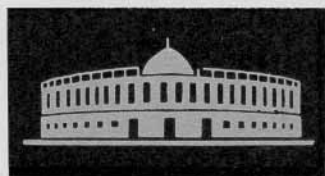


ISSN 0367-2026

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ



ЧАСТИЦ

И АТОМНОГО

ЯДРА

ЯДРО

1996 том 27 выпуск 3



JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES AND ATOMIC NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.27

PART 3

Six issues per year

DUBNA 1996

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 27

ВЫПУСК 3

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1996

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ,

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

В.Г.СОЛОВЬЕВ

(зам. главного редактора),

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы **Е.К.Аксенова**, тел. 65-165

Э.В.Ивашевич

ДУБНЕНСКИЙ СИНХРОФАЗОТРОН. СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ УСКОРИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА ЛВЭ

И.Н.Семенюшкин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Развитие дубненского синхрофазотрона как источника релятивистских ядер и поляризованных дейтронов обеспечивалось непрерывным совершенствованием ускорительного комплекса. Дано краткое описание основных систем, режимов работы ускорителя и каналов пучков частиц ЛВЭ ОИЯИ. Рассмотрены новые возможности ускорительного комплекса лаборатории, связанные с запуском сверхпроводящего ускорителя — нуклотрона.

The development of the Dubna synchrophasotron as a source of relativistic nuclei and polarized deuterons was supported by a persistent improvement of the accelerator facility. A short description of the main systems, operation of the accelerator and beam channels at the LHE JINR is given. The new opportunity of the LHE accelerator facility connected with the superconductivity accelerator — Nuclotron — is discussed.

Одним из крупнейших достижений уходящего века стало открытие в 1944 г. В.И.Векслером [1—3] и несколько позже Э.М.Мак-Милланом [4] нового метода ускорения релятивистских частиц — принципа автофазировки. Это позволило сразу же после окончания Великой Отечественной войны приступить к проектированию и созданию в СССР ускорителей электронов и протонов на энергию в несколько сот МэВ. За два года М.С.Рабинович [5—9], С.М.Рытов [10], Э.Л.Бурштейн [11—12], А.А.Коломенский [13—14] разработали теорию круговых резонансных ускорителей, и уже в 1947 г. в Физическом институте АН СССР заработал первый ускоритель В.И.Векслера — электронный синхротрон на 30 МэВ, а спустя два года — на 265 МэВ. В этом же году в Институте ядерных проблем АН СССР (теперь Лаборатория ядерных проблем Объединенного института ядерных исследований) был запущен крупнейший в мире фазотрон на энергию протонов 550 МэВ, впоследствии доведенную до 680 МэВ.

В 1948 году теоретики ФИАН начали разработку теории, необходимой для проектирования ускорителя протонов — будущего дубненского синхрофазотрона на 10 ГэВ. К 1951 г. в работах М.С.Рабиновича, А.М.Балдина, А.А.Коломенского, В.В.Михайлова, В.А.Петухова, Л.Л.Собсовича [15—30] теория была в основном создана. Исследования, выполненные на модели синхрофазотрона на энергию 180 МэВ В.А.Петуховым, Л.П.Зиновьевым, И.С.Данилкиным с сотрудниками, подтвердили правильность основных положений теории. В короткие сроки в РТИ АН СССР, НИИЭФА, ГСПИ и других организациях был выполнен огромный объем проектных и конструкторских работ, а отечественная промышленность изготовила все необходимое уникальное оборудование дубненского синхрофазотрона [31]. И вот 17 апреля 1957 г. могучий ускоритель ожил — на синхрофазотроне, строительство которого возглавляли выдающиеся советские ученые академики В.И.Векслер и А.Л.Минц, был получен ускоренный до энергии 9 ГэВ пучок протонов [32]. Ученые стран-участниц Объединенного института ядерных исследований получили первоклассную экспериментальную базу для проведения опытов по физике высоких энергий.

Непрерывное развитие ускорительного комплекса всегда было в центре внимания лаборатории. В течение 60-х годов была увеличена интенсивность ускоренного пучка протонов, созданы требуемые для экспериментаторов режимы работы ускорителя, каналы пучков π^+ -мезонов, сепарированных K^+ -мезонов и антипротонов. К сожалению, требуемая для получения проектных параметров сепарированных пучков интенсивность протонов в то время не была достигнута, что ограничило исследования на чистых пучках K -мезонов и антипротонов.

В 60-е годы в Советском Союзе, Западной Европе и США начали работать протонные синхротроны на большие энергии и интенсивности пучков. Дубненский синхрофазотрон перестал быть рекордным по энергии частиц. В возникшей ситуации необходимо было найти свое место для физических исследований, проводимых лабораторией на собственной ускорительной базе. Итогом тщательного и длительного изучения стало развитие комплекса в направлении получения ускоренных пучков более тяжелых, чем протоны, частиц, и, в первую очередь, для удовлетворения запросов нового научного направления релятивистской ядерной физики [33]. Важным стимулом для принятия решения, открывшего путь в неосвоенный энергетический диапазон ядер с энергией до 5 ГэВ/нуклон, явилось успешное осуществление на синхрофазотроне режима ускорения дейтронов [34,35].

Для выполнения намеченной программы физических исследований ускорительный комплекс синхрофазотрона должен был обеспечить:

- 1) широкий набор ускоренных ядер;

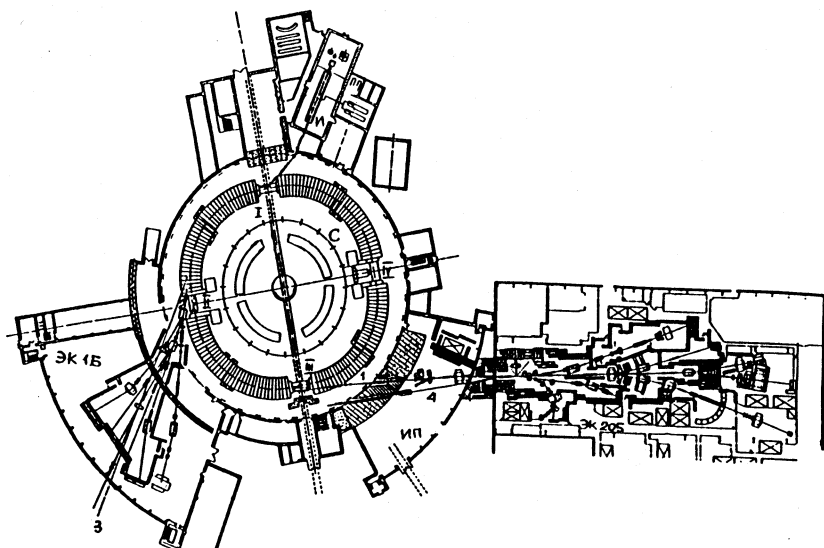


Рис.1. Ускорительный комплекс ЛВЭ ОИЯИ: С — синхрофазотрон; И — инжектор-линейный ускоритель; ЭК — экспериментальный корпус 1Б; ИП — измерительный павильон; ЭК-205 — экспериментальный корпус 205; I, II, III, IV — прямолинейные промежутки синхрофазотрона; 1 — пучок медленного вывода (МВ-1) из синхрофазотрона; 2 — пучок медленного вывода (МВ-2) из синхрофазотрона, а также быстрого вывода (БВ); 3 — нейтронный пучок из синхрофазотрона; 4 — пучок, выводимый из нуклотрона

2) эффективный вывод ускоренного пучка из ускорителя (длительный — сотни мс, быстрый — единицы мс и меньше);

3) разветвленную сеть каналов первичных и вторичных пучков;

4) высокий коэффициент одновременности работы физических установок, незначительный процент отказов оборудования ускорителя, радиационную безопасность.

На рис.1 представлена схема ускорительного комплекса ЛВЭ. Синхрофазотрон и его инжектор размещаются в корпусе №1 и здании ЛУ-20 соответственно. В здание 1Б, измерительный павильон и корпус 205 выводятся пучки из синхрофазотрона и размещаются физические установки. Перечисленные корпуса и здания — это небольшая часть из более 80 сооружений лаборатории, необходимых для ее полноценного функционирования.

Кольцевой магнит синхрофазотрона состоит из четырех квадрантов, каждый длиной 44 м, разделенных четырьмя 8-метровыми прямолинейными промежутками. Прямолинейный промежуток I используется для ввода пучка из инжектора в синхрофазотрон. В нем также размещено оборудование системы вывода пучка. Промежутки II, III используются под оборудование медленного вывода и последний промежуток — для размещения ускоряющей ВЧ-системы синхрофазотрона.

Магнитное поле при инжекции составляет 0,023 Тл, его максимальное значение — 1,26 Тл. Скорость нарастания магнитного поля 0,4 Тл/с.

Ускоряющая ВЧ-система синхрофазотрона обеспечивает ускорение частиц на второй гармонике. Начальная частота 0,3 МГц, конечная — 2,88 МГц.

Вакуумная камера имеет объем $\sim 200 \text{ м}^3$. Ее поперечные размеры $2000 \times 400 \text{ мм}$. Средний вакуум при использовании масляных вакуумных насосов $2 \cdot 10^{-6}$ Торр.

ИНЖЕКТОР. ИСТОЧНИКИ ИОНОВ

Предварительное ускорение частиц перед вводом их в синхрофазотрон осуществляется инжекционным комплексом. Он включает различного рода источники (протонов, высокозарядных ионов (ядер), поляризованных дейтронов), форинжектор — импульсный трансформатор с ускоряющей трубкой и линейный ускоритель протонов на энергию 20 МэВ — ЛУ-20 [36].

В принципе линейный ускоритель может быть использован и для ускорения высокозарядных ионов (ядер). Этого можно достигнуть регулированием уровня вводимого в ЛУ ВЧ-ускоряющего поля, обеспечивая прохождение ускоряющих промежутков частицами в соответствующей фазе электрического поля. При переходе к ускорению от протонов к легким ядрам отношение заряда q к массе m уменьшается в два раза, и для соблюдения синхронности движения частиц в этом случае напряженность электрического поля в резонаторе ЛУ-20 должна быть увеличена в $\sqrt{2}$, а вводимая мощность в два раза. Технически выполнить это невозможно, и поэтому остается другой вариант ускорения, связанный с уменьшением энергии при скорости частиц в два раза меньшей, чем у протонов, — ускорение на второй кратности. В режиме ускорения на второй кратности можно ускорять и высокозарядные ионы с $q/m < 1/2$. Практически это удастся сделать до $q/m \geq 0,33$. При этом приходится, соответственно, оптимизировать и работу форинжектора.

В случае ускорения ядер значительный выигрыш в интенсивности ускоренных частиц получается при работе форинжектора в номинальном

Таблица 1. Основные параметры линейного ускорителя ЛУ-20

1. Энергия пучка протонов на входе ЛУ-20	$W_{п1} = 0,6 \text{ МэВ}$
2. Энергия пучка протонов на выходе ЛУ-20	$W_{п2} = 20 \text{ МэВ}$
3. Энергия пучка ядер на входе ЛУ-20	$W_{я1} = 0,315 \text{ МэВ/нукл}$
4. Энергия пучка ядер на выходе ЛУ-20	$W_{я1} = 5 \text{ МэВ/нукл}$
5. Частота ускоряющего поля	$\frac{\omega}{2\pi} = 144,5 \text{ МГц}$
6. Синхронная фаза при ускорении протонов	$\Phi_s = 31,5^\circ$
7. Добротность резонатора	$Q = 40000$
8. ВЧ-мощность, вводимая при ускорении протонов ($I = 50 \text{ мА}$)	$P = 4,5 \text{ МВт}$
9. Амплитуда среднего поля на оси резонатора	$E_0 = 18,5 \text{ кВ/см}$
10. Длительность импульса тока ускоренного пучка	$\tau = 600 \text{ мкс}$
11. Длина резонатора	$L = 14,5 \text{ м}$
12. Диаметр резонатора	$D = 1,4 \text{ м}$
13. Апертура канала	$2a = 17\text{-}22 \text{ мм}$
14. Количество трубок дрейфа	$n = 1/2 + 58 + 1/2$
15. Диаметр трубок дрейфа	$d = 13 + 9 \text{ см}$
16. Система фокусировки	FODO
17. Градиент фокусирующих линз	$G = 5500\text{-}800 \text{ Э/см}$
18. Коэффициент зазора	$\alpha = 0,25$
19. Пропускная способность канала	$A = 0,25 \text{ см·мрад}$
20. Мгновенный энергетический спектр ускоренного пучка на выходе группирователя	$\frac{\Delta W}{W_s} = 0,2\%$
21. Диапазон модуляции средней энергии пучка на выходе разгруппирователя	$\frac{\Delta W}{W_s} = 2,5\%$

режиме (≈ 600 кВ). Для согласования форинжектора и линейного ускорителя по энергии частиц начальная часть ЛУ-20 используется только для транспортировки пучка (эта часть резонатора торцевой стенкой отделяется от остальной и в ней отсутствует ВЧ электрическое поле). Ускорение начинается во второй части резонатора с энергии ~ 300 кэВ/нуклон и доводится до 5 МэВ/нуклон.

В табл.1 приведены основные параметры инжектора синхрофазотрона.

Таким образом, возможности получения широкого набора релятивистских пучков ядер фактически предопределяются параметрами протонного линейного ускорителя ЛУ-20. Нужны источники ионов, дающие пучки с требуемой интенсивностью, геометрическими характеристиками и достаточно высокой зарядностью ($q/m \geq 0,33$). И с другой стороны, из-за уменьшения скорости ионов на выходе ЛУ-20 по сравнению с протонами требуется осуществлять в синхрофазотроне режим кратного ускорения (на частоте в n раз большей частоты обращения ускоряемых частиц), а при желании иметь тяжелые ионы необходимо значительно улучшить вакуум в камере ускорителя.

В настоящее время на инжекторе используются четыре типа ионных источников. Для получения пучков протонов, дейтронов, ядер гелия — дуоплазмотрон; ядер, включая серу, — электронно-лучевой и лазерный; поляризованных дейтронов — «Полярис». Источник первого типа — дуоплазмотрон, используемый в ЛВЭ, по своим характеристикам практически не отличается от аналогичных источников на многих ускорителях мира. Оригинальными являются три типа источников, рассмотренные ниже.

ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ИСТОЧНИК ИОНОВ

Электронно-лучевой метод получения высокозарядных ионов и ядер, реализованный в источнике Донца [37], имеет рекордный фактор ионизации $n\tau$ (n — плотность электронов $[\text{см}^3]$ и τ — длительность ионизации [с]). На этом источнике удалось достигнуть $n\tau = 8 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}$ при энергии электронов 20 кэВ, что позволило получить Xe^{54+} [38,39].

Принцип работы источника состоит в следующем. В хорошо сфокусированный электронный пучок вводится ионизируемое вещество. На время ионизации обеспечивается удержание в электронном пучке образующихся ионов. После достижения требуемой зарядности ионный пучок выводится из источника. Схема источника приведена на рис.2.

Для фокусировки интенсивного пучка электронов из электронной пушки используется продольное магнитное поле, создаваемое с помощью сверхпроводящего магнитного соленоида с напряженностью поля несколько

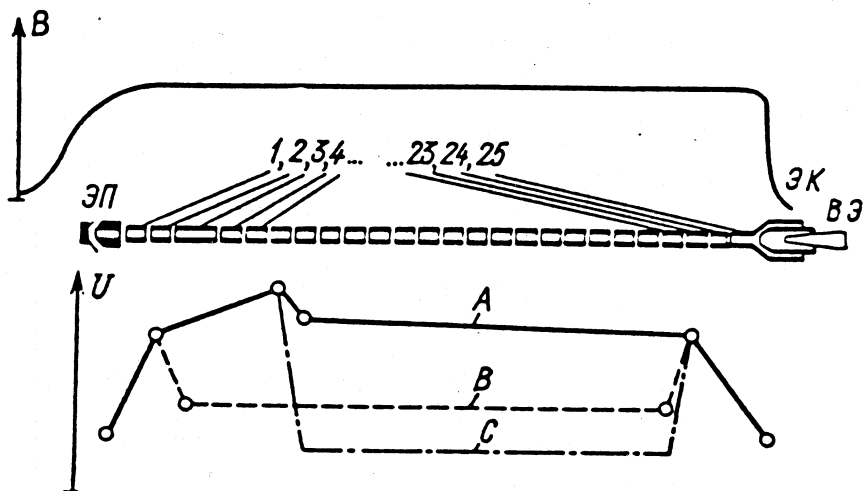


Рис.2. Схема криогенного источника ионов КРИОН: ЭП — электронная пушка, 1, 2, ... 25 — дрейфовые трубки, ЭК — электронный коллектор, ВЭ — вытягивающий электрод, В — распределение индукции магнитного поля вдоль оси ионизатора. Распределение электрических потенциалов вдоль дрейфовой структуры ионизатора: А — вывод ионов из источника и подготовка к ионизации, В — инжекция рабочего газа, С — ионизация рабочего газа

тесла. Радиальное удержание ионов обеспечивается за счет пространственного заряда электронного пучка. Предельное число положительных элементарных зарядов, которое может быть удержано электронным пучком, равно $\sim 10^{11} - 10^{12}$.

Для формирования пучка ионов при инжекции рабочего вещества в источник используется соответствующее аксиальное распределение потенциала во времени. При этом участок, куда вводится рабочее вещество, лишь на определенный промежуток времени «подключается» к объему электростатической ловушки. После завершения процесса ионизации осуществляется вывод ионов в аксиальном направлении за счет создания соответствующего распределения потенциала вдоль пучка. Требуемый для получения высокозарядных ионов и ядер вакуум меньше 10^{-10} Торр достигается за счет того, что рабочий объем источника находится внутри азотного экрана и большая часть трубок дрейфа имеет температуру 4,2 К.

Уникальным достоинством ионизатора является управляемый во времени и достаточно узкий зарядовый спектр получаемых ионов.

С 1977 г. источник КРИОН-1 используется на инжекторе синхрофазотрона для получения релятивистских пучков ядер. Источник проработал в общей сложности более 3500 часов, показав высокие эксплуатационные характеристики. Типичная интенсивность на выходе ионизатора $\sim 10^{10}/Z$ для легких элементов. Электронный ток в ионизаторе ~ 100 мА и его плотность несколько сот А/см². Длительность импульса тока ионов — до 40 мкс.

ЛАЗЕРНЫЙ ИСТОЧНИК ИОНОВ

Впервые лазерный источник [41] был использован на синхрофазотроне в 1976 г. для ускорения углерода [42]. Однако твердотельный лазер на неодимовом стекле не обеспечивал требуемой надежности работы источника и мог действовать с частотой посылок только в 5 раз меньшей, чем это требуется для ускорителя.

В лаборатории создан надежно работающий ионный источник [43,44] на основе СО₂-лазера. Переход на более длинноволновое излучение СО₂-лазера позволил при значительном снижении плотности излучения обеспечить высокую зарядность образующихся ионов и во много раз увеличить частоту циклов работы источника.

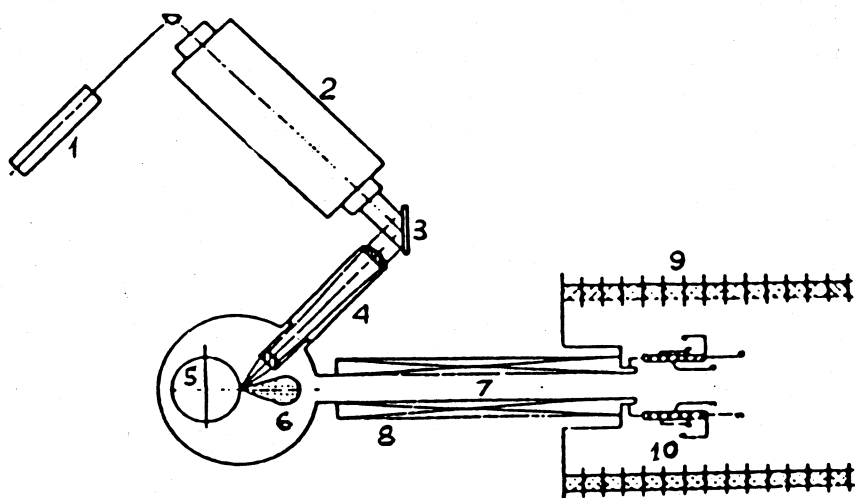


Рис.3. Схема лазерного источника ионов: 1 — настроечный He—Ne-лазер, 2 — СО₂-лазер, 3 — зеркало, 4 — оптика, 5 — мишень, 6 — плазма, 7 — пространство дрейфа, 8 — магнитная катушка, 9 — предускоритель, 10 — ионная оптика

Схема устройства источника показана на рис.3. Лазерное излучение из резонатора фокусируется на мишень, находящуюся в вакуумной камере. Образующиеся ионы системой формирования извлекаются из лазерной плазмы, ускоряются в форинжекторе и направляются в линейный ускоритель. Предельная плотность излучения на мишени составляет $\sim 10^{10}$ Вт/см². На выходе линейного ускорителя имеется обдирочное устройство (мишень из углерода с плотностью ~ 60 мкг/см²). Последующий магнитный анализ позволяет получить чистый пучок ядер.

С помощью лазерного источника на синхрофазотроне были получены пучки лития, углерода, кислорода, фтора, магния, кремния.

ИСТОЧНИК ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ДЕЙТРОНОВ

Все возрастающее значение в программе исследований, выполняемых на синхрофазотроне, приобретают эксперименты на поляризованных пучках дейтронов. Впервые пучок поляризованных дейтронов был получен на ускорителе ЛВЭ в 1981 году с помощью источника «Полярис» [45—47]. Основной особенностью, отличающей этот источник, основанный на методе атомного пучка, от аналогичных, является широкое применение криогенной техники. Она используется для получения вакуума (крионасосы-панели, охлаждаемые жидким гелием); сверхпроводящие секступольные линзы — для анализа атомарного пучка дейтронов по спине; сверхпроводящие соле-

Таблица 2. Поляризация дейтронов на выходе ЛУ-20

Переход	Поляризация	Коэффициент поляризации
3—6	P_z	$0,47 \pm 0,04$
	P_{zz}	—
1—4	P_z	$-0,37 \pm 0,04$
	P_{zz}	—
3—5	P_z	$-0,60 \pm 0,08$
	P_{zz}	—
2—6	P_z	—
	P_{zz}	$0,54 \pm 0,08$

Таблица 3. Основные характеристики пучков частиц инжекционного комплекса синхрофазотрона

Ускоренные частицы	Интенсивность, имп.	Длительность импульса, мкс	Используемый источник	Примечание
P	$1,5 \cdot 10^{14}$	500	дуоплазмотрон	энергия протонов 20 МэВ
d	$1 \cdot 10^{14}$	500	— " —	энергия ядер 5 МэВ·А
$d \uparrow$	$2,5 \cdot 10^{10}$	100	«Полярис»	
${}^4_2\text{He}$	10^{13}	500	дуоплазмотрон	
${}^3_2\text{He}$	$3,5 \cdot 10^{11}$	500	— " —	
${}^7_3\text{Li}$	$5 \cdot 10^{10}$	15	лазерный	
${}^6_3\text{Li}$	$3 \cdot 10^9$	15	— " —	
${}^{10}_6\text{C}$	$6,5 \cdot 10^{10}$	25	— " —	
${}^{16}_8\text{O}$	$6 \cdot 10^9$	10	— " —	
${}^{19}_9\text{F}$	$2,5 \cdot 10^9$	6	— " —	
${}^{22}_{10}\text{Ne}$	$2 \cdot 10^7$	40	КРИОН	
${}^{24}_{12}\text{Mg}$	$2 \cdot 10^8$	25	лазерный	
${}^{28}_{14}\text{Si}$	$1 \cdot 10^8$	25	— " —	
${}^{32}_{16}\text{S}$	$4 \cdot 10^6$	—	КРИОН-С [40]	

ноиды — для ионизатора Пеннинга и др. Источник позволяет получить в зависимости от используемого радиочастотного перехода векторно(P_z)- и тензорно(P_{zz})-поляризованные пучки дейтронов.

Данные по поляризации пучков дейтронов на выходе ЛУ-20 приведены в табл.2.

В табл.3 приведены основные характеристики пучков частиц инжекционного комплекса синхрофазотрона.

ВЫВОД ПУЧКА ИЗ СИНХРОФАЗОТРОНА

Развитие синхрофазотрона как ускорителя релятивистских ядер фактически не имело бы перспективы, если бы отсутствовал эффективный вывод ускоренных частиц. Нужно также заметить, что без вывода пучка невозможно было увеличивать интенсивность уже имеющихся вторичных пучков или создавать пучки более редких частиц при работе от мишеней, расположенных внутри камеры синхрофазотрона, поскольку по нормам радиационной безопасности интенсивность протонов не должна была превышать $\sim 10^{10}$ частиц в цикле. Успешное решение этой сложной задачи устранило эти препятствия. В настоящее время на синхрофазотроне эксплуатируются два медленных (до 1 с) вывода ускоренного пучка и один быстрый (до 1 мс). Вывод ускоренных частиц [48—51] при требуемом значении магнитного поля осуществляется за счет создания резонанса $Q_r = 2/3$ радиальных бетатронных колебаний. Для этого с помощью специальных обмоток на полюсах магнита синхрофазотрона создается как требуемое радиальное искажение орбиты движения частиц, так и достигается резонансное значение величины n — показателя спада магнитного поля. Частицы, вошедшие в резонанс, забрасываются в случае вывода частиц в корпус 205 в септум-магнит, расположенный во II прямолинейном промежутке (рис.1), отклоняются в радиальном направлении, попадают во второй септум-магнит (III прямолинейный промежуток) и выводятся из ускорителя. Между первым и вторым септум-магнитами имеется линза, фокусирующая пучок в горизонтальной плоскости на вход второго магнита. Вывод частиц происходит при постоянном магнитном поле и выключенном ВЧ ускоряющем напряжении. Это обеспечивает постоянство энергии вводимых частиц и отсутствие временной ВЧ-структуры пучка. Принятые меры — подавление низкочастотных пульсаций магнитного поля и др. — позволили практически устранить такие пульсации в интенсивности выводимого пучка.

Второй медленный вывод [52,53], в отличие от первого, — одноступенчатый. Отклонение пучка и вывод его из камеры синхрофазотрона осуществляется с помощью одного септум-магнита, расположенного в I прямолинейном промежутке. Этот же промежуток используется и для ввода пучка в синхрофазотрон. Пучок выходит наружу перед II прямолинейным промежутком. Для устранения дефокусирующего влияния рассеянного магнитного поля на полюсах магнита синхрофазотрона на участке вывода установлены специальные шиммы. Они обеспечивают фокусировку по горизонтали, хотя и не удастся получить такие же геометрические характеристики пучка, как на первом медленном выводе.

Два медленных вывода независимо один от другого в одном цикле ускорения позволяют выводить в любом соотношении по интенсивности и тре-

Таблица 4. Основные характеристики медленных выводов МВ-1 и МВ-2

Характеристика	МВ-1	МВ-2
Направление вывода	измерительный павильон, корпус 205	корпус 1Б
Энергия частиц:		
протоны, ГэВ	0,8 + 8,2	1,4 + 6,3
ядра, ГэВ/нуклон	0,25 + 3,6	0,45 + 2,8
Длительность вывода, мс	1 + 500	1 + 700
Эффективность вывода (коэффициент вывода при максимальной энергии), %	90	30
Эмиттанс пучка, пм-мрад		
горизонтальный	25	60
вертикальный	37	70
Размер пучка (полный $\pm 2\sigma$), мм ²	от 10×10	от 10×10
на внешней мишени	до 160×160	до 160×160

буемой энергии пучок из ускорителя в корп.205 и экспериментальный павильон 1Б. В этот же павильон в одном цикле можно осуществлять быстрый вывод пучка вместе с медленным выводом в корп.205. Интенсивность выводимого пучка и его энергия по каждому направлению также регулируются независимо.

Основные характеристики медленных выводов МВ-1 и МВ-2 приведены в табл.4.

ПУЧКИ ЧАСТИЦ

На рис.4 и 5 представлены схемы каналов пучков частиц в измерительном павильоне, корп.205 на основе медленного вывода МВ-1 и в корп.1Б на основе медленного вывода МВ-2 (рис.6). При создании сети каналов частиц наряду с обеспечением требуемых параметров пучка для физической установки, как правило, предусматривалась совместная работа данной установки с другими в одном цикле ускорения. Независимость работы установок достигалась выбором подходящей схемы фокусировки и транспортировки пучка, рациональным использованием источников

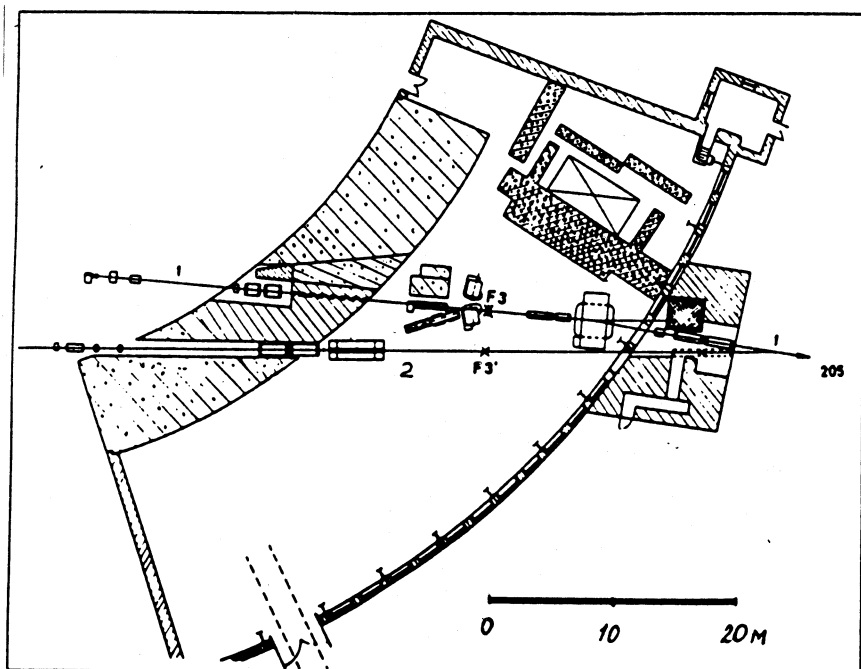


Рис.4. Схема пучков частиц в измерительном павильоне ЛВЭ ОИЯИ: 1 — выведенный пучок из синхрофазотрона (МВ-1), направляемый в корп.205, 2 — выведенный пучок из нуклотрона, направляемый в корп.205 (проект). F3, F3' — промежуточные фокусы пучка

электропитания для элементов магнитной оптики, организацией радиационной защиты, особенно вокруг мишенных станций и ловушек пучка.

Так, для сети каналов на основе МВ-1 выбрана схема в виде «елочки». Для этого по трассе выведенного пучка — канал ВП-1 — организованы четыре мишенные станции (точки F3 — F6). В этих местах формируются промежуточные изображения пучка и могут устанавливаться мишени, которые являются источниками вторичных частиц для каналов 24 и 1В+7В. Мишень в F3 используется для получения в любом из каналов корп.205 частиц, которые трудно или невозможно получить путем ускорения в синхрофазотроне (пучки трития, гелия-3 и других изотопов). Выбранная схема обеспечивает высокую эффективность использования первичного пучка, особенно когда «ветви елочки» — боковые каналы — настроены на использование π -мезонов или других вторичных частиц. Магниты, имеющиеся в каждом канале, позволяют независимо выделять импульс нужных частиц, а размер мишени — варьировать их интенсивность.

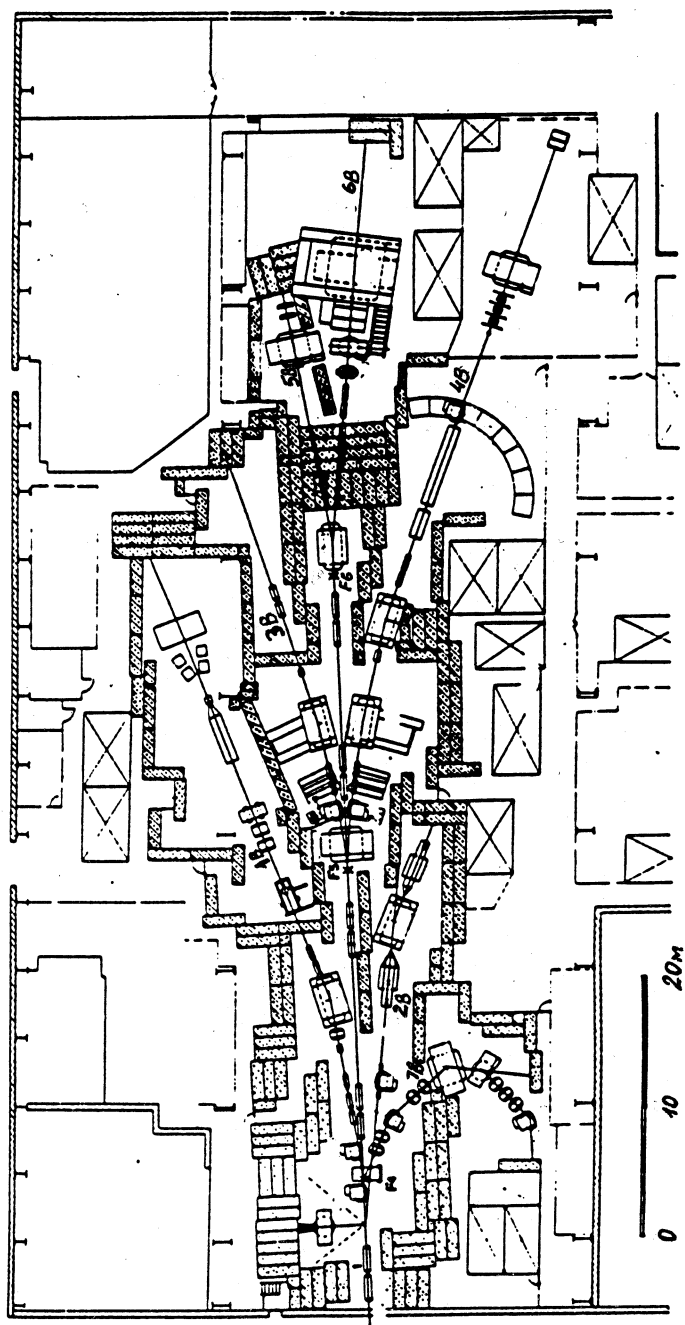


Рис. 5. Схема пучков частиц в экспериментальном корп. 205 ЛВЭ ОИЯИ: 1В+7В — каналы частиц, F4+F6 — промежуточные фокусы пучка

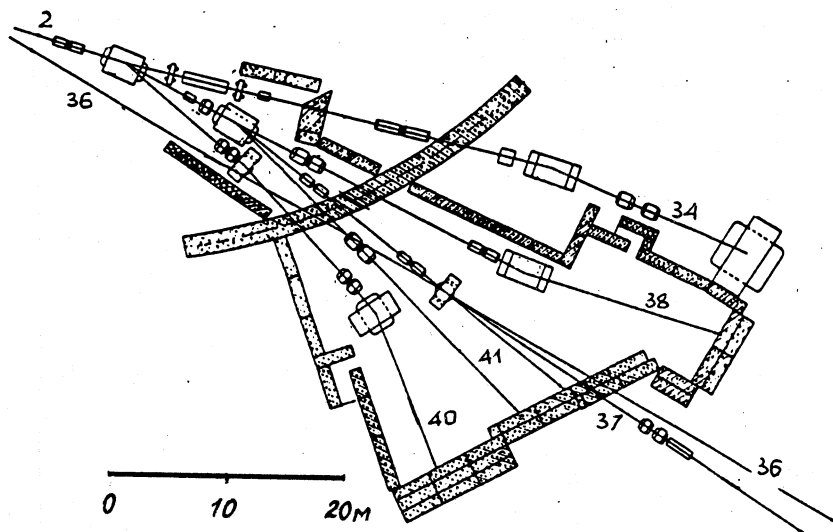


Рис.6. Схема пучков частиц в измерительном павильоне 1Б ЛВЭ ОИЯИ: 2 — выведенный пучок из синхрофазотрона (МВ-2 и БВ), 34, 37, 38, 40, 41 — каналы частиц, 36 — нейтронный пучок

Схема каналов в корп.205 допускает одновременную работу физических установок на интенсивностях частиц, различающихся на 4—5 порядков. Выделение такой относительно малой интенсивности пучка с помощью коллиматора практически невозможно и к тому же будет связано с возникновением сильного радиационного фона. В лаборатории для таких экспериментов используются изогнутые кристаллы, которые обеспечивают поворот в нужном направлении и отщепление небольшой доли не только протонного пучка, но и ядер [54] с практическим отсутствием радиационного фона.

В табл.5 приведены основные характеристики пучков для установок [55] в корп.205.

Всего в каналах частиц на МВ-1 используется 72 магнита и линзы. Практически все каналы могут одновременно работать на вторичных частицах и на первичных частицах — любые 3 канала.

В табл.6 приведены основные характеристики пучков для установок [55] в корп.1Б.

Кроме того, для экспериментов на однометровой жидководородной пузырьковой камере может быть использован моноэнергетический пучок нейтронов [56,57]. В этом случае внутри вакуумной камеры синхрофазотрона устанавливается мишень, на которой происходит стриппинг ускоренных

Таблица 5. Основные характеристики пучков частиц в корп.205

Номер канала	Максимальная энергия протонов и ядер	$\frac{\Delta E}{E}$	Расходимость, $\Delta X' \times \Delta Y'$	Интенсивность (максим.)	Установка
	ГэВ; ГэВ/нукл.	%	мрад ²	нукл/цикл	
ВП-1	8,2; 3,6	0,2	до 5×2 или 2×5	5·10 ¹¹ *	АЛЬФА-ПОЛИС
1В	8,2; 3,6	0,2	“—”	10 ⁷ *	
2В	8,2; 3,6	0,2	“—”	10 ¹⁰	МАСПИК
3В	8,2; 3,6	0,2	“—”	10 ⁹	КОНУС-М
4В	8,2; 3,6	0,2	“—”	10 ⁶	СФЕРА СМС-МГУ
5В	8,2; 3,6	0,2	до 4×8 или 8×4	10 ⁶	АНОМАЛОН
6В	8,2; 3,6	0,2	“—”	10 ⁵	ГИБС
7В**	$P \dots 0,6$ $K^{\pm} \dots 0,8$ $\pi^{\pm} \dots 1,1$	3,0	35×15	P до 5·10 ⁶ π^{+} до 3·10 ⁶ K^{+} до 10 ⁵ K^{-} до 10 ⁴	КАСПИЙ

*Интенсивность ограничена ловушкой пучка.

**Только вторичные частицы. Интенсивность на 10¹² падающих протонов для максимальной энергии частиц.

дейтронов. Образующиеся нейтроны очищаются от заряженных частиц магнитным полем ускорителя и магнитами канала, а геометрические размеры пучка формируются коллиматором. Энергия нейтронов может изменяться от 0,6 до 4,25 ГэВ с энергетическим разбросом $\pm 3\%$.

Новые источники ионов, развитие устройств ЛУ-20, ввод в эксплуатацию системы ВЧ-ускорения на второй кратности [58,59] синхрофазотрона, криооткачка вакуумной камеры кольцевого ускорителя [60], автоматизация и контроль на основе ЭВМ за системами и режимами [61] ускорительного комплекса — это далеко не полный перечень усовершенствований, обеспечивших систематический рост интенсивности ускоренных пучков

Таблица 6. Основные характеристики пучков частиц в корп.1Б

Номер канала	Максимальная энергия протонов и ядер	$\frac{\Delta E}{E}$	Расходимость, $\Delta X' \times \Delta Y'$	Интенсивность (максим.)	Установка
	ГэВ; ГэВ/нукл.	%	(мрад) ²	нукл./цикл	
34	6,3; 2,8	0,2	до 5×10 или 10×5	10^4	СЛОН 2-м пропановая пузырьковая камера
37	6,3; 2,8	0,2	до 5×10 или 10×5	10^6	1-м жидководор. пузырьковая камера
38	6,3; 2,8	0,2	до 5×10 или 10×5	10^{10}	методический пучок
40	2,2; 0,8	0,2	до 5×10 или 10×5	10^{10}	методический пучок
41	6,3; 2,8	0,2	до 5×10 или 10×5	10^6	ПАМИР

частиц и расширение их набора. Сегодня для исследований экспериментаторы могут использовать пучки около двух десятков частиц в широком интервале энергий.

В табл.7 приведены интенсивности основных пучков частиц, ускоряемых в синхрофазотроне.

Суммарное время работы синхрофазотрона уже превысило 100 тыс. часов. На протяжении многих лет ускоритель стабильно работает 4000 часов в год, и его пучки используются не только для проведения экспериментов по проблематике лаборатории, но и для выполнения других исследований, в том числе и медико-биологических. Примерно 30% времени ускоряются протоны и в остальное время — более тяжелые частицы. Число одновременно проводимых экспериментов доходит до 5—6. Несмотря на солидный возраст ускорительного комплекса отказы оборудования [62] за последние годы не превышали 5—6% от планируемого времени работы.

Таблица 7. Интенсивности пучков частиц, ускоряемых в синхрофазотроне

Частицы	Интенсивность за цикл	Поляризованные частицы	Тип поляризации и переход	Коэффициент поляризации	Интенсивность за цикл
p	$4 \cdot 10^{12}$	d	P_z (3—6)	$0,52 \pm 0,05$	$1,2 \cdot 10^9$
d	10^{12}				
${}^3_2\text{He}$	$2 \cdot 10^{10}$		P_z (1—4)	$-0,37 \pm 0,04$	$1,2 \cdot 10^9$
${}^4_2\text{He}$	$5 \cdot 10^8$				
${}^6_3\text{Li}$	$5 \cdot 10^8$		P_{zz} (2—6)	$-0,53 \pm 0,05$	$1,2 \cdot 10^9$
${}^7_3\text{Li}$	$4 \cdot 10^9$				
${}^{12}_6\text{C}$	$2 \cdot 10^9$		P_{zz} (2—6)	$0,22 \pm 0,05$	$1,2 \cdot 10^9$
${}^{16}_8\text{O}$	$2 \cdot 10^7$				
${}^{19}_9\text{F}$	$2 \cdot 10^6$		P_{zz} (3—5)	$-0,60 \pm 0,08$	$1,2 \cdot 10^9$
${}^{22}_{10}\text{Ne}$	10^4				
${}^{24}_{12}\text{Mg}$	$3 \cdot 10^7*$		P_z (3—5)	$0,19 \pm 0,04$	$1,2 \cdot 10^9$
${}^{28}_{14}\text{Si}$	$5 \cdot 10^4*$				
${}^{32}_{16}\text{S}$	$3,5 \cdot 10^3*$				

*Работает криооткачка вакуумной камеры синхрофазотрона.

НУКЛОТРОН

В 1993 г. начал работать жесткофокусирующий сверхпроводящий ускоритель ЛВЭ ОИЯИ — нуклотрон [63,64,55]. Успешно завершено создание, в основном силами лаборатории, экономичного по капитальным затратам и эксплуатационным расходам современного ускорителя заряженных частиц, и, что крайне важно, сохранена возможность использования синхрофазотрона для проведения исследований. Этого удалось достигнуть как за счет рационального размещения ускорителя, так и за счет эффективной перестройки имеющихся помещений и использования оборудования ускорительного комплекса. Нуклотрон смонтирован в кольцевом тоннеле в

здании синхрофазотрона. В качестве инжектора используется линейный ускоритель на 20 МэВ (ЛУ-20) с системой транспортировки пучка в нуклотрон. При необходимости это позволит осуществлять переход при проведении экспериментов с синхрофазотрона на нуклотрон и наоборот в течение немногих часов, переключая лишь системы транспортировки пучка после ЛУ-20. Для размещения оборудования, необходимого для получения жидкого гелия, приспособлены существующие помещения ЛВЭ и относительно небольшие здания, построенные для компрессоров. Вывод пучка из нуклотрона должен быть, в первую очередь, осуществлен в сторону корп.205 (рис.1), что позволит использовать уже имеющуюся сеть каналов заряженных частиц с физическими установками. Нуклотрон рассчитан на ускорение протонов до энергии 12 ГэВ и ядер до максимальной энергии 6 ГэВ/нуклон.

Основные отличительные особенности нуклотрона по сравнению с синхрофазотроном:

- 1) возможность ускорения ионов всех атомов, включая уран (вакуум в камере ускорителя 10^{10} Торр);
- 2) возможность осуществления в десятки раз более длительного медленного вывода ускоренного пучка;
- 3) существенно лучшие (более чем в 10 раз) геометрические характеристики пучка;
- 4) возможность проведения экспериментов на внутренних тонких (струйных и др.) мишенях из различных веществ, в том числе поляризованных протонов и дейтронов в широком интервале энергий.

Реализация этих возможностей, создание бустера нуклотрона [65], непрерывное развитие источников частиц, совершенствование каналов транспортировки пучков и др., несомненно, на многие годы обеспечит хорошие перспективы для проведения исследований в ЛВЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Программа физических экспериментов [66] на ближайшие несколько лет на ускорительном комплексе синхрофазотрон — нуклотрон нацелена на изучение переходного режима от протон-нейтронной к кварк-глюонной материи. Особое место в ней занимают исследования спиновых явлений. До создания бустера нуклотрона эти эксперименты могут проводиться только на синхрофазотроне, где имеются интенсивные пучки поляризованных дейтронов и нейтронов с энергией от 0,2 до 3,6 ГэВ/нуклон. Ввод в действие в 1995 г. поляризованной протонной мишени [67] существенно расширил возможности исследования спиновых эффектов. Первым экспериментом,

выполненным совместно учеными ОИЯИ и Франции с помощью этой мишени, стало продолжение исследований, начатых в Сакле и теперь проведенных при больших энергиях в Дубне, — измерение разности полных сечений нейтронов с продольной и поперечной поляризацией на протонах. Последний пример лишний раз подчеркивает, насколько важно было при создании нуклотрона обеспечить плавный переход от синхрофазотрона на новый ускоритель, сохранить для экспериментаторов, ориентирующихся на ускорительный комплекс ЛВЭ, уникальные пучки частиц. То, что это стало возможным, в первую очередь, заслуга высококвалифицированного коллектива ускорительщиков ЛВЭ, начало которому положил В.И.Векслер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векслер В.И. — ДАН, 1944, т.43, с.346.
2. Векслер В.И. — ДАН, 1944, т.44, с.393.
3. Veksler V.I. — Journ. of Phys. USSR, 1945, vol.9, p.153.
4. McMillan E.M. — Phys.Rev.Lett., 1945, vol.68, p.1434.
5. Рабинович М.С. — Journ. of Phys. USSR, 1946, vol.10, p.523.
6. Рабинович М.С. — Journ. of Phys. USSR, 1946, vol.10, p.530.
7. Рабинович М.С. — Теория синхротрона. ФИАН, 1946.
8. Рабинович М.С. — Интенсивность пучка в фазотроне. ФИАН, 1947.
9. Рабинович М.С. — Теория современных резонансных ускорителей. ФИАН, 1948.
10. Рыгов С.М. — К теории синхротрона. ФИАН, 1947.
11. Бурштейн Э.Л., Коломенский А.А. — Движение заряженных частиц в быстропеременных магнитных полях. ФИАН, 1947.
12. Бурштейн Э.Л. — К расчету интенсивности в бетатроне. ФИАН, 1948.
13. Коломенский А.А. — Теория кратного резонансного ускорителя (микротрона). ФИАН, 1950.
14. Коломенский А.А. — Движение электронов в аксиально-симметричном магнитном поле (внешняя молекула). ФИАН, 1949.
15. Рабинович М.С. — Теория синхрофазотрона. ФИАН, 1947.
16. Рабинович М.С., Балдин А.М., Михайлов В.В. — Исследование движения частиц в синхрофазотроне с прямолинейными промежутками. ФИАН, 1949.
17. Рабинович М.С., Балдин А.М., Михайлов В.В. — К теории свободных колебаний в ускорителе с прямолинейными промежутками. ФИАН, 1950.
18. Рабинович М.С. — Общая теория движения частиц в синхрофазотроне с разрезами. ФИАН, 1950.
19. Рабинович М.С. — Резонансы между медленными колебаниями. ФИАН, 1950.
20. Рабинович М.С. — Эффективность инъекции. ФИАН, 1950.
21. Рабинович М.С. — Труды ФИАН, 1958, т.Х, с.23.
22. Балдин А.М., Михайлов В.В., Рабинович М.С. — ЖЭТФ, 1956, т.31, с.993.

23. Балдин А.М., Михайлов В.В. — Влияние на движение частиц отклонения магнитного поля от расчетного и допуска в синхрофазотроне АН СССР. ФИАН, 1950.
24. Балдин А.М. — Синхрофазотрон с кратным резонансом и прямолинейными промежутками. ФИАН, 1949.
25. Коломенский А.А., Петухов В.А., Рабинович М.С. — Кольцевой фазотрон. ФИАН, 1953.
26. Коломенский А.А., Сабсович Л.Л. — ЖТФ, 1956, т.26, с.576.
27. Коломенский А.А. — Совместное рассмотрение фазовых и свободных колебаний в синхрофазотроне с разрезным магнитом. ФИАН, 1950.
28. Сабсович Л.Л. — Разработка и исследование высоковольтных инжектирующих устройств. ФИАН, 1950.
29. Сабсович Л.Л. — Вывод частиц из синхрофазотрона АН СССР. ФИАН, 1950.
30. Сабсович Л.Л. — Влияние рассеянного поля магнитного шунта на эффективность вывода из синхрофазотрона. ФИАН, 1951.
31. Векслер В.И. и др. — АЭ, 1956, т.4, с.22.
32. Veksler V.I. — In: Proc.Intern.Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958, 2, vol.30, p.3.
33. Балдин А.М. — В кн.: Очерки по истории развития физики в СССР. Киев: Наукова думка, 1982, с.152.
34. Балдин А.М. и др. — ОИЯИ, Р9-5442, Дубна, 1970.
35. Безногих Ю.Д. и др. — ПТЭ, 1969, № 4, с.202.
36. Безногих Ю.Д. и др. — ОИЯИ, 9-12723, Дубна, 1979.
37. Донец Е.Д. — Авт.свид. СССР №248860 от 16.03.67 г. ОИПОТЗ, 1969, №23, с.65.
38. Донец Е.Д. — ЭЧАЯ, 1982, т.13, с.945.
39. Donets E.D. — In: Proc.Intern.Conf. on Ion Sources. Berkeley. Calif. 10—14.07.1989; Rev.Sci.Instrum., 1990, vol.61, p.225.
40. Коваленко А.Д. и др. — Краткие сообщения ОИЯИ, 1993, №2[59]-93, с.23.
41. Быковский Ю.А. и др. — Авт.свид. СССР №324938 от 08.06.68 г. ОИПОТЗ, 1974, №7, с.227.
42. Ананьин О.Б. и др. — Квантовая электроника, 1977, т.7, с.1547.
43. Безногих Ю.Д. и др. — ОИЯИ, Р9-84-246, Дубна, 1984.
44. Безногих Ю.Д. и др. — В сб.: Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Дубна, 1985, т.2, с.39.
45. Belushkina A.A. et al. — In: High Energy Physics with Polarized Beams and Polarized Targets. Basel, 1981, p.429.
46. Anishchenko N.G. et al. — In: Proc. of 6-th Int.Symp. on High Energy Spin Physics, Marseille, 1984 (Journ. De Phys. Colloque, c2, Supplement an 2) т.46, 1985, p.c2-703.
47. Belushkina A.A. et al. — In: Proc. of VII Int.Symp. on High Energy Spin Physics, Protvino, 1987, vol.II, p.215.
48. Василишин Б.В. и др. — ОИЯИ, Р9-6973, Дубна, 1973.
49. Issinsky I.B. et al. — Part.Accel., 1973, vol.5, p.215.
50. Gvozdev V. et al. — Part.Accel., 1973, vol.6, p.53.
51. Волков В.И. и др. — ОИЯИ, 9-90-512, Дубна, 1990.

52. Буддаковский В.Н. и др. — ОИЯИ, 9-86-174, Дубна, 1986.
53. Баландиков А.Н. и др. — ОИЯИ, 9-90-152, Дубна, 1990.
54. Бельзер Л.И. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1987, т.46, с.303.
55. JINR LHE USERS HANDBOOK, JINR, Dubna, 1993.
56. Гаспарян А.П. и др. — ОИЯИ, 1-9111, Дубна, 1975.
57. Abdivaliev A. et al. — Nucl.Phys., 1975, vol.B99, p.445.
58. Бровко О.И. и др. — ОИЯИ, 9-83-340, Дубна, 1983.
59. Бровко О.И. и др. — ПТЭ, 1984, т.4, с.32.
60. Василишин Б.В. и др. — В сб.: Труды X Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Дубна, 1987, т.2, с.33.
61. Баландиков А.Н. и др. — В сб.: Труды XI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Дубна, 1989, т.1, с.92.
62. Баландиков А.Н. и др. — ОИЯИ, 9-87-364, Дубна, 1987.
63. Baldin A.M. et al. — JINR, E8-95-65, Dubna, 1995.
64. Kovalenko A.D. — Status of the Nuclotron. In: Proc. 4 European Particle Accelerator Conf., Singapore World Scientific, 1995, vol.1.
65. Иссинский И.Б., Михайлов В.А. — ОИЯИ, P1-91-2, Дубна, 1991.
66. Зарубин П.И. — ЭЧАЯ, 1995, т.26, вып.3, с.523.
67. Ball J. et al. — Preprint CEN-Saclay DPhPE 84-15, 1984.

PATH INTEGRAL APPROACH TO SUPERINTEGRABLE POTENTIALS ON THE TWO-DIMENSIONAL HYPERBOLOID

C.Grosche

II.Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg, Luruper Chaussee 149
22761 Hamburg, Germany

G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian

Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics
Joint Institute for Nuclear Research
141980 Dubna, Moscow Region, Russia

This paper is the third in a series, in which we try to generalize the notion of superintegrable potentials, as known from the flat space, to the case of spaces of constant negative curvature. Path integral approach to superintegrable potentials on the two-dimensional hyperboloid is presented. We find five potentials of the sought type, which possess three functionally independent integrals of motion (observables), and in each case we present the appropriate path integral formulation. We list in the soluble cases the path integral solutions explicitly in terms of the propagators, the Green functions, and the spectral expansions in the wave functions. The coordinate systems on the two-dimensional hyperboloid are discussed in detail. The Stäckel matrix, the Schrödinger operator, the general form of the potential, which must be separable, and relevant observables are constructed for each coordinate system. A special care is taken of the proper generalization of the harmonic oscillator on the hyperboloid, i.e., the Higgs-oscillator, and the Kepler-Coulomb problem. The three remaining potentials are analogues of the Holt potential, the centrifugal potential, and the last one is the potential which is linear in the flat space limit.

Настоящая работа является третьей из серии работ, в которой обобщено понятие суперинтегрируемых потенциалов, известных для плоского пространства на случай пространств постоянной отрицательной кривизны. Сформулирован метод континуального интегрирования для суперинтегрируемых потенциалов на двумерном гиперboloиде. Найдены пять потенциалов искомого типа, которые содержат три функционально независимых интеграла движения (наблюдаемых), и в каждом случае выписаны соответствующие интегралы по траекториям. Описаны все случаи, где с помощью метода континуального интегрирования возможно решение в явном виде на языке пропа-

гаторов, функций Грина и спектральных разложений по волновым функциям. Обсуждаются все возможные ортогональные системы координат на двумерном гиперboloиде. Для каждой из систем координат построены оператор Шредингера и матрица Штекеля, приведены соответствующие интегралы движения. Особое внимание уделено обобщению гармонического осциллятора, или осциллятора Хиггса, и задачи Кеплера — Кулона. Оставшиеся три потенциала являются аналогами потенциала Холта и центробежного, а последняя модель соответствует в пределе плоского пространства линейному потенциалу.

1. INTRODUCTION

In this paper we continue our study of potential problems in quantum mechanics in spaces of constant curvature which are separable in more than one coordinate system. For this kind of potential systems the notion *super-integrable* has been introduced by Evans [6] and Wojciechowski [66], as well as *Smorodinsky-Winternitz potentials*, because the first systematic investigation of such systems was undertaken by Smorodinsky, Winternitz and co-workers in Refs.[10,47,65]. In $\mathbb{R}^2$ there are four potentials of this type [10] which all have three constants (integrals) of motion (including energy), i.e., there are two more operators commuting with the Hamiltonian and with each other. In $\mathbb{R}^3$ there are five maximally superintegrable potentials with five integrals of motion [6,21] and nine minimally superintegrable potentials with four integrals of motion [6,21,23]. On the two-dimensional sphere we have found two superintegrable potentials; and on the three-dimensional sphere, three maximally and four minimally superintegrable potentials [22,23]. Generally, in D dimensions maximally superintegrable potentials have $2D-1$ integrals of motion, respectively observables; and minimally superintegrable potentials, $2D-2$ integrals of motion (this means that the notion minimally superintegrable and integrable cannot be distinguished in two dimensions).

Let us briefly discuss the physical significance of the consideration of separation of variables in more than one coordinate system. The free motion in some homogeneous space is, of course, the most symmetric one, and the search for the number of coordinate systems which allow the separation of the Hamiltonian is equivalent to the investigation of how many inequivalent sets of observables can be found, and there are D integrals of motion. The incorporation of potentials usually removes at least some of the symmetry properties of the space. Well-known examples are spherical systems, and they are most conveniently studied in spherical coordinates. For instance, the isotropic harmonic oscillator in three dimensions is separable in eight coordinate systems, namely in cartesian, spherical, circular polar, circular elliptic, conical, oblate spheroidal, prolate spheroidal, and ellipsoidal coordinates. The Coulomb

potential is separable in four coordinate systems, namely in conical, spherical, parabolic, and prolate spheroidal II coordinates (for a comprehensive review with the focus on path integration, e.g., [21]).

The separation of a quantum mechanical problem in more than one coordinate system has the consequence that there are additional integrals of motion and that the discrete spectrum, if it exists, is degenerate. The Noether theorem connects the particular symmetries of the Lagrangian, i.e., the invariances with respect to the dynamical symmetries, with conservation laws in classical mechanics and with observables in quantum mechanics, respectively. In the case of the isotropic harmonic oscillator one has in addition to the conservation of energy and the conservation of the angular momentum, the conservation of the quadrupole momentum; in the case of the Coulomb problem one has in addition to the conservation of energy and the angular momentum, the conservation of the Pauli-Runge-Lenz vector. In total, these conserved quantities add up to five integrals of motion in classical mechanics, respectively observables in quantum mechanics. It is even possible to introduce extra terms in the pure oscillator and Coulomb-, respectively Kepler-problem, in such a way that one still has all these integrals of motion, however, somewhat modified [6].

In our paper [22] we extended the notion of «superintegrability» to spaces of constant positive curvature. One knows that the corresponding *Higgs-oscillators* (as discussed by, e.g., Granovsky et al. [11], Higgs [30], Ikeda and Katayama [32], Katayama [41], Leemon [45], Nishino [53], and [58]) and the *Kepler-Coulomb problem* (c.f., Granovsky et al. [12], Hietarinta [29], Ikeda and Katayama [32], Infeld [33], Infeld and Schild [34], Katayama [41], Kurochkin and Otchik [44], Nishino [53], Otchik and Red'kov [55], Schroedinger [59], Stevenson [62], and Vinitsky et al. [63]) in spaces of non-vanishing constant curvature do have additional constants of motion: the analogues of the flat space. For the Higgs-oscillator it is the Demkov-tensor [3,9,53], and for the Kepler problem it is the analogue of the Pauli-Runge-Lenz vector in a space of constant curvature, c.f. [30,44,53]. It is also found that the Higgs oscillator and the Kepler-Coulomb problem are the only central systems [32] in spaces of constant curvature. However, additional non-central superintegrable potentials might exist.

In our investigation the path integral turns out to be a very convenient tool to formulate and solve the superintegrable potentials on the hyperboloid, and it provides the natural way in which the analytic structure of the solutions is manifested. Separation of variables in each problem can be done in a straightforward and easy way. There are already some studies of the oscillator problem and the Coulomb problem in spaces of constant curvature. The oscillator problem is not very difficult to solve, including the case where additional radial dependences are taken into account, which is basically path integral problems which are related to the Pöschl-Teller and modified Pöschl —

Teller path integral. The Coulomb problem is somewhat more involved, and the pure case has been discussed by means of path integrals in spherical coordinates by Barut et al. [1] and [16]. In the present investigation these earlier results will be used in the calculations, and no detailed derivations will be given in these cases. The path integral calculation of the Coulomb problem on the hyperboloid in elliptic-parabolic coordinates is completely new, and it turns out that some results of the calculation for the free motion can be used in its solution [20].

However, all former studies have taken into account only central systems and their solutions in spherical variables, which is obvious. Neither a systematic search for alternative descriptions in other coordinate systems has been done, nor a search for further separable potentials. In particular, the Holt potential with a linear term is important, because it allows the incorporation of electric fields. The case of magnetic fields on the two-dimensional hyperboloid has been considered by means of path integrals in [15], and it has been found that in spherical, horicyclic and equidistant coordinates a separation of variables is possible, i.e., in coordinate systems which have one ignorable coordinate [40], i.e., they are non-parametric, and the corresponding solutions are circular, respectively plane waves in this (ignorable) coordinate. Depending on the strength of the magnetic field a finite number of bound states can exist. Such investigations play an important role in the theory of tensor-weighted Laplacians, automorphic forms, determinants of Laplacians and zeta-function regularization, and quantum field theory on (super-) Riemann surfaces, e.g., [20] and references therein.

The contents of this paper are as follows. In the next section we give a short summary of the path integral technique we are using, including for completeness in order to make the paper self-contained the path integral solutions of the Pöschl-Teller and modified Pöschl-Teller potential. In the third section we give an introduction to the formulation and construction of coordinate systems on the two-dimensional hyperboloid. This includes an enumeration of all the coordinate systems according to [20,37,38,54], which separate the Schrödinger equation, respectively the path integral. Furthermore, we list for all coordinate systems the corresponding observable, the Stäckel-matrix, the Hamiltonian, and the general form a potential must have to be separable in the coordinate system, together with its observable.

In Section IV we present the path integral formulations of the superintegrable potentials on the two-dimensional hyperboloid. The two most important are the Higgs-oscillator and the Coulomb problem. We find three more potentials with the required properties. One of them, the potential V_3 is an analogue of the Holt potential [31], the fourth is a centrifugal potential which does not have an analogue on the sphere or in flat space, and the fifth model

potential which is linear in the flat space limit. These systems have not been considered in the literature before.

In the fifth Section we summarize and discuss our results. Here we also make some remarks about the problem of ambiguities of the generalization of flat space potentials to spaces of constant curvature. We also present Table 3 to illustrate the correspondence of superintegrable potentials in two dimensions.

2. ELEMENTARY PATH INTEGRAL TECHNIQUES

2.1. Defining the Path Integral

For the construction of the path integral in a curved space we proceed in the canonical way according to Feynman and Hibbs [7], Refs.[20,25], Schulman [60], and references therein. In the following $\mathbf{x}$ denote D -dimensional cartesian coordinates; $\mathbf{q}$, some D -dimensional; s , coordinates on a sphere; $u = (u_0, u_1, u_2)$, coordinates on the two-dimensional hyperboloid, and x, y, z , etc., are one-dimensional coordinates. We start by considering the classical Lagrangian corresponding to the line element $ds^2 = g_{ab}dq^a dq^b$ of the classical motion in some Riemannian space

$$\mathcal{L}_{\text{Cl}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{M}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - V(\mathbf{q}) = \frac{M}{2} g_{ab}(\mathbf{q}) \dot{q}^a \dot{q}^b - V(\mathbf{q}). \quad (2.1)$$

The quantum Hamiltonian is *constructed* by means of

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{LB} + V(\mathbf{q}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^a} g^{ab} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial q^b} + V(\mathbf{q}) \quad (2.2)$$

as a *definition* of the quantum theory on a curved space. Here are $g = \det(g_{ab})$, $(g^{ab}) = (g_{ab})^{-1}$, and $\Delta_{LB} = g^{-1/2} \partial_a g^{ab} g^{1/2} \partial_b$ is the Laplace-Beltrami operator. The scalar product for wave-functions on the manifold reads $(f, g) = \int d\mathbf{q} \sqrt{g} f^*(\mathbf{q}) g(\mathbf{q})$, and the momentum operators which are hermitian with respect to this scalar product are given by $p_a = -i\hbar(\partial_{q^a} + \Gamma_a/2)$ with $\Gamma_a = \partial \ln \sqrt{g} / \partial q^a$. In terms of these momentum operators we can rewrite H by using an ordering prescription called product-ordering, where we assume $g_{ab} = \hbar_{ac} \hbar_{cb}$; other lattice formulations like the important midpoint prescription (MP) which corresponds to the Weyl

ordering in the Hamiltonian, we do not discuss. Then we obtain for the Hamiltonian (2.2)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{LB} + V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2M} h^{ac} p_a p_b h^{cb} + V(\mathbf{q}) + \Delta V(\mathbf{q}), \quad (2.3)$$

and for the path integral we have

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}'', \mathbf{q}'; T) &= \int_{\mathbf{q}(t') = \mathbf{q}'}^{\mathbf{q}(t'') = \mathbf{q}''} \mathcal{D} \mathbf{q}(t) \sqrt{g(\mathbf{q})} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} h_{ac}(\mathbf{q}) \dot{q}^a \dot{q}^b - V(\mathbf{q}) - \Delta V(\mathbf{q}) \right] dt \right\} \equiv \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{ND/2} \prod_{k=1}^{N-1} \int d\mathbf{q}_k \sqrt{g(\mathbf{q}_k)} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} h_{bc}(\mathbf{q}_j) h_{ac}(\mathbf{q}_{j-1}) \Delta q_j^a \Delta q_j^b - \varepsilon V(\mathbf{q}_j) - \varepsilon \Delta V(\mathbf{q}_j) \right] \right\}. \quad (2.4) \end{aligned}$$

ΔV denotes the well-defined quantum potential

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{q}) &= \frac{\hbar^2}{8M} [g^{ab} \Gamma_a \Gamma_b + 2(g^{ab} \Gamma_b)_{,b} + g^{ab}_{,ab}] + \\ &+ \frac{\hbar^2}{8M} (2h^{ac} h^{bc}_{,ab} - h^{ac}_{,a} h^{bc}_{,b} - h^{ac}_{,b} h^{bc}_{,a}). \quad (2.5) \end{aligned}$$

Here we have used the abbreviations $\varepsilon = (t'' - t')/N \equiv T/N$, $\Delta \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{j-1}$, $\bar{q}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_{j-1})$ for $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}(t' + j\varepsilon)$ ($t_j = t' + \varepsilon j$, $j = 0, \dots, N$) and we interpret the limit $N \rightarrow \infty$ as equivalent to $\varepsilon \rightarrow 0$, T fixed. The lattice representation can be achieved by exploiting the composition law of the time-evolution operator $U = \exp(-iHT/\hbar)$. Then the discretized path integral emerges in a natural way, and the classical Lagrangian is modified into an effective Lagrangian via $\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{Cl} - \Delta V$. Note that the factorization of the metric according to $g_{ab} = h_{ac} h_{cb}$ characterizes the h_{ac} as Lamé coefficients [52].

Concerning the space-time transformation technique we do not repeat the relevant formulae once more again, and would like to refer to the literature instead, c.f. [5,25,28,42], and references therein.

2.2. The Pöschl-Teller Potential

As we shall see, we encounter particularly in the case of the Higgs oscillator, the Pöschl-Teller and the modified Pöschl-Teller potentials in our path integral problems. The path integral solution of the Pöschl-Teller potential reads as follows (Böhm and Junker [2], Duru [4], Fischer et al. [8], Inomata et al. [35], Kleinert and Mustapic [43], and [20,27,28], $0 < x < \pi/2$)

$$\int_{x(t')=x'}^{x(t'')=x''} \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 x} + \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 x} \right) \right] dt \right\} =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} e^{-iE_n T/\hbar} \phi_n^{(\alpha, \beta)}(x') \phi_n^{(\alpha, \beta)}(x''), \quad (2.6)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi i} e^{-iET/\hbar} G_{PT}^{(\alpha, \beta)}(x'', x'; E). \quad (2.7)$$

The bound state wave-functions and the energy spectrum are given by

$$\phi_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \left[2(\alpha + \beta + 2n + 1) \frac{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)} \right]^{1/2} \times$$

$$\times (\sin x)^{\alpha + 1/2} (\cos x)^{\beta + 1/2} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos 2x), \quad (2.8)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2M} (2n + \alpha + \beta + 1)^2. \quad (2.9)$$

The $P_n^{(\alpha, \beta)}$ are Jacobi polynomials [13, p.1035], and the wave-functions

$\phi_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ are normalized to unity according to $\int_0^{\pi/2} |\phi_n^{(\alpha, \beta)}(x)|^2 dx = 1$. The

Green function $G_{PT}^{(\alpha, \beta)}(E)$ has the form

$$G_{PT}^{(\alpha, \beta)}(x'', x'; E) = \frac{M}{2\hbar^2} \sqrt{\sin x' \sin x''} \frac{\Gamma(m_1 - L_E) \Gamma(L_E + m_1 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + 1) \Gamma(m_1 - m_2 + 1)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1 - \cos 2x'}{2} \frac{1 - \cos 2x''}{2} \right)^{(m_1 - m_2)/2} \left(\frac{1 + \cos 2x'}{2} \frac{1 + \cos 2x''}{2} \right)^{(m_1 + m_2)/2} \times \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_E + m_1, L_E + m_1 + 1; m_1 - m_2 + 1; \frac{1 - \cos 2x_{<}}{2} \right) \times \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_E + m_1, L_E + m_1 + 1; m_1 + m_2 + 1; \frac{1 - \cos 2x_{>}}{2} \right), \quad (2.10)
\end{aligned}$$

where $m_{1,2} = \frac{1}{2}(\beta \pm \alpha)$, $L_E = \frac{1}{2}(\sqrt{2ME}/\hbar - 1)$; ${}_2F_1(a, b; c; z)$ is the hypergeometric function [13, p.1039], and $x_{>}, x_{<}$ denotes the larger, respectively smaller of x', x'' .

2.3. The Modified Pöschl-Teller Potential

The case of the modified Pöschl-Teller potential is given by [2,8,20,27,28,35,43]

$$\begin{aligned}
& r(t'') = r'' \\
& \int_{r(t')=r'} \mathcal{D}r(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} \dot{r}^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 r} - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 r} \right) \right] dt \right\} = \\
& = \sum_{n=0}^{N_{\max}} e^{-iE_n T/\hbar} \psi_n^{(\kappa, \lambda)*}(r') \psi_n^{(\kappa, \lambda)}(r'') + \\
& + \int_0^\infty dp e^{-iE_p T/\hbar} \psi_p^{(\kappa, \lambda)*}(r') \psi_p^{(\kappa, \lambda)}(r''), \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi i} e^{-iET/\hbar} G_{mPT}^{(\kappa, \lambda)}(r'', r', E). \quad (2.12)$$

The bound states are given by

$$\begin{aligned}
& \psi_n^{(\kappa, \lambda)}(r) = N_m^{(\kappa, \lambda)} (\sinh r)^{\kappa + 1/2} (\cosh r)^{n - \lambda + 1/2} \times \\
& \times {}_2F_1(-n, \lambda - n; 1 + \kappa; \tanh^2 r), \\
& N_n^{(\kappa, \lambda)} = \frac{1}{\Gamma(1 + \kappa)} \left[\frac{2(\lambda - \kappa - 2n - 1) \Gamma(n + 1 + \kappa) \Gamma(\lambda - n)}{\Gamma(\lambda - \kappa - n)n!} \right]^{1/2}, \quad (2.13) \\
& E_n = -\frac{\hbar^2}{2M} (2n + \kappa - \lambda + 1)^2. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Here denote $n = 0, 1, \dots, N_{\max} = \left\lceil \frac{1}{2} (\lambda - \kappa - 1) \right\rceil \geq 0$, and only a finite number of bound states can exist depending on the strength of the attractive potential through and the repulsive centrifugal term as well. Here $[x]$ denotes the integer part of the real number x . The continuous states are

$$\begin{aligned} \psi_p^{(\kappa, \lambda)}(r) &= N_p^{(\kappa, \lambda)} (\cosh r)^{ip} (\tanh r)^{\kappa+1/2} \times \\ &\times {}_2F_1 \left(\frac{\lambda + \kappa + 1 - ip}{2}, \frac{\kappa - \lambda + 1 - ip}{2}; 1 + \kappa; \tanh^2 r \right), \\ N_p^{(\kappa, \lambda)} &= \frac{1}{\Gamma(1 + \kappa)} \frac{\sqrt{p} \sinh \pi p}{2\pi^2} \Gamma \left(\frac{\lambda + \kappa + 1 - ip}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\kappa - \lambda + 1 - ip}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

and $E_p = \hbar^2 p^2 / 2M$. The Green function $G_{mPT}^{(\kappa, \lambda)}(E)$ has the form

$$\begin{aligned} G_{mPT}^{(\kappa, \lambda)}(r'', r'; E) &= \frac{M}{2\hbar^2} \frac{\Gamma(m_1 - L_\lambda) \Gamma(L_\lambda + m_1 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + 1) \Gamma(m_1 - m_2 + 1)} \times \\ &\times (\cosh r' \cosh r'')^{-(m_1 - m_2)} (\tanh r' \tanh r'')^{m_1 + m_2 + 1/2} \times \\ &\times {}_2F_1 \left(-L_\lambda + m_1, L_\lambda + m_1 + 1; m_1 - m_2 + 1; \frac{1}{\cosh^2 r_{<}} \right) \times \\ &\times {}_2F_1(-L_\lambda + m_1, L_\lambda + m_1 + 1; m_1 + m_2 + 1; \tanh^2 r_{>}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

where we have set $m_{1,2} = \frac{1}{2} (\kappa \pm \sqrt{-2ME/\hbar})$, $L_\lambda = \frac{1}{2} (\lambda - 1)$. We make extensively use of the solutions of the Pöschl-Teller and the modified Pöschl-Teller potentials, respectively.

3. SEPARATION OF VARIABLES AND COORDINATE SYSTEMS ON THE HYPERBOLOID

In this section we discuss separation of variables in the Schrödinger equation, respectively in the path integral, and list the corresponding orthogonal coordinate systems on the two-dimensional hyperboloid $\Lambda^{(2)}$.

3.1. Separation of Variables in the Schrödinger Equation and in the Path Integral

Let us consider the time-independent Schrödinger equation in a Riemannian space

$$H\Psi \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{LB} + V \right) \Psi = E\Psi, \quad (3.1)$$

where Δ_{LB} is the Laplace-Beltrami operator as defined in the previous section, assuming that the line-element for an orthogonal coordinate system $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_D)$ can be written according to

$$ds^2 = \sum_{i=1}^D h_i^2 (d\rho_i)^2, \quad (3.2)$$

and Δ_{LB} can be cast into the form

$$\Delta_{LB} = \sum_{i=1}^D \frac{1}{\prod_{j=1}^D h_j(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{\prod_{k=1}^D h_k(\rho)}{h_i^2(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right). \quad (3.3)$$

As was shown by Moon and Spencer [51] the necessary and sufficient condition for simple separability of the Helmholtz equation, in a D -dimensional Riemannian space with an orthogonal coordinate system ρ , is the factorization of the Lamé coefficients h_i according to

$$\frac{\prod_{j=1}^D h_j(\rho)}{h_i^2(\rho)} = M_{i1} \prod_{j=1}^D f_j(\rho_j) \quad (3.4)$$

such that

$$\left. \begin{aligned} M_{i1}(\rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_D) &= \frac{\partial S}{\partial \Phi_{i1}} = \frac{S(\rho)}{h_i^2(\rho)}, \\ \frac{h^{1/2}}{S(\rho)} &= \prod_{i=1}^D f_i(\rho_i), \quad h = \prod_{i=1}^D h_i(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

where S is the Stäckel determinant [52,57]

$$S(\rho) = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(\rho_1) & \Phi_{12}(\rho_1) & \dots & \Phi_{1D}(\rho_1) \\ \Phi_{21}(\rho_2) & \Phi_{22}(\rho_2) & \dots & \Phi_{2D}(\rho_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{D1}(\rho_D) & \Phi_{D2}(\rho_D) & \dots & \Phi_{DD}(\rho_D) \end{vmatrix}, \quad (3.6)$$

and M_{i1} is called the cofactor of Φ_{i1} .

For the separation of the Schrödinger equation a potential V must have the following form

$$V = \sum_i^D \frac{v_i(\rho_i)}{h_i^2}, \quad (3.7)$$

and the separated equations are ($\Psi = \psi_1 \psi_2 \dots \psi_D$)

$$\frac{1}{f_i} \frac{d}{d\rho_i} \left(f_i \frac{d\psi_i}{d\rho_i} \right) + \left(\sum_k \Phi_{ik} \alpha_k - v_i \right) \psi_i = 0. \quad (3.8)$$

Here $\alpha_1 = 2ME/\hbar^2$ and $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_D$ are the separation constants. By using these equations one can construct the full set of commuting operators for each coordinate system. In [61] the following was proven: If the Schrödinger equation (3.1) admits simple separation of variables in the coordinate system $(\rho_1, \dots, \rho_D)$, then there exists $D - 1$ linearly independent second degree operators I_k , $k = 2, 3, \dots, D - 1$ commuting with the Hamiltonian H and with each other, and they have the form

$$I_k = - \sum_{i=1}^D (\Phi^{-1})_{ik} \left[\frac{1}{f_i} \frac{d}{d\rho_i} \left(f_i \frac{d\psi_i}{d\rho_i} \right) + v_i \right]. \quad (3.9)$$

The separation constants $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_D$ are the eigenvalue of these operators, i.e.,

$$I_k \Psi = \alpha_k \Psi. \quad (3.10)$$

Superintegrable systems have the property that they admit not only separation of variables in one coordinate system, but in at least two ones. This has the consequence that the system has additional integrals of motion, and that the discrete spectrum has accidental degeneracies.

The theory of separation of variables allows the formulation of the corresponding separation formula for the path integral. Introducing the (new) momentum operators $P_i = \frac{\hbar}{i} \left(\partial_{\rho_i} + \frac{1}{2} \Gamma_i \right)$, $\Gamma_i = f'_i / f_i$, we then can rewrite the Legendre transformed Hamiltonian as follows [24]

$$\begin{aligned}
 H - E &= -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{LB} - E = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^D \frac{1}{\prod_{j=1}^D h_j} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{\prod_{k=1}^D h_k}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right) - E = \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{S} \sum_{i=1}^D \left[\frac{1}{f_i} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(f_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right) \right] - E = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{S} \sum_{i=1}^D M_{1i} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho_i^2} + \Gamma_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \right) - E = \\
 &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^D M_{1i} \left[\frac{1}{2m} P_i^2 - E \hbar_i^2 + \frac{\hbar^2}{8M} (\Gamma_i^2 + 2\Gamma_i') \right] = \\
 &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^D M_{1i} \left[\frac{1}{2m} P_i^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{j=1}^D \alpha_j \Phi_{ij}(\rho_i) + \frac{\hbar^2}{8M} (\Gamma_i^2 + 2\Gamma_i') \right]. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

We then obtain according to the general theory by means of a space-time transformation the following identity in the path integral ($g = \prod h_i^2$)

$$\begin{aligned}
 &\int_{\rho(t')=\rho'}^{\rho(t'')=\rho''} \mathcal{D}\rho(t) \sqrt{g} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{p})^2 - \Delta V_{PF}(\mathbf{p}) \right] dt \right\} = \\
 &= \int_{\rho(t')=\rho'}^{\rho(t'')=\rho''} \mathcal{D}\rho(t) \prod_{i=1}^D \sqrt{\frac{S}{M_{1i}}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} S \frac{\dot{\rho}_i^2}{M_{1i}} - \Delta V_i(\mathbf{p}) \right] dt \right\} = \\
 &= (S' S'')^{1/2(1-D/2)} \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \prod_{i=1}^D (M'_{1i} M''_{1i})^{1/4} \int_{\rho_i(0)=\rho'_i}^{\rho_i(s'')=\rho''_i} \mathcal{D}\rho_i(s) \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^{s''} \left[\frac{M}{2} \dot{\rho}_i^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{j=1}^D \alpha_j \Phi_{ij}(\rho_i) - \frac{\hbar^2}{8M} (\Gamma_i^2 + 2\Gamma_i') \right] ds \right\}. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Therefore we achieved complete separation of variables in the $\mathbf{p}$ -path integral.

3.2. Coordinate Systems on $\Lambda^{(2)}$

In this subsection we consider the coordinate systems of the two-dimensional hyperboloid defined by

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = u_0^2 - \mathbf{u}^2 = R^2, \quad u_0 > 0 \quad (3.13)$$

which separate the Schrödinger equation, respectively the path integral on $\Lambda^{(2)}$. The notion $u_0 > 0$ means that we consider only one sheet of the double-sheeted hyperboloid $u_0^2 - \mathbf{u}^2 = R^2$. The enumeration includes the definition of the coordinates, the characteristic operator I , i.e., the operator which commutes with the Hamiltonian, the Stäckel-matrix S , the momentum operators p_i , the Schrödinger operator (Hamiltonian) H , and the general form of the potential which separates in the corresponding coordinates, together with its observable $I^{(V)}$. In the notation of the coordinate systems we follow [38,54] and [64]. The Hamiltonian on $\Lambda^{(2)}$ can be written as

$$H = H_0 + V(u), \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{LB} = \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2), \quad (3.14)$$

where $K_{1,2}$ are (hyperbolic) angular-momentum operators defined by

$$K_1 = \frac{\hbar}{i} \left(u_0 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_0} \right), \quad K_2 = \frac{\hbar}{i} \left(u_0 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} \right), \quad (3.15)$$

and L_3 is the angular momentum operator

$$L_3 = \frac{\hbar}{i} \left(u_1 \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} \right). \quad (3.16)$$

K_1, K_2 are the generators of the Lorentz transformations, and L_3 is the generator of (spatial) rotations in three-dimensional Minkowskian space. They satisfy the commutation relations

$$[K_1, K_2] = i\hbar L_3, \quad [K_2, L_3] = -i\hbar K_1, \quad [L_3, K_1] = -i\hbar K_2. \quad (3.17)$$

The Schrödinger equation for the eigenvalue problem for the free motion on the two-dimensional hyperboloid has the form [38]

$$H_0 \Psi(u) = E \Psi(u) = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right) \Psi(u), \quad p > 0. \quad (3.18)$$

The spectrum is purely continuous with largest lower bound $E_0 = \hbar^2 / 8MR^2$ [20].

For the classification of the coordinate system on the two-dimensional hyperboloid we need the Hamiltonian H and another second-order differential operator I which commutes with H . In the following we call the operator I corresponding to this quantum number (*characteristic*) *observable*, respectively the *characteristic operator*.

In the sequel we only consider *orthogonal* coordinate systems on the two-dimensional hyperboloid. $u \in \Lambda^{(2)}$ is expressed as $u = u(\mathbf{p})$, where $\mathbf{p} = (\rho_1, \rho_2)$ are two-dimensional coordinates on $\Lambda^{(2)}$. For the metric tensor then follows

$$g_{ab} = G_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial \rho_a} \frac{\partial u_k}{\partial \rho_b}, \quad (3.19)$$

where G_{ik} is the metric tensor of the ambient space, which is in the present case $G_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, and in order that the line element $ds^2 = \sum_{ab} \varepsilon_{ab} g_{ab} dq^a dq^b$ is positive definite an appropriate $\varepsilon = \pm 1$ must be taken into account. Actually $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{aa} = -1, \forall_{a,b}$ because the metric tensor is always diagonal. In the following we state for convenience only the explicit form of ds^2 .

The nine possible coordinate systems on $\Lambda^{(2)}$ now are the following:

1. The first coordinate system is the (*pseudo*-) *spherical system*:

$$u_0 = R \cosh \tau, \quad u_1 = R \sinh \tau \cos \varphi, \quad u_2 = R \sinh \tau \sin \varphi \quad (3.20)$$

($\tau > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$). The characteristic operator is

$$I_S = L_3^2, \quad (3.21)$$

which means that in the flat space limit we obtain the polar system in $\mathbb{R}^2$. The Stäckel-determinant is given by

$$S = \begin{vmatrix} R^2 & -\frac{1}{\sinh^2 \tau} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = R^2, \quad (3.22)$$

and $f_1 = \sinh \tau, f_2 = 1$. For the line element we have $ds^2 = R^2 (d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\varphi^2)$, and therefore the momentum operators are given by

$$p_\tau = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \coth \tau \right), \quad p_\varphi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.23)$$

The Hamiltonian reads

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \coth \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2MR^2} \left(p_\tau^2 + \frac{1}{\sinh^2 \tau} p_\varphi^2 \right) + \frac{\hbar^2}{8MR^2} \left(1 - \frac{1}{\sinh^2 \tau} \right). \quad (3.24)$$

A potential separable in pseudospherical coordinates must have the form

$$V(\tau, \varphi) = V_1(\tau) + \frac{V_2(\varphi)}{\sinh^2 \tau}, \quad (3.25)$$

and the corresponding constant of motion, respectively observable, is

$$I_S^{(V)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + V_2(\varphi) = \frac{1}{2M} L_3^2 + V_2(\varphi). \quad (3.26)$$

Note that the corresponding observable on the two-dimensional sphere $S^{(2)}$ has exactly the same form. In the following the prefix «pseudo» is omitted.

2. The second system is the *equidistant* system. It has the form

$$u_0 = R \cosh \tau_1 \cosh \tau_2, \quad u_1 = R \cosh \tau_1 \sinh \tau_2, \quad u_2 = R \sinh \tau_1 \quad (3.27)$$

($\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$). The operator corresponding to this system is

$$I_{EQ} = K_2^2 \quad (3.28)$$

which characterizes this system as «cartesian»-like, i.e., in the flat space limit we obtain cartesian coordinates, and the K_i operators, $i = 1, 2$, yield the usual

$p_i = -i\hbar \partial_{x_i}$ momentum operators. The Stäckel determinant is

$$S = \begin{vmatrix} R^2 & -\frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = R^2, \quad (3.29)$$

and $f_1 = \cosh \tau, f_2 = 1$. The line element is given by $ds^2 = R^2(d\tau_1^2 + \cosh^2 \tau_1 d\tau_2^2)$, and the momentum operators have the form

$$p_{\tau_1} = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \tanh \tau_1 \right), \quad p_{\tau_2} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \tau_2}. \quad (3.30)$$

For the Hamiltonian we obtain

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \tanh \tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2MR^2} \left(p_{\tau_1}^2 + \frac{1}{\cosh^2 \tau_1} p_{\tau_2}^2 \right) + \frac{\hbar^2}{8MR^2} \left(1 + \frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \right). \quad (3.31)$$

A potential on $\Lambda^{(2)}$ separable in equidistant coordinates must have the form

$$V(\tau_1, \tau_2) = V_1(\tau_1) + \frac{V_2(\tau_2)}{\cosh^2 \tau_1}, \quad (3.32)$$

and the corresponding observable is given by

$$I_{EQ}^{(V)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} + V_2(\tau_2) = \frac{1}{2M} K_2^2 + V_2(\tau_2). \quad (3.33)$$

3. The third coordinate system is called *horicyclic* system:

$$u_0 = R \frac{x^2 + y^2 + 1}{2y}, \quad u_1 = R \frac{x^2 + y^2 - 1}{2y}, \quad u_2 = R \frac{x}{y} \quad (3.34)$$

($y > 0$, $x \in \mathbb{R}$). The characteristic operator is given by

$$I_{HO} = (K_1 - L_3)^2 = K_1^2 + L_3^2 - \{K_1, L_3\}, \quad (3.35)$$

where $\{X, Y\} = XY + YX$ is the anticommutator of two operators X and Y . In the flat space limit this system gives cartesian coordinates. For the Stäckel determinant we get

$$S = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{R^2}{y^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{y^2}, \quad (3.36)$$

and $f_1 = f_2 = 1$. The line element is $ds^2 = R^2(dx^2 + dy^2)/y^2$, and the momentum operators have the form

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{y} \right). \quad (3.37)$$

Therefore we obtain for the Hamiltonian

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{2MR^2} y(p_x^2 + p_y^2) y. \quad (3.38)$$

Note that we have in this case no quantum potential ΔV which is due to the fact that the metric is proportional to $\mathbf{I}_2$. A potential separable in horicyclic coordinates must have the form

$$V(x, y) = V_1(y) + y^2 V_2(x) = V_1(y) + R^2 \frac{V_2(x)}{(u_0 - u_1)^2}, \quad (3.39)$$

and the corresponding observable is given by

$$I_{HO}^{(V)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_2(x) = \frac{1}{2M} (K_1 - L_3)^2 + V_2(x). \quad (3.40)$$

4. The fourth coordinate system is the *elliptic* coordinate system. In algebraic form it is defined as

$$\begin{aligned} u_0^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(\rho_2 - a_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \\ u_1^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}, \\ u_2^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$(a_3 < a_2 < \rho_2 < a_1 < \rho_1)$. The Stäckel determinant has the form

$$S = \begin{vmatrix} \frac{R^2}{4} \frac{\rho_1}{P(\rho_1)} & -\frac{1}{P(\rho_1)} \\ \frac{R^2}{4} \frac{\rho_2}{P(\rho_2)} & -\frac{1}{P(\rho_2)} \end{vmatrix} = -\frac{R^2}{4} \frac{\rho_1 - \rho_2}{P(\rho_1)P(\rho_2)}, \quad (3.42)$$

$f_1 = \sqrt{P(\rho_1)}$, $f_2 = \sqrt{-P(\rho_2)}$, and $P(\rho) = (\rho - a_1)(\rho - a_2)(\rho - a_3)$. After putting

$$\rho_1 = a_1 - (a_1 - a_3) \operatorname{dn}^2(\alpha, k), \quad \rho_2 = a_1 - (a_1 - a_2) \operatorname{sn}^2(\beta, k'), \quad (3.43)$$

and

$$k^2 = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}, \quad k'^2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad (3.44)$$

with the property $k^2 + k'^2 = 1$, we get

$$\begin{aligned}
 u_0 &= R \operatorname{sn}(\alpha, k) \operatorname{dn}(\beta, k'), \\
 u_1 &= iR \operatorname{cn}(\alpha, k) \operatorname{cn}(\beta, k'), \\
 u_2 &= iR \operatorname{dn}(\alpha, k) \operatorname{sn}(\beta, k').
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

Here $\alpha \in (iK', iK' + 2K)$, $\beta \in [0, 4K')$, and $\operatorname{sn}(\mu, k)$, $\operatorname{cn}(\mu, k)$, $\operatorname{dn}(\mu, k)$ are the Jacobi elliptic functions [13, p.910] with modulus k , and $K = K(k)$, $K' = K(k')$ are the complete elliptic integrals with k and k' the elliptic moduli. In the elliptic system the characteristic operator has the form

$$I_E = L_3^2 + \sinh^2 f K_2^2, \tag{3.46}$$

with $\sinh^2 f$ as in (3.47), and $2f$ is the distance between the foci. Analogously as for the elliptic system on the two-dimensional sphere we can introduce a *rotated elliptic* (also called *elliptic II*) system [22]. Instead of a trigonometric rotation as for the case on the sphere we must consider in the present case a hyperbolic rotation. We define

$$\sinh^2 f = \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} = \frac{k'^2}{k^2}, \quad \cosh^2 f = \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{1}{k^2}, \tag{3.47}$$

and the rotated elliptic system is then obtained by

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh f & \sinh f & 0 \\ \sinh f & \cosh f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \cosh f + u_1 \sinh f \\ u_0 \sinh f + u_1 \cosh f \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Explicitly this yield

$$\begin{aligned}
 u'_0 &= \frac{R}{a_2 - a_3} (\sqrt{(\rho_1 - a_3)(\rho_2 - a_3)} + \sqrt{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}) \\
 &= R \left[\frac{1}{k} \operatorname{sn}(\alpha, k) \operatorname{dn}(\beta, k') + i \frac{k'}{k} \operatorname{cn}(\alpha, k) \operatorname{cn}(\beta, k') \right], \\
 u'_1 &= \frac{R}{a_2 - a_3} \left(\sqrt{\frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} (\rho_1 - a_3)(\rho_2 - a_3)} + \sqrt{\frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} (\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)} \right) \\
 &= R \left[\frac{k'}{k} \operatorname{sn}(\alpha, k) \operatorname{dn}(\beta, k') + \frac{i}{k} \operatorname{cn}(\alpha, k) \operatorname{cn}(\beta, k') \right], \\
 u'_2 &= R \sqrt{\frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}} = iR \operatorname{dn}(\alpha, k) \operatorname{sn}(\beta, k').
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

In the rotated elliptic system we get

$$I_E = \cosh 2f L_3^2 - \frac{1}{2} \sinh 2f \{K_1, L_3\}. \quad (3.50)$$

In the flat space limit the elliptic system gives elliptic coordinates in $\mathbb{R}^2$; and the rotated elliptic system, elliptic II coordinates in $\mathbb{R}^2$. If no confusion can arise we do not distinguish in the following the rotated elliptic system by printing the coordinates. For short-hand notation we also omit the moduli. The line element in each case is given by $ds^2 = R^2(k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2)$. For the momentum operators we obtain

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} \right), \\ p_\beta &= \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{k^2 \operatorname{sn} \beta \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} \right), \end{aligned} \quad (3.51)$$

and for the Hamiltonian we have

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{1}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2MR^2} \frac{1}{\sqrt{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta}} (p_\alpha^2 + p_\beta^2) \frac{1}{\sqrt{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A potential separable in elliptic coordinates must have the form

$$V(\alpha, \beta) = \frac{\tilde{V}_1(\alpha) + \tilde{V}_2(\beta)}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} = \frac{V_1(\rho_1) + V_2(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}. \quad (3.53)$$

The observable then is given by

$$\begin{aligned} I_E^{(V)} &= -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \left(\rho_2 \sqrt{P(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \sqrt{P(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \right. \\ &\quad \left. + \rho_1 \sqrt{-P(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \sqrt{-P(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) + \\ &\quad + \frac{\rho_2 V_1(\rho_1) + \rho_1 V_2(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2} = \\ &= \frac{1}{2M} (L_3^2 + \sinh^2 f K_2^2) + \frac{\rho_2 V_1(\rho_1) + \rho_1 V_2(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Note that the corresponding observable on the two-dimensional sphere has the form

$$I_{E, S^{(2)}}^{(V)} = \frac{1}{2M} (L_1^2 + k'^2 L_2^2) + \frac{\rho_2 V_1(\rho_1) + \rho_1 V_2(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}, \quad (3.55)$$

with ρ_1, ρ_2 elliptic coordinates on $S^{(2)}$ [22].

5. The fifth coordinate system is the hyperbolic system:

$$\begin{aligned} u_0^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}, \\ u_1^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(a_3 - \rho_2)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \\ u_2^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \end{aligned} \quad (3.56)$$

($\rho_2 < a_3 < a_2 < a_1 < \rho_1$). The Stäckel determinant is given by

$$S = \begin{vmatrix} \frac{R^2}{4} \frac{\rho_1}{P(\rho_1)} & -\frac{1}{P(\rho_1)} \\ \frac{R^2}{4} \frac{\rho_2}{P(\rho_2)} & -\frac{1}{P(\rho_2)} \end{vmatrix} = -\frac{R^2}{4} \frac{\rho_1 - \rho_2}{P(\rho_1) P(\rho_2)}, \quad (3.57)$$

and $f_1 = \sqrt{P(\rho_1)}$, $f_2 = \sqrt{-P(\rho_2)}$. After putting [64]

$$\rho_1 = a_2 - (a_2 - a_3) \operatorname{cn}^2(\mu, k), \quad \rho_2 = a_2 + (a_1 - a_2) \operatorname{cn}^2(\eta, k'), \quad (3.58)$$

and

$$k^2 = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}, \quad k'^2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad (3.59)$$

where $\mu \in (iK', iK' + 2K)$, $\eta \in [0, 4K')$ we get

$$\begin{aligned} u_0 &= -R \operatorname{cn}(\mu, k) \operatorname{cn}(\eta, k'), \\ u_1 &= iR \operatorname{sn}(\mu, k) \operatorname{dn}(\eta, k'), \\ u_2 &= iR \operatorname{dn}(\mu, k) \operatorname{sn}(\eta, k'). \end{aligned} \quad (3.60)$$

The characteristic operator is given by

$$I_H = K_2^2 - \sin^2 \alpha L_3^2, \quad (3.61)$$

where $\sin^2 \alpha = (a_2 - a_3)/(a_1 - a_3)$ and 2α is the angle between the two focal lines. In the flat space limit the hyperbolic system gives cartesian coordinates. The line element has the form $ds^2 = R^2(k^2 \text{cn}^2 \mu + k'^2 \text{cn}^2 \eta)(d\mu^2 + d\eta^2)$, and the momentum operators are

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{k^2 \text{sn} \mu \text{cn} \mu \text{dn} \mu}{k^2 \text{cn}^2 \mu + k'^2 \text{cn}^2 \eta} \right), \\ p_\eta &= \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{k^2 \text{sn} \eta \text{cn} \eta \text{dn} \eta}{k^2 \text{cn}^2 \mu + k'^2 \text{cn}^2 \eta} \right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

and for the Hamiltonian we obtain

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{1}{k^2 \text{cn}^2 \mu + k'^2 \text{cn}^2 \eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2MR^2} \frac{1}{\sqrt{k^2 \text{cn}^2 \mu + k'^2 \text{cn}^2 \eta}} (p_\mu^2 + p_\eta^2) \frac{1}{\sqrt{k^2 \text{cn}^2 \mu + k'^2 \text{cn}^2 \eta}}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

A potential separable in hyperbolic coordinates must have the form

$$V(\mu, \eta) = \frac{\tilde{V}_1(\mu) + \tilde{V}_2(\eta)}{k^2 \text{cn}^2 \mu + k'^2 \text{cn}^2 \eta} = \frac{V_1(\rho_1) + V_2(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}, \quad (3.64)$$

and the corresponding observable is

$$\begin{aligned} I_H^{(V)} &= -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \left(\rho_2 \sqrt{P(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \sqrt{P(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \right. \\ &\quad \left. + \rho_1 \sqrt{-P(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \sqrt{-P(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \\ &\quad + \frac{\rho_2 V_1(\rho_1) + \rho_1 V_2(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2} = \\ &= \frac{1}{2M} (K_2^2 - \sin^2 \alpha L_3^2) + \frac{\rho_2 V_1(\rho_1) + \rho_1 V_2(\rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

6. The sixth coordinate system is the *semi-hyperbolic* system:

$$u_0^2 = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{[(\rho_1 - \gamma)^2 + \delta^2][(\rho_2 - \gamma)^2 + \delta^2]}{(a - \gamma)^2 + \delta^2}} + \frac{(\rho_1 - a)(a - \rho_2)}{[(a - \gamma)^2 + \delta^2]} + 1 \right),$$

$$u_1^2 = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{[(\rho_1 - \gamma)^2 + \delta^2][(\rho_2 - \gamma)^2 + \delta^2]}{(a - \gamma)^2 + \delta^2}} + \frac{(\rho_1 - a)(a - \rho_2)}{[(a - \gamma)^2 + \delta^2]} - 1 \right),$$

$$u_2^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a)(a - \rho_2)}{(a - \gamma)^2 + \delta^2} \quad (3.66)$$

($\rho_2 < a < \rho_1$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$). The characteristic operator has the form

$$I_{SH} = \{K_1, L_3\} - \sinh 2f K_2^2, \quad (3.67)$$

where $\sinh 2f = (a - \gamma)/\delta$ and $2f$ is the distance between the focus of the semihyperbolas and the basis of the equidistants. In the flat space limit the case of $\sinh 2f \rightarrow 0$ gives parabolic coordinates; and the case $\sinh 2f \rightarrow \infty$, cartesian coordinates. For the Stäckel determinant we obtain

$$S = \begin{vmatrix} \frac{R^2}{4} \frac{1}{1 + \mu_1^2} & -\frac{1}{P(\mu_1)} \\ \frac{R^2}{4} \frac{1}{1 + \mu_2^2} & \frac{1}{P(\mu_2)} \end{vmatrix} = \frac{R^2}{4} \frac{\mu_1 + \mu_2}{P(\mu_1)P(\mu_2)}, \quad (3.68)$$

and $f_1 = \sqrt{P(\mu_1)}$, $f_2 = \sqrt{P(\mu_2)}$. The special choice of the parameters $a = \gamma = 0$, $\delta = 1$ together with $\rho_1 = \mu_1 > 0$, $-\rho_2 = \mu_2 > 0$ yields

$$\left. \begin{aligned} u_0^2 &= \frac{R^2}{2} (\sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)} + \mu_1\mu_2 + 1) \\ &= \frac{R^2}{4} [\sqrt{(1 - i\mu_1)(1 - i\mu_2)} - \sqrt{(1 + i\mu_1)(1 + i\mu_2)}]^2, \\ u_1^2 &= \frac{R^2}{2} (\sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)} - \mu_1\mu_2 - 1) = \\ &= -\frac{R^2}{4} [\sqrt{(1 - i\mu_1)(1 + i\mu_2)} - \sqrt{(1 + i\mu_1)(1 - i\mu_2)}]^2, \\ u_2^2 &= R^2 \mu_1 \mu_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

The characteristic operator then has the form

$$I_{SH} = \{K_1, L_3\}, \quad (3.70)$$

which shows that the coordinate system (3.69) yields in the flat space limit *parabolic* coordinates. Note also the relation $u_0 u_1 = R^2(\mu_1 - \mu_2)/2$. In the

following we only consider this special choice of parameters. The line element reads as ($P(\mu) = \mu(1 + \mu^2)$)

$$ds^2 = R^2 \frac{\mu_1 + \mu_2}{4} \left(\frac{d\mu_1^2}{P(\mu_1)} - \frac{d\mu_2^2}{P(\mu_2)} \right), \quad (3.71)$$

the momentum operators are

$$p_{\mu_i} = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} + \frac{1}{2(\mu_1 + \mu_2)} - \frac{1}{4} \frac{P'(\mu_i)}{P(\mu_i)} \right), \quad (3.72)$$

and for the Hamiltonian we obtain

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{4}{\mu_1 + \mu_2} \left(P(\mu_1) \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu_1^2} + \frac{P'(\mu_1)}{2P(\mu_1)} \right) - P(\mu_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \mu_2^2} + \frac{P'(\mu_2)}{2P(\mu_2)} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2MR^2} \left(\sqrt{\frac{4P(\mu_1)}{\mu_1 + \mu_2}} p_{\mu_1}^2 \sqrt{\frac{4P(\mu_1)}{\mu_1 + \mu_2}} + \sqrt{\frac{-4P(\mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}} p_{\mu_2}^2 \sqrt{\frac{-4P(\mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}} \right) + \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(P''(\mu_1) - P''(\mu_2) - \frac{3P'^2(\mu_1)}{4P(\mu_1)} + \frac{3P'^2(\mu_2)}{4P(\mu_2)} \right). \end{aligned} \quad (3.73)$$

A potential separable in semihyperbolic coordinates must have the form

$$V(\mu_1, \mu_2) = \frac{V_1(\mu_1) + V_2(\mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (3.74)$$

and the corresponding observable is given by

$$\begin{aligned} I_{SH}^{(V)} &= -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(-\mu_2 \sqrt{P(\mu_1)} \frac{\partial}{\partial \mu_1} \sqrt{P(\mu_1)} \frac{\partial}{\partial \mu_1} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_1 \sqrt{P(\mu_2)} \frac{\partial}{\partial \mu_2} \sqrt{P(\mu_2)} \frac{\partial}{\partial \mu_2} \right) + \\ &\quad + \frac{\mu_2 V_1(\mu_1) - \mu_1 V_2(\mu_2)}{\mu_1 + \mu_2} = \\ &= \frac{1}{2M} \{K_1, L_3\} + \frac{\mu_2 V_1(\mu_1) - \mu_1 V_2(\mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

7. The seventh coordinate system is called the *elliptic-parabolic* system. It has the form

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{2} \left(\frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)^{3/2} \sqrt{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}} + \sqrt{\frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}{a_1 - a_2}} \right), \\ u_1 &= \frac{R}{2} \left(\frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)^{3/2} \sqrt{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}} - \sqrt{\frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}{a_1 - a_2}} \right), \\ u_2 &= R \frac{\sqrt{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}}{a_1 - a_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

($a_2 < \rho_2 < a_1 < \rho_1$). The characteristic operator is given by

$$I_{EP} = K_1^2 + (a_1 - a_2) K_2^2 + L_3^2 - \{K_1, L_3\}. \quad (3.77)$$

Making the special choice $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ together with $\rho_1 = \tan^2 \vartheta$, $\rho_2 = -\tanh^2 a$ ($\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $a \in \mathbb{R}$) we obtain

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= R \frac{\cosh^2 a + \cos^2 \vartheta}{2 \cosh a \cos \vartheta} \\ u_1 &= R \frac{\sinh^2 a - \sin^2 \vartheta}{2 \cosh a \cos \vartheta}, \\ u_2 &= R \tan \vartheta \tanh a. \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

In this case the characteristic operator has the form

$$I_{EP} = K_1^2 + K_2^2 + L_3^2 - \{K_1, L_3\} = -\hbar^2 R^2 \Delta_{LB} + 2L_3^2 - \{K_1, L_3\}, \quad (3.79)$$

which shows that for this choice of the parameters the coordinate system may be characterized as a polar-parabolic system. The Stäckel determinant then has the form

$$S = \begin{vmatrix} -\frac{R^2}{\cosh^2 a} & -1 \\ \frac{R^2}{\cos^2 \vartheta} & 1 \end{vmatrix} = R^2 \frac{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta}, \quad (3.80)$$

and $f_1 = f_2 = 1$. In the flat space limit we obtain parabolic coordinates. The line element is given by

$$ds^2 = R^2 \frac{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta} (da^2 + d\vartheta^2). \quad (3.81)$$

For the momentum operators we have

$$p_a = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\sinh a \cosh a}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} - \tanh a \right),$$

$$p_\vartheta = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} + \tan \vartheta \right), \quad (3.82)$$

and the Hamiltonian reads

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2MR^2} \frac{\cosh a \cos \vartheta}{\sqrt{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}} (p_a^2 + p_\vartheta^2) \frac{\cosh a \cos \vartheta}{\sqrt{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}}. \quad (3.83)$$

A potential separable in elliptic-parabolic coordinates must have the form

$$V(a, \vartheta) = \frac{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} [V_1(a) + V_2(\vartheta)], \quad (3.84)$$

and the observable then is

$$I_{EP}^{(V)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} \left(\cosh^2 a \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \cos^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) +$$

$$+ \frac{\cosh^2 a V_1(a) + \cos^2 \vartheta V_2(\vartheta)}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} =$$

$$= \frac{1}{2M} (K_1^2 + K_2^2 + L_3^2 - \{K_1, L_3\}) + \frac{\cosh^2 a V_1(a) + \cos^2 \vartheta V_2(\vartheta)}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}. \quad (3.85)$$

8. The eighth coordinate system is called the *hyperbolic-parabolic* system. It has the form

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{2} \left(\frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)^{3/2} \sqrt{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}} + \sqrt{\frac{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}{a_1 - a_2}} \right), \\ u_1 &= \frac{R}{2} \left(\frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)^{3/2} \sqrt{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{a_1 - a_2}{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}} - \sqrt{\frac{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}{a_1 - a_2}} \right), \\ u_2 &= R \frac{\sqrt{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}}{a_1 - a_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

$(\rho_2 < a_2 < a_1 < \rho_1)$. The characteristic operator is given by

$$I_{HP} = K_1^2 - (a_1 - a_2) K_2^2 + L_3^2 - \{K_1, L_3\}. \quad (3.87)$$

Making the special choice $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ together with $\rho_1 = \cot^2 \vartheta$, $\rho_2 = -\coth^2 b$ ($\vartheta \in (0, \pi)$, $b > 0$), we obtain

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= R \frac{\cosh^2 b + \cos^2 \vartheta}{2 \sinh b \sin \vartheta}, \\ u_1 &= R \frac{\sinh^2 b - \sin^2 \vartheta}{2 \sinh b \sin \vartheta}, \\ u_2 &= R \cot \vartheta \coth b. \end{aligned} \right\} \quad (3.88)$$

In this case the characteristic operator reads

$$I_{HP} = K_1^2 - K_2^2 + L_3^2 - \{K_1, L_3\}. \quad (3.89)$$

For the Stäckel determinant we have

$$S = \begin{vmatrix} \frac{R^2}{\sinh^2 b} & -1 \\ -\frac{R^2}{\sin^2 \vartheta} & 1 \end{vmatrix} = R^2 \frac{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta}{\sinh^2 b \sin^2 \vartheta}, \quad (3.90)$$

and $f_1 = f_2 = 1$. In the flat space limit we obtain cartesian coordinates from this system. The line element is given by

$$ds^2 = R^2 \frac{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta}{\sinh^2 b \sin^2 \vartheta} (db^2 + d\vartheta^2). \quad (3.91)$$

For the momentum operators we have

$$p_b = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\sinh b \cosh b}{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta} - \coth b \right),$$

$$p_\vartheta = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta} - \cot \vartheta \right), \quad (3.92)$$

and for the Hamiltonian we get

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\sinh^2 b \sin^2 \vartheta}{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2MR^2} \frac{\sinh b \sin \vartheta}{\sqrt{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta}} (p_b^2 + p_\vartheta^2) \frac{\sinh b \sin \vartheta}{\sqrt{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta}}. \quad (3.93)$$

A potential separable in elliptic-parabolic coordinates must have the form

$$V(b, \vartheta) = \frac{\sinh^2 b \sin^2 \vartheta}{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta} [V_1(b) + V_2(\vartheta)], \quad (3.94)$$

and the corresponding observable is

$$I_{HP}^{(V)} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta} \left(\sinh^2 b \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \sin^2 \vartheta \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) +$$

$$+ \frac{\sinh^2 b V_1(b) + \sin^2 \vartheta V_2(\vartheta)}{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta} =$$

$$= \frac{1}{2M} (K_1^2 - K_2^2 + L_3^2 - \{K_1, L_3\}) + \frac{\sinh^2 b V_1(b) + \sin^2 \vartheta V_2(\vartheta)}{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta}. \quad (3.95)$$

9. The ninth and the last system is the *semicircular parabolic* coordinate system:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= R \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{8[(\rho_1 - a)(a - \rho_2)]^{3/2}} + \frac{1}{2} \sqrt{(\rho_1 - a)(a - \rho_2)} \right] = R \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 + 4}{8\xi\eta}, \\ u_1 &= R \left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{8[(\rho_1 - a)(a - \rho_2)]^{3/2}} - \frac{1}{2} \sqrt{(\rho_1 - a)(a - \rho_2)} \right] = R \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 - 4}{8\xi\eta}, \\ u_2 &= \frac{R}{2} \left(\sqrt{\frac{\rho_1 - a}{a - \rho_2}} - \sqrt{\frac{a - \rho_2}{\rho_1 - a}} \right) = R \frac{\eta^2 - \xi^2}{2\xi\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

($\rho_2 < a < \rho_1$), and we have made the choice $a=0$, $\rho_2 = -1/\eta^2$, $\rho_1 = 1/\xi^2$, $\xi, \eta > 0$. The characteristic operator has the form

$$I_{SCP} = \{K_1, K_2\} - \{K_2, L_3\}. \quad (3.97)$$

The Stäckel determinant is given by

$$S = \begin{vmatrix} \frac{R^2}{\xi^2} & -1 \\ \frac{R^2}{\eta^2} & 1 \end{vmatrix} = R^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 \eta^2}, \quad (3.98)$$

and $f_1 = f_2 = 1$. In the flat space limit this coordinate system gives cartesian coordinates. The line element reads

$$ds^2 = R^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 \eta^2} (d\xi^2 + d\eta^2), \quad (3.99)$$

the momentum operators are

$$p_\xi = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{1}{\xi} \right), \quad p_\eta = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{1}{\eta} \right), \quad (3.100)$$

and for the Hamiltonian we have

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\xi^2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2MR^2} \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} (p_\xi^2 + p_\eta^2) \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Table 1. Coordinate systems on the two-dimensional hyperboloid

Coordinate system observable I	Coordinates	Separates potential	Limiting systems
I. Spherical $\tau > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$ $I = L_3^2$	$u_0 = R \cosh \tau$ $u_1 = R \sinh \tau \cos \varphi$ $u_2 = R \sinh \tau \sin \varphi$	V_1, V_2 $V_4^{(\omega=0)}$	Polar
II. Equidistant $\tau_{1,2} \in \mathbb{R}$ $I = K_2^2$	$u_0 = R \cosh \tau_1 \cosh \tau_2$ $u_1 = R \cosh \tau_1 \sinh \tau_2$ $u_2 = R \sinh \tau_1$	V_1, V_4, V_5	Cartesian
III. Horicyclic $y > 0, x \in \mathbb{R}$ $I = (K_1 - L_3)^2$	$u_0 = \frac{R}{2y} (x^2 + y^2 + 1)$ $u_1 = \frac{R}{2y} (x^2 + y^2 - 1)$ $u_2 = Rx/y$	V_3, V_4	Cartesian
IV. Elliptic $\alpha \in (iK', iK' + 2K)$ $\beta \in [0, 4K')$ $I = L_3^2 + \sinh^2 f K_2^2$ $I' = \cosh 2f L_3^2 - 1/2 \sinh 2f \{K_1, L_3\}$	$u_0 = R \operatorname{sn} \alpha \operatorname{dn} \beta$ $u_1 = iR \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn} \beta$ $u_2 = iR \operatorname{dn} \alpha \operatorname{sn} \beta$	V_1, V_2^* $V_4^{(\omega=0)}$	Elliptic
V. Hyperbolic $\mu \in (iK', iK' + 2K)$ $\eta \in [0, 4K')$ $I = K_2^2 - \sin^2 \alpha L_3^2$	$u_0 = -\tilde{R} \operatorname{cn} \mu \operatorname{cn} \eta$ $u_1 = iR \operatorname{sn} \mu \operatorname{dn} \eta$ $u_2 = iR \operatorname{dn} \mu \operatorname{sn} \eta$	V_1 $V_4^{(\omega=0)}$	Cartesian
VI. Semi-Hyperbolic $\mu_{1,2} > 0$ $I = \{K_1, L_3\}$	$u_0 = \frac{R}{\sqrt{2}} (\sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)} + \mu_1 \mu_2 + 1)^{1/2}$ $u_1 = \frac{R}{\sqrt{2}} (\sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)} - \mu_1 \mu_2 - 1)^{1/2}$ $u_2 = R \sqrt{\mu_1 \mu_2}$	V_2 $V_4^{(\omega=0)}$	Cartesian** Parabolic

Coordinate system observable I	Coordinates	Separates potential	Limiting systems
VII. Elliptic-parabolic $a \in \mathbb{R}, \vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$ $I = (K_1 - L_3)^2 + K_2^2$	$u_0 = R \frac{\cosh^2 a + \cos^2 \vartheta}{2 \cosh a \cos \vartheta}$ $u_1 = R \frac{\sinh^2 a - \sin^2 \vartheta}{2 \cosh a \cos \vartheta}$ $u_2 = R \tan \vartheta \tanh a$	V_2, V_4	Parabolic
VIII. Hyperbolic-parabolic $b > 0, \vartheta \in (0, \pi)$ $I = (K_1 - L_3)^2 - K_2^2$	$u_0 = R \frac{\cosh^2 b + \cos^2 \vartheta}{2 \sinh b \sin \vartheta}$ $u_1 = R \frac{\sinh^2 b - \sin^2 \vartheta}{2 \cosh b \sin \vartheta}$ $u_2 = R \cot \vartheta \coth b$	V_4	Cartesian
IX. Semi-circular-parabolic $\xi, \eta > 0$ $I = \{K_1, K_2\} - \{K_2, L_3\}$	$u_0 = R \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 + 4}{8\xi\eta}$ $u_1 = R \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 - 4}{2\xi\eta}$ $u_2 = R \frac{\eta^2 - \xi^2}{8\xi\eta}$	V_3, V_5 $V_4^{(k =1/2)}$	Cartesian

*after rotation

**system with whole parameterization

A potential separable in semicircular parabolic coordinates must have the form

$$V(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} [V_1(\xi) + V_2(\eta)], \quad (3.102)$$

and the corresponding observable is given by

$$\begin{aligned}
 I_{SCP}^{(V)} &= -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) - \frac{\xi^2 V_1(\xi) - \eta^2 V_2(\eta)}{\xi^2 + \eta^2} = \\
 &= \frac{1}{2M} (\{K_1, K_2\} - \{K_2, L_3\}) - \frac{\xi^2 V_1(\xi) - \eta^2 V_2(\eta)}{\xi^2 + \eta^2}. \quad (3.103)
 \end{aligned}$$

This concludes the enumeration of the coordinate systems on the two-dimensional hyperboloid.

In Table 1 we list the coordinate systems on $\Lambda^{(2)}$, which separate the Schrödinger equation, together with potentials which are separated by coordinate systems, and the limiting cases in $\mathbb{R}^2$, as $R \rightarrow \infty$.

4. PATH INTEGRAL FORMULATION OF THE SUPERINTEGRABLE POTENTIALS ON $\Lambda^{(2)}$

In Table 2 we list the superintegrable potentials on the two-dimensional hyperboloid together with the separating coordinate systems, and the corresponding observables. The cases where an explicit path integration is possible are underlined.

4.1. The Higgs-Oscillator

We consider the potential ($k_{1,2} > 0$)

$$V_1(u) = \frac{M}{2} \omega^2 R^2 \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2} + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{u_1^2} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{u_2^2} \right), \quad (4.1)$$

which in the four separating coordinate systems has the form

Spherical ($\tau > 0$, $\varphi \in (0, \pi/2)$):

$$V_1(u) = \frac{M}{2} \omega^2 R^2 \tanh^2 \tau + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{1}{\sinh^2 \tau} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \varphi} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \varphi} \right) \quad (4.2)$$

Equidistant ($\tau_1, \tau_2 > 0$):

$$\begin{aligned} &= \frac{M}{2} \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \tau_1 \cosh^2 \tau_2} \right) + \\ &+ \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tau_1 \sinh^2 \tau_2} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau_1} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Elliptic ($\alpha \in (iK', iK' + K)$, $\beta \in (0, K')$):

$$= \frac{M}{2} \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{dn}^2 \beta} \right) + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\operatorname{cn}^2 \alpha \operatorname{cn}^2 \beta} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\operatorname{dn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \beta} \right) \quad (4.4)$$

Table 2. Superintegrable potentials on the two-dimensional hyperboloid

Potential $V(u)$	Coordinate system	Observables
$V_1(u) = \frac{M}{2} \omega^2 R^2 \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2} + \hbar^2 \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{u_1^2} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{u_2^2} \right)$	Spherical Equidistant Elliptic Hyperbolic	$I_1 = \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_1(u)$ $I_2 = \frac{1}{2M} L_3^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \varphi} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \varphi} \right)$ $I_3 = \frac{1}{2M} K_2^2 - \frac{M}{2} \frac{\omega^2 R^4}{\cosh^2 \tau_2} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau_2}$
$V_2(u) = -\frac{\alpha}{R} \left(\frac{0}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - 1 \right) + \hbar^2 \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} + u_1} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} - u_1} \right)$	Spherical Elliptic-parabolic Elliptic II Semihyperbolic	$I_1 = \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_2(u)$ $I_2 = \frac{1}{2M} L_3^2 + \frac{\hbar^2}{8M} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right)$ $I_3 = \frac{1}{2M} \{ K_1, L_3 \} - \alpha R \frac{\mu_2 \sqrt{1 + \mu_1^2} - \mu_1 \sqrt{1 + \mu_2^2}}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\hbar^2}{4M} \left[\left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\mu_1 / \mu_2 + \mu_2 / \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right) + \right. \\ \left. + (k_1^2 - k_2^2) \frac{\mu_2^2 \sqrt{1 + \mu_1^2} + \mu_1^2 \sqrt{1 + \mu_2^2}}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} \right]$

Potential $V(u)$	Coordinate system	Observables
$V_3(u) = \frac{\alpha}{(u_0 - u_1)^2} + \frac{M}{2} \omega^2 \frac{R^2 + 4u_2^2}{(u_0 - u_1)^4} - \lambda \frac{u_2}{(u_0 - u_1)^3}$	Horicyclic Semicircular-parabolic	$I_1 = \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_3(u)$ $I_2 = \frac{1}{2M} (K_1 - L_3)^2 + \alpha + 2M \omega^2 x^2 - \lambda x$ $I_3 = \frac{1}{2M} (\{K_1, K_2\} - \{K_2, L_3\})$ $+ \frac{1}{2} \frac{\xi^4 (2\alpha + \xi^2 \lambda + M \omega^2 \xi^4) - \eta^4 (2\alpha - \eta^2 \lambda + M \omega^2 \eta^4)}{\xi^2 + \eta^2}$
$V_4(u) = \frac{M}{2} \frac{\omega^2}{(u_0 - u_1)^2} + \frac{\kappa^2}{2M} \frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{u_2^2}$ $ \kappa = 1/2$ $\omega = 0$	Equidistant Horicyclic Elliptic-parabolic Hyperbolic-parabolic Semicircular-parabolic all systems except IX	$I_1 = \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_4(u)$ $I_2 = \frac{1}{2M} (K_1 - L_3)^2 + \frac{\kappa^2}{2M} \frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$ $I_3 = \frac{1}{2M} \kappa_2^2 + \frac{M}{2} \omega^2 e^{2\tau_2}$
$V_5(u) = \alpha R \frac{u_2}{\sqrt{u_0^2 - u_1^2}}$	Equidistant Semicircular-parabolic	$I_1 = \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_5(u)$ $I_2 = \frac{1}{2M} (\{K_1, K_2\} - \{K_2, L_3\}) + \frac{2\alpha R}{\xi^2 + \eta^2}$ $I_3 = K_2^2$

Hyperbolic ($\mu \in (iK', iK' + 2K)$, $\eta \in (0, K')$):

$$= \frac{M}{2} \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{cn}^2 \mu \operatorname{cn}^2 \eta} \right) + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\operatorname{sn}^2 \mu \operatorname{dn}^2 \eta} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\operatorname{dn}^2 \mu \operatorname{sn}^2 \eta} \right). \quad (4.5)$$

The constants of motion for the potential V_1 are the following

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_1(u), \\ I_2 &= \frac{1}{2M} L_3^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \varphi} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \varphi} \right), \\ I_3 &= \frac{1}{2M} K_2^2 - \frac{M}{2} \frac{\omega^2 R^4}{\cosh^2 \tau_2} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

We have for V_1 the path integral representations (in the elliptic system we explicitly state the separated path integral formulation $v^2 = M^2 \omega^2 R^4 / \hbar^2 + 1/4$):

$$K^{(V_1)}(u'', u'; T)$$

Spherical:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{R^2} \int_{\tau(t')=\tau'}^{\tau(t'')=\tau''} \mathcal{D} \tau(t) \sinh \tau \int_{\varphi(t')=\varphi'}^{\varphi(t'')=\varphi''} \mathcal{D} \varphi(t) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 (\dot{\tau}^2 + \sinh^2 \tau \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \tanh^2 \tau) \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{1}{\sinh^2 \tau} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \varphi} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \right) \right] dt \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Equidistant:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{\tau_1(t')=\tau_1'}^{\tau_1(t'')=\tau_1''} \mathcal{D} \tau_1(t) \cosh \tau_1 \int_{\tau_2(t')=\tau_2'}^{\tau_2(t'')=\tau_2''} \mathcal{D} \tau_2(t) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \left(\dot{\tau}_1^2 + \cosh^2 \tau_1 \dot{\tau}_2^2 - \omega^2 \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \tau_1 \cosh^2 \tau_2} \right) \right) - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau_2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau_1} + \frac{1}{4} \right) \right] dt \right\} \quad (4.8)$$

Elliptic:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{\alpha(t')=\alpha'}^{\alpha(t'')=\alpha''} \mathcal{D} \alpha(t) \int_{\beta(t')=\beta'}^{\beta(t'')=\beta''} \mathcal{D} \beta(t) (k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \left((k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) - \omega^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{dn}^2 \beta} \right) \right) + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\operatorname{cn}^2 \alpha \operatorname{cn}^2 \beta} + \frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\operatorname{dn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \beta} \right) \right] dt \right\} \quad (4.9)$$

$$= \frac{e^{-iM\omega^2 R^2 T/2\hbar}}{R^2} \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dT e^{iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \int_{\alpha(0)=\alpha'}^{\alpha(s'')=\alpha''} \mathcal{D} \alpha(s) \int_{\beta(0)=\beta'}^{\beta(s'')=\beta''} \mathcal{D} \beta(s) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^{s''} \left[\frac{M}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + R^2 (k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta) E + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\left(v^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \alpha} - \frac{k^2}{\operatorname{dn}^2 \beta} \right) + \left(k_1^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 \alpha} + \frac{k^2}{\operatorname{cn}^2 \beta} \right) - \left(k_2^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \beta} \right) \right) \right] ds \right\} \quad (4.10)$$

Hyperbolic:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{\mu(t')=\mu'}^{\mu(t'')=\mu''} \mathcal{D} \mu(t) \int_{\eta(t')=\eta'}^{\eta(t'')=\eta''} \mathcal{D} \eta(t) (k^2 \operatorname{cn}^2 \mu + k'^2 \operatorname{sn}^2 \eta) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \left((k^2 \operatorname{cn}^2 \mu + k'^2 \operatorname{cn}^2 \eta) (\dot{\mu}^2 + \dot{\eta}^2) - \omega^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{cn}^2 \mu \operatorname{cn}^2 \eta} \right) \right) + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\operatorname{sn}^2 \mu \operatorname{dn}^2 \eta} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\operatorname{dn}^2 \mu \operatorname{sn}^2 \eta} \right) \right] dt \right\}. \quad (4.11)$$

We solve the first two-path integrals explicitly. The two remaining ones are too complicated to allow an explicit solution.

The two-path integral formulations of the Higgs oscillator have a simple structure involving Pöschl-Teller (2.6) and modified Pöschl-Teller path integrals (2.12). We start with the *pure oscillator case*, denoted by $K^{(\omega)}(T)$, in order to demonstrate the relevant techniques involved in the solutions.

4.1.1. Pure Oscillator Case. Spherical Coordinates. For the oscillator in spherical coordinates the φ -integration is easily separated [20], and we obtain by using the path integral representation of the modified Pöschl-Teller potential (2.12) the following solution ($v^2 = M^2 \omega^2 R^4 / \hbar^2 + 1/4$)

$$\begin{aligned} K^{(\omega)}(u'', u'; T) &= \frac{1}{R^2} \int_{\tau(t')=\tau}^{\tau(t'')=\tau''} \mathcal{D}\tau(t) \sinh \tau \int_{\varphi(t')=\varphi'}^{\varphi(t'')=\varphi''} \mathcal{D}\varphi(t) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 (\dot{\tau}^2 + \sinh^2 \tau \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \tanh^2 \tau) - \frac{\hbar^2}{8MR^2} \left(1 - \frac{1}{\sinh^2 \tau} \right) \right] dt \right\} = \\ &= \frac{\exp \left[-\frac{i}{\hbar} T \left(\frac{\hbar^2}{8MR^2} + \frac{M}{2} R^2 \omega^2 \right) \right]}{(R^2 \sinh \tau' \sinh \tau'')^{1/2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{ij(\varphi'' - \varphi')}}{2\pi} \times \\ &\times \int_{\tau(t')=\tau}^{\tau(t'')=\tau''} \mathcal{D}\tau(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \dot{\tau}^2 - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau} - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tau} \right) \right] dt \right\} = \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{N=0}^{N_{\max}} \Psi_{Nj}^{(\omega)}(\tau', \varphi') \Psi_{Nj}^{(\omega)}(\tau'', \varphi'') e^{-iE_N T / \hbar} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty dp e^{-iE_p T / \hbar} \Psi_{pj}^{(\omega)*}(\tau', \varphi') \Psi_{pj}^{(\omega)}(\tau'', \varphi'') \right]. \quad (4.12) \end{aligned}$$

The wave functions and the energy spectrum of the discrete contributions have the following form (we introduce the principal quantum number $N = 2n + |j| = 0, 1, \dots$ where appropriate)

$$\Psi_{Nj}^{(\omega)}(\tau, \varphi; R) = (2\pi \sinh \tau)^{-1/2} S_{jN}^{(\nu)}(\tau; R) e^{ij\varphi}, \quad (4.13)$$

$$S_{jN}^{(\nu)}(\tau; R) = \frac{1}{|j|!} \left[\frac{2(\nu - N - 1) \left(\frac{1}{2}(N + |j|) \right)! \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}(N - |j|)\right)}{R^2 \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}(N + |j|)\right) \left(\frac{1}{2}(N - |j|) \right)!} \right]^{1/2} \times$$

$$\times (\sinh \tau)^{|j| + 1/2} (\cosh \tau)^{(N + |j| + 1)/2 - \nu} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}(N - |j|), \nu - \frac{1}{2}(N - |j|); 1 + |j|; \tanh^2 \tau\right), \quad (4.14)$$

with the discrete spectrum given by

$$E_N = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \left[(N - \nu + 1)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{M}{2} \omega^2 R^2. \quad (4.15)$$

Only a finite number exists with $N_{\max} = [\nu - |j| - 1] \geq 0$. In the flat space limit we obtain for the energy spectrum

$$E_N \simeq \hbar\omega(N + 1). \quad (4.16)$$

The continuous wave functions have the form

$$\Psi_{pj}^{(\omega)}(\tau, \varphi; R) = (2\pi \sinh \tau)^{-1/2} S_{jp}^{(\nu)}(\tau; R) e^{ij\varphi}, \quad (4.17)$$

$$S_{jp}^{(\nu)}(\tau; R) = \frac{1}{|j|!} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2 R^2}} \Gamma\left(\frac{\nu - |j| + 1 - ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{|j| - \nu + 1 - ip}{2}\right) \times$$

$$\times (\tanh \tau)^{|j| + 1/2} (\cosh \tau)^{ip} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{\nu + |j| + 1 - ip}{2}, \frac{|j| - \nu + 1 - ip}{2}; 1 + |j|; \tanh^2 \tau\right), \quad (4.18)$$

with the continuous energy spectrum given by

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right) + \frac{M}{2} \omega^2 R^2. \quad (4.19)$$

In the limiting case $\omega \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow 1/2$) the potential through vanishes (note that in this case $E_N = 0$ exactly), only the continuous spectrum remains, and we obtain the pure continuous spectrum

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (4.20)$$

which corresponds to the case where just a radial part is present, and has the same feature as the spectrum of the free motion on $\Lambda^{(2)}$.

Let us finally state the corresponding Green function $G^{(V_1)}(E)$ of the potential V_1 . It has the form $(m_{1,2} = (|j| \pm \sqrt{-2ME'R^2/\hbar}), L_\nu = \frac{1}{2}(\nu - 1), E' = E - \hbar^2/8MR^2 - MR^2\omega^2/2)$

$$\begin{aligned} G^{(V_1)}(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; E) = & \frac{M}{2\hbar^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{e^{ij(\varphi'' - \varphi')}}{2\pi} \frac{\Gamma(m_1 - L_\nu) \Gamma(L_\nu + m_1 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + 1) \Gamma(m_1 - m_2 + 1)} \\ & \times (\cosh \tau' \cosh \tau'')^{-(m_1 - m_2 + 1/2)} (\tanh r' \tanh r'')^{m_1 + m_2} \\ & \times {}_2F_1 \left(-L_\nu + m_1, L_\nu + m_1 + 1; m_1 - m_2 + 1; \frac{1}{\cosh^2 \zeta} \right) \\ & \times {}_2F_1 (-L_\nu + m_1, L_\nu + m_1 + 1; m_1 + m_2 + 1; \tanh^2 \tau_\zeta). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Equidistant Coordinates. In the case of equidistant coordinates we can separate the corresponding path integrations in an analogous way, however, instead of a simple circular wave dependence in the first step leading to a modified Pöschl-Teller problem, we have in this case two symmetric Rosen-Morse path integral problems [20,43]. This yields

$$\begin{aligned} & \left(\lambda = m_2 - \nu + \frac{1}{2}, m_1 = 0, \dots, N_{\max}^{(1)} = \left[\nu - \frac{1}{2} \right], m_2 = 0, \dots, N_{\max}^{(2)} = \left[\lambda - \frac{1}{2} \right] \right) \\ K^{(\omega)}(u'', u'; T) = & \frac{1}{R^2} \int_{\tau_1(t') = \tau'_1}^{\tau_1(t'') = \tau''_1} \mathcal{D} \tau_1(t) \cosh \tau_1 \int_{\tau_2(t') = \tau'_2}^{\tau_2(t'') = \tau''_2} \mathcal{D} \tau_2(t) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 (\dot{\tau}_1^2 + \cosh^2 \tau_1 \dot{\tau}_2^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{M}{2} R^2 \omega^2 \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \tau_1 \cosh^2 \tau_2} \right) - \frac{\hbar^2}{8MR^2} \left(1 + \frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \right) \right] dt \right\} = \\
& = \frac{\exp \left[-\frac{i}{\hbar} T \left(\frac{\hbar^2}{8MR^2} + \frac{M}{2} R^2 \omega^2 \right) \right]}{(R^2 \cosh \tau_1' \cosh \tau_1'')^{1/2}} \times \\
& \times \left\{ \sum_{m_3=0}^{N_{\max}^{(2)}} \left(m_3 - \nu - \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(2\nu - m_3)}{m_3!} P_{\nu-1/2}^{m_3-\nu+1/2} (\tanh \tau_2'') P_{\nu-1/2}^{m_3-\nu+1/2} (\tanh \tau_2') \times \right. \\
& \times \int_{\tau_1(t')=\tau_1'}^{\tau_1(t'')=\tau_1''} \mathcal{D} \tau_1(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left(\frac{M}{2} R^2 \dot{\tau}_1^2 + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\left(m_3 - \nu + \frac{1}{2} \right)^2}{\cosh^2 \tau_1} - \frac{1}{4} \right) dt \right] + \\
& + \int_{\mathbf{R}} \frac{dk k \sinh \pi k}{\cos^2 \pi \nu + \sinh^2 \pi k} P_{\nu-1/2}^{ik} (\tanh \tau_2'') P_{\nu-1/2}^{-ik} (\tanh \tau_2') \times \\
& \times \int_{\tau_1(t')=\tau_1'}^{\tau_1(t'')=\tau_1''} \mathcal{D} \tau_1(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left(\frac{M}{2} R^2 \dot{\tau}_1^2 - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{k^2 + \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tau_1} \right) dt \right] \Bigg\} \\
& = \sum_{m_3=0}^{N_{\max}^{(2)}} \left\{ \sum_{m_1=0}^{N_{\max}^{(1)}} e^{-iE_N T/\hbar} \Psi_{m_1 m_2}^{(\omega)}(\tau_1'', \tau_2''; R) \Psi_{m_1 m_2}^{(\omega)}(\tau_1', \tau_2'; R) + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\infty dp e^{-iE_p T/\hbar} \Psi_{pm_2}^{(\omega)}(\tau_1'', \tau_2''; R) \Psi_{pm_2}^{(\omega)*}(\tau_1', \tau_2'; R) \right\} \\
& \quad + \int_0^\infty dk \int_0^\infty dp e^{-iE_p T/\hbar} \Psi_{pk}^{(\omega)}(\tau_1'', \tau_2''; R) \Psi_{pk}^{(\omega)*}(\tau_1', \tau_2'; R). \quad (4.22)
\end{aligned}$$

The $P_v^\mu(z)$ are Legendre functions [13, p.999]. The discrete wave functions are given by

$$\Psi_{m_1 m_2}^{(\omega)}(\tau_1, \tau_2; R) = (\cosh \tau_1)^{-1/2} S_{\lambda, m_1}(\tau_1; R) \Psi_{m_2}(\tau_2), \quad (4.23)$$

$$S_{\lambda, m_1}(\tau_1; R) = \sqrt{\left(m_1 - \lambda - \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(2\lambda - m_1)}{R^2 m_1!}} P_{\lambda-1/2}^{m_1 - \lambda + 1/2}(\tanh \tau_1), \quad (4.24)$$

$$\Psi_{m_2}(\tau_2) = \sqrt{\left(m_2 - \nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(2\nu - m_2)}{m_2!}} P_{\nu-1/2}^{m_2 - \nu + 1/2}(\tanh \tau_2), \quad (4.25)$$

and the discrete spectrum has the form

$$E_N = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \left[(N - \nu + 1)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{M}{2} \omega^2 R^2, \quad N = m_1 + m_2. \quad (4.26)$$

The bound state energy levels have exactly the same feature as for spherical coordinates, as it must be. Note that the Legendre functions are actually Gegenbauer polynomials. The continuous wave functions consist of two contributions, first where the quantum number corresponding to τ_2 is discrete, second where it is continuous. For the first set we obtain

$$\Psi_{pm_2}^{(\omega)}(\tau_1, \tau_2; R) = (\cosh \tau_1)^{-1/2} S_{\lambda p}(\tau_1; R) \Psi_{m_2}(\tau_2), \quad (4.27)$$

$$S_{\lambda p}(\tau_1; R) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{\cos^2 \pi \lambda + \sinh^2 \pi p}} P_{\lambda-1/2}^{ip}(\tanh \tau_1), \quad (4.28)$$

with the $\Psi_{m_2}(\tau_2)$ as in (4.25), and the continuous spectrum is given by

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right) + \frac{M}{2} \omega^2 R^2. \quad (4.29)$$

The second set of the continuous wave functions has the form

$$\Psi_{kp}^{(\omega)}(\tau_1, \tau_2; R) = (\cosh \tau_1)^{-1/2} S_{kp}(\tau_1; R) \Psi_k(\tau_2), \quad (4.30)$$

$$S_{sk}(\tau_1; R) = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{\cosh^2 \pi k + \sinh^2 \pi p}} P_{ik-1/2}^{ip}(\tanh \tau_1), \quad (4.31)$$

$$\Psi_k(\tau_2) = \sqrt{\frac{k \sinh \pi k}{\cos^2 \pi \nu + \sinh^2 \pi k}} P_{\nu-1/2}^{ik}(\tanh \tau_2), \quad (4.32)$$

with the same continuous spectrum as before. The discrete energy-spectrum in the flat scape limit yields again

$$E_N \simeq \hbar\omega(N+1), \quad (4.33)$$

the continuous wave functions vanish, and the discrete wave functions yield Hermite polynomials, i.e., the well-known result of the two-dimensional oscillator.

The corresponding Green function in equidistant coordinates finally has the form

$$\begin{aligned} (E' = E - \hbar^2/8MR^2 - MR^2\omega^2/2) \\ G^{(V_1)}(\tau_1'', \tau_1', \tau_2'', \tau_2'; E) = \frac{M}{\hbar^2} (\cosh \tau_1' \cosh \tau_1'')^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \sum_{m_2=0}^{N^{(2)}_{\max}} \left(m_2 - \nu - \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(2\nu - m_2)}{m_2!} P_{\nu-1/2}^{m_2-\nu+1/2}(\tanh \tau_2'') P_{\nu-1/2}^{m_2-\nu+1/2}(\tanh \tau_2') \times \right. \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{-2MR^2E'} - \lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{-2MR^2E'} + \lambda + \frac{1}{2}\right) \times \\ \times P_{\lambda-1/2}^{-\sqrt{-2MR^2E'}/\hbar}(\tanh \tau_{1,<}) P_{\lambda-1/2}^{-\sqrt{-2MR^2E'}/\hbar}(-\tanh \tau_{1,>}) + \\ + \int_{\mathbb{R}} \frac{dk k \sinh \pi k}{\cos^2 \pi \nu + \sinh^2 \pi k} P_{\nu-1/2}^{ik}(\tanh \tau_2'') P_{\nu-1/2}^{-ik}(\tanh \tau_2') \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{-2MR^2E'} - ik + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{-2MR^2E'} + ik + \frac{1}{2}\right) \times \\ \left. \times P_{ik-1/2}^{-\sqrt{-2MR^2E'}/\hbar}(\tanh \tau_{1,<}) P_{ik-1/2}^{-\sqrt{-2MR^2E'}/\hbar}(-\tanh \tau_{1,>}) \right\}. \quad (4.34) \end{aligned}$$

4.1.2. General Case. In order to deal with the general case, we do not repeat the whole procedure once more. The separation of variables in each case is performed in exactly the same way, and the evaluations of the path integrals are similar in comparison to the simple oscillator case, the difference being that the entire structure of the (modified) Pöschl-Teller potential must be taken into account. In particular, this has the consequence that we have to consider wave functions with a definite parity.

Spherical Coordinates. First we consider the path integral representation in spherical coordinates and we obtain ($N = m + n \in \mathbb{N}$) is the principal quantum

number, we have set $\lambda_1 = 2m \pm k_1 + k_2 + 1$, $v^2 = M^2 \omega^2 R^4 / 2\hbar^2 + 1/4$; the range of the coordinates is given by $\tau > 0$, $\varphi \in (0, \pi/2)$

$$K^{(V_1)}(u'', u'; T) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{N_{\max}} e^{-iE_N T/\hbar} \Psi_{nm}^{(V_1)}(\tau'', \varphi''; R) \Psi_{nm}^{(V_1)}(\tau', \varphi'; R) + \int_0^{\infty} dp e^{-iE_p T/\hbar} \Psi_{pm}^{(V_1)}(\tau'', \varphi''; R) \Psi_{pm}^{(V_1)*}(\tau', \varphi'; R) \right\}, \quad (4.35)$$

and the corresponding discrete wave functions have the form

$$\Psi_{nm}^{(V_1)}(\tau, \varphi; R) = (\sinh \tau)^{-1/2} S_n^{(\lambda_1, v)}(\tau; R) \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\varphi), \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\varphi) = & \left[2(1 + 2m \pm k_1 \pm k_2 + 1) \frac{m! \Gamma(m \pm k_1 \pm k_2 + 1)}{\Gamma(1 + m \pm k_1) \Gamma(1 + m \pm k_2)} \right]^{1/2} \times \\ & \times (\sin \varphi)^{1/2 \pm k_2} (\cos \varphi)^{1/2 \pm k_1} P_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\cos 2\varphi) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} S_n^{(\lambda_1, v)}(\tau; R) = & \frac{1}{\Gamma(1 + \lambda_1)} \left[\frac{2(v - \lambda_1 - 2n - 1) \Gamma(n + 1 + \lambda_1) \Gamma(v - n)}{R^2 \Gamma(v - \lambda_1 - n) n!} \right]^{1/2} \times \\ & \times (\sinh \tau)^{\lambda_1 + 1/2} (\cosh \tau)^{n + 1/2 - v} {}_2F_1(-n, v - n; 1 + \lambda_1; \tanh^2 \tau). \end{aligned} \quad (4.38)$$

The discrete energy spectrum is given by

$$\begin{aligned} E_N = & -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \left[(2N \pm k_1 \pm k_2 - v + 2)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{M}{2} \omega^2 R^2, \\ N_{\max} = & \left[\frac{1}{2} (v - \lambda_1 - 1) \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

In the limit $R \rightarrow \infty$ ($v \rightarrow M\omega R^2/\hbar$) we obtain

$$E_N \simeq \hbar\omega(2N \pm k_1 \pm k_2 + 2), \quad (4.40)$$

which is the correct behaviour for the corresponding two-dimensional potential maximally superintegrable in $\mathbb{R}^2$ [21]. The continuous wave functions

and the corresponding energy spectrum are given by (the $\phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\varphi)$ are the same wave functions as in (4.37))

$$\Psi_{pm}^{(V_1)}(\tau, \varphi; R) = (\sinh \tau)^{-1/2} S_p^{(\lambda_1, \nu)}(\tau; R) \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\varphi), \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} S_p^{(\lambda_1, \nu)}(\tau; R) = & \frac{1}{\Gamma(1 + \lambda_1)} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2 R^2}} \Gamma\left(\frac{\nu - \lambda_1 + 1 - ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda_1 - \nu + 1 - ip}{2}\right) \\ & \times (\tanh \tau)^{\lambda_1 + 1/2} (\cosh \tau)^{ip} \times \\ & \times {}_2F_1\left(\frac{\nu + \lambda_1 + 1 - ip}{2}, \frac{\lambda_1 - \nu + 1 - ip}{2}; 1 + \lambda_1; \tanh^2 \tau\right), \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right) + \frac{M}{2} \omega^2 R^2. \quad (4.43)$$

The corresponding Green function $G^{(V_1)}(E)$ of the potential V_1 in the general case has the form ($m_{1,2} = (\lambda_1 \pm \sqrt{-2ME'R^2}/\hbar)$, $L_\nu = \frac{1}{2}(\nu - 1)$, $E' = E - \hbar^2/8MR^2 - MR^2\omega^2/2$)

$$\begin{aligned} & G^{(V_1)}(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; E) \\ = & \frac{M}{2\hbar^2} \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\varphi') \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\varphi'') \frac{\Gamma(m_1 - L_\nu) \Gamma(L_\nu + m_1 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + 1) \Gamma(m_1 - m_2 + 1)} \\ & \times (\cosh r' \cosh r'')^{-(m_1 - m_2 + 1/2)} (\tanh r' \tanh r'')^{m_1 + m_2} \\ & \times {}_2F_1\left(-L_\nu + m_1, L_\nu + m_1 + 1; m_1 - m_2 + 1; \frac{1}{\cosh^2 r'}\right) \\ & \times {}_2F_1(-L_\nu + m_1, L_\nu + m_1 + 1; m_1 + m_2 + 1; \tanh^2 r_>). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Equidistant Coordinates. Next we consider the equidistant coordinate system. Similarly as in the pure oscillator case we obtain a discrete spectrum with energy eigenvalues (4.39), and a set of two continuous wave functions

each with energy spectrum (4.43), with principal quantum number $N = m + n$, i.e., we have for the propagator ($\lambda_1 = 2m \pm k_1 \pm k_2 + 1$, $v^2 = M^2 \omega^2 R^4 / \hbar^2 + 1/4$, and $\tau_{1,2} > 0$)

$$\begin{aligned}
 K^{(V_1)}(u'', u'; T) = & \sum_{m=0}^{N_{\max}^{(m)}} \left\{ \sum_{n=0}^{N_{\max}^{(n)}} e^{-iE_N T / \hbar} \Psi_{nm}^{(V_1)}(\tau_1'', \tau_2''; R) \Psi_{nm}^{(V_1)}(\tau_1', \tau_2'; R) \right. \\
 & + \int_0^\infty dp e^{-iE_p T / \hbar} \Psi_{pm}^{(V_1)}(\tau_1'', \tau_2''; R) \Psi_{pm}^{(V_1)*}(\tau_1', \tau_2'; R) \Big\} \\
 & + \int_0^\infty dp \int_0^\infty dp e^{-iE_p T / \hbar} \Psi_{pk}^{(V_1)}(\tau_1'', \tau_2''; R) \Psi_{kp}^{(V_1)*}(\tau_1', \tau_2'; R). \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

Here denote $N_{\max}^{(1)} = \left[\frac{1}{2} (v \mp k_1 - 1) \right]$, $N_{\max}^{(2)} = \left[\frac{1}{2} (\lambda_1 \mp k_2 - 1) \right]$ the maximal number of bound states for the wave functions in τ_2 and τ_1 , respectively. The discrete wave functions have the form

$$\Psi_{mn}^{(V_1)}(\tau_1, \tau_2; R) = (\cosh \tau_1)^{-1/2} S_n^{(\pm k_2, \lambda_1)}(\tau_1; R) \Psi_m^{(\pm k_1, v)}(\tau_2), \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
 S_n^{(\pm k_2, \lambda_1)}(\tau_1; R) = & \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_2)} \left[\frac{2(\lambda_1 \mp k_2 - 2n - 1) \Gamma(n + 1 \pm k_2) \Gamma(\lambda_1 - n)}{R^2 \Gamma(\lambda_1 \mp k_2 - n) n!} \right]^{1/2} + \\
 & \times (\sinh \tau_1)^{1/2 \pm k_2} (\cosh \tau_1)^{n + 1/2 - \lambda_1} {}_2F_1(-n, \lambda_1 - n; 1 \pm k_2; \tanh^2 \tau_1), \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_m^{(\pm k_1, v)}(\tau_2) = & \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_1)} \left[\frac{2(v \mp k_1 - 2m - 1) \Gamma(m + 1 \pm k_1) \Gamma(v - m)}{\Gamma(v \mp k_1 - m) m!} \right]^{1/2} \\
 & \times (\sinh \tau_2)^{1/2 \pm k_1} (\cosh \tau_2)^{m + 1/2 - v} {}_2F_1(-m, v - m; 1 \pm k_1; \tanh^2 \tau_2). \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

The first set of continuous states is given by

$$\Psi_{pm}^{(V_1)}(\tau_1, \tau_2; R) = (\cosh \tau_1)^{-1/2} S_n^{(\pm k_2, \lambda_1)}(\tau_1; R) \Psi_m^{(\pm k_1, v)}(\tau_2), \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}
S_p^{(\pm k_2, \lambda_1)}(\tau_1; R) &= \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_2)} \sqrt{\frac{p \sin \pi p}{2\pi^2 R^2}} \times \\
&\times \Gamma\left(\frac{\lambda \mp k_2 + 1 - ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\pm k_2 - \lambda_1 + 1 - ip}{2}\right) \times \\
&\times (\tanh \tau_1)^{1/2 \pm k_2} (\cosh \tau_1)^{ip} \times \\
&{}_2F_1\left(\frac{\lambda_1 \pm k_2 + 1 - ip}{2}, \frac{1 \pm k_2 - \lambda_1 - ip}{2}; 1 \pm k_2; \tanh^2 \tau_1\right), \quad (4.50)
\end{aligned}$$

with the $\Psi_m^{(\pm k_1, \nu)}(\tau_2)$ as in (4.48). The second set is given by

$$\Psi_{kp}^{(V)}(\tau_1, \tau_2; R) = (\cosh \tau_1)^{-1/2} S_p^{(\pm k_2, ik)}(\tau_1; R) \Psi_k^{(\pm k_1, \nu)}(\tau_2), \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
S_p^{(\pm k_2, ik)}(\tau_1; R) &= \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_2)} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2 R^2}} \times \\
&\times \Gamma\left(\frac{ik \mp k_2 + 1 - ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\pm k_2 - ik + 1 - ip}{2}\right) \times \\
&\times (\tanh \tau_1)^{1/2 \pm k_2} (\cosh \tau_1)^{ip} \times \\
&{}_2F_1\left(\frac{ik \pm k_2 + 1 - ip}{2}, \frac{1 \pm k_2 - ik - ip}{2}; 1 \pm k_2; \tanh^2 \tau_1\right), \quad (4.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_k^{(\pm k_1, \nu)}(\tau_2) &= \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_1)} \sqrt{\frac{k \sinh \pi k}{2\pi^2}} \times \\
&\times \Gamma\left(\frac{\nu \mp k_1 + 1 - ik}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\pm k_1 - \nu + 1 - ik}{2}\right) \times \\
&\times (\tanh \tau_2)^{1/2 \pm k_1} (\cosh \tau_2)^{ik} \times \\
&{}_2F_1\left(\frac{\nu \pm k_1 + 1 - ik}{2}, \frac{1 \pm k_1 - \nu - ik}{2}; 1 \pm k_1; \tanh^2 \tau_2\right). \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Let us remark that the wave functions have been normalized in the domains $\varphi \in (0, \pi/2)$ and $\tau > 0$ in the spherical and in $\tau_{1,2} > 0$ in the equidistant system. The positive sign for k_i has to be taken whenever $k_i \geq \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2$), i.e., the potential term is repulsive at the origin, and the motion takes place only in the denoted domains. If $0 < |k_i| < \frac{1}{2}$, i.e., the potential term is attractive at the origin, both the positive and the negative sign must be taken into account in the solution. This is indicated by the notion $\pm k_i$ in the formulae. It has also the consequence that for each k_i the motion can take place in the entire domains of the variables on $\Lambda^{(2)}$. In the present case this means that we must (e.g., in the equidistant system) distinguish four cases: i) $\tau_1, \tau_2 > 0$, ii) $\tau_1 > 0, \tau_2 \in \mathbb{R}$, iii) $\tau_1 \in \mathbb{R}, \tau_2 > 0$, and iv) $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$. In polar coordinates the same feature is recovered by the observation that the Pöschl-Teller barriers are absent for $|k_i| < \frac{1}{2}$.

In elliptic coordinates this feature is taken into account in the following way: Due to $\alpha \in (iK', iK' + K)$, we have $\operatorname{sn}(\alpha, k), \operatorname{icn}(\alpha, k) > k'/k$, $\operatorname{idn}(\alpha, k) \geq 0$, and we see that for $\alpha \in (iK', iK' + K)$, $\beta \in (K', 4K')$, and $u_0 \geq 0$, the variables u_1, u_2 change signs in four respective domains, i.e., $\beta \in (0, K')$, $\beta \in (K', 2K')$, $\beta \in (2K', 3K')$, and $\beta \in (3K', 4K')$. We then have for $\alpha \neq 0$

$$\operatorname{sn}(0, k') = \operatorname{sn}(2K', k') = \operatorname{sn}(4K', k') = 0,$$

$$\operatorname{cn}(K', k') = \operatorname{cn}(3K', k') = 0, \quad (4.54)$$

and $\operatorname{dn}(\beta, k') > 0$, $\beta \in [0, 4K')$. For convenience, we have made the choice $\beta \in (0, K')$ in the following. The situation is similar in the hyperbolic system, where we can choose $\mu \in (iK', iK' + K)$, $\eta \in (0, K')$.

This has the following consequences for the degeneracies of the Higgs oscillator on the pseudosphere. If $0 < k_{1,2} \leq \frac{1}{2}$ we have for each $N = n + m$ four possibilities of parities of the levels, i.e. $(\pm, \pm)$; for the cases $0 < k_1 \leq \frac{1}{2}$ and $k_2 > \frac{1}{2}$ or $0 < k_2 \leq \frac{1}{2}$ and $k_1 > \frac{1}{2}$ we have for each N two possibilities $(\pm)$: for $k_{1,2} > \frac{1}{2}$ there is only one possibility: $(+)$. In all cases the degeneracy is

$d = N + 1 = 2j + 1 \left(j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \right)$, coinciding with the dimensions of all relevant discrete irreducible representations of the group $SU(1,1)$. In effect, the negative signs lower the potential energies, and the respective spectrum as well. This is exactly the same behaviour as in the two-dimensional singular oscillator in the flat-space case [10,21,22], and we will keep this notion in the sequel for all following superintegrable potentials.

The Green function of the potential V_1 in equidistant coordinates can be constructed by inserting the corresponding one-dimensional Green function in the variable τ_1 into (4.45). We obtain ($E' = E - \hbar^2/8MR^2 - MR^2\omega^2/2$)

$$G^{(V_1)}(\tau_1'', \tau_1', \tau_2'', \tau_2'; E) = (\cosh \tau_1' \cosh \tau_1'')^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \sum_{m=0}^{N_{\max}^{(m)}} \psi_m^{(\pm k_1, \nu)}(\tau_2'') \psi_m^{(\pm k_1, \nu)}(\tau_2') G_{mPT}^{(\pm k_2, \lambda)}(\tau_1'', \tau_1'; E') + \right. \\ \left. + \int_0^\infty dk \psi_k^{(\pm k_1, \nu)}(\tau_2'') \psi_k^{(\pm k_1, \nu)*}(\tau_2') G_{mPT}^{(\pm k_2, ik)}(\tau_1'', \tau_1'; E') \right\}, \quad (4.55)$$

in the notation of (2.12, 2.16).

4.2. The Coulomb Potential

We consider the generalized Coulomb potential on the two-dimensional pseudosphere in the four separating coordinate systems

$$V_2(u) = -\frac{\alpha}{R} \left(\frac{u_0}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - 1 \right) + \\ + \frac{\hbar^2}{4M \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} + u_1} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} - u_1} \right) \quad (4.56)$$

Spherical ($\tau > 0, \varphi \in (0, \pi)$):

$$V_2(u) = -\frac{\alpha}{R} (\coth \tau - 1) + \frac{\hbar^2}{8MR^2 \sinh^2 \tau} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right) \quad (4.57)$$

Elliptic-Parabolic ($a > 0, \vartheta \in (0, \pi/2)$):

$$= -\frac{\alpha}{R} \left(\frac{\cosh^2 a + \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} - 1 \right) + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\cosh^2 a \cosh^2 \vartheta}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 a} \right) \quad (4.58)$$

Elliptic II (algebraic form, $0 < \rho_2 < a_1 < \rho_1$):

$$= -\frac{\alpha}{R} \left(\frac{\sqrt{(\rho_1 - a_2)(\rho_1 - a_3)} - \sqrt{(\rho_2 - a_2)(\rho_2 - a_3)}}{\rho_1 - \rho_2} - 1 \right) - \frac{\hbar^2}{4M} \left[\left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}{\rho_1 - \rho_2} \left(\frac{1}{a_1 - \rho_2} + \frac{1}{\rho_1 - a_1} \right) - (k_1^2 - k_2^2) \frac{\sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}}{a_2 - a_3} \cdot \frac{\sqrt{(\rho_2 - a_2)(\rho_2 - a_3)} + \sqrt{(\rho_1 - a_2)(\rho_1 - a_3)}}{\rho_1 - \rho_2} \right] \quad (4.59)$$

Elliptic II (Jacobi elliptic function form, $\alpha \in (iK', iK' + K), \beta \in (0, K')$):

$$= -\frac{\alpha}{R} \left(\frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \beta - k' \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} - 1 \right) + \frac{\hbar^2}{4M} \left[\frac{k_1^2 + k_2^2 - \frac{1}{2}}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} \left(\frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \beta} \right) + (k_1^2 - k_2^2) \frac{k'}{k} \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha + k' \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} \right]. \quad (4.60)$$

Semi-Hyperbolic ($\mu_1, \mu_2 > 0$):

$$= -\frac{\alpha}{R} \left(\frac{\sqrt{1 + \mu_1^2} + \sqrt{1 + \mu_2^2}}{\mu_1 + \mu_2} - 1 \right) + \frac{\hbar^2}{4MR^2} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left[\left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + (k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{\sqrt{1 + \mu_1^2}}{\mu_1} - \frac{\sqrt{1 + \mu_2^2}}{\mu_2} \right) \right]. \quad (4.61)$$

For the constants of motion for the potential V_2 we get

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_2(u), \\
 I_2 &= \frac{1}{2M} L_3^2 + \frac{\hbar^2}{8M} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \frac{\Phi}{2}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \frac{\Phi}{2}} \right), \\
 I_3 &= \frac{1}{2M} \{K_1, L_3\} - \alpha R \frac{\mu_2 \sqrt{1 + \mu_1^2} - \mu_1 \sqrt{1 + \mu_2^2}}{\mu_1 + \mu_2} + \\
 &+ \frac{\hbar^2}{4M} \left[\left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\mu_1/\mu_2 + \mu_2/\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \right) + \right. \\
 &\left. + (k_1^2 - k_2^2) \frac{\mu_2^2 \sqrt{1 + \mu_1^2} + \mu_1^2 \sqrt{1 + \mu_2^2}}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)} \right]. \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

The path integral formulations have the following form

$$K^{(V_2)}(u'', u'; T).$$

Spherical:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{-i\hbar T/8MR^2}}{R^2} \int_{\tau(t')=\tau'}^{\tau(t'')=\tau''} \mathcal{D}\tau(t) \sinh \tau \int_{\varphi(t')=\varphi'}^{\varphi(t'')=\varphi''} \mathcal{D}\varphi(t) \times \\
 &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 (\dot{\tau}^2 + \sinh^2 \tau \dot{\varphi}^2) + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \frac{\alpha}{R} (\coth \tau - 1) - \frac{\hbar^2}{8MR^2 \sinh^2 \tau} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \frac{\Phi}{2}} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \frac{\Phi}{2}} - \frac{1}{4} \right) \right] dt \right\} \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

Elliptic-Parabolic:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{a(t')=a'}^{a(t'')=a''} \mathcal{D}a(t) \int_{\vartheta(t')=\vartheta'}^{\vartheta(t'')=\vartheta''} \mathcal{D}\vartheta(t) \frac{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \frac{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta} (\dot{a}^2 + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\alpha}{R} \left(\frac{\cosh^2 a + \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} - 1 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 a} \right) \right] dt \right\} \quad (4.64)$$

Elliptic II:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{\alpha(t')=\alpha'}^{\alpha(t'')=\alpha''} \mathcal{D} \alpha(t) \int_{\beta(t')=\beta'}^{\beta(t'')=\beta''} \mathcal{D} \beta(t) (k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 (k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha}{R} \left(\frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \beta - k' \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} - 1 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\hbar^2}{4MR^2} \left(\frac{k_1^2 + k_2^2 - \frac{1}{2}}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} \left(\frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \beta} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (k_1^2 - k_2^2) \frac{k'}{k} \frac{k^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha + k' \operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta}{k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + k'^2 \operatorname{cn}^2 \beta} \right) \right] dt \right\} \quad (4.65)$$

Semi-Hyperbolic:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{\mu_1(t')=\mu_1'}^{\mu_1(t'')=\mu_1''} \mathcal{D} \mu_1(t) \int_{\mu_2(t')=\mu_2'}^{\mu_2(t'')=\mu_2''} \mathcal{D} \mu_2(t) \frac{\mu_1 + \mu_2}{4\sqrt{P(\mu_1)P(\mu_2)}} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \frac{\mu_1 + \mu_2}{4} \left(\frac{\dot{\mu}_1^2}{P(\mu_1)} - \frac{\dot{\mu}_2^2}{P(\mu_2)} \right) + \frac{\alpha}{R} \left(\frac{\sqrt{1+\mu_1^2} + \sqrt{1+\mu_2^2}}{\mu_1 + \mu_2} - 1 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\hbar^2}{4MR^2} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(\left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + (k_1^2 - k_2^2) \left(\frac{\sqrt{1+\mu_1^2}}{\mu_1} - \frac{\sqrt{1+\mu_2^2}}{\mu_2} \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(P''(\mu_1) - P''(\mu_2) - \frac{3P'(\mu_1)}{4P(\mu_1)} + \frac{3P'(\mu_2)}{4P(\mu_2)} \right) \right] dt \right\}. \quad (4.66)$$

4.2.1. Spherical Coordinates. In order to solve the Coulomb problem in spherical coordinates we start by separating off the φ -path integration which yields $\left(\lambda_1 = m + \frac{1}{2} (1 \pm k_1 \pm k_2)\right)$:

$$K^{(V_2)}(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; T) = \frac{e^{-i\hbar T/8MR^2}}{R^2 (\sinh \tau' \sinh \tau'')^{1/2}} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)} \left(\frac{\varphi'}{2}\right) \phi_m^{(\pm k_1, \pm k_1)} \left(\frac{\varphi''}{2}\right) \times \int_{\tau(t')=\tau'}^{\tau(t'')=\tau''} \mathcal{D}\tau(t) \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau'}^{\tau''} \left[\frac{M}{2} R^2 \dot{\tau}^2 + \frac{\alpha}{R} (\coth \tau - 1) - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\lambda_1^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau} \right] dt \right\}. \quad (4.67)$$

Here denote the $\phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}$ the Pöschl-Teller wave functions (2.6)

$$\phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)} \left(\frac{\varphi}{2}\right) = \left[(1 + 2m \pm k_1 \pm k_2 + 1) \frac{m! \Gamma(m \pm k_1 \pm k_2 + 1)}{\Gamma(1 \pm m \pm k_1) \Gamma(1 + m \pm k_2)} \right]^{1/2} \\ \times \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{1/2 \pm k_2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{1/2 \pm k_1} P_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}(\cos \varphi). \quad (4.68)$$

The remaining τ -path integration, denoted by $K_m^{(V_2)}(T)$ in the following, is of the form of the Manning-Rosen potential, which in turn can be transformed into the path integral problem of the modified Pöschl-Teller problem. This has been done in [1,16], and will not be repeated here. The corresponding non-linear transformation has the form

$$\frac{1}{2} (1 - \coth \tau) = -\frac{1}{\sinh^2 \tau}, \quad (4.69)$$

accompanied by the time-transformation $dt = ds$, with $f(r) = R^2 \tanh^2 r$. In some sense this transformation can be seen as a one-dimensional realization of the Kustaanheimo-Stiefel transformation [5,42] corresponding to a space of constant negative curvature because it maps the path integral (4.67) via a space-time transformation into the path integral of the modified Pöschl-Teller potential which can be transformed by a simple rearrangement into the path integral of the radial Higgs oscillator. The result has the form ($N = 0, 1, 2, \dots$,

$$N_{\max} = \left[\sqrt{R/a} - \lambda_1 - \frac{1}{2} \right], \quad a = \hbar^2 / M\alpha)$$

$$K_m^{(V_2)}(\tau'', \tau'; T) = \sum_{n=0}^{N_{\max}} e^{-iE_n T/\hbar} S_n^{(V_2)}(\tau') S_n^{(V_2)}(\tau'') + \int_0^\infty dp e^{-i\hbar p^2 T/2M} S_p^{(V_2)*}(\tau') S_p^{(V_2)}(\tau''), \quad (4.70)$$

with the discrete and continuous energy spectrum, respectively, given by $\left(\tilde{N} = N + \lambda_1 + \frac{1}{2}\right)$

$$E_N = \frac{\alpha}{R} - \hbar^2 \frac{\tilde{N}^2 - \frac{1}{4}}{2MR^2} - \frac{M\alpha^2}{2\hbar^2 \tilde{N}^2}, \quad (4.71)$$

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (4.72)$$

The bound state wave functions have the form $(\sigma_N = a/R\tilde{N})$

$$S_n^{(V_2)}(\tau; R) = \frac{2^{\lambda_1+1/2}}{\Gamma(2\lambda_1+1)} \left[\frac{\sigma_N^2 - \tilde{N}^2}{R^2 \tilde{N}^2} \frac{\Gamma\left(\tilde{N} + \lambda_1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\sigma_N + \lambda_1 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\tilde{N} - \lambda_1) \Gamma(\sigma_N - \lambda_1)} \right]^{1/2} \times (\sinh \tau)^{\lambda_1+1/2} e^{i\alpha(\sigma_N - \tilde{N})} {}_2F_1\left(-n, \lambda_1 + \frac{1}{2} + \sigma_N; 2\lambda_1 + 1; \frac{2}{1 + \coth \tau}\right). \quad (4.73)$$

The continuous wave functions are $(\tilde{p} = \sqrt{2MR^2(E_p - \alpha/R)/\hbar})$

$$S_p^{(V_2)}(\tau; R) = \frac{2^{(i/2)(p - \tilde{p}) + \lambda_1 + 1/2}}{\pi \Gamma(2\lambda_1 + 1)} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2R^2}} \times \Gamma\left(\lambda_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}(\tilde{p} - p)\right) \Gamma\left(\lambda_1 + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}(\tilde{p} + p)\right) \times (\sinh \tau)^{\lambda_1+1/2} \exp\left[\tau\left(\frac{i}{2}(\tilde{p} + p) - \lambda_1 - \frac{1}{2}\right)\right] \times {}_2F_1\left(\lambda_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}(\tilde{p} - p), \lambda_1 + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}(\tilde{p} + p); 2\lambda_1 + 1; \frac{2}{1 + \coth \tau}\right). \quad (4.74)$$

The complete wave functions of the generalized Coulomb problem on the two-dimensional pseudosphere in spherical coordinates are thus given by

$$\Psi_{nm}^{(V_2)}(\tau, \varphi; R) = (\sinh \tau)^{-1/2} S_n^{(V_2)}(\tau; R) \phi_m^{(\pm k_1, \pm k_2)}\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad (4.75)$$

$$\Psi_{pm}^{(V_2)}(\tau, \varphi; R) = (\sinh \tau)^{-1/2} S_p^{(V_2)}(\tau; R) \phi_m^{(\pm k_1, \pm k_2)}\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (4.76)$$

The Green function of the Coulomb problem has the form

$$\begin{aligned} G^{(V_2)}(\tau'', \tau', \varphi'', \varphi'; E) &= (\sinh \tau' \sinh \tau'')^{-1/2} \times \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}\left(\frac{\varphi''}{2}\right) \times \frac{M}{\hbar^2} \frac{\Gamma(m_1 - L_E) \Gamma(L_E + m_1 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + 1) \Gamma(m_1 - m_2 + 1)} \times \\ &\times \left(\frac{2}{\coth \tau' + 1} \cdot \frac{2}{\coth \tau'' + 1} \right)^{(m_1 + m_2 + 1)/2} \left(\frac{\coth \tau' - 1}{\coth \tau' + 1} \cdot \frac{\coth \tau'' - 1}{\coth \tau'' + 1} \right)^{(m_1 - m_2)/2} \times \\ &\times {}_2F_1 \left(-L_E + m_1, L_E + m_1 + 1; m_1 - m_2 + 1; \frac{\cosh \tau_{>} - 1}{\coth \tau_{>} + 1} \right) \times \\ &\times {}_2F_1 \left(-L_E + m_1, L_E + m_1 + 1; m_1 + m_2 + 1; \frac{2}{\coth \tau_{<} + 1} \right), \quad (4.77) \end{aligned}$$

where $L_E = \frac{1}{2}(\sqrt{-2MR^2E/\hbar^2 - 1/4}/\hbar - 1)$, and $m_{1,2} = \lambda_1 \pm$

$\pm \sqrt{-2mR^2(2\alpha/R + E) - 1/4}/\hbar$. This representation can be derived by means of the Green function of the modified Pöschl-Teller potential and the Manning-Rosen potential, c.f. [20] for some details and references therein.

Let us make some remarks concerning the pure Coulomb case. The calculation is almost the same with only minor differences: The wave functions $\phi_m^{(\pm k_2, \pm k_1)}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ are replaced by circular waves, i.e., $e^{ij\varphi}/\sqrt{2\pi}$ with $\varphi = [0, 2\pi)$. This then has the consequence that the modified angular momentum number has the form $\lambda_1 = |j|$. Everything else remains the same.

4.2.2. Elliptic-Parabolic Coordinates. In order to deal with the path integral (4.64) we perform a time substitution $dt = ds (\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta)/\cosh^2 a \cos^2 \vartheta ds$ according to, e.g., [20,27,42] and references

therein, such that the new pseudo-time s'' can be introduced via the constraint $\int_0^{s''} ds (\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta) / \cosh^2 a \cos^2 \vartheta = T = t'' - t'$. We therefore obtain

$$\begin{aligned}
 K^{(V_2)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; T) = & \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \int_{a(0)=a'}^{a(s'')=a''} \mathcal{D} a(s) \int_{\vartheta(0)=\vartheta'}^{\vartheta(s'')=\vartheta''} \mathcal{D} \vartheta(s) \times \\
 & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^{s''} \left[\frac{M}{2} (\dot{a}^2 + \dot{\vartheta}^2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \vartheta} + \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \vartheta} + \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 a} - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 a} \right) \right] ds \right\}, \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

where $\beta^2 = \frac{1}{4} - 2MER^2/\hbar^2$, $v^2 = \frac{1}{4} + 2MR^2(2\alpha/R - E)/\hbar^2$. The analysis of this path integral is rather involved and we first consider the pure Coulomb case, denoted by $K^{(\alpha)}(T)$.

Pure Coulomb Case. We observe that in the pure Coulomb case the path integral (4.78) yields a symmetric Pöschl-Teller potential path integral in $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$, and a symmetric Rosen-Morse potential path integral in $a \in \mathbb{R}$. The solution consists of two contributions corresponding to the discrete and continuous spectrum, i.e.,

$$\begin{aligned}
 K^{(\alpha)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; T) = & K_{\text{disc}}^{(\alpha)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; T) + K_{\text{cont}}^{(\alpha)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; T), \\
 = & \sum_{m_1 m_2} e^{-iE_{m_1 m_2} T/\hbar} \Psi_{m_1 m_2}^{(\alpha)}(a', \vartheta'; R) \Psi_{m_1 m_2}^{(\alpha)}(a'', \vartheta''; R) + \\
 & + \int_0^\infty dk \int_0^\infty dp e^{-iE_p T/\hbar} \Psi_{kp}^{(\alpha)*}(a', \vartheta'; R) \Psi_{kp}^{(\alpha)}(a'', \vartheta''; R). \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

In order to obtain the discrete spectrum contribution to (4.78) we insert the spectral expansions of the discrete spectrum of the symmetric Pöschl-Teller and the symmetric Rosen-Morse potential. This yields

$$\begin{aligned}
K_{\text{disc}}^{(\alpha)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; T) = & \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \sum_{m_1, m_2} \int_0^\infty ds'' \times \\
& \times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2M} \left[\left(m_1 + \beta + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(m_2 - \nu + \frac{1}{2} \right)^2 \right] s'' \right\} \times \\
& \times \sqrt{\cos \vartheta' \cos \vartheta''} \left(m_1 + \beta + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(m_1 + 2\beta + 1)}{m_1!} P_{\beta+m_1}^{-\beta}(\sin \vartheta') P_{\beta+m_1}^{-\beta*}(\sin \vartheta'') \times \\
& \times \left(m_2 - \nu - \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(2\nu - m_2)}{m_2!} P_{\nu-1/2}^{m_2-\nu+1/2}(\tanh a') P_{\nu-1/2}^{m_2-\nu+1/2}(\tanh a''). \quad (4.80)
\end{aligned}$$

Performing the s'' -integration gives the quantization condition for the bound states:

$$\left(m_2 - \nu + \frac{1}{2} \right)^2 = \left(m_1 + \beta + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (4.81)$$

and therefore the bound state energy levels have the following form ($N = (m_1 + m_2)/2$ is the principal quantum number)

$$E_N = \frac{\alpha}{R} - \hbar^2 \frac{\left(N + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}}{2MR^2} - \frac{M\alpha^2}{2\hbar^2 \left(N + \frac{1}{2} \right)^2}. \quad (4.82)$$

Considering the residuum in (4.80)-we obtain the bound state wave functions

$$\begin{aligned}
\Psi_{m_1, m_2}^{(\alpha)}(a, \vartheta; R) = & \\
= & \left[\frac{1}{2R^2} \left(\frac{M\alpha R}{\hbar^2 N^2} - 1 \right) \left(m_1 - \beta - \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(2\beta - m_1)}{m_1!} \right]^{1/2} P_{\beta-1/2}^{m_1-\beta+1/2}(\tanh a) \times \\
& \times \left[\left(m_2 + \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(2\nu + m_2 + 1)}{m_2!} \right]^{1/2} P_{m_2+\nu}^{-\nu}(\sin \vartheta). \quad (4.83)
\end{aligned}$$

The analysis of the continuous spectrum is somewhat more involved. We proceed in a similar way as in [20], where the same calculation was done for the free motion in elliptic-parabolic coordinates on $\Lambda^{(2)}$. We obtain by using the

Green function representations of the symmetric Pöschl-Teller and the symmetric Rosen-Morse potential [43]

$$\begin{aligned}
 & \int_{a(t')=a'}^{a(t'')=a''} \mathcal{D} a(t) \int_{\vartheta(t')=\vartheta'}^{\vartheta(t'')=\vartheta''} \mathcal{D} \vartheta(t) \frac{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta} \times \\
 & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \frac{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta} (\dot{a}^2 + \dot{\vartheta}^2) + \frac{\alpha}{R} \left(\frac{\cosh^2 a + \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta} - 1 \right) \right] dt \right\} \times \\
 & = \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \int_{a(0)=a'}^{a(s'')=a''} \mathcal{D} a(s) \int_{\vartheta(0)=\vartheta'}^{\vartheta(s'')=\vartheta''} \mathcal{D} \vartheta(s) \times \\
 & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^{s''} \left[\frac{M}{2} (\dot{a}^2 + \dot{\vartheta}^2) - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \vartheta} - \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 a} \right] ds \right\} = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \int_{\mathbb{R}} \frac{dE'}{2\pi i} e^{-iE's''/\hbar} \times \\
 & \times \frac{M}{\hbar^2} \sqrt{\cos \vartheta' \cos \vartheta''} \Gamma(\beta - M_{E'}) \Gamma(M_{E'} - \beta + 1) P_{M_{E'}}^{-\beta}(-\sin \vartheta_<) P_{M_{E'}}^{-\beta}(\sin \vartheta_>) \times \\
 & \times \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int_0^\infty \frac{dk k \sinh \pi k}{\cos^2 \pi v + \sinh^2 \pi k} P_{v-1/2}^{ik}(\varepsilon \tanh a'') P_{v-1/2}^{-ik}(\varepsilon \tanh a') e^{-i\hbar k^2 s''/2M}, \\
 & + (a \leftrightarrow \vartheta). \tag{4.84}
 \end{aligned}$$

with $M_{E'} = -\frac{1}{2} + \sqrt{2ME'}/\hbar$, and we have written the kernel $K_{\text{cont}}^{(\alpha)}(s'')$ according to

$$\begin{aligned}
 K_{\text{cont}}^{(\alpha)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; s'') &= K_a(a'', a'; s'') \cdot K_\vartheta(\vartheta'', \vartheta'; s'') \\
 &= \frac{1}{2} K_a(a'', a'; s'') \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{dE'}{2\pi i} e^{-iE's''/\hbar} G_\vartheta(\vartheta'', \vartheta'; E') \\
 &+ \frac{1}{2} K_\vartheta(\vartheta'', \vartheta'; s'') \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{dE'}{2\pi i} e^{-iE's''/\hbar} G_a(a'', a'; E'), \tag{4.85}
 \end{aligned}$$

and, of course, both contributions must be taken into account which turn out to be equivalent. Note that (4.85) actually corresponds up to the additional

dE -integration to the continuous part of the Green function $G^{(\alpha)}(E)$, whereas (4.80) corresponds to its discrete contribution. The Green function expression (4.85) is evaluated by means of the relation for the Legendre functions [46, p.170]

$$\begin{aligned} P_v^{-\mu}(-y) &= \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+1)} \left[P_v^{\mu}(-y) \cos \pi\mu - \frac{2}{\pi} Q_v^{\mu}(-y) \sin \pi\mu \right] \\ &= \frac{\Gamma(v-\mu+1)}{\Gamma(v+\mu+1)} \frac{\sin \pi\mu P_v^{\mu}(y) + \sin \pi v P_v^{\mu}(-y)}{\sin \pi(v+\mu)}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Thus we obtain for the ϑ -dependent part along the cut $\beta = -ip$, where $E = \hbar^2(p^2 + 1/4)/2MR^2$

$$\begin{aligned} \psi_{kp}(\vartheta'') \psi_{kp}^*(\vartheta') &\propto \frac{1}{i\pi} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + ik + ip\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - ik - ip\right) \times \right. \\ &\quad \times P_{ik-1/2}^{ip}(-\sin \vartheta'') P_{ik-1/2}^{ip}(\sin \vartheta') - \\ &\quad \left. - \Gamma\left(\frac{1}{2} + ik - ip\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - ik + ip\right) P_{ik-1/2}^{-ip}(-\sin \vartheta'') P_{ik-1/2}^{-ip}(\sin \vartheta') \right] = \\ &= \frac{p \sinh \pi p}{\cosh^2 \pi k + \sinh^2 \pi p} \sum_{\varepsilon = \pm k} P_{ik-1/2}^{ip}(\varepsilon \sin \vartheta'') P_{ik-1/2}^{-ip}(\varepsilon \sin \vartheta'). \end{aligned} \quad (4.87)$$

We must insert the representation (4.85) into (4.84), and we find that the $ds'' dE'$ -integration gives $E' = -\hbar^2 k^2/2M$. Hence we obtain the following wave functions and energy spectrum of the continuous spectrum ($\tilde{p}^2 = -v^2$, $p^2 = -\beta^2\varepsilon$, $\varepsilon' = \pm 1$)

$$\begin{aligned} \Psi_{k,p}^{(\alpha)}(a, \vartheta; R) &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p k \sinh \pi k}{(\cosh^2 \pi k + \sinh^2 \pi p)(\cosh^2 \pi k + \sinh^2 \pi \tilde{p})}} \times \\ &\quad \times \sqrt{\cos \vartheta} P_{ik-1/2}^{ip}(\varepsilon \sin \vartheta) P_{i\tilde{p}-1/2}^{ik}(\varepsilon' \tanh a), \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (4.89)$$

Generalized Coulomb Case. To analyze the general case we proceed in an analogous way. For the discrete spectrum we expand the ϑ -path integration into Pöschl-Teller potential wave functions $\Psi_{n_1}^{(\pm k_1, \beta)}(\vartheta)$, and the a -path integration

into the bound state contribution of the modified Pöschl-Teller potential wave functions of $\Psi_{n_2}^{(\pm k_2, \nu)}(a)$ (2.12). The emerging Green function representation

$G_{\text{disc}}^{(V_2)}(E)$ of $K_{\text{disc}}^{(V_2)}(T)$ has poles which are determined by the equation

$$(2n_1 \pm k_1 + \beta + 1)^2 = (2n_2 \pm k_2 - \nu + 1)^2. \quad (4.90)$$

Solving this equation for $E_{n_1 n_2}$ yields exactly the energy spectrum (4.71), with

the principal quantum number $N = n_1 + n_2 + 1 + \frac{1}{2}(\pm k_1, \pm k_2)$. Taking the residuum gives the bound state wave functions.

For the analysis of the continuous spectrum we proceed again in an analogous way as for the pure Coulomb case, the only difference being that we must insert now the entire Green functions of the Pöschl-Teller (2.6) and modified Pöschl-Teller problems (2.12), instead of the corresponding symmetric cases. For this purpose one constructs the Green function $G^{(V_2)}(E)$ in elliptic-parabolic coordinates by considering the ds'' -integration following from (4.78) with the solutions of the Pöschl-Teller and modified Pöschl-Teller potential, respectively. It can be cast into the following form (c.f. also [20] for some more details concerning the proper Green function analysis)

$$\begin{aligned} G^{(V_2)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; E) = & \frac{1}{2} \sum_{n_2} \Psi_{n_2}^{(\pm k_2, \nu)}(a'') \Psi_{n_2}^{(\pm k_2, \nu)}(a') \times \\ & \times G_{PT}^{(\pm k_1, \beta)}(\vartheta'', \vartheta'; E) \Big|_{E' = \pi^2(2n_1 \pm k_1 + \beta + 1)^2 / 2MR^2 +} \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \Psi_k^{(\pm k_2, \nu)}(a'') \Psi_k^{(\pm k_2, \nu)*}(a') G_{PT}^{(\pm k_1, \beta)}(\vartheta'', \vartheta'; E) \Big|_{E' = -\pi^2 k^2 / 2MR^2} \\ & + [\text{appropriate term with } a \text{ and } \vartheta \text{ interchanged}], \end{aligned} \quad (4.91)$$

in the notation of (2.6, 2.10, 2.12) and (2.16). Analyzing the poles and cuts in a similar way as for the pure Coulomb case we therefore obtain with E_N as in (4.71) and E_p as in (4.72)

$$\begin{aligned} K^{(V_2)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; T) = & \sum_{n_1, n_2} e^{-iE_N T / \pi} \Psi_{n_1 n_2}^{(V_2)}(a'', \vartheta''; R) \Psi_{n_1 n_2}^{(V_2)}(a', \vartheta'; R) + \\ & + \int_0^\infty dk \int_0^\infty dp e^{-iE_p T / \pi} \Psi_{kp}^{(V_2)}(a'', \vartheta''; R) \Psi_{kp}^{(V_2)*}(a', \vartheta'; R), \end{aligned} \quad (4.92)$$

where the bound state wave functions are given by

$$\Psi_{n_1 n_2}^{(V_2)}(a, \vartheta; R) = \sqrt{\frac{1}{2R^2} \left(\frac{MR\alpha}{\hbar^2 N^2} - 1 \right)} \Psi_{n_2}^{(\pm k_2, \nu)}(a) \Phi_{n_1}^{(\pm k_1, \beta)}(\vartheta), \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n_2}^{(\pm k_2, \nu)}(a) &= \frac{1}{\Gamma(1 \pm k_2)} \left[\frac{2(\nu \mp k_2 - 2n_2 - 1) \Gamma(n_2 + 1 \pm k_2) \Gamma(\nu - n_2)}{n_2! \Gamma(\nu \mp k_2 - n_2)} \right]^{1/2} \times \\ &\times (\sinh a)^{1/2 \pm k_2} (\cosh a)^{n_2 + 1/2 - \nu} {}_2F_2(-n_2, \nu - n_1; 1 \pm k_2; \tanh^2 a), \quad (4.94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n_1}^{(\pm k_1, \beta)}(\vartheta) &= \left[2(\beta \pm k_1 + 2n_1 + 1) \frac{n_2! \Gamma(\beta \pm k_1 + n_1 + 1)}{\Gamma(n_1 \pm k_1 + 1) \Gamma(n_1 + \beta + 1)} \right]^{1/2} \times \\ &\times (\sin \vartheta)^{1/2 \pm k_1} (\cos \vartheta)^{\beta + 1/2} P_{n_1}^{(\pm k_1, \beta)}(\cos 2\vartheta). \quad (4.95) \end{aligned}$$

The continuous states have the form

$$\Psi_{kp}^{(V_2)}(a, \vartheta; R) = \frac{1}{R} \Psi_k^{(\pm k_2, \tilde{p})}(a) \Phi_k^{(\pm k_1, p)}(\vartheta), \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \Psi_k^{(\pm k_2, \tilde{p})}(a) &= \\ &= \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(1 \pm k_2 + i\tilde{p} + ik)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(1 \pm k_2 + i\tilde{p} - ik)\right]}{\Gamma(1 \pm k_2)} \sqrt{\frac{k \sinh \pi k}{2\pi^2}} (\tanh a)^{\pm k_2 - 1/2} \times \\ &\times (\cosh a)^{ik} {}_2F_1\left(\frac{1 \pm k_2 + i\tilde{p} + ik}{2}, \frac{1 \pm k_2 - i\tilde{p} + ik}{2}, 1 \pm k_2; \tanh^2 a\right), \quad (4.97) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(\pm k_1, p)}(\vartheta) &= \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(1 \pm k_1 + ip + ik)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(1 \pm k_1 + ip - ik)\right]}{\Gamma(1 \pm k_1)} \times \\ &\times \sqrt{\frac{k \sinh \pi k}{2\pi^2}} (\tan \vartheta)^{\pm k_1 - 1/2} \times (\cos \vartheta)^{ip + 1 \pm k_1} \times \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{1 \pm k_2 + ip + ik}{2}, \frac{1 \pm k_1 - ip + ik}{2}; 1 \pm k_2; -\sin^2 \vartheta\right). \quad (4.98) \end{aligned}$$

The special case of the pure Coulomb potential follows from the consideration of the corresponding special cases in (2.6, 2.10, 2.12) and (2.16). This completes the discussion of the Coulomb problem on the two-dimensional hyperboloid in the soluble cases. The cases of elliptic II and semihyperbolic coordinates are not tractable by path integration.

4.3. The Potential V_3

We consider the potential V_3 in its separating coordinate systems:

$$V_3(u) = \frac{\alpha}{(u_0 - u_1)^2} + \frac{M}{2} \omega^2 \frac{R^2 + 4u_2^2}{(u_0 - u_1)^4} - \lambda \frac{u_2}{(u_0 - u_1)^3}, \quad (4.99)$$

Horiocyclic ($y > 0, x \in \mathbb{R}$):

$$= \frac{y^2}{R^2} \left[\alpha + \frac{M}{2} \omega^2 (4x^2 + y^2) - \lambda x \right], \quad (4.100)$$

Semicircular-Parabolic ($\xi, \eta > 0$):

$$= \frac{1}{R^2} \frac{\xi^2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \left[\alpha (\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2} \lambda (\eta^4 - \xi^4) + \frac{M}{2} \omega^2 (\xi^6 + \eta^6) \right]. \quad (4.101)$$

V_3 corresponds to the Holt potential plus a linear term [21,31], i.e., plus an electric field, in the flat space limit $\mathbb{R}^2$. The constants of motion for potential V_3 have the form

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_3(u), \\ I_2 &= \frac{1}{2M} (K_1 - L_3)^2 + \alpha + 2M\omega^2 x^2 - \lambda x, \\ I_3 &= \frac{1}{2M} (\{K_1, K_2\} - \{K_2, L_3\}) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\xi^4 (2\alpha + \xi^2 \lambda + M\omega^2 \xi^4) - \eta^4 (2\alpha - \eta^2 \lambda + M\omega^2 \eta^4)}{\xi^3 + \eta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.102)$$

We obtain the following two path integral representations

$$K^{(V_3)}(u'', u'; T),$$

Horicyclic:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{y(t')=y'}^{y(t'')=y''} \frac{\mathcal{D}y(t)}{y^2} \int_{x(t')=x'}^{x(t'')=x''} \mathcal{D}x(t) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} - \frac{y^2}{R^2} \left(\alpha + \frac{M}{2} \omega^2 (4x^2 + y^2) - \lambda x \right) \right] dx \right\}. \quad (4.103)$$

Semicircular-Parabolic:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{\xi(t')=\xi'}^{\xi(t'')=\xi''} \mathcal{D}\xi(t) \int_{\eta(t')=\eta'}^{\eta(t'')=\eta''} \mathcal{D}\eta(t) \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 \eta^2} \times \\ \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 \eta^2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\xi^2 \eta^2}{R^2} \left(\alpha - \frac{\lambda}{2} (\eta^2 - \xi^2) + \frac{M}{2} \omega^2 (\xi^4 + \eta^4 - \xi^2 \eta^2) \right) \right] dt \right\}. \quad (4.104)$$

The path integral (4.104) in semicircular parabolic coordinates is not tractable. The path integral (4.103) is solved in the following way: We shift the variable x according to $x \rightarrow z = x - \lambda/4M\omega^2$. The emerging path integral problem is the path integral of an harmonic oscillator yielding the separation

$$K^{(V_3)}(u'', u'; T) = \frac{1}{R} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2M\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \frac{1}{2^m m!} \times \\ \times H_m \left(\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} z' \right) H_m \left(\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} z'' \right) \exp \left[-\frac{M\omega}{\hbar} (z'^2 + z''^2) \right] \\ \times \int_{y(t')=y'}^{y(t'')=y''} \frac{\mathcal{D}y(t)}{y} \exp \left[\frac{iM}{2\hbar} \int_{t'}^{t''} \left(R^2 \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} - \frac{y^2}{R^2} (E_{\alpha, \omega, \lambda} + \omega^2 y^2) \right) dt \right], \quad (4.105)$$

with the quantity $E_{\alpha, \omega, \lambda}$ given by

$$E_{\alpha, \omega, \lambda} = \alpha + 2\hbar\omega \left(m + \frac{1}{2} \right) - \frac{\lambda^2}{8M\omega^2}. \quad (4.106)$$

The $H^m(x)$ are Hermite polynomials [13, p.1033]. A path integral like this was calculated in [18], and we must distinguish two cases, first $E_{\alpha, \omega, \lambda} > 0$, and second $E_{\alpha, \omega, \lambda} < 0$. In the first case only a continuous spectrum occurs, whereas in the second case bound states can exist with the number of levels given by $n = 0, 1, \dots, N^{\max}_{\alpha, \omega, \lambda} = \lfloor E_{\alpha, \omega, \lambda} / 2\hbar\omega - 1/2 \rfloor$. From the explicit form of $E_{\alpha, \omega, \lambda}$ we see that it can be arranged that at least some bound states exist. Therefore we obtain the following path integral solution for V_3 in horticyclic coordinates

$$(\nu = -1 \pm \sqrt{2MR^2 E / \hbar^2 - 1/4})$$

$$K^{(V)_3}(u'', u'; T) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x') \psi_m(x'') \int \frac{dE}{2\pi i} e^{-iET/\hbar} \times$$

$$\times \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} (1 + \nu + E_{\alpha, \omega, \lambda} / \hbar\omega) \right]}{W^{-E_{\alpha, \omega, \lambda} / 2\hbar\omega, \nu/2} \left(\frac{\hbar}{M\omega} y_2^2 \right)} \times$$

$$\times M^{-E_{\alpha, \omega, \lambda} / 2\hbar\omega, \nu/2} \left(\frac{\hbar}{M\omega} y_2^2 \right) \quad (4.107)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{\max}^N e^{-iE^p T / \hbar} \Psi_{(V)_3}^{nm}(x', y'; R) \Psi_{(V)_3}^{nm}(x'', y''; R) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} dp e^{-iE^p T / \hbar} \Psi_{(V)_3}^{pm}(x', y'; R) \Psi_{(V)_3}^{pm}(x'', y''; R) \right]. \quad (4.108)$$

$M_{\mu, \nu}^{\mu, \nu}(z)$ and $W_{\mu, \nu}^{\mu, \nu}(z)$ are Whittaker functions [13, p.1059]. The bound state wave functions have the form

$$\Psi_{(V)_3}^{nm}(x, y; R) = \psi_n(y; R) \psi_m(x), \quad (4.109)$$

$$\psi_n(y; R) = \sqrt{2n! (|E_{\alpha, \omega, \lambda}| / \hbar\omega - 2n - 1)^n} \left(\frac{\hbar}{M\omega} y^2 \right)^n \frac{R^2 \Gamma(|E_{\alpha, \omega, \lambda}| / \hbar\omega - n)}{|E_{\alpha, \omega, \lambda}| / 2\hbar\omega - n - 1/2} \times$$

$$\times \exp \left(- \frac{M\omega}{2\hbar} y^2 \right) M_n^{(|E_{\alpha, \omega, \lambda}| / \hbar\omega - 2n - 1)} \left(\frac{\hbar}{M\omega} y^2 \right), \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \psi_m(x) &= \left(\frac{2M\omega}{\pi\hbar 2^{2m}(m!)^2} \right)^{1/4} \times \\ &\times H_m \left(\sqrt{\frac{2M\omega}{\hbar}} \left(x - \frac{\lambda}{8\omega^2} \right) \right) \exp \left(-\frac{M\omega}{\hbar} \left(x - \frac{\lambda}{8\omega^2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.111)$$

with the discrete energy spectrum given by

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8MR^2} - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{|E_{\alpha, \omega, \lambda}|}{\hbar\omega} - 2n - 1 \right)^2. \quad (4.112)$$

The continuous wave functions and the corresponding energy spectrum have the form

$$\Psi_{nm}^{(V_3)}(x, y; R) = \psi_m(x) \psi_p(y; R) \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned} \psi_p(y; R) &= \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega} \frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2 R^2 y}} \Gamma \left[\frac{1}{2} \left(1 + ip + \frac{E_{\alpha, \omega, \lambda}}{\hbar\omega} \right) \right] \times \\ &\times W_{-E_{\alpha, \omega, \lambda}/2\hbar\omega, ip/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} y^2 \right), \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (4.115)$$

with the $\psi_m(x)$ as in (4.111). The Green function $G^{(V_3)}(E)$ of the potential V_3 can be read off from (4.107). This concludes the discussion of V_3 .

4.4. The Potential V_4

We consider the potential V_4 in its separating coordinate systems

Equidistant ($\tau_1 > 0, \tau_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} V_4(u) &= \frac{M}{2} \frac{\omega^2}{(u_0 - u_1)^2} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{u_2^2} = \\ &= \frac{M}{2R^2} \frac{\omega^2}{\cosh^2 \tau_1} e^{2\tau_2} + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau_1} \end{aligned} \quad (4.116)$$

Horicyclic ($y > 0, x > 0$):

$$= \frac{M}{2R^2} \omega^2 y^2 + \frac{\hbar^2}{2MR^2} y^2 \frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \quad (4.117)$$

Elliptic-Parabolic ($b > 0, \vartheta \in (0, \pi/2)$):

$$= \frac{M}{2R^2} \omega^2 \cosh^2 a \cos^2 \vartheta + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) \cot^2 \vartheta \coth^2 a \quad (4.118)$$

Elliptic-Hyperbolic ($b > 0, \vartheta \in (0, \pi/2)$):

$$= \frac{M}{2R^2} \omega^2 \sinh^2 b \sin^2 \vartheta + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) \tan^2 \vartheta \tanh^2 b \quad (4.119)$$

Semicircular-Parabolic ($|\kappa| = 1/2, \xi, \eta > 0$):

$$= \frac{M}{2R^2} \omega^2 \xi^2 \eta^2. \quad (4.120)$$

For the constants of motion of the potential V_4 we find

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_4(u), \\ I_2 &= \frac{1}{2M} (K_1 - L_3)^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \\ I_3 &= \frac{1}{2M} K_2^2 + \frac{M}{2} \omega^2 e^{2\tau_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

We discuss the corresponding solutions in the five coordinate systems only briefly because this potential seems not to be rather important. Also, the methods how to evaluate such path integrals have been presented already in earlier investigations, c.f. [20,24]. In particular, for the elliptic-, hyperbolic-parabolic, and semicircular parabolic we argue along the lines of Ref.[20], where also more details can be found. The path integral evaluations in equidistant and horicyclic coordinates are easy to do.

4.4.1. Equidistant Coordinates. We start with the path integral representation in equidistant coordinates. We consider

$$K^{(V_4)}(u'', u'; T) = \frac{1}{R^2} \int_{\tau_1(t') = \tau_1'}^{\tau_1(t'') = \tau_1''} \mathcal{D} \tau_1(t) \cosh \tau_1 \int_{\tau_2(t') = \tau_2'}^{\tau_2(t'') = \tau_2''} \mathcal{D} \tau_2(t) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 (\dot{\tau}_1^2 + \cosh^2 \tau_1 \dot{\tau}_2^2) - \frac{\omega^2 e^{2\tau_2}}{R^2 \cosh^2 \tau_1} - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\kappa^2 - \frac{1}{4}}{\sinh^2 \tau_1} - \frac{\hbar^2}{8MR^2} \left(1 + \frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \right) \right] dt \right\} \quad (4.122)$$

$$= \int_0^\infty dk \int_0^\infty dp \exp \left[-\frac{i\hbar T}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right) \right] \times \\ \times \Psi_{pk}^{(V_4)*}(\tau'_1, \tau'_2; R) \Psi_{pk}^{(V_4)}(\tau''_1, \tau''_2; R). \quad (4.123)$$

The path integral in the coordinate τ_2 is a path integral for the Liouville potential [24], and the remaining path integral in τ_1 is again of the form of a modified Pöschl-Teller potential path integral (2.12). Therefore the separation procedure and the path integral evaluations are straightforward. The spectrum is purely continuous and the wave functions are given by ($\tilde{k} = mR\omega/\hbar$)

$$\Psi_{pk}^{(V_4)}(\tau_1, \tau_2; R) = (\cosh \tau_1)^{-1/2} S_p(\tau_1; R) \psi_k(\tau_2), \quad (4.124)$$

$$S_p(\tau_1; R) = \frac{1}{\Gamma(1+\kappa)} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2 R^2}} \Gamma\left(\frac{ik - \kappa + 1 - ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\kappa - ik + 1 - ip}{2}\right) \times \\ \times (\tanh \tau_1)^{1/2 + \kappa} (\cosh \tau_1)^{ip} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{ik + \kappa + 1 - ip}{2}, \frac{1 + \kappa - ik - ip}{2}; 1 + \kappa; \tanh^2 \tau_1\right), \quad (4.125)$$

$$\psi_k(\tau_2) = \sqrt{\frac{2k \sinh \pi k}{\pi^2}} K_{ik}(\tilde{k} e^{\tau_2}). \quad (4.126)$$

$K_\nu(z)$ is a modified Bessel function [13, p.952]. The corresponding Green function in these coordinates is given by (in the notation of (2.16) with $(L_\lambda = \frac{1}{2}(ik - 1))$)

$$G^{(V_4)}(u'', u'; E) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty dk \sinh \pi k K_{ik}(\tilde{k} e^{\tau'_2}) K_{ik}(\tilde{k} e^{\tau''_2}) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{M}{2\hbar^2} \frac{\Gamma(m_1 - L_\lambda) \Gamma(L_\lambda + m_1 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + 1) \Gamma(m_1 - m_2 + 1)} \times \\
& \times (\cosh \tau'_1 \cosh \tau''_1)^{-(m_1 - m_2 + 1/2)} (\tanh \tau'_1 \tanh \tau''_1)^{m_1 + m_2 - 1/2} \times \\
& \times {}_2F_1 \left(-L_\lambda + m_1, L_\lambda + m_1 + 1; m_1 - m_2 + 1; \frac{1}{\cosh^2 \tau_{1, <}} \right) \times \\
& \times {}_2F_1 (-L_\lambda + m_1, L_\lambda + m_1 + 1; m_1 + m_2 + 1; \tanh^2 \tau_{1, >}). \quad (4.127)
\end{aligned}$$

4.4.2. Horicyclic Coordinates. In horicyclic coordinates we see that in the x -variable we have a radial path integral with a repulsive centrifugal barrier. Therefore we obtain ($\tilde{k}^2 = k^2 + M^2 R^2 \omega^2 / \hbar^2$)

$$\begin{aligned}
K^{(V_4)}(u'', u'; T) &= \frac{1}{R^2} \int_{y(t')=y'}^{y(t'')=y''} \frac{\mathcal{D}y(t)}{y^2} \int_{x(t')=x'}^{x(t'')=x''} \mathcal{D}x(t) \times \\
&\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left(\frac{M}{2} R^2 \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2} - \frac{\omega^2 y^2}{R^2} - \frac{\hbar^2}{2MR^2} y^2 \frac{k^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) dt \right] \quad (4.128)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{x'x''y'y''} \int_0^\infty k dk J_\kappa(kx') J_\kappa(kx'') \frac{2M}{\hbar^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi i} e^{iET/\hbar} \times \\
&\times I_{-i\sqrt{2MR^2E/\hbar^2+1/4}}(\tilde{k}y_<) K_{i\sqrt{2MR^2E/\hbar^2+1/4}}(\tilde{k}y_>) \quad (4.129)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x'x''y'y''}}{R^2} \int_0^\infty k dk J_\kappa(kx') J_\kappa(kx'') \times \\
&\times \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty dp p \sinh \pi p \exp \left[-\frac{i\hbar T}{2MR^2} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right) \right] K_{ip}(\tilde{k}y') K_{ip}(\tilde{k}y''). \quad (4.130)
\end{aligned}$$

The $I_\nu(z)$ and $J_\nu(z)$ are (modified) Bessel functions [13, p.951]. In the path integral for the horicyclic system we simply do the x -path integration (a radial path integral [25,56]) and we find that the remaining y -path integral looks exactly as for the free motion with just the separation parameter k shifted by

$M^2 R^2 \omega^2 / \hbar^2$. A path integral like this has been already discussed in, e.g., [20] and references therein, which is not repeated here, and the solutions (4.129, 4.130) for the Green function and the spectral expansion follow immediately.

4.4.3. Elliptic- and Hyperbolic-Parabolic Coordinates. In the following two path integral representations we, first, state the solutions, and second, give a short description how these solutions can be obtained. In elliptic-parabolic coordinates we have an explicit solution only for $|\kappa| = \frac{1}{2}$, and we obtain for that case

$$(k_\rho = MR\omega / \hbar)$$

$$\begin{aligned} K^{(V_4)}(u'', u'; T) = & \frac{1}{R^2} \int_{a(t')=a'}^{a(t'')=a''} \mathcal{D} a(t) \int_{\vartheta(t')=\vartheta'}^{\vartheta(t'')=\vartheta''} \mathcal{D} \vartheta(t) \frac{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \frac{\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta}{\cosh^2 a \cos^2 \vartheta} (\dot{a}^2 + \dot{\vartheta}^2) - \frac{\omega^2}{R^2} \cosh^2 a \cos^2 \vartheta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) \cot^2 \vartheta \coth^2 a \right] dt \right\} \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{R^2} \sqrt{\cos \vartheta' \cos \vartheta''} \sum_{\epsilon, \epsilon' = \pm 1} \int_0^\infty dp \sinh \pi p \int_0^\infty \frac{dk k \sinh \pi k}{(\cosh^2 \pi k + \sinh^2 \pi p)^2} \times \\ & \times e^{-i\hbar T(p^2 + 1/4)/2MR^2} S_{ip-1/2}^{ik(1)}(\epsilon \tanh a''; ik_\rho) S_{ip-1/2}^{ik(1)*}(\epsilon \tanh a'; ik_\rho) \times \\ & \times \text{ps}_{ik-1/2}^{ip}(\epsilon' \sin \vartheta''; -k_\rho^2) \text{ps}_{ik-1/2}^{ip*}(\epsilon' \sin \vartheta'; -k_\rho^2). \end{aligned} \quad (4.132)$$

The $\text{ps}_V^\mu(z)$ and $S_V^{\mu(1)}(z)$ are spheroidal functions [50, p.236, p.289]. In hyperbolic-parabolic coordinates we have an exact solution only for $|\kappa| = 1/2$ and we obtain in this case ($k_\rho = MR\omega / \hbar$)

$$K^{(V_4)}(u'', u'; T) = \frac{1}{R^2} \int_{b(t')=b'}^{b(t'')=b''} \mathcal{D} b(t) \int_{\vartheta(t')=\vartheta'}^{\vartheta(t'')=\vartheta''} \mathcal{D} \vartheta(t) \frac{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta}{\sinh^2 b \sin^2 \vartheta} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t'} \left[\frac{2}{M} R^2 \frac{\sinh^2 b + \sin^2 \vartheta}{\sinh^2 \vartheta} (b^2 + \vartheta^2) - \frac{R^2}{\omega^2} \sinh^2 b \sin^2 \vartheta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\kappa^2 - \frac{4}{1} \right) \tan^2 \vartheta \tanh^2 b \right] dt \right\} \quad (4.133)$$

$$= \frac{1}{R^2} \sqrt{\sinh b' \sinh b'' \sin \vartheta' \sin \vartheta''} \times \\ \times \sum_{\varepsilon = \pm 1, 0} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk \kappa \sinh \pi \kappa}{\cosh^2 \pi \kappa + \sinh^2 \pi p \cosh \pi(p - k)} e^{-i\pi p^2 + 1/4)/2MR^2} \\ \times S_{ip(1)}^{ik-1/2} (\cosh b'', ik^p) S_{ip(1)^*}^{ik-1/2} (\cosh b', ik^p) \times \\ \times \text{ps}_{ip}^{ik-1/2} (\varepsilon \cos \vartheta'', -k^2) \text{ps}_{ip^*}^{ik-1/2} (\varepsilon \cos \vartheta', -k^p). \quad (4.134)$$

The path integral representation in these two coordinate systems for V_4 are similar to the path integral representations of the free motion on $\Lambda^{(3)}$ in elliptic-parabolic and hyperbolic-parabolic coordinates, respectively. Let us sketch the solution of the former. Performing a time transformation yields a path integral which looks like the path integral in flat space in the oblate spheroidal coordinate systems, i.e.,

$$K_{(V)}^{(4)}(a'', a', \vartheta'', \vartheta'; T) = \\ = \int \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \int_{a''}^{a(s'')} \mathcal{D} a(s) \int_{\vartheta(s'')}^{\vartheta(s)} \mathcal{D} \vartheta(s) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_s^0 \left[\frac{2}{M} (a'^2 + \vartheta'^2) - \omega^2 (\cosh^2 a - \cos^2 \vartheta) \right] ds \right\} \quad (4.135)$$

where $\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - 2MR^2 E/\hbar^2}$. This path integral could be solved provided we knew the solution of the path integral representation in prolate spheroidal

coordinates in $\mathbb{R}^4$. However, this is not the case, and therefore we are restricted to the case $|\kappa| = 1/2$ which is solvable using the result of the free motion on $\Lambda^{(3)}$ in elliptic-parabolic coordinates. Because λ is for $E > \hbar^2/8MR^2$ purely imaginary we cannot apply the oblate spheroidal path integral identity of [20] in a simple way. We must find a proper analytic continuation, and instead we construct this analytic continuation heuristically. Since the (a, ϑ) -path integration in (4.132) corresponds for $\omega = 0$ to the path integral on $\Lambda^{(2)}$ in elliptic-parabolic coordinates we look for those spheroidal wave functions [20,50] which have for the parameter $\omega = 0$ the limit of the wave functions of this system and we find for

$$ps_V^\mu(x; 0) = P_V^\mu(x), \quad (|x| \leq 1), \quad S_V^{\mu(1)}(z; 0) = \mathcal{P}_V^\mu(z), \quad |z| \geq 1. \quad (4.136)$$

Putting everything together yields the conjectural result (4.132). The case of hyperbolic-parabolic system (4.134) is done in an analogous way.

4.4.4. Semicircular-Parabolic Coordinates. In semicircular-parabolic coordinates the potential separates only for $|k| = 1/2$ and we obtain ($q = M\omega/\hbar$)

$$\begin{aligned} K^{(V_4)}(u'', u'; T) &= \\ &= \frac{1}{R^2} \int_{\xi(t')=\xi'}^{\xi(t'')=\xi''} \mathcal{D}\xi(t) \int_{\eta(t')=\eta'}^{\eta(t'')=\eta''} \mathcal{D}\eta(t) \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 \eta^2} \times \\ &\quad \exp \left\{ \frac{iM}{2\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[R^2 \frac{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2}{\xi^2 \eta^2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{\omega^2}{R^2} \xi^2 \eta^2 \right] dt \right\} \quad (4.137) \\ &= \sum_{\pm} \frac{1}{\pi^2 q^2 R^2} \int_0^\infty dp p (\sinh \pi p)^2 \int_0^\infty dk k \left| \Gamma \left[\frac{1}{2} (1 \pm k^2/2q + ip) \right] \right|^4 \times \\ &\quad e^{-i\pi T(p^2 + 1/4)/2MR^2} W_{\pm k^2/4q, ik/2}(q\xi''^2) \times \\ &\quad \times W_{\pm k^2/4q, ik/2}(q\xi'^2) W_{\pm k^2/4q, ip/2}(q\eta''^2) W_{\pm k^2/4q, ip/2}(q\eta'^2). \quad (4.138) \end{aligned}$$

This path integral is solved in the following way: After a time transformation we obtain

$$K^{(V_4)}(\xi'', \xi'', \eta'', \eta'; T) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \int_{\xi(0)=\xi'}^{\xi(s'')=\xi''} D\xi(s) \int_{\eta(0)=\eta'}^{\eta(s'')=\eta''} \mathcal{D}\eta(s) \times \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^{s''} \left[\frac{M}{2} ((\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \omega^2(\xi^2 + \eta^2)) - \hbar^2 \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{2M} \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) \right] ds \right\} \quad (4.139)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\xi''\xi''} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \int_{\mathbb{R}} \frac{dE'}{2\pi i} e^{-iE's''/\hbar} \times \\
&\times \frac{M\omega}{i\hbar \sin \omega s''} \exp \left[-\frac{M\omega}{2i\hbar} (\xi'^2 + \xi''^2) \cot \omega s'' \right] I_\lambda \left(\frac{M\omega \xi' \xi''}{i\hbar \sin \omega s''} \right) \times \\
&\times \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} (1 + \lambda - E'/\hbar\omega) \right]}{\hbar\omega \Gamma(1 + \lambda)} W_{E'/2\hbar\omega, \lambda/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} \eta_{>}^2 \right) \times \\
&\times M_{E'/2\hbar\omega, \lambda/2} \left(\frac{M\omega}{\hbar} \eta_{<}^2 \right) + (\xi \leftrightarrow \eta), \quad (4.140)
\end{aligned}$$

where $\lambda^2 = \frac{1}{4} - 2MR^2E/\hbar^2$; we must take into account a term with ξ and η interchanged. One uses the path integral solution of the radial harmonic oscillator [56], where for the ξ -dependent part we expand the propagator by means of

$$I_\lambda(z) = \frac{\hbar^2}{\pi^2 MR^2} \int_0^\infty \frac{dp \, p \sinh \pi p}{\hbar^2 \left(p^2 + \frac{1}{4} \right) / 2MR^2 - E} K_{ip}(z), \quad (4.141)$$

and the integral representation [13, p.729]

$$\begin{aligned}
W_{\chi, \frac{\mu}{2}}(a) W_{\chi, \frac{\mu}{2}}(b) &= \frac{2\sqrt{ab}t}{\Gamma\left(\frac{1+\mu}{2} - \chi\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2} - \chi\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{a+b}{2} \cosh v} \times \\
&\times K_\mu(\sqrt{ab} \sinh v) \left(\cosh \frac{v}{2} \right)^{2\chi} dv. \quad (4.142)
\end{aligned}$$

In the η -dependent part one uses the Green function for the radial harmonic oscillator (c.f. [25] for the functional measure formulation)

$$\frac{i}{h} \int_0^\infty dT e^{iET/h} \int_{r(t')=r'}^{r(t'')=r''} \mathcal{D} r(t) \mu_\lambda[r^2] \exp \left[\frac{iM}{2h} \int_{t'}^{t''} (\dot{r}^2 - \omega^2 r^2) dt \right] =$$

$$= \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} (1 + \lambda - E/h\omega) \right]}{h\omega \sqrt{r'r''} \Gamma(1 + \lambda)} W_{E/2h\omega, \lambda/2} \left(\frac{M\omega}{h} r_{>}^2 \right) M_{E/2h\omega, \lambda/2} \left(\frac{M\omega}{h} r_{<}^2 \right), \quad (4.143)$$

and the relation [13, p.1062]

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \lambda\right)} M_{\lambda, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \lambda\right)} M_{\lambda, -\mu}(z). \quad (4.144)$$

If we have (4.140) as it stands we obtain the Green function $G^{(V_4)}$ ($\xi'', \xi', \eta'', \eta'; E$), together with the prescription $E' = -h^2 k^2 / 2M$. The final result (4.138) is then obtained by combining on the one hand, where $E' = -k^2 h^2 / 2M$ and re-inserting

$$\frac{M\omega}{h^2} \int_0^\infty ds'' \frac{ds''}{\sin \omega s''} \exp \left[-i \frac{E' s''}{h} - \frac{M\omega}{2ih} (\xi'^2 + \xi''^2) \cot \omega s'' \right] I_\lambda \left(\frac{M\omega \xi' \xi''}{ih \sin \omega s''} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 q} \int_0^\infty \frac{dp \sinh \pi p}{p^2 h^2 / 2M - E} \left| \Gamma \left[\frac{1}{2} \left(1 + ip - \frac{k^2}{2q} \right) \right] \right|^2 \times$$

$$\times W_{-k^2/4q, ip/2}^{(q\xi'^2)} W_{-k^2/4q, ip/2}^{(q\xi''^2)} \quad (4.145)$$

and on the other ($q = MR\omega/h$)

$$W_{k^2/4q, ip/2}^{(q\eta'^2)} \left[\frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} (1 + ip - k^2/2q) \right]}{h\omega \Gamma(1 + ip)} M_{k^2/4q, ip/2}^{(q\eta''^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} (1 - ip - k^2/2q) \right]}{h\omega \Gamma(1 - ip)} M_{k^2/4q, -ip/2}^{(q\eta''^2)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{iM}{\pi h^2 q} \sinh \pi p \left| \Gamma \left[\frac{1}{2} \left(1 + ip - \frac{k^2}{2q} \right) \right] \right|^2 \times \\
&\times W_{-k^2/4q, ip/2} (q\eta'^2) W_{-k^2/4q, ip/2} (q\eta''^2). \quad (4.146)
\end{aligned}$$

4.5. The Potential V_5

We consider the potential V_5 in its two separating coordinate systems

Equidistant ($\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$):

$$V_5(u) = \alpha R \frac{u_2}{\sqrt{u_0^2 - u_1^2}} = \alpha R \tanh \tau_1 \quad (4.147)$$

Semicircular-Parabolic ($\xi, \eta > 0$):

$$= \alpha R \frac{\xi^2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\eta^2} \right). \quad (4.148)$$

The constants of motion for the potential V_5 are the following

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2MR^2} (K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) + V_5(u), \\ I_2 &= \frac{1}{2M} (\{K_1, K_2\} - \{K_2, L_3\}) + \frac{2\alpha R}{\xi^2 + \eta^2}, \\ I_3 &= K_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.149)$$

We have the following two path integral representations

$$K^{(V_5)}(u'', u'; T)$$

Equidistant:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{\tau_1(t')=\tau'_1}^{\tau_1(t'')=\tau''_1} \mathcal{D} \tau_1(t) \cosh \tau_1 \int_{\tau_2(t')=\tau'_2}^{\tau_2(t'')=\tau''_2} \mathcal{D} \tau_2(t) \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 (\dot{\tau}_1^2 + \cosh^2 \tau_1 \dot{\tau}_1^2) - \alpha R \tanh \tau_1 - \frac{\hbar^2}{8MR^2} \left(1 + \frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \right) \right] dt \right\} \quad (4.150)$$

Semicircular-Parabolic:

$$= \frac{1}{R^2} \int_{\xi(t')=\xi'}^{\xi(t'')=\xi''} \mathcal{D} \xi(t) \int_{\eta(t')=\eta'}^{\eta(t'')=\eta''} \mathcal{D} \eta(t) \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 \eta^2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 \eta^2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \alpha R \frac{\eta^2 - \xi^2}{\xi^2 + \eta^2} \right] dt \right\}. \quad (4.151)$$

4.5.1. Equidistant Coordinates. After separating off the τ_2 -path integration we obtain a pure scattering Rosen-Morse potential, a path integral problem which has been solved in [14,43]. Therefore we get

$$K^{(V_5)}(u'', u'; T) = \frac{e^{-i\hbar T/8MR^2}}{R} (\cosh \tau_1' \cosh \tau_1'')^{-1/2} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(\tau_2'' - \tau_2')} \int_{\tau_1(t')=\tau_1'}^{\tau_1(t'')=\tau_1''} \mathcal{D} \tau_1(t) \times \\ \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{M}{2} R^2 \dot{\tau}_1^2 - \alpha R \tanh \tau_1 - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{k^2 + \frac{1}{4}}{\cosh^2 \tau_1} \right] dt \right] \quad (4.152) \\ = (\cosh \tau_1' \cosh \tau_1'')^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(\tau_2'' - \tau_2')} \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi i} e^{-iET/\hbar} \times \\ \times \frac{M}{\hbar^2} \frac{\Gamma(m_1 - L_k) \Gamma(L_k + m_1 + 1)}{\Gamma(m_1 + m_2 + 1) \Gamma(m_1 - m_2 + 1)} \times \\ \times \left(\frac{1 - \tanh \tau_1'}{2} \cdot \frac{1 - \tanh \tau_1''}{2} \right)^{(m_1 - m_2)/2} \left(\frac{1 + \tanh \tau_1'}{2} \cdot \frac{1 + \tanh \tau_1''}{2} \right)^{(m_1 + m_2)/2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times {}_2F_1 \left(-L_k + m_1, L_k + m_1 + 1; m_1 + m_2 + 1; \frac{1 + \tanh \tau_{1,>}}{2} \right) \times \\ & \times {}_2F_1 \left(-L_k + m_1, L_k + m_1 + 1; m_1 - m_2 + 1; \frac{1 - \tanh \tau_{1,<}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.153)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dk \int_0^\infty dp e^{-iE_p T/\hbar} \Psi_{pk}^{(V_s)}(\tau_1'', \tau_2''; R) \Psi_{pk}^{(V_s)*}(\tau_1', \tau_2'; R). \quad (4.154)$$

Here denote $L_k = -2ik - \frac{1}{2}$, $m_{1,2} = \sqrt{m/2}(\sqrt{-\alpha R - E - E_0} \pm \sqrt{\alpha R - E - E_0})/\hbar$, $E_0 = \hbar^2/8MR^2$, and (4.153) is the Green function corresponding to the path integral (4.150). The wave functions and the energy-spectrum of the continuous states are (where $\pm$ distinguishes between incoming and outgoing scattering states, respectively)

$$\Psi_{pk}^{(V_s)}(\tau_1, \tau_2; R) = (2\pi \cosh \tau_1)^{-1/2} S_p^{(\pm)}(\tau_1; R) e^{ik\tau_2}, \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned} S_p^{(\pm)}(\tau_1; R) &= \frac{1}{R \Gamma(1 + m_1 \pm m_2)} \frac{\sqrt{M \sinh(\pi |m_1 \pm m_2|)/2}}{\hbar |\sin \pi(m_1 + L_k)|} \times \\ & \times \left(\frac{1 + \tanh \tau_1}{2} \right)^{(m_1 + m_2)/2} \left(\frac{1 - \tanh \tau_1}{2} \right)^{(m_1 - m_2)/2} \times \\ & \times {}_2F_1 \left(m_1 + L_k + 1, m_1 - L_k; 1 + m_1 \pm m_2; \frac{1 \pm \tanh \tau_1}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.156)$$

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2M} \left(p^2 + \frac{1}{4} \right) - \alpha R. \quad (4.157)$$

4.5.2. Semicircular-Parabolic Coordinates. In the semicircular-parabolic system we obtain after a time transformation ($\lambda_{1,2} = 1/4 - 2M(ER^2 \pm \alpha R)/\hbar^2$)

$$\begin{aligned} K^{(V_s)}(u'', u'; T) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty ds'' \int_{\xi(0)=\xi'}^{\xi(s'')=\xi''} \mathcal{D}\xi(s) \int_{\eta(0)=\eta'}^{\eta(s'')=\eta''} \mathcal{D}\eta(s) \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^{s''} \left[\frac{M}{2} \left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 \right) - \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(\frac{\lambda_1^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} - \frac{\lambda_2^2 - \frac{1}{4}}{\eta^2} \right) \right] ds \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M^2}{i\hbar^3} \sqrt{\xi''\xi'''\eta'\eta''} \int_{\mathbb{R}} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-iET/\hbar} \int_0^\infty \frac{ds''}{s''} \int_{\mathbb{R}} \frac{dE'}{2\pi i} e^{-iE's''/\hbar} \times \\
&\quad \times I_\lambda \left(\sqrt{-2ME'} \frac{\xi_{<}}{\hbar} \right) K_{\lambda_1} \left(\sqrt{-2ME'} \frac{\xi_{>}}{\hbar} \right) \times \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{M}{2i\hbar s''} (\eta'^2 + \eta''^2) \right] I_{\lambda_2} \left(\frac{M\eta'\eta''}{i\hbar s''} \right). \quad (4.158)
\end{aligned}$$

The corresponding wave functions are obtained in a similar way as in [20] for the free motion on $\Lambda^{(2)}$ in semicircular-parabolic coordinates by analysing the Green function (4.158) on the cut, which finally yields $(\bar{p}_{1,2} = -i\sqrt{p^2 \pm 2MR\alpha/\hbar^2})$

$$\begin{aligned}
K^{(V_s)}(u'', u'; T) &= \frac{\sqrt{\xi''\xi'''\eta'\eta''}}{4\pi^2} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty dp p \sinh^2 \pi p e^{-iE_p T/\hbar} \times \\
&\quad \times [H_{-\tilde{i}p_2}^{(1)}(k\eta') H_{\tilde{i}p_2}^{(1)}(k\eta'') K_{\tilde{i}p_1}(k\xi') K_{\tilde{i}p_1}(k\xi'') + \\
&\quad + K_{\tilde{i}p_2}(k\eta') K_{\tilde{i}p_2}(k\eta'') H_{-\tilde{i}p_1}^{(1)}(k\xi') H_{\tilde{i}p_1}^{(1)}(k\xi'')], \quad (4.159)
\end{aligned}$$

with E_p as in (4.157), and the even and odd wave functions can be read off from the spectra expansion. The $H_\nu^{(1)}(z)$ are Hankel functions [13, p.952].

5. SUMMARY AND DISCUSSION

In this paper we have performed an investigation about superintegrable potentials on the two-dimensional hyperboloid. We have found that the two most important potentials, the oscillator and the Coulomb potential, admit separation of variables in four coordinate systems. Each problem is exactly solvable in two coordinate systems, the oscillator in spherical and equidistant coordinates, the Coulomb problem in spherical and elliptic parabolic coordinates. We have also stated the corresponding Green functions.

These particular features are not too surprising. In the flat space limit the spherical system yields two-dimensional polar coordinates, and both problems in $\mathbb{R}^2$ are separable in this coordinate system. The equidistant system yields in the flat space limit cartesian coordinates, and the oscillator in $\mathbb{R}^2$ is separable

in cartesian coordinates. The elliptic-parabolic system yields parabolic coordinates (as the semihyperbolic system) and the Coulomb problem in $\mathbb{R}^2$ is separable in parabolic coordinates. The elliptic system on $\Lambda^{(2)}$ gives the elliptic system in $\mathbb{R}^2$, the oscillator is separable in this coordinate system, but does not admit an analytic solution in terms of usually known higher transcendental functions. In fact, the solution of the pure harmonic oscillator in $\mathbb{R}^2$ can be given in terms of Ince polynomials [39,48]. The hyperbolic system on $\Lambda^{(2)}$ also yields the cartesian system.

Furthermore, the elliptic II system on $\Lambda^{(2)}$ gives the elliptic II coordinate system in $\mathbb{R}^2$, and the Coulomb problem in $\mathbb{R}^2$ is separable in this coordinate system [49].

We have seen that the situation concerning separation of variables of these two potentials in the found coordinate system is very similar in flat space [6,10,21], on the sphere [22], and on the hyperboloid. The most significant difference being that on the sphere there are less, and on the hyperboloid more possibilities.

We have also stated explicitly the relevant Green functions of the potentials. This includes the simple and general Higgs oscillator, the Coulomb potential, and for V_3 , V_4 and V_5 in several coordinate system representations. In particular, from the spectral expansions in horicyclic coordinates, one can show with the integral representations [46, pp.732,819]

$$\mathcal{P}_{v-1/2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab} \right) = \frac{4\sqrt{ab}}{\pi^2} \cos v\pi \int_0^\infty dk K_v(ak) K_v(bk) \cos ck, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{Q}_{v-1/2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab} \right) = \int_0^\infty dp' \frac{p' \tanh \pi p'}{v^2 + p'^2} \mathcal{P}_{ip'-1/2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab} \right), \quad (5.2)$$

that the Green function for the free motion on the two-dimensional hyperboloid has the form [17,24]

$$G(u'', u'; E) = \frac{m}{\pi \hbar^2} \mathcal{Q}_{-1/2 - i\sqrt{2MR^2 E/\hbar^2 - 1/4}} \left(\frac{(x'' - x')^2 + y'^2 + y''^2}{2y'y''} \right). \quad (5.3)$$

The Green function is a function of the invariant distance $d(u'', u')$ on $\Lambda^{(2)}$ only, i.e., $G(u'', u'; E) = G(\cosh d(u'', u'); E)$. A similar consideration can be made for the corresponding path integral representations of the free motion on $\Lambda^{(2)}$ in spherical [17,19,26] and semicircular parabolic coordinates [20].

Let us add some remarks concerning potentials which are separable in the semihyperbolic coordinate system. We consider the potential ($\mu_{1,2} > 0$)

$$V_6(u) = \kappa u_0 u_1 + \frac{M}{2} \omega^2 \left(4 \frac{u_0^2 u_1^2}{R^2} + u_2^2 \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{u_2^2} \quad (5.4)$$

$$= \frac{R^2}{\mu_1 + \mu_2} \left[\frac{\kappa}{2} (\mu_1^2 - \mu_2^2) + \frac{M}{2} \omega^2 (\mu_1^3 + \mu_2^3) + \frac{\hbar^2}{2MR^2} \left(k_2^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \right]. \quad (5.5)$$

The specific features of the potential characterize it as a Holt potential plus a linear term, i.e., with an electric field [21,31]. From the flat space case [21] we know that a potential like (5.4) is separable in cartesian and parabolic coordinates. On the hyperboloid (5.4) is separable in the semihyperbolic coordinate system (3.69). The semihyperbolic system can have two flat-space limits, the cartesian and the parabolic coordinate system, however, on the hyperboloid they correspond to two realizations of the same system.

The only potential which is separable in the equidistant and semihyperbolic system is

$$V_4^{(\omega=0)}(u) = V_7(u) = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{k_2^2 - \frac{1}{4}}{u_2^2}, \quad (5.6)$$

and it turns out to be separable in eight coordinate systems, which is almost trivial. It can be exactly solved in six coordinate systems, but the difference in comparison to the free motion on $\Lambda^{(2)}$ is insignificant, and we omit these solutions.

Another potential which is separable in the semihyperbolic system has the form ($\mu_{1,2} > 0$)

$$V_8(u) = -\frac{\alpha}{R} \left(\frac{u_0}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - 1 \right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\sqrt{u_0^2 u_1^2 + u_2^2 R^2} + u_0 u_1} + \beta_2 \sqrt{\sqrt{u_0^2 u_1^2 + u_2^2 R^2} - u_0 u_1}}{2R \sqrt{u_0^2 u_1^2 + u_2^2 R^2}} = \quad (5.7)$$

$$= -\frac{\alpha}{R} \left(\frac{\sqrt{1+m_1^2} + \sqrt{1+\mu_2^2}}{\mu_1 + \mu_2} - 1 \right) + \frac{1}{R} \frac{\beta_1 \sqrt{\mu_1} + \beta_2 \sqrt{\mu_2}}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (5.8)$$

We mention this potential because in the flat space limit it yields

$$V_4(x, y) = -\frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\beta_1 \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} + \beta_2 \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (5.9)$$

which is separable in mutually orthogonal parabolic coordinate systems. Such a notion on the hyperboloid does not make sense. Two of such systems can be transformed into each other by a rotation, and hence they are equivalent. In the flat space limit, however, they yield two mutually parabolic systems, as it must be. Therefore our findings of potentials on the two-dimensional hyperboloid which are separable in more than one coordinate system can be summarized as follows:

1. We have found the generalized oscillator and Coulomb systems, each of them is separable in four coordinate systems.

2. We have found a Holt potential version on the hyperboloid, which is separable in horicyclic and semicircular parabolic coordinates. However, both coordinate systems lead in the flat space limit to the cartesian system.

3. The two other superintegrable potentials known from $\mathbb{R}^2$ could be formulated in terms of coordinates on the hyperboloid and are both separable only in the semihyperbolic systems. They yield the proper flat space limit, where the semihyperbolic system gives parabolic coordinates, and the missing separating coordinate systems emerge in this process as well.

4. We have found the simple potential $V_4(u)$ which is separable in four, respectively five (depending on the parameters) coordinate systems. The flat space limit of this potential is trivial, i.e., $V_4 \propto 1/y^2$ ($R \rightarrow \infty$), which is separable in all four coordinate systems in $\mathbb{R}^2$, let alone that the pure $1/u_2^2$ -potential only alters the corresponding radial quantum numbers in its eight separating coordinate system in comparison to the free motion.

5. We have found the potential V_5 which is separable in horicyclic and semicircular-parabolic coordinates. Its flat space limit is the linear potential, i.e., $V_5 \rightarrow \alpha x$ ($R \rightarrow \infty$), which is separable in cartesian and parabolic coordinates.

6. The potentials (5.4, 5.7) are the proper generalizations of the Holt potential and the modified Coulomb potential (5.9) of $\mathbb{R}^2$, where both potentials are superintegrable, i.e., separable in cartesian and parabolic, respectively mutually parabolic coordinate systems. However, on the hyperboloid $\Lambda^{(2)}$ they are only separable and the corresponding coordinate systems are not distinguishable from each other. They are only distinguishable in the flat space limit $R \rightarrow \infty$.

Table 3. Correspondence of superintegrable potentials in two dimensions

$V_{\Lambda^{(2)}}(u)$	#Sys- tems	$V_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x})$	#Sys- tems	$V_{S^{(2)}}(\mathbf{s})$	#Sys- tems
$V_1(u)$	4(3)	$V_1(\mathbf{x})$	3	$V_1(\mathbf{s})$	2(3)
$V_2(u)$	4(3)	$V_3(\mathbf{x})$	3	$V_2(\mathbf{s})$	2(3)
$V_3(u)$	2(1)	$\frac{M}{2} \omega^2(4x^2 + y^2) - \lambda x$	2	—	
$V_4^{(\omega=0)}(u)$	8(4)	$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\kappa^2 - 1/4}{x^2}$	4	$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\kappa^2 - 1/4}{s_1^2}$	2(4)
$V_5(u)$	2(1)	αx	2	—	
$V_6(u)$	1(2)	$V_2(\mathbf{x})$	2	—	
$V_8(u)$	1(2)	$V_5(\mathbf{x})$	2	—	

7. We cannot say for sure if we really have found all possible superintegrable potentials on the hyperboloid. For a systematic search one must solve differential equations which emerge from the general form of a potential separable in a particular coordinate system, and then change variables. Because there are nine coordinate systems on the hyperboloid which separate the Schrödinger equation, there are $8! = 40320$ of such differential equations. This is not tractable, and one has to look for alternative procedures, for instance physical arguments. In this respect, we have found the relevant potentials which matters from a physical point of view, and which are the analogues of the flat space limit $\mathbb{R}^2$. This can be summarized in Table 3, where the enumeration of the potentials in $\mathbb{R}^2$ is according to [21]; and the enumeration of the potentials on $S^{(2)}$, according to [22]. In parenthesis we have indicated the number of limiting coordinate systems for $R \rightarrow \infty$, and constants in this limit are not taken into account. We see that the correspondence for the superintegrable systems on the hyperboloid and in flat space is complete, whereas the correspondence with the sphere is not complete. Note that adding to $V_3(u)$ the (constant!) term

$\frac{\hbar^2}{2MR^2} (\kappa^2 - 1/4)$ reproduces for $R \rightarrow \infty$ the Holt potential $V_2(x)$!

8. Our discussion lacks a proper treatment of the alternative flat space limit, i.e., the limit of the two-dimensional Minkowski space, respectively the two-dimensional pseudo-Euclidean space. We do not know anything about superintegrable systems in this space. The free motion has been discussed in [20,36], and the separation of variables of the Schrödinger equation, respectively the path integral, is possible in ten coordinate systems. It is therefore desirable to construct and study appropriate superintegrable systems, an oscillator and a Coulomb potential in particular, in this space. Studies along these lines will be the subject of a future publication.

In a forthcoming publication we will deal with superintegrable potentials on the three-dimensional hyperboloid. This will include a detailed discussion of the relevant coordinate systems and the constants of motion. Concerning maximally superintegrable potentials like the oscillator and the Coulomb potential the situation is similar as in $\mathbb{R}^3$ and on the sphere, however, there are more coordinate systems which admit separation of variables for these two potentials. This property is due to the fact that on $\Lambda^{(3)}$ there exist 34 coordinate systems which admit separation of variables in the Schrödinger, respectively Helmholtz equation [54].

The situation is surprisingly different for minimally superintegrable potentials due to the subgroup structure of $SO(3,1)$, i.e., we have $SO(3,1) \supset SO(2,1)$, $SO(3,1) \supset E(2)$ and $SO(3,1) \supset SO(3)$. This means that all potentials which are maximally superintegrable in the corresponding subspace are minimally superintegrable on $\Lambda^{(3)}$, and this property increases the number of potentials considerably.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge financial support from the Heisenberg-Landau program. C.Grosché would like to thank the members of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, for their kind hospitality.

REFERENCES

1. Barut A.O., Inomata A., Junker G. — J.Phys.A: Math.Gen., 1990, vol.23, p.1179.
2. Böhm M., Junker G. — J.Math.Phys., 1987, vol.28, p.1978.
3. Demkov Yu.N. — Sov.Phys.JETP, 1954, vol.26, p.757.
4. Duru I.H. — Phys.Rev.D, 1984, vol.30, p.2121.
5. Duru I.H., Kleinert H. — Fortschr.Phys., 1982, vol.30, p.401; Phys.Lett.B, 1979, vol.84, p.185.
6. Evans N.W. — Phys.Rev.A, 1990, vol.41, p.5666.
7. Feynman R.P., Hibbs A. — Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw Hill, New York, 1965.

8. Fischer W., Leschke H., Müller P. — *Ann.Phys.(N.Y.)*, 1993, vol.227, p.206.
9. Fradkin D.M. — *Prog.Theor.Phys.*, 1967, vol.37, p.798.
10. Fris J., Mandrosov V., Smorodinsky Ya.A., Uhlir M., Winternitz P. — *Phys.Lett.*, 1965, vol.16, p.354.
- Fris J., Mandrosov V., Smorodinsky Ya.A., Uhlir M., Winternitz P. — *Sov. J. Nucl. Phys.*, 1967, vol.4, p.444.
11. Granovsky Ya.A., Zhedanov A.S., Lutzenko I.M. — *Theor.Math.Phys.*, 1992, vol.91, p.474.
12. Granovsky Ya.A., Zhedanov A.S., Lutzenko I.M. — *Theor.Math.Phys.*, 1992, vol.91, p.604.
13. Gradsteyn I.S., Ryzhik I.M. — *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1980.
14. Grosche C. — *J.Phys.Math.Gen.*, 1989, vol.22, p.5073.
15. Grosche C. — *Ann.Phys.(N.Y.)*, 1990, vol.201, p.258.
16. Grosche C. — *Ann.Phys.(N.Y.)*, 1990, vol.204, p.208.
17. Grosche C. — *Fortschr.Phys.*, 1990, vol.38, p.531.
18. Grosche C. — *J.Phys.Math.Gen.*, 1990, vol.23, p.4885.
19. Grosche C. — *J.Phys.Math.Gen.*, 1992, vol.25, p.4211.
20. Grosche C. — *Path Integrals, Hyperbolic Spaces, and Selberg Trace Formulae*. DESY Report, DESY 95-021, February 1995 (Habilitationsschrift), pp.228, to be published by World Scientific.
21. Grosche C., Pogosyan G.S., Sissakian A.N. — *Fortschr.Phys.*, 1995, vol.43, p.453.
22. Grosche C., Pogosyan G.S., Sissakian A.N. — *Fortschr.Phys.*, 1995, vol.43, p.523.
23. Grosche C., Pogosyan G.S., Sissakian A.N. — *Path Integral Discussion for Smorodinsky-Winternitz Potentials: IV. The Three-Dimensional Hyperboloid*. DESY Report, in preparation.
24. Grosche C., Steiner F. — *Phys.Lett.A*, 1987, vol.123, p.319.
25. Grosche C., Steiner F. — *Zeitschr.Phys.*, 1987, vol.C36, p.699.
26. Grosche C., Steiner F. — *Ann.Phys.(N.Y.)*, 1988, vol.182, p.120.
27. Grosche C., Steiner F. — *J.Math.Phys.*, 1995, vol.36, p.2354.
28. Grosche C., Steiner F. — *Table of Feynman Path Integrals*. To appear in: Springer Tracks in Modern Physics (1996).
29. Hietarinta J. — *Phys.Rep.*, 1987, vol.147, p.87.
30. Higgs P.W. — *J.Phys.A: Math.Gen.*, 1979, vol.12, p.309.
31. Holt C.R. — *J.Math.Phys.*, 1982, vol.23, p.1037.
32. Ikeda M., Katayama N. — *Tensor*, 1982, vol.38, p.37.
33. Infeld L. — *Phys.Rev.*, 1941, vol.59, p.737.
34. Infeld L., Schild A. — *Phys.Rev.*, 1945, vol.67, p.121.
35. Inomata A., Kuratsuji H., Gerry C.C. — *Path Integrals and Coherent States of SU(2) and SU(1,1)*, World Scientific, Singapore, 1992.
36. Kalnins E.G. — *SIAM J.Math.Anal.*, 1975, vol.6, p.340.
37. Kalnins E.G. — *Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature*, Longman Scientific & Technical, Essex, 1986.
38. Kalnins E.G., Miller W., Jr. — *J.Math.Phys.*, 1974, vol.15, p.1263.
39. Kalnins E.G., Miller W., Jr. — *J.Math.Phys.*, 1975, vol.16, p.1512.
40. Kalnins E.G., Miller W., Jr. — *J.Math.Phys.*, 1978, vol.19, p.1233.

41. **Katayama N.** — *Nuovo Cimento*, 1992, vol.B107, p.763.
42. **Kleinert H.** — *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, and Polymer Physics*, World Scientific, Singapore, 1990.
43. **Kleinert H., Mustapic I.** — *J.Math.Phys.*, 1992, vol.33, p.643.
44. **Kurochkin Yu.A., Otchik V.S.** — *DAN BSSR*, 1979, vol.23, p.987.
45. **Leemon H.I.** — *J.Phys.A: Math.Gen.*, 1979, vol.12, p.489.
46. **Magnus W., Oberhettinger F., Soni R.** — *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer, Berlin, 1966.
47. **Makarov A.A., Smorodinsky J.A., Valiev Kh., Winternitz P.** — *Nuovo Cimento A*, 1967, vol.52, p.1061.
48. **Mardoyan L.G., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M.** — *Theor.Math.Phys.*, 1985, vol.65, p.1113.
49. **Mardoyan L.G., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M.** — *Theor.Math.Phys.*, 1984, vol.61, p.1021.
50. **Meixner J., Schäfer F.W.** — *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*, Springer, Berlin, 1954.
51. **Moon F., Spencer D.** — *Proc.Amer.Math.Soc.*, 1952, vol.3, p.635.
52. **Morse P.M., Feshbach H.** — *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
53. **Nishino Y.** — *Math.Japonica*, 1972, vol.17, p.59.
54. **Olevskii M.N.** — *Math.Sb.*, 1950, vol.27, p.379.
55. **Otchik V.S., Red'kov V.M.** — *Quantum Mechanical Kepler Problem in Space with Constant Curvature*, Minsk Preprint No.298, 1983, p.47;
Bogush A.A., Otchik V.S., Red'kov V.M. — *Vesti Akad.Nauk.BSSR*, 1983, vol.3, p.56.
Bogush A.A., Kurochkin Yu.A., Otchik V.S. — *DAN BSSR*, 1980, vol.24, p.19.
56. **Peak D., Inomata A.** — *J.Math.Phys.*, 1969, vol.10, p.1422.
57. **Perelomov A.M.** — *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*, Birkhäuser, Basel, 1990.
58. **Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Vinitsky S.I.** — In: «Frontiers of Fundamental Physics», p.429—436, eds: M.Barone and F.Selleri, Plenum Publishing, New York, 1994.
59. **Schrödinger E.** — *Proc.Roy.Irish Soc.*, 1941, vol.46, p.9; *Proc.Roy.Irish Soc.*, 1941, vol.46, p.183; *Proc.Roy.Irish Soc.*, 1941, vol.47, p.53.
60. **Schulman L.S.** — *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
61. **Smorodinsky Ya.A., Tugov I.I.** — *Sov.Phys.JETP*, 1966, vol.23, p.434.
62. **Stevenson A.F.** — *Phys.Rev.*, 1941, vol.59, p.842.
63. **Vinitsky S.I., Mardoyan L.G., Pogosyan G.S., Sissakian A.N., Strizh T.A.** — *Phys. At. Nucl.*, 1993, vol.56, p.321.
64. **Winternitz P., Lukac I., Smorodinsky Ya.A.** — *Sov. J. Nucl. Phys.*, 1968, vol.7, p.139.
65. **Winternitz P., Smorodinsky Ya.A., Uhlir M., Fris I.** — *Sov. J. Nucl. Phys.*, 1967, vol.4, p.444.
66. **Wojciechowski S.** — *Phys.Lett.A*, 1983, vol.95, p.279.

УДК 539.1.076 + 621.384.6

INNOVATIONS IN ACCELERATOR TECHNOLOGY

E. Tsyganov, A. Taratin, A. Zinchenko*

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

High energy particle colliders are probably the most sophisticated machines ever built. Colliding beams have to be kept stable for many hours, and beam parameters should be preserved for delivering maximal information to the physicists. Optimization of collider performance is a very important and challenging task, due to the complexity and required precision of experiments, as well as the high cost of the operating the accelerator complexes.

We review several promising directions for improvements in high energy collider performance that have been initiated and reported in scientific publications recently, namely: extraction by means of a crystal of the beam halo from high energy colliders for use in auxiliary experiments; compensation of mutual space charge effects of collider beams on one another; intelligent beam damping schemes and application of these to feedback systems; beam parameter diagnostics by use of low energy beam probes. To facilitate these developments an efficient software model of the collider was developed and applied to study details of the performance of the collider. A computer code for tracking charged particles in the collider environment was built, and some of its applications considered. All of these studies show promise of improving collider parameters and performance. Improvement of collider operations would extend the physics reach of existing and future colliding beam accelerators, and enhance the accessibility to scarce collider facilities for experimental groups.

Коллайдеры частиц высоких энергий являются, по-видимому, одними из наиболее сложных технических устройств. Ускоренные пучки частиц должны сохраняться в ускорителе в течение многих часов, причем их параметры должны оставаться стабильными, чтобы обеспечить получение максимума информации в экспериментальных исследованиях. Оптимизация работы коллайдеров является важной и очень непростой задачей из-за большой сложности и требуемой высокой точности экспериментов, а также высокой стоимости работы ускорительных комплексов.

*State University of New York at Albany, USA

Дается обзор нескольких перспективных направлений в усовершенствовании работы коллайдеров, которые недавно были инициированы нами и опубликованы в научных журналах и сообщениях, а именно: вывод гало пучка из коллайдеров частиц высоких энергий с помощью изогнутых кристаллов для организации дополнительных экспериментов на фиксированных мишенях; компенсация влияния пространственного заряда встречных пучков на их стабильность; новые схемы гашения колебаний пучка и их применения в системах обратной связи; неразрушающая диагностика параметров циркулирующих пучков с помощью пучков частиц низких энергий. Для детального исследования этих предложений нами была разработана эффективная компьютерная модель коллайдеров, созданы компьютерные программы для расчета траекторий заряженных частиц в кристалле, а также в поле пространственного заряда, электрических и магнитных полях в условиях, характерных для коллайдеров частиц высоких энергий. Результаты исследований дают основания надеяться на возможность значительного улучшения работы коллайдеров. Это позволит расширить область физических исследований, достижимых на сталкивающихся пучках существующих и сооружаемых ускорителей, и увеличит доступность этих ускорительных комплексов для большего числа исследовательских групп.

I. BEAM HALO CRYSTAL EXTRACTION DURING COLLIDING MODE

Bent crystals provide perhaps the only possibility to combine extraction of some fraction of the proton beam with colliding experiments. Studies on steering high energy beams using bent crystals and applications of this phenomenon for beam extraction have demonstrated the feasibility of this technique [1]. Figure 1 shows the results of the first experimental observation of the channeled particle deflection by a bent crystal at Dubna. Use of this technique could provide a double purpose mode of a collider operation, with extraction of a small fraction of beam intensity. This extraction may be performed with no interference with the colliding beam experiments.

Bent crystal extraction has been successfully demonstrated on almost all high energy accelerators [2,3,4,5]. Detailed studies of crystal extraction are in progress currently at Fermilab and CERN.

Despite success of beam extraction efforts, a practical solution for crystal extraction simultaneously with colliding beam experiments was not really found until recently. Early attempts to find the mechanism of «pumping out» particles from the primary beam and delivering them to the bent crystal without interference with beam emittance characteristics have been discussed [6,7] but not yet proved experimentally.

The matter of the high efficiency beam halo extraction from colliders during colliding mode of operation by means of a bent crystal was for the first time successfully elaborated by Monte Carlo simulation in the paper [8].

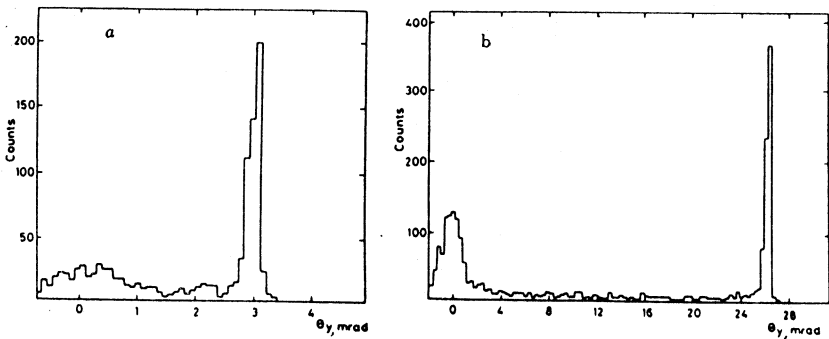


Fig.1. Angular distributions of the channeled fraction of 8.4 GeV protons outgoing from the bent crystal in the first experiment to observe bending in Dubna. For the crystal bending angle 3 mrad (a) and 26 mrad (b)

Calculations were performed for the Tevatron collider lattice. According to the studies [8] halo particles of high energy beams would be extracted from colliders with high efficiency without interference with colliding beam experiments. This would eliminate irradiation of accelerator parts by the beam halo, creating more favourable environmental situation at accelerators. The extracted beam could be used for parasitic experiments, or disposed of in an environmentally controlled manner.

The authors [8] have chosen the Tevatron lattice for the analysis because the Tevatron is the highest energy particle collider in the world today. Fermilab with rich infrastructure and scientific traditions in particle physics would be the natural center of activity of physicists in the near future, aiming also a preparation of elements of the LHC experimental detectors. Besides the rich expertise in colliding beam detectors, Fermilab could provide test beams of the highest energy. That is essential for a healthy R&D program in detectors for colliding beam experiments, especially for calorimetry. High energy particle beams at Fermilab should be considered as an essential contribution to the future LHC program.

Conventional extraction and colliding beam experiments are technically incompatible. Fermilab colliding beam program has an absolute priority, and therefore the fixed target mode of Tevatron operation is very strictly limited. Fermilab Main Injector extracted beam, 120 GeV, when it will be available, still cannot provide TeV beams for R&D in calorimetry.

The authors [8], based on the computer simulation, show how to extract 1 TeV beam halo protons from the Tevatron with high efficiency. More than 10^{-7} protons per second, now lost on scrapers and collimators, can be extracted

from Tevatron using bent crystal in a «passive» mode, without interference with colliding beam experiments. This would reduce background in the colliding beam detectors. The extraction efficiency can be as high as 99%. Bent crystal deflectors would also work well for the LHC collider, where background radiation due to a beam halo loss could be reduced by the factor of 100. The B-physics fixed-target experiments with the extracted LHC beam halo could be performed.

A. Resonance Excitation of Longitudinal Beam Halo. The main obstacle for crystal extraction is a very small impact parameter of a halo beam particle when it hits a bent crystal. Even if the crystal edge could be polished and aligned to the circulating beam with precision better than one micrometer, this effective septum thickness still is much larger than the typical impact parameter for a halo particle which impinges the crystal during beam loss, and therefore the septum cannot be effective. A small average impact parameter for particles striking the crystal could also worsen crystal radiation damage. For the device to be practical at least several micrometers are required for the mean impact parameter.

When one tries to excite beam halo particles using some kind of beam rf gymnastics and send them to the bent crystal septum [6], it is difficult to guarantee that the core of the beam is not disturbed and a beam emittance is preserved. Nevertheless, we showed by computer simulation [7] that perturbation pulses in the main rf voltage, if in resonance with the synchrotron oscillations of beam halo particles, can effectively eject the particles out of the bucket without perturbing the beam core. This method can be used to place the beam halo particles onto a bent crystal for extraction from an accelerator if the crystal will be located in high-dispersion region and thus particle momentum deviations can be translated into transverse displacements.

Suppose the driven halo particles are initially located in the δ - l phase space about (δ_p, l_p) . Here $\delta = \Delta p / p_s$ is the relative momentum deviation from the synchronous momentum p_s , and l is the longitudinal displacement from the bunch center. Each time the driven halo particles complete one synchrotron oscillation, the perturbing pulses are switched on with the sign of δ_p . Thus the perturbed halo particles jump onto an orbit of larger amplitude after each synchrotron oscillation. Figure 2a illustrates the effect of one of the perturbing pulses in the δ - l space on the trajectory of the driven halo particle. The rf phase ϕ_p for the perturbing pulse is connected with l_p by the relationship

$$\phi = \phi_s + \frac{2\pi h}{C_s} l,$$

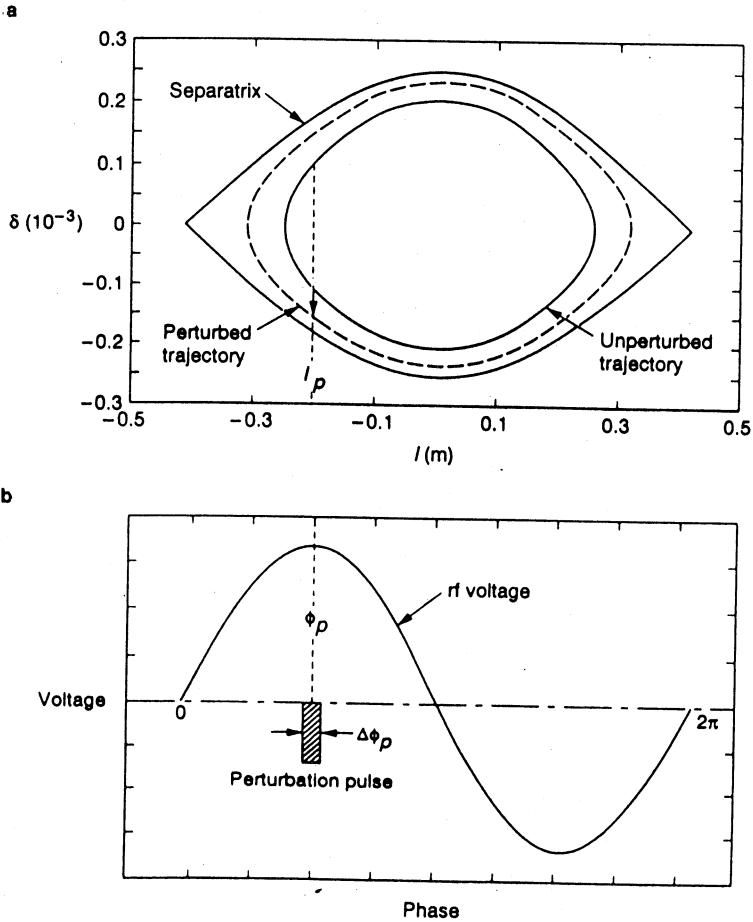


Fig.2. Schematic picture of the process of ejecting beam halo particles by means of synchronized rf voltage pulses. (a) Synchrotron orbits in the $\delta - l$ phase space before and after the action of a perturbation pulse. (b) Sinusoidal rf voltage and the position in rf phase of perturbation pulses

where ϕ_s is the synchronous phase, C_s is the circumference, and h is the harmonic number of the accelerator. The rf phase ϕ_p and interval $\Delta\phi_p$, in which the perturbing pulses are turned on are shown in Fig.2b. To act on halo particles only, the perturbing pulses, $\Delta\phi_p$, need to be short compared to the rf period.

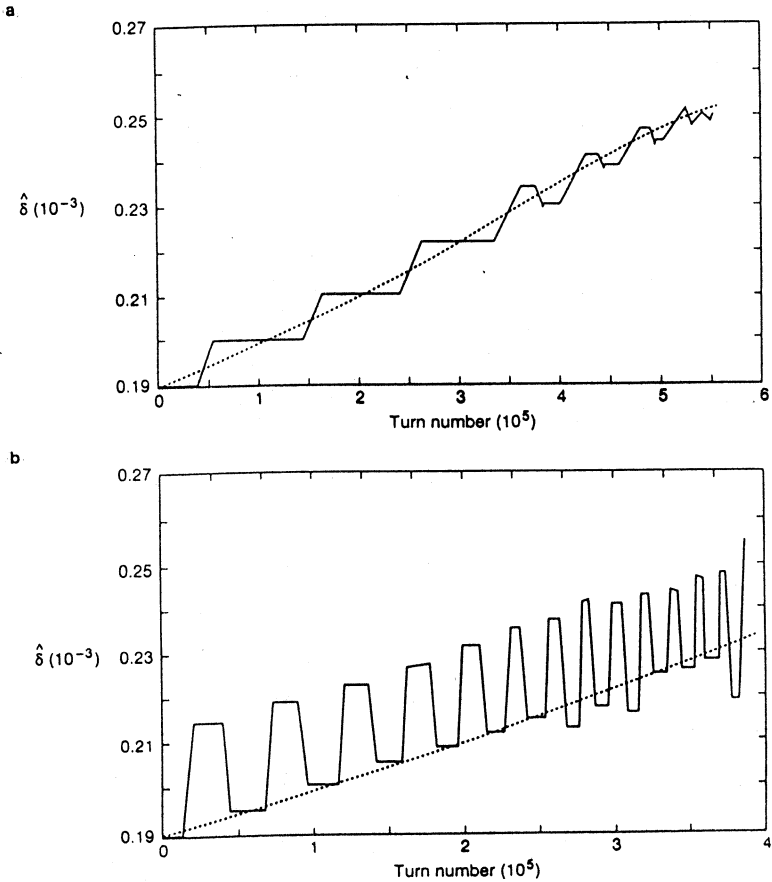


Fig.3. Relative momentum deviation amplitude $\hat{\delta}$ as a function of turn number for a halo particle driven by a multiple resonance sequence (solid lines) and by a single resonance sequence (dotted lines). For the pulse duration 13.3 ps (a) and 267 ps (b)

Because the rf voltage varies sinusoidally in time, the period of a synchrotron oscillation depends on the amplitude of the oscillation. Thus, to increase monotonically the synchrotron amplitude of driven halo particles, the time interval between two successive perturbing pulses has to follow the increase of the synchrotron period. The time sequence of perturbing pulses is determined by the initial location (l_p, δ_p) of the driven halo particles and the

pulse voltage V_p . This sequence when only one perturbing pulse is turned on during a synchrotron oscillation was called a single resonance sequence. Figure 3 shows the growth of the synchrotron amplitude $\hat{\delta}$ of a halo particle driven by a single resonance sequence.

A single resonance sequence determined by the phase space point (l_p, δ_p) captures and ejects only the particles whose initial phase space locations are near that point. To eject significantly more of the particles near the synchrotron orbit passing through (l_p, δ_p) the pulse sequence can be repeated for a number of subsequent turns. This number N_{on} should be less than the number of turns for the halo particle to move along its unperturbed orbit to $(l_p, -\delta_p)$. Otherwise, compensation of the pulse action will occur.

The resulting sequence obtained by repeating the single resonance sequence was called a multiple resonance sequence. Figure 3 shows the growth of momentum deviation amplitude $\hat{\delta}$ due to a multiple resonance sequence. In contrast to the nearly linear growth in the single resonance case, the amplitude growth is not monotonous in the multiple resonance case. However, for pulses both with a small duration (a), and with a large one (b) the average rate of the amplitude growth appears to follow the growth rate in the single resonance case. At that with long perturbing pulses, the multiple resonance sequence is also effective in ejecting the halo particles with $\hat{l} > l_p$ whose initial momentum amplitudes are not near $\hat{\delta}_p$.

So, with the accurate positioning of perturbation pulses in rf phase, one can eject particles only from the tail of the beam without perturbing the core. The ejection efficiency and rate may be regulated by the pulse voltage, the pulse duration, and the resonance repetition number. Moreover, it is possible to act either on a single bunch or on a few bunches simultaneously.

The longitudinal tails of the bunch can be resonantly excited also by the transverse kicker to increase betatron oscillation amplitudes and thus bring particles onto a bent crystal for extraction. Here we review simulation results on a mean impact parameter versus extraction rate for the Tevatron [9]. Kicks were simulated as short electric pulses applied to the tails of a bunch, to guarantee that the core of the bunch will not be disturbed. Applying a kick in a resonant mode with $|\Delta Q| < 0.25$, i.e., approximately each seventh turn, the authors studied an impact parameter distribution at the crystal.

The scheme of the Tevatron is presented in Fig.4. For the simulations, the crystal position was chosen at the E853 [5] crystal position at C0 on the radius of 3 mm outside the beam position. A simple linear model of the Tevatron was used, a matrix transformation of particle parameters — X, X', Y, Y', E, Z — from one location to another. Locations used were present RF position (a kicker was

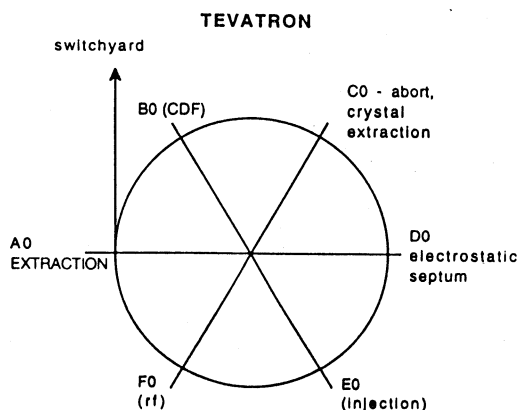


Fig.4. The scheme of the Tevatron

also placed there), B0 and D0 positions, where a head-on beam-beam interactions were simulated, and the crystal position in C0. Initial particle parameters were simulated by Monte Carlo according to the Tevatron emittance parameters. The model was built initially for the SSC collider and was adopted to the Tevatron lattice.

According to the simulation, a mean impact parameter is strongly dependent on the kick value applied. Figure 5 illustrates this. Extrapolation

of data to the mean extraction time of 10^6 s, which corresponds to 10% of full beam intensity to be extracted in about 24 hours, predicts a mean impact parameter less than $0.01 \mu\text{m}$, too small to make a simple crystal extraction scheme to be practical. Of course, a mean impact parameter value could be dependent on a beam excitation mechanism. However, we are very skeptical to the opinion that some more sophisticated RF gymnastic could be found in colliders which provides a good impact parameter and at the same time satisfies non-interfering requirements. We believe that the good solution of this problem lies in quite different approach [8].

B. Ultrathin Crystal Scatterer — Crystal Mirror. The dominant transverse emittance growth mechanisms predicted for the Tevatron colliding beams are intrabeam scattering and beam-beam interaction. The quality of the linear aperture generally defines long-term beam stability and formation of the beam halo. The head-on beam-beam effect is the major source of nonlinearities. The strongly nonlinear beam-beam force excites high order betatron resonances causing particles to diffuse into the tails of the transverse distributions and to be lost.

For the Tevatron in the colliding mode the measured value of the particle loss on scrapers placed at 10σ from the design orbit, where σ is the rms transverse size of the beam, is about 0.4×10^7 protons per second for 10^{12} particles in the beam [10]. This corresponds to a beam lifetime of about 70 hours. The projected proton intensity for the Tevatron collider is 5.4×10^{12} [11], which implies proton loss of about 2×10^7 protons per second. It was

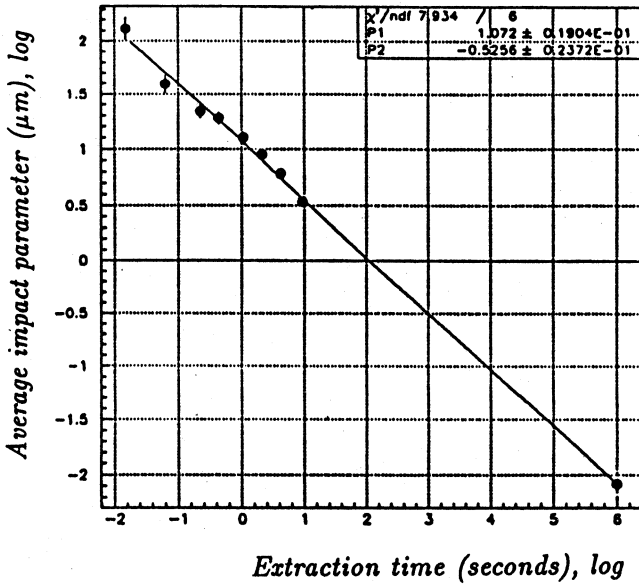


Fig.5. Interpolation of the simulation data for the resonance transverse excitation of the longitudinal halo of the Tevatron beam to the extraction time of 10^6 s. Corresponding mean impact parameter is equal to $0.0083 \mu\text{m}$

shown in [8], that practically all these particles could be channeled in a bent crystal and delivered to the extraction line.

As was mentioned already, there is a serious difficulty with delivering the beam into the extraction septum. If we suppose that the halo particle moves away from the beam center at a typical rate of about 0.1 mm per hour, we get a one turn step size of less than the size of an atom [12]. Of course, an accelerator is not such a precise machine. Nonlinear effects due to multipole magnetic components produce turn-to-turn variations of a particle trajectory. Vibrations of quadrupoles, dipole power supply ripple and other noise sources produce a beam position jitter. This could produce an impact parameter at a crystal perhaps of an order of fraction of micrometer. Still, a simple crystal extraction scheme would not be effective under these conditions because of the large ratio of septum thickness to mean impact parameter. Radiation damage to the crystal, which usually does not present a problem [13], in this case could be worsened because of the very high spatial density of radiation, and would reduce the channeling transparency of the crystal.

Placing a crystal at a radial distance of $16-20 \sigma$ could partially solve the problem. At this distance particles have stable trajectories for only several turns and are well scattered in space. However, this is not really feasible because scrapers must be placed at about 10σ to control the beam loss.

One could overcome the difficulty of delivering halo beam particles well into the crystal septum by using a crystalline scatterer. This idea and its application to the SSC were examined in 1991 [14]. Instead of impinging directly on the bent crystal, a particle first hits a thin crystalline scatterer placed at the proper radial distance. To scatter a particle in the horizontal direction, crystalline planes are placed vertically.

The crystal which thickness equals a quarter of oscillation wavelength of particles in the planar channel works as a good scatterer. It broadens the angular distribution of incident beam particles. However, a large part of incident particles gets small angular deflections, smaller than the critical channeling angle. They will form a maximum at the edge of the crystal deflector when such a scatterer is used to throw circulating particles over the imperfect layer at the bent crystal surface.

It was proposed in [8], as a development of an idea of a crystalline scatterer [14], to align a scatterer along the beam with an angular offset of about $1/2$ of a critical angle, which makes the scatterer a «crystal mirror». Planar channeling in such a mirror gives particles a kick, in a proper direction, of about a critical angle of channeling, $17 \mu\text{rad}$ for a tungsten (110) plane. The optimal thickness of the crystal mirror in this case is one-half of a channeling wavelength, because, in the first approximation for the parabola-like plane potential this thickness images a parallel beam into a parallel beam. For the tungsten (110) plane and a proton energy of 900 GeV this thickness is about $24 \mu\text{m}$, and about $42 \mu\text{m}$ in the case of silicon. For a beam with small angular divergence, more than half of the incident particles are reflected in one pass, and this probability rises due to multipass mode.

When a crystal is used as a mirror to throw halo particles of a circulating beam over the crystal surface edge, the maximum of the impact parameter distribution will be far enough from the crystal edge. Therefore, a particle loss on the imperfect layer becomes smaller than with amorphous scatterer or with crystal scatterer of $1/4$ wavelength [11]. The remarkable peculiarity of such a scatterer is the small thickness needed to give the particle a large angular deflection, because scattering of particles occurs when the contributions of crystal atoms are added coherently. It is important because the particle loss due to inelastic interactions with scatterer atoms will be considerably smaller in this case. Besides, a crystalline scatterer provides an angular deflection in only one plane, perpendicular to the crystallographic planes.

An amorphous scatterer is less effective than the crystalline scatterer because of the much larger thickness required. To provide the same scattering

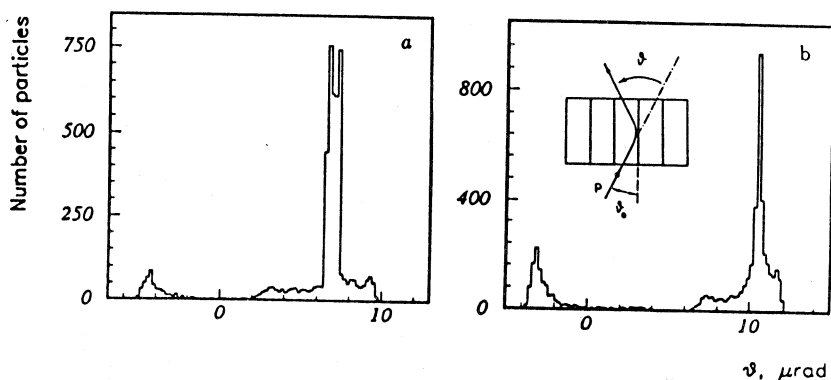


Fig. 6. Illustration of using ultrathin crystal as a crystal mirror. Angular distributions of particles outgoing from the silicon crystal for the cases when its (110) planes are tilted by $3.5 \mu\text{rad}$ (a) and $5.25 \mu\text{rad}$ (b) relative to the direction of the incident beam of protons with energy 900 GeV. The insertion in (b) shows the trajectory of particle reflected by the crystal plane

angle, $17 \mu\text{rad}$, a 0.4 cm thick amorphous tungsten scatterer would be required. The rate of nuclear interactions in such a scatterer would amount to about 7%, which would preclude to use such a scatterer in a multipass mode. Besides, it always gives a maximum of an impact parameter distribution at the edge of the crystal.

Figure 6 demonstrates angular distributions of outgoing particles for different tilt angles of 900 GeV parallel proton beam with the silicon scatterer of $42 \mu\text{m}$ thickness (a Monte Carlo simulation). The large part of the particles are mirror reflected, their deflection angles are twice more than the tilt angle. Figure 7 presents the mean deflection angle of protons versus the tilt angle of the silicon scatterer. One can see the ability and limitations of the «crystal mirror» technique.

At a typical thickness of 20–40 μm angular miscut, nonflatness, other crystalline defects on the crystalline scatterer do not present serious problems. However, to reduce a problem one can use a very thin amorphous target as a prescatterer. A 20- μm thick amorphous tungsten prescatterer is a proper choice for the Tevatron, providing about $1 \mu\text{rad}$ angular kicks for particles in both planes due to multiple scattering. At a radial position of 10σ it gives a mean impact parameter at the crystalline scatterer of about $1 \mu\text{m}$. Naturally, the amorphous target has no edge problems similar to the crystalline one. If a particle did not pass through the full thickness of the prescatterer at the first strike, initial angular disturbance due to multiple scattering will be increasing

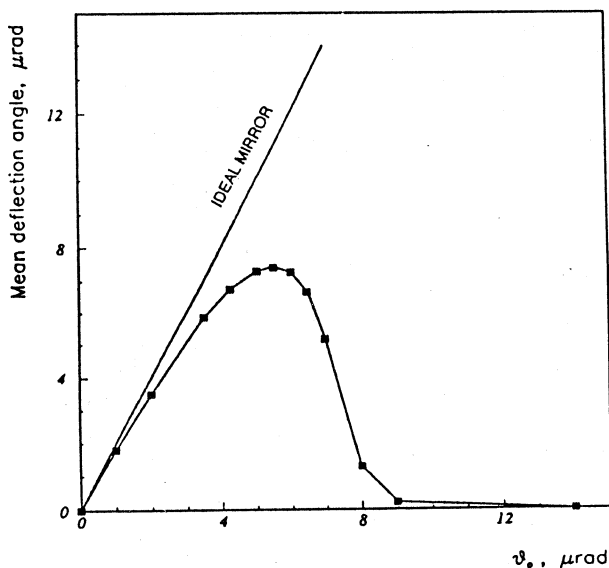


Fig.7. The mean deflection angle of 900 GeV protons by the silicon scatterer *versus* its tilt angle. The straight line corresponds to the case of an ideal mirror

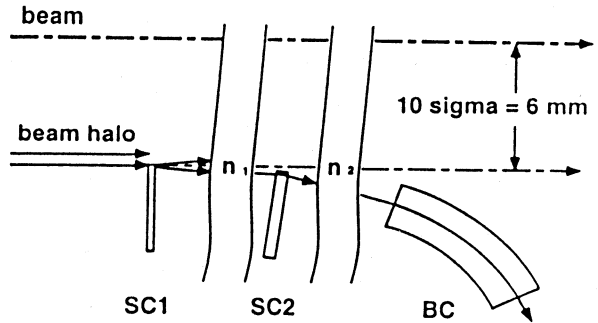
with the subsequent passes until, finally, a particle will go into the bulk of a prescatterer material and undergo a full multiple scattering.

C. Beam Halo Extraction Scheme and Simulation Results. During fixed target runs, the electrostatic septum placed in D0 straight section of the Tevatron provides a 50 μrad kick and drives 900 GeV protons to the extraction Lamberton magnets in A0. Therefore, a 100 μrad bend in a crystal septum would be quite enough to extract beam halo particles. Placed at radial distance of 10 σ , a crystal septum gives a particle an angular kick of about 10 rms beam divergence, therefore providing a necessary separation of its trajectory from the main circulating proton beam.

The authors [8] made quite detailed Monte Carlo simulation of the Tevatron beam halo extraction. The location of the bent crystal was chosen again at the C0 straight section at the azimuth of E-853 experiment [5]. Here we remark that although all calculations have been made for the C0 section, results on the bending efficiency are generally applicable to the most of the azimuthal positions in the Tevatron.

The scheme of the extraction is presented in Fig.8. The extraction system could be placed either in the horizontal or in the vertical plane. The extraction

Fig.8. The diagram of crystal extraction. SC1 — amorphous prescatterer, SC2 — crystalline scatterer, BC — bent crystal, n — number of turns necessary for a particle to hit the next target. SC1: Scatter foil 20 μm W; SC2: Crystal foil 42 μm Si; BC: Bent Crystal 5 mm Si. n_1 : number of turns to hit crystal foil, typically about 300. n_2 : number of turns to hit bent crystal, typically 7–20. SC1, SC2, BC are mounted on an optical table and aligned with tolerances about 1 μm



device consists of an amorphous prescatterer, SC1, a crystal scatterer, SC2, and a bent crystal septum, BC. Although the most efficient azimuthal positions for all three extraction elements would be different for each element, the same azimuthal position for all of them was used in studies to simplify the calculations and present a more practical case. In the simulation, the crystal scatterer was placed immediately behind the bent crystal in the beam direction, and the amorphous prescatterer was placed immediately behind it. The radial position of the SC1 was chosen to be 6 mm, i.e., 10σ . Typically, a 20 μm thick amorphous tungsten prescatterer SC1 was used with an rms multiple scattering angle of 1 μrad . The inner edges of the crystal scatterer SC2 and the bent crystal BC would be additionally shifted from the beam orbit. The radial positions of SC2 and BC were varied to obtain an optimum for the extraction. The results are typically obtained for the case with the bent crystal radial offset of 15 μm relative to the SC2, that is close to optimal with respect to the loss in an imperfect surface layer. The authors used a geometry in which particles were deflected in the horizontal plane.

Beam dynamics in the accelerator enhances performance of the bent crystal as an extraction device. Due to very slow transverse diffusion, beam halo particles that encounter the crystal extraction system have a very narrow angular spread (quasi-parallel beam), therefore providing a very high channeling efficiency. In addition, due to the small scattering angles involved, a scattered particle will make multiple passes through the bent crystal, increasing the probability of channeling. These two circumstances drive up the extraction efficiency significantly.

The particle orbits were calculated for the two-dimensional (X-S) case. If the halo formation is going independent in the X- and in the Y-plane, only half a halo will be extracted by one crystal and another half will be scraped by the

Y scraper. In this case one should place a similar extraction system in the *Y*-plane to extract all the halo particles. The authors believe, however, that the halo particles of large amplitude oscillations in the *X*-plane have large amplitudes also in the *Y*-plane, and *vice versa*. In this case a bent crystal extraction in one plane will work as an efficient drain for all the halo particles.

Particle trajectories both in the crystal scatterer SC2 and in the bent crystal BC were calculated by a numerical solution of the equations of motion in the potential of bent atomic planes. After a step size, which is much smaller than the wavelength of a particle oscillation in the channel, the change of transverse velocity due to multiple scattering was computed. More details of these simulations can be found in reference [15]. The model describes well all the existing experimental results on channeling with bent crystals.

A full simulation code was used that combines collider simulation with tracking particles in a crystal. The code is based on previous studies [16] and was adopted for the Tevatron lattice.

To simulate the beam halo, initial values X , X' of particles were generated at the bent crystal position using a uniform phase distribution and a flat distribution from 6 mm to 6.0001 mm for the particle amplitudes X_m . Typically, 1000 particles were generated for each version of initial conditions. After the first collision with the amorphous prescatterer SC1, which gave a particle an angular rms kick of 1 μ rad, a particle traveled typically many turns before it hits the crystal scatterer SC2, placed at a radial position of 6.001 mm, i.e., outward from SC1 by 1 μ m. A full turn transfer matrix for the *X*-plane was used to transport particles through the accelerator ring.

As was mentioned before, the authors use a crystal SC2 as a crystalline mirror with a tilt angle of about 1/2 of the critical channeling angle. Figure 9 shows typical impact parameter distributions at the bent crystal position for the cases when the silicon (a) and tungsten (b) scatterers were used. The scatterer SC2 clearly works as a crystal mirror. The distribution maxima are far enough from the crystal edge. So, the thin tungsten crystalline mirror increases the mean impact parameter at the bent crystal to about 200 μ m.

Most of the particles that hit the bent crystal BC can be captured into channeling regime by the bent planar channels. These particles are deflected at a bending angle if they are not dechanneled due to multiple scattering by crystal electrons and nuclei, and do not experience nuclear interactions. Another part of particles will experience multiple scattering in the crystal (that is rather small) or could be lost due to inelastic nuclear interactions. After multiple scattering in the bent crystal, particles continue to travel around the accelerator and strike the bent crystal again. The authors [8] assume that a particle is extracted if it leaves from the crystal at the crystal bending angle, within the critical angle of channeling. It was also assumed that the imperfect layer 0.5 μ m thick exists at

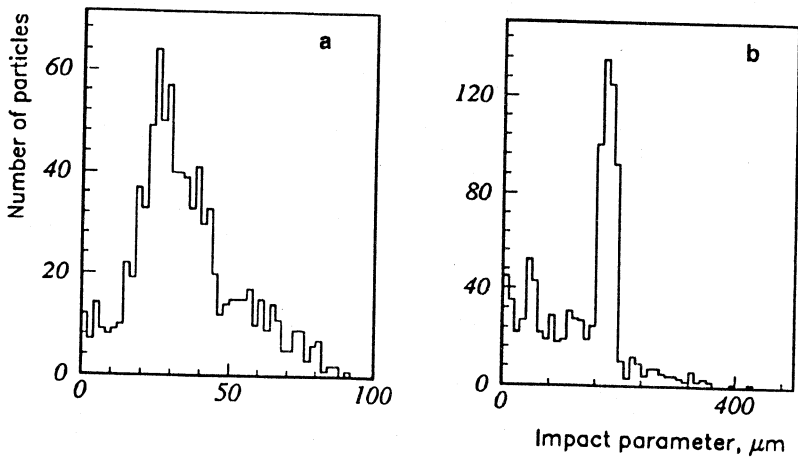


Fig.9. The impact parameter distributions of protons at the bent crystal when different crystal mirrors SC2 were used: *a* — silicon, *b* — tungsten

the crystal surface. These imperfections can include short planar channels due to a crystal miscut or surface planar channels with shorter dechanneling length than in the body of the crystal. These give particles large angular deflections, but do not allow them to be extracted. It is probably a stricter limitation than in reality.

The calculations were continued until all the particles end the process being extracted, or experience a nuclear interaction, or being lost in the imperfect surface layer, or dechanneled and lost in the accelerator.

Cooling the bent crystal allows one to reduce dechanneling and therefore the particle losses in the crystal. The results of simulation presented below for the bending angle of $100\ \mu\text{rad}$ and a 5 mm long silicon crystal were obtained for the case when the crystal was cooled to 4K. For the optimum orientation angle of the bent crystal, which is about $4.5\ \mu\text{rad}$, the extraction efficiency was 0.988. For comparison, in the case without crystal scatterer, i.e., when the tungsten amorphous prescatterer was used only, the extraction efficiency was equal to about 60%. It is much smaller yet for the case of a bent crystal alone due to larger particle losses in the imperfect crystal layer.

The fraction of protons extracted at the first passage through BC decreases fast with the crystal disorientation, Fig.10*a*. However, a total extraction efficiency decreases less than 10% in the angular range of $10\ \mu\text{rad}$ due to the contribution of multiple passages of particles through the crystal deflector. Figure 10*b* presents the extraction efficiency versus SC2 orientation. Again, there is no sharp efficiency dependence on SC2 orientation, due to multiple passages

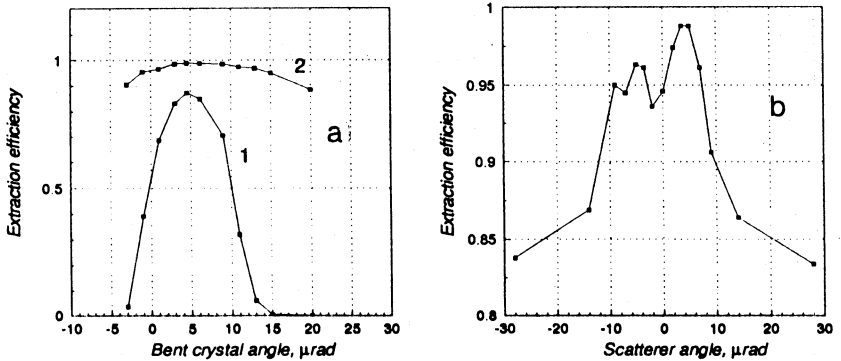


Fig.10. Extraction efficiency *versus* bent crystal orientation (a), curve 1 — first hit extraction, curve 2 — multipass extraction, and *versus* crystal scatterer orientation (b)

through the crystal deflector BC. However, if one needs to reduce particle loss during extraction to the level of less than 10%, a careful orientation of SC2 should be done because width of local maxima is of about a channeling critical angle. The left local maximum in Fig.10b is suppressed in comparison with the right one because BC orientation for these calculation was optimized for the right one.

The radial offset of the bent crystal BC relative to the crystal scatterer SC2 could be also important to get the highest extraction efficiency. There is no strong efficiency dependence when this offset is bigger than 5 μm . For small offset of about 1 μm there is a large fraction of particles which are not mirror reflected in SC2. They hit the bent crystal near its inner edge. This leads to the efficiency decrease because of the particle loss in the imperfect layer.

A 100 μrad bend was considered as the most efficient. Extraction efficiency was studied also for a 600 μrad bend and for a 3 mrad bend, and happen to be 0.981 and 0.840, correspondingly.

II. BEAM IMPROVEMENTS AND BEAM DIAGNOSTICS

A. Collider Model. Few years ago a Monte Carlo computer code was developed [17] to simulate the decoherence of beam oscillations in the SSC collider due to the tune spread generated by the head-on beam-beam interaction. The code was proven to be a reliable tool in studies of major beam dynamics in colliders and recently was successfully applied to the LHC. The results of the simulations [17] were compared with previous theoretical estimates on the decoherence time [18], and sufficient disagreement was found.

In a collider, there exist many external circumstances in which the centroid of a circulating beam is displaced from the design orbit. If particle motions are linear, the displaced beam will undergo betatron oscillations as a whole (coherently) because all particles in the beam have the same tune, defined by the number of betatron oscillations in one revolution. However, nonlinearities in the machine can cause different particles to have different tunes, i.e., can generate a tune spread in the beam. When this is the case, the betatron motions of particles in a displaced beam will not be coherent, and the so-called phase mixing or decoherence results. Eventually, the phase space distribution of the beam will approach an equilibrium with the beam centroid returning to the design orbit, and the beam size (emittance) enlarged. For the SSC Project, the tune spread was primarily generated by the nonlinear Coulomb force experienced by the two counter-rotating beams when they collide at the interaction points, i.e., the so-called head-on beam-beam interaction.

In the paper [17], using the so-called weak-strong model, the authors simulated the head-on beam-beam interaction for the SSC Project in the two low- β IRs and estimated the decoherence time of an initially displaced beam in the presence of the beam-beam interaction.

Particles were tracked in the four-dimensional phase space (X, X', Y, Y') using a linear lattice for the SSC collider. Three locations in the lattice have been considered: the two interaction points IP1 and IP2, and the location M where the beam positions are measured. The Table lists the relevant lattice parameters at these three locations.

The initial values of X, X', Y, Y' of the particles were generated at the location M using Gaussian distributions with a normalized emittance of $\epsilon_N = 1 \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ for both X and Y directions. The initial rms beam size in one

Table. SSC Project lattice parameters at locations IP1, IP2 and M

	IP1	IP2	M
S	36 947.925 m	39 467.925 m	86 525.550 m
α_x	- 0.003	- 0.015	0.115
β_x	0.501 m	0.502 m	427.477 m
α_y	- 0.024	0.001	- 0.495
β_y	0.505 m	0.493 m	533.929 m
Q_x	52.022	56.275	122.735
Q_y	51.138	55.385	121.753

S : path length; α, β : usual Courant-Snyder parameters; Q_x, Q_y : tune advances. The total tune advances in one revolution are: $\nu_x = 123.285$ and $\nu_y = 122.265$.

direction is then $\sigma = 140 \text{ } \mu\text{m}$. Once generated, the initial beam was displaced horizontally by an amount ΔX_0 , i.e., for every particle $X_i \rightarrow X_i + \Delta X_0$. Three transfer matrices were then used to carry the particles once around the collider ring: from the location M through the interaction points IP1 and IP2, and back to the location M. Typically 10,000 particles were tracked for 5,000 turns. At the interaction points, particles were given kicks due to the Coulomb force between the particle and counter-rotating bunch, so that their angles were changed to

$$X' \rightarrow X' + \Delta X', \quad Y' \rightarrow Y' + \Delta Y'. \quad (1)$$

The kicks, $\Delta X'$ and $\Delta Y'$, were calculated using the weak-strong model in which the beam under consideration is regarded «weak» and the counter-rotating beam, unperturbed by the weak beam, is regarded «strong». Assuming that the particle distribution in the strong beam is a round Gaussian, i.e., the beam sizes in X and Y directions are the same, the kicks are given by [19]

$$\begin{bmatrix} \Delta X' \\ \Delta Y' \end{bmatrix} = \frac{2N_b r_p}{\gamma_p} \frac{1}{X^2 + Y^2} \left(1 - \exp \left(-\frac{X^2 + Y^2}{2\sigma^2} \right) \right) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

where N_b is the number of particles in a bunch of the strong beam, r_p the classical proton radius, γ_p the Lorentz relativistic factor for a 20 TeV proton, and σ the rms beam size at the low- β IPs. The authors have used $N_b = 0.8 \times 10^{10}$ and $\sigma = 5 \text{ } \mu\text{m}$ in accordance with the SSC baseline design. In the formula (2) X and Y are the real positions of particles in the weak beam with respect to the design orbit, which is fixed and coincides with the beam centroid of the strong beam.

After each turn, at the location M, the authors calculated the beam centroid in phase space

$$X_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad X'_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X'_i, \quad (3)$$

and the beam emittance relative to the beam centroid

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N (\gamma \hat{X}_i^2 + 2\alpha \hat{X}_i \hat{X}'_i + \beta \hat{X}'_i^2), \quad (4)$$

where $\hat{X}_i = X_i - X_c$, $\hat{X}'_i = X'_i - X'_c$, $\gamma = (1 + \alpha^2)/\beta$, and N is the number of particles being tracked. As we will see below, this relative-to-centroid beam emittance will grow and reach a maximal value in the decoherence process.

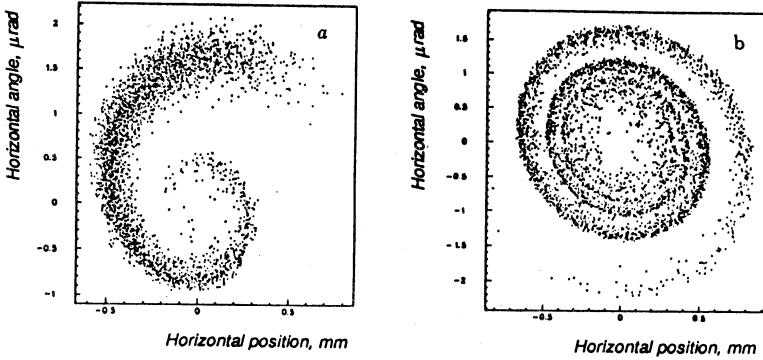


Fig.11. Distributions of the beam in phase space after 1000 turns (a) and 5000 turns (b). Initial horizontal displacement of the beam $\Delta X_0 = 500 \mu\text{m}$

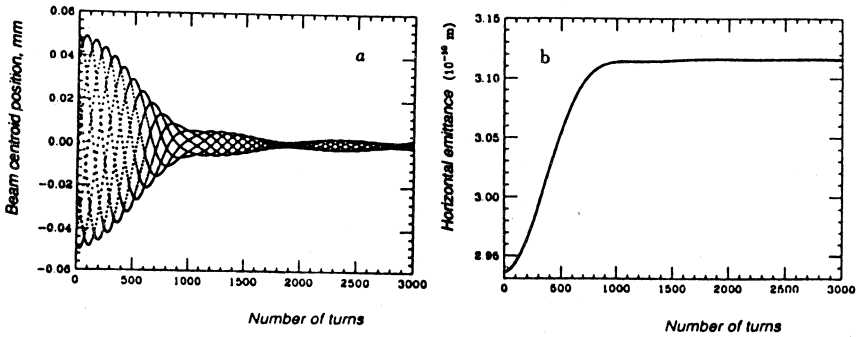


Fig.12. Oscillations of the beam centroid X_c (a) and growth of the relative-to-centroid beam emittance $\hat{\epsilon}$ (b) due to the decoherence process after an initial beam displacement of $50 \mu\text{m}$

Hence its growth profile is used in the following to characterize the time scale of the decoherence process.

To illustrate the decoherent process due to the beam-beam interaction, we show in Fig.11 the phase space distributions of the beam at 1000 and 5000 turns after its initial displacement of $\Delta X_0 = 500 \mu\text{m}$. Here we see that the beam distribution in phase space is being homogenized. The authors [17] show the time evolution of the centroid position X_c and the beam emittance $\hat{\epsilon}$ in Fig.12a,b respectively for an initial beam displacement of $\Delta X_0 = 50 \mu\text{m}$. Here we see that, as the beam decoheres, X_c oscillates with decreasing amplitude and eventually

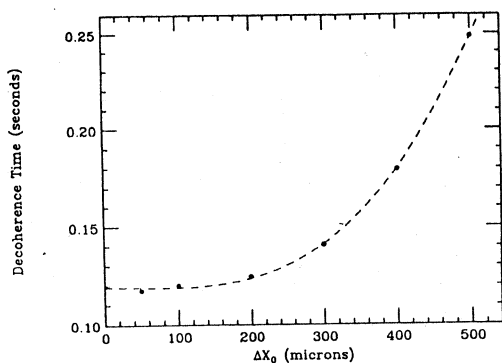


Fig.13. Decoherence times as a function of the initial beam displacement. Circles are the values obtained from the emittance growth profiles using the definition described in the text. The dashed curve is a polynomial fit to guide the eyes

settles around zero (the design orbit), and that $\hat{\epsilon}$ increases monotonously (on the time scale of a few turns) and finally approaches a steady-state value. Both figures clearly indicate that a new equilibrium is being reached in the beam after an initial displacement. Shown in the figures is typical what will occur during the decoherence process, regardless of the amount of the initial displacement. As discussed earlier, phase mixing of particles due to the tune spread generated by the beam-beam interaction has lead to a new equilibrium in the beam.

It is convenient to use the evolution profile of $\hat{\epsilon}$ to determine the time scale of the decoherence process or the decoherence time. The authors define the decoherence time to be the time or the turn number at which $\hat{\epsilon}$ reaches the midpoint between the initial and final values. The decoherence time so defined and its dependence on the initial beam displacement is shown in Fig.13. It appears that the decoherence time remains fairly constant (about 400 turns or 0.12 seconds) for small beam displacements and increases rapidly when the beam displacement exceeds 1.5σ .

It was reported in [18] that the decoherence time is approximately 0.8 seconds for the SSC. This seems in serious disagreement with our simulation results [17], where it was about 0.12 seconds. Because the decoherence time is an important parameter in the design of feedback systems, it should be estimated carefully. After we pointed out the discrepancy, a more detailed theoretical calculation [20] showed good agreement with our simulation.

B. Compensation of the Beam-Beam Effect in Proton-Proton Colliders.

As it was already mentioned, the head-on beam-beam effect is the major source of nonlinearities in high energy colliders. Such a nonlinearity imposes strict limits on the collider luminosity due to the beam instability. The head-on beam-beam instability remains as the most fundamental luminosity limitation for proton-proton colliders. The strongly nonlinear beam-beam force excites high order betatron resonances, so particles diffuse into the tails of the transverse distributions and get lost. For the SSC collider Project the beam-beam

interaction luminosity limit was about $3 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, i.e., well above the design luminosity of $10^{33} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. However, the tune spread generated by head-on beam-beam interactions causes fast decoherence of the betatron oscillations [17] and, therefore, imposes more stringent requirements on any feedback system. This was especially important for such a low emittance machine as was in the SSC Project. For the LHC collider the beam-beam interaction luminosity limit is about $2.5 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, i.e., still above the design luminosity of $1.0 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, but this gap is already not as big as was for the SSC Project. Therefore, for the LHC collider a solution for reducing the head-on beam-beam effect is important.

The head-on beam-beam effect in proton-proton machines might be compensated, under certain conditions, by collisions of the bunch on each turn with a space charge of the opposite sign, for example, with a low energy electron beam. Originally, the idea of a beam-beam effect compensation was suggested in [21].

An ideal solution for compensation of the beam-beam effect in proton-proton machines is an instantaneous collision of a proton bunch with a counter-rotating beam of negatively charged particles having the same parameters as a counter-rotating proton bunch. In this case the angular kick delivered to each primary proton by the space charge of the counter-rotating proton bunch would be exactly canceled by the kick delivered by the space charge of the compensating beam. A low energy electron beam could be proposed as a compensating beam. It is important that the compensating beam be formed with the same two-dimensional transverse coordinate distribution as the proton bunch. The longitudinal profile of the compensating beam is not very important, because the angular kick delivered to the primary proton by the compensating beam could be accumulated along the length of the available collision region (about two meters for the SSC Project and the LHC), which is still short in comparison with a betatron wave length.

Instead of a compensating collision point placed immediately after the proton-proton collision, one can place the collision point in a more accessible location with a betatron phase advance relative to the proton-proton collision point of $n\pi$, where n is integer, the same in the X -plane and in the Y -plane. Here the image of the proton beam in the X — Y plane is similar to the image in the proton-proton interaction point, being different only in scale. By using a place in the lattice with high beta values one could relax the requirement to form a beam of a very small size, as in the low- β IPs.

The current in the relativistic electron beam that is necessary for compensation of the beam-beam effect of the counter-rotating beam is defined by the current of the proton beam and its size. Electron guns with necessary parameters are available from the industry.

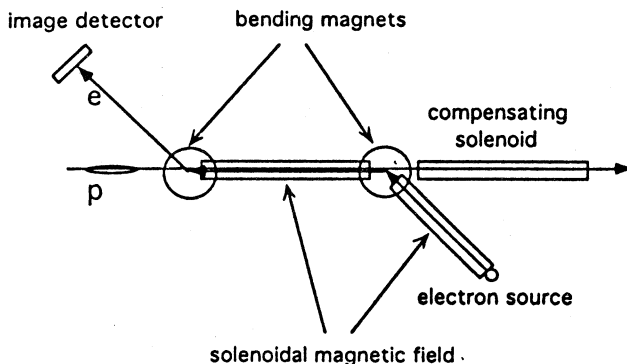


Fig.14. The scheme of a beam-beam compensating device. A low energy electron source collides with a bunch of protons. Electrons are kept stable in space by a solenoidal magnetic field. After collision with the proton bunch an electron beam is deflected to the image detector which is used for steering the electron beam relative to the proton bunch

One of the problems with using a low energy electron beam for beam-beam effect compensation is electron oscillations during passage through the proton bunch. Even passing once and then being dumped, electrons experience some oscillations inside the proton bunch, which makes distribution of proper kicks among all the protons in the bunch difficult. Several different methods were considered by the authors [21] to avoid this difficulty. The ZBEAM tracing code [22] was used to study the electron trajectories inside the proton bunch. It was found that the use of a solenoidal field presents the best solution to the problem. Therefore, for a round Gaussian beam a collision of a proton bunch with a low energy electron beam kept stable by a solenoidal magnetic field will adequately approximate a proton-proton collision with the opposite sign of the effect.

Figure 14 presents a design for a possible device for beam-beam effect compensation. A low energy electron beam, being kept transversally stable by the solenoidal magnetic field, is directed by the deflecting magnets to the interaction region to produce a head-on collision with the proton bunch. The influence of the solenoidal magnetic field on the proton bunch is then compensated by the same field configuration with the opposite polarity.

In paper [23], the authors presented simulation results related to the problem of beam-beam effect compensation for the LHC. The results are summarized in Figs.15,16, where the decoherence time and the rms beam tune spread are plotted versus the electron beam displacement, its relative charge,

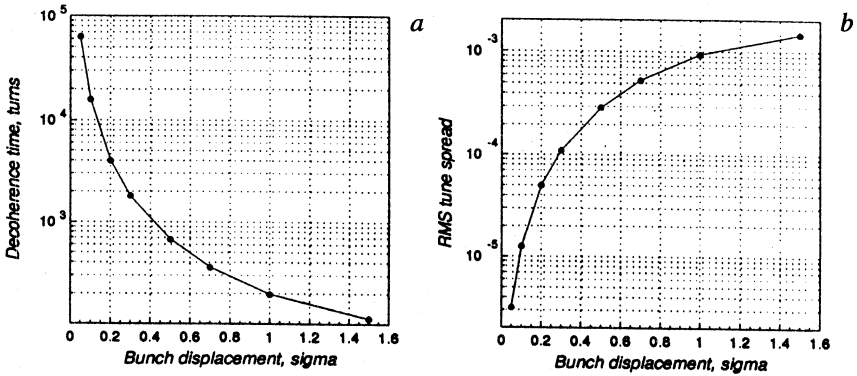


Fig.15. Results of using the beam-beam compensating device. Decoherence time expressed in number of turns (a) and rms tune spread of the beam particles (b) versus displacement of the compensating electron beam from the closed orbit

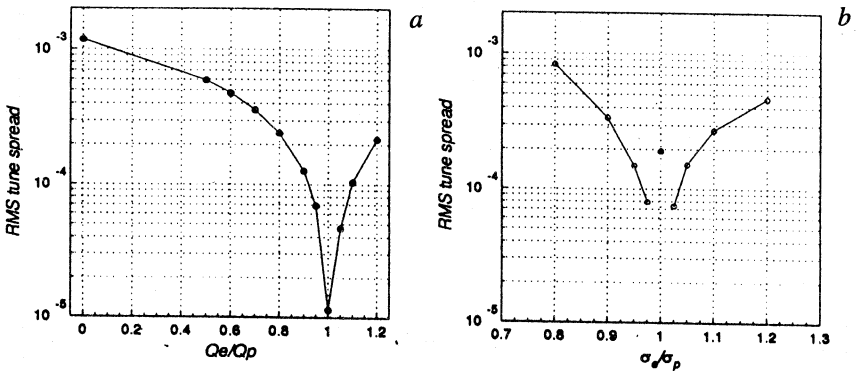


Fig.16. Results of using the beam-beam compensating device. RMS tune spread of the beam particles versus the ratio of the electron to proton bunch charges (a) and versus the ratio of the electron to proton bunch sizes (b) (white circles). Displacement of the electron bunch is 0.1σ . The leftmost point corresponds to the case without compensation

and transverse size. The authors [23] proposed to use a solenoidal magnetic field as a method to prevent electron oscillations. It was shown that in the case of $B=2$ Tesla for the LHC beam the radial position of a 10 keV electron remains constant with an accuracy of about two micrometers.

The presented results show that in the case of the LHC it is possible to achieve a good beam-beam effect compensation with the resulting reduction of

the beam tune spread by a factor of up to about 100, with reasonable tolerances on the electron beam parameters. Further increase of the design LHC luminosity becomes in principal feasible.

C. Intelligent Damper System. A novel transverse beam damper system improving stability against ground motion, resistive wall instabilities, and other effects in colliders was proposed and developed during the SSC Project evaluation [24]. The novel feature of the system is the use of two kickers, which permits almost exact orbit compensation within one turn.

Transverse damping is very important for large circular accelerators, such as the LHC, because of resistive wall instabilities, motion of quadrupoles due to ground motion, power supply ripple in dipoles, etc. A minimal transverse damping system consists of one Beam Position Monitor (BPM), followed downstream, with betatron phase advance that is an odd multiple of $\pi/2$, by one kicker. For a beam bunch oscillating with optimal phase, this configuration can provide single turn, unity-gain damping. That is, the kicker can cancel the full betatron oscillation measured by the detector the first time the bunch passes the kicker.

This minimal scheme has two disadvantages. One is the operational difficulty of preserving the required betatron phase relationship between pick-up and kicker as the lattice optics are altered. This is especially true because according to transit time requirements the kicker to be displaced by a large fraction of the ring circumference. A well-known fix for this problem is to provide two pick-ups, separated by roughly $\pi/2$ in phase.

The other problem with the minimal scheme is that the phase of the bunch is uncertain, and instead of full cancellation, damping of the betatron oscillation is provided only in some number of turns that depends on the lattice tune. Proposed scheme [24], requiring the use of two kickers, spaced presumably by $\pi/2$, is able to cancel the oscillations for each bunch exactly, not just statistically. This cancellation is independent of the betatron oscillation phase. Damping of the transverse bunch oscillations may be treated as a pure trajectory task and, in a linear machine approximation, has an exact, single turn, solution, not just a statistical solution. Of course, the precision with which this can be accomplished depends on the accuracy of the beam position monitors.

Damping systems with two BPMs and two kickers have been discussed before [25,26,27,28], but without elimination of phase dependence. The proposed scheme provides improved damping of instabilities with shorter growth times and noise sources of greater amplitude.

A simplified diagram of the proposed two-BPM, two-kicker scheme is shown in Fig.17. As far as we know, the basic idea is original. It can be called «intelligent» in that it is assumed that a certain amount of calculation can be performed in the time available before the kicker voltage is applied.

Collider Bunch Damping System

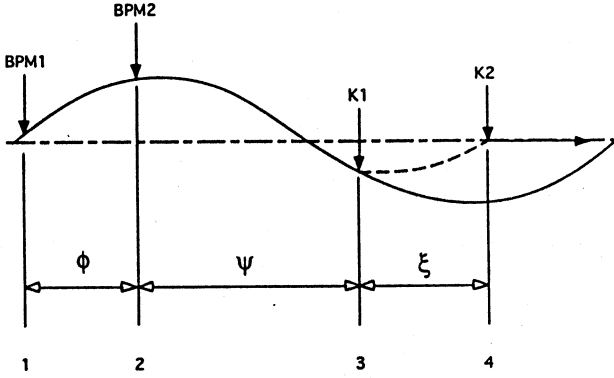


Fig.17. Collider bunch-by-bunch transverse damping system. Kickers K1 and K2 apply kicks calculated from displacements X_1 and X_2 , measured at BPM1 and BPM2. Betatron phase advances between elements ϕ , ψ and ξ , are defined as shown. The solid line is the uncorrected trajectory. The dashed line is the corrected trajectory

Let us consider fully decoupled motion restricted to a single plane, say horizontal. Two beam position monitors, BPM1 and BPM2, separated by betatron phase angle ϕ , measure horizontal positions of the bunch in two locations along its orbit. This information is processed, and correction signals are sent to two kickers, K1 and K2, separated by approximately $\pi/2$. To simplify the picture, it will be assumed that the gain of the electronics is 1. At the first kicker K1 an angular kick is produced which sets the slope of the bunch motion X' to some value, X'_3 , which is necessary to bring a bunch at the K2 position with zero displacement. Let us bring the bunch from point 3 to point 4

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ X'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\beta_4}{\beta_3}\right)^{1/2} (\cos \xi + \alpha_3 \sin \xi) & (\beta_3 \beta_4)^{1/2} \sin \xi \\ \frac{1 + \alpha_3 \alpha_4}{(\beta_3 \beta_4)^{1/2}} \sin \xi + \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{(\beta_3 \beta_4)^{1/2}} \cos \xi & \left(\frac{\beta_3}{\beta_4}\right)^{1/2} (\cos \xi - \alpha_4 \sin \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_3 \\ X'_3(a) \end{pmatrix},$$

where $X'_3(a)$ is the slope of a bunch after the K1. Here α_i and β_i are the Courant-Snyder parameters of the lattice.

Therefore,

$$X_4 = \left(\frac{\beta_4}{\beta_3}\right)^{1/2} (\cos \xi + \alpha_3 \sin \xi) X_3 + (\beta_3 \beta_4)^{1/2} \sin \xi X'_3(a).$$

Because we are seeking $X_4 = 0$, then

$$X'_3(a) = -\frac{1}{\beta_3} (\cot \xi + \alpha_3) X_3,$$

where

$$X_3 = \left(\frac{\beta_3}{\beta_2}\right)^{1/2} (\cos \psi + \alpha_2 \sin \psi) X_2 + (\beta_3 \beta_2)^{1/2} \sin \psi X'_2,$$

where

$$X'_2 = \left[-\frac{1 + \alpha_1 \alpha_2}{(\beta_1 \beta_2)^{1/2}} \sin \phi + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\beta_1 \beta_2)^{1/2}} \cos \phi \right] X_1 + \\ + \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{1/2} (\cos \phi - \alpha_2 \sin \phi) X'_1,$$

where

$$X'_1 = \frac{X_2}{\sin \phi (\beta_1 \beta_2)^{1/2}} - \frac{X_1}{\beta_1} (\alpha_1 + \cot \phi).$$

At the same time, the slope of the bunch before K1 $X'_3(b)$ is

$$X'_3(b) = \left[-\frac{1 + \alpha_2 \alpha_3}{(\beta_2 \beta_3)^{1/2}} \sin \psi + \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{(\beta_2 \beta_3)^{1/2}} \cos \psi \right] X_2 + \\ + \left(\frac{\beta_2}{\beta_3}\right)^{1/2} (\cos \psi - \alpha_3 \sin \psi) X'_2.$$

Therefore, the necessary kick $\Delta X'_3$ is

$$\Delta X'_3 = X'_3(a) - X'_3(b). \quad (5)$$

Again, from the matrix transformation,

$$X'_4 = \left[-\frac{1 + \alpha_3 \alpha_4}{(\beta_3 \beta_4)^{1/2}} \sin \xi + \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{(\beta_3 \beta_4)^{1/2}} \cos \xi \right] X_3 + \\ + \left(\frac{\beta_3}{\beta_4}\right)^{1/2} (\cos \xi - \alpha_4 \sin \xi) X'_3(a).$$

To bring the bunch slope to zero after K2, the necessary kick is

$$\Delta X'_4 = -X'_4. \quad (6)$$

Eq.(6) can be simplified immediately if the optional choice, $\xi = \pi/2$, has been made. However, it is not essential for that condition to be satisfied exactly.

The computations needed to determine kicks $\Delta X'_3$ and $\Delta X'_4$ can be expressed as two linear relations

$$\Delta X'_3 = a_1 X_1 + a_2 X_2, \quad (7)$$

$$\Delta X'_4 = b_1 X_1 + b_2 X_2, \quad (8)$$

where constants a_1, a_2, b_1 , and b_2 , are precalculated from the lattice constants. Since the phase differences ϕ, ψ and ξ are functions of the tune these constants must be recalculated when the lattice is retuned.

To insure that the information from BPM1 and BPM2 is maximally independent, which optimizes the accuracy of $\Delta X'_3$ and $\Delta X'_4$, their phase separation should approximately satisfy the condition $\phi \simeq \pi/2$.

In any practical system, since the bunch will outrun any correction signal to downstream kickers, one must wait for almost one revolution of the bunch around the collider circumference. This sets a natural limit on the performance of the damping system. All stochastic deviations accumulating in one turn can then be corrected after an additional turn.

The configuration can be used for bunch-by-bunch damping. If digital arithmetic is used, analog-to-digital conversion of bunch displacements, for colliders similar to the SSC, must occur at the 60 MHz bunch passage frequency, and performing the calculations of Eqs.(7) and (8) must proceed at a 240 Megaflop rate. Also the kicker rise time must correspond to the same 60 MHz frequency. It appears at present time to be technically possible to meet these requirements.

The damping system proposed could be used for all stages of collider ring operation — injection, acceleration, collision — if the dynamic range of the apparatus is made wide enough, from micrometers to millimeters.

D. Electron Beam Probe for Beam Diagnostics. Recently, a low-energy electron beam was proposed [29] for nonperturbing diagnostics of high-energy electron beams, based on earlier works [30]. This approach could be applied to any high energy collider for precise and nondisturbing beam diagnostics.

A diagram of the beam emittance monitor for high energy colliders using a low-energy probe electron beam is presented in Fig.18. An electron gun directs a 10-keV electron beam perpendicular to a proton beam. Deflected electrons are detected with a position sensitive detector. The monitor can use a well-focused electron beam sweeping through the proton beam, or a wide, parallel electron

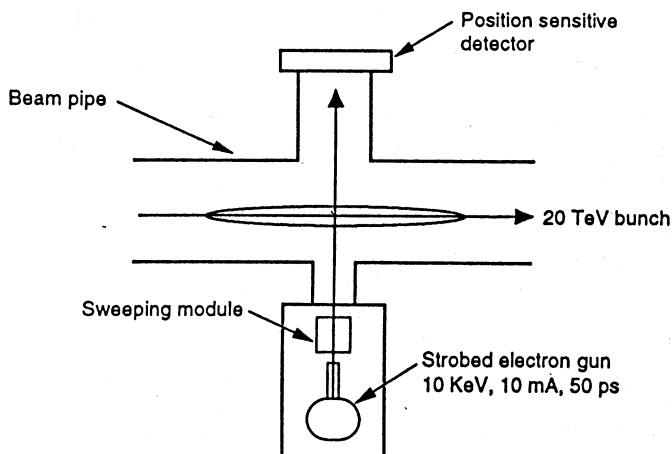


Fig.18. Electron beam profile monitor for a high energy collider

beam. Single bunch measurements are possible in the latter case, i.e., when illuminating a bunch of high-energy particles by a wide parallel electron beam one can obtain a specific «shadow picture» of the proton bunch.

The authors [29] used the ZBEAM simulation code [22] to trace probe electrons in the vicinity of a 20 TeV beam of the SSC Project. The bunch structure of the 20 TeV beam was taken into account. The bunch was considered as a moving charge equivalent to the charge of 10^{10} protons with three-dimensional Gaussian distribution in space. A Gaussian distribution with $\sigma_z = 5$ cm was used in the Z-direction. For a round Gaussian, $\sigma_x = \sigma_y$, different transverse beam sizes were considered. The electrons were exactly synchronized with the proton bunch. The Z-component of the electrical field of the bunch is rather small, and authors neglect it.

It was found that the electron deflection angle is quite sensitive to the position of the electron beam inside the proton bunch. Figure 19a presents the deflection angle of the electron versus its distance from the center of the proton beam (impact parameter) for different beam sizes. By measuring the deflection of the electron beam, it is possible to obtain the rms transverse size of the beam with good precision. The probing electron beam would be swept across the main beam to obtain a full deflection profile. Electrons should be focused in the plane of the proton beam in a spot less than $10\ \mu\text{m}$ in size in order to not introduce any significant broadening to the measured beam size.

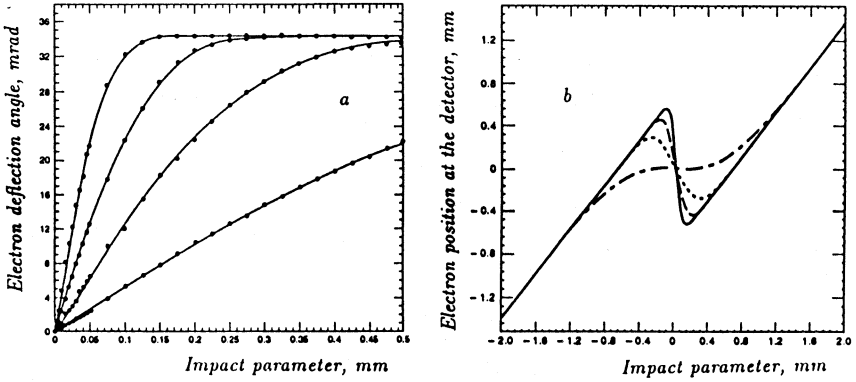


Fig.19. Deflection angle of 10 keV electrons (a) and its X-position at the detector (b) versus impact parameter with the proton bunch. The distribution of the proton bunch charge is three-dimensional Gaussian with $\sigma_x = \sigma_y$, μm : 50 (solid line), 100 (dashed), 200 (dotted), 500 (dash-dotted). $\sigma_z = 5\text{ cm}$

A notable feature of Fig.19a is the leveling off of the deflection angle for values of the impact parameter which exceed the X-extent of the beam. If the impact parameter b is beyond the X-extent of the beam, but still very small compared to the Z-extent of the bunch, it is reasonable to model the force felt by the probe electron as that due to an infinite line charge,

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \frac{-2eq_L \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^2}, \quad (9)$$

where e is the electron's charge, q_L is the linear charge density of the idealized line charge, and $\mathbf{R}$ is the two-dimensional vector (X, Y).

The change in momentum experienced by the electron is given by the impulse produced by this force along the electron's trajectory,

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)). \quad (10)$$

In our case the electron deflection angles are small enough, $\theta \ll 1$, therefore, the impulse approximation, $\theta = \Delta p / p$, can be used. So, for the deflection angle we have

$$\theta = -\frac{2eq_L}{m\gamma v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b dt}{b^2 + v^2 t^2} = -\frac{2\pi eq_L}{m\gamma v^2} \text{sgn}(b). \quad (11)$$

That is the deflection angle received by the electron is actually independent of the impact parameter value b .

Let us now try to extend the model to apply to smaller values of the magnitude of the impact parameter b . We must abandon the simple line charge in favor of an X — Y charge distribution $\rho_L(\mathbf{R})$, which is still constant in the Z -direction,

$$\int d^2\mathbf{R} \rho_L(\mathbf{R}) = q_L, \quad (12)$$

where q_L is the X — Y integrated constant linear charge density, as before. In this case, the force on the probe electron is given by the appropriate generalization of Eq.(9),

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -2e \int d^2\mathbf{R}' \rho_L(\mathbf{R}') \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2}. \quad (13)$$

For the deflection angle we obtain in this case

$$\theta(b) = -\frac{2\pi e}{m\gamma v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dX \rho_L(X, Y) \operatorname{sgn}(b - X). \quad (14)$$

When the magnitude of the impact parameter b exceeds the X -extent of the charge distribution $\rho_L(X, Y)$, Eq.(14) simply reduces to our previous result given in Eq.(11).

The equation (14) has an interesting property. The only b -dependent factor on the right-hand side of Eq.(14) is $\operatorname{sgn}(b - X)$, which appears within the X -integrand. It is well known that differentiating the sgn function produces a delta function,

$$\frac{d}{db} \operatorname{sgn}(b - X) = 2\delta(b - X). \quad (15)$$

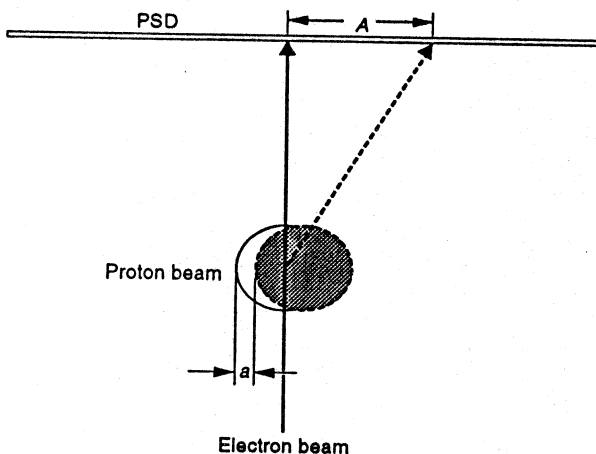
Thus,

$$\frac{d\theta}{db} = -\frac{4\pi e}{m\gamma v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dY \rho_L(b, Y). \quad (16)$$

In other words, the derivative of the deflection angle as a function of impact parameter is proportional to the Y -integrated profile of the transverse beam charge distribution ρ_L . This happens to be precisely the same information as one obtains from a probe wire («flying wire») which is passed perpendicular to the beam in the Y -direction (that of the probe electron) through the X -point corresponding to that electron's impact parameter b .

Figure 19b presents the dependence of the X -position of a deflected electron at the detector (at $Y = 2$ cm) versus its impact parameter (initial X -position at $Y = -1$ cm). Electrons are «switched» in the X -direction by the proton bunch charge around the center of the proton beam, and the shape of this switching is defined by the proton beam profile.

Fig.20. The diagram of the position sensor. 10 KeV electron beam strikes the 20 TeV proton bunch. If the proton bunch is displaced off-center by the distance of a , electron beam position will be displaced by the distance of A . PSD — a position sensitive detector



Our simulation studies for the alternative case with a wide, parallel, uniformly distributed electron beam have shown, that the shape of the beam profile resulting from the interaction with the proton beam is very sensitive to the size of the proton beam [29].

High energy accelerator complexes require feedback systems to dump down injector errors and prevent an emittance growth due to quadrupole vibrations, multibunch instabilities, power supply ripples, etc. Such systems usually involve beam position monitors, providing the information which is used to correct a particle orbit by electrostatic kickers. The noise of a beam position monitor is one of the limiting factors of the systems. An alternative approach to the construction of the essentially «noiseless» beam position monitor based on using a low energy electron beam probe is discussed in paper [31]. Electron beam scattering on an electromagnetic radiation in equilibrium with a temperature of surrounding beam tube is very small and has been neglected.

The diagram of the sensor is presented in Fig.20. If one uses 10 keV electron beam as a probe, the maximum angle of the electron beam deflection by the proton bunch for a collider like the SSC Project is about 40 mrad. Displacement of the bunch with the X-size of 100 μm in transverse direction by the distance of 1 μm typically will cause a deflection of the electron beam by about 0.8 mrad, which at the distance of 50 cm from the 20 TeV beam center translates to about 400 μm , a distance well measurable.

E. Charge Tracing Code for Collider Environment and More Applications. A full Monte Carlo computer code describing behaviour of electrons and ions in the vicinity of any space charges, electrical and magnetic fields was developed. Parameters of the code were optimized for a high energy collider environment. Some results of calculations with a neutral beam profile

monitor, a residual gas beam profile monitor, and an electron beam emittance monitor were published [22].

Transport codes to trace particles in high energy accelerators are well established for many years. However, some miscellaneous processes accompanying acceleration of particles, such as motion of the residual gas ions and electrons in the field of a beam space charge, under the influence of external electrical and magnetic fields usually have not been treated accurately. Nonperturbing beam diagnostics using low energy electron beams as a probe also require special computer codes to understand the results.

The motion of charges in the laboratory frame in some external electrical and magnetic fields and in the presence of some additional moving electrical charges can be described by the equation

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) + \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i + \sum_{i=1}^n [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_i]. \quad (17)$$

Here m is the particle mass, q is its electrical charge, $\mathbf{v}$ — its velocity, $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are external electrical and magnetic fields, $\mathbf{E}_i$ is an electrical field created by the electrical charges nearby the particle (bunch charge), $\mathbf{B}_i$ is a magnetic field associated with a moving charge. In a simulation code a bunch could be presented as a «cloud» of moving electrical charges with a total charge equal to the bunch charge.

The authors [22] found, however, that the practical limit due to a limited speed of computation restricts us to use more than 10^6 separate charge sources in the trajectory code. This amount of charges still does not allow to perform precise trajectory calculations due to the large fluctuations of a «charge density» in such a bunch. This is especially emphasized by the circumstance that the longitudinal size of a bunch at high energy colliders is much larger than its transverse sizes. The design length of the bunch in the collider (the SSC Project case) is of the order of 10 cm, at the same time its transverse sizes are about 100 micrometers. The authors [22] represent the bunch by the set of the «wire» charges. As it happens, it is quite possible to reach a satisfactory solution of the problem with a number of «wire» charges of the order of 10^4 . This essentially means that the longitudinal component of the electrical force of the bunch charge is neglected. The code, although being truly three-dimensional, uses a virtually «two-dimensional» X — Y bunch representation. The Z -variation of the bunch charge density is described with the corresponding time variation of the «wire» charge (and current) density. Lorentz shrinking of the electrical field of an individual proton does not really change the time integral of the bunch field in the case of the dense bunch [32].

The X - and Y -distributions of the bunch charge were varied separately according to the desired shape — Gaussian, uniform density, etc. The electromagnetic field created by each «wire» is calculated as a field of infinitely long wire with a charge (and a current) density variable in the Z -direction:

$$\mathbf{E}_i = \frac{q_i(Z)\mathbf{u}_r}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_i). \quad (19)$$

In its turn, $Z = Z(t) = ct$, c is a speed of light, $\mathbf{v}$ is a bunch velocity. Additional input parameters are ion (or electron) velocity and magnitudes of the external electrical and magnetic fields.

Tracking a particle in ZBEAM code is achieved by integrating the equation of motion over successive small time steps. Tracking stops when the particle reaches a detector or leaves the region of interaction.

ZBEAM code was used for calculations of possible beam-beam space charge effect compensation in colliders, described earlier. Low energy electron probe monitor calculations described earlier are based also on this code. In addition, a residual gas ionization beam profile monitor for the SSC was considered in detail [33] using ZBEAM code [22]. It was shown that a good spatial resolution in beam profile measurements could be obtained using a combination of electrical and magnetic fields.

Calculations indicate that the statistics are high enough to expect good spatial resolution for a residual gas ionization monitor. However, systematic effects could smear the resolution for the SSC beam. Electrons produced with velocity close to zero are affected by beam charge, and so the space information could be essentially lost. One can expect a better performance of such a monitor if strong external electrical and magnetic fields are applied.

A diagram of the residual gas ionization monitor using a dipole magnetic field is presented in Fig.21. Two magnets are used to compensate for the influence of the magnetic field on beam dynamics. Electrons are accelerated up to the energy of about 30 keV and detected by a position sensitive detector. One can achieve some magnification of the beam profile image using specially shaped magnetic and electrical fields.

A two-dimensional Gaussian distribution with $\sigma_x = \sigma_y = 50 \mu\text{m}$ was used to describe a bunched beam; the bunch length was taken to equal 10 cm, and protons were uniformly distributed in the Z -direction. The number of protons in the bunch was 10^{10} . External electrical and magnetic fields directed along the Y -axis (perpendicular to the beam direction) were applied. Ion-electron pairs are produced in space according to the proton density in a bunch. The energy

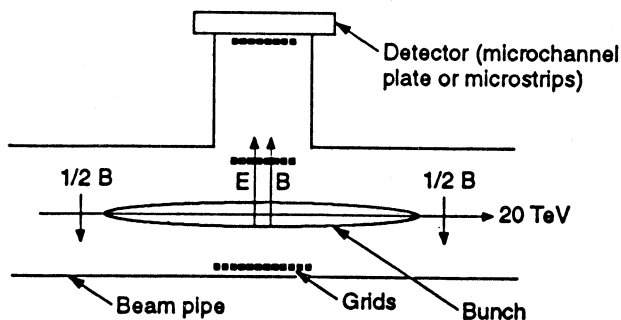


Fig.21. Residual Gas Ionization Beam Profile Monitor for the SSC

spectrum of electrons was produced according to a $1/E^2$ dependence, beginning from $E_e = 3$ eV. It was assumed that 90% of electrons will produce a good image of the beam, i.e., the authors neglect 10% of all electrons with recoil energy of more than 30 eV. The velocity vectors of the electrons were distributed isotropically in space. Finally, electrons were «collected» by the detector at the $Y = 2$ cm plane.

The distribution of electrons arriving at the detector plane of the residual gas ionization monitor for a uniform magnetic field of 2 T and external constant electrical field of 10 kV/cm was studied. An rms spread of about 5 μm was obtained, and this was satisfactory for the requirements to the SSC emittance monitors.

SUMMARY

As was already mentioned, beam extraction experiments with bent crystals are in progress at CERN and Fermilab. 10^7 protons per spill are being extracted on a regular basis from the 70 GeV accelerator at IHEP, Serpukhov. Studies related to the crystal extraction from the LHC are planned at CERN. However, rather low extraction efficiencies (about 10% at CERN SPS) up to now have been a serious obstacle to a practical use of the method. The studies [8] promise to overcome this limitation and open the way for wider application of the technique.

During these studies the authors believe they found the practical way to make proton collider a double feature machine, producing low intensity extracted beams simultaneously with colliding beam experiments. They have presented a high efficiency stationary passive device for the beam halo crystal

extraction. It would extract the natural proton beam loss, the beam halo, which for the Tevatron is about 2×10^7 protons per second, and about 10^9 protons per second for the LHC. The process does not interfere with colliding beam experiments. Thus, the device is suitable for cleaning up the proton beam halo (a clean crystal scraper), or for useful extraction of the proton beam halo particles with about a 99% efficiency. When it is used as a clean scraper, it could work as an efficient clean radiation drain preventing radiation due to a proton beam loss. Alternatively, small fixed target experiments could be carried out making use of this proton flux, including fixed-target B physics. The device could enhance detector R&D studies.

The device is suitable to be used at the LHC collider for both circulating proton beams. It could reduce the background radiation due to a beam halo loss by a factor of about 100.

Computer simulations were carried out to study the decoherence of beam oscillations in the SSC in head-on beam-beam interactions in a collider. It was found that, for the SSC baseline conditions, the decoherence time due to the beam-beam tune spread would be around 0.1 second, about seven times shorter than the previous theoretical estimate. Since the damping time should be short compared with the decoherence time, this result has important consequences for the design of the damping systems.

It was shown that the head-on beam-beam effect in proton-proton machines might be compensated, under appropriate conditions, by collisions of the bunch on each turn with a space charge of the opposite sign. For the positively-charged proton beams, for example, such an opposite-sign space charge might be provided by a low energy electron beam. Studies carried out for the SSC Project and for the LHC indicate that for reasonable tolerances on the electron beam parameters it is possible to achieve a good beam-beam effect compensation and reduce a tune spread due to the head-on space charge beam-beam effect by two orders of magnitude, which would improve considerably the high-luminosity performance of future colliders.

A full Monte Carlo computer code describing the behavior of electrons and ions in the vicinity of a space charge, and of electrical and magnetic fields was developed. The parameters of the code were optimized for a collider environment. Calculations were performed with the code for a residual-gas beam profile monitor, and an electron-beam-probe emittance monitor.

Initially the use of flying wires and synchrotron radiation imaging were proposed for determining the beam profile for the SSC Project. It was thought that the synchrotron radiation imaging would provide a continuous, non-interfering monitor of the beam profile. However, closer examination revealed that, because of a small size and high energy of the beam, the image would suffer from a large amount of diffraction broadening. This broadening would

reduce the sensitivity of the measurement to an unacceptable level. The realization of this difficulty led to a survey of the known minimal-interference measurement techniques which might be applicable at the SSC for determining the beam size. It was concluded that, of the approaches that appeared to be feasible, use of a low-energy electron beam probe offered the most promise. The results of simulations using this approach showed promise for providing useful transverse and longitudinal beam profile measurements, and this could be effectively used at the LHC.

In the course of the SSC Project design the authors [24] devised and studied a so-called «intelligent» damping scheme, involving the use of two kickers, spaced by preferably $1/4$ betatron wave lengths. This design provides the capability of exactly canceling the coherent betatron oscillations for each bunch in a single turn, in contrast to the statistical cancellation of previous devices. The cancellation would be independent of betatron oscillation phase. This scheme would be vital for the LHC and future colliders because of the very strict operational tolerances required.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to thank Drs. S.Baker, G.Bourianoff, R.Carrigan, A.Chao, T.Dombeck, G.Dugan, D.Edwards, H.Edwards, D.Green, G.Jackson, D.Johnson, S.Kauffmann, D.Larson, G.Lopez, R.Meinke, G.Mitselmakher, N.Mokhov, T.Murphy, W.Nexsen, W.K.H.Panofsky, J.Peoples, R.Richardson, G.Seaborg, H.-J.Shih, N.Slavin, G.Stupakov, R.Talman, M.Tigner, A.Tollestrup, T.Toohig, and G.Trilling for their valuable help and discussions. The authors express their gratitude to the CERN SL/AP Division for the hospitality during the studies. Support of Prof. A.Baldin during these studies is very appreciated.

REFERENCES

1. **Tsyganov E.** — Some Aspects of the Mechanism of a Charge Particle Penetration Through a Monocrystal, Fermilab TM-682, Batavia (1976); **Elishev A. F. et al.** — Phys. Lett., 1979, B 88, p.387; **Carrigan R. A. et al.** — Nucl. Instrum. Methods, 1982, 194, p.205.
2. **Avdeichikov V. V. et al.** — JINR Rapid Communications, 1984, 1-84, p.3, English translation FERMILAB-FN-429, February 1986.
3. **Asseev A.A. et al.** — Proceedings of 1991 Particle Accelerator Conference, p. 189, May 1991, San Francisco, CA; **Asseev A. A. et al.** — IHEP Preprint 89-57, Serpukhov, 1989.
4. **Akbari H. et al.** — Phys. Lett., 1993, B313, p.491.

5. **Carrigan R. A. et al.** — Proposal for a Test of Low Intensity Extraction From the Tevatron Using Channeling in a Bent Crystal, FNAL, May 22, 1991; **Jackson G.** — In: Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference, p. 1366, Washington, May 1993; **Carrigan, R. A. Jr., et al.** — Nucl. Instrum. Methods, 1994, B 90, p.128; **Murphy T.** — Invited talk "Bent Crystal Beam Extraction from Tevatron", Aarhus Workshop on Relativistic Channeling, July 1995.
6. **Newberger B. S. et al.** — Nucl. Instrum. Methods, 1993, A325, p.9; **Gabella W. et al.** — In: Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference p. 233, Washington, May 1993.
7. **Tsyganov E., Shih H.-J., Taratin A.** — Resonance Excitation of the SSC Beam Halo by RF Voltage Pulses, SSCL-609, December 1992.
8. **Tsyganov E., Taratin A.** — Nucl.Instrum.Methods, 1995, A 363, p.511.
9. **Taratin A., Tsyganov E.** — presented at Fermilab AD seminar, September 12, 1994.
10. **Mokhov N.** — «Scrapers», private communication.
11. **Finley D.A.** — In: Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference, p. 3721, Washington, May 1993.
12. **Jackson G.** — In: Proceedings of the 1993 Particle Accelerator Conference, p. 402, Washington, May 1993.
13. **Baker S.I.** — Radiation Damage Effects in Channeling Applications, in Relativistic Channeling, edited by R. Carrigan, Jr., and J. Ellison, Plenum Press, New York and London, 1987, p. 391; **Chesnokov Yu.A. et al.** — In: Proc. 15th Int. Conf. on High Energy Accelerators, 1992, Int. J. Mod. Phys. A (Proc. Suppl.), 1993, 2, p.173; **Baker S.I. et al.** — Nucl.Instrum.Methods, 1994, B 90, p.119.
14. **Taratin A. et al.** — Ultrathin Crystal Scatterer for the SSC Beam Extraction System, SSCL-545, December 1991.
15. **Taratin A.M. et al.** — Nucl. Instrum. Methods, 1990, B47, p.247.
16. **Shih H.-J., Taratin A.** — Bent Crystal Extraction of the SSC Beam with RF Noise Induced Diffusion, SSCL-389, March 1991.
17. **Tsyganov E., Shih H.-J., Meinke R., Nexsen W., Herath-Banda M., Taratin A.** — SSCL-Preprint-481, July 1993, submitted to IEEE NS.
18. **Lebedev V.A., Parkhomchuk V.V., Shiltsev V.D., Skrinsky A.N.** — INP Preprint 91-120, Novosibirsk, 1991; **Lebedev V.A.** — SSCL-Preprint-191, March 1993.
19. **Evans L.R.** — In: CERN Accelerator School on Antiprotons for Colliding Beam Facilities, CERN Report 84-15, p.319, 1984.
20. **Stupakov G.V., Parkhomchuk V.V., Shiltsev V.D.** — SSCL-Preprint-495, August 1993.
21. **Tsyganov E., Meinke R., Nexsen W., Zinchenko A.** — SSCL-Preprint-519, October 1993.
22. **Tsyganov E., Zinchenko A.** — SSCL-618, March 1993.
23. **Tsyganov E., Taratin A., Zinchenko A.** — Beam-Beam Effect Compensation at the LHC, CERN SL/Note 95-116 (AP).
24. **Tsyganov E., Dugan G., Lopez G., Meinke R., Nexsen W., Talman R.** — IEEE NS, v. 41, p. 287, 1994.
25. **Penner S.** — SSCL Internal Note, July 18, 1991.
26. **Chen S., Lopez G.** — Simulation Studies of the Transverse Dipole Mode Multibunch Instability for the SSC Collider, SSCL-614, 1993.

27. **Galayda J.** — In: American Institute of Physics Conference Proceedings 249, Physics of Particle Accelerators, M. Month and M. Dienes, Editors, New York, 1991, v. 1, p.663.
28. **Zhabitsky V.M.** — JINR P9-91, Dubna, 1991 (in Russian).
29. **Tsyganov E., Meinke R., Nexsen W., Kauffmann S., Zinchenko A., Taratin A.** — SSCL-Preprint-179, December 1992, Published in Proc. 1993 PAC, Washington, D.C., May 1993, p. 2489.
30. **Pasour J., Ngo M.** — Rev. Sci. Instrum. 63 (1992) 3027.
31. **Tsyganov E., Kauffmann S., Meinke R., Nexsen W., Richardson R.** — SSCL-619, March 1993.
32. **Jackson J.D.** — Classical Electrodynamics, Wiley, New York, 1962.
33. **Meinke R., Nexsen W., Tsyganov E., Zinchenko A.** — SSCL-Preprint-353, May 1993, Published in Proc. 1993 PAC, Washington, D.C., May 1993, p. 2468.

ГРАВИТАЦИОННАЯ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ В СПЕЦИАЛЬНО-РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПОДХОДЕ ПУАНКАРЕ

Р.А.Асанов, Г.Н.Афанасьев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматривается система двух релятивистских бесспиновых тел, взаимодействующих с помощью только запаздывающих сил, распространяющихся со скоростью света. Формулировка Пуанкаре гравитационной задачи содержит две произвольные функции. При определенном выборе этих функций получено правильное описание трех известных эффектов ОТО и эффекта задержки радиолокационных сигналов. Обобщены уравнения Пуанкаре и даны примеры сил, приводящих к движению двух тел по окружности, и сил, приводящих к прямолинейному движению. Кратко рассмотрены некоторые другие подходы к задаче.

We consider two relativistic spinless bodies interacting via pure retarded (action at distance) forces propagating with the velocity of light. The Poincaré formulation of the gravitation theory contains two arbitrary functions. A specific choice of these functions provides a correct description of three «crucial» experiments supporting General Relativity and the time delay of a radar signal. For a correct description of electromagnetic interaction it is necessary to introduce also forces depending on acceleration of bodies. Some examples are given of the forces resulting in a stationary circular motion and in straightline motion. A brief survey of some investigations of the two-body problem is given.

1. ВВЕДЕНИЕ

И.Ньютон впервые дал математическую формулировку механической задачи двух тел [1]. Более трехсот лет назад он показал, что законы Кеплера могут быть получены из законов механики и закона всемирного тяготения, т.е. предположения о центральном мгновенном дальнем действии сил и убывании сил пропорционально квадрату расстояния между тяготеющими телами (для обоснования второго закона Кеплера — о постоянстве секториальной скорости планеты — достаточно предположения о централь-

ности). Одновременно он показал, что применительно к задаче двух тел законы в формулировке Кеплера являются приближенными. В точной формулировке надо говорить не о движении планеты вокруг Солнца, а о движении относительно их центра тяжести.

Ньютон также исследовал отклонения от закона обратных квадратов с целью объяснения, в частности, наблюдаемых вращательных смещений орбит планет (в плоскости их движения) относительно неподвижных звезд, идентифицируемых с абсолютным пространством. Непосредственно наблюдались смещения перигелиев орбит за определенные промежутки времени. Занимался Ньютон и силами, зависящими от скорости тел (конкретно, силами трения), которые также приводят к смещениям перигелиев.

Подобные вопросы остаются актуальными и по сей день — от космологии и небесной механики до элементарных объектов. Открытие конечности скорости света (О.Рёмер, 1675), создание полевой электромагнитной теории Максвелла, специальной (СТО) и общей теории относительности (ОТО) привели к дальнейшему развитию науки о двух (и более) телах. Наконец, появилась и квантовая теория, которой, однако, здесь касаться не будем.

Многие ученые занимались механической (в рамках механики Ньютона) и электромагнитной задачами двух тел. Среди них нужно упомянуть Гаусса, Вебера, Римана, Ритца, Гербера. Между тем к началу двадцатого века накопилось достаточно данных, чтобы возникла специальная теория относительности и релятивистская механика. На этой основе была поставлена и решена задача о движении заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, хотя и здесь возникли осложнения, связанные, например, с собственным излучением. В своей работе «О динамике электрона» (1906 г.) [2] А.Пуанкаре дал релятивистски-инвариантное обобщение системы уравнений Ньютона для двух взаимодействующих, в том числе тяготеющих, бесспиновых «точечных» тел.

Работы по частно-релятивистской классической неквантовой задаче двух точечных тел в зависимости от характера взаимодействия условно можно разделить на несколько направлений.

К первому мы относим те работы (см., например, [3]), в которых предполагается, что ускорение одной из частиц в некоторый момент времени может быть представлено в любой инерциальной лоренцевой системе в виде функции от параметров движения второй частицы (координат, скоростей и т.д.), взятых в тот же самый момент времени. Понятие одновременности не является релятивистски-инвариантным. Поэтому условие одновременности параметров движения частиц в любой инерциальной лоренцевой системе накладывает жесткие ограничения на характер взаимодействия. В такой формулировке возможны и сверхсветовые скорости частиц [4].

Второе направление берет свое начало от известных работ Вигнера и Ван Дама [5]. В них 4-ускорение одной из частиц записывается в виде интеграла от определенной «двухточечной» функции вдоль мировой линии второй частицы. Эта функция, играющая роль взаимодействия, отлична от нуля для точек мировой линии второй частицы, связанных пространственноподобным интервалом с рассматриваемой точкой мировой линии первой частицы. В пределе при стремлении скорости света c к бесконечности получается обычная нерелятивистская задача с тем или иным взаимодействием.

Наконец, к третьему направлению относим работы, в которых предполагается, что взаимодействие между частицами распространяется со скоростью света. Это направление, в свою очередь, может быть разделено на три группы. К первой принадлежат работы [6], в которых взаимодействие сводится к полусумме запаздывающего и опережающего взаимодействий. Ко второй группе относим работы [7], в которых предполагается, что взаимодействующие частицы лежат на одном и том же световом конусе. Это означает, например, что частица 1 взаимодействует с частицей 2 запаздывающим образом, тогда как частица 2 с частицей 1 — опережающим. Для работ первой и второй групп в электромагнитном случае удалось получить точные решения, отвечающие равномерным круговым движениям, и найти сохраняющиеся величины [8]. Под словами «электромагнитный случай» понимается следующее: сила Лоренца, действующая на одну из частиц, выражается через напряженности электрического и магнитного полей, которые, в свою очередь, с помощью потенциалов Лиенара — Вихерта могут быть выражены через координаты, скорость и ускорение второй из частиц. В итоге все полевые переменные оказываются исключенными и получается релятивистская задача двух тел с дальнодействием.

Для работ первых двух групп возникают трудности из-за возможного нарушения принципа причинности. Например, наличие опережающего потенциала означает, что фотон поглощается одной частицей раньше, чем испускается второй. Для устранения этого парадокса Уилеру и Фейнману пришлось ввести понятие абсорбера [9].

Для работ третьей группы, когда взаимодействие только запаздывающее, точные решения, равно как и законы сохранения, до последнего времени были неизвестны. Известны только теоремы единственности и существования решений для случая движения двух заряженных частиц вдоль одной прямой [10], а также разложения двухчастичных лагранжианов и сил взаимодействия по степеням c^{-2} [11,12]. Работы этой группы были инициированы знаменитой работой А.Пуанкаре «О динамике электрона» [2]. В ней он дал релятивистски-инвариантное (в духе дальнодействия) обобщение системы уравнений Ньютона для двух взаимодействующих точечных тел с учетом конечной скорости, равной скорости света, распрост-

ранения взаимодействия. В ней же он попытался сформулировать первую частно-релятивистскую теорию тяготения двух тел. Так как 4-ускорение каждой из частиц является четырехмерным вектором, то правая часть уравнений движения (то есть 4-сила) также должна быть 4-вектором. Пуанкаре предположил, что 4-сила выражается через линейную комбинацию разностей 4-координат и 4-скорости каждой из частиц. Коэффициенты при этих 4-векторах являются тремя произвольными инвариантными функциями. Одна из них фиксируется требованием постоянства 4-скорости частицы или, что то же самое, — ортогональности ее 4-скорости и 4-ускорения. Остаются две произвольные функции. Пуанкаре потребовал далее, чтобы его уравнения отличались от ньютоновых уравнений для двух частиц, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, членами порядка не ниже c^{-2} . Этому, как оказалось, довольно слабому ограничению он удовлетворил, положив одну из функций равной нулю, а вторую выбрал весьма специальным образом. Специфичность своего выбора Пуанкаре отчетливо осознавал и сразу же указал на возможные обобщения. В дальнейшем были неоднократные попытки (см., например, обзор в книге [13]) применить уравнения Пуанкаре для описания астрономических наблюдений — так называемых трех «решающих опытов» по проверке общей теории относительности. Все вычисления основывались, однако, на упомянутой упрощенной форме уравнений Пуанкаре. Это обстоятельство, а также отсутствие однозначного рецепта выбора произвольных функций, послужили причиной мнения, что частно-релятивистские теории не могут описать данные опыты. В работах [14] был рассмотрен потенциальный предел (когда отношение масс частиц $\ll 1$) исходных, то есть с двумя произвольными функциями, уравнений Пуанкаре. Произвольные функции фиксировались из требования совпадения уравнений движения с общерелятивистскими. Как следствие, получено корректное описание как «решающих» опытов ОТО, так и временного запаздывания радиолокационных сигналов. Был указан один из вариантов выбора произвольных «двухчастичных» функций, входящих в уравнения Пуанкаре. В потенциальном пределе они переходят в уравнения движения пробной частицы в сферически-симметричном поле тяготения.

В этих же работах мы искали частные точные стационарные решения релятивистской двухчастичной задачи.

Будем придерживаться следующего плана изложения. В разд.2 выпишем основные уравнения, являющиеся обобщением уравнений Пуанкаре. В разд.3 мы убедимся, что эта система достаточно широка, чтобы описать и электромагнитный случай с только запаздывающим взаимодействием. Рассмотрим гравитационную задачу. Приведем описание трех «решающих» опытов и запаздывания радиационных сигналов, дадим расчет прецессии гироскопа, обращающегося по орбите вокруг Земли. Приведем сравнение с

некоторыми другими подходами к задаче двух тел. В разд.4 получим условия существования решений, отвечающих стационарным круговым движениям. Покажем, что таких движений нет ни в электромагнитном случае, ни в упрощенном варианте уравнений Пуанкаре. Выясним, как следует выбрать двухчастичные инвариантные функции, чтобы уравнения Пуанкаре обладали решениями, отвечающими стационарным круговым движениям. Этими функциями можно распорядиться таким образом, чтобы получалось как круговое движение, так и правильный нерелятивистский предел. В качестве него можно выбрать, например, ньютоновы «двухчастичные» уравнения тяготения. Наконец, в разд.5 для частного выбора инвариантных функций получим решения, отвечающие прямолинейному движению.

2. УРАВНЕНИЯ ПУАНКАРЕ И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

Итак, следуя Пуанкаре, напомним уравнения движения для каждого из тел:

$$\frac{d^2 x_{1\mu}}{d\tau_1^2} = f_1 x_\mu + f_2 \frac{dx_{1\mu}}{d\tau_1} + f_3 \frac{dx_{2\mu}}{d\tau_2} + f_4 \frac{d^2 x_{2\mu}}{d\tau_2^2}, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 x_{2\mu}}{d\tau_2^2} = -g_1 x_\mu + g_2 \frac{dx_{2\mu}}{d\tau_2} + g_3 \frac{dx_{1\mu}}{d\tau_1} + g_4 \frac{d^2 x_{1\mu}}{d\tau_1^2}. \quad (2)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь τ_1, τ_2 — собственные времена тел ($d\tau = \sqrt{dt^2 - (dx)^2/c^2}$), $x_{1\mu}, x_{2\mu}$ — их 4-координаты; $x_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu}$. Разности координат использованы для того, чтобы уравнения были не только лоренц-, но и пуанкаре-инвариантны. Массы включены в функции f и g . Уравнения (1) и (2) должны переходить друг в друга при замене индексов тел $1 \leftrightarrow 2$. Это приводит к следующим соотношениям между функциями f и g : $g_i(1, 2) = f_i(2, 1)$, $i = 1, \dots, 4$. Соотношения (1) и (2) написаны из соображений ковариантности. Левые части являются 4-векторами, поэтому правые части также должны быть линейными комбинациями 4-векторов. Тогда f и g — некоторые инвариантные относительно группы Пуанкаре функции от векторов, входящих в правые части уравнений, и масс. Уравнения, рассмотренные Пуанкаре, не содержали в правой части 4-ускорений, то есть он выбрал $f_4 = g_4 = 0$. Они необходимы, однако, для описания электромагнитного случая (см. п.3.1).

Соотношения (1), (2) физически недостаточно определены, поскольку содержат два координатных и два собственных времени. Необходимо каким-то образом связать t_1 и t_2 . Гипотеза Пуанкаре состоит в том, что время t «притягиваемого» и время $\tilde{t}$ «притягивающего» тел связаны релятивистски-инвариантным соотношением

$$\tilde{t} = t - r/c, \quad r \equiv \left\{ \sum_{i=1}^3 [z_i(t) - \tilde{z}_i(t - r/c)]^2 \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

здесь $z_i, \tilde{z}_i$ — координаты притягиваемого и притягивающего тел.

Соотношение (3) означает, что взаимодействие как бы «покидает» притягивающее тело раньше, чем «достигает» притягиваемого, причем скорость распространения взаимодействия равна скорости света. Очевидно, что (3) находится в согласии с принципом причинности. Соответственно этому мы должны положить

$$t_1 = t, \quad t_2 = t - r/c, \quad r = \left\{ \sum_{i=1}^3 [x_{1i}(t) - \tilde{x}_{2i}(t - r/c)]^2 \right\}^{1/2}$$

в (1) и

$$t_2 = t, \quad t_1 = t - \tilde{r}/c, \quad \tilde{r} = \left\{ \sum_{i=1}^3 [x_{2i}(t) - \tilde{x}_{1i}(t - \tilde{r}/c)]^2 \right\}^{1/2}$$

в (2). В соотношениях (1) удобно разделить пространственную и временную части:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_{1i}}{d\tau_1^2} &= f_1 x_i + f_2 \frac{dx_{1i}}{d\tau_1} + f_3 \frac{dx_{2i}}{d\tau_2} + f_4 \frac{d^2 x_{2i}}{d\tau_2^2}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{d^2 t_1}{d\tau_1^2} &= f_1 \frac{r}{c} + f_2 \frac{dt_1}{d\tau_1} + f_3 \frac{dt_2}{d\tau_2} + f_4 \frac{d^2 t_2}{d\tau_2^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Еще раз напомним, что в (4) все величины, относящиеся к частице 1, берутся в некоторый момент времени t , а к частице 2 — в момент $t - r/c$. Из ортогональности 4-скорости и 4-ускорения получаем

$$cf_1 A + c^2 f_2 + c^2 f_3 C + f_4 D = 0 \quad (5)$$

и аналогичное соотношение для функций g . В (5) величины A, C, D являются релятивистски-инвариантными комбинациями 4-координат, скоростей и ускорений:

$$A = \frac{c}{x} \frac{dx}{dt} = (1 - \beta_2^2)^{-1/2} (r - rv_1/c),$$

$$C = \frac{1}{dx} \frac{d^2x}{dt^2} = (1 - \beta_2^2)^{-1/2} (1 - \beta_2^2)^{-1/2} (1 - v_1 v_2 / c^2),$$

$$D = \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = (1 - \beta_2^2)^{-1/2} (1 - \beta_2^2)^{-1} \left[\frac{1 - \beta_2^2}{v_1 w_2} \left(1 - \frac{c^2}{v_1 v_2} \right) - v_1 w_2 \right]. \quad (6)$$

Здесь v_1, v_2, w_1, w_2 — обычные трехмерные скорости и ускорения; $\beta_1 = v_1/c, \beta_2 = v_2/c$. В дальнейшем нам понадобятся еще три инварианта:

$$B = \frac{c}{x} \frac{dx}{dt} = (1 - \beta_2^2)^{-1/2} (r - rv_2/c),$$

$$E = -x \frac{d^2x}{dt^2} = (1 - \beta_2^2)^{-1} (rw_2 - (1 - \beta_2^2)^{-3/2} (v_2 w_2) B / c,$$

$$F = - \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 = (1 - \beta_2^2)^{-3/2} \left[w_2^2 + (1 - \beta_2^2)^{-1} (v_2 w_2)^2 c^{-2} \right]. \quad (7)$$

Отметим, что Ланкаре [2] вводил только три инварианта A, B, C , которые не содержат ускорений.

Удобно в первых трех уравнениях (4) заменить собственное время t_1 координатным t_1 . В итоге получаем

$$\frac{1 - \beta_1^2}{w_1} = f^1(x_1 - v_1 t_1 / c) - (v_1 t_1 - v_2 t_2) f^3(1 - \beta_2^2)^{-1/2} +$$

$$+ f^4(1 - \beta_2^2)^{-2} (v_2 w_2) / c^2 + f^4 w_2 (1 - \beta_2^2)^{-1}. \quad (8)$$

Ради полноты приведем аналогичную систему уравнений для второй частицы:

$$\begin{aligned} \frac{w_{2i}}{1 - \beta_2^2} = & g_1(\tilde{x}_i - v_{2i}\tilde{r}/c) - (v_{2i} - v_{1i})[g_3(1 - \beta_2^2)^{-1/2} + \\ & + g_4(1 - \beta_1^2)^{-2}(v_1 w_1)/c^2] + g_4 w_{1i}(1 - \beta_1^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) все величины, относящиеся к частице 2, берутся в момент времени t , а к частице 1 — в момент $t - \tilde{r}/c$. Кроме того,

$$\tilde{x}_i = x_{2i}(t) - x_{1i}(t - \tilde{r}/c), \quad \tilde{r} = \left[\sum_{i=1}^3 (\tilde{x}_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Возникает вопрос, нельзя ли использовать уравнения (9) для исключения w_{2i} из правой части (8), а затем члены с w_{1i} перенести в левую часть (8). В итоге ускорение одной из частиц можно было бы выразить только через координаты и скорость второй. Эта процедура оказывается невозможной, если вспомнить, что все величины, относящиеся к частицам 1 и 2, зависят от разных времен. Ввиду симметрии относительно перестановки частиц достаточно рассмотреть только одну систему уравнений, например (8). Следуя Пуанкаре, предполагаем, что инвариантные функции f_i построены из инвариантов $A, \dots, F$. Конкретный вид функций может определяться несколькими факторами: физическим содержанием (гравитация, электромагнетизм, ядерные силы), необходимостью получения точного аналитического решения и т.д.

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

3.1. Электромагнитная задача двух тел. Покажем, что электромагнитная задача двух точечных тел описывается уравнениями (8), (9) при соответствующем выборе функций f, g . Запишем электрическое и магнитное поля, создаваемые частицей 2 в месте нахождения частицы 1 (см., например, [15]):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 = & e_2 \gamma_2^{-3} \left[\left(\mathbf{r} - \frac{r \mathbf{v}_2}{c} \right) \left(1 - \beta_2^2 + \frac{r \mathbf{w}_2}{c^2} \right) - \mathbf{w}_2 \gamma_2 r / c^2 \right], \\ \mathcal{H}_2 = & \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathcal{E}_2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь e_2 — электрический заряд частицы 2, $\gamma_2 = r - \mathbf{r}\mathbf{v}_2/c$. Это электромагнитное поле действует на частицу 1 с зарядом e_1 и массой m_1 с помощью силы Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = e_1 \left(\mathcal{E}_2 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_1 \times \mathcal{H}_2] \right),$$

откуда находим

$$\frac{m_1 \mathbf{w}_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} = e_1 \left(\mathcal{E}_2 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_1 \times \mathcal{H}_2] \right) - \frac{e_1}{c^2} (\mathbf{v}_1 \mathcal{E}_2) \mathbf{v}_1. \quad (11)$$

Подставляя в это выражение $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{H}_2$ и собирая коэффициенты при $x_i, v_{1i}, v_{2i}, w_{2i}$ находим инвариантные функции f_i для электромагнитной задачи двух тел:

$$f_1 = \frac{e_1 e_2}{m_1 B^3} \left[C(1 + E/c^2) - BD/c^3 \right],$$

$$f_3 = -\frac{e_1 e_2 A}{c m_1 B^3} (1 + E/c^2), \quad f_4 = -\frac{e_1 e_2 A}{c^2 m_1 B^2}. \quad (12)$$

Функции g вычисляются тем же способом, что и f , то есть вычисляется запаздывающее электромагнитное поле, создаваемое частицей 1 в месте нахождения частицы 2, затем строится сила Лоренца. Например, функция g_1 имеет вид

$$g_1 = \frac{e_1 e_2}{m_2 \tilde{B}^3} \left[\tilde{C}(1 + \tilde{E}/c^2) - \tilde{B}\tilde{D}/c^3 \right]. \quad (13)$$

$\tilde{A}, \tilde{B}, \dots, \tilde{F}$ получаются из $A, B, \dots, F$ перестановкой индексов частиц: $\tilde{B} = \left(\tilde{r} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{v}_1}{c} \right) / \sqrt{1 - \beta_1^2}$ и т.д. В инвариантах $\tilde{A}, \dots, \tilde{F}$ все величины, относящиеся к частицам 2 и 1, берутся в моменты времени t и $t - r/c$ соответственно. Мы уже упоминали, что функции g получаются из f формальной перестановкой индексов частиц. Это подтверждается выражениями (12) и (13). Из их сравнения следует, что $m_1 f_i \neq m_2 g_i$, то есть принцип равенства действия и противодействия как бы не выполняется.

3.2. Гравитационная задача двух тел [14]. При следующем выборе инвариантных функций f получается упрощенный вариант уравнений Пуанкаре:

$$f_2 = f_4 = 0, \quad f_1 = \frac{\gamma}{B^3}, \quad f_3 = -\frac{\gamma A}{cB^3 C}, \quad \gamma = \text{const.} \quad (14)$$

Тогда уравнения (8) выглядят следующим образом:

$$\frac{w_{li}}{1 - \beta_1^2} = \frac{\gamma}{B^3} \left[x_i - \frac{v_{li}}{c} (r - A / \sqrt{1 - \beta_2^2}) - \frac{v_{2i} A}{cC} \right]. \quad (15)$$

Эти уравнения отличаются от нерелятивистских гравитационных уравнений членами порядка c^{-2} . Мы уже упоминали, что они недостаточны для описания «решающих опытов» ОТО. Найденные в [14] функции f , адекватные этим опытам, существенно отличаются от функций (14).

Запишем частично расширенные уравнения вида (4), используя только две произвольные функции инвариантов ψ_1 и ψ_2 . Введенные для удобства функции ψ связаны с прежними f : $\psi_1 = B^3 f_1$, $\psi_2 = c f_2$. Функция f_4 , являющаяся коэффициентом при ускорении второй частицы, положена равной нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_{li}}{d\tau_1^2} &= \psi_1 \frac{x_i}{B^3} + \frac{\psi_2}{c} \frac{dx_{li}}{d\tau_1} - \frac{1}{cC} \left(\frac{\psi_1 A}{B^3} + \psi_2 \right) \frac{dx_{2i}}{d\tau_2}, \\ \frac{d^2 t_1}{d\tau_1^2} &= \psi_1 \frac{r}{cB^3} + \frac{\psi_2}{c} \frac{dt_1}{d\tau_1} - \frac{1}{cC} \left(\frac{\psi_1 A}{B^3} + \psi_2 \right) \frac{dt_2}{d\tau_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если задать асимптотику произвольных функций при $c \rightarrow \infty$ такую, что $\psi_2 \sim O(1/c)$, $\psi_1 \sim \text{const} + O(1/c^2)$, то из уравнений (16) получатся, с точностью до $1/c^2$, уравнения Ньютона для двух частиц, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Сам Пуанкаре использовал более простое выражение, положив $\psi_2 = 0$.

Еще более специальные случаи были рассмотрены Г. Минковским [16] и В.С.Брежневым [17]. В этих работах выбиралось $\psi_1 = \text{const}$, $\psi_2 = 0$. Ниже будет показано, что при этом (или предыдущем) ограничении невозможно получить описание «решающих опытов» по проверке общей теории

относительности. Если же для выбора функций ψ_1 и ψ_2 использовать решение Шварцшильда, то оказывается возможным описать три известных эффекта по проверке ОТО и эффект задержки радиолокационных сигналов.

3.3. Потенциальный предел релятивистской задачи. Прежде чем обсудить приближенные методы решения уравнений (16), а также известные точные частные решения, рассмотрим потенциальный предел (масса второй частицы $M_2 \rightarrow \infty$). В этом случае частица 2 движется прямолинейно и равномерно. Переходя с помощью преобразования Лоренца в систему координат, где частица 2 покоится, получаем вместо (16)

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau_1^2} = \frac{\psi_1 x_i}{r^3} + \frac{\psi_2 v_{1i}/c}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, \quad \frac{d^2 t_1}{d\tau_1^2} = \frac{\psi_1 (\mathbf{xv}_1)}{c^2 r^3} + \frac{\psi_2 v_1^2/c^3}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \quad (17)$$

Перейдем здесь от собственного времени τ_1 к координатному t_1 :

$$\frac{d^2 x_i}{dt_1^2} = (1-\beta_1^2) \left[\frac{\psi_1 x_i}{r^3} + \frac{v_{1i}}{c} \left(\psi_2 \sqrt{1-\beta_1^2} - \frac{\psi_1 (\mathbf{xv}_1)}{r^3 c} \right) \right]. \quad (18)$$

Сравним (18) с точными уравнениями движения пробного тела в ОТО (в метрике Шварцшильда $ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - d\mathbf{x}^2 - \mu (\mathbf{x} d\mathbf{x})^2$):

$$\frac{d^2 x_i}{dt_1^2} = v_{1i} \mu (\mathbf{xv}_1) - x_i \left[\frac{d\mu}{dr} \frac{(\mathbf{xv}_1)^2}{2r} + \mu v_1^2 + \frac{mc^2}{r^3} \right] \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (19)$$

здесь

$$\mu \equiv \frac{2m}{r^3} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, \quad m \equiv \frac{GM_1}{c^2},$$

G — ньютонова гравитационная константа. Уравнения движения пробного тела в лоренц-инвариантной теории и в ОТО совпадают при следующем единственном выборе функций ψ :

$$\psi_1 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) (1-\beta_1^2)^{-1} \left[\frac{r^2}{2} \frac{d\mu}{dr} (\mathbf{xv}_1)^2 + \mu v_1^2 r^3 + mc^2 \right],$$

$$\psi_2 \sqrt{1-\beta_1^2} = \psi_1 (\mathbf{xv}_1) r^{-3} c^{-1} + \mu (\mathbf{xv}_1) c (1-\beta_1^2)^{-1}. \quad (20)$$

Поставим следующий вопрос: возможно ли восстановить из урезанных одночастичных функций (20) полные двухчастичные функции $\psi_1(A, B, C)$, $\psi_2(A, B, C)$, входящие в систему уравнений (16)? Вот один из возможных рецептов. В выражениях (20) вместо r, v_1^2, m и $(\mathbf{xv}_1)$ следует подставить величины A, B, C по следующему правилу:

$$r \rightarrow B, \sqrt{1 - \beta_1^2} \rightarrow 1/C, m \rightarrow G(M_1 + M_2)/c^2, \frac{(\mathbf{xv}_1)}{c} \rightarrow B - \frac{A}{C}, \quad (21)$$

где величины A, B, C зависят от координат и скоростей двух частиц и определены соотношениями (6). Тогда лоренц-ковариантные двухчастичные уравнения (16) с определенными таким образом функциями $\psi_1(A, B, C)$ и $\psi_2(A, B, C)$ имеют в качестве одночастичного предела уравнения движения пробного тела в ОТО.

3.4. Сравнение с другим подходом. Совпадение (18) с уравнениями движения пробного тела в ОТО можно получить также в рамках так называемого полностью ковариантного формализма [18]. В этом подходе предполагается, что в данной лоренцевой системе взаимодействуют только те части траекторий частиц, которые соответствуют равным временам. В этом формализме уравнения движения имеют вид

$$w_{1v} = (x_v - y_1 v_{1v})f + (v_{2v} - y_4 v_{1v})g,$$

$$w_{2v} = -(x_v - y_2 v_{2v})F + (v_{1v} - y_4 v_{2v})G, \quad v = 1, \dots, 4.$$

Здесь $x_\mu = x_{1\mu}(t) - x_{2\mu}(t)$; v_{iv}, w_{iv} — 4-скорость и ускорение i -й частицы; $y_1 = (\mathbf{xv}_1)$, $y_2 = (\mathbf{xv}_2)$, $y_3 = (\mathbf{xx})$, $y_4 = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)$; f, g, F, G — функции инвариантов y_v . Условие лоренц-ковариантности приведенных уравнений движения накладывает ограничения на функции f, g, F, G . Оказывается [18], что эти функции должны удовлетворять системе четырех нелинейных дифференциальных уравнений. В потенциальном пределе одна из частиц, скажем, вторая, движется с постоянной скоростью. Тогда $G = F = 0$, и упомянутая система уравнений сводится к следующей линейной системе: $Df = 0$, $Dg + f = 0$, где D — дифференциальный оператор: $D = y_4 \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + 2y_2 \frac{\partial}{\partial y_3}$. Эти уравнения легко решить. Вот ответ: f может быть произвольной функцией двух следующих комбинаций инвариантов: $y_2^2 - y_3$ и $y_1 - y_4 y_2$; функция g равна

$$g = -f(y_2^2 - y_3, y_1 - y_4 y_2) y_1 y_4^{-1} + g_1,$$

где g_1 — опять-таки произвольная функция все тех же инвариантных комбинаций. Наличие двух произвольных функций позволяет, как и ранее, легко воспроизвести уравнение, совпадающее с уравнением движения пробной частицы в ОТО.

3.5. Описание экспериментов по проверке ОТО на основе СТО. Итак, совпадают тройки уравнений, в которых шварцшильдовский интервал в ОТО и лоренц-инвариантный интервал СТО выражены через координатное время t . Между тем традиционное описание трех классических опытов в рамках ОТО основано на использовании как пространственных, так и временной компонент уравнений движения. Докажем, что система трех уравнений (19) достаточна для описания трех опытов. Прежде всего вычислим интегралы углового момента. Из (17) или (19) следует

$$x_i \frac{d^2 x_j}{dt^2} - x_j \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \left(x_i \frac{dx_j}{dt} - x_j \frac{dx_i}{dt} \right) (\dot{x}\dot{x}) \mu,$$

откуда

$$\frac{x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i}{1 - 2m/r} = L_{ij} = \text{const.} \quad (22)$$

Точка над координатами означает дифференцирование по координатному времени. Интеграл энергии равен

$$\frac{(\dot{x}\dot{x})}{(1 - 2m/r)^2} + \frac{2m}{r^3} \frac{(\dot{x}\dot{x})^2}{(1 - 2m/r)^3} - \frac{2mc^2}{r - 2m} = \varepsilon. \quad (23)$$

Из (22) следует, что движение происходит в плоскости. Перепишем последние формулы, выбрав в качестве этой плоскости $z = 0$:

$$\frac{r^2 \dot{\phi}}{1 - 2m/r} = L, \quad \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}{(1 - 2m/r)^2} + \frac{2mr^2/r}{(1 - 2m/r)^3} - \frac{2mc^2}{r - 2m} = \varepsilon. \quad (24)$$

Исключая временную переменную t , получаем уравнение орбиты пробной частицы:

$$u_\phi^2 + (1 - 2mu)u^2 = \frac{2mu}{L^2} (c^2 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{L^2}, \quad u \equiv \frac{1}{r}, \quad u_\phi \equiv \frac{du}{d\phi}. \quad (25)$$

Дифференцируем по ϕ :

$$u_{\phi\phi} + u = 3mu^2 + mL^{-2}(c^2 - \epsilon). \quad (26)$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения пробной частицы в ОТО. Поэтому смещение перигелия планет оказывается одним и тем же. Далее, так как для фотона величина ϵ (энергия на единицу массы) равна c^2 , то (26) принимает вид $u_{\phi\phi} + u = 3mu^2$, что совпадает с уравнением распространения луча света в ОТО. Таким образом, величина отклонения все та же, что и в ОТО. Столь же элементарно доказывается совпадение времен задержки радиолокационных сигналов в ОТО (четвертый эффект ОТО) и данной лоренц-ковариантной теории. Для этого достаточно заметить, что уравнения (24) одинаковы как в ОТО, так и в данной теории. Перейдем к красному смещению. Идентифицируя полусумму первых двух членов как кинетическую энергию, что следует из нерелятивистского предела, и приравнявая ее к энергии фотона $h\nu$, получаем правильную величину красного смещения $\nu \sim GM/r$. Некоторая осторожность, однако, необходима. Уравнения (24) образуют полную систему. Поэтому невозможно для фотона дополнить их уравнением

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = c^2, \quad (27)$$

так как уравнения (27) и (24) оказываются несовместимыми. Соотношение (27) означает, что свет не взаимодействует с тяготением. Тот факт, что отсутствие такого взаимодействия ведет к многочисленным парадоксам и несовместимо с законом сохранения энергии, был отмечен А.Эйнштейном еще в 1911 г. [19]. Поэтому для распространения света мы не накладываем условия (27). Вместо этого мы рассматриваем движение фотонов и пробных тел с единой точки зрения и определяем фотоны как такие пробные частицы, скорость которых равна c на бесконечности (или в отсутствие тяготения). Тогда из соотношения (23) следует, что энергетическая константа ϵ для фотонов равна c^2 . Сказанное выше относится только к уравнению (24), которое было получено из более общего уравнения (18) с помощью весьма специфического выбора функций f_1 и f_2 , имевшего целью в точности воспроизвести уравнения движения ОТО. Элементарные вычисления показывают, что упрощенный электродинамический вариант двухчастичных сил, предложенный в [16,17], дает в потенциальном пределе неправильное значение смещения перигелия Меркурия, равное одной шестой наблюдаемого на опыте.

3.6. Сравнение с теорией Биркгофа. Любопытно сравнить результаты данного подхода с результатами полевой теории гравитации Дж.Биркгофа [20,21], близкой по духу к линеаризованной теории Эйнштейна, хотя при этом мы уже выходим за рамки классических теорий дальнего действия. Известно [21], что в линеаризованной ОТО невозможно одновременно описать все три «решающих опыта». Теория Биркгофа соответствует полностью плоскому пространству-времени и возникла намного позже ОТО (1943 г.).

Уравнения этой теории являются частным случаем уравнений (17) при следующем выборе функций ψ_1, ψ_2 :

$$\psi_1^B = -mc^2 - \frac{2mv^2}{1-\beta^2} \approx -mc^2 - 2mv^2, \quad \psi_2^B = \frac{m(\mathbf{rv})c}{r^3 \sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{m(\mathbf{rv})c}{r^3}. \quad (28)$$

Авторы работ [21] утверждают, что при таком выборе функций ψ_1, ψ_2 в первом порядке по $1/c^2$ правильно воспроизводятся смещение перигелия Меркурия, красное смещение и отклонение луча света в гравитационном поле. Сравним функции ψ_1, ψ_2 , отвечающие данному рассмотрению (20), и модели Биркгофа (28). Пренебрегая членами порядка более высокого, чем $1/c^2$, получаем

$$\psi_1 = -mc^2 \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{3v^2}{c^2} \right) + \frac{3m(\mathbf{rv})^2}{r^2}, \quad \psi_2 = \frac{mc}{r^3} (\mathbf{rv}), \quad (29)$$

$$\psi_1^B = -mc^2 - 2mv^2, \quad \psi_2^B = \psi_2. \quad (30)$$

Столь существенное отличие ψ_1 и ψ_1^B вынуждает нас проанализировать ситуацию более детально. Без ограничения общности можно считать, что движение происходит в плоскости $z=0$. Уравнения Биркгофа имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= -\frac{mc^2}{r^3} x - \frac{2mx}{r^3} V^2 + \frac{m(\mathbf{rV})}{r^3} \dot{x}, \quad V^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\frac{mc^2}{r^3} y - \frac{2my}{r^3} V^2 + \frac{m(\mathbf{rV})}{r^3} \dot{y}, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau}, \quad \dot{y} \equiv \frac{dy}{d\tau}. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда находим интегралы энергии и углового момента:

$$(V^2 + c^2) \exp(-2m/r) = c^2 + \tilde{\epsilon}, \quad (x\dot{y} - y\dot{x}) \exp(+m/r) = \lambda. \quad (32)$$

Исключая собственное время, находим уравнение орбиты, полученное Биркгофом:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = e^{2mu} [(c^2 + \tilde{\epsilon}) e^{2mu} - c^2], \quad u \equiv 1/r. \quad (33)$$

Пренебрегаем в (33) членами более высокого порядка, чем $1/c^2$:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 \left[1 - \frac{2m^2}{3\lambda^2} (3c^2 + 4\tilde{\epsilon})\right] = \lambda^{-2} [\tilde{\epsilon} + 2mu (c^2 + 2\tilde{\epsilon})].$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r = r_0 (1 + p \cos \omega \phi)^{-1}, \quad (34)$$

где

$$r_0 = \frac{\lambda^2 \omega^2}{m(c^2 + 2\tilde{\epsilon})}, \quad p = \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon} r_0^2}{\lambda^2 \omega^2}\right)^{1/2}, \quad \omega^2 = 1 - \frac{2m^2}{\lambda^2} (3c^2 + 4\tilde{\epsilon}).$$

Для движения планет $\tilde{\epsilon} < 0$, $|\tilde{\epsilon}| \ll c^2$, и поэтому

$$r_0 \approx \frac{\lambda^2}{mc^2}, \quad p \approx 1 - \frac{|\tilde{\epsilon}| \lambda^2}{2G^2 M^2}, \quad \omega \approx 1 - \frac{3m^2 c^2}{\lambda^2}.$$

В этом случае траектория пробной частицы близка к эллиптической. Смещение перигелия планеты за один оборот составляет $\Delta = \frac{6\pi m^2 c^2}{\lambda^2}$, что в точности совпадает с результатом, предсказываемым ОТО. Эффект красного смещения, являясь следствием закона сохранения энергии, легко выводится из интеграла энергии (32). Результат, как легко было предвидеть, совпадает с результатом ОТО.

Переходим к отклонению луча света в теории Биркгофа. В (32) удобно перейти от собственного времени τ к координатному t . После несложных преобразований получаем

$$v^2/c^2 = 1 - \exp(-2m/r) (1 + \tilde{\epsilon}/c^2)^{-1}, \quad v^2 \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \quad (35)$$

Попытаемся подобрать $\tilde{\epsilon}$ в (34) таким образом, чтобы получить правильное экспериментальное значение $\delta_{\text{эксп}}$ для угла отклонения светового луча вблизи солнечного диска. Этому условию удовлетворяет следующее значение $\tilde{\epsilon}$:

$$\tilde{\epsilon} = (c^2/2) (\delta_{\text{эксп}} r_{\text{мин}} / 4m - 1)^{-1}. \quad (36)$$

Здесь $r_{\text{мин}}$ — наименьшее удаление светового луча от центра притяжения.

Различные эксперименты дают для величины $\frac{\delta_{\text{эксп}} r_{\text{мин}}}{4m}$ общерелятивистское значение 1 с точностью от 2 до 15% [22]. Отсюда получаем следующие оценки: $\tilde{\epsilon} > 3c^2$ (15%); $\tilde{\epsilon} > 25c^2$ (2%), причем $\tilde{\epsilon} = \infty$, если угол отклонения света в точности совпадает с общерелятивистским значением.

Вычислим теперь время запаздывания отраженного радиолокационного сигнала. Ради простоты рассмотрим случай, когда радиосигнал распространяется в радиальном направлении. Тогда из (35) находим для времени задержки сигнала

$$\Delta t^B = \frac{2\Delta r}{c} (\sqrt{1 + c^2/\tilde{\epsilon}} - 1) + \frac{2mc}{\tilde{\epsilon}} \sqrt{1 + c^2/\tilde{\epsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (37)$$

ОТО (а следовательно, и данная версия подхода Пуанкаре) предсказывает следующее время задержки:

$$\Delta t = \frac{4m}{c} \ln \frac{r_2 - 2m}{r_1 - 2m} \approx \frac{4m}{c} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (38)$$

которое экспериментально подтверждается с большой точностью. До сих пор движение света ничем не отличалось от движения пробных тел. Определим теперь свет как такие пробные частицы, скорость которых равна c при отсутствии тяготения ($m = 0$) или на бесконечном удалении ($r = \infty$). Тогда из (35) следует, что $\tilde{\epsilon} = \infty$. При таком значении $\tilde{\epsilon}$ временная задержка радиолокационных сигналов равна нулю. Таким образом, давая правильные результаты для трех известных опытов ОТО, теория Биркгофа не может объяснить задержку радиолокационных сигналов.

3.7. Прецессия гироскопа. Существует, по-видимому, единственный опыт, осуществление которого намечено на 1996 г. [22], для которого предсказания ОТО и данной лоренц-ковариантной теории разнятся. Это прецессия гироскопа в гравитационном поле Земли. Угол прецессии гироскопа, установленного, например, на искусственном спутнике Земли, составляет на

один орбитальный оборот $\frac{3\pi GM}{Rc^2}$ в ОТО и $-\frac{\pi GM}{Rc^2}$ в данном варианте лоренц-ковариантной теории.

Последнее выражение получается следующим образом. Предполагаем, что прецессия гироскопа, находящегося на круговой орбите радиуса R , обязана прецессии Томаса. Для последней угол поворота «спина» (вектора, задающего ориентацию гироскопа) равен [23] $\Theta = -2\pi(\gamma - 1)$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, v — скорость «спина» на круговой орбите. Из (19) следует, что для круговой орбиты $\beta^2 = \frac{m}{R - 2m}$. Подставляя это значение в Θ и отбрасывая члены более высокого порядка, получаем приведенное частно-релятивистское выражение.

3.8. Другие методы рассмотрения релятивистской задачи. Рассмотренный подход является, по сути дела, релятивистской механикой. Соответствующая релятивистская полевая теория гравитации была построена А.А.Логуновым [24,25].

Очевидно, могут существовать разные релятивистские теории, описывающие «решающие» эксперименты и не сводящиеся к ОТО. Попытки промоделировать уравнения движения ОТО на основе введения специально подобранных сил в СТО ранее предпринимались неоднократно. Например, в серии интересных работ [26] было показано, что точное моделирование возможно только в том случае, если сила в СТО представляет собой полином четвертой степени от скоростей:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = \Omega_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} - \frac{dx^\alpha}{dt} \Omega_{\beta\gamma\delta} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} \frac{dx^\delta}{dt}. \quad (39)$$

В рассматриваемом случае Ω представляют собой разности коэффициентов связности плоского и кривого пространств. Докажем, что (39) эквивалентно (19). Будем использовать декартовы координаты. Тогда коэффициенты связности для плоского пространства равны нулю, а соотношение (39) есть уравнение движения в метрике Шварцшильда, которое совпадает с уравнением (19), если за параметр принять координатное время t . Это означает, что тройная сумма в правой части (39) трансформировалась в первый член правой части (19).

Система уравнений (16), определяющая движение частицы 1, должна быть дополнена системой уравнений для движения частицы 2. Выбор в (16) знака разности $t_1 - t_2 (= r/c)$ отвечает запаздывающему воздействию частицы

2 на частицу 1. Выбор $t_1 - t_2 = -\frac{r}{c}$ отвечал бы опережающему воздействию частицы 2 на частицу 1, т.е. действие частицы 2 достигает частицы 1 рань-

ше, чем оно покидает частицу 2. Итак, вместо (16) можно было бы взять полусумму запаздывающего и опережающего взаимодействий. При этом для случая, упомянутого в разд.2 [16,17], можно найти релятивистски-инвариантный лагранжиан [27] и, следовательно, получить в явном виде величины энергии, импульса, углового момента. В этом случае найдены частные точные решения релятивистской двухчастичной задачи [28]. При этом частицы вращаются по двум концентрическим окружностям с постоянной угловой скоростью. Точные решения, отвечающие движению по концентрическим окружностям, существуют и для случая короткодействующих двухчастичных взаимодействий [29]. Подобные же точные решения удастся получить и тогда, когда взаимодействие частицы 1 с частицей 2 является запаздывающим, а взаимодействие частицы 2 с частицей 1 является опережающим, при этом частицы 1 и 2 лежат на световом конусе. В этом случае, кроме движения по концентрическим окружностям, можно отыскать точное решение, отвечающее прямолинейному движению [30]. Если же запаздывающими являются как взаимодействие частицы 1 с 2, так и 2 с 1, точные решения неизвестны. В этом случае для медленных движений в (16) можно выполнить разложение по степеням $1/c^2$. При этом (16) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания. С точностью до членов $1/c^2$ включительно имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_{1i}}{dt^2} = & -\frac{GM_2}{r^3} \left[1 + \frac{\phi_1}{c^2} - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{3}{2} \frac{GM_1}{rc^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{rv}_2}{rc} \right)^2 \right] x_i + \\ & + \frac{v_{1i} - v_{2i}}{c^2} \left[\phi_2 + GM_2 r^{-3} (\mathbf{rv}_1) \right], \end{aligned} \quad (40)$$

где мы положили

$$\psi_1 \equiv -GM_2(1 + \phi_1/c^2), \quad \psi_2 \equiv \phi_2/c.$$

Все значения координат, скорости, ускорения взяты здесь в один и тот же момент времени t . Движение частицы 2 подчиняется точно такому же уравнению (с заменой индексов $1 \longleftrightarrow 2$). Система обыкновенных дифференциальных уравнений (40) может быть решена стандартными методами, если известны начальные положения и скорости частиц. Используя процедуру, описанную в конце п.3.3, находим ϕ_1 и ϕ_2 . С точностью до членов порядка $1/c^2$ имеем

$$\phi_1 = 3v^2 - 2G(M_1 + M_2)/r - 3(\mathbf{rv})^2/r^2, \quad \phi_2 = GM_2(\mathbf{rv})/r^3, \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

Подставляя ϕ_1 и ϕ_2 в (40), убеждаемся, что уравнения движения (33) отличаются от уравнений движения, которые следуют из приближенного лагранжиана Эйнштейна — Инфельда — Гофмана. Тем не менее потенциальный предел этих уравнений ($M_2 \rightarrow \infty$) один и тот же. Это частично связано с неоднозначностью восстановления двухчастичных функций из одночастичных.

Если движение не является медленным, но одна из масс существенно превышает другую, для решения системы (16) можно воспользоваться методом, предложенным в [31]. В первом приближении считаем движение большой массы M_2 прямолинейным. При заданном движении M_2 , пользуясь (16), вычисляем движение M_1 . Подставляя в уравнения движения для M_2 найденное движение M_1 , снова получаем движение M_2 , но с поправками порядка M_1/M_2 . Этот процесс продолжается до получения необходимой точности. В обоих приближенных случаях задание начальных положений и скоростей полностью определяет дальнейшую динамику двухчастичной системы. Но для точной системы уравнений (16) (плюс уравнения для движения второй частицы) из-за конечной скорости распространения взаимодействия задания положений и скоростей в какой-то момент времени недостаточно: необходимо задать начальные координаты и скорости на конечных участках траекторий частиц или задать в данный момент не только координаты и скорости, но также все высшие производные по времени от координат [32]. Поэтому приближенные решения составляют весьма малую часть множества точных решений. Одним из путей преодоления этих осложнений является введение подходящего эвристического принципа [33], который позволил бы ограничить множество решений. Конечно, остается открытым вопрос о соотношении этих принципов с экспериментальными данными.

В работе [34] была получена общая форма приближенно-инвариантного с точностью до $1/c^2$ релятивистского лагранжиана. Сравнивая уравнения движения (40) с уравнениями движения, вытекающими из лагранжиана из работы [34], легко восстановить лагранжиан, соответствующий уравнениям (40). Это, в свою очередь, определяет приближенные интегралы движения, соответствующие импульсу, энергии и угловому моменту.

3.9. Сравнение с галилеевой двухчастичной задачей. Обратимся еще раз к трем одночастичным уравнениям (18). При выборе функций ψ_1, ψ_2 с помощью формул (20) получается правильное описание трех решающих опытов ОТО. Поскольку уравнения (18) отнесены к системе покоя частицы 2, всякая информация о движении этой частицы отсутствует. Поэтому в уравнениях (18) отсутствует информация о движении системы двух частиц как целого, а следовательно, и о свойствах симметрии этого движения.

«Разморозить» эту степень свободы можно по-разному. Ранее мы требовали, чтобы полученные двухчастичные уравнения были лоренц-ковариантными. В этом случае для определения Ψ_1, Ψ_2 , входящих в (16), можно воспользоваться рецептом (21). С другой стороны, можно потребовать, чтобы уравнения (18) были потенциальным пределом галилеево-ковариантных двухчастичных уравнений. Последние выглядят следующим образом:

$$\frac{d^2 x_{li}}{dt^2} = F_1 x_i + F_2 v_i; \quad x_i \equiv x_{1i} - x_{2i}, \quad v_i \equiv v_{1i} - v_{2i} \quad (41)$$

Здесь F_1, F_2 — функции трех инвариантов группы Галилея: $r^2 = \sum x_i^2$, $v^2 = \sum v_i^2$, $(\mathbf{rv}) = \sum x_i v_i$. Если мы хотим, чтобы в потенциальном пределе уравнения (41) совпадали с уравнениями движения пробной частицы в ОТО (19), то мы должны следующим образом выбрать функции F_1, F_2 :

$$F_1 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \left[\frac{1}{2r} \frac{d\mu}{dr} (\mathbf{rv})^2 + \mu v^2 + mc^2 / r^3 \right],$$

$$F_2 = \mu(\mathbf{rv}), \quad \mu \equiv \frac{2m}{r^3} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1}, \quad m \equiv \frac{GM_2}{c^2}, \quad M \equiv M_1 + M_2. \quad (42)$$

При таком выборе воспроизводятся результаты трех «решающих» опытов ОТО. Попытки модификации законов ньютоновой механики известны давно (Гаусс, Риман, Вебер, Нейман). В таком подходе возможность приближенного описания опытов ОТО изучалась Тредером [35]. В отличие от этих работ уравнения (41) с определенными в (42) функциями в потенциальном пределе в точности воспроизводят уравнения движения ОТО. Несостоятельность этих попыток построения галилеевской ковариантной теории, включая и нашу, состоит в том, что, правильно описывая большинство эффектов ОТО, они не могут описать эффектов СТО — сокращения промежутков длины и времени и т.д.

4. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРУГОВОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Два тела с равными массами. Найдем условия, при которых уравнения (8), (9) имеют решения, отвечающие стационарному круговому движению. Массы частиц предполагаем одинаковыми, тогда движение

происходит по одной и той же окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью ω :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a \cos \omega t, & y_1 &= a \sin \omega t, \\x_2(t) &= -a \cos \omega t, & y_2 &= -a \sin \omega t.\end{aligned}\quad (43)$$

При подстановке (43) в уравнения (8) все величины, относящиеся к частице 2, следует взять в более ранний момент времени:

$$\begin{aligned}x_2 &= -a \cos \omega(t - t_0) = -a \cos(\omega t - \phi_0), \\y_2 &= -a \sin \omega(t - t_0) = -a \sin(\omega t - \phi_0).\end{aligned}\quad (44)$$

Поскольку движение стационарное, то $t_0 = \text{const}$, $\phi_0 = \omega t_0 = \text{const}$. Угол запаздывания ϕ_0 определяется из условия, что взаимодействие, распространяющееся со скоростью света, покинувшее частицу 2 в момент $t - t_0$, достигнет частицы 1 в момент времени t . Это приводит к следующему условию:

$$\beta = \frac{\omega a}{c} = \frac{\phi_0}{\sqrt{2(1 + \cos \phi_0)}} = \frac{\phi_0}{2 \cos(\phi_0/2)}.\quad (45)$$

Отсюда следует, что $\phi_0 = 0$ при $\beta = 0$ и достигает максимального значения ($\approx 85^\circ$) при $\beta = 1$. Итак, движение определяется двумя константами a и ω , а две другие связаны с ними соотношением (45). В дальнейшем нам понадобятся значения инвариантов $A, \dots, F$ для кругового движения, которые обозначим через $A_0, \dots, F_0$:

$$\begin{aligned}A_0 &= B_0 = a Z_0 (1 - \beta^2)^{-1/2}, & Z_0 &\equiv \beta \sin \phi_0 + \sqrt{2(1 + \cos \phi_0)}, \\C_0 &= (1 - \beta^2)^{-1} (1 + \beta^2 \cos \phi_0), & D_0 &= (1 - \beta^2)^{-3/2} a^2 \omega^3 \sin \phi_0, \\E_0 &= (1 - \beta^2)^{-1} (1 + \cos \phi_0) \omega^2 a^2, & F_0 &= (1 - \beta^2)^2 a^2 \omega^4.\end{aligned}\quad (46)$$

Подставляя (43), (44) в (8), получаем следующие два соотношения между функциями f :

$$\begin{aligned}f_3^0 \frac{\sin \phi_0}{\omega \sqrt{1 - \beta^2}} - f_4^0 \frac{\cos \phi_0}{1 - \beta^2} &= f_1^0 (1 + \cos \phi_0) \omega^{-2} + (1 - \beta^2)^{-1}, \\f_3^0 \frac{1 + \cos \phi_0}{\omega \sqrt{1 - \beta^2}} + f_4^0 \frac{\sin \phi_0}{1 - \beta^2} &= -f_1^0 (\sin \phi_0 + \beta \sqrt{2(1 + \cos \phi_0)}) \omega^{-2}.\end{aligned}\quad (47)$$

Здесь $f_i^0 = f_i(A, \dots, F) \big|_{A=A_0, \dots, F=F_0}$.

Разрешим эти уравнения относительно f_3^0, f_4^0 :

$$\frac{f_3^0}{\omega \sqrt{1-\beta^2}} = \left(\frac{f_1^0}{\omega^2} + \frac{1}{1-\beta^2} \right) \frac{\sin \phi_0}{1 + \cos \phi_0} - f_1^0 \frac{\beta \sqrt{2} \cos \phi_0}{\omega^2 \sqrt{1 + \cos \phi_0}},$$

$$\frac{f_4^0}{1-\beta^2} = -\frac{2f_1^0}{\omega^2} \left(1 + \frac{\beta \sin \phi_0}{\sqrt{2(1 + \cos \phi_0)}} \right) - (1-\beta^2)^{-1}. \quad (48)$$

Соотношения (47) или (48) могут служить тестом существования круговых стационарных движений в той или иной релятивистской двухчастичной задаче. Применим соотношения (47), (48) к релятивистскому круговому движению двух разноименно заряженных частиц ($e_1 = -e_2 = e$) с одинаковой массой m . В этом случае имеем

$$f_1^0 = -\epsilon \omega^2 \beta^{-2} (1-\beta^2)^{-1/2} [(1 + \beta^2 \cos \phi_0)^2 + \beta^3 \sin \phi_0 Z_0] Z_0^{-3},$$

$$f_3^0 = \epsilon \omega \beta^{-1} (1 + \beta^2 \cos \phi_0) Z_0^{-2}, \quad f_4^0 = \epsilon \sqrt{1-\beta^2} Z_0^{-1}. \quad (49)$$

Здесь $\epsilon = e^2/mc^2 a$ — безразмерная константа, по порядку величины равная отношению электрической энергии взаимодействия двух частиц к полной. Подставляя эти функции во второе из уравнений (47), получаем трансцендентное уравнение для ϕ_0 :

$$\beta(1 + \cos \phi_0) (1 + \beta^2 \cos \phi_0) Z_0 + \beta^2 Z_0^2 \sin \phi_0 =$$

$$= [(1 + \beta^2 \cos \phi_0)^2 + \beta^3 Z_0 \sin \phi_0] [\sin \phi_0 + \beta \sqrt{2(1 + \cos \phi_0)}]. \quad (50)$$

Здесь β выражается через ϕ_0 с помощью соотношения (45). Уравнение (50) имеет два следующих тривиальных решения:

1) $\phi_0 = 0$. В этом случае $\beta = 0$, т.е. частицы покоятся. Подставляя эти значения в первое уравнение (47), убеждаемся, что $\epsilon = 0$, что означает отсутствие взаимодействия;

2) $\beta = 1$ ($\phi_0 \approx 85^\circ$). Из первого уравнения (47) следует $\epsilon = \infty$. Это означает, что бесконечно сильное притяжение компенсируется центробежными силами при движении по окружности со скоростью света.

Вычисления показывают, что при $0 < \beta < 1$ уравнение (50) не имеет корней. Итак, в электромагнитном случае с запаздыванием отсутствуют решения, отвечающие круговому движению со скоростью, меньшей скорости света.

Выясним теперь, нет ли круговых стационарных движений в упрощенном варианте (15) уравнений Пуанкаре? Подставляем $f_3 = -f_1 \frac{A}{cC}$, $f_4 = 0$ во второе из уравнений (47). После упрощений получаем: $\beta \sqrt{2} \cos \phi_0 \sqrt{1 + \cos \phi_0} = \sin \phi_0$ или, с учетом (45), $\tan \phi_0 = \phi_0$.

В доступном для ϕ_0 интервале $0 \leq \phi_0 \leq 85^\circ$ есть только тривиальное решение $\phi_0 = 0$, $\beta = 0$, отвечающее отсутствию взаимодействия. Как и в предыдущем случае, стационарные круговые движения отсутствуют.

4.2. Примеры релятивистских двухчастичных сил, допускающих стационарные круговые движения. Выразим с помощью соотношений (46) константы a , ω через инварианты $A_0, \dots, F_0$:

$$a = \frac{E_0}{\sqrt{F_0} (2 - Y_0^2)}, \quad \omega = c E_0^{-1} \sqrt{F_0} Q_0 \left(\frac{X_0}{X_0 + Q_0} \right)^{1/2}. \quad (51)$$

Здесь X_0, Y_0 — следующие безразмерные комбинации инвариантов:

$$X_0 \equiv E_0 / c^2, \quad Y_0 \equiv D_0 (E_0 F_0)^{-1/2}, \quad Q_0 \equiv 2 - Y_0^2.$$

Поскольку констант движения a, ω две, а инвариантов $A_0, \dots, F_0$ шесть, то должны существовать четыре соотношения между инвариантами:

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 = (\sqrt{F_0} Q_0)^{-1} [Y_0 \sqrt{X_0} + \sqrt{2(X_0 + Q_0)}], \\ C_0 &= 1 + E_0 / c^2, \quad 1 - Y_0^2 = \cos \sqrt{\frac{2X_0 Q_0}{X_0 + Q_0}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Подставим ω и a из (51) в (48). Приведем первое из этих соотношений:

$$f_4^0 = -1 - f_1^0 \sqrt{2} E_0 (F_0 Q_0)^{-1} \left[\sqrt{2} + Y_0 \left(\frac{X_0}{X_0 + Q_0} \right)^{1/2} \right]. \quad (53)$$

Это соотношение имеет вид

$$f_4^0 = \Psi_4(f_1^0, A_0, B_0, \dots, F_0). \quad (54)$$

При подстановке ω и a во второе соотношение (48) получаем выражение, связывающее f_3^0 и f_1^0 :

$$f_3^0 = \Psi_3(f_1^0, A_0, B_0, \dots, F_0). \quad (55)$$

Рассмотрим теперь соотношения, получаемые из (53)—(55) заменой $A_0 \rightarrow A, \dots, F_0 \rightarrow F$. Тогда вместо (53), например, имеем

$$f_4 = -1 - f_1 \sqrt{2E(FQ)}^{-1} \left[\sqrt{2} + Y \left(\frac{X}{X+Q} \right)^{1/2} \right]. \quad (56)$$

Здесь $Y \equiv D/\sqrt{EE}$, $X \equiv E/c^2$, $Q \equiv 2 - Y^2$.

Такое же соотношение получается для f_3 . В итоге имеем

$$f_3 = \Psi_3(f_1, A, B, \dots, F), \quad f_4 = \Psi_4(f_1, A, B, \dots, F). \quad (57)$$

Подставим теперь выражения (57) в (18). Полученные уравнения содержат одну произвольную функцию $f_1(A, \dots, F)$. Эти уравнения переходят в условия кругового движения (47) при подстановке вместо инвариантов $A, \dots, F$ их выражений $A_0, \dots, F_0$, соответствующих круговому движению. Иначе говоря, уравнения (8) с функциями f_3, f_4 , выбранными в виде (56), (57), и произвольной функцией f_1 допускают решение (43), отвечающее круговому движению с произвольными a, ω . Однако, даже если функцию f_1 из физических или иных соображений зафиксировать, остается неопределенность двоякого рода. Во-первых, учтем, что инварианты $A_0, \dots, F_0$ не являются независимыми (см. соотношения (52)). Например, вместо E_0 в (53) можно было бы подставить $c^2(C_0 - 1)$, F_0 выразить через A_0 или B_0 с помощью второго соотношения (52) и т.д. Все эти соотношения полностью эквивалентны в силу (46). Однако при переходе от (54), (55) к (56) такая эквивалентность нарушается. В итоге будут получаться уравнения (8), (9), в которых f_3, f_4 по-разному связаны с f_1 , т.е. будем иметь различные двухчастичные релятивистские уравнения, допускающие одно и то же круговое движение с произвольными параметрами a, ω . Вторая неопределенность состоит в том, что соотношения (57) всегда можно умножить на произвольную функцию инвариантов $A, \dots, F$, сводящуюся к 1 для кругового решения, т.е. при $A = A_0, \dots, F = F_0$, так же как и добавить в правую часть произвольную функцию, обращающуюся в нуль для того же движения. Остающийся произвол все еще слишком велик. Попытаемся ограничить его требованием перехода релятивистских уравнений (8) в заданные нерелятивистские. В качестве примера можно потребовать, чтобы общие уравнения (8) переходили в обычные нерелятивистские гравита-

ционные уравнения, причем так, чтобы первые поправочные члены к ним имели порядок c^{-2} . Вернемся снова к исходным уравнениям (8). Коэффициент при ω_{2i} будет мал, если f_4 будет порядка c^{-2} . Ради простоты положим $f_4 = 0$. Далее, коэффициент, стоящий при x_i , должен с точностью до c^{-2} совпадать с $c - \gamma/r^3$ ($\gamma = \text{const}$). Проще всего этого можно достичь, положив $f_1 = -\gamma/B^3$. Наконец, еще одно условие совпадения с точностью c^{-2} уравнений (8) с гравитационными нерелятивистскими состоит в том, что

$$f_1 \frac{r}{c} + f_3(1 - \beta^2)^{-1/2} \sim O(c^{-2}) \quad \text{при } c \rightarrow \infty. \quad (58)$$

Проще всего этого добиться, если, следуя Пуанкаре, положить

$$f_3 = -f_1 A/cC.$$

Мы видели, однако, что при таком выборе функций f (см. выше) круговое движение отсутствует. Поэтому мы попытаемся подойти с другого конца. При этом будем придерживаться следующего плана. Сначала выясним, что означают первые два наших условия ($f_4 = 0, f_1 = -\gamma/B^3$) для кругового движения. Далее с помощью второй из формул найдем соотношение между f_3^0 и f_1^0 . Заменим в нем инварианты $A_0, \dots, F_0$ кругового движения на общие инварианты $A, \dots, F$. Тогда получится некоторое соотношение между f_3 и f_1 . Устремляя в нем $c \rightarrow \infty$, убедимся, что оно переходит в (58). Итак, подставляем $f_4 = 0, f_1 = -\gamma/B^3$ в (48):

$$2 - \gamma^{-1} \omega^2 a^3 Z_0^3 (1 - \beta^2)^{-3/2} + \sqrt{2} \beta \sin \phi_0 = 0. \quad (59)$$

Выясним физический смысл этого условия. Переходя к пределу при $c \rightarrow \infty$, получаем

$$\frac{\gamma}{4\omega^2} = a^3, \quad (60)$$

то есть третий закон Кеплера (квадрат периода пропорционален кубу полуоси). Таким образом, (54) является некоторым релятивистским обобщением третьего закона Кеплера. Остается выяснить, во что переходит второе из выражений (48) при таком выборе f_4, f_1 . Однако удобнее использовать второе из соотношений (47). Оно приводится к виду

$$f_3^0 = -f_1^0 a c^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} (\sin \phi_0 + \sqrt{2} \beta \sqrt{1 + \cos \phi_0}) (1 + \cos \phi_0)^{-1} \beta^{-1}. \quad (61)$$

Выражаем ϕ_0 , β , a через $A_0, \dots, F_0$:

$$f_3^0 = -\frac{f_1^0}{c} \frac{\sqrt{2X_0} + Y_0 (X_0 + Q_0)^{1/2}}{Y_0 \sqrt{X_0} + \sqrt{2} (X_0 + Q_0)^{1/2}} [X_0 (X_0 + Q_0)]^{-1/2}. \quad (62)$$

Следующий шаг состоит в том, что в (62) вместо инвариантов $A_0, \dots, F_0$ кругового движения подставляются их общие выражения (6), (7):

$$f_3 = -\frac{f_1}{c} \frac{\sqrt{2X} + Y(X + Q)^{1/2}}{Y \sqrt{X} + \sqrt{2} (X + Q)^{1/2}} [X(X + Q)]^{-1/2}. \quad (63)$$

Переходя, наконец, здесь к нерелятивистскому пределу, убеждаемся в справедливости (58).

Таким образом, релятивистские уравнения (8), (9) с $f_4 = 0$, $f_1 = \gamma/B^3$ и f_3 , определенной с помощью (63), допускают решения, отвечающие круговому движению (43). При этом ω и a оказываются связанными соотношением (59). В нерелятивистском пределе уравнения (8), (9) и условие (59) переходят в обычные ньютоновские гравитационные уравнения и третий закон Кеплера.

Заметим, что частные запаздывающие решения, отвечающие круговому движению, были ранее получены Дж. Сингом [36].

Полученные выше результаты становятся прозрачными для более простого случая — галилеевской механики двух частиц. В этом случае имеются два независимых галилеевски-ковариантных вектора: $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ (см., например, [33]). Отсюда следует общий вид уравнений, форминвариантных относительно преобразований Галилея:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = f_1 \mathbf{r} + g_1 \mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \quad (64)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -f_2 \mathbf{r} + g_2 \mathbf{v}. \quad (65)$$

В правую часть (64) можно было бы добавить член, пропорциональный ω_2 . Однако его можно было бы исключить с помощью (65), поскольку все члены уравнений относятся к одному и тому же времени. Далее, правые

части могли бы содержать слагаемое, пропорциональное векторному произведению $[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]$.

В этом случае движение не происходит в одной плоскости, даже если начальные радиус-векторы частиц и их скорости лежат в ней.

Теперь f и g — функции от трех независимых галилеевских инвариантов $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{v}^2$ и $(\mathbf{rv})$. Найдем условия, при которых уравнения (64), (65) имеют решения, отвечающие круговым движениям:

$$x_{1,2} = \pm a \cos \omega t, \quad y_{1,2} = \pm a \sin \omega t. \quad (66)$$

При этом действуем точно так, как и в релятивистском случае. Подставляя эти значения x, y в уравнения, получаем

$$f_1^0 = f_2^0 = -\omega^2/2, \quad g_1^0 = g_2^0 = 0. \quad (67)$$

Далее выписываем значения инвариантов для кругового движения

$$r_0^2 = 4a^2, \quad v_0^2 = \omega^2 a^2, \quad (\mathbf{rv}) = 0. \quad (68)$$

Записываем функции f_1^0 и g_1^0 через инварианты

$$f_1^0 = -2v_0^2/r_0^2, \quad g_1^0 = 0. \quad (69)$$

Наконец, в (67) заменяем инварианты r_0, v_0 на r, v :

$$f_1 = -2v^2/r^2, \quad g_1 = 0. \quad (70)$$

Таким образом, уравнения (64), (65) с функциями f и g , определенными выражениями (70), имеют решения, отвечающие круговому движению с произвольными a, ω . Понятно, что функции (70), при которых допустимо круговое движение, не самого общего вида. Обобщение тривиально и сводится, как мы уже упоминали выше для релятивистского случая, к умножению f_1 на произвольную функцию ϕ_1 инвариантов, обращающуюся в единицу при их значениях (68) и добавлению произвольных функций ϕ_2, ϕ_3 , обращающихся в нуль для кругового движения:

$$f_1 = -\frac{2v^2}{r^2} \phi_1 \left(\frac{(\mathbf{rv})}{rv} \right) + \phi_2 \left(\frac{(\mathbf{rv})}{rv} \right), \quad g_1 = \phi_3 \left(\frac{(\mathbf{rv})}{rv} \right),$$

$$\phi_1(0) = 1, \quad \phi_2(0) = \phi_3(0) = 0. \quad (71)$$

Понятно, что функции ϕ_1 могут зависеть только от безразмерных параметров. Единственным таким параметром является $(rv)/rv$, который в соответствии с (68) обращается в нуль для кругового движения.

Таким образом, уравнения (64), (65) с инвариантными функциями (71) имеют решения, отвечающие движению по окружности произвольного радиуса a и с произвольной частотой ω . Зафиксируем теперь f_1 так, чтобы получить нерелятивистскую гравитационную задачу двух тел: $f_1 = -\gamma/r^3$. Условие существования кругового решения имеет вид третьего закона Кеплера $\omega^2 = 2\gamma/a^3$.

Итак, в релятивистском и галилеевском случае ситуация довольно сходна. Существуют как решения, отвечающие произвольным a, ω , так и решения, при которых между a и ω существует определенная связь типа третьего закона Кеплера. Все же в релятивистском случае функциональный произвол значительно более широк.

5. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

При следующем выборе инвариантных функций f, g удастся отыскать решения, отвечающие прямолинейному движению:

$$f_1 = \gamma_1/A, \quad f_3 = f_4 = 0, \quad g_1 = \gamma_2/\tilde{A}, \quad g_3 = g_4 = 0,$$

$$\tilde{A} = (1 - \beta_2^2)^{-1/2} (\tilde{r} - \tilde{r}\mathbf{v}_2/c); \quad \gamma_1, \gamma_2 = \text{const.}$$

Тогда уравнения (8), (9) принимают вид

$$w_{1x} = \gamma_1 \frac{x_1 - \tilde{x}_2}{|x_1 - \tilde{x}_2|} (1 - \beta_1^2)^{3/2}, \quad w_{2x} = \gamma_2 \frac{x_2 - \tilde{x}_1}{|x_2 - \tilde{x}_1|} (1 - \beta_2^2)^{3/2}. \quad (72)$$

Знак тильды означает, что соответствующие величины должны браться в моменты времени $t - r/c$ или $t - \tilde{r}/c$ (см. разд.1). Нерелятивистский аналог уравнений (72) изучался Аппелем [37] (движение с постоянной силой взаимодействия). Поскольку релятивистский случай по сложности существенно отличается от нерелятивистского, за исключением того, что скорость частицы не может превышать скорости света, рассмотрим свойства решений (72) очень кратко. При $x_1 > \tilde{x}_2$ решения выглядят следующим образом:

$$x_1(t) = c^2 \gamma_1^{-1} (1 + N_1^2)^{1/2} - c^2 \gamma_1^{-1} (1 - \beta_{10}^2)^{-1/2} + x_1^0,$$

$$\beta_1(t) = N_1(1 + N_1^2)^{-1/2}, \quad N_1 \equiv \gamma_1 t / c + \beta_{10}(1 - \beta_{10}^2)^{-1/2},$$

$$x_2(t) = x_2^0 - c^2 \gamma_2^{-1} (1 + N_2^2)^{1/2} + c^2 \gamma_2^{-1} (1 - \beta_{20}^2)^{-1/2},$$

$$\beta_2(t) = N_2(1 + N_2^2)^{-1/2}, \quad N_2 \equiv -\gamma_2 t / c + \beta_{20}(1 - \beta_{20}^2)^{-1/2}.$$

Здесь $x_1^0, x_2^0, v_1^0, v_2^0, x_1, x_2, v_1, v_2$ — положения и скорости частиц в начальный ($t = 0$) и текущий моменты времени, $\beta_1 = v_1 / c, \beta_2 = v_2 / c, \beta_{10} = v_1^0 / c, \beta_{20} = v_2^0 / c$. При $x_2 > x_1$ справедливы аналогичные выражения. Для простоты будем считать массы частиц одинаковыми ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$). Рассмотрим сначала случай отталкивания ($\gamma > 0$). Пусть в начальный момент времени частицы покоятся и расположены симметрично относительно начала координат, $x_1^0 = -x_2^0 = x^0 > 0$. Тогда при $t > 0$ имеем

$$x_1(t) = -x_2(t) = x_0 + c^2 \gamma^{-1} [(1 + \gamma^2 t^2 / c^2)^{1/2} - 1],$$

то есть частицы разлетаются с нарастающей скоростью, которая стремится к c при $t \rightarrow \infty$. Пусть теперь начальные скорости частиц одинаковы по абсолютной величине, но направлены к началу координат, $v_2^0 = -v_1^0 = v_0 > 0$. Тогда при $t > 0$ скорости частиц начинают уменьшаться по абсолютной величине. Если начальная скорость не превосходит

$v_0^c = \frac{\sqrt{\gamma x_0(2 + \gamma x_0 / c^2)}}{1 + (\gamma x_0) / c^2}$, то частицы сближаются, останавливаются в момент

времени $t = \frac{v_0}{\gamma} (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ на расстоянии $\pm \left[x_0 - \frac{c^2}{\gamma} (1 - \beta_0^2)^{-1/2} + \frac{c^2}{\gamma} \right]$ от начала координат, а затем разлетаются, как в предыдущем случае. Если же $v_0 > v_0^c$, то частицы «встречаются» в начале координат, проходят «друг через друга» и снова разлетаются. Более интересен случай притяжения, $\gamma < 0$. Пусть частицы вначале покоятся $x_{10} = -x_{20} = x_0 > 0$. Тогда при $t > 0$ частицы сближаются, проходят через начало координат в момент времени

$t_0 = \sqrt{\frac{x_0}{|\gamma|}} \left(2 + \frac{|\gamma| x_0}{c^2} \right)$. После этого $x_1(t) - x_2(t) < 0$, то есть частица 1

левее частицы 2. При $t > t_0$ частицы замедляются, останавливаются при $t = 2t_0$ на расстоянии $\mp x_0$ от начала координат. После этого процесс пов-

торяется. В итоге получается периодическое движение с периодом $4t_0$ и амплитудой x_0 .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный подход Пуанкаре в значительной степени является феноменологическим. В самом деле, неизвестные произвольные функции могут выбираться либо при сравнении с экспериментом, либо с уравнениями Ньютона или ОТО. Недостатки такого подхода отчетливо выявляются при сравнении с общей теорией относительности Эйнштейна, в которой распределение материи определяет гравитационное поле и движение в нем. К сожалению, в ОТО до сих пор нет сколько-нибудь удовлетворительного решения и даже точной постановки задачи двух тел. В то же время в СТО существуют интересные возможности решения этой задачи.

О результатах по гравитационной задаче в данном подходе достаточно сказано во введении, поэтому не будем повторяться.

Далее, показано, что в релятивистской системе двух частиц, взаимодействующих чисто запаздывающими силами, возможны решения, отвечающие движению частиц одинаковой массы по одной и той же окружности произвольного радиуса a с произвольной постоянной угловой скоростью ω .

Найдены условия (47), которым должны удовлетворять релятивистские силы между частицами, чтобы такое движение было возможным. Даны примеры (56), (57) таких сил. Эти силы допускают значительный функциональный произвол. Его удастся в значительной мере ограничить, потребовав перехода в нерелятивистском пределе в заданные ньютоновы уравнения. В частности, оказывается возможным написать релятивистские уравнения для двух частиц, переходящие в нерелятивистском пределе в гравитационные ньютоновы уравнения и допускающие решения, отвечающие релятивистскому движению по окружности с постоянной угловой скоростью. При этом за счет сужения первоначального произвола параметры движения a и ω оказываются не произвольными, но связанными соотношением (59) — релятивистским аналогом третьего закона Кеплера. Показано также, что при специальном выборе инвариантных функций можно получить решения, отвечающие прямолинейному движению.

До работы Дж.Синга [36] и наших [14] подобные стационарные движения были известны только для случая полусуммы запаздывающего и опережающего взаимодействий, а также тогда, когда первая частица взаимодействует со второй запаздывающей силой, а вторая с первой — опережающей. В этих случаях были получены интегральные законы сохранения

энергии-импульса. Их наличие интерпретировалось как своеобразный баланс между запаздывающим и опережающим взаимодействием.

Возможность стационарного движения для чисто запаздывающего взаимодействия указывает на отсутствие излучения и позволяет надеяться на получение законов сохранения. Тем не менее этот вопрос остается пока открытым. Наконец, отметим, что данное рассмотрение не позволяет однозначным образом зафиксировать произвольные функции, входящие в уравнения Пуанкаре или им подобные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Newton J.S.** — *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Londini, 1686;
Ньютон И. — Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. (Перевод с лат. изд., 1871, изд. В.Томсон, Г.Блакбурн);
Newton I. — *Principia*. Berkeley, Univ. of California Press, 1934.
2. **Poincaré H.** — *Sur la dynamique de l'électron*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1906, vol.21, p.129;
Пуанкаре А. — Избранные труды: Пер. с франц. М.: Наука, 1974, т.3, с.433.
3. **Hill R.N.** — *J.Math. Phys.*, 1967, vol.8, p.201, 1756;
Jordan T.F. — *Phys. Rev.*, 1975, vol.D11, p.2807; *ibid*, 1978, vol.D17, p.2844; *The Theory of Action at a Distance in Relativistic Particle Dynamics*. Ed. by E.H.Kerner. New York, Gordon and Breach, 1972.
4. **Currie D.G., Jordan T.F.** — *Interactions in Relativistic Classical Particle Mechanics*. In: *Lectures at the Theoretical Physics Inst.*, New York, Gordon and Breach, 1968.
5. **Van Dam H., Wigner E.P.** — *Phys. Rev.*, 1965, vol.138, p.1576; *ibid*, 1966, vol.142, p.838;
Katz A. — *J. Math. Phys.*, 1969, vol.10, p.1929, 2215;
Pearle P.M. — *Phys. Rev.*, 1968, vol.168, p.1429;
Degasperis A. — *Phys. Rev.*, 1971, vol.D3, p.273.
6. **Wheeler J.A., Feynman R.P.** — *Rev. Mod. Phys.*, 1949, vol.21, p.425.
7. **Bruhns B.** — *Phys. Rev.*, 1973, vol.D8, p.2370;
Fahline D.W. — *J. Math. Phys.*, 1977, vol.18, p.1006; *ibid*, 1979, vol.20, p.1118; *ibid*, 1981, vol.22, p.1640.
8. **Dettman J.W., Schild A.** — *Phys. Rev.*, 1954, vol.95, p.1057;
Schild A. — *Phys. Rev.*, 1963, vol.131, p.2762;
Anderson C.M., Bayer H.C. — *Ann. Phys.*, New York, 1970, vol.60, p.67.
9. **Wheeler J.A., Feynman R.P.** — *Rev. Mod. Phys.*, 1945, vol.17, p.157;
Pegg D.T. — *Rep. Progr. Phys.*, 1975, vol.38, p.1339.
10. **Driver R.D.** — *Ann. Phys.*, New York, 1969, vol.21, p.122;
Driver R.D., Norris M.J. — *ibid*, 1967, vol.42, p.347;
Driver R.D. — *Phys. Rev.*, 1969, vol.178, p.2051;
Zhdanov V.I. — *Int. J. Theor. Phys.*, 1976, vol.15, p.157;
Hsing D.K. — *Phys. Rev.*, 1977, vol.D16, p.974;
Murdock J.A. — *Ann. Phys.*, New York, 1979, vol.119, p.90.

11. Голубенков В.Н., Смородинский Я.А. — ЖЭТФ, 1956, т.31, с.330.
12. Barker В.М., O'Connel R.F. — Ann. Phys., New York, 1980, vol.129, p.358; Can. J. Phys., 1980, vol.58, p.1659;
Persides S., Pascalis J. — Ann. Phys., New York, 1974, vol.87, p.161;
Herman W.N., Havas P. — Phys. Rev., 1978, vol.D17, p.1985.
13. Визгин В.П. — Релятивистская теория тяготения. М.: Наука, 1981.
14. Afanasiev G.N., Asanov R.A. — In: Proc. of the Int. Seminar «Group Theoretical Methods in Physics», Zvenigorod, 1979. М.: Наука, 1980, т.2, с.117;
Afanasiev G.N., Asanov R.A. — Ann. d. Physik Leipz., 1981, B.38, S.169;
Асанов Р.А., Афанасьев Г.Н. — Препринт ОИЯИ P2-85-357, Дубна, 1985.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Теория поля. М.: Наука, 1973;
Landau L., Lifshitz E. — The Classical Theory of Fields. Oxford, Pergamon Press, 1985.
16. Minkowski H. — Gott. Nachr., 1907, p.472.
17. Брежнев В.С. — В кн.: Тр. Всесоюзн. НИИ оптикофизических измерений, теор. и мат. физика, М.: ВНИИОФИ, 1972, сер.А, вып.1, с.139.
18. Kerner Е.Н. — (см. [3]);
Droz-Vincent Ph. — Ann. Inst. H.Poincaré, 1977, vol.27, p.407;
Martin J., Sanz J.L. — J. Math. Phys., 1977, vol.19, p.1887;
Wray J.C. — Phys. Rev., 1969, vol.D1, p.2212.
19. Einstein A. — Ann. d. Physik., 1911, B.35, S.898 (Перевод в кн.: Эйнштейн А. — Собрание научных трудов, М.: Наука, 1965, т.1, с.165).
20. Birkhoff G.D. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1943, vol.29, No.8, p.231.
21. Barajas A. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1944, vol.30, (No.3), p.54;
Barajas A. et al. — Phys. Rev., 1944, vol.66, p.138.
22. Will C.M. — Int. J. Mod. Phys. D, 1992, vol.1, No.1, p.13;
Will C.M. — Science 1990, vol.250, No.4982, p.770;
Will C.M. — Nature, 1990, vol.47, No.6293, p.516.
23. Møller K. — The Theory of Relativity. Oxford, Clarendon Press, 1972 (Пер.: Меллер К. — Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975).
24. Логунов А.А. — Лекции по теории относительности. М.: Изд. МГУ, 1984.
25. Логунов А.А. — Основные принципы релятивистской теории гравитации. М.: Изд. МГУ, 1992;
Логунов А.А. — УФН, 1995, т.165, №2, с.187.
26. Петров А.З. — В сб.: Гравитация и теория относительности. Изд-во Казанского университета, 1968, №4—5, с.7,22; там же, 1969, №6, с.7; 1970, №7, с.3;
Шавахина Н.С. — там же, 1970, №7, с.135.
27. Wheeler J.A., Feynman R.P. — Rev. Mod. Phys., 1945, vol.17, p.157; ibid, 1949, vol.21, p.425.
28. Schild A. — Phys. Rev., 1963, vol.131, p.2762.
29. Andersen C.M., Bayer H.C. — Ann. of Phys., 1970, vol.60, p.67.
30. Bruhns B. — Phys. Rev., 1973, vol.D8, p.2370.
31. Synge J.L. — Proc. Roy. Soc., 1940, vol.A177, p.118.
32. Anderson J.L. — Principles of Relativity Physics. New York, Acad. Press, 1967.
33. Черников Н.А., Шавахина Н.С. — Препринты ОИЯИ, P2-10375, Дубна, 1977; P2-11295, 1978; P2-12813, 1979.

34. **Woodcock H.W., Havas P.** — Phys. Rev., 1972, vol.D6, p.3422.
35. **Treder H.J.** — Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip. Berlin, Akad. Verlag, 1971;
Treder H.J. — Die Relativität der Trägheit. Berlin, Akad. Verlag, 1972 (Переводы: Тредер Г.Ю. — Теория гравитации и принцип эквивалентности. М.: Атомиздат, 1973; Тредер Г.Ю. — Относительность инерции. М.: Атомиздат, 1975).
36. **Synge J.L.** — In: Magic Without Magic. Ed. J.A.Wheeler, San Francisco, Freeman, 1972, p.117.
37. **Appell P.** — Traité de mécanique rationnelle. Paris, Gauthier — Villars, 1902, vol.1, 1953 (Перевод: Аппель П. — Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960, т.1, с.335).

ПРОБЛЕМА ФАЗЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ

Б.К.Мурзахметов, А.В.Чижов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор современного состояния проблемы описания фазы квантованного электромагнитного поля. Подробно изложены два подхода к получению фазовых распределений, используемых для вычисления квантово-механических средних от фазовых наблюдаемых. Один из подходов основан на использовании эрмитова оператора фазы и его собственных состояний. В другом подходе фазовые средние вычисляются при помощи фазовых распределений, получаемых посредством интегрирования функций распределения квазивероятности по радиальной переменной. На примере конкретных неклассических состояний света проводится сравнение этих двух подходов.

A survey of a modern status of phase description of the quantized electromagnetic field is given. Two approaches for obtaining phase distributions used in calculation of quantum-mechanics averages over phase observables are considered in detail. One of the approaches is based on using a Hermitian phase operator and its eigenstates. In another approach phase averages are calculated with the help of phase distributions obtained by integration of quasiprobability distribution functions over a radial variable. Taking specific nonclassical states of light as an example, a comparison of the two approaches is made.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике традиционной математической моделью одной моды электромагнитного поля является квантовый гармонический осциллятор (Дирак, 1927 [1]). Собственные состояния оператора энергии осциллятора образуют базис в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Успехи квантовой электродинамики, основанной на подходе Дирака, неоспоримы. Однако в течение долгого времени природа фазы квантованного поля оставалась неясной. Модель осциллятора позволяет легко определить

*Постоянный адрес: 480082, Казахстан, г. Алма-Ата, Институт ядерной физики, Национальный ядерный центр РК

эрмитов оператор энергии (пропорциональный оператору числа частиц $\hat{N}$ [2]), но в рамках этой модели не удастся определить соответствующий эрмитов оператор фазы [3—5]. Это ставит фазовую переменную в почти уникальную позицию: классическая наблюдаемая не имеет соответствующего эрмитова оператора (похожие проблемы возникают в связи с квантовым описанием угла поворота [5]).

Пока большинство оптических экспериментов имело дело с тепловыми источниками, испускающими свет в хаотическом или вакуумном состоянии со случайным распределением фазы, проблема квантового описания фазовой переменной была не столь важной. Однако в связи с изобретением и широким использованием в экспериментах мазеров и лазеров, а также интенсивным изучением в последнее десятилетие сжатых состояний света, возобновился интерес к этой проблеме. Дело в том, что лазер, работающий при значительном превышении порога генерации, излучает свет, находящийся в когерентном возбужденном состоянии. Кроме того, высокая интенсивность лазерного излучения позволяет исследовать нелинейные процессы взаимодействия света с веществом, а именно в таких процессах возможна генерация сжатых состояний света. Когерентное и сжатое состояния уже не имеют равномерного распределения по фазе и проявляют нетривиальные фазовые свойства.

Первая попытка построить эрмитов оператор фазы принадлежит Дираку. В своей основополагающей статье [2] по квантованию электромагнитного поля он постулировал существование эрмитова оператора фазы $\hat{\phi}$, сопряженного оператору числа фотонов $\hat{N}$. Он предположил, что оператор числа фотонов и оператор фазы должны удовлетворять каноническому коммутационному соотношению

$$[\hat{N}, \hat{\phi}] = i, \quad (1)$$

и что операторы уничтожения $\hat{a}$ и рождения $\hat{a}^\dagger$ одномодового электромагнитного поля можно представить в полярной форме:

$$\hat{a} = \exp(i\hat{\phi})\sqrt{\hat{N}}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{N}}\exp(-i\hat{\phi}). \quad (2)$$

Трудности этого подхода были ясно показаны Сасскиндом и Глоговером [4]. Во-первых, применяя соотношение неопределенностей Гейзенберга к коммутатору (1), получим

$$\Delta\hat{N}\Delta\hat{\phi} \geq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что состояние с хорошо определенным числом фотонов будет иметь неопределенность фазы больше, чем 2π . Это признак того, что коммутатор (1) не учитывает свойства периодичности фазы. Во-вторых,

при вычислении матричных элементов коммутатора (1) в базисе фоковских состояний возникает несоответствие типа « $0 = 1$ »:

$$(n' - n) \langle n' | \hat{\phi} | n \rangle = i\delta_{nn'}.$$

Но основная трудность заключается в явной неунитарности оператора $\hat{U} = \exp(i\hat{\phi})$, в чем можно легко убедиться, комбинируя коммутационное соотношение $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ и выражения (2). Это дает $\hat{U}\hat{N}\hat{U}^\dagger = \hat{N} + 1$, что нарушает унитарность. Таким образом, подход Дирака не позволяет построить эрмитов оператор фазы $\hat{\phi}$.

Для того чтобы найти подходящие квантовые переменные, рассмотрим классическую проблему осциллятора в терминах скобок Пуассона. Переменные действия J и угла ϕ вводятся следующим преобразованием (Лернер, 1966 [6]):

$$p = (2m\omega J)^{1/2} \sin \phi(t),$$

$$x = (2J/m\omega)^{1/2} \cos \phi(t).$$

Гамильтониан системы не зависит от ϕ :

$$H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2 = \omega J.$$

Следовательно, J является константой, тогда как $\sin \phi$ и $\cos \phi$ зависят от времени:

$$\frac{d}{dt} \cos \phi(t) = \{ \cos \phi(t), H \} = \omega \sin \phi(t),$$

$$\frac{d}{dt} \sin \phi(t) = \{ \sin \phi(t), H \} = -\omega \cos \phi(t). \quad (4)$$

Требование периодичности фазовой переменной привело к идее искать операторные аналоги $\cos \phi(t)$ и $\sin \phi(t)$, а не самой функции $\phi(t)$ (Люиселл, 1963 [3]). Согласно принципу соответствия

$$\{A, B\} \leftrightarrow (1/i\hbar) [\hat{A}, \hat{B}].$$

Классическим фазовым переменным в (4) должны соответствовать операторы «косинуса» $\hat{C}$ и «синуса» $\hat{S}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d\hat{C}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{C}, \hat{H}] = \omega \hat{S},$$

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{S}, \hat{H}] = -\omega \hat{C}. \quad (5)$$

Учитывая, что $\hat{H} = \hat{N}\hbar\omega$, приводим (5) к виду

$$[\hat{C}, \hat{N}] = i\hat{S}, \quad [\hat{S}, \hat{N}] = -i\hat{C}. \quad (6)$$

Для того чтобы решить уравнения (6), Сасскинд и Глоговер ввели экспоненциальные операторы

$$\hat{E}_{\pm} = \hat{C} \mp i\hat{S}. \quad (7)$$

Так как операторы $\hat{C}$ и $\hat{S}$ предполагаются эрмитовыми, то

$$\hat{E}_{\pm} = (\hat{E}_{\mp})^{\dagger}.$$

В классическом пределе $\hat{E}_{\pm}$ соответствуют функциям $\exp(\mp i\phi)$, где ϕ — классическая фазовая переменная.

Из уравнений (6) и (7) следует, что

$$[\hat{E}_{\mp}, \hat{N}] = \pm \hat{E}_{\mp}.$$

Отсюда находим

$$\hat{N}(\hat{E}_{\pm} |n\rangle) = \hat{E}_{\pm}(\hat{N} \pm 1) |n\rangle = (n \pm 1) (\hat{E}_{\pm} |n\rangle).$$

Чтобы избежать отрицательных собственных значений оператора $\hat{N}$, Сасскинд и Глоговер ввели дополнительное условие $\hat{E}_{-} |0\rangle = 0$.

Таким образом, операторы $\hat{E}_{\pm}$ являются, соответственно, повышающим и понижающим операторами:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{+} |n\rangle &= |n+1\rangle, \\ \hat{E}_{-} |n\rangle &= |n-1\rangle, \\ \hat{E}_{-} |0\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Вычисляя матричные элементы операторов $\hat{E}_{\pm} \hat{E}_{\mp}$ в базисе фоковских состояний, легко показать, что операторы Сасскинда — Глоговера являются не унитарными, а лишь «односторонне унитарными» [5]:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{-} \hat{E}_{+} &= \hat{I}, \\ \hat{E}_{+} \hat{E}_{-} &= \hat{I} - |0\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (9)$$

Причиной тому является обрыв в нуле спектра собственных значений оператора $\hat{N}$. Неунитарность операторов Сасскинда — Глоговера приводит к проблемам интерпретации описываемой ими фазы. В частности, операторы «косинуса» и «синуса» не коммутируют:

$$[\hat{C}, \hat{S}] = (1/2i) (\hat{E}_{-} \hat{E}_{+} - \hat{E}_{+} \hat{E}_{-}) = (1/2i) |0\rangle\langle 0|,$$

и, следовательно, не могут быть операторными функциями общего оператора фазы. Кроме того, не выполняется тригонометрическое тождество $\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = \hat{I} - |0\rangle\langle 0|$. И, наконец, вакуумные средние от операторов $\hat{C}^2$ и $\hat{S}^2$ равны 1/4, а не 1/2, как должно быть для вакуума — состояния с равномерно распределенной фазой. Заметим, однако, что эти проблемы существенны лишь для слабых полей. В случае сильных полей операторы Сасскинда — Гловера ведут себя хорошо, они были широко использованы при исследовании фазы в разных проблемах квантовой оптики [5], [7—11].

Таким образом, попытки построить эрмитов оператор фазы в бесконечномерном гильбертовом пространстве потерпели неудачу. Сасскинд и Гловер [4] подчеркивали, что главная трудность в правильном определении фазового оператора лежит в ограниченности снизу спектра собственных значений оператора числа фотонов. Существуют два возможных способа преодоления этой трудности. Первый способ — расширение спектра собственных значений оператора энергии гармонического осциллятора путем присоединения к нему состояний с отрицательным числом фотонов [12]. Однако такие состояния не имеют физического смысла, и для унитарных фазовых операторов, которые можно определить в этом подходе, не существует схемы измерения. Другим способом решения проблемы полуограниченности спектра гармонического осциллятора является рассмотрение пространства состояний гармонического осциллятора конечной размерности. Некоторыми авторами (Гаррисон и Вонг [13], Попов и Ярунин [14,15], Леви-Леблонд [16], Сантанам [17,18], Бергоу и Энглерт [19]) были предприняты попытки построения эрмитова оператора фазы в конечномерном пространстве с последующим предельным переходом к бесконечномерному гильбертову пространству. В конечномерном пространстве удается построить эрмитов оператор фазы $\hat{\phi}_r$ и унитарный оператор $\hat{U}_r = \exp\{i\hat{\phi}_r\}$, который является просто экспоненциальной функцией от $i\hat{\phi}_r$ (здесь r — размерность конечномерного пространства). Операторы, действующие в бесконечномерном гильбертовом пространстве, могут быть получены вычислением матричных элементов операторов $\hat{\phi}_r$ и $\hat{U}_r$ для конечных фоковских состояний и последующим взятием предела $r \rightarrow \infty$. Эта процедура приводит к новым операторам $\hat{\phi}$ и $\hat{V}$ (полученным как пределы от $\hat{\phi}_r$ и $\hat{U}_r$ соответственно). Однако при применении предельной процедуры к самому пространству и к операторам, действующим в нем, возникали определенные проблемы. В отличие от его аналога в конечномерном пространстве, оператор $\hat{V}$ является не унитарным, а лишь односторонне унитарным, как

операторы Сасскинда — Глоговера (9). Оператор $\hat{V}$ не коммутирует со своим эрмитово сопряженным оператором $\hat{V}^\dagger$, и, следовательно, они не являются операторными функциями общего оператора фазы. В частности, оператор $\hat{V}$ не может быть получен взятием экспоненты от $i\hat{\phi}_r$. Это является следствием способа предельного перехода к бесконечномерному пространству: предел операторной функции от $\hat{\phi}_r$ не является тем же самым, что операторная функция соответствующего предела от $\hat{\phi}_r$ [20]. Отсутствие функциональных соотношений для фазовых операторов в гильбертовом пространстве приводит к проблемам при вычислении различных средних. Так, дисперсия фазы для фоковских состояний выражается формулой [15]:

$$\langle (\Delta\phi)^2 \rangle \equiv \langle n | (\hat{\phi} - \langle \hat{\phi} \rangle)^2 | n \rangle = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Для больших n дисперсия стремится к величине $\pi^2/3$, что совпадает с ожидаемой величиной дисперсии для состояния с равномерно распределенной фазой. Однако для малых n дисперсия меньше этой величины и в предельном случае вакуумного состояния равна лишь половине величины, характерной для состояния со случайно распределенной фазой.

Альтернативный формализм построения эрмитова оператора фазы в конечномерном гильбертовом пространстве был недавно предложен Пеггом и Барнеттом [21—23]. В этом подходе предельный переход к бесконечномерному пространству производится после вычисления средних значений функций фазового оператора. Важным достоинством этого формализма является возможность введения фазового распределения, что оказалось весьма удобным при описании фазовых свойств неклассических состояний электромагнитного поля.

Существует также подход к описанию фазовых свойств электромагнитного поля, не связанный с самим понятием оператора фазы и его собственных состояний. Шапино, Шепардом и Уонгом был предложен фазовый формализм, основанный на использовании квантовой теории оценок и операторных вероятностных мер [26]. Используя в качестве базиса для операторной вероятностной меры собственные состояния фазовых операторов Сасскинда — Глоговера, они, в частности, показали, что для физических состояний, т.е. состояний с конечным средним числом фотонов, их подход дает такие же результаты, что и подход Пегга — Барнетта [27].

Другой подход основывается на использовании функций распределения квазивероятности. Фазовые распределения в этом подходе получаются путем интегрирования функций распределения квазивероятности, таких как Q -функция, функция Вигнера и $\mathcal{P}$ -функция Глаубера — Сударшана, по ра-

диальной переменной. Рассмотрение проблем определения соответствующих функций фазового распределения можно найти в работах [24,25].

Еще один подход к проблеме описания фазы, называемый операционным, был предложен в экспериментах Но, Фужера и Манделя [28—31]. Идея этого подхода заключается в использовании различных схем измерения для определения операторов косинуса и синуса разности фаз двух электромагнитных полей, подаваемых на входы гомодинного детектора. Вид определенных таким образом фазовых операторов существенно зависит от выбора схемы измерения. Это привело авторов к заключению, что не существует однозначно определенного фазового оператора. Однако, несмотря на принципиально иную идею в определении оператора фазы в данном подходе, в недавних работах [32—34] было указано на соответствие фазового распределения Но — Фужера — Манделя распределению, получаемому интегрированием Q -функции.

Совсем недавно был разработан экспериментальный метод, названный оптической гомодинной томографией [35—37], который позволяет получить информацию о фазе поля по восстановленной матрице плотности квантового состояния. Теоретической предпосылкой этого метода явилась работа Фогеля и Рискена [38], в которой рассматривалась проблема косвенного определения функции Вигнера в схеме гомодинного детектирования. Теоретические обсуждения способов измерения различных фазовых распределений с помощью данного метода содержатся в работах [39,40].

В данном обзоре основное внимание будет уделено рассмотрению двух широко обсуждаемых в последнее время подходов к описанию фазы — формализму Пегга — Барнетта и квазивероятностному подходу. В разд.2 мы подробно рассмотрим основные принципы фазового формализма Пегга — Барнетта, построение эрмитова оператора фазы и функции фазового распределения. Раздел 3 посвящен проблемам введения фазовых распределений состояний электромагнитного поля, связанных с функциями распределения квазивероятности. В этом разделе мы укажем также на связь между операторным и квазивероятностным подходами. В разд.4 на примере конкретных состояний электромагнитного поля дается сравнение этих двух подходов к описанию фазы поля.

Проблема описания фазы электромагнитного поля по-прежнему привлекает к себе внимание исследователей, и число ссылок на литературу, посвященную этому вопросу, постоянно растет. Поэтому в данном обзоре мы не ставили целью привести полный список литературы, а ограничились лишь необходимым количеством ссылок, требуемых для ознакомления с этой проблемой. Различные аспекты проблемы фазы можно найти в недавно появившихся обзорах Барнетта и Дальтона [41], а также Танася, Мирановича и Ганцого [42].

2. ФАЗОВЫЙ ФОРМАЛИЗМ ПЕГГА — БАРНЕТТА

2.1. Эрмитов оператор фазы. При построении эрмитова оператора фазы Пегг и Барнетт [21—23] исходили из существования состояний с точно определенной фазой в гильбертовом пространстве:

$$|\theta\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta) |n\rangle, \quad (10)$$

где $|n\rangle$ — фокковские состояния, покрывающие $(s+1)$ -мерное пространство состояний Ψ . Состояние с нулевой фазой выбирается как состояние, в котором все фокковские состояния в разложении (10) имеют одинаковые веса. Предельный переход необходим для нормирования состояний. Главная идея Пегга и Барнетта состоит в том, что сначала надо работать в $(s+1)$ -мерном пространстве Ψ (где s может быть сколь угодно большим), и только после того, как все физические величины (средние значения, дисперсии и т.п.) вычислены, переходить к пределу $s \rightarrow \infty$.

Параметр θ в фазовом состоянии (10) может принимать любое действительное значение, но различные фазовые состояния $|\theta\rangle$ существуют для всех значений θ только в заданном интервале $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$, где θ_0 — относительная фаза. Существует несчетное множество различных фазовых состояний даже в конечномерном пространстве состояний Ψ . Фазовые состояния образуют переполненный базис и не являются ортогональными. Однако нетрудно показать, что состояния со значениями θ , отличающимися друг от друга на величину $2\pi/(s+1)$, умноженную на целое число, ортогональны. Следовательно, задавая относительное состояние $|\theta_0\rangle$:

$$|\theta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_0) |n\rangle,$$

можно найти полный набор $(s+1)$ ортонормированных фазовых состояний:

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_m) |n\rangle, \quad (m=0, 1, \dots, s), \quad (11)$$

где $(s+1)$ значений θ_m определяются формулами

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}, \quad (m=0, 1, \dots, s).$$

Набор фазовых состояний $|\theta_m\rangle$ можно использовать как ортонормированный базис в пространстве Ψ . Состояния с определенным числом фотонов $|n\rangle$ можно разложить по базисным фазовым состояниям $|\theta_m\rangle$:

$$|n\rangle = \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s \exp(-in\theta_m) |\theta_m\rangle. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) выражают взаимосвязь между фазовым и фоковским состояниями. Из них следует, что система, которая находится в состоянии с определенным числом фотонов, может быть найдена с равной вероятностью в любом фазовом состоянии $|\theta_m\rangle$, а система, находящаяся в фазовом состоянии, может быть найдена с равной вероятностью в любом состоянии с определенным числом фотонов.

На основе ортонормированных фазовых состояний (11) можно построить оператор фазы следующим образом:

$$\hat{\phi}_\theta = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|.$$

Очевидно, $\hat{\phi}_\theta$ является эрмитовым оператором и удовлетворяет уравнению

$$\hat{\phi}_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle.$$

Унитарный оператор фазы $\exp(i\hat{\phi}_\theta)$ можно определить как экспоненциальную функцию от эрмитова оператора фазы $\hat{\phi}_\theta$. Он будет коммутировать с оператором $\exp(-i\hat{\phi}_\theta)$. Эти два экспоненциальных оператора фазы имеют общие собственные векторы:

$$\exp(\pm i\hat{\phi}_\theta) |\theta_m\rangle = \exp(\pm i\theta_m) |\theta_m\rangle.$$

Свойства оператора $\exp(i\hat{\phi}_\theta)$ определяются его действием на фоковское состояние

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{\phi}_\theta) |n\rangle &= \exp\left[i \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \right] |n\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s \exp[-i(n-1)\theta_m] |\theta_m\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

где использовано разложение (12). Для $n > 0$ результирующим состоянием (13) будет просто фоковское состояние $|n-1\rangle$:

$$\exp(i\hat{\phi}_\theta) |n\rangle = |n-1\rangle.$$

Для вакуумного состояния получим

$$\frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s \exp(i\theta_m) | \theta_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \exp[i(s+1)\theta_0] \sum_{m=0}^s \exp(-is\theta_m) | \theta_m \rangle = \\ = \exp[i(s+1)\theta_0] | s \rangle.$$

Поэтому в представлении фоковских состояний $\exp(i\hat{\phi}_\theta)$ имеет вид

$$\exp(i\hat{\phi}_\theta) = \sum_{n=0}^{s-1} | n \rangle \langle n+1 | + \exp[i(s+1)\theta_0] | s \rangle \langle 0|. \quad (14)$$

В пределе $s \rightarrow \infty$ первый член в (14) совпадает с оператором Сасскинда — Глоговера. Необходимо подчеркнуть, что, в отличие от унитарного оператора Пегга — Барнетта, экспоненциальный оператор Сасскинда — Глоговера

$$\hat{E}_- = \sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle \langle n+1 |$$

определен как целое и не является унитарным.

Из унитарного оператора фазы $\exp(i\hat{\phi}_\theta)$ можно построить эрмитовы операторы косинуса и синуса. Эти операторы обладают свойствами, требуемыми для описания фазы. В частности, они удовлетворяют соотношениям

$$\cos^2 \hat{\phi}_\theta + \sin^2 \hat{\phi}_\theta = 1,$$

$$[\cos \hat{\phi}_\theta, \sin \hat{\phi}_\theta] = 0,$$

$$\langle n | \cos^2 \hat{\phi}_\theta | n \rangle = \langle n | \sin^2 \hat{\phi}_\theta | n \rangle = \frac{1}{2}.$$

В отличие от случая фазового оператора Сасскинда — Глоговера последнее соотношение справедливо и для вакуумного состояния. Это согласуется с тем, что фаза для вакуумного состояния, как состояния с определенным числом фотонов, случайно распределена. Среднее значение и дисперсия фазы в фоковском состоянии $| n \rangle$ имеют вид

$$\langle n | \hat{\phi}_\theta | n \rangle = \theta_0 + \pi,$$

$$\langle (\Delta \hat{\phi}_\theta)^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3},$$

как и должно быть для состояний со случайно распределенной фазой.

2.2. Фазовое распределение. Важным достоинством формализма Пегга — Барнетта является возможность введения фазового распределения веро-

ятности. Фазовые состояния образуют полный ортонормированный базис в пространстве состояний Ψ , и поэтому вероятность нахождения системы в данном фазовом состоянии мы можем записать в виде

$$P(\theta_m) = \langle \theta_m | \hat{\rho} | \theta_m \rangle,$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности, описывающая состояние системы. Мы будем рассматривать главным образом «физические» состояния [23], которые можно получить (хотя бы в принципе) в реальном эксперименте. Используя формализм Пегга — Барнетта, мы выведем некоторые общие формулы для «физических» состояний, которые позволяют описывать фазовые свойства оптических полей весьма эффективным образом.

Рассмотрим разложение чистого квантового состояния поля по фоковскому базису:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^s c_n |n\rangle. \quad (15)$$

Используя соотношение (12), можно получить разложение этого состояния по базису фазовых состояний:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_n \sum_m c_n \exp(-in\theta_m) |\theta_m\rangle.$$

Фазовое распределение вероятности определяется формулой [21—23]:

$$|\langle \theta_m | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} \left| \sum_n c_n \exp(-in\theta_m) \right|^2. \quad (16)$$

Имея фазовое распределение, можно вычислить среднее значение и дисперсию фазы:

$$\langle \psi | \hat{\phi}_\theta | \psi \rangle = \sum_m \theta_m |\langle \theta_m | \psi \rangle|^2,$$

$$\langle (\Delta \hat{\phi}_\theta)^2 \rangle = \sum_m (\theta_m - \langle \hat{\phi}_\theta \rangle)^2 |\langle \theta_m | \psi \rangle|^2.$$

Будем называть состояние $|\psi\rangle$ состоянием с частично определенной фазой, если ее амплитуду можно написать в виде

$$c_n = b_n e^{in\varphi}. \quad (17)$$

Тогда фазовое распределение вероятности (16) принимает вид

$$|\langle \theta_m | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} \left| \sum_n b_n \exp[in(\varphi - \theta_m)] \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+1} \sum_{n>k} b_n b_k \cos [(n-k)(\varphi - \theta_m)]. \quad (18)$$

Среднее значение и дисперсия оператора $\hat{\Phi}_\theta$ будут зависеть от выбираемого значения θ_0 . Для состояний с частично определенной фазой более удобным и физически ясным способом выбора θ_0 является симметризация фазового окна по отношению к фазе φ . Это означает, что

$$\theta_0 = \varphi - \frac{\pi s}{s+1}, \quad (19)$$

и после введения нового индекса фазы

$$\mu = m - \frac{s}{2} \quad (20)$$

для фазового распределения вероятности (18) получаем формулу

$$|\langle \theta_\mu | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+1} \sum_{n>k} b_n b_k \cos \left[(n-k) \frac{2\pi\mu}{s+1} \right], \quad (21)$$

где μ пробегает все целые значения от $-s/2$ до $s/2$. Поскольку распределение (21) симметрично по отношению к μ , мы, согласно (19)—(21), непосредственно получаем

$$\langle \psi | \hat{\Phi}_\theta | \psi \rangle = \varphi.$$

Это является общим и очень важным результатом для состояний с частично определенной фазой, которое можно прямо применить, например, для любого когерентного состояния. При таком выборе относительной фазы θ_0 дисперсия фазового оператора имеет, в частности, простой вид

$$\langle (\Delta \hat{\Phi}_\theta)^2 \rangle = \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \sum_{\mu=-s/2}^{s/2} \mu^2 |\langle \theta_\mu | \psi \rangle|^2. \quad (22)$$

Для «физических» состояний можно ввести непрерывную функцию распределения фазы, переходя к непрерывным переменным. Поскольку $(s+1)/2\pi$ есть плотность фазовых состояний, определим функцию распределения фазы выражением

$$P(\theta_\mu) = \frac{s+1}{2\pi} |\langle \theta_\mu | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k}^s b_n b_k \cos [(n-k)\theta_\mu] \right\}, \quad (23)$$

где

$$\theta_\mu = \frac{2\pi}{s+1} \mu, \quad \mu = -s/2, \dots, s/2.$$

Заметим, что m -й момент оператора числа фотонов $\hat{N}$ в пределе $s \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\langle \psi | \hat{N}^m | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^m |b_n|^2. \quad (24)$$

Поскольку для «физических» состояний значение (24) конечно для любого конечного m , остаток ряда в правой части (24) $\sum_{n=t}^{\infty} n^m |b_n|^2$ исчезает в пределе $t \rightarrow \infty$. Математически это означает, что для любого заданного $\epsilon > 0$ мы можем найти число $M(\epsilon)$ такое, что для всех $t > M(\epsilon)$

$$\sum_{n=t}^{\infty} n^m |b_n|^2 < \epsilon.$$

Поэтому всегда найдется такое число t , что $b_n \rightarrow 0$ для всех $n > t$. Поскольку в формализме Пегга — Барнетта параметр s является конечным, но сколь угодно большим, выбирая значение $s > t$, мы спокойно можем заменить верхний предел суммы в (23) на ∞ (т.е. перейти к пределу $s \rightarrow \infty$). В этом пределе можно ввести непрерывную фазовую переменную заменой $\theta_\mu = \mu 2\pi / (s + 1)$ через θ и $2\pi / (s + 1)$ через $d\theta$. Тогда мы получим следующее общее выражение для фазового распределения вероятности:

$$P^{(PB)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos [(n-k)\theta] \right\}, \quad (25)$$

с нормировкой

$$\int_{-\pi}^{\pi} P^{(PB)}(\theta) d\theta = 1.$$

Следует подчеркнуть, что мы ввели функцию распределения фазы (25) исключительно для «физических» состояний, с которыми обычно приходится иметь дело в реальных физических ситуациях. В общем случае, если состояние не является «физическим», надо использовать распределение (23).

Теперь нетрудно вычислить среднее значение любой функции от оператора фазы $f(\hat{\phi}_\theta)$ с помощью простого интегрирования:

$$\langle f(\hat{\phi}_\theta) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} P^{(PB)}(\theta) f(\theta) d\theta,$$

где $P^{(PB)}(\theta)$ определяется выражением (25). Это означает, что если известна функция распределения $P^{(PB)}(\theta)$, то все квантово-механические фазовые средние можно вычислить с помощью этой функции классическим образом. В частности, формулу (22) для дисперсии оператора фазы можно переписать в виде

$$\langle (\Delta \hat{\phi}_\theta)^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 P^{(PB)}(\theta) d\theta.$$

После интегрирования по θ получаем

$$\langle (\Delta \hat{\phi}_\theta)^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n>k} b_n b_k \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^2}.$$

Слагаемое $\pi^2/3$ представляет собой значение дисперсии для равномерно распределенной фазы.

Формализм Пегга — Барнетта открыл широкие возможности для исследования фазовых свойств оптических полей. Этот формализм позволяет вычислять не только такие «традиционные» фазовые характеристики, как косинус и синус фазы, но и функцию фазового распределения, среднее значение и дисперсию фазы для данной моды и корреляцию фаз разных мод, что было невозможно для других подходов. В последние годы формализм Пегга — Барнетта широко использовался в приложении к различным проблемам квантовой оптики. В частности, были исследованы фазовые свойства фоковского [43], когерентного [43], одномодового сжатого [44], парного когерентного [45], двухмодового сжатого вакуумного [46,47] состояний, и когерентного света, взаимодействующего с двухуровневым атомом [48]. Исследована также квантовая динамика фазы в некоторых нелинейных оптических системах [49—54]. С использованием формализма Пегга — Барнетта построены состояния с минимальной неопределенностью число—фаза [55] и с минимальным фазовым шумом [56].

3. КВАЗИВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ФАЗЫ

3.1. Функции распределения квазивероятности. Статистическое описание микроскопической системы обычно формулируется в терминах ее оператора плотности $\hat{\rho}$. Известное выражение для статистического среднего значения измерений микроскопической наблюдаемой $\hat{F}$ имеет вид

$$\langle \hat{F} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{F} \}.$$

Для определенных, важных в физике, классов операторов $\hat{F}$ возможна запись их средних значений в виде интегралов, подобных интегралам по фазовому пространству в классической теории вероятности [57,58]. При этом статистическая информация переходит от оператора плотности $\hat{\rho}$ к весовой функции $w(\alpha)$, комплексный аргумент которой представляет точку в фазовом пространстве системы. Среднее значение $\langle \hat{F} \rangle$ записывается в виде интеграла от произведения весовой функции $w(\alpha)$ и функции $f(\alpha)$, соответствующей оператору $\hat{F}$:

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{F} \} = \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha) f(\alpha) d^2 \alpha.$$

Интегрирование производится по всем возможным состояниям системы, т.е. по всей комплексной плоскости α . Функцию $w(\alpha)$ не всегда можно интерпретировать как распределение вероятности, но она играет настолько похожую роль, что ее называют функцией распределения квазивероятности.

В силу того, что квантово-механические операторы в общем случае не коммутируют, существует множество способов, которыми можно установить соответствие между функциями $w(\alpha)$ и $f(\alpha)$ и операторами $\hat{\rho}$ и $\hat{F}$. С функцией $|\alpha|^2$, например, можно сопоставить и нормально-упорядоченный оператор $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, и антинормально-упорядоченный оператор $\hat{a} \hat{a}^\dagger$, и симметризованное произведение $\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)$. Наиболее полезные соответствия основаны на этих трех типах упорядочения.

Введенное Глаубером [59,60] и Сударшаном [61] $\mathcal{P}$ -представление для оператора плотности

$$\hat{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha$$

дает удобный способ вычисления средних от нормально-упорядоченных операторов. В силу того, что все операторы плотности являются эрмитовыми и обладают единичным следом, $\mathcal{P}$ -функция, когда существует, может быть выбрана действительной и нормированной на единицу:

$$1 = \text{Tr} \hat{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\alpha) d^2 \alpha.$$

Введем в рассмотрение нормально-упорядоченную характеристическую функцию

$$\chi_N(\xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(\xi \hat{a}^\dagger) \exp(-\xi^* \hat{a}) \}. \quad (26)$$

$\mathcal{P}$ -функцию можно получить из функции $\chi_N(\xi)$ с помощью двумерного фурье-преобразования:

$$\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \exp(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi) \chi_N(\xi).$$

$\mathcal{P}$ -функция Глаубера — Сударшана существует и является неотрицательной для хаотических световых полей (гауссовское распределение) и когерентных лазерных полей (распределение в виде δ -функции). Для полей с неклассической статистикой фотонов $\mathcal{P}(\alpha)$ — не обязательно неотрицательная функция с хорошим поведением (Клаудер и Сударшан [62] показали, что она существует, но в виде чрезвычайно сингулярных распределений).

Перейдем теперь к рассмотрению представления для оператора плотности, которое используется для усреднения симметрично-упорядоченных операторов. Весовой функцией этого представления является введенная Вигнером функция распределения квазивероятности $W(\alpha)$.

Как было показано Кахиллом и Глаубером [57,58], произвольный оператор плотности можно записать в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) \hat{D}^{-1}(\xi) d^2\xi,$$

где $\hat{D}(\xi) = \exp(\xi \hat{a}^\dagger - \xi^* \hat{a})$ — оператор смещения. Весовая функция $\chi(\xi)$ равна среднему значению оператора $\hat{D}(\xi)$:

$$\chi(\xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{D}(\xi) \}. \quad (27)$$

Это соотношение является известным определением характеристической функции, которая в квантовой статистике играет роль, аналогичную роли характеристической функции в классической теории вероятности. Функция Вигнера определяется как фурье-образ характеристической функции:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi) \chi(\xi) d^2\xi.$$

Функция $W(\alpha)$ отличается только нормировкой от функции распределения $W(q, p)$, введенной Вигнером [63] в качестве квантово-механического аналога распределения в фазовом пространстве классической статистической механики. Существует и другое представление функции Вигнера [57,58]:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{D}(2\alpha) \exp(i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}) \}, \quad (28)$$

которое будет использовано нами для получения фазового распределения квазивероятности, связанного с функцией Вигнера.

Перейдем теперь к рассмотрению функции, которая позволяет выразить средние значения антинормально-упорядоченных операторов в виде простых интегралов. По аналогии с уравнениями (26) и (27) можно ввести антинормально-упорядоченную характеристическую функцию:

$$\chi_A(\xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(-\xi^* \hat{a}) \exp(\xi \hat{a}^\dagger) \}.$$

Q -функция определяется как фурье-образ этой характеристической функции:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha \xi^* - \alpha^* \xi) \chi_A(\xi) d^2 \xi.$$

Эта функция может быть также представлена в виде

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle,$$

из которого следует, что Q -функция неотрицательна на всей фазовой плоскости.

Функции $\chi_N(\xi)$, $\chi(\xi)$ и $\chi_A(\xi)$ связаны простыми соотношениями:

$$\chi_N(\xi) = \exp(|\xi|^2/2) \chi(\xi),$$

$$\chi_A(\xi) = \exp(-|\xi|^2/2) \chi(\xi).$$

До сих пор мы рассматривали случай одной моды электромагнитного поля. Данное рассмотрение естественно обобщается на случай двух мод [64]. Определим двухмодовые характеристические функции, соответствующие нормальному, симметричному и антинормальному упорядочению операторов:

$$\chi_N(\eta, \xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(\eta \hat{a}^\dagger) \exp(\xi \hat{b}^\dagger) \exp(-\eta^* \hat{a}) \exp(-\xi^* \hat{b}) \},$$

$$\chi(\eta, \xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}) \exp(\xi \hat{b}^\dagger - \xi^* \hat{b}) \},$$

$$\chi_A(\eta, \xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(-\eta^* \hat{a}) \exp(-\xi^* \hat{b}) \exp(\eta \hat{a}^\dagger) \exp(\xi \hat{b}^\dagger) \}.$$

Эти характеристические функции связаны соотношениями:

$$\chi_N(\eta, \xi) = \exp(|\eta|^2/2) \exp(|\xi|^2/2) \chi(\eta, \xi),$$

$$\chi_A(\eta, \xi) = \exp(-|\eta|^2/2) \exp(-|\xi|^2/2) \chi(\eta, \xi).$$

Двухмодовые функции распределения квазивероятности можно получить из соответствующих характеристических функций с помощью четырехмерного фурье-преобразования:

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha \eta^* - \alpha^* \eta) \exp(\beta \xi^* - \beta^* \xi) \chi_N(\eta, \xi) d^2 \eta d^2 \xi,$$

$$W(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha \eta^* - \alpha^* \eta) \exp(\beta \xi^* - \beta^* \xi) \chi(\eta, \xi) d^2 \eta d^2 \xi,$$

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha \eta^* - \alpha^* \eta) \exp(\beta \xi^* - \beta^* \xi) \chi_A(\eta, \xi) d^2 \eta d^2 \xi.$$

Эти функции будут использованы нами в дальнейшем при изучении фазовых свойств двухмодовых состояний электромагнитного поля.

3.2. Фазовые распределения квазивероятности. Фазовое распределение Пегга — Барнетта (25) является положительно определенным, нормированным и 2π -периодическим, и, таким образом, удовлетворяет требованиям, налагаемым на функцию распределения вероятности фазы. Однако фазовые распределения, которые являются нормированными и 2π -периодическими, можно получить также, проинтегрировав функции распределения квазивероятности по радиальной переменной.

Идея использования функций распределения квазивероятности для описания фазы носит не только формальный математический характер, но имеет также и физическое обоснование. Как было показано Шапиро и Вагнером [65], с помощью гетеродинного метода измерения можно определить фазу θ измеряемой моды (θ определяется относительно фазы локального осциллятора). При этом фазовое распределение представляет собой проинтегрированную по радиальной переменной Q -функцию [66,67]:

$$P^{(Q)}(\theta) = \int_0^{\infty} Q(\alpha) |\alpha| d|\alpha|. \quad (29)$$

На другой пример такого распределения указали Фрейбергер, Фогель и Шлейх, рассматривая 8-портовую схему гомодинного детектирования эксперимента группы Мандела [28—30]. Моменты фазовых операторов, измеренных в этом эксперименте, были непосредственным образом связаны с проинтегрированной по радиальной переменной Q -функцией [32,33]. Такие измерения фазы являются эффективно «классическими», поскольку Q -функция соответствует одновременному измерению двух некоммутирующих наблюдаемых [65,66].

Авторами работы [67] была установлена взаимосвязь между фазовым распределением Пегга — Барнетта и «классическим» распределением фазы (29). Для состояния (15) Q -функция имеет вид

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} b_n e^{in(\varphi - \theta)}|^2, \quad (30)$$

где использовано обозначение $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$. Интегрируя (30) по радиальной переменной $|\alpha|$, получаем

$$\begin{aligned} P^{(Q)}(\theta) &= \int_0^{\infty} Q(\alpha) |\alpha| d|\alpha| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)(\theta - \varphi)] G^{(Q)}(n, k) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$G^{(Q)}(n, k) = \frac{\Gamma((n+k)/2 + 1)}{\sqrt{n!k!}}. \quad (31)$$

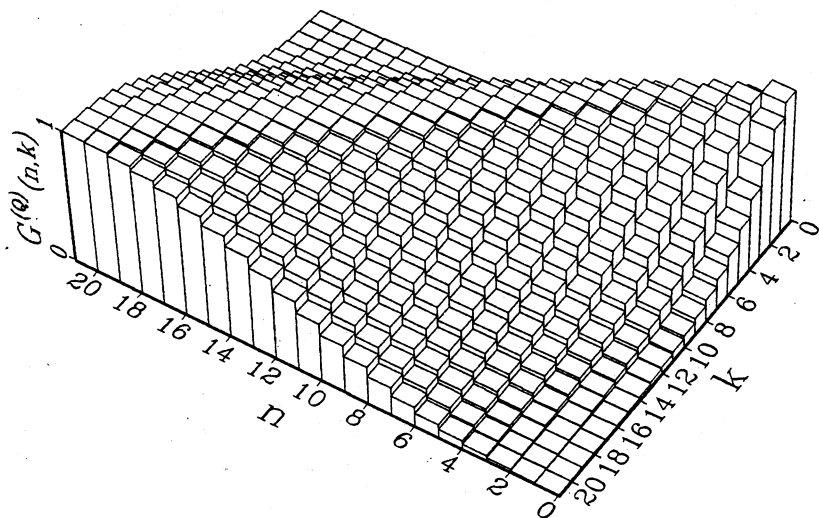
Для сравнения с функцией $P^{(PB)}(\theta)$ мы симметризуем окно фазовых значений θ относительно φ . Тогда «классическая» функция распределения фазы принимает следующий вид [67, 68]:

$$P^{(Q)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] G^{(Q)}(n, k) \right\}. \quad (32)$$

Функция $P^{(Q)}(\theta)$, так же, как и функция $Q(\alpha)$, положительно определена и нормирована следующим образом:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P^{(Q)}(\theta) d\theta = 1.$$

Из сравнения формул (32) и (25) видно, что «классическое» распределение $P^{(Q)}(\theta)$ отличается от распределения Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta)$ только дополнительным фактором $G^{(Q)}(n, k)$. Коэффициенты $G^{(Q)}(n, k)$ симметричны, $G^{(Q)}(n, k) = G^{(Q)}(k, n)$, и их диагональные элементы равны единице: $G^{(Q)}(n, n) = 1$. Распределение коэффициентов $G^{(Q)}(n, k)$ показано на рис.1. Видно, что чем дальше мы удаляемся от диагонали $G^{(Q)}(n, n) = 1$, тем меньшим становится значение $G^{(Q)}(n, k)$. Зная коэффициенты $G^{(Q)}(n, k)$, мы прямо можем получить фазовое распределение

Рис. 1. Распределение коэффициентов $G^{(Q)}(n, k)$

квазивероятности $P^{(Q)}(\theta)$ из распределения Пегга — Барнетта умножением его недиагональных элементов на их «вероятность» $G^{(Q)}(n, k)$. Такую процедуру можно рассматривать как некое усреднение фазового распределения Пегга — Барнетта. Это приводит к сглаживанию и уширению распределения, в результате которого теряется часть фазовой информации. Поэтому распределение $P^{(Q)}(\theta)$ менее информативно, чем распределение Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta)$.

Концепция интерференции в фазовом пространстве, введенная Шлейхом и Уилером [69], указывает на возможность получения другого фазового распределения квазивероятности при помощи интегрирования функции Вигнера по радиальной переменной [70]. Пусть матрица плотности $\hat{\rho}$ описывает состояние с частично определенной фазой:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

где $|\psi\rangle$ определяется формулами (15) и (17). Воспользовавшись выражением (28), запишем функцию Вигнера в следующем виде:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n, k} b_n b_k e^{i(n-k)\varphi} \langle k | \hat{D}(2\alpha) | n \rangle e^{i\pi n}.$$

Матричные элементы оператора смещения в фоковском базисе определяются формулой [57,58]:

$$\langle k | \hat{D}(2\alpha) | n \rangle = \left(\frac{n!}{k!} \right) (2\alpha)^{k-n} e^{-2|\alpha|^2} L_n^{k-n}(4|\alpha|^2), \quad k > n, \quad (33)$$

где $L_n^{k-n}(4|\alpha|^2)$ — присоединенные полиномы Лагерра. Выделим теперь фазу комплексного числа α , записав $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$. Интегрируя функцию Вигнера по радиальной переменной $|\alpha|$ и симметризуя окно фазовых значений θ относительно φ , получаем фазовое распределение квазивероятности:

$$\begin{aligned} P^{(W)}(\theta) &= \int_0^\infty W(\beta) |\beta| d|\beta| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{\substack{n,k=0 \\ n>k}}^\infty b_n b_k \cos[(n-k)\theta] G^{(W)}(n, k) \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

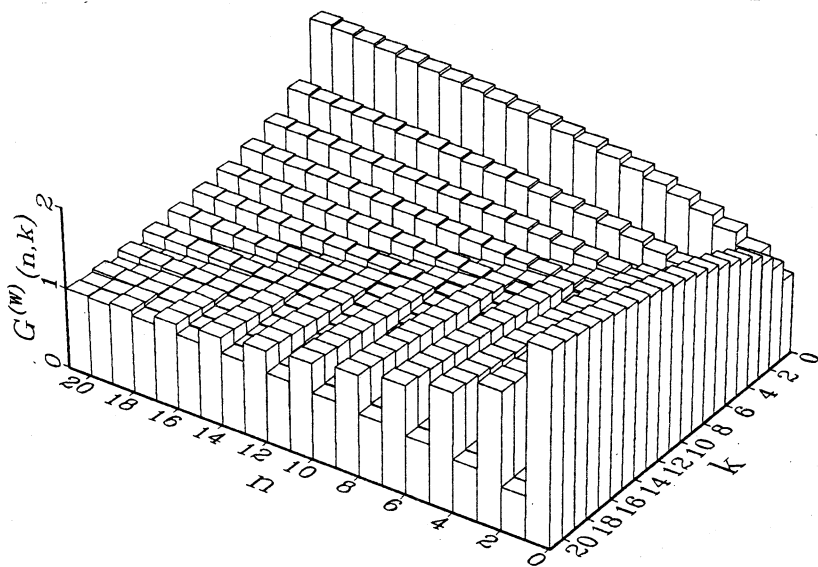
где коэффициенты $G^{(W)}(n, k)$ определяются формулой:

$$\begin{aligned} G^{(W)}(n, k) &= \sum_{m=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-m} 2^{(|n-k| + 2m)/2} \times \\ &\times \sqrt{\binom{\lambda}{m} \binom{\nu}{\lambda-m}} G^{(Q)}(m, |n-k| + m), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\lambda = \min(n, k), \quad \nu = \max(n, k), \quad (36)$$

и $G^{(Q)}(m, |n-k| + m)$ определяются формулой (31). Коэффициенты $G^{(W)}(n, k)$ являются симметричными, $G^{(W)}(n, k) = G^{(W)}(k, n)$, и их диагональные элементы равны единице, $G^{(W)}(n, n) = 1$. Распределение коэффициентов $G^{(W)}(n, k)$ приведено на рис.2. Видно, что вне диагонали эти коэффициенты принимают значения как меньше, так и больше единицы. Это приводит к тому, что распределение $P^{(W)}(\theta)$ является более «резким» по сравнению с фазовым распределением $P^{(PB)}(\theta)$. Кроме того, так как функция Вигнера может принимать отрицательные значения, то положительная определенность распределения $P^{(W)}(\theta)$ не гарантирована, что создает проблемы интерпретации этого распределения как распределения вероятности.

Рис. 2. Распределение коэффициентов $G^{(W)}(n, k)$

По аналогии с фазовыми распределениями, связанными с Q -функцией и функцией Вигнера, можно также определить фазовое распределение, соответствующее $\mathcal{P}$ -функции Глаубера — Сударшана. Однако, как было отмечено выше, $\mathcal{P}$ -функция для неклассических состояний либо отрицательна, либо сильно сингулярна, что делает невозможным определение соответствующего фазового распределения для этих состояний. Поэтому фазовое распределение, связанное с $\mathcal{P}$ -функцией, может быть определено только для квазиклассических состояний. В следующем разделе на примере сжатых хаотических состояний мы определим это фазовое распределение и сравним его с введенными выше тремя распределениями.

В заключение отметим, что фазовые распределения, связанные с Q -функцией и функцией Вигнера, могут быть выражены одной аналитической формулой следующего вида:

$$P^{(S)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k}^{\infty} b_n b_k \cos [(n-k)\theta] G^{(S)}(n, k) \right\}, \quad (37)$$

где коэффициенты $G^{(S)}(n, k)$ определяются выражениями (31) для Q -функции ($S=Q$) и (35) для функции Вигнера ($S=W$). В соотношение (37) мож-

но включить также и фазовое распределение Пегга — Барнетта, если считать коэффициенты $G^{(PB)}(n, k) \equiv 1$.

4. ФАЗОВЫЕ СВОЙСТВА НЕКЛАССИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ СВЕТА

4.1. Смещенные фоковские состояния. Современные достижения в квантовой оптике привели к новым предложениям по способам генерации фоковских состояний электромагнитного поля. Хонг и Мандель успешно провели опыт по генерации локализованного однофотонного состояния в параметрической даун-конверсии с использованием оптического затвора [71]. Системой, в которой возможна генерация фоковских состояний с большим числом фотонов, является микромазер. Было показано [72], что электромагнитное поле в полости микромазера, взаимодействуя с ридберговскими атомами, инжектируемыми в полость с хорошо определенной скоростью, переходит в состояние с малой дисперсией числа фотонов, являющееся хорошей аппроксимацией фоковского состояния.

Смещенное фоковское состояние может быть получено из фоковского состояния путем добавления ненулевой амплитуды поля. Фоковское состояние определяется числом фотонов, его фаза полностью случайна. Среднее значение амплитуды поля в фоковском состоянии равно нулю. При смещении в фазовом пространстве появляется добавочная амплитуда поля, и теперь число фотонов имеет вклад от когерентной компоненты поля. Состояние поля становится зависящим от фазы смещения.

Смещенное фоковское состояние определяется действием оператора смещения на фоковское состояние:

$$|\alpha, N\rangle = \hat{D}(\alpha) |N\rangle. \quad (38)$$

Для $N=0$ это состояние сводится к когерентному состоянию $|\alpha\rangle$. Некоторые свойства смещенного фоковского состояния могут быть исследованы при помощи преобразования операторов рождения и уничтожения посредством сдвига на комплексное число:

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha, \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \end{aligned}$$

Дисперсия числа фотонов в этом состоянии

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = (2N + 1) |\alpha|^2$$

всегда больше дисперсий числа фотонов в фоковском и когерентном состояниях. Вычислим теперь параметр Мандела Q , показывающий отклонение состояния от пуассоновской статистики:

$$Q = \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} = N \left(\frac{2 |\alpha|^2 - 1}{N + |\alpha|^2} \right), \quad (39)$$

где $\langle \hat{n} \rangle = N + |\alpha|^2$ — среднее число фотонов в смещенном фоковском состоянии. Для пуассоновской статистики $Q = 0$. Если $Q < 0$, то говорят, что поле находится в состоянии с субпуассоновской статистикой. Если $Q > 0$, то статистику поля называют суперпуассоновской. Из уравнения (39) заключаем, что состояние $|\alpha, N\rangle$ имеет субпуассоновскую статистику при $|\alpha|^2 < 1/2$.

Распределение числа фотонов в смещенном фоковском состоянии имеет вид

$$P_{DN}(l) = |\langle l | \alpha, N \rangle|^2 = |\langle l | \hat{D}(\alpha) | N \rangle|^2.$$

Используя формулу (33), получаем

$$P_{DN}(l) = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(l-N)}}{N!!} \left| \sum_{k=0}^N \frac{N!! (-1)^k |\alpha|^{2(N-k)}}{k!(N-k)!(l-k)!} \right|^2. \quad (40)$$

Для $\alpha = 0$ распределение $P_{DN}(l) = \delta_{lN}$, как и должно быть для фоковского состояния. Под знаком модуля в (40) мы имеем полиномиальную функцию степени N . У такой функции должно быть N нулей переменной l . Следовательно, распределение $P_{DN}(l)$ имеет N минимумов между $(N+1)$ максимумами. Наличие таких осцилляций в распределении числа фотонов может быть объяснено с помощью концепции интерференции в фазовом пространстве [69,73].

Рассмотрим теперь фазовые свойства смещенного фоковского состояния [24]. Разложение этого состояния по фоковским состояниям имеет вид

$$|\alpha, N\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \alpha, N \rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \hat{D}(\alpha) | N \rangle = \sum_n b_n e^{i\varphi_n} |n\rangle,$$

где для $n \geq N$

$$b_n = \left(\frac{N!}{n!} \right)^{1/2} |\alpha|^{n-N} e^{-|\alpha|^2/2} L_N^{n-N}(|\alpha|^2),$$

и

$$\varphi_n = (n - N)\varphi, \quad (41)$$

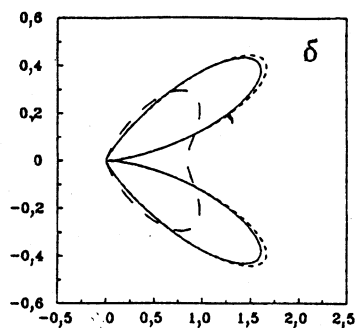
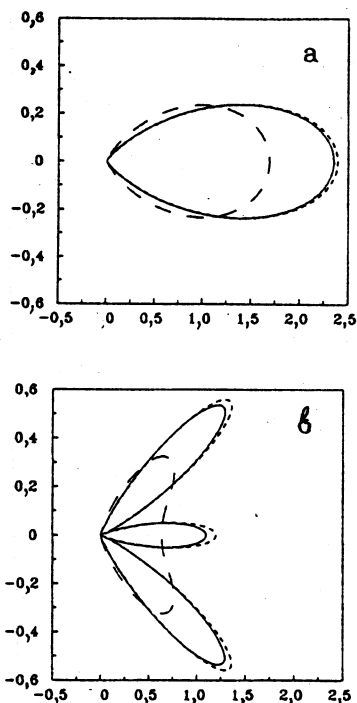


Рис. 3. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(Q)}(\theta)$ (длинные штрихи) и $P^{(W)}(\theta)$ (короткие штрихи) в полярных координатах (по оси $X — P(\theta) \cos \theta$, по оси $Y — P(\theta) \sin \theta$) для смещенного фоковского состояния при значениях $|\alpha| = 3$ и а) $N = 0$, б) $N = 1$, в) $N = 2$

где φ — фаза комплексного числа $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$, $L_N^{n-N}(|\alpha|^2)$ — присоединенный полином Лагерра. Для $n < N$ коэффициенты b_n имеют вид

$$b_n = \left(\frac{n!}{N!} \right)^{1/2} (-1)^{N-n} |\alpha|^{N-n} e^{-|\alpha|^2/2} L_n^{N-n}(|\alpha|^2),$$

и фаза φ_n по-прежнему определяется формулой (41). При вычислении коэффициентов b_n использованы матричные элементы оператора смещения в фоковском базисе (33). Зная эти коэффициенты, мы можем прямо применить формулы (25), (32) и (34) для фазовых распределений $P_{DN}^{(PB)}(\theta)$, $P_{DN}^{(Q)}(\theta)$ и $P_{DN}^{(W)}(\theta)$. На рис.3 приведены графики этих функций в полярных координатах для смещенных фоковских состояний с $|\alpha| = 3$ и $N = 0, 1, 2$. Видно, что распределения $P_{DN}^{(PB)}(\theta)$ и $P_{DN}^{(W)}(\theta)$ очень близки друг к другу и имеют $(N + 1)$ максимум, тогда как $P_{DN}^{(Q)}(\theta)$ несколько шире и имеет лишь

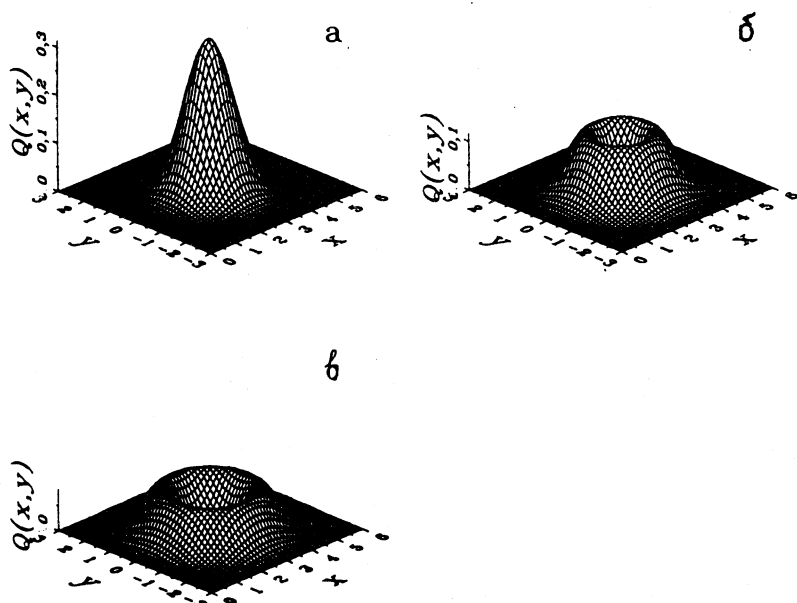


Рис. 4. Q -функция для смещенного фоковского состояния при значениях $|\alpha| = 3$ и а) $N=0$, б) $N=1$, в) $N=2$; $x = \text{Re}(\beta - \alpha)$, $y = \text{Im}(\beta - \alpha)$ и $\varphi = 0$

два максимума (заметим, что это справедливо для любых значений $N \geq 1$). Чтобы объяснить такой вид фазовых распределений, рассмотрим явный вид Q -функции и функции Вигнера для смещенных фоковских состояний. Эти функции распределения квазивероятности для рассматриваемых состояний получаются простым смещением соответствующих функций распределения для фоковских состояний [73]:

$$Q_{\text{DN}}(\beta) = Q_N(\beta - \alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\beta - \alpha|^2} \frac{|\beta - \alpha|^{2N}}{N!},$$

$$W_{\text{DN}}(\beta) = W_N(\beta - \alpha) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\beta - \alpha|^2) (-1)^N L_N(4|\beta - \alpha|^2), \quad (42)$$

где $L_N(x)$ — полином Лагерра порядка N . На рис.4 и 5 приведены графики этих функций для $|\alpha| = 3$ и $N=0,1,2$. Из (42) видно, что Q -функция принимает нулевое значение при $|\beta - \alpha| = 0$ для $N \geq 1$ (рис.4). Это приводит к тому, что распределение $P_{\text{DN}}^{(Q)}(\theta)$ имеет два максимума, которые соответствуют двум положениям азимутальной полуплоскости, когда пло-

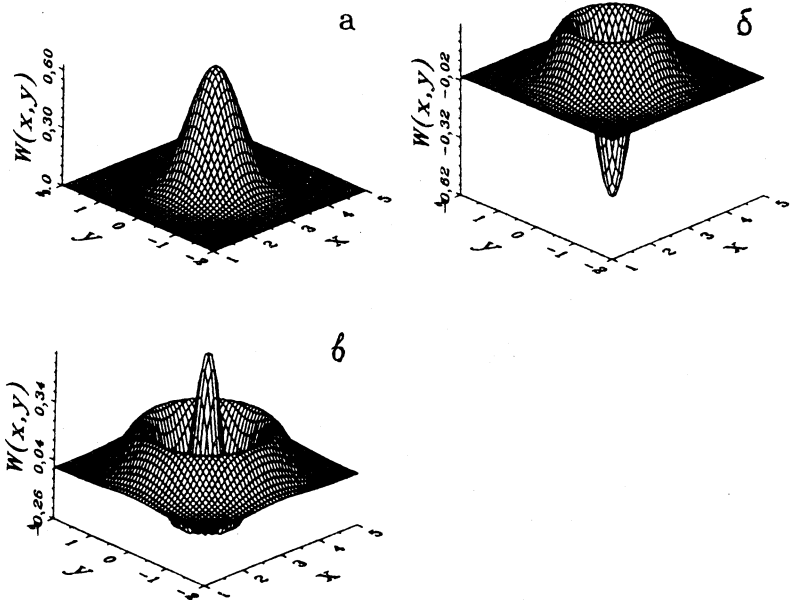


Рис. 5. Функция Вигнера для смещенного фоковского состояния при значениях $|\alpha| = 3$ и а) $N = 0$, б) $N = 1$, в) $N = 2$; $x = \text{Re}(\beta - \alpha)$, $y = \text{Im}(\beta - \alpha)$ и $\varphi = 0$

щадь пересечения ее с Q -функцией принимает наибольшие значения. Это и есть концепция суперпозиции в фазовом пространстве (area-of-overlap in phase space [70]), примененная для Q -функции. Поскольку функция Вигнера осциллирует в зависимости от N (рис.5), применение к ней этой идеи объясняет наличие $(N + 1)$ пика в распределении $P_{\text{DN}}^{(W)}(\theta)$. Таким образом, есть существенное различие в фазовой информации, содержащейся в распределениях $P_{\text{DN}}^{(Q)}(\theta)$ и $P_{\text{DN}}^{(W)}(\theta)$. Из-за процедуры усреднения с весом $G^{(Q)}(n, k)$ определенная часть фазовой информации в $P_{\text{DN}}^{(Q)}(\theta)$ теряется. Распределения $P_{\text{DN}}^{(\text{PB})}(\theta)$ и $P_{\text{DN}}^{(W)}(\theta)$ почти совпадают, и, следовательно, в рассматриваемом случае смещенных фоковских состояний они несут в основном одинаковую фазовую информацию.

4.2. Сжатые фоковские и сжатые хаотические состояния. Поле в фоковском состоянии может быть подано на вход «сжимающего» устройства типа вырожденного параметрического усилителя. Тогда на выходе этого устройства будет генерировано поле в сжатом фоковском состоянии. Ис-

торически понятие сжатого фоковского состояния было введено Йеном [74]. Статистические свойства этого состояния изучались в [75—77]. Как отмечалось ранее, распределение фазы в фоковском состоянии полностью случайно. В сжатом фоковском состоянии распределение фазы уже не является равномерным.

Хаотическое (тепловое) состояние определяется как разложение по базису фоковских состояний с весовыми множителями распределения Бозе — Эйнштейна. Поле в хаотическом состоянии также может быть подано на вход вырожденного параметрического усилителя. Заметим, что при изучении взаимодействия неклассического поля с ридберговскими атомами в полости микромазера необходим учет теплового шума. Поэтому изучение неклассических состояний с хаотической компонентой имеет важное значение.

Сжатое фоковское состояние определяется действием оператора сжатия $\hat{S}(r, \varphi)$ на фоковское состояние $|N\rangle$:

$$|N\rangle_{(r, \varphi)} = \hat{S}(r, \varphi) |N\rangle, \quad (43)$$

где

$$\hat{S}(r, \varphi) = \exp \left[\frac{r}{2} (\hat{a}^2 e^{-2i\varphi} - \hat{a}^{\dagger 2} e^{2i\varphi}) \right].$$

Разложение состояния (43) по базису фоковских состояний имеет вид

$$\begin{aligned} |N\rangle_{(r, \varphi)} &= \sum_n |N\rangle \langle n | N \rangle_{(r, \varphi)} = \sum_n |n\rangle \langle n | \hat{S}(r, \varphi) | N \rangle = \\ &= \sum_n b_n e^{i\varphi_n} |n\rangle, \end{aligned} \quad (44)$$

где [76]:

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{n! N!}{\cosh r} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \tanh r \right)^{(n+N)/2} \times \\ &\times \sum_{i=0}^{\min(n, N)} (-1)^{(N-i)/2} \frac{(2/\sinh r)^i}{i!} \frac{H_{n-i}(0)}{(n-i)!} \frac{H_{N-i}(0)}{(N-i)!} \end{aligned}$$

и

$$\varphi_n = (n - N)\varphi.$$

Здесь φ — угол поворота эллипса неопределенности в фазовом пространстве, $H_n(x)$ — полином Эрмита степени n .

Сжатое хаотическое состояние определяется матрицей плотности [75]:

$$\hat{\rho}_{ST} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^N |N\rangle_{(r, \varphi)(r, \varphi)} \langle N|, \quad (45)$$

где $\bar{n}$ — среднее число фотонов в хаотическом состоянии на входе «сжимающего» устройства.

Дисперсии квадратурных компонент поля в сжатом фоковском состоянии могут быть представлены в виде [75]:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} (2N + 1) e^{-2r},$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} (2N + 1) e^{2r}.$$

Из этих соотношений видно, что только сжатый вакуум ($N=0$) является состоянием с минимальной неопределенностью (идеальным сжатым состоянием), а остальные сжатые фоковские состояния с $N \geq 1$ не являются таковыми. Дисперсии квадратурных компонент поля в сжатом хаотическом состоянии имеют вид [75]:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} (2\bar{n} + 1) e^{-2r},$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} (2\bar{n} + 1) e^{2r}.$$

Статистические свойства рассматриваемых состояний удобно исследовать при помощи корреляционной функции 2-го порядка:

$$g^{(2)} = 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}.$$

Для сжатого фоковского состояния получаем

$$g^{(2)} = 1 - \frac{\cosh(2r)}{\langle \hat{n} \rangle^2} N + \frac{\sinh^2 r}{\langle \hat{n} \rangle^2} [(2N^2 + 2N) \cosh^2 r + \cosh(2r)], \quad (46)$$

где

$$\langle \hat{n} \rangle = N \cosh(2r) + \sinh^2 r.$$

При малых r корреляционная функция может принимать значения меньше единицы, что соответствует субпуассоновской статистике распределения фотонов. Второй член в (46) при $r \gg 1$ пренебрежимо мал, и для $g^{(2)}$ получаем

$$g^{(2)} \approx 1 + \frac{2(N^2 + N + 1)}{(2N + 1)^2}.$$

Для больших N корреляционная функция стремится к 1,5. Корреляционная функция $g^{(2)}$ для сжатого хаотического состояния имеет вид

$$g^{(2)} = 2 + \frac{(\bar{n} + 1)^2}{\langle \hat{n} \rangle^2} \sinh^2 r \cosh^2 r, \quad (47)$$

где

$$\langle \hat{n} \rangle = \bar{n} \cosh(2r) + \sinh^2 r.$$

Для $r \neq 0$ второй член в (47) является положительным, так что корреляционная функция $g^{(2)}$ для сжатого хаотического состояния всегда превосходит величину этой функции для хаотического состояния. Сжатие хаотического поля приводит к возрастанию флуктуаций его интенсивности. Распределение фотонов в хаотическом состоянии является гауссовским. Сжатые хаотические состояния обладают супергауссовской статистикой фотонов. В предельном случае $r \gg 1$ функция $g^{(2)}$ для этих состояний стремится к 3.

Имея разложение (44) сжатого фоковского состояния по базису фоковских состояний и выражение для матрицы плотности сжатого хаотического состояния (45), мы можем прямо применить формулы (25), (32) и (34) для фазовых распределений $P^{(PB)}(\theta)$, $P^{(Q)}(\theta)$ и $P^{(W)}(\theta)$ при исследовании фазовых свойств этих состояний [78]. Отметим, что функция $P_{SN}^{(W)}(\theta)$ оказывается независимой от числа фотонов N в первоначальном фоковском состоянии. Чтобы показать это, воспользуемся явным видом функции Вигнера для сжатого фоковского состояния [75]:

$$W_{SN}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp \left[\frac{1}{2} (\alpha - \alpha^*)^2 e^{-2r} - \frac{1}{2} (\alpha + \alpha^*)^2 e^{2r} \right] \times \\ \times (-1)^N L_N [(\alpha + \alpha^*)^2 e^{2r} - (\alpha - \alpha^*)^2 e^{-2r}],$$

где $L_N(x)$ — полином Лагерра степени N . Проинтегрировав эту функцию по радиальной переменной, мы получаем фазовое распределение $P_{SN}^{(W)}(\theta)$ для сжатого фоковского состояния, которое не зависит от N :

$$P_{SN}^{(W)}(\theta) = \frac{1}{2\pi (\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2\theta)}. \quad (48)$$

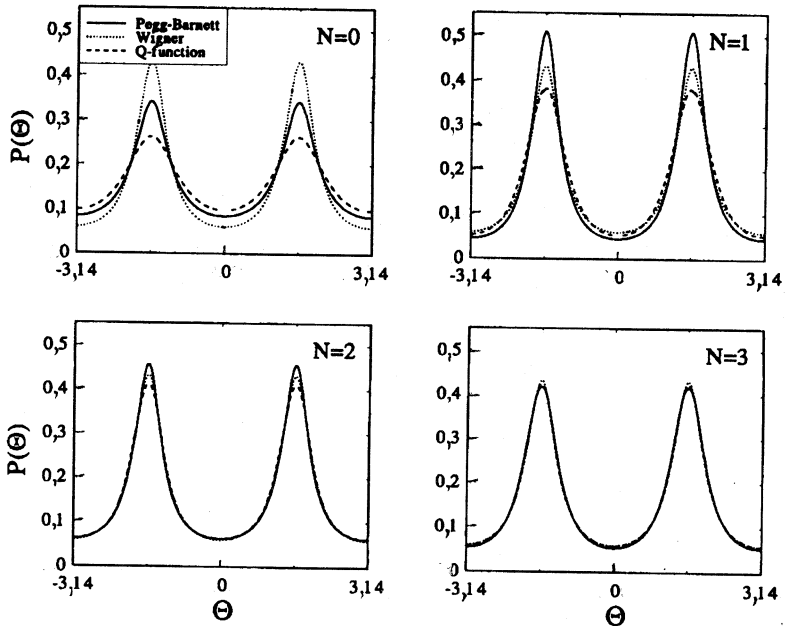


Рис. 6. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$, $P^{(Q)}(\theta)$ и $P^{(W)}(\theta)$ для сжатых фоковских состояний с $r = 0,5$ и $N = 0,1,2,3$

Асимптотически, в пределе большого сжатия ($r \rightarrow \infty$), распределение (48) превращается в сумму двух симметрично расположенных δ -функций:

$$P_{SN}^{(W)}(\theta) = \frac{1}{2} [\delta(\theta - \pi/2) + \delta(\theta + \pi/2)].$$

На рис.6 представлены графики фазовых распределений $P_{SN}^{(PB)}(\theta)$, $P_{SN}^{(Q)}(\theta)$ и $P_{SN}^{(W)}(\theta)$ для сжатых фоковских состояний. Видно, что есть существенное различие в поведении трех фазовых распределений при малых N . При увеличении N фазовые распределения $P_{SN}^{(PB)}(\theta)$ и $P_{SN}^{(Q)}(\theta)$ стремятся к $P_{SN}^{(W)}(\theta)$, и для значений $N \geq 4$ эти три кривые становятся практически неразличимыми.

Рассмотрим теперь фазовые распределения для сжатых хаотических состояний (45). Они могут быть получены из фазовых распределений для сжатых фоковских состояний суммированием по числу фотонов N с весовым фактором Бозе — Эйнштейна $\bar{n}^N / (1 + \bar{n})^{N+1}$. Когда среднее число фотонов в фоковском состоянии на входе «сжимающего» устройства мало, т.е. $\bar{n} \leq 1$,

определяющий вклад в сумму дает сжатое фоковское состояние с $N=0$ (сжатый вакуум). Поэтому фазовое распределение для сжатого хаотического состояния с $\bar{n} \leq 1$ совпадает с распределением для сжатого вакуума. Однако, когда $\bar{n}$ большое, важными являются вклады в сумму от фоковских состояний с большим числом фотонов. Поэтому в случае $\bar{n} > 1$ отличия между тремя фазовыми распределениями становятся несущественными, что аналогично случаю сжатого фоковского состояния с большим N . Так как $P_{SN}^{(W)}(\theta)$ не зависит от N , то распределение $P_{ST}^{(W)}(\theta)$ для сжатого хаотического состояния совпадает с распределением $P_{SN}^{(W)}(\theta)$.

Q -функция в случае сжатого хаотического состояния имеет простую аналитическую форму [78]:

$$Q_{ST}(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n} \cosh r [(1 + 1/\bar{n})^2 - \tanh^2 r]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{(1 + 1/\bar{n} + \tanh^2 r) |\alpha|^2 + (\alpha^2 + \alpha^{*2}) (1 + 1/(2\bar{n})) \tanh r}{\bar{n} [(1 + 1/\bar{n})^2 - \tanh^2 r]} \right\}, \quad (49)$$

откуда посредством интегрирования по радиальной переменной легко получить фазовое распределение $P_{ST}^{(Q)}(\theta)$:

$$P_{ST}^{(Q)}(\theta) = \frac{\cosh r [(1 + 1/\bar{n})^2 - \tanh^2 r]^{1/2}}{2\pi [\cosh 2r + \cosh^2 r / \bar{n} + (1 + 1/(2\bar{n})) \sinh 2r \cos 2\theta]}. \quad (50)$$

Асимптотически, в пределе больших $\bar{n}$, формула (50) переходит в формулу (48) для $P_{ST}^{(W)}(\theta)$. На рис.7 представлены графики фазовых распределений $P_{ST}^{(PB)}(\theta)$, $P_{ST}^{(W)}(\theta)$ и $P_{ST}^{(Q)}(\theta)$ для сжатых хаотических состояний. Видно, что распределения $P_{ST}^{(PB)}(\theta)$ и $P_{ST}^{(Q)}(\theta)$ становятся более узкими с увеличением $\bar{n}$, и для больших $\bar{n}$ все три кривые полностью совпадают. Это означает, что в случае сжатых хаотических состояний распределение $P_{ST}^{(W)}(\theta)$ является предельным фазовым распределением, и другие фазовые распределения достигают его при увеличении среднего числа фотонов в фоковском состоянии на входе «сжимающего» устройства. Отметим следующее интересное свойство сжатых хаотических состояний: минимальная величина фазовых флуктуаций может быть достигнута при помощи увеличения тепловых флуктуаций.

Рассмотрим теперь фазовое распределение, получаемое интегрированием P -функции Глаубера — Сударшана по радиальной переменной. P -функ-

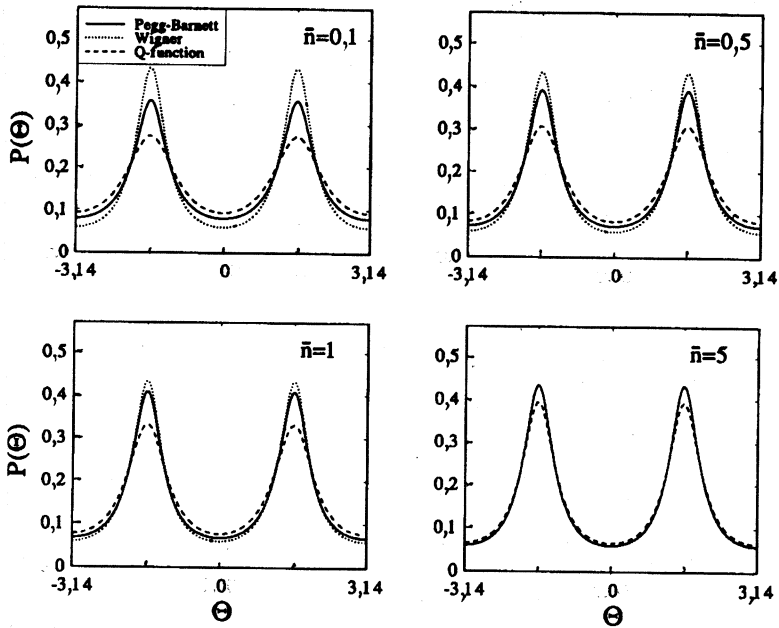


Рис. 7. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$, $P^{(Q)}(\theta)$ и $P^{(W)}(\theta)$ для сжатых хаотических состояний с $r = 0,5$ и $\bar{n} = 0,1; 0,5; 1,5$

ция является хорошо определенной для классических состояний, но для состояний с неклассическим поведением эта функция либо сингулярна, либо не является положительно определенной. Как было показано в работе [75], при условии $(2\bar{n} + 1)e^{-2r} > 1$ для сжатых хаотических состояний существует всюду положительная несингулярная $\mathcal{P}$ -функция

$$\mathcal{P}_{ST}(\alpha) = \frac{1}{\pi [(\bar{n}e^r + \sinh r)(\bar{n}e^{-r} - \sinh r)]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[\frac{(\alpha - \alpha^*)^2 e^{-r}}{4(\bar{n}e^r + \sinh r)} - \frac{(\alpha + \alpha^*)^2 e^r}{4(\bar{n}e^{-r} - \sinh r)} \right].$$

Фазовое распределение $P^{(P)}(\theta)$, связанное с $\mathcal{P}$ -функцией, определяется тогда выражением

$$P_{ST}^{(P)}(\theta) = \int_0^\infty \mathcal{P}_{ST}(\alpha) |\alpha| d|\alpha| = \frac{1}{2\pi} \frac{[(\bar{n}e^r + \sinh r)(\bar{n}e^{-r} - \sinh r)]^{1/2}}{(\bar{n} + 1/2)(\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2\theta) - 1/2}.$$

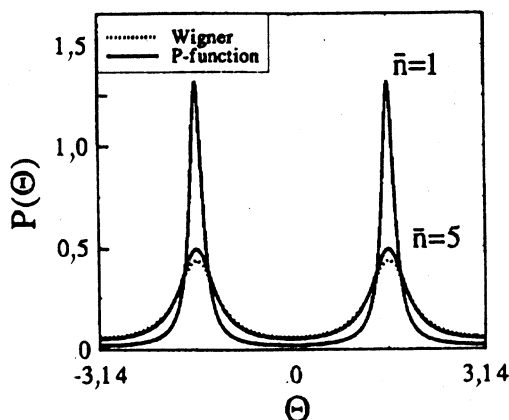


Рис. 8. Фазовые распределения $P^{(P)}(\theta)$ и $P^{(W)}(\theta)$ для сжатого хаотического состояния с $r=0,5$ и $\bar{n}=1,5$

В пределе больших $\bar{n}$ распределение $P_{ST}^{(P)}(\theta)$ совпадает с распределением $P_{ST}^{(W)}(\theta)$ — соотношение (48). На рис.8 приведен график фазового распределения $P_{ST}^{(P)}(\theta)$ для сжатых хаотических состояний. Для сравнения при-

веден также график распределения $P_{ST}^{(W)}(\theta)$. Фазовое распределение $P_{ST}^{(P)}(\theta)$ является наиболее резким из рассматриваемых распределений. Видно, что чем больше $\bar{n}$, тем шире $P_{ST}^{(P)}(\theta)$.

4.3. Двухмодовые сжатые фоковские состояния. Как уже упоминалось, сжатые состояния можно генерировать в двухфотонных процессах типа параметрического усиления. В вырожденном случае, когда частота сигнальной моды совпадает с частотой холостой моды, в этих процессах происходит генерация сжатых состояний с минимальной неопределенностью и уменьшенными (по сравнению с вакуумными) флуктуациями в одной из квадратур [74]. Ситуация является более сложной в невырожденном случае, когда частоты сигнальной и холостой мод различны. Теперь каждая мода в отдельности проявляет изотропные, не зависящие от фазы флуктуации, которые обычно ассоциируют с хаотическими или тепловыми полями [79—83]. Однако комбинированное двухмодовое состояние есть неклассическое состояние, проявляющее сжатые флуктуации в модах, являющихся суперпозицией сигнальной и холостой мод.

Предположим, что на входе «сжимающего» устройства типа невырожденного параметрического усилителя приготовлено электромагнитное поле в двухмодовом фоковском состоянии $|N+q, N\rangle$, где q — разность в числе фотонов в модах. Гамильтониан такой системы имеет вид [81,84] ($\hbar=1$):

$$\hat{H} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} - i \{ g \hat{a} \hat{b} \exp(i\omega t) - g^* \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger \exp(-i\omega t) \},$$

где ω — частота классического поля накачки, g — константа связи. При точном резонансе $\omega = \omega_a + \omega_b$ гамильтониан может быть записан в пред-

ставлении взаимодействия: $\hat{H}_I = -i\{g\hat{a}\hat{b} - g^*\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger\}$. Тогда оператор эволюции системы $\exp(-i\hat{H}_I t) = \exp\{-g t \hat{a}\hat{b} + g^* t \hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger\}$ представляет собой зависящий от времени двухмодовый оператор сжатия: $\exp(-i\hat{H}_I t) = \hat{S}(gt)$, где $\xi = gt$ — параметр сжатия. В момент времени t на выходе параметрического усилителя мы получим двухмодовое сжатое фоковское состояние

$$|\xi\rangle = \exp(-\xi\hat{a}\hat{b} + \xi^*\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger) |N+q, N\rangle.$$

Заметим, что двухмодовый сжатый вакуум является частным случаем двухмодового сжатого фоковского состояния при $N=0$ и $q=0$.

Дадим теперь формальное определение двухмодового сжатого фоковского состояния [85]. Рассмотрим две моды электромагнитного поля с операторами рождения и уничтожения $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ и $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$. Двухмодовое сжатое фоковское состояние определяется действием оператора сжатия $\hat{S}(r, \varphi)$ на двухмодовое фоковское состояние $|N+q, N\rangle$:

$$|N+q, N\rangle_{(r, \varphi)} = \hat{S}(r, \varphi) |N+q, N\rangle, \quad q \geq 0,$$

где q — разность в числе фотонов между двумя модами и

$$\hat{S}(r, \varphi) = \exp[r(\hat{a}\hat{b}e^{-2i\varphi} - \hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger e^{2i\varphi})].$$

Заметим, что в процессах с парным рождением и уничтожением фотонов величина q остается постоянной. Если рождение фотонов происходит из вакуума, то параметр q равен нулю. Разложение двухмодового сжатого фоковского состояния по базису фоковских состояний

$$\begin{aligned} |N+q, N\rangle_{(r, \varphi)} &= \sum_n |n+q, n\rangle \langle n+q, n|N+q, N\rangle_{(r, \varphi)} = \\ &= \sum_n b_n e^{i\varphi n} |n+q, n\rangle, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(\tanh r)^{N+n}}{(\cosh r)^{1+q}} (N! (N+q)! n! (n+q)!)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\min(n, N)} \frac{(-1)^{n-k} (\sinh r)^{-2k}}{k! (n-k)! (N-k)! (q+k)!} \end{aligned} \quad (52)$$

и

$$\varphi_n = (n-N)\varphi.$$

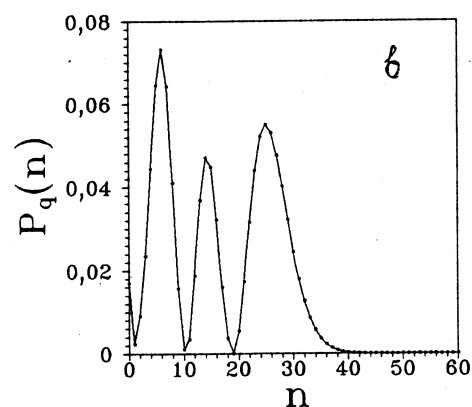
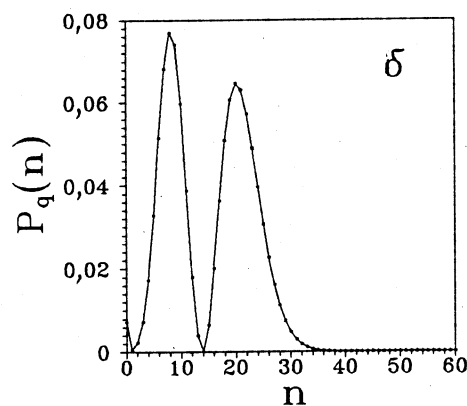
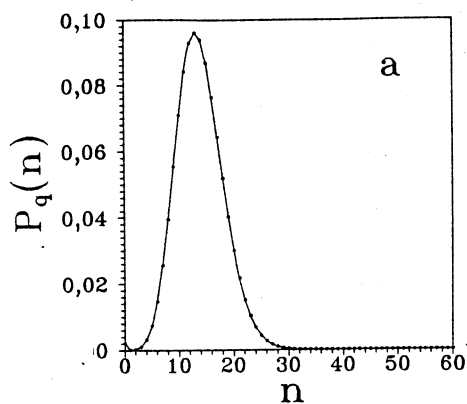


Рис. 9. Распределение числа фотонов для двухмодовых сжатых фоковских состояний с $r=0,5$, $q=50$ и а) $N=0$, б) $N=1$, в) $N=2$

При получении выражения (52) для коэффициентов b_n мы воспользовались факторизованной формой двухмодового оператора сжатия [82]:

$$\hat{S}(r, \varphi) = (\cosh r)^{-1} \exp [-\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{2i\varphi} \tanh r] \times \\ \times \exp [- (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}) \ln (\cosh r)] \exp [\hat{a} \hat{b} e^{-2i\varphi} \tanh r]. \quad (53)$$

Рассмотрим теперь статистические свойства двухмодового сжатого фоковского состояния. С помощью соотношения (52) легко посчитать среднее число фотонов в этом состоянии:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle = (2N + q + 1) \cosh 2r - 1.$$

Совместное распределение вероятности найти n_a фотонов в моде a и n_b фотонов в моде b определяется соотношением

$$P(n_a, n_b) = |\langle n_a, n_b | N + q, N \rangle_{(r, \varphi)}|^2.$$

Используя (51) и (52), получаем

$$P(n_a, n_b) = P(n + q, n) \delta_{n_a, n + q} \delta_{n_b, n},$$

где

$$P(n + q, n) \equiv P_q(n) = |b_n|^2.$$

Как можно видеть на рис.9, распределение числа фотонов $P_q(n)$ имеет осцилляторное поведение. Такое поведение является следствием интерференции в 4-мерном фазовом пространстве [86]. Отметим наличие $(N + 1)$ -пиковой структуры в этом распределении. Аналогичная структура распределения числа фотонов наблюдается и в случае смещенных фоковских состояний, как было отмечено в п.4.1.

Рассмотрим теперь представление двухмодового сжатого фоковского состояния с помощью функций распределения квазивероятности. Для простоты выберем параметр сжатия вещественным, $\xi = r$. Отметим, что для рассматриваемых состояний $\mathcal{P}$ -функция Глаубера — Сударшана является сингулярной. В двухмодовом случае $\mathcal{Q}$ -функция может быть определена в следующем виде:

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^2} \langle \alpha, \beta | \hat{\rho} | \alpha, \beta \rangle.$$

Из этого определения видно, что функция является неотрицательной во всей области определения своих аргументов. Используя выражение для матрицы плотности для двухмодового сжатого фоковского состояния

$$\hat{\rho} = \hat{S}(r) |N+q, N\rangle \langle N+q, N| \hat{S}^\dagger(r) \quad (54)$$

и факторизованную форму оператора сжатия (53), получаем

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha|^{2q}}{\pi^2 (\cosh r)^{4N+2q+2}} \exp [-(\alpha\beta + \alpha^*\beta^*) \tanh r] \exp [-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)] \times \\ \times \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{\left(\frac{1}{2} \sinh r\right)^{n+k} N!(N+q)! (\alpha^*\beta^*)^{N-n} (\alpha\beta)^{N-k}}{n!k!(N-n)!(N-k)!(N+q-n)!(N+q-k)!}. \quad (55)$$

Функция Вигнера может быть представлена в виде [57,58]:

$$W(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{D}_a(2\alpha) \hat{D}_b(2\beta) \exp [i\pi(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b})] \},$$

где $\hat{D}_a(\gamma)$ и $\hat{D}_b(\gamma)$ — операторы смещения для мод a и b соответственно.

Выражение для функции Вигнера легко получить, используя соотношение (54), а также операторные преобразования [82]:

$$\hat{S}^\dagger(r) \hat{a} \hat{S}(r) = \hat{a} \cosh r - \hat{b}^\dagger \sinh r,$$

$$\hat{S}^\dagger(r) \hat{b} \hat{S}(r) = \hat{b} \cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r,$$

и эрмитово сопряженные им. В результате для функции Вигнера мы имеем следующее аналитическое выражение:

$$W(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} (-1)^q \exp [-2 \cosh 2r (|\alpha|^2 + |\beta|^2) - 2 \sinh 2r (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)] \times \\ \times L_N((2 \sinh r |\alpha|)^2 + (2 \cosh r |\beta|)^2 + 2 \sinh 2r (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)) \times \\ \times L_{N+q}((2 \cosh r |\alpha|)^2 + (2 \sinh r |\beta|)^2 + 2 \sinh 2r (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)), \quad (56)$$

где $L_n(x)$ — полином Лагерра степени n . Из уравнений (55) и (56) видно, что как Q -функция, так и функция Вигнера для двухмодового сжатого фоковского состояния зависят только от суммы фаз $(\theta_a + \theta_b)$. Это свойство функций квазивероятности указывает на сильную корреляцию мод в этом состоянии.

Перейдем теперь к рассмотрению фазовых свойств двухмодового сжатого фоковского состояния. Мы применим обобщение фазового формализма Пегга — Барнетта на случай двух мод [46,87] для нахождения фазового распределения. Зная разложение (51) рассматриваемых состояний по базису

фоковских состояний, можно определить совместное фазовое распределение вероятности для непрерывных фазовых переменных θ_a и θ_b :

$$P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k}^{\infty} b_n b_k \cos [(n-k)(\theta_a + \theta_b)] \right\}, \quad (57)$$

где b_n определяются соотношением (52). Распределение (57) нормировано следующим образом:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b) d\theta_a d\theta_b = 1.$$

Одно важное фазовое свойство рассматриваемых состояний сразу видно из формулы (57). Совместная функция распределения вероятности зависит только от суммы фаз:

$$P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b) = P^{(PB)}(\theta_+ = \theta_a + \theta_b).$$

Это свойство является следствием сильной корреляции между модами. Интегрируя $P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b)$ по одной из фазовых переменных, получаем маргинальное фазовое распределение $P^{(PB)}(\theta_a)$ или $P^{(PB)}(\theta_b)$ для фаз θ_a или θ_b :

$$P^{(PB)}(\theta_a) = \int_{-\pi}^{\pi} P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b) d\theta_b = \frac{1}{2\pi},$$

$$P^{(PB)}(\theta_b) = P^{(PB)}(\theta_a) = \frac{1}{2\pi}.$$

Таким образом, фазы θ_a и θ_b индивидуальных мод распределены равномерно, и единственной неравномерно распределенной фазовой переменной является сумма фаз $\theta_+ = \theta_a + \theta_b$. На рис.10 приведены графики в полярных координатах фазового распределения Пегга — Барнетта для двухмодовых сжатых фоковских состояний с различными значениями параметра q . Для ненулевых значений q фазовое распределение проявляет $(N+1)$ -лепестковую структуру, при этом чем больше q , тем более четкими становятся лепестки. Однако при $q=0$ фазовое распределение имеет один лепесток для всех значений N . Интересно отметить замечательное сходство в поведении фазового распределения и распределения числа фотонов для двухмодовых сжатых фоковских состояний: оба они проявляют $(N+1)$ -пиковую структуру при $q \neq 0$.

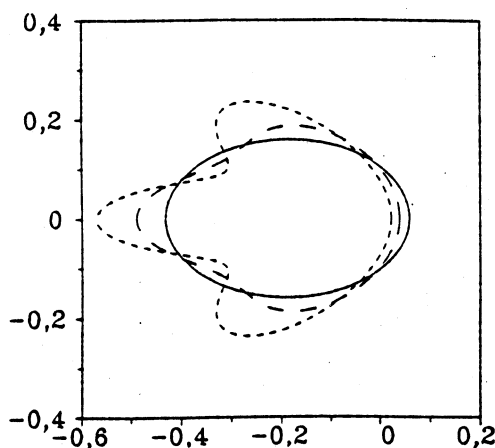


Рис. 10. Фазовое распределение Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta_+)$ в полярных координатах (по оси X — $P(\theta_+) \cos \theta_+$, по оси Y — $P(\theta_+) \sin \theta_+$) для двухмодовых сжатых фоковских состояний с $r=0,5$, $N=2$ и $q=0$ (сплошная линия), $q=3$ (длинные штрихи) и $q=6$ (короткие штрихи)

Еще одним важным свойством совместного фазового распределения для двухмодовых сжатых фоковских состояний является привязка суммы фаз двух мод к фазе сжатия 2ϕ при увеличении амплитуды сжатия r (phase locking). Это явление было изучено в случае двухмодового сжатого вакуума в работах [46,47].

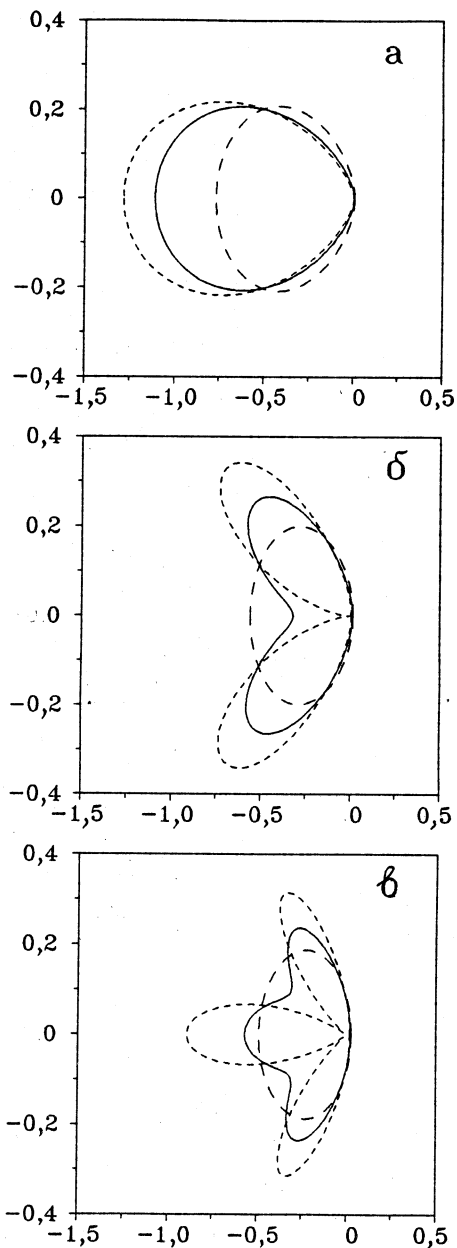
Перейдем теперь к рассмотрению фазовых распределений, которые могут быть получены интегрированием функций распределения квазивероятности по радиальным переменным. Отметим, что для двухмодовых сжатых фоковских состояний $\mathcal{P}$ -функция является сингулярной, и поэтому не существует соответствующего ей фазового распределения. В результате интегрирования функций $Q(\alpha, \beta)$ и $W(\alpha, \beta)$ по переменным $|\alpha|$ и $|\beta|$ получаем следующую формулу:

$$P^{(V)}(\theta_+) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos [(n-k)\theta_+] G^{(V)}(n, k) G^{(V)}(n+q, k+q) \right\}, \quad (58)$$

где коэффициенты $G^{(V)}(n, k)$ определяются формулой (31) при $V=Q$ и формулой (35) при $V=W$. Заметим, что выражения (57), (58) для фазовых распределений могут быть применены для всех двухмодовых состояний, имеющих разложение по фоковским состояниям типа (51). Примером таких состояний являются парные когерентные состояния, введенные Агарвалом [88]. На рис.11 приведены графики фазовых распределений $P^{(PB)}(\theta_+)$, $P^{(Q)}(\theta_+)$ и $P^{(W)}(\theta_+)$ в полярных координатах для двухмодовых сжатых фоковских состояний с различными значениями N при $q \neq 0$. Видно, что распределение Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta_+)$ и $P^{(W)}(\theta_+)$ имеют

Рис. 11. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta_+)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta_+)$ (короткие штрихи) и $P^{(Q)}(\theta_+)$ (длинные штрихи) в полярных координатах (по оси X — $P(\theta_+) \cos \theta_+$, по оси Y — $P(\theta_+) \sin \theta_+$) для двухмодовых сжатых фоковских состояний с $r=0,5$ $q=6$ и а) $N=0$, б) $N=1$, в) $N=2$

$(N+1)$ лепестков, тогда как $P^{(Q)}(\theta_+)$ гораздо шире и имеет лишь один лепесток для всех значений N . В случае $q=0$ все три распределения имеют одинаковую форму одного лепестка. Таким образом, как и в случае смещенных фоковских состояний, есть существенное различие в фазовой информации, которую несут распределения $P^{(Q)}(\theta_+)$ и $P^{(W)}(\theta_+)$. Из-за процедуры усреднения с «вероятностями» $G^{(Q)}(n, k)G^{(Q)}(n+q, k+q)$ некоторая часть фазовой информации в $P^{(Q)}(\theta_+)$ потеряна. Распределение Пегга — Барнетта является близким по форме к распределению $P^{(W)}(\theta_+)$, хотя и не идентично ему. Фазовые пики в $P^{(W)}(\theta_+)$ несколько уже, чем соответствующие пики в $P^{(PB)}(\theta_+)$. Чем больше разница в числе фотонов между модами q , тем более близкими становятся эти два



распределения. В целом они несут аналогичную фазовую информацию. Этот факт находится в соответствии с аргументами концепции супер-

позиции в фазовом пространстве, согласно которым функция Вигнера представляет квантовое состояние в фазовом пространстве [70].

4.4. Квадратично-амплитудные сжатые состояния. Рассматривая корреляционные функции высших порядков для амплитуды поля, можно определить эффекты сжатия высших порядков. Согласно Хонгу и Манделю, состояние является сжатым порядка $2N$, если для этого состояния момент порядка $2N$ квадратуры поля меньше, чем соответствующий момент для когерентного состояния [89,90]. Такой тип сжатия был найден этими авторами в ряде оптических процессов. Иной подход к понятию сжатия высших порядков был исследован Браунштейном и Маклахланом [91]. Для определения обобщенных сжатых состояний они использовали аналоги высших порядков оператора сжатия. Изучение Q -представлений этих состояний выявило их весьма необычные статистические свойства.

Другое определение сжатия высших порядков в терминах действительной и мнимой частей квадрата и более высоких степеней амплитуды поля было предложено Хиллери [92]. Им было показано, что квадратично-амплитудное сжатие естественным образом возникает в процессе генерации второй гармоники [93]. В работе [94] получены общие решения для квадратично-амплитудных сжатых состояний, удовлетворяющих требованию минимальной неопределенности в соотношении Гейзенберга, и исследованы их статистические свойства.

Квадратично-амплитудное сжатие описывается в терминах действительной и мнимой частей квадрата амплитуды поля. Эти величины соответствуют квадратурным операторам

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1 &= (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)/2, \\ \hat{Y}_2 &= i(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2)/2,\end{aligned}\quad (59)$$

удовлетворяющим соотношению неопределенности Гейзенберга [92]:

$$\Delta \hat{Y}_1 \Delta \hat{Y}_2 \geq \langle \hat{N} + \frac{1}{2} \rangle, \quad (60)$$

где $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger} \hat{a}$ — число фотонов. Состояние называется сжатым по квадрату амплитуды в направлении Y_1 , если

$$\langle (\Delta \hat{Y}_1)^2 \rangle < \langle \hat{N} + \frac{1}{2} \rangle.$$

Состояния, которые минимизируют соотношение неопределенности (60), называются квадратично-амплитудными сжатыми состояниями с минимальной неопределенностью. Разложение этих состояний по базису фоковских состояний может быть представлено в виде:

$$|\lambda, \beta\rangle = \sum_n b_n |n\rangle, \quad (61)$$

где коэффициенты b_n определяются следующими рекуррентными соотношениями [94]:

$$b_{n+4} = b_{n+2} \frac{2\beta}{(\lambda+1)\sqrt{(n+4)(n+3)}} + b_n \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sqrt{\frac{(n+2)(n+1)}{(n+4)(n+3)}},$$

$$b_2 = \sqrt{2} \frac{\beta}{\lambda+1} b_0, \quad b_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta}{\lambda+1} b_1, \quad 0 \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq |\beta| < \infty, \quad (62)$$

с условием нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 = 1.$$

Из соотношений (62) можно видеть, что коэффициенты b_n разбиваются на две последовательности коэффициентов с четными и нечетными индексами. Поэтому, в зависимости от выбора последовательности коэффициентов, мы можем определить два типа состояний — четные и нечетные квадратично-амплитудные сжатые состояния.

Определим теперь функции распределения квазивероятности для рассматриваемых состояний. Нас прежде всего будут интересовать Q -функция и функция Вигнера, которые получаются с помощью преобразования Фурье, соответственно, нормально- и симметрично-упорядоченных характеристических функций. Используя представление в фоковском базисе (61), Q -функцию можно записать в следующем виде:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \lambda, \beta \rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2.$$

С помощью соотношения (28) функция Вигнера представляется через коэффициенты разложения b_n :

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(|2\alpha|^2) (b_n)^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n>m=0}^{\infty} \left(\frac{m!}{n!} \right)^{1/2} (-1)^m (2\alpha)^{n-m} L_m^{n-m}(|2\alpha|^2) b_n b_m \right\}.$$

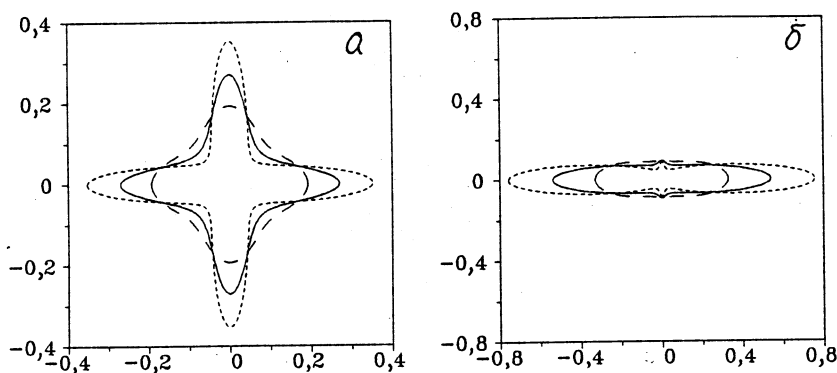


Рис. 12. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta)$ (короткие штрихи) и $P^{(Q)}(\theta)$ (длинные штрихи) в полярных координатах (по оси X — $P(\theta) \cos \theta$, по оси Y — $P(\theta) \sin \theta$) для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и а) $\beta = 0$, б) $\beta = 1$

Как Q -функция, так и функция Вигнера для квадратично-амплитудных сжатых состояний имеют существенные различия в поведении в случаях, когда параметр β равен и не равен нулю. В случае $\beta = 0$ эти функции проявляют четырехкратную симметрию, тогда как в случае $\beta \neq 0$ симметрия этих функций становится двухкратной [94]. Как было отмечено ранее, Q -функция является неотрицательной на всей фазовой плоскости, в то время как функция Вигнера может принимать и отрицательные значения. Как будет показано в дальнейшем, это может приводить к проблемам в определении соответствующего фазового распределения квазивероятности.

Перейдем теперь к рассмотрению фазовых свойств квадратично-амплитудных сжатых состояний [95]. Зная их разложение по базису фоковских состояний (61), мы можем применить фазовое распределение Пегга — Барнетта и фазовые распределения квазивероятности, определяемые общей формулой (37). Графики всех трех фазовых распределений для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний при различных значениях λ и β представлены на рис.12, а для нечетных состояний — на рис.13. Мы видим, что в случае, когда параметр β равен нулю, фазовые распределения имеют четырехлепестковую форму. Для значений β , не равных нулю, все три распределения имеют двухлепестковую структуру. Такое поведение согласуется с симметрией функций распределения квазивероятности. Можно также заметить, что фазовое распределение Вигнера $P^{(W)}(\theta)$ является самым узким из трех распределений для четных состояний

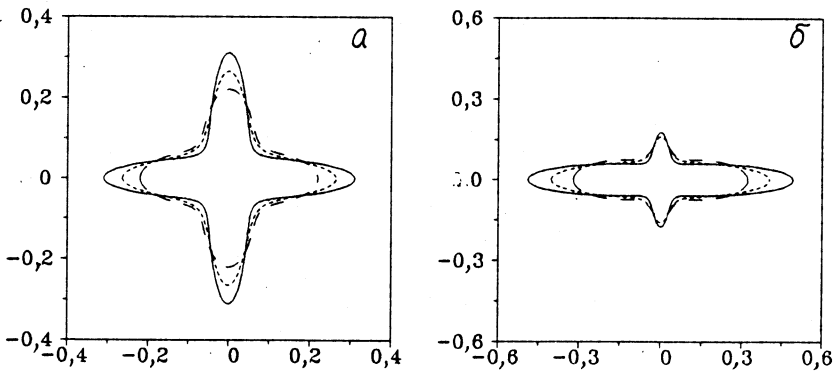


Рис. 13. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta)$ (короткие штрихи) и $P^{(Q)}(\theta)$ (длинные штрихи) в полярных координатах (по оси X — $P(\theta) \cos \theta$, по оси Y — $P(\theta) \sin \theta$) для нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и а) $\beta = 0$, б) $\beta = 1$

(рис.12), тогда как для нечетных самым узким является распределение Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta)$ (рис.13). Далее, отметим, что фазовое распределение $P^{(Q)}(\theta)$ является самым широким из рассматриваемых распределений для обоих типов состояний. Такой вид фазовых распределений можно объяснить с помощью соотношений (31), (35) и (37). Как было указано нами ранее, коэффициенты $G^{(S)}(n, k)$ играют роль весовых множителей в суммировании бесконечного ряда в (37), что может рассматриваться как некая процедура «усреднения» фазового распределения Пегга — Барнетта (25). В случае четных квадратично-амплитудных сжатых состояний суммирование в (37) ведется только по четным индексам n и k . Так как коэффициенты $G^{(W)}(n, k) > 1$ для четных индексов, то процедура «усреднения» приводит к более резкому фазовому распределению Вигнера, чем распределение Пегга — Барнетта. В случае же нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний, когда суммирование в (37) ведется по нечетным индексам, коэффициенты $G^{(W)}(n, k) < 1$, и процедура «усреднения» приводит к уширению фазового распределения Вигнера. Что касается фазового распределения $P^{(Q)}(\theta)$, то в силу того, что коэффициенты $G^{(Q)}(n, k) < 1$ для всех значений индексов n и k , процедура «усреднения» приводит к уширению этого распределения по сравнению с распределением Пегга — Барнетта как для четных, так и для нечетных состояний. Это со-

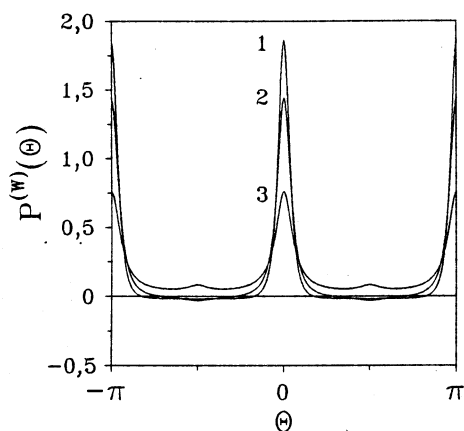


Рис. 14. Фазовые распределения $P^{(W)}(\theta)$ для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda=3$ и 1) $\beta=1$, 2) $\beta=3$, 3) $\beta=5$

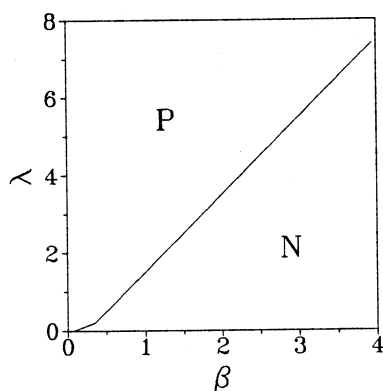


Рис. 15. Области изменения параметров λ и β для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний, где фазовое распределение Вигнера $P^{(W)}(\theta)$ является положительно определенным (P) и где оно может принимать отрицательные значения (N)

ласуется с фактом, что Q -функция связана с одновременным измерением двух некоммутирующих наблюдаемых — процессом, неизбежно сопровождающимся дополнительным шумом [65,66].

Как мы уже отмечали, тот факт, что функция Вигнера не является положительно определенной, может приводить к появлению в соответствующем фазовом распределении отрицательных значений. Такое свойство в поведении фазового распределения Вигнера было отмечено в работе [96] для суперпозиции когерентных и фоковских состояний. Другим примером являются рассматриваемые в данной работе четные квадратично-амплитудные сжатые состояния. На рис.14 представлено фазовое распределение Вигнера для этих состояний при различных значениях параметра β . Мы видим, что при некоторых значениях фазовой переменной это распределение становится отрицательным. Области изменения параметров λ и β для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний, где фазовое распределение Вигнера является положительно определенным и где это распределение может принимать отрицательные значения, показаны на рис.15. В тех случаях, когда существует область изменения параметров, где фазовое распределение становится отрицательным, мы уже не можем говорить о таком распределении как об истинном фазовом распределении, которое по определению должно быть неотрицательным для всех значений фазовой пере-

менной. Следовательно, фазовое распределение Вигнера для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний может быть определено только в ограниченной области изменения параметров состояния. Отметим, что для нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний фазовое распределение Вигнера является всегда положительно определенным. Этот факт может быть объяснен опять с точки зрения процедуры «усреднения». Для нечетных состояний коэффициенты $G^{(W)}(n, k) < 1$, поэтому умножение недиагональных членов суммы в соотношении (37) на эти коэффициенты приводит к распределению, уширенному по сравнению с распределением Пегга — Барнетта, которое по определению является всюду неотрицательным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре обсуждаются различные концепции описания фазовых свойств полей, рассматриваемых в задачах квантовой оптики. Основное внимание при этом уделяется двум подходам к проблеме фазы — операторному формализму Пегга — Барнетта и подходу, связанному с функциями распределения квазивероятности. На примере различных неклассических состояний света, генерируемых в нелинейных оптических процессах, мы указали на связь между этими подходами и обсудили, какого рода информацию дают соответствующие фазовые распределения. Распределение Пегга — Барнетта является положительно определенным и 2π -периодическим, и оно может рассматриваться как результат идеального измерения фазы. Распределение, связанное с Q -функцией, соответствует случаю одновременного измерения двух некоммутирующих наблюдаемых. Такое измерение неизбежно сопровождается дополнительным шумом, что приводит к уширению фазового распределения, и, в некоторых случаях, к потере существенной части фазовой информации. Что касается фазового распределения Вигнера, то для одних состояний поля это распределение, будучи положительно определенным, может быть использовано для описания их фазовых свойств, тогда как для других состояний это распределение принимает отрицательные значения, что делает бессмысленным его использование в этих случаях.

Авторы выражают благодарность Ц.Ганцогу, Р.Танасю и В.С.Ярунину за полезные обсуждения и замечания по данному обзору. Работа была поддержана совместным грантом №RFD300 Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства России.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дирак П.А.М. — Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
2. Dirac P.A.M. — Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1927, vol.114, p.243.
3. Louisell W.H. — Phys. Lett., 1963, vol.7, p.60.
4. Susskind L., Glogower J. — Physics, 1964, vol.1, p.49.
5. Carruthers P., Nieto M.M. — Rev. Mod. Phys., 1968, vol.40, p.411.
6. Lerner E. — Univ. of South Carolina Report, 1966.
7. Levy-Leblond J.-M. — Ann. Phys. (N.Y.), 1976, vol.101, p.319.
8. Loudon R., Shepherd T.J. — Opt. Acta, 1984, vol.31, p.1243.
9. Sanders B.C., Barnett S.M., Knight P.L. — Opt. Comm., 1986, vol.58, p.290.
10. Gerhardt H., Buchler U., Liftin G. — Phys. Lett. A, 1974, vol.49, p.119.
11. Gerhardt H., Welling H., Frolich D. — Appl. Phys., 1973, vol.2, p.91.
12. Barnett S.M., Pegg D.T. — J. Phys. A, 1986, vol.19, p.3849.
13. Garrison J.C., Wong J. — J. Math. Phys., 1970, vol.11, p.2243.
14. Попов В.Н., Ярунин В.С. — Вестник Ленингр. унив., 1973, т.22, с.7.
15. Popov V.N., Yarusin V.S. — J. Mod. Opt., 1992, vol.39, p.1525.
16. Levy-Leblond J.-M. — Revista Mexicana de Fisica, 1973, vol.22, p.15.
17. Santhanam T.S. — Found. Phys., 1977, vol.7, p.121.
18. Santhanam T.S., Sinha K.B. — Aust. J. Phys., 1978, vol.31, p.233.
19. Bergou J., Englert B.-G. — Ann. Phys. (N.Y.), 1991, vol.209, p.479.
20. Barnett S.M., Pegg D.T. — J. Mod. Opt., 1992, vol.39, p.2121.
21. Pegg D.T., Barnett S.M. — Europhys. Lett., 1988, vol.6, p.483.
22. Barnett S.M., Pegg D.T. — J. Mod. Opt., 1989, vol.36, p.7.
23. Pegg D.T., Barnett S.M. — Phys. Rev. A, 1989, vol.39, p.1665.
24. Tanaš R., Murzakhmetov B.K., Gantsog Ts., Chizhov A.V. — Quantum Opt., 1992, vol.4, p.1.
25. Tanaš R., Miranowicz A., Gantsog Ts. — Physica Scripta, 1993, vol.T48, p.53.
26. Shapiro L.H., Shepard S.R., Wong W.C. — Phys. Rev. Lett., 1989, vol.62, p.2377.
27. Shapiro J.H., Shepard S.R. — Phys. Rev. A, 1991, vol.43, p.3795.
28. Noh J.W., Fougères A., Mandel L. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.67, p.1426.
29. Noh J.W., Fougères A., Mandel L. — Phys. Rev. A, 1992, vol.45, p.424.
30. Noh J.W., Fougères A., Mandel L. — Phys. Rev. A, 1992, vol.46, p.2840.
31. Noh J.W., Fougères A., Mandel L. — Physica Scripta, 1993, vol.T48, p.29.
32. Freyberger M., Schleich W. — Phys. Rev. A, 1993, vol.47, p.R30.
33. Freyberger M., Vogel K., Schleich W. — Phys. Lett. A, 1993, vol.176, p.41.
34. Leonhardt U., Paul H. — Phys. Rev. A, 1993, vol.47, p.R2460.
35. Smithey D.T., Beck M., Raymer M.G., Faridani A. — Phys. Rev. Lett., 1993, vol.70, p.1244.
36. Smithey D.T., Beck M., Cooper J. et al. — Physica Scripta, 1993, vol.T48, p.35.
37. Raymer M.G., Beck M., McAlister D.F. — Phys. Rev. Lett., 1994, vol.72, p.1137.
38. Vogel K., Risken H. — Phys. Rev. A, 1989, vol.40, p.2847.
39. Leonhardt U., Vaccaro J.A., Böhmer B., Paul H. — Phys. Rev. A, 1995, vol.51, p.84.
40. Leonhardt U., Paul H. — Physica Scripta, 1993, vol.48, p.45.
41. Barnett S.M., Dalton B.J. — Physica Scripta, 1993, vol.T48, p.13.

42. Tanaš R., Miranowicz A., Gantsog Ts. — Progress in Optics, 1996, vol.35.
43. Barnett S.M., Pegg D.T. — J. Mod. Opt., 1989, vol.36, p.7.
44. Vaccaro J.A., Pegg D.T. — Opt. Commun., 1989, vol.70, p.529.
45. Gantsog Ts., Tanaš R. — Opt. Commun., 1991, vol.82, p.145.
46. Barnett S.M., Pegg D.T. — Phys. Rev. A, 1990, vol.42, p.6713.
47. Gantsog Ts., Tanaš R. — Phys. Lett. A, 1991, vol.152, p.251.
48. Ho Trung Dung, Tanaš R., Shumovsky A.S. — Opt. Commun., 1990, vol.79, p.462.
49. Gerry C.C. — Opt. Commun., 1990, vol.75, p.168.
50. Gantsog Ts., Tanaš R.J. — J. Mod. Opt., 1991, vol.38, p.1021.
51. Gantsog Ts., Tanaš R.J. — J. Mod. Opt., 1991, vol.38, p.1537.
52. Gantsog Ts., Tanaš R.J. — Quantum Opt., 1991, vol.3, p.33.
53. Gantsog Ts., Tanaš R., Zawodny R. — Phys. Lett. A, 1991, vol.155, p.1.
54. Gantsog Ts., Tanaš R., Zawodny R. — Opt. Commun., 1991, vol.82, p.345.
55. Vaccaro J.A., Pegg D.T. — J. Mod. Opt., 1990, vol.37, p.17.
56. Summy G.S., Pegg D.T. — Opt. Commun., 1989, vol.77, p.75.
57. Cahill K.E., Glauber R.J. — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.1857.
58. Cahill K.E., Glauber R.J. — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.1882.
59. Glauber R.J. — Phys. Rev., 1963, vol.130, p.2529.
60. Glauber R.J. — Phys. Rev., 1963, vol.131, p.2766.
61. Sudarshan E.C.G. — Phys. Rev. Lett., 1963, vol.10, p.277.
62. Клаудер Дж., Сударшан Э. — Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970.
63. Wigner E.P. — Phys. Rev., 1932, vol.40, p.749.
64. Barnett S.M., Knight P.L. — J. Mod. Opt., 1987, vol.34, p.841.
65. Shapiro J.H., Wagner S.S. — IEEE J. Quantum Electron., 1984, vol.QE-20, p.803.
66. Braunstein S.L., Caves C.M. — Phys. Rev. A, 1990, vol.42, p.4115.
67. Tanaš R., Gantsog Ts., Miranowicz A., Kielich S. — J. Opt. Soc. Am. B, 1991, vol.8, p.1576.
68. Tanaš R., Gantsog Ts. — Phys. Rev. A, 1992, vol.45, p.5031.
69. Schleich W., Wheeler J.A. — Nature, 1987, vol.326, p.574.
70. Schleich W., Horowicz R.J., Varro S. — Phys. Rev. A, 1989, vol.40, p.7405.
71. Hong C.K., Mandel L. — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.56, p.58.
72. Filipowicz P., Javanainen J., Meystre P. — J. Opt. Soc. Am. B, 1986, vol.3, p.906.
73. De Oliveira F.A.M., Kim M.S., Knight P.L., Buž ek V. — Phys. Rev. A, 1990, vol.41, p.2645.
74. Yuen H.P. — Phys. Rev. A, 1976, vol.13, p.2226.
75. Kim M.S., de Oliveira F.A.M., Knight P.L. — Phys. Rev. A, 1989, vol.40, p.2494.
76. Král P. — J. Mod. Opt., 1990, vol.37, p.889.
77. Шумовский А.С. — ТМФ, 1991, т.89, с.438.
78. Chizhov A.V., Gantsog Ts., Murzakhmetov B.K. — Quantum Opt., 1993, vol.5, p.85.
79. Mollow B.R., Glauber R.J. — Phys. Rev., 1967, vol.160, p.1076.
80. Mollow B.R., Glauber R.J. — Phys. Rev., 1967, vol.160, p.1097.
81. Barnett S.M., Knight P.L. — J. Opt. Soc. Am. B, 1985, vol.2, p.467.
82. Caves C.M., Schumaker B.L. — Phys. Rev. A, 1985, vol.31, p.3068.
83. Schumaker B.L., Caves C.M. — Phys. Rev. A, 1985, vol.31, p.3093.
84. Louisell W.H., Yariv A., Siegman A.E. — Phys. Rev., 1961, vol.124, p.1646.

85. Chizhov A.V., Murzakhmetov B.K. — Phys. Lett. A, 1993, vol.176, p.33.
86. Caves C.M., Chang Zhu, Milburn G.J., Schleich W. — Phys. Rev. A, 1991, vol.43, p.3854.
87. Gantsog Ts., Tanas' R. — Opt. Commun., 1991, vol.82, p.145.
88. Agarwal G.S. — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.57, p.827.
89. Hong C.K., Mandel L. — Phys. Rev. Lett., 1985, vol.54, p.323.
90. Hong C.K., Mandel L. — Phys. Rev. A, 1985, vol.32, p.974.
91. Braunstein S.L., McLachlan R.I. — Phys. Rev. A, 1987, vol.35, p.1659.
92. Hillery M. — Opt. Commun., 1987, vol.62, p.135.
93. Hillery M. — Phys. Rev. A, 1987, vol.36, p.3796.
94. Yu D., Hillery M. — Quantum Opt., 1994, vol.6, p.37.
95. Мурзахметов Б.К., Чижов А.В. — Препринт ОИЯИ, Р17-95-136, Дубна, 1995.
96. Garraway B.M., Knight P.L. — Phys. Rev. A, 1992, vol.46, p.R5346.

ИНФРАКРАСНАЯ СИНХРОТРОННАЯ ДИАГНОСТИКА КАК НОВОЕ ПЕРСПЕКТИВНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ В ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ УСКОРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

А.А.Мальцев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлены методы измерения токовых, геометрических и оценки энергетических параметров пучков в кольцевых ускорителях с помощью синхротронного излучения инфракрасного диапазона и созданные для реализации этих методов детектирующие информационно-измерительные системы. Используемый спектр синхротронного излучения в основном находится в инфракрасном диапазоне. В детектирующих системах используются специально разработанные элементы инфракрасной оптики (высоковакуумное окно из оптической керамики и широкополосные длиннофокусные оптические каналы). Регистрация излучения ведется в спектральной области $\Delta\lambda \cong 0,3\text{--}40$ мкм охлаждаемыми и работающими при комнатной температуре инфракрасными детекторами. Приведены результаты измерения числа электронов в пучке, равновесного радиуса и размеров малого сечения кольцевого сгустка, угловой расходимости синхротронного излучения относительно медианной плоскости кольца.

Methods for measuring current, geometric beam characteristics and for estimating of beam energy parameters in ring accelerator using synchrotronous radiation in spectrum infrared region are presented as well as information-measuring systems created for detection of synchrotronous radiation and for realization of these methods. The used spectrum of synchrotronous radiation is mainly in infrared range. Special created elements of infrared optics are used (high vacuum window of optical ceramics and broad-band long-focus optical channels). Synchrotronous radiation in wave length range $\Delta\lambda \cong 0.3\text{--}40$ μm is registered by cooling and operating under room temperature infrared detectors. Results of measuring the number of electrons in a beam, equilibrium radius and dimensions of small cross section of ring bunch, angular divergence of synchrotronous radiation relatively to ring median plane are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Ускорители заряженных частиц являются неперенным инструментом для исследования в области ядерной физики и физики элементарных частиц. Они используются во многих смежных областях науки и находят широкое применение в промышленности.

Задача создания новых ускорителей с высокой энергией и большими токами ускоренных частиц, с более широким спектром ускоренных ядер находится в центре внимания многих ускорительных лабораторий мира. Один из исследуемых путей решения этой проблемы — разработка ускорителя коллективного типа — ускорителя электронно-ионных колец [1].

При существующих параметрах электронных колец ($E \sim 20$ МэВ, $R \sim 4$ см) коллективного ускорителя тяжелых ионов (КУТИ) ОИЯИ спектр синхротронного излучения в основном расположен в инфракрасной области ($\lambda \geq 1$ мкм). Именно эта особенность коллективного ускорителя потребовала разработки методов инфракрасной синхротронной диагностики, в основу которых было положено использование новейших достижений в области инфракрасной техники (оптических систем, интегральных и координатно-чувствительных детекторов излучения).

До настоящего времени довольно мало публикаций [2,3] (практически полностью отсутствовавших в начале 70-х годов, когда началась работа над проектом КУТИ), посвященных использованию синхротронного излучения инфракрасного диапазона в ускорительном эксперименте. В начале проектных работ полностью отсутствовали детально разработанные и развитые методы и системы неразрушающей диагностики ускоряемых пучков, отвечающие специфическим требованиям коллективного ускорителя и способные обеспечить уверенное и надежное наблюдение и исследование пучков заряженных частиц в динамике их развития. Для этой цели были разработаны методы [4—6] инфракрасной синхротронной диагностики, а также разработаны и созданы уникальные оптические системы [7—9] (окна, объективы, линзовые и зеркальные оптические каналы) и детектирующие (одноканальные и многоканальные координатно-чувствительные) устройства [10—14].

На основе этих элементов инфракрасной техники был разработан и создан ряд законченных информационно-измерительных систем, отвечающих требованиям ускорительного эксперимента, проводимого на коллективном ускорителе тяжелых ионов ОИЯИ.

Необходимо отметить, что область применения результатов работы может быть значительно шире. Большинство описанных в работе методов и информационно-измерительных систем могут быть использованы в том же или слегка измененном виде и на других существующих, строящихся и проектируемых кольцевых электронных и протонных ускорителях-генераторах

синхротронного излучения, например, SPS [15], УНК [16], SSC [17], нуклотрон ОИЯИ, спектр синхротронного излучения которых в основном находится в инфракрасной области, как для диагностики пучков в динамике их развития, так и для проведения различных научных исследований и решения прикладных задач, основанных на использовании синхротронного излучения инфракрасного диапазона, в том числе и для диагностики пучков и проведения исследований на электрон-позитронных накопителях [18].

Цель данной работы состоит в следующем:

- представить методы и системы неразрушающей диагностики и исследований пучков заряженных частиц (электронных, электронно-ионных, а также протонных), основанные на использовании их собственного магнитно-тормозного (синхротронного или краевого) излучения в широкой спектральной области от ультрафиолетового до далекого длинноволнового инфракрасного (преимущественно) диапазона;
- привлечь внимание к широкому кругу проблем как в ускорительном эксперименте (например, исследование когерентности синхротронного излучения [5]), так и в других, порой совсем не смежных областях, таких как метрология, высокотемпературная сверхпроводимость, биология и т.д., которые могли бы решаться с помощью инфракрасной синхротронной диагностики, перекрывающей интервал длин волн $\Delta E \sim 0,3 + 40$ мкм, что существенно превосходит спектральную область, широко используемую в настоящее время (в основном это область $\Delta \lambda \sim 0,3 + 1,1$ мкм) в различных экспериментах и исследованиях.

Расширение спектрального диапазона уверенно диагностируемого синхротронного излучения открывает новые возможности и перспективы для решения научных и прикладных задач.

Реализуемость и перспективность инфракрасных синхротронных методов и систем диагностики показана и доказана на примере компрессора КУТИ — низкоэнергетичного ($E < 20$ МэВ, $\Delta \lambda \sim 0,3 + 40$ мкм) электронного кольцевого ускорителя ОИЯИ.

1. ИСТОЧНИКИ ИНФРАКРАСНОГО СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Синхротронное излучение — известный эффект, широко используемый на кольцевых электронных ускорителях и накопителях. Синхротронное излучение испускают все заряженные частицы при своем движении по криволинейной траектории в магнитном поле, в том числе и протоны. Но в силу того, что энергия покоя протона E_{0p} (938 МэВ) больше энергии покоя электрона E_{0e} (0,511 МэВ) в 1835,6 раз, интенсивность синхротронного

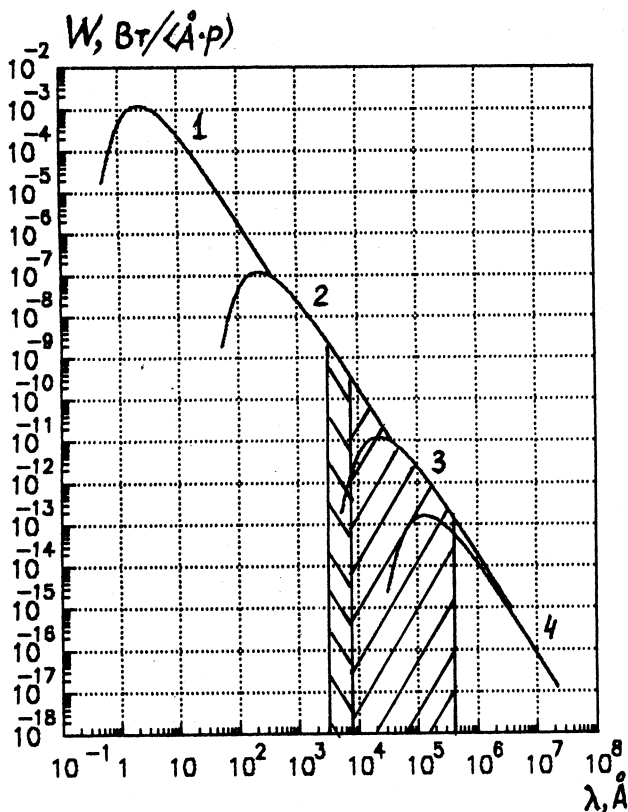


Рис.1. Рассчитанное спектральное распределение мощности синхротронного излучения протона для различных ускорительно-накопительных комплексов: 1 — SSC, $E=20$ ТэВ, $R=10^4$ м, 2 — HEB, $E=2$ ТэВ, $R=10^3$ м, 3 — MEB, $E=200$ ГэВ, $R=10^2$ м, 4 — нуклотрон, $E=120$ ГэВ, $R=128$ м

излучения для протонов в такое же число раз меньше при одинаковой энергии частиц и кривизне траектории движения. Поэтому при существовавших до недавних пор энергиях протонных ускорителей их синхротронное излучение почти не использовалось, что подтверждается ограниченным числом публикаций на эту тему, которые начали появляться только в конце 70-х годов и в которых рассматриваются вопросы генерации синхротронного излучения протонным синхротроном SPS ЦЕРН на энергию 400 ГэВ (синхротронное излучение на краях смещающих магнитов в диапазоне длин волн $\sim 0,6$ мкм [15]). Создание ускорительно-накопительных комплексов

типа УНК [16] или SSC [17] протонов на энергию 3—20 ТэВ могло бы существенно повлиять на монополию кольцевых электронных ускорителей как основных генераторов синхротронного излучения.

Анализ спектров синхротронного излучения, рассчитанных для проектируемых протонных кольцевых ускорителей ряда ведущих ускорительных лабораторий мира, показывает, что основная часть спектрального распределения излучения для протонов с энергией до ~ 1 ТэВ находится в инфракрасной области (см. рис.1).

Оценка интенсивности излучения протонов и сравнение ее с интенсивностью синхротронного излучения низкоэнергетичных электронов, например, коллективного ускорителя ОИЯИ (см. рис.2), позволяет надеяться, что методы и системы инфракрасной синхротронной диагностики, разработанные для коллективного ускорителя ионов и апробированные в ускорительном эксперименте, могут быть использованы и для диагностики протонных пучков с энергиями более 100 ГэВ. До настоящего времени не известны случаи диагностики протонных пучков с энергией протонов ниже 400 ГэВ. Расчет характеристик синхротронного излучения, выбор методов и систем диагностики проведен и показан на примере адгезатора — электронного кольцевого ускорителя, компрессора сильноточных низкоэнергетичных электронных колец коллективного ускорителя.

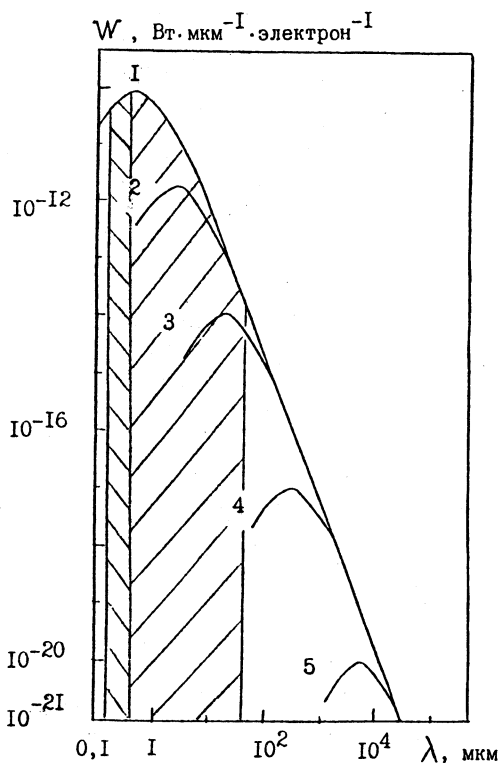


Рис.2. Рассчитанное спектральное распределение мощности синхротронного излучения электронного кольца в процессе его сжатия в адгезаторе с радиуса 40 см до 4 см при начальной энергии электронов $\gamma=5$. Штриховкой отмечены видимая ($0,3 \div 0,7$ мкм) и инфракрасная ($0,7 \div 40$ мкм) спектральные области. 1 — $R=4$ см, $\gamma=50$; 2 — $R=6$ см, $\gamma=33$; 3 — $R=10$ см, $\gamma=20$; 4 — $R=20$ см, $\gamma=10$; 5 — $R=40$ см, $\gamma=5$

Адгезатор коллективного ускорителя тяжелых ионов ОИЯИ также является источником синхротронного излучения. Спектр этого излучения из-за низкой энергии электронов (относительно синхротронов и накопительных колец) занимает всю инфракрасную область оптического диапазона и часть видимой области* и не может быть конкурентом синхротронов в спектроскопических опытах, где обычно используется вакуумный ультрафиолет и более жесткие фотоны. Однако особенностью адгезатора является большой ток электронного кольца, достигающий 1 кА (токи пучков в синхротронах и накопительных кольцах обычно не превышают 1 А). Это обеспечивает адгезатору коллективного ускорителя как источнику синхротронного излучения в инфракрасной области первенство среди ряда других ускорительных установок [19]. Более того, если говорить о яркости источника (число фотонов, испускаемых в единицу телесного угла с единицы площади поперечного сечения кольцевого электронного сгустка), то адгезатор коллективного ускорителя ОИЯИ не имеет себе равных и среди обычных источников излучения. Понятно, что эти свойства синхротронного излучения адгезатора нельзя было не использовать при проведении исследований и экспериментов по физике коллективного метода ускорения. Синхротронное излучение электронов ~~кольцевого сгустка~~ позволяет получать информацию о больших и малых размерах кольца, о числе электронов и ионов в кольцевом сгустке, об изменении большого радиуса кольца в процессе его компрессии в адгезаторе (так называемая *R*-траектория) и о ряде других параметров электронного (электронно-ионного) кольцевого сгустка.

Хотя конечной целью создания первых установок коллективного ускорителя тяжелых ионов ОИЯИ было проведение экспериментов и исследований по физике тяжелых ионов, не менее важна была их роль и в постановке экспериментов по отработке методов и аппаратуры информационно-измерительных систем для диагностики электронных и электронно-ионных кольцевых сгустков в процессе их сжатия в адгезаторе на заключительной стадии (на радиусах кольца ~ 6–4 см), а также исследования динамики сжатия.

Основные методы [4,5] диагностики параметров кольцевых сгустков заряженных частиц в адгезаторе коллективного ускорителя, основанные на использовании синхротронного излучения инфракрасного диапазона, были разработаны для прототипа коллективного ускорителя тяжелых ионов (ПКУТИ). Реализация разработанных методов осуществлялась на ПКУТИ и

*Здесь и далее рассматривается только оптический диапазон синхротронного излучения; СВЧ-диапазон излучения, где значительную роль могут играть когерентные механизмы излучения, связанные с возникновением разного рода неустойчивостей электронного или электронно-ионного колец, не рассматривается.

синхротроне ЛИЯФ [20]. Дальнейшее развитие методы инфракрасной диагностики получили на КУТИ-20 [21].

Важной особенностью синхротронного излучения является теоретическая предсказуемость его характеристик и их точное количественное описание. Швингер в своей работе [22] вывел общее уравнение мощности синхротронного излучения, испускаемого ультрарелятивистской частицей с энергией E , движущейся по круговой орбите радиуса R . Движущаяся с постоянной скоростью частица излучает по всей орбите мощность $w(\lambda, \theta)$ в интервале длин волн $d\lambda$ и в интервале $d\theta$ аксиального угла θ (рис.3):

$$w(\lambda, \theta) = \frac{27}{32\pi^3} \frac{e^2 c}{R^2} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^8 \left[1 + \left(\frac{E}{mc^2} \theta \right)^2 \right]^2 \times \\ \times \left\{ K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\left(\frac{E}{mc^2} \theta \right)^2}{1 + \left(\frac{E}{mc^2} \theta \right)^2} K_{1/3}^2(\xi) \right\}, \quad (1)$$

где e, m — заряд и масса частицы; c — скорость света; θ — угол между направлением излучения и плоскостью орбиты; λ_c — критическая длина волны

$$\lambda_c = \frac{4\pi R}{3} \gamma^{-3}, \quad (2)$$

$\gamma = E/mc^2$ — релятивистский фактор; $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$ — модифицированные функции Бесселя 2-го рода с аргументом

$$\xi = \frac{\lambda_c}{2\lambda} [1 + (\gamma\theta)^2]^{3/2}.$$

Расчет по этой формуле дает спектральное и угловое распределение интенсивности излучения ультрарелятивистской частицы.

Спектральное распределение испускаемой ультрарелятивистской частицей мгновенной мощности синхротронного излучения на длине волны λ в единичном интервале длин волн описывается формулой [23]

$$w(\lambda) = \frac{3^{5/2}}{16\pi^2} \frac{e^2 c}{R^3} \gamma^7 y^3 \int_y^\infty K_{5/3}(\eta) d\eta, \quad (3)$$

где $y = \lambda_c/\lambda$.

Критическая длина волны λ_c связана с длиной волны λ_m , соответствующей максимуму спектрального распределения синхротронного излучения, следующим соотношением:

$$\lambda_m = 0,42\lambda_c. \quad (4)$$

В формулу (3) входит функция

$$G(y) = y^3 \int_y^{\infty} K_{5/3}(\eta) d\eta.$$

Это выражение характеризует универсальную кривую спектрального распределения интенсивности синхротронного излучения ультрарелятивистской частицы, которую можно использовать для получения распределения при любой энергии, поскольку форма кривой не зависит от энергии частицы. С помощью этой кривой построено и показано на рис.1 спектральное распределение мощности синхротронного излучения $w(\lambda)$ протонов, отличающихся энергиями и радиусами орбит, и на рис.2 — мощности синхротронного излучения, испускаемого кольцевым электронным сгустком на различных этапах его сжатия в адгезаторе, начиная с момента инжекции электронного пучка в адгезатор.

Расчет для синхротронного излучения электронов проводился для коллективного ускорителя, у которого энергия электронов при инжекции в адгезатор $\gamma_0 = 5$, а начальный радиус электронной орбиты $R_0 = 40$ см. При расчете учитывалось условие адиабатичности процесса сжатия кольца в адгезаторе, когда энергию электронов γ и радиус орбит их вращения R в любой момент сжатия кольца можно выразить через начальные параметры γ_0 и R_0 , которые имеет пучок при инжекции. Это условие может быть представлено выражением

$$\gamma R \simeq \gamma_0 R_0. \quad (5)$$

Мощность излучения одного электрона при $\gamma \gg 1$ определяется формулой

$$w[\text{Вт} \cdot \text{электрон}^{-1}] = \int_0^{\infty} w(\lambda) d\lambda = 4,6 \cdot 10^{-16} \gamma^4 R^{-2} [\text{см}]. \quad (6)$$

Если полная мощность излучения W кольца пропорциональна числу N_e электронов в нем, то при заданном числе электронов можно рассчитать полную мощность излучения $W = N_e w$.

Как видно из рис.2, спектральный диапазон излучения, испускаемого электронным кольцом при его сжатии в адгезаторе, занимает широкий интервал длин волн от ультрафиолетовых в оптической области до миллиметровых в радиоволновом диапазоне. По мере сжатия кольца максимум спектра излучения перемещается в коротковолновую область и на радиусе 4 см попадает в видимый диапазон.

На последнем этапе сжатия, начиная с радиуса $R \sim 6$ см, величина излучаемой мощности и спектр излучения позволяют вести надежную регистрацию излучения с помощью инфракрасных детекторов. На малых радиусах электронного пучка в адгезаторе мощность синхротронного излучения, как это видно из расчета, может составлять киловатты. Учитывая следующие особенности синхротронного излучения адгезатора:

- хорошо рассчитываемые параметры излучения;
- непрерывный спектр в широком интервале длин волн;
- большую полную и спектральную мощность излучения, превосходящую все другие известные источники,

можно сказать, что адгезатор может иметь большие перспективы как уникальный источник излучения для прикладных и научных целей, например, для метрологии и физических исследований высокотемпературной сверхпроводимости.

Релятивистский электрон, вращаясь с постоянной скоростью в магнитном поле, испытывает радиальное ускорение, при этом возникает магнитнотормозное или синхротронное излучение. Относительно плоскости орбиты это излучение распространяется в узком конусе (см. рис.3), угол раствора которого θ подчиняется выражению

$$\theta \simeq (1 - \beta^2)^{1/2} = m_0 c^2 / E = 1 / \gamma, \quad (7)$$

где E — энергия электрона.

Угловое распределение излучения можно получить, проинтегрировав выражение (1) по всем длинам волн. Распределение интенсивности по θ принимает вид

$$w(\theta) = \frac{e^2 c}{R^2} \gamma^5 [1 + (\gamma\theta)^2]^{-5/2} \left\{ \frac{7}{16} + \frac{5}{16} \frac{(\gamma\theta)^2}{1 + (\gamma\theta)^2} \right\}. \quad (8)$$

В адгезаторе равновесная траектория электронов на заключительной стадии сжатия кольца представляет собой (с хорошей точностью) окружность (отклонение от окружности определяется азимутальными неоднородностями магнитного поля, которые не превышают $\sim 10^{-3}$).

Синхротронное излучение адгезатора по азимутальному углу φ (см. рис.3) распределено изотропно.

По углу θ (угол отклонения от плоскости орбиты) распределение резко анизотропно, вытянуто вперед и зависит от направления поляризации. Основная часть излучения сконцентрирована в интервале углов $\pm 1/\gamma$. Приблизленно угловой разброс излучения (полная ширина на полувысоте) можно представить формулами [24]:

$$\Delta\theta \simeq \begin{cases} \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^{1/3} & \text{для } \lambda \gg \lambda_c \\ \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^{1/2} & \text{для } \lambda \ll \lambda_c \end{cases} \quad (9)$$

Особенностью адгезатора является довольно большая частота бетатронных колебаний электронов, связанная с загрузкой электронного кольца ионами, что дополнительно уширяет (почти в два раза) угловое распределение синхротронного излучения [4]. Обе эти причины приводят к тому, что для адгезатора основная часть синхротронного излучения сосредоточена в угле $\Delta\theta \simeq 60$ мрад, что вместе с большой плотностью тока кольца обеспечивает адгезатору, как источнику синхротронного излучения в инфракрасном диапазоне, рекордно высокую яркость, которая составляет $\sim 2,7 \cdot 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{ср}}$. Для сравнения, яркость классического источника — абсолютно черного тела (АЧТ), спектр излучения которого соответствует спектру синхротронного излучения, составляет $\sim 19,4 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2 \cdot \text{ср}}$.

Результаты, полученные на основании проведенных расчетов, позволяют с достаточной для практики степенью точности прогнозировать возможность использования для диагностики синхротронного излучения простых в эксплуатации инфракрасных детектирующих систем.

Следует отметить, что методы диагностики протонных пучков находятся в стадии разработки. Известны только примеры видимой синхротронной диагностики, реализованной на кольцевом протонном ускорителе. Поэтому практически оправданным представляется использование методов инфракрасной синхротронной диагностики высокоэнергетических низкоэнергетических электронных пучков и для протонных пучков, несмотря на определенный формализм подхода и произвольность некоторых допущений.

2. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ. ОБЩАЯ СХЕМА УСКОРИТЕЛЯ И ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Адгезатор, он же компрессор электронных колец, имеет свои конструктивные особенности. Он состоит из двух основных элементов, которыми являются вакуумная камера и магнитная система.

Камера представляет собой цилиндрическую сварную конструкцию, с боковыми стенками сфероидальной формы, закрепленную в жестком стапеле. На цилиндрической поверхности камеры имеется несколько патрубков, один из которых специально предназначен для вывода синхротронного излучения.

Магнитная система адгезатора обеспечивает захват инжектированного из сильноточного линейного индукционного ускорителя электронного пучка, формирование из него кольцевого сгустка и сжатие кольца до необходимых размеров. Катушки магнитной системы закреплены симметрично с обеих сторон относительно вакуумной камеры. Система состоит из витков нулевой ступени, формирующей кольцо из инжектированного пучка и трех ступеней сжатия, обеспечивающих сжатие электронного кольца в импульсных магнитных полях с радиуса $R = 35$ см до $R < 4$ см.

Контроль за параметрами кольцевого сгустка в адгезаторе имеет наибольшую актуальность на малых радиусах кольца ($R = 6 + 3$ см), когда происходит окончательное формирование электронного кольца с необходимой плотностью частиц и загрузка его тяжелыми ионами с целью последующего ускорения.

Измерительные системы должны вести уверенную диагностику кольца при следующих начальных условиях:

- 1) Частота импульсов (частота срабатывания ускорителя) f до 20 Гц.
- 2) Время наблюдения (длительность импульса синхротронного излучения) $t \sim 10^{-3}$ с.
- 3) Измеряемое число электронов $N_e = 10^9 + 5 \cdot 10^{13}$.
- 4) Радиус кольца $R = 6 + 3$ см.
- 5) Диаметр поля зрения в плоскости малого сечения кольцевого сгустка $\varnothing 30$ мм.
- 6) Размеры малого сечения кольца $a_R, a_Z = 2 + 4$ мм.
- 7) Рабочий спектральный диапазон $\Delta\lambda = 1 + 40$ мкм.
- 8) Напряженность магнитного поля вблизи окна вывода синхротронного излучения $H = 100$ Э.

Интенсивность синхротронного излучения ультрарелятивистского ($v/c = \beta \simeq 1$) электрона, движущегося по круговой орбите в магнитном поле H , проинтегрированная по спектру и углам излучения, равна

$$w = \frac{2}{3} \frac{e^4 H^2 \gamma^2}{m_0^2 c^3},$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, e и m_0 — заряд и масса электрона.

Для кольца радиуса R с током J полная мощность синхротронного излучения равна

$$W [\text{Вт}] = 6 \cdot 10^{-4} \frac{\gamma^4 J [\text{кА}]}{R [\text{см}]} \quad (10)$$

Приведем типичные параметры электронного кольца в адгезаторе КУТИ, определяющие интенсивность синхротронного излучения.

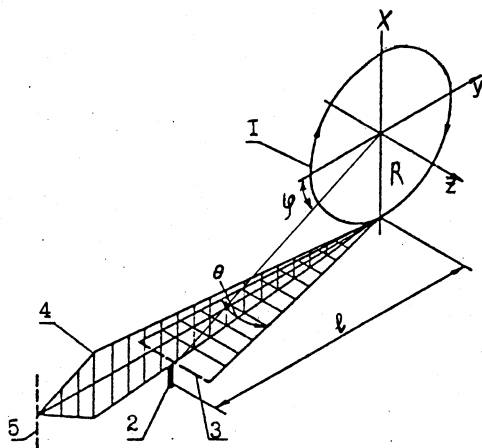
Энергия электронов	$E/m_0 c^2 = \gamma = 36$
Радиус орбиты	$R = 3,5 \text{ см}$
Ток кольца	$J = 0,5 \text{ кА}$
Радиус сечения кольца	$r = 0,25 \text{ см.}$

Из выражения (10), подставляя указанные величины, можно легко получить суммарную мощность синхротронного излучения от кольцевого электронного сгустка, которая составляет $W = 150 \text{ Вт}$.

2.1. Основные измерения. Методы измерений параметров электронного (электронно-ионного) кольцевого сгустка иллюстрирует рис.3, где показана геометрия испускания и распространения синхротронного излучения и расположение относительно кольцевого сгустка различных детектирующих систем.

Измерение числа электронов. Методика измерения числа электронов [5,20] основана на прямой зависимости интенсивности синхротронного излучения от числа электронов и измерении этой интенсивности, проводимом в спектральной области $\lambda \gg \lambda_c$, когда интенсивность излучения слабо зависит от энергии электронов [19,25]. Излучение регистрируется детектором, прокалиброванным на источнике с известным спектром излучения и интенсивностью. Детектор может быть как одноэлементным, так и многоэлементным. Разработано два метода измерения интенсивности синхротрон-

Рис.3. Схема, поясняющая геометрию испускания синхротронного излучения и его регистрации: 1 — орбита электронов, 2 — измеритель числа частиц (монитор), 3 — детектор угловой расходимости синхротронного излучения, 4 — длиннофокусный оптический тракт, 5 — детектор-измеритель геометрии кольцевого сгустка



ного излучения: приближенный, когда синхротронное излучение измеряется только в медианной плоскости адгезатора 2, и точный, когда система датчиков синхротронного излучения охватывает большую часть потока синхротронного излучения 3 (в простоте аппаратуры — достоинство первого способа измерений). Недостаток — отсутствие оперативной, для каждого импульса ускорителя, информации об угловом распределении синхротронного излучения. Необходимость использования измеренного ранее, в других сеансах работы ускорителя, углового распределения для оценки интеграла синхротронного излучения с неизбежностью ухудшает точность измерения тока электронов в кольце в этом простом, с одним датчиком, варианте измерений.

Для точного измерения интенсивности, с учетом углового распределения синхротронного излучения электронного кольца относительно его медианной плоскости, разработан детектор в виде однокоординатного блока светочувствительных элементов, установленный в прямом пучке синхротронного излучения перпендикулярно электронным орбитам [14].

Измерение геометрических параметров кольца в адгезаторе [12,13] сводится к определению его радиуса R и размеров малого сечения a_z и a_R . Метод измерения основан на использовании новейших достижений в инфракрасной оптике и инфракрасной многоканальной регистрирующей технике. Он заключается в том, что изображение малого сечения кольца, попавшего в поле зрения оптического тракта 4, фокусируется на чувствительную поверхность детектора с линейным расположением элементов 5.

Измерение угловой расходимости синхротронного излучения. Важным параметром для диагностики кольцевого сгустка в адгезаторе является угловая расходимость синхротронного излучения в направлении, перпендикулярном медианной плоскости кольцевого сгустка. Ее измерение дает информацию об энергии электронов и их угловом распределении (бетатронные колебания). Для измерения расходимости пучка излучения и связанных с этой расходимостью особенностей разработана методика, в основе которой лежит многократная в течение цикла ускорения регистрация интенсивности синхротронного излучения на выходе его из камеры компрессора с помощью инфракрасного детектора, длина которого перекрывает большую часть потока синхротронного излучения в направлении, перпендикулярном плоскости вращения заряженных частиц [5]. Методика позволяет:

- оценить величину энергии электронов в кольце;
- измерять мощность синхротронного излучения с учетом его реального углового распределения и тем самым повысить точность абсолютных измерений числа электронов в кольце;
- по характеру уширения углового распределения синхротронного излучения оценить частоту бетатронных колебаний электронов в кольце и интенсивность ионной компоненты закруженного ионами кольца.

2.2. Информационно-измерительные системы диагностики параметров кольцевого сгустка в адгезаторе. Диагностика параметров кольцевого сгустка осуществляется одновременно несколькими информационно-измерительными системами [26], реализующими перечисленные выше различные методики. Схема экспериментальной установки показана на рис.4. Инжектированный в вакуумную камеру адгезатора 1 релятивистский пучок электронов в магнитном поле адгезатора сворачивается в кольцо 2. Вращаясь в магнитном поле, электроны часть своей энергии теряют на синхротронное излучение 3, максимум спектрального распределения которого смещается по мере сжатия кольца из радиочастотного диапазона в ближнюю инфракрасную область, где и становится доступным для регистрации достаточно простыми в эксплуатации инфракрасными фотоприемниками.

В конструкции компрессора предусмотрен патрубок для вывода синхротронного излучения, ось которого располагается по касательной к электронному кольцу радиусом 5 см. Синхротронное излучение электронного кольца выводится из компрессора КУТИ через специальное инфракрасное окно 4 и регистрируется светочувствительными элементами детектирующих блоков.

С учетом спектральной особенности регистрируемого синхротронного излучения, заключающейся в его широкополосности, был проведен тщательный отбор оптических материалов [27—30] и детекторов излучения [31—37], отвечающих требованиям и условиям работающего ускорителя.

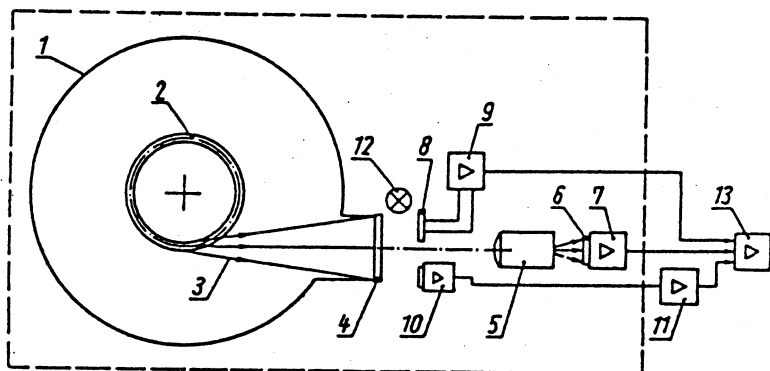


Рис.4. Схема экспериментальной установки: 1 — адгезатор (компрессор) электронных колец, 2 — электронное кольцо, 3 — синхротронное излучение, 4 — окно, 5 — оптический тракт, 6 и 10 — многоэлементные детектирующие блоки, 7, 9 и 11 — усилители, 8 — приемник-монитор с чувствительной площадью S' , 12 — контрольный источник (светодиод), 13 — блоки обрабатывающей электроники

Для вывода синхротронного излучения из компрессора использовались окна [7,9] из различных оптических материалов [27,30].

Выведенное из адгезатора синхротронное излучение регистрируется тремя независимыми инфракрасными детектирующими системами, образующими единый информационно-измерительный комплекс [21]. Каждая из систем выполняет свою конкретную задачу, работая синхронно в едином масштабе времени.

Устройство с одноэлементным детектором 8 предназначено для измерения абсолютного числа электронов.

Для измерения геометрических параметров кольца используется система с многоэлементным координатным детектором 6, расположенным в фокусе оптического канала 5. Угловая расходимость синхротронного излучения и его интенсивность измеряются с помощью инфракрасного координатного детектора 10 с линейным расположением элементов.

Полученная от измерительных систем информация, собранная и обработанная в блоках 13, куда входит и ЭВМ, существенно повышает общую точность и информативность измерений.

Выбор детекторов для систем диагностики определяется интенсивностью и спектральными свойствами регистрируемого синхротронного излучения, а также условиями работы коллективного ускорителя.

Таблица. Сравнительные данные инфракрасных фотоприемников, использованных в качестве детекторов синхротронного излучения

Тип приемника	Рабочая температура, К	Рабочий спектральный диапазон, мкм	Интегральная чувствительность, В·Вт ⁻¹	Темновое сопротивление, Ом	Инерционность, с	Пороговая чувствительность, Вт·Гц ^{-1/2}
Фотодиод Si	295	0,3 + 1,1	—	—	10 ⁻⁸	10 ⁻¹²
Пирозлектрик LiNbO ₃ , CdHgTe	295	0,4 + 46	(2 + 5)·10 ²	—	10 ⁻⁶	(2 + 10)·10 ⁻¹¹
Фотосопротивление PbSe	295	0,9 + 4,6	10 ³	10 ⁴	2·10 ⁻⁶	5·10 ⁻⁸
Фотосопротивление InSb	77	0,7 + 5,9	3·10 ⁴	2·10 ⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻¹⁰
Фотосопротивление GeAu (ФСГ-22-3А1)	77	2 + 8,5	1,4·10 ³	2·10 ⁵	10 ⁻⁸	1,6·10 ⁻¹⁰

При выборе детекторов основными требованиями являлись:

- 1) высокая спектральная чувствительность в области длин волн $\lambda = 0,4 + 40$ мкм;
- 2) временное разрешение (быстродействие) $\tau \leq 0,1 + 5 \cdot 10^{-6}$ с;
- 3) простота в эксплуатации (отсутствие сложных криогенных систем).

Были рассмотрены различные типы инфракрасных приемников и с учетом названных требований предложены пять фотоприемников, использованных в различных модификациях одноэлементных и координатно-чувствительных детектирующих блоков, выполняющих конкретную задачу и чувствительных в заданном участке инфракрасной области спектра. Основные характеристики выбранных фотоприемников приведены в таблице.

Кроме стандартного фотоприемника ФСГ-22-3А1, серийно выпускаемого промышленностью, все остальные детекторы взяты либо из перспективных разработок сотрудничающих с ОИЯИ организаций, либо разработаны и изготовлены в ОИЯИ. Детекторы на основе пирозлектриков разработаны в Техническом университете, Дрезден (Германия) и использованы [11] в рамках международного сотрудничества ТУ и ОИЯИ.

Регистрация синхротронного излучения электронов может вестись всеми измерительными системами одновременно либо каждой в отдельности. Интенсивность излучения регистрируется детекторами и выдается на выходе в виде аналогового сигнала, который предварительно усиливается до необходимой величины и по кабельной линии связи подается на пульт управления ускорителем, где преобразуется в цифровой код и обрабатывается на ЭВМ. Измерительные каналы позволяют многократно (до 10 раз) в течение цикла сжатия кольца в компрессоре ускорителя регистрировать интенсивность синхротронного излучения. Длительность строба измерений 0,1 мкс. Интервал времени между соседними измерениями может меняться от 100 мкс и выше при полной длительности импульса синхротронного излучения ~1 мс.

Выделенная пунктиром на рис.4 часть блок-схемы относится к детектирующей аппаратуре, размещенной в ускорительном зале в непосредственной близости от адгезатора коллективного ускорителя.

3. ВЫВОД И ТРАНСПОРТИРОВКА СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Процесс неразрушающей диагностики ускоряемого пучка по его синхротронному излучению включает в себя операцию вывода синхротронного излучения из вакуумной камеры ускорителя с минимально возможными потерями по интенсивности во всем рабочем спектральном диапазоне (длины волн в пределах от 0,4 до 40 мкм, соответствующие спектральной чувствительности большинства используемых для реализации методов инфракрасной синхротронной диагностики детекторов излучения) при сохранении глубокого вакуума (лучше чем 10^{-9} мм рт.ст.). Проблема окон и их уплотнений всегда была важной в вакуумной технике и криогенике, в том числе и для ускорителей. Хорошая спектральная прозрачность в широком диапазоне длин волн, высокая термостойкость, пластичность и механическая прочность, при минимальном газопропускании и собственном газовыделении, делают проблему окна одной из главных, если не решающей, для обеспечения диагностики по синхротронному излучению. Немаловажное значение имеют стоимость оптического материала и его доступность. С учетом перечисленных требований разработаны и апробированы в ускорительной практике окна из различных оптических материалов: плавленого кварца марки КВ для видимой и ближней (до $\lambda = 3,5$ мкм) инфракрасной части спектра; флюорита (CaF_2) для видимой и средней (до $\lambda = 9$ мкм) инфракрасной части спектра; оптической керамики КО-1 (MgF_2) для $\lambda = 0,7 + 9$ мкм, KRS-5, оптической керамики КО-4 (ZnSe) и

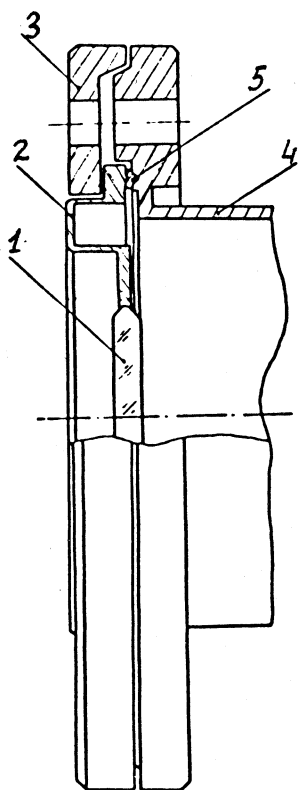


Рис.5. Разрез окна в собранном виде: 1 — диск из КО-1; 2 — оправа окна; 3 — прижимной фланец; 4 — патрубок вакуумной камеры; 5 — металлическая прокладка

оптического безкислородного стекла марки ИКС 25 (GeSe) для спектрального диапазона до $\lambda = 40$ мкм. Эти материалы имеют хорошую прозрачность в рабочих участках спектра и удовлетворяют требованиям по вакууму. Диаметр окон от 60 мм (при толщине от 4—5 для КО-1 и 7 мм для CaF_2) до 115 мм при толщине 19 мм для КВ.

Для прогреваемой камеры ускорителя специально разработано высоковакуумное окно из поликристаллического фтористого магния (керамика оптическая КО-1) [7] для вывода инфракрасного синхротронного излучения.

Для герметичного сочленения окна из керамики КО-1 с металлической оправой, удовлетворяющего условиям сверхвысокого вакуума, применен метод диффузионной сварки. При этом опробованы два способа соединения. Первый заключался в диффузи-

онной сварке с оправой готового, прошедшего механическую обработку диска из оптической керамики КО-1, а второй — в совмещении операций изготовления оптической керамики из высокодисперсного порошка с одновременной диффузионной сваркой получаемой керамики с металлической оправой. Второй способ оказался более эффективным и надежным.

На рис.5 показан разрез окна в собранном виде. Конструктивно окно представляет собой плоскопараллельный диск 1 из оптической керамики в оправе 2 из нержавеющей стали с тонкостенным гофром. Световой диаметр окна — 70 мм при толщине 4 мм. Внешний диаметр оправы 155 мм. Крепление на вакуумной системе 4 осуществляется через металлическую прокладку 5 с помощью прижимного фланца 3. Кроме уменьшения механических напряжений в оправе, тонкостенный разгрузочный гофр позволяет устранить воздействие крутящего момента на светопропускающий диск при креплении окна к вакуумной системе.

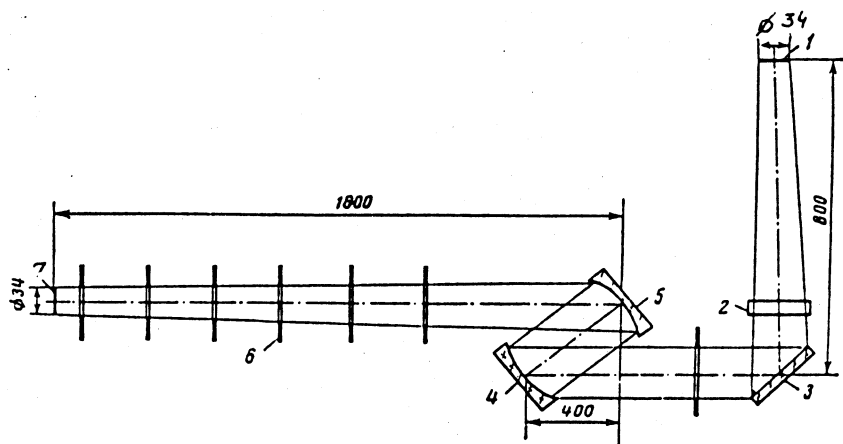


Рис.6. Принципиальная оптическая схема: 1 — сечение электронного кольца; 2 — высоковакуумное защитное окно, работающее в инфракрасной области; 3 — отклоняющее зеркало; 4,5 — сферические зеркала; 6 — диафрагма; 7 — плоскость изображения

Для измерения геометрических параметров электронного кольца с помощью синхротронного излучения в спектральной области $\Delta\lambda = 0,3 + 40$ мкм ($E \sim 20 + 13$ МэВ, $R \sim 4 + 8$ см) разработан и создан специальный оптический тракт [9] с отражающими активными элементами, обеспечивающими широкополосность всего устройства и позволяющими регистрировать синхротронное излучение в спектральной области $\Delta\lambda = 0,3 + 40$ мкм.

Тракт предназначен для работы с различными типами инфракрасных охлаждаемых и неохлаждаемых фотоприемников, но в основном с мозаичными многоэлементными фотоприемниками из кремния, антимонида индия (рабочая температура $T_{\text{раб}} = 77$ К), селенида свинца ($T_{\text{раб}} = 250$ К), пироэлектриков.

Одним из основных условий работы многоэлементных детектирующих систем является их высокая помехозащищенность от импульсных электромагнитных помех ускорителя. Главным источником помех являются магнитные поля адгезатора. Для устранения их влияния необходимо многоканальные инфракрасные фотоприемные устройства (ФПУ) устанавливать от адгезатора на расстоянии не ближе двух метров. Это потребовало создания оптического канала с длиннофокусными оптическими элементами.

Отражающие элементы с поверхностью заданной кривизны изготовлены из оптического стекла К-8, покрытого слоем серебра, нанесенного путем

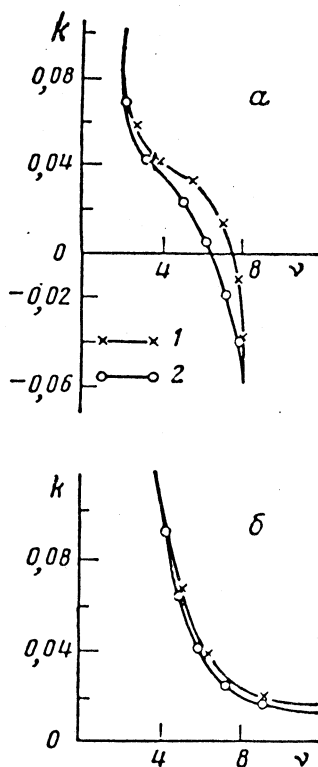


Рис.7. Частотно-контрастная характеристика оптического тракта: *a* — с цилиндрическим отклоняющим зеркалом; *б* — с плоским отклоняющим зеркалом; v — количество линий на 1 мм изображения, k — относительное изменение контраста изображения по сравнению с объектом: 1 — для центра поля зрения, 2 — на краю поля зрения

испарения в вакууме. Так как оптический тракт используется при относительно постоянных температуре и влажности, то для уменьшения потерь при прохождении защитное покрытие на напыленный металл не наносилось. Коротковолновая граница спектрального диапазона обусловлена качеством обработки отражающих поверхностей зеркал и материалом отражающего покрытия. В длинноволновой области диапазон ограничен дифракцией, причем граница зависит от величины относительного отверстия системы и длины волны, формирующей изображение.

На рис.6 показана принципиальная оптическая схема. Синхротронное излучение от электронного кольца 1 из вакуумной камеры компрессора выводится через инфракрасное окно 2. Первое сферическое зеркало 4 установлено так, чтобы объект наблюдения находился в его фокусе. Так как синхротронное излучение распространяется в узком конусе, угол раствора которого равен $\sim 1/\gamma$, то видимым будет не все электронное кольцо, а только его сечение, перпендикулярное оптической оси системы. Изображение сечения тора строится в фокальной плоскости второго сферического зеркала 5, где расположена чувствительная поверхность регистрирующего устройства. Фокусное расстояние обоих зеркал равно 1800 мм. Отклоняющее зеркало 3 меняет направление оптической оси на 90° . Первоначально его поверхности для исправления астигматизма сферических зеркал, работающих в наклонных пучках лучей, была придана цилиндрическая форма. В дальнейшем для получения оптимального качества изображения оптическая схема установки была исследована методом частотно-контрастных характеристик с помощью ЭВМ. При этом было установлено, что наилучшее качество изображения получается при плоском отклоняющем зеркале, так как, по-

видимому, астигматизм в оптической системе установки действует слабее, чем другие aberrации (сферическая, кома и т.д.). Соответствующие частотно-контрастные характеристики показаны на рис.7. Из рисунка видно, что если принять за критерий снижения контраста в изображении уровень 0,02 (визуальное разрешение), то при использовании цилиндрического зеркала в медианной плоскости установки (плоскость чертежа) разрешающая способность оптической системы составит 5—6 линий/мм в видимом оптическом диапазоне длин волн.

Одно из достоинств выбранной схемы — малые потери излучения при прохождении через оптический тракт. Они составляют менее 4%. Это достигается за счет высокого коэффициента отражения серебра в спектральной области $\Delta\lambda \sim 1 + 40$ мкм и в связи с отсутствием защитного покрытия на отражающих поверхностях. В основном потери синхротронного излучения определяются материалом инфракрасного окна (до 40% потерь) и материалом окна приемника.

Светосила системы составляет 1:21, увеличение — 1х, разрешающая способность в фокальной плоскости и на расстоянии ± 15 мм от нее 7 мм^{-1} (на расстоянии ± 20 мм она равна 5 мм^{-1}).

Предусмотрена возможность использования различных типов регистрирующих устройств для видимой и инфракрасной области. Устройство в виде отдельного узла крепится на жесткой опоре к бетонному основанию. Все детали и узлы выполнены из немагнитных материалов. Отсутствие хроматической aberrации позволяет вести наладку прибора и его юстировку в видимой области оптического спектра. Для проведения точной фокусировки сферические зеркала могут перемещаться вдоль оптической оси на ± 50 мм.

Только благодаря этому, столь широкополосному оптическому тракту стало возможным впервые на коллективном ускорителе обнаружить и зарегистрировать синхротронное излучение, интенсивность которого вначале была столь малой, а спектр излучения столь неопределенным, что без оптического усиления и возможности регистрировать излучение в широком диапазоне длин волн обнаружить синхротронное излучение было бы невозможно.

Для спектральной области $\Delta\lambda = 1 + 8$ мкм была создана зеркально-линзовая оптическая система [8]. Выбор оптической схемы определился на основе следующих условий: поле зрения системы в плоскости объекта $\varnothing 30$ мм, все излучение, попадающее на входной зрачок системы, должно быть сфокусировано на чувствительной поверхности детектора размером 2×2 мм. Эта схема представлена на рис.8.

Методика расчета подобных схем достаточно хорошо разработана в ряде работ [38—41]. Система состоит из объектива 2, коллектива 5, установленного в плоскости изображения, создаваемого объективом 2, и двух посеребренных зеркал 3,4.

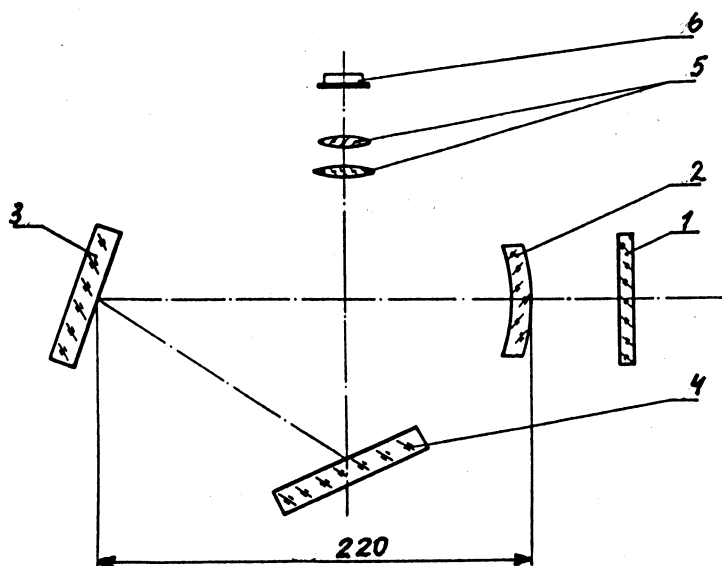


Рис.8. Принципиальная оптическая схема зеркально-линзовой системы: 1 — высоковакуумное окно из КО-1; 2 — объектив; 3, 4 — отклоняющие зеркала; 5 — коллектив; 6 — инфракрасный детектор

Коллектив образует на чувствительной поверхности приемника 6 уменьшенное изображение входного зрачка системы, который находится вблизи главной плоскости объектива. При таком расположении коллектив создает засветку приемника по всей его площади, тем самым исключается влияние неопределенности, связанной с неравномерностью чувствительности приемника по его поверхности и с изменением положения источника, которым является сечение электронного кольца, в поле зрения системы. В выбранной схеме с коллективом, обеспечивающей расположение приемника в плоскости выходного зрачка, не происходит перемещение изображения по чувствительной поверхности приемника при изменении угла падения лучей на входной зрачок системы. Таким образом, излучение от источника, попавшего в поле зрения системы, будет зарегистрировано независимо от местонахождения источника.

В зеркально-линзовой системе все активные элементы (линзы) выполнены из оптической керамики (MgF_2 , ZnSe , CaF_2 , BaF_2 , LiF) бескислородных стекол. Рабочий диапазон длин волн $1 + 8$ мкм, фокусное расстояние 320 мм, относительное отверстие 1:5,3, габариты оптической системы $290 \times 300 \times 100$ мм.

Экспериментальные компоненты 3 и 4 введены в оптическую схему для того, чтобы уменьшить в два раза габариты оптической системы по длине, а также для того, чтобы обеспечить работу охлаждаемого жидким азотом приемника 6, чувствительный элемент которого крепится к нижней части сосуда Дьюара.

Таким образом, разработанная оптика позволяет обеспечить уникальную спектральную широкуюполосность ($0,3 + 40$ мкм) инфракрасной синхротронной диагностики в соответствии с требованиями ускорительного эксперимента.

4. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОЛЬЦЕВОГО СЛУСЬКА

Система измерения геометрических параметров кольца и динамики его сжатия — это многоканальный ретранслятор синхротронного излучения, предназначенный для измерения радиуса кольца R в процессе сжатия (R -траектории), размеров малого сечения (a_z, a_R) кольцевого слуска и распределения плотности частиц в кольце. Детектор выполнен в виде многоэлементного однокоординатного блока. В состав системы входит инфракрасный оптический тракт, который разработан и создан специально для ускорителя электронно-ионных колец. Основные элементы системы схематично показаны на рис. 4.

Синхротронное излучение в видимой и инфракрасной областях выходит из вакуумной камеры ускорителя тяжелых ионов через специализированное окно 4 и попадает в зеркально-оптический тракт 5 длиной 2,5 м. Он передает размеры электронного пучка в плоскости детектора синхротронного излучения (JCI) 6 в отношении 1:1. Диаметр поля зрения тракта в плоскости объекта наблюдения равен 30 мм. Для проведения измерений во всем поле зрения оптического тракта детектор установлен на специальном столике, который может перемещаться в двух взаимно перпендикулярных направлениях в плоскости изображения кольца с точностью 0,1 мм. Привод столика электромеханический и управляется дистанционно с пульт управления ускорителя блоком управления перемещением (БВП). Детектор преобразует излучение в электрические сигналы, которые передателем усиливается на преамплификаторах IV 7 и передаются по кабелю в линии связи в измерительную систему 13, выполненную в стандартном КАМАК [42—44] и работающую на линии с ЭВМ. Результаты измерений после обработки в ЭВМ выводятся на принтер и дисплей.

Интенсивность синхротронного излучения при радиусе кольца $R = 4$ см составляет $I = 10^{-5} + 10^{-3}$ Вт/см² при числе электронов в кольце



Рис.9. Многоэлементные детекторы из InSb (1) и PbSe (2) с блоками предусилителей и системами охлаждения

$N_e = 10^{10} + 10^{12}$ и при энергии электронов $E_e = 19$ МэВ. Время жизни кольца на данном радиусе и малые размеры электронного пучка определялись экспериментально и равны, соответственно, 0,3 + 0,5 мс и ≤ 6 мм. При этом спектр излучения сосредоточен в основном в инфракрасной области с максимумом на длине волны 1,23 мкм [4]. Из сказанного выше следует, что в системе использованы детекторы синхротронного излучения (света) из селенида свинца и сурьмянистого индия, что позволило обеспечить диагностику инфракрасного

синхротронного излучения в диапазоне длин волн $\Delta\lambda \sim 0,7 + 6$ мкм.

Интенсивность синхротронного излучения измерялась с помощью этих многоэлементных инфракрасных фотосопротивлений, число которых, в зависимости от требуемой точности и измеряемых параметров, менялось от 10 до 50.

Для измерения геометрических параметров электронного кольца в агрегате прототипа КУТИ была разработана и создана многоканальная информационно-измерительная система [12] с 50-элементным охлаждаемым инфракрасным детектором из фотосопротивлений с линейным расположением элементов, изготовленных из *n*-InSb. Диапазон спектральной чувствительности детектора $\Delta\lambda = 0,7 + 5,9$ мкм. Размер каждого элемента $0,2 \times 0,4$ мм, а общая длина линейки 20 мм. Детектор охлаждается до температуры жидкого азота, при которой его элементы имеют технические характеристики, приведенные в [31,45]. Специальная криогенная система позволяет обеспечивать непрерывную работу детектора в течение более 4 часов. На рис.9 представлен общий вид детектора с криогенной системой и блоком предусилителей.

Вся система регистрации синхротронного излучения кольца электронов ускорителя тяжелых ионов содержит 12 информационных каналов, и на каждый канал может работать до 5 элементов детектора, сигналы которых суммируются в схеме предусилителя.

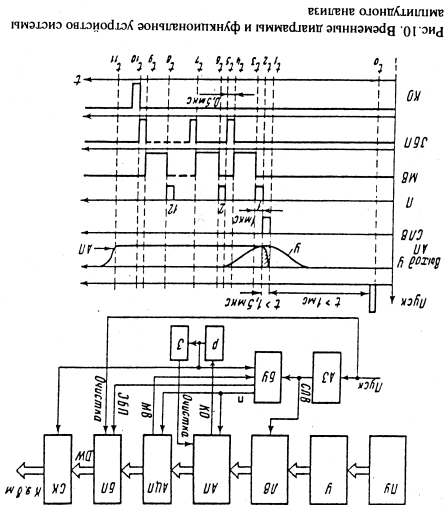


Рис. 10. Временные диаграммы и функциональное устройство систем амплитудного анализа

Организация и состав электронного аппарата определяются измере-
ниями параметров элементарного кольца, методом перемещения и обработки
информации в ЭВМ. Измерения параметров кольца за каждый пикс сжатия
осуществляются измерительной системой. Функциональная схема которой и
временные диаграммы показаны на рис. 10. В данном варианте в 10 каналах
объединяются по 3 элемента в центральной измерительной части линейки, а
в 2 каналах (предприпущих) оставшиеся крайние $(10 \times 3 + 2 \times 10)$. Приве-
денная к выходу предусилителя интегральная чувствительность каждого из-
мерительного канала составила $S = 2 \cdot 10^5$ В/Вт, а уровень сигнала наводки
от обрабатываемых мощных систем усилителя, приведенный к мощности
излучения, был равен $P_n \leq 10^{-7}$ Вт.

Информация с предусилителей ПУ, пройдя блоки усиления У, поступа-
ет на входы линейных ворот ЛВ. Аналоговая задержка АЗ задерживает на

требуемое время сигнал «Пуск» и формирует из него строб линейных ворот (СЛВ) длительностью $t_{\text{слв}} \geq 1$ мкс, по которому информация с выходов ЛВ поступает в блок аналоговой памяти АП. По окончании сигнала СЛВ запускается в работу блок управления БУ. Он подключает поочередно каждый канал аналоговой памяти АП к входу аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и генерирует для него команду на преобразование (П) длительностью $t_{\text{п}} = 1$ мкс. Во время преобразования АЦП воздействует на БУ сигналом «мертвого» времени МВ, по спаду которого БУ формирует команду записи ЗПБ преобразованной в цифровой код информации в блок буферной памяти (БП). Команда ЗПБ завершает измерение и преобразование информации одного канала системы, после чего БУ подключает к АЦП следующий канал аналоговой памяти. После занесения в БП данных последнего канала блок АП формирует сигнал окончания опроса (КО), который после разветвления на блоке разнотактного делителя (Р) останавливает работу БУ и запускает спецконтроллер, а через задержку очищает аналоговую память. Спецконтроллер организует режим блочной передачи данных из БП в память ЭВМ. Буферная память очищается в начале цикла измерений по команде «Пуск».

Полное время измерений и передачи в БП определяется формулой

$$T \approx t_{\text{слв}} + Nt_{\text{п}} + \sum_{i=1}^k t_{\text{мв}} + Nt_{\text{збп}} \leq 100 \text{ мкс},$$

где N — число каналов АП; k — число каналов АП, содержащих информацию. В системе использованы 16-канальный стандартный блок АП, АЦП с числом каналов 256 и частотой задающего генератора 50 МГц и блок БП емкостью 64×8 бит.

Таким образом, приведенная схема позволяет за время прохождения изображения ($\tau = 0,3 + 0,5$ мс) кольца по линейке детектора в одном цикле работы ускорителя снять 3—5 распределений синхротронного излучения электронов кольца путем выбора задержки и длительности сигнала СЛВ. На рис. 11 представлены временные диаграммы и функциональная схема, обеспечивающая также и временной анализ. Она содержит 8 блоков параллельно работающих АЦП, 2 блока буферной памяти и свой блок управления. В каждом измерительном канале работают 3 элемента детектора.

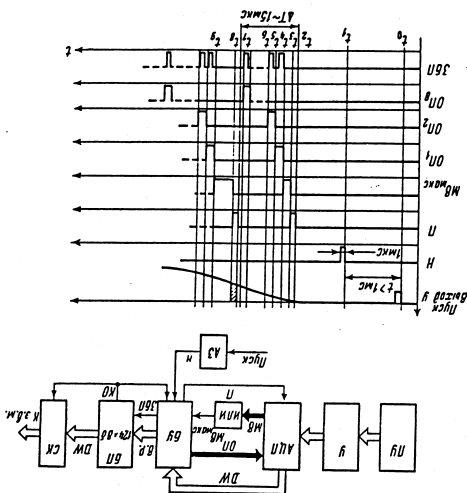
Сигнал «Пуск» задерживается в блоке АЗ и запускает БУ, управляющий измерениями по команде преобразования П, которая одновременно раскрывает линейные ворота во всех АЦП. Команда генерируется БУ через фиксированный промежуток времени $\Delta t \geq 15$ мкс с постоянной длительностью $t_{\text{п}} = 1$ мкс. При наличии информации на выходах усилителей блоки АЦП вырабатывают сигналы МВ, поступающие на БУ через схему ИЛИ. По

при числе каналов $N = 8$. Время измерительного цикла определяет частоту следования командных сигналов II блока управления и

$$T \approx t_{\text{II}} + N t_{\text{оп}} + t_{\text{макс}} \geq 15 \text{ мкс.}$$

окончания максимального по длительности сигнала МВ блок управления организует опрос регистров АЦП и занесение информации в блок буферной памяти по командам опроса АЦП (ОП). Команда ОП поступает в АЦП от блока управления через разъемы на передних панелях. Содержимое счетчиков АЦП по шинам ДВ карека КАМАК проходит в ВУ, из которого по внешним разъем ВР на передних панелях поступает в буферную память по команде ЗВП. Приведенный цикл измерений и передачи информации в БП занимает время

Рис. 1. Временные диаграммы и функциональная схема устройства амплитудно-временного анализа сигналов детектора с блоками буферной памяти



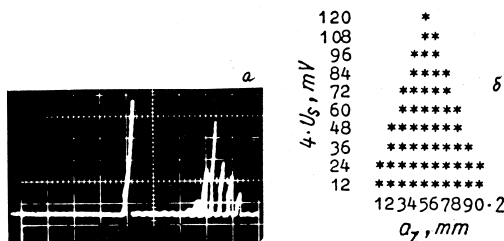


Рис.12. Осциллограмма распределения сигналов по элементам детектора при $R = 4$ см (а); размер малого сечения кольцевого ступка и распределение электронов по сечению при сжатии кольца до радиуса $R = 3,2$ см (б)

задает минимальный интервал временного анализа. Количество распределений интенсивности синхротронного излучения по линейке детектора, которое можно снять за один цикл работы ускорителя, равно $20 + 30$. Данный временной интервал для последующей обработки данных в ЭВМ задается программой. После заполнения регистров БП генерирует команду окончания опроса (КО) АЦП, которая запускает спецконтроллер для передачи данных в ЭВМ и одновременно останавливает работу блока управления.

Схема амплитудного анализа имеет минимальное быстродействие из двух приведенных схем (~ 30 бит/мкс), обеспечивает приближенную оценку размеров кольца и используется для снятия одного распределения за цикл ускорения. Но в то же время она обладает неоспоримым достоинством — позволяет с выхода аналоговой памяти визуально наблюдать за процессами формирования электронных колец в разных циклах ускорения на экране осциллографа, что часто удобно при настройке ускорителя. На рис.12,а приведена осциллограмма распределения сигналов по элементам детектора при $R = 4$ см (импульс справа от распределения — импульс сброса АП).

Схема амплитудно-временного анализа, имея скорость обработки 136 бит/мкс, необходима при исследовании влияния различных факторов (магнитных полей, инжекции атомов и т.д.) на геометрию кольца. Она позволяет более точно определять его размеры при использовании нижеприведенного метода обработки данных в ЭВМ.

Основой программ обработки сигналов детектора в ЭВМ является приближение фактизации функции распределения плотности электронов в малом сечении кольца

$$F(z, r, t) = A(t) F_1(z, t) P_2(r, t).$$

где $P_1(z, t)$ и $P_2(r, t)$, строго говоря, неизвестные функции распределения. Если линейка детектора расположена параллельно оси Z компрессора (электронного кольца) на расстоянии r_1 от его центра, то в момент времени t_1 измеряется функция

$$Q(z, r_1, t_1) = A(t_1) F_1(z, t_1) P_2(r_1, t_1) \Delta r \Delta z.$$

где Δr — ширина линейки, Δz — длительность измерения. Вычисленный второй момент функции

$$S^2(t_1) = \frac{\int P_1(z, t_1) dz}{\int P_1(z, t_1) (z - z_0) dz}$$

совпадает с истинным размером кольца по оси Z в момент времени t_1 и с центром в точке z_0 . Вычисленные параметры кольца (z_0 , $F = A(t_1) P_2(r_1, t_1) \Delta r \Delta z$) выводились на принтер и дисплей в виде табличной функции, а также более расширенно — в виде гистограмм. Для диагностики геометрии параболы колец в ад-газоре КУТИ-20 [46] разработана и создана информационно-измерительная система [13], в которой для детектирования синхротронного излучения использован многоэлементный инфракрасный фотоприемник из сенсина с одноканальным расположением элементов. 10 элементов детектора образуют линейку длиной 10 мм при ширине 0,2 мм. Детектор собран в одном корпусе с преусилителями и образует фотоприемное устройство. Представленное на рис. 9.2.

В отличие от системы с детектором из InSb , рабочая спектральная область детектора из PbSe составляет $\Delta \lambda = 0,6 + 4$ мкм. Кроме того, детектирующем блоке отсутствует криогенная система для охлаждения элементов до температуры жидкого азота. Это позволило существенно снизить габариты детектора по сравнению с детектором из InSb с азотным охлаждением (см. рис. 9.1) и упростить его эксплуатацию, появившаяся при этом на-дежность работы всей системы. Детектор имеет термоэлектрический микро-холодильник, позволяющий понизить температуру элементов на 30°C относительно температуры окружающей среды и тем самым повысить чувствительность детектора и расширить его спектральный диапазон

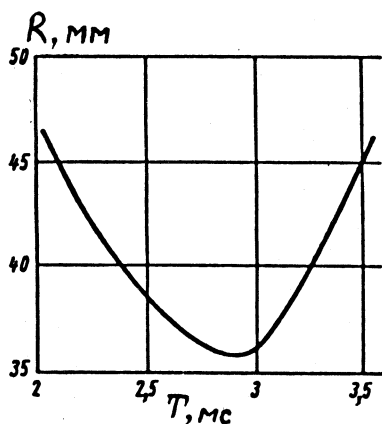


Рис.13. Динамика сжатия кольца в течение одного цикла ускорения

длинноволновую инфракрасную область. Чувствительные элементы детектора смонтированы в одном корпусе с предусилителями, что позволило уменьшить длину проводников и тем самым повысить помехозащищенность.

Электронная аппаратура измерительной системы собрана по схеме, представленной на рис.11, только вместо АЦП используются 256-канальные зарядоцифровые преобразователи (ЗЦП).

Измерительная система вошла в число основных (базовых) устройств неразрушающей диагностики пучка и находилась в постоянной эксплуатации на коллективном ускорителе. С помощью этой системы регулярно проводились измерения геометрических параметров кольцевого

сгустка и исследовалась динамика его формирования. Основная задача для системы — измерение радиуса кольца как параметра, определяющего точность измерения интенсивности синхротронного излучения. Средняя квадратичная ошибка измерения радиуса не превышает 2,2%. Кроме того, система позволяет контролировать в динамике плотность распределения электронов в кольце и пространственные особенности кольцевого сгустка в зависимости от радиуса орбиты, энергии электронов, числа электронов и ионов в сгустке. Размеры малого сечения кольцевого сгустка и распределение электронов по сечению при сжатии кольца до радиуса 3,2 см иллюстрирует рис.12,б. Аксиальный (a_z) и радиальный (a_r) размеры сечения (полуширина на полувывоте) в проведенных сеансах составляли $a_r = 4-8$ мм, $a_z = 5$ мм. Динамика сжатия кольцевого сгустка в течение одного цикла ускорения представлена на рис.13. На этом рисунке показана $R(t)$ — траектория электронного кольца на заключительной стадии сжатия (спадающий участок кривой) и в начале его декомпрессии (участок подъема). Измерения проводились через 100 мкс.

5. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВОЙ РАСХОДИМОСТИ СИНХРОТРОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Для получения информации о числе электронов в кольцевом сгустке и частоте аксиальных бетатронных колебаний кольца служат такие харак-

теристики синхротронного излучения, как интеграл от полного потока синхротронного излучения и угловая зависимость распределения его интенсивности относительно плоскости электронной орбиты.

Целью рассмотренной в данном разделе задачи являлось повышение точности измерения потока синхротронного излучения от кольцевого сгустка, а также измерение распределения этого потока в направлении, перпендикулярном медианной плоскости кольцевого сгустка.

Известно, что в сильнооточных, загруженных ионами электронных кольцах характер распределения синхротронного излучения по углу в направлении, перпендикулярном плоскости электронной орбиты, определяется в основном бетатронными колебаниями электронов в кольце [4]. Частота бетатронных колебаний ν_z зависит от положительного заряда ионов, накопленного в кольце, и удовлетворяет условию [47]:

$$\nu_z^2 = \left[\frac{2R^2(f-1/\gamma^2)}{\sigma_b(\sigma_a + \sigma_b)} - (1-f) \frac{P}{2} \right] \mu,$$

где γ — релятивистский фактор; R — радиус кольца; $f = \frac{ZN_i}{N_e}$ — загрузка электронами и ионами, Z и N_i — заряд и число ионов в кольце; N_e — число электронов; σ_a и σ_b — среднеквадратичные радиальный и аксиальный размеры малого сечения кольца;

$$P = 2 \ln \left[\frac{16R}{\sqrt{2} (\sigma_a + \sigma_b)} \right];$$

$\mu = N_e r_e / 2\pi\gamma R$ — число электронов на единице длины кольца, r_e — классический радиус электрона.

Ширина углового распределения, связанная с частотой бетатронных колебаний ν_z , а значит, и с числом ионов N_i , может быть найдена из выражения

$$A_z = A_z^0 \cos(\nu_z \Theta / 2\pi).$$

Таким образом, измерив угловое распределение потока синхротронного излучения многоэлементным однокоординатным детектором, длина которого $L \geq A_z$, можно получить информацию об ионной компоненте кольца, тогда как интеграл от этого распределения прямо связан с числом электронов в кольце. При этом повышается точность измерения электронного тока за счет более точного, по сравнению с однодатчиковым измерением, опреде-

ления геометрического фактора $G_{\text{си}}$, входящего в формулу определения интенсивности и вносящего существенный вклад в погрешность измерений интенсивности синхротронного излучения.

Для измерения профиля функции распределения потока синхротронного излучения относительно орбитальной плоскости электронов многократно в процессе сжатия кольца в адгезаторе был разработан метод, основанный на использовании скоростного интегрального координатно-чувствительного инфракрасного детектора, установленного перпендикулярно медианной плоскости кольца и перекрывающего весь поток синхротронного излучения.

По величине измеренной интегральным детектором угловой расходимости пучка синхротронного излучения $\Theta \simeq 1/\gamma$ можно качественно оценить энергию электронов в кольце. В случае измерения угловой расходимости в спектральном диапазоне $\lambda \sim \lambda_c$ ширина углового распределения [48]:

$$\Theta_{\lambda} [\text{мрад}] = \frac{0,82}{E [\text{ГэВ}]}.$$

В этом случае энергия электронов в кольце может быть определена с достаточно хорошей точностью.

В системе оперативного контроля компонент электронно-ионного кольца по его синхротронному излучению, разработанной для коллективного ускорителя тяжелых ионов ОИЯИ, в качестве детектора синхротронного излучения была использована многоэлементная линейка из фотосопротивлений на основе селенида свинца. Такая линейка из быстрых фотоприемников с временным разрешением $\sim 1 + 3$ мкс, работающих на линии с ЭВМ, позволяет обеспечивать получение оперативной информации о различных параметрах электронно-ионного кольцевого сгустка, например, о динамике его развития и величине заряда электронно-ионных компонент N_e и N_i в каждом цикле срабатывания ускорителя, что, в свою очередь, позволяет использовать эту информацию при настройке ускорителя, поддержании и контроле оптимального режима его работы.

На рис.4 представлена блок-схема системы оперативного контроля токовых и энергетических параметров электронно-ионного кольцевого сгустка на малых радиусах его сжатия в адгезаторе КУТИ. Детектирующий блок 10 (поз.3 на рис.3) расположен в непосредственной близости от окна вывода излучения из адгезатора, в зоне действия импульсных магнитных полей нулевой ступени и трех ступеней сжатия кольца. В целях эффективного подавления импульсных электромагнитных наводок, достигающих в месте расположения детектора значительной величины, сигналы с чувствительных элементов детектора подаются по скрученным парам на вход блока преусилителей, отнесенного от детектора на расстояние ~ 1 м.

Т	КОРОТКАЯ ЛИНЕЙКА			ДЛИННАЯ ЛИНЕЙКА			СЧЕТЧИКИ	СИ	ОБРАТНАЯ ИНД.	
	СУММА	ЦЕНТР	РАЗМЕР	СУММА	ЦЕНТР	РАЗМЕР	ТОРМОЗНОГО	МОНИТОР	ВЫСАДКА	ЛАТЧ
1	662	4.00	2.13	1488	-2.72	20.1	0	123	0	0
2	833	3.99	2.01	1681	-2.90	19.8	0			
3	897	3.99	1.99	1783	-2.74	19.8	0			
4	886	4.01	1.99	1801	-2.71	19.8	0			
5	817	4.00	1.98	1717	-2.63	19.9	0			
6	702	4.09	2.08	1593	-2.82	20.0	0			
7	523	4.15	2.25	1383	-2.70	20.4	0			
8	321	4.33	2.56	1102	-3.11	20.9	0			
9	157	4.94	3.15	797	-3.03	21.9	0			
10	74	5.78	3.65	498	-3.62	24.3	0			

ЦИКЛ :3 МОНИТОР СИ :123

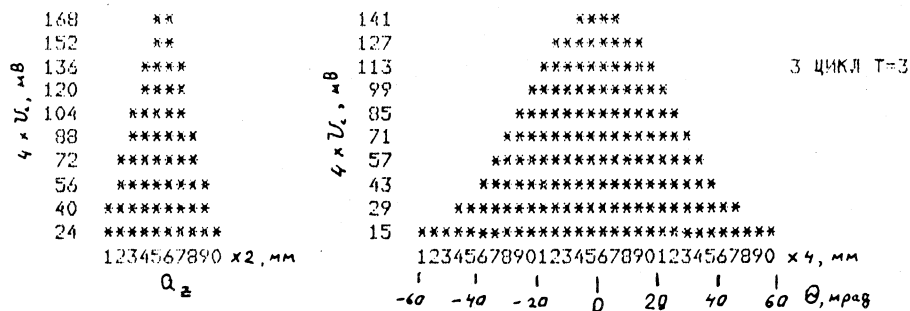


Рис.14. Таблица и гистограммы, иллюстрирующие работу измерительного комплекса инфракрасной синхротронной диагностики параметров кольцевого сгустка

Детектор — измерительный преобразователь синхротронного излучения в электрический сигнал — представляет собой многоэлементный не-охлаждаемый фотоприемник из селенида свинца (см. табл.), чувствительный для синхротронного излучения в спектральной области 0,9 + 4,6 мкм, с однорядным расположением элементов. Размер одного элемента 0,2 × 4 мм, количество элементов в линейке 30. Они образуют 30-элементное фотоприемное устройство (Ф-30) длиной 120 мм. Длина линейки выбиралась из условия

$$L \geq A_z \approx 2l\gamma^{-1},$$

где l — расстояние от плоскости малого сечения кольца до детектора, A_z — ширина угловой расходимости синхротронного излучения.

Особенностью детектора является то, что он модульный. Всего имеется 6 модулей. Такая конструкция позволяет проводить оперативную замену при неисправности элементов. Детектор установлен на расстоянии ~ 1 м

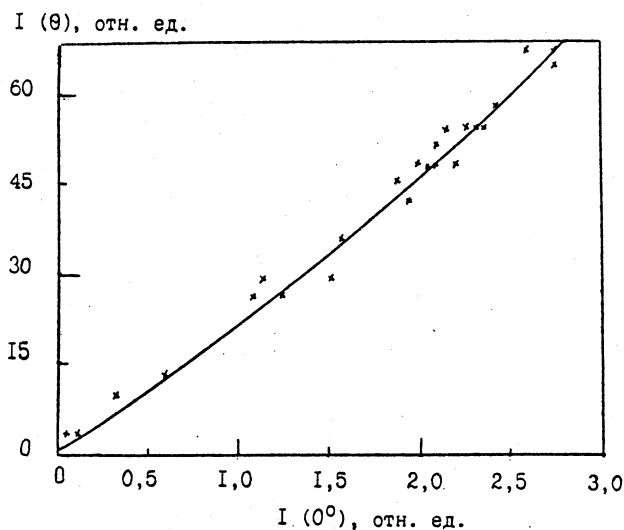


Рис.15. Корреляция сигналов с СИ-монитора $[I(0^\circ)]$ и длинной линейки $[I(\theta)]$

от излучающего сечения кольцевого сгустка перпендикулярно медианной плоскости ускорителя. Предусмотрен контроль работоспособности каналов измерительной системы путем подачи на чувствительные элементы детектора инфракрасного излучения от светодиодов АЛ-106 В, установленных в корпусе детектора под углом к элементам так, чтобы не экранировать прямой пучок синхротронного излучения. Электронная аппаратура собрана по блок-схеме, описанной в работе [12] и представленной на рис.11.

Некоторые результаты измерений, проводимых на КУТИ-20, иллюстрирующие работу системы, приведены на рис.14, где в виде таблицы («длинная линейка») и гистограммы (правая часть) показано характерное пространственное распределение интенсивности синхротронного излучения электронного кольца в рабочем режиме КУТИ-20 в один из 10 моментов времени наблюдения. Для проверки влияния угловой расходимости на точность измерения интенсивности синхротронного излучения были использованы результаты синхронной работы Ф-30 и монитора синхротронного излучения (МСИ). Монитор измерял интенсивность излучения в медианной плоскости кольцевого сгустка (рис.3.2), а Ф-30 измерял интенсивность с учетом угловой расходимости пучка (рис.3.3). Оба детектора находились на одинаковом расстоянии от кольца. Результаты измерений представлены на рис.15. Корреляция сигналов между детекторами характеризует воспроиз-

водимость результатов до определенных пределов ($\sim 1,5 \cdot 10^{12} e$). При большом числе электронов в кольце наблюдается уширение угловой расходимости относительно медианной плоскости кольца, и монитор, установленный в этой плоскости, дает заниженное значение полной мощности синхротронного излучения.

Разработанная система позволяет повысить точность измерения интенсивности синхротронного излучения и тем самым точность определения числа частиц в кольцевом сгустке. Геометрический фактор $G_{\text{си}}$, входящий в формулу регистрируемой мощности синхротронного излучения, определяется со средней квадратичной погрешностью 1,8% и измеряется одновременно с регистрируемой интенсивностью. Ввод системы позволил автоматизировать процесс измерения электронно-ионных компонент в кольце, его токовых и энергетических параметров. В системе в основном используются серийные блоки ЗЦП и буферной памяти. Детектирующий блок светочувствительных элементов, блок усилителей и блок управления разработаны специально для данной задачи.

Настройка и калибровка каналов системы осуществлялась на стенде с тепловым источником, в качестве которого использовалась светоизмерительная лампа СИРШ 6-100. С помощью модулятора имитировался импульс излучения, близкий по длительности, интенсивности и спектральному составу к синхротронному излучению ускорителя.

6. ИЗМЕРЕНИЕ ЧИСЛА ЭЛЕКТРОНОВ

Спектральное распределение интенсивности синхротронного излучения, рассчитанное для нескольких значений энергий электронов на различных радиусах сжатия в компрессоре прототипа коллективного ускорителя тяжелых ионов, показано на рис.2. Даже на конечной орбите сжатия кольца ($R = 3,58$ см, $E = 21,3$ МэВ) максимум спектрального распределения синхротронного излучения λ_m находится в инфракрасной области ($\lambda_n \sim 1$ мкм). Обеспечение возможности наблюдения за параметрами пучка в процессе сжатия, когда спектр синхротронного излучения сдвинут еще дальше в инфракрасную область, приводит к необходимости использования метода инфракрасной синхротронной диагностики. Второй и, может быть, главной причиной выбора этого метода является условие минимизации ошибок измерений, которое можно реализовать, если проводить измерения в области длин волн $\lambda > \lambda_c$.

Спектральное распределение мощности синхротронного излучения имеет вид [49]

$$W(\lambda) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \frac{e^2 c}{\gamma^2 \lambda^3} \int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(\xi') d\xi'. \quad (11)$$

Из (11) можно оценить мощность, излучаемую вблизи максимума кривой спектрального распределения (для $\lambda \sim \lambda_c/2$) [19]:

$$w_1 [\text{Вт} \cdot \text{мкм}^{-1} \cdot \text{электрон}^{-1}] \simeq 9 \cdot 10^{-21} \gamma^7 R^{-3}, \quad (12)$$

и мощность, излучаемую на длинах волн, превышающих критическую $\lambda \geq \lambda_c$:

$$w_2 [\text{Вт} \cdot \text{мкм}^{-1} \cdot \text{электрон}^{-1}] \simeq 9 \cdot 10^{-10} R^{-2/3} \lambda^{-7/3}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) видно, что ошибка вычисления мощности синхротронного излучения, связанная с неточностью знания энергии электронов и радиуса их орбит вращения, во втором случае значительно меньше, чем при измерении вблизи пика спектрального распределения

$$\Delta w_1 / w_1 = [(7\Delta \gamma / \gamma)^2 + (3\Delta R / R)^2]^{1/2},$$

тогда как

$$\Delta w_2 / w_2 \sim \Delta R / R.$$

Это обстоятельство и определяет целесообразность использования для измерения тока электронов в кольце области длин волн $\lambda \geq \lambda_c$.

Мощность излучения одного электрона при $\gamma \gg 1$ определяется формулой

$$w [\text{Вт} \cdot \text{электрон}^{-1}] = 4,6 \cdot 10^{-16} \gamma^4 R^{-2}.$$

Если полная мощность излучения W кольца пропорциональна числу N электронов в нем, то измерение ее позволяет определить число электронов $N = W/w$. Полная мощность синхротронного излучения рассчитывается, исходя из экспериментальных данных:

$$W = U G_{\text{си}} \int_0^{\infty} \frac{w(\lambda)}{K} d\lambda \cdot \int_0^{\infty} \varepsilon(\lambda) w(\lambda) d\lambda, \quad (14)$$

где U — величина сигнала фотоприемника в вольтах, пропорциональная интенсивности излучения; $G_{\text{си}}$ — геометрический фактор, определяемый геометрией опыта и угловым распределением синхротронного излучения относительно орбитальной плоскости; $\varepsilon(\lambda)$ — относительная спектраль-

ная чувствительность и K — интегральная чувствительность (величина сигнала в вольтах на единицу падающей мощности) фотоприемника.

На рис.3 представлена схема, поясняющая геометрию испускания синхротронного излучения и его регистрации. На приемник излучения 2 с чувствительной площадью S' , расположенный перпендикулярно касательной к орбите электронов на расстоянии l от точки касания, попадает часть потока излучения ΔW , связанная с полной мощностью W :

$$\Delta W(\lambda, \Theta) = N_e w(\lambda) / G_{\text{си}}(\Theta, \varphi),$$

где

$$G_{\text{си}}(\Theta, \varphi) = \frac{2\pi l^2}{S'} \frac{\int w(\Theta) d\Theta}{w(0^\circ)}, \quad (15)$$

$w(\Theta)$ — измеренное экспериментально распределение потока излучения в функции угла Θ , $w(0^\circ)$ — интенсивность синхротронного излучения в медианной плоскости кольцевого сгустка.

В общем случае электрический сигнал на приемнике излучения

$$U_{\text{си}} = N_e K G_{\text{си}}^{-1} \int_0^\infty w(\lambda) \varepsilon(\lambda) \tau_\lambda d\lambda, \quad (16)$$

τ_λ — пропускание промежуточных оптических сред. Константа K определяется по вольфрамовой ленточной лампе [55], прокалиброванной по АЧТ. Сигнал, снимаемый при калибровке:

$$U_{\text{л}} = K G_{\text{л}}^{-1} \int_0^\infty q(\lambda) \varepsilon(\lambda) \tau_\lambda d\lambda, \quad (17)$$

где $G_{\text{л}} = \frac{\pi L^2}{S'}$ — геометрический фактор излучения лампы, L — расстояние излучатель — приемник, $q(\lambda)$ — излучение лампы.

Число электронов N_e из выражений (16) и (17) равно

$$N_e = \frac{U_{\text{си}}}{U_{\text{л}}} \frac{G_{\text{си}}}{G_{\text{л}}} \frac{\int_0^\infty q(\lambda) \varepsilon(\lambda) \tau_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty w(\lambda) \varepsilon(\lambda) \tau_\lambda d\lambda}. \quad (18)$$

В формулу для вычисления абсолютного числа электронов N_e в кольце

$$N_e = \frac{U}{K} f(E, R, G, \lambda), \quad (19)$$

измеряемого с помощью синхротронного излучения, входит калибровочная константа (интегральная чувствительность) детекторов K . В выражении (19) U — величина сигнала на выходе измерительной системы, а f — функция, зависящая от энергии электронов E , равновесного радиуса R , геометрии регистрации G , спектрального диапазона λ .

Для определения абсолютного числа электронов необходимо, чтобы измерительный канал с приемником синхротронного излучения был прокалиброван на эталонном источнике с известной интенсивностью и спектральными характеристиками, желательно, близкими к спектральному распределению синхротронного излучения коллективного ускорителя. Таким эталонным источником может быть либо кольцевой электронный ускоритель, например синхротрон [20], с известной спектральной плотностью синхротронного излучения, либо тепловой источник, у которого, как известно [50], характер спектрального распределения близок характеру распределения синхротронного излучения.

Для синхротронного излучения максимум спектрального распределения приходится на длину волны $\lambda_m^{\text{си}}$, определяемую из выражения

$$\lambda_m^{\text{си}} = 1,7 \cdot R / \gamma^3,$$

где γ — релятивистский фактор. Для теплового излучателя из вольфрама [51] максимум спектрального распределения находится по закону Вина из выражения

$$\lambda_m^{\text{ти}} = 2660 \cdot T^{-1},$$

где T — абсолютная температура излучателя, К. Из условия $\lambda_m^{\text{си}} \simeq \lambda_m^{\text{ти}}$ (соответствие максимумов спектральных распределений теплового и синхротронного излучения) можно определить температуру эталонного источника, которая соответствовала бы определенному радиусу и энергии электронного кольца:

$$T_{[\text{К}]} = 1565 \cdot \gamma^3 R_{[\text{мкм}]}^{-1}.$$

При калибровке на светоизмерительной лампе с вольфрамовым излучателем для практических расчетов интенсивности используются законы излучения абсолютно черного тела, но вводится коэффициент «серости», зависящий от материала излучателя. Полная плотность потока с единичной площадки излучателя $Q(T)$ и спектральная плотность потока с единичной площадки излучателя могут быть представлены в следующем виде:

$$Q(T) = \varepsilon(T) \sigma T^4,$$

$$q(\lambda, T) = \rho(\lambda, T) C_1 \lambda^{-5} (e^{C_2/\lambda T} - 1)^{-1},$$

где $C_1 = 3,74 \cdot 10^{-12}$ Вт · см², $C_2 = 1,438 \cdot 10^4$ мкм · град, $\rho(\lambda, T)$ — коэффициент излучения вольфрама, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-12}$ Вт/см² · град⁴ — постоянная Стефана — Больцмана.

В случае калибровки с помощью пластинчатого излучателя мощность, падающая на приемник площадью S' , величина возникающего на выходе измерительной системы сигнала $U_{\text{ти}}$, характеризующая отклик детектора на падающее излучение, и чувствительность детектора K^T (В · Вт⁻¹) связаны соотношением

$$K^T = \frac{\pi L^2 U_{\text{ти}} F^T}{Q S' S''},$$

где S'' — площадь излучателя, L — расстояние излучатель — приемник, а коэффициент F^T зависит от спектральной чувствительности приемника $\varepsilon(\lambda)$ и равен

$$F^T = \int q(\lambda) d\lambda / \int q(\lambda) \varepsilon(\lambda) d\lambda.$$

Для проведения калибровки был рассчитан энергетический спектр излучения вольфрама при температурах 1270, 1770 и 2680 К в диапазоне длин волн от 0,3 до 6 мкм. Выбор температурных значений определялся условием соответствия спектров теплового излучения вольфрама и синхротронного излучения электронов в адгезаторе на радиусах 4,42; 4,02 и 3,58 см. Расчет производился по методике, изложенной в [51,52], с использованием данных об излучательной способности вольфрама [53,54]. Результаты расчетов спектрального распределения излучения при различных температурных значениях приведены на рис.16.

В качестве источника теплового излучения (температурного эталона) использовались лампы накаливания — эталонная с кремниевым окном ИК 4-1,2, светоизмерительные лампы СИ10-300у и СИРШ6-100 с ленточным вольфрамовым излучателем. Они являются хорошими температурными эталонами в оптической пирометрии с известным относительным распределением по спектру [55]. Светоизмерительные лампы выгодно отличаются от температурного эталона типа абсолютно черного тела удобными размерами, небольшой стоимостью и простотой в эксплуатации; рабочий спектральный

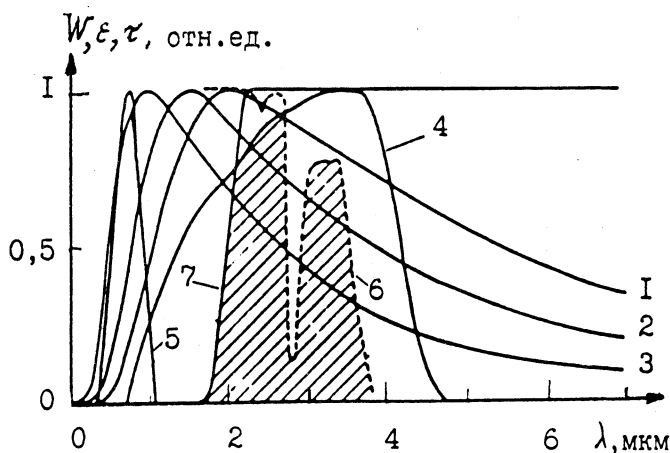


Рис.16. Относительные спектральные характеристики: теплового излучения вольфрамовой ленты при температуре 1) 1270 К, 2) 1700 К и 3) 2680 К, соответствующей синхротронному излучению электронов в адгезаторе при радиусе кольца 4,42; 4,02 и 3,58 см; чувствительности приемников 4) PbSe, 5) Si; пропускания 6) колбы эталонной лампы и окна для синхротронного излучения, 7) Ge-фильтра

диапазон простирается от видимой области до 3 мкм и определяется в основном прозрачностью колбы. При наличии в боковой части колбы окна из оптической керамики диапазон может быть расширен до 10 мкм.

В измерениях абсолютного числа электронов в кольцевом сгустке были использованы два неохлаждаемых фотодетектора, существенно различающихся своими спектральными характеристиками и исполнением [10]. На рис.16 показана относительная спектральная чувствительность этих детекторов. Возможность изменения интенсивности теплового излучения на чувствительной поверхности калибруемого приемника с помощью отрезающих фильтров из германия, оптической керамики КО-1, КО-2, КО-6, бескислородного стекла ИКС-29 и нейтральных поглотителей, а также с помощью изменения расстояния между источником и приемником, позволяет вести регистрацию на линейном участке чувствительности измерительного канала. На рис.16 штриховкой отмечена спектральная область, в которой велась регистрация интенсивности теплового и синхротронного излучений для определения абсолютного числа электронов N_e . Как видно из рисунка, используемая для калибровки и измерений на ускорителе спектральная

область $\Delta\lambda/\lambda \gg 1$, что позволяет повысить точность измерения N_e , за счет повышения точности измерения интенсивности излучения, по сравнению с обычно используемой $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$.

Температура излучающей поверхности вольфрамовой ленты определялась с помощью пирометра ЭОП-66. Проведены исследования по определению характера зависимости температуры ленты по ее длине. Отмечено, что края ленты имеют температуру на $2 + 3 \%$ ниже, чем центральная часть. Ширина вольфрамовой ленты ламп — 2 мм. В центральной зоне рабочей части ленты температура постоянна с точностью $\pm 0,3\%$. Диафрагма, установленная перед лампой, ограничивает излучающую площадку в середине ленты размером 2×2 мм, где температура практически одинакова по всей поверхности.

При калибровке инфракрасных детекторов не учитывалось спектральное пропускание колбы. Это связано с тем, что на адгезаторе коллективного ускорителя для абсолютных измерений тока электронного кольца использовалось окно вывода синхротронного излучения, выполненное из кварца, спектральное пропускание которого соответствует пропусканию колбы СИРШБ-100. Исследования, проведенные с поляроидными пленками, предназначенными для работы в видимой области оптического спектра, показали, что приемники, применяемые на ускорителе для измерения абсолютного числа электронов, поляризационными свойствами не обладают. Можно предположить, что эта особенность распространяется и на ту инфракрасную область синхротронного излучения, которая используется для измерения тока.

Результаты калибровки представлены на рис.17. Измерения интегральной чувствительности K^T двух детекторов синхротронного излучения, использованных на коллективном ускорителе для измерения тока, выполнены при нескольких значениях температуры эталонного источника. Как видно из этого рисунка, интегральная чувствительность детекторов мало меняется в интервале температур $1000 + 2500^\circ \text{C}$, соответствующем $\lambda \sim 0,9 + 2$ мкм.

Суммарная ошибка при определении чувствительности детектора $\Delta K^T / K^T \sim 5 \cdot 10^{-2}$. Основной вклад в погрешность измерений при калибровке на эталонном тепловом источнике вносят: погрешность определения плотности излучения $\Delta Q / Q = 3 \cdot 10^{-2}$; погрешность определения площади излучателя $\Delta S'' = 3 \cdot 10^{-2}$; погрешность измерительного канала $\Delta U / U < 2 \cdot 10^{-3}$; погрешность определения расстояния между приемником и излучателем $\Delta L / L = 4 \cdot 10^{-3}$ и погрешность определения коэффициента $\Delta F^T / F^T = 2 \cdot 10^{-2}$.

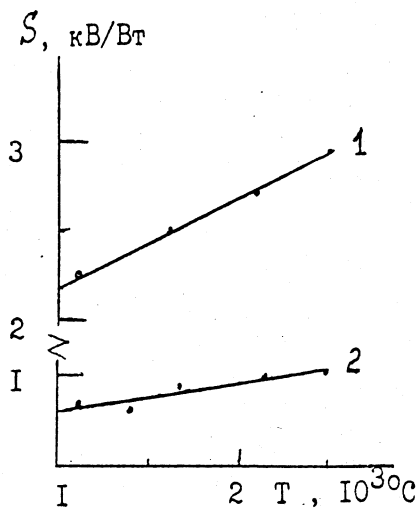


Рис.17. Зависимость интегральной чувствительности детекторов синхротронного излучения от температуры эталонного источника: 1) PbSe, 2) Si

В результате проведенных исследований по калибровке детекторов синхротронного излучения на тепловом вольфрамовом источнике можно сделать вывод, что суммарная ошибка калибровки чувствительности не превышает 6%. Таким образом, метод калибровки измерителей тока электронного кольца на тепловом источнике позволил определить чувствительность измерителя при различных радиусах и энергиях электронов.

В результате сравнения полученных экспериментальных результатов по методам калибровки на тепловом источнике и на электронном кольцевом ускорителе с известными параметрами [20] подтверждена правильность выбора методики калибровки на тепловом источнике.

Из ряда наиболее важных особенностей коллективного ускорителя следует отметить высокий уровень электромагнитных помех вблизи компрессора электронных колец, источниками которых являются импульсные магнитные поля компрессора с частотой $1 + 2$ кГц, а также силовая сеть с частотой 50 Гц. Уровень сигнала помехи, приведенный к мощности синхротронного излучения, составляет $\sim 10^{-7}$ Вт. При этом по времени и частотному диапазону помехи совпадают с измеряемым сигналом с детектора синхротронного излучения. Даже удаление детектора (~ 2 м) от компрессора за счет оптического тракта полностью не решает проблему борьбы с наводками во входных цепях измерительной системы. Нужно отметить, что введение оптического тракта вызывает трудно контролируемые потери в интенсивности излучения, попадающего на детектор, и снижает достижимую точность абсолютных измерений.

Для снижения влияния электромагнитных наводок на точность измерения параметров электронного кольца по синхротронному излучению была разработана специальная система [10], состоящая из двух регистрирующих каналов. В одном из каналов приемником излучения служит неохлаждаемое фотосопротивление из селенида свинца, в другом канале — кремниевый фотодиод. Такое сочетание позволяет вести регистрацию потока синхро-

тронного излучения в спектральной области $0,4 + 4,5$ мкм. Спектральные характеристики фотоприемников, измеренные в относительных единицах, представлены на рис.16. Регистрация синхротронного излучения может вестись одновременно по обоим каналам либо каждым каналом в отдельности. Фотодиод, с диаметром чувствительной поверхности 3 мм, выполнен в одном корпусе с предусилителем по интегральной технологии. Размер всего фотоприемного устройства не превышает одного кубического сантиметра. Благодаря минимизации контуров в фотоприемном устройстве значительно снижена его чувствительность к индукционным наводкам, что позволяет работать в непосредственной близости от электронного кольца в условиях высоких электромагнитных помех. Такие фотоприемники в случае регистрации синхротронного излучения имеют ряд преимуществ по сравнению с применявшимися ранее ФЭУ. Уступая ФЭУ в чувствительности, что при имеющемся в ускорителе уровне синхротронного излучения не очень существенно, фотоприемник имеет более широкий динамический диапазон и широкополосность спектральной характеристики ($0,4 + 1,1$ мкм). Малые размеры фотоприемника, нечувствительность к внешнему магнитному полю, небольшая потребляемая мощность (10В, 2мА) упрощают проблему компоновки прибора и делают его удобным в эксплуатации. Для подавления наводок, которые могут возникнуть в кабеле связи входной схемы с выходной регистрирующей секцией, особое внимание обращено на расположение и экранировку кабеля.

Измерительный канал с неохлаждаемым фотосопротивлением (PbSe) в качестве детектора позволяет измерять мгновенные (в пределах 1 мкс) значения величины сигнала синхротронного излучения с использованием импульсного преобразования сигнала с фотоприемника и введения специального устройства [56] активного подавления наводок в измерительном канале перед регистрацией в АЦП. Детектор состоит из двух фотосопротивлений, одно из которых является компенсирующим и заэкранировано от синхротронного излучения. Такая структура детектора и использование дифференциального усилителя позволили применить балансный съем сигнала с детектора и значительно снизить уровень синфазных наводок на выходной сигнал и дрейф на входе измерительного канала. Кроме того, все входные цепи помещены в электрические экраны, проводники от детекторов на дифференциальные входы усилителя бифилярно скручены, а сам усилитель отнесен от компрессора на расстояние ~ 1 м. Фотосопротивления подбирались с близкими между собой параметрами: чувствительная поверхность $0,2 \times 7$ мм, тепловое сопротивление ~ 6 кОм, постоянная времени $1 + 2$ мкс.

Измерительный канал с импульсным преобразованием позволяет регистрировать интенсивность синхротронного излучения кольца в различные

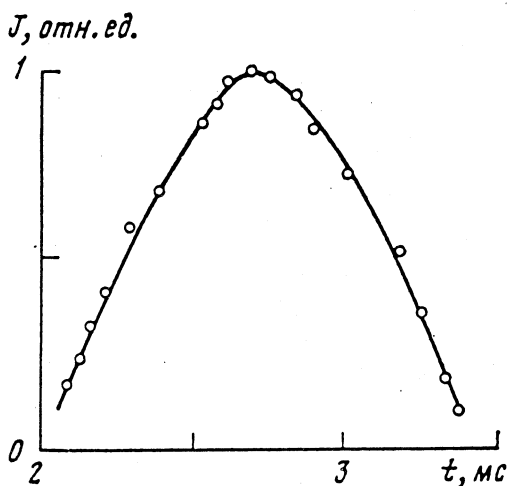


Рис.18. Изменение интенсивности синхротронного излучения в процессе сжатия и декомпрессии электронного кольца

моменты времени, а в многоканальном исполнении может быть использован для измерения геометрических параметров кольца.

Достоинствами описанной системы измерения синхротронного излучения по сравнению с использовавшимися системами [12] являются возможность рас-

полагать детекторы синхротронного излучения в непосредственной близости от источника излучения, в результате чего отпадает необходимость в оптическом тракте, и достигается значительное снижение погрешности измерения. Так, в измерительном канале с импульсным преобразованием при регистрации синхротронного излучения достигнута относительная точность $\sim 0,2\%$.

Главная задача диагностики кольцевого сгустка в адгезаторе коллективного ускорителя — нахождение величин, определяющих темп ускорения: напряженности собственного электрического поля, которая определяется из числа электронов и геометрических параметров кольца. Наиболее важно знать эти параметры на заключительной стадии сжатия электронного кольца (на радиусе $R = 4 \div 4,5$ см), где осуществляется загрузка электронного кольца ионами и вывод нагруженного кольца в область линейно спадающего магнитного поля и ускорение ионов до энергии $1 \div 5$ МэВ/нуклон.

В измерениях использованы два приемника, установленных в непосредственной близости от окна адгезатора (~ 1 м от сечения сгустка) под нулевым углом к медианной плоскости кольцевого сгустка (см. рис.3, 2). Перед приемником из PbSe установлен полосовой фильтр-ослабитель, прозрачный для излучения в спектральном диапазоне $2 \div 2,5$ мкм (см. рис.16). Влияние атмосферы (плотность воздуха, влажность, запыленность) не учитывалось из-за малого расстояния между детекторами и окном адгезатора.

В рабочем режиме ускорителя длительность цикла ускорения составляет ~ 3 мс. Длительность импульса синхротронного излучения, регистрируемого детектором, составляет ~ 1 мс. На рис.18 показано распределение интенсивности (в относительных единицах) синхротронного излучения в

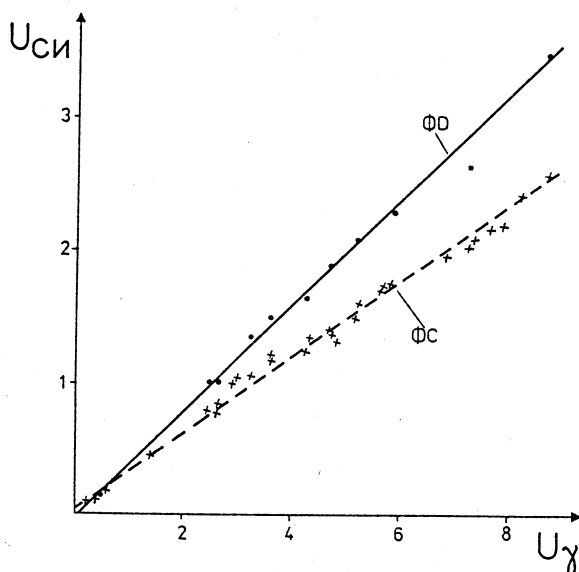


Рис.19. Корреляция сигналов с детекторов синхротронного $U_{си}$ и тормозного U_{γ} излучений: ФД — фотодиод Si, ФС — фотосопротивление PbSe

процессе сжатия и декомпрессии электронного кольца в адгезаторе, измеренное с помощью фотосопротивления PbSe через интервалы времени 40 мкс. Рисунок иллюстрирует временную зависимость импульса синхротронного излучения, измеренную в спектральном диапазоне $2+2,5$ мкм. Характерная ширина импульса $\Delta t = 0,7$ мс. Максимум сигнала приходится на время 2,7 мс от начала сжатия кольца в адгезаторе. Область уверенной регистрации синхротронного излучения инфракрасным детектором PbSe с максимумом спектральной чувствительности около 3,6 мкм составляет $2,1+2,7$ мс, что соответствует изменению радиуса кольца от 4,6 см до 3,6 см.

Для проверки линейности зависимости между интенсивностью зарегистрированного синхротронного излучения и числом электронов в кольце исследована корреляция сигналов с приемников синхротронного излучения и с детектора, регистрирующего γ -излучение, образующееся при сбросе электронов на стенки камеры адгезатора в конце цикла ускорителя. Интенсивность тормозного γ -излучения пропорциональна числу электронов. Проведенные исследования показали линейную корреляцию сигналов с

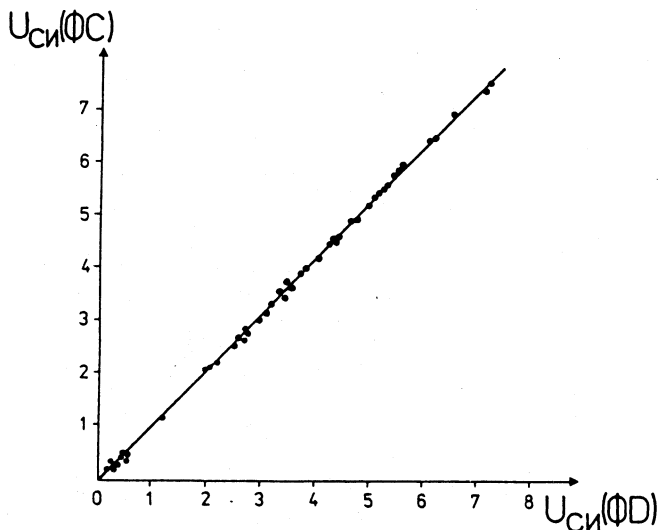


Рис.20. Корреляция сигналов с двух детекторов, регистрирующих синхротронное излучение в разных спектральных областях

приемников синхротронного излучения и с детектора γ -квантов. Результаты исследований представлены на рис.19.

Исследована реакция детекторов с разной спектральной чувствительностью (ФД — фотодиод Si, ФС — фотосопротивление PbSe) на поток синхротронного излучения одной интенсивности. Регистрация излучения велась обоими детекторами одновременно. Корреляция сигналов между ними (рис.20) характеризует воспроизводимость результатов. Судя по результатам измерений, отклонение точек от прямой линии не превышает 5%.

Результаты измерения числа электронов N_e (ускоренного тока) электронного кольца на конечном радиусе сжатия кольцевого сгустка в адгезаторе КУТИ представлены на рис.21. Измерение проводилось инфракрасным детектором из PbSe в спектральном диапазоне 2-2,5 мкм. По оси абсцисс отложена величина сигнала с инфракрасного детектора в вольтах. На вертикальной оси показана соответствующая этим сигналам величина сигнала с детектора тормозного γ -излучения электронов при их обратной высадке на стенки камеры адгезатора.

Угловое распределение синхротронного излучения, особенности и характер которого необходимо учитывать при определении N_e , измерялось в

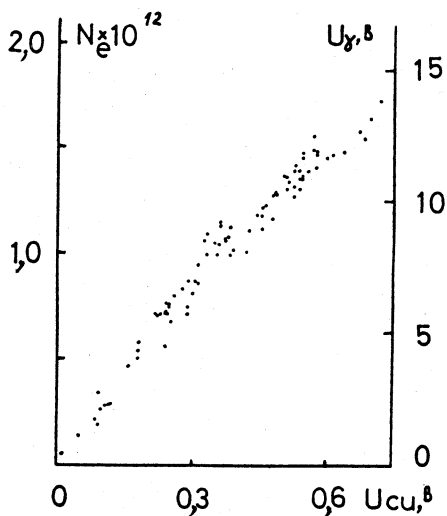
Рис.21. Результаты измерения числа электронов

отдельном эксперименте, но при тех же режимах ускорителя, которые были и при токовых измерениях. На рис.22 представлены результаты измерений характера угловой расходимости синхротронного излучения относительно орбитальной плоскости электронов. Измерения проводились с помощью двух одноэлементных детекторов по следующей методике: один из детекторов (PbSe) был установлен под нулевым углом

относительно медианной плоскости кольцевого сгустка, а другой (Si) перемещался перпендикулярно орбитальной плоскости частиц.

Из рис.21 можно видеть, что измеряемый сигнал синхротронного излучения до уровня $\sim 1,5 \cdot 10^{11}$ частиц практически линейно связан с интенсивностью электронного кольца. Выше этого уровня наблюдается небольшое отклонение от линейности, которое связано, как показано в работе [14], с аксиальными бетатронными колебаниями электронов в кольце, частота которых зависит от фактора нейтрализации кольца. Влияние ионной компоненты при увеличении интенсивности электронов приводит к расширению углового распределения электронов в кольце и, соответственно, расширению углового распределения синхротронного излучения (т.е. относительноному снижению интенсивности синхротронного излучения в медианной плоскости кольцевого сгустка). Регистрация плотности потока излучения по всей ширине его углового распределения относительно медианной плоскости адгезатора устраняет отклонение от линейности.

Работу измерительного комплекса инфракрасной синхротронной диагностики токовых, геометрических и энергетических параметров ускоряемого пучка заряженных частиц, в который входит и система измерения угловой расходимости синхротронного излучения, иллюстрирует рис.14. На рисунке в виде таблицы представлены результаты 10 измерений, проводимых через 100 мкс различными измерительными системами в течение 1 мс (за один цикл ускорителя). «Короткая линейка» характеризует работу системы измерения геометрических параметров кольца. «Длинная линейка» измеряет интенсивность синхротронного излучения и его угловое распреде-



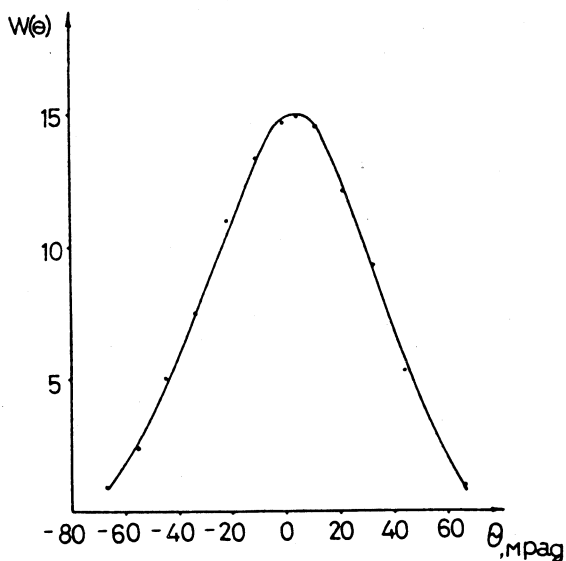


Рис.22. Угловое распределение синхротронного излучения в адгезаторе

ление относительно орбитальной плоскости частиц. «СИ-монитор» измеряет абсолютное число электронов. На нижних гистограммах можно видеть размер малого сечения кольцевого сгустка и характер распределения электронов по сечению (левая гистограмма) и угловое распределение синхротронного излучения (правая гистограмма) в один из 10 моментов времени сжатия кольца. По оси абсцисс отложен линейный размер детектирующих блоков. У «короткой линейки» шаг ~ 1 мм. У «длинной линейки» шаг ~ 4 мм. По оси ординат отложена величина сигнала с каждого элемента детекторов в каналах.

Кроме базовых (основных) систем неразрушающей диагностики кольцевого сгустка, которыми являются интегральные и координатные инфракрасные детекторы синхротронного излучения и которые составляют основу измерительного комплекса, в этот комплекс включены вспомогательные измерительные устройства: счетчики тормозного излучения, γ -детектор обратной высадки, индукционный датчик тока (пояс Роговского, установленный на выходе электронного пучка из линейного ускорителя перед его инжекцией в компрессор) — задействуемые тогда, когда необходимо проведение коррелированных измерений. В случае обычной работы, что

иллюстрирует рис.14, вспомогательные диагностические устройства не использовались.

Для анализа погрешностей измерения абсолютного числа электронов использованы методы теории ошибок и рекомендации по математической обработке результатов измерений, изложенные в работе [57]. Расчет погрешностей проводился на основе экспериментальных результатов и анализа формулы (19). При анализе результатов были изучены и определены систематические и случайные погрешности измерения. Проведенный анализ погрешностей показал, что инфракрасный синхротронный метод обеспечил точность определения абсолютного числа электронов в сгустке (тока пучка) лучше чем 10—12%, что в два раза превышает требуемую ускорительным экспериментом точность, недостижимую с помощью других методов диагностики, использованных на коллективном ускорителе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение целесообразно перечислить свойства инфракрасного синхротронного метода, которые делают его незаменимым при неразрушающей диагностике низкоэнергетичных ($E \sim 10\text{--}25$ МэВ, $R \sim 8\text{--}4$ см) электронных сгустков и протонных пучков ($E \sim 200$ ГэВ, $R \sim 100$ м):

- уникальные свойства синхротронного излучения — острая направленность и высокая интенсивность в инфракрасной области — делают возможным использование достаточно простых, а значит, более надежных, доступных и дешевых инфракрасных детекторов [4,5,20];
- широкий спектр диагностируемого синхротронного излучения, простирающийся от видимой части оптического спектра в далекую инфракрасную область до 40 мкм [11,21,58];
- высокая точность измерения абсолютного числа ускоряемых частиц, которая обеспечивается регистрацией синхротронного излучения в длинноволновой части спектра ($\lambda \geq \lambda_m$), когда интенсивность излучения практически не зависит от энергии частиц, вносящей основной вклад в погрешность измерений, а также калибровкой детекторов в широком спектральном диапазоне ($\Delta\lambda/\lambda \geq 1$) [5,59,60];
- высокая помехозащищенность от интенсивных импульсных электромагнитных, радиационных и световых помех по сравнению с традиционными детекторами оптического излучения на основе ФЭУ [10,61];
- высокий темп набора информации, позволяющий вести диагностику и исследования ускоряемых пучков в динамике их развития, вести регистрацию быстротекущих процессов [12—14].

Использование инфракрасного синхротронного излучения для диагностики и экспериментов на протонных кольцевых ускорителях, для научных и прикладных исследований, например, в метрологии, в области высокотемпературной сверхпроводимости и в биологии, открывает новую страницу в применении синхротронного излучения [62].

Разработанные в ОИЯИ прецизионные инфракрасные детектирующие автоматизированные системы могут быть использованы в различных областях науки и промышленности. На их основе может быть создан инфракрасный томограф для медицины. В металлургической промышленности они могут найти применение в системах, отслеживающих технологические процессы, и в экологическом контроле окружающей среды.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Л.Г.Петровской, М.А.Мальцеву, А.Р.Кузьмичеву за помощь в подготовке данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векслер В.И., Саранцев В.П., Бонч-Осмоловский А.Г. и др. — Препринт ОИЯИ Р9-3440-2, Дубна, 1967.
2. Meyer P., Lagarde P. — J.Physique, 1976, vol.37, p.1387.
3. Синхротронное излучение, свойства и применение. Сб. статей (под ред. К.Кунца). М.: Мир, 1981.
4. Голутвин И.А., Мальцев А.А., Саранцев В.П., Свиридов В.А. — ЖТФ, 1982, т.52, №3, с.469.
5. Мальцев А.А. — Сообщение ОИЯИ Р9-86-289, Дубна, 1986.
6. Мальцев А.А. — Препринт ОИЯИ Р9-92-562, Дубна, 1992.
7. Мальцев А.А. — ПТЭ, 1994, № 3, с.177.
8. Мальцев А.А., Мальцев М.А. — Препринт ОИЯИ Р9-95-472, Дубна, 1995.
9. Белинская Г.И., Голутвин И.А., Дубовик А.С. и др. — ПТЭ, 1977, №4, с.27.
10. Лачинов В.М., Мальцев А.А., Филин В.П. — ПТЭ, 1982, №5, с.43.
11. Malzew A., Tragner P. — Tagungsband 92 der KDT Suhl zur Tagung «Temperatur'89», Suhl., 1989, t.2, s.311.
12. Беспалова Т.В., Голутвин И.А., Замятин Н.И. и др. — ПТЭ, 1979, №1, с.22.
13. Голутвин И.А., Карпов Б.С., Кирилов С.С. и др. — Сообщение ОИЯИ 9-83-696, Дубна, 1983.
14. Кондрашов В.Д., Мальцев А.А., Смолин Д.А. и др. — Сообщение ОИЯИ 9-85-278, Дубна, 1985.
15. Bossart R., Bosser J., Burnod L. et al. — Nucl. Instr. and Meth., 1979, vol.164, p.375.
16. Желепов В.П. — Труды X Всесоюзн. совещ. по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Д9-87-105, Дубна, 1987, т.1, с.23.
17. Edwards H.T. — Proc. 2-nd Europ. Part. Accel. Conf. EPAC 90, 1990, vol.1, p.356.

18. Sissakian A.N. — Preprint JINR, D1-9-90-283, Dubna, 1990.
19. Годвин Р. — УФН, 1970, т.101, с.493.
20. Волков Ю.М., Мальцев А.А., Свиридов В.А. и др. — ПТЭ, 1982, №5, с.40.
21. Mal'tsev A.A., Mal'tsev M.A. — Preprint JINR, E9-95-489, Dubna, 1995.
22. Schwinger J. — Phys. Rev., 1949, vol.75, p.1912.
23. Томбулиан Д., Гартман П. — В кн.: Синхротронное излучение в исследовании твердых тел. М.: Мир, 1970, с.19.
24. Jackson J.D. — Classical Electrodynamics. J.Wiley, NY, 1976.
25. Куликов О.Ф. — В кн.: Труды ФИАН (Синхротронное излучение). М.: Наука, 1975, т.80, с.3.
26. Беспалова Т.В., Голутвин И.А., Замятин Н.И. и др. — В кн.: Труды X Межд. симп. по ядерной электронике. Дрезден, 1980, ZFK-433, т.1, с.44.
27. Воронкова Е.М. и др. — Оптические материалы для инфракрасной техники. М.: Наука, 1965.
28. McCarthy D. — Appl. Opt., 1963, No.6, p.591.
29. McCarthy D. — Appl. Opt., 1965, No.3, p.317.
30. Золотарев В.М., Морозов В.Н., Смирнова Е.В. — Оптические постоянные природных и технических сред. Л.: Химия, 1984, с.69.
31. Хадсон Р. — Инфракрасные системы. М.: Мир, 1972.
32. Джемисон Дж.Э. и др. — Физика и техника инфракрасного излучения. М.: Советское радио, 1965.
33. Solid State Sensors Symp., Minneapolis, NY, 1970.
34. Фотоприемники видимого и ИК-диапазонов: Пер. с англ. (под ред. В.И.Стафеева). М.: Радио и связь, 1985.
35. Norkus V. et al. — Feigeratetechnik, Berlin 36, 1987, No.1, s.29.
36. Hofmann G., Walthter L., Norkus V. et al. — «Temperatur'89», Tagungsband der KDT, Suhl, 1989, t.1, s.94.
37. Новик В.Е., Гарилова Н.Д., Фельдман Н.Б. — Пироэлектрические преобразователи. М.: Советское радио, 1979.
38. Волосов Д.С., Цивкин М.В. — Теория и расчет светооптических систем. М.: Искусство, 1960.
39. Якушников Ю.Г. — Основы теории и расчета оптико-электронных приборов. М.: Сов. радио, 1971.
40. Скотт Р.М. — Зарубежная радиоэлектроника, 1960, №6, с.122.
41. Пейсахсон И.В. — Оптика спектральных приборов. Л.: Машиностроение, 1970.
42. Курочкин С.С., Мурин И.Д. — Современная ядерная электроника. Цифровые инфракрасные системы и устройства. М.: Атомиздат, 1975, том II, с.95.
43. CAMAC, EUR-4100. Revised Description and Specification, ESONE Committee, Luxemburg, August 1972.
44. CAMAC, EUR-4600. Organization of Multi-crate Systems, ESONE Committee, Luxemburg, April 1972.
45. Круз П., Макглоулин Л., Макквистан Р. — Основы инфракрасной техники. М.: Воениздат, 1964.
46. Долбилов Г.В., Мальцев А.А., Саранцев В.П. и др. — Труды X Всесоюзн. совещ. по ускор. заряж. частиц. ОИЯИ, Д9-87-105. Дубна, 1987, т.1, с.390.
47. Laslett L. — LBL Report ERAN-1984. Berkeley, 1972.

48. Кулипанов Г.Е., Скринский А.Н. — Вестник АН СССР, 1978, №8, с.46.
49. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Теория поля. М.: Наука, 1973.
50. Капица С.П. — Природа, 1971, №10, с.22.
51. Брамсон М.А. — Инфракрасное излучение нагретых тел. М.: Наука, 1965.
52. Павлов А.В., Черников А.И. — Приемники излучения автоматических оптико-электронных приборов. М.: Энергия, 1972.
53. Брамсон М.А. — Справочные таблицы по инфракрасному излучению нагретых тел. М.: Наука, 1964.
54. Свет Д.Я. — Температурные излучения металлов и некоторых веществ. М.: Металлургия, 1964.
55. Левиков С.И. — ЖНи ПФиК, 1964, т.9, №3, с.218.
56. Лачинов В.М., Маковеев В.К. — ПТЭ, 1977, №5, с.149.
57. Свешников А.А. — Основы теории ошибок. Л.: Издат. ЛГУ, 1972.
58. Малыцев А.А., Малыцев М.А. — ПТЭ, 1995, № 4, с.210.
59. Малыцев А.А., Малыцев М.А. — АЭ, 1995, т.79, вып.2, с.121.
60. Малыцев А.А., Малыцев М.А. — Измерит. техн., 1995, № 10, с.67.
61. Кондрашов В.Д., Кузьмичев А.Р., Ларин А.А. и др. — Сообщение ОИЯИ Р13-93-420, Дубна, 1993.
62. Малыцев А.А. — Тез. докл. Всесоюзн. научно-техн. конфер. «Измерительные и информационные системы» (ИИС-91). С.-Петербург, 1991, с.149.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.1.03621.384.6

Дубненский синхрофазотрон. Состояние и перспективы развития ускорительного комплекса ЛВЭ. Семенюшкин И.Н. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.3, с.571.

Многие годы дубненский синхрофазотрон является одним из немногих в мире ускорителей заряженных частиц, предоставляющих экспериментаторам широкий набор пучков релятивистских ядер и поляризованных дейтронов. Преобразование ускорителя протонов в ускоритель ядер стало возможным благодаря реконструкции ряда важнейших систем синхрофазотрона и созданию новых. Постоянное совершенствование уникальных источников высокозарядных ионов и поляризованных дейтронов, модернизация линейного ускорителя, ВЧ-системы ускорения, сооружение двух систем медленного вывода ускоренного пучка из системы быстрого вывода и на их основе разветвленной системы каналов пучков частиц и др., высокая надежность работы синхрофазотрона — все это определило новые качества ускорительного комплекса лаборатории.

В обзоре дается краткое описание основных систем, режимов работы и каналов пучков частиц. Намеченная на ближайшие годы программа физических исследований ЛВЭ нацелена на изучение переходного режима от протон-нейтронной к кварк-глюонной материи. Она основывается, прежде всего, на постановке экспериментов на собственном ускорительном комплексе. Для этого будет использоваться введенный в действие в 1993 г. жесткофокусирующий сверхпроводящий ускоритель — нуклотрон, предназначенный для ускорения ионов любых атомов периодической таблицы Д.И.Менделеева до максимальной энергии 6 ГэВ/нуклон, и до создания бустера нуклотрона — поляризованные пучки дейтронов синхрофазотрона.

Табл.7. Ил.6. Библиогр.: 67.

УДК 530.145

Метод континуального интегрирования для задач с суперинтегрируемыми потенциалами на двумерном гиперboloиде. Гроше К., Погосян Г.С., Сисакян А.Н. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.3, с.593.

Настоящая работа является третьей из серии работ, в которой обобщено понятие суперинтегрируемых потенциалов, известных для плоского пространства, на случай пространств постоянной отрицательной кривизны. Сформулирован метод континуального интегрирования для суперинтегрируемых потенциалов на двумерном гиперboloиде. Найдены пять потенциалов искомого типа, которые содержат три функционально независимых интеграла движения (наблюдаемых), и в каждом случае выписаны соответствующие интегралы по траекториям. Описаны все случаи, где с помощью метода континуального интегрирования возможно решение в явном виде на языке пропагаторов, функций Грина и спектральных разложений по волновым функциям. Обсуждаются все возможные ортогональные системы координат на двумерном гиперboloиде. Для каждой из систем координат построены оператор Шредингера и матрица Штекеля, приведены соответствующие интегралы движения. Особое внимание уделено обобщению гармонического осциллятора, или осциллятора Хиггса, и задачи Кеплера — Кулона. Оставшиеся три потенциала являются аналогами потенциала Холта и центробежного, а последняя модель соответствует в пределе плоского пространства линейному потенциалу.

Табл.3. Библиогр.: 66.

УДК 539.1.076+621.384.6

Некоторые новые предложения для ускорителей. Цыганов Э.Н., Таратин А.М., Зинченко А.И. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.3, с.675.

Коллайдеры частиц высоких энергий являются, по-видимому, одними из наиболее сложных технических устройств. Ускоренные пучки частиц должны сохраняться в ускорителе в течение многих часов, причем их параметры должны оставаться стабильными, чтобы обеспечить получение максимума информации в экспериментальных исследованиях. Оптимизация работы коллайдеров является важной и очень непростой задачей из-за большой сложности и требуемой высокой точности экспериментов, а также высокой стоимости работы ускорительных комплексов.

Дается обзор нескольких перспективных направлений в усовершенствовании работы коллайдеров, которые недавно были инициированы нами и опубликованы в научных журналах и сообщениях, а именно: вывод гало пучка из коллайдера частиц высоких энергий с помощью изогнутых кристаллов для организации дополнительных экспериментов на фиксированных мишенях; компенсация влияния пространственного заряда встречных пучков на их стабильность; новые схемы гашения колебаний пучка и их применения в системах обратной связи; неразрушающая диагностика параметров циркулирующих пучков с помощью пучков частиц низких энергий. Для детального исследования этих предложений нами была разработана эффективная компьютерная модель коллайдеров, созданы компьютерные программы для расчета траекторий заряженных частиц в кристалле, а также в поле пространственного заряда, электрических и магнитных полях в условиях, характерных для коллайдеров частиц высоких энергий. Результаты исследований дают основания надеяться на возможность значительного улучшения работы коллайдеров. Это позволит расширить область физических исследований, достижимых на сталкивающихся пучках существующих и сооружаемых ускорителей, и увеличит доступность этих ускорительных комплексов для большего числа исследовательских групп.

Табл.1. Ил. 21. Библиогр.: 33.

УДК 530.12:531.51

Гравитационная и электромагнитная задачи двух тел в специально-релятивистском подходе Пуанкаре. Асанов Р.А., Афанасьев Г.Н. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.3, с.713.

Пуанкаре обобщил систему уравнений Ньютона для двух взаимодействующих тел на случай только запаздывающих сил, распространяющихся со скоростью света. Формулировка Пуанкаре гравитационной задачи (Кеплера) содержит две произвольные функции. При определенном выборе этих функций получено правильное описание трех известных эффектов общей теории относительности и эффекта задержки радиолокационных сигналов. Для рассмотрения в этом подходе электромагнитных взаимодействий пришлось расширить систему уравнений Пуанкаре, введя силы, зависящие от ускорений тел. Найдены условия на выражения для сил, при действии которых возможны стационарные круговые движения, и приведены примеры таких сил и движений. Даны примеры сил, приводящих к прямолинейному движению. Рассмотрены некоторые другие подходы к задаче.

Библиогр.: 37.

УДК 530.145; 535.14

Проблема фазы электромагнитного поля в квантовой оптике. *Мурзахметов Б.К., Чижов А.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.3, с.747.

Дан обзор современного состояния проблемы описания фазы квантованного электромагнитного поля. Подробно изложены два подхода к получению фазовых распределений, используемых для вычисления квантово-механических средних от фазовых наблюдаемых. Один из подходов основан на использовании эрмитова оператора фазы и его собственных состояний. В другом подходе фазовые средние вычисляются при помощи фазовых распределений, получаемых посредством интегрирования функций распределения квазивероятности по радиальной переменной. На примере конкретных неклассических состояний света проводится сравнение этих двух подходов.

Ил. 15. Библиогр.: 96.

УДК 621.387: 621.391

Инфракрасная синхротронная диагностика как новое направление в физике и технике ускорительного эксперимента. *Мальцев А.А.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.3, с.797.

В обзоре представлены методы и системы неразрушающей диагностики и исследований пучков заряженных частиц (в том числе и протонных), основанные на использовании их собственного магнитно-тормозного излучения (синхротронного или краевого) инфракрасного диапазона (преимущественно).

Существует широкий круг проблем ускорительного эксперимента (например, неразрушающая диагностика ускоряемых пучков, исследование когерентности синхротронного излучения), в метрологии, биологии, высокотемпературной сверхпроводимости и т.д., которые могли бы решаться с помощью инфракрасной синхротронной диагностики, перекрывающей интервал длин волн 0,3 мкм, что существенно превосходит спектральную область, используемую для этих целей (в основном, это область порядка мкм).

Расширение спектрального диапазона уверенно диагностируемого синхротронного излучения открывает новые возможности в его использовании для решения научных и прикладных задач.

Особый интерес инфракрасная синхротронная диагностика (как новое направление) представляет для пучков протонных кольцевых ускорителей ныне существующих (SPS), создаваемых (УНК ИФВЭ, нуклотрон ОИЯИ) и проектируемых (SSC), хотя бы в силу того, что до недавних пор о синхротронном излучении протонов существующих ускорителей вообще не могло быть и речи из-за ничтожно малой интенсивности этого излучения.

Табл.1 Ил.21. Библиогр.: 62.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Семенюшкин И.Н.</i>	
Дубненский синхрофазотрон. Состояние и перспективы развития ускорительного комплекса ЛВЭ	571
<i>Гроше К., Погосян Г.С., Сисакян А.Н.</i>	
Метод континуального интегрирования для задач с суперинтегрируемыми потенциалами на двумерном гиперboloиде	593
<i>Цыганов Э.Н., Таратин А.М., Зинченко А.И.</i>	
Некоторые новые предложения для ускорителей	675
<i>Асанов Р.А., Афанасьев Г.Н.</i>	
Гравитационная и электромагнитная задачи двух тел в специально релятивистском подходе Пуанкаре	713
<i>Мурзахметов Б.К., Чижов А.В.</i>	
Проблема фазы электромагнитного поля в квантовой оптике	747
<i>Мальцев А.А.</i>	
Инфракрасная синхротронная диагностика как новое направление в физике и технике ускорительного эксперимента	797

CONTENTS

<i>Semenjushkin I.N.</i>	
Dubna Synchrophasotron. Status and Prospects of the Development of the Accelerators	571
<i>Grosche C., Pogosyan G.S., Sissakian A.N.</i>	
Path Integral Approach to Superintegrable Potentials on the Two-Dimensional Hyperboloid	593
<i>Tsyganov E., Taratin A., Zinchenko A.</i>	
Innovations in Accelerator Technology	675
<i>Asanov R.A., Afanasiev G.N.</i>	
Special Relativistic Gravitational and Electromagnetic Two-Body Problems in the Poincaré Approach	713
<i>Murzakhmetov B.K., Chizhov A.V.</i>	
Problem of a Phase of the Electromagnetic Field in Quantum Optics	747
<i>Maltsev A.A.</i>	
Infrared Synchrotron Diagnostics in the Physics and Technics of Acceleration Experiment	797

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху ($\underline{\underline{S}}$ и $\overline{\overline{s}}$, $\underline{\underline{C}}$ и $\overline{\overline{c}}$). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы $\underline{O}$ и $\overline{0}$ отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\underline{\underline{}}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. Лезнов А.Н., Савельев М.В. — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. Годен М. — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. Turbinger A.V. — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. Ушверидзе А.Г. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. Endo I., Kasai S., Harada M. et al. — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректурa с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**

Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**

Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 15.01.96. Подписано в печать 15.04.96. Формат 60×90/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 16,6. Уч.-изд.л. 20,08.

Тираж 500. Заказ 49046. Цена 4500 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1996. Том 27. Вып.3. 567—854.