации D . Результаты численного расчета на ЭВМ системы (2.6), (2.7) с начальными условиями (2.19), (2.20) и параметрами $a = 1,2$; $b = 0,17$; $c = 0,1$; $l = m = 1$; $D_s = 1$ Гр, $D_k = 4$ Гр представлены в виде интегральных кривых на фазовой плоскости (ось абсцисс — $\xi(\tau)$, ось ординат — $\eta(\tau)$). Дозам $D = 0,1$; $0,4$; $0,7$ Гр соответствуют кривые, отмеченные маркерами $\times$, $\otimes$, $+$ в начальной ($\tau = 0$) и конечной ($\tau = 100$) точках



модели, обеспечивает воспроизведение ею основных экспериментально наблюдаемых ситуаций [83,94]. Так, изучалась динамика аутоиммунного процесса у млекопитающих после воздействия различных доз ионизирующего излучения (рис.2.6). Три интегральные кривые фазового портрета соответствуют трем различным дозам облучения D . Из рис.2.6 видно, что воздействие малых доз радиации ($D \ll \min(D_k, D_s)$) не вызывает развития аутоиммунной болезни. Концентрация агрессивных T -лимфоцитов уменьшается до нуля, а популяция клеток аутологичной ткани полностью восстанавливается. Воздействие доз $D < \min(D_k, D_s)$ приводит к установлению в системе устойчивых колебаний концентраций неповрежденных клеток ткани-мишени и направленных против них агрессивных T -лимфоцитов, т.е. к развитию хронического аутоиммунного заболевания. Воздействие доз $D \sim \min(D_k, D_s)$ вызывает резкое увеличение концентрации киллеров и уменьшение концентрации неповрежденных клеток-мишеней. Такие решения можно рассматривать как имитацию «острых» аутоиммунных процессов. Они могут заканчиваться либо гибелью организма, если рассматриваемая ткань выполняет жизненно важные функции, либо спонтанным излечением.

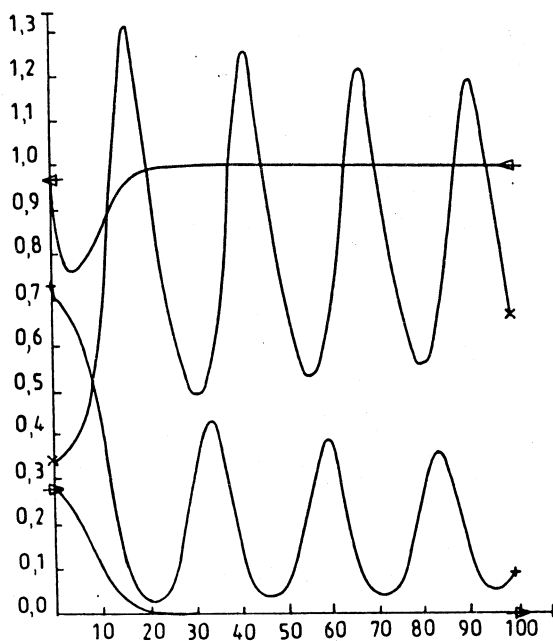


Рис. 2.7. Динамика изменения концентраций ξ клеток радиорезистентной ($\leftarrow$) и радиочувствительной ($+$) тканей и направленных против них агрессивных T -лимфоцитов η ($\rightarrow$ и $\times$ соответственно) после острого облучения в дозе $D = 0,3$ Гр. Результаты расчета на ЭВМ системы (2.6), (2.7) с начальными условиями (2.19), (2.20) и значениями параметров $D_k = 1$ Гр и $D_k = 10$ Гр. Значения коэффициентов a, b, c, l, m, D_s приведены в подписи к рис.2.6. По оси абсцисс — безразмерное время τ , по оси ординат — безразмерные концентрации ξ и η

Модель отражает и тот экспериментально наблюдаемый факт, что пост-радиационный аутоиммунитет направлен против наиболее радиочувствительных тканей. На рис.2.7 представлена динамика аутоиммунных процессов, которые развиваются после воздействия одной и той же дозы радиации на две ткани организма, отличающиеся радиочувствительностью. Видно, что популяция клеток радиорезистентной ткани полностью восстанавливается, а концентрация соответствующих агрессивных T -лимфоцитов падает до нуля. Популяция клеток радиочувствительной ткани поражается хроническим аутоиммунным заболеванием — концентрации неповрежденных киллерами клеток ткани и соответствующих агрессивных T -лимфоцитов колеблются вокруг новых стационарных значений.

Таким образом, предложенная модель воспроизводит основные закономерности аутоиммунных процессов, развивающихся у млекопитающих после острого радиационного воздействия.

2.4. Аутоиммунитет при хронических радиационных воздействиях. В работе [106] построена и исследована модель аутоиммунного процесса, развивающегося у млекопитающих под воздействием хронического облучения. В качестве переменных модели использованы концентрация T -супрессоров кортикального слоя тимуса S , а также, как и в [101,105], концентрации клеток аутологичной ткани x , агрессивных T -лимфоцитов y и

специфического антигена z . При описании динамики клеток, подвергающихся пролонгированному радиационному воздействию, использовалась, как и в [105], одномишенная одноударная модель, согласно которой скорость радиационного поражения клеток пропорциональна мощности дозы N [80]. В соответствии с этой моделью и моделью (2.2)—(2.4) динамика аутоиммунных процессов у млекопитающих при хроническом облучении описана следующей системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - vx^2 - \beta xy - \frac{N}{D_k}x, \quad (2.21)$$

$$\frac{dy}{dt} = \psi zy - \beta xy - \alpha y + \varepsilon, \quad (2.22)$$

$$\frac{dz}{dt} = \sigma \beta xy - \gamma z + \frac{\sigma N}{D_k}x, \quad (2.23)$$

$$\frac{dS}{dt} = \omega S - \phi S^2 - \frac{N}{D_s}S. \quad (2.24)$$

При $N = 0$ и $\varepsilon = 0$ система (2.21)—(2.23) эквивалентна (2.2)—(2.4).

Уравнение (2.24) при $N = 0$ представляет собой уравнение Ферхюльста: члены ωS и ϕS^2 описывают скорости размножения и естественной гибели T -супрессоров. Стационарным решением этого уравнения является величина $\bar{S} = \omega / \phi$, которая представляет собой концентрацию T -супрессоров кортикального слоя тимуса у здорового необлученного млекопитающего. Члены, пропорциональные мощности дозы N , в (2.21), (2.24) — это удельные скорости убыли радиочувствительных клеток ткани-мишени и T -супрессоров в результате повреждающего действия радиации. Коэффициенты D_k и D_s имеют тот же смысл, что и в (2.9)—(2.12). Член $\sigma(N/D_k)x$ в (2.23) — это скорость образования тканеспецифического антигена при пострadiационном разрушении клеток ткани. Величина ε — скорость поступления киллеров из тимуса. Как и в [105], полагали, что гибель некоторого количества T -супрессоров кортикального слоя тимуса освобождает от толерантности пропорциональное этому количеству число иммунокомпетентных клеток-предшественников из медуллярной его части. Поэтому величина ε задана кусочно-линейной функцией

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{при } S \geq \bar{S}, \\ \chi k(\bar{S} - S) & \text{при } S < \bar{S}, \end{cases} \quad (2.25)$$

где k — коэффициент пропорциональности, χ — удельная скорость созревания агрессивных T -лимфоцитов в тимусе.

Система (2.21)—(2.23) была упрощена с учетом различия постоянных времени развития аутоиммунных процессов (месяцы) и установления стационарных концентраций антигена (сутки). По теореме А.Н.Тихонова [5] «быстрое» уравнение (2.23) было заменено стационарным решением $z = (\sigma/\gamma)[\beta xy + (v/D_k)x]$, в соответствии с которым уравнение (2.22) приняло вид:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\psi\sigma\beta}{\gamma}xy^2 - \left[\beta - \frac{\sigma\psi}{\gamma} \frac{N}{D_k} \right] xy - \alpha y + \varepsilon. \quad (2.26)$$

После перехода к безразмерным переменным $\xi = vx/\mu$, $\eta = \beta y/\mu$, $\zeta = \varphi S/\omega$, $\tau = \mu t$ и безразмерным параметрам $a = \psi\sigma\mu/(\gamma v)$, $b = \beta\gamma/(\psi\sigma\mu)$, $q = \omega/\mu$, $c = \alpha\gamma v/(\mu^2\psi\sigma)$, $h = \gamma v\beta k\chi\omega/(\psi\sigma\mu^3\varphi)$, в [106] была получена следующая система уравнений:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi \left\{ \left(1 - \frac{N}{\mu D_k} \right) - \xi - \eta \right\}, \quad (2.27)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = a \left\{ \xi\eta^2 - \left[b - \frac{N}{\mu D_k} \right] \xi\eta - c\eta + \varepsilon' \right\}, \quad (2.28)$$

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = q\zeta \left\{ \left[1 - \frac{N}{\omega D_s} \right] - \zeta \right\}, \quad (2.29)$$

где

$$\varepsilon' = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta \geq 1, \\ h(1 - \zeta) & \text{при } \zeta < 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

Система (2.27)—(2.29) исследовалась методами качественной теории дифференциальных уравнений и теории колебаний. Используя аналитические расчеты, удалось определить расположение и устойчивость пяти ее особых точек, а также получить соотношения между мощностью дозы N и другими коэффициентами модели, которые задают в пространстве параметров условия седловой бифуркации и бифуркации рождения предельного цикла. На основе проведенного анализа получены формулы, позволяющие рассчитывать критические значения мощности дозы хронического облучения N_c , при достижении или превышении которых происходит необратимое разрушение всех клеток ткани-мишени. В зависимости от соотношений между параметрами эти формулы имеют вид

$$N_c = \frac{\mu D_k}{1 + h\mu D_k/c\omega D_s} \quad \text{при } \mu D_k \left(1 - \frac{h}{c} \right) < \omega D_s; \quad (2.31)$$

$$N_c = \mu D_k \left(1 - \frac{h}{c} \right) \quad \text{при } \mu D_k \left(1 - \frac{h}{c} \right) > \omega D_s. \quad (2.32)$$

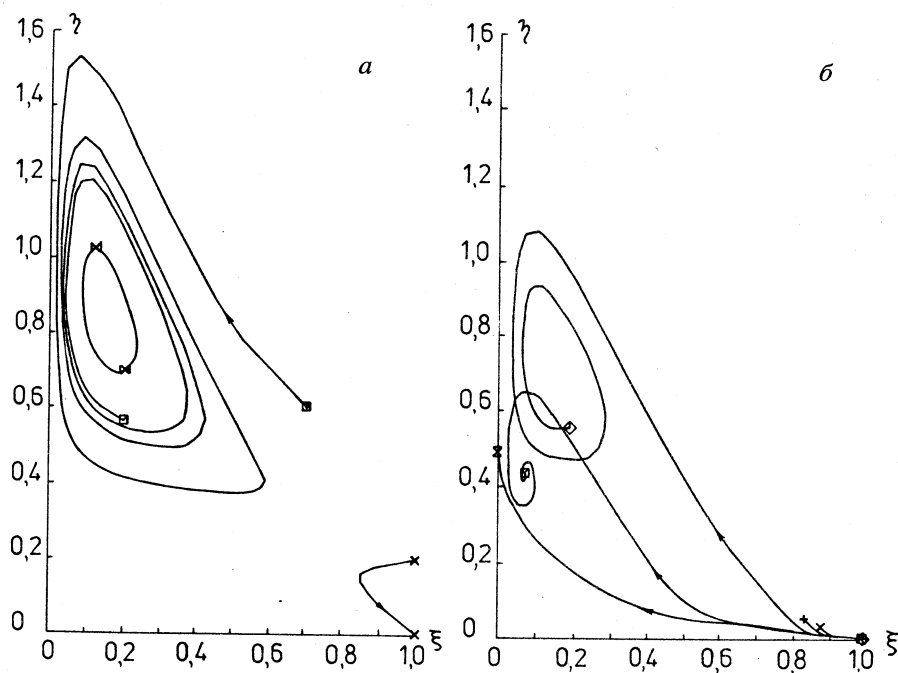


Рис. 2.8. Проекция на плоскость состояний $\{\xi, \eta\}$ интегральных кривых системы (2.27)—(2.29) при $D_s = 1$ Гр, $D_k = 4$ Гр: а) — фиксирована мощность дозы облучения $N_1 = 0,001$ Гр/сут, а начальные условия равны $\xi(0) = 1$, $\eta(0) = 0,2$, $\zeta(0) = 1$ — (x); $\xi(0) = 0,7$, $\eta(0) = 0,6$, $\zeta(0) = 1$ — (□); $\xi(0) = 0,2$, $\eta(0) = 0,7$, $\zeta(0) = 1$ — (⋈); б) — фиксированы начальные условия $\xi(0) = 1$, $\eta(0) = 0$, $\zeta(0) = 1$, а мощность дозы равна $N_2 = 0,04$ (x); $N_3 = 0,049$ (+); $N_4 = 0,063$ (◇); $N_5 = 0,2$ (□); $N_6 = 0,5$ Гр/сут (x). Маркеры отмечают начальные ($\tau = 0$) и конечные ($\tau = 100$) точки интегральных кривых

Проведенный анализ дал возможность целенаправленно исследовать разработанную модель на ЭВМ. Исходные значения коэффициентов были выбраны равными $a = 1,2$; $b = 0,17$; $c = 0,1$; $h = 0,1$; $\omega = 1 \text{ сут}^{-1}$; $\mu = 0,1 \text{ сут}^{-1}$. Именно при данном наборе параметров система (2.27)—(2.29) при $N = 0$ наиболее полно описывает экспериментально наблюдаемые динамические режимы аутоиммунных болезней у необлученных млекопитающих (рис.2.5).

В ходе «численного эксперимента» изучалась зависимость аутоиммунных процессов от мощности дозы N хронического облучения. При наименьшей из рассмотренных мощностей доз N_1 (рис.2.8,а) система (2.27)—(2.29)

имеет особое решение — устойчивый предельный цикл — аналог хронического аутоиммунного процесса. Однако, как показали расчеты, выход на этот динамический режим возможен лишь в тех случаях, когда уже до начала облучения концентрация агрессивных лимфоцитов достаточно велика и имеются повреждения ткани-мишени. Данный результат свидетельствует о том, что длительное воздействие радиации даже с небольшими мощностями доз может, в ряде случаев, привести к усилению протекавших до облучения аутоиммунных процессов. В тех случаях, когда перед воздействием радиации с малой мощностью дозы (N_1, N_2, N_3) концентрация агрессивных лимфоцитов мала или равна нулю, а ткань не имеет повреждений, интегральные кривые заканчиваются в особой точке, пребывание в которой можно рассматривать как «стабильный» аутоиммунный процесс, характеризуемый небольшими повреждениями ткани-мишени и небольшими концентрациями киллеров (рис.2.8,а,б). При увеличении мощности дозы облучения (N_4, N_5) аутоиммунный процесс развивается, даже если пролонгированному радиационному воздействию подвергается здоровый организм ($\epsilon(0) = 1, \eta(0) = 0, \zeta(0) = 1$). При этом в результате аутоагрессии будет повреждено тем больше клеток ткани-мишени, чем больше N (рис.2.8,б). В тех случаях, когда величина N становится равной или превышает некоторое критическое значение (N_6), концентрация неповрежденных радиацией клеток ткани уменьшается до нуля. Такие решения можно рассматривать как аналог гибели организма, если данная ткань выполняет жизненно важные функции.

Исследовалась также зависимость динамики аутоиммунитета от радиочувствительности клеток ткани и T -супрессоров кортикального слоя тимуса. Параметры D_k и D_s варьировались в широких пределах. Было найдено, что хроническое облучение с одной и той же мощностью дозы N приводит к развитию аутоиммунных процессов, при которых поражается тем большее количество клеток ткани-мишени, чем выше радиочувствительность клеток этой ткани и T -супрессоров.

Модель (2.27)—(2.29) использовалась также для имитации влияния экранирования ткани-мишени и тимуса на динамику аутоиммунитета. При этом различная степень радиационной защиты задавалась изменением эффективной мощности дозы облучения ($N_{эф}$), действующего на экранированный орган или ткань. На рис.2.9,а—г представлены результаты расчета модели (2.27)—(2.29) при $N = 0,063$ Гр/сут, $D_k = D_s = 1$ Гр. На этих же рисунках отмечены стационарные уровни концентрации клеток ткани-мишени $\bar{\xi}_R = 1 - N_{эф}/(\mu D_k)$, до которых снизилась бы величина ξ в результате прямого радиационного поражения ткани при мощности дозы $N_{эф}$ и без учета

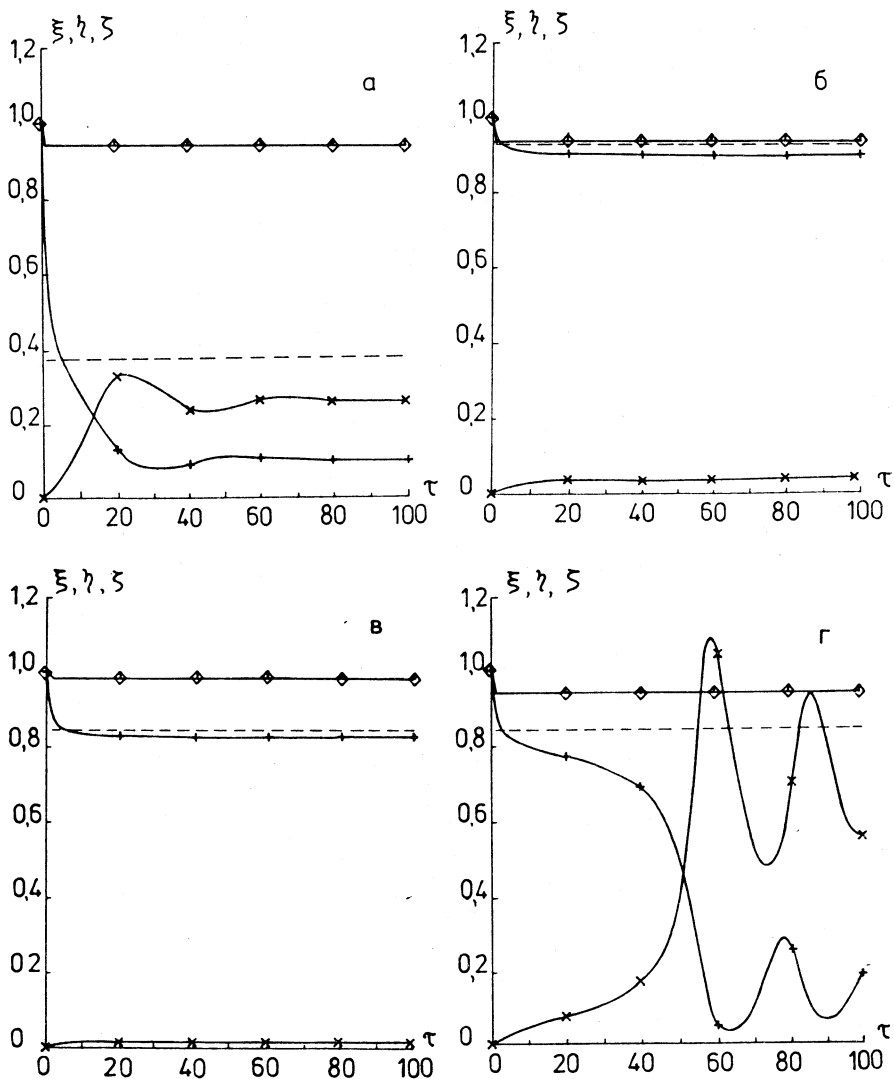


Рис. 2.9. Влияние радиационной защиты на динамику аутоиммунных процессов: а) радиационная защита отсутствует ($N_{\text{эф}} = N$); б) экранирована ткань-мишень ($N_{\text{эф}} = 0,1N$); в) экранированы ткань и тимус ($N_{\text{эф}} = 0,25N$); г) экранирована ткань-мишень ($N_{\text{эф}} = 0,25N$). Кривые $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ отмечены маркерами (+, ×, ◇). Пунктирными линиями обозначены уровни снижения концентрации клеток ткани-мишени в результате прямого радиационного поражения клеток при мощности дозы $N_{\text{эф}}$ и без учета аутоагрессии — $\bar{\xi}_R$

аутоагрессии. Рис.2.9,а соответствует случаю, когда ни тимус, ни ткань-мишень не экранированы ($N_{\text{эф}} = N$). Из рисунка видно, что комбинированное воздействие радиации и аутоагрессии приводит к повреждению значительного количества клеток ткани-мишени, которое в ряде случаев может закончиться гибелью млекопитающего. Экранирование ткани-мишени, снижающее эффективную мощность дозы в 10 раз (рис.2.9,б), почти полностью предотвращает развитие аутоиммунной реакции. Такие же результаты получаются при одновременном экранировании ткани и тимуса, уменьшающем эффективную мощность дозы облучения всего в 4 раза (рис.2.9,в). Как и на рис.2.9,б, ткань имеет небольшие повреждения, обусловленные, в основном, действием ионизирующей радиации. Следует отметить, что радиационная защита только ткани-мишени, снижающая эффективную мощность дозы также в 4 раза, не приостанавливает развитие аутоиммунного процесса, хотя и ослабляет степень повреждения защищенного органа (рис.2.9,г). Приведенные результаты свидетельствуют о важной роли экранирования тимуса в предотвращении отдаленного последствия пролонгированного радиационного воздействия — развития аутоиммунных процессов, поражающих радиочувствительные органы и ткани.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Моделирование в биологии:** Пер. с англ. М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
2. **Теоретическая и математическая биология:** Пер. с англ. М.: Мир, 1968.
3. **Бейли Н.** — Математика в биологии и медицине: Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
4. **Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.** — Что такое математическая биофизика. М.: Просвещение, 1971.
5. **Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.** — Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.
6. **Марри Дж.** — Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Пер. с англ. М.: Мир, 1983.
7. **Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.** — Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
8. **Беллман Р.** — Математические методы в медицине: Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
9. **Ахутин В.М., Нефедов В.П., Сахаров М.П. и др.** — Инженерная физиология и моделирование систем организма. Новосибирск: Наука, 1987.
10. **Бонд В., Флинднер Т., Аршамбо Д.** — Радиационная гибель млекопитающих: нарушение кинетики клеточных популяций: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1971.
11. **Бернет Ф.** — Клеточная иммунология: Пер. с англ. М.: Мир, 1971.
12. **Носсел Г.** — Антитела и иммунитет: Пер. с англ. М.: Медицина, 1973.
13. **Чертков И.Л., Фриденштейн А.Я.** — Клеточные основы иммунитета. М.: Медицина, 1969.
14. **Петров Р.В.** — Иммунология и иммуногенетика. М.: Медицина, 1976.
15. **Петров Р.В.** — Иммунология. М.: Медицина, 1987.

16. **Microbiology** (Davis B.S., Dulbecco R., Eisen H.N., Ginsberg H.S. and Wood W.V., eds). New York: Harper and Row, 1968.
17. **Bell G.I.** — J. of Theor. Biology, 1970, vol.29, p.191.
18. **Bell G.I.** — J. of Theor. Biology, 1971, vol.33, p.339.
19. **Bell G.I.** — J. of Theor. Biology, 1971, vol.33, p.379.
20. **Bell G.I.** — Biosciences, 1973, vol.16, p.291.
21. **Смирнова О.Ф., Степанова Н.В.** — Вестник Московского университета (физика, астрономия), 1971, №5, с.520.
22. **Смирнова О.А., Степанова Н.В.** — Колебательные процессы в биологических и химических системах: Труды Второго Всесоюзного симпозиума по колебательным процессам в биологических и химических системах. Пушино-на-Оке, 23—27 ноября 1970 г. Пушино-на-Оке: НЦБИ АН СССР, 1971, т.2, с.247.
23. **Смирнова О.А., Степанова Н.В.** — Журнал микробиологии, эпидемиологии и иммунологии, 1974, №11, с.50.
24. **Леви М.И., Смирнова О.А., Степанова Н.В.** — Журнал микробиологии, эпидемиологии и иммунологии, 1974, №11, с.113.
25. **Смирнова О.А., Степанова Н.В.** — Теоретическая и экспериментальная биофизика: Межвуз. сборник. Калининград: КГУ, 1975, вып.5, с.61.
26. **Смирнова О.А.** — Вестник Московского университета (физика, астрономия), 1975, №4, с.485.
27. **Jilek M., Sterzl J.** — Developmental Aspects of Antibody Formation and Structure. Prague: Academia; New York: Academic Press, 1970, p.963.
28. **Jilek M., Ursinyova Z.** — Folia Microbiologica, 1970, vol.15, p.294.
29. **Jilek M., Ursinyova Z.** — Folia Microbiologica, 1970, vol.15, p.492.
30. **Jilek M.** — Folia Microbiologica, 1971, vol.16, p.83.
31. **Молчанов А.В.** — Биофизика, 1971, т.16, №3, с.482.
32. **Молчанов А.М., Назаренко В.Г., Шатурный И.Г.** — Биофизика, 1971, т.16, №4, с.667.
33. **Марчук Г.И.** — Математические методы в клинической практике (Под ред. Г.И.Марчука и Н.И.Нисевич). Новосибирск: Наука, 1978, с.7.
34. **Марчук Г.И.** — Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980.
35. **Математические модели заболеваний и методы обработки медицинской информации.** (Под ред. Г.И.Марчука). Новосибирск: Наука, 1979.
36. **Математическое моделирование в иммунологии и медицине.** (Под редакцией Г.И.Марчука). Новосибирск: Наука, 1982.
37. **Марчук Г.И.** — Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1985.
38. **Белых Л.Н.** — Анализ математических моделей в иммунологии. М.: Наука, 1988.
39. **Зув С.М.** — Статистическое оценивание параметров математических моделей заболеваний. М.: Наука, 1988.
40. **Romanyukha A.A., Bocharov G.A., Marchuk G.I.** — Mathematical Aspects of Human Diseases (Ed. G.Da Prato). Applied Mathematics Monographs. Pisa: Giardini Editori E Stampatori, 1992, vol.3, p.126.
41. **Bocharov G.A., Romanyukha A.A.** — Theoretical and Experimental Insights into Immunology (Eds. A.Perelson). Weisbuch. NATO ASI Series H. Heidelberg: Springer Verlag. 1992, vol.66, p.309.

42. Marchuk G.I., Romanyukha A.A., Bocharov G.A. — Mathematics Applied to Biology and Medicine. (Eds. J.Demongeot, V.Capasso). Mathematica Biology Ser. Winnipeg. Canada: Wuerz Publishing Ltd., 1993, p.263.
43. Bocharov G.A., Romanyukha A.A. — J. Theor. Biol., 1994, vol.167, p.323.
44. Bocharov G.A., Romanyukha A.A. — Appl. Num. Math., 1994, vol.15, p.307.
45. Theoretical Immunology (Ed. by G.Bell, A.Perelson, G.Pimbley). New York: Marcel Dekker, 1978.
46. Bell G.I., De Lisi C.P. — Cellular Immunology, 1974, vol.10, p.415.
47. De Lisi C.P. — J. of Theor. Biology, 1974, vol.45, p.555.
48. De Lisi C.P. — Bulletin of Mathematical Biology, 1977, vol.39, p.705.
49. De Lisi C.P. — Mathematical Biosciences, 1974, vol.21, p.251.
50. De Lisi C.P., Perelson A.S. — J. of Theor. Biology, 1976, vol.62, p.159.
51. Perelson A.S., Mirmirani M., Oster G.F. — J. of Math. Biology, 1976, vol.3, p.325.
52. Perelson A.S., Mirmirani M., Oster G.F. — J. of Math. Biology, 1976, vol.5, p.213.
53. Pimbley G.H. — Math. Biosciences, 1974, vol.20, p.27.
54. Pimbley G.H. — Math. Biosciences, 1975, vol.21, p.251.
55. Bruni C., Germani A., Koch G., Strom R. — J. of Theor. Biology, 1975, vol.61, p.143.
56. Bruni C., Giovenco M.A., Koch G., Strom R. — Math. Biosciences, 1975, vol.27, p.191.
57. Mohler R. — Proc. of the IFIP TC: Working Conf., Novosibirsk, USSR, 3—9 July. (Ed. by G.I.Marchuk). Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1979, p.58.
58. Дибров Б.Ф., Лифшиц М.А., Волькенштейн М.В. — Биофизика, 1977, т.21, с.905.
59. Дибров Б.Ф., Лифшиц М.А., Волькенштейн М.В. — Биофизика, 1977, т.22, с.313.
60. Дибров Б.Ф., Лифшиц М.А., Волькенштейн М.В. — Биофизика, 1978, т.23, с.143.
61. Дибров Б.Ф., Лифшиц М.А., Волькенштейн М.В. — Биофизика, 1978, т.23, с.494.
62. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. — Математические методы в биологии. Киев: Наукова думка, 1983.
63. Ikegami T. — Progress of Theor. Physics, 1989, vol.81, №2, p.309.
64. Stewart J., Varela F.J. — J.Theor. Biol., 1991, vol.144, p.477.
65. De Boer R.J., Kevrekidis I.G., Perelson A.S. — Bull. Math. Biol., 1993, vol.55, p.745.
66. Frost S.D.W., McLean A.R. — J. of Acquired Immune Deficiency Syndromes, 1994, vol.7, №3, p.236.
67. Леви М.И., Смирнова О.А. — Журнал общей биологии, 1977, т.38, №1, с.88.
68. Levi M.I., Smirnova O.A. — Folia Microbiologica, 1977, vol.22, p.117.
69. Смирнова О.А. — Радиочувствительность и процессы восстановления у животных и растений: Тезисы докладов симпозиума, Ташкент, 23—26 окт. 1979 г., Ташкент: Фан, 1979, с.78.
70. Смирнова О.А., Говорун Р.Д., Рыжов Н.И. — Восстановление и компенсаторные процессы при лучевых поражениях: Тезисы VII Всесоюзной конференции, Ленинград, 21—23 ноября 1979 г. Ленинград: ЦНИРРИ, 1979, с.94.

71. Смирнова О.А., Говорун Р.Д., Рыжов Н.И. — Радиобиология, 1982, т.22, вып.4, с.488.
72. Смирнова О.А. — Иммунология, 1984, №2, с.38.
73. Osmond D.G., Nossal J.V. — Cellular Immunology, 1974, vol.13, №1, p.132.
74. Laeffleur L., Underdown B.J., Miller R.G., Phillips R.A. — Series Haematologica, 1972, vol.2, p.50.
75. Ryser J.E., Vassali P. — J. of Immunology, 1974, vol.113, p.719.
76. Boyden S. — Advances in Immunology, 1966, vol.5, p.1.
77. Фонталлин Л.Н., Певницкий Л.А. — Бюллетень экспериментальной биологии и медицины, 1974, т.78, №12, с.51.
78. Леви М.И., Басова Н.Н. — Журнал микробиологии, эпидемиологии и иммунологии, 1972, №2; с.42.
79. Леви М.И., Саакян Р.Р., Лившиц М.М. и др. — Журнал микробиологии, эпидемиологии и иммунологии, 1975, с.104.
80. Капульцевич Ю.Г. — Количественные закономерности лучевого поражения клеток. М.: Атомиздат, 1978, с.24.
81. Смирнова О.А. — Радиобиология, 1985, т.25, вып.4, с.571. Деп. в ВИНТИ: №2552-85: 16.04.85.
82. Серая В.М., Рыжов Н.И., Дербенева Н.Н. — Биологическое действие протонов высоких энергий (Под ред. Ю.Г.Григорьева). М.: Атомиздат, 1967, с.268.
83. Шубик В.М. — Ионизирующее излучение и иммунитет. М.: Атомиздат, 1977.
84. Незлин Р.С. — Биохимия антител. М.: Наука, 1966.
85. Ярилин А.А. — Автореферат дисс. мед. наук. Л.: ИЭМ АМН СССР, 1981.
86. Петров Р.В. — Успехи современной биологии, 1960, т.50, вып.2, с.174.
87. Петров Р.В. — Успехи современной биологии, 1964, т.58, вып.2, с.262.
88. Троицкий В.Л., Каулен Д.Р., Туманян М.А. и др. — Радиационная иммунология. М.: Медицина, 1965.
89. Taliaferro W.H., Taliaferro L.G., Jaroslow B.N. — Radiation and Immune Mechanisms. New York; London: Academic Press, 1964.
90. Dixon F.G., Talmage D.W., Maurer P.H. — J. of Immunology, 1952, vol.68, No.6, p.693.
91. Ярилин А.А., Полушкина Э.Ф. — Радиобиология, 1979, т.19, вып.4, с.560.
92. Ярилин А.А., Полушкина Э.Ф., Филатов П.П. — Радиобиология, 1979, т.19, вып.5, с.682.
93. Ярилин А.А., Полушкина Э.Ф., Филатов П.П. — Радиобиология, 1976, т.16, вып.3, с.451.
94. Шубик В.М. — Иммунологические исследования в радиационной гигиене. М.: Энергоатомиздат, 1987.
95. Аутоантитела облученного организма (Под ред. Н.Н.Клемпарской). М.: Атомиздат, 1972.
96. Иммунопатология в клинике и эксперименте и проблема аутоантител (Под ред. П.Мишера и К.О.Форлендера): Пер. с нем. М.: Медгиз, 1963.
97. Лямперт И.М. — Успехи современной биологии, 1973, т.75, с.183.
98. Лямперт И.М. — Успехи современной биологии, 1976, т.81, с.274.
99. Кемилева З. — Вилочковая железа: Пер. с болг. М.: Медицина, 1984.
100. Труфакин В.А. — Иммуноморфологические аспекты аутоиммунных процессов. Новосибирск: Наука, 1983, с.5.

101. Смирнова О.А., Степанова Н.В. — Биофизика, 1975, т.20, №6, с.1095.
102. Альперин Л.Б., Исавина И.А. — В сб: Естественные науки на службе здравоохранения. Новосибирск: Сиб. отд. АМН СССР, 1980, с.66.
103. Ваниевски Я., Приклова Д. — Математическое моделирование в иммунологии и медицине: Международное рабочее совещание, Киев, 28 августа — 7 сентября 1989. Тез. докл. Киев: Институт кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1989, с.17.
104. Waniewski J., Priklova D. — Immunology Letters, 1988, vol.18, p.77.
105. Смирнова О.А. — Радиобиология, 1988, т.28, вып.3, с.331.
106. Смирнова О.А. — Динамика биологических популяций: Межвуз. сборник. Горький: ГТУ, 1988, с.47.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.12.01

Кварк-адронная дуальность в физике мезонов и конфайнмент кварков. Анисович В.В., Саранцев А.В. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.1, с.5.

Исследуется концепция кварк-адронной дуальности в физике мезонов при низких и промежуточных энергиях. Используя релятивистский пропагатор кварка, учитывающий явления конфайнмента, и включая рассеяние псевдоскалярных и векторных мезонов в динамику взаимодействия, авторы вычислили массы и ширины мезонов, являющихся S - и P -волновыми состояниями кварк-антикварковой пары, а также амплитуды мезон-мезонного рассеяния вплоть до энергий $\sqrt{s} = 1,3$ ГэВ. Исследование показало, что включение псевдоскалярных и векторных мезонов в динамику взаимодействия приводит к следующим результатам: 1) масса конституентного кварка увеличивается на величину порядка 200 МэВ, 2) появляется обусловленный силами конфайнмента барьер, ответственный за образование высоковозбужденных сил, необходимых при построении чисто кварковой модели.

Табл.6 Ил.21. Библиогр.: 53.

УДК 539.123; 539.12.01

Смешивание нейтрино и проблема солнечных нейтрино. Бештоев Х.М. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.1, с.53.

Рассматривается теория смешивания и осцилляций нейтрино. Наряду со старой теорией осцилляций нейтрино, основанной на аналогии с K^0 -, $\bar{K}^0$ -осцилляциями, приводится модифицированная теория смешивания и осцилляций нейтрино, учитывающая динамический характер этого процесса. Существенное отличие заключается в том, что если нейтрино имеют разные массы, то осцилляции между ними будут виртуальными, а не реальными, как это считалось в старой теории.

Приводится теория резонансных осцилляций нейтрино (МСВ-эффект) в веществе. Проводится критический анализ уравнения Вольфенштейна, из которого получен этот эффект. Недостатки, содержащиеся в этом уравнении, не позволяют сделать вывод о том, что этот эффект является теоретически обоснованным.

Рассматривается теория усиления осцилляций нейтрино разных масс в веществе, которые возникают за счет слабого взаимодействия виртуально осциллирующих нейтрино с веществом очень большой толщины (Солнце), в результате которого происходит накопление нейтрино другого типа (т.е. происходит переход на его массовую поверхность), и это может происходить вплоть до установления равновесия между разными типами нейтрино, если толщина вещества достаточно велика. Анализируются возможные способы решения проблемы дефицита солнечных нейтрино (которая возникла после обнаружения того факта, что поток нейтрино от Солнца в несколько раз меньше ожидаемого из расчета).

Используя выражение, описывающее осцилляции нейтрино в теории резонансных осцилляций нейтрино в веществе как параметризационную формулу, и выражение для усиления осцилляций нейтрино в веществе в теории осцилляций нейтрино разных масс, производится оценка вакуумного угла смешивания нейтрино в предположении, что дефицит солнечных нейтрино связан с осцилляциями нейтрино.

Сделан следующий вывод: для того чтобы доказать существование осцилляций солнечных нейтрино, необходим эксперимент по модельно-независимой его проверке.

Эксперимент, который может позволить сделать такую проверку, готовится в обсерватории Садбери (Канада).

Табл.6 Ил.2. Библиогр.: 54.

УДК 539.126; 539.125; 539.164.2

Резонансы в субатомной физике и принципы подобия и размерности. Гареев Ф.А., Казача Г.С., Ратис Ю.Л. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.1, с.97.

В обзоре систематизируются и детально обсуждаются с точки зрения методов подобия, размерности и автомодельности экспериментальные данные по адронным резонансам, дибарионным резонансам, дармштадтскому эффекту и АВС-эффекту. Проводится физическая аналогия между α -распадом и распадом резонансов в субатомной физике. На основе этой аналогии воспроизведены ширины для большой группы адронных резонансов. Излагается дифракционный подход к анализу резонансных явлений в области промежуточных энергий. Обсуждаются пути дальнейшего развития подобных исследований.

Табл.18. Ил.10. Библиогр.: 176.

УДК 519.6; 517.98; 517.3

Метод приближенного континуального интегрирования в задачах математической физики. Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.1, с.173.

Обсуждаются последние результаты, полученные различными авторами в области использования метода приближенного континуального интегрирования при решении широкого круга задач физики и математики, в том числе задач квантовой механики, квантовой теории поля, исследовании дифференциальных операторов и решении различных дифференциальных уравнений математической физики. Дается строгое определение континуального интеграла в полном сепарабельном метрическом пространстве. Приводится обзор работ, содержащих исследование континуального предела решеточных моделей, а также результаты использования континуальных интегралов в исследовании непертурбативных явлений в квантовой теории поля, исследовании топологической структуры вакуума в квантовых калибровочных теориях, вопросов туннелирования, описания многочастичных квантовых систем, теории струн и квантовой гравитации. Представлены полученные авторами результаты в области континуального интегрирования в рамках нового подхода к интегралам по траекториям на основе функционального анализа и теории меры, относящиеся к теоретическому исследованию континуальных интегралов, созданию нового метода их приближенного вычисления и использованию его для исследования ряда квантовых систем.

Табл.18. Ил.10. Библиогр.: 307.

УДК 612.017; 1.014.482; 519.86

Математическое моделирование влияния ионизирующей радиации на иммунную систему млекопитающих. Смирнова О.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.1, с.243.

Сделан обзор работ, в которых методы математического моделирования использовались для исследования влияния ионизирующей радиации на иммунную защиту млекопитающих, а также на развитие аутоиммунных болезней, в результате которых происходит разрушение собственных тканей организма. Модели представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений, переменными которых являются

концентрации основных компонентов гуморальной иммунной реакции и клеточной аутоиммунной реакции соответственно. Доза острого и мощность дозы хронического облучения входят в модели в качестве переменных параметров. Численное и аналитическое (там, где это было возможно) исследование моделей показало их адекватность экспериментальным и клиническим данным. В рамках моделей удалось не только объяснить целый ряд закономерностей, но и сделать некоторые предсказания. В частности, об эффективности экранирования тимуса в целях предотвращения развития аутоиммунных болезней и о возможности обострения последних при увеличении радиационного фона. Модели могут быть использованы при планировании и анализе экспериментов по изучению иммунных и аутоиммунных процессов у млекопитающих, подвергающихся различным режимам облучения. Полученные при исследовании моделей формулы для расчета критических значений доз и мощностей доз радиации, превышение которых приводит к опасному течению аутоиммунных реакций, могут найти применение при корректировке норм радиационной безопасности. Таким образом, представленные в обзоре работы демонстрируют плодотворность использования методов математического моделирования при исследовании действия радиации на живые организмы.

Ил.17. Библиогр.: 106.

СОДЕРЖАНИЕ

Анисович В.В., Саранцев А.В.

Кварк-адронная дуальность в физике мезонов и конфайнмент кварков	5
---	----------

Бештоев Х.М.

Смешивание нейтрино и проблема солнечных нейтрино	53
--	-----------

Гареев Ф.А., Казаха Г.С., Ратис Ю.Л.

Резонансы в субатомной физике и принципы подобия и размерности	97
---	-----------

Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю.

Метод приближенного континуального интегрирования в задачах математической физики	173
--	------------

Смирнова О.А.

Математическое моделирование влияния ионизирующей радиации на иммунную систему млекопитающих	243
---	------------

CONTENTS

Anisovich V.V., Sarantsev A.V.

Quark-Hadron Duality in Meson Physics and Quark Confinement	5
--	----------

Beshtoev Kh.M.

Mixing of Neutrino and Sun Neutrino Problem	53
--	-----------

Gareev F.A., Kazacha G.S., Ratis Yu.L.

Resonances in Subatomic Physics and Principles of Dimension and Similitude	97
---	-----------

Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu.

Method of Approximate Functional Integration in the Problems of Mathematical Physics	173
---	------------

Smirnova O.A.

Mathematical Modeling of the Ionizing Radiation Effect on the Immune System of Mammals	243
---	------------

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v , U и u , W и w , O и o , K и k , S и s , C и c , P и p , Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху ($\underline{S}$ и $\overline{s}$, $\underline{C}$ и $\overline{c}$). Необходимо делать четкое различие между буквами c , l , O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\vec{}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. Лезнов А.Н., Савельев М.В. — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. Годен М. — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. Turbiner A.V. — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. Ушверидзе А.Г. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. Endo I., Kasai S., Harada M. et al. — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректурa с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редактор Е.К.Аксенова.

Художественный редактор А.Л.Вульфсон.

Корректор Т.Е.Попеко.

Сдано в набор 4.11.95. Подписано в печать 29.12.95. Формат 60×90/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 18,5. Уч.-изд.л. 22,4.

Тираж 500. Заказ 48778. Цена 4500 р.

141980 Дубна Московской области

ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра

1996. Том 27. Вып.1. 1—298.