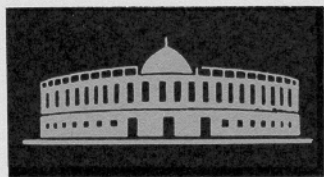


ISSN 0367-2026

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ



ЧАСТИЦ

И АТОМНОГО

ЯДРА

В
В
У
С

1996 том 27 выпуск 5



JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.27

PART 5

Six issues per year

DUBNA 1996

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 27

ВЫПУСК 5

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1996

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ,

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ,

П.И.ЗРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЪЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

В.Г.СОЛОВЬЕВ

(зам. главного редактора),

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы **Е.К.Аксенова**, тел. 65-165

Э.В.Ивашкевич

INTEGRABLE SYSTEMS

A.N.Leznov

Institute for High Energy Physics, 142284 Protvino, Moscow Region, Russia

On the base of algebraic construction, new discrete symmetry of integrable system is introduced and its applications are studied. Its universality is demonstrated by examples of explicit solutions of many known integrable evolution equations and hierarchies in $(1 + 1)$ and $(2 + 1)$ dimensions.

Предложен алгебраический подход к построению солитонных решений интегрируемых нелинейных систем, основанный на исследовании алгебр их симметрии. Его универсальность продемонстрирована на примерах явных решений многих известных интегрируемых уравнений и их иерархий в $(1 + 1)$ и $(2 + 1)$ измерениях.

1. GENERAL REMARKS [1–7]

In this paper we will consider the dynamical systems which have solution of soliton kind. The origin of the concept of the solitons is connected with the physical problems, in particular, with the study of the waves on the water in the canals. These waves correspond to the processes of propagating a perturbation peak (soliton wave) which brings finite energy. This peak is stable with respect to the outer influences. The soliton wave differs from the usual periodical waves which have many peaks.

From mathematical point of view all these systems are united by the properties of their algebra of inner symmetry. These algebras are infinite dimensional but have the finite dimensional representations with the «spectral parameter», i.e., they are realized by finite dimensional matrices which entries are rational functions of the parameter λ , taking values in complex plane. This case sufficiently differs from the finite-dimensional algebras of inner symmetry of exactly integrable systems.

Now we have generalized the partial problems of the soliton solution behaviour into the following mathematical scheme. We formulate the problem. It is necessary to find an element g , which takes values in some group and depends on the parameter λ . This element is also a function of independent variables ξ and satisfies the relation

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} g^{-1} = u. \quad (1.1)$$

The elements u , taking values in corresponding algebra, are postulated to be rational functions of the spectral parameter. In the general case the parameters which determine the position of the poles are the functions of the independent variables ξ .

The Maurer–Cartan identities subject to (1.1) are reduced to the system

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} = [u_i, u_j]. \quad (1.2)$$

From this identity we can take out the equalities of residues in all the poles of any order. After that we have the system of equations under consideration, i.e., there arises a polycomponent equation which is equivalent to investigated dynamical system. One can say that system (1.2) with respect to spectral parameter is a generating expression (Laurent series) for the equations of the dynamical system.

Originally for the solution of the systems of type (1.2) the wide known inverse scattering method was elaborated. By means of this method many equations of importance for physical applications (such as the Kortevég–de Vries, sin-Gordon, nonlinear Schrödinger and so on) were integrated. This method is described in detail in many known monographs.

In further works the solution of the systems (1.2) was connected with the matrix Riemann problem (the so-called Zacharov–Shabat dressing method). This method provides a possibility of finding the solutions of integrable system, when the solution of the Riemann problem is known from the independent consideration.

In this paper we shall use a purely algebraic construction for finding the system of equations possessing soliton-type solutions together with their explicit form, by passing the stage of investigating and exploring their internal symmetry algebra. The problem of necessity for such approach and the existence of systems having soliton solutions that do not fall within the scope of our construction will not be considered here. In any case all the systems that are integrable by the inverse scattering method fall within the construction which follows below. In all cases it yields explicit formulae for soliton type solutions even when traditional methods grow so cumbersome that it becomes impossible from the purely technical standpoint to produce the result.

The initial (input) elements of the construction are specially coded data of the structure of internal symmetry algebra of the system which are used to express, by several algebraically operations, soliton-type solutions together with the system of equations they satisfy. Here, the solution of sin–Gordon, Kortevég–de Vries, nonlinear Schrödinger and other wave and evolution equations

is described by common formulae distinguished only by the parameters related to the internal symmetry algebra.

2. INFINITE-DIMENSIONAL RATIONAL FUNCTIONS ALGEBRA [8,9]

In this section we will describe the construction of a special type of infinite-dimensional algebras, which is an essential point in the following approach to the consideration of the dynamical systems in question. We will call these as the algebras of the rational functions, because up to now any terminology on this subject is absent.

In order to explain the construction of these algebras we will examine simple algebraic identities for the decomposition over the simple fractions, which are well known:

$$\frac{1}{(\lambda - a)^m} \frac{1}{(\lambda - b)^n} = \sum_{i=1}^m \frac{f_i(a, b, m, n)}{(\lambda - a)^i} + \sum_{j=1}^n \frac{g_j(a, b, m, n)}{(\lambda - b)^j}.$$

The explicit form of the functions f_i, g_j may be determined by many independent methods and it may be found in any book on this subject.

Consider some Lie algebra with its generators L_i . Let the finite ambiguity of the arbitrary parameters $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ be denoted by one symbol; and the generators of some infinite-dimensional algebra $L_i^{a,k}$ are determined by relations

$$L_i^{a,k} = (\lambda - a)^{-k} L_i.$$

The new generators are labeled with an integer index k and continuous-complex number a ; λ — the complex parameter. In the case of the negative k we introduce additional generators $L_i^s = \lambda^s L_i$. The most significant fact is that the variety of these generators is a closed infinite-dimensional Lie algebra. Indeed, we calculate the commutator

$$[L_i^{a,k}, L_j^{b,l}] = (\lambda - a)^{-k} (\lambda - b)^{-l} \sum_m C_{ij}^m L_m.$$

By virtue of the previous identity we represent the right-hand side of the last equality in the form of linear combination of the generators constructed above. Continuing the last equality, we have

$$\left(\sum_{k'=1}^k \frac{f_{k'}(a, b, k, l)}{(\lambda - a)^{k'}} + \sum_{l'=1}^l \frac{g_{k'}(a, b, k, l)}{(\lambda - b)^{l'}} \right) \sum_m C_{ij}^m L_m,$$

or saving the first and the last terms of the written equality we obtain

$$[L_i^{a,k}, L_j^{b,l}] = \sum_m C_{ij}^m \left(\sum_{k'=1}^k (f_{k'}(a, b, k, l) L_m^{a,k'}) + \sum_{l'=1}^l g_{k'}(a, b, k, l) L_m^{b,l'} \right).$$

It may be considered as the commutation relations of abstract infinite-dimensional algebra. We note that in the last sum there is only the finite number of the generators. It may be connected with the filtration properties of the constructed algebras. We will call them as the algebras of the rational functions.

The algebras of the inner symmetry of the integrable systems have a direct connection to the subject of this section.

3. THE STATEMENT OF THE PROBLEM AND ITS NONLINEAR SYMMETRIES

Here, the problem, which transitory was stayed in section 1, will be formulated more carefully and its symmetry properties will be described. With the help of these symmetries it will be possible to construct the whole hierarchy of solutions of the problem, if some solution of it is known.

The formulation of the problem is the following: It is needed to find such element g , taking values in some group, which depends on complex parameter λ and arguments $\xi: (\xi_1 \dots \xi_n)$, in such a way that constructed from g elements

$u = \frac{\partial g}{\partial \xi} g^{-1}$ from corresponding algebra are rational functions in complex λ plane.

The known under this consideration are the positions of the poles and their multiplicity for each of the elements u_i . In what follows we shall call the totality of these data a spectral structure of the element u_i . The unknown are the residues in all poles of the elements u_i , as the functions of ξ or, and this is the same, matrix elements of g as the functions of λ and ξ .

The problem possesses the remarkable symmetry properties, which we shall describe now.

Let g_0 be some solution. For definiteness let g_0 belong to the group $SL(k, c)$. This means that g_0 is $(k + 1, k + 1)$ matrix with determinant equal to 1. Let us introduce the matrix of the polynomials P , which has the following structure:

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_{n+1}^{11} & P_n^{12} & P_n^{13} & \dots & P_n^{1,k+1} \\ P_n^{21} & \tilde{P}_{n+1}^{22} & P_n^{23} & \dots & P_n^{2,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n^{k+1,1} & P_n^{k+1,2} & \dots & \dots & \tilde{P}_n^{k+1,k+1} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

where the $P_n^{\alpha, \beta}$ is the polynomial of degree n on λ ; and $\tilde{P}_{n+1}^{\alpha, \alpha}$ the polynomial of degree $n + 1$ with the coefficient 1 at λ^{n+1} . The equal degrees of the polynomials are chosen for simplicity and in future this limitation will be taken away as some other restriction which takes place in the definition of the polynomial matrix.

The coefficients of the entries of the polynomial matrix are defined from requirement that in $(k + 1)(n + 1)$ different points of the λ plane there is a linear dependence between the $(k + 1)$ column of the matrix Pg^0 . That means

$$\sum_{s=1}^{k+1} (P_n(\lambda_i) g_0(\lambda_i))_{\alpha, \beta} c_{\beta}(\lambda_i) = 0, \tag{3.2}$$

$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, (k + 1), \quad i = 1, 2, \dots, (k + 1)(n + 1),$

where $c_{\beta}(\lambda_i)$ are totalities of arbitrary c -number parameters. These conditions determine all the coefficient functions of the entries of the matrix P (3.2).

Indeed, let us take $\alpha = 1$ in the last equality. We have

$$\sum_{s=1}^{k+1} P_n^{1\beta}(\lambda_i) (g_0(\lambda_i) c(\lambda_i))_{\beta} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, (k + 1)(n + 1). \tag{3.3}$$

The last equality is the system of $(n + 1)(k + 1)$ linear algebraic equations, in which the $(n + 1)(k + 1)$ coefficient functions of the polynomials of the first line of the matrix P are unknowns. (Each polynomial has exactly $(n + 1)$ coefficients, the number of polynomials is equal to $(k + 1)$).

From the definition of the matrix P it follows that its determinant is the polynomial of the degree $(n + 1)(k + 1)$ with the coefficient 1 at the highest power of λ . From (3.2) we conclude that determinant P vanishes exactly in the $(n + 1)(k + 1)$ points of the λ plane. In these points, the columns of the matrix Pg_0 ($\text{Det } g_0 = 1$) are linearly dependent. So we obtain:

$$\text{Det } P = \prod_1^{(n+1)(k+1)} (\lambda - \lambda_i). \tag{3.4}$$

From definition of the entries of the inverse matrix g^{-1} via the ratio of the k -order minors to the determinant of matrix g , we have for entries of the matrix u :

$$u_{\alpha, \beta} = \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} g^{-1} \right)_{\alpha, \beta} = \frac{\text{Det } \|\beta \rightarrow \dot{\alpha}\|}{\text{Det } \|\dot{g}\|}, \tag{3.5}$$

where by symbol $\|\beta \rightarrow \dot{\alpha}\|$ we denote the matrix arising from the matrix g when its β line changes over the derivatives with respect to ξ from its α line.

Let us illustrate these formulae by the examples of the second order matrix.

$$u_{11} = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \dot{g}_{11} & \dot{g}_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}}{\text{Det } g}, \quad u_{21} = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \dot{g}_{21} & \dot{g}_{22} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}}{\text{Det } g}, \quad u_{12} = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \dot{g}_{11} & \dot{g}_{12} \end{pmatrix}}{\text{Det } g}, \tag{3.6}$$

where $\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \xi}$. To determine the analytical properties of entries of u , as functions of the parameter λ we use the general formulae to the case of $g = P g_0$.

For matrix \dot{g} we have:

$$\dot{g} = \dot{P} g_0 + P \dot{g}_0 = (P + P \dot{g}_0 g_0^{-1}) g_0.$$

For the entries of u we obtain:

$$u_{\alpha, \beta} = \frac{\text{Det } \|(P)_{\beta} \rightarrow (P + P \dot{g}_0)_{\alpha}\|}{\prod_1^{(k+1)(n+1)} (\lambda - \lambda_i)}. \tag{3.7}$$

The coefficients of $c_{\beta}(\lambda_i)$ in (3.2) are independent of ξ . Thus the columns of matrix $(P g_0)$ are linearly dependent. By this reason the numerator in the expression for matrix elements of u (the matrix u_0 has the rational dependence on λ) will contain the multiplier, which cancels with the denominator, and analytic properties of matrix u repeat the same of u_0 . The position and maximal multiplicities of the poles are the same for matrices u and u_0 .

Some separate treatment is needed to understand the behaviour u in the limit $\lambda \rightarrow \infty$. Let us at first consider this situation on the example of the second order matrix. The numerator of the element u_{11} is the determinant of the matrix:

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_{n+1}^{11} + P_{n+1}^{11} u_{11}^0 + P_n^{12} u_{21}^0 & \dot{P}_{n+1}^{12} + P_{n+1}^{11} u_{12}^0 + P_n^{12} u_{22}^0 \\ P_n^{21} & P_{n+1}^{22} \end{pmatrix}.$$

As $\lambda \rightarrow \infty$, the denominator of the matrix element u_{11} has the asymptotics $\lambda^{2(n+1)}$. The maximal power on λ in the numerator may be contained in the product $P_{n+1}^{11} P_{n+1}^{22} U_{11}^0$. This power is not more than $2(n+1) + s$, where by s we denote the maximal power of the matrix elements u_0 at infinity.

Let us make some resume. It has been shown that if there is some solution g_0 of the problem, then the element Pg_0 , which is constructed by the rules of this section, is also the solution of the same problem. So we obtain the entire hierarchy of the solutions (n is arbitrary). The problem possesses some non-linear symmetry. This symmetry is usually regarded as the Backlund transformation. The Backlund transformation plays the most important role in the theory of integrable systems. It will become clear from the next sections how these transformations are used for the construction of the exact solutions of the integrable system.

4. THE SPECTRAL EQUATION [8,11]

In this section the connection between the matrix equation (1.1) and the theory of the ordinary differential equations will be considered. Equation (1.1), being written in the form

$$\dot{g} = ug, \tag{4.1}$$

is the equation for unknown g , taking values in some group, under the assumption that element u , which takes values in corresponding algebra, is known. This equation is the system of equations on the parameters of the group element g (it is assumed that they are functions of an independent argument and differentiation is carried out with respect to it), and in this sense it is invariant with respect to the choice of any representation of an algebra (or group). On the other hand, we can consider it in some fixed representation when g and u are certain finite-dimensional matrices. We shall use the Dirac notation for the basis vectors $\| \alpha \rangle, \langle \beta \|$ (α, β extend their values from 1 to N , where N is the dimension of the representation). (4.1) makes it possible to calculate the serial derivatives of the element g :

$$\ddot{g} \equiv g^{[.2]} = (\dot{u} + u^2) g \equiv u_2 g, \quad g^{[.s]} = u_s g, \quad u_{s+1} = \dot{u}_s + u_s u_1, \quad u_0 \equiv 1.$$

Writing the matrix elements for the first N derivatives by using the basis vectors $\langle 1 \|$ and $\| \alpha \rangle$, we have:

$$\langle 1 \| g_{[.s]} \| \alpha \rangle = \langle 1 \| u_s \| 1 \rangle \langle 1 \| g \| \alpha \rangle + \sum_2^N \langle 1 \| u_s \| \beta \rangle \langle \beta \| g \| \alpha \rangle. \tag{4.2}$$

Eliminating the $N - 1$ matrix elements $\langle \beta || g || \alpha \rangle$ ($\beta = 2, \dots, (k + 1)$) from the last system of N equations, we derive an ordinary N -order differential equation for the function $\psi_\alpha \equiv \langle 1 || g || \alpha \rangle$:

$$\text{Det} \|\psi_\alpha^{[.s]} - \langle 1 || u_s || 1 \rangle \psi_\alpha, \langle 1 || u_s || 2 \rangle, \dots, \langle 1 || u_s || \beta \rangle, \dots\| = 0, \quad (4.3)$$

where the index s labels the lines and takes values from 1 to N ; the index β labels the columns $2, \dots, N$, except of the first one. Thus all the elements in the «first» line $\langle 1 || g || \alpha \rangle$ satisfy the same N -order differential equation (i.e., they are its fundamental solutions), whose coefficients are expressed explicitly through the entries of the matrix u and its derivatives up to the $(N - 1)$ th order. We shall call this equation a spectral equation. The matrix elements $\langle \beta || g || \alpha \rangle$ may be found from a linear system of $(N - 1)$ equations (4.2) ($1 \leq s \leq N$), and in this manner the matrix g is explicitly expressed through N fundamental solutions of the spectral equation, the matrix elements u and their derivatives up to the $(N - 1)$ th order inclusively. The coefficient functions of the spectral equation may be expressed through a set of its fundamental solutions by known relations. Let us rewrite the spectral equation in the form:

$$\psi^{[.M]} - \ln V \psi^{[.N-1]} + \sum_{k=0}^{N-2} (-1)^k a_k \psi^{[.k]} = 0. \quad (4.4)$$

We introduce the notation $\|\psi^{[.s_1]}, \psi^{[.s_2]}, \dots, \psi^{[.s_N]}\|$ for the determinant of the matrix whose first column consists of the derivatives of the s_1 order of fundamental solutions of the spectral equation, the second column from the derivatives of the s_2 order from fundamental solutions and so on. In this notation we have:

$$V = \|\psi, \psi^{[.1]}, \dots, \psi^{[.(N-1)]}\|, \\ Va_k = - \|\psi, \dots, \psi^{[.k-1]}, \psi^{[.N]}, \psi^{[.k+1]}, \dots, \psi^{[.(N-1)]}\|. \quad (4.5)$$

Comparing these expressions with the coefficients of the spectral equation we see, that to obtain them it is necessary to make the substitution $\psi_\alpha^{[.S]} \rightarrow \langle 1 || u_s || \alpha \rangle$ in the last formulae. This relation will become useful in constructing the matrix elements via the known set of the fundamental solutions of the spectral equation.

**5. CONSTRUCTION OF THE SOLUTIONS
IF THE ELEMENT g_0 BELONGS TO DIAGONAL
(COMMUTATIVE) SUBGROUP [8,10-13]**

The general construction of the third section will be used now so as to get the whole class of solutions of integrable systems for the algebra $SL(k, c)$. Let us pay attention to the case in which the background equation has a trivial solution if one assumes that element g takes values in commutative (Cartan in the semisimple case) subgroup

$$g = \exp \sum_{s=1}^r h_s \tau_s, \quad [h_i, h_j] = 0, \tag{5.1}$$

where r is the dimension of the commutative subgroup. From the background equation (in our case $\frac{\partial g}{\partial \xi} g^{-1} = \sum_{s=1}^r h_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \xi}$) it follows that the functions τ_s must

be rational functions of the argument λ , whose analytical properties are determined by the spectral structure of the elements u . It means, that the residues in the poles of τ and the coefficient functions of its Laurent expansion near the infinite point of the λ plane, must the functions of the single argument ξ_i . So

$$\tau_s = \sum_{i=1}^t \tau_s^i(\xi_i, \lambda) + \tau_s^0(\xi_i),$$

i.e., τ_s is the sum of the rational functions of one argument, the number of which coincides with the number of independent parameters ξ in the problem, and some function τ_s^0 which depends on all parameters except λ . We will call this function the null mode of τ and the whole function τ_s — the source function. Let us take this solution in the capacity g_0 of the general construction of section 3, and use the quadratic $(k + 1, k + 1)$ matrix of the polynomials P , in

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_{n_1+1}^{11} & \tilde{P}_n^{12} & \dots & \tilde{P}_{n_{k+1}}^{1,k+1} \\ P_{n_1}^{21} & P_{n+1}^{22} & \dots & P_{n_{k+1}}^{2,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n_1}^{k+1,1} & P_n^{k+1,2} & \dots & \tilde{P}_n^{k+1,k+1} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

containing as before the notation $P_n(\lambda)$ for arbitrary polynomial of the degree n and $\tilde{P}_n(\lambda)$ for the same polynomial with the coefficient 1 at the highest power of λ .

The difference as compared with the general scheme consists, at first, in distinguishing the degrees of the polynomials of the columns. Second, all polynomials of the first line have sign \tilde{P} . The last modification is necessary for determination of the null modes of the functions τ_s , as it will be later. It is assumed, as before, that there is a linear dependence between the columns of

the matrix $g = Pg_0 = P \exp \sum_{s=1}^r h_s \tau_s$ in $\sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1)$ different points of the λ plane,

$$\sum_{\beta=1}^{k+1} P_{n_{\beta+\delta_{\alpha,\beta}}}^{\alpha,\beta} (\lambda_i) c_\beta(\lambda_i) \exp(\tau_\beta - \tau_{\beta-1}) = 0,$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, (k+1), \quad i = 1, 2, \dots, \sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1), \quad (5.3)$$

where $c_\beta(\lambda_i)$ is the totality of arbitrary c -number parameters, $\tau_0 = \tau_{k+1} = 0$.

The last equality is the system of $\sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_\alpha + 1)$ linear algebraic equations,

where the coefficient functions of the polynomial matrix P and the null mode components of the τ functions are unknown. The number of equations equals the number of the unknown variables. Indeed, let us take $\alpha = 1$ in (5.3). The number of the coefficient functions of the first column of the polynomial

matrix P is equal to $\sum_{\alpha=1}^{k+1} n_\alpha + 1$ and the k null mode components of τ func-

tions are unknown. So the whole number of the unknown variables equals $\sum (n_\alpha + 1)$, i.e., exact number of equations. The same situation takes place for the other columns and consequently the system of equations (5.3) explicitly determines all parameters of the polynomial matrix and the null mode components of τ functions.

$\text{Det } P = \text{Det } (Pg_0)$ and from definition of the polynomial matrix P it follows that its determinant is a polynomial of the degree $\sum (n_\alpha + 1)$ with the coefficient 1 at the highest power of λ . From (5.3) we know that $\text{Det } P$ vanishes in the $\sum (n_\alpha + 1)$ points of the complex plane. Thus we get:

$$\text{Det } P = \sum_{\alpha=1}^{k+1} (n_{\alpha} + 1) \prod_{i=1} (\lambda - \lambda_i). \tag{5.4}$$

The general formulae of section 3, for the entries of the matrix u remain true after obvious substitution $(u_0)_{\alpha, \beta} = \delta_{\alpha, \beta} (\tau_{\beta} - \tau_{\beta-1})$

$$u_{\alpha, \beta} = \frac{\text{Det} \parallel P_{\beta} \rightarrow \dot{P}_{\alpha} + \dot{P}_{\alpha} (\tau_{\alpha} - \tau_{\alpha-1}) \parallel}{\prod (\lambda - \lambda_i)}. \tag{5.5}$$

From the last expression we get convinced, as in section 3, that all the peculiarities of the matrix elements of the matrix u , including the infinite point, are determined by the analytic properties of the source functions.

6. THE CASE OF THE ALGEBRA $SL(2,C)$ [10,13–15]

The results of sections 3 and 5 will be specified here for the case of an algebra $SL(2, C)$, which has many physical applications. In that case, it is possible to write all the expressions in the form convenient for practical calculations.

Let the polynomial matrix P (5.2) be rewritten in the form;

$$P = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{n_1+1} (\lambda - a_i) & \prod_{j=1}^{n_2} (\lambda - b_j) \\ P_{n_1} & P_{n_2+1} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

The polynomials of the first row $\tilde{P}_{n_1+1}, \tilde{P}_{n_2}$ are decomposed on the systems of their roots (a_i, b_j) . In our case $\tau_1 = -\tau_2 = \sum \tau_s (\xi_s, \lambda) + \tau_0 \equiv \tau$. The coefficient functions of the polynomials and null mode τ_0 are determined from the linear system of the algebraic equations

$$\begin{aligned} \exp 2\tau(\lambda_s) \exp 2\tau_0 P_{n_1+1}(\lambda_s) + c(\lambda_s) P_{n_2}(\lambda_s) &= 0, \\ s &= 1, 2, \dots, (n_1 + n_2 + 1), \\ \exp 2\tau(\lambda_s) \exp 2\tau_0 P_{n_1}(\lambda_s) + c(\lambda_s) P_{n_2+1}(\lambda_s) &= 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

The number of unknown quantities in the first system of equations is equal to $(n_1 + 1)$ symmetrical combinations, composed of the roots a_i (coefficient functions of the polynomials P_{n_1+1}), n_2 symmetrical combinations, composed of the roots b_j (the coefficient functions of the polynomials P_{n_1}), and null mode component in the form $\exp 2\tau_0$. This exactly equals the number of equations. The same situation takes place for the second system (6.2). As in (5.5) for $u_{12} \equiv u_+$, we obtain:

$$u_+ = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n_1+1} (\lambda - a_i) \prod_{j=1}^{n_2} (\lambda - b_j)}{\prod_{s=1}^{n_1+n_2+2} (\lambda - \lambda_s)} \right) \left(- \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\dot{b}_j}{\lambda - b_j} + \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{\dot{a}_i}{\lambda - a_i} + 2\dot{\tau} \right). \quad (6.3)$$

As it follows from the explicit expression for u_+ , the analytical dependence $\dot{\tau}$: the positions of poles, their multiplicity, behaviour at infinity are the same as for the u_+ as for $\dot{\tau}$. Rewriting (6.3) in an equivalent form we have

$$\left(- \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\dot{b}_j}{\lambda - b_j} + \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{\dot{a}_i}{\lambda - a_i} + 2\dot{\tau} \right) = \frac{\prod_{s=1}^{n_1+n_2+2} (\lambda - \lambda_s)}{\prod_{i=1}^{n_1+1} (\lambda - a_i) \prod_{j=1}^{n_2} (\lambda - b_j)} u_+. \quad (6.4)$$

The last equality is the definition of u_+ and the examples of the next section will show how it may be used. By decomposition of the right side of the last equation over the simple fraction we obtain the expressions for the derivatives

$$\dot{b}_j = -u_+(b_j) \frac{\pi(b_j)}{P_{n_1+1}(b_j) \hat{P}_{n_2}(b_j)}, \quad \dot{a}_i = -u_+(a_i) \frac{\pi(a_i)}{P_{n_1+1}(a_i) P_{n_2}(a_i)}. \quad (6.5)$$

In the equality the symbol \hat{P} over the imliex of the polynomial means this polynomial without multiplier, which goes to zero at the present significance

$$\text{of its argument, } \pi(\lambda) = \prod_{s=1}^{n_1+n_2+2} (\lambda - \lambda_s).$$

For u_0 we have the equivalent representations

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \pi^{-1}(\lambda) \text{Det} \begin{pmatrix} \dot{P}_{n_1+1} + \dot{\tau}P_{n_1+1} & \dot{P}_{n_2} - \dot{\tau}P_{n_2} \\ P_{n_1} & \tilde{P}_{n_2+1} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{P_{n_1+1}P_{n_2}}{\pi(\lambda)} \text{Det} \begin{pmatrix} -\sum \frac{\dot{a}_i}{\lambda - a_i} + \dot{\tau} & -\sum \frac{\dot{b}_j}{\lambda - b_j} - \dot{\tau} \\ \frac{P_{n_1}}{\tilde{P}_{n_1+1}} & \frac{\tilde{P}_{n_2+1}}{\tilde{P}_{n_2}} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{\tilde{P}_{n_1+1}\tilde{P}_{n_2}}{\pi(\lambda)} \text{Det} \begin{pmatrix} -\sum \frac{\dot{a}_i}{\lambda - a_i} + \dot{\tau} & \frac{\pi(\lambda)}{\tilde{P}_{n_1+1}\tilde{P}_{n_2}} u_+ \\ \frac{P_{n_1}}{\tilde{P}_{n_1+1}} & \frac{\pi(\lambda)}{\tilde{P}_{n_1+1}\tilde{P}_{n_2}} \end{pmatrix} = \\
 &= \text{Det} \begin{pmatrix} -\sum \frac{\dot{a}_i}{\lambda - a_i} + \dot{\tau} & u_+ \\ \frac{P_{n_1}}{\tilde{P}_{n_1+1}} & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

In the last transformation we have used definitions of $\pi(\lambda)$ and u_+ . Then

$$\pi(\lambda) = \text{Det} \begin{pmatrix} \tilde{P}_{n_1+1} & \tilde{P}_{n_2} \\ P_{n_1} & \tilde{P}_{n_2+1} \end{pmatrix} = \tilde{P}_{n_1+1}\tilde{P}_{n_2} \left(\frac{\tilde{P}_{n_2+1}}{\tilde{P}_{n_2}} - \frac{P_{n_1}}{\tilde{P}_{n_1+1}} \right) \tag{6.7}$$

or

$$\frac{\pi(\lambda)}{\tilde{P}_{n_1+1}\tilde{P}_{n_2}} = \lambda - \delta + \sum \frac{B_j}{(\lambda - b_j)} - \sum \frac{A_i}{(\lambda - a_i)}.$$

Comparing the residues at the poles $\lambda = a_i$ and $\lambda = b_j$ in both sides of the last equality, we obtain

$$B_j = \frac{\pi(b_j)}{\tilde{P}_{n_1+1}(b_j)\tilde{P}_{n_2}(b_j)} = \frac{\dot{b}_j}{u_+(b_j)}, \quad A_i = \frac{\pi(a_i)}{\tilde{P}_{n_1+1}(a_i)\tilde{P}_{n_2}(a_i)} = \frac{\dot{a}_i}{u_+(a_i)}.$$

Now we continue the interrupted calculation (6.7),

$$u_0 = \text{Det} \begin{pmatrix} -\sum \frac{\dot{a}_i}{\lambda - a_i} + \dot{\tau} & u_+ \\ -\sum \frac{\dot{a}_i}{(\lambda - a_i) u_+(a_i)} & 1 \end{pmatrix} = \dot{\tau} + \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{\dot{a}_i}{u_+(a_i)} \frac{u_+(\lambda) - u_+(a_i)}{\lambda - a_i}. \tag{6.8}$$

Let us finally calculate $u_-(\lambda) \equiv u_{12}$.

$$\begin{aligned} u_- &= \pi^{-1}(\lambda) \text{Det} \begin{pmatrix} \dot{g}_{21} & \dot{g}_{22} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \pi^{-1}(\lambda) g_{11} g_{12} \text{Det} \begin{pmatrix} \dot{g}_{21} & \dot{g}_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{pmatrix} = \\ &= \pi^{-1}(\lambda) g_{11} g_{12} \text{Det} \begin{pmatrix} \dot{g}_{21} & \left(\frac{g_{22} - g_{21}}{g_{12} - g_{11}} \right) + \frac{g_{22} \dot{g}_{12}}{g_{12} g_{12}} - \frac{g_{21} \dot{g}_{11}}{g_{11} g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{g_{22} - g_{21}}{g_{12} - g_{11}} \end{pmatrix} = \\ &= g_{11} g_{12} \text{Det} \begin{pmatrix} \dot{g}_{21} & \left(\frac{1}{g_{12} g_{11}} \right) + \frac{\dot{g}_{12}}{g_{12}^2 g_{11}} + \frac{g_{21}}{g_{11}^2 g_{12}} u_+(\lambda) \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{1}{g_{12} g_{11}} \end{pmatrix} = \\ &= \text{Det} \begin{pmatrix} \left(\frac{\dot{g}_{21}}{g_{11}} \right) + \dot{g}_{11} \frac{g_{21}}{g_{11}^2} & -\frac{\dot{g}_{11}}{g_{11}} + \frac{g_{21}}{g_{11}} u_+(\lambda) \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\dot{g}_{21}}{g_{11}} \right) + 2 \frac{\dot{g}_{11} g_{21}}{g_{11} g_{11}} - u_+(\lambda) \left(\frac{g_{21}}{g_{11}} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\dot{g}_{21}}{g_{11}} \right) + 2 \frac{1}{u_0} \frac{g_{21}}{g_{11}} + u_+(\lambda) \left(\frac{g_{21}}{g_{11}} \right)^2. \tag{6.9} \end{aligned}$$

In the latter transformations we use several times equalities (6.4), (6.7), which in the notations of the previous calculations have the form

$$\frac{g_{22}}{g_{12}} - \frac{g_{21}}{g_{11}} = \frac{\pi(\lambda)}{g_{11} g_{12}} \frac{\dot{g}_{12}}{g_{12}} - \frac{\dot{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\pi(\lambda)}{g_{11} g_{12}} u_+(\lambda).$$

We may pass to expression (6.9) for u_- in more short way if to profit by the spectral equation of section 4. The matrix elements $g_{11}, g_{12} = \psi$ satisfy this equation, and so we have

$$\begin{pmatrix} \ddot{\Psi} \\ u_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_- + \frac{u_0^2}{u_+} \end{pmatrix} \psi.$$

Substituting the expression for u_0 into this equation (6.8) we once more come to previous formula (6.9). We limit ourselves by the first inference only with the aim of preserving the uniformity of the calculation scheme. Using (6.4) and (6.8) we rewrite (6.9) in the form

$$\begin{aligned} u_- = & \left(\sum \frac{\dot{a}_i}{u_+(a_i)} \frac{1}{(a_i - \lambda)} \right) + \left(\sum \frac{\dot{a}_i}{u_+(a_i)} \frac{1}{(a_i - \lambda)} \right)^2 + \\ & + 2 \left(\sum \frac{\dot{a}_i}{u_+(a_i)} \frac{1}{(a_i - \lambda)} \right) \left(\dot{\tau} + \sum \frac{\dot{a}_i}{u_+(a_i)} \frac{u_+(a_i) - u_+(\lambda)}{(a_i - \lambda)} \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Now we go to further transformations of the last expression. As we know, the matrix element u_- has no singularities in the points $\lambda = a_i$. For this reason the residues in these poles must vanish. This results in the system of equations of the second order for functions a_i . We shall reduce these equations somewhat later. Note that the first integrals of them are contained in formulae (6.5), where the constants λ_i play the role of the constants of integration. The terms without singularities in (6.10) give rise to the final expression for u_-

$$\begin{aligned} u_- = & - 2 \sum \frac{\dot{a}_i}{u_+(a_i)} \frac{\dot{\tau}(a_i) - \dot{\tau}(\lambda)}{(a_i - \lambda)} + \\ & + \sum \sum \frac{\dot{a}_i}{u_+(a_i)} \frac{\dot{a}_j}{u_+(a_j)} \frac{1}{(a_i - \lambda)} \left(\frac{u_+(a_i) - u_+(\lambda)}{a_i - \lambda} - \frac{u_+(a_i) - u_+(a_j)}{a_i - a_j} \right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Formulae (6.4), (6.8) and (6.11) solve the problem which was imposed in the beginning of this section. The entries of the matrix u for every rational $\tau(\lambda)$ are expressed uniformly and give us the possibility of avoiding the hard operation of the division of the polynomial $\pi(\lambda)$ in general expressions of the previous section. Each of the entries of u_{\pm}, u_0 is expressed in the form of the derivatives of some combinations of symmetrical functions, which are composed from a_i , i.e., the coefficient functions of the polynomial \tilde{P}_{n+1} . All

these coefficient functions are the solutions of a linear system of algebraic equations (6.2). The form of the matrix u essentially depends on the form of background function $\tau(\lambda)$ and in each concrete case they may be obtained only in direct calculations with the help of the formulae of this section.

To conclude, we write down the second order equations for the functions a_i, b_j . These equations give a possibility of establishing numerous recurrence relations among the symmetrical combinations, which are composed of the «roots» a_i, b_j and their derivatives. These formulae will play an essential role in the next section when we pass to the concrete examples of the integrable systems and their solutions. The equations for functions a_i, b_j are as follows:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_i + 2\dot{\tau}(a_i)\dot{a}_i + 2 \sum_{i=k} \frac{\dot{a}_i \dot{a}_k}{a_k - a_i} &= \frac{\dot{u}_+(a_i)}{u_+(a_i)} \dot{a}_i, \\ \ddot{b}_j - 2\dot{\tau}(b_j)\dot{b}_j + 2 \sum_{j=k} \frac{\dot{b}_j \dot{b}_k}{b_k - b_j} &= \frac{\dot{u}_+(b_j)}{u_+(b_j)} \dot{b}_j. \end{aligned} \quad (6.12)$$

In the last equations $\dot{\tau}(a_i) \equiv \dot{\tau}(\lambda)$ and only after this $\lambda = a_i$ and so on. The systems of the ordinary differential equations (6.12) are of some special interest. They are exactly integrable and the result of their integration can be found from the solution of the algebraic system of linear equations (6.2), where $a_i (b_j)$ are the roots of the polynomial with known coefficients. The first integrals of the systems are known and are contained in formulae (6.5). Their independent integration can be performed on the background of the solutions of integrable systems. The example connected with sine-Gordon equation will be considered in one of the next sections.

7. CONCRETE EXAMPLES [8,10,13-16]

Now we will examine the most familiar systems and equations related to the algebra of rational functions of the second order matrices. The aim consists in demonstration of the general formulae of the previous section and their application to the concrete examples.

For simplicity, in the first examples we assume that our problem is invariant under transformation $\lambda \rightarrow -\lambda$ of the spectral parameter. This means that the second solution of the spectral equation is obtained from the first one by the same transformation, i.e.

$$\tau(-\lambda) = -\tau(\lambda), \quad N_1 = N_2 = N, \quad a_i = -b_i.$$

Having these equations in mind, we obtain from (6.7) and (6.11)

$$v_0 = \lambda^3 + \lambda^2 s_{-1} + \lambda s_0 + s_1 + s_0 s_{-1},$$

$$v_- = - \left(\lambda^2 s_{-1} + \lambda \left(\frac{s_{-1}^2}{2} + s_0 \right) + s_1 + s_0 s_{-1} \right).$$

The equations of the second order (6.12) in the case under consideration are the following

$$\ddot{a}_i + 2a_i \dot{a}_i + 2 \sum_{k=i} \frac{\dot{a}_i \dot{a}_k}{a_k - a_i} = 0.$$

Multiplying each equation by a_i^n and summarizing the result, after some calculations we come to the recurrence relation for the functions s_n . For the case $n > 0$ we have

$$\dot{s}_n + 2s_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} s_k s_{n-1-k} = 0. \tag{7.3}$$

From the same equations there follow the recurrence relations also for the case when $n < -1$. And on the boundary we have $2s_0 + \dot{s}_{-1} + s_{-1}^2 = 0$. The recurrence relations allow one to express all the functions s_n via function s_{-1} and its derivatives up to the $(n + 1)$ -order. For the matrix v we have

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 + \lambda^2 s_{-1} + \lambda s_0 + s_1 + s_0 s_{-1} & 2\lambda^3 + 2s_0 \\ - \left(\lambda^2 s_{-1} + \lambda \left(\frac{s_{-1}^2}{2} + s_0 \right) + s_1 + s_0 s_{-1} \right) & - (\lambda^3 + \lambda^2 s_{-1} + \lambda s_0 + s_1 + s_0 s_{-1}) \end{pmatrix}.$$

We know that the Cartan–Maurer identity or the condition of compatibility is satisfied. It gives us the equation for the function $Q = s_{-1}$:

$$Q_t - \left(\frac{Q_{xx}}{4} - \frac{Q^3}{2} \right)_x = 0, \quad (t \equiv \bar{z}, x \equiv z). \tag{7.4}$$

This is modified Kortevæg–de Vries equation. We know from our construction that its solution is given by the expression $Q = \frac{\partial \ln \prod a_i}{\partial z}$. To find it in the explicit form, it is necessary to solve the linear system of algebraic equations. In the case of the Kortevæg–de Vries this system is as follows

$$\exp 2(\lambda_s z + \lambda_s^3 \bar{z}) \prod (a_i - \lambda_s) + c(\lambda_s) \prod (a_i + \lambda_s) = 0.$$

An explicit solution of this system leads to the solution of the modified Kortevæg–de Vries equation in the form of the derivative of the logarithm of the ratio of two determinants of the n -th order.

In all cases, when τ is odd and has polynomial structure there arise the equations for only one function. These are (modified) Kortevæg–de Vries equations of the highest order.

The next example is connected with the simplest case of such equation. Let $\tau = \lambda z + (\nu\lambda^3 + \mu\lambda^5) \bar{z}$. The matrix u remains the same as above. For the calculation of the matrix ν we need some modifications. From (6.4) we conclude that $\nu_+ = A\lambda^5 + B\lambda^3 + C\lambda$, and the parameters A, B, C enter to the equality

$$2 \left(\nu\lambda^4 + \mu\lambda^2 + \sum \frac{a'_i}{a_i^2 - \lambda^2} \right) = (A\lambda^4 + B\lambda^2 + C\lambda) \left(1 + \sum \frac{\dot{a}_i}{a_i^2 - \lambda^2} \right),$$

which allows one to determine them. We get the entries of ν in the form:

$$\begin{aligned} \nu_+ &= 2\nu\lambda^5 + 2(\mu + \nu s_0) \lambda^3 + 2(\nu(s_2 + s_0^2) + \mu s_0) \lambda, \\ \nu_0 &= \nu\lambda^5 + \nu s_{-1}\lambda^4 + (\nu s_0 + \mu) \lambda^3 + (\nu(s_1 + s_0 s_{-1}) + \mu s_{-1}) \lambda^2 + \\ &+ (\nu(s_2 + s_0^2) + \mu s_0) \lambda + \mu(s_1 + s_0 s_{-1}) + \nu(s_3 + s_0 s_1 + s_{-1} s_2 + s_0^2 s_{-1}), \\ -\nu_- &= \nu s_{-1}\lambda^4 + \nu \left(s_0 + \frac{s_{-1}^2}{2} \right) \lambda^3 + \nu(s_1 + s_0 s_{-1}) + \mu s_1) \lambda^2 + \\ &+ \left(\nu \left(s_2 + s_1 s_{-1} + \frac{s_0^2}{2} + \frac{s_0 s_{-1}^2}{2} \right) + \mu \left(s_0 + \frac{s_{-1}^2}{2} \right) \right) \lambda + \\ &+ \nu(s_3 + s_2 s_{-1} + s_1 s_0 + s_0^2 s_{-1}) + \mu(s_1 + s_0 s_{-1}). \end{aligned}$$

We need the following recurrence relations:

$$s_0 = -\frac{\dot{s}_{-1} + s_{-1}^2}{2}, \quad s_1 = -\frac{\dot{s}_0}{2}, \quad s_2 = \frac{s_0^2 - \dot{s}_1}{2}, \quad s_3 = -\frac{\dot{s}_2}{2} + s_0 s_1.$$

Thus we conclude that all s_n may be expressed via function $Q \equiv s_{-1}$ and its derivatives. The condition of compatibility leads to equation

$$Q_t + Q_{xxxx} - 10Q^2 Q_{xxx} - 40Q Q_x Q_{xx} - 10(Q_x)^2 + 30Q^4 Q_x = 0, \tag{7.5}$$

which is the modified Kortevæg–de Vries equation of the fifth order (in our general formulae we put $\nu = 1, \mu = 0$).

When the τ takes null values at the point $\lambda = 0$, there is always the second possibility of constructing the background element g , and, as a consequence,

some other integrable system. It may be assumed that two fundamental solutions of the spectral equation coincide when $\lambda = 0$. This means that Wronskian of the spectral equation vanishes at this point and the background equation (6.4) changes to:

$$2\lambda \left(1 + \sum \frac{\dot{a}_i}{a_i^2 - \lambda^2} \right) = \lambda \frac{\prod (\lambda^2 - \lambda_i^2)}{\prod (\lambda^2 - a_i^2)} u_+(\lambda),$$

from that we conclude $u_+(\lambda) = 2$. From the equalities (6.8) and (6.11) we find $u_0 = \lambda$, $u_+ = -s_0$ and so the matrix u has the form:

$$u = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ -s_0 & -\lambda \end{pmatrix},$$

where as above $s_0 = \sum_{k=1}^n \dot{a}_k$. The system of the second order equations is the same as in preceding case. All the recurrence relations remain unchanged and we obtain the entries of v :

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 + \lambda s_0 - \frac{\dot{s}_0}{2} & 2\lambda^2 + 2s_0 \\ -\left(\lambda^2 s_0 + \lambda \frac{\dot{s}_0}{2} + s_0^2 - \frac{\ddot{s}_0}{4} \right) & -\left(\lambda^3 + \lambda s_0 - \frac{\dot{s}_0}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

The Cartan–Maurer identity leads to the equation for the function $U \equiv \frac{s_0}{2}$,

$$-U_t + U_{xxx} + 6UU_x = 0, \quad \left(t = \frac{\bar{z}}{4} \right). \tag{7.6}$$

This is the Kortevæg–de Vries equation in its original form.

If τ_0 is any odd polynomial on λ , we will obtain the higher order Kortevæg–de Vries equations. It is not difficult to write down the explicit form for these equations. We limit ourselves by the Kortevæg–de Vries equation of the fifth order.

Let $\tau = (\lambda z + \lambda^5) \bar{z}$.

The matrix u is the same as before. We obtain the entries of the matrix v by the same technique as in modified case:

$$u_+ = 2\lambda^4 + 2s_0\lambda^2 + 2(s_2 + s_0^2),$$

$$v_0 = \lambda^5 + s_0\lambda^3 + s_1\lambda^2 + (s_2 + s_0^2)\lambda + s_3 + s_0s_1,$$

$$-v_- = s_0\lambda^4 + s_1\lambda^3 + \left(s_2 + \frac{s_0^2}{2} \lambda^2 + (s_3 + s_1s_0) \lambda + \left(s_4 + s_2s_0 + \frac{s_1^2}{2} + \frac{s_0^3}{2} \right) \right).$$

The condition of the consistency gives us the Kortevæg–de Vries equation for the function $U \equiv -2s_0$:

$$-U_t + U_{xxxxx} - 10UU_{xxx} - 20U_x U_{xx} + 30U^2 U_x = 0, \quad \left(t = \frac{\bar{z}}{4} \right). \quad (7.7)$$

As it follows from our construction, the connection between solutions of the Kortevæg–de Vries equation and its modified version is given by the equality $U = \dot{Q} + Q^2$, as a consequence of the recurrence relations for s_0, s_{-1} (7.3) of this section.

7.2. $\tau = \lambda z + \lambda^{-1} \bar{z} - \text{sin-Gordon Equation.}$ Calculations of the matrix u do not change and we have as before:

$$u = \begin{pmatrix} \lambda + \dot{\rho} & 2\lambda \\ -\dot{\rho} & -(\lambda + \rho) \end{pmatrix},$$

where $\dot{\rho} = s_{-1}$. The general equation (6.4) yields the expression for v_+ :

$$2 \left(\lambda^{-1} + \lambda \sum \frac{a'_i}{a_i^2 - \lambda^2} \right) = \frac{\prod (\lambda^2 - \lambda_i^2)}{\prod (\lambda^2 - a_i^2)} v_+(\lambda).$$

It follows from the last equality that v_+ has a single pole at the point $\lambda = 0$,

with the residue equal to $2 \exp 2\rho$, where $\exp \rho = \prod \frac{a_i}{\lambda_i}$. Thus $v_+ = 2\lambda^{-1} \exp 2\rho$. With the help of equations (6.4), (6.8) we find $v_0 = \lambda^{-1} \exp 2\rho$, $v_- = -\lambda^{-1} \sinh \rho$. It must be noticed that in these calculations we use the relation $1 + s_2 = \exp(-\rho)$, which follows from equation for u_+ if its both sides are divided by 2λ before setting $\lambda = 0$.

$$v = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} \exp 2\rho & 2 \exp 2\rho \\ \sinh 2\rho & -\exp 2\rho \end{pmatrix}.$$

The Cartan–Maurer identity yields now the sin-Gordon equation for the function ρ :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \bar{z}} = 2 \sinh 2\rho. \quad (7.8)$$

As in the case of the Kortevæg–de Vries equation, the assumption that τ is an odd order polynomial on λ^{-1} results in the higher order sin-Gordon equations. This is related to the fact that all moments of negative degree $s_{-n} = \sum a_i^{-n} a_i$ are connected with each other by the system of the recurrence relations, which follow from the second order equations for the functions a_i .

7.3. $\tau = \lambda z + (\mu\lambda^{-1} + \lambda^3)\bar{z}$. This example is connected with the equation, which is in some sense «intermediate» between the sin-Gordon and Kortevge–de Vries equations.

Matrix u is the same as in the previous examples. The element v_+ is given by equation (6.4)

$$2\lambda \left(\lambda^2 + \mu\lambda^{-2} + \sum \frac{a'_i}{a_i^2 - \lambda^2} \right) = + \frac{\prod (\lambda^2 - \lambda_i^2)}{\prod (\lambda^2 - a_i^2)} v_+(\lambda).$$

We conclude that the maximal degree of v_+ at infinity is 3, it has the pole at the point $\lambda = 0$ and the residue in it equals $\mu \exp 2\rho$. Using the technique of the previous examples, we find other parameters without difficulties. Finally we have:

$$\begin{aligned} v_+ &= 2(\lambda^3 + s_0\lambda + \mu \exp 2\rho\lambda^{-1}), \\ v_0 &= \lambda^3 + s_{-1}\lambda^2 + s_0\lambda + s_1 + s_0s_{-1} + \mu \exp 2\rho\lambda^{-1}, \\ v_- &= - \left(s_1\lambda^2 + \left(\frac{s_{-1}^2}{2} + s_0 \right) \lambda + s_1 + s_0s_{-1} + \mu \sinh 2\rho\lambda^{-1} \right). \end{aligned}$$

It must be noticed that in this case any calculations are not necessary. It is sufficient to take the linear combinations of matrices v of Kortevge–de Vries and sin-Gordon equations. The Cartan–Maurer identity leads to the equation for the function ρ ,

$$4 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^4 \rho}{\partial z^4} - 6 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 + 8\mu \sinh 2\rho = 0. \quad (7.9)$$

7.4. $-\tau = z\lambda + \bar{z}\lambda_{-1} + f$ — **Lund–Pohlmeyer–Regge System**. This is the first example of the general case, in which τ has null mode. General equation (6.4) for u_+ now has the form

$$\left(- \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\dot{b}_j}{\lambda - b_j} + \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{\dot{a}_i}{\lambda - a_i} + 2\dot{f} + 2\lambda \right) = \left(\frac{\prod_{s=1}^{n_1+n_2+2} (\lambda - \lambda_s)}{\prod_{i=1}^{n_1+1} (\lambda - a_i) \prod_{j=1}^{n_2} (\lambda - b_j)} \right) u_+.$$

Comparing the highest powers of λ , we conclude $u_+ = 2$. Equations (6.7), (6.8) give $u_0 = \lambda + \dot{f}$, $u_- = - \sum \dot{a}_i = -s_0$. The equations of the second order in the case under consideration

$$\ddot{a}_i + 2(a_i + f) \dot{a}_i + 2 \sum_{k=i} \frac{\dot{a}_i \dot{a}_k}{a_k - a_i} = 0$$

give us the possibility of finding the recurrence relations for s_n . It will be sufficient for our purpose to multiply each equation by a_i^{-1} and sum the result. On this way we obtain

$$\dot{s}_{-1} + 2s_0 + 2f\dot{s}_{-1} + s_{-1}^2 = 0.$$

Equation (6.4)

$$\left(-\sum_{j=1}^{n_2} \frac{b'_j}{\lambda - b_j} + \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{\dot{a}_i}{\lambda - a_i} + 2f' + 2\lambda^{-1} \right) = \left(\frac{\prod_{s=1}^{n_1+n_2+2} (\lambda - \lambda_s)}{\prod_{i=1}^{n_1+1} (\lambda - a_i) \prod_{j=1}^{n_2} (\lambda - b_j)} \right) v_+$$

determines $v_+ = 2f'\lambda^{-1}$.

It follows directly from (6.7), (6.8) that

$$v_0 = f' + (1 - f's_{-1}) \lambda^{-1}, \quad v_- = \frac{1}{2} (2s_{-1} - f's_{-1}^2) \lambda^{-1}.$$

Let us now perform gauge transformation (see section 4) with $g_0 = \exp Hf$. The aim of such transformation is to take away the derivatives f from the entries of u_0, v_0 . After the introduction of new variables

$$x = \exp -2f, \quad y = s_{-1} \exp 2f$$

the matrices u, v acquire a simple and suitable form

$$u = \begin{pmatrix} \lambda & 2x \\ \frac{\dot{y} + y^2 x}{2} & -\lambda \end{pmatrix}, \quad v = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \frac{yx'}{2} & -x' \\ y + \frac{y^2 x'}{2} & -\left(1 + \frac{yx'}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

The consistency condition leads to the integrable system

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z \partial \bar{z}} - 4x - 2(xy) \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial \bar{z}} - 4y + 2(xy) \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (7.10)$$

If one executes the transformation, which is motivated by the form of the matrix v :

$$1 + \frac{yx'}{2} = \cos \alpha, \quad x' = -\sin \alpha \exp \theta,$$

i.e., passes from the pair of variables $(x, y) \rightarrow (\alpha, \theta)$ and after this to the pair (α, β) in accordance with the formulae

$$\theta_z = \frac{\beta_z \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \theta_{\bar{z}} = \frac{\beta_{\bar{z}}}{1 + \cos \alpha},$$

then in variables (α, β) the system under investigation takes the form

$$\alpha_{z\bar{z}} + 4 \sin \alpha - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^3} \beta_z \beta_{\bar{z}} = 0, \quad \beta_{z\bar{z}} + \frac{\alpha_z \beta_{\bar{z}} + \alpha_{\bar{z}} \beta_z}{\sin \alpha} = 0.$$

This is the Lund-Pohlmeyer-Regge system in its canonical form. It is connected with some geometrical construction.

7.5. $\tau = -(\lambda z + \lambda^2 \bar{z} + f)$ — Nonlinear Schrödinger Equation. The matrix u is evidently the same as in the last case. From general equation (6.4) we conclude (analysing its behaviour at infinity) that $v_+ = 2\lambda + c$. To find c , it is suitable to take the ratio of the two polynomials in the expression of v_+ from the definition of u_+ , i.e.,

$$\begin{aligned} & \left(-\sum \frac{b'_j}{\lambda - b_j} + \sum \frac{a'_i}{\lambda - a_i} + 2f' + 2\lambda^2 \right) = \\ & = \left(-\sum \frac{b_j}{\lambda - b_j} + \sum \frac{a_i}{\lambda - a_i} + 2f + 2\lambda \right) \left(\lambda + \frac{c}{2} \right). \end{aligned}$$

Comparing the highest degree of λ , we conclude that $c = -2f$. No difficulties arise in calculations of the entries of $v_0, v_-,$ and finally we have

$$v_+ = 2\lambda - 2f, \quad v_0 = \lambda^2 + f' + s_0, \quad v_- = -\lambda s_0 + \frac{\dot{s}_0}{2} + \dot{f} s_0.$$

Executing the gauge transformation, which removes derivatives f from the matrix elements $v_0, u_0,$ and introducing new variables

$$r = 2 \exp - (2f), \quad q = -s_0 \exp (2f)$$

we bring the matrix u, v to the form:

$$u = \begin{pmatrix} \lambda & r \\ q & -\lambda \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \frac{qr}{2} & \lambda r + \frac{\dot{r}}{2} \\ \lambda q - \frac{q}{2} & -\left(\lambda^2 - \frac{qr}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

The consistency condition gives us the integrable system

$$r' - \frac{\ddot{r}}{2} + (qr) r = 0, \quad q' - \frac{\ddot{q}}{2} - (qr) q = 0. \tag{7.11}$$

This is a nonlinear Schrödinger equation without derivatives. In the next section we will need an explicit form of its solutions.

Following the rules by Kramer, we get from the linear system of algebraic equations

$$\exp(-2f) = \frac{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1+1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2-1})}{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2})},$$

$$\sum a_i = \frac{(\exp 2\tau, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1-1}, \exp 2\tau\lambda^{n_1+1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2})}{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2})}.$$

By induction, one can get from the last equality the expression for $s_0 = \sum \dot{a}_i$,

$$s_0 = -2 \frac{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1-1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2+1})}{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2})} \exp - 2f.$$

By (a, b, \dots, c) in the previous expressions (as in section 4) we denote the determinant of the n -th order (n is the number of elements a, b, \dots, c), whose s -th line consists of the elements (a_s, b_s, \dots, c_s) . The index s numerates the points of λ plane in which the columns of the polynomial matrix are linearly dependent. At last, for the quantities of interest we obtain

$$r = 2 \frac{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1+1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2-1})}{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2})},$$

$$q = 2 \frac{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1-1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2+1})}{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2})}.$$

7.6. $\tau = \sum \frac{\xi_k}{\lambda - \theta_k}$ — the Principal Chiral Field Problem in n -Dimensions. The notations in the heading of this subsection should be understood as follows: ξ_k are the coordinates of the n -th order space; θ_k , totality of arbitrary c -number parameters ($\theta_k \neq \theta_s$, if $k = s$). In this case $\tau \rightarrow 0$ when $\lambda \rightarrow \infty$, and so

τ has no null mode. The matrix of the polynomials in this case must be taken in the form

$$P = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{n_1+1} & \tilde{P}_{n_2+1} \\ P_{n_1} & \tilde{Q}_{n_2+1} \end{pmatrix}.$$

Equation (6.4) can be written as

$$\left(- \sum_{j=1}^{n_2+1} \frac{b_j}{\lambda - b_j} + \sum_{i=1}^{n_1+1} \frac{a_i}{\lambda - a_i} + \frac{2}{\lambda - \theta_k} \right) = \left(\frac{\prod_{s=1}^{n_1+n_2+2} (\lambda - \lambda_s)}{\prod_{i=1}^{n_1+1} (\lambda - a_i) \prod_{j=1}^{n_2} (\lambda - b_j)} \right) u_+$$

$\left(f \equiv \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \right)$. We conclude from the last equality that $u_+^k = \frac{A_k}{\lambda - \theta_k}$. As $\lambda \rightarrow \infty$, one finds

$$A_k = \sum \dot{a}_i - \sum \dot{b}_j + 2 = \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\sum a_i - \sum b_j + 2 \sum \xi_r).$$

The calculation of u_0^k, u_-^k is carried out via the general scheme and results in the expressions

$$u_0^k = \frac{1 - s_0}{\lambda - \theta_k} = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\sum \xi_r - \sum a_i)}{\lambda - \theta_k},$$

$$u_-^k = \frac{2s_0 - s_0^2}{A_k(\lambda - \theta_k)} = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\theta_k s_0 - s_1}{A_k} \right)}{\lambda - \theta_k}.$$

The last equality needs some explanation. In the case under investigation, the system of second order equations for functions a_i is as follows:

$$\ddot{a}_i + 2 \frac{\dot{a}_i}{a_i - \theta_k} + 2 \sum_{i \neq k} \frac{\dot{a}_i \dot{a}_k}{a_k - a_i} = \frac{\dot{A}_k}{A_k} \dot{a}_i.$$

Multiplying each equation of the system by $(a_i - \theta_i)$ and summarizing the result we have:

$$\dot{s}_i - \frac{\dot{A}_k}{A_k} s_1 - \theta_k \left(\dot{s}_0 - \frac{\dot{A}_k}{A_k} s_0 \right) = s_0^2 - 2s_0$$

or

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{s_1 - \theta_k s_0}{A_k} \right) = \frac{s_0^2 - 2s_0}{A_k}.$$

This is just the same equality, which was used in the transformation of the expression for u_- .

We propose also another deduction, which permits one to obtain the expressions for u_+ , u_- , u_0 in some different form. From the direct definition of the matrix u for the element u_0 we have

$$u_0^k = \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} \dot{P}_{n_1+1} + \frac{P_{n_1+1}}{\lambda - \theta_k} & \dot{P}_{n_2+1} - \frac{P_{n_2+1}}{\lambda - \theta_k} \\ P_{n_1} & Q_{n_2+1} \end{pmatrix}}{\prod_{s=1}^{n_1+n_2+2} (\lambda - \lambda_s)} = \frac{1}{\lambda - \theta_k} \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} (\lambda - \theta_k) \dot{P}_{n_1+1} + P_{n_1+1} & (\lambda - \theta_k) \dot{P}_{n_2+1} - P_{n_2+1} \\ P_{n_1} & Q_{n_2+1} \end{pmatrix}}{\prod_{s=1}^{n_1+n_2+2} (\lambda - \lambda_s)}.$$

We know that in the last equality the numerator is divided by the denominator and so it is only necessary to find the coefficient at the $\lambda^{n_1+n_2+2}$ in the determinant of the numerator. It can be done easily. The result is

$$u_0 = \frac{1 + (\tilde{P}_{n_1+1}^{n_1}) \xi_k}{\lambda - \theta_k}.$$

The upper index at the symbol of the polynomial means the coefficient function at the corresponding degree of λ . $\tilde{P}_{n_1+1}^{n_1} = -\sum a_i$, and so we return to the expression which was obtained above. In the same manner:

$$u_+^k = \frac{(\tilde{P}_{n_2+1}^{n_2}) \xi_k - (\tilde{P}_{n_1+1}^{n_1}) \xi_k + 2}{\lambda - \theta_k}, \quad u_-^k = \frac{(P^{n_1}) \xi_k}{\lambda - \theta_k}.$$

If the first expression is the same as before, then in the second one the coefficient $P_{n_1}^{n_1}$ arises from the solution of linear system of the algebraic equations for the second line of the polynomial matrix. This is the explicit result of summation in the previous expression for u_-^k . Finally, we have $u^k = \frac{\partial F}{\partial \xi_k}$, and condition of the compatibility gives us the equation for the matrix-valued function F :

$$(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j^2} \right].$$

This is the system of equations of the principal chiral field problem in the n -dimensional space playing an important role in the general theory of the self-dual equations.

8. THE SOLUTION OF THE GENERAL EQUATION IN THE SOLVABLE CASE AND THE DISCRETE TRANSFORMATION [17,18]

Here we shall show that the equation for the element g has a regular exact solution not only if, as it is proposed, element g belongs to the commutative group, but also if it belongs to the solvable one (diagonal plus upper (lower) triangular matrices).

We shall consider this situation on example of the case $SL(2, R)$ group (algebra):

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = u^i g, \quad g = \exp x^+ \alpha \exp H \tau$$

or

$$u^i = \tau_{\xi_i} H + (\alpha_{\xi_i} - 2\alpha \tau_{\xi_i}) X^+,$$

where the element u^i belongs to the solvable algebra and must have deficient analytical properties as a function of the spectral parameter λ in the complex plane. The solution of this problem for τ is the same as in the diagonal case: $\tau(\lambda)$ — the rational function, the residues in each pole of which are the functions of only one variable ξ_i . For α we obtain:

$$\alpha = P(\lambda) \int_C d\lambda' \frac{\alpha(\lambda')}{\lambda - \lambda'} \exp 2\tau(\lambda),$$

where $\alpha(\lambda)$ is an arbitrary function of one variable; and C is some circle in the λ plane, on which the integral has the meaning; $P(\lambda)$ is some polynomial. Indeed:

$$u^i = \alpha_{\xi_i} - 2\alpha\tau_{\xi_i} = P(\lambda) \int d\lambda' \alpha(\lambda') \frac{\tau_{\xi_i}(\lambda) - \tau_{\xi_i}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} \exp 2\tau(\lambda').$$

As follows from the last expression u_+ has the same peculiarities in the finite λ plane as $\tau(\lambda)$. At infinity, if $\tau(\lambda) \sim \lambda^s$ and $P(\lambda) \sim \lambda^l$, then $u_+ \sim \lambda^{s+l-1}$. The situation for the solvable groups of higher dimensions is the same and it is not difficult to obtain a solution and explicit formulae in that case. Yet this is not so important for our purposes.

Now we take the solution for the solvable case as the element g_0 in our general construction of section 5. In this way we obtain the solutions, which depend on arbitrary function, the definite choice of which gives us the possibility to find solutions with definite boundary conditions, solve the reduction problem and so on.

Let us consider this question more carefully. We take the matrix of the polynomials in the usual form:

$$P = \begin{pmatrix} \tilde{P}_{n_1+1} & \tilde{P}_{n_2} \\ P_{n_1} & \tilde{P}_{n_2+1} \end{pmatrix}.$$

The condition of the linear dependence of the columns of the matrix $g = Pg_0$ has the form (we write it only for the first line):

$$\tilde{P}_{n_1+1} \exp \tau + c \exp -\tau [\tilde{P}_{n_2} + \alpha\tilde{P}_{n_1+1}] = 0$$

or

$$\tilde{P}_{n_1+1} (\exp 2\tau(\lambda)c^{-1}(\lambda) + P(\lambda) \int d\lambda' \frac{\alpha(\lambda')}{\lambda - \lambda'} \exp 2\tau(\lambda')) + \tilde{P}_{n_2} = 0.$$

We see from the last equation that there is only one difference as compared with the diagonal case ($\alpha = 0$). That is the formal change in all formulae:

$$\begin{aligned} \exp 2\tau(\lambda)c^{-1}(\lambda) &\rightarrow \exp 2\tilde{\tau}(\lambda) \equiv \\ &\equiv \exp 2\tau(\lambda)c^{-1}(\lambda) + P(\lambda) \int d\lambda' \frac{\alpha(\lambda')}{\lambda - \lambda'} \exp 2\tau(\lambda') \equiv \exp 2\tau'(\lambda). \end{aligned} \tag{8.1}$$

To have the correct behaviour of u^i at infinity one should demand $n_2 > n_1 + 1$. All formulae of the issues 6—7 remain correct under the substitution (8.1). We have the hierarchy solutions of the investigated system, which depend on the arbitrary function $\alpha(\lambda)$.

These solutions can be connected with the solutions of the diagonal case by some limiting process. We explain this on the example of the nonlinear

Schrödinger equation. From the results of the corresponding subsection we have the explicit form of its solutions:

$$r_{n_1, n_2} = \frac{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1+1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2-1})}{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2})},$$

$$q_{n_1, n_2} = \frac{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1-1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2+1})}{(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2})}. \tag{8.2}$$

Let n_1 have fixed values and $n_2 \rightarrow \infty$ (more exactly $n_2 = n_1 + 1 + N, N \rightarrow \infty$).

First of all we prove the following equality

$$\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda, \dots, \exp 2\tau\lambda^{n_1}; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2} = W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1+n_2}),$$

$$\sum_{i,j,\dots,k}^{n_1} \Phi(\lambda_i) \Phi(\lambda_j) \dots \Phi(\lambda_k) W^2(\lambda_i, \lambda_j, \dots, \lambda_k), \tag{8.3}$$

where $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ is a Vandermond determinant and $\Phi(\lambda)$ is determined by the expression:

$$\Phi(\lambda_i) = \exp 2\tau(\lambda_i) \prod_{k \neq i}^{n_1+n_2} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1}.$$

Let $n_1 = 1$. Expanding the determinant with respect to the elements of the first column, we obtain:

$$(\exp 2\tau; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2}) = \sum_{s=1}^{n_2+1} \exp 2\tau(\lambda_s) (-1)^{s+1} W'(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) =$$

$$= W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_2+1}) \sum_{s=1}^{n_2+1} \Phi(\lambda_s),$$

where W' is the Vandermond determinant, which is constructed from the n_2 values of λ_i except λ_s . Let $n_1 = 2$. Expanding the determinant with respect to the minors of the two first columns, we have:

$$(\exp 2\tau, \exp 2\tau\lambda; 1, \lambda, \dots, \lambda^{n_2}) = \sum_{s,k}^{n_2+2} (-1)^{s+k} \exp 2\tau(\lambda_s) \exp 2\tau(\lambda_k) (\lambda_s - \lambda_k),$$

$$W''(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_2+2}) \sum_{s,k}^{n_2+2} \Phi(\lambda_s) \Phi(\lambda_k) (\lambda_s - \lambda_k)^2.$$

In the case of arbitrary n_1 the expansion of the determinant over the minors of its n_1 first columns and some regrouping of the multipliers under the symbol of the summation prove the validity of the proposition (Refs.[8,44]).

Now let us return to expressions (8.2), use equality (8) and take the limit $n_2 \rightarrow \infty$. Then for the values

$$q_n = q_{n, \infty}, \quad r_n = r_{n, \infty}$$

we obtain

$$q_n = \frac{\Theta_{n+1}}{\Theta_n}, \quad r_n = \frac{\Theta_{n-1}}{\Theta_n}, \tag{8.4}$$

where

$$\Theta_n = \int \dots \int d\lambda_1 \dots d\lambda_n \exp 2\tau(\lambda_1) \dots \exp 2\tau(\lambda_n) W^2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

This is just the same result, as can be obtained if for g_0 one picks out the element of solvable group of the upper triangle matrix at the beginning of this section.

Now we shall draw some consequences from the last expressions for the solutions of the system of nonlinear Schrödinger equations, which after some evidently performed transformation, will be written in the form:

$$r' - \ddot{r} + 2(qr) r = 0, \quad q' - \ddot{q} - 2(qr) q = 0.$$

From (8.4) we see, that

$$r_{n+1} = \frac{\Theta_n}{\Theta_{n+1}} = \frac{1}{q_n}.$$

Let us assume, that the system under investigation is invariant under the substitution $R = \frac{1}{q}$, $Q = ?$. Then from the first equation we get $Q = q(qr - \ddot{inq})$. By direct check we get convinced that the second equation is also satisfied. So we conclude that our system is invariant under transformation:

$$R = \frac{1}{q}, \quad Q = q(qr - \ddot{inq})$$

which we will call the Discrete transformation for this system.

In the next sections we shall see that the integrable systems under consideration have their own Discrete transformation, solving which one can find the wide class of solutions of the integrable system, including soliton of type one.

So the independent construction of the Discrete transformations opens the new, more direct method for solving the integrable systems.

9. DISCRETE TRANSFORMATION FOR THE MAIN CHIRAL FIELD PROBLEM [19]

In this section by the example of the main chiral problem we propose the direct method for the construction of the Discrete transformation using only the form of equations of the integrable system.

As was mentioned in section 7, the system of the equations of the main chiral field problem in n -dimensional space has the form:

$$(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right], \quad (9.1)$$

where function f takes values in the arbitrary semisimple algebra, θ_i are numerical parameters.

First of all we describe in detail the calculations for the algebra A_1 which allows us to simplify calculations for the general case. Let $f = X^+ f_+ + H f_0 + X^- f_-$ (here $[X^+, X^-] = H$, $[H, X^\pm] = \pm 2X^\pm$) be some solution of (9.1) and $F = X^+ F_+ + H F_0 + X^- F_-$ be a solution of (9.1) which is connected with f via the Discrete transformation. The explicit form of this transformation will be given below.

Let $F_- = \frac{1}{f_+}$. This suggestion is not accidental, but comes from the explicit form of the soliton solutions to the main chiral field problem (section 7). From (9.1) we have the equation for F_- :

$$(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 F_-}{\partial x_i \partial x_j} = -2 \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial x_i} \frac{\partial F_-}{\partial x_j} - \frac{\partial F_0}{\partial x_j} \frac{\partial F_-}{\partial x_i} \right\}.$$

Substituting $F_- = \frac{1}{f_+}$ into the last equation and using the equation for f_+ ,

which follows from (9.1), we find the equation for $F^* = F_0 f_+$:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_i} = f_0 \frac{\partial f_+}{\partial x_i} - \frac{\partial f_0}{\partial x_i} f_+ + \theta_i \frac{\partial f_+}{\partial x_i}. \quad (9.2)$$

The second mixed derivatives calculated from (9.2) are equal due to (9.1). Thus for derivatives of F_0 we have:

$$\frac{\partial F_0}{\partial x_i} = (f_0 - F_0 + \theta_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f_+ - \frac{\partial f_0}{\partial x_i}. \quad (9.3)$$

Substituting (9.3) into null component of equation (9.1), we arrive at

$$\frac{\partial F_+}{\partial x_i} = (f_0 - F_0 + \theta_i)^2 \frac{\partial f_+}{\partial x_i} - 2f_+ (f_0 - F_0 + \theta_i) \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - f_+^2 \frac{\partial f_-}{\partial x_i}. \tag{9.4}$$

Finally, substituting (9.3) and (9.4) into the «positive» component of the system (9.1) for F , we conclude that the corresponding equations are satisfied identically. Let us rewrite relations (9.3) and (9.4) in the matrix form,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \exp [-X^+ (f_0 - F_0 + \theta_i) f_+] \exp [H \ln f_+] r \frac{\partial f}{\partial x_i} r^{-1} = \\ &= \exp [-H \ln f_+] \exp [X^+ (f_0 - F_0 + \theta_i) f_+], \end{aligned} \tag{9.5}$$

where r is an automorphism of the algebra A_1 with the properties $rX^\pm r^{-1} = -X^\mp$, $rHr^{-1} = -H$. In what follows rf_+r^{-1} will be also denoted as f for brevity. Define the element S with values in the $SL(2, R)$ group,

$$S = \exp [-X^+ (f_0 - F_0) f_+] \exp H \ln f_+.$$

By direct calculation one gets convinced that

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{1}{f_+} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, X^+ \right] - \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{f_+} X^+. \tag{9.6}$$

In terms of S equation (9) can be rewritten in the form

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = S \frac{\partial f}{\partial x_i} S^{-1} + \theta_i \frac{\partial S}{\partial x_i} S^{-1}. \tag{9.7}$$

Equations (9.6) and (9.7), being equivalent of equations (9.3) and (9.4), realize the Discrete transformation for system (9.1) in the form which can be generalized for the case of an arbitrary semisimple Lie algebra.

In the case of any semisimple Lie algebra for element f , which takes values in it, and obeys the system (9.1), the following statement takes place:

There exists such an element S taking the values in the gauge group that

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, X_M^+ \right] - \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{f_-} X_M^+. \tag{9.8}$$

Here X_M^+ is the element of the algebra corresponding to its maximal root divided by its norm, i.e., $[X_M^+, X^-] = H$, $[H, X^\pm] = \pm 2X^\pm$; f_- is the coefficient function in the decomposition of f at the element corresponding to the minimal root of the algebra. To prove the statement it is necessary to convince oneself

that the Cartan–Maurer identity is satisfied. After substitution (9.8) into this identity with the account of the definition of f_- and X_M^+ given above, we obtain the following expression which should vanish:

$$\left[\frac{\partial f_-}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f_-}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, X_M^+ \right] + (\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 f_-}{\partial x_i \partial x_j} X_M^+ - \left[\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}, X_M^+ \right], \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, X_M^+ \right] \right].$$

This fact becomes obvious if one commutes twice equation (9.1) with the element X_M^+ . Now define the element F taking values in the algebra by the following relations:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = S \frac{\partial f}{\partial x_i} S^{-1} + \theta_i \frac{\partial S}{\partial x_i} S^{-1}. \quad (9.9)$$

To prove the compatibility of (9.9), compare the second derivatives of F :

$$\begin{aligned} & S^{-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \right) S = \\ &= \left[S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right] - \left[S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] + \theta_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\theta_i S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_i} \right) = \\ &= \frac{1}{f_-} \left[\left\{ (\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \right\}, X_M^+ \right] = 0. \end{aligned}$$

In the same way, with the use of (9.9) we come to the following equality:

$$(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} - \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \right] = S \left\{ (\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \right\} S^{-1}.$$

It means that (9.8), (9.9) realize the Discrete transformation for the main chiral field problem in the case of an arbitrary semisimple Lie algebra.

As a direct consequence of (9.8), (9.9) one gets the Discrete transformation for two dimensional main chiral problem with moving poles,

$$(\xi - \bar{\xi}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} f = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} f, \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f \right]. \quad (9.10)$$

In this case relations (9.8), (9.9) realizing the Discrete transformation are changed as follows:

$$\begin{aligned}
 S^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} S &= \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} f, X_M^+ \right] - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{f_-} X_M^+, \\
 S^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} S &= \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f, X_M^+ \right] - \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{1}{f_-} X_M^+
 \end{aligned}
 \tag{9.11}$$

and discrete transformation by itself takes the form:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi} F &= S \left(\frac{\partial}{\partial \xi} f \right) S^{-1} - \xi \frac{\partial S}{\partial \xi} S^{-1}, \\
 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} F &= S \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f \right) S^{-1} - \bar{\xi} \frac{\partial S}{\partial \bar{\xi}} S^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{9.12}$$

10. THE LIST OF DISCRETE TRANSFORMATIONS FOR INTEGRABLE SYSTEMS [20]

Now we present the discrete transformation and its integration (in some manner) for the most known and applicable integrable systems. Here, discrete transformation plays the role of some nonlinear mapping which transfers any given solution into another one. However, we do not investigate the properties of the transformation, its geometrical interpretation (if any), etc. At present, we have not used the general method for construction of the transformation in question. General properties of discrete transformation together with the system of equations which determine it will be considered in one of the next sections. To prove the validity of all formulae of this section, one can make a direct check which uses only one operation — differentiation.

As a hint for obtaining discrete transformation it is possible to use a purely algebraic method for the construction of the soliton type solutions, which is given in previous sections (6—8).

The starting point of the construction below uses the following two facts. The integrable systems under consideration admit the transformation s :

$$\theta \Rightarrow \tilde{\theta} \equiv s\tilde{\theta} = F(\theta, \theta_i^{(1)} \dots \theta_i^n), \quad S^N \neq 1.$$

Here θ and $\tilde{\theta}$ are unknown functions (variables) satisfying the corresponding PDEs, $\theta_i^s \equiv \frac{\partial^s \theta}{\partial x_i^s}$.

There is an obvious solution of the nonlinear system in question which depends on a set of arbitrary functions. The soliton type solutions, reductions related with the discrete groups, solutions with definite boundary conditions are

defined by a special choice of arbitrary functions mentioned above. Let us note that θ_0 is a solution of a linear system of partial differential equations and it can be presented as a parametric integral on the plane of the complex variable λ .

In the case of integrable systems this circumstance is just the main reason for applying the methods of the theory of functions of complex variables, the technique of the Riemann problem, and, at last, the methods of the inverse scattering problem. The results of this section reduce the inverse scattering method to a simple technical rule.

Here we give a list of integrable systems together with discrete transformations for them and corresponding solutions.

10.1. Hirota Equation

$$\begin{aligned} \dot{v} + \alpha(v'''' - 6uvv') - i\beta(v'' - 2v^2u) + \gamma v' + i\delta v &= 0, \\ \dot{u} + \alpha(u'''' - 6uvu') + i\beta(u' - 2u^2v) + \gamma u' - i\delta u &= 0; \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad ' \equiv \frac{\partial}{\partial x}; \\ \tilde{v} \equiv sv = \frac{1}{u}, \quad \tilde{u} \equiv su = u(uv - (\ln u)''), \quad v_0 = 0, \\ \dot{u}_0 + \alpha u_0'''' + i\beta u_0'' + \gamma u_0' - i\delta u_0 &= 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

In this and in the other cases the main role will be played by the principal minors of the following matrix:

$$\begin{pmatrix} \phi^s & \phi^{s+1} & \phi^{s+2} & \dots \\ \phi^{s+1} & \phi^{s+2} & \phi^{s+3} & \dots \\ \phi^{s+2} & \phi^{s+3} & \phi^{s+4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

The principal minors of these matrices will be denoted by the symbol D_r^n . Here n is the rank of the matrix and r is the symbol of its element at the left upper corner. In the case of Hirota equation the solution of the discrete transformation acquires the form

$$v_n = (-1)^n \frac{D_0^{n-1}}{D_0^n}, \quad u_n = (-1)^{n+1} \frac{D_0^{n+1}}{D_0^{n+1}}. \quad (10.2)$$

The methods of the theory of functions of complex variables lead to the same expression, with D_0^n given by the nonlocal integral

$$D_0^n = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_n c(\lambda_1) \dots c(\lambda_n) W_n^2(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (10.3)$$

where $W_n(\lambda)$ is the Vandermonde determinant and $c(\lambda)$ is the integral in the representation for u_0 .

10.2. Nonlinear Schrödinger equations. *10.2.1. Nonlinear Schrödinger equation*

$$\begin{aligned} \dot{q} + q'' - 2rq^2 = 0, \quad \tilde{q} = \frac{1}{r}, \quad \tilde{r} = r(rq - (\ln r)''); \\ -\dot{r} + r'' - 2qr^2 = 0, \quad q_0 = 0, \quad \dot{r}_0 = r_0''. \end{aligned} \quad (10.4)$$

The solution of the discrete transformation is the same as in the last subsection.

10.2.2. Modified Nonlinear Schrödinger Equation

$$\begin{aligned} \dot{q} + q'' + 2(rq)q' = 0, \quad \tilde{q} = \frac{1}{r}, \quad \tilde{r} = r \left[(rq) + \left(\ln \frac{r}{r'} \right)' \right]; \\ -\dot{r} + r'' - 2(rq)r' = 0, \quad q_0 = 0, \quad \dot{r}_0 = r_0''. \end{aligned} \quad (10.5)$$

The solution of the discrete transformation is as follows

$$q_n = (-1)^n \frac{D_1^{n-1}}{D_0^n}, \quad r_n = (-1)^{n+1} \frac{D_0^{n+1}}{D_1^{n+1}}. \quad (10.6)$$

10.2.3. Nonlinear Schrödinger Equation with Derivative

$$\begin{aligned} \dot{q} + q'' - 2(rq^2)' = 0, \quad \tilde{q} = r, \quad \tilde{r} = q - \left(\frac{1}{r} \right)'; \\ -\dot{r} + r'' + 2(r^2q)' = 0, \quad q_0 = 0, \quad \dot{r}_0 = r_0''. \end{aligned} \quad (10.7)$$

The solution of the discrete transformation is as follows

$$\begin{aligned} q_{2n} = \frac{D_1^{n-1} D_1^n}{(D_0^n)^2}, \quad r_{2n} = \frac{D_0^{n-1} D_0^n}{(D_1^n)^2}, \\ q_{2n+1} = \frac{D_0^{n-1} D_0^n}{(D_0^n)^2}, \quad r_{2n+1} = \frac{D_1^{n-1} D_1^n}{(D_0^{n+1})^2}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

10.2.4. Nonlinear Schrödinger Equation with Cubic Nonlinearity

$$\dot{q} + q'' - 2q^2(r' + r^2q) = 0, \quad -\dot{r} + r'' + 2r^2(q' - q^2r) = 0.$$

Discrete transformation in this case is a bit more complicated:

$$\tilde{q} = (r' + qr^2)^{-1}, \quad \tilde{r} = -(r' + qr^2)' + r^{-1}(r' + qr^2)^2.$$

As in the last cases $q_0 = 0$, $-\dot{r}_0 + r_0'' = 0$ and the solution of discrete transformation under this boundary conditions has the form:

$$q_n = \frac{D_{n-1}^1}{D_n^1}, \quad r_n = \frac{D_{n+1}^0}{D_n^0}, \quad D_{-1}^\alpha = 0, \quad D_0^\alpha = 0.$$

10.3. One-Dimensional Heisenberg Ferromagnet in Classical Region (XXX-Model)

$$\begin{aligned} \dot{S} &= [S, S''], \quad S = (S_-, S_0, S_+), \quad S_0^2 + S_- S_+ = 1; \\ \tilde{S}_- &= S_- + 2 \left(\left(\frac{1}{\left(\frac{s_+}{1+s_0} \right)'} \right)' \right), \quad \tilde{S}_+ = S_+ + 2 \left(\left(\frac{1}{\left(\frac{s_-}{1-s_0} \right)'} \right)' \right), \\ \tilde{S}_0 + 1 &= -\tilde{S}_- \frac{S_+}{1+S_0}, \quad S_-^0 = 0, \quad S_0^0 = 1, \quad \dot{S}_+ = 2S_+''; \\ S_-^n &= \frac{D_2^{n-1} D_2^n}{(D_1^n)^2}, \quad S_0^n + 1 = 2 \frac{D_0^n D_2^n}{(D_1^n)^2}, \\ S_0^n - 1 &= 2 \frac{D_2^{n-1} D_0^{n+1}}{(D_1^n)^2}, \quad S_+^n = -4 \frac{D_0^{n+1} D_0^n}{(D_1^n)^2}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

10.4. XYZ-Model in Classical Region. The Landau-Lifshits Equation

$$\dot{(\mathbf{S})} = \mathbf{S} \times \mathbf{S}'' + \mathbf{S} \times (\mathbf{J}\mathbf{S}),$$

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3), \quad (\mathbf{S})^2 = 1, \quad \mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3).$$

Under the stereographic projection

$$u = \frac{S_1 + iS_2}{1 + S_3}, \quad v = \frac{S_1 - iS_2}{1 + S_3}$$

and change $-it \rightarrow t$ it becomes a system of the following equations:

$$\begin{aligned} \dot{u} + u'' - 2v \frac{(u')^2 + R(u)}{1 + uv} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} R(u) &= 0, \\ -\dot{v} + v'' - 2u \frac{(v')^2 + R(v)}{1 + uv} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} R(v) &= 0, \end{aligned} \quad (10.10)$$

where $R(x) = \alpha x^4 + \gamma x^2 + \alpha$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 4\alpha x^3 + 2\gamma x = 2 \frac{R + \alpha(x^4 - 1)}{x}$, $\alpha = \frac{J_2 - J_1}{4}$,

$\gamma = \frac{J_1 + J_2}{2} - J_3$. The system (10.10) is invariant under transformation $u \rightarrow U, v \rightarrow V$:

$$U = \frac{1}{v}, \quad \frac{1}{1 + VU} - \frac{1}{1 + uv} = \frac{v v'' - (v')^2 + \alpha(v^4 - 1)}{(v')^2 + R(v)}, \quad (10.11)$$

which is the discrete transformation for this system. The reader can find the corresponding solution in [40,41].

10.5. Lund–Pohlmeyer–Regge Model

$$\begin{aligned} \dot{y} - 4y + 2(xy) \dot{y} &= 0, & \tilde{x} &= (y' + xy^2)^{-1}, \\ \dot{x} - 4x - 2(xy) \dot{x} &= 0, & \tilde{y} &= -(y' + xy^2)' + \frac{(y' + xy^2)^2}{y}; \\ x_0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 4y_0. \end{aligned} \quad (10.12)$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \frac{D_1^{n-1}}{D_1^n}, \quad y_n = (-1)^n \frac{D_0^{n+1}}{D_0^n}. \quad (10.13)$$

It is interesting to note that discrete transformation of L–P–R system coincides with the nonlinear Schrödinger equation (10.2.4). And indeed these two systems belong to the same hierarchy [42].

10.6. The Main Chiral Field Problem in a Space of n Dimensions (the Case of Algebra A_1). The main chiral field problem in n -dimensional space is described by the following system of equations:

$$(\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right], \quad (10.14)$$

where the function f takes values in A_1 algebra, θ_i are numerical parameters.

The last system is invariant under transformation [10]

$$\begin{aligned} F_- = \frac{1}{f_+}, \quad \frac{\partial F_0}{\partial x_i} &= (f_0 - F_0 + \theta_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f_+ - \frac{\partial f_0}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial F_+}{\partial x_i} &= (f_0 - F_0 + \theta_i)^2 \frac{\partial f_+}{\partial x_i} - 2f_+ (f_0 - F_0 + \theta_i) \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - f_+^2 \frac{\partial f_-}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

The last equations can be rewritten in the matrix form

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \exp[-X^+(f_0 - F_0 + \theta_i)f_+] \exp[H \ln f_+] r \frac{\partial f}{\partial x_i} r^{-1} = \\ &= \exp[-H \ln f_+] \exp[X^+(f_0 - F_0 + \theta_i)f_+], \end{aligned} \quad (10.16)$$

where r is an automorphism of the algebra A_1 with the properties

$$rX^{\pm}r^{-1} = -X^{\mp}, \quad rHr^{-1} = -H;$$

$$f_{-}^0 = 0, \quad f_0^0 = \tau, \quad f_{+}^0 = \alpha^0,$$

where

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad (\theta_i - \theta_j) \frac{\partial^2 \alpha^0}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \left[\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha^0}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \alpha^0}{\partial x_i} \right]. \quad (10.17)$$

To solve the discrete transformation, let us consider the linear system of equations:

$$\theta_i \frac{\partial \alpha^l}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \alpha^l = \frac{\partial \alpha^{l+1}}{\partial x_i}. \quad (10.18)$$

From the last equations it follows that each function α^l is a solution of the equation for α^0 . We have an explicit expression for α^s :

$$\tau = \sum \phi_i(x_i), \quad \alpha^s = \int d\lambda (\lambda)^s c(\lambda) \exp \left(\sum \frac{\phi_i(x_i)}{\lambda - \theta_i} \right). \quad (10.19)$$

In terms of the α^l the discrete transformation has the solution

$$f_0^n = \frac{D_0^{n-1}}{D_0^n}, \quad f_0^n = \tau - \frac{D_0^n}{D_0^n}, \quad f_+^n = \frac{D_0^{n+1}}{D_0^n}. \quad (10.20)$$

The number of the indices of the last row in the determinant D_0^n is enlarged by one. The application of the results of this subsection to the problem of construction of multisoliton solutions of Sigma-chiral model can be found in [43].

10.7. The Main Chiral Field Problem for an Arbitrary Semisimple Lie Algebra. For a semisimple Lie algebra and for an element f being a solution of (12), the following statement takes place [10]: *There exists such an element S taking values in a gauge group that*

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{1}{f_{-}} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}, X_M^{+} \right] - \theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{f_{-}} X_M^{+}. \quad (10.21)$$

Here X_M^{+} is the element of the algebra corresponding to its maximal root divided by its norm, i.e.,

$$[X_M^{+}, X^{-}] = H, \quad [H, X^{\pm}] = \pm 2X^{\pm},$$

— f_{-} is the coefficient function in the decomposition of f of the element corresponding to the minimal root of the algebra. In this terms the discrete transformation reads as

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = S \frac{\partial f}{\partial x_i} S^{-1} + \theta_i \frac{\partial S}{\partial x_i} S^{-1}. \tag{10.22}$$

The system of equations in the case under consideration may be written in the form of equality between the group g and algebra f valued functions as

$$g_{x_i} g^{-1} = \theta_i f_{x_i}.$$

Discrete transformation for group valued function takes the form

$$G = Sg,$$

where the group element is determined by the above relations. The explicit expression of the group element g_n after n -th application of discrete transformation can be found in [7].

10.8. The System of Self-Dual Equations on Four-Dimensional Space (the Case of Algebra A_1). The self-dual equations for an element f with values in a semisimple Lie algebra have the following form:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \left[\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]. \tag{10.23}$$

The discrete transformation for this system is [44],[45]

$$\begin{aligned} F_- &= \frac{1}{f_-}, \\ \frac{\partial}{\partial y} F_0 &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln f_- - \frac{\partial}{\partial y} f_0 + (f_0 - F_0) \frac{\partial}{\partial y} \ln f_-, \\ \frac{\partial}{\partial z} F_0 &= -\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \ln f_- - \frac{\partial}{\partial z} f_0 + (f_0 - F_0) \frac{\partial}{\partial z} \ln f_-, \\ \frac{\partial}{\partial y} F_+ &= -f_- \left\{ (f_0 - F_0) \frac{\partial}{\partial y} (f_0 - F_0) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f_0 - F_0) \right\} - f_-^2 \frac{\partial}{\partial y} f_+, \\ \frac{\partial}{\partial z} F_+ &= -f_- \left\{ (f_0 - F_0) \frac{\partial}{\partial z} (f_0 - F_0) - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (f_0 - F_0) \right\} - f_-^2 \frac{\partial}{\partial z} f_+. \end{aligned} \tag{10.24}$$

The substitution of (12.20) into the density of the topological charge yields

$$Q_F = g_f + \square \square \ln f_-.$$

For the interaction of the discrete transformation we have the linear system of equations

$$\frac{\partial \alpha^l}{\partial \bar{y}} + 2 \frac{\partial \tau}{\partial z} \alpha^l = \frac{\partial \alpha^{l+1}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \alpha^l}{\partial z} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial y} \alpha = -\frac{\partial \alpha^{l+1}}{\partial y}. \tag{10.25}$$

In these terms the solution of the self-dual system is given by

$$f_-^n = \frac{D_0^{n-1}}{D_0^n}, \quad f_0^n = \frac{\dot{D}_0^n}{D_0^n} + \tau, \quad f_+^0 = \frac{D_0^{n+1}}{D_0^n}. \quad (10.26)$$

10.9. The System of Self-Dual Equations for an Arbitrary Semisimple Algebra. The following statement takes place [44,] [45]:

There exists such an element S taking the values in the gauge group, that

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial f}{\partial y}, X_M^+ \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f_-} \right) X_M^+,$$

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial f}{\partial z}, X_M^+ \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{f_-} \right) X_M^+. \quad (10.27)$$

Here X_M^+ is the element of the algebra corresponding to its maximal root, divided by its norm, i.e.,

$$[X_M^+, X^-] = H, \quad [H, X^\pm] = \pm 2X^\pm,$$

— f_- is the coefficient function in the decomposition of f on the element corresponding to the minimal root of the algebra. The discrete transformation has the form

$$\frac{\partial F}{\partial y} = S \frac{\partial f}{\partial y} S^{-1} + \frac{\partial S}{\partial z} S^{-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = S \frac{\partial f}{\partial z} S^{-1} - \frac{\partial S}{\partial y} S^{-1}. \quad (10.28)$$

10.10. The Main Chiral Field Problem with the Moving Poles. Many integrable systems arise from the equations (10.23) by imposing symmetry requirements on their solutions. The cylindrically symmetric condition in four dimensional space restricts the form of the function f ,

$$f = \frac{1}{y} f(\xi, \bar{\xi}), \quad \xi = \frac{z - \bar{z}}{2} + \left[\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + y\bar{y} \right]^{1/2}, \quad \bar{\xi} = -\xi^*.$$

$$(\xi - \bar{\xi}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} f = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} f, \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f \right]. \quad (10.29)$$

This is the equation for the main chiral field with moving poles.

The result of integration of equation (10.9) is given by

$$S = S(\xi, \bar{\xi}) \exp X_M^+ \frac{z}{f_-};$$

$$S^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} S = \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} f, X_M^+ \right] - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{f_-} X_M^+.$$

$$S^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} S = \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f, X_M^+ \right] - \bar{\xi} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{1}{f_-} X_M^+, \quad (10.30)$$

and the discrete transformation has the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} F &= S \left(\frac{\partial}{\partial \xi} f \right) S^{-1} - \xi \frac{\partial S}{\partial \xi} S^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} F &= S \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f \right) S^{-1} - \bar{\xi} \frac{\partial S}{\partial \bar{\xi}} S^{-1}. \end{aligned} \quad (10.31)$$

The relations (10.10), (10.31) describe the discrete transformation for the main chiral field with moving poles [20].

10.11. The Self-Dual Equation under Condition of Cylindric Symmetry in Three-Dimensional Space. The condition of cylindrical symmetry in three-dimensional space leads to the following form of the solution:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{y} f(\xi, \bar{\xi}), \quad \xi = \frac{z + \bar{z}}{2} + i(y\bar{y})^{1/2}, \quad \bar{\xi} = -\xi^*; \\ (\xi - \bar{\xi}) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (10.32)$$

The discrete transformation for equation (10.32) arising from (10.9), (10.28) has the form [20]

$$\begin{aligned} S^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} S &= \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} f, X_M^+ \right] + \left(\frac{1}{f_-} - \frac{\xi - \bar{\xi}}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{f_-} \right) X_M^+, \\ S^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} S &= \frac{1}{f_-} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f, X_M^+ \right] + \left(\frac{1}{f_-} - \frac{\xi - \bar{\xi}}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{1}{f_-} \right) X_M^+, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} F &= S \left(\frac{\partial}{\partial \xi} f \right) S^{-1} + \frac{\bar{\xi} - \xi}{2} \frac{\partial S}{\partial \xi} S^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} F &= S \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} f \right) S^{-1} - \frac{\bar{\xi} - \xi}{2} \frac{\partial S}{\partial \bar{\xi}} S^{-1}. \end{aligned}$$

The system (10.32) in the case of algebra A_1 arises in the integration problem of the general relativity with two commuting Killing vectors [13].

10.12. The Cylindric Symmetric Solution Invariant under Two Orthogonal Four-Dimensional Axes

$$x_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right]. \quad (10.33)$$

The explicit form of the discrete transformation in the case of the algebra A_1 is as follows [20]

$$\begin{aligned}
 F_- &= \frac{1}{f_-}, \\
 \frac{\partial F_0}{\partial x_1} &= -1 + (f_0 - F_0) \frac{\partial \ln f_-}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \ln f_-}{\partial x_2} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \\
 \frac{\partial F_0}{\partial x_2} &= 1 + (f_0 - F_0) \frac{\partial \ln f_-}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial \ln f_-}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_2}, \\
 \frac{\partial F_+}{\partial x_1} &= f_- \left[(f_0 - F_0) \frac{\partial (f_0 - F_0)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial (f_0 - F_0)}{\partial x_2} \right] - f_-^2 \frac{\partial f_+}{\partial x_1}, \\
 \frac{\partial F_+}{\partial x_2} &= f_- \left[(f_0 - F_0) \frac{\partial (f_0 - F_0)}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial (f_0 - F_0)}{\partial x_1} \right] - f_-^2 \frac{\partial f_+}{\partial x_2}. \quad (10.34)
 \end{aligned}$$

The linear system of equations has the form

$$\begin{aligned}
 x_1 \frac{\partial \alpha'}{\partial x_1} - \alpha' + 2\alpha' \frac{\partial \tau'}{\partial x_2} &= \frac{\partial \alpha'^{+1}}{\partial x_2}, \\
 x_2 \frac{\partial \alpha'}{\partial x_2} - \alpha' - 2\alpha' \frac{\partial \tau'}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \alpha'^{+1}}{\partial x_1}, \\
 \tau'^{+1} &= \tau' + \frac{x_1 - x_2}{2}. \quad (10.35)
 \end{aligned}$$

The solution of the discrete transformation coincides with the self-dual case (see (10.25) and (10.26)).

10.13. (2 + 1)-Matrix Davey–Stewartson System. The matrix Davey–Stewartson equation is the system of two equations for two unknown $s \times s$ -matrix functions u, v :

$$\begin{aligned}
 u_t + au_{xx} + bu_{yy} - 2au \int dy(vu)_x - 2b \int dx(uv)_y &= 0, \\
 -v_t + av_{xx} + bv_{yy} - 2a \int dy(vu)_x - 2bv \int dx(uv)_y &= 0, \quad (10.36)
 \end{aligned}$$

where a, b are arbitrary numerical parameters; x, y are the coordinates of two-dimensional space. As $s = 1$, the order of multipliers is not essential, and (1.1) is the usual Davey–Stewartson equation in its original form [15].

By direct but not very simple computations one finds that the system (10.36) is invariant under the following change of unknown functions,

$$\tilde{u} = \frac{1}{v}, \quad \tilde{v} = [vu - (v_x v^{-1})_y] v \equiv v[uv - (v^{-1} v_x)_x]. \quad (10.37)$$

The substitution (10.37) is the discrete transformation under which all equations of matrix Davey–Stewartson hierarchy are invariant [46]. In the case of one-dimensional space this substitution was mentioned in [47].

The substitution (10.37) may be also rewritten in the form of infinite chain

$$((v_n)_x v_n^{-1})_y = v_n v_{n-1}^{-1} - v_{n+1} v_n^{-1}, \quad \left(u_{n+1} = \frac{1}{v_n} \right), \quad (10.38)$$

where (v_{n-1}, u_{n-1}) means the result of the n -th application of (10.37) to some given matrix functions (v_0, u_0) .

Under the boundary condition $v_{-1}^{-1} = v_N = 0$ (the so-called matrix Toda chain with fixed ends) the general solution of (10.38) takes the form [16]

$$v_0 = \sum_{t=0}^N \phi_t(x) \bar{\phi}_t(y),$$

where $\phi_t(x), \bar{\phi}_t(y)$ are arbitrary $s \times s$ matrix functions of the corresponding arguments.

In scalar case $s = 1$ the general solution of the Toda chain with fixed ends was found in [48] for all series of semisimple algebras except of E_7, E_8 . In [49] this result was reproduced in terms of invariant root technique applicable to all semisimple series.

11. THE THEORY OF INTEGRABLE SYSTEMS FROM THE POINT OF VIEW OF REPRESENTATION THEORY OF THE DISCRETE GROUP OF INTEGRABLE MAPPINGS [50–53]

Here we want to consider the results of the previous section from some more general point of view. We will start from the short historical discussion. Our aim is to find place for including discrete transformation in usual, more traditional ways of investigation of the theory of integrable systems.

Liouville has introduced the term «integrability» for dynamical systems. He proved that if a dynamical system possesses a sufficiently large number of integrals of motion in involution then such a system is integrable. But neither general methods for the construction of a solution in explicit form nor any mention of the symmetry of the system under consideration are contained within Liouville’s criterion.

In the case of Lie symmetries the theorem by E.Noether fills this gap. It teaches us that the number of conservation laws coincides with the dimensions of the Lie group and gives the possibility (in the case of Lagrange theory) of obtaining explicit expressions for the integrals of motion.

Roughly speaking the modern theory of integrable systems up to now has maintained the Liouville definition (the integrable system must contain an infinite number of integrals of motion in involution) and many people have found various consequences which follow from this fact.

The aim of this section is to show in a deductive way that the theory of integrable systems may be understood as a theory of the linear representation of the discrete group of integrable mappings. This does not mean that we can propose at this moment a theory of this connection which would be complete from mathematical point of view. We only demonstrate that all known results of the theory of integrable systems do not contradict this hypothesis.

11.1. Discrete Transformation of Integrable Systems. Let us consider a local invertible transformation described by the substitution

$$\tilde{u} = \phi(u, u', u'', \dots, u^{(r)}) \equiv \phi(u), \quad (11.1)$$

where u is an s -dimensional vector function and u', u'', \dots are its derivatives of the corresponding order with respect to «space» coordinates (the dimension of the space may be arbitrary).

The property of invertibility means that equality (11.1) may be resolved and «odd» function u may be locally expressed in terms of new functions \tilde{u} and their derivatives. The connection (11.1) with integrable systems is illustrated by examples of the previous section.

The Frechet derivative $\phi'(u)$ corresponding to the substitution (11.1) is the $s \times s$ matrix operator defined as

$$\phi'(u) = \phi_u + \phi_{u'} D + \phi_{u''} D^2 + \dots \quad (11.2)$$

where D^m is an operator of m -th differentiation with respect to corresponding space coordinates $u, u', u'' \dots d$. More detailed information about this construction can be found in [47], [50].

Let us consider the equation which appeared first in another notation in [51]

$$F_n(\phi(u)) = \phi'(u) F_n(u), \quad (11.3)$$

where $F_n(u)$ is an unknown s -component vector function, each component of which depends on u and its derivatives up to a maximal order n .

For each substitution the equation (11.3) possesses one obvious trivial solution $F_n(u) = u'$. To prove this it is sufficient to differentiate the equation (11.1) once with respect to one of its space coordinates.

If the equation (11.2) possesses some other solution (for a given $\phi(u)$) except of trivial one, then we will call such a substitution an integrable substitution or mapping.

We specially emphasize that equation (11.3) contains two unknown functions $\phi(u)$ and $F_n(u)$, and it possesses nontrivial solution for the function $F_n(u)$ only for a narrow class of integrable substitutions.

Each nontrivial solution of (11.2) generates the equation (system) of evolution type

$$u_t = F_n(u), \tag{11.4}$$

which is obviously invariant under the substitution $u \rightarrow \phi(u)$. (In this connection let us emphasize that the equation $u_t = u'$ is indeed invariant under an arbitrary substitution).

Let us now compare the equation (11.3) with the definition of a linear representation $T(g)$ of some group (for definiteness one can keep in mind a Lie group)

$$\Phi(gx) = T(g) \Phi(x), \tag{11.5}$$

where g is the group element, $T(g)$ is the group operator for some representation, $\Phi(x)$ is the basis of the corresponding representation space.

The obvious correspondence occurs whenever the definition relationship (11.5) is compared with equation (11.3):

$$\Phi(x) \rightarrow F_n(u), \quad T(g) \rightarrow \phi'(u).$$

Using this correspondence, let us interpret equation (11.3) on the group theoretical level. We have some discrete group of transformations, the group element of which is exactly the substitution $u \rightarrow \phi(u)$; $\phi'(u)$ (the Frechet derivative) is a linear representation of the group element; and finally $F_n(u)$ (the equations of the hierarchy) is a basis in representation space. If this representation is irreducible (it is necessary to verify that by independent methods), then all possible bases of this representation (solutions of equation (11.3) with different n) must be connected by some operator $W_{n, n'}$

$$F_n(u) = W_{n, n'} F_{n'} \tag{11.6}$$

Certainly the same situation occurs in the theory of (1 + 1) integrable systems. All equations of the same hierarchy are connected by the «raising» operators constructed from the skew symmetrical (nonlocal) Hamiltonian operators $J_n = -J_n^T$

$$W_{n, n'} = J_n J_{n'}^{-1} \tag{11.7}$$

11.2. Equations for «Raising» and Hamiltonian Operators. Two equations will be important for further considerations:

$$\phi'(u) W(u) \phi'(u)^{-1} = W(\phi(u)), \quad \phi'(u) J(u) \phi'(u)^T = J(\phi(u)), \quad (11.8)$$

where $\phi'(u)^T = \phi_u^T - D\phi_{u'}^T + D^2\phi_{u''}^T - \dots$, and $W(u), J(u)$ are unknown $s \times s$ matrix operators, with entries in the form of polynomials of some finite order in operator of differentiation D (of both positive and negative degrees).

From (11.8) and (11.3) it follows immediately that if $F_n(u)$ is some solution of the principal equation (11.3) then $W^p(u) F_n(u)$ (p is an arbitrary natural number) will be another solution of the same equation.

The solution of the second equation (11.8) under the additional restriction of skew symmetry may be connected (interpreted) as a Poisson structure which is invariant under the transformation of discrete symmetry. Skew symmetrical operators $J(u)$ are known as Hamiltonian ones. Two different solutions of the second equation (11.8) (if it is possible to find them), say $J_1(u)$ and $J_2(u)$ in the combination $J_1 J_2^{-1}$ obey the first equation (11.8). The operator $J_1 J_2^{-1} J_1(u)$ is again the solution of the second equation (11.8) and so on. This is the way in which Hamiltonian operators usually arise in the theory of integrable systems. It is necessary to find two different Poisson structures from some independent assumptions. All other objects may be constructed by the above scheme.

In the problem of the construction of Hamiltonian operators for integrable systems, the equations (11.8) were used first in [52].

11.3. Conditions under Which the Evolution Equation May Be Rewritten in Hamiltonian Form. Let us consider some scalar function $H(u)$ locally dependent on u and its derivatives and obeying the equality (equation)

$$H(\phi(u)) - H(u) = \text{Ker} \in \frac{\delta}{\partial u}. \quad (11.9)$$

In other words, the difference between the function after one application of the discrete transformation and its original value is a divergence with respect to space coordinates. Let us compare the variational derivatives $H(u)$ before and after the discrete transformation. We have

$$\frac{\delta H(u)}{\delta u} = \phi'^T(u) \frac{\delta H(\phi(u))}{\delta \phi(u)}. \quad (11.10)$$

The last equality is a direct corollary of (11.9) and the obvious fact that the variational derivative of divergence vanishes identically.

Let $J(u)$ be any solution of (11.8). Consequently we have

$$\phi'(u) J(u) \frac{\delta H(u)}{\delta u} = \phi'(u) J(u) \phi'^T(u) \frac{\delta H(\phi(u))}{\delta \phi(u)} = J(\phi(u)) \frac{\delta H(\phi(u))}{\delta \phi(u)}. \quad (11.11)$$

So we see that function $F(u) = J(u) \frac{\delta H(u)}{\delta u}$ is just a solution of our main equation (11.3) and corresponding evolution equation (11.4) takes a Hamiltonian form. Compare with [5].

11.4. Conservation Laws. All known integrable substitutions in one-dimensional space ((1 + 1) integrable systems) obey all conditions of the previous section. This means that it is possible to find an infinite number of Hamiltonian functions $H_n(u)$ and an infinite number of Hamiltonian operators $J_n(u)$ in explicit form. And so in the (1 + 1) dimensional case all integrable systems of evolutionary type (11.4) may be written in Hamiltonian form. As a consequence, it is possible to determine the Poisson brackets between two local functions by the rule

$$\{N(u), M(u)\} \equiv \left(\frac{\delta N(u)}{\delta u} J(u) \frac{\delta M(u)}{\delta u} \right) \tag{11.12}$$

and to prove with the use of some technical manipulations that all conserved integrals are in involution

$$\{H_n(u), H_{n'}(u)\} = Ker \in \frac{\delta}{\delta u} . \tag{11.13}$$

This result is interpreted usually as fulfilling of the Liouville criterion of integrability.

In the case of (1 + 2)-dimensional integrable systems it is impossible to write down the systems investigated in Hamiltonian form (except for some trivial cases). But whenever in the (1 + 2)-dimensional case the functions obeying equation (11.9) can be found, they are in general nonlocal, the number of them is infinite and they are invariant under time evolution in the sense:

$$(H_n^0(u))_t = \sum_s (H_n^s(u))_x,$$

where x_s are independent space coordinates of the problem.

It is true that we can present infinite number of concrete examples of validity of the last propositions but also it is true that at this moment we have no idea how to prove it on group-theoretical level in general case.

11.5. The General Hypothesis. As a conclusion of the previous consideration we are able to formulate the following general hypothesis about the structure of a future theory of integrable systems:

The problem of integrable systems is equivalent to the theory of representations of the discrete group of integrable mappings.

Indeed if from independent considerations it turns out to be possible to obtain a solution of our main equation (11.3), then we automatically produce an integrable equation of evolution type (11.4) and each space of irreducible representation of (11.5) will give us the exact solution of it. We are well aware that

the form of our main equation (11.3) is not very suitable for obtaining direct conclusions from it. In this connection we can notice by analogy with the distance between the original definition of semisimple algebras (in the sense of absence of nontrivial ideals) and the Cartan classification into A, B, C, D, E, F, G and E , it may be of comparable magnitude to the problem of declassification of the solutions of our main equation.

We hope that something of this kind will be achieved in the case of representation theory of discrete groups of integrable mappings.

11.6. Conclusion. The main result of the present section is contained in the new equation (11.3). Its solution will provide the answers to two most important questions of the theory of integrable systems. The first question can be regarded as the «quantization» of substitutions, i.e., substitutions the choice of which would be integrable in the above sense among the infinite number of invertible ones. Except for the obvious remark that this will depend essentially upon the dimensions of the spaces involved, the author knows almost nothing about how to solve this problem and concludes that it is not going to be resolved quickly.

The second, more tractable problem from our point of view is the question of the solution of the main equation (11.3) for a given (ad hoc) integrable substitution $\phi(u)$ (in this connection see the next section). It is possible to suppose that the solution to this problem is closely connected with the theory of representations of the discrete group of integrable mappings. From known examples of integrable systems it follows that the discrete group of integrable mapping possesses a rich storage of different irreducible representations. A definite class of exact solutions of corresponding integrable system may be connected with each of these representations. In some sense the soliton-like solutions (which will be discussed below) correspond to finite-dimensional representations of such groups.

12. TWO-DIMENSIONAL INTEGRABLE MAPPINGS AND EXPLICIT FORM OF EQUATIONS OF $(1 + 2)$ -DIMENSIONAL HIERARCHIES OF INTEGRABLE SYSTEMS [54–57]

Here we shall complete the second part of the general programme of the last section: we shall find the explicit form of solution of our main equation (11.3) for an ad hoc given integrable mapping. The equations of $(1 + 2)$ integrable systems belonging to Darboux–Toda, Heisenberg and Lotka–Volterra hierarchies which are invariant with respect to discrete transformations of corresponding integrable mappings will be presented in an explicit form.

12.1. Two-Dimensional Integrable Mappings. Below we will discuss three concrete examples of two-dimensional integrable mappings which can be considered by similar methods.

12.1.1. Darboux-Toda Substitutions. The explicit form of the direct and inverse D - T integrable substitution is as follows,

$$\begin{aligned} \overleftarrow{u} &= \frac{1}{v}, & \overleftarrow{v} &= v(uv - (\ln v)_{xy}), \\ \overrightarrow{v} &= \frac{1}{u}, & \overrightarrow{u} &= u(vu - (\ln u)_{xy}). \end{aligned} \tag{12.1}$$

Let \overleftarrow{f}^s and \overrightarrow{f}^s be the results of the s -th application of direct and inverse transformations to the function $f(u, v)$, with the following agreement $\overleftarrow{f}^{(-m)} \equiv \overrightarrow{f}^m, m \geq 0$.

As a direct corollary of (12.1) one finds the Toda-like recurrence relation for function $T_0 = uv$. It will be of importance for our further considerations.

$$(\ln T_0)_{xy} = -\overleftarrow{T}_0 + 2T_0 - \overrightarrow{T}_0. \tag{12.2}$$

The corresponding to (12.1) Frechet derivative has the form

$$\phi'(u) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{v^2} \\ v^2 & 2(uv) - \frac{v_x v_y}{v^2} + \frac{v_x}{v} D_y + \frac{v_y}{v} D_x - D_{xy} \end{pmatrix}, \tag{12.3}$$

where $D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$.

The system (11.3) in the concrete case D - T of substitution may be rewritten as

$$\begin{aligned} \overleftarrow{F}_1 &= -\frac{1}{v^2}, F_2, \\ \overleftarrow{F}_2 &= v^2 F_1 + \left(2(uv) - \frac{v_x v_y}{v^2} + \frac{v_x}{v} D_y + \frac{v_y}{v} D_x - D_{xy} \right) F_2. \end{aligned} \tag{12.4}$$

It is not difficult to verify by direct computations that $F_0 = (u, -v)$ is the solution of the last equation and so substitution (12.1) is integrable in the sense of [51].

After introduction of the new functions $F_1 = uf_1, F_2 = vf_2$, the system (12.4) takes the form of a single equation for only one unknown function f_2

$$(\overleftarrow{uv})(\overleftarrow{f_2} - f_2) - (uv)(f_2 - \overrightarrow{f_2}) = -D_{xy}f_2, \quad f_1 = -\overrightarrow{f_2}. \quad (12.5)$$

The meaning of notations in the last equation is explained after formula (12.1).

In further transformations of (12.5) we will use the fact that condition of invariance of some function with respect to the discrete transformation $\overleftarrow{F} = F$ is equivalent to the $F \equiv \text{const}$. This is in some sense analogous to Liouville theorem in the theory of analytic functions. Using this fact for function

$T(f_2 = \int dy (\overleftarrow{T} - T))$ we obtain the Toda chain-like equation:

$$-T_x = T_0 \int dy (\overleftarrow{T} - 2T + \overrightarrow{T}), \quad T_0 = uv. \quad (12.6)$$

In terms of solution of (12.6) the evolution type equation (11.4) (invariant with respect to D - T substitution (12.1)) takes the form:

$$v_t = v \int dy (\overleftarrow{T} - T), \quad u_t = u \int dy (\overrightarrow{T} - T). \quad (12.7)$$

12.1.2. Two-Dimensional Heisenberg Substitution. Under this term we will mean the direct and inverse transformations of two functions (u, v) of the form:

$$\begin{aligned} \overleftarrow{u} = v^{-1}, \quad \frac{1}{1 + \overleftarrow{uv}} &= \frac{1}{1 + uv} + \frac{\phi_{xy}}{\phi_x \phi_y}, \quad \phi = \ln v, \\ \overrightarrow{v} = u^{-1}, \quad \frac{1}{1 + \overrightarrow{uv}} &= \frac{1}{1 + uv} + \frac{\psi_{xy}}{\psi_x \psi_y}, \quad \psi = \ln u. \end{aligned} \quad (12.8)$$

One can check that functions $t_m \left(t_1 = \frac{v_y v_x}{(1 + uv)^2} = -\frac{(\overrightarrow{v})_y u_x}{(\overrightarrow{v} + v)^2}, t_2 = \frac{v_y u_x}{(1 + uv)^2} = -\frac{(\overrightarrow{v})_x v_y}{(\overrightarrow{v} + v)^2} \right)$ obey the Toda-like recurrence relations

$$(t_m)_x = t_m \int dy \Delta_m, \quad (m = 1, 2), \quad (12.9)$$

where $\Delta_m = \overleftarrow{t_m} - 2t_m + \overrightarrow{t_m}$.

The explicit form of the Frechet derivative operator reads:

$$\phi'(u) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \left(\frac{\overleftarrow{1}}{R} \right)^2 \\ - \left(1 + \left(\frac{\overleftarrow{1}}{R} \right)^2 \right) \\ + (\overleftarrow{R})^2 \delta \left(\phi_x^{-1} D_x + \phi_y^{-1} D_y - \frac{v}{v_{xy}} D_{xy} \right) \end{array} \right) \begin{array}{c} -v^{-2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\delta = \frac{v\overleftarrow{v}_{xy}}{v_x v_y}, \quad R = 1 + uv, \quad \overleftarrow{R} = 1 + \overleftarrow{uv}. \tag{12.10}$$

By a short calculation it is possible to show that equation (11.3) possesses nontrivial solution $F_1 = u$, $F_2 = -v$ and so the Heisenberg substitution by definition is integrable.

Now we can rewrite equation (11.3) in more transparent form. Let us denote $F_1 = uB$, $F_2 = vA$. From the first equation (11.3) we obtain immediately

$B = -\overrightarrow{A}$. The second equation after some transformations may be rewritten in the form of a single equation for function A :

$$\left(\frac{\overleftarrow{uv}}{(1 + uv)^2} \right) (\overleftarrow{A} - A) - \frac{uv}{(1 + uv)^2} (A - \overrightarrow{A}) =$$

$$= (\phi_x \phi_y)^{-1} \left(\frac{\phi_{xy}}{\phi_x} A_x + \frac{\phi_{xy}}{\phi_y} A_y - A_{xy} \right). \tag{12.11}$$

As we know, the main equation (11.3) always possesses the trivial solution $F_1 = u_x, (u_y); F_2 = v_x, (v_y)$ or $A = \phi_x, (\phi_y)$. Let us look for solution of (12.10) in the form $A = \phi_x \alpha$. Instead of (12.10) we obtain the equation for α :

$$\left(\frac{u_x v_x}{(1 + uv)^2} \right) (\overleftarrow{\alpha} - \alpha) - \frac{u_x v_x}{(1 + uv)^2} (\alpha - \overrightarrow{\alpha}) = \left(\frac{\alpha_y}{\theta} \right)_x, \quad \theta = \frac{\phi_y}{\phi_x}. \tag{12.12}$$

Resolving (12.12) by the substitution

$$\left(\frac{\alpha_y}{\theta} \right)_x = \overleftarrow{T} - T,$$

we arrive at the equation for determining T :

$$T_x = T_0 \int dy [\theta(\overleftarrow{T} - T) - \overrightarrow{\theta}(T - \overrightarrow{T})], \tag{12.13}$$

where

$$T_0 = \frac{u_x v_x}{(1 + uv)^2}.$$

12.1.3. Lotka–Volterra Substitution. In this case direct and inverse transformations have the form

$$\overleftarrow{u} = u + (\ln v)_x, \quad \overleftarrow{v} = v + (\ln \overleftarrow{u})_y,$$

$$\overrightarrow{u} = u - (\ln \overrightarrow{v})_x, \quad \overrightarrow{v} = v - (\ln u)_y. \tag{12.14}$$

As in the previous case, the functions $t_1 = uv$, $t_2 = \overleftarrow{uv}$ obey the Toda-like recurrence relations (12.9).

The Frechet operator in this case has the form:

$$\phi'(u) = \begin{pmatrix} 1 & D_x v^{-1} \\ D_y \overleftarrow{u}^{-1} & 1 + D_y \overleftarrow{u}^{-1} D_x v^{-1} \end{pmatrix}. \tag{12.15}$$

By the same technique as in the previous subsections we obtain the single equation for unknown function T and expressions for the equations of hierarchy via this solution

$$T_y = v \int dx [\overleftarrow{u}^{-1} \overleftarrow{(T - T)} + u(T - \overrightarrow{T})], \tag{12.16}$$

and finally

$$u_t = u(T - \overrightarrow{T}), \quad v_t = D_y T.$$

12.2. Solution of the Main Equation. In spite of essential differences in the form of the Frechet operators in three above cases, the main equations of the problems (12.6), (12.14) and (12.16) have the same structure and may be solved by the similar methods. We shall demonstrate these methods on the more complicated example of Heisenberg substitution and represent the results of calculations for other cases.

First of all let us note that equation (12.14) has the partial solution

$$T = T_0$$

in what one can be convinced with the help of equality below, which is the direct corollary of (12.8) and (12.9)

$$\overleftarrow{T}_0 - T_0 = 2\phi_x \left(\frac{1}{1 + uv} \right)_x + 2\phi_{xy} \frac{\phi_x}{\phi_y} \frac{1}{1 + uv} + \phi_x \left(\frac{\phi_{xy}}{\phi_x \phi_y} \right)_x - \phi_{xy} \frac{\phi_x}{\phi_y} + \frac{\phi_{xy}^2}{\phi_y^2}.$$

Let us now seek the solution of (12.14) as $T = T_0 \int dy \alpha_0$. Instead of (12.14) we obtain the equation for determining the function α_0

$$(\alpha_0)_x + \alpha_0 \int dy [\overleftarrow{t}_1 - t_1 + \overrightarrow{t}_2 - t_2] = \overleftarrow{t}_1 \int dy (\overleftarrow{\alpha}_0 - \alpha_0) + \overrightarrow{t}_2 \int dy (\overrightarrow{\alpha}_0 - \alpha_0). \tag{12.17}$$

As it will be shown later, this equation will arise many times. Two possible ways of its further evolution will be important. Let us use the following ansatz

$$\alpha_0 = \overleftarrow{t}_1 \alpha_1 + \overrightarrow{t}_2 \beta_1.$$

After substitution of this expression into (12.17) and equating to zero coefficients in front of the terms $\overleftarrow{t}_1, \overrightarrow{t}_2$ (this is some additional assumption), we come to equations for unknown functions α_1, β_1 :

$$\begin{aligned} (\alpha_1)_x + \alpha_1 \int dy [\overleftarrow{t}_1^{\leftarrow 2} - \overleftarrow{t}_1 + \overrightarrow{t}_2 - t_2] &= \int dy (\overleftarrow{\alpha}_0 - \alpha_0), \\ (\beta_1)_x + \beta_1 \int dy [\overleftarrow{t}_1 - t_1 + \overrightarrow{t}_2^{\rightarrow 2} - \overrightarrow{t}_2] &= \int dy (\overleftarrow{\alpha}_0 - \alpha_0). \end{aligned} \tag{12.18}$$

Setting the second equation (12.18) by direct transformation and adding the result to the first one, we get

$$(\alpha_1 + \overleftarrow{\beta}_1)_x + (\alpha_1 + \overleftarrow{\beta}_1) \int dy [\overleftarrow{t}_1^{\leftarrow 2} - \overleftarrow{t}_1 + \overrightarrow{t}_2 - t_2] = 0.$$

It means that the system (12.18) has partial solution $\alpha_1 + \overleftarrow{\beta}_1 = 0$. We will use it in what follows.

For this solution the system (12.18) is equivalent to single equation for unknown function α_1 :

$$(\alpha_1)_x + \alpha_1 \int dy [\overleftarrow{t}_1^{\leftarrow 2} - \overleftarrow{t}_1 + \overrightarrow{t}_2 - t_2] = \int dy [(\overleftarrow{t}_1^{\leftarrow 2} \overleftarrow{\alpha}_1 - t_2 \alpha_1) - (\overleftarrow{t}_1^{\leftarrow 1} \alpha_1 - \overrightarrow{t}_2^{\rightarrow} \overrightarrow{\alpha}_1)].$$

It has obvious solution $\alpha_1 = 1$. As a corollary we obtain the second partial solution of our main equation:

$$T_1 = T_0 \int dy (\overleftarrow{t}_1 - \overrightarrow{t}_2).$$

Further evolution of equation for α_1 is connected with representation of unknown function in integral form $\alpha_1 \rightarrow \int dy \alpha_1$ (we keep the same symbol for unknown function because it can't lead to misunderstanding),

$$\begin{aligned} (\alpha_1)_x + \alpha_1 \int dy [\overleftarrow{t}_1^{\leftarrow 2} - \overleftarrow{t}_1 + \overrightarrow{t}_2 - t_2] &= \\ = \overleftarrow{t}_1^{\leftarrow 2} \int dy (\overleftarrow{\alpha}_1 - \alpha_1) + \overrightarrow{t}_2 \int dy (\overrightarrow{\alpha}_1 - \alpha_1). \end{aligned} \tag{12.19}$$

Up to obvious replacement $\overleftarrow{t}_1 \rightarrow \overleftarrow{t}_1^{\leftarrow 2}$ it coincides with the equation (12.17) for α_0 .

We can repeat the same trick with this equation as with equation for α_0 and after k steps will come to substitution

$$\alpha_k = \overset{\leftarrow{(k+1)}}{t_1} \alpha_{k+1} - \overset{\rightarrow}{t_2} \alpha_{k+1}$$

and equation for α_{k+1}

$$\begin{aligned} & (\alpha_{k+1})_x + \alpha_{k+1} \int dy [\overset{\leftarrow{k+2}}{t_1} - \overset{\leftarrow{k+1}}{t_1} + \overset{\rightarrow}{t_2} - t_2] = \\ & = \int dy [(\overset{\leftarrow{k+2}}{t_1} \alpha_{k+1} - t_2 \alpha_1) - (\overset{\leftarrow{k+1}}{t_1} \alpha_1 - \overset{\rightarrow}{t_2} \alpha_1)] \end{aligned}$$

with obvious solution $\alpha_{k+1} = 1$.

Collecting all results together we obtain partial solution of the main equation in the following formula

$$\begin{aligned} T_n = T_0 \prod_{i=1}^n (1 - L_i \exp[-(i+1) d_i - \\ - \sum_{k=i+1}^n d_k]) \int dy \overset{\leftarrow{1}}{t_1} \int dy \overset{\leftarrow{2}}{t_1} \dots \int dy \overset{\leftarrow{n}}{t_1}, \end{aligned} \tag{12.20}$$

where symbol $\exp d_s$ means the shift of the agreement of s -repeated integral

$(\dots \int dy \overset{h \rightarrow}{t_1} \dots \rightarrow \dots \int dy \overset{h+1 \rightarrow}{t_1} \dots)$ in (12.13) by 1 and symbol L_p means exchange $\overset{\rightarrow}{t_1}$ on the $\overset{\rightarrow}{t_2}$ in the p -repeated integral $\dots \int dy \overset{\rightarrow}{t_1} \dots \rightarrow \dots \int dy t_2 r \dots$

The expression (3.20) is directly applicable to Heisenberg and Lotka–Volterra integrable hierarchies. In the case of D–T hierarchy it is necessary to put all operators $L_i = 1$ and keep in mind the equality $t_1 = t_2 = T_0$.

12.3. Examples. In this subsection we present the simplest integrable systems for usual unknown functions u, v corresponding to the lowest solutions T_n of the main equation for D–T, Heisenberg and L–V substitutions.

12.3.1. Darboux–Toda Substitution

$n = 0$

$$T_0 = uv, \quad u_t = au_x + bu_y, \quad v_t = av_x + bv_y.$$

In examples below we shall choose $a = 1, b = 0$ keeping in mind that it is always possible to add the term (with arbitrary numerical coefficient) in which x is changed by y and vice versa.

$n = 1$

$$\begin{aligned} T_1 &= vu_x - v_x u, \\ u_t &= u_{xx} - u \int dy (uv)_x, \quad -v_t = v_{xx} - v \int dy (uv)_x. \end{aligned}$$

This is the Davey–Stewartson equation in its original form.

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} T_2 &= (uv)_{xx} - 3u_x v_x - 3uv \int dy (uv)_x, \\ u_t &= u_{xxx} - 3u_x \int dy (uv)_x - 3u \int dy (u_x v)_x, \\ v_t &= v_{xxx} - 3v_x \int dy (uv)_x - 3v \int dy (v_x u)_x. \end{aligned}$$

This is the Veselov–Novikov equation.

$$n = 3$$

$$\begin{aligned} T_3 &= - (T_1)_{xx} - 2(u_x v_{xx} - v_x u_{xx}) + 2uv \int dy (T_1)_x + 4T_1 \int dy (uv)_x, \\ v_t &= - v_{xxx} + 4v_{xx} \int dy (uv)_x - 2v_x \left(\int dy (T_1)_x - 2 \int dy (uv)_{xx} \right) + \\ &+ 2v \left(\int dy (uv)_{xxx} - \int dy (u_x v_x)_x + \int (uv_{xx})_x - \left(\int dy (uv) \right)_{xx}^2 - \left[\int dy (uv)_x \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Equation for u may be obtained from the equation for u under the change $u \rightarrow v, v \rightarrow u, t \rightarrow -t$.

12.3.2. Heisenberg Substitution

$$n = 0$$

$$v_t = - v_{xx} + 2v_x \int dy \left(\frac{uv_y}{1 + uv} \right)_x, \quad -u_t = - u_{xx} + 2u_x \int dy \left(\frac{vu_y}{1 + uv} \right)_x.$$

$$n = 1$$

$$\begin{aligned} v_t + v_{xxx} - 3v_{xx} \int dy \left(\frac{uv_y}{1 + uv} \right)_x + 3v_x \left[\int dy \left(\frac{uv_y}{1 + uv} \right)_x \right]^2 + \\ + 3v_x \int dy \left(\frac{u_x v_y}{(1 + uv)^2} \right)_x - 3v_x \int dy \left(\frac{uv_y}{1 + uv} \right)_{xx}, \\ u_t + u_{xxx} - 3u_{xx} \int dy \left(\frac{vu_y}{1 + uv} \right)_x + 3u_x \left[\int dy \left(\frac{vu_y}{1 + uv} \right)_x \right]^2 + \\ + 3u_x \int dy \left(\frac{v_x u_y}{(1 + uv)^2} \right)_x - 3u_x \int dy \left(\frac{uv_y}{1 + uv} \right)_{xx}. \end{aligned}$$

12.3.3. Lotka–Volterra Substitution

$n = 0$

In the case $T_0 = v$ we obtain the trivial system with the help of (12.2)

$$u_t = u_y, \quad v_t = v_y.$$

$n = 1$

In this case

$$S_1 = v \int dx (\overleftarrow{t}_1 - \overrightarrow{t}_2) = v_y + v^2 + 2v \int dx(u_y).$$

The corresponding integrable system has the form

$$u_t = -u_{yy} + 2(uv)_y + 2u_y \int dx(u_y), \quad v_t = (v^2 + v_y + 2v \int dx(u_y))_y.$$

In one-dimensional case $D_x = D_y$ this system is a partial case of more general integrable system described in [25].

$n = 2$

In this case

$$S_2 = v^3 + 3vv_y - v_{yy} + 3vD_x^{-1}(uv)_y + 3(v_y + v^2) D_x^{-1}(u_y) + 3v(D_x^{-1}(u_y))^2.$$

The corresponding integrable system can be written as

$$u_t = D_y(u_{yy} - 3(vu_y) + 3v^2u - 3(u_y - uv) D_x^{-1}(u_y)) + D_x(3D_x^{-1}(u_y) D_x^{-1}(uv)_y + (D_x^{-1}(u_y))^3),$$

$$v_t = D_y(v^3 + 3vv_y + v_{yy} + 3vD_x^{-1}(uv)_y + 3(v_y + v^2)D_x^{-1}(u_y) + 3v(D_x^{-1}(u_y))^2).$$

13. FORMALISM OF SCALAR L-A PAIR APPLIED TO PERIODIC TODA LATTICES [11,12,35]

Now we consider concrete realizations of the general results of section 4 and apply them to the case of the system of equations of periodic Toda lattice related to classical A_n -series. The case of algebra A_1 (the sin-Gordon equation) has been considered in detail in the former paragraph.

We use the following formulation of the equations of the generalized Toda lattice in two-dimensional space:

$$(a) \frac{\partial^2 x_i}{\partial z \partial \bar{z}} = \exp(\tilde{K}x)_i, \quad (b) \frac{\partial^2 \rho_\alpha}{\partial z \partial \bar{z}} = \exp \delta_\alpha - t_\alpha W_\alpha^{-1} \exp - \sum \delta_\nu t_\nu,$$

$$\delta_\alpha = (k\rho)_\alpha, \tag{13.1}$$

where in the case (a) the index i takes the values $1, 2, \dots, (r + 1)$; $(r + 1)$ is the rank of the simple infinite-dimensional algebra of finite growth with the generalized Cartan matrix \tilde{K} . In the case (b) the number of values that index α takes is less than in (a); k is the Cartan matrix (corresponding to \tilde{K}) of the finite-dimensional semisimple algebra and t_ν are the coefficients of the expansion of the maximal root of algebra over the set of its simple roots. The system (a) admits the transformation $x_i \rightarrow x_i + (\Theta(z) + \bar{\Theta}(\bar{z})) N_i$, where \vec{N} is the null vector of the generalized Cartan matrix: $(\tilde{K}N) = 0$. Equation (b) is equivalent to (a) after excluding the trivial solution of the homogeneous Laplace equation with the help of conformal transformation. Equation (b) is a direct consequence of the Lax representation

$$\begin{aligned}
 A_z &= (h\rho_z) + \lambda \left(\sum_{\alpha=1}^r X_\alpha^+ + X_M^- \right), \\
 A_{\bar{z}} &= \lambda^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^r \exp -\delta_\alpha X_\alpha^- + \exp (M\rho) X_M^+ \right), \\
 [\partial_z - A_z, \partial_{\bar{z}} - A_{\bar{z}}] &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{13.2}$$

where X_α^\pm and X_M^\pm are the root vectors of the simple and maximal roots of the algebra; $(M\rho) \equiv \sum t_\nu \delta_\nu$ and λ is the spectral parameter. For X_M^\pm we take the normalization:

$$[X_M^+, X_M^-] = \sum t_\nu W_\nu^{-1} h_\nu, \quad Wk = (kW)^T.$$

The algebra, whose local part consists of the subspaces

$$g_{-1} = (\lambda^{-1} X_\alpha^-, \lambda^{-1} X_M^+), \quad g_1 = (\lambda X_\alpha^+, \lambda X_M^-), \quad g_0 = (h_\alpha)$$

is an infinite-dimensional semisimple algebra of finite growth. The degree of the parameter λ distinguishes the identical elements of the finite-dimensional algebra, relating them to the subspaces with whose grading index they are compared. Thus they eliminate the degeneracy of the representations of algebras realized by finite-dimensional matrices. The Cartan elements of the finite-dimensional algebra appear in the subspaces whose grading index is the product of some integral number on the height of the maximal root $m = \sum t_\nu$ increased by 1. The only one element that is not distinguished by degree of λ is the element H of the null subspace $H = [X_M^+, X_M^-] = \sum t_\nu W_\nu^{-1} h_\nu$. This circumstance explains why the number of unknown functions in (b) is less than in (a). Thus the operators of the L-A pair (13.2) should be treated as

operator-valued functions of the finite-dimensional representation of an infinite-dimensional algebra of the finite growth. The spectral parameter λ plays here the role of a grading parameter. The algebra of internal symmetry of the equations of the generalized Toda lattice is infinite-dimensional and coincides with solvable part of such infinite-dimensional semi-simple algebra.

Equations (13.2) mean a «gradientness» of the L–A pair operators:

$$g_z g^{-1} = (h\rho_z) - \sum_{\alpha=1}^r X_{\alpha}^{+} + \lambda^{n+1} X_M^{-},$$

$$g_{\bar{z}} g^{-1} = \sum_{\alpha=1}^r \exp -\delta_{\alpha} X_{\alpha}^{-} + \lambda^{-n-1} \exp(M\rho) X_M^{+} \quad (13.3)$$

((13.3) differs from (13.2) by the gauge transformation $g \rightarrow \exp \frac{1}{2} \ln H$, which results in the change $\lambda \rightarrow \lambda - 1$ at the generators of the simple roots; g is an element of the complex hull of the group, spanned over the elements of the semisimple algebra. Equation (13.3) may be considered as a system of equations for the parameters of the element g . This system is naturally invariant under the choice of a concrete representation of the algebraic elements X_{α}^{\pm} in (13.3). Parametrize the element g by the Gauss decomposition $g = Z^{-} \exp(h\tau) Z^{+}$. Then (13.3) has as its consequence the essentially nonlinear system of equations relating the parameters of the elements Z^{+} , Z^{-} , τ . It seems quite remarkable that the equations for the parameters τ split from the general system, remaining essentially nonlinear. However, they split, in their turn, to a linear differential equation for the functions $\Psi_l = \exp \sum \tau_{\alpha} l_{\alpha}$, which are equal to the matrix elements of the group element g between the highest states of the representation (l_1, l_2, \dots, l_r) . However, in order to obtain the scalar L–A pair equations of the given representation, one does not need to write the complete system of equations for the parameters of element g and then single out the linear system for Ψ_l from it. It would be enough to calculate the derivatives of the Ψ_l up to the order $N_l - 1$ using (13.3), and then to express them in terms of linear combinations of the matrix elements $\langle \alpha || g || l \rangle$ as follows (see section 4):

$$\dot{\Psi}_l = \langle l || \dot{g} || l \rangle = \langle l || [(h\rho_z) - \sum_{\alpha=1}^r X_{\alpha}^{+} + \lambda^{n+1} X_M^{-}] || l \rangle =$$

$$= (l\rho_z) \Psi_l + \sum f_{\alpha}^1 \langle \alpha || g || l \rangle.$$

Analogously, for an s -order derivative, we obtain

$$\Psi_l^{[s]} = \sum_{\alpha=1}^{N_l} f_{\alpha}^s \langle \alpha \parallel g \parallel l \rangle.$$

Inverting the latter equation we arrive at equality

$$\langle \alpha \parallel g \parallel l \rangle = \sum_0^{N_l-1} F_s^{\alpha} \Psi_l^{[s]} = \sum_0^{N_l-1} (\bar{F})_l^{\alpha} \Psi_l^{[l]}.$$

The matrix elements $\langle \alpha \parallel g \parallel l \rangle$ may be calculated with the help of (13.3) in two forms, i.e., they may be expressed as through the derivatives with respect to the argument z or with respect to the argument \bar{z} . As a result, one obtains two forms of the matrix element $\langle \alpha \parallel g \parallel l \rangle$, which are equations $N_l - 1$ of the scalar L-A pair in the representation 1. Two missing equations appear if someone excludes the N_l matrix elements $\langle \alpha \parallel g \parallel l \rangle$ from $N_l + 1$ linear relations connecting them with the derivatives Ψ_l up to the order N_l with respect to both arguments. These are two spectral equations of the representation 1. In the general case, the structure of the spectral equations is as follows:

$$\Theta_{N_l}(D) \Psi_l = \lambda^{m+1} \Theta_{N_l-m-1}(D) \Psi_l,$$

where $\Theta_n(D)$ denotes the differential operator of the n -th order, whose coefficient functions are homogeneous (with respect to the differentiation) polynomials in ρ_{α} (13.3). As $N_l = m + 1$, the right-hand side of the spectral equation does not contain the differentiation at all. Such a situation occurs only in the case of the simplest representations (of the lowest dimensions) of algebras $A_k, C_k, (AB)_k$. For the classical series B_k and D_k the degrees of the differential operator in the right-hand side of the spectral equation are one and two, respectively.

14. SOLUTION OF sin-GORDON EQUATION IN THE FORM INVARIANT UNDER THE CHOICE OF THE REPRESENTATION [10]

Now, on the example of the sin-Gordon equation we demonstrate the method of constructing the solutions without using a concrete realization of the algebra. This is the partial case of the general construction of the previous section.

The sin-Gordon equation results from the compatibility of the linear system (the Lax pair)

$$\dot{g}g^{-1} = h\dot{\rho} + \lambda(X^+ + X^-), \quad g'g^{-1} = \lambda^{-1}(X^+ \exp 2\rho + X^- \exp -2\rho)$$

with g being the element of the $SL(2, C)$ group, X^+, X^-, h -elements of its algebra $[X^+, X^-] = h$, $[h, X^{\pm}] = 2X^{\pm}$. The internal symmetry algebra of the sin-Gordon equation is connected with the graded algebra of finite growth $SL(2, C) \times Z_2 = \tilde{A}_1$, that has the background elements $X_{1,2}^{\pm}, h_{1,2}$ from which the whole algebra is constructed. The commutation relations are

$$[X_{\alpha}^+, X_{\beta}^-] = \delta_{\alpha, \beta} h_{\alpha}, \quad [h_{\alpha}, X_{\beta}^{\pm}] = k_{\alpha\beta} X_{\beta}^{\pm},$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad k = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

By direct check we confirm that the algebra \tilde{A}_1 has a multidimensional representation with the spectral parameter and generators:

$$X_1^+ = \lambda X^+, \quad X_2^+ = \lambda X^-, \quad X_1^- = \lambda^{-1} X^-, \quad X_2^- = \lambda^{-1} X^+, \quad h_1 = -h_2 = h,$$

where X^{\pm}, h are the elements of the algebra $SL(2, R)$ introduced above. Here the algebra as a whole consists of the sets of elements:

$$R^- = (\lambda^{-2s-1} X^{\pm}, \lambda^{-2s} h), \quad R^0 = (h),$$

$$R^+ = (\lambda^{2s+1} X^{\pm}, \lambda^{2s} h), \quad s > 0,$$

i.e., the positive, negative and zero subalgebras of the initial algebra. Going back to the L-A pair representation, we see that the element g may be considered as belonging not to the group $SL(2, C)$ but to some degenerate representation of the \tilde{A}_1 group. The arbitrary element of the $SL(2, C)$ group can be represented as the Gauss decomposition $g = \exp X^+ \alpha \exp h\tau \exp X^- \beta$. Consequently, from the Lax representation, there appears a system of equations connecting the functions α, β, τ , which is obviously invariant under the choice of a certain representation of the algebra $SL(2, C)$. Thus we have

$$\dot{g}g^{-1} = h\dot{\rho} + \lambda(X^+ + X^-) =$$

$$= (\dot{\alpha} - 2\alpha\dot{\tau} - \alpha^2\dot{\beta} \exp -2\tau)X^+ + (\dot{\tau} + \alpha\dot{\beta} \exp -2\tau)h + \dot{\beta} \exp -2\tau X^-,$$

whereof

$$\dot{\beta} \exp -2\tau = \lambda, \quad \alpha = \frac{\dot{\rho} - \dot{\tau}}{\lambda}, \quad -\ddot{\tau} + (\dot{\tau})^2 = \lambda^2 - \ddot{\rho} + (\dot{\rho})^2.$$

Similarly,

$$\beta' \exp - 2\tau = \lambda^{-1} \exp 2\rho, \quad \alpha = -\tau' \exp - 2\rho, \quad -\ddot{\tau} + 2\dot{\tau}\dot{\rho} + (\dot{\rho})^2 = \lambda^{-2}.$$

As a result of the last equalities we have a system of three equations

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi} &= (\lambda^2 - \ddot{\rho} + (\dot{\rho})^2) \Psi, & (\Psi \exp \rho)'' &= (\lambda^{-2} - \rho'' + (\rho')^2) \Psi, \\ \Psi' \exp - 2\rho &= \lambda^{-2}(\dot{\Psi} + \dot{\rho}\Psi), \end{aligned} \tag{14.1}$$

where $\Psi = \exp - \tau$, $\alpha \exp - \tau$. Now we search for a solution of this system in the form

$$\Psi = \exp (\lambda z + \lambda^{-1}\bar{z}) \prod_{k=1}^n (\lambda - a_k),$$

where a_k are some unknown functions, that are defined from the system of equations, which arose after substitution Ψ into previous equations and comparing the terms at the same powers of λ

$$\ddot{a}_i + 2a_i \dot{a}_i + 2 \sum \frac{\dot{a}_i \dot{a}_k}{a_k - a_i} = 0, \quad -\ddot{\rho} + (\dot{\rho})^2 = 2 \sum \dot{a}_k. \tag{14.2}$$

The last equality may be satisfied by the substitution $\exp - \rho = \frac{\prod a_k}{\prod \lambda_k}$ (see recurrent equalities, which follow from the system (7.3)). System (14.2) contains n first integrals, which give expressions for the first derivatives a_k :

$$\dot{a}_k = \frac{P_n(a_k^2)}{\prod_{l \neq k} (a_k^2 - a_l^2)}, \quad P_n(a_k^2) = \prod_{l=1}^n (a_k^2 - a_l^2), \quad \dot{x}_l = 0.$$

The set of parameters x_j independent of z , in fact, represents the first integrals of system (14.2). Calculating \ddot{a}_k from the latter expression for \dot{a}_k , we confirm that (14.2) is valid. Further integration of the system is connected with the following identity from the theory of the symmetric function of n arguments. Namely

$$\Theta^s(x_j) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^s}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)} = 0,$$

if $1 < s < n - 2$ and $\Theta^{n-1}(x_j) = 1$. In fact, being reduced to a common denominator, $\Theta^s(x_j)$ represents a ratio of two homogeneous symmetric functions. Here the denominator is the Vandermond determinant, which is antisymmetric

under permutation of all its arguments. Hence, the numerator should be characterized by the same property, which is possible only when s is not less than $n - 1$. Due to this, we may fulfill the further integration with the result

$$\sum_{k=1}^n \int \frac{da_k}{a_k^2 - x_s^2} = z + \frac{y_s}{x_s}, \quad \prod_{k=1}^n \frac{a_k - x_s}{a_k + x_s} = \exp 2(x_s z + y_s).$$

Thus, the last n relations mainly determine a general solution of system (14.2) depending exactly on $2n$ parameters. By now only the first equation of the system (14.1) has been integrated, and to obtain an explicit dependence of the parameters x_s, y_s on argument \bar{z} , one needs to use the two remaining equations. As far as $\exp -\rho = \prod a_k / \prod \lambda_k$, the function $\Psi \exp \rho$ has the form:

$$\Psi \exp \rho = \lambda^n \exp(\lambda z + \lambda^{-1} \bar{z}) \prod_{k=1}^n (\lambda^{-1} - a_k^{-1}),$$

i.e., with respect to the argument \bar{z} , the function $\Psi \exp \rho$ has the same structure as Ψ with respect to z with evident substitution $a_k \rightarrow a_k^{-1}, \lambda \rightarrow \lambda^{-1}$. Due to this, the second equation of (14.1) entails the system of equations with respect to differentiation over the argument \bar{z}

$$(a_k^{-1})' = \frac{\tilde{P}_n(a_k^{-2})}{\prod_{l \neq k} (a_k^{-2} - a_l^{-2})}, \quad \tilde{P}_n(a_k^{-2}) = \prod_{l=1}^n (a_k^{-2} - a_l^{-2}), \quad (x_l)' = 0,$$

or

$$a_k' = (-1)^n a_k^{2n} \frac{\tilde{P}_n(a_k^{-2})}{\prod_{l \neq k} (a_k^2 - a_l^2)} \prod_{l \neq k} a_l^2.$$

We have not used yet the third equation of system (14.1). After simple transformations it can be written as

$$\dot{a}_k = \exp 2\rho a_k^2 a_k', \quad \exp 2\rho(1 + \sum a_k') = 1, \quad \dot{\rho} = \exp 2\rho \sum a_k' a_k,$$

which in their turn, after corresponding substitution, lead to

$$P_n(a_k^2) = (-1)^n a_k^{2n} \tilde{P}_n(a_k^{-2}) \exp 2\rho \prod a_l^2.$$

This means that \dot{a}_k and a_k' are defined by the same polynomial, whose roots x_l^2 depend neither on z nor on \bar{z} , i.e.,

$$\tilde{x}_l = x_l, \quad \exp -\rho = \frac{\prod a_l}{\prod x_l}.$$

It is easy to see that the system of equations is invariant under the substitution $z \rightarrow \bar{z}$, $a_k \rightarrow a_k^{-1}$, $x_k \rightarrow x_k^{-1}$. Then, from our previous results we find

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_k - x_s}{a_k + x_s} = \exp 2(x_s z + x_s^{-1} \bar{z} + y_s) \equiv \exp 2z_s,$$

where parameters x_k, y_k are independent both of z and of \bar{z} . From the last equality we obtain the linear algebraic system for homogeneous symmetric functions $s_r = \sum_{i \neq j \neq \dots \neq k} a_i a_j \dots a_k$ in the form

$$\sinh z_l s_n - x_k \cosh z_k s_{n-1} + x_k^2 \sinh z_k s_{n-2} - \dots, = 0, \quad s = 1, 2 \dots n.$$

Solution of the latter system with respect to $s_n = \prod a_l$ yields the well-known n -soliton solution of sin-Gordon equation in the form of the ratio of two determinants of n -th order.

15. GENERALIZED BARGMANN POTENTIALS [13]

In this section we establish a condition for the ordinary differential equation of the $(k + 1)$ -th order

$$\Psi^{[k+1]} + \sum_{i=0}^{k-1} u_i \Psi^{[i]} = \lambda^{k+1} \Psi \tag{15.1}$$

under which it has a solution with the following analytic dependence on λ :

$$\Psi = \exp \lambda z \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda).$$

The problem of this type, applied to quantum-mechanical one-dimensional Schrödinger equation, was first considered by Bargmann. For this reason, the coefficient functions of the last equation u_i will be called generalized Bargmann potentials. To solve Bargmann problem, we need the expression for the coefficient functions of an ordinary differential equation through the full set of its linearly independent solutions. The following statement generalizing the Wiett and Gauss theorems for the case of polynomials takes place. The equation

$$\Psi^{[k+1]} + \sum_{i=0}^{k-1} u_i \Psi^{[i]} = 0$$

may be represented in the form:

$$V_k^{-1}(V_k^2 V_{k-1}^{-1} (V_k^{-1} V_{k-1}^2 V_{k-2}^{-1} (\dots (V_1^2 V_2^{-1} (V_1^{-1} \Psi)) \dots)) = 0,$$

where V_i are the principal minors of the matrix of the Wronskian $V_\alpha^\beta = \Psi_\beta^{[\alpha-1]}$, ($1 < \alpha, \beta < k+1$), and generate the full set of $k+1$ linearly independent solutions of the equation. This is the Frobenius theorem. The condition that Wronskian is a constant $V_{k+1} = 1$ is solved as follows:

$$\Psi_1 = \varphi_1, \quad \Psi_1 = \varphi_1 \int^z dz_1 \varphi_2,$$

$$\Psi_s = \varphi_1 \int^z dz_1 \varphi_2 \int^{z_1} dz_2 \varphi_3 \dots \int^{z_{s-1}} dz_s \varphi_s, \tag{15.2}$$

where the functions φ_l obey the only condition $\prod_{l=1}^{k+1} \varphi_l^{k+2-l} = V_{k+1}$.

1. The set of $(k+1)$ functions Ψ_l manifestly obeys the equation

$$(\varphi_{k+1}^{-1} (\varphi_k^{-1} (\dots (\varphi_2^{-1} (\varphi_1^{-1} \Psi)) \dots)) = 0.$$

All that remains is to express φ_l through Ψ_k . As a consequence of the definition of the matrix V and Ψ we find

$$V_s = \prod_{l=1}^s \varphi_l^{s-l+1}, \quad \varphi_1 = V_1, \quad \varphi_2 = V_1^{-2} V_2, \dots, \varphi_{l+1} = V_{l-1} V_l^{-2} V_{l+1}.$$

The substitution of the expressions obtained for φ into the previous equation completes the proof of the theorem.

The problem concerning the generalized Bargmann potentials is solved according to the following theorem.

The solution of equation (15.1) has an analytic dependence on the parameter λ of the form $\Psi = \exp \lambda z \prod_{c=1}^n (a_c - \lambda)$, if the functions a_c are defined by the condition of vanishing of the function

$$\tilde{\Psi} = \sum_{\alpha=1}^{k+1} c(\lambda_\alpha) \exp \lambda_\alpha z \prod_{c=1}^n (a_c - \lambda_\alpha), \quad \lambda_\alpha^{k+1} = \lambda^{k+1}$$

at n different points of the λ^{k+1} plane $\lambda_b^{k+1} (1 < b < n)$. The generalized Bargmann potentials u_i are expressed through symmetric combinations constructed from a_c and their derivatives via quantities B_s^i , which are defined from the expressions for derivative of the s -th order of the function Ψ

$$\Psi^{[.s]} = \left(\lambda^s + \sum_{i=0}^{s-2} B_s^i \lambda^i + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^s}{a_c - \lambda} \right) \Psi$$

as follows:

$$u_i = -\tilde{B}_{k+1}^i \equiv - (B_{k+1}^i - \sum_{l=0}^{i-2} B_{k+1}^l \tilde{B}_l^i),$$

$$B_j^i = 0, \quad j < i + 2. \tag{15.3}$$

Equation (15.1) may be represented in the form

$$\exp \delta_k (\exp \delta_{k-1} (\dots (\exp \delta_1 (\exp - \rho_1 \Psi)) \dots)) = \lambda^{k+1} \exp \rho_k \Psi, \tag{15.4}$$

where $\exp \rho_s = J_{s-1}^0 \prod_{c=1}^n a_c^s$ and J_b^0 are the principal minors of the matrix of the conserved integrals and $\delta_s = -\rho_{s-1} + 2\rho_s - \rho_{s+1}$, $\rho_0 = \rho_{k+1} = 0$,

$$J_{i,j} = \delta_{i,j} + B_i^j + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^i a_c^{k-j}}{a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}} \tag{15.5}$$

under the null value of the parameter λ .

After calculating the logarithmic derivative of Ψ , we obtain

$$\dot{\Psi} = \left(\lambda + \sum_{c=1}^n \frac{\dot{a}_c}{a_c - \lambda} \right) \Psi \equiv \phi^1 \Psi.$$

For the s -th derivative we have by induction

$$\Psi^{[.s]} = \phi^s \Psi, \quad \phi^{s+1} = \dot{\phi}^s + \phi^s \phi^1.$$

With the help of the last equalities we find the recurrence relations for A_c^s and B_i^s .

Substituting the proposed form of Ψ into general equation (15.1) and equating the quantities at different powers of λ , we obtain the expressions for the Bargmann potentials according to the conditions of the theorem.

From the condition of vanishing of the residues in the poles at the points $\lambda = a_c$ we obtain the nonlinear system of differential equations for the functions a_c :

$$\tilde{A}_c^{k+1} \equiv A_c^{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{B}_{k+1}^i A_c^i = A_c^{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} B_{k+1}^i \tilde{A}_c^i = 0. \tag{15.6}$$

Let us show that a_c , as defined by the conditions of the theorem, obey the relations (15.6). For this purpose, consider the Wronskian constructed by the functions Ψ_α . In the notations of the previous sections, we get

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \|\Psi, \dot{\Psi}, \dots, \Psi^{[k]}\| = \prod_{c=1}^n (a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}), \\ \|1, \lambda + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^s}{a_c - \lambda} \dots, \lambda^k + \sum_{i=0}^{k-2} B_k^i \lambda^i + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^k}{a_c - \lambda}\| &= \\ &= \prod_{c=1}^n (a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}) W(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \det_k J, \end{aligned} \tag{15.7}$$

where W is Vandermond determinant. The calculations in (15.7) were performed by the standard procedure, i.e., subtracting the first column from the remaining one and removing the factor $\prod_{\alpha=1}^{k+1} (\lambda_\alpha - \lambda_1)$, etc. It follows from (15.7) that, up to W_{k+1} , V_{k+1} is a polynomial of the n -th order of the argument λ^{k+1} that vanishes due to the linear dependence of Ψ_α , in accordance with the conditions of the theorem, at n points λ_b^{k+1} , i.e.,

$$V_{k+1} = W_{k+1} \prod_{b=1}^n (\lambda_b^{k+1} - \lambda^{k+1}).$$

Consequently, $\dot{V}_{k+1} = \|\Psi, \dot{\Psi}, \dots, \Psi^{[k-1]} \Psi^{[k+1]}\| = 0$. Calculating the latter determinant in the same way as (15.7), we verify that it has (15.4) as its consequence. To prove (15.5), we make use of the fact that both the Bargmann potentials u_i and the equations (15.6) for A_c^i do not depend on the parameter λ . According to the Frobenius theorem, we have

$$\varphi_1 = \Psi_1(\lambda = 0) = \prod_{c=1}^n a_c, \quad \varphi_1^2 \varphi_2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \|\Psi, \dot{\Psi}\| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\lambda_2 - \lambda_1) \parallel 1, \lambda + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^1}{a_c - \lambda} \parallel \prod_{c=1}^n (a_c - \lambda_1) (a_c - \lambda_2) = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \prod_{c=1}^n (a_c - \lambda_1) (a_c - \lambda_2) \left(1 + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^1}{(a_c - \lambda_1) (a_c - \lambda_2)} \right) = \\
 &= \prod_{c=1}^n a_c^2 \left(1 + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^1}{a_c^2} \right) = \prod_{c=1}^n a_c^2 J_1^0.
 \end{aligned}$$

Continuing the reduction procedure, we find

$$\prod_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha^{s-\alpha+1} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} W_s^{-1}(\parallel \Psi, \dot{\Psi}, \dots, \Psi^{[s]} \parallel) = \prod_{c=1}^n a_c^s J_{s-1}^0.$$

From here we see that all the statements of the theorem are fulfilled and the other form of the Bargmann potentials may be found after performing differentiation in equation (15.4).

16. SOLUTION OF PERIODIC TODA LATTICE FOR A_k -SERIES [11,12,35]

In this section a system of equations is constructed for a scalar L-A pair of the first fundamental representation ($k + 1$ -th dimension) of the algebra A_k . With the help of the results of the previous section, its «wave function» and the solutions of the periodic Toda lattice are obtained.

The highest vector of the first fundamental representation $\parallel l \rangle (\langle l \parallel)$ obeys the conditions

$$X_\alpha^+ \parallel l \rangle = 0, \quad \langle l \parallel X_\alpha^- = 0 h_\alpha \parallel l \rangle = \delta_{\alpha,1}, \quad \langle l \parallel h_\alpha = \delta_{\alpha,1}.$$

The set of its basic vectors is as follows,

$$\begin{aligned}
 &\parallel l \rangle, \quad X_1^- \parallel l \rangle, \quad X_2^- X_1^- \parallel l \rangle, \quad X_k^- \dots X_2^- X_1^- \parallel l \rangle, \\
 &\langle l \parallel, \quad \langle l \parallel X_1^+, \quad \langle l \parallel X_1^+ X_2^+, \quad \langle l \parallel X_1^+ X_2^+ \dots X_k^+.
 \end{aligned}$$

We introduce the wave function $\langle l \parallel g \parallel l \rangle$ and, using (13.3) calculate its derivatives, with respect to z

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi} &= \langle l \parallel \dot{g} \parallel l \rangle = \langle l \parallel (h\dot{p} + \sum_{\alpha=1}^k X_\alpha^+ + \lambda^{k+1} X_M^-) g \parallel l \rangle = \\
 &= \dot{p}_1 \Psi + \langle l \parallel X_1^+ g \parallel l \rangle,
 \end{aligned}$$

or

$$\exp \rho_1(\exp - \rho_1 \Psi) = \langle l \| X_1^+ g \| l \rangle.$$

Next,

$$\begin{aligned} (\exp \rho_1(\exp - \rho_1 \Psi)) &= \langle l \| X_1^+ g \| l \rangle = \\ &= \langle l \| X_1^+(h\dot{\rho})g \| l \rangle + \langle l \| X_1^+ X_2^+ g \| l \rangle \end{aligned}$$

has its consequence

$$\exp \rho_2 - \rho_1(\exp \delta_1(\exp - \rho_1 \Psi)) = \langle l \| X_1^+ X_2^+ g \| l \rangle.$$

Continuing the reduction procedure up to the s -th step, we obtain

$$\begin{aligned} \exp \rho_s - \rho_{s-1}(\exp \delta_{s-1}(\exp \delta_{s-2} \dots (\exp \delta_1(\exp - \rho_1 \Psi)) \dots)) &= \\ &= \langle l \| X_1^+ X_2^+ \dots X_s^+ g \| l \rangle. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Finally the $(k+1)$ -th step

$$\begin{aligned} \langle l \| X_1^+ X_2^+ \dots X_k^+(h\dot{\rho} + \lambda^{k+1} X_M^-) g \| l \rangle &= \\ &= -\dot{\rho}_k \langle l \| X_1^+ X_2^+ \dots X_k^+ g \| l \rangle + \lambda^{k+1} \Psi \end{aligned}$$

leads to the spectral equation

$$(\exp \delta_k(\exp \delta_{k-1} \dots (\exp \delta_1(\exp - \rho_1 \Psi)) \dots)) = \lambda^{k+1} \exp \rho_k \Psi.$$

Quite similarly, by using the differentiation with respect to $\bar{\lambda}$ we obtain

$$\begin{aligned} \exp \delta_{s+1}(\exp \delta_{s+2} \dots (\exp \delta_k(\exp - (\rho_1 + \rho_k) \Psi)) \dots) &= \\ &= \lambda^{-(k+1)} \langle l \| X_1^+ X_2^+ \dots X_s^+ g \| l \rangle. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Excluding the matrix elements of the element g from the (16.1) and (16.2), we obtain

$$\begin{aligned} \exp \rho_s - \rho_{s-1}(\exp \delta_{s-1}(\exp \delta_{s-2} \dots (\exp \delta_1(\exp - \rho_1 \Psi)) \dots)) &= \\ &= \lambda^{k+1} \exp \delta_{s+1}(\exp \delta_{s+2} \dots (\exp \delta_k(\exp - (\rho_1 + \rho_k) \Psi)) \dots), \\ (\exp \delta_k(\exp \delta_{k-1} \dots (\exp \delta_1(\exp - \rho_1 \Psi)) \dots)) &= \lambda^{k+1} \exp \rho_k \Psi, \\ (\exp \delta_2(\exp \delta_3 \dots (\exp \delta_k(\exp - (\rho_1 + \rho_k) \Psi)) \dots)) &= \\ &= \lambda^{-(k+1)} \exp - \delta_1 \Psi. \end{aligned} \quad (16.3)$$

The system of $(k + 2)$ equations (16.3) is, in fact, a scalar L–A pair of the first (vector) fundamental representation of the algebra A_k . System (16.3) is invariant under the substitution

$$z \rightarrow \bar{z}, \Psi \rightarrow \exp -\rho_1 \Psi, \lambda \rightarrow \lambda_{-1}, \rho_1 \rightarrow -\rho_1, \rho_{k+2-s} \rightarrow \rho_s - \rho_1$$

$(1 < s < k + 1, \rho_{k+1} = 0)$, i.e., under the Weyl reflection of the first simple root of the algebra A_k .

We shall look for the wave function of the system in the «soliton» form

$$\Psi = \exp (\lambda z + \lambda^{-1} \bar{z}) \prod_{c=1}^n (a_c - \lambda) \lambda_{\alpha}^{k+1}.$$

Excluding $\Psi^{[k]}$ from the Wronskian $\| \Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k]} \|$, using the equation connecting $\Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k]}$ and Ψ' (the equation with $s = k$ in (16.3)), we arrive at the equality

$$\| \Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k]} \| = \lambda^{k+1} \exp -(\rho_1 + \rho_k) \| \Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k-1]}, \Psi^{[1]} \|.$$

Continuing the procedure of the further exclusion of the derivatives with the help of (16.3), we get the following chain of equations for the determinants

$$\begin{aligned} \| \Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k]} \| &= \lambda^{k+1} \exp -(\rho_1 + \rho_k) \| \Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k-1]}, \Psi^{[1]} \| = \\ &= \lambda^{2(k+1)} \exp -(2\rho_1 + \rho_{k-1}) \| \Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k-2]}, \Psi^{[1]}, \Psi^{[1]} \| = \dots \\ &= \lambda^{s(k+1)} \exp -(s\rho_1 + \rho_{k+1-s}) \| \Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k-s]}, \Psi^{[s]} \dots \Psi' \| = \\ &= \lambda^{k(k+1)} \exp -(k+1) \rho_1 \| \Psi, \Psi^{[k]} \dots \Psi' \|, \\ &\lambda^{k(k+1)} (-1)^{k(k+1)} \| \bar{\Psi}, \bar{\Psi}' \dots \bar{\Psi}^{[k]} \|, \end{aligned} \tag{16.4}$$

where $\bar{\Psi} \equiv \exp (-\rho_1 \Psi)$. The chain of equations (16.4), completed with two spectral equations, is completely equivalent to the system of equations of the scalar L–A pair (16.3). It follows from the explicit form of the spectral equation with respect to the argument z that the first term in the equality chain (16.4) does not depend on z ; the last one does not depend on \bar{z} , and, therefore, each term of the chain is equal to some constant.

As for the equations of the scalar L–A pair in form (16.3), the following theorem, which generalizes the results of the previous section in the natural way, is valid.

The solution of the system of equations for the scalar L-A pair (16.4) is the wave function $\Psi = \exp(\lambda z + \lambda^{-1} \bar{z}) \prod_{c=1}^n (a_c - \lambda)$, where $a_c(z, \bar{z})$ are defined by the condition of vanishing of the function

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \sum_{\alpha=1}^{k+1} c(\lambda_\alpha) \exp(\lambda_\alpha z + \lambda_\alpha^{-1} \bar{z}) \prod_{c=1}^n (a_c - \lambda_\alpha) \equiv \\ &\equiv \sum_{\alpha=1}^{k+1} c_\alpha \Psi_\alpha, \quad \lambda_\alpha^{k+1} = \lambda^{k+1} \end{aligned}$$

at n different points λ_b^{k+1} of the λ^{k+1} plane ($1 < b < n$). The solutions of the equations of the periodic Toda lattice are given by the relations

$$\exp \rho_s = \prod_{c=1}^n \left(\frac{a_c}{\lambda_c} \right)^s J_{s-1}^0 = \prod_{c=1}^n \left(\frac{a_c}{\lambda_c} \right)^{s-k-1} \tilde{J}_{s-k-1}^\infty,$$

where J_s^0 are principal minors of the conserved integral matrix (see previous section), when $\lambda = 0$ and \tilde{J}_{s-k-1}^∞ are the principal minors of the matrix $\tilde{J} = \sigma J(a^{-1}, \lambda^{-1} \sigma)$ the infinite value of λ (σ is the constant $(k+1) \times (k+1)$ matrix with 1 on its antidiagonal and 0 on the other places).

As follows from the results of the previous section, the first spectral equation (with respect to the argument z) (16.3) is satisfied when the first expression for $\exp \rho_s$ from formulation of the theorem is used; the second spectral equation, which is obtained from the first one by the Weyl transformation, is satisfied if the second expression for ρ is used. Thus, all that remains to do is to prove the consistency of these identifications. For this purpose we calculate the determinants in the equality chain. The first determinant was calculated in the previous section with the result

$$\| \Psi, \dot{\Psi}, \dots, \Psi^{[k]} \| = W_{k+1} \prod_{b=1}^n (\lambda_b^{k+1} - \lambda^{k+1}).$$

For the simplification of all the following formulae we propose

$\prod_{c=1}^n \lambda_c^{k+1} = 1$. For the function $\tilde{\Psi} = \exp - \rho_1 \Psi$, we have

$$\tilde{\Psi} = \prod_{c=1}^n a_c^{-1} \exp(\lambda z + \lambda^{-1} \bar{z}) \prod_{c=1}^n (a_c - \lambda) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^n \lambda^n \exp(\lambda z + \lambda^{-1} \bar{z}) \prod_{c=1}^n (a_c^{-1} - \lambda^{-1}) = \\
 &= (-1)^n \lambda^{-1} \Psi(z \rightarrow \bar{z}, \lambda \rightarrow \lambda^{-1}, a \rightarrow a^{-1}).
 \end{aligned}$$

A common term in (16.4), rewritten in the adopted notations, is calculated by the general scheme and leads to the result

$$\begin{aligned}
 &\exp -\rho_{k+1-s} (-1)^{ns} \lambda^{s(k+1)} \|\Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k-s]}, \Psi^{[s]} \dots \Psi\| = \\
 &= W_{k+1} \exp -\rho_{k+1-s} \prod_{b=1}^n (\lambda_b^{k+1} - \lambda^{k+1}) \det J^{k,s},
 \end{aligned}$$

where the first $k+1-s$ rows of the matrix $J^{k,s}$ coincide with those of the integral of the motion matrix J , with elements

$$\begin{aligned}
 J_{ij} &= \delta_{ij} + B_i^j + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^i a_c^{k-j}}{a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}}, \\
 \tilde{J}_{ij} &= \delta_{ij} + \tilde{B}_{k+1-i}^{k+1-j} + \sum_{c=1}^n \frac{\tilde{A}_c^{k+1-i} a_c^{-k-1+j}}{a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}}.
 \end{aligned}$$

The quantities \tilde{A}, \tilde{B} are obtained from the corresponding quantities A, B by the Weyl transformation. By virtue of the condition of the theorem, the determinant $\|\Psi, \dot{\Psi}, \dots \Psi^{[k-s]}, \Psi^{[s]} \dots \Psi\|$ becomes zero at n points of the λ^{k+1} plan. Thus the concerned determinant (which is a polinom of the n -th power of the λ^{-1}) may differ from the Wandermond determinant only in some factor. Finally, we have

$$\exp \rho_{k+1-s} = \prod_{c=1}^n \frac{a_c^{k+1} - \lambda^{k+1}}{\lambda_c^{k+1} - \lambda^{k+1}} \det J^{k,s}. \tag{16.5}$$

The last expression does not depend on λ and it is convenient to calculate it when $\lambda = 0, \lambda = \infty$. In the first case, the matrix \tilde{J} transforms into upper triangular matrix with unities on the principal diagonal; for this reason, from the last equality we obtain

$$\exp \rho_{k+1-s} = \prod_{c=1}^n a_c^{k+1-s} J_{k-s}^0.$$

In the second case, J transforms into the lower triangular matrix and so (16.5) results in

$$\exp \rho_{k+1-s} = \prod_{c=1}^n a_c^{-s} \tilde{J}_s^\infty.$$

Thus the theorem is proved and one more expression (16.5) is obtained for the solution of the periodic Toda lattice equations of the series A_k .

Let us now write some relations, that are useful for concrete calculations.

Introducing the function $F = \sum_{\alpha=1}^{k+1} c(\lambda_\alpha) \exp(\lambda_\alpha z + \lambda_\alpha^{-1})$ and the notation s_l for

the elementary symmetric functions constructed from a_c , $s_l = \sum_{c \neq b \neq \dots \neq d} a_c a_b \dots a_d$,

we rewrite the expression for the function $\tilde{\Psi}$, which appeared in the formulation of the theorem, in the form

$$\tilde{\Psi} = \sum_{c=0}^n (-1)^c s_{n-s} F^{[c]}, \quad s_0 = 1, \quad F^{(k+1)} = \lambda^{k+1} F, \quad F^{(k+1)} = \lambda^{-k-1} F.$$

The system of equations for determining s_l is written out in the form

$$\sum_{c=0}^n (-1)^c s_{n-s} F_b^{[c]} = 0, \quad 1 < b < n,$$

where each of n functions F_b satisfy the equations

$$F_b^{(k+1)} = \lambda_b^{k+1} F_b, \quad F_b^{(k+1)} = \lambda_b^{-k-1} F_b.$$

For the matrix J_{ij}^0 , we have a recurrence relation, that relates every row with the previous ones and thus allows one to reconstruct the matrix as a whole, using only the elements of its first row. To do this, we take into consideration the fact, in accordance with the definition of J^0 (see (15.5) and the following formulae), that the matrix elements J_{si}^0 appear in the expansions of the functions φ^s in the powers of λ . That is,

$$\begin{aligned} \varphi^s &= \lambda^s + \sum_{i=0}^{s-2} B_s^i \lambda^i + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^s}{a_c - \lambda} = \\ &= \lambda^s + \sum_{i=0}^{s-2} B_s^i \lambda^i + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^s}{a_c} + \sum_{j=1}^\infty \lambda^j \sum_{c=1}^n \frac{A_c^s}{a_c^{j+1}} = \\ &= B_s^0 + \sum_{c=1}^n \frac{A_c^s}{a_c^{-1}} + \sum_1^\infty J_{si}^0 \lambda^i = \varphi_0^s + \sum_1^\infty J_{si}^0 \lambda^i. \end{aligned}$$

The recurrence relations connecting the functions φ^s make it possible to establish the dependence of interest,

$$\begin{aligned} \varphi^{s+1} &= \varphi_0^s + \sum_1^\infty J_{si}^0 \lambda^i = \dot{\varphi}^s + \varphi^s \varphi^1 = \dot{\varphi}_0^s + \varphi_0^s \varphi_0^1 + \\ &+ \varphi_0^1 \sum_1^\infty J_{si}^0 \lambda^i + \varphi_0^s \sum_1^\infty J_{1i}^0 \lambda^i + \sum_1^\infty \lambda^i \sum_{k=1}^{i-1} J_{sk}^0 J_{k,i-k}^0 + \sum_1^\infty \dot{J}_{si}^0 \lambda^i, \\ \dot{J}_{si}^0 &= \varphi_0^s J_{1,i}^0 + \dot{\varphi}_0^1 J_{s,i}^0 + \dot{J}_{si}^0 + \sum_{k=1}^{i-1} J_{sk}^0 J_{k,i-k}^0. \end{aligned}$$

In the latter equation, the first two terms, being proportional to the elements of the first and the s -th rows, do not contribute to the principle minors (one can show that they may be omitted in the recurrence procedure as well). Finally, we arrive at

$$J_{s+1,i}^0 = \dot{J}_{si}^0 + \sum_{k=1}^{i-1} J_{sk}^0 J_{k,i-k}^0.$$

As in the case of Toda lattice with fixed end-points, it is possible to construct solutions for some other series from solutions of the periodic Toda chain for the A_k series. The system of equations of the periodic Toda lattice is invariant under substitution $\rho_\alpha \rightarrow \rho_{k+1-\alpha}$ and consequently among its solutions are those that $\rho_\alpha = \rho_{k+1-\alpha}$. The direct check shows that in the case $k = 2n + 1$ the system of equations of the periodic Toda lattice series A_{2n+1} goes to the system of equations of the periodic Toda lattice series C_n ; in the case $k = 2n$, to series $(AB)_k$.

17. THE GENERAL SOLUTION OF THE PERIODIC TODA LATTICE [36,37]

Here we will consider the problem of constructing the general solution of the systems under consideration; the soluton which possesses the sufficient set of arbitrary functions for the solution of the Cauchy or Goursat problems. We use the methods of construction of the general solution of the Toda chain with the fixed end-points. As is known, the algebra of the inner symmetry of Toda lattice with fixed ends is finite and we thus have the finite number of terms in the expression for $\exp(-\rho)$ in its solution; in the periodic case, the algebra of the inner symmetry is infinite-dimensional and the number of terms in the

corresponding expression if infinite. But it may be possible to prove that these series converge absolutely due to the properties of the semisimple infinite-dimensional algebras of the finite growth.

From the beginning, for convenience we restrict ourselves by the case of one-dimensional equations, which arise from the general system of Toda lattice:

$$\frac{\partial^2 \rho_\alpha}{\partial z \partial \bar{z}} = \sum_{\beta=1}^r K_{\alpha, \beta} \exp \rho_\beta,$$

$$\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial z \partial \bar{z}} = \exp \sum_{\beta=1}^r K_{\alpha, \beta} x_\beta,$$

where $K_{\alpha, \beta}$ coincides with the generalized Cartan matrix of the semisimple infinite-dimensional algebra of the restricted growth. Generalized Cartan matrix for the graded algebras of the second rank brings the latter system of equations to the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}} &= \exp (2x_1 - 2x_2), & \frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}} &= \exp (-2x_1 + 2x_2) \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}} &= \exp (2x_1 - x_2), & \frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}} &= \exp (-4x_1 + 2x_2) \end{aligned} \quad (17.1)$$

which, if variables $x_1 - x_2, 2x_1 - x_2$ are introduced, yields the sin-Gordon

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z \partial \bar{z}} = \exp (2x) - \exp (-2x) \quad \text{and} \quad \text{Dodd-Boullow-Jeber-Schabat} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial \bar{z}} = \exp x - \exp (-2x),$$

respectively in the first and in the second cases. Note that these equations together with the Liouville equation $\frac{\partial^2 x}{\partial z \partial \bar{z}} = \exp 2x$ are

exceptional among all the equations of the form $\frac{\partial^2 x}{\partial z \partial \bar{z}} = f(x)$ due to the presence of the nontrivial group of internal symmetry.

We know that in the case of Toda chain with the fixed endpoints a solution for the $\exp (-x_\alpha)$ is expressed up to multipliers dependent only on z and \bar{z} , through the powers of the repeated integrals of arbitrary functions. Let us assume that such a structure is also valid for the solutions in the contragradient case and rewrite system (17.1) in the form (further on we will use only the first system):

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}} = \varphi_1 \bar{\varphi}_1 \exp (2x_1 - 2x_2), \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}} = \varphi_2 \bar{\varphi}_2 \exp (-2x_1 + 2x_2),$$

where φ_1, φ_2 are arbitrary functions of the argument z ; $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$ are the same of the argument \bar{z} . We have introduced arbitrary functions into (17.1) (it may be done by substitution $x_\alpha \rightarrow x_\alpha + \ln \varphi_\alpha + \ln \bar{\varphi}_\alpha$ and further conformal transformation) which play the role of unhomogeneities. After replacing $\exp(-x_j) \rightarrow X_j$, the previous system becomes

$$X_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial X_1}{\partial z} \frac{\partial X_1}{\partial \bar{z}} = \varphi_1 \bar{\varphi}_1 X_2^2 \quad (X_2),$$

$$X_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial X_2}{\partial z} \frac{\partial X_2}{\partial \bar{z}} = \varphi_2 \bar{\varphi}_2 X_1^2 \quad (X_1^4).$$

In the brackets in the latter equation there are given the r.h.s. for the second system (17.1). In the finite case, X_j are the polynomials in the repeated integrals; the first term being equal to unity. Therefore, we assume that in the «zeroth» approximation in $\varphi_l X_l = X_2 = 1$. Then the equations may be solved through «iterations», where the small quantities are the corresponding powers of $\varphi_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha$. The first order approximation gives

$$X_1^1 = - \int dz \varphi_1 \int d\bar{z} \bar{\varphi}_1 \equiv - (1) (\bar{1}),$$

$$X_2^1 = - \int dz \varphi_2 \int d\bar{z} \bar{\varphi}_2 \equiv - (2) (\bar{2}).$$

The results of the calculations up to the eight order are listed below. It is worth noting that the proposed procedure for solving the systems with the exponential interaction is also applicable in the case of finite semisimple algebras. The only difference from the case of infinite graded algebras is the finiteness of the series in powers of the repeated integrals.

$$\begin{aligned} X_1 = & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{s=1} X_s^k \bar{X}_s^k = 1 - X_1^1 \bar{X}_1^1 + 2X_1^2 \bar{X}_1^2 - 4X_1^3 \bar{X}_1^3 - 2X_2^3 \bar{X}_2^3 + 4X_1^4 \bar{X}_1^4 + \\ & + 8X_2^4 \bar{X}_2^4 - 8X_1^5 \bar{X}_1^5 - 8X_2^5 \bar{X}_2^5 - 16X_3^5 \bar{X}_3^5 + 8X_1^6 \bar{X}_1^6 + 16X_2^6 \bar{X}_2^6 + 16X_3^6 \bar{X}_3^6 + \\ & + 32X_4^6 \bar{X}_4^6 - 16X_1^7 \bar{X}_1^7 - 16X_2^7 \bar{X}_2^7 - 16X_3^7 \bar{X}_3^7 - 32X_4^7 \bar{X}_4^7 - 64X_5^7 \bar{X}_5^7 + \\ & + 32X_1^8 \bar{X}_1^8 + 32X_2^8 \bar{X}_2^8 + 64X_3^8 \bar{X}_3^8 + 64X_4^8 \bar{X}_4^8 + 64X_5^8 \bar{X}_5^8 + 128X_6^8 \bar{X}_6^8. \end{aligned}$$

The upper indices of $X_s^k (\bar{X}_s^k)$ mark the number of approximation, while the lower ones stand for the order number in it. Here are the values for X_s^k ,

$$\begin{aligned}
 X_1^1 &= (1), & X_1^2 &= (12), & X_1^3 &= (122), & X_2^3 &= (121), \\
 X_1^4 &= (1212) + (1221), & X_2^4 &= (1221), & X_1^5 &= (12122) + (12212), \\
 X_2^5 &= (12121) + 2(12211), & X_3^5 &= (12211), \\
 X_1^6 &= (122121) + (121221), & X_2^6 &= (121211) + 3(122111), \\
 X_3^6 &= (121212) + (122121) + (21221) + 2(122112), & X_4^6 &= (122112),
 \end{aligned}$$

where $(ij \dots k) = \int dz_1 \varphi_i \int_{z_1}^{z_2} dz_2 \varphi_j \dots \int_{z_{n-1}}^{z_n} dz_n \varphi_k$ and \bar{X}_j^i arose from X_j^i by the substitution $\varphi_s \rightarrow \bar{\varphi}$, $z \rightarrow \bar{z}$. The X_2 is obtained from X_1 by replacing indices $1 \rightarrow 2$ in the expressions for X_j^i . The number of terms in X_j^i will be called a length of $X_j^i - L(X_j^i)$. Thus $L(X_1^2) = 1$, $L(X_2^5) = 3$, $L(X_3^6) = 5$, etc. Taking into account that $(i, i, \dots, i) = \frac{(i)^s}{s!}$ (where s is the number of the repeated integrals) and the presence of an evident solution $X_1 = X_2 = \exp - (1)(\bar{1})$, when $\varphi_1 = \varphi_2$, we will find from its definition that

$$\sum_s c_s (L(X_s^k))^2 = k!$$

whereof, it follows that for arbitrary functions $\varphi_{1,2}$ and $\bar{\varphi}_{1,2}$ bounded on the intervals (z_0, z) and (\bar{z}_0, \bar{z}) , there is the estimation of the term of the k -th approximation

$$\sum_s c_s X_s^k \bar{X}_s^k \leq \frac{M^k \bar{M}^k}{k!} (z - z_0)^k (\bar{z} - \bar{z}_0)^k,$$

where M is the supremum of the functions $\varphi_{1,2}$ on the interval (z, z_0) , \bar{M} — the same for the functions $\bar{\varphi}_{1,2}$ on the corresponding interval \bar{z}, \bar{z}_0 . The series, which gives the solutions $X_{1,2}$, converges absolutely. For this estimation it is essential that all the terms of the k -th approximation, as well as all the terms in X_j^i enter with the same sign. This is a direct consequence of the properties of the contragraded algebras of the restricted growth. To obtain closed expressions for $X_{1,2}$, which would allow one, in particular, to calculate any term in series, it is necessary to have some information about the representation theory of such algebras.

The set of simple roots of the graded algebras of finite growth X_α^\pm and its Cartan elements h_α obeys the system of commutation relations

$$[X_\alpha^+, X_\beta^-] = \delta_{\alpha,\beta} h_\beta, \quad [h_\beta, X_\alpha^{\pm}] = \pm K_{\alpha,\beta} X_\alpha^{\pm}, \quad (17.2)$$

where K is the generalized Cartan matrix. Classification theorems and explicit form of the matrix K for the algebras under consideration are well known. The Cartan matrix for the considered equations (a, b) has the form

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

In the whole analogue to the finite case, the graded semisimple algebras possess the set of the fundamental representations. Each of these representations is determined by its highest vector $\alpha\rangle$ with the properties

$$X_\beta^+ \alpha\rangle = 0, \quad h_\beta \alpha\rangle = \delta_{\alpha,\beta} \alpha\rangle$$

and all other basic vectors of representation, which is infinite-dimensional in this case, are constructed by consequent applications of the generators of the negative simple roots to the highest vector. The properties of the graded semisimple algebras allow one to construct the invariant bilinear form in the representation space. To calculate the scalar products of basis vectors of the representations with the highest vector it is sufficient to know only the background commutation relations (17.2).

Now we describe the way of constructing the solutions for the case of arbitrary semisimple graded algebras of the finite growth. First of all two equations of the S -matrix type should be solved

$$\frac{\partial M_+}{\partial z} = M_+ L^+(z), \quad \frac{\partial M_-}{\partial \bar{z}} = M_- L^-(\bar{z}),$$

where

$$L^+ = \sum_{\alpha=1}^r \varphi_\alpha(z) X_\alpha^+, \quad L^- = \sum_{\alpha=1}^r \bar{\varphi}_\alpha(\bar{z}) X_\alpha^-.$$

The functions $\varphi_\alpha(z), \bar{\varphi}_\alpha(\bar{z})$ contained in the definition of Lagrangians L^\pm are the arbitrary functions of its arguments. The solutions of S -matrix equations may be represented in the form of ordered integrals, but the number of terms in this expansion will be infinite. In the above notations and definitions for the X_α for the arbitrary semisimple algebras of finite growth we have

$$X_\alpha = \langle \alpha || M_+^{-1} M_- || \alpha \rangle. \quad (17.3)$$

The results at the beginning of this section, obtained by the methods of the perturbation theory, are in fact the special case of the general formulae (17.3).

Coming back to the beginning of this section, we have for the solution of the sin-Gordon equation

$$\exp x = \varphi_1^{\frac{1}{2}} \bar{\varphi}_1^{\frac{1}{2}} X_2 X_1^{-1},$$

where in expressions for $X_{1,2}$, which follow from (17.3), one has to put $\varphi_2 = \varphi_1^{-1}$, $\bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_1^{-1}$. For the solution of second equation (b) we correspondingly get

$$\exp x = \varphi_1 \bar{\varphi}_1 X_2 X_1^{-2}, \quad \varphi_2 = \varphi_1^{-2}, \quad \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_1^{-2}.$$

It should be noticed that, at present, we have no proof of (17.1) except of the series expansion in powers of the repeated integrals and direct check of the validity of (17.3) in each order.

Thus, in the considered case the form of general solution of the periodic Toda lattice is the same as for Toda chain with fixed end points. The main difference is that in the case of finite-dimensional algebras the series (given by the perturbation theory) are finite and in the case of the infinite-dimensional algebras they are infinite. But the demand of restricted growth guarantees their absolute convergence.

Now it is not known how to choose the «creating» functions $\varphi, \bar{\varphi}$ for constructing the soliton solution of the previous section and what is the criterium of the summation of the series corresponding to this situation. It is an interesting unsolved problem.

18. THE SOLUTION OF THE MAIN CHIRAL PROBLEM WITH MOVING POLES BY THE METHODS OF RIEMANN PROBLEM [38,39]

In this section, by the special choice of the coefficient function of the homogeneous Riemann problem we show that its solution is connected with the main chiral field problem with moving poles. This approach is by no means unique; the method of the Backlund transformation leads to the same results.

The main chiral field problem with moving poles is described by the equation

$$(\xi - \bar{\xi}) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} + \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}, \frac{\partial F}{\partial \bar{\xi}} \right] = 0.$$

We illustrate the general scheme of its integration by the example of the simplest case of the $SL(2, C)$ algebra. Let the homogeneous Riemann problem on some contour has its usual form $\Omega_0 \Omega_+ = \Omega_-$, where Ω_{\pm} are the boundary values of two functions analytic out and within the contour respectively. Element Ω_0 is chosen in the form

$$\begin{pmatrix} a & b \left(\frac{\lambda - \xi}{\lambda - \bar{\xi}} \right)^n \\ c \left(\frac{\lambda - \xi}{\lambda - \bar{\xi}} \right)^{-n} & d \end{pmatrix},$$

where a, b, c, d ($ad - cd = 1$) are arbitrary functions of argument λ without any peculiarities under analytic continuation within the contour; the points $\lambda = \xi, \lambda = \bar{\xi}, \lambda = 0$ dispose there. The condition in the neighbourhood of the infinity point of the λ plane is $\Omega_+ \rightarrow 1 + \frac{f}{\lambda}$.

Let us rewrite the Riemann problem in the form more useful for our aim

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tilde{\Omega}_+ = \exp - n \left(\frac{\lambda - \bar{\xi}}{\lambda - \xi} \right) \frac{H}{2} \Omega_-, \tag{18.1}$$

where $\tilde{\Omega}_+ = \exp - n \ln \frac{\lambda - \bar{\xi}}{\lambda - \xi} \frac{H}{2} \Omega_+$ with new asymptotic condition $\tilde{\Omega}_+ \rightarrow 1 +$

$\frac{f + \frac{n}{2} (\xi - \bar{\xi})}{\lambda} = 1 + \frac{F}{\lambda}$. The problem (18.1), being rewritten in the differential form, reads

$$(\lambda - \xi) (\tilde{\Omega}_+)^{-1} (\tilde{\Omega}_+)_\xi = (\lambda - \xi) \Omega_-^{-1} (\Omega_-)_\xi + \Omega_-^{-1} \frac{nH}{2} \Omega_-^{-1},$$

$$(\lambda - \bar{\xi}) (\tilde{\Omega}_+)^{-1} (\tilde{\Omega}_+)_\bar{\xi} = (\lambda - \bar{\xi}) \Omega_-^{-1} (\Omega_-)_\bar{\xi} - \Omega_-^{-1} \frac{nH}{2} \Omega_-^{-1}.$$

Taking into account the Liouville theorem and the properties of the Riemann problem we conclude that both the latter expressions are the polynomials in the whole complex plane. The asymptotic condition added is that the degrees of the polynomial are the zeroes. Calculating these polynomials in the neighbourhood of the infinite point and at the point $\lambda = 0$, which lies within the contour, we have

$$F_\xi = -\xi G^{-1} G_\xi, \quad F_{\bar{\xi}} = -\bar{\xi} G^{-1} G_{\bar{\xi}}, \quad G = \exp - \frac{n}{2} \ln \frac{\bar{\xi}}{\xi} H \Omega(0).$$

With the help of the Maurer–Cartan identity, we conclude now that F obeys the equation of the main chiral field with moving poles.

Let us find the solution of the Riemann problem in the form

$$\Omega_+ = \begin{pmatrix} 1 + \sum_1^n \frac{e_s}{(\lambda - \xi)^s} & \sum_1^n \frac{f_s}{(\lambda - \xi)^s} \\ \sum_1^n \frac{g_s}{(\lambda - \xi)^s} & 1 + \sum_1^n \frac{h_s}{(\lambda - \xi)^s} \end{pmatrix}.$$

Here e_s, f_s, g_s and h_s are $4n$ parameters. They must be chosen so as the element Ω_- would be analytic at the point $\lambda = \xi, \lambda = \bar{\xi}$. Let us denote by $\varphi_s(y)$ the first s terms of its expansion in Taylor series near the point $\lambda = y$, i.e.

$$\varphi_s(y) = \varphi(y) + \frac{\lambda - y}{1!} \varphi(y)^{(1)} + \dots + \frac{(\lambda - y)^s}{s!} \varphi(y)^{(s)}.$$

For the matrix element $(\Omega_-)_{1,1}$ we have

$$\begin{aligned} (\Omega_-)_{1,1} &= a(\lambda) + \sum_1^n \frac{a(\lambda) e_s}{(\lambda - \xi)^s} + \sum_1^n \frac{b(\lambda) (\lambda - \xi)^{n-s} g_s}{(\lambda - \xi)^n} = \\ &= a(\lambda) + \sum_1^n \frac{a(\lambda) - a_{s-1}(\xi) e_s}{(\lambda - \xi)^s} + \sum_1^n \frac{b(\lambda) (\lambda - \bar{\xi})^{n-s} - (b(\lambda) (\lambda - \bar{\xi})^{n-s})_{n-1}(\xi) g_s}{(\lambda - \xi)^n} + \\ &\quad + \sum_1^n \frac{a_{s-1}(\xi) e_s}{(\lambda - \xi)^s} + \sum_1^n \frac{(b(\lambda) (\lambda - \bar{\xi})^{n-s})_{n-1}(\xi) g_s}{(\lambda - \xi)^n}. \end{aligned}$$

Within the contour C , the singularities may have only the terms of the last line of the previous equality. The absence of them in $(\Omega_-)_{1,1}$ is equivalent to the zero values of the residues up to the n -th order in the mentioned expression. The same conditions on the matrix elements $(\Omega_-)_{1,2}, (\Omega_-)_{2,2}, (\Omega_-)_{2,1}$ lead to the linear systems of the algebraic equations, which determine the unknowns e_s, g_s, f_s, h_s . In what follows we shall write them in the form of the n -ordered columns. We have

$$\left(\begin{array}{cc} \Gamma_+(\varphi^{-1}) e + \Gamma_-(\xi, \bar{\xi}) g = 0 & \Gamma_+(\varphi^{-1}) f + \Gamma_-(\xi, \bar{\xi}) h = T \\ (\Gamma_-(\xi, \bar{\xi}))^{-1} e + \Gamma_+(\bar{\varphi}) g = -T & (\Gamma_-(\xi, \bar{\xi}))^{-1} f + \Gamma_+(\bar{\varphi}) h = 0 \end{array} \right),$$

where $\Gamma_+(\varphi)$ ($\Gamma_+(\bar{\varphi})$) are upper triangle matrices all elements of which parallel to the main diagonal are the same and equal to $\frac{1}{s!} \varphi^{(s)}(\xi), \left(\frac{1}{s!} \bar{\varphi}^{(s)}(\bar{\xi}) \right)$, where s is the distance from the main diagonal. On the main diagonal there is

the function $\varphi(\xi)$, $(\overline{\varphi}(\overline{\xi}))$ by itself, on the next place — its first derivative and so on. The functions $\varphi(\xi)$, $\overline{\varphi}(\overline{\xi})$ are connected with the matrix elements of the homogeneous Riemann problem by expressions

$$\varphi(\xi) = \frac{a}{b} (\lambda = \xi), \quad \overline{\varphi}(\overline{\xi}) = \frac{d}{c} (\lambda = \overline{\xi}), \quad \Gamma_+(\varphi_1) \Gamma_-(\varphi_2) = \Gamma_+(\varphi_1 \varphi_2).$$

The s -th line of the lower triangle matrix $= \Gamma_-(\xi, \overline{\xi}) = \Gamma_-(\xi - \overline{\xi}) \equiv \Gamma_-(x)$, consist of terms of the binomial expansion $(1+x)^s$ ($\Gamma_-(-x) = (\Gamma_-(x))^{-1}$)

$$\Gamma_-(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ x^n & x^{n-1} C_n^1 & x^{n-2} C_n^2 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} (-x) C_n^{n-1} \\ \dots \\ \dots \\ (-x)^{n-2} C_n^2 \\ (-x)^{n-1} C_n^1 \\ (-x)^n \end{pmatrix}.$$

In accordance with the previous results, the solution of the main chiral field problem with moving poles is determined by the asymptotics of the homogeneous Riemann problem and its explicit form is

$$F = g_1 X_- + \left(e_1 + (\xi - \overline{\xi}) \frac{n}{2} \right) H + f_1 X_+.$$

The explicit expressions for $e_1 = -h_1$, g_1, f_1 as a solution of the linear system of the algebraic equations () may be represented in the form of the sum of the entries of $n \times n$ matrix, which we denote by the title corresponding to e, g, h, f letters

$$G = (\varphi_- - \varphi_+)^{-1}, \quad E = -\frac{1}{2} (\varphi_- + \varphi_+) (\varphi_- - \varphi_+)^{-1}, \quad F = -\varphi_- (\varphi_- - \varphi_+)^{-1} \varphi_+.$$

where φ_-, φ_+ are the lower and upper triangular matrices with equal entries, represented on the equal distances from the main diagonal. They can be written as

$$\varphi_-^s = -\frac{1}{(s-1)!} \frac{\partial^{s-1}}{\partial \xi^{s-1}} (\xi - \overline{\xi})^s \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \varphi_+^s = \frac{1}{(s-1)!} \frac{\partial^{s-1}}{\partial \overline{\xi}^{s-1}} (\xi - \overline{\xi})^s \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{\xi}},$$

$$s = 1, 2, \dots \quad \varphi_-^0 = \varphi(\xi), \quad \varphi_+^0 = \overline{\varphi}(\overline{\xi}).$$

Now consider some more simple examples. Let $n = 1$. In this case, all matrices G, E, F are one-dimensional and the solution of the main chiral field problem takes the form

$$F = \frac{1}{\varphi - \bar{\varphi}} X_- - \frac{1}{2} \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{\varphi - \bar{\varphi}} H - \frac{\varphi \bar{\varphi}}{\varphi - \bar{\varphi}} X_+$$

This is no more than (up to the gauge transformation) the 't Hooft solution in the spherical symmetric case.

Let $n = 2$. All matrices in the problem are two-dimensional. The matrices φ_{\pm} have the form

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} \bar{\varphi} & x\dot{\bar{\varphi}} \\ 0 & \bar{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi_- = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ -x\varphi' & \varphi \end{pmatrix},$$

where $\dot{}$ mean the differentiation with respect to the independent arguments ξ and $\bar{\xi}$, respectively, as before $x = (\varphi - \bar{\varphi})$. For the solution F we get

$$\begin{aligned} & \frac{x}{D} [(2\delta + x(\varphi' + \dot{\bar{\varphi}})) X_+ + (\delta(\bar{\varphi} + \varphi) + x(\bar{\varphi}\varphi' + \varphi\dot{\bar{\varphi}})) H - \\ & - (2\bar{\varphi}\varphi\delta + x(\bar{\varphi}^2\varphi' + \varphi^2\dot{\bar{\varphi}})) X_-], \end{aligned}$$

where $D = \delta^2 - x^2\dot{\bar{\varphi}}\varphi'$ and $\delta = \varphi - \bar{\varphi}$. The expression for the «instanton» charge density for the main chiral field problem with moving poles was established in the first chapter. For arbitrary n , the solution of the present section reads

$$\begin{aligned} q & \propto \ln \frac{\text{Det}(\varphi_- - \varphi_+)}{(\xi - \bar{\xi})^{n^2}} = \\ & = \frac{1}{(\xi - \bar{\xi})^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} \frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{2} + 1 \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} \ln \frac{\text{Det}(\varphi_- - \varphi_+)}{(\xi - \bar{\xi})^{n^2}}. \end{aligned}$$

If the functions $\bar{\varphi}$ and φ are chosen in the «pole» form

$$\varphi = \sum_1^N \frac{c_s}{\xi + ia_s}, \quad \bar{\varphi} = \sum_1^N \frac{c_s}{\bar{\xi} + ia_s},$$

where c_s, a_s are the real parameters, then after substitution into the charge density and integration over invariant measure we come to the whole charge equal to $N(N \geq n)$.

REFERENCES

1. Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. — Phys.Rev.Lett., 1967, vol.19, No.19, p.1095.
2. Lax P.D. — Commun. Pure and Appl. Math., 1968, vol.21, p.467.
3. Zakharov V.E., Shabat A.B. — Funktsional. Anal. Prilozhen., 1974, vol.8, No.3, p.43.
4. Zakharov V.E., Shabat A.B. — Funktsional. Anal. Prilozhen., 1979, vol.13, No.3, p.13.

5. **Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevsky L.P.** — Theory of Solitons. The Method of the Inverse Scattering Problem. Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).
6. **Ablovitz M.J., Segur H.** — Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM, Philadelphia, 1981.
7. **Takhtajan L.A., Fadeev L.D.** — Hamilton Approach in the Soliton Theory, Moscow, Nauka, 1986 (in Russian).
8. **Chumakov S.M., Leznov A.N., Man'ko V.I.** — Dynamical Symmetries of Nonlinear Equations, A.A.Komar (ed.), Group Theory and the Gravitation and the Physics of Elementary Particles, Nova Science Publ. Comm., New York, 1986, p.232.
9. **Kac V.G.** — Infinite-Dimensional Lie Algebras. Birkhauser, Boston, 1985.
10. **Leznov A.N.** — Teor. Mat. Fiz., 1984, vol.58, p.156 (in Russian).
11. **Leznov A.N.** — In: Proc. 2nd Conf. on Nonlinear Processes in Physics and Turbulence, Kiev, 1983, N.Y.: Gordon and Breach, 1984.
12. **Leznov A.N.** — Funk. Anal. Prilozhen., 1984, vol.18, p.83.
13. **Leznov A.N.** — Lett. to Math. Phys., 1984, vol.15, p.379.
14. **Chumakov S.M., Leznov A.N., Man'ko V.I.** — Lett. Math. Phys., 1984, vol.8, p.297.
15. **Chumakov S.M., Leznov A.N., Man'ko V.I.** — An Algebraic Approach to Soliton Solutions. Lett. Math. Phys., 1984, vol.8, p.413.
16. **Leznov A.N., Man'ko V.I., Chumakov S.M.** — Teor. Mat. Fiz., 1985, vol.63, p.50 (in Russian).
17. **Leznov A.N.** — Preprint IHEP 91-71, Protvino, 1991.
18. **Aliev B.N., Leznov A.N.** — Preprint IHEP 91-72, Protvino, 1991.
19. **Leznov A.N.** — Preprint IHEP 91-136, Protvino, 1991.
20. **Leznov A.N.** — Preprint IHEP 92-71, Protvino, 1992.
21. **Hirota R.** — J. Math. Phys., 1973, vol.14, No.7, p.805.
22. **Kaup D.J., Nevell A.S.** — J. Math. Phys., 1978, vol.19, No.4, p.798.
23. **Chen H.H., Lee Y.C., Lin C.S.** — Phys. scr., 1979, vol.20, No.3/4, p.490.
24. **Shabat A.B., Yamilov R.I.** — Preprint BF AN SSSR (Bashkir Filial Akad. Nauk SSSR), Ufa, 1987.
25. **Shabat A.B., Yamilov R.I.** — Leningrad Math. J., 1991, vol.2, No.2, p.377.
26. **Tachtajan L.A.** — Phys. Lett. A, 1977, vol.64, No.2, p.235.
27. **Zakharov V.E., Tachtajan L.A.** — Teor. Mat. Fiz., 1979, vol.38, No.1, p.26 (in Russian).
28. **Lakshmanan H.** — Phys. Lett. A, 1977, vol.61, No.1, p.53.
29. **Ishimori Y.** — J. Phys. Soc. Japan, 1982, vol.51, p.3036.
30. **Orfanidis S.J.** — Phys. Rev. D, 1980, vol.21, No.6, p.1513.
31. **Sklyanin E.K.** — Preprint LOMI E-3, Leningrad, 1979.
32. **Borovik A.E., Robuk V.N.** — Teor. Mat. Fiz., 1981, vol.46, No.3, p.371.
33. **Pohlmeyer K.** — Comm. Math. Phys., 1981, vol.46, p.207.
34. **Lund F., Regge T.** — Phys. Rev. D, 1976, vol.14, No.6, p.1524.
35. **Leznov A.N.** — Teor. Mat. Fiz., 1980, vol.42, p.343.
36. **Leznov A.N., Smirnov V.G.** — Lett. Math. Phys., 1981, vol.5, p.31.
37. **Leznov A.N., Smirnov V.G., Saveliev M.V.** — Teor. Mat. Fiz., 1981, vol.48, No.1, p.3.
38. **Leznov A.N.** — Preprint IHEP 89-79, Serpukhov, 1989.

39. **Aliev B.N., Leznov A.N.** — Preprint IHEP 89-205, Serpukhov, 1989, Acta Applicande, 1989.
40. **Belov N.A., Leznov A.N., Zakrzewski W.J.** — J. of Phys. A, 1994, vol.27, p.5607.
41. **Belov N.A., Leznov A.N., Zakrzewski W.J.** — Preprint IHEP 94-55, Protvino, 1994.
42. **Derjagin V.B., Leznov A.N.** — Preprint IHEP 94-127, Protvino, 1994.
43. **Leznov A.N., Zakrzewski W.J.** — Preprint IHEP 94-73, Protvino, 1994 (to be published in Nonlinear Math. Phys.).
44. **Leznov A.N.** — Preprint IHEP 91-145, Protvino, 1991.
45. **Devchand C., Leznov A.N.** — Com. of Math. Phys., 1994, vol.160, p.551.
46. **Leznov A.N., Yuzbashyan E.A.** — Lett. in Math. Phys., 1995, vol.35, p.345.
47. **Leznov A.N., Shabat A.B., Yamilov R.I.** — Phys. Lett. A, 1993, vol.174, p.397.
48. **Leznov A.N.** — Teor. Mat. Fiz., 1980, vol.42, p.343.
49. **Leznov A.N., Saveliev M.V.** — Lett. Math. Phys., 1979, vol.3, p.489.
Leznov A.N., Saveliev M.V. — Progress in Physics, Birkhauser-Verlag, Basel, 1982, vol.15, p.290.
50. **Olver P.J.** — Application of Lie Groups to Differential Equations. Springer, Berlin, 1986.
51. **Fairlie D.B., Leznov A.N.** — The Integrable Mapping as the Discrete Group of Internal Symmetry of Integrable Systems. Durham University preprint DTP/93/33, Durham, 1993; Phys. Lett. A, 1995, vol.199, p.360.
52. **Leznov A.N.** — Preprint 94-132 DTP, 1994; Physica D, 1995, vol.87, p.48.
53. **Fairlie D.B., Leznov A.N.** — Preprint IHEP 95-30, Protvino, 1995.
54. **Leznov A.N., Yuzbashyan E.A.** — Preprint IHEP 95-28, Protvino, 1995, (submitted to Lett. Math. Phys.).
55. **Leznov A.N., Yuzbashyan E.A.** — Preprint IHEP 95-29, Protvino, 1995, (submitted to Nonlinear Math. Phys.).
56. **Derjagin V.B., Leznov A.N.** — Preprint IHEP 95-27, Protvino, 1995, (submitted to Nonlinear Math. Phys.).
57. **Derjagin V.B., Leznov A.N., Yuzbashyan E.A.** — MPI 96-39, Bonn, 1996.

БАБА-РАССЕЯНИЕ НА МАЛЫЕ УГЛЫ

А.Б.Арбузов, Э.А.Кураев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор современного состояния теоретического описания процесса электрон-позитронного рассеяния на малые углы. В деталях излагается подход, позволяющий уменьшить теоретическую неопределенность до уровня 0,1%, соответствующего точности, требуемой для прецизионного определения светимости на LEP I. Указанная точность достигается путем точного учета радиационных поправок в первом порядке теории возмущений и логарифмических вкладов во втором порядке. Вклады в третьем порядке учтены в приближении старших логарифмов. Приводятся результаты численных расчетов для условий эксперимента LEP I и дается их сравнение с результатами других групп.

The present status of the theoretical description of the low-angle electron-positron scattering is reviewed. The approach, which allows one to decrease the theoretical uncertainty to 0.1% needed for the precise luminosity determination at LEP I, is described in detail. The precision is reached due to the explicit calculations of the radiative corrections in the first order of perturbation theory and of the logarithmic contributions in the second order. The contributions of the third order are accounted in the leading logarithmic approximation. The results of numerical calculations for LEP I conditions are presented. They are compared with the results of other groups.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сечение σ любого процесса, идущего на электрон-позитронных коллайдерах, определяется как отношение числа событий в секунду N к светимости \mathcal{L} : $\sigma = N/\mathcal{L}$. Светимость — это одна из основных характеристик коллайдеров. Для ее определения измеряется число событий в секунду N_1 какого-либо процесса, сечение которого σ_1 хорошо известно теоретически: $\mathcal{L} = N_1/\sigma_1$. Требования, позволяющие уменьшить статистическую ошибку, предъявляемые к сечению такого эталонного процесса, следующие: оно должно быть достаточно большим, и соответствующие события должны быть достаточно надежно идентифицируемы. Для ускорителей средних

энергий с небольшим числом электронов (позитронов) в сгустках ($\leq 10^{13}$) для этой цели используется процесс двойного тормозного излучения в разные стороны. Однако с увеличением числа частиц в сгустке этот процесс становится непригодным из-за большой вероятности имитации его двумя несвязанными процессами однократного тормозного излучения, произошедшими при столкновении сгустков. Другим процессом, используемым для определения светимости на электрон-позитронных коллайдерах, является процесс e^+e^- -рассеяния (процесс баба-рассеяния). Причем в случае коллайдеров умеренно высоких энергий (Ф- и Ψ-фабрик) с суммарной энергией пучков $\sqrt{s} = 2\varepsilon \leq 1 + 3$ ГэВ отбираются события баба-рассеяния на большие углы (БРБУ). Иногда используются также процессы образования мюонной пары и аннигиляции в фотоны. В случае коллайдеров высоких энергий типа LEP I, LEP II (Женева) более удобен процесс баба-рассеяния на малые (не превышающие 100 мрад) углы (БРМУ). Действительно, сечение этого процесса не убывает с ростом энергии пучков ε благодаря доминирующему вкладу t -канальных диаграмм (мы будем работать в системе центра инерции начальных частиц (СЦИ)). Сечения как упругого, так и ряда неупругих процессов, дающие вклад в измеряемое на эксперименте число событий, могут быть рассчитаны в принципе с любой точностью в рамках хорошо обоснованной в настоящее время теории электрослабого взаимодействия. Более того, за исключением малых адронных поправок и малых эффектов интерференции амплитуд обмена фотоном и Z -бозоном, расчеты могут быть выполнены в рамках квантовой электродинамики (КЭД). Для мобильного определения на эксперименте светимости существенно то, что при достаточно малых углах рассеяния электрона и позитрона при энергии, близкой к $\sqrt{s} = M_Z$, скорость счета числа событий БРМУ на LEP I много выше, чем скорость счета числа событий образования Z -бозона.

Экспериментальная точность измерения светимости непрерывно повышается. Если в начальный период работы LEP I она имела порядок 1%, то в настоящем составляет уже 0,07% (значительно превысив точность, заложенную в проекте) и, вполне возможно, в ближайшем будущем она дойдет до 0,05%. Можно ли снизить неопределенность *теоретического* вычисления сечения БРМУ процесса с учетом реальных экспериментальных условий до уровня экспериментальной? По-видимому, да. Особенно много внимания этому вопросу уделялось в последнее время (см. [1] и ссылки на литературу, там приведенные). Следует отметить, что высокая точность теоретического расчета сечения процесса баба-рассеяния необходима также для прецизионных тестов стандартной модели (СМ), так как этот процесс задает абсолютную нормировку всех процессов на LEP. Теоретическому

расчету сечения процесса БРМУ с учетом экспериментальных условий и гарантированной точностью

$$\frac{\Delta \sigma_{\text{theor}}}{\sigma} \leq 0,1\% \quad (1)$$

и посвящен настоящий обзор.

Подходы к теоретическому описанию сечения БРМУ можно условно разбить на два направления. Первое связано с точным учетом радиационных поправок (РП) в низшем порядке теории возмущений (ТВ) и использованием приближенных формул для учета вкладов высших порядков ТВ. Причем в расчетах сечений неупругих процессов основную роль играют методы Монте-Карло для получения численных результатов с учетом конкретных экспериментальных условий. Этот подход широко освещен в литературе. Наиболее продвинутыми в данном направлении являются работы группы С.Ядаха [2,3], основанные на применении процедуры экспоненциации при учете главных вкладов высших порядков ТВ применительно к дифференциальным сечениям. Именно на результатах этой группы была основана обработка данных на LEP I в период, когда точность эксперимента не превышала 0,25%, т.е. до 1991 г. В настоящее время точность эксперимента увеличилась по крайней мере в четыре раза, и поэтому требования к точности теоретического расчета становятся насущными. При этом использование приближенных формул типа формул экспоненциации, которые только в частном случае согласуются с более общим подходом структурных функций, не обеспечивает нужной точности.

Вторым подходом [4], описанию которого в основном и уделяется внимание ниже, является аналитическое вычисление неведущих вкладов вплоть до второго порядка ТВ. Преимуществом этого подхода является возможность точного вычисления нелидирующих вкладов. Недостатком — необходимость независимого расчета вкладов неупругих процессов при изменении постановки опыта — условий детектирования конечных частиц. Безусловным преимуществом первого подхода является использование метода Монте-Карло в любых постановках опыта, тогда как его недостатком является отсутствие точного учета нелидирующих вкладов.

В работах групп Никрозини [5] и Каффо [6] осуществляется синтез точных результатов, известных в первых порядках ТВ с техникой структурных функций. Используется интегрирование по методу Монте-Карло со взвешенными событиями так, чтобы как можно точнее учесть условия опыта. Специальная техника применяется для сглаживания пиковостей подынтегрального выражения. При этом также нелидирующие вклады высших порядков только оцениваются.

Сечение процесса БРМУ рассчитывается в рамках СМ, причем основные вклады получаются из теории возмущений квантовой электродинамики

(КЭД), а собственно вклады, происходящие при учете тяжелых векторных Z - и W -бозонов, оказывается, достаточно учесть только в борновском приближении. Наряду с процессом упругого рассеяния (с учетом недеформируемых на опыте *мягких* фотонов и e^+e^- -пар), необходимо принимать во внимание также и различные неупругие процессы: излучение дополнительного жесткого фотона, двух жестких фотонов, образование жестких электрон-позитронных пар и т.д. Дифференциальные сечения этих процессов должны быть проинтегрированы по фазовому пространству излученных дополнительных частиц с ограничениями, соответствующими реальным экспериментальным условиям.

Процесс БРМУ, как и любой процесс при высоких энергиях с легкими заряженными фермионами, имеет относительно большие, порядка нескольких процентов, радиационные поправки КЭД-происхождения.

Подчеркнем, что поскольку процедура вычитания КЭД-эффектов применяется к экспериментальным величинам, то все неопределенности вычисления КЭД непосредственно становятся их систематическими ошибками. В случае недавних экспериментов на LEP КЭД-компонента систематических экспериментальных ошибок в определении светимости была такая же, как и аппаратурная систематическая ошибка.

Если КЭД неопределенность так важна, то возникает вопрос — откуда она происходит и как ее уменьшить. Следуя авторам работы [3], мы выделим два равно важных ее истока. Первый — *техническая точность* ошибки в численных приближениях, программные эффекты случайных чисел. Второй — эффекты высших порядков, новой физики и т.д., нелидирующие вклады, это — *физическая точность*. Полная КЭД-неопределенность есть сумма (в квадратурах) технической и физической точностей.

Для оценки технической точности вычисления проводятся разными способами, например, с использованием двух разных программ Монте-Карло, затем производится сравнение и прикладываются усилия для уменьшения ошибки. Группа Ядаха добивается здесь технической ошибки 0,02%.

Источник физической ошибки — вычисление эффектов высших порядков ТВ и оценка отбрасываемых членов. Надо отметить, что надежная оценка технической и физической точности не менее трудоемка, чем само их вычисление.

Единственным путем достижения физической точности в вычислении эффектов высших порядков является явное определение слагаемых, которыми обычно пренебрегают. Именно этот путь и использует подход, созданный в работах с участием авторов. Что же касается подхода группы Ядаха, то они находят верхнюю границу для *малых* вкладов. На этом пути часто приходится развивать свои вычислительные методы и создавать новые программы Монте-Карло. Тем не менее в их работах была поставлена и решена

задача уменьшения неопределенностей до 0,25%. Это было достигнуто сочетанием полуаналитических вычислений и новых программ Монте-Карло, в котором результат первого порядка ТВ воспроизводился точно. Вычисление второго порядка было фактически сведено к учету ведущих слагаемых вида $(\alpha/\pi)^2 L^2$, где L есть т.н. *большой* логарифм, $L = \ln(t_0/m_c^2)$, и t_0 — квадрат характерного переданного импульса ($L \approx 15$ для условий LEP), и оценке нелидирующих вкладов вида $(\alpha/\pi)^2 L$ и вклада процесса образования пар. Так, для нелидирующих вкладов от излучения фотонов неопределенность составила 0,2%, от образования пар 0,1%. Принимая во внимание также неопределенность, вносимую поляризацией вакуума адронами 0,08%, и техническую неопределенность, было получено значение полной теоретической неопределенности 0,25%.

Несколько слов о процедуре экспоненциации Иени — Фраучи — Суура (ИФС) [7], интенсивно используемой группой Ядаха. Она подробно описана в работе [3] (см. ссылки в ней). Авторами построена некоторая синтетическая формула (см. (2) в [3]) для описания излучения фотонов (виртуальных и реальных). Она представляет собой проинтегрированное по состояниям конечных фермионов (с учетом экспериментальных ограничений) произведение известного множителя ИФС, описывающего излучение виртуальных и мягких (с энергией, не превышающей некоторого значения Ω) фотонов, и бесконечной суммы по числу излученных реальных фотонов (с энергией, большей Ω) некоторой комбинации множителей сопровождающего излучения с весовыми множителями, правильно воспроизводящими РП первого порядка ТВ. С помощью методов Монте-Карло эта формула исследовалась авторами на независимость от выбора параметра Ω , на соответствие однопетлевым расчетам и вычислениям сечений неупругих процессов, проведенных группой CALCUL [8], и впоследствии явилась основой в расчете физических неопределенностей КЭД.

У нас нет сомнений, что такой подход правильно описывает поправки первого порядка и является хорошей моделью для учета высших порядков ТВ, по крайней мере в ведущем приближении. Однако сделаем следующие замечания. Авторы не провели сравнения с точными результатами для каналов двойного тормозного излучения и рождения пар на малые углы, полученными в серии работ 70-х годов [9], где, в частности, отмечалось, что приближение множителями сопровождающего излучения является довольно грубым для случая излучения жестких фотонов, и приведены точные формулы. Второе замечание касается применения теоремы Киношита — Ли — Науенберга. Она гарантирует сокращение лидирующих вкладов виртуальных РП и вкладов, происходящих от учета жестких фотонов, при интегрировании по всему спектру, тогда как на опыте на энергии конечных частиц накладывается некоторое ограничение. Третье замечание касается процесса

рождения легких фермионных пар, который не описывается подобными формулами, и в лучшем случае он описывался авторами в приближении структурных функций. Наш подход к учету *физических неопределенностей*, детально представленный ниже, сводится к их явному вычислению. Причем мы вычисляем нелидирующие вклады порядка $(\alpha/\pi)^2 L$ как от процессов излучения фотонов, так и от процессов образования пар.

Специфика малых углов предоставляет некоторые преимущества при проведении расчетов. Так, слагаемые порядка $\theta^2 = 4|t|/s$ при расчете высших порядков ТВ, как правило, могут быть опущены, хотя их учет необходим в борновском приближении. В частности, в случае рассеяния на малые углы появляется возможность пренебречь целым классом поправок, происходящих вследствие так называемой *«верх-низ»-интерференции*.

Мы имеем в виду пропорциональную $\theta^2(\alpha/\pi)^m$ ($n = 1, 2$) величину вклада в поправку к сечению, происходящую за счет интерференции амплитуд, описывающих излучение реальных фотонов и пар вдоль направлений электронного и позитронного начальных пучков. Аналогичное явление имеет место при учете обмена несколькими фотонами в t -канале в случае упругого рассеяния, где имеет место *обобщенное зйкональное представление* для амплитуды. Точная амплитуда процесса с учетом многофотонных обменов отличается от амплитуды в борновском приближении фазовым множителем $\exp\{i\phi\}$ и наличием формфакторов [10]:

$$A(t) = A_0(t)(\Gamma(t))^2 e^{i\phi(t)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha t}{\pi s}\right) \right).$$

Ниже рассчитаны вклады в радиационную поправку порядка (α/π) со степенной точностью (т.е. пренебрегая членами порядка $\mathcal{O}(m^2/|t|)$), а также вклады порядка $(\alpha/\pi)^2$ в логарифмическом приближении (т.е. удерживая только слагаемые, содержащие большой логарифм L). При этом мы убедились в справедливости партонного представления (представления в виде сечения процесса типа Дрелла — Яна) для сечения процесса БРМУ в главном логарифмическом приближении (при удержании только поправок $\sim (\alpha L/\pi)^n$). Кроме того, нелидирующие вклады порядка (α/π) и $(\alpha/\pi)^2 L$ получены явно. Их вид не может быть установлен с помощью формализма ренормализационной группы, определяющей вид сечения в главном логарифмическом приближении.

Поправки, происходящие за счет излучения виртуальных и реальных электрон-позитронных пар, также должны быть учтены с требуемой точностью. Здесь мы снова обнаруживаем, что лидирующие вклады $\sim (\alpha L/\pi)^2$ согласуются с партонным представлением, а нелидирующие вклады должны приниматься во внимание при оценке гарантируемой точности. Вообще

лидирующие вклады в сечение могут быть получены в рамках приближения ренормализационной группы путем итерации уравнений Липатова [11—14] (см. приложение 7).

Знание перечисленных вкладов позволяет гарантировать точность вычислений радиационных поправок к дифференциальному сечению в борновском приближении $d\sigma_0$:

$$d\sigma = d\sigma_0(1 + \delta), \quad \delta = \delta_{\text{lead}} + \delta_{\text{nonlead}} + \Delta\delta, \quad \Delta\delta < 0,1\%, \quad (2)$$

где δ_{lead} обозначает вклад главного логарифмического приближения, а δ_{nonlead} — вклад следующего за лидирующим логарифмического приближения (next-to-leading). Погрешность $\Delta\delta$ содержит не принимаемые нами в расчет вклады типа

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2, \quad \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 L^2, \quad \frac{\alpha}{\pi} \theta^2, \quad \frac{m^2 L^2}{|t|}, \dots$$

Мы также не учитываем вклады высших порядков за счет образования пар тяжелых частиц (пионов, мюонов и т.д., см. разд.8).

Напомним, чем же важно точное измерение светимости и сечений для прецизионной проверки стандартной модели. Известно, что измерение невидимых каналов распада Z -бозона, параметризованное через число сортов нейтрино N_ν , непосредственно зависит от погрешности измерения светимости $\delta\mathcal{L}/\mathcal{L}$. Так как N_ν и $\sigma_{\text{tot}}(M_z)$ весьма слабо зависят от деталей СМ, в частности, от масс хиггс-бозона и топ-кварка, то заметное отличие N_ν от 3 было бы сигналом *новой физики*, не укладывающейся в СМ. Величина $\delta\mathcal{L}/\mathcal{L}$ также непосредственно влияет на точность измерения электрон-позитронной ширины Z -бозона и, следовательно, на точность измерения угла электрослабого смешивания.

В разд.2 мы обсуждаем постановку опыта с симметрично расположенными кольцевыми детекторами малой апертуры. Там мы приводим также известные результаты для сечения в борновском приближении, вычисленные в рамках СМ. В разд.3 рассматривается радиационная поправка за счет излучения одного реального или виртуального фотона. В разд.4,5 вычисляются радиационные поправки в порядке α^2 за счет излучения двух фотонов (реальных или виртуальных) и за счет рождения электрон-позитронной пары (реальной или виртуальной) соответственно. Вклад лидирующих слагаемых вида $(\alpha L/\pi)^3$ приводится в разд.6. В разд.7 рассматривается так называемая *калориметрическая постановка опыта*. В разд.8 мы проводим анализ отбрасываемых слагаемых и точности вычислений. В заключение да-

ется численный анализ результатов и их обсуждение. В приложениях мы приводим вывод с помощью техники Судакова сечения однократного тормозного излучения; детали вычислений виртуальных поправок к однократному тормозному излучению; вычисление вклада полуколлинейарной кинематики в двойном тормозном излучении; сокращение Δ -зависимости в нелидирующих вкладах; представление лидирующих вкладов в терминах структурных функций; анализ случая несимметричных детекторов; итерацию уравнений Липатова.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СЕЧЕНИЕ В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Мы будем рассматривать реакцию

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(q_1) + e^+(q_2) + (n \gamma) + (e^+ e^-) \quad (3)$$

в инклюзивной постановке, т.е. как баба-событие рассматривается одновременная регистрация двумя противоположными детекторами электрона и позитрона. Рассматривается диапазон энергий, характерный для установок LEP I и LEP II: $2\varepsilon = \sqrt{s} = 90 + 200$ ГэВ, ε — энергия начальной частицы в системе центра масс. При обобщении результатов на другие диапазоны энергий будет необходим дополнительный анализ вклада отбрасываемых нами слагаемых. На углы рассеяния накладываются следующие экспериментальные ограничения:

$$\theta_1 < \theta_- = \widehat{p_1 q_1} \equiv \theta < \theta_3, \quad \theta_2 < \theta_+ = \widehat{p_2 q_2} < \theta_4, \quad 0,01 \leq \theta_i \leq 0,1 \text{ рад}, \quad (4)$$

где p_1, q_1 (p_2, q_2) — импульсы начального и рассеянного электрона (позитрона). В рассматриваемом нами случае симметричных кольцевых детекторов мы имеем $\theta_1 = \theta_2$ и $\theta_3 = \theta_4$. При анализе наблюдаемых событий накладывается дополнительное условие на энергии детектируемых частиц:

$$x_1 x_2 < x_c, \quad x_{1,2} = \frac{q_{1,2}^0}{\varepsilon}, \quad (5)$$

x_1 и x_2 — доли энергии конечных электрона и позитрона, x_c — параметр, выбираемый при анализе экспериментальных данных ($0 < x_c < 1$). Под экспериментально наблюдаемым сечением σ_{exp} мы понимаем сечение процесса (3), проинтегрированное в заданном диапазоне углов с учетом условия

(5). На практике возможны также и другие постановки эксперимента. Например, в так называемой калориметрической постановке, которая будет обсуждаться в разд.7, при одновременном попадании в малую область детектора двух или более частиц они будут регистрироваться как одна частица с энергией, равной сумме энергий всех частиц, образовавших *кластер*. В своих расчетах мы считаем, что детектор различает заряженные и нейтральные частицы, в противном случае необходимо учитывать возможность событий, когда одну или обе заряженные конечные частицы имитируют фотоны. В любом случае предлагаемая нами схема вычислений РП допускает модификации, соответствующие весьма широкому классу экспериментальных ситуаций.

В рассматриваемом диапазоне малых углов рассеяния мы можем разлагать выражение для сечения в ряд по степеням угла рассеяния. Главный вклад в дифференциальное сечение $d\sigma/d\theta^2$ происходит за счет диаграммы с однофотонным обменом в t -канале. Этот вклад имеет сингулярность θ^{-4} при $\theta \rightarrow 0$. Оценим величину поправки относительного порядка θ^2 к указанному вкладу. Если

$$\frac{d\sigma}{d\theta^2} \sim \theta^{-4}(1 + c_1\theta^2), \quad (6)$$

то после интегрирования по θ^2 в пределах (4) мы получим

$$\int_{\theta_1^2}^{\theta_3^2} \frac{d\sigma}{d\theta^2} d\theta^2 \sim \theta_1^{-2} \left(1 + c_1\theta_1^2 \ln \frac{\theta_3^2}{\theta_1^2} \right).$$

При $\theta_1 = 50$ мрад и $\theta_3 = 150$ мрад относительный вклад рассматриваемой поправки будет иметь порядок $2,5 \cdot 10^{-3} c_1$. Следовательно, слагаемые относительного порядка θ^2 должны удерживаться только при работе в борновском приближении, где c_1 не мал. В более высоких порядках теории возмущений коэффициент c_1 содержит малый фактор α/π , что позволяет отбрасывать такие вклады. Это означает, что в рассматриваемом диапазоне углов при заданной точности радиационные поправки возникают только за счет фейнмановских диаграмм рассеивательного типа. Более того, мы должны рассматривать при расчете РП только вклады диаграмм с обменом одним фотоном в t -канале вследствие обобщенного эйконоального представления [10].

Принимая во внимание то, что минимальное значение модуля квадрата переданного импульса $|t| = Q^2 = 2\varepsilon^2(1 - \cos \theta)$ порядка 1 ГэВ², мы будем

пренебрегать, не выходя за требуемую точность, слагаемыми, пропорциональными m^2/Q^2 (m — масса электрона), а также аналогичными слагаемыми, возникающими при расчете РП, типа m_μ^2/Q^2 .

Сечение баба-рассеяния в борновском приближении в рамках СМ хорошо известно [15]:

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8s} \{4B_1 + (1-c)^2 B_2 + (1+c)^2 B_3\}, \quad (7)$$

где

$$B_1 = \left(\frac{s}{t}\right)^2 |1 + (g_v^2 - g_a^2) \xi|^2, \quad B_2 = |1 + (g_v^2 - g_a^2) \chi|^2,$$

$$B_3 = \frac{1}{2} \left| 1 + \frac{s}{t} + (g_v + g_a)^2 \left(\frac{s}{t} \xi + \chi\right) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| 1 + \frac{s}{t} + (g_v - g_a)^2 \left(\frac{s}{t} \xi + \chi\right) \right|^2,$$

$$\chi = \frac{\Lambda s}{s - M_Z^2 + iM_Z \Gamma_Z}, \quad \xi = \frac{\Lambda t}{t - M_Z^2},$$

$$\Lambda = \frac{G_F M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha} = (\sin 2\theta_w)^{-2}, \quad g_a = -\frac{1}{2}, \quad g_v = -\frac{1}{2}(1 - 4\sin^2 \theta_w),$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4\varepsilon^2, \quad t = -Q^2 = (p_1 - q_1)^2 = -\frac{1}{2}s(1-c),$$

$$c = \cos \theta, \quad \theta = \widehat{p_1 q_1}.$$

Здесь θ_w — угол Вайнберга. В пределе малых углов, разлагая (7), мы получаем

$$\frac{d\sigma^B}{d\theta} = \frac{8\pi\alpha^2}{\varepsilon^2\theta^4} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{9}{40}\theta^4 + \delta_{\text{weak}} \right),$$

где $\varepsilon = \sqrt{s}/2$ — начальная энергия электрона (позитрона) в СЦИ. Поправка δ_{weak} связана с вкладом диаграмм, учитывающих обмен Z-бозоном, она может быть записана в виде

$$\delta_{\text{weak}} = 2g_v^2 \xi - \frac{\theta^2}{4} (g_v^2 + g_a^2) \text{Re} \chi + \frac{\theta^4}{32} (g_v^4 + g_a^4 + 6g_v^2 g_a^2) |\chi|^2. \quad (8)$$

Из выражения (8) можно видеть, что соответствующий вклад c_1^w в коэффициент c_1 , введенный в (6), дается формулой

$$c_1^w \lesssim 2g_v^2 + \frac{(g_v^2 + g_a^2) M_Z}{4 \Gamma_Z} + \theta_{\max}^2 \frac{(g_v^4 + g_a^4 + 6g_v^2 g_a^2) M_Z^2}{32 \Gamma_Z^2} \simeq 1. \quad (9)$$

Согласно изложенным выше соображениям, это означает, что на борновском уровне вклад Z -бозонного обмена не превышает 0,3%. Следовательно, диаграммы с радиационными поправками, учитывающие обмен Z -бозоном, могут быть отброшены, т.к. они дают вклад, не превышающий 0,01%.

3. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ ПОРЯДКА $\mathcal{O}(\alpha)$ К БАБА-РАССЕЯНИЮ

Рассмотрим сначала поправки за счет излучения одного виртуального или мягкого фотона. В случае чистой электродинамики однопетлевые РП к сечению процесса баба-рассеяния были рассчитаны много лет назад [16]. Принимая во внимание вклад за счет излучения мягкого фотона с энергией, меньшей некоторого малого конечного значения $\Delta\varepsilon$, рассматриваемую однопетлевую поправку можно представить в виде:

$$\frac{d\sigma_{QED}^{(1)}}{dc} = \frac{d\sigma_{QED}^B}{dc} (1 + \delta_{\text{virt}} + \delta_{\text{soft}}), \quad (10)$$

где $d\sigma_{QED}^B$ — борновское сечение в случае чистой КЭД (оно равно $d\sigma^B$ при $g_a = g_v = 0$),

$$\begin{aligned} \delta_{\text{virt}} + \delta_{\text{soft}} = & 2 \frac{\alpha}{\pi} \left[2 \left(1 - \ln \left(\frac{4\varepsilon^2}{m^2} \right) + 2 \ln \left(\text{ctg} \frac{\theta}{2} \right) \right) \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon} + \right. \\ & \left. + \int_{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}} \frac{dx}{x} \ln(1-x) - \frac{23}{9} + \frac{11}{6} \ln \left(\frac{4\varepsilon^2}{m^2} \right) \right] + \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{(3+c^2)^2} \left[\frac{\pi^2}{3} (2c^4 - 3c^3 - 15c) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2(2c^4 - 3c^3 + 9c^2 + 3c + 21) \ln^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) - \\
& - 4(c^4 + c^2 - 2c) \ln^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) - \\
& - 4(c^3 + 4c^2 + 5c + 6) \ln^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + \\
& + \frac{2}{3} (11c^3 + 33c^2 + 21c + 111) \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) + \\
& + 2(c^3 - 3c^2 + 7c - 5) \ln \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) + \\
& + 2(c^3 + 3c^2 + 3c + 9) \delta_t - 2(c^3 + 3c)(1 - c) \delta_s \Big].
\end{aligned}$$

Величина δ_t (δ_s) определяется через вклад в оператор поляризации вакуума фотона $\Pi(t)$ ($\Pi(s)$):

$$\Pi(t) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\delta_t + \frac{1}{3} \ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{5}{9} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \ln \frac{Q^2}{m^2},$$

где

$$Q^2 = -t = 2\varepsilon^2(1 - c), \quad \delta_s = \delta_t(Q^2 \rightarrow -s).$$

Мы удержали только ведущую часть двухпетлевого вклада в поляризационный оператор. В СМ δ_t содержит вклады мюонов, τ -лептонов, W -бозонов и адронов:

$$\delta_t = \delta_t^\mu + \delta_t^\tau + \delta_t^W + \delta_t^H.$$

Первые три вклада могут быть рассчитаны теоретически:

$$\delta_t^\mu = \frac{1}{3} \ln \frac{Q^2}{m_\mu^2} - \frac{5}{9},$$

$$\delta_t^\tau = \frac{1}{2} v_\tau \left(1 - \frac{1}{3} v_\tau^2 \right) \ln \frac{v_\tau + 1}{v_\tau - 1} + \frac{1}{3} v_\tau^2 - \frac{8}{9}, \quad v_\tau = \sqrt{1 + \frac{4m_\tau^2}{Q^2}},$$

$$\delta_t^W = \frac{1}{4} v_W (v_W^2 - 4) \ln \frac{v_W + 1}{v_W - 1} - \frac{1}{2} v_W^2 + \frac{11}{6}, \quad v_W = \sqrt{1 + \frac{4m_W^2}{Q^2}}.$$

Вклад адронов в поляризацию вакуума может быть представлен в виде интеграла от экспериментально измеренного сечения электрон-позитронной аннигиляции в адроны:

$$\delta_t^H = \frac{Q^2}{4\pi\alpha^2} \int_{4m_\pi^2}^{+\infty} \frac{\sigma^{e^+e^- \rightarrow h}(x)}{x + Q^2} dx.$$

В численных расчетах мы используем параметризацию $\Pi(t)$, предложенную в работе [17].

В пределе малых углов рассеяния мы можем представить (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{QED}^{(1)}}{dc} &= \frac{d\sigma_{QED}^B}{dc} (1 - \Pi(t))^{-2} (1 + \delta), \\ \delta &= 2 \frac{\alpha}{\pi} \left[2(1 - L) \ln \frac{1}{\Delta} + \frac{3}{2} L - 2 \right] + \frac{\alpha}{\pi} \theta^2 \Delta_\theta + \frac{\alpha}{\pi} \theta^2 \ln \Delta, \\ \Delta_\theta &= \frac{3}{16} l^2 + \frac{7}{12} l - \frac{19}{18} + \frac{1}{4} (\delta_l - \delta_s), \\ \Delta &= \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}, \quad l = \ln \frac{Q^2}{s} \simeq \ln \frac{\theta^2}{4}. \end{aligned} \quad (11)$$

Это представление дает нам возможность явно проверить утверждение о малости вклада в РП слагаемых относительного порядка θ^2 . Принимая во внимание то, что большие по величине слагаемые, пропорциональные $\ln \Delta$, сокращаются в сумме при добавлении вклада за счет излучения жесткого фотона, можно убедиться в малости вклада в коэффициент c_1 , следующего из рассмотренных однопетлевых поправок. Далее мы будем систематически отбрасывать вклады в РП аннигиляционных диаграмм, а также диаграмм с обменом несколькими фотонами в t -канале. Второе следует из обобщенного эйконального представления, которое применимо в случае малых углов рассеяния. В частности, в случае упругого рассеяния мы имеем [10]:

$$A(s, t) = A_0(s, t) F_1^2(t) (1 - \Pi(t))^{-1} e^{i\varphi(t)} \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{\alpha Q^2}{\pi s} \right) \right], \quad s \gg Q^2 \gg m^2, \quad (12)$$

где $A_0(s, t)$ — борновская амплитуда, $F_1(t)$ — дираковский формфактор электрона и $\varphi(t) = -\alpha \ln(Q^2/\lambda^2)$ представляет собой известную кулоновскую фазу, λ здесь и далее — вспомогательный параметр, введенный как масса фотона. Эйкональное представление нарушается на трехпетлевом

уровне, однако соответствующий вклад в сечение рассматриваемого процесса достаточно мал ($\sim \alpha^5$) и может быть отброшен; т.е. мы можем считать обобщенное эйкональное представление верным в рамках заданной точности*.

Введем теперь безразмерную величину $\Sigma = (Q_1^2 \sigma_{\text{exp}}) / (4\pi\alpha^2)$, где $Q_1^2 = \varepsilon^2 \theta_1^2$, а σ_{exp} обозначает экспериментально наблюдаемое сечение:

$$\Sigma = \frac{Q_1^2}{4\pi\alpha^2} \int dx_1 \int dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \int d^2 \mathbf{q}_1^\perp \Theta_1^c \int d^2 \mathbf{q}_2^\perp \Theta_2^c \times \\ \times \frac{d\sigma\{e^+ + e^- \rightarrow e^+(\mathbf{q}_2^\perp, x_2) + e^-(\mathbf{q}_1^\perp, x_1) + X\}}{dx_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2 \mathbf{q}_2^\perp},$$

где $x_{1,2}$, $\mathbf{q}_{1,2}^\perp$ обозначают доли энергии и поперечные по отношению к оси начальных пучков составляющие импульсов конечных электрона (индекс 1) и позитрона (индекс 2). Величина sx_c задает экспериментальное обрешение по квадрату инвариантной массы регистрируемых частиц. Обобщенные функции $\Theta_{1,2}^c$ задают пределы интегрирования по углам (4):

$$\Theta_1^c = \Theta\left(\theta_3 - \frac{|\mathbf{q}_1^\perp|}{x_1 \varepsilon}\right) \Theta\left(\frac{|\mathbf{q}_1^\perp|}{x_1 \varepsilon} - \theta_1\right), \quad \Theta_2^c = \Theta\left(\theta_4 - \frac{|\mathbf{q}_2^\perp|}{x_2 \varepsilon}\right) \Theta\left(\frac{|\mathbf{q}_2^\perp|}{x_2 \varepsilon} - \theta_2\right).$$

В случае симметричной по углам вылета позитрона и электрона постановки опыта можно ввести параметр ρ :

$$\rho = \frac{\theta_3}{\theta_1} = \frac{\theta_4}{\theta_2} > 1.$$

Представим Σ как сумму рассматриваемых вкладов:

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma^\gamma + \Sigma^{2\gamma} + \Sigma^{e^+ e^-} + \Sigma^{3\gamma} + \Sigma^{e^+ e^- \gamma}, \quad (13)$$

*В недавней работе [18] авторы обнаружили нарушение обобщенного эйконального представления на двухпетлевом уровне. Мы не согласны с таким утверждением, так как полученный в [18] результат ошибочен в инфракрасном пределе.

где Σ_0 обозначает модифицированное борновское сечение, Σ^γ дает вклад излучения одного фотона (реального или виртуального), и так далее. Мы модифицировали первый член ряда теории возмущений, явно введя в него учет поляризации вакуума виртуального фотона в t -канале:

$$\Sigma_0 = \theta_1^2 \int_{\theta_1^2}^{\theta_2^2} \frac{d\theta^2}{\theta^4} (1 - \Pi(t))^{-2} + \Sigma_W + \Sigma_\theta, \quad (14)$$

где Σ_W — поправка за счет электрослабых взаимодействий:

$$\Sigma_W = \theta_1^2 \int_{\theta_1^2}^{\theta_2^2} \frac{d\theta^2}{\theta^4} \delta_{\text{weak}}, \quad (15)$$

и слагаемое Σ_θ отражает учет следующих членов разложения по степеням θ^2 точного выражения для сечения в борновском приближении:

$$\Sigma_\theta = \theta_1^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \left(-\frac{1}{2} + z \theta_1^2 \frac{9}{40} \right). \quad (16)$$

Ниже мы рассмотрим остальные вклады в Σ .

Рассмотрим теперь вклад за счет излучения одного жесткого фотона. Запишем дифференциальное сечение процесса однократного тормозного излучения при баба-рассеянии через доли энергии $x_{1,2}$ и поперечные составляющие импульсов конечных частиц в виде [9] (см. приложение 1):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_B^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma}}{dx_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2 \mathbf{q}_2^\perp} &= \frac{2\alpha^3}{\pi^2} \left\{ \frac{R(x_1; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{q}_2^\perp) \delta(1-x_2)}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2 (1 - \Pi(-\mathbf{q}_2^\perp)^2)} + \right. \\ &\left. + \frac{R(x_2; \mathbf{q}_2^\perp, \mathbf{q}_1^\perp) \delta(1-x_1)}{(\mathbf{q}_1^\perp)^2 (1 - \Pi(-\mathbf{q}_1^\perp)^2)} \right\} (1 + \mathcal{O}(\theta^2)), \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R(x; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{q}_2^\perp) &= \frac{1+x^2}{1-x} \left[\frac{\mathbf{q}_2^\perp{}^2 (1-x)^2}{d_1 d_2} - \frac{2m^2 (1-x)^2 x}{1+x^2} \frac{(d_1 - d_2)^2}{d_1^2 d_2^2} \right], \\ d_1 &= m^2 (1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}_2^\perp)^2, \quad d_2 = m^2 (1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - x \mathbf{q}_2^\perp)^2. \quad (18) \end{aligned}$$

Выше мы опять использовали поправку за счет поляризации вакуума в пропагаторе виртуального фотона в t -канале. Выполняя тривиальное интегрирование по азимутальному углу в (17), мы получаем вклад за счет излучения одного жесткого фотона Σ^H в виде

$$\Sigma^H = \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} F(x, D_1, D_3; D_2, D_4), \quad (19)$$

где

$$F = \int_{D_1}^{D_3} dz_1 \int_{D_2}^{D_4} \frac{dz_2}{z_2} (1 - \Pi(-z_2 Q_1^2))^{-2} \left\{ \frac{1-x}{z_1 - xz_2} (a_1^{-1/2} - xa_2^{-1/2}) - \right. \\ \left. - \frac{4x\sigma^2}{1+x^2} [a_1^{-3/2} + x^2 a_2^{-3/2}] \right\},$$

$$a_1 = (z_1 - z_2)^2 + 4z_2 \sigma^2, \quad a_2 = (z_1 - x^2 z_2)^2 + 4x^2 z_2 \sigma^2, \quad \sigma^2 = \frac{m^2}{Q_1^2} (1-x)^2.$$

Пределы интегрирования в случае симметричных детекторов равны

$$D_1 = x^2, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = x^2 \rho^2, \quad D_4 = \rho^2. \quad (20)$$

Перепишем рассматриваемый вклад в окончательном виде (детали приведены в приложении 1):

$$\Sigma^H = \frac{\alpha}{\pi} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-z Q_1^2))^{-2} \times \\ \times \{ [1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)] (L - 1) + k(x, z) \},$$

$$k(x, z) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} [1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)] + L_1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z) L_2 +$$

$$+ \Theta(z - x^2 \rho^2) L_3, \quad (21)$$

где $L = \ln(zQ_1^2/m^2)$ и

$$L_1 = \ln \left| \frac{x^2(z-1)(\rho^2-z)}{(x-z)(x\rho^2-z)} \right|, \quad L_2 = \ln \left| \frac{(z-x^2)(x^2\rho^2-z)}{x^2(x-z)(x\rho^2-z)} \right|,$$

$$L_3 = \ln \left| \frac{(z-x^2)(x\rho^2-z)}{(x-z)(x^2\rho^2-z)} \right|. \quad (22)$$

Из выражения (21) видно, что Σ^H содержит вспомогательный параметр Δ . Этот параметр сокращается, как это и должно быть, в сумме $\Sigma^\gamma = \Sigma^H + \Sigma^{V+S}$, где Σ^{V+S} — вклад мягких и виртуальных фотонов, этот вклад получается из (11). Для суммы имеем

$$\Sigma^\gamma = \frac{\alpha}{\pi} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^1 dx (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \left\{ (L-1) P(x) \times \right.$$

$$\left. \times [1 + \Theta(x^2\rho^2-z)] + \frac{1+x^2}{1-x} k(x, z) - \delta(1-x) \right\}, \quad (23)$$

где

$$P(x) = \left(\frac{1+x^2}{1-x} \right)_+ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1+x^2}{1-x} \Theta(1-x-\Delta) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{2} + 2\ln \Delta \right) \delta(1-x) \right\} \quad (24)$$

является известным несинглетным ядром уравнений эволюции.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ДВУХ ФОТОНОВ В ПРОЦЕССЕ БАБА-РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим поправки за счет излучения фотонов, как реальных, так и виртуальных. Проанализируем сначала виртуальные двухпетлевые поправки $d\sigma_{VV}^{(2)}$ к дифференциальному сечению упругого рассеяния. Используя представление (12) и петлевое разложение дираковского формфактора электрона

$$F_1 = 1 + \frac{\alpha}{\pi} F_1^{(1)} + \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 F_1^{(2)}, \quad (25)$$

мы получаем

$$\frac{d\sigma_{VV}^{(2)}}{dc} = \frac{d\sigma_0}{dc} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} [6(F_1^{(1)})^2 + 4F_1^{(2)}]. \quad (26)$$

Однопетлевой вклад в формфактор хорошо известен:

$$F_1^{(1)} = (L-1) \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{3}{4} L - \frac{1}{4} L^2 - 1 + \frac{1}{2} \zeta_2,$$

$$\zeta_2 = \sum_1^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (27)$$

Двухпетлевой вклад может быть найден в работе [19]. Нам будет удобно представить его в следующем виде:

$$F_1^{(2)} = F_1^{\mathcal{Y}} + F_1^{e^+e^-}, \quad (28)$$

где слагаемое $F_1^{e^+e^-}$ связано с поляризацией вакуума e^+e^- -парам:

$$F_1^{e^+e^-} = -\frac{1}{36} L^3 + \frac{19}{72} L^2 - \left(\frac{265}{216} + \frac{1}{6} \zeta_2 \right) L + \mathcal{O}(1), \quad (29)$$

$$F_1^{\mathcal{Y}} = \frac{1}{32} L^4 - \frac{3}{16} L^3 + \left(\frac{17}{32} - \frac{1}{8} \zeta_2 \right) L^2 + \left(-\frac{21}{32} - \frac{3}{8} \zeta_2 + \frac{3}{2} \zeta_3 \right) L +$$

$$+ \frac{1}{2} (L-1)^2 \ln^2 \frac{m}{\lambda} + (L-1) \left[-\frac{1}{4} L^2 + \frac{3}{4} L - 1 + \frac{1}{2} \zeta_2 \right] \ln \frac{\lambda}{m} + \mathcal{O}(1),$$

$$\zeta_3 = \sum_1^{\infty} n^{-3} \approx 1,2020569. \quad (30)$$

Вспомогательный параметр λ (масса фотона), входящий в приведенные выражения, сократится в сумме с вкладом за счет излучения мягких фотонов:

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{dc} = \frac{d\sigma_{VV}^{(2)}}{dc} + \frac{d\sigma_{SS}^{(2)}}{dc} + \frac{d\sigma_{SV}^{(2)}}{dc}. \quad (31)$$

Дифференциальное сечение $d\sigma_{SS}^{(2)}/dc$ отвечает излучению двух мягких фотонов, причем энергия, уносимая каждым из них, не превышает Δ ($\Delta \ll 1$):

$$d\sigma_{SS}^{(2)} = d\sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} 8 \left[(L - 1) \ln \frac{m\Delta}{\lambda} + \frac{1}{4} L^2 - \frac{1}{2} \zeta_2 \right]^2. \quad (32)$$

Вклад же излучения одного мягкого фотона с однопетлевой виртуальной поправкой равен

$$d\sigma_{SV}^{(2)} = d\sigma_0 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 (1 - \Pi(t))^{-2} 16F_1^{(1)} \left[(L - 1) \ln \frac{m\Delta}{\lambda} + \frac{1}{4} L^2 - \frac{1}{2} \zeta_2 \right]. \quad (33)$$

Вклад рассмотренной суммы, за исключением слагаемых, входящих в $F_1^{e^+e^-}$, содержит степени большого логарифма L не выше второй. Он имеет вид

$$\Sigma_{S+V}^{\gamma\gamma} = \Sigma_{VV} + \Sigma_{VS} + \Sigma_{SS} = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} R_{S+V}^{\gamma\gamma}. \quad (34)$$

Представим для удобства величину $R_{S+V}^{\gamma\gamma}$ в виде суммы:

$$\begin{aligned} R_{S+V}^{\gamma\gamma} &= r_{S+V}^{\gamma\gamma} + r_{S+V\gamma\gamma} + r_{S+V\gamma}^{\gamma}, \\ r_{S+V}^{\gamma\gamma} &= r_{S+V\gamma\gamma} = L^2 \left(2\ln^2 \Delta + 3\ln \Delta + \frac{9}{8} \right) + \\ &+ L \left(-4\ln^2 \Delta - 7\ln \Delta + 3\zeta_3 - \frac{3}{2} \zeta_2 - \frac{45}{16} \right), \\ r_{S+V\gamma}^{\gamma} &= 4 \left[(L - 1) \ln \Delta + \frac{3}{4} L - 1 \right]^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Вклад формфактора $F_1^{e^+e^-}$ будет рассмотрен ниже.

Рассмотрим теперь поправки к излучению одного жесткого фотона за счет излучения мягкого или виртуального фотона. Здесь мы выделим два случая: в первом излучение обоих фотонов происходит из одной и той же фермионной линии, а во втором — из разных. Верхние индексы обозначают излучение из электронной линии, а нижние — из позитронной:

$$d\sigma|_{H, (S+V)} = d\sigma^{H(S+V)} + d\sigma_{H(S+V)} + d\sigma_{(S+V)}^H + d\sigma_H^{(S+V)}. \quad (36)$$

В случае излучения разными фермионами получаем

$$\Sigma_{(S+V)}^H + \Sigma_H^{(S+V)} = 2\Sigma^H \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \left[(L-1) \ln \Delta + \frac{3}{4} L - 1 \right], \quad (37)$$

где Σ^H задается выражением (21). Более сложный результат получается при вычислении РП к излучению жесткого фотона из той же фермионной линии. В этом случае сечение может быть получено с помощью комптоновского тензора с *тяжелым фотоном* [20], описывающего процесс

$$\gamma^*(q) + e^-(p_1) \rightarrow e^-(q_1) + \gamma(k) + (\gamma_{\text{soft}}). \quad (38)$$

В пределе малых углов излучения жесткого фотона мы имеем

$$d\sigma^{H(S+V)} = \frac{\alpha^4 dx d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{4x(1-x)(\mathbf{q}_2^\perp)^4 \pi^3} [(B_{11}(s_1, t_1) + x^2 B_{11}(t_1, s_1)) \eta + T],$$

$$T = T_{11}(s_1, t_1) + x^2 T_{11}(t_1, s_1) + x(T_{12}(s_1, t_1) + T_{12}(t_1, s_1)),$$

$$\eta = 2 \left(L - \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{-u_1} - 1 \right) (2 \ln \Delta - \ln x) + 3L - \ln^2 x - \frac{9}{2}, \quad (39)$$

где $\Delta = \Delta \epsilon / \epsilon \ll 1$ ($\Delta \epsilon$ — максимальная энергия мягкого фотона);

$$B_{11}(s_1, t_1) = (-4(\mathbf{q}_2^\perp)^2) / (s_1 t_1) - 8m^2 / s_1^2 \quad (40)$$

есть нужная нам борновская компонента комптоновского тензора; инварианты определены следующим образом:

$$s_1 = 2q_1 k, \quad t_1 = -2p_1 k, \quad u_1 = (p_1 - q_1)^2, \quad s_1 + t_1 + u_1 = q^2. \quad (41)$$

Конечный результат (см. приложение 2) имеет вид

$$\Sigma^{H(S+V)} = \Sigma_{H(S+V)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_x^{1-\Delta} \frac{dx(1+x^2)}{1-x} L \times$$

$$\times \left\{ \left(2 \ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times [(L-1)(1+\Theta) + k(x, z)] + \frac{1}{2} \ln^2 x + \\
 & + (1+\Theta)[-2 + \ln x - 2 \ln \Delta] + \\
 & + (1-\Theta) \left[\frac{1}{2} L \ln x + 2 \ln \Delta \ln x - \ln x \ln(1-x) - \right. \\
 & \left. - \ln^2 x - \text{Li}_2(1-x) - \frac{x(1-x) + 4x \ln x}{2(1+x^2)} \right] - \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \Big\}, \quad (42)
 \end{aligned}$$

где $k(x, z)$ дано в (21), $\Theta = \Theta(x^2 \rho^2 - z)$.

Рассмотрим теперь двойное тормозное излучение жестких фотонов в процессе баба-рассеяния на малые углы. Опять мы выделяем два случая: когда два фотона излучаются из разных фермионных линий, и когда они излучаются одним из фермионов. Дифференциальное сечение в первом случае может быть получено с помощью факторизационного свойства сечения в представлении импакт-параметров. Оно принимает вид [9]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow (e^+\gamma)(e^-\gamma)}}{dx_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp dx_2 d^2 \mathbf{q}_2^\perp} &= \frac{\alpha^4}{\pi^3} \int \frac{d^2 \mathbf{k}^\perp}{\pi(\mathbf{k}^\perp)^4} (1 - \Pi((- \mathbf{k}^\perp)^2))^{-2} \times \\
 &\times R(x_1; \mathbf{q}_1^\perp, \mathbf{k}^\perp) R(x_2; \mathbf{q}_2^\perp, -\mathbf{k}^\perp), \quad (43)
 \end{aligned}$$

где $R(x; \mathbf{q}^\perp, \mathbf{k}^\perp)$ дано в (18). Вычисление соответствующего вклада Σ_H^H в Σ аналогично вычислениям в случае однократного тормозного излучения жесткого фотона. Получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_H^H &= \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty dz z^{-2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx_1 \int_{\frac{x_c}{x_1}}^{1-\Delta} dx_2 \times \\
 &\times \frac{1+x_1^2}{1-x_1} \frac{1+x_2^2}{1-x_2} \Phi(x_1, z) \Phi(x_2, z), \quad (44)
 \end{aligned}$$

где (см. (22)):

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, z) &= (L-1)[\Theta(z-1) \Theta(\rho^2 - z) + \Theta(z-x^2) \Theta(\rho^2 x^2 - z)] + \\
 &+ L_3[-\Theta(x^2 - z) + \Theta(z - x^2 \rho^2)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(L_2 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right) \Theta(z-x^2) \Theta(x^2\rho^2-z) + \\
& + \left(L_1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right) \Theta(z-1) \Theta(\rho^2-z) + \\
& + (\Theta(1-z) - \Theta(z-\rho^2)) \ln \left| \frac{(z-x)(\rho^2-z)}{(x\rho^2-z)(z-1)} \right|.
\end{aligned}$$

При рассмотрении двойного тормозного излучения в одну сторону (из одной и той же лептонной линии) мы будем пользоваться методом, развитым Н.П.Меренковым [21,22]. Мы будем различать *коллинеарную* и *полуколлинеарную* кинематики излучения фотонов. В первом случае все излученные фотоны движутся внутри узкого конуса вокруг направления движения одной из заряженных частиц (начальной или конечной). Углы между импульсами фотонов и одним из импульсов лептонов не превышают некоторого вспомогательного параметра θ_0 :

$$\theta_i \leq \theta_0 \ll 1. \quad (45)$$

В полуколлинеарной кинематической области фазового пространства только один из рожденных фотонов движется внутри такого конуса (с тем же углом θ_0), а второй — вне конусов (всего имеется четыре конуса: два вокруг импульсов начальных частиц и два вокруг импульсов конечных частиц). При полностью инклюзивном определении сечения рассеяния введенное разделение не имеет физического смысла, и в конечном результате параметр θ_0 сокращается. Возможны, однако, такие экспериментальные условия, когда θ_0 будет иметь наглядный физический смысл. Например, в калориметрической постановке опыта θ_0 может рассматриваться как минимальный угол между фотоном и заряженной частицей, при котором они детектируются раздельно (при меньших углах две частицы создают в калориметре один кластер, что приводит к их регистрации как одной частицы с суммарной энергией).

При вычислениях мы рассматривали для определенности только излучение из электронной линии — вклад излучения позитрона тождествен. Сумма вкладов обеих кинематик (некоторые детали вычислений приведены в приложении 3) имеет вид

$$\Sigma^{HH} = \Sigma_{HH} = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} dz z^{-2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \times$$

$$\times \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \int_{\Delta}^{1-x-\Delta} dx_1 \frac{I^{HH}L}{x_1(1-x-x_1)(1-x_1)^2},$$

$$I^{HH} = A \Theta(x^2 \rho^2 - z) + B + C \Theta((1-x_1)^2 \rho^2 - z), \quad (46)$$

где

$$A = \gamma\beta \left(\frac{L}{2} + \ln \frac{(\rho^2 x^2 - z)^2}{x^2 (\rho^2 x(1-x_1) - z)^2} \right) +$$

$$+ (x^2 + (1-x_1)^4) \ln \frac{(1-x_1)^2(1-x-x_1)}{xx_1} + \gamma_A,$$

$$B = \gamma\beta \left(\frac{L}{2} + \ln \left| \frac{x^2(z-1)(\rho^2-z)(z-x^2)(z-(1-x_1)^2)^2(\rho^2 x(1-x_1)-z)^2}{(\rho^2 x^2-z)(z-(1-x_1))^2(\rho^2(1-x_1)^2-z)^2(z-x(1-x_1))^2} \right| \right) +$$

$$+ (x^2 + (1-x_1)^4) \ln \frac{(1-x_1)^2 x_1}{x(1-x-x_1)} + \delta_B,$$

$$C = \gamma\beta \left(L + 2 \ln \left| \frac{x(\rho^2(1-x_1)^2-z)^2}{(1-x_1)^2(\rho^2 x(1-x_1)-z)(\rho^2(1-x_1)-z)} \right| \right) -$$

$$- 2(1-x_1)\beta - 2x(1-x_1)\gamma,$$

$$\gamma = 1 + (1-x_1)^2, \quad \beta = x^2 + (1-x_1)^2,$$

$$\gamma_A = xx_1(1-x-x_1) - x_1^2(1-x-x_1)^2 - 2(1-x_1)\beta,$$

$$\delta_B = xx_1(1-x-x_1) - x_1^2(1-x-x_1)^2 - 2x(1-x_1)\gamma.$$

Можно убедиться, что комбинации

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} r_{S+V}^{\gamma} + \Sigma^{H(S+V)} + \Sigma^{HH},$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} r_{S+V}^{\gamma} + \Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^{S+V} + \Sigma_H^H \quad (47)$$

не зависят от Δ при $\Delta \rightarrow 0$ (см. приложение 4).

Полное выражение для $\Sigma^{2\gamma}$, которое описывает вклады в (2) за счет излучения двух фотонов, как реальных, так и виртуальных, определяется суммой

$$\begin{aligned}\Sigma^{2\gamma} &= \Sigma_{S+V}^{\gamma\gamma} + 2\Sigma^{H(V+S)} + 2\Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^H + 2\Sigma^{HH} = \\ &= \Sigma^{\gamma\gamma} + \Sigma_V^{\gamma} + \Phi^{\gamma\gamma} + \Phi_V^{\gamma},\end{aligned}\quad (48)$$

которая не зависит от вспомогательного параметра Δ .

Вклады в ведущем логарифмическом приближении (см. приложение 5) имеют вид

$$\begin{aligned}\Sigma^{\gamma\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} L^2 dz z^{-2} (1 - \Pi(-Q_1^2 z))^{-2} \int_{x_c}^1 dx \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} P^{(2)}(x) [\Theta(x^2 \rho^2 - z) + 1] + \int_x^1 \frac{dt}{t} P(t) P\left(\frac{x}{t}\right) \Theta(t^2 \rho^2 - z) \right\},\end{aligned}\quad (49)$$

$$\begin{aligned}P^{(2)}(x) &= \int_x^1 \frac{dt}{t} P(t) P\left(\frac{x}{t}\right) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \left[\left(2\ln \Delta + \frac{3}{2} \right)^2 - 4\zeta_2 \right] \delta(1-x) + \right. \\ &+ 2 \left[\frac{1+x^2}{1-x} \left(2\ln(1-x) - \ln x + \frac{3}{2} \right) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} (1+x) \ln x - 1 + x \right] \Theta(1-x-\Delta) \right\},\end{aligned}\quad (50)$$

$$\begin{aligned}\Sigma_V^{\gamma} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_0^{\infty} L^2 dz z^{-2} (1 - \Pi(-Q_1^2 z))^{-2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{\frac{x_c}{x_1}}^1 dx_2 P(x_1) P(x_2) \times \\ &\times [\Theta(z-1) \Theta(\rho^2 - z) + \Theta(z-x_1^2) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z)] \times \\ &\times [\Theta(z-1) \Theta(\rho^2 - z) + \Theta(z-x_2^2) \Theta(x_2^2 \rho^2 - z)].\end{aligned}\quad (51)$$

Видно, что ведущие вклады в $\Sigma^{2\gamma}$ представляются через ядра уравнений эволюции структурных функций.

Функции $\varphi^{\gamma\gamma}$ и $\varphi_{\gamma}^{\gamma}$ в (48) собирают нелидирующие вклады, которые не могут быть получены методом структурных функций [11—14]. Их явный вид может быть установлен из сравнения результатов в логарифмическом и ведущем логарифмическом приближениях, приведенных выше.

5. РОЖДЕНИЕ e^+e^- -ПАР В ПРОЦЕССЕ БАБА-РАССЕЯНИЯ

Обратимся теперь к поправкам порядка $O(\alpha^2)$, связанным с рождением e^+e^- -пар в процессе баба-рассеяния на малые углы. Мы должны учесть вклады виртуальных, мягких и жестких реальных пар. Причем в случае рождения жестких пар нужно рассматривать как коллинеарную, так и полуколлинеарную кинематические ситуации. Будем считать, что в процессе с рождением пары

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(q_1) + e^+(q_2) + e^-(p_-) + e^+(p_+)$$

регистрируются электрон и позитрон с импульсами q_1 и q_2 соответственно. Тождественность двух пар частиц в конечном состоянии принимается во внимание путем рассмотрения соответствующих диаграмм Фейнмана.

Область коллинеарной кинематики мы определяем как ту область фазового пространства конечных частиц, в которой электрон и позитрон из недетектируемой пары движутся внутри узкого конуса вокруг направления импульса одной из заряженных начальных или детектируемых конечных частиц:

$$\widehat{p_+ p_-} \sim \widehat{p_- p_i} \sim \widehat{p_+ p_i} < \theta_0 \ll 1, \quad \varepsilon \theta_0 / m \gg 1, \quad p_i = p_1, p_2, q_1, q_2. \quad (52)$$

Вклад коллинеарной кинематики содержит члены порядка $(\alpha L / \pi)^2$ и $(\alpha / \pi)^2 L$. В полуколлинеарной кинематической области выполняется только одно из условий (52) на углы:

$$\widehat{p_+ p_-} < \theta_0, \quad \widehat{p_{\pm} p_i} > \theta_0; \quad \text{или} \quad \widehat{p_- p_i} < \theta_0, \quad \widehat{p_+ p_i} > \theta_0;$$

или

$$\widehat{p_- p_i} > \theta_0, \quad \widehat{p_+ p_i} < \theta_0.$$

Вклад полуколлинеарной кинематики содержит слагаемые вида

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L \ln \frac{\theta_0}{\theta}, \quad \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L,$$

где $\theta = \widehat{p_- q_1}$ — угол рассеяния электрона. Вспомогательный параметр θ_0 сокращается в сумме вкладов коллинеарной и полуколлинеарной кинематик. Как и выше, мы систематически опускаем слагаемые, которые не содержат большой логарифм L .

Мы ограничились рассмотрением случая рождения электрон-позитронной пары. Эффекты образования других пар ($\mu^+\mu^-$, $\pi^+\pi^-$ и др.) по крайней мере на порядок (см. [9]) меньше рассматриваемых, и их можно отбрасывать, принимая во внимание представленные ниже численные результаты.

Процессу образования пар при столкновениях лептонов высоких энергий уделялось много внимания (см. [9] и ссылки, там приведенные). В частности, было установлено, что полное сечение содержит вклады, пропорциональные кубу большого логарифма, происходящие от двухфотонного механизма образования пары с малой инвариантной массой. Принимая во внимание тот факт, что в этом случае рассеянные электрон и позитрон движутся под очень маленькими углами ($\sim m/\epsilon$) по отношению к осям пучков, можно убедиться, что такие события не могут быть зарегистрированы на LEP I.

Учитывая все возможные механизмы образования пар (синглетный и несинглетный) с учетом условий эксперимента на LEP I, а также тождественность частиц в конечном состоянии, можно построить 36 диаграмм Фейнмана, описывающих рождение реальных e^+e^- -пар на древесном уровне. В случае баба-рассеяния на малые углы только часть из этих диаграмм, а именно диаграммы рассеивательного типа, дают вклад в поправку к сечению. Кроме того, прямые вычисления показывают сокращение вкладов интерференции амплитуд, описывающих излучение пары вдоль направления электронного пучка, с амплитудами, описывающими излучение пары вдоль позитронного пучка. Этот факт является проявлением уже упоминавшегося сокращения вкладов, происходящих от «верх-низ»-интерференции.

В сумме вкладов за счет излучения виртуальных пар (вставки поляризации вакуума в пропагатор виртуального фотона) и излучения реальных мягких пар сокращаются кубы большого логарифма, но содержится вспомогательный параметр $\Delta = \delta\epsilon/\epsilon$ ($m_e \ll \delta\epsilon \ll \epsilon$, где $\delta\epsilon$ является суммарной энергией компонент мягкой пары). Зависимость от Δ исчезает в полной сумме после добавления вклада жестких реальных пар. До суммирования необходимо проинтегрировать вклад жестких пар по долям энергии компонент пары и по долям энергии регистрируемых электрона и позитрона:

$$\Delta = \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} < x_1 + x_2, \quad x_c < x = 1 - x_1 - x_2 < 1 - \Delta,$$

$$x_1 = \frac{\varepsilon_+}{\varepsilon}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon}, \quad x = \frac{q_1^0}{\varepsilon},$$

где ε_{\pm} — энергии позитрона и электрона из родившейся пары.

5.1. Коллинеарные кинематические области. Всего имеется четыре области коллинеарной кинематики: пара может двигаться вдоль импульсов начального электрона (позитрона) или вдоль импульса конечного регистрируемого электрона (позитрона). Для определенности мы рассматриваем случай движения пары только вдоль направлений начального и конечного электрона. Учет движения вдоль позитронных направлений в случае симметричных детекторов заключается в умножении получаемой величины на два.

В случае излучения пары вдоль направления начального электрона удобно разложить импульсы частиц на продольные и поперечные составляющие:

$$p_+ = x_1 p_1 + \mathbf{p}_+^{\perp}, \quad p_- = x_2 p_1 + \mathbf{p}_-^{\perp}, \quad q_1 = x p_1 + \mathbf{q}_1^{\perp},$$

$$x = 1 - x_1 - x_2, \quad q_2 \approx p_2, \quad \mathbf{p}_+^{\perp} + \mathbf{p}_-^{\perp} + \mathbf{q}_1^{\perp} = 0,$$

где \mathbf{p}_i^{\perp} — поперечные по отношению к направлению начального электронного пучка двумерные компоненты конечных частиц. Введем безразмерные величины, связанные с кинематическими инвариантами:

$$z_i = \left(\frac{\varepsilon \theta_i}{m} \right)^2, \quad z_1 = \left(\frac{\mathbf{p}_+^{\perp}}{m} \right)^2, \quad z_2 = \left(\frac{\mathbf{p}_-^{\perp}}{m} \right)^2, \quad 0 < z_i < \left(\frac{\varepsilon \theta_0}{m} \right)^2 \gg 1,$$

$$A = \frac{(p_+ + p_-)^2}{m^2} = (x_1 x_2)^{-1} [(1-x)^2 + x_1^2 x_2^2 (z_1 + z_2 - 2\sqrt{z_1 z_2} \cos \varphi)],$$

$$A_1 = \frac{2p_1 p_-}{m^2} = x_2^{-1} [1 + x_2^2 + x_2^2 z_2], \quad A_2 = \frac{2p_1 p_+}{m^2} = x_1^{-1} [1 + x_1^2 + x_1^2 z_1],$$

$$C = \frac{(p_1 - p_-)^2}{m^2} = 2 - A_1, \quad D = \frac{(p_1 - q_1)^2}{m^2} - 1 = A - A_1 - A_2,$$

где φ — азимутальный угол между плоскостями $(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_+^{\perp})$ и $(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_-^{\perp})$. Удерживая в просуммированном по спиновым состояниям матричном элементе только те слагаемые, которые дают ненулевые вклады при $\theta_0 \rightarrow 0$, мы обнаруживаем, что важны только 8 из 36 фейнмановских диаграмм.

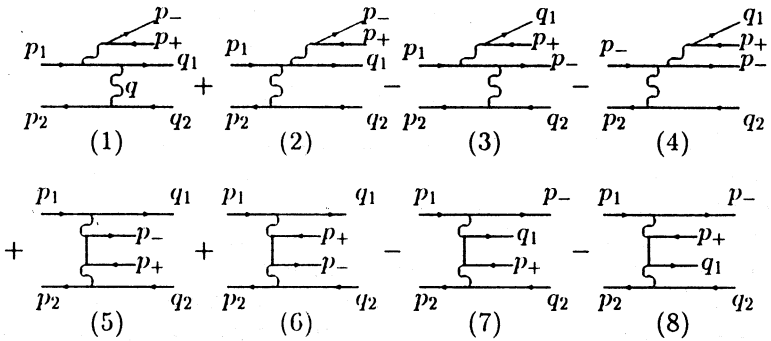


Рис.1. Диаграммы Фейнмана, дающие логарифмически усиленные вклады, когда пара движется вдоль направлений конечного или начального электрона

Они представлены на рис.1, знаки перед диаграммами учитывают статистику Ферми—Дирака при перестановке тождественных фермионов.

Результат для рассматриваемой коллинеарной кинематики имеет факторизованную форму, что согласуется с известной факторизационной теоремой [26]:

$$\sum_{\text{spins}} |M|^2 \Big|_{p_+, p_- \parallel p_1} = \sum_{\text{spins}} |M_0|^2 2^7 \pi^2 \alpha^2 \frac{I}{m^4},$$

где один из сомножителей соответствует борновскому матричному элементу (без рождения пар):

$$\sum_{\text{spin}} |M_0|^2 = 2^7 \pi^2 \alpha^2 \left(\frac{s^4 + t^4 + u^4}{s^2 t^2} \right),$$

$$s = 2p_1 p_2 x, \quad t = -Q^2 x, \quad u = -s - t,$$

и величина I , называемая коллинеарным фактором, совпадает с выражением, полученным в работе [22]. В наших кинематических переменных она записывается в виде

$$I = (1 - x_2)^{-2} \left(\frac{A(1 - x_2) + Dx_2}{DC} \right)^2 + (1 - x)^{-2} \left(\frac{C(1 - x) - Dx_2}{AD} \right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2xAD} \left[\frac{2(1-x_2)^2 - (1-x)^2}{1-x} + \frac{x_1x - x_2}{1-x_2} + 3(x_2 - x) \right] + \\
 & + \frac{1}{2xCD} \left[\frac{(1-x_2)^2 - 2(1-x)^2}{1-x_2} + \frac{x - x_1x_2}{1-x} + 3(x_2 - x) \right] + \\
 & + \frac{x_2(x^2 + x_2^2)}{2x(1-x_2)(1-x)AC} + \frac{3x}{D^2} + \frac{2C}{AD^2} + \frac{2A}{CD^2} + \frac{2(1-x_2)}{xA^2D} - \\
 & - \frac{4C}{xA^2D^2} - \frac{4A}{D^2C^2} + \frac{1}{DC^2} \left[\frac{(x_1-x)(1+x_2)}{x(1-x_2)} - 2 \frac{1-x}{x} \right].
 \end{aligned}$$

Преобразуем фазовый объем конечных частиц к виду

$$\begin{aligned}
 d\Gamma = & \frac{d^3\mathbf{q}_1 d^3\mathbf{q}_2}{(2\pi)^6 2q_1^0 2q_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1x + p_2 - q_1 - q_2) \times \\
 & \times m^4 2^{-8} \pi^{-4} x_1 x_2 dx_1 dx_2 dz_1 dz_2 \frac{d\varphi}{2\pi}
 \end{aligned}$$

и проинтегрируем по переменным родившейся пары (детали могут быть найдены в препринте [23]):

$$\begin{aligned}
 \bar{I} = & \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_0^{z_0} dz_1 \int_0^{z_0} dz_2 I = \frac{L_0}{2xx_1x_2} \left\{ D_1 \left(L_0 + 2 \ln \frac{x_1x_2}{x} \right) + \right. \\
 & \left. + D_2 \ln \frac{(1-x_2)(1-x)}{xx_2} + D_3 \right\}, \quad L_0 = \ln \left(\frac{\varepsilon\theta_0}{m} \right)^2, \\
 D_1 = & 2xx_1x_2 \left(\frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x_2)^4} \right) - \frac{(1-x_2)^2}{(1-x)^2} - \frac{(1-x)^2}{(1-x_2)^2} + 1 + \\
 & + \frac{(x+x_2)^2}{2(1-x)(1-x_2)} + \frac{3(x_2-x)^2}{2(1-x)(1-x_2)} - \frac{x^2+x_2^2}{(1-x)(1-x_2)} - \\
 & - 2xx_2 \left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x_2)^2} \right), \quad D_2 = \frac{2(x^2+x_2^2)}{(1-x)(1-x_2)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 = & \frac{2xx_1x_2}{(1-x_2)^2} \left(-\frac{8}{(1-x_2)^2} + \frac{(1-x)^2}{xx_1x_2} \right) + \frac{2xx_1x_2}{(1-x)^2} \left[\frac{x_2}{xx_1} + \right. \\
& + \frac{2(x_1-x_2)}{xx_1(1-x)} - \frac{8}{(1-x)^2} + \frac{1}{xx_1x_2} - \frac{4}{x(1-x)} \left. \right] + 6 + 4x \left[\frac{x_2-x_1}{(1-x)^2} - \right. \\
& - \frac{x_1}{x(1-x)} \left. \right] + \frac{4(xx_2-x_1)}{(1-x_2)^2} - \frac{4(1-x_2)x_1x_2}{(1-x)^3} + \frac{8xx_1x_2^2}{(1-x)^4} - \\
& - \frac{xx_2^2}{(1-x_2)^4} + \frac{x_2}{(1-x_2)^2} \left[4(1-x) + \frac{2(x-x_1)(1+x_2)}{1-x_2} \right].
\end{aligned}$$

Выполняя аналогичные действия в случае, когда пара движется в направлении рассеянного электрона, интегрируя получаемую сумму по долям энергии компонент пары, и, наконец, добавляя оставшиеся две коллинеарные области, когда пара движется вдоль начального или конечного позитрона, мы получаем

$$\begin{aligned}
d\sigma_{\text{coll}} = & \frac{\alpha^4 dx}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \left\{ R_0(x) \left(L + 2 \ln \frac{\eta^2}{z} \right) (1 + \Theta) + \right. \\
& \left. + 4R_0(x) \ln x + 2\Theta f(x) + 2f_1(x) \right\}, \quad (53)
\end{aligned}$$

$$\eta = \frac{\theta_0}{\theta_{\min}}, \quad \Theta \equiv \Theta(x^2 \rho^2 - z),$$

$$R_0(x) = \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} + \frac{(1-x)}{3x} (4 + 7x + 4x^2) + 2(1+x) \ln x,$$

$$\begin{aligned}
f(x) = & -\frac{107}{9} + \frac{136}{9}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3x} - \frac{20}{9(1-x)} + \frac{2}{3} \left[-4x^2 - 5x + 1 + \right. \\
& \left. + \frac{4}{x(1-x)} \right] \ln(1-x) + \frac{1}{3} \left[8x^2 + 5x - 7 - \frac{13}{1-x} \right] \ln x - \\
& - \frac{2}{1-x} \ln^2 x + 4(1+x) \ln x \ln(1-x) - \frac{2(3x^2-1)}{1-x} \text{Li}_2(1-x),
\end{aligned}$$

$$f_1(x) = -x \operatorname{Re} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{116}{9} + \frac{127}{9}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3x} - \frac{20}{9(1-x)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{3} \left[-4x^2 - 5x + 1 + \frac{4}{x(1-x)} \right] \ln(1-x) + \frac{1}{3} \left[8x^2 - 10x - 10 + \frac{5}{1-x} \right] \ln x - \\
 & - (1+x) \ln^2 x + 4(1+x) \ln x \ln(1-x) - \frac{2(x^2-3)}{1-x} \text{Li}_2(1-x), \\
 & \text{Li}_2(x) \equiv - \int_0^x \frac{dy}{y} \ln(1-y), \quad Q_1 = \varepsilon \theta_{\min}, \quad L = \ln \frac{zQ_1^2}{m^2}.
 \end{aligned}$$

5.2. Полуколлинеарные кинематические области. Мы опять ограничиваемся случаем излучения пары из электронной линии. Существуют три различные полуколлинеарные кинематические области, дающие вклад в пределах заданной точности. Первая область включает события с очень маленькой инвариантной массой родившейся пары:

$$4m^2 \ll (p_+ + p_-)^2 \ll |q^2|,$$

причем обе частицы из этой пары не попадают в рассмотренные выше узкие конусы, задаваемые тем же углом θ_0 , вокруг импульсов начального и конечного электронов. Мы будем обозначать эту область $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$. Только диаграммы (1) и (2) рис.1 дают вклад в этом случае, что связано с малостью знаменателя виртуального фотона, рождающего пару.

Вторая полуколлинеарная область включает события, в которых мала инвариантная масса системы из родившегося позитрона и рассеянного электрона: $4m^2 \ll (p_+ + q_1)^2 \ll |q^2|$, причем родившийся позитрон не должен попадать в узкий конус вокруг импульса начального электрона. Мы обозначаем эту область $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1$ и отмечаем, что только диаграммы (3) и (4) рис.1 дают в нее вклад.

Третья полуколлинеарная область включает события, в которых электрон из рожденной пары движется внутри узкого конуса вдоль импульса начального электрона, а позитрон — нет. Мы обозначаем эту область $\mathbf{p}_- \parallel \mathbf{p}_1$. Здесь важны только диаграммы (7) и (8) рис.1.

Дифференциальное сечение процесса с рождением пары запишем в виде

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & \frac{\alpha^4}{8\pi^4 s^2} \frac{|M|^2}{q^4} \frac{dx_1 dx_2 dx}{x_1 x_2 x} d^2 \mathbf{p}_+^\perp d^2 \mathbf{p}_-^\perp d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp \delta(1-x_1-x_2-x) \times \\
 & \times \delta^{(2)}(\mathbf{p}_+^\perp + \mathbf{p}_-^\perp + \mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp), \quad |M|^2 = -L_{\lambda\rho} p_{2\lambda} p_{2\rho}, \quad (54)
 \end{aligned}$$

где $x_1(x_2)$, x и $\mathbf{p}_+^\perp(\mathbf{p}_-^\perp)$, \mathbf{q}_1^\perp — доли энергии и поперечные составляющие импульсов рожденного электрона (позитрона) и рассеянного электрона соответственно; $s = (p_1 + p_2)^2$ и $q^2 = -Q^2 = (p_2 - q_2)^2 = -\varepsilon^2\theta^2$ — квадрат суммарной энергии в СЦИ и квадрат переданного импульса. Лептонный тензор $L_{\lambda\rho}$ имеет различный вид в трех полуколлинеарных областях.

Рассмотрим область $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$. В этой области мы можем использовать лептонный тензор, полученный в работе [22]. Удерживая только существенные слагаемые, мы записываем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{P^4}{8} L_{\lambda\rho} = & \frac{4P^2q^2}{(1)(2)} [-(p_1p_1)_{\lambda\rho} - (q_1q_1)_{\lambda\rho} + (p_1q_1)_{\lambda\rho}] - 4(p_+p_-)_{\lambda\rho} \left(1 - \frac{q^2P^2}{(1)(2)}\right) - \\ & - \frac{4}{(1)} [q^2(p_1q_1)_{\lambda\rho} - 2(p_1p_+)(q_1p_-)_{\lambda\rho} - 2(p_1p_-)(q_1p_+)_{\lambda\rho}] - \\ & - \frac{4}{(2)} [P^2(p_1q_1)_{\lambda\rho} - 2(p_+q_1)(p_1p_-)_{\lambda\rho} - 2(p_-q_1)(p_1p_+)_{\lambda\rho}] - \\ & - \frac{32(p_1p_+)(p_1p_-)}{(1)^2} (q_1q_1)_{\lambda\rho} - \frac{32(q_1p_+)(q_1p_-)}{(2)^2} (p_1p_1)_{\lambda\rho} + \\ & + \frac{8(p_1q_1)_{\lambda\rho}}{(1)(2)} [P^2(p_1q_1) - 2(p_1p_+)(p_-q_1) - 2(p_1p_-)(q_1p_+)], \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} P &= p_+ + p_-, \quad (aa)_{\lambda\rho} = a_\lambda a_\rho, \quad (ab)_{\lambda\rho} = a_\lambda b_\rho + a_\rho b_\lambda, \\ q &= p_1 - q_1 - P, \quad (1) = (p_1 - P)^2 - m^2, \quad (2) = (p_1 - q)^2 - m^2. \end{aligned}$$

После некоторых алгебраических преобразований выражение для квадрата матричного элемента, входящее в (54), может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^4} |M|^2 = & -\frac{2s^2}{q^4 P^4} \left\{ -\frac{4P^2q^2}{(1)(2)} [(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2] + \right. \\ & \left. + \frac{128}{(1)^2(2)^2} [(q_1p)(p_+p_1) - x(p_1p)(q_1p_+)]^2 \right\}, \end{aligned}$$

где $p = p_- - x_2p_+/x_1$, $(\mathbf{q}_2^\perp)^2 = -q^2$. В этой области мы можем использовать следующие соотношения:

$$(1) = -\frac{1-x}{x_1} 2(p_1 p_+), \quad (2) = \frac{1-x}{x_1} 2(q_1 p_+).$$

Полезно представить все инварианты через переменные Судакова (доли энергий и поперечные составляющие импульсов):

$$q_1^2 = \frac{1}{x_1 x_2} ((\mathbf{p}^\perp)^2 + m^2(1-x)^2), \quad 2(q_1 p_+) = \frac{1}{x x_1} (x \mathbf{p}_+^\perp - x_1 \mathbf{q}_1^\perp)^2,$$

$$2(p_1 p_+) = \frac{1}{x_1} (\mathbf{p}_+^\perp)^2, \quad 2(p_1 p) = \frac{2}{x_1^2} \mathbf{p}_+^\perp \mathbf{p}_+^\perp, \quad 2(q_1 p) = \frac{2}{x_1^2} (\mathbf{p}_+^\perp [x \mathbf{p}_+^\perp - x_1 \mathbf{q}_1^\perp]),$$

$$\mathbf{p}^\perp = x_1 \mathbf{p}_+^\perp - x_2 \mathbf{p}_-^\perp.$$

Большой логарифм, который мы стремимся выделить, появляется при интегрировании по \mathbf{p}^\perp . Чтобы провести это интегрирование, мы используем соотношение

$$\delta^{(2)}(\mathbf{p}_+^\perp + \mathbf{p}_-^\perp + \mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp) d^2 \mathbf{p}_+^\perp d^2 \mathbf{p}_-^\perp = \frac{1}{(1-x)^2} d^2 \mathbf{p}^\perp,$$

которое верно в области $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$. Интегрируя, мы получаем следующий вклад в сечение баба-рассеяния на малые углы за счет рассматриваемой области:

$$d\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-} = \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{d(\mathbf{q}_1^\perp)^2}{(\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp)^2} \times \\ \times \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{q}_1^\perp + x \mathbf{q}_2^\perp)^2} \left[(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 - \frac{4x x_1 x_2}{(1-x)^2} \right],$$

где φ является углом между двумерными векторами \mathbf{q}_1^\perp и \mathbf{q}_2^\perp .

На этом этапе необходимо использовать ограничения на величины \mathbf{q}_1^\perp и \mathbf{q}_2^\perp . Эти ограничения возникают, если мы отбросим часть фазового объема, соответствующую уже рассмотренному случаю коллинеарной кинематики, т.е. мы должны исключить узкие конусы вокруг импульсов начального и конечного электронов.

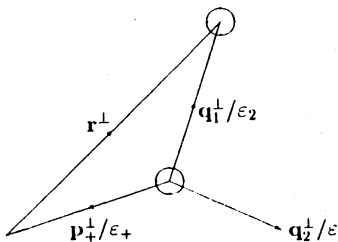


Рис.2. Кинематика события с образованием пары в плоскости, перпендикулярной оси пучков, для полуколлинейарной области $\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{p}_-$

Кинематика события представлена на рис.2, окружности радиуса θ_0 вокруг точек, соответствующих направлениям импульсов начального и конечного электронов, ограничивают запрещенные коллинейарные области. Исключение этих областей приводит к следующим ограничениям:

$$\left| \frac{\mathbf{p}_+^\perp}{\epsilon_+} \right| > \theta_0, \quad |\mathbf{r}^\perp| = \left| \frac{\mathbf{p}_+^\perp}{\epsilon_+} - \frac{\mathbf{q}_1^\perp}{\epsilon_2} \right| > \theta_0, \quad (56)$$

где ϵ_+ и ϵ_2 — энергии рожденного позитрона и рассеянного электрона соответственно. Чтобы исключить \mathbf{p}_+^\perp , мы используем закон сохранения перпендикулярных составляющих импульсов, верный в рассматриваемой области:

$$\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp + \frac{1-x}{x_1} \mathbf{p}_+^\perp = 0.$$

Полезно ввести безразмерные переменные $z_{1,2} = (\mathbf{q}_{1,2}^\perp)^2 / (\epsilon \theta_{\min}^2)$, где θ_{\min} — минимальный угол детектирования рассеянных электрона и позитрона. Условия (56) переписываются в виде

$$\begin{cases} 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\eta^2(1-x)^2 - (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1 z_2}}, & |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| < \eta(1-x), \\ 1 > \cos \varphi > -1, & |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| > \eta(1-x), \quad \eta = \theta_0 / \theta_{\min}, \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\eta^2 x^2 (1-x)^2 - (\sqrt{z_1} - x\sqrt{z_2})^2}{2x\sqrt{z_1 z_2}}, & |\sqrt{z_1} - x\sqrt{z_2}| < \eta x(1-x), \\ 1 > \cos \varphi > -1, & |\sqrt{z_1} - x\sqrt{z_2}| > \eta x(1-x). \end{cases} \quad (58)$$

Условия (57) исключают излучение пары в узком конусе вокруг направления начального электрона, а условия (58) — рассеянного электрона. На вспомогательный параметр θ_0 мы налагаем условие

$$\theta_0 \gg \frac{m}{\varepsilon} \approx 10^{-5},$$

а экспериментальные ограничения имеют порядок $\theta_{\min} \sim 10^{-2}$. Это позволяет нам считать $\eta \ll 1$. Процедура интегрирования дифференциального сечения с наложенными условиями подробно описана в [23]. Здесь мы приводим вклад в сечение рассматриваемой кинематической области при условии, что детектируются только те рассеянные электроны, доля энергии которых x превышает заданную величину x_c :

$$\begin{aligned} \sigma_{p_+ \parallel p_-} = & \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \mathcal{L} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \int_0^{1-x} dx_2 \left[\frac{(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2}{(1-x)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4xx_1x_2}{(1-x)^2} \right] \left\{ (1+\Theta) \ln \frac{z}{\eta^2} + \Theta \ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{x^2(x\rho^2 - z)^2} + \right. \\ & \left. + \ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2 - z)(z-1)}{(z-x)^2(z-x^2\rho^2)} \right| \right\}, \quad \mathcal{L} = \ln \frac{\varepsilon^2 \theta_{\min}^2}{m^2}, \end{aligned} \quad (59)$$

где $\Theta \equiv \Theta(x^2\rho^2 - z)$, $z \equiv z_2$. Вспомогательный параметр Δ , входящий в (59), задает минимальную энергию рожденной жесткой пары, $2m/\varepsilon \ll \Delta \ll 1$. Отметим, что мы заменили L на \mathcal{L} , так как мы не различаем их на однологарифмическом уровне.

Рассмотрим теперь область $p_+ \parallel q_1$. Как уже отмечалось, в этой области логарифмически усиленный вклад дают только диаграммы (3) и (4) рис.1. Лептонный тензор для этого случая может быть получен из (55) с помощью замены $p_- \leftrightarrow q_1$. Квадрат матричного элемента записывается в виде

$$\begin{aligned} |M|_{p_+ \parallel q_1}^2 = & - \frac{4s^2}{q_1'^2 q_2^{\perp 2}} \frac{1}{(1')(2)} \left\{ (1-x_1)^2 + (1-x_2)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{32}{q_1'^2 q_2^{\perp 2}} \frac{1}{(1')(2)} [(p_1 p_+) (p_- p') - x_2 (p_- p_+) (p_1 p')]^2 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$p' = q_1 - p_+ x/x_1, \quad q_1'^2 = (q_1 + p_+)^2,$$

$$(2) = 2(p_+ p_-)(1-x_2)/x_1, \quad (1') = -2(p_1 p_+)(1-x_2)/x_1.$$

Интегрирование по $(\mathbf{p}_1^\perp)^2 (\mathbf{p}_-^\perp)^2$ может быть проведено аналогично предыдущему случаю, и вклад в дифференциальное сечение может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1} = & \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{(\mathbf{q}_2^\perp)^2} \frac{d(\mathbf{q}_1^\perp)^2}{(\mathbf{q}_1^\perp)^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{(\mathbf{q}_1^\perp + x \mathbf{q}_2^\perp)^2} \times \\ & \times \frac{x^2}{(1-x_2)^2} \left[(1-x)^2 + (1-x_1)^2 - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Ограничения на фазовый объем, отражающие исключение коллинеарной области движения родившейся пары внутри узкого конуса вокруг импульса рассеянного электрона, приводят к неравенству

$$\left| \frac{\mathbf{p}_-^\perp}{\varepsilon_-} - \frac{\mathbf{q}_1^\perp}{\varepsilon_2} \right| > \theta_0. \quad (61)$$

Мы исключаем \mathbf{p}_-^\perp из (61), используя закон сохранения поперечных составляющих импульсов в форме, справедливой в данной кинематической области: $\mathbf{p}_-^\perp + \mathbf{q}_2^\perp + \mathbf{q}_1^\perp(1-x_2)/x = 0$. В терминах безразмерных переменных z_1, z_2 угла φ условие (61) переписывается в виде

$$\begin{cases} 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\eta^2 x^2 x_2^2 - (\sqrt{z_1} - x \sqrt{z_2})^2}{2x \sqrt{z_1} z_2}, & |\sqrt{z_1} - x \sqrt{z_2}| < \eta x x_2, \\ 1 > \cos \varphi > -1, & |\sqrt{z_1} - x \sqrt{z_2}| > \eta x x_2. \end{cases} \quad (62)$$

Интегрирование дифференциального сечения (61) по области (62) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{p}_+ \parallel \mathbf{q}_1} = & \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \mathcal{L} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \int_0^{1-x} dx_2 \left[\frac{(1-x)^2 + (1-x_1)^2}{(1-x_2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^4} \right] \left\{ \ln \frac{z}{\eta^2} + \ln \frac{(\rho^2 - z)(z - 1)}{x_2^2 \rho^2} \right\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Рассмотрим третью полуколлинеарную кинематическую область $\mathbf{p}_- \parallel \mathbf{p}_1$, в которой важны диаграммы (7) и (8) рис.1. Лептонный тензор может быть

получен из выражения (55) заменой $p_1 \leftrightarrow -p_+$. Квадрат модуля матричного элемента имеет вид

$$|M|_{\mathbf{p}_{\parallel} \mathbf{p}_1}^2 = -\frac{4s^2}{q_2'^2 (q_2^\perp)^2} \frac{1}{(1)(2')} \left\{ (1-x)^2 + (1-x_1)^2 + \right. \\ \left. + \frac{32}{q_2'^2 (q_2^\perp)^2} \frac{1}{(1)(2')} [x_1(p_1 \tilde{p})(p_1 p_+) + x(p_+ \tilde{p})(q_1 p_1)]^2 \right\},$$

где

$$\tilde{p} = p_- - x_2 p_1, \quad q_2'^2 = (p_1 - p_-)^2, \\ (2') = -2(p_1 q_1)(1-x_2), \quad (1) = -2(p_1 p_+)(1-x_2).$$

Интегрирование по $(\mathbf{p}_+^\perp)^2$ и $(\mathbf{p}_-^\perp)^2$ приводит к дифференциальному сечению

$$d\sigma_{\mathbf{p}_{\parallel} \mathbf{p}_1} = \frac{\alpha^4}{\pi} L dx dx_2 \frac{d(q_2^\perp)^2}{(q_2^\perp)^2} \frac{d(q_1^\perp)^2}{(q_1^\perp)^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \times \\ \times \frac{1}{(q_1^\perp + q_2^\perp)^2} \left[\frac{(1-x)^2 + (1-x_2)^2}{(1-x_2)^2} - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^4} \right]. \quad (64)$$

Ограничение, соответствующее исключению коллинеарной кинематической области, в которой рожденная пара движется внутри узкого конуса вокруг импульса начального электрона, имеет вид

$$\frac{|\mathbf{p}_+^\perp|}{\varepsilon_1} > \theta_0, \quad \mathbf{p}_+^\perp + \mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp = 0$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\eta^2 x_1^2 - (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1} z_2}, \quad |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| < \eta x_1, \\ 1 > \cos \varphi > -1, \quad |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| > \eta x_1. \end{array} \right. \quad (65)$$

Интегрирование дифференциального сечения (64) по области (65) приводит к следующему вкладу:

$$\sigma_{p_- \parallel p_1} = \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \mathcal{L} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \int_0^{1-x} dx_2 \left[\frac{(1-x)^2 + (1-x_1)^2}{(1-x_2)^2} - \frac{4xx_1x_2}{(1-x_2)^2} \right] \left\{ \Theta \ln \frac{z}{\eta^2} + \Theta \ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{x_1^2 x^4 \rho^4} + \ln \left| \frac{\rho^2(z-x^2)}{z-x^2\rho^2} \right| \right\}. \quad (66)$$

Полный вклад полуколлинеарных кинематических областей определяется суммой выражений (59), (63), и (66):

$$\sigma_{s\text{-coll}} = \sigma_{p_+ \parallel p_-} + \sigma_{p_+ \parallel q_1} + \sigma_{p_- \parallel p_1}. \quad (67)$$

5.3. Сумма вкладов виртуальных и реальных пар. Для получения окончательного вклада образования пар необходимо добавить к (67) вклад коллинеарной кинематики (53), а также вклады за счет виртуальных и мягких пар.

Принимая во внимание ведущие и следующие за ведущими слагаемые, складываем вклады (67) и (53), при этом зависимость от параметра η исчезает, в результате получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{hard}} = & \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \left\{ \frac{1}{2} L^2 R_0(x) + \mathcal{L} [\Theta f(x) + f_1(x)] + \right. \\ & + \mathcal{L} \int_0^{1-x} dx_2 \left[\left(\Theta \ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{x^2} + \ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2 - z)(z-1)x^2}{z-x^2\rho^2} \right| \right) \varphi - \right. \\ & \left. \left. - (\Theta \ln (x\rho^2 - z)^2 + \ln (z-x)^2) \varphi(x, x_2) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\Theta \ln (x_1^2 x^2 \rho^4) + \ln x_2^2) \varphi(x_2, x) \right] \right\}, \quad L = \ln \frac{Q_1^2 z}{m^2}, \quad \mathcal{L} = \ln \frac{Q_1^2}{m^2}, \quad (68) \end{aligned}$$

где

$$\varphi = \varphi(x, x_2) + \varphi(x_2, x),$$

$$\varphi(x_2, x) = \frac{(1-x)^2 + (x+x_2)^2}{(1-x_2)^2} - \frac{4xx_2(1-x-x_2)}{(1-x_2)^4}.$$

Интегрируя по x_2 третье слагаемое в фигурных скобках выражения (68), мы получаем вклад в сечение баба-рассеяния на малые углы за счет излучения реальных жестких пар:

$$\sigma_{\text{hard}} = \frac{\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \left\{ \frac{1}{2} L^2 (1 + \Theta) R_0(x) + \mathcal{L} [\Theta F_1(x) + F_2(x)] \right\},$$

$$F_1(x) = d(x) + C_1(x), \quad F_2(x) = d(x) + C_2(x),$$

$$d(x) = \frac{1}{1-x} \left(\frac{8}{3} \ln(1-x) - \frac{20}{9} \right),$$

$$C_1(x) = -\frac{113}{9} + \frac{142}{9}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3x} - \frac{4}{3}(1+x) \ln(1-x) +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} \left[\ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{(x\rho^2 - z)^2} - 3 \text{Li}_2(1-x) \right] + \left(8x^2 + 3x - 9 - \right.$$

$$\left. - \frac{8}{x} - \frac{7}{1-x} \right) \ln x + \frac{2(5x^2 - 6)}{1-x} \ln^2 x + \beta(x) \ln \frac{(x^2\rho^2 - z)^2}{\rho^4},$$

$$C_2(x) = -\frac{122}{9} + \frac{133}{9}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3x} - \frac{4}{3}(1+x) \ln(1-x) +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x} \left[\ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2-z)(z-1)}{(x^2\rho^2-z)(z-x)^2} \right| + 3 \text{Li}_2(1-x) \right] +$$

$$+ \frac{1}{3} \left(-8x^2 - 32x - 20 + \frac{13}{1-x} + \frac{8}{x} \right) \ln x + 3(1+x) \ln^2 x +$$

$$+ \beta(x) \ln \left| \frac{(z-x^2)(\rho^2-z)(z-1)}{x^2\rho^2-z} \right|, \quad \beta = R_0(x) - \frac{2}{3} \frac{1+x^2}{1-x}. \quad (69)$$

Формула (69) описывает излучение пары из электронной линии. Для учета излучения из позитронной линии при симметричной постановке опыта достаточно удвоить полученное выражение.

Для выделения зависимости от вспомогательного параметра Δ в σ_{hard} мы используем следующие соотношения:

$$\int_1^{\rho^2} dz \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \Theta(x^2 \rho^2 - z) = \int_1^{\rho^2} dz \left[\int_{\tilde{x}_c}^{1-\Delta} dx - \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \bar{\Theta} \right],$$

$$\bar{\Theta} = 1 - \Theta(x^2 \rho^2 - z), \quad \tilde{x}_c = \max(x_c, \rho^{-1}).$$

Следовательно,

$$\int_1^{\rho^2} dz \int_{x_c}^{1-\Delta} \Theta \frac{dx}{1-x} = \int_1^{\rho^2} dz \left[\ln \frac{1-\tilde{x}_c}{\Delta} - \int_{\tilde{x}_c}^1 \frac{dx}{1-x} \bar{\Theta} \right], \quad (70)$$

$$\int_1^{\rho^2} dz \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \Theta \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \int_1^{\rho^2} dz \left[\frac{1}{2} \ln^2(1-\tilde{x}_c) - \frac{1}{2} \ln^2 \Delta - \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{\ln(1-x)}{1-x} \bar{\Theta} \right]. \quad (71)$$

Вклад в сечение e^+e^- -рассеяния на малые углы при высоких энергиях за счет излучения реальных мягких [13] (с энергией, меньшей $\Delta\epsilon$) и виртуальных (29) пар определяется формулой:

$$\sigma_{\text{soft+virt}} = \frac{4\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ L^2 \left(\frac{2}{3} \ln \Delta + \frac{1}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{L} \left(-\frac{17}{6} + \frac{4}{3} \ln^2 \Delta - \frac{20}{9} \ln \Delta - \frac{4}{3} \zeta_2 \right) \right\}.$$

Используя равенства (70) и (71), нетрудно проверить, что вспомогательный параметр Δ сокращается в сумме $\sigma_{\text{pair}} = 2\sigma_{\text{hadr}} + \sigma_{\text{soft+virt}}$. Теперь мы можем записать полный вклад образования пар в окончательном виде:

$$\sigma_{\text{pair}} = \frac{2\alpha^4}{\pi Q_1^2} \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ L^2 \left(1 + \frac{4}{3} \ln(1-x_c) - \frac{2}{3} \int_{x_c}^1 \frac{dx}{1-x} \bar{\Theta} \right) + \right.$$

$$\left. + \mathcal{L} \left[-\frac{17}{3} - \frac{8}{3} \zeta_2 - \frac{40}{9} \ln(1-x_c) + \frac{8}{3} \ln^2(1-x_c) + \int_{x_c}^1 \frac{dx}{1-x} \bar{\Theta} \left(\frac{20}{9} - \frac{8}{3} \ln(1-x) \right) \right] \right\} +$$

$$+ \int_{x_c}^1 dx \left[L^2(1 + \Theta) \bar{R}(x) + \mathcal{L} (\Theta C_1(x) + C_2(x)) \right] \Big\},$$

$$\bar{R}(x) = \frac{1}{2} R_0(x) - \frac{2}{3(1-x)}. \tag{72}$$

Это выражение является исходной формулой для численных расчетов сечения процесса баба-рассеяния на малые углы, сопровождаемого рождением e^+e^- -пары. Отметим, что ведущий вклад описывается электронной структурной функцией $D_e^{\bar{e}}(x)$, которая задает вероятность найти позитрон в электроне, имеющем виртуальность Q^2 , при условии, что электрон теряет долю энергии $(1-x)$ [24,27].

В табл.1 представлено отношение сечения σ_{pair} (72) к нормализационному сечению σ_0 :

$$\sigma_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{\varepsilon^2\theta_{\min}^2}.$$

Таблица 1. Отношение $S = \sigma_{\text{pair}}/\sigma_0$ в процентах как функция x_c для NN - ($\rho = 1,74, \theta_{\min} = 1,61^\circ$) и WW -детекторов ($\rho = 2,10, \theta_{\min} = 1,50^\circ$), $\sqrt{s} = 2\varepsilon = M_Z = 91,187$ ГэВ

x_c	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$S_{NN}, \%$	-0,018	-0,022	-0,026	-0,029	-0,033	-0,038	-0,046
$S_{WW}, \%$	-0,013	-0,019	-0,024	-0,029	-0,035	-0,042	-0,052

Таблица 2. Относительный вклад нелидирующих слагаемых в образование пар R для NN - и WW -детекторов (см. табл.1)

x_c	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
R_{NN}	0,036	-0,122	-0,194	-0,238	-0,268	-0,335	-0,465
R_{WW}	0,179	-0,021	-0,088	-0,120	-0,179	-0,271	-0,415

В табл.2 мы приводим соотношение между неведущими логарифмическими вкладами, содержащими только первую степень большого логарифма \mathcal{L} , и полным выражением σ_{pair} :

$$R = \frac{\sigma_{\text{pair}}^{\text{non-leading}}}{\sigma_{\text{pair}}}.$$

6. ВЕДУЩИЕ $\mathcal{O}(\alpha^3)$ -ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССУ БАБА-РАССЕЯНИЯ

Чтобы вычислить ведущие логарифмические вклады, представляемые членами вида $(\alpha\mathcal{L})^3$, мы используем итерацию вплоть до β^3 уравнений Липатова [11,13,24] (см. приложение 7). Для упрощения аналитических выражений мы использовали реалистическое предположение о малости порога регистрации энергии жесткого подпроцесса, что позволяет пренебрегать членами вида

$$x_c^n \left(\frac{\alpha}{\pi} \mathcal{L} \right)^3 \sim 10^{-4}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Это означает, что мы можем ограничиться только учетом излучения начальными электроном и позитроном.

Вклад за счет излучения трех фотонов, как реальных, так и виртуальных, в величину Σ записывается в виде

$$\begin{aligned} \Sigma^{3\gamma} = & \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \mathcal{L} \right)^3 \int_1^{\rho^2} dz \cdot z^{-2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{x_c}^1 dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \times \\ & \times \left[\frac{1}{6} \delta(1 - x_2) P^{(3)}(x_1) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z) + \frac{1}{2x_1^2} P^{(2)}(x_1) P(x_2) \Theta_1 \Theta_2 \right], \end{aligned}$$

где $P(x)$ и $P^{(2)}(x)$ определены формулами (24) и (50),

$$\Theta_1 \Theta_2 = \Theta \left(z - \frac{x_2^2}{x_1^2} \right) \Theta \left(\rho^2 \frac{x_2^2}{x_1^2} - z \right),$$

$$P^{(3)}(x) = \delta(1 - x) \Delta_t + \Theta(1 - x - \Delta) \theta_t,$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_t = & 48 \left[\frac{1}{3} \zeta_3 - \frac{1}{2} \zeta_2 \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{6} \left(\ln \Delta + \frac{3}{4} \right)^3 \right], \\
 \theta_t = & 48 \left\{ \frac{1}{2} \frac{1+x^2}{1-x} \left[\frac{9}{32} - \frac{1}{2} \zeta_2 + \frac{3}{4} \ln(1-x) - \frac{3}{8} \ln x + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \ln^2(1-x) + \frac{1}{12} \ln^2 x - \frac{1}{2} \ln x \ln(1-x) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{8} (1+x) \ln x \ln(1-x) - \frac{1}{4} (1-x) \ln(1-x) + \frac{1}{32} (5-3x) \ln x - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{16} (1-x) - \frac{1}{32} (1+x) \ln^2 x + \frac{1}{8} (1+x) \text{Li}_2(1-x) \right\}. \quad (73)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь вклад в Σ за счет процесса с образованием e^+e^- -пары и одновременным излучением фотона. Причем как пара, так и фотон могут быть как реальными, так и виртуальными. Мы учитываем синглетный и несинглетный механизмы рождения пары (в работе [24] рассмотрен только синглетный). Результат имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{e^+e^- \gamma} = & \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \mathcal{L} \right)^3 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{x_c}^1 dx_2 \Theta(x_1 x_2 - x_c) \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{3} \left[R^P(x_1) + \frac{1}{3} P^{(2)}(x_1) + \frac{2}{3} R(x_1) \right] \delta(1-x_2) \Theta(x_1^2 \rho^2 - z) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2x_1^2} P(x_2) R(x_1) \Theta_1 \Theta_2 \right\} (1 + \mathcal{O}(x_c^3)),
 \end{aligned}$$

где

$$R(x) = R^S(x) + \frac{2}{3} P(x), \quad R^S(x) = \frac{1-x}{3x} (4 + 7x + 4x^2) + 2(1+x) \ln x,$$

$$R^P(x) = R^S(x) \left(\frac{3}{2} + 2 \ln(1-x) \right) + (1+x) (-\ln^2 x + 4 \text{Li}_2(1-x)) +$$

$$+ \frac{1}{3} (-9 - 3x + 8x^2) \ln x + \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{x} - 8 + 8x + 3x^2 \right) + \frac{2}{3} P^{(2)}(x).$$

7. КАЛОРИМЕТРИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ОПЫТА

В калориметрической постановке эксперимента события, в которых электрон (позитрон) одновременно с одним или более фотонами попадает в малую область детектора, так что виден единый *кластер*, неотличимы от событий, в которых в ту же область детектора попадает один электрон (позитрон), если выделенная энергия одинакова. Для описания этой ситуации вводят определяемый параметрами детектора малый угол δ , так что при относительном угле между электроном и сопровождающим его фотоном, меньшим δ , они регистрируются как одна частица. Отметим, что здесь мы, как и выше, считаем, что при детектировании различают заряженные и незаряженные частицы. Для детекторов LEP I параметр δ имеет порядок $10 \cdot 10^{-3}$ рад, что сравнимо с угловым раствором детекторов и минимальным углом рассеяния. Реалистичны, например, условия

$$\theta_1 = \theta_{\min} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \quad \theta_{\max} = \rho\theta_1 = 58 \cdot 10^{-3} \text{ рад}. \quad (74)$$

Поэтому краевые эффекты могут быть значительны, и формулы для вкладов в Σ усложняются. В этом случае, естественно, выгодно использовать метод Монте-Карло. Тем не менее достаточно точные результаты могут быть получены и аналитически. Прежде всего, в порядках $(L\alpha/\pi)^2$ и $(L\alpha/\pi)^3$ необходимо отбросить вклады, отвечающие излучению вдоль рассеянных электрона и позитрона, т.е. удержать только слагаемые, содержащие $\Theta(x^2\rho^2 - z)$ в (49), (72).

Что касается вклада поправок порядка α/π за счет излучения одного жесткого фотона (см. (19)), то его удобно представить в виде

$$\Sigma^Y = \frac{\alpha}{\pi} (\Sigma_i^Y + \Sigma_f^Y), \quad (75)$$

где слагаемое Σ_i^Y , описывающее вклад за счет излучения начальным электроном имеет прежний вид:

$$\Sigma_i^Y = \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ 2(1-L) \ln \frac{1}{\Delta} + \frac{3}{3} L - 2 + \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(L - 1 + L_2 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \right) \Theta(x^2\rho^2 - z) + L_3 \Theta(z - x^2\rho^2) \right] \right\}. \quad (76)$$

Для второго слагаемого получаем

$$\Sigma_f^y = \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ \int_0^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} \ln \left| \frac{(d_- - z)(d_+ - z)x^2}{(xd_- - z)(xd_+ - z)} \right| + \right. \\ \left. + \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} \left[\ln \left| \frac{(\rho^2 - z)(z - 1)}{(z - x)(\rho^2 x - z)} \right| + \ln \left| \frac{(xd_+ - z)(xd_- - z)}{(d_+ - z)(d_- - z)} \right| \right] \right\}, \\ d_{\pm} = \left(\sqrt{z} \pm (1 - x) \frac{\delta}{\theta_1} \right)^2. \tag{77}$$

Этот результат выводится (аналогично приведенному в разд.3) путем интегрирования слагаемого, пропорционального $1/\sqrt{a_2}$ в (19), причем удобно разбить интеграл по прямоугольнику $1 < z < \rho^2$, $x^2 < z_1 < x^2 \rho^2$ на следующие пять областей:

- 1) $x^2 < z_1 < x^2 z - \eta$,
 - 2) $x^2 z - \eta < z_1 < x^2 z - \eta_1$,
 - 3) $x^2 z - \eta_1 < z_1 < x^2 z + \eta_1$,
 - 4) $x^2 z + \eta_1 < z_1 < x^2 z + \eta$,
 - 5) $xz^2 + \eta < z_1 < x^2 \rho^2$,
- $$\eta = 2x^2(1 - x) \sqrt{z} \frac{\delta}{\theta_1}.$$

Зависимость от вспомогательного параметра η_1 в полной сумме вкладов областей исчезает.

8. ОЦЕНКА ОТБРАСЫВАЕМЫХ СЛАГАЕМЫХ И ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Обсудим теперь величины слагаемых, не принимавшихся в расчет ввиду требуемой точности (1). Разделим их на следующие группы:

а) Электрослабые вклады высших порядков не превышают величины

$$\Sigma_{EW}^{h.o} = \frac{\alpha Q_1^2}{\pi M_Z^2} \leq 10^{-4}. \quad (78)$$

б) При вычислении вклада тормозного излучения в низшем порядке ТВ мы рассмотрели только диаграммы рассеивательного типа и пренебрегли вкладами диаграмм аннигиляционного типа, при этом неучтенными оказались вклады от виртуальных и реальных РП вида

$$\theta_1^2 \frac{\alpha}{\pi} \ln^2 \frac{s}{-t} \leq 10^{-4}. \quad (79)$$

Отметим, что наш результат для Σ^Y совпадает численно с результатами, полученными другими группами [1], использовавшими точный матричный элемент [25].

в) Мы пренебрегли в расчете тормозного излучения также интерференционными вкладами рассеивательных и аннигиляционных диаграмм:

$$\theta_1^2 \frac{\alpha}{\pi} L \leq 10^{-4} \quad (80)$$

и соответствующими слагаемыми в двойном тормозном излучении:

$$\theta_1^2 \left(\frac{\alpha L}{\pi} \right)^2 \leq 10^{-4}. \quad (81)$$

г) Интерференционные вклады в образовании пар типа «верх-низ» (на электроне и на позитроне), в том числе таковые от учета тождественности фермионов:

$$\theta_1^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 L^3 \leq 10^{-4}. \quad (82)$$

д) Эйкональный вид амплитуды, учитывающий многофотонные обмены в канале рассеяния, нарушается слагаемыми вида

$$\theta_1^2 \frac{\alpha}{\pi} \leq 10^{-4}. \quad (83)$$

е) Образование пар тяжелых фермионов (μ , τ) (виртуальных и реальных), а также образование реальных пар пионов вносит вклад, по крайней мере на порядок меньший вклада легких фермионов [9].

ж) Вклады высших порядков ТВ в лидирующем приближении имеют порядок

$$\left(\frac{\alpha L}{\pi}\right)^n \leq 10^{-4}, \quad n \geq 4.$$

Объединяя эти оценки как независимые, можно утверждать, что физическая неопределенность полученных формул удовлетворяет требованию (1):

$$\left| \frac{\delta\sigma_{\text{phys}}}{\sigma} \right| < 10^{-3}.$$

9. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Мы представили сечение баба-рассеяния на малые углы в двух, эквивалентных с точки зрения заданной точности, видах:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{Q_1^2} \{ \Sigma_0 + \Sigma^\gamma + \Sigma^{2\gamma} + \Sigma^{e^+e^-} + \Sigma^{3\gamma} + \Sigma^{e^+e^-\gamma} \},$$

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{Q_1^2} \Sigma_{00} \{ 1 + \delta_0 + \delta^\gamma + \delta^{2\gamma} + \delta^{e^+e^-} + \delta^{3\gamma} + \delta^{e^+e^-\gamma} \},$$

где

$$\Sigma_{00} = \Sigma_0 \Big|_{\Pi=0} = 1 - \rho^{-2} + \Sigma_W + \Sigma_\theta,$$

$$\delta_0 = \frac{\Sigma_0 - \Sigma_{00}}{\Sigma_{00}}, \quad \delta^\gamma = \frac{\Sigma^\gamma}{\Sigma_{00}}, \dots$$

Величина борновского сечения

$$\sigma^B = \frac{4\pi\alpha^2}{Q_1^2} \Sigma_0$$

для $\theta_1 = 26,125$ мрад, $\theta_2 = 55,875$ мрад, задающих так называемый *NN*-детектор, при $\sqrt{s} = 92,3$ ГэВ имеет величину $\sigma^B = 148,186$ нб, а для $\theta_1 = 24$ мрад, $\theta_2 = 58$ мрад (*WW*-детектор) — $\sigma^B = 175,588$ нб. Результаты наших вычислений приведены в табл.3,4 и на рис.4.

Таблица 3. Значения δ_i для NN-детектора
 при $\theta_{\min}^{NN} = 26,125$ мрад, $\theta_{\max}^{NN} = 55,875$ мрад, $\sqrt{s} = 92,3$ ГэВ

NN-детектор, $\rho = 1,97$									
x_c	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
δ_0	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13	4,13
$\delta\gamma$	-6,84	-7,17	-7,44	-8,16	-8,94	-10,32	-12,67	-16,73	-24,98
$\delta\gamma_{\text{lead}}$	0,01	0,00	-0,01	-0,02	-0,05	-0,08	-0,05	0,13	0,87
$\delta\gamma_{\text{lead}}$	0,49	0,46	0,42	0,36	0,27	0,17	0,14	0,25	0,93
$\delta\gamma_{\text{n-lead}}$	0,07	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,06	-0,03
$\delta\gamma_{\text{n-lead}}$	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,03	-0,02
δe^+e^-	-0,00	-0,02	-0,02	-0,03	-0,04	-0,05	-0,06	-0,07	-0,09
$\delta e^+e^- \gamma$	0,008	0,006	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003	0,006
$\delta^3\gamma$	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,02	-0,01	-0,01
$\Sigma\delta_i$	-2,11	-2,50	-2,82	-3,60	-4,51	-6,99	-8,37	-12,19	-19,19

Таблица 4. Значения δ_i для WW-детектора
 при $\theta_{\min}^{WW} = 24$ мрад, $\theta_{\max}^{WW} = 58$ мрад, $\sqrt{s} = 92,3$ ГэВ

WW-детектор, $\rho = 2,42$									
x_c	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
δ_0	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05	4,05
$\delta\gamma$	-5,87	-6,22	-6,66	-7,24	-8,14	-9,69	-12,18	-16,35	-24,65
$\delta\gamma_{\text{lead}}$	-0,01	-0,02	-0,04	-0,06	-0,10	-0,12	-0,09	0,09	0,84
$\delta\gamma_{\text{lead}}$	0,45	0,41	0,36	0,29	0,18	0,10	0,07	0,20	0,89
$\delta\gamma_{\text{n-lead}}$	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,09	0,08	0,06	-0,03
$\delta\gamma_{\text{n-lead}}$	0,05	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,03	-0,05
δe^+e^-	0,00	-0,01	-0,02	-0,03	-0,03	-0,04	-0,05	-0,07	-0,08
$\delta e^+e^- \gamma$	-0,012	-0,007	-0,004	-0,002	-0,001	-0,001	0,000	0,001	0,004
$\delta^3\gamma$	-0,026	-0,024	-0,021	-0,018	-0,013	-0,007	0,000	0,009	0,015
$\Sigma\delta_i$	-1,32	-1,72	-2,23	-2,89	-3,93	-5,56	-8,06	-11,97	-19,02

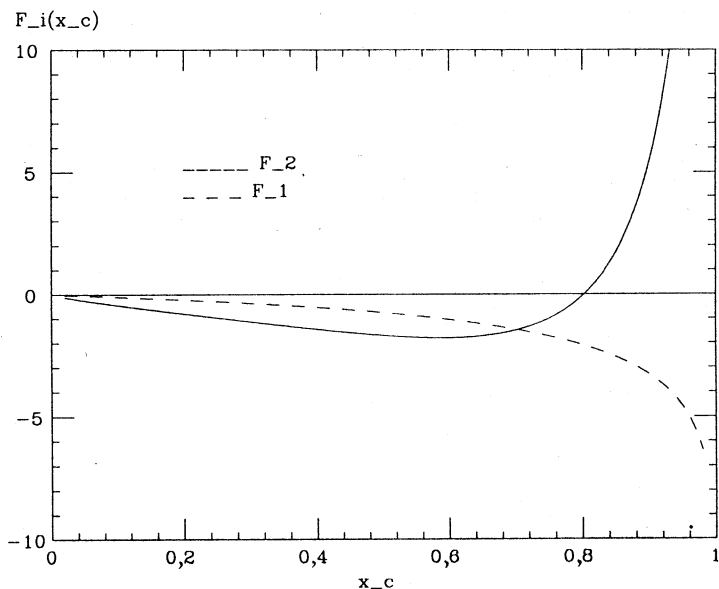


Рис.3. Значения интегралов ядер уравнений эволюции

$$F_i = \int_{x_c}^1 P^{(i)}(x) dx \text{ как функции нижнего предела}$$

Обсудим некоторые общие черты радиационных поправок. Знак каждого из вкладов Σ_i может меняться в зависимости от соотношения виртуальных и реальных вкладов. Сечение, отвечающее вкладам диаграмм в борновском приближении, положительно, тогда как знак РП зависит от порядка ТВ: для вкладов нечетных порядков он отрицателен, а для вкладов четных порядков — положителен. Когда апертура счетчиков велика, а энергетический порог регистрации мал, имеет место полное сокращение ведущих логарифмических вкладов в силу теоремы Киношита — Ли — Науенберга. С уменьшением апертуры и увеличением параметра x_c компенсация виртуальных и реальных вкладов в РП становится неполной. Как следствие этого, можно отметить то, что РП для NN -случая больше по абсолютной величине, чем РП для WW -случая. Из таблиц 3,4 видно также, что при увеличении порога регистрации x_c происходит подавление вкладов за счет излучения реальных частиц и РП; они, становясь отрицательными, растут по абсолютной величине.

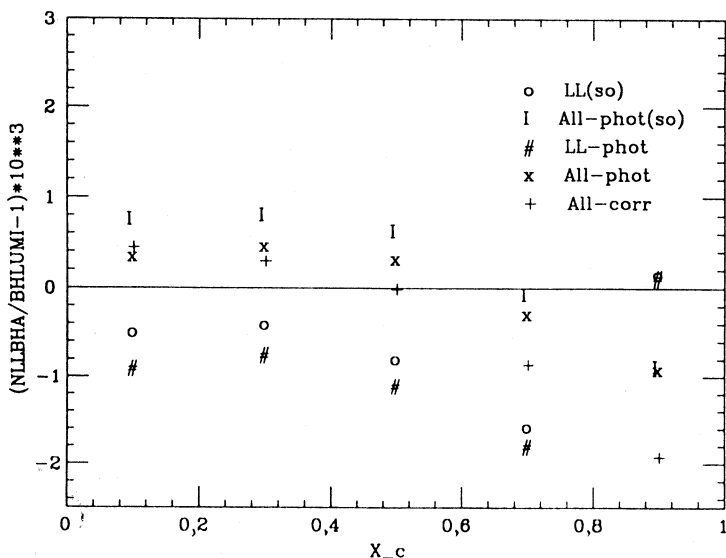


Рис.4. Величина $(\sigma_{NLLBHA}/\sigma_{VHLUMI} - 1)$ в процентах как функция x_c при учете различных вкладов. σ_{NLLBHA} — результаты излагаемого подхода; σ_{VHLUMI} — результаты группы Ядаха

Отметим, что отношение лидирующих и нелидирующих вкладов в $\Sigma^{2\gamma}$ не всегда является величиной много больше единицы (по модулю). Как видно из графика рис.3, представляющего поведение функции

$$F_2(x) = \int_x^1 P^{(2)}(y) dy, \text{ описывающей характерный вклад в ведущем логариф-}$$

мическом приближении, эта функция проходит через ноль при $x \approx 0,8$. Это показывает, что в ведущих вкладах возможны существенные внутренние компенсации, что, конечно, сильно зависит от выбора параметра x_c и диапазона углов.

На рис.4 мы приводим сравнение наших результатов, полученных с помощью программы NLLBHA, с результатами группы Ядаха, полученными с помощью программы VHLUMI по методу Монте-Карло. Выбраны значения параметров WW-детектора (см. табл.4). В широкой области изменения параметра x_c наблюдается согласие результатов на уровне 0,1% при учете излучения фотонов. Причем, как видно из рис.4, в области $x_c \sim 0,8$

существен вклад нелидирующих слагаемых. Что же касается вклада пар (который не учитывается в ВНЛУМИ), то он не превышает 0,1% везде, кроме области $x_c \geq 0,8$, где он должен учитываться.

Авторы благодарны В.С.Фадину, Л.Н.Липатову, Н.П.Меренкову и Л.Трентадуэ как соавторам работ, на которых основан этот обзор. Авторы признательны Д.Бардину, Ф.Берендсу, Б.Варду, Е.Левину, Б.Пьетержаку, М.Скржипеку, Дж.Филду и С.Ядаху, дискуссии с которыми на разных стадиях проведенных исследований были весьма полезны. Э.А.Кураев благодарен фонду ИНТАС (грант 93-1867) за частичную поддержку. А.Б.Арбузов признателен Шведской Королевской академии наук за финансовую поддержку в виде гранта ICFPM.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

КИНЕМАТИКА СИСТЕМЫ БЕСКОНЕЧНОГО ИМПУЛЬСА. ОДНОКРАТНОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Для процесса

$$e^+(p_2) + e^-(p_1) \rightarrow e^+(q_2) + e^-(q_1) + \gamma(k)$$

удобно ввести параметризацию Судакова для 4-импульсов конечных частиц:

$$\begin{aligned} q_1 &= \alpha_1 \tilde{p}_2 + \beta_1 \tilde{p}_1 + \mathbf{q}_1^\perp, & q_2 &= \alpha_2 \tilde{p}_2 + \beta_2 \tilde{p}_1 + \mathbf{q}_2^\perp, \\ k &= \alpha \tilde{p}_2 + \beta \tilde{p}_1 + \mathbf{k}^\perp, \end{aligned} \quad (84)$$

где $\tilde{p}_{1,2}$ являются 4-векторами, лежащими почти на световом конусе, \mathbf{q}_i^\perp и \mathbf{k}^\perp — евклидовы двумерные векторы, заданные в СЦИ:

$$\mathbf{q}_i^\perp \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_i^\perp \mathbf{p}_1 = 0, \quad (\mathbf{q}_i^\perp)^2 = -\mathbf{q}_i^2 < 0, \quad i = 1, 2;$$

$$\tilde{p}_1 = p_1 - \frac{m^2}{s} p_2, \quad \tilde{p}_2 = p_2 - \frac{m^2}{s} p_1,$$

$$p_1^2 = p_2^2 = q_1^2 = q_2^2 = m^2, \quad k^2 = 0 \quad \tilde{p}_1^2 = \tilde{p}_2^2 = \frac{m^6}{s^2},$$

$$s = 2p_1 p_2 = 2\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = 2\tilde{p}_1 p_2 = 2\tilde{p}_2 p_1 \gg m^2.$$

Мы рассматриваем кинематическую ситуацию, в которой фотон излучается под малым углом к направлению движения начального электрона. Условия массовой поверхности для 4-импульсов приводят к тождествам

$$q_1^2 = s \alpha_1 \beta_1 - (\mathbf{q}_1^\perp)^2 = m^2, \quad \alpha_1 = \frac{(\mathbf{q}_1^\perp)^2 + m^2}{s \beta_1},$$

$$q_2^2 = s \alpha_2 \beta_2 - (\mathbf{q}_2^\perp)^2 = m^2, \quad \beta_2 = \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2 + m^2}{s \alpha_2},$$

$$k^2 = s \alpha \beta - (\mathbf{k}^\perp)^2 = 0, \quad s \alpha = \frac{(\mathbf{k}^\perp)^2}{\beta},$$

$$\alpha_2 = 1, \quad |\beta_2| \sim |\alpha_1| \sim |\alpha| \ll 1, \quad \beta_1 \sim \beta \sim 1.$$

С помощью соотношения $d^4 q_1 = (s/2) d\alpha_1 d\beta_1 d^2 \mathbf{q}_1^\perp$ получаем представление фазового объема в виде

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{d^3 \mathbf{q}_1 d^3 \mathbf{q}_2 d^3 \mathbf{k}}{2q_1^0 2q_2^0 2k^0} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2 - k) = \\ &= \frac{1}{4s \beta \beta_1} d\beta d\beta_1 \delta(1 - \beta - \beta_1) d^2 \mathbf{k}^\perp d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp \delta^{(2)}(\mathbf{q}_1^\perp + \mathbf{q}_2^\perp + \mathbf{k}^\perp). \end{aligned}$$

Закон сохранения энергии-импульса записывается в виде

$$q + p_1 = q_1 + k, \quad p_2 = q_2 + q, \quad \mathbf{q}^\perp = -\mathbf{q}_2^\perp.$$

Приведем формулы для знаменателей пропагаторов (далее $\beta_1 = x$, $\beta = 1 - x$):

$$(p_1 - k)^2 - m^2 = \frac{-d_1}{1-x}, \quad (p_1 + q)^2 - m^2 = \frac{d}{x(1-x)},$$

$$q^2 = -(\mathbf{q}_2^\perp)^2, \quad d = m^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}_2^\perp)^2,$$

$$d_1 = m^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}_2^\perp)^2. \quad (85)$$

Матричный элемент процесса принимает вид

$$M = \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(q_2) \bar{u}(q_1) O_\nu u(p_1),$$

$$O^\nu = \gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{(p_1 - k)^2 - m^2} \hat{e} + \hat{e} \frac{\hat{p}_1 + \hat{q} + m}{(p_1 + q)^2 - m^2} \gamma^\nu.$$

Полезно использовать следующее разложение тензора $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^\perp + \frac{p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 p_2} \simeq \frac{2p_1^\mu p_2^\nu}{s} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{(\mathbf{q}^\perp)^2}{2s} \right) \right).$$

Используя (84) и (85), можно записать

$$p_2^\nu \bar{u}(q_1) O_\nu u(p_1) \equiv \bar{u}(q_1) \hat{v}_\rho u(p_1) e_\rho(k),$$

где обобщенная вершина v_ρ представляется в виде

$$v_\rho = s \gamma_\rho x(1-x) \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) - \frac{\gamma_\rho \hat{k} \hat{p}_2}{d} x(1-x) - \frac{\hat{p}_2 \hat{k} \gamma_\rho}{d_1} (1-x).$$

Преобразуем сумму по спиновым состояниям квадрата матричного элемента:

$$\sum_{\text{spin}} |\bar{v}(q_2) \hat{p}_1 v(p_2)|^2 = \text{Tr} \hat{p}_2 \hat{p}_1 \hat{p}_2 \hat{p}_1 = 2s^2,$$

$$R = \frac{-1}{4s^2} \text{Tr} (\hat{p}_1 + m) \hat{v}_\mu (\hat{p}_1 + \hat{k} - \hat{q} + m) \hat{v}_\mu =$$

$$= x[-2xm^2(d-d_1)^2 + (\mathbf{q}_2^\perp)^2(1+x^2) dd_1] \frac{1}{d^2 d_1^2}.$$

В итоге получаем

$$d\sigma^{e^+ e^- \rightarrow e^+ (e^- \gamma)} = 2\alpha^3 \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp dx(1-x)}{\pi^2 (\mathbf{q}_2^\perp)^4 (dd_1)^2} \times$$

$$\times [-2xm^2(d-d_1)^2 + (\mathbf{q}_2^\perp)^2(1+x^2) dd_1].$$

Таким же образом можно получить дифференциальное сечение процесса двойного тормозного излучения в разные стороны:

$$\frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+\gamma e^-\gamma}}{d^2 \mathbf{q}_1^\perp d^2 \mathbf{q}_2^\perp dx_1 dx_2} = \frac{\alpha^4(1+x_1^2)(1+x_2^2)}{\pi^4(1-x_1)(1-x_2)} \int \frac{d^2 \mathbf{q}^\perp}{(\mathbf{q}^\perp)^4} \left[\frac{(\mathbf{q}^\perp)^2(1-x_2)^2}{d_1 d_2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \frac{m^2(1-x_1)^2(d_1-d_2)^2}{d_1^2 d_2^2} \right] \times \left[\frac{(\mathbf{q}^\perp)^2(1-x_2)^2}{\tilde{d}_2 \tilde{d}_2} - \frac{2x_2}{1+x_2^2} \frac{m^2(1-x_2)^2(\tilde{d}_2-\tilde{d}_1)^2}{\tilde{d}_1^2 \tilde{d}_2^2} \right],$$

где x_1 , \mathbf{q}_1^\perp и x_2 , \mathbf{q}_2^\perp суть доли энергии и поперечные по отношению к начальному пучку компоненты импульсов рассеянных электрона и позитрона соответственно; \mathbf{q}^\perp — поперечные составляющие импульса виртуального фотона,

$$d_1 = (1-x_1)^2 m^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}^\perp x_1)^2, \quad d_2 = (1-x_1)^2 m^2 + (\mathbf{q}_1^\perp - \mathbf{q}^\perp)^2,$$

$$\tilde{d}_1 = (1-x_2)^2 m^2 + (\mathbf{q}_2^\perp + \mathbf{q}^\perp x_2)^2, \quad \tilde{d}_2 = (1-x_2)^2 m^2 + (\mathbf{q}_2^\perp + \mathbf{q}^\perp)^2.$$

Рассмотрим теперь экспериментальные ограничения (4) на область интегрирования по $d^2 \mathbf{q}_1^\perp$, $d^2 \mathbf{q}_2^\perp$. Определим безразмерные переменные

$$z_{1,2} = \frac{(\mathbf{q}_{1,2}^\perp)^2}{Q_1^2}.$$

Две узкие полосы $z_1 \simeq z_2$ и $z_1 \simeq x^2 z_2$ в области интегрирования на плоскости (z_1, z_2) дают логарифмически усиленные вклады. Следовательно, ведущий логарифмический вклад в Σ^H будет набираться тогда, когда хотя бы одна из указанных полос будет пересекать прямоугольник $x^2 < z_1 < < \rho^2 x^2$, $1 < z_2 < \rho^2$. Заметим, что полоса $z_1 \simeq x^2 z_2$, отвечающая излучению одного жесткого фотона вдоль направления движения рассеянного электрона, является диагональю этого прямоугольника. Полоса же $z_1 \simeq z_2$, отвечающая излучению жесткого фотона вдоль направления движения началь-

ного электрона, пересекает прямоугольник, если $x^2\rho^2 > z_2$ и $x\rho > 1$. Эти условия и дают Θ -функции в ведущем вкладе в Σ^H .

Действительно, для вклада от излучения начального электрона (см. (19)) получим

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \Theta(1 - \rho x) \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} \int_x^{x^2\rho^2} \frac{dz_1 z_2 (1-x)}{(z_1 - xz_2)(z_2 - z_1)} + \\
 & + \Theta(x\rho - 1) \int_{x^2\rho^2}^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} \int_x^{x^2\rho^2} \frac{dz_1 z_2 (1-x)}{(z_1 - xz_2)(z_2 - z_1)} + \\
 & + \Theta(x\rho - 1) \int_1^{x^2\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} \left\{ \int_x^{z_2 - \eta} \frac{dz_1 (1-x) z_2}{(z_1 - xz_2)(z_2 - z_1)} + \int_{z_2 + \eta}^{x^2\rho^2} \frac{dz_1 (1-x) z_2}{(z_1 - xz_2)(z_1 - z_2)} + \right. \\
 & \left. + \int_{z_2 - \eta}^{z_2 + \eta} \frac{dz_1}{[(z_2 - z_1)^2 + 4\sigma^2 z_2]^2} - \frac{2x\sigma^2}{1+x^2} \int_{z_2 - \eta}^{z_2 + \eta} \frac{2dz_1 z_2}{[(z_2 - z_1)^2 + 4\sigma^2 z_2]^3} \right\},
 \end{aligned}$$

где мы ввели вспомогательный параметр η : $\sigma^2 \ll \eta \ll 1$.

Мы видим, что с помощью этого приема ответ может быть получен в аналитическом виде, причем зависимость от η исчезает в сумме

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ \Theta(x\rho - 1) \Theta(x^2\rho^2 - z) \left(L - \frac{2x}{1+x^2} \right) + \right. \\
 & \left. + \Theta(x^2\rho^2 - z) L_2 + (\Theta(1 - x\rho) + \Theta(x\rho - 1) \Theta(z - x^2\rho^2)) L_3 \right\}.
 \end{aligned}$$

Аналогично получаем вклад за счет излучения вдоль рассеянного электрона:

$$F_2 = \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ L - \frac{2x}{1+x^2} + L_1 \right\},$$

где $L = \ln(Q_1^2 z / m^2)$, а величины L_1, L_2 и L_3 приведены в (22).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ВИРТУАЛЬНЫЕ ПОПРАВКИ
К ИЗЛУЧЕНИЮ ОДНОГО ФОТОНА

Дифференциальное сечение процесса электрон-позитронного рассеяния при высоких энергиях, сопровождаемого излучением одного жесткого фотона, может быть записано в виде

$$d\sigma^{H(S+V)} = \frac{\alpha^3 dx d^2 q_2 d^2 q_1}{2\pi^2 x(1-x)((\mathbf{q}_2^\perp)^2)^2} R, \quad R = \lim_{(p_1, p_2) \rightarrow \infty} \frac{4p_{2\rho} p_{2\sigma} k_{\rho\sigma}}{(2p_1 p_2)^2}.$$

Тензор $k_{\rho\sigma}$, входящий в R , связан с матричным элементом $\varepsilon_\rho M_\rho$ процесса комптоновского рассеяния (ε_ρ — вектор поляризации *тяжелого* фотона) следующим образом:

$$k_{\rho\sigma} = \sum_{\text{spin}} M_\rho M_\sigma^* = \tilde{g}_{\rho\sigma} k_g + \tilde{p}_{1\rho} \tilde{p}_{1\sigma} k_{11} + \tilde{q}_{1\rho} \tilde{q}_{1\sigma} k_{22} + \tilde{q}_{1\rho} \tilde{p}_{1\sigma} k_{21} + \tilde{p}_{1\rho} \tilde{q}_{1\sigma} k_{12},$$

$$k_{ij} = B_{ij} + \frac{\alpha}{2\pi} T_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad k_g = B_g + \frac{\alpha}{2\pi} T_g,$$

где

$$\tilde{g}_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} - \frac{q_\rho q_\sigma}{q^2}, \quad \tilde{p}_{1\rho} = p_{1\rho} - \frac{p_1 q}{q^2} q_\rho, \quad \tilde{q}_{1\rho} = q_{1\rho} - \frac{q_1 q}{q^2} q_\rho$$

суть явно калибровочно-инвариантные комбинации импульсов: $k_{\rho\sigma} q_\rho = k_{\rho\sigma} q_\sigma = 0$.

В рассматриваемом случае малых углов рассеяния R представлено в виде

$$R = \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \eta \right) (B_{11}(s_1, t_1) + x^2 B_{11}(t_1, s_1)) + \frac{\alpha}{2\pi} T,$$

$$T = T_{11} + x^2 T_{22} + x(T_{12} + T_{21}),$$

где η дано в (39).

Точные выражения для T_{ik} приведены в работе [20]. Нам же эти величины нужны только в предельном случае, когда $s_1 \ll |t_1|$ и $|t_1| \ll s_1$, при фиксированных q^2 и $u_1 = -2p_1 q_1$.

В случае малых s_1 мы имеем

$$s = \frac{1}{x(1-x)} [m^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_2^\perp x + \mathbf{q}_1^\perp)^2],$$

далее в этом приложении мы опускаем нижний индекс 1 при инвариантах s и t , характеризующих комптоновский подпроцесс, см. (41).

Принимая во внимание то, что при малых s будем иметь $q^2 = -(\mathbf{q}_2^\perp)^2$, $t = -(1-x)(\mathbf{q}_2^\perp)^2$ и $u = -(\mathbf{q}_2^\perp)^2 x$, мы получаем следующие выражения для T и η :

$$\eta_{s \ll |t|} = 2(L-1+\ln x)(2\ln \Delta - \ln x) + 3L - \ln^2 x - \frac{9}{2},$$

$$T_{s \ll |t|} = \frac{2}{s(1-x)} \left\{ 4(1+x^2) \left[\ln x \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{s} - \text{Li}_2(1-x) \right] - \right.$$

$$\left. - 1 + 2x + x^2 \right\} - \frac{16m^2}{s^2} l_q \ln x.$$

В случае малых $|t|$ имеем

$$\eta_{|t| \ll s} = 2(L-1-\ln x)(2\ln \Delta - \ln x) + 3L - \ln^2 x - \frac{9}{2},$$

$$T_{|t| \ll s} = \frac{2x}{t(1-x)} \left\{ 4(1+x^2) \left[\ln x \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{-t} - \frac{1}{2} \ln^2 x - \text{Li}_2(1-x) \right] - \right.$$

$$\left. - 1 - 2x + x^2 \right\} + \frac{16m^2 x^2}{t^2} l_q \ln x.$$

Дальнейшее интегрирование тривиально. Мы приведем лишь наиболее важные этапы. Вклад членов, содержащих η , можно представить в форме, аналогичной форме борновского вклада:

$$\Sigma_{\eta}^{H(S+V)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \left\{ (1 + \Theta(\rho^2 x^2 - z)) \times \right.$$

$$\left. \times \left[L \left(2\ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) + (2\ln \Delta - \ln x)(\ln x - 2) - \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{15}{4} \right] + \right.$$

$$+ \left(2 \ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) k(x, z) - 2 \ln x (2 \ln \Delta - \ln x) \Theta(\rho^2 x^2 - z) \}.$$

Чтобы получить вклад слагаемых, содержащих T , надо рассмотреть сначала следующие типы интегралов:

$$I_{s\{t\}} = Q_1^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{\pi(\mathbf{q}_2^\perp)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp}{\pi s\{t\}} \ln \frac{(\mathbf{q}_2^\perp)^2}{s\{-t\}}, \quad i_{s\{t\}} = Q_1^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{\pi(\mathbf{q}_2^\perp)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp}{\pi s\{t\}},$$

$$m_{s\{t\}} = Q_1^2 \int \frac{d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{\pi(\mathbf{q}_2^\perp)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp m^2}{\pi s^2\{t^2\}}.$$

Обозначая $\sigma^2(1-x)^2 + (\mathbf{q}_2^\perp x - \mathbf{q}_1^\perp)^2 / Q_1^2$ как $a + b \cos \varphi$ и используя интегралы

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{a + b \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\ln(a + b \cos \varphi)}{a + b \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{2(a^2 - b^2)}{a + \sqrt{a^2 - b^2}},$$

получаем

$$I_s = (1-x)x \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} \int_{x^2}^{x^2 \rho^2} dz_1 \times \\ \times \frac{\ln(z_2^2(1-x)x^3) - \ln[(z_1 - z_2 x^2)^2 + 4\sigma^2 x^2(1-x)^2 z_2]}{\sqrt{(z_1 - x^2 z_2)^2 + 4\sigma^2 x^2(1-x)^2 z_2}}.$$

Так как мы работаем с логарифмической точностью, то при интегрировании по z_1 мы можем рассматривать только область $|z_1 - x^2 z_2| < \eta$, $\sigma^2 \ll \eta \ll 1$. Мы получаем

$$I_s = x(1-x) \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} L \left[\frac{1}{2} L + \ln \frac{x}{1-x} \right].$$

Оставшиеся интегралы вычисляются аналогично:

$$I_t = -(1-x) \int_1^{\rho^2 x^2} \frac{dz_2}{z_2^2} L \left[\frac{1}{2} L + \ln \frac{1}{1-x} \right], \quad i_s = x(1-x) \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2} L,$$

$$i_t = -(1-x) \int_1^{\rho^2 x^2} \frac{dz_2}{z_2^2} L, \quad m_s = x^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz_2}{z_2^2}, \quad m_t = \int_1^{\rho^2 x^2} \frac{dz_2}{z_2^2}.$$

Теперь мы можем записать вклад T в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \Sigma_T^{H(S+V)} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \int_x^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \left\{ \left(\frac{1}{2} L + \ln \frac{x}{1-x} \right) \ln x - \right. \\ & - \text{Li}_2(1-x) + \frac{x^2 + 2x - 1}{4(1+x^2)} - \frac{2x \ln x}{1+x^2} - \\ & - \Theta(x^2 \rho^2 - z) \left[\left(\frac{1}{2} L + \ln \frac{1}{1-x} \right) \ln x - \frac{1}{2} \ln^2 x - \text{Li}_2(1-x) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1 + 2x - x^2}{4(1+x^2)} - \frac{2x \ln x}{1+x^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Тогда полный вклад излучения одного жесткого фотона из электронной линии с учетом виртуальных однопетлевых поправок и сопровождающего излучения мягкого фотона можно записать как сумму:

$$\Sigma^{H(S+V)} = \Sigma_{\eta}^{H(S+V)} + \Sigma_T^{H(S+V)},$$

которая приведена в выражении (4).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ВКЛАД ПОЛУКОЛЛИНЕАРНОЙ КИНЕМАТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ ДВУХ ФОТОНОВ ИЗ ОДНОЙ ЛЕПТОННОЙ ЛИНИИ

Альтернативой использованию приближения квазиреальных электронов [26] является прямой расчет вкладов различных диаграмм. Так как здесь мы работаем с логарифмической точностью, то можно ограничиться рассмотрением двух полуколлинеарных областей: 1) когда фотон с 4-импульсом k_1

излучается под углом не большим, чем $\theta_0 \ll 1$, к направлению движения начального электрона; 2) когда фотон с импульсом k_1 излучается внутри такого же конуса вокруг направления движения рассеянного электрона. В обоих случаях считается, что второй фотон не попадает ни в один из указанных конусов. Принимая во внимание тождественность фотонов с помощью статистического фактора $1/2!$, получаем дифференциальное сечение в виде

$$d\sigma_{SC}^{HH} = \frac{\alpha^4}{2\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_2^\perp}{\pi(\mathbf{q}_2^\perp)^4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_1^\perp}{\pi} \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \int_{\Delta}^{1-x-\Delta} \frac{dx_1 dx_2}{x_1 x_2 x} \times \\ \times \delta(1-x_1-x_2-x) \int R \frac{d^2 \mathbf{k}_1^\perp}{\pi}, \quad (86)$$

где

$$Q_1^{-4} \int R \frac{d^2 \mathbf{k}_1^\perp}{\pi} = 2(\mathbf{q}_2^\perp)^2 \int \frac{d^2 \mathbf{k}_1^\perp}{\pi} \left\{ \frac{[1+(1-x_1)^2][x^2+(1-x_1)^2]}{x_1(1-x_1)^2(2p_1 k_1)(2p_1 k_2)(2q_1 k_2)} \Bigg|_{\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{p}_1} + \right. \\ \left. + \frac{x[1+(1-x_2)^2][x^2+(1-x_2)^2]}{x_1(1-x_2)^2(2q_1 k_1)(2p_1 k_2)(2q_1 k_2)} \Bigg|_{\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{q}_1} \right\}.$$

В случае излучения коллинеарного фотона с импульсом \mathbf{k}_1 вдоль импульса \mathbf{p}_1 кинематические инварианты удобно представить в виде

$$2p_1 k_1 = \frac{Q_1^2}{x_1} [(\mathbf{k}_1^\perp)^2 + \sigma^2 x_1^2], \quad 2p_1 k_2 = \frac{Q_1^2}{x_2} (\mathbf{k}_2^\perp)^2,$$

$$2q_1 k_2 = \frac{Q_1^2}{x_2 x} [x \mathbf{q}_2^\perp - (1-x_1) \mathbf{q}_1^\perp]^2, \quad \mathbf{k}_2^\perp = -\mathbf{q}_2^\perp - \mathbf{q}_1^\perp,$$

а в случае излучения вдоль \mathbf{q}_1 — в виде

$$2k_1 q_1 = \frac{Q_1^2}{x_1 x} [\sigma^2 x_1^2 + (x \mathbf{k}_1^\perp - \mathbf{q}_1^\perp)^2], \quad 2p_1 k_2 = \frac{Q_1^2}{x_2} (\mathbf{k}_2^\perp)^2,$$

$$2q_1 k_2 = \frac{Q_1^2}{x_2 x} (q_1^\perp - x q_2^\perp)^2, \quad k_2^\perp = q_2^\perp - q_1^\perp \frac{1-x_2}{x},$$

где $Q_1^2 = \varepsilon^2 \theta_1^2$, $\sigma^2 = m^2 / Q_1^2$, и введено безразмерные векторы k_2^\perp , q_1^\perp и q_2^\perp так, что $(q_1^\perp)^2 = z_1$, и $\widehat{q_1^\perp q_2^\perp} = \varphi$.

Интегрирование по $d^2 k_1^\perp$ проводится с однологарифмической точностью:

$$Q_1^2 \int \frac{d^2 k_1^\perp}{\pi(2p_1 k_1)} \Big|_{k_{1\parallel} p_1} = x_1 L, \quad Q_1^2 \int \frac{d^2 k_1^\perp}{\pi(2q_1 k_1)} \Big|_{k_{1\parallel} q_1} = \frac{x_1}{x} L.$$

На этом этапе необходимо рассмотреть кинематические ограничения на переменные интегрирования φ и z_1 . Рассмотрим условия на угол вылета второго фотона:

$$\left| \frac{k_2^\perp}{x_2} \right| > \theta_0, \quad \left| \frac{q_1^\perp}{x} - \frac{k_2^\perp}{x_2} \right| > \theta_0.$$

Первое условие не позволяет фотону попасть в коллинеарный конус вокруг направления движения начального электрона, а второе — конечного. В терминах переменных z_1 и φ они представлены в виде набора условий:

$$i) 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\lambda^2 - (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1 z_2}}, \quad |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| < \lambda,$$

$$ii) 1 > \cos \varphi > -1, \quad |\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| > \lambda,$$

$$iii) 1 > \cos \varphi > -1 + \frac{\frac{x^2}{(1-x_1)^2} \lambda^2 - (\sqrt{z_1} - \frac{x}{1-x_1} \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1 z_2} \frac{x}{1-x_1}},$$

$$\left| \sqrt{z_1} - \frac{x \sqrt{z_2}}{1-x_1} \right| < \lambda \frac{x}{1-x_1},$$

$$iv) 1 > \cos \varphi > -1, \quad \left| z_1 - \frac{x^2}{(1-x_1)^2} z_2 \right| > 2\lambda \sqrt{z_2} \frac{x^2}{(1-x_1)^2},$$

где $\lambda = x_2 \theta_0 / \theta_1$. Мы считаем, что $\lambda \ll 1$. Действительно, для параметра θ_0 , определяющего область коллинеарной кинематики, имеем $\theta_0 \varepsilon \gg m$ или $\theta_0 \gg 10^{-5}$ для энергий коллайдера LEP I. С другой стороны, имеем экспериментальные ограничения на параметр θ_1 : $\theta_1 \geq 10^{-2}$. Это позволяет в рамках заданной точности считать $\lambda \ll 1$.

Аналогично можно получить ограничения на область интегрирования и для случая, когда фотон с импульсом k_1 попадает в коллинеарный конус вокруг направления движения рассеянного электрона.

В областях *ii*) и *iv*) мы можем провести интегрирование по азимутальному углу:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi(2p_1 k_2)(2q_1 k_2)} \Big|_{\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{p}_1} = \frac{x_2 x Q_1^{-4}}{(1-x_1)z_1 - xz_2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{|z_2 - z_1|} - \frac{x(1-x_1)}{|x^2 z_2 - (1-x_1)^2 z_1|} \right],$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi(2p_1 k_2)(2q_1 k_2)} \Big|_{\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{q}_1} = \frac{x_2 x^3 (1-x_2)^{-2} Q_q^{-4}}{z_1 - z_2 \frac{x^2}{1-x_2}} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\left| z_1 - z_2 \frac{x^2}{(1-x_2)^2} \right|} - \frac{1-x_2}{|z_1 - x^2 z_2|} \right].$$

В областях *i*) и *iii*) имеем

$$\mathcal{I} = \int dz_1 \frac{d\varphi}{2\pi(z_1 + z_2 + 2\sqrt{z_1 z_2} \cos \varphi)} \Big|_{|\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}| < \lambda} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int \frac{dz}{|z_1 - z_2|} \arctg \left\{ \frac{(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{|z_1 - z_2|} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right\},$$

где

$$\varphi_0 = \arccos \left(-1 + \frac{\lambda^2 - (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2}{2\sqrt{z_1 z_2}} \right).$$

В результате получаем

$$\mathcal{I} = 2 \ln 2.$$

Тогда полное выражение вклада полуколлинеарной кинематической области записывается в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_{SC}^{HH} = & \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \int_{\Delta}^{1-x-\Delta} \frac{dx_1 dx_2 \delta(1-x-x_1-x_2)}{x_1 x_2 (1-x_1)^2} \times \\ & \times [1 + (1-x_1)^2][x^2 + (1-x_1)^2] \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} L \times \\ & \times \left\{ \ln \frac{z \theta_1^2}{\theta_0^2} [1 + \Theta(\rho^2 x^2 - z) + 2\Theta(\rho^2(1-x_1)^2 - z)] + \right. \\ & + \Theta(\rho^2 x^2 - z) \ln \frac{(z-x^2)(\rho^2 x^2 - z)}{x^2(z-x(1-x_1))(\rho^2 x(1-x_1) - z)} + \\ & + \Theta(z - \rho^2(1-x_1)^2) \left[\ln \frac{(z - \rho^2(1-x_1)x)(z - (1-x_1)^2)}{(\rho^2(1-x_1)^2 - z)(z - x(1-x_1))} + \right. \\ & + \ln \frac{(\rho^2(1-x_1) - z)(z - (1-x_1)^2)}{(\rho^2(1-x_1)^2 - z)(z - (1-x_1))} \left. \right] + \Theta(z - \rho^2 x^2) \ln \frac{(z - \rho^2 x(1-x_1))(z - x^2)}{(\rho^2 x^2 - z)(z - x(1-x_1))} + \\ & + \Theta(\rho^2(1-x_1)^2 - z) \left[\ln \frac{(z - (1-x_1)^2)(\rho^2(1-x_1)^2 - z)}{(\rho^2 x(1-x_1) - z)(z - x(1-x_1))(1-x_1)^2} + \right. \\ & \left. + \ln \frac{(z - (1-x_1)^2)(\rho^2(1-x_1)^2 - z)}{(\rho^2(1-x_1) - z)(z - (1-x_1))(1-x_1)^2} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)] + \\
 & + 4 \left[-2 \ln(1-x_c) - 2 \ln(1-\tilde{x}_c) + \int_{x_c}^1 dx (1+x) + \right. \\
 & \left. + \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (1+x) \right] + 2 \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)] \ln x + \\
 & + 2 \int_{x_c}^1 dx k(x, z) \frac{1+x^2}{1-x} \Bigg\}, \tag{88}
 \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_c = \max(x_c, 1/\rho)$, а величина $k(x, z)$ задана в (21). Сингулярный вклад, связанный с излучением двух жестких фотонов, имеет вид (см. (46)):

$$\begin{aligned}
 (\Sigma^{HH})_{\Delta} &= \ln \Delta \left\{ \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [-(1, \rho^2) L_1 - (1, \rho^2 x^2) L_2 - \right. \\
 & - ((1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)) L_3] - \int_{x_c}^1 dx (3+x) - \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (3+x) - \\
 & - 4 \ln \Delta + 4 \ln(1-x_c) + 4 \ln(1-\tilde{x}_c) - \\
 & \left. - \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)] \right\}. \tag{89}
 \end{aligned}$$

Теперь нетрудно убедиться во взаимном сокращении этих вкладов:

$$(\Sigma^{VV+VS+SS})_{\Delta} + (\Sigma^{H(S+V)})_{\Delta} + (\Sigma^{HH})_{\Delta} = 0. \tag{90}$$

Рассмотрим соответствующие вклады в Σ_{γ}^Y :

$$(\Sigma_{S+V}^{S+V})_{\Delta} = \ln \Delta (-14 - 8 \ln \Delta)(1, \rho^2),$$

$$\begin{aligned}
\left(\Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^{S+V} \right)_{\Delta} &= \ln \Delta \left\{ 2 \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} k(x, z) + \right. \\
&+ (1, \rho^2)[16 \ln \Delta + 14 - 8 \ln(1-x_c) - \\
&- 8 \ln(1-\tilde{x}_c) + 4 \int_{x_c}^1 dx (1+x) + 4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (1+x)] + \\
&\left. + 4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} [(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)] \right\}, \quad (91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\Sigma_H^H \right)_{\Delta} &= \ln \Delta \left\{ -8(1, \rho^2)[\ln \Delta - \ln(1-x_c) - \ln(1-\tilde{x}_c)] - \right. \\
&- 8 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx \frac{[(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)]}{1-x} - 2 \int_{x_c}^1 dx k(x, z) \frac{1+x^2}{1-x} - \\
&\left. - 4 \int_{x_c}^1 dx (1+x)[(1, \rho^2) + (1, \rho^2 x^2)] \right\}.
\end{aligned}$$

Преобразуя последнее слагаемое в $\left(\Sigma_H^H \right)_{\Delta}$ с помощью тождества

$$\begin{aligned}
-4 \int_{x_c}^1 dx (1+x)[(1, \rho^2) + (1, \rho^2 x^2)] &= -4 \int_{x_c}^1 dx (1+x)(1, \rho^2) - \\
-4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (1+x)(1, \rho^2) + 4 \int_{\tilde{x}_c}^1 dx (1+x)[(1, \rho^2) - (1, \rho^2 x^2)], \quad (92)
\end{aligned}$$

опять можно убедиться в сокращении Δ -зависимости:

$$\left(\Sigma_{S+V}^{S+V} \right)_{\Delta} + \left(\Sigma_{S+V}^H + \Sigma_H^{S+V} \right)_{\Delta} + \left(\Sigma_H^H \right)_{\Delta} = 0. \quad (93)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕДУЩИХ ВКЛАДОВ В $\Sigma^{\mathcal{N}}$
 В ТЕРМИНАХ ЯДЕР УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ

Здесь мы покажем, что ведущие логарифмические вклады могут быть представлены в виде, предсказываемом ренормализационной группой. Сумму приведенных выше вкладов в $\Sigma^{\mathcal{N}}$, выделив ведущие слагаемые, можно записать как

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mathcal{N}} = & 2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \mathcal{L}^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \left\{ 2 \int_{x_c}^1 dx \delta(1-x) \left(\ln^2 \Delta + \frac{3}{2} \ln \Delta + \frac{9}{16} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_{x_c}^{1-\Delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} \left(2 \ln \Delta - \ln x + \frac{3}{2} \right) (1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)) + \\ & + \frac{1}{4} \int_{x_c}^{1-2\Delta} dx \left[2 \frac{1+x^2}{1-x} \ln \frac{1-x-\Delta}{\Delta} + \frac{1}{2} (1+x) \ln x - 1 + x \right] \times \\ & \times [1 + 3\Theta(x^2 \rho^2 - z)] + \frac{1}{4} \int_{x_c}^1 dx \left[2 \frac{1+x^2}{1-x} \ln \left(\frac{1-x-\Delta}{\Delta} \frac{\rho - \sqrt{z}}{\sqrt{z} - \rho x} \sqrt{x} \right) + \right. \\ & \left. + x - 1 - \frac{1}{2} (1+x) \ln \frac{\rho^2}{z} + \frac{\sqrt{z}}{\rho} - \frac{x\rho}{\sqrt{z}} \right] \Theta(-x^2 \rho^2 + z) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (94)$$

Можно убедиться, что зависимость от Δ в приведенном выше выражении сокращается. Покажем далее, что это выражение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mathcal{N}} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha \mathcal{L}}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho^2} \frac{dz}{z^2} \int_{x_c}^1 dx \left\{ \frac{1}{2} P^{(2)}(x) [1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)] + \right. \\ & \left. + \int_x^1 dt \frac{1}{t} P(t) P\left(\frac{x}{t}\right) \Theta(t^2 \rho^2 - z) \right\}, \end{aligned} \quad (95)$$

где ядра уравнений эволюции (см. приложение 7) P и $P^{(2)}$ приведены выше (см. (24), (50)). Преобразуем выражение (95) с помощью подстановки

$$\Theta(t^2 \rho^2 - z) = \frac{1}{2} (1 + \Theta(x^2 \rho^2 - z)) + \frac{1}{2} \Theta(z - x^2 \rho^2) - \Theta(z - t^2 \rho^2)$$

и изменим порядок интегрирования в последнем слагаемом:

$$\begin{aligned} \int_x^1 dt \int_{\rho^2 t^2}^{\rho^2} dz &= \int_{x^2 \rho^2}^{\rho^2} dz \int_x^{\sqrt{z}/\rho} dt = \\ &= \int_1^{\rho^2} dz \Theta(z - \rho^2 x^2) \int_x^{\sqrt{z}/\rho} dt. \end{aligned}$$

Проводя элементарное интегрирование по t и используя явные выражения для ядер, нетрудно убедиться в тождественности (95) и (94). Аналогично можно убедиться в справедливости представления (51) для Σ_γ^y .

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

СЛУЧАЙ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ДЕТЕКТОРОВ

Для определенности мы будем предполагать, что рассеянный электрон детектируется более широким кольцевым счетчиком с апертурой

$$\theta_1 < \theta_- < \theta_3,$$

а позитрон — более узким:

$$\theta_2 < \theta_+ < \theta_4,$$

причем

$$1 < \rho_2 < \rho_4 < \rho_3, \quad \rho_{2,3,4} = \theta_{2,3,4} / \theta_1.$$

Такое упорядочение характерно для экспериментов на LEP I. Вычисления, аналогичные приведенным в приложении 1, дают вклад излучения одного жесткого фотона:

$$\Sigma^{H(W)} + \Sigma_{H(N)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1-\Delta} \int_{x_c}^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} \int_1^{\rho_3} \frac{dz}{z^2} \times$$

$$\times (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \{A + B + C + D\}, \quad (96)$$

$$\begin{aligned}
 A &= [\Theta(\rho_2 - x\rho_3)(\rho_2^2, \rho_4^2) + \\
 &+ \Theta(x\rho_3 - \rho_2) \Theta(\rho_4 - x\rho_3)(x^2\rho_3^2, \rho_4^2)] \ln \left| \frac{(x\rho_3^2 - z)(z - x^2)}{(x^2\rho_3^2 - z)(z - x)} \right| + \\
 &+ (\rho_2^2, \rho_4^2)(x^2, x^2\rho_3^2) \left[L - 1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \ln \left| \frac{(x^2\rho_3^2 - z)(z - x^2)}{x^2(x\rho_3^2 - z)(z - x)} \right| \right], \\
 B &= (\rho_2^2, \rho_4^2) \left[L - 1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \ln \left| \frac{x^2(\rho_3^2 - z)(z - 1)}{(x\rho_3^2 - z)(z - x)} \right| \right], \\
 C &= [-(1, x^2\rho_2^2) - (x^2\rho_4^2, \rho_3^2)] \Theta(x\rho_2 - 1) + (1, \rho_3^2) \Theta(1 - x\rho_4) + \\
 &+ (x^2\rho_4^2, \rho_3^2) \Theta(1 - x\rho_2) \Theta(x\rho_4 - 1) \ln \left| \frac{(x\rho_4^2 - z)(z - x^2\rho_2^2)}{(x^2\rho_4^2 - z)(z - x\rho_2^2)} \right| + \\
 &+ (1, \rho_3^2)(x^2\rho_2^2, x^2\rho_4^2) \left[L - 1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \ln \left| \frac{(x^2\rho_4^2 - z)(z - x^2\rho_2^2)}{x^2(x\rho_4^2 - z)(z - x\rho_2^2)} \right| \right], \\
 D &= -[(1, \rho_2^2) - (\rho_4^2, \rho_3^2)] \ln \left| \frac{(x\rho_4^2 - z)(z - \rho_2^2)}{(\rho_4^2 - z)(z - x\rho_2^2)} \right| + \\
 &+ (\rho_2^2, \rho_4^2) \left[L - 1 + \frac{(1-x)^2}{1+x^2} + \ln \left| \frac{x^2(\rho_4^2 - z)(z - \rho_2^2)}{(x\rho_4^2 - z)(z - x\rho_2^2)} \right| \right].
 \end{aligned}$$

Слагаемые A , B , C и D отвечают, соответственно, вкладам излучения начального электрона, конечного электрона, начального и конечного позитрона. Отметим, что при $\rho_2 = 1$ и $\rho_4 = \rho_3 = \rho$ приведенный выше результат переходит в формулу (21).

Принимая во внимание поправки, связанные с излучением виртуальных и мягких фотонов, поправку в первом порядке ТВ представим в виде

$$\begin{aligned} (\Sigma \gamma)^{NW} = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_1^{\rho_3^2} \frac{dz}{z^2} (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \left\{ -2 + \right. \\ & \left. + \int_{x_c}^1 dx P(x) [(\rho_2^2, \rho_4^2)((1, \rho_3^2) + (x^2, x^2\rho_3^2)) + \right. \\ & \left. + (1, \rho_3^2)((\rho_2^2, \rho_4^2) + (x^2\rho_2^2, x^2\rho_4^2))] + \int_{x_c}^1 dx k(x, z)^{NW} \frac{1+x^2}{1-x} \right\}, \end{aligned}$$

где величина $k(x, z)^{NW}$ получится из выражения в фигурных скобках в (96) при отбрасывании слагаемых, пропорциональных $(L-1)$.

Мы приведем также выражения для вкладов второго порядка ТВ в лидирующем логарифмическом приближении:

$$\begin{aligned} (\Sigma \gamma)^{NW} = & \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_{x_c}^{\rho_4^2} \frac{dz}{z^2} L^2 (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^1 dx_1 \int_{x_c/x_1}^1 dx_2 P(x_1) P(x_2) \times \\ & \times [(1, \rho_3^2) + (x_1^2, x_1^2\rho_3^2)][(\rho_2^2, \rho_4^2) + (x_2^2\rho_2^2, x_2^2\rho_4^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Sigma \gamma)^{NW} = & \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho_4^2} \frac{dz}{z^2} L^2 (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^1 dx \left\{ \frac{1}{2} P^{(2)}(x) \times \right. \\ & \times [(\rho_2^2, \rho_4^2)((1, \rho_3^2) + (x^2, x^2\rho_3^2)) + (1, \rho_3^2)((\rho_2^2, \rho_4^2) + (x^2\rho_2^2, x^2\rho_4^2))] + \\ & \left. + \int_x^1 \frac{dt}{t} P(t) P\left(\frac{x}{t}\right) [(\rho_2^2, \rho_4^2)(1, t^2\rho_3^2) + (1, \rho_3^2)(\rho_2^2, t^2\rho_4^2)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Sigma e^+ e^-)^{NW} = & \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_1^{\rho_4^2} \frac{dz}{z^2} L^2 (1 - \Pi(-zQ_1^2))^{-2} \int_{x_c}^1 dx \cdot R(x) \times \\ & \times [(\rho_2^2, \rho_4^2)((1, \rho_3^2) + (x^2, x^2\rho_3^2)) + (1, \rho_3^2)((\rho_2^2, \rho_4^2) + (x^2\rho_2^2, x^2\rho_4^2))]. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

ИТЕРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИПАТОВА

Сечение процесса $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$ с учетом радиационных поправок к начальному состоянию как сечение процесса Дрелла — Яна записывается в виде

$$\sigma^{e\bar{e} \rightarrow h}(s) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \Theta(-2 + \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} + x_1 + x_2) \mathcal{D}_e^e(x_1) \mathcal{D}_{\bar{e}}^{\bar{e}}(x_2) \times \\ \times \sigma_0^{e\bar{e} \rightarrow h}(x_1, x_2, s) (1 - \Pi(x_1, x_2, s))^{-2} K,$$

где σ_0 есть сечение без учета РП,

$$\Pi(s) = \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{s}{m^2} - \frac{5}{9} \right),$$

K — множитель, учитывающий нелидирующие поправки:

$$K = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right).$$

Структурные функции $\mathcal{D}_a^b(x)$ описывают вероятность найти частицу сорта b с долей импульса x в частице сорта a . Они удовлетворяют уравнениям Липатова [11]:

$$\mathcal{D}_e^e(x, s) = \delta(1-x) + \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^e(y, t) P_e^e\left(\frac{x}{y}\right) + \right. \\ \left. + \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^\gamma(y, t) P_\gamma^e\left(\frac{x}{y}\right) \right],$$

$$\mathcal{D}_{\bar{e}}^{\bar{e}}(x, s) = \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_{\bar{e}}^{\bar{e}}(y, t) P_{\bar{e}}^{\bar{e}}\left(\frac{x}{y}\right) + \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_{\bar{e}}^\gamma(y, t) P_\gamma^{\bar{e}}\left(\frac{x}{y}\right) \right],$$

$$\mathcal{D}_e^\gamma(x, s) = -\frac{2}{3} \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \mathcal{D}_e^\gamma(x, t) + \int_{m^2}^s \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^e(y, t) P_e^\gamma\left(\frac{x}{y}\right) + \right.$$

$$+ \int_x^1 \frac{dy}{y} \mathcal{D}_e^{\bar{e}}(y, t) P_e^{\gamma} \left(\frac{x}{y} \right) \Big],$$

где

$$\alpha(t) = \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{t}{m^2} \right)^{-1}, \quad P_{\gamma}^e(z) = P_{\gamma}^{\bar{e}}(z) = z^2 + (1-z)^2,$$

$$P_e^e(z) = P_e^{\bar{e}}(z) \equiv P(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \Theta(1-z-\Delta) \frac{1+z^2}{1-z} + \delta(1-z) \left(\frac{3}{2} + 2 \ln \Delta \right) \right\},$$

$$P_e^{\gamma}(z) = P_e^{\gamma}(z) = \frac{1}{z} (1 + (1-z)^2).$$

Удобно представить \mathcal{D}_e^e в виде суммы синглетного и несинглетного вкладов:

$$\mathcal{D}_e^e = \mathcal{D}_{NS} + \mathcal{D}_S.$$

Один из них, \mathcal{D}_{NS} , допускает разложение в функциональный ряд:

$$\mathcal{D}_{NS}(x, \beta) = \delta(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\beta}{4} \right)^k P^{*k}(x), \quad \beta = \frac{2\alpha}{\pi} L,$$

$$P^{*k}(x) = \underbrace{P(\bullet) \otimes P(\bullet) \otimes \dots \otimes P(x)}_k,$$

$$P_1(\bullet) \otimes P_2(x) = \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x - x_1 x_2) P_1(x_1) P_2(x_2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P_1(y) P_2 \left(\frac{x}{y} \right).$$

Явные выражения для ядер $P^{(2)}(x)$ и $P^{(3)}(x)$ приведены выше в тексте обзора. Отметим важное свойство $P^{(k)}(x)$:

$$\int_0^1 dx P^{(k)}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{97}$$

Для итераций удобно, следуя работе [24], ввести новые функции

$$\mathcal{D}_S = \mathcal{D}_e^{\bar{e}}, \quad \mathcal{D}_{NS} = \mathcal{D}_e^e - \mathcal{D}_S, \quad \mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_e^e + \mathcal{D}_e^{\bar{e}}.$$

Эти функции удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{D}_e^\gamma &= -\frac{\beta}{6} \mathcal{D}_e^\gamma + \frac{\beta}{4} \mathcal{D}_+ \otimes P_e^\gamma, \\ \mathcal{D}_+(x, \beta) &= \delta(1-x) + \frac{1}{4} \int_0^\beta d\eta \left\{ \mathcal{D}_+(\bullet, \eta) \otimes P(x) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\eta}{6}\right) \int_0^\eta dy \cdot \exp\left(\frac{y}{6}\right) \mathcal{D}_+(\bullet, y) \otimes R(x) \right\}, \\ R(x) &= P_e^\gamma(\bullet) \otimes P_e^\gamma(x) = \\ &= \frac{1-x}{3x} (4 + 7x + 4x^2) + 2(1+x) \ln x \equiv R_s(x). \end{aligned}$$

Для $\mathcal{D}_s(x, \beta)$ имеем

$$\mathcal{D}_s = \frac{\beta^2}{32} R(x) + \frac{\beta^3}{6} \left[\frac{1}{32} P(\bullet) \otimes R(x) - \frac{1}{96} R(x) \right].$$

В заключение отметим, что функция $f(z)$, связывающая сечения процессов образования системы конечных частиц X с инвариантной массой W при столкновениях e^+e^- -пучков и фотонных пучков, является сверткой двух ядер эволюции:

$$\begin{aligned} \sigma^{e\bar{e} \rightarrow e\bar{e}X}(s) &\approx \left(\frac{\alpha}{2\pi} L \right)^2 \int_{z_{\text{th}}}^1 \frac{dz}{z} f(z) \sigma^{\gamma \rightarrow X}(zs), \\ f(z) &= \int_z^1 \frac{dx}{x} (1 + (1-x)^2) \left(1 + \left(1 - \frac{z}{x} \right)^2 \right) = (2+z)^2 \ln \frac{1}{z} - 2(1-z)(3+z), \\ f(z) &= P_e^\gamma(\bullet) \otimes P_e^\gamma(z), \quad L = \ln \frac{s}{m_e^2}, \quad z_{\text{th}} = \frac{W^2}{s}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reports of the working groups on precision calculations for the Z resonance. Bardin D., Holik W., Passarino G. (eds.), — CERN Yellow Report, CERN 95—03, 1995.
2. Jadach S., Melles M., Placzek W. et al. — CERN Yellow Report, CERN 95—03, 1995, p.343 (and references therein).

3. **Jadach S., Richter-Was E., Ward B.F.L., Was Z.** — *Comp.Phys.Comm.*, 1992, vol.70, p.305; *ibid.* 1994, vol.79, p.503.
4. **Arbuzov A., Fadin V., Kuraev E. et al.** — CERN Yellow Report, CERN 95—03, 1995, p.369; **Fadin V., Kuraev E., Lipatov L. et al.** — In: *Proc. of Tennessee Int. Sympos. on Radiative Corrections*, Ward B.F.L. (ed.), 1994, p.168.
5. **Cacciari M., Montagna G., Nicosini O., Piccini F.** — CERN Yellow Report, CERN 95—03, 1995, p.389 (and references therein).
6. **Caffo M., Czyz H., Remiddi E.** — *Phys.Lett.*, 1994, vol.B327, p.369; *Int. J. Mod. Phys.*, 1993 vol.4, p.591; *Nuovo Cim.*, 1992, vol.A105, p.277.
7. **Yennie D.R., Frautschi S., Suura H.** — *Ann.Phys. (NY)*, 1961, vol.13, p.379.
8. **Berends F.A., Kleiss R., De Gausmaecker P. et al.** — *Phys.Lett.*, 1981, vol.B103, p.124; **Berends F.A. et al.** — *Nucl.Phys.*, 1982, vol.B206, p.61; **Berends F.A. et al.** — *Nucl.Phys.*, 1983, vol.B253, p.537; **Berends F.A. et al.** — *Nucl.Phys.*, 1984, vol.B264, p.243.
9. **Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A., Kuraev E.A.** — *Phys.Rep.*, 1981, vol.78, p.294; **Budnev V.M., Ginzburg I.F., Meledin G.V., Serbo V.G.** — *Phys.Rep.*, 1975, vol.C15, p.183.
10. **Kuraev E.A., Lipatov L.N., Merenkov N.P.** — *Phys.Lett.*, 1973, vol.B47, p.33; Препринт ЛИЯФ, №46, Л., 1973; **Cheng H., Wu T.T.** — *Phys.Rev.*, 1969, vol.187, p.1868; **Кураев Э.А., Липатов Л.Н., Меренков Н.П., Фадин В.С., Трентаду Л.** — *ЯФ*, 1993, т.56, с.145.
11. **Липатов Л.Н.** — *ЯФ*, 1974, т.20, с.94.
12. **Altarelli G., Parisi G.** — *Nucl.Phys.*, 1977, vol.B126, p.298.
13. **Кураев Э.А., Фадин В.С.** — *ЯФ*, 1985, т.41, с.466; препринт ИЯФ 84-44, Новосибирск, 1984.
14. **Nicosini O., Trentadue L.** — *Phys.Lett.*, 1987, vol.B196, p.551.
15. **Budny R.** — *Phys.Lett.*, 1975, vol.55B, p.227; **Bardin D., Hollik W., Riemann T.** — Preprint MPI-PAE/Pth, 32/90, PHE90-9, 1990; **Boehm M., Denner A., Hollik W.** — *Nucl.Phys.*, 1988, vol.B304, p.687.
16. **Половин Р.В.** — *ЖЭТФ*, 1956, т.31, с.449; **Redhead F.A.** — *Proc.Roy.Soc.*, 1953, vol.220, p.219; **Berends F.A. et al.** — *Nucl.Phys.*, 1974, vol.B68, p.541.
17. **Jegerlehner F.** — *Prog.Part.Nucl.Phys.*, 1991, vol.27 p.1.
18. **Fäldt G., Osland P.** — University of Bergen, Report 1993—04, 1993.
19. **Barbieri R., Mignasco J.A., Remiddi E.** — *Nuovo Cim.*, 1972, vol.A11, p.824.
20. **Кураев Э.А., Меренков Н.П., Фадин В.С.** — *ЯФ*, 1987, т.45, с.486.
21. **Меренков Н.П.** — *ЯФ*, 1988, т.48, с.1073.
22. **Меренков Н.П.** — *ЯФ*, 1989, т.50, с.469.
23. **Arbuzov A.B., Kuraev E.A., Merenkov N.P. et al.** — *ЖЭТФ*, 1995, т.108, с.1164; JINR preprint E2-95-110, Dubna, 1995.
24. **Skrzypek M.** — *Acta Phys.Polonica*, 1992, vol.B23, p.135.
25. **Beenakker W., Pieterzyk B.** — *Phys.Lett.*, 1992, vol.B296, p.241; *ibid.* 1993, vol.B304, p.366.
26. **Collins J.C., Soper D.E., Sterman G.** — In: *Perturbative QCD*, ed. by A.H.Müller, World Scientific Publ., 1989; **Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A.** — *Nucl.Phys.*, 1973, vol. B65, p.381.
27. **Кураев Э.А., Меренков Н.П., Фадин В.С.** — *ЯФ*, 1988, т.47, с.1009.

DILEPTON AND PHOTON PRODUCTION IN HIGH-ENERGY HEAVY-ION COLLISIONS

*V.Emel'yanov**, *K.Haglin***

Physics Department, McGill University, 3600 University Street, Montreal P.Q. H3A 2T8, Canada

Electromagnetic signals provide useful means to track the space and time development of the dynamics in ultra-relativistic heavy-ion collisions. By themselves, they cannot be used to uniquely determine everything for these complicated systems, but they complement strong-interaction signals and are therefore quite valuable. Likely scenarios for time and distance scales relevant to these collisions, constituent identity and particle production are reviewed. Formalism for calculating photon and lepton pair production is presented, with an emphasis on recent developments.

Электромагнитные сигналы могут быть полезными для детектирования пространственно-временного развития динамических процессов в ультрарелятивистских столкновениях тяжелых ионов. Сами по себе электромагнитные сигналы не могут быть использованы для однозначного определения динамики, но они существенно дополняют сигналы сильных взаимодействий. Рассмотрены наиболее вероятные сценарии пространственно-временной эволюции и рождения частиц. Рассмотрены современные методы расчетов спектров фотонов и лептонных пар.

1. INTRODUCTION

The development of Quantum Chromodynamics (QCD) over the last two decades or so can be divided in two general stages. The first is the study of «hard» processes. It is well known that the coupling constant of strong interactions, α_s , decreases with increasing squared transferred 4-momentum $|Q^2|$, owing to asymptotic freedom. For $|Q^2| \gg \Lambda_{QCD}^2$ ($\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV) the

*Permanent address: Department of High Energy Physics, Moscow Physical Engineering Institute, Kashirskoe Shosse 31, 115409, Moscow, Russia. Internet: vemel@hed.mephi.msk.su

**Present address: National Superconducting Cyclotron Laboratory, Michigan State University, East Lansing, Michigan 48824-1321, USA. Internet: haglin@theo03.nslc.msu.edu

coupling constant $\alpha_s \ll 1$, and calculations can be made within perturbative QCD. Such calculations have been carried out intensively over the last twenty years. The predictions of QCD were brilliantly confirmed, for example, by the experimental observation of hadronic jets with large transverse momenta.

But in quantitative comparisons with experimental data, some clean predictions of QCD perturbation theory are often lost in the maze of the phenomenology of soft processes. The point is that particles which are actually observed are not QCD quarks and gluons but hadrons resulting from soft processes of quark and gluon hadronization. By the early '80s, the QCD properties had been realized quite well within perturbation theory. It was perfectly clear, however, that perturbative QCD was far from exhausting the theory as a whole. Such fundamental properties of strong interactions as colour charge confinement, breaking of chiral invariance, and the hadron mass generation are due to nonperturbative fluctuations in QCD. Among theoretical methods of nonperturbative QCD, the following three have been intensively pursued: lattice gauge theory calculations, QCD sum rules, and quasi-classical (instanton) approaches. Some results obtained using these methods are discussed below. We would only like to mention here that the above schemes share the feature according to which the natural QCD vacuum state is appreciably distinct from the perturbative vacuum. How does the QCD vacuum change its state with increasing $\alpha_s(Q^2)$ and what are the consequences of this change? To be tackled, these complicated problems have to be considerably simplified. One may consider a macroscopic system of quarks, antiquarks and gluons which obey the laws of thermodynamics. At high temperatures, $T \gg \Lambda_{QCD}$, the characteristic momentum transfer in the interaction appears to be fairly large, $Q^2 \sim T^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, and the running coupling constant becomes small, $\alpha_s \sim 1/\ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2) \ll 1$. Owing to the asymptotic freedom of QCD, such a system is thus a relativistic gas of rather weakly interacting quarks and gluons, and these may propagate over distances greater than usual hadronic sizes. This new state of matter is the so-called quark-gluon plasma (QGP) [1]. A similar line of thought can be applied to states of relatively modest temperatures but high densities.

The concept of hot hadronic matter was developed in some pioneering papers [2,3,4] where statistical and hydrodynamical methods were used to study ensembles of strongly interacting particles. But these authors were mainly concerned with hot and dense systems made up of hadrons¹. Similar ideas are applied now, but additional features typical of QCD are incorporated. It has

¹In this work we shall apply the terminology «hadron» to strongly interacting particles occurring in the non-perturbative sector of QCD.

been qualitatively predicted that QCD has a phase transition [5,6] and this prediction has later received support from early lattice gauge calculations [7]. The hadron-QGP transition temperature T_c appears to be of the order of 150—200 MeV and the QGP density to be several (~ 5) times the equilibrium nuclear matter density. But the situation of a possible phase transition is presently unclear and we will discuss this problem in detail below. For the moment it suffices to point out that the critical parameters, the order and even the existence of the QCD given phase transition are presently approach-dependent.

Since the expected temperatures $T \sim T_c \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ belong to the QCD-infrared region, the majority of models [1] of macroscopic QCD systems are phenomenological in character. We may thus hope that precise experimental data will appreciably reduce the number of acceptable phenomenologies. Purely phenomenological approaches are useful but clearly unsatisfactory as they lack a truly fundamental basis. In this respect, the attempts to calculate the properties of strong-interaction thermodynamics starting from the fundamental QCD Lagrangian in lattice gauge theories are much more attractive, but these quickly run into technical problems of considerable complexity. Finally, concepts in finite-temperature and finite density QCD also carry cosmological and astrophysical consequences. Conditions typical of phase transitions in strongly interacting matter were probably realized immediately after the Big Bang and may still exist deep inside neutron stars. These questions are unfortunately beyond the scope of the present review, but interested readers may consult a detailed study in Ref.[8].

The interest in the thermodynamic aspects of QCD has increased recently because of the genuine experimental possibilities to study such extreme conditions by selecting specific events in hadronic collisions, more specifically in high energy heavy-ion collisions. It is quite amusing, that events as complicated as nucleus-nucleus (AA) collisions can be described in some respects more easily than nucleon-nucleon (NN) collisions, owing to the power and elegance of statistical and thermodynamic approaches. Therefore, the subject of heavy-ion collisions is intimately connected to the study of bulk matter properties for systems consisting of strongly interacting particles (hadrons or partons). The above line of reasoning in the investigation of nuclear matter under extreme conditions does not imply, however, that a phase transition must necessarily take place in high energy AA collisions. It is also not *a priori* clear whether or not local thermodynamic equilibrium in strongly interacting matter is established and thus whether or not it is possible to describe such a system within a thermodynamic approach. The answer depends on the relation between the characteristic time τ_i of establishing local thermodynamic equilibrium and characteristic time τ_{react} of heavy-ion reactions. The time needed to establish local

Table 1

Time	Machine	Beam	CMS Energy (GeV/nucleon)
1986—1993	BNL-AGS CERN-SPS	up to ^{28}Si up to ^{32}S	5 20
1993—1998	AGS + booster SPS + Pb injector	all A all A	4 (Pb) 17 (Pb)
1998—	RHIC LHC	all A all A	200 (Pb) 6300 (Pb)

thermodynamic equilibrium was originally estimated [9,10] to be $\tau_i \simeq 1$ fm/c. But these early estimates, in our opinion, can only be trusted to within an order of magnitude. If $\tau_i \simeq 10$ fm/c, this means that local thermodynamic equilibrium is extremely unlikely in such collisions. The theoretical question of establishing local thermodynamic equilibrium in a system of interacting hadrons has no single answer at the present time. This is however a crucial point for the understanding and the description of hadronic matter in collision. We believe that the tools to tackle this problem experimentally now exist. Furthermore, we shall describe some recent results that bring credibility to the notion of early equilibration times.

Another important practical question is: what energy densities and nuclear matter temperatures can be attained in existing and future heavy ion accelerators? In Table 1 we summarize the present status and the future plans for heavy ion experiments.

Up to very recently, the existing sources and existing accelerators had collimated and accelerated rather light ion beams (up to ^{32}S and ^{28}Si). It is expected that soon, both the BNL-AGS and the CERN-SPS (also RHIC and the LHC in 1998) will have new injectors able to accommodate very heavy ions, all the way up to uranium. The first Au-Au experimental run has in fact been taken at the BNL-AGS accelerator. This global program will make it possible to determine to what extent we can actually get into a regime of thermodynamic behaviour. If in these experiments, one can obtain sufficiently high initial temperatures and/or initial densities, a study of the properties of the quark-gluon plasma should become possible. But if $T_i < T_c$ or $n_i < n_c$, one will likely obtain only hadronic plasma. However, we hope to convince the reader that the study of the properties of the latter is perhaps as interesting as that of the QCD plasma! Below, we will try to estimate T_i and n_i at present and future accelerators.

If a quark-gluon or an hadronic plasma is formed in heavy-ions collisions, what are its experimental signals? It is fair to say that at present there is no single answer to this question. In the strong sector, the onset of thermalization may be tested by studying strangeness away from the NN level, for kaons as well as hyperons [11,12,13]. Here as elsewhere, the main difficulty in the identification of hot matter signals is that the background from «ordinary» hadronic sources is typically not small. Possible signature candidates considered are: (1) discontinuities in the momentum distribution of the secondaries, reflecting a «hadron quark-gluon plasma» first-order phase transition [14]; (2) particle ratios which are significantly different for a hadron gas than they would be for a hadronizing quark-gluon plasma [11,13]; and (3) droplets of strange matter, baryonic states of very low charge to mass ratio [15]. But these strong probes all have an obvious disadvantage: the soft process of hadronization may substantially distort the information of hadronic system evolution. Furthermore, they might just reflect the state of the system at freeze-out.

Leptons and photons have small cross sections strongly interacting matter, and so their mean free paths are typically much larger than the transverse size of the region of hot matter created in a nuclear collision. As a result, high energy leptons and photons produced in the interior of the plasma will typically pass through the surrounding matter without interacting, carrying information directly from wherever they were formed to the detector. It is quite natural that leptons and photons have been considered [16—24] as an outstanding tool in the search for hot nuclear matter and the quark-gluon plasma. The topic of our review is dilepton and photon production in high energy heavy-ion collisions. We will not discuss the topic of dilepton and photon production at low-to-moderate energies ($E \leq 10$ GeV/nucleon corresponding to Bevalac and GSI energies). For a review of the experimental data and the theoretical models in this energy regime, the interested reader should consult Refs. [25—27]. We will consider the following questions: What information about hot and dense strongly interacting systems can be carried by the lepton and photon spectra? What are the sources of lepton and photon production? In a partial answer, we state that the problem of lepton and photon production is intimately connected with the behaviour of quarks, gluons and mesons in hot and dense matter. For example, there might be collective resonance effects which will influence the dilepton and photon spectra. Going to scattering processes, the positions and widths of ordinary propagating mesons are also potentially modified. We shall insist on the fact that the study of electromagnetic radiation from heavy-ion collisions at high energies offers unique insights in the many-body problem of the strong interaction at finite temperatures and densities.

The paper is organized in the following way. Section 2 is devoted to modern calculations of critical temperature and density of phase transition in lattice gauge theories. We also discuss the order of phase transition, screening

lengths and non-perturbative effects. In section 3 we describe space-time evolution of hadronic matter and estimate the initial energy density in relativistic heavy-ion collisions. Section 4 is devoted to the calculations of dileptons and photons spectra from QCD and hadronic gas. We discuss also the spectra properties. In Section 5 we give a short conclusion.

2. PHASE TRANSITION IN LATTICE GAUGE THEORIES AT FINITE TEMPERATURE

Successful calculation of physical quantities, including those in the strong coupling regime of QCD have been carried out in the last decade within the framework of lattice gauge theories (LGT) [28,29]. The advantages of this method are obvious because the calculations are based on the QCD Lagrangian itself and not on some of its phenomenological extensions. However, the calculations are performed by Monte Carlo methods wherein one is not always successful in following the gauge field dynamics. In LGT, continuous space-time is replaced by a lattice in Euclidean space with N_σ sites in each space direction and N_β sites in each time direction. The state of the lattice is characterized by a fixed set of matrices « u » on the links, and quark states on sites. A lattice is a statistical system.

In the simplest case of gluo-dynamics (quark-free QCD) the lattice partition function has the form

$$Z(z, N_\sigma, N_\beta, g^2) = \int \Pi dU \exp(-S(\{u\})), \quad (1)$$

where $z = a_\sigma/a_\beta$ and a_σ, a_β are distances between neighbouring lattice sites in the space and time directions, ΠdU is the product of Haar measures corresponding to functions that realize the gauge group representations, $S(\{u\})$ is the action [28,29] which depends on the gauge field values and on the links of squares (the so-called plaquettes) of the lattice in the space and time directions. The expectation value of the physical quantity X is determined using the partition function:

$$\langle X \rangle = \int \Pi dUX(\{u\}) \exp(-S(\{u\})) / \int \Pi dU \exp(-S(\{u\})). \quad (2)$$

In LGT such expressions are numerically integrated by Monte Carlo methods. Lattice calculations are also used to study QCD at finite temperatures. Here it is necessary to restrict the «size» of the system to $N_\beta a_\beta = 1/T$ in the imaginary time direction. T is the system temperature.

Let us now discuss the results of calculations of the most interesting physical quantities. Among the quantities which are studied in high temperature QCD are the Polyakov loop, the chiral condensate $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, the energy and pressure, the screening lengths of colour singlet sources, the potential between static test quarks and the response of the quark density to an infinitesimal chemical potential. Of these, the Polyakov loop and $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ are the most studied. $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ is the order parameter for chiral symmetry breaking. It is nonzero under ordinary conditions, and it vanishes when chiral symmetry is restored. Loosely speaking, the Polyakov loop is $\sim \exp(-F/T)$, where F is the free energy of a static test quark. In pure glue QCD, the Polyakov loop is zero at low temperatures, indicating confinement of the test quark, and nonzero at high temperatures, indicating deconfinement. One can observe the crossover to high-temperature behaviour in lattice simulations. To vary the temperatures with a fixed number of lattice sites in the time direction, one can vary the lattice spacing a_β by varying the coupling g . Then, decreasing g , or increasing $6/g^2$, makes a_β smaller and the temperature, $T=1/N_\beta a_\beta(g)$, higher. As the temperature is increased, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ drops and the value for the Polyakov loop increases. The Polyakov loop and $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ undergo rapid changes around the same temperature, indicating that deconfinement and chiral symmetry restoration are happening at the same temperature. However, this does not really confirm or exclude the case with $T_{\text{dec}} = T_{\text{chiral}}$. We have so far considered a simplified QCD (with a quark-free gauge group). In the more realistic situation — the gauge group SU(3) and quark degrees of freedom — LGT runs into a number of difficulties [29]. The main difficulty is to correctly account for virtual quark-antiquark loops in Monte Carlo methods. This is a topic of current research in LGT.

Figure 1 shows a crude phase diagram of QCD as a function of quark mass and temperature. For infinite quark masses the quarks are never excited and we have quenched, or pure glue, QCD. In this case, it is fairly well established from lattice simulations that there is a first-order phase transition [30]. As the quark mass is lowered from infinity, this transition disappears. Although there is no phase transition, the crossover is still fairly sharp.

In Fig.2 [31] we show the inverse screening lengths for sources with the quantum number of the pion and its parity-partner. At high temperatures the two become very close, with the remaining difference being due to the explicit symmetry breaking by the quark mass. This quantity shows that the high temperature regime has the expected characteristics of the quark-gluon plasma.

With four flavours of quarks it seems that a first-order transition reappears when the quarks are very light [32—41]. For two flavours of light quarks or two light quarks and a strange quark, there is no evidence for a phase transition. Several groups have studied this over the last few years and the consensus is

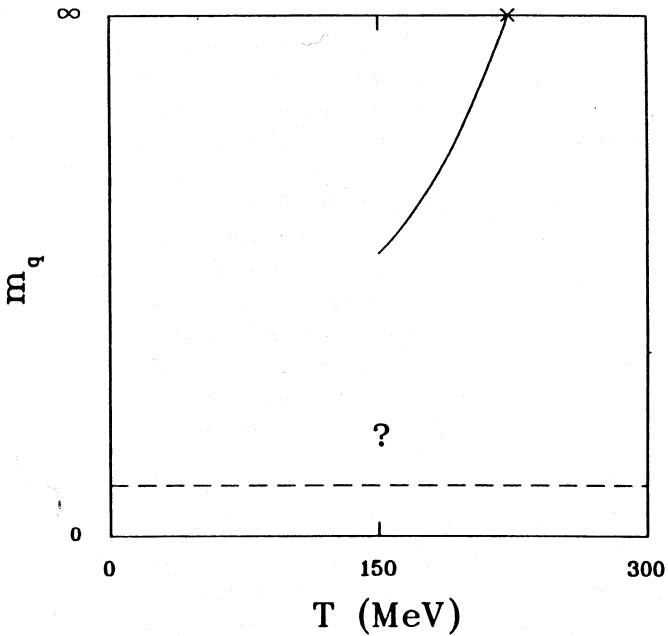


Fig.1. Phase diagram of QCD as a function of quark mass and temperature

that with the quark masses being used in these calculations, the crossover is smooth. The Illinois and Columbia groups have studied two light flavours plus one heavier flavour [37,38]. They did not find evidence for a phase transition. It may be that with two light flavours the transition is second order for quark

Table 2

Flavour	T_c (MeV)	Reference
0	200—220	[41]
2	140—150	[32,42,43]
2 + 1	140	[39]
4	100—110	[44]

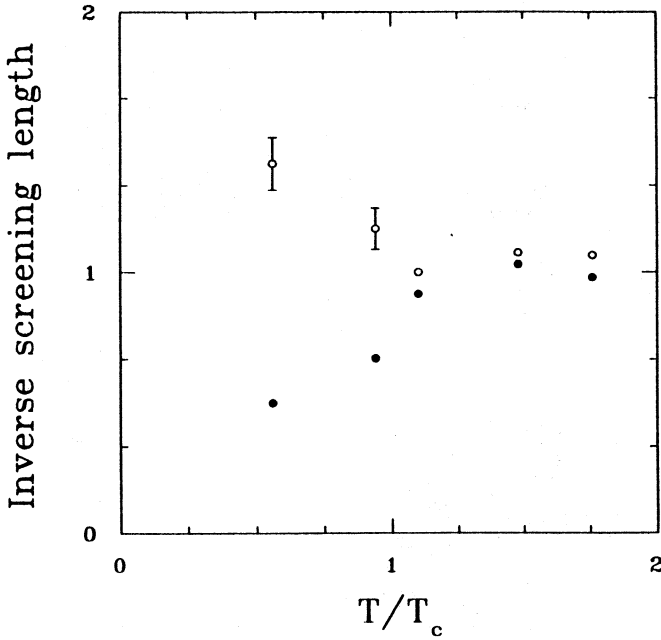


Fig.2. Inverse screening lengths for sources with the quantum numbers of the pion and its opposite parity partner as a function of temperature. Solid squares are the pion (O^-) screening mass and open circles are sigma (O^+) screening mass

mass exactly zero with only a rapid crossover for finite quark mass, as suggested by a renormalization group analysis [39]. To find the temperature of the crossover in physical units, it is necessary to determine the lattice spacing by computing some physical quantity, such as the rho or nucleon mass. The estimates summarized in Table 2 are obtained when the rho mass is used to set the scale. The pion mass is not a good choice in general, since it can be made arbitrary small by making the quark mass small. If the nucleon mass is used, all of these temperatures decrease by about 20%. Notice that these estimates are lower than those from most phenomenological models of the hadronic and plasma phases [1,45].

Figure 3 summarizes the dependence of the QCD phase transition on the number of light quark flavours [38]. The line along the top of the figure ($m_s = \infty$) corresponds to the two-flavour case and has a second order critical

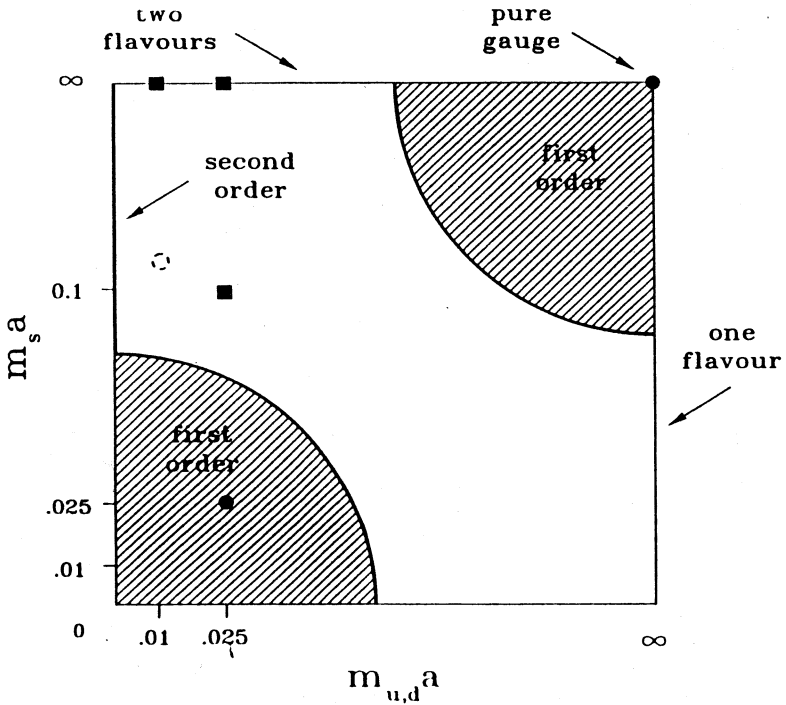


Fig.3. Phase structure of QCD as a function of the u , d and strange quark masses. The points denote regions where calculations have been done and where the transition is seen (solid circles) and not seen (solid squares). The dashed circle is the physical point (from Ref. [38])

point when $m_{u,d} = 0$. The physical situation with two light u and d quarks and a considerably heavier s quark appears to lie on the borderline between first order and crossover behaviour.

The question of the order of phase transition (or of the absence of phase transition) is not only of theoretical but also of practical interest. Indeed, in the case of first-order transition a system of hadrons, quarks and gluons can be in a mixed phase at a temperature T_c . Under a second-order transition, the «QGP-hadron» transition occurs rapidly at a temperature T_c . This fact is quite important in any experimental diagnostic of QGP production.

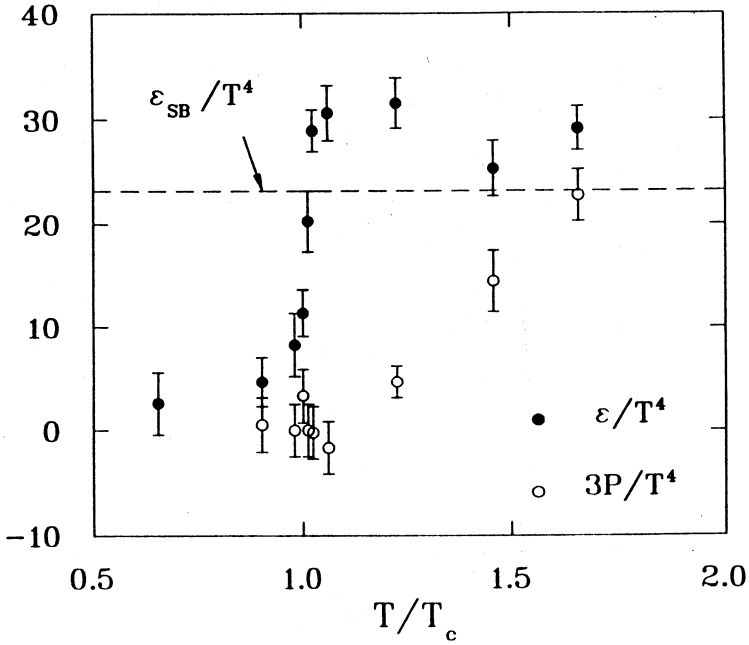


Fig.4. Energy density and pressure of QCD matter as a function of temperature

The order of the phase transition is at present under intense investigation by lattice studies. One finds a first-order deconfinement transition for $N_f=0$ and a first-order transition corresponding to chiral symmetry restoration and deconfinement for $N_f \geq 3$ in the limit of massless quarks (see discussion in Ref. [46]). For $N_f=2$ there is a second-order transition in the case of massless quarks (Fig.3) and a strong crossover behaviour for non-zero quark masses. However, for two light and one heavy quark the situation appears to lie between a first-order phase transition and a crossover behaviour. All results at vanishing baryon number density seem to agree on the fact that the transition point for deconfinement and chiral symmetry restoration are consistent with each other.

In Fig.4 we show the behaviour of the QCD energy density and the pressure for matter with two flavours of light quarks (u and d) [34]. As one can see, at a critical temperature T_c , the energy density undergoes a rapid transition from low values, corresponding to a hadron gas, to much higher values (Stefan-Boltzmann limit ϵ_{SB}), corresponding to a quark-gluon plasma. The energy density of

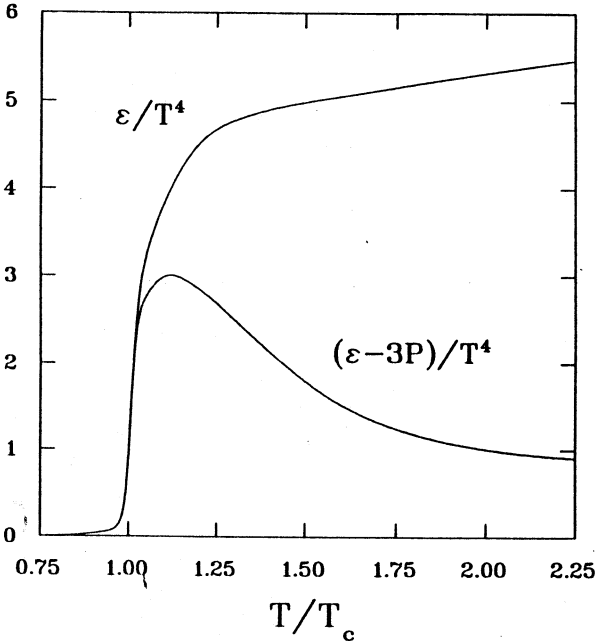


Fig.5. Energy density ϵ and «interaction strength» $(\epsilon - 3P)/T^4$ in SU(3) gauge theory as a function of temperature

an ideal plasma with finite-size lattice corrections [47] is also shown in Fig.4. At high temperatures ($T/T_c \geq 2$) the calculations appear to approach this value. As is well known, the energy density and pressure are related by $(\epsilon - 3P)/T^4 = 0$ for an ideal plasma. We see that this condition is certainly not fulfilled for $T \leq 1.5T_c$: below $1.5T_c$ the energy density approaches the Stefan-Boltzmann limit and the pressure falls much below the ideal limit.

The energy density ϵ and the «interaction strength» in SU(3) gauge theory are plotted as a function of the temperature T , in Fig.5 [48]. This indicates that the system will not become ideal until temperatures become quite high.

As in ordinary electron-positron plasma, a screening length can also be defined in the QGP. In connection with this, we will mention the suppression of the J/ψ in heavy-ion collisions. One can imagine that bound states (such as $c\bar{c}$ or $b\bar{b}$) will «melt» in dense matter when the screening radius becomes significantly smaller than the binding radius. The temperature dependence of the Debye screening radius $r_D(T)$ gives us some idea of when specific bound states

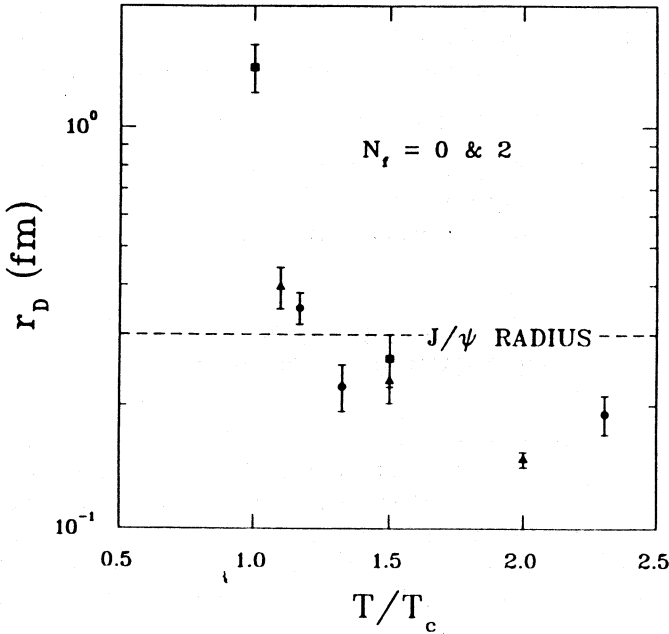


Fig.6. Colour screening radius r_D as a function of the temperature T for QCD matter ($N_f=0$ & 2)

will disappear. From Fig.6 [49] we see that above $T \simeq 1.2T_c$, the tightly bound $c\bar{c}$ state we known as J/ψ should become unbound.

Simulations of lattice QCD have shown that chiral symmetry is restored at high temperatures, as indicated by the vanishing of the order parameter $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Additional evidence for the restoration of chiral symmetry can be obtained by using hadronic correlation functions [50]. The exponential falloff of such correlation functions at large spatial separations determines screening lengths. Unbroken symmetries are reflected in degeneracies of the screening lengths. Another reason to study the hadronic correlations is to try to extract information about possible hadronic real time modes in the high temperature phase. The extracted screen masses $\{=(\text{screening length})^{-1}\}$ can be compared with the corresponding values for a gas of free quarks. Already at $T=1.5T_c$, the screening masses associated with vector fields are close to their free values. For temperatures higher than $T=1.5T_c$, lattice results [51] suggest that $q\bar{q}$ and qqq states propagate like weakly interacting quarks rather than as bound states.

Summarizing, it seems that lattice data give reasonably strong evidence for the existence of a phase transition (first, weak first or second order) in strongly interacting matter at temperatures $T_c \simeq 140\text{--}200$ MeV and energy densities $\varepsilon_c \simeq 1\text{--}3$ GeV/fm³. Also, the properties of a quark-gluon plasma or an hadronic gas near T_c are quite different from that of completely non-interacting systems. A final word of warning: the lattices in current use are still reasonably coarse. This aspect is however continuously being improved upon.

3. SPACE-TIME EVOLUTION OF HEAVY-ION COLLISIONS

It is not at all clear that the considerations of the previous section are at all relevant in the context of heavy-ion collisions. Apart from the equilibrium requirements (which we discuss in more detail below), we have already mentioned the difficulties that finite-temperature LGT has in making contact with physical observables. Let us then turn to more phenomenological aspects of the problem at hand, adopting however LGT as a formal backdrop to our discussions.

Before proceeding to nucleus-nucleus collisions, we recall a simpler space-time picture: one of hadron-hadron interactions. In the framework of the quark-parton model of hadrons, the interaction of hadrons in the high energy region is assumed to proceed as follows:

a) Before collision, relativistic hadrons are ensembles of partons (valence quarks, sea quarks, antiquarks, and gluons) properly distributed with respect to the hadron momentum fraction x , carried by them. The initial distribution functions of partons can be derived from the experimental data on deep inelastic eN , μN , νN , or $\bar{\nu}N$ interactions.

b) As a result of hadron-hadron interaction, some of the fast partons do not participate in collective interaction and, under hadronization, subsequently form leading secondary hadrons. Comparatively slow partons of colliding hadrons interact with one another forming a quark-gluon system whose evolution results in the formation of the soft part of the secondary hadron spectrum.

What do we expect, going from hadron-hadron to nucleus-nucleus collisions?

First of all, nuclei are extended objects, and therefore their geometry plays an important role in heavy-ion collisions. The time scale for such collisions is much greater than in hadron-hadron interactions, and this can lead to interesting phenomena. The space-time evolution of a central (impact parameter $b=0$) Pb-Pb collision at very high energies (RHIC, LHC) is shown schematically in Fig.7.

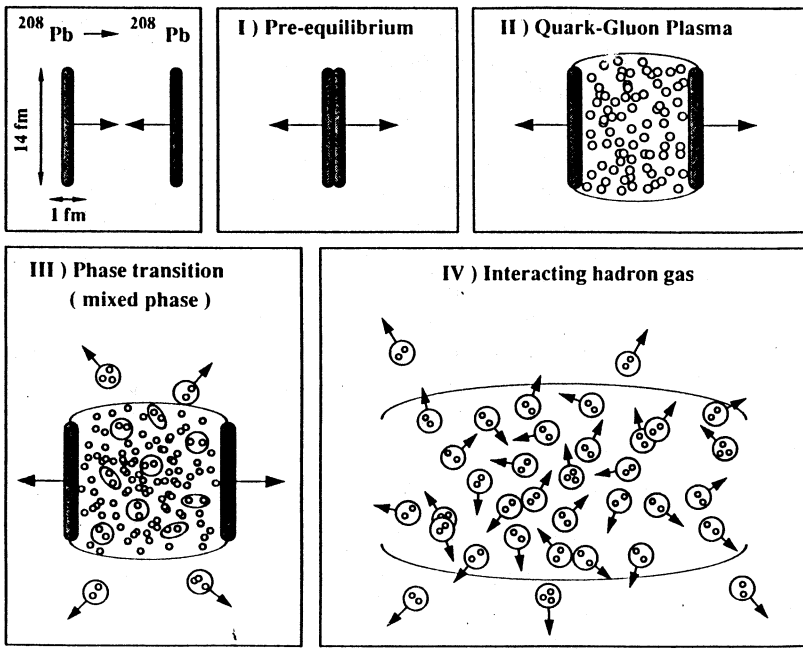


Fig.7. Space-time evolution of Pb-Pb interactions

In the first moments of interaction, nucleon-nucleon collisions between the two highly Lorentz-contracted nuclei (with thickness $\approx 1\text{ fm}/c$) redistribute a fraction of the initial beam energy into other degrees of freedom. After a short time (we will discuss this time below) partons materialize out of the highly excited QCD field. This is the preequilibrium state of QCD matter. Under certain conditions, multiple parton-parton collisions at this stage can lead to establishing a local thermodynamic equilibrium in quark-gluon systems at an initial temperature T_i . As discussed previously, if the local energy density is high enough, QGP is formed. The QGP expands rapidly, mainly along the longitudinal direction, lowers its temperature and reaches the critical transition temperature T_c . If phase transition is first order, the matter spends some time in the mixed phase, in which there coexist quarks, antiquarks, gluons and hadrons. It rearranges the many degrees of freedom of the QCP into the small number available in the hadronic phase with a large associated release of latent heat. In its ultimate phase (hadron gas or hadron fluid), the still-interacting system keeps expanding until «freeze-out», when interactions cease and the particles stream freely away to be detected in the experiments.

In this approach to the problem, two important questions immediately arise:

1. How should one describe the transition of a quark-gluon system from the initial state (before hadron collisions) to the state of thermodynamic equilibrium?

2. Is local thermodynamic equilibrium of the hadronic matter established in reality? In other words, might the entire nucleus-nucleus process be described on a microscopic level (in terms of the distribution function of partons) or does there exist a time interval when a macroscopic (statistical) approach can be applied to the quark-gluon system evolution? At first glance, a rather large amount of mutual collisions of partons is required to attain thermodynamic equilibrium. For example, according to Ref.[52], this number ≥ 10 . But the number of mutual collisions of partons is not the only relevant factor for the formation of local thermodynamic equilibrium. One should bear in mind that QCD partons are carriers of colour degrees of freedom. Therefore, already at the initial stage of interaction, parton distribution over x can be described by a superposition of collective and «internal» (colour) states [53]. Thus, if at the initial stage of hadron-hadron collisions, colour degrees of freedom are excited and statistical averaging is carried out over these degrees of freedom, then the conditions for the collective (hydrodynamic) behaviour of the parton system can also be realized when the number of parton-parton collisions is small $\sim 2-3$ [53].

The time for establishing local thermodynamic equilibrium has been estimated [9,10] to be $\tau_i \simeq 1$ fm/c. However, we believe it is fair to say that the concept of a local thermodynamic equilibrium in the collision of large nuclei at ultrarelativistic energies is still not firmly supported by theory nor experiment.

Among the attempts to theoretically describe the kinetic processes responsible for an eventual relaxation to equilibrium state one should mention Refs.[54—56]. In these works the initial conditions in hadron-hadron collisions are given by the structure functions of the colliding hadrons. During individual hadron-hadron collisions, new partons are created in addition to those that already existed in the incoming hadrons. The repeated collisions between partons substantially affect their structure functions. This approach is essentially kinetic and can describe experimental data on hadron-hadron interactions, provided one has chosen suitable «initial» structure functions.

Other attempts to quantitatively describe the kinetic stage of hadron-hadron (or nucleus-nucleus) collisions were made in Refs.[57,58]. In the CMS of two colliding hadrons their interaction can be treated as a result of exchange with one or more gluons, which leads to a nonzero effective colour charge of the hadrons. In this process a chromoelectric tube occurs which is unstable under quantum creation of quark-antiquark pairs and gluons. The produced $q\bar{q}$ pairs and gluons interact among themselves and with the chromoelectric field, and if

the characteristic times of strong interactions exceed the collision times of the produced $q\bar{q}$ pairs and gluons, then the system of quarks, antiquarks and gluons can be brought into a state of local thermodynamic equilibrium.

The important program to study partonic cascades, tracing the system all the way from the structure functions to an equilibrated QGP, has recently been undertaken [59,60,61]. The nuclear collision is described as a sequence of multiple hard and soft parton-parton collisions and associated parton emission and absorption processes. Important aspects for the space-time evolution of the partonic system are the detailed balance between emission and absorption processes, the treatment of the Landau-Pomeranchuk effect, and the effects of soft gluon interference. In this approach, a cut-off is chosen to separate between «soft» and «hard» QCD processes. The location of this cutoff is still an open problem in this approach. The time during which most of the entropy is produced was found to be $\tau \simeq 1/2$ fm/c for RHIC conditions, momentum distributions approach thermal ones and gluons clearly outnumber quarks. These results have essentially supported the «hot-gluon» scenario [62]. Using the lowest order perturbative QCD, E.Shuryak argued that high energy heavy-ion collisions proceed via two stages: equilibration of gluons takes time $\tau_g \simeq 1/2$ fm/c, while production and equilibration of quarks needs at least $\tau_q \sim 2$ fm/c. The initial temperature in the «hot-gluon» scenario is $T_i \simeq 400\text{--}500$ MeV, a value much greater than in the «standard» scenario of complete equilibration of QGP at the time $\tau_i \simeq 1$ fm/c. In the latter case the estimated initial temperatures [63] should be $T_i \simeq 240$ MeV for RHIC conditions and $T_i \simeq 290$ MeV for LHC. Consequences of the «hot-gluon» scenario on dilepton emission will be discussed in the upcoming chapters.

Other approaches of the non-equilibrium type are typified in the independent string model (ISM) [64]. The ISM assumes the absence of final state rescattering, i.e., particles produced in one string interact neither with particles produced in a different string nor with nucleons of the colliding nuclei. These models are theoretically consistent (unitary, analyticity, etc.), and have good predictive power in terms of rapidity distributions, nuclear stopping power, multiplicity and E_T distributions. However, it is easy to see that an energy density of $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ is equivalent to a string density of $2 \text{ strings}/\text{fm}^2$, since each string has a «plateau» of about 1.5 particles per unit rapidity including neutrals, and each particle has a transverse energy of about 0.35 GeV. Therefore, string-string interactions seem unavoidable. Some recent scenarios attempt to incorporate this feature at the phenomenological level.

We shall mostly concentrate on approaches where thermodynamical equilibrium is assumed in the strongly interacting systems. In most applications, this can be done without any loss of generality. The state-of-the-art numerical

simulations based on a relativistic kinetic theory of parton cascades mentioned above also support this idea.

3.1. One-Dimensional Hydrodynamic Model of Evolution. Formed at initial temperature T_i and energy density ε_p , QGP expands and cools. This process is naturally described with the equations of motion for an ideal relativistic liquid [65]. The hydrodynamic expression for conservation of energy and momentum is

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (3)$$

where the stress tensor $T_{\mu\nu}$ for a perfect liquid is

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (4)$$

$g^{\mu\nu}$ is the Minkowski metric, ε and p are the energy density and pressure in the co-moving frame, and u_μ is the matter collective four-velocity. Equations (3) and (4) imply $\partial_\mu S^\mu = 0$, where $S^\mu \equiv \sigma u^\mu$ is the entropy current.

In order for these partial differential equations to be closed, one must introduce an equation of state (EOS). The most widely used EOS for the quark-gluon plasma comes from the bag model [66]. For a baryonless plasma the energy density, entropy density and pressure are given by

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= \frac{\pi^2}{30} d_q T^4 + B, \\ S_q &= \frac{4\pi^2}{90} d_q T^3, \\ P_q &= \frac{\pi^2}{90} d_q T^4 - B, \end{aligned} \quad (5)$$

where B is the usual bag constant and d_q is the number of degrees of freedom in the QGP. Usually the hadron phase is considered as a gas of noninteracting massless pions for which the ideal equation of state (IEOS) is

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pi &= \frac{\pi^2}{30} d_\pi T^4, \\ S_\pi &= \frac{4\pi^2}{90} d_\pi T^3, \\ P_\pi &= \frac{\pi^2}{90} d_\pi T^4, \end{aligned} \quad (6)$$

where d_π is the degeneracy factor for pions. However, the hadron phase is not a massless pion gas but a system of different kinds of massive hadrons. In Ref.[67], a more realistic equation of state (REOS) was introduced treating hadronic matter as a system of several species of extended massive hadrons [68]. The main difference in the hydrodynamic expansion for the IEOS and REOS is in the space-time volumes of the mixed and hadron-gas phases. In the case of IEOS, the system spends much of its time mixed phase and the hadron gas is less important. Whereas, with the REOS the system spends most of the time in the hadron phase and the mixed phase therefore plays a lesser role. We will discuss later how these differences affect the electromagnetic signal.

Besides the equation of state, the determining role in the model predictions that fixes a unique solution of the hydrodynamic equations is played by the choice of initial (boundary) conditions. For example, Landau hydrodynamics [69] begins with the premise that in the CMS, the Lorentz-contracted nuclei approach each other, stick together and generate hot dense matter. Entropy generation, which ultimately governs particle production, occurs through the passage of a shock wave during the fusion. This is also the mechanism for heating the matter [70]. While this model takes into account the leading particle effect [71] and has other nice features, the energy density in the initial stage appears quite large. Hadron-nucleus collisions show that nuclei may be transparent to energetic hadrons and it has therefore been proposed [72] that nuclei at high energies may pass through each other. The initial conditions prescribed by Landau may not be so appropriate for ultra-relativistic heavy-ion collisions.

A simple yet powerful picture of hadronic matter evolution is provided by one-dimensional hydrodynamic expansion in scaling variables [73]

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad (7)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right). \quad (8)$$

Here t and z are the time and spatial coordinates of one-dimensional expansion in the CMS. In these variables, using the initial velocity distribution determined by a rapidity plateau

$$Y(\chi, \tau = \tau_i) = \begin{cases} \text{const}, & |\chi| \leq Y_m \\ 0, & |\chi| > Y_m \end{cases}, \quad (9)$$

the solution of the equations of one-dimensional hydrodynamic expansion is especially simple (scaling solution) [9,74]. The temperature turns out to be only a function of the proper time τ of the hadron liquid element, i.e.,

$$T(\chi, t) = T(\tau) \quad (10)$$

and not of the variable χ . The rapidities of the elements are in turn determined only by the variable χ

$$Y(\chi, t) = \chi. \quad (11)$$

Correspondingly, the velocities of matter elements are given by

$$v(\chi, t) = \frac{z}{t} = \tanh \chi. \quad (12)$$

A schematic picture of hadronic matter evolution in these variables is presented in Fig.8. In the region $0 \leq \tau \leq \tau_i$ hadronic matter is in the preequilibrium phase, then for $(\tau_i < \tau < \tau_q)$ there exists an equilibrium QGP phase followed by a mixed phase region, and finally a hadron liquid (gas). At $\tau = \tau_f$ the system decays into observed secondary hadrons. It can be readily seen that the scaling solution leads to scale-invariant spectra of secondary particles distributed over rapidities in accordance with a Feynman plateau. From Fig.8 one can imagine how difficult it is to detect QGP experimentally. Indeed, the QGP lifetime is only $\tau = \tau_q$, which may be much smaller than the time τ_f (see below). The QGP formation signal will therefore be obscured by emission from preequilibrium, hadron and mixed phases.

Of course, this one-dimensional model of nuclear matter evolution must be considered only as a «first approximation» to real nuclear matter evolution in heavy-ion collisions. Certainly, the evolution is not one-dimensional at the latter stages of evolution. But cascade model simulations [60] show that during the first 3 fm/c the system of partons expands exclusively in the longitudinal direction, i.e., along the z axis. All volume elements expand approximately linearly with time and more in straight lines from the collision point at $z \simeq 0$ with flow velocities that increase from the slowest expansion in the center of mass at $z = 0$ up to the speed of light in the fragmentation region of the receding beam fronts.

3.2. Initial Energy Density of Thermalized Hadronic Matter. Let there occur a central collision of two identical nuclei with mass numbers A , which move in the CMS with a Lorentz factor γ ($\gamma = E/m \gg 1$, where m is the nucleon mass and E is the energy per nucleon). In the longitudinal direction, nuclei experience Lorentz contractions down to sizes $2R_A/\gamma \simeq 2A^{1/3}/m_\pi\gamma$ (R_A is the radius of the nucleus with mass number A and m_π is the mass of the π -meson). Let us evaluate the energy density at the moment of establishing thermodynamic equilibrium for an hadronic cluster of thickness $2\Delta x$ between two boundaries —

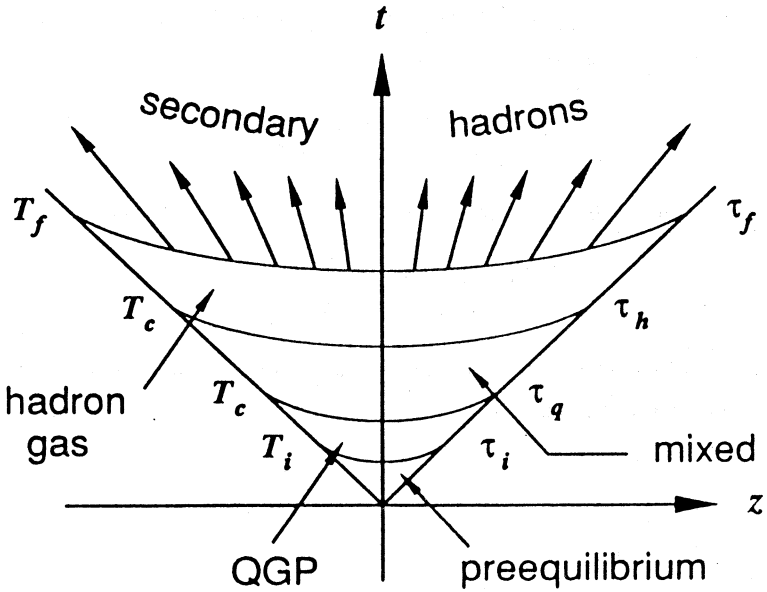


Fig.8. Space-time evolution of hadronic matter in one-dimensional hydrodynamic model

flat layers — moving at velocities $v = \pm \Delta x / \Delta t$. According to the scaling solution, the secondary hadrons corresponding to this layer will be bound within the rapidity interval $\Delta y = 2 \operatorname{arctanh} (\Delta x / \Delta t) \simeq 2 \Delta x / \Delta t$. In the approximation of noninteracting secondary hadrons, the energy in the layer will be

$$E = A \frac{d \langle E \rangle}{dy} \Delta y. \tag{13}$$

To determine the initial energy density ϵ_i , one must simply divide the energy by the initial volume, $\epsilon_i = E / V_i$. The cluster volume at the moment of thermalization τ_i is conveniently written using the scaling variables, where an element of 4-volume is

$$d^4x = d^2x_i d\chi \tau d\tau. \tag{14}$$

Integrating over χ with limits $\pm \Delta y / 2$, we find

$$V_i = \pi R_A^2 \tau_i \Delta y, \tag{15}$$

where πR_A^2 is the cross-section of the colliding nuclei, $\pi R_A^2 = 4.5 \text{ fm}^2 A^{2/3}$. Then the initial energy density is [9]

$$\varepsilon_i \simeq \frac{A^{1/3}}{4.5 \text{ fm}} \frac{d\langle E \rangle}{dy} \frac{1}{\tau_i}. \quad (16)$$

If we approximate charge densities in central heavy-ion collisions by

$$\left(\frac{dN^{ch}}{dy} \right)_A = A^\alpha \left(\frac{dN^{ch}}{dy} \right)_P, \quad (17)$$

with $(dN_{ch}/dy)_P$ being the charged-particle multiplicity in pp collisions (present data from nuclear collisions suggest $\alpha \geq 1.1$), then the initial energy densities are

$$\varepsilon_i \simeq 0.09 A^{\alpha-2/3} \ln \sqrt{s} \quad (18)$$

if we use $\tau_i \simeq 1 \text{ fm}/c$.

From this formula we obtain for central Pb-Pb collisions

	$\varepsilon_i \text{ (GeV/fm}^3\text{)}$
SPS	2.5
RHIC	4.7
LHC	8.0

For an ideal QGP with three flavours of massless quarks [75]

$$\varepsilon = \left(\frac{47.5 \pi^2}{30} \right) 8T^4, \quad (19)$$

which leads to an initial temperature $T = (\varepsilon/1953)^{1/4}$ (with ε in GeV/fm^3 and T in GeV). For Pb + Pb collisions the values are

	$T_i \text{ (GeV)}$
SPS	0.19
RHIC	0.22
LHC	0.25

The initial energy densities ϵ_i are higher than the nucleon energy density in nuclei by about an order of magnitude. We stated in sections 1 and 2 that for such energy densities (and temperatures) one should expect a transition of nuclear matter into quark-gluon plasma. However, the initial temperatures are not high enough for us to expect ideal QGP formation, at most we might hope for nonideal QGP.

In estimating the quantities ϵ_i and T_i we have used the ideal fluid approximation. Note that this approximation for quarks and gluons does not imply that interaction in the system is small. It is important that the interaction be properly taken into account by the equation of state $p = p(\epsilon)$. Among the papers devoted to this topic we should mention Refs.[76—78]. It is well known that the ideal fluid approximation is applicable if the characteristic collision times and mean free paths of quarks, antiquarks and gluons in the system satisfy the conditions

$$\begin{aligned} \tau &\ll t \\ \lambda &\ll L \end{aligned} \quad (20)$$

where t and L are the time and scale factors over which such macroscopical hydrodynamic quantities as energy density and pressure change considerably. To what degree is this picture valid for ultrarelativistic ion-ion reactions? Since the characteristic mean free path of quarks $\lambda \simeq 1$ fm and the system dimension in the transverse direction $R_A \sim A^{1/3}$ fm, the second condition in Eq. (20) is more or less fulfilled. On the other hand, in realistic collisions $\tau \simeq t$, and it is necessary to consider the viscosity of the strongly interacting matter. This can be taken into account by adding to the right-hand side of the equation of motion $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, a term that accounts for energy dissipation under hydrodynamic expansion [22]. The effect of viscosity, as one would expect, is to decrease the initial energy density in heavy-ion collisions [22].

With the recent progress in the modelling of high energy nuclear collisions, the simple estimates in this section can be put on a more quantitative footing.

4. LEPTON PAIRS AND PHOTON PRODUCTION FROM QGP AND HADRONIC GAS

In the previous sections we presented theoretical considerations in favour of thermalized strongly interacting matter formation in ultrarelativistic heavy-ion collisions. In this section, we discuss dynamical processes in thermal matter and the experimental manifestations of these processes. The problems of hot nuclear matter diagnostics resemble in a sense those related to Big Bang synthesis: the initial conditions should ideally be reconstructed from data of

observational astronomy. Of particular importance is to find out which observed collision characteristics carry information on hot matter formation. By «hot matter», we mean either QGP or hadronic gas, depending on the relation between the initial temperature T_i and phase transition temperature T_c . (This line of reasoning assumes a first order phase transition).

Among the experimental QGP signals reported in the literature, we will single out the following:

a) Analyses of lepton, photon, J/ψ , ϕ , ρ , η , and η' spectra can be used to trace the properties of matter at its hottest stage.

b) Searches for primordial remnants in the observed hadronic features (discontinuities in the momentum distribution of the secondaries [14], particle ratios [11] and droplets of strange matter [15]).

The quark-gluon plasma is a macroscopic ensemble characterized by its temperature, its pressure and chemical composition (the number of different types of particles). It can exist in the process of nuclear collisions, however, in a restricted temperature interval $T_i > T_c$. When, under hydrodynamic expansion, the temperature falls below T_c , QGP is transformed into hadronic gas. As T drops below T_f , there occurs decay into free hadrons. One problem of QGP diagnostics is that soft processes of hadronization may substantially distort information on parton system evolution. Since the parton hadronization mechanism is still largely unknown, the results of decoding observed inclusive hadron spectra, as well as other hadron characteristics in search for QGP signals, are model-dependent and cannot serve as a rigorous proof of QGP existence.

The advantage of leptons and photons from the viewpoint of hot strongly interacting matter diagnostics is that they escape practically without secondary interactions. So, one can consider dilepton and photon spectra as a probe of the hottest stage of the reaction. There are many competing sources of dileptons and photons both before and after the hot stage of the collision. Reconstruction seems next to impossible. The best that one can do is to evaluate the contribution from each source to ascertain whether or not it is dominant in some part of phase space or if it has distinct properties that make separation feasible. We will proceed along these lines by considering four regions in the invariant mass M of the produced dileptons. For invariant mass M above the J/ψ peak, the spectrum is dominated by Drell-Yan production. The spectrum around $\simeq 1$ GeV is dominated by ρ , ω and ϕ decays. Dileptons with invariant masses in the region 1.5—3.0 GeV seem to be mostly derived from hadronic reactions with a possible contribution from quark annihilation. Again, this analysis assumes a thermalized initial state (except for Drell-Yan, of course). A nonequilibrium picture may yield results that are different.

The last region of invariant mass $M < m_p$, is a region of «soft» dilepton production. There are many sources of dileptons with masses $M < m_p$: π^0 and η Dalitz decays, $\pi^+\pi^-$ annihilation (for $M^{e^+e^-} > 2m_\pi$), pion scattering with virtual bremsstrahlung, and if quark-gluon plasma is formed, there will be quark-antiquark annihilation and quark-quark (antiquark, gluon) scattering with virtual bremsstrahlung.

As for photons, one can expect the transverse momentum spectrum in the region $p_\perp \sim 3\text{--}5$ GeV to be dominated by hard QCD Compton processes. For $p_\perp \simeq 3$ GeV, π^0 and η decays are important as well as bremsstrahlung from binary collisions within the thermal medium. We will consider these mechanisms in this and the following sections.

We consider dilepton and photon emission first from an ideal QGP (without interactions) followed by an ideal hadronic gas. In section 2 we stressed that in heavy-ion collisions the real situation is complicated by interactions among the QGP and hadronic plasma constituents. We will delay discussions of the effects of such complications on dilepton and photon spectra until the next section.

4.1. Annihilation Reactions. Consider in greater detail dilepton production by a thermalized medium. Such a medium can be either quarks, antiquarks and gluons in a deconfined phase or it can be an hadronic gas. For the sake of simplicity and to illustrate the theoretical approach, we shall assume that the hadronic sector in the confined phase consists solely of pions. The validity of this will be explored quantitatively later. In first order perturbation theory dilepton production is described by the diagram of Fig.9, where «a» is a pion or a quark. In quantum electrodynamics e^+e^- annihilation is similar to that shown in Fig.9. The cross section for the process $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ is of the form

$$\sigma(M) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{M^2} \left(1 + \frac{2m^2}{M^2} \right) \left(1 - \frac{4m^2}{M^2} \right)^{1/2}, \quad (21)$$

where α is the fine structure constant, m is the muon mass and M is the mass of virtual photon γ^* . In the case of quark and antiquark annihilation, one must include a multiplicative colour factor $N_c = 3$ in Eq.(21). Another deviation from Eq.(21) as applied to quarks is that it must reflect their fractional electric charge $e_u = 2/3$, $e_d = -1/3$. Then the l^+l^- pair production cross section by quark-antiquark annihilation is given by

$$\sigma_q(M) = F_q \sigma(M), \quad (22)$$

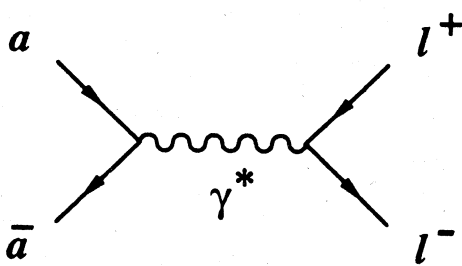


Fig.9. Dilepton production by quark-antiquark (or two-pion) annihilation

where $E_q = 4N_c \sum_f e_f^2$ and the summation is carried out over the quark flavours. In this expression we have also averaged over the spins of the quarks in the initial state. Equations (21) and (22) require some modification if particles a and \bar{a} are pions. Since pions are colourless and spinless particles with unit electric charge, the factor of averaging over spin and colour gives unity. It is necessary to multiply Eq.(22) by a form factor $|F_\pi(M)|^2$ [79]. The cross section for the process $\pi^+\pi^- \rightarrow l^+l^-$ is rather simply written

$$\sigma_\pi(M) = |F_\pi(M)|^2 \sigma(M) \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{M^2}\right)^{1/2} \tag{23}$$

To calculate the rate of dilepton production per unit time per unit volume from thermalized matter, one averages the annihilation cross section $\sigma(a\bar{a} \rightarrow l^+l^-)$ over the momentum distribution functions of primary particles and antiparticles

$$R(a\bar{a} \rightarrow l^+l^-) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} f(P) \int \frac{d^3\bar{P}}{(2\pi)^3} \bar{f}(\bar{P}) \sigma(a\bar{a} \rightarrow l^+l^-) v_{rel} \tag{24}$$

where v_{rel} is the relative velocity of the primary particle and antiparticle,

$$v_{rel} = \frac{\sqrt{(E\bar{E} - P\bar{P})^2 - m_a^4}}{E\bar{E}} \tag{25}$$

and $E, P (\bar{E}, \bar{P})$ are the energy and momentum of the particles (antiparticles). Note here the following important point: the above formalism is in fact more general than the current would tend to suggest. If the background matter is out of equilibrium and the momentum distribution functions are known, they can be used in Eq.(24). In what follows we will be concerned with the case $T \geq m_a$, then we may approximate the distributions by

$$f(p) \simeq \exp(-E/T). \tag{26}$$

In this case the integration of the expression Eq.(24) gives

$$\frac{dN}{d^4x dM^2 \pi dp_{\perp}^2 dy^*} = \frac{\sigma_a}{(2\pi)^5} \left(1 - \frac{4m_a^2}{M^2} \right) \exp(-E^*/T) \quad (27)$$

for the number of lepton pairs with invariant mass M , emitted from the element d^4x of 4-volume of thermalized nuclear matter. In Eq.(27), p_{\perp} is the transverse momentum of the dilepton, y^* and E^* are the rapidity and energy of the dilepton in the rest frame of element of nuclear matter, respectively. But one knows that

$$E^* = M_{\perp} \cosh y^*, \quad (28)$$

where

$$M_{\perp} = \sqrt{M^2 + p_{\perp}^2} \quad (29)$$

is the transverse mass of the dilepton.

Equation (27) solves the first part of the problem, i.e., quantifies a lepton pair generation rate in the rest frame of the element of thermalized nuclear matter. The second part is to sum this rate over the evolution of the nuclear matter as it undergoes hydrodynamic expansion (Fig.8). Consider dilepton production from QGP, which exists at $\tau_i < \tau < \tau_Q$. Under one-dimensional hydrodynamic expansion, integration of eq.(27) over $d^4x = \pi R_A^2 d\chi \tau d\tau$ leads to

$$\frac{d\sigma}{dM^2 dy d^2 p_{\perp}} = \frac{\sigma_q \pi R_A^2}{(2\pi)^5} \int_{\tau_i}^{\tau_Q} \tau d\tau \int_{-Y_m}^{+Y_m} d\chi \exp\left(\frac{-M_{\perp} \cosh(y - \chi)}{T}\right). \quad (30)$$

Here, y is the dilepton rapidity in the CMS of the AA collision and $y = y^* + \chi$. In setting the integration limits, the scaling conditions as well as the lifetimes of the QGP phase are taken into account. For $y \ll Y_m$ ($y \simeq 0$ is the central region), integration over χ gives

$$\int d\chi \exp\left(-\frac{M_{\perp} \cosh \chi}{T}\right) \simeq 2K_0 \left(\frac{M_{\perp}}{T}\right) \simeq \left(\frac{2\pi T}{M_{\perp}}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M_{\perp}}{T}\right). \quad (31)$$

According to the scaling solution (Eqs.7—12), there is a one-to-one mapping between proper time and temperature $\tau T^3 = \tau_i T_i^3$. Therefore, $\tau d\tau = T_i^6 \tau_i^2 3dT/T^7$ and we write [80,22,81]

$$\frac{d\sigma}{dM^2 dy d^2 p_\perp} = \frac{\sigma_q}{(2\pi)^5} \pi R_A^2 3T_i^6 \tau_i^2 \int_{T_c}^{T_i} \frac{dT}{T^7} \left(\frac{2\pi T}{M_\perp} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M_\perp}{T}\right). \quad (32)$$

Formulas for the contribution to dilepton production from the pion gas can be obtained in a similar manner [22] by replacing $T_c \rightarrow T_i$, $T_c \rightarrow T_f$, and $\sigma_q \rightarrow \sigma_\pi$. We concentrate on central collisions of equally massed nuclei.

The next problem is how to estimate dilepton production from the mixed phase? One way to estimate this contribution is to consider the mixed phase as a simple mix of QGP and hadronic gas at a temperature T_c [22]. As long as the volume fraction f of the quark-gluon phase is specified (as a function of time) formulas for dilepton emission from QGP and hadronic gas can be used to estimate the contribution from the mixed phase. The entropy density is $S(f, T_c) = S_q(T_c)f + S_h(T_c)(1-f)$, where $S_q = 148aT^3$, $S_\pi = 12aT^3$ and $a = \pi^2/90$. Similar expressions can be written for the energy density. In the mixed phase the entropy density decreases, not by decreasing T but by converting quark-gluon plasma to hadron matter at lower entropy density. The fraction $f(t)$ can be expressed as

$$f(t) = \frac{1}{r-1} \left[r \frac{t_1}{t} - 1 \right], \quad (33)$$

where $\tau = 37/3$ is the ratio of the number of degrees of freedom in the two phases and t_1 is the time of mixed phase formation.

Another simple approach to mixed and hadronic phases was developed in Ref.[82]. The change in T throughout the entire hadron phase is not very large ($T_f \approx T_c$). Therefore, the contribution from the mixed and hadron phases may be parametrized to be $\alpha \exp(-E/T_c)$. If QGP is formed, its presence should manifest itself by a nonexponential torus [82—84]. For dilepton spectra, one gets [82]

$$\frac{dN}{dM^2 dy d^2 p_\perp} = \frac{\alpha^2}{12\pi^4} \frac{(R_A + R_B)^2}{\pi R_A^2 R_B^2} \left[\frac{c}{4a_q} \frac{dN^{AB \rightarrow \pi}}{dy} \right]^2 \times$$

$$\times \int d\chi \left\{ \int_{T_c}^{T_i} \frac{3dT}{T^7} \exp \left[-\frac{M_{\perp} \cosh(y-\chi)}{T_c} \right] + \frac{\lambda}{T_c^6} \exp \left[-\frac{M_{\perp} \cosh(y-\chi)}{T_c} \right] \right\}, \quad (34)$$

where $c=3.6$, $a_q=5.25$ and $\lambda=125$. Typically this idealized Maxwell construction for two-phase equilibrium is invoked as a model of the hadronization process in fluid dynamical approaches. However, it is by no means clear that the QCD nucleation rate is large enough for this idealization to be anywhere near reality. In Ref.[85] the nucleation rate is computed for a first order phase transition using a set of rate equations to study the time evolution of expanding quark-gluon plasma as it converts into hadronic matter. The authors calculated the fraction of space occupied by hadronic matter as a function of time and obtained a time delay when compared to the adiabatic Maxwell idealization. The temperature had to drop about 20 % below T_c before nucleation and bubble growth was strong enough to cause reheating. The difference in dilepton yield between an idealized Maxwell construction of phase coexistence and a dynamical phase transition with finite nucleation and phase conversion rates has been investigated in Ref.[86]. It is difficult to say *a priori*, whether the «supercooling» scenario would enhance or suppress the dilepton yield because there are competing effects. On the one hand, there is a tendency to suppress the yield because the temperature is below T_c during the phase transition, and lower temperature immediately implies a lower dilepton yield. On the other hand, there is an enhancement in the yield because the transition lasts about 30 fm/c with a Maxwell construction, while the finite phase conversion rates cause a delay of the completion of the transition by about 11 fm/c, implying a longer time period for dilepton production. The combined effect gives an enhancement of dilepton yield by a factor 2 near the ρ -peak. It would seem very useful to perform an experiment which would be able to measure the dilepton mass spectra at $M \sim 600$ MeV to better than a factor 2. Within the context of present experiments, this is probably not feasible.

We have discussed the «canonical» Bjorken model for strongly interacting matter evolution. The hadrons do not interact after «freeze-out» in this model. There is no rigorous way to uniquely define the temperature at freeze-out, T_f . Since T_f is a phenomenological parameter, one should check the sensitivity of dilepton yield to the numerical value chosen. The dilepton yield will increase as the chosen value of the parameter T_f is lowered. But even after the passage to

free-streaming has occurred, hadron trajectories may occasionally overlap, leading to hh reactions which produce additional lepton pairs [87,88]. If T_f is lowered, the thermal contribution is increased, but the free-streaming contribution is reduced. Such competition leaves the total dilepton mass spectrum rather insensitive to the choice of freeze-out temperature T_f .

The formula for the quark-antiquark annihilation cross section was represented above in the Born approximation. The question of how QCD corrections can change the tree level results was discussed in Refs.[89,90] and [91]. A rich structure of the propagation modes inside the plasma were discovered [92], which resulted in a huge enhancement in the dilepton production rate over the Born annihilation term. However, these calculations were performed for the lepton pairs at rest in the plasma rest frame, and did not allow for phenomenological analyses in arbitrary kinematical regions. The corrections are essential for low massed pairs ($M \leq T$) and are negligible for large masses ($M \geq 1$ GeV). The corrections to the dilepton emission rate from a QGP in kinematical configurations $M^{e^+e^-} \leq T$ and $q_{\perp}^{e^+e^-} \gg T$ were calculated in Ref.[93]. The ratio between the first and zeroth order QCD corrections $\sim (4\pi/3\alpha_s) (T^2/M^2) \ln(ET/m_q^2)$ (m_q is the thermal mass quark) and reaches $\sim 10^2 - 10^3$ for $M \simeq 0.02$ GeV, $M_{\perp} \simeq 1$ GeV, and $T = 300$ MeV.

4.2. Bremsstrahlung. The fundamental principle that drives bremsstrahlung is simply that when charged particles are accelerated there may be accompanying emission of real or virtual quanta. Particles in collision clearly undergo accelerations and are therefore prone to this phenomenon. In hadron-hadron or nucleus-nucleus collisions there are several reaction possibilities depending upon the available energy. At low energies proton-neutron bremsstrahlung contributes the most. At intermediate energies pions are produced reasonably frequently and they might collide with a nucleon or possibly another pion, charged or uncharged. At much higher energies since the system is comprised mainly of thermal or nearly thermal pions, pion-pion bremsstrahlung is the dominant contributor. And if conditions allow QGP formation, the QCD constituents scatter and are therefore also prone to the same physical phenomenon.

In colliding nuclear systems where the densities rise to several times normal nuclear matter density, radiation is complicated by the fact that binary collisions are no longer free from multiple-collision interference effects. Specifically, if the mean time between collisions becomes small enough to be comparable to the time it takes radiation to properly materialize, then total radiation is no longer just the sum of independent binary reactions but rather a complicated coherent sum of many. Since high-mass dileptons originate from processes on

very short time scales and low-mass pairs from those with longer times, it stands to reason that the low-mass pairs will suffer from this effect to a larger extent. The net result of such interference, referred to as the Landau-Pomeranchuk (LP) effect [94], is to suppress production of low-mass dileptons, at least for some very dense system. First principles calculations valid in all kinematical regions for the real or virtual photons including the LP effect are computationally difficult, especially when they include most of what is known about the strong interaction. A proper treatment requires complete knowledge of the dynamics. Estimates of these phenomena have been done in some limiting cases.

Low energy calculations using a one-boson-exchange (OBE) model for the strong interaction were reported in Refs. [95] and [96]. Here the bremsstrahlung cross sections were calculated gauge invariantly including both external and internal radiation using the OBE model while fitting the coupling constants and form factors to the proton-neutron elastic cross sections over a fairly wide energy range. A less ambitious but much cheaper way to get the cross sections is to use a soft-photon approximation [97,25,98]. Contributions having radiation originating from the internal lines in the diagrams are neglected while radiation from external lines is computed. The propagator leading to the external lines of the diagrams develops a singularity as the energy of the photon approaches zero, making these diagrams clearly dominant as compared with all others. Neglecting the others is valid as long as $q_0 \tau < 1$ in nonrelativistic, and $q_0 \tau \ll \gamma^2$ in relativistic collisions, where $q_0 = |\vec{q}|$ is the energy of the photon, τ is the duration of the strong-interaction collision and γ is the usual Lorentz factor. Precisely how good the approximation is for semi-hard or for lepton pairs with finite invariant mass is not clear. Therefore, the soft-photon approximation has been compared with results from a Born approximation calculation [99]. At dilepton invariant mass ~ 100 MeV the soft-photon approximation was found to be surprisingly good. The scope of this section of our review includes bremsstrahlung estimations using the soft-photon method with LP interference discussed briefly.

Low's theorem [100] in its true form established an equivalence in the structure of the $q_0 \rightarrow 0$ bremsstrahlung matrix elements independent of whether the radiating particles are hadrons or leptons, whether they carry spin or not and independent of any differences that exist between their interactions. It is useful since it means that in this limit no matter how complicated the diagrams or how computationally difficult the interaction becomes, the matrix element separates into its on-shell counterpart times a multiplicative factor describing the electrodynamics of the reaction. The radiated quanta might not satisfy the Einstein condition $q^2 = 0$ but instead appear as a massive (virtual) photon. Extrapolation

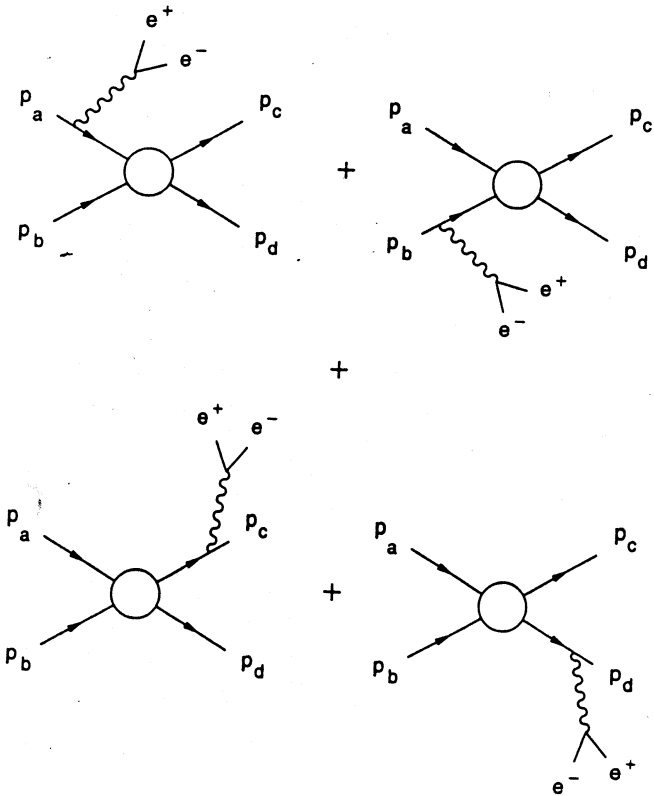


Fig.10. Virtual bremsstrahlung in the soft-photon approximation includes radiation from external lines only. Shown here is a completely general scattering process which might include nucleons, pions or quarks and gluons

from real photon production to electron-positron pairs is done consistently by inserting a four-momentum conserving delta function at the photon-dilepton vertex. Any differences in the matrix element due to the finite mass of the virtual photon are ignored. The diagrams for the elementary process $a + b \rightarrow c + d + l^+ + l^-$ are shown in Fig.10 where the reaction partners might be nucleons or nucleon resonances, mesons, or even quarks or antiquarks and gluons. The discussion is completely general at this point. Then the differential cross section is reduced to the quasi-elastic scattering cross section and at the same time to the production of an e^+e^- pair through decay of a virtual photon [97,25,98,101]

$$\frac{d\sigma_{ab \rightarrow cd}^{e^+e^-}}{dM^2} = \frac{\alpha^2}{8\pi^4} \frac{1}{M^2} \int |\epsilon \cdot J|_{ab \rightarrow cd}^2 \frac{d\sigma_{ab \rightarrow cd}}{dt} \delta(M^2 - q^2) \times \delta^4(q - (p_+ + p_-)) d^3q \frac{d^3p_+ d^3p_-}{E_+ E_-} dt, \tag{35}$$

where t is the four-momentum transfer in the $a + b \rightarrow c + d$ collision, M is the invariant mass of the e^+e^- pair, p_+ and p_- are the momenta of the positron and electron respectively, and

$$|\epsilon \cdot J|^2 = \sum_{\delta} \epsilon_{\delta} \cdot J \epsilon_{\delta} \cdot J. \tag{36}$$

The sum is taken over all photon polarizations, and the current J in the reaction $a + b \rightarrow c + d$ is

$$J^{\mu} = -Q_a \frac{p_a^{\mu}}{p_a \cdot q} - Q_b \frac{p_b^{\mu}}{p_b \cdot q} + Q_c \frac{p_c^{\mu}}{p_c \cdot q} + Q_d \frac{p_d^{\mu}}{p_d \cdot q}, \tag{37}$$

where the Q_i s are particle charges in units of the proton charge.

For very general scattering processes subject only to over charge conservation the polarization summed (and angle-averaged) electrodynamic factor is [101]

$$|\epsilon \cdot J|_{ab \rightarrow cd}^2 = \frac{1}{q_0^2} \{ -(Q_a^2 + Q_b^2 + Q_c^2 + Q_d^2) - 2Q_a Q_b \mathcal{F}(\vec{\beta}_a^*, \vec{\beta}_b^*) + 2Q_a Q_c \mathcal{F}(\vec{\beta}_a^*, \vec{\beta}_c^*) + 2Q_a Q_d \mathcal{F}(\vec{\beta}_a^*, \vec{\beta}_d^*) + 2Q_b Q_c \mathcal{F}(\vec{\beta}_b^*, \vec{\beta}_c^*) + 2Q_b Q_d \mathcal{F}(\vec{\beta}_b^*, \vec{\beta}_d^*) - 2Q_c Q_d \mathcal{F}(\vec{\beta}_c^*, \vec{\beta}_d^*) \}, \tag{38}$$

where the function

$$\mathcal{F}(\vec{x}^{\rceil}, \vec{y}^{\rceil}) = \frac{(1 - \vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil})}{2\sqrt{(1 - \vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil})^2 - (1 - x^2)(1 - y^2)}} \times \left\{ \ln \left| \frac{\vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil} - x^2 - \sqrt{(1 - \vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil})^2 - (1 - x^2)(1 - y^2)}}{\vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil} - x^2 + \sqrt{(1 - \vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil})^2 - (1 - x^2)(1 - y^2)}} \right| + \ln \left| \frac{\vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil} - y^2 - \sqrt{(1 - \vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil})^2 - (1 - x^2)(1 - y^2)}}{\vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil} - y^2 + \sqrt{(1 - \vec{x}^{\rceil} \cdot \vec{y}^{\rceil})^2 - (1 - x^2)(1 - y^2)}} \right| \right\}, \tag{39}$$

the CM velocities' inner products can be related to invariants through

$$\begin{aligned}
 \vec{\beta}_a^* \cdot \vec{\beta}_b^* &= \frac{-\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}{(s + m_a^2 - m_b^2)(s - m_a^2 + m_b^2)} \\
 \vec{\beta}_a^* \cdot \vec{\beta}_c^* &= \frac{2s(t - m_a^2 - m_c^2)}{(s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_c^2 - m_d^2)} + 1 \\
 \vec{\beta}_a^* \cdot \vec{\beta}_d^* &= \frac{-2s(t - m_a^2 - m_c^2)}{(s - m_a^2 - m_b^2)(s - m_c^2 + m_d^2)} - \frac{s + m_c^2 - m_d^2}{s - m_c^2 + m_d^2} \\
 \vec{\beta}_b^* \cdot \vec{\beta}_c^* &= \frac{-2s(t - m_a^2 - m_c^2)}{(s - m_a^2 + m_b^2)(s + m_c^2 - m_d^2)} - \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{s - m_a^2 + m_b^2} \\
 \vec{\beta}_b^* \cdot \vec{\beta}_d^* &= \frac{2s(t - m_a^2 - m_c^2)}{(s - m_a^2 + m_b^2)(s - m_c^2 + m_d^2)} + \frac{(s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_c^2 - m_d^2)}{(s - m_a^2 + m_b^2)(s - m_c^2 + m_d^2)} \\
 \vec{\beta}_c^* \cdot \vec{\beta}_d^* &= \frac{-\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{(s + m_c^2 - m_d^2)(s - m_c^2 + m_d^2)}
 \end{aligned} \tag{40}$$

and

$$\begin{aligned}
 (\beta_a^*)^2 &= \frac{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}{(s + m_a^2 - m_b^2)^2}, & (\beta_b^*)^2 &= \frac{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}{(s - m_a^2 + m_b^2)^2} \\
 (\beta_c^*)^2 &= \frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{(s + m_c^2 - m_d^2)^2}, & (\beta_d^*)^2 &= \frac{\lambda(s, m_c^2, m_d^2)}{(s - m_c^2 + m_d^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

The kinematic function $\lambda(x, y, z) = x^2 - 2(y+z)x + (y-z)^2$ [102] and $s \geq \max \{(m_a + m_b)^2, (m_c + m_d)^2\}$. Equation (38) is very powerful since it is valid for any masses. For instance, it can be applied to reactions such as $q + g \rightarrow q + g + \gamma^* \rightarrow q + g + l^+ + l^-$ or even $g + g \rightarrow q + \bar{q} + \gamma^* \rightarrow q + \bar{q} + l^+ + l^-$.

For equal-mass scattering as in pion-pion or quark-quark (or antiquark) $m_a = m_d = m_c = m_b = m$, and Eq. (38) reduces to

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon \cdot J|_{ab \rightarrow cd}^2 = & \frac{1}{q_0^2} \left\{ -(Q_a^2 + Q_b^2 + Q_c^2 + Q_d^2) - \right. \\
 & - 2(Q_a Q_b + Q_c Q_d) \frac{s - 2m^2}{\sqrt{s(s - 4m^2)}} \ln \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - 4m^2}}{\sqrt{s} - \sqrt{s - 4m^2}} \right) + \\
 & + 2(Q_a Q_d + Q_b Q_c) \frac{s - 2m^2 + t}{\sqrt{s + t - 4m^2}(s + t)} \ln \left(\frac{\sqrt{s + t} + \sqrt{s + t - 4m^2}}{\sqrt{s + t} - \sqrt{s + t - 4m^2}} \right) + \\
 & \left. + 2(Q_a Q_c + Q_b Q_d) \frac{2m^2 - t}{\sqrt{t(t - 4m^2)}} \ln \left(\frac{\sqrt{4m^2 - t} + \sqrt{-t}}{\sqrt{4m^2 - t} - \sqrt{-t}} \right) \right\}, \quad (42)
 \end{aligned}$$

where $s \geq 4m^2$ and $-(s - 4m^2) \leq t \leq 0$. This expression is still very useful since it is valid for any momentum transfer and any energy. However, it is somewhat lengthy so a simpler yet approximate description would be convenient. If charge is conserved along each of the lines ($Q_a = Q_c$ and $Q_b = Q_d$) and if the momentum transfer is relatively small ($|t| < 4m^2$), then a good approximation for the equal-mass electrodynamic factor is [103]

$$|\varepsilon \cdot J|_{ab \rightarrow cd}^2 \simeq \frac{2}{3} \frac{1}{q_0^2} \left(\frac{-t}{m^2} \right) \left[(Q_a^2 + Q_b^2) - \frac{3}{2} Q_a Q_b f(s) \right], \quad (43)$$

where

$$\begin{aligned}
 f(s) = & \frac{s}{2(s - 4m^2)} - \frac{(s - 4m^2)}{2s} - \frac{m^2}{s} \left\{ \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s - 4m^2}} + \left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s - 4m^2}} \right)^3 + \right. \\
 & \left. + \frac{\sqrt{s - 4m^2}}{\sqrt{s}} \right\} \ln \left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{s - 4m^2}}{\sqrt{s} - \sqrt{s - 4m^2}} \right). \quad (44)
 \end{aligned}$$

The interference function behaves as follows. In the limit $\sqrt{s}/m \rightarrow 2$, $f(s) \rightarrow -2/3$ and as $\sqrt{s}/m \rightarrow \infty$, $f(s) \rightarrow 0$. Eqs. (43) and (44) are extremely useful because the result is linear in t . This approximation is quite good as long as particles are at least as massive as pions. For processes involving lighter particles, one must resort to Eq. (42). Finally note that if one of the

incoming particles is electrically neutral as in $\pi^\pm\pi^0$, Eq. (43) reduces to the much used expression [25]

$$|\varepsilon \cdot J|^2 \simeq \frac{2}{3} \frac{1}{q_0^2} \left(\frac{-t}{m^2} \right). \quad (45)$$

The common $1/q_0^2$ dependence in all of these electrodynamic factors allows analytic integration over the virtual photon and lepton momenta when inserted into Eq. (35). The resulting mass spectrum is

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{ab \rightarrow cd}^{e^+e^-}}{dM^2} &= \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \frac{\hat{G}(s)}{M^2} \times \\ &\times \left\{ \ln \left(\frac{(\sqrt{s} - (m_a + m_b)) + \sqrt{(\sqrt{s} - (m_a + m_b))^2 - M^2}}{(\sqrt{s} - (m_a + m_b)) - \sqrt{(\sqrt{s} - (m_a + m_b))^2 - M^2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{(\sqrt{s} - (m_a + m_b))^2 - M^2}}{(\sqrt{s} - (m_a + m_b))} \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

where

$$\hat{G}(s) \equiv \int_{t^-}^{t^+} dt (q_0^2 |\varepsilon \cdot J|_{ab \rightarrow cd}^2) \frac{d\sigma_{ab \rightarrow cd}}{dt} \quad (47)$$

for which the momentum-transfer limits are $t^\pm = m_a^2 + m_c^2 - 1/2s \{(s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_c^2 - m_d^2) \mp \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \lambda^{1/2}(s, m_c^2, m_d^2)\}$. For reactions with two distinct masses $m_a = m_c = m_1$ and $m_b = m_d = m_2$, these limits reduce to $t^- = -\lambda^{1/2}(s, m_c^2, m_d^2)/s$ and $t^+ = 0$. And finally, for equal-mass scattering the limits reduce further to $t^- = -(s - 4m^2)$ and $t^+ = 0$.

Evaluation of the e^+e^- production cross section proceeding along these lines neglects the momentum of the virtual photon in the phase-space δ -function. Strictly speaking, one should correct for this by including the multiplicative factor

$$\frac{R_2(s_2, m_a^2, m_b^2)}{R_2(s, m_a^2, m_b^2)} = \frac{\lambda^{1/2}(s_2, m_a^2, m_b^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \frac{s}{s_2} \quad (48)$$

(with $s_2 = s + M^2 - 2\sqrt{s} q_0$) before integrating Eq. (35) [104].

Having the elementary bremsstrahlung cross sections which are exact in the limit $q_0 \rightarrow 0$, one can employ the independent particle approximation from kinetic theory to write the number of reactions per unit time per unit volume, i.e., the rate, as

$$\begin{aligned} \frac{dN_{ab}^{e^+e^-}}{d^4x dM^2} &= g_{ab} \int ds \int \frac{d^3p_a}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p_b}{(2\pi)^3} e^{-\beta(E_a + E_b)} \times \\ &\times \frac{d\sigma_{ab}^{e^+e^-}}{dM^2} v_{\text{rel}} \delta(s - (p_a + p_b)^2), \end{aligned} \quad (49)$$

where

$$v_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}{E_a E_b},$$

β is the inverse temperature and $q_{ab} = (2s_a + 1)(2s_b + 1) N_c^a N_c^b$ is the spin and colour degeneracy. Integrating over both particles' momenta yields

$$\frac{dN_{ab \rightarrow cd}^{e^+e^-}}{d^4x dM^2} = \frac{T^6 q_{ab}}{16\pi^4} \int_{z_{\min}}^{\infty} dz \frac{\lambda(z^2 T^2, m_a^2, m_b^2)}{T^4} \mathcal{K}_1(z) \frac{d\sigma_{ab \rightarrow cd}^{e^+e^-}}{dM^2}(z) \quad (50)$$

where $z_{\min} = (m_a + m_b + M)/T$, $z = \sqrt{s}/T$, and \mathcal{K}_1 is a modified Bessel function. But keep in mind that $s \geq \max\{(m_a + m_b)^2, (m_c + m_d)^2\}$. Note that for pion-pion bremsstrahlung this reduces to the form used in Ref. [22]. Elastic scattering cross sections are all that is needed in order to calculate the rate of electron-positron production through virtual bremsstrahlung from pion-pion processes, quark-quark or quark-gluon processes, etc.

Observed distributions are obtained only after integration of the production rates over likely scenarios for the history of the colliding nuclear system. Using assumptions detailed in section 3 regarding evolution, the pure quark and hadronic phase contributions can be calculated [22] with

$$\frac{dN}{dy dM} = 3\pi R_A^2 T_i^6 \tau_i^2 \int_{T_c}^{T_i} \frac{dT}{T^7} \frac{dN^q}{d^4x dM}, \quad (51)$$

and

$$\frac{dN}{dy dM} = 3\pi R_A^2 T_i^6 \tau_i^2 r^2 \int_{T_f}^{T_s} \frac{dT}{T^7} \frac{dN^\pi}{d^4 x dM}, \tag{52}$$

while the mixed phase contribution from quark and pion processes are

$$\frac{dN^q_{\text{mixed}}}{dy dM} = \frac{\pi R_A^2}{2} \left(\frac{T_i}{T_c} \right)^6 \tau_i^2 (r-1) \frac{dN^q}{d^4 x dM} (T = T_c), \tag{53}$$

and

$$\frac{dN^\pi_{\text{mixed}}}{dy dM} = \frac{\pi R_A^2}{2} \left(\frac{T_i}{T_c} \right)^6 \tau_i^2 r(r-1) \frac{dN^\pi}{d^4 x dM} (T = T_c). \tag{54}$$

Here r denotes the ratio of the number of degrees of freedom of the QGP constituents to that of the hadron gas constituents ($r \simeq 12$). Input to these formulas are simply the elastic scattering cross sections.

4.2.1 *Pions*. Attention is restricted to charge-neutral and charge-anticharge pion scattering since the cross sections and electrodynamics suppress the other isospin channels. With the approximate electrodynamic factor, Eq. (35) becomes

$$\frac{d\sigma_{\pi\pi}^{e^+e^-}}{dM^2} = \frac{\alpha^2}{6\pi^2} \frac{\bar{\sigma}_{\pi\pi}(s)}{M^2} \Phi(\sqrt{s}, m_\pi, M) \left\{ \frac{4}{3} + \frac{1}{2} f(s) \right\}, \tag{55}$$

where $\sigma_{\pi\pi} \sim \sigma_{\pi^+\pi^0} + \sigma_{\pi^-\pi^0} + \sigma_{\pi^+\pi^-}$, the momentum transfer weighted cross section is $\bar{\sigma}(s)$, and the function

$$\Phi(\sqrt{s}, m_\pi, M) = \ln \left(\frac{(\sqrt{s} - 2m_\pi) + \sqrt{(\sqrt{s} - 2m_\pi)^2 - M^2}}{\sqrt{s} - 2m_\pi - \sqrt{(\sqrt{s} - 2m_\pi)^2 - M^2}} \right) - \frac{2\sqrt{(\sqrt{s} - 2m_\pi)^2 - M^2}}{(\sqrt{s} - 2m_\pi)}. \tag{56}$$

If $d\sigma/dt$ is a symmetric function of t and u , then

$$\bar{\sigma}(s) = 2\sigma_{el}(s) \left[\frac{s}{4m_\pi^2} - 1 \right]. \tag{57}$$

The elastic pion-pion cross section can be parametrized in the following way:

a) For $\sqrt{s} \leq 0.6$ GeV the chiral model expression is used [105,106],

$$\sigma_{el}(s) = \frac{2}{3} \frac{1}{F_\pi^4} \frac{1}{16\pi} s \left[1 - \frac{5m_\pi^2}{s} + \frac{7m_\pi^4}{s^2} \right] \quad (58)$$

with the pion decay constant $F_\pi = 0.098$ GeV;

b) At the collision energy near the rho mass, $0.6 < \sqrt{s} \leq 1.5$ GeV, the largest contribution to the $\pi\pi$ -scattering amplitude is due to resonance formation. Therefore,

$$\sigma_{el}(s) = \frac{g_{\rho\pi\pi}^4}{48\pi s} \frac{(s - 4m_\pi^2)^2}{(s - m_\rho^2)^2 + m_\rho^2 \Gamma_\rho^2}, \quad (59)$$

where the coupling constant $g_{\rho\pi\pi} \simeq 6$, $m_\rho = 0.775$ GeV, and $\Gamma_\rho = 0.155$ GeV;

c) For large collision energy $\sqrt{s} > 1.5$ GeV, σ_{el} becomes energy independent $\sigma_{el} \simeq 5$ mb.

Equations (50) and (55) provide a good approximation for the rate of e^+e^- production from the sum of $\pi^+\pi^0$, $\pi^-\pi^0$ and $\pi^+\pi^-$ processes.

From the point of view of principles, a more complete estimate for this production rate would include an angular description for pion-pion elastic scattering instead of merely the integrated result. Then the exact electrodynamic factor could be properly folded in each scattering process which clearly matches the real situation more closely. The exact electrodynamic factor is given by Eq. (42) with $Q_a, Q_b, Q_c, Q_d = 0, \pm 1$ and $m_a = m_b = m_\pi$. In a recent study of pion-pion bremsstrahlung [101], a field theory calculation was done using σ , ρ , and $f(1270)$ meson-exchange to model the strong interaction. The quantum numbers for these exchanged particles are $(I=0, J=0)$, $(I=1, J=1)$, and $(I=0, J=2)$, respectively. An effective Lagrangian of

$$\mathcal{L}_{int} = g_\sigma \sigma \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + g_\rho \rho^\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi}) + g_f f_{\mu\nu} \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\nu \vec{\pi} \quad (60)$$

was used. The authors illustrated the method by showing details of the calculation of $\sigma(\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$. The differential cross section is proportional to the square of the matrix element describing the overlap of initial and final two-hadron states. In this model, six terms comprise the matrix element: t and s channel σ -, ρ - and f -exchange processes. Since mesons are composites,

modification at short distances or high momentum transfers was included. Momentum-transfer damping monopole form factors were inserted at the vertices of t -channel diagrams. Their form was

$$h_{\alpha}(t) = \frac{m_{\alpha}^2 - m_{\pi}^2}{m_{\alpha}^2 - t}, \quad (61)$$

where m_{α} was either the σ , ρ , or the f mass depending upon which meson was exchanged.

In this model finite resonance lifetimes were incorporated into the scalar, vector, and tensor boson propagators. For instance, the f propagator used was

$$i \mathcal{P}^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{-i \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \right) \right\}}{k^2 - m_f^2 + im_f \Gamma_f}. \quad (62)$$

The matrix element was written

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_5 + \mathcal{M}_6, \quad (63)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \frac{-g_{\sigma}^2 h_{\sigma}^2(t)(2m_{\pi}^2 - t)^2}{t - m_{\sigma}^2 + im_{\sigma} \Gamma_{\sigma}}, & \mathcal{M}_2 &= \frac{-g_{\sigma}^2 (s - 2m_{\pi}^2)^2}{s - m_{\sigma}^2 + im_{\sigma} \Gamma_{\sigma}} \\ \mathcal{M}_3 &= \frac{-g_{\rho}^2 h_{\rho}^2(t)(s - u)}{t - m_{\rho}^2 + im_{\rho} \Gamma_{\rho}}, & \mathcal{M}_4 &= \frac{g_{\rho}^2 (u - t)}{s - m_{\rho}^2 + im_{\rho} \Gamma_{\rho}} \\ \mathcal{M}_5 &= \frac{g_f^2 h_f^2(t)}{t - m_f^2 + im_f \Gamma_f} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (2m_{\pi}^2 - t)^2 - (s - 2m_{\pi}^2)^2 - (2m_{\pi}^2 - u)^2 \right) \\ \mathcal{M}_6 &= \frac{g_f^2}{s - m_f^2 + im_f \Gamma_f} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (s - 2m_{\pi}^2)^2 - (2m_{\pi}^2 - t)^2 - (2m_{\pi}^2 - u)^2 \right). \end{aligned} \quad (64)$$

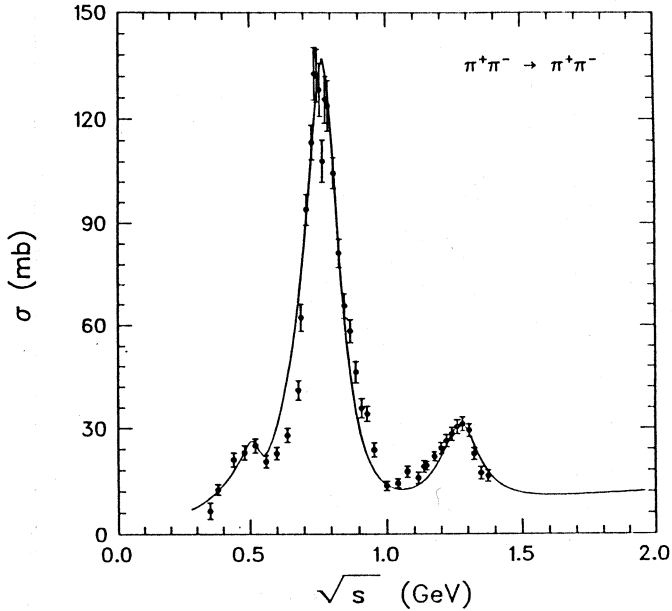


Fig.11. Elastic $\pi^+\pi^-$ cross section calculation as compared with experiment

Notice that as written g_σ and g_f are not dimensionless but $g_\sigma m_\sigma$ and $g_f m_f$ are. In pion-pion scattering, the elastic differential cross section is

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi s(s - 4m_\pi^2)}. \quad (65)$$

Within this model for the matrix element, $d\sigma/dt$ has qualitatively the right behaviour as compared with what is observed experimentally: for energies just below the ρ resonance the angular distribution is forwardly peaked, for \sqrt{s} near m_ρ , the distribution becomes forward-backward symmetric, and finally above the resonance it is backward dominated. The numerical values for the coupling constants and widths were adjusted to $g_\sigma m_\sigma = 1.85$, $m_\sigma = 0.525$ GeV, $\Gamma_\sigma = 0.100$ GeV, $g_\rho = 6.15$, $m_\rho = 0.775$ GeV, $\Gamma_\rho = 0.155$ GeV, $g_f m_f = 7.2$, $m_f = 1.274$ GeV and $\Gamma_f = 0.176$ GeV. We show the results of the integrated cross section in Fig.11. Superb agreement with experiment was obtained for the energies shown. Other $\pi\pi$ processes ($\pi^\pm\pi^0 \rightarrow \pi^\pm\pi^0$) were calculated analogously. With all three cross sections, one can compute the rate

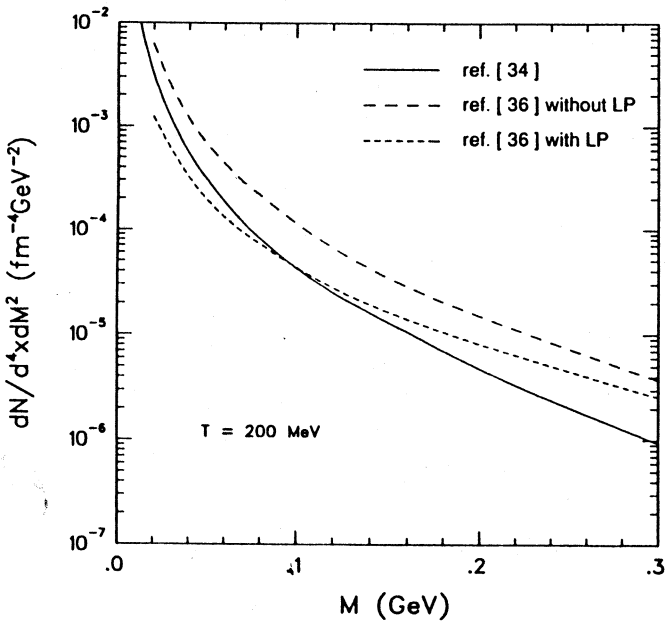


Fig.12. Dielectron mass spectrum from pion-pion bremsstrahlung using the full formalism (solid curve) as compared with approximate formulas with and without the Landau-Pomeranchuk effect

of pair production using Eqs. (46) and (47), which is exact within the soft photon approximation. The net result of using the more exact formulas is a suppression as compared with the approximate result by a mere factor ~ 2 .

Dielectrons with masses ≤ 100 MeV are produced in $\pi\pi$ scattering at any kinematically allowed \sqrt{s} and are therefore dominated near the ρ -peak; whereas higher mass pairs ($M \approx 300$ MeV) are effectively produced through $\pi\pi$ scattering with $\sqrt{s} \geq m_\rho$. When $M \approx 300$ MeV in Eqs. (46) and (50) with \sqrt{s} near the kinematically determined minimum (just below the ρ -peak) the production rate is strongly suppressed by the logarithm and radical. The soft photon approximation is less reliable for high masses but this suggests that it is imperative to have a reasonably accurate calculation of the cross section for $\sqrt{s} > m_\rho$. Such calculations would be incomplete if they excluded the tensor $f(1270)$ meson.

An approach somewhat different from this one has been taken by Cleymans et al. in Ref. [107], where within a soft-photon approximation the LP effect is included in pion-pion bremsstrahlung estimates. The starting formulas are quite different since multiple-collision interferences are included. We show in Fig.12 the LP-corrected (and LP-uncorrected) results and compare it with the

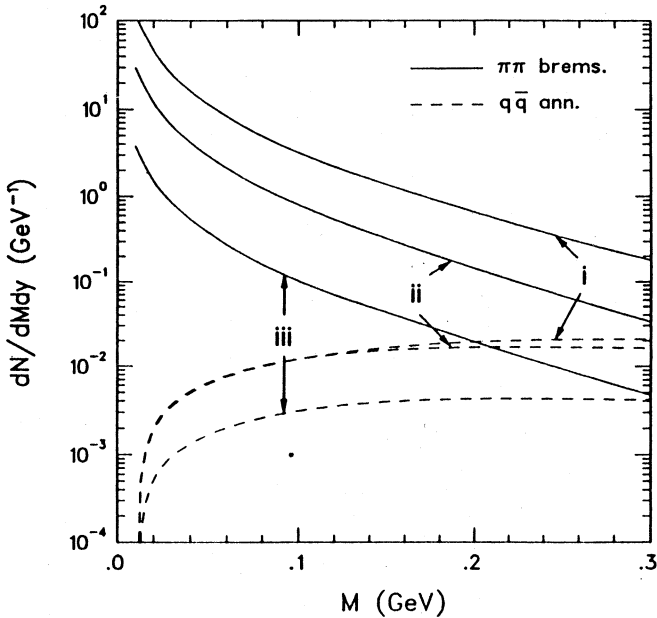


Fig.13. The low-mass dielectron yields from pion-pion bremsstrahlung (solid curves) and quark-antiquark annihilation (dashed curves) in the Born approximation. The three scenarios are (i) $T_i = 300$, $T_c = 200$, and $T_f = 140$ MeV, and (ii) $T_i = 250$, $T_c = 150$, and $T_f = 100$ MeV and finally, (iii) correspond to $T_i = 200$, $T_c = 150$, and $T_f = 140$ MeV

calculation by Haglin et al. from Ref. [101]. Several points are worth mentioning here. Firstly, the low-mass dielectron production rate is suppressed by the LP effect in a dense pion gas by nearly an order of magnitude. Secondly, the two curves without LP effect represent two different approximations for hadronic bremsstrahlung. The results from Cleymans et al. were calculated by approximating production with charge-neutral pion scattering. In the bremsstrahlung cross section the electrodynamics were approximated by a simple expression that allowed use of simply the total elastic pion cross section — which was parametrized. The results are quite close to the more detailed calculation from Haglin et al., where other processes were included and the electrodynamics were properly handled for each reaction. Also, phase space corrections in the latter calculation introduce a slightly different mass dependence in the results. While the LP effect is indeed important, one sees that its effect is at the level of uncertainty in the approximated elementary bremsstrahlung cross sections.

And it should therefore be considered equally important as the effects from including all the pion-pion processes, calculated as accurately as possible.

As discussed above, integration over the mixed and cooling phases for the pions gives the estimated total yield. We show it in Fig.13 for three different collections of initial, critical and final temperatures. The results from quark-antiquark annihilation discussed previously are also presented.

4.2.2. *Quarks and Gluons.* Quark scattering processes introduce additional difficulties due to their fractional charge, their colour, and their possibility for elastic scattering with their own force mediating bosons, the gluons. But the formalism from Ref. [101] is capable of handling the general case. The diagrams from Fig.10 are again the relevant ones to be evaluated. This time the charged external lines are u or d quarks (or antiquarks) and neutral external lines are gluons. The calculation reported in Ref. [101] included six distinct quark-quark (or antiquark) and four quark-gluon (or antiquark) reactions. Those with equal-charge scattering were neglected. Other processes like $q\bar{q} \rightarrow gg$ and its reverse process were shown to give a rather small contribution to the low-mass e^+e^- production rate so they were also neglected. The approximate expression for $|\varepsilon \cdot J|^2$ cannot be applied to current quarks since the range of validity is too small ($t < 4m_q^2 \approx 1,0 \times 10^{-4} \text{ GeV}^2$); so one resorts to Eq. (42). By setting the mass to m_q and by setting Q_a and Q_b to the appropriate quark electric charges, one has the exact electrodynamic factor in these reactions. When considering quark (or antiquark)-gluon processes, Eq.(38) must be used with $m_a = m_q$ and $m_b = 0$.

The strong interaction differential cross sections $d\sigma_{qq}/dt$ and $d\sigma_{qg}/dt$ are well known in the perturbative vacuum at the one-gluon-exchange level to be [108]

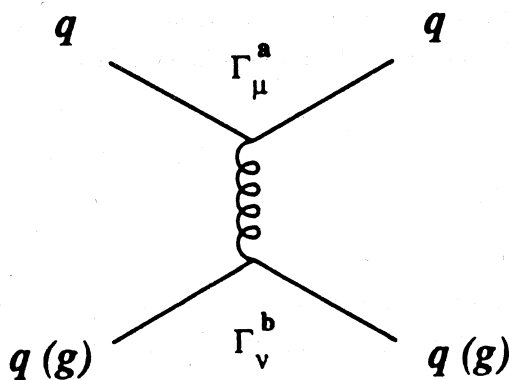
$$\frac{d\sigma_{ab}}{dt} = \frac{C_{ab} 2\pi\alpha_s^2}{t^2}, \quad (66)$$

where

$$C_{ab} = \begin{cases} 1 & (qg \rightarrow qg) \\ \frac{4}{9} & (qq \rightarrow qq) \end{cases}. \quad (67)$$

For hot hadronic matter this is clearly inadequate. Consider the dominant t -channel gluon exchange amplitude for the diagram in Fig.14. $\mathcal{M}^{ab} = \alpha_s \Gamma_\mu^a \mathcal{D}^{\mu\nu} \Gamma_\nu^b$, where $\mathcal{D}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}/t$ is the gluon propagator and $\Gamma_{\mu,\nu}^{a,b}$ are vertex functions for particles a, b . It is obvious that \mathcal{M}^{ab} is singular in the

Fig.14. t -channel gluon-exchange diagram



zero momentum-transfer limit. But at finite temperatures static colour-electric fields are shielded by quarks and gluons in the plasma, and colour-magnetic fields are also shielded by non-perturbative effects [109]. Colour-electric shielding modifies the $\mu = \nu = 0$ components of $\mathcal{D}^{\mu\nu}$ in such a way that

$$\mathcal{M}_E^{ab} \simeq \alpha_s(t) \Gamma_0^a \mathcal{D}^{00} \Gamma_0^b \simeq -\frac{\alpha_E(t)}{t} \Gamma_0^a \Gamma_0^b, \quad (68)$$

where the running coupling constant [109]

$$\frac{\alpha_E(t)}{t} = \frac{\alpha_s(t)}{t - m_E^2}, \quad (69)$$

and the colour-electric mass $m_E^2 = 6\pi\alpha_s T^2$. The medium-modified magnetic scattering amplitude can be written

$$\mathcal{M}_M^{ab} \simeq \alpha_s(t) \Gamma_i^a \mathcal{D}^{ij} \Gamma_j^b \simeq -\frac{\alpha_M(t)}{t} \Gamma_i^a \Gamma_i^b, \quad (70)$$

where the effective magnetic coupling $\alpha_M(t)/t = \alpha_s(t)/(t - m_M^2)$ and the colour-magnetic mass $m_M^2 = c\alpha_s^2 T^2$. Lattice gauge calculations [110] give $c \simeq 20$ – 30 . In the small t limit the vertex functions reduce to $\Gamma_\mu^a \simeq p_\mu^a$, where

p_μ^a is the momentum of particle a . Averaging over colour and spin degrees of freedom gives the differential cross section [109]

$$\frac{d\sigma_{ab}}{dt} = C_{ab} \frac{8\pi}{s^2 t^2} [\alpha_E(t) p_0^a p_0^b - \alpha_M(t) \vec{p}^a \cdot \vec{p}^b]^2, \quad (71)$$

where $s = (p_a + p_b)^2$.

Unfortunately, $d\sigma_{ab}/dt$ depends on the quark-quark (gluon) orientation in the scattering through $\vec{p}_a \cdot \vec{p}_b$. For arbitrary orientation of vectors \vec{p}_a , \vec{p}_b one cannot obtain a closed expression for $d\sigma^{ab}/dt$, but if vector \vec{p}_a is antiparallel to \vec{p}_b , $d\sigma_{ab}/dt$ reduces to

$$\frac{d\sigma^{ab}}{dt} = C_{ab} \frac{\pi}{2} \frac{\alpha_s^2(t)(2t - m_E^2 - m_M^2)^2}{(t - m_E^2)^2(t - m_M^2)^2}. \quad (72)$$

Note that this expression is exact for massless quark (antiquark) scattering. For $T \sim 200\text{--}300$ MeV, $\alpha_s \simeq 0.2\text{--}0.3$, $m_E \simeq 2.2T$ and $m_M \simeq 1.5T$. If one assumes that the colour-electric mass is roughly equal to the colour-magnetic mass, $m_E \simeq m_M$, then the m_q dependence can be restored in the differential cross sections

$$\frac{d\sigma^{qg}}{dt} = \frac{2\pi\alpha_s^2(t)}{s^2(t - m_E^2)^2} (s - m_q^2)^2 \quad (73)$$

$$\frac{d\sigma^{qq}}{dt} = \frac{4}{9} \frac{2\pi\alpha_s^2(t)}{s^2(t - m_E^2)^2} (s - 2m_q^2)^2. \quad (74)$$

Using these expressions there is no sizeable change in the dilepton production rates or final spectra. So instead one can safely use Eq.(72). Note that in the limit $m_E, m_M \rightarrow 0$ (free space), it reproduces Eq.(66) for the perturbative vacuum.

Putting together Eqs. (35), (42), (50) and (72), one has the rate of e^+e^- production from all the quark (antiquark)-gluon or quark (antiquark)-quark processes. In Fig. 15 we show results of the sum of $qq(q\bar{q})$ and $qg(\bar{q}g)$ scat-

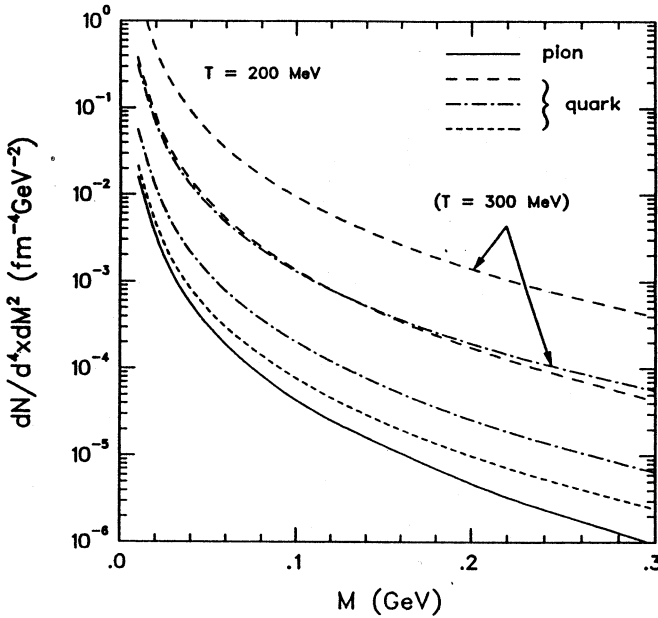


Fig.15. Dielectron production rate from quark and gluon processes

tering with virtual bremsstrahlung at temperatures $T = 200$ and 300 MeV. Three quark curves are shown: current quarks with mass 5 MeV, «medium» quarks with temperature-dependent mass $[2\pi\alpha_s(T)/3]^{1/2}T$, where $\alpha_s(T) = 6\pi/[(33 - 2N_f)\ln(aT/T_c)]$ and $a \sim 8$, and finally, «constituent» quarks with mass 300 MeV. Since the quark mass dependence in the production rate for small masses is roughly $\ln(1/m_q)$ due to Eq.(42) and the temperature dependence is roughly T^6 , an upper limit on the rate is one that uses $m_q = 5$ MeV at $T = 300$ MeV. Similarly, a lower limit on the rate is one that uses $m_q = 300$ MeV at the phase transition temperature. Based on the results of Fig.15 where a quark and pion comparison is facilitated, one may conclude that at $T = 200$ MeV the (soft) virtual photon emissivities from competing medium quark versus pionic processes in the mass region $M \lesssim 2m_\pi$ differ by less than a factor of 4. In a different energy regime Kapusta et al. [111] reached the same conclusion while comparing real (energetic) photon emissivities of the QGP to that of hadronic

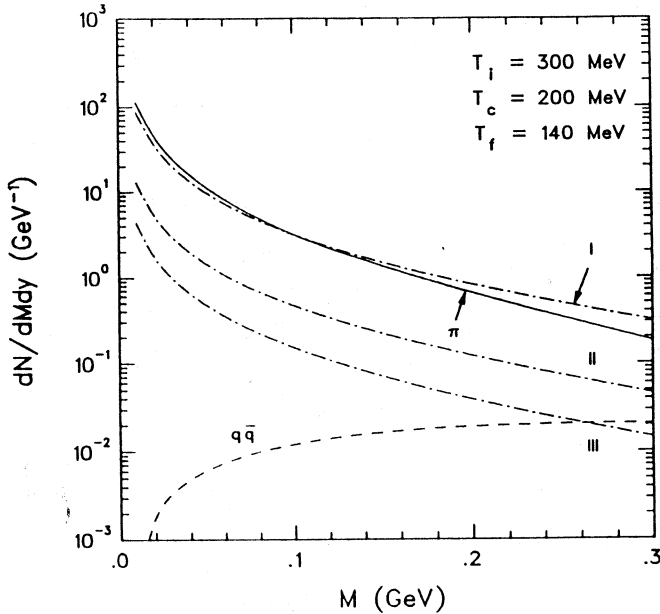


Fig.16. Dielectron yields using $T_i = 300$, $T_c = 200$ and $T_f = 140$ MeV

matter. This equal-luminous property appears also in the annihilation channels $q\bar{q} \rightarrow e^+e^-$ versus $\pi^+\pi^- \rightarrow \rho \rightarrow e^+e^-$ but only after an (invariant mass) integrated total emissivity. In particular, the emissivities $dN^{e^+e^-}/d^4x$ at $T = 200$ MeV for pions, medium quarks, and constituent quarks are approximately $\simeq 2.5$, 1.2 and $\simeq 1.1(\times 10^{-9} \text{ GeV}^4)$, respectively.

In Fig.16 yields are shown. Invariant mass spectra from virtual bremsstrahlung of quarks and pions using relevant temperatures $T_i = 300$, $T_c = 200$ and $T_f = 140$ MeV are shown. For this collection of temperatures the pion cooling phase contribution is the larger contributor to its final spectrum, whereas the mixed phase dominates the resulting quark driven spectrum. The yield from $q\bar{q} \rightarrow \gamma^* \rightarrow e^+e^-$ annihilation in the Born approximation [22,106]. Throughout most of the range of dilepton invariant mass considered, the contribution from pion scattering with virtual bremsstrahlung are two or three orders of magnitude above the $q\bar{q}$ annihilation spectrum. An advantage of this soft-photon approach

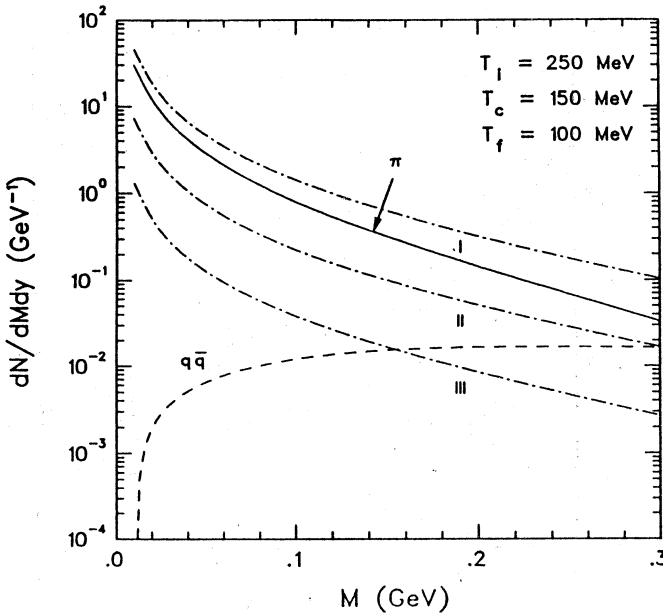


Fig.17. Dielectron yields using $T_i = 250$, $T_c = 150$ and $T_f = 100$ MeV

is that one could easily evaluate the bremsstrahlung contribution at finite q_{\perp} or even impose some cuts in transverse momentum.

Another quite reasonable possibility for the relevant temperatures of the colliding system is $T_i = 250$, $T_c = 150$ and $T_f = 100$ MeV, corresponding to those used in Ref. [106] in a recent study of low-mass dilepton production. In Fig.17 we show results at these temperatures. Finally, for comparison purposes we show in Fig.18 still a different collection of temperatures having the lowest T_c which is compatible with lattice gauge theory data — $T_i = 200$, $T_c = 150$, and $T_f = 140$ MeV. As one can see from Figs. 17—18, the medium quark yield is always lower than the yields from pion scattering with bremsstrahlung. This being true, detection of quark degrees of freedom within this invariant mass region will be difficult in future heavy-ion experiments.

4.3 Single Photon Production. The same formalism can be applied to the calculation of single photon production from a QGP [82,84]. Direct photons from a QGP can arise from three processes: Compton scattering ($qg \rightarrow \gamma q$, $\bar{q}g \rightarrow \bar{q}\gamma$), annihilation processes ($q\bar{q} \rightarrow g\gamma$) and bremsstrahlung (with a quark

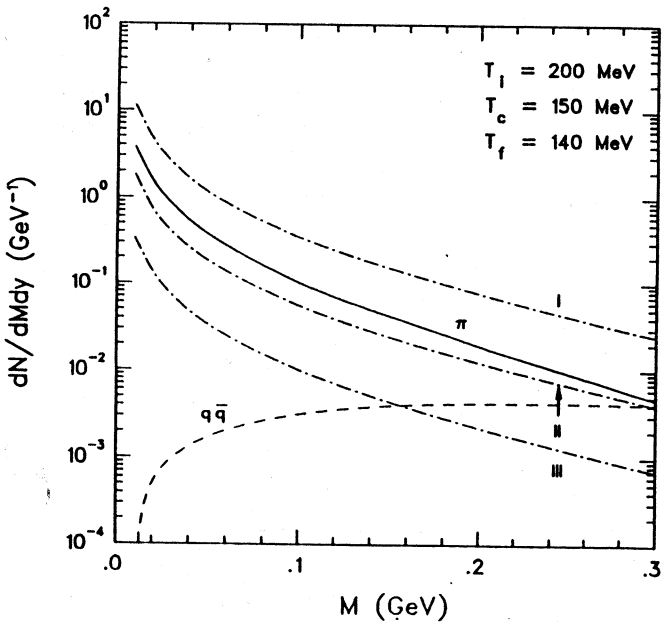


Fig.18. Dielectron yields using $T_i=200$, $T_c=150$ and $T_f=140$ MeV

fragmenting into the photon), see Fig.19. The elementary cross sections for Compton and annihilation processes are [1,112,113]

$$\sigma(gq \rightarrow g\gamma) = \frac{16\pi\alpha_s}{81s} \ln\left(\frac{s}{4m_q^2}\right) \tag{75}$$

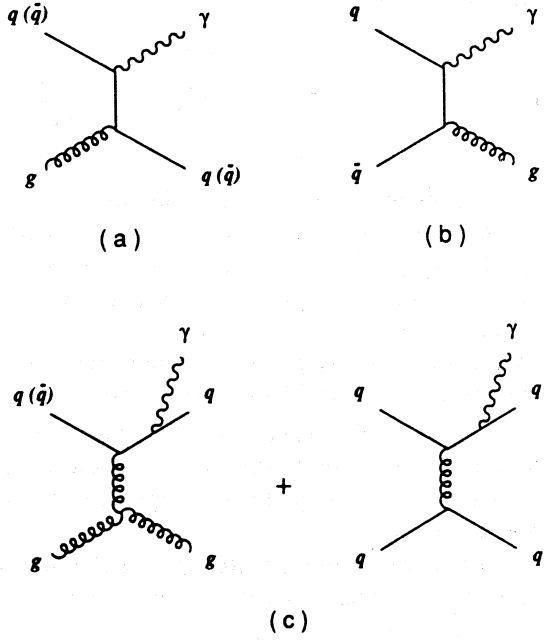
and

$$\sigma(q\bar{q} \rightarrow g\gamma) = \frac{4\pi\alpha_s}{3s} \ln\left(\frac{s}{4m_q^2}\right), \tag{76}$$

where s is the usual Mandelstam variable, m_q is the quark mass and α_s is the strong coupling constant. The production rate of single photons from a QGP was given in Ref. [113] as

$$\frac{d\sigma^\gamma}{d^4x} = \left\{ \frac{\pi\alpha_s}{36} \ln\left(\frac{T}{m_{u,d}}\right) + \frac{\pi\alpha_s}{144} \ln\left(\frac{T}{m_s}\right) \right\} T^4. \tag{77}$$

Fig. 19. Diagrams contributing to photon production: (a) Compton, (b) annihilation, (c) bremsstrahlung



As is well known [114], quark mass singularities may be screened by finite-temperature and finite-size effects. In this case

$$\frac{d\sigma^\gamma}{d^4x} \simeq \frac{5}{144} \ln\left(\frac{1}{\alpha_s}\right) T^4. \tag{78}$$

The integration over the similarity flow can be carried out exactly as before. The result for Compton plus annihilation diagrams is [82].

$$\frac{d\sigma}{dy d^2p_\perp} = \frac{\alpha\alpha_s}{p_\perp^4} \frac{4\sqrt{2\pi} \Gamma(3.5)}{\pi^4} \left[\frac{(R_A + R_B)^2}{R_A R_B} \frac{c}{4a_q} \frac{dN}{dy} \right]^2 \times \ln\left(\frac{2}{\alpha_s}\right) \left\{ P\left(3.5; \frac{p_\perp}{T_c}\right) - P\left(3.5; \frac{p_\perp}{T_i}\right) \right\} \tag{79}$$

where

$$P(3.5; a_c) - P(3.5; a_i) = \frac{1}{\Gamma(3.5)} \int_{a_i}^{a_c} t^{2.5} e^{-t} dt. \quad (80)$$

For the bremsstrahlung contribution, the 3.5 must be changed to 1.5 and the numerical factor in Eq. (79) is therefore, slightly different.

In Ref. [111], the thermal rate in the hadron phase has been computed to the same order as it was computed in the quark-gluon phase. The dominant reactions turned out to be the exact analogs of the QCD reactions, namely annihilation $\pi\pi \rightarrow \rho\gamma$ and Compton $\pi\rho \rightarrow \pi\gamma$ processes. In Ref. [111] the authors also estimated the contribution to the emission rate from the decay processes $\rho \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ and $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$. Other decays one may think of are too slow to contribute a significant amount to the thermal rate, although their contributions to the total yield in a high energy nucleus-nucleus collision may be non-negligible.

4.4. Proton Pair Production in Expanding Hot Hadronic Matter. The production of photon pairs from hadronic matter is mainly due to the elementary processes

$$q + \bar{q} \rightarrow 2\gamma, \quad (81)$$

in the QGP phase and

$$\pi^+ + \pi^- \rightarrow 2\gamma, \quad \pi^0 \rightarrow 2\gamma, \quad (82)$$

in the hadronic gas phase. The number of photon pairs emitted from the element of matter d^4x with invariant mass M , coming from the process in Eq. (81), is given by [115,116,117,118]

$$\frac{dN_{QGP}^{2\gamma}}{d^4x dM} = \frac{1}{(2\pi)^4} (M^2 - 4m_q^2)^{1/2} M^2 T^2 \sigma_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma} (M^2) G_+(T, M^2), \quad (83)$$

with

$$G_+(T, M^2) = \int_{m_q/T}^{\infty} dx (e^x + 1)^{-1} \times \left[\frac{1 + \exp\{-Wx + P[x^2 - (m_q/T)^2]^{1/2}\}}{1 + \exp\{-Wx - P[x^2 - (m_q/T)^2]^{1/2}\}} \right], \quad (84)$$

where

$$W = \frac{M^2}{2m_q^2}, \quad (85)$$

and

$$P = \sqrt{W^2 - 1}. \quad (86)$$

The quark-antiquark annihilation cross section $\sigma_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}(M^2)$ in lowest order perturbation theory reads

$$\begin{aligned} \sigma_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}(M^2) &= 2\pi\alpha^2 N_c (2S + 1)^2 \sum_q \frac{e_q^4}{M^2 - 4m_q^2} \left\{ \left[1 + \frac{4m_q^2}{M^2} - \frac{8m_q^2}{M^2} \right] \times \right. \\ &\times \ln \left| \frac{M^2}{2m_q^2} \left(1 + \left[1 - \frac{4m_q^2}{M^2} \right]^{1/2} \right) - 1 \right| - \left. \left(1 + \frac{4m_q^2}{M^2} \right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{M^2} \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

with $N_c = 3$, spin $S = 1/2$ and quark electric charges e_q . The production rate of photon pairs in the hadron gas has a structure similar to that of Eq. (83). The difference comes from the fact that the pions respect Bose instead of Fermi statistics. Instead of $G_+(T, M^2)$, one has

$$\begin{aligned} G_-(T, M^2) &= \int_{m_\pi/T}^{\infty} dx (e^x - 1)^{-1} \times \\ &\times \ln \left[\frac{1 - \exp \{-Wx - P(x^2 - (m_\pi/T)^2)^{1/2}\}}{1 - \exp \{-Wx + P(x^2 - (m_\pi/T)^2)^{1/2}\}} \right], \quad (87) \end{aligned}$$

where

$$W = \frac{M^2}{2m_\pi^2}, \quad (88)$$

and

$$P = \sqrt{W^2 - 1}. \quad (89)$$

To lowest order in perturbation theory the cross section is [117]

$$\sigma_{\pi^+\pi^-\rightarrow\gamma\gamma}(M^2) = \frac{4\pi\alpha^2}{s-4m_\pi^2} \left[\left(\frac{1+4m_\pi^2}{M^2} \right) \left(\frac{1-4m_\pi^2}{M^2} \right)^{1/2} - 4m_\pi^2 M^2 \left(1 - \frac{2m_\pi^2}{M^2} \right) \ln \left\{ \frac{M^2}{2m_\pi^2} \left(1 + \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{M^2} \right)^{1/2} \right) - 1 \right\} \right].$$

There will also be an additional contributions from π^0 decay into two gammas [117,118]

$$\frac{dN^{\pi^0\rightarrow\gamma\gamma}}{d^4x dM} = \Gamma_{\pi^0\rightarrow\gamma\gamma}(M^2) \frac{M}{\pi^2} \delta(M^2 - m_{\pi^0}^2) \int_{m_{\pi^0}}^{\infty} dE \frac{E\sqrt{E^2 - m_{\pi^0}^2}}{\exp(E/T) - 1},$$

where $\Gamma_{\pi^0\rightarrow\gamma\gamma} = \alpha^2 m_\pi^3 / 32\pi^3 f_\pi$, and the pion decay constant $f_\pi \simeq 0.98 m_{\pi^0}^2$.

Using these formulas and integrating over the system evolution, one can obtain the contributions from QGP and hadronic phases to the diphoton invariant mass spectrum [118].

4.5. Properties of Dilepton Produced in QGP and Hadronic Gas. The formulas derived heretofore make it possible to calculate dilepton and photon spectra from a QGP and an hadronic gas. Now we consider several semi-qualitative characteristics of the behaviour of these spectra, which may serve as thermalized nuclear matter diagnostics. We will discuss only the contributions from QGP and an hadronic gas; the background contributions to dilepton spectra will be discussed later.

Figures 20 and 21 show [22] the various contributions to the $\mu^+\mu^-$ invariant mass distribution $dN/dy dM^2$ for two combinations of initial and critical temperatures, T_i and T_c . Two-pion annihilation generally dominates quark-antiquark annihilation in the mass region $0.4 < M < 2.0$ GeV. This is due to the big peak in the pion form factor and to the relatively long time spent in the pion phase during evolution. The quark-phase contribution breaks through at approximately $M \simeq 2$ GeV due to the fact that quarks annihilate at a higher average temperature than pions.

Recently the thermal production spectra have been calculated for LHC conditions [119]. The result is shown in Figs.22 and 23 for two different initial temperatures corresponding to $\varepsilon_i = 4.6$ GeV/fm³, and approximately twice that

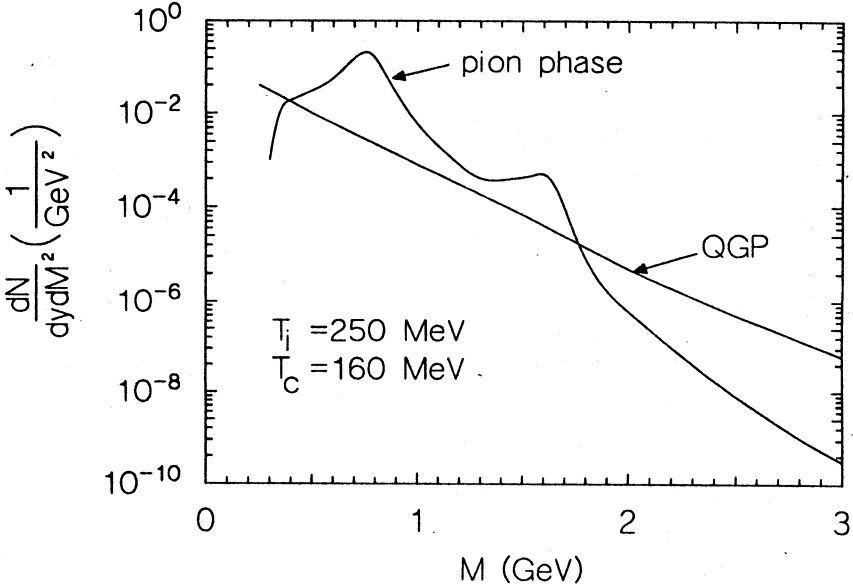


Fig.20. The dilepton mass distribution at central rapidities for Au + Au $\rightarrow \mu^+ \mu^- X$ reactions with various combinations of initial and critical temperatures ($\tau_i = 1 \text{ fm/c}$, $\pi R_A^2 = 127 \text{ fm}^2$, and $T_f = 100 \text{ MeV}$)

density. As we can see, the region of mass $M \lesssim 1.5\text{--}2.0 \text{ GeV}$ is dominated by emission from the hadronic gas. It is clear from Eqs. (32) and (34) that thermal emission time and dilepton mass are correlated. Pairs with largest mass ($M > M_\rho$) are produced at earliest times ($\tau \lesssim 1\text{--}0.1 \text{ fm/c}$), when the temperature assumes its maximum value.

The hadronic dilepton production rates and yields have a peak around $M = m_\rho$ and go to zero at $M = 2m_\pi$. One can expect that the window $2m_e \leq M \leq 2m_\pi$ is dominated by emission from the QGP. In the region of dilepton mass $300 \text{ MeV} \leq M \leq M_\rho$, the contribution from the QGP should show a prominent rise so that the full dilepton spectrum is expected to have a two-peaked structure [81.115]. Figure 24 shows the dilepton mass spectra for three different values of initial temperature as well as the origin of the two-peaked structure.

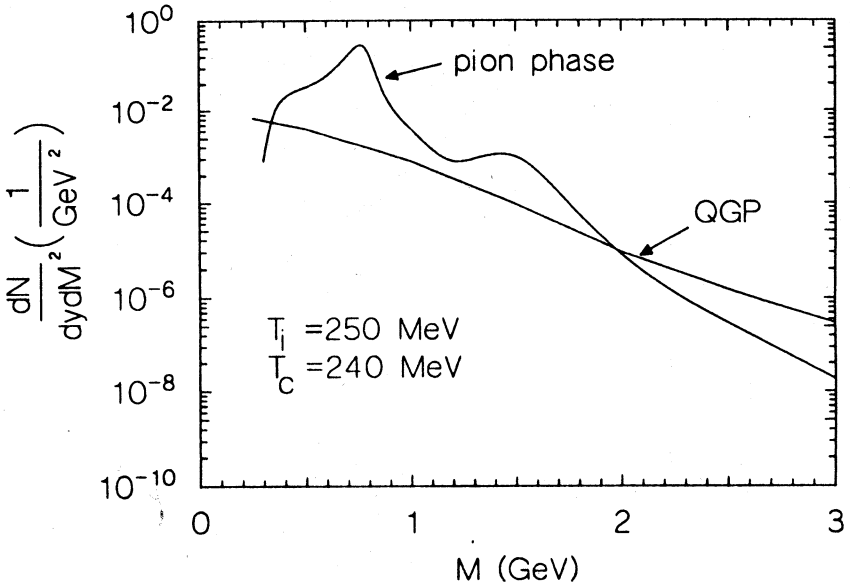


Fig.21. The dilepton mass distribution at central rapidities for Au + Au $\rightarrow \mu^+ \mu^- X$ reactions with various combinations of initial and critical temperatures ($\tau_i = 1$ fm/c, $\pi R_A^2 = 127$ fm², and $T_f = 100$ MeV)

Equation (34) implies that the spectra of dileptons from QGP possesses an $M_{\perp} = [M^2 + p_{\perp}^2]^{1/2}$ -scaling property, i.e., the spectra depend not separately on the variables M and p_{\perp} but on their combination M_{\perp} . Omitting the mixed phase contribution for simplicity, we can express Eq. (34) as

$$\frac{dN}{dM^2 dy d^2 p_{\perp}} = \frac{\alpha^2}{12\pi^4} \left[\frac{e}{4a_q} \frac{dN^{\pi}}{dy} \right]^2 \frac{(R_A + R_B)^2}{\pi R_A^2 R_B^2} f(M_{\perp}, y),$$

where

$$f(M_{\perp}, y) = \int_{-Y}^{+Y} d\chi \left[\int_{T_c}^{T_i} \frac{3dT}{T^7} \exp \left\{ -\frac{M_{\perp} \cosh(y - \chi)}{T} \right\} \right].$$

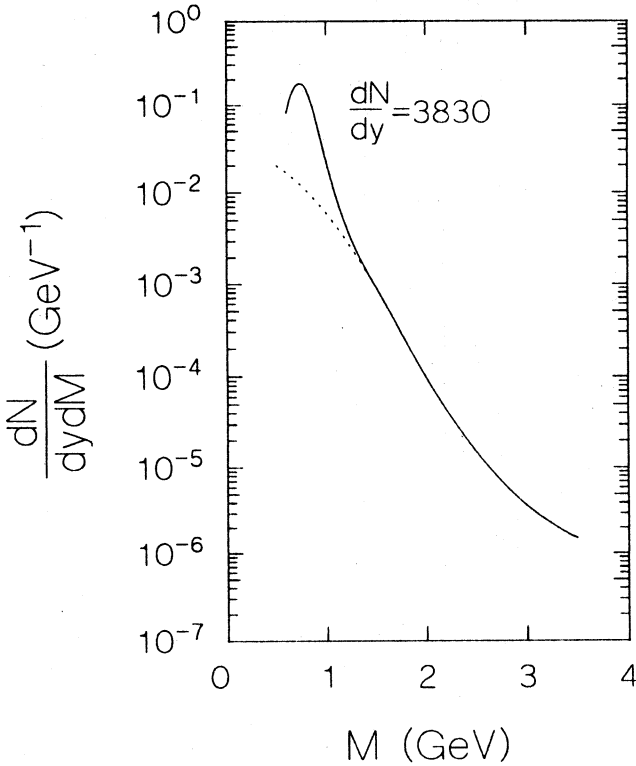


Fig.22. Production rate for thermal dileptons as a function of the dilepton mass M for LHC conditions for multiplicity $dN/dy = 1736$. Solid line is the pion phase contribution and the dotted line is the QGP contribution

So, the distribution of dilepton emission from QGP as a function of M for fixed values of M_{\perp} and y must therefore be nearly constant. Indeed, Fig.25 (taken from Ref.[80]) shows that in the nonresonant region $1.2 \text{ GeV} < M < 2.7 \text{ GeV}$ the dilepton production cross section at fixed M_{\perp} is independent of M . But for the same variation on M_{\perp} , the absolute value of the differential cross section changes by several orders of magnitude! Similarly, the dilepton distribution over p_{\perp} for fixed M_{\perp} and y , must also be constant. On the other hand, the spectrum at fixed M_{\perp} from hadronic plasma is not

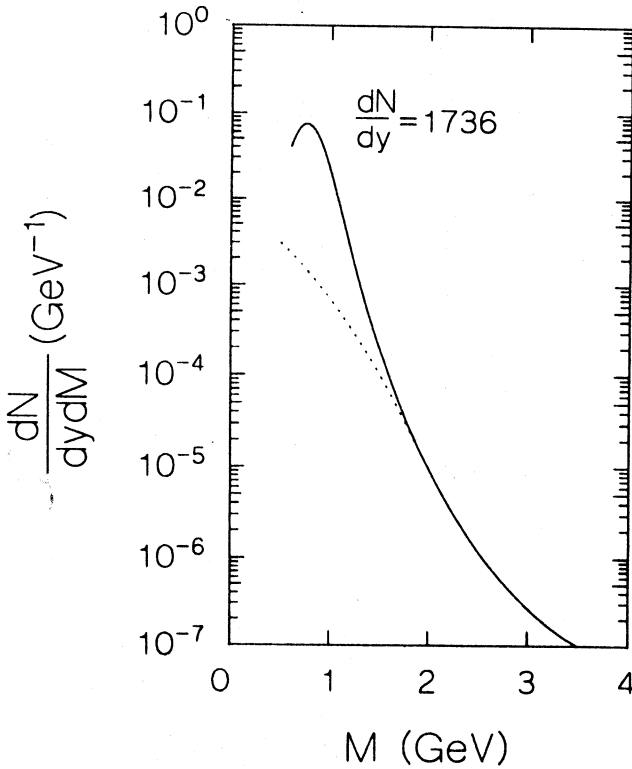


Fig.23. Same as Fig.22 but using a multiplicity $dN/dy = 3830$

constant due to the pion form factor. This fact may help in identification of dilepton production mechanisms in nuclear collisions. We shall discuss this more carefully in the following sections.

Up to now we considered only $\pi^+\pi^-$ annihilation as a source of dileptons from hadronic phase. But hadronic phase contains another particles, which take part in dilepton production [120]. As it was shown in [121], the production rates from reactions that involve axial-vector mesons dominate over contributions from all other reactions, when the dilepton invariant mass is above 1.5 GeV. Recently three-pion reactions in dilepton production from hadron gas have been investigated [122]. As one can expect, the three-pion processes amplify the ω and ϕ peaks in dilepton mass spectrum. The comparison of three-pion reactions with $\pi^+\pi^-$ annihilation shows that it is insufficient to consider only $\pi^+\pi^-$ annihi-

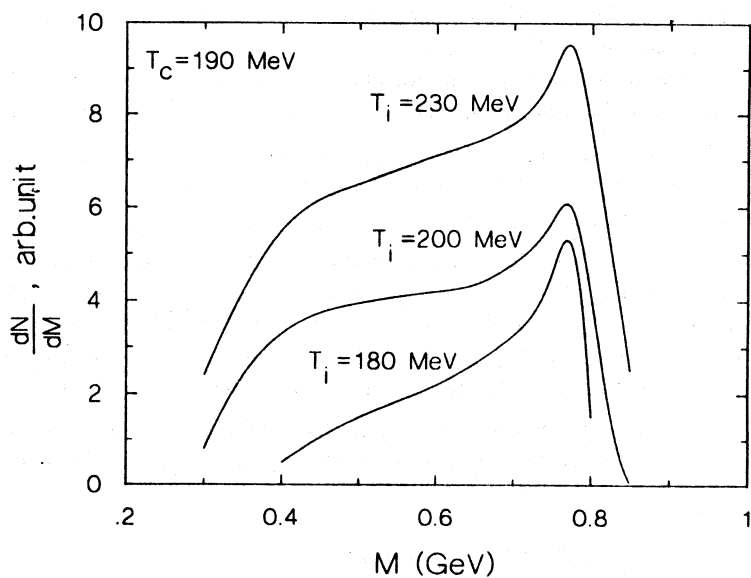


Fig.24. Two-peak structure displayed

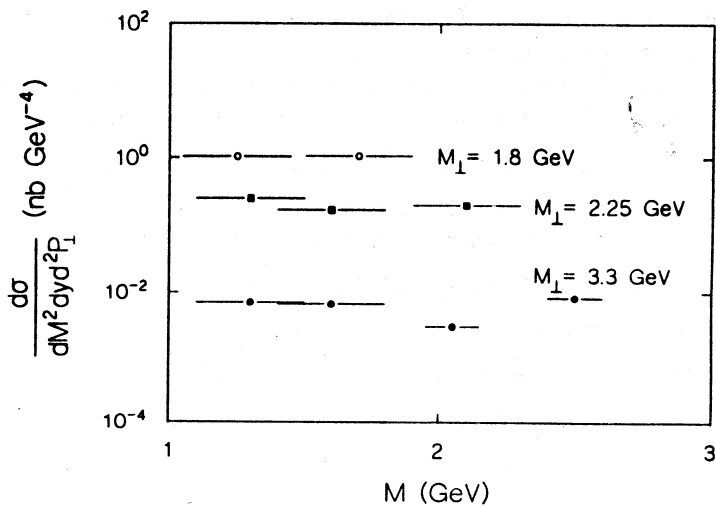


Fig.25. Dilepton production cross-section as a function of mass for three values of transverse mass. Dimuon spectrum is independent of mass if the transverse mass is fixed

lation when calculating dilepton production rate from a hadron gas in the continuum region above the ϕ peak.

4.6. Correlations in Dilepton Spectra. In the derivation of Eqs.(27) and (32), local thermodynamic equilibrium with an initial temperature T_i was assumed to be established in a system of quarks, antiquarks and gluons at a time τ_i . It should be stressed again that the fact of establishing any temperature in QCD is far from being obvious by itself. Indeed, the possibility of finding an associated temperature in the thermodynamical sense (or impossibility of introducing this characteristic) is not efficiently ascertained by QCD dynamics, known well only in the weak coupling region. At this stage, we think it is reasonable to try to solve the problem of thermalization experimentally. Since dileptons and photons are effectively emitted at times close to τ_i (contrary to hadrons), their spectra must be sensitive to the assumption of thermalization. In equilibrium QGP, dilepton production is mainly specified by the Boltzmann factor

$$\exp(-E^*/T_c) \simeq \exp[-(M^2 + P_{\perp}^2 + P_l^{*2})^{1/2}/T_c], \quad (90)$$

which arises from the product of the distribution functions for quarks and antiquarks.

In Eq.(90), $P_l^* = M_{\perp} \sinh Y^*$ is the longitudinal momentum of a dilepton in the plasma rest frame. The Boltzmann factor leads to the following correlation in the spectrum of dileptons produced in equilibrium QGP: the lepton pair distributions over P_{\perp} (over M) become harder with increasing longitudinal dilepton momentum P_l^* observed in the CMS; i.e., the relative part of high values of transverse momenta (masses) increases. Indeed, an analysis of Eq.(90) readily shows that dilepton distributions over P_{\perp} and M are distinct for distinct P_l^* values. In selection of events with high P_l^* values in these distributions, the fraction having high mass and P_{\perp} values increases.

The observed longitudinal momentum of dileptons produced in the QGP model is determined both by the local value of the momentum P_l^* and by the hydrodynamic QGP expansion $P_l = M_{\perp} \sinh(Y^* + \chi)$. For large transverse dilepton mass M_{\perp} , the characteristic «thermal» rapidity value Y^* will be much lower than the values acquired under hydrodynamic expansion. The observed longitudinal momentum P_l will therefore not be related to P_l^* , and thus the «thermal» $P_{\perp} - P_l(M - P_l)$ correlations will be absent. For small M_{\perp} the

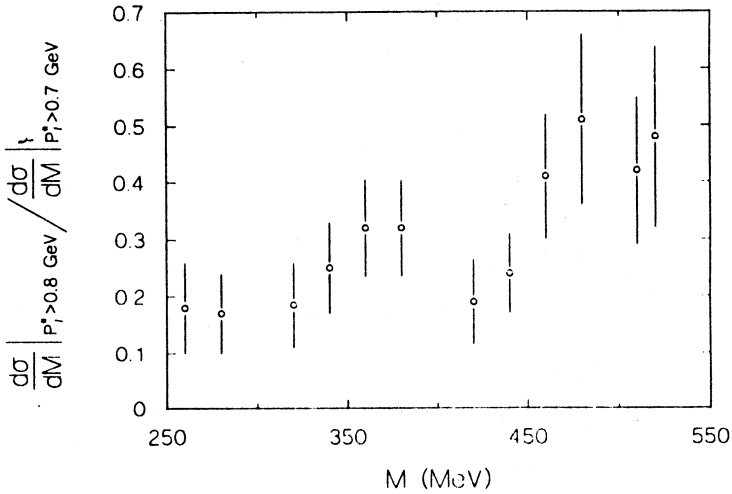


Fig.26. Ratio of dimuon mass spectra measured at different CMS longitudinal momenta P_T^* .

situation is vice versa. In this case, selection of events with large P_T effectively selects dileptons with large P_T^* , and indicated correlations occur. Such $P_T - P_T^*$ correlations are absent in the spectra of dileptons produced in pure hadronic processes [123]. An example of experimentally observed $M - P_T$ correlations may be a difference in the mass distributions of «anomalous» dimuons measured for different values of $x = 2P_T/\sqrt{s}$ [124, 125, 126]. This difference is shown in Fig.26. The part of the events with large mass increases with increasing longitudinal momentum P_T . Such an effect in heavy-ion collisions may be an indication of the existence of local thermodynamic equilibrium.

4.7. Ratio for Dilepton and Pion Spectra. Great progress has been made in the removal of uncertainties in QGP-driven dilepton spectra normalization by concrete bounds on thermalization times τ_i . This process is contingent upon entropy being conserved during the system evolution (section 3). The idea is to construct a τ_i independent quantity from experimentally observed spectra [22, 127, 128]. Integrating over dilepton transverse momenta, we find from Eq.(34) the number of dileptons dN^l/dy produced per unit rapidity. The quantity

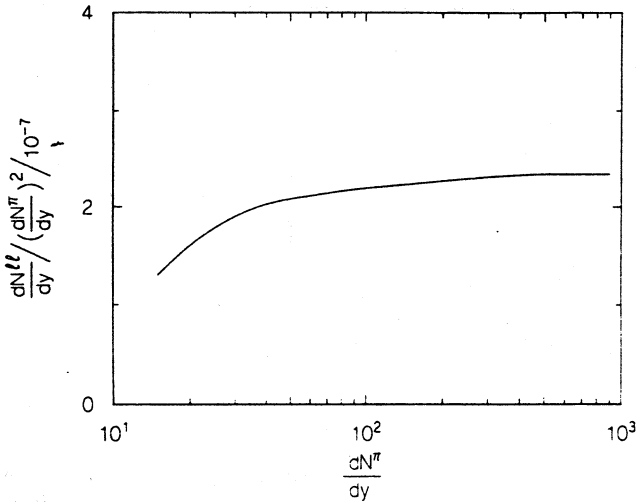


Fig.27. Ratio of dimuon and pion spectra

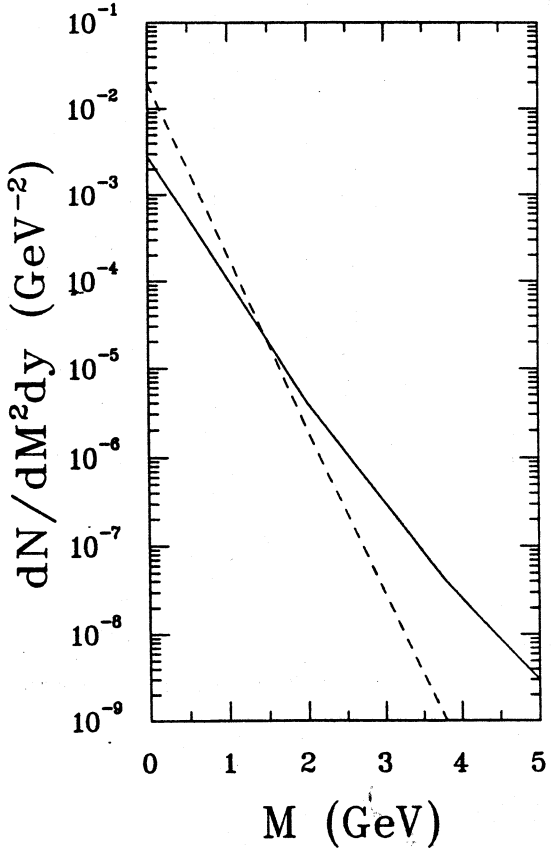
dN^{ll}/dy is proportional to τ_i^2 and to the multiplicity of charged pions dN^π/dy which is in turn proportional to τ_i . Therefore the ratio $(dN^{ll}/dy)/(dN^\pi/dy)^2$ does not depend on τ_i . This ratio is presented in Fig.27 [22].

The ratio turns out to be a monotonically increasing function of dN^π/dy if there exists only a pion phase in the thermalized state. If the initial energy density exceeds the QGP critical value (sections 2 and 3), this ratio goes to a plateau. The plateau height is proportional to the phase transition temperature T_c . The reason can be traced to the evolution of the nuclear matter. The system lives at a higher average temperature as T_c is increased, even though the duration is the same. Of course, the precise height of the plateau is complicated by effects not considered in the Bjorken model. For example, the transverse expansion would reduce the height of the plateau. There is also some sensitivity to the break-up temperature T_f , where pions lose mutual thermal contact.

But in any region of (pion) multiplicity, a measurement of the ratio $(dN^{ll}/dy)/(dN^\pi/dy)^2$ as a function of dN^π/dy seems to be of great importance from the viewpoint of a possible diagnostic of QGP formation in heavy-ion collisions.

4.8. Uncertainties in QGP and Hadron Gas Signals. The uncertainties in the values of τ_i and the initial QGP volume lead to considerable uncertainty in

Fig.28. The invariant mass spectrum of dilepton production from quark-antiquark annihilation during the plasma expansion in Au + Au collisions at 100 + 100 GeV/nucleon, calculated with Bjorken expansion model in «hot-gluon» (solid line) scenario and «standard» (dashed line) scenarios



the estimation of the quark and hadronic phase contributions to the dilepton spectrum. Quite obviously, the quark phase contribution is enhanced for $\tau_i = 0.1$ fm/c, while the hadron phase contribution for $\tau_i \rightarrow 10$ fm/c.

As an illustration, we can again return to Figs.20 and 21. From these figures it is seen that the pion phase dominates over the quark phase in the region $M < 2$ GeV for $\tau_i = 1$ fm/c.

The quark component becomes noticeable for $M \geq 2$ GeV, again because quarks and antiquarks annihilate at higher temperatures than pions. If τ_i approaches 0.5 fm/c, then the quark component starts dominating over the hadronic one in the dilepton spectra for $M < 2$ GeV also. Thus, the exact form of dilepton spectrum cannot be predicted *a priori* for real experiments. Everything is ultimately determined by the relationship between the lifetimes of the two phases.

In section 3 we mentioned a «hot-gluon» scenario of nuclear evolution. Remember, that in this scenario the gluons are thermalized at $\tau_g \simeq 1/2$ fm/c, but quarks have $\tau_q \simeq 2$ fm/c. Figure 28 shows the invariant mass dilepton spectra for «hot-gluon» ($\tau_i = 0.3$ fm/c, $T_i = 460$ MeV) as the solid line and for «standard» scenarios ($\tau_i = 1$ fm/c, $T_i = 240$ MeV) as the dashed line [129]. One can

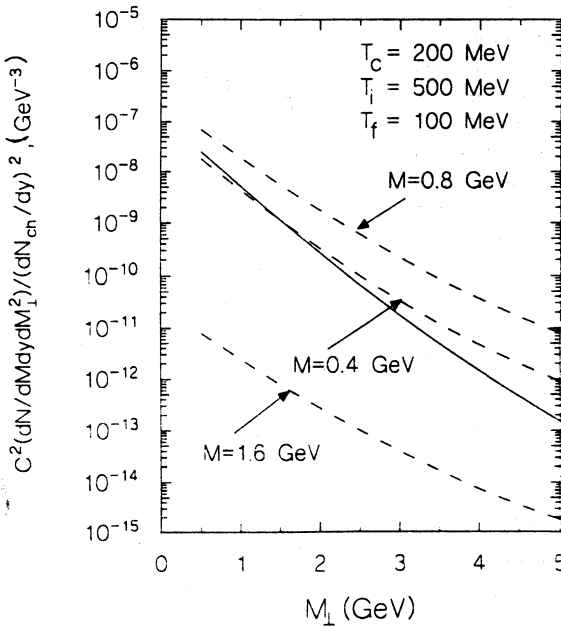


Fig.29. Transverse mass distributions without transverse flow

conclude that in the window $M \simeq 2\text{--}3$ GeV the «hot-glu» scenario leads to a dilepton yield exceeding the «standard» scenario prediction.

So far we discussed only a one-dimensional picture for evolution of the hadronic matter. But really the evolution is one-dimensional only in the QGP phase and the hadron gas as long as T is near T_c . At a temperatures $T \simeq T_f$ the evolution is probably closer to 3-dimensional [130]. The effects of transverse collective flow have been found to be important in the late stages of heavy-ion collisions [84,131,132,133]. Let us consider the dependence of dilepton production rates on the transverse mass of the pair M_\perp and on the transverse flow of the matter. In Fig.29 transverse mass distributions from a calculation without transverse flow are shown [134] separately for the QGP (solid line) and hadron gas contributions at $M = 0.4, 0.8, 1.6$ GeV. As one can see from Fig.29, in the case of no transverse flow, the QGP contribution depends only on M_\perp but not separately on the pair mass M . The hadron contribution has a strong M -dependence from the form factor. It is also clear that the slope of the hadron contribution is much larger than the QGP contribution. Without transverse flow

the steepness of the spectrum directly reflects the temperature of the emitting matter. In Fig.30, curves [134] for the same collection of parameters are shown when transverse flow is included. One concludes that transverse flow does not lead to large quantitative changes in the QGP contribution to dilepton spectra. However the effect of the transverse flow on the hadron contributions is profound in two ways. Firstly, the low M_{\perp} -part of the spectra is very strongly reduced. Secondly, the transverse flow enhances the production of large transverse mass pairs.

Let us return now to photon production. There may be a p_{\perp} window spanning the transverse region from 2 to 4 GeV where thermal photons from the QGP might dominate since decay photons dominate at low p_{\perp} and direct (hard QGP) photons dominate at larger p_{\perp} [135,136,137]. But this conclusion ignores the transverse expansion of hadronic matter during its evolution. It is clear that the transverse expansion of the plasma becomes important in the later stages of the dynamics. The transverse flow effects on high energy photons emitted by expanding QGP were carefully analysed in Ref.[138]. At SPS and RHIC energies, the transverse flow of the hadronic matter is shown to completely close the p_{\perp} -window where photons from the quark matter dominate over those from the hadronic matter. At LHC energies, photons having a p_{\perp} larger than about 4 GeV are shown to have their origin predominantly in the QGP. The location of the p_{\perp} window is very sensitive to the value of the freeze-out temperature T_f . This temperature can in principle be obtained by comparing the dimensions of the system with the mean free path of hadronic matter consisting

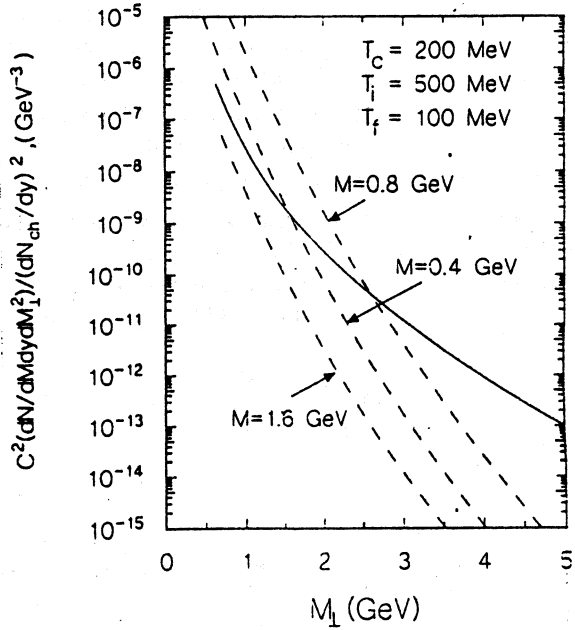


Fig.30. Transverse flow included

of π , ρ , ω and η mesons. As in the case of dilepton production, we expect that the sensitivity of the results on the freeze-out temperature can perhaps be eliminated by adding a contribution from a gas of free-streaming hadrons [88].

Thus, the transverse expansion will generally not influence the production rates calculated in the pure quark and in the mixed phase. The most important changes would be expected when the system reaches the hadronic phase.

4.9. Quark-Gluon Plasma Versus Hadronic Gas: Single Photons. A self-consistent, lowest-order calculation of the real photon emission rate at fixed temperature T , using Braaten and Pisarski resummation techniques [139,140], has recently been carried out [111,141]. The result is

$$\omega \frac{dR}{d^3k} = \frac{\alpha\alpha_s}{3\pi^2} T^2 \exp(-\omega/T) \left[\log \frac{\omega T}{m_\beta^2} + c \right],$$

where

$$m_\beta^2 = \frac{2\pi}{3} \alpha_s T^2, \quad c = 1.62.$$

Applying this to a nucleus-nucleus collision, one folds it at fixed temperature with final state expansion.

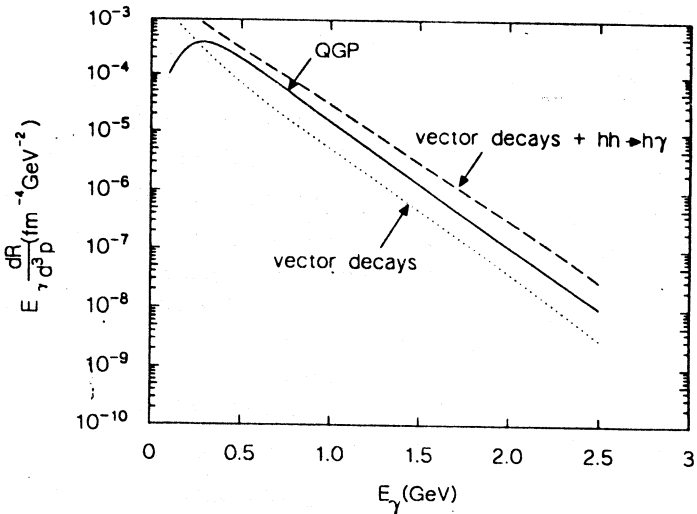
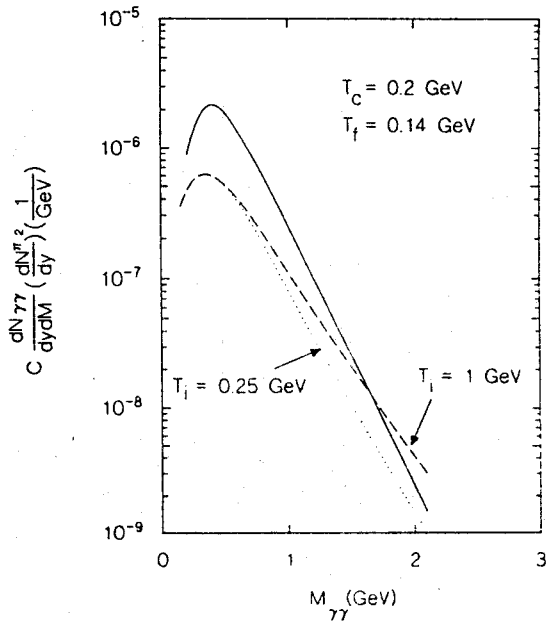


Fig.31. Comparison among photon production from quark-gluon plasma, from vector meson decay and from vector meson decay plus hadron reactions ($T = 200$ MeV)

Fig.32. The $\gamma\gamma$ mass distribution in the QGP (dashed and dotted lines) and hadronic gas (full line) at different T_i , T_c , T_f .



A careful analysis of photon emission from an hadronic gas has been done in Ref.[111]. The dominant contribution comes from the reactions $\pi\pi \rightarrow \rho\gamma$ and $\pi\rho \rightarrow \pi\gamma$; the decays $\omega \rightarrow \pi\gamma$ and $\rho \rightarrow \pi\pi\gamma$ are also important. Photon production rates at $T = 200$ MeV are shown in Fig.31 [111]. As one can see, the quark-gluon plasma and the hadronic gas produce photons with energies from 1 to 3 GeV at roughly the same rate. As was stressed in Ref.[111], not only is the shape of the production curve the same, but so is the overall magnitude. This means the photon spectrum is a good «thermometer» in heavy-ion collisions, but any temperature deduced from the thermally produced photons is nearly independent of assumptions about the phase of the matter [142]. If the QGP-hadron phase transition is first order, nuclear matter spends a long time at $T = T_c$ and consequently, most thermally produced photon will come from nuclear matter at T_c . This would allow us to determine T_c .

Based on the results of Ref.[111], it does not seem likely that photons with energies of 1 to 3 GeV will allow for distinguishing quark from pion degrees of freedom.

Based on the results of Ref.[111], it does not seem likely that photons with energies of 1 to 3 GeV will allow for distinguishing quark from pion degrees of freedom.

4.10. Photon Interferometry. The disadvantage of diphotons is that, as we have already seen, the cross sections for these processes are much lower than for single photon production. Indeed, the processes $q + \bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ and $\pi^+\pi^- \rightarrow \gamma\gamma$ are suppressed relative to the processes $gq \rightarrow q\gamma$, $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$ for single proton production by a factor $\alpha = 1/137$. But these are important channels to consider in QGP diagnostics. Figures 32 and 33 show [118] the separate contributions to the diphoton spectrum coming from pions and from quark-antiquark annihilation at different values T_i , T_c , T_f . In the low-invariant mass region $M < 1.5$ GeV the

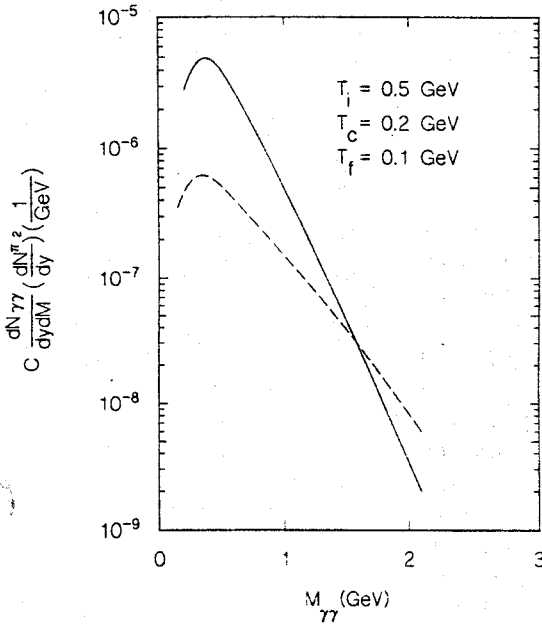


Fig.33. Same as Fig.32 but for different temperatures

hadron contribution dominates diphoton production completely, even for rather large initial temperature $T_i \simeq 1 \text{ GeV}$. For relatively low T_i the hadronic gas dominance is shifted to a higher value of M . For $T_i = 250 \text{ MeV}$ (even for $M = 4 \text{ GeV}$) the QGP contribution is only about factor of 2 larger than the hadronic gas. When the initial temperature increases to 1 GeV (still at $M = 4 \text{ GeV}$) the QGP contribution is already 3 orders of magnitude larger than pion gas.

The interesting possibility of probing the dynamics of quarks and gluons in a high energy nucleus-nucleus collisions using diphoton data has been noted in Ref.[86]. This method is based on two-photon intensity interferometry[143]. The correlation function between two photons with momenta \vec{k}_1 and \vec{k}_2 with the same helicity is

$$C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{P(\vec{k}_1, \vec{k}_2)}{P(\vec{k}_1)P(\vec{k}_2)}, \quad (91)$$

where

$$P(\vec{k}) = \int d^4x \frac{dN(x, \vec{k})}{d^4x d^3\vec{k}},$$

$$P(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{dN(x_1, \vec{k}_1)}{d^4x_1 d^3\vec{k}_1} \frac{dN(x_2, \vec{k}_2)}{d^4x_2 d^3\vec{k}_2} [1 + \cos(\Delta k \Delta x)] \quad (92)$$

and $dN(x, \vec{k})/d^4x d^3\vec{k}$ is the rate per unit volume for producing a photon with momentum \vec{k} at the space-time point x . The thermal emission rate of photons has been studied in Ref.[111]. It was found that the rates in the hadronic and plasma phases are the same when compared at the same temperature T

$$E \frac{dN}{d^4x d^3\vec{k}} = K_0 T^2 \ln \left(\frac{2.9E}{g^2 T} + 1 \right) \exp \left(-\frac{E}{T} \right), \quad (93)$$

where E is the photon energy, g is the QGP coupling constant, and K_0 is a constant which is irrelevant to the correlation function. In Bjorken model of evolution, with photon momenta $k_{1T} = k_{2T} = k_T$ and rapidities $y_1 = y_2$, the correlation function is [86]

$$C(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = 1 + \left[\frac{2J_1(q_T R)}{q_T R} \right]^2, \quad (94)$$

where $q_T = k_T (\cos \psi_1 - \cos \psi_2)$ and ψ_1 and ψ_2 are the azimuthal angles of the photons. It is clear, that this photon configuration allows us to infer the radius R of the emitting system. Figures 34, 35 and 36 show [86] the correlation functions from the plasma, mixed and hadronic phases separately. The numbers next to the curves denote the individual photon transverse momentum in GeV/c. The correlation functions oscillate with varying Δy scale. But the Δy period is larger for the plasma by an order of magnitude over that the mixed or hadronic phases. Physically this means that the time scale in the plasma is much shorter than the time scale in the mixed or hadronic phases. So, with this configuration for the photons, the correlation

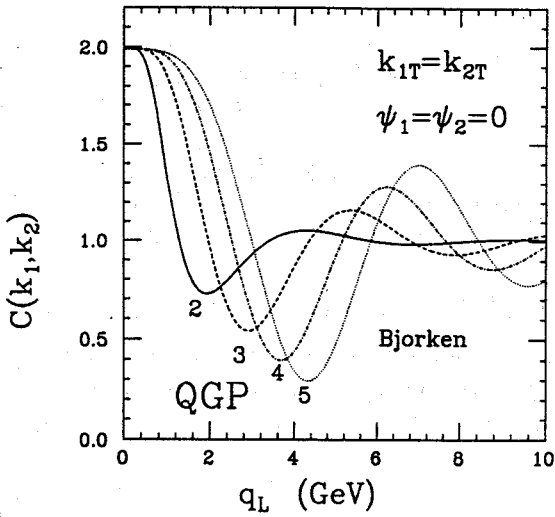


Fig.34. Correlation function at RHIC energy from the QGP phase. The numbers 2, 3, 4 and 5 indicate the transverse momentum of a single photon in GeV/c

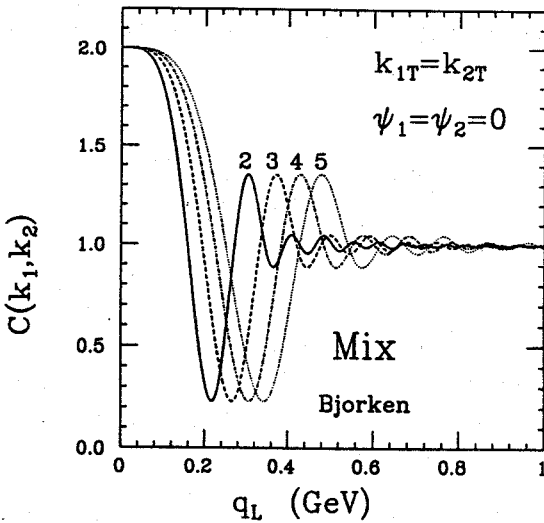
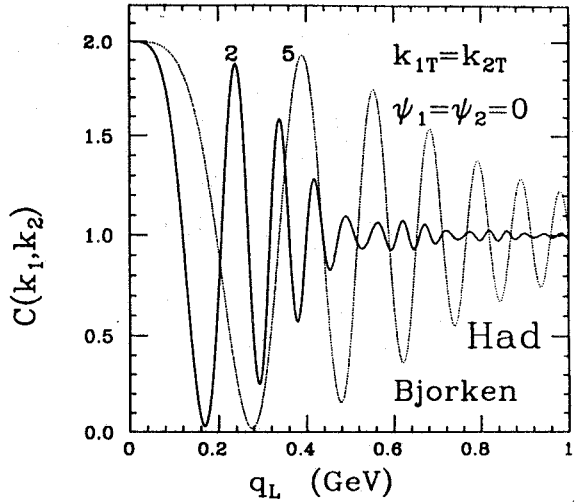


Fig.35. Correlation function at RHIC energy from the mixed phase and hadronic phase are added together

Fig.36. Correlation function at LHC energy for hadronic phase



function $C(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ is probing the temporal scale of the emitting source. Of course, the background from π_0 and η decays might destroy the beautiful tool of photon interferometry. It is also not clear whether the transverse expansion of matter in the mixed and final (hadronic) phases was small enough so that soft photons would not be boosted to high transverse momentum — different models [144,145] give the different answers — but there is no doubt that the method of intensity interferometry may give information about the space-time dynamics of quark and gluons in heavy-ion collisions.

4.11. Combinations of Dilepton, Photon, and Diphoton Spectra. Dilepton, photon and diphoton spectra depend on the (not so accurately known) thermalization time τ_i and on the initial volume. One way to circumvent this problem is to construct τ_i independent quantities from experimentally observed spectra $dN^{\mu\mu^-}/dM^2 dy d^2q_{\perp}$, $dN^{\gamma}/dy d^2p_{\perp}$ and $dN^{\gamma\gamma}/dM dy d^2p_{\perp}$.

In Fig.(37) [84], we show a plot of the ratio

$$R = \frac{dN^{\mu^+\mu^-}}{dM^2 dy d^2p_{\perp}} / \frac{dN^{\gamma}}{dy d^2p_{\perp}} \quad (95)$$

for various values of T_i (in units of T_c) as a function of transverse mass M_{\perp} . This ratio turns out to be independent of the mixed phase beyond

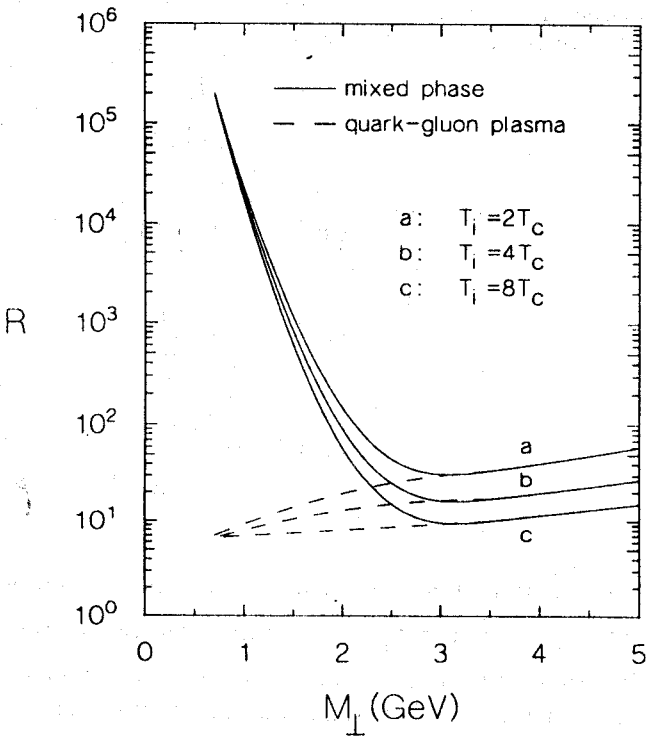


Fig.37. The ratio $\mu^+\mu^-/\gamma$ as a function of the initial temperatures ($M_{\perp} = q_{\perp}$ for photons)

$M_{\perp} \simeq 2$ GeV, saturating to a constant value for $T_i > 8T_c$. In Fig.38 [84,146] we plot the ratio

$$\frac{dN^{\mu^+\mu^-}}{dM^2 dy d^2 p_{\perp}} / \frac{dN^{\gamma\gamma}}{dM^2 dy d^2 p_{\perp}} \tag{96}$$

as a function of mass for fixed dilepton and diphoton transverse momenta. The ratio is rather insensitive to p_{\perp} , reflecting the fact that the production processes for $\mu^+\mu^-$ and $\gamma\gamma$ are similar [84]. The ratio is independent of M beyond $M \simeq 10T_c$ ($\simeq 2$ GeV) and the dip corresponds to the sharp increase in e^+e^- cross section due to ρ -peak.

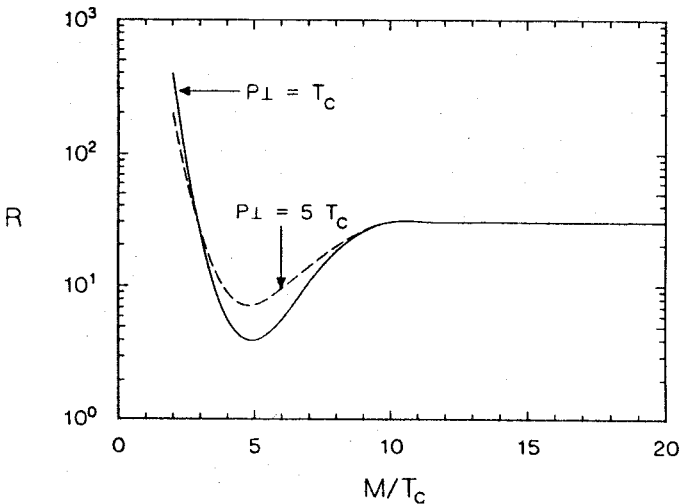


Fig.38. The ratio $\mu^+\mu^-/\gamma\gamma$ as a function of mass for transversely expanding QGP and hadronic gas

5. CONCLUSION

Dileptons and photons provide natural tools for observing high density nuclear matter, which one can form in relativistic heavy-ion collisions. Once produced, dileptons and photons hardly interact and collide infrequently, if at all, with hadrons in a region of hot and dense matter. Therefore, photons and lepton pairs are among the best carriers of information about the earliest stages of the heavy-ion collision. As we discussed in this review, they can carry information about the temperature of the primordial state. Such primordial states in high energy heavy-ion collisions could be equilibrium or non-equilibrium quark-gluon plasma, high density hadronic gas. That there are many competing sources of photons and dileptons both before and after the hot stage of the collision makes reconstruction of the hottest state very difficult. The best that one can do is to evaluate the contribution from each to ascertain whether or not it is dominant in some part of the phase space or if it has distinct properties rendering separation feasible. We tried to follow to this prescription in this paper. It is not clear that the first generation of CERN experiments has been able to produce quark-gluon plasma. However from the observed pion multiplicity of the order of a few hundreds, it is clear that these collisions are able to produce macroscopic drops of hot hadronic matter mainly made of pions in the temperature range 100–200 MeV. As we discussed in this review,

ρ , ϕ , J/ψ change its properties in hot nuclear matter. CERN experiments have shown that indeed these mesons change its properties in heavy-ion collisions. The modification of mesons properties were observed in its dilepton decay channel. The future experiments at RHIC and LHC to measure the dilepton and photon spectrum provide good and probably the only opportunity to verify experimentally the predicted properties of mesons in dense nuclear matter and clarify the nature of primordial state in heavy-ion collisions.

References

1. Shuryak E. — Phys. Reports, 1980, vol.67, p.71; Shuryak E. — Phys. Reports, 1984, vol.115, p.153.
2. Fermi E. — Progress in Theoretical Physics, 1950, vol.5, p.570.
3. Pomeranchuk I. — Doklady Akad. Nauk SSSR, 1951, vol.78, p.889.
4. Landau L. — Izvestija AN SSSR Ser. Fiz., 1953, vol.17, p.51; Collected Papers of Landau, Gordon and Breach, 1965, No.4.
5. Polyakov A. — Phys. Lett., 1979, vol.B82, p.247.
6. Susskind L. — Phys. Rev., 1979, vol.D20, p.2610.
7. Engels J. et al. — Nucl. Phys., 1982, vol.B205, p.595.
8. Morley P., Kislinger M. — Phys. Reports, 1979, vol.51, p.65.
9. Bjorken J. — Phys. Rev., 1983, vol.D27, p.140.
10. Hwa R., Kajantie K. — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.56, p.696.
11. Koch P., Müller B., Rafelski J. — Phys. Reports, 1986, vol.142, p.1.
12. Lee K., Rhoades-Brown M., Heinz U. — Phys. Rev., 1988, vol.C37, p.1452.
13. Eggers H., Rafelski J. — GSI Preprint GSI-90-37, 1990.
14. Van Hove L. — Phys. Lett., 1982, vol.B118, p.138.
15. Greiner C., Koch P., Stöcker H. — Phys. Rev. Lett., 1987, vol.58, p.1825.
16. Feinberg E. — Proc. Kiev Conf. in High Energy Physics, 1959, vol.2.
17. Feinberg E. — Nuovo Cimento, 1976, vol.A34, p.39.
18. Shuryak E. — Sov. J. Nucl. Phys., 1978, vol.28, p.408.
19. Domokos G., Goldman T. — Phys. Rev., 1981, vol.D23, p.203.
20. Hwa R., Kajantie K. — Phys. Rev., 1985, vol.D32, p.1109.
21. McLerran L., Toimela T. — Phys. Rev., 1985, vol.D31, p.545.
22. Kajantie K. et al. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.2746.
23. Braaten E., Pisarski R., Yuan T. — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.64, p.2242.
24. Ruuskanen P. — Nucl. Phys., 1990, vol.A525, p.255.
25. Gale C., Kapusta J. — Phys. Rev., 1987, vol.C35, p.2107.
26. Xiong L. et al. — Nucl. Phys., 1990, vol.A512, p.772.

27. Cassing W. et al. — Phys. Reports, 1990, vol.188, p.363.
28. Wilson K. — Phys. Rev., 1974, vol.D10, p.2445.
29. Creutz M. — Phys. Rev., 1980, vol.D21, p.1006.
30. Creutz M. — Quarks, Gluons and Lattices, Cambridge Univ. Press, 1983.
31. Toussaint D. — Preprint AZPH-TH/91-33.
32. Fukugita M., Ukawa U. — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.57, p.503.
33. Karsch F. et al. — Phys. Lett., 1986, vol.B188, p.353.
34. Gottlieb S. et al. — Phys. Rev., 1987, vol.D35, p.3972.
35. Brown F. et al. — Phys. Lett., 1990, vol.B251, p.181.
36. Fukugita M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.65, p.816.
37. Kogut J., Sinclair D. — Phys. Lett., 1989, vol.B229, p.807.
38. Brown F. et al. — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.65, p.2491.
39. Pisarski R., Wilczek F. — Phys. Rev., 1984, vol.D29, p.338.
40. Gottlieb S. et al. — Phys. Lett., 1987, vol.59, p.1513.
41. Gottlieb S. et al. Phys. Rev., 1990, vol.D41, p.622.
42. Bitar K. et al. — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.65, p.2106.
43. Grady M., Kogut J., Sinclair D. — Phys. Lett., 1988, vol.B200, p.149.
44. Gavai R. et al. — Phys. Lett., 1990, vol.B241, p.567.
45. Emel'yanov V., Nikitin Yu., Vanyashin A. — Fortschritte der Phys. 1990, vol.38, p.1.
46. Satz H. — Preprint CERN-TH-6216/91.
47. Karsch F., Wyld H. — Phys. Lett., 1988, vol.B213, p.505.
48. Engles T. et al. — Bielefeld Preprint BI-TH-29/90, 1990
49. Petersson B. — Bielefeld Preprint BI-TP-90/28, 1990.
50. De Tar C., Kogut J. — Phys. Rev. Lett., 1987, vol.59, p.399.
51. Irbäck A. — Bielefeld Preprint BI-TP-90/44, 1990.
52. Sumiyoshi H. et al. — Z. Phys., 1984, vol.C23, p.391.
53. Van Hove L. — Z. Phys., 1983, vol.C21, p.93.
54. Cerny V., Lichard P., Pisut J. — Phys. Rev., 1977, vol.D16, p.2822.
55. Cerny V., Lichard P., Pisut J. — Phys. Rev., 1978, vol.D18, p.2409.
56. Cerny V., Lichard P., Pisut J. — Phys. Rev., 1979, vol.D20, p.699.
57. Kajantie K., Matsui T. — Phys. Lett., 1985, vol.B164, p.373.
58. Baym G. — Phys. Lett., 1984, vol.B138, p.18.
59. Geiger K., Müller B. — Nucl. Phys., 1992, vol.B369, p.600.
60. Geiger K. — Phys. Rev., 1992, vol.D46, p.4965.
61. Geiger K. — Phys. Rev., 1992, vol.D46, p.4986.
62. Shuryak E. — Phys. Rev. Lett., 1992, vol.68, p.3270.
63. Satz H. — Nucl. Phys., 1992, vol.A544, p.371c.

64. **Capella A.** — Nucl. Phys., 1991, vol.A525, p.133c.
65. **Sakharov A.D.** — Sov. JETP Lett., 1967, vol.5, p.32.
66. **Chodos A. et al.** — Phys. Rev., 1974, vol.D9, p.3473.
67. **Letessier J., Tounsi T.** — Phys. Rev., 1989, vol.D40, p.2914.
68. **Gorenstein M., Zinovjev G., Lipskikh S.** — Z. Phys., 1984, vol.C22, p.189.
69. **Landau L.** — Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. fiz., 1953, vol.17, p.51.
70. **McLerran L.** — Phys. Reports, 1982, vol.88, p.379.
71. **Carruthers P.** — Annals of Physics, 1974, vol.229, p.91.
72. **Anishetty R. et al.** — Phys. Rev., 1980, vol.D22, p.2793.
73. **Milekhin G.** — In.: Proc. Int. Cosmic Ray Conf., Moscow, 1959, vol.1, p.220.
74. **Chin C. et al.** — Phys. Rev., 1975, vol.D12, p.902.
75. **Satz H.** — In: Proc. of 1st Meeting on Heavy-Ion Physics at LHC, Geneva, February, 1991.
76. **Danielewicz P., Gyulassy M.** — Phys. Rev., 1985, vol.D31, p.53.
77. **Hosoya A. et al.** — Annals of Physics, 1984, vol.154, p.229.
78. **Chu M.** — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.2764.
79. **Biagini M.E., Dubnicka S., Etim E., Kolar P.** — Nuovo Cimento, 1991, vol.A104, p.363.
80. **Zhirov O.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1979, vol.30, p.1098.
81. **Domokos G., Goldman J.** — Phys. Rev., 1981, vol.D23, p.203.
82. **Hwa R., Kajantie K.** — Phys. Rev., 1986, vol.D32, p.1109.
83. **Masarik J., Pisutova N., Pisut J.** — Phys. Lett., 1991, vol.B254, p.474.
84. **Raha S., Sinha B.** — Int. Journal of Mod. Phys., 1991, vol.A6, p.517.
85. **Csernai L., Kapusta J.** — Phys. Rev. Lett., 1992, vol.69, p.737.
86. **Srivastava D., Kapusta J.** — Preprint TPI-MINN-93/8-T.
87. **Kapusta J., Lichard P.** — Phys. Rev., 1989, vol.C40, p.R1574.
88. **Kapusta J., McLerran L., Srivastava D.** — Phys. Lett., 1992, vol.B283, p.145.
89. **Altherr T., Aurech P., Becherrawy T.** — Nucl. Phys., 1989, vol.B315, p.436.
90. **Altherr T., Becherrawy T.** — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.174.
91. **Baier R., Pire B., Schiff D.** — Phys. Rev., 1988, vol.D38, p.2814.
92. **Braaten E., Pisarski R., Yuan T.** — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.64, p.2242.
93. **Altherr T., Russkanen P.** — Preprint JYFT 7/92.
94. **Landau L., Pomeranchuk I.** — Dokl. Acad. Nauk SSSR, 1953, vol.92, p.535; 1953, vol.92, p.735.
95. **Schafer M. et al.** — Phys. Lett., 1989, vol.B221, p.1.
96. **Haglin K., Kapusta J., Gale C.** — Phys. Lett., 1989, vol.B224, p.433; **Haglin K.L.** — Annals of Physics, 1991, vol.212, p.84.
97. **Ruckl R.** — Phys. Lett., 1976, vol.B64, p.39.

98. Gale C., Kapusta J. — Phys. Rev., 1988, vol.C38, p.2659.
99. Wolf G. et al. — Nucl. Phys., 1990, vol.A517, p.615.
100. Low F.E. — Phys. Rev., 1958, vol.110, p.974.
101. Haglin K., Gale C., Emel'yanov V. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.973.
102. Byckling E., Kajantie K. — Particle Kinematics, Wiley, New York, 1973, p.23.
103. Haglin K., Gale C., Emel'yanov V. — Phys. Rev., 1992, vol.D47, p.4082.
104. Gale C., Kapusta J. — Phys. Rev., 1989, vol.C40, p.2397.
105. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1966, vol.17, p.616.
106. Cleymans J., Redlich K., Satz H. — Z. Phys., 1991, vol.C53, p.517.
107. Cleymans J., Goloviznin V.V., Redlich K. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.989.
108. Leader J., Predazzi E. — An Introduction to Gauge Theories and the «New Physics», Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982.
109. Danielewicz P., Gyulassy M. — Phys. Rev., 1985, vol.D31, p.53.
110. DeGrand T., Toussaint D. — Phys. Rev., 1982, vol.D25, p.526.
111. Kapusta J., Lichard P., Seibert D. — Phys. Rev., 1991, vol.D44, p.2774; Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.4171(E).
112. Sinha B. — Nucl. Phys., 1986, vol.A459, p.717.
113. Sinha B. — Phys. Lett., 1983, vol.B128, p.91.
114. Kajantie K. et al. — Nucl. Phys., 1983, vol.B222, p.152.
115. Chin S.A. — Phys. Lett., 1982, vol.B119, p.51.
116. Domokos G. — Phys. Rev., 1983, vol.D28, p.123.
117. Yoshida R. et al. — Phys. Rev., 1987, vol.D35, p.388.
118. Redlich K. — Phys. Rev., 1987, vol.D36, p.3378.
119. Ruuskanen P. — Nucl. Phys., 1991, vol.A525, p.255c.
120. Gale C., Lichard P. — Phys. Rev., 1994, vol.D49, p.3348.
121. Song C., Ko C.M., Gale C. — Phys. Rev., 1994, vol.D50, p.R1827.
122. Lichard P. — Phys. Rev., 1994, vol.D49, p.5812.
123. Fassler M. — Preprint CERN-EP/86-102.
124. Haber B. et al. Phys. Rev., 1980, vol.D22, p.2107.
125. Andersson K. et al. — Phys. Rev. Lett., 1976, vol.36, p.237.
126. Blokus D. et al. — Nucl. Phys., 1982, vol.B201, p.205.
127. Kampfner B., Gorenstein M., Pavlenko O. — Z. Phys., 1990, vol.C45, p.491.
128. Kampfner B., Pavlenko O. — Phys. Lett., 1991, vol.B255, p.503.
129. Shuryak E., Xiong L. — Phys. Rev. Lett., 1993, vol.70, p.2241.
130. Landau L., Lifshitz E. — Fluid Mechanics, Pergamon Press, Oxford, 1959.
131. Von Gersdorf H. et al. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.794.
132. Kajantie K. et al. — Phys. Rev., 1986, vol.D34, p.811.
133. Letessier J., Tounsi A. — Phys. Rev., 1989, vol.D40, p.2914.

134. **Kataja M. et al.** — Preprint JYFL 1/92.
135. **Sinha B.** — Phys. Lett., 1983, vol.B128, p.91.
136. **Hwa R., Kajantie K.** — Phys. Rev., 1985, vol.D32, p.1109.
137. **Srivastava D., Sinha B.** — J. Phys., 1992, vol.G18, p.1467.
138. **Alam J., Srivastava D., Sinha B., Basu D.** — Phys. Rev., 1993, vol.D48, p.1117.
139. **Braaten E., Pisarski R.** — Phys. Rev. Lett., 1990, vol.64, p.1338.
140. **Braaten E., Pisarski R.** — Nucl. Phys., 1990, vol.B337, p.569.
141. **Baier R. et al.** — Preprint BI-TP 91/15, May 1991.
142. **Seibert D., Mishra V., Fai G.** — Phys. Rev., 1992, vol.C46, p.330.
143. **Hanbury Brown R.** — The Intensity Interferometry, Taylor&Francis, 1974.
144. **Kajantie K. et al.** — Phys. Rev., 1987, vol.D34, p.2153.
145. **Bertsch G. et al.** — Phys. Rev., 1989, vol.D37, p.1202.
146. **Datta B., Raha S., Sinha B.** — Nucl. Phys., 1988, vol.A490, p.733.

КАЛИБРОВОЧНЫЕ УСЛОВИЯ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Л.В.Прохоров

Научно-исследовательский институт физики
Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург

В обзоре обсуждаются принципиальные вопросы устранения произвола в калибровочных теориях. Подчеркивается роль расширенной по Дираку калибровочной группы и важность требования лишь слабой калибровочной инвариантности физических величин. В квантовых теориях отмечается принципиальное различие между динамическими и нединамическими калибровками. Главным образом на примере электродинамики наиболее популярные калибровки анализируются с точки зрения роли, отводимой физическим степеням свободы. Выяснена ключевая роль калибровки Фока. Подробно рассмотрены простейшие квантово-механические модели, иллюстрирующие некоторые утверждения, касающиеся полевых систем. Обсуждаются различные типы калибровочных преобразований и их физический смысл, подчеркнута принципиальная разница между локальными и глобальными преобразованиями.

The principal problems of gauge fixation in field theories and mechanical models are discussed. It is stressed the importance of the Dirac extended gauge group and of the weak gauge invariance of the physical quantities. The importance of distinguishing of dynamical gauges from nondynamical ones is pointed out. Mainly in electrodynamics the role of the physical degrees of freedom in some popular gauges is analysed. It is shown the key role of the Fock gauge. The principal difference between local and global gauge transformations and their physical sense is elucidated. Some mechanical models are investigated in detail.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Калибровочная инвариантность. Все известные взаимодействия полей — сильное, электромагнитное, слабое, гравитационное — обладают свойством локальной калибровочной инвариантности. Следовательно, принцип калибровочной инвариантности есть фундаментальный принцип физики. Он заключается в утверждении, что фундаментальные поля, фигурирующие в лагранжиане, допускают преобразования с произвольными функциями координат и времени x , не меняющими лагранжиан (действие).

В случае электромагнитного поля, описываемого вектор-потенциалом $A_\mu(x)$ [1], это хорошо известные градиентные преобразования*

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \psi \rightarrow e^{ie\Lambda} \psi, \quad \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right), \quad (1.1)$$

где $\Lambda = \Lambda(x)$ — произвольная скалярная функция, $\psi = \psi(x)$ — заряженное поле, e — электрический заряд. В случае полей Янга — Миллса [3—5], описываемых векторными потенциалами A_μ со значениями из алгебры Ли некоторой полупростой группы G , это преобразования вида

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig} U \partial_\mu U^{-1}, \quad \psi \rightarrow U\psi, \quad (1.2)$$

где $U = U(x)$ есть элемент неабелевой калибровочной группы, ψ — «поле материи». Так преобразуются глюонные поля и поля кварков ($G = SU(3)_c$, сильное взаимодействие [6—8]), а также бозонные и фермионные поля в исходном лагранжиане электрослабых взаимодействий [9,10] ($G = SU(2) \times U(1)$). В теории гравитации [11,12] это общековариантные преобразования координат x^μ :

$$x' = x'(x) \quad (1.3)$$

и соответствующие преобразования тензоров $T^{\mu\dots}$:

$$T^{\mu\dots} = \Lambda^\mu_\nu(x) \dots T^{\nu\dots}(x), \quad \Lambda^\mu_\nu(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (1.4)$$

Свойством калибровочной инвариантности в указанном выше смысле обладают также действие релятивистской частицы [13,14]:

$$S = -m \int \sqrt{\dot{x}^2} dt, \quad \dot{x}^\mu = dx^\mu / dt \quad (1.5)$$

(τ — «инвариантное время», калибровочное преобразование: $\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau)$, $x'(\tau') = x(\tau)$), действие струны Намбу — Гото [13—19] и суперструны [13—16]. К примеру, действие Намбу — Гото [17—19]:

$$S = -\gamma \int \sqrt{(\dot{x}^\alpha)^2 - \dot{x}^2 x'^2} dt d\sigma, \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}, \quad x'^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}, \quad \gamma = \text{const} \quad (1.6)$$

инвариантно относительно преобразований репараметризации

$$\tau \rightarrow f_1(\tau, \sigma), \quad \sigma \rightarrow f_2(\tau, \sigma), \quad (1.7)$$

*Термин предложен Фоком, см. [2, с.91].

поскольку оно пропорционально площади двумерной поверхности в пространстве-времени, заметаемой струной*.

Для всех взаимодействий, кроме гравитационного, динамическими переменными являются вектор-потенциалы. Они трактуются как связности в главном расслоенном пространстве (база — пространство Минковского, слой — калибровочная группа) [21,22] и при калибровочных преобразованиях преобразуются неоднородно. В случае гравитации роль динамических переменных играют компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}(x)$. Связность в теории тяготения согласована с метрикой (символы Кристоффеля выражаются через $g_{\mu\nu}$), в силу чего именно метрический тензор играет главную роль. Отметим попутно (нам еще придется возвращаться к этому вопросу), что связности, ввиду их калибровочной неоднозначности, нередко считаются нефизическими объектами, в отличие от тензоров, преобразующихся однородно. Это, конечно, недоразумение. Любая величина, меняющаяся при калибровочных преобразованиях (однородно или неоднородно), содержит нефизические компоненты. Присутствие последних и определяет нетривиальность закона преобразования, т.е. неинвариантность связности или тензоров. Именно поэтому проблема нефизических степеней свободы существует и в теории тяготения.

1.2. Калибровочные условия. Итак, в калибровочных теориях имеются нефизические степени свободы, обеспечивающие релятивистскую инвариантность или общую ковариантность формализма. Закон их изменения со временем не фиксируется уравнениями движения, следующими из вариационного принципа Гамильтона, т.е. решения последних содержат функциональный произвол. На первый взгляд, в классической физике имеются, по крайней мере, три возможности распорядиться калибровочными переменными: 1) фиксировать их; 2) переформулировать теорию в терминах лишь инвариантных переменных; 3) изгнать из лагранжиана, например, положив их равными нулю. Оказывается, что эти возможности неравноценны. Третья из них радикально меняет динамику физических степеней свободы (см. разд.3), а вторая даже в сравнительно простых моделях может невообразимо усложнить вычисления [23]. Поэтому практически используется лишь первая возможность. Лагранжиан или действие явным образом не содержат никаких указаний на предпочтительность той или иной зависимости нефизических степеней свободы от времени, поэтому способ их фиксации полностью зависит от фантазии автора. Ясно, что здесь имеется широкий простор для творчества. За время, прошедшее после создания электродинамики и теории тяготения, было предложено множест-

*Впервые динамика одномерных объектов изучалась в работах [20].

во различных калибровочных условиях (калибровок), устраняющих произвол. Их число возросло с открытием квантовой теории, и особенно в связи с изучением полей Янга — Миллса [3—5]. Перечислим некоторые, наиболее употребительные из них*.

1. Калибровка Л.Лоренца [24]:

$$\partial_{\mu} A_{\mu} = 0. \quad (1.8)$$

Иногда ее называют калибровкой Ландау.

2. Кулоновская или радиационная калибровка

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (1.9)$$

Впервые она встречается у Максвелла [1, т.2, с.213], поэтому было бы уместным именовать ее калибровкой Максвелла.

3. Калибровка Вейля [25]:

$$A_0 = 0. \quad (1.10)$$

Это естественная калибровка, вытекающая из структуры лагранжиана электромагнитного поля (см. разд.2). Ее называют также гамильтоновой (неудачно). В англоязычной литературе употребляется термин *temporal gauge*. Связать калибровку (1.10) с именем Вейля предложил Джакив [26].

4. Калибровка Арновита — Фиклера [27] или аксиальная калибровка

$$A_3 = 0. \quad (1.11)$$

5. Светоподобная калибровка (*light-cone gauge*)

$$nA = 0, \quad n^2 = 0 \quad (nA \equiv n_{\mu} A_{\mu} \equiv g^{\mu\nu} n_{\mu} A_{\nu}). \quad (1.12)$$

Калибровки (1.10)—(1.12) можно записать в виде

$$nA = 0. \quad (1.13)$$

При $n^2 = n_0^2 - \mathbf{n}^2 = 1$ мы имеем калибровку Вейля, а при $n^2 = -1$ — калибровку Арновита — Фиклера. Аксиальными иногда называют любые калибровки вида (1.13).

6. Калибровки Фока [28—30]:

$$x_{\mu} A_{\mu}(x) = 0 \quad (1.14)$$

или

$$(x - x_0)_{\mu} A_{\mu}(x) = 0. \quad (1.15)$$

*Автор не ставит цели перечисления всех появившихся в литературе калибровочных условий — это практически невозможно, да и не нужно — «естественный отбор» отсеял малополезные.

Эту калибровку иногда называют калибровкой Фока — Швингера [31] (Швингер был первый, кто оценил ее достоинства).

Калибровочные условия обычно добавляют к уравнениям движения, т.е. закон изменения нефизических переменных задают непосредственно. Но его можно фиксировать и другим способом, видоизменив исходный лагранжиан, а именно добавив к нему член, нарушающий калибровочную инвариантность и позволяющий написать уравнения движения для нефизических переменных. Чаще всего к лагранжиану добавляют следующие слагаемые \mathcal{L}' , фиксирующие калибровку (фиксаторы калибровки).

7. Калибровка Гейзенберга — Паули [32,33]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (1.16)$$

где α — произвольный параметр. Случай $\alpha = 1$ отвечает калибровке Фейнмана, а случай $\alpha = 0$ — калибровке Лоренца. Иногда калибровки вида (1.16) называют калибровками класса Ферми [34—37], хотя в первых работах Ферми явным образом не прибавлял к лагранжиану фиксирующие члены.

8. Калибровка т'Хофта [38]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu - \alpha m \operatorname{Im} \phi)^2, \quad (1.17)$$

где ϕ — скалярное комплексное поле. Добавочный член \mathcal{L}' выбирается из условия сокращения смешанных членов $A_\mu \partial_\mu \phi$ в эффективных лагранжианах, описывающих феномен Хиггса [39,9,10] (см. также [40, с.443]). Это не единственная калибровка, предложенная т'Хофтом. При исследовании теорий с перестройкой вакуума может оказаться полезной следующая [41]. Если ϕ — поле Хиггса и $\chi = \arg \phi$, то требуем: $\chi + \beta^{-2} \partial_\mu A_\mu = 0$, или

$$\mathcal{L}' = 2e a^2 \beta^2 \cos(\chi + \beta^{-2} \partial_\mu A_\mu). \quad (1.18)$$

Здесь β — некоторая константа, имеющая размерность массы, $a = \langle \phi \rangle_0$, e — электрический заряд. В этой калибровке фиктивные поля отщепляются. При $\beta \rightarrow \infty$ получается унитарная калибровка (нефизические поля не распространяются). Упомянем еще так называемую абелеву калибровку [41,42]. Ее название связано с выделением в неабелевой группе абелевой подгруппы. Например, для группы $SU(2)$ это $U(1)$ с соответствующим разбиением векторного поля $W_\mu^a \rightarrow (A_\mu, W_\mu^\pm)$, $W_\mu^3 = A_\mu$, $W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$, $a = 1, 2, 3$. Фиксатор калибровки берется в виде

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{\beta} (D_\mu W_\mu^+) (D_\mu W_\mu^+)^*, \quad D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu. \quad (1.19)$$

Первый член в (1.19) нарушает инвариантность относительно абелевой подгруппы; \mathcal{L}' нарушает даже глобальную $SU(2)$ -симметрию, вследствие чего перенормировочные постоянные полей A_μ и W_μ^\pm в этой калибровке оказываются разными [42].

9. Калибровка т'Хофта — Вельмана [43]. Широту возможностей, которые открывает калибровочный производ, демонстрирует калибровка т'Хофта — Вельмана [43]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu - \frac{1}{2} \alpha e A_\mu^2)^2 \quad (1.20)$$

в электродинамике (α — параметр). В этой калибровке имеются все атрибуты неабелевой теории: вспомогательные антикоммутирующие поля и нетривиальное самодействие электромагнитного поля (3- и 4-фотонные вершины). Тем не менее теория эквивалентна стандартной — в [43] это проверено в низшем порядке теории возмущений.

10. Планарная калибровка [44—46,31]:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2\alpha n^2} nA \square nA, \quad \square = -\partial_\mu^2, \quad n^2 \neq 0. \quad (1.21)$$

Это одна из нескольких калибровок, предложенных Куммером в работе [44]. Среди них, помимо известных (1.8)—(1.13), имеется такая:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} [(n\partial)nA]^2. \quad (1.22)$$

Развитием калибровочного условия, применявшегося Липатовым [45] при изучении процессов глубоконеупругого рассеяния ($n^2 \rightarrow 0$ в (1.21), см. разд.4), явилась планарная калибровка работы [46] ($n^2 \neq 0$, $\alpha \rightarrow 1$ в (1.21)).

11. Калибровка фонового поля [47,48] (см. также превосходный обзор [49]):

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu q_\mu - ig A_\mu q_\mu)^2. \quad (1.23)$$

Здесь A_μ и q_μ — «фоновое» (классическое) и квантовое (вспомогательное) поля в разбиении квантуемого поля

$$A_\mu^q = q_\mu + A_\mu. \quad (1.24)$$

Такое разбиение используется при изучении эффективных лагранжианов [50—53]. Существо дела заключается в постулировании однородного закона преобразования для q_μ и неоднородного для A_μ , т.е. при калибровочных преобразованиях поле q_μ преобразуется как тензор, а поле A_μ — как

связность. Разбиение (1.24) допустимо, ибо сумма «тензор плюс связность» преобразуется как связность. Данный прием позволяет развить квантовую теорию калибровочных полей без потери явной калибровочной инвариантности, в частности, удобную схему вычислений калибровочно-инвариантных эффективных лагранжианов [49]. Он эффективен также в теории тяготения [54] и супергравитации [55].

В принципе можно строить новые калибровочные условия, комбинируя известные. Получающиеся таким образом калибровки обычно зависят от параметров. Они могут оказаться полезными в конкретных задачах. Приведем примеры таких параметрических или интерполирующих калибровок.

12. Класс «калибровок потока» [56]:

$$A_0 = Z[A], \quad (1.25)$$

где $Z[A]$ есть некоторый функционал. Авторы называют эти калибровки «*flow gauges*», потому что уравнение, устранившее произвол,

$$\dot{U} + ig(A_0 U - UZ[A^U]) = 0 \quad (1.26)$$

(оно следует из условий $A_0^U = Z[A^U]$, $A_\mu^U \equiv U^{-1}[A_\mu + (ig)^{-1}\partial_\mu]U$), «определяет поток, известный из нелинейной динамики» [56]. Частным случаем (1.26) служит калибровка

$$\beta A_0 = \text{div } A, \quad 0 < \beta < \infty. \quad (1.27)$$

При $\beta \rightarrow 0$ или $\beta \rightarrow \infty$ это условие превращается, соответственно, в калибровку Максвелла (1.9) или в калибровку Вейля (1.10). В классе калибровок (1.25) содержатся нелокальные калибровки [56]:

$$\alpha A_0 = (-\Delta)^{-1/2} \text{div } A, \quad \Delta = \partial^2. \quad (1.28)$$

Параметр α безразмерен (в отличие от β в (1.27), имеющего размерность массы). В калибровке с фиксатором

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} (\beta A_0 - \partial A)^2 \quad (1.29)$$

отсутствуют инфракрасные расходимости (по крайней мере, в однопетлевом приближении [56]).

13. Параметрическая калибровка, задаваемая фиксирующим членом [57,58]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{6\beta^2} \partial A (\square - \beta^2) \partial A. \quad (1.30)$$

При $\beta \rightarrow \infty$ получается калибровка Фрида — Йенни [59], а при $\beta \rightarrow 0$ — по существу, калибровка Лоренца.

Класс калибровок Ферми (1.16) также попадает в разряд интерполирующих, поскольку его частными случаями являются калибровки Фейнмана ($\alpha = 1$), Лоренца ($\alpha = 0$) и Фрида — Йенни ($\alpha = 3$). Нетрудно придумать промежуточную калибровку и для других условий, например,

$$\alpha A_0 - \partial A = 0. \quad (1.31)$$

При $\alpha = 1, 0$ она превращается, соответственно, в калибровки Лоренца и радиационную, а при $\alpha \rightarrow \infty$ получается неоднородная калибровка Вейля (1.10), $A_0 = f(x)$, $\partial_0 f = 0$.

Калибровочные условия (1.8)—(1.23), (1.25), (1.27)—(1.31) написаны в форме, естественной для электродинамики. Их обобщение на неабелевы теории сводится к замене $A_\mu \rightarrow A_\mu^a$ (и $\varphi \rightarrow \varphi^a$ в (1.17)), где $a = 1, \dots, N$, $N = \dim X$ (X — алгебра Ли калибровочной группы). Пояснения требует лишь калибровка фонового поля (1.23), в которой необходимо произвести еще и замены $q_\mu \rightarrow q_\mu^a$, $A_\mu q_\mu \rightarrow i f^{abc} A_\mu^b q_\mu^c$, f^{abc} — структурные постоянные группы. Следует упомянуть также так называемые контурные калибровки, появляющиеся при работе с P -экспонентами и формально относящиеся к разряду нелокальных [60].

14. «Тензорные» калибровочные условия. В приведенных примерах калибровочный произвол устранялся фиксированием связности. В принципе его можно устранять, фиксируя любую нетривиально преобразующуюся величину, например, тензор. Так, если скалярное поле φ преобразуется как «изовектор» (калибровочная группа $SO(n)$), то $n - 1$ нефизических переменных устраняются условиями

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_n = 0. \quad (1.32)$$

Данный пример иллюстрирует утверждение, что тензоры не могут считаться более физическими объектами, чем связности — те и другие содержат как физические, так и нефизические компоненты. Здесь необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Размерность группы $SO(n)$ равна $D = n(n - 1)/2$, т.е. число калибровочных параметров равно D , тогда как тензор первого ранга φ имеет лишь n компонент, и $n < D$ для $n > 2$. Парадокс разрешается просто: стационарная подгруппа вектора φ есть $SO(n - 1)$, т.е. $D' = (n - 1)(n - 2)/2$ генераторов группы $SO(n)$ аннулируют вектор φ . Остается $D - D' = n - 1$ параметров, которые и фиксируются. Следовательно, эта калибровка будет неполной — $(n - 1)(n - 2)/2$ калибровочных параметров останутся произвольными.

15. В теории тяготения число применяемых калибровок не столь велико. Наиболее популярна калибровка Дедондера — Ланцоша — Фока [61—63]:

$$\partial_{\mu}(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.33)$$

Очевидно, это условие является аналогом условия Лоренца (1.8). Оно определяет так называемые «гармонические координаты». Последние удовлетворяют уравнению Даламбера

$$\square x^{\nu} = 0, \quad (1.34)$$

где $\square \equiv -(-g)^{-1/2} \partial_{\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu}$. Но $\square x^{\nu} = -(-g)^{-1/2} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})$, т.е. условие (1.34) обеспечивает гармоничность координат. Отметим, что и в условии Лоренца (1.8) остающийся произвол ограничивается уравнением Даламбера $\square \Lambda = 0$ (см. (1.1)). Это уже не калибровочный произвол, поскольку он полностью устраняется заданием начальных условий. В РТГ (релятивистская теория гравитации) условиям (1.33) придается статус уравнений поля [64].

16. Изучались и другие калибровки, например, калибровка светового конуса [65,66], которая записывается так:

$$n^{\mu} g_{\mu\nu}, \quad n^2 = 0. \quad (1.35)$$

Аналогом калибровки Вейля (1.10) является условие

$$g^{\mu 0} = 0. \quad (1.36)$$

Дирак установил [67], что остающийся произвол, связанный с выбором координат на гиперповерхности $t = 0$, лучше всего устранить, требуя

$$\partial_i \tilde{g}^{ik} = 0, \quad \tilde{g}^{ik} = g^{ik} (\det g_{ik})^{1/3}, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (1.37)$$

В гамильтоновом формализме равенство (1.37) понимается в слабом смысле, т.е. его следует принимать во внимание лишь после вычисления скобок Пуассона.

Проблема устранения калибровочного произвола в теории струн и суперструн в принципе не отличается от таковой в полевых теориях. Например, для струны с действием Намбу — Гото (1.6) естественной является ортонормальная калибровка [13]:

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0, \quad \dot{x}x' = 0, \quad (1.38)$$

означающая переход к конформным (ортонормальным) координатам на поверхности, заметаемой струной. Применяются и другие калибровочные условия, в особенности калибровка светового конуса (подробнее см. в [13—16,31]).

Особо следует остановиться на так называемом «методе БРСТ» [68—70]. В формализм вводятся вспомогательные (фиктивные) скалярные антикоммутирующие поля. Фиксирующий калибровку член \mathcal{L}' вместе с лагранжианом фиктивных полей \mathcal{L}'' оказывается инвариантным относительно глобальных суперсимметричных преобразований (см. разд.2). В данном подходе калибровочные (нефизические) степени свободы есть четные элементы грассмановой алгебры. Явное нарушение локальной калибровочной инвариантности имеет формальный характер — роль нефизических степеней свободы передается вспомогательным грассмановым полям, поэтому теория сохраняет все свойства, вытекающие из калибровочной инвариантности исходного лагранжиана. Выясняется, что именно данный формализм наиболее удобен для вывода тождеств Уорда [71]. Обобщение метода на случай нелинейных калибровок дано в [72].

Обилие калибровок порождает вопросы:

- Каковы особенности той или иной калибровки?
- Имеются ли предпочтительные калибровки?
- Вполне ли произвольны произвольные функции в формулах (1.1) — (1.3)?
- Есть ли ограничения на фиксирующие калибровку члены \mathcal{L}' ? Какие?
- Как переносить классические калибровочные условия на квантовую теорию?

Чтобы разобраться в множестве калибровок, их нужно как-то классифицировать. Обычно используются следующие критерии.

Релятивистская инвариантность. Калибровки (1.8), (1.14)—(1.20), (1.23), (1.30), (1.32), (1.33), (1.38) относятся, очевидно, к разряду лоренц-инвариантных, тогда как в остальных релятивистская инвариантность нарушается явным образом. Калибровка Фока — Швингера нарушает инвариантность относительно сдвигов $x \rightarrow x + a$.

Линейность. Устраняющие произвол условия могут быть линейными или нелинейными относительно калибровочных полей (A_μ) и полей материи. Например, функционал в правой части уравнения (1.25) может быть нелинейным.

Однозначность. Калибровочное условие может иметь несколько или даже бесконечно много решений [73—76,23].

Наличие «духов» (появление в формализме фиктивных полей [77,78]). Необходимость привлечения нефизических скалярных антикоммутирующих полей возникает для калибровок типа (1.8), (1.9), (1.16) в теориях с неабелевой калибровочной группой [77,78], а для калибровки (1.20) — и в электродинамике.

Локальность. Локальные калибровочные условия связывают поля и их производные в одной и той же точке. Примером нелокальной калибровки служит условие (1.28).

Ренормируемость и унитарность. Калибровки, в которых теория имеет явно перенормируемый вид (по «счету степеней»), называются R -калибровками. Примерами могут служить калибровки (1.16), (1.17). Калибровки, в которых S -матрица имеет явно унитарный вид (нефизические поля не распространяются), называются U -калибровками [42]. Примером служит калибровка (1.17) при $\alpha \rightarrow \infty$ (пропагатор векторного поля в этом случае не убывает при стремлении импульса к бесконечности).

Однородность. Если, например, вместо (1.8) взять

$$\partial_{\mu} A_{\mu} = f(x), \quad (1.39)$$

где f — некоторая функция (или поле), то такая калибровка называется неоднородной.

Размерность. Калибровочные условия иногда различают по их размерности. Например, калибровка Лоренца (1.8) имеет размерность 2 ($[\partial_{\mu} A_{\mu}] = M^2$), а калибровки (1.13) — размерность 1 ($[nA] = M$).

Алгебраические калибровки [79] — в этом случае компоненты калибровочных полей связаны алгебраическими условиями. Примеры: (1.10)—(1.15), (1.32), (1.35), (1.36).

Неполные калибровки. Если калибровочное условие полностью устраняет произвол, то калибровка называется полной (*complete*), в противном случае — неполной (см. разд.3,4).

Динамические и нединамические калибровки. Их полезно различать главным образом в связи с переходом к квантовому описанию. Калибровки, задаваемые алгебраическими условиями или (в лагранжевом формализме) дифференциальными уравнениями не выше первого порядка по времени, назовем нединамическими. Калибровки, задаваемые включением в лагранжиан членов \mathcal{L}' , квадратичных по скоростям нефизических компонент, назовем динамическими. В классической теории такое деление не имеет особого смысла; например, лоренцевская (1.8) (нединамическая) и фейнмановская (1.16), $\alpha = 1$ (динамическая) калибровки ведут к одним и тем же уравнениям движения (разд.4). В квантовой теории нединамические калибровочные условия есть условия на канонические переменные; но нельзя требовать, например, исчезновения одной из канонических переменных — это ведет к нарушению канонических перестановочных соотношений. Динамические калибровки позволяют обойти эту проблему.

1.3. Калибровочные преобразования. Много вопросов порождает и связанная с проблемой калибровочных условий, но не идентичная ей проблема выбора калибровочных функций. Традиционно считается, что функ-

ция $\Lambda(x)$ в (1.1) абсолютно произвольна. Разумеется, это не так — она не может быть вполне произвольной. Калибровочные преобразования не могут менять природу полей, поэтому она не может быть ни комплексной функцией — поле A_μ вещественно, ни 4-вектором, ни образующей грассмановой алгебры и т.д. Это только самые очевидные ограничения на класс допустимых преобразований. Для физики существенны и более тонкие характеристики функции $\Lambda(x)$ в (1.1) и матриц $U(x)$ в (1.2) (более подробное обсуждение этого вопроса см. в разд.5). Различают следующие классы преобразований: локальные, глобальные, большие, сингулярные, суперсимметричные.

Глобальные преобразования, в отличие от локальных, характеризуются групповыми параметрами, не зависящими от координат и времени*. Для их осуществления достаточно задать генераторы и параметры калибровочных преобразований. Появление еще одного понятия — «большое преобразование» [26] — связано с топологией пространства и полей. Согласно (1.2) поле $U\partial_\mu U^{-1}$ — чисто калибровочное, т.е. отвечающий ему тензор напряженности равен нулю: $F_{\mu\nu} = 0$. Следовательно, устанавливая закон убывания полей при $|x| \rightarrow \infty$, мы не вправе требовать их исчезновения: $A_\mu \rightarrow 0$. Можно потребовать лишь $F_{\mu\nu} \rightarrow 0$, т.е. $A_\mu \rightarrow U\partial_\mu U^{-1}$. Невинное, на первый взгляд, ослабление асимптотического условия имеет глубокие следствия. Пусть $U(x) \equiv U_x \rightarrow U_\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Если данный предел не зависит от направления x , то это означает, что мы фактически перешли от R^3 к S^3 , т.е. компактифицировали 3-мерное евклидово пространство, дополнив его бесконечно далекой точкой. Но $U(x) \in G$, т.е. $U(x)$ осуществляет отображение $S^3 \rightarrow G$. Из топологии известно, что множество таких отображений разбивается на топологически неэквивалентные классы, характеризуемые топологическими числами [81]. Для $G = SU(2)$ это [26]:

$$n = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \operatorname{Tr} [U\partial_i U^{-1} U\partial_j U^{-1} U\partial_k U^{-1}] \epsilon^{ijk}, \quad (1.40)$$

где ϵ^{ijk} — единичный антисимметричный тензор. Поля из разных классов не могут быть переведены друг в друга преобразованиями с непрерывными калибровочными параметрами (см. разд.5).

*Устаревшие названия для глобальных и локальных преобразований — калибровочные преобразования 1-го и 2-го рода соответственно [80].

Большими называют преобразования, переводящие поля из одного класса в другой [26, с.667], т.е. преобразования U с $n \neq 0$. Важно то, что все «вакуумные поля» $A_\mu = U \partial_\mu U^{-1}$ разных классов имеют нулевые тензоры $F_{\mu\nu}$, т.е. отвечают нулевой классической энергии. Потенциальная энергия калибровочного поля имеет, таким образом, счетное множество минимумов, разделенных потенциальными барьерами.

Сингулярные калибровочные преобразования возникают в теории магнитного монополя. Монополь Дирака представляет собой магнитный полюс с выходящей из него магнитной нитью [82,83,40]. Данная конструкция являла бы монополь, если бы нить была ненаблюдаемой. В этом случае перемещение нити отвечало бы операции с нефизическим объектом и, можно ожидать, обеспечивалось бы калибровочным преобразованием. Такое «калибровочное» преобразование действительно можно придумать, но оно не описывается однозначной функцией Λ . Если контур обхода вокруг перемещенной нити не охватывает нить в конечном положении, то значение функции Λ после обхода контура не совпадает с ее первоначальным значением. Нить является линией сингулярности Λ , отсюда название преобразования [40,84]. Перемещение нити, однако, нельзя признать нефизической операцией, поскольку сама нить не может быть нефизическим объектом — поток магнитного поля через нее отличен от нуля (см. вступительную статью в [83]). Отказ от требования непрерывности Λ ведет к преобразованиям, меняющим физику.

Суперсимметричные калибровочные преобразования. Вскоре после открытия суперсимметрии [85—88] (см. также [89—92]) была предложена супергравитация [93—94] — как результат перехода от глобальной суперсимметрии к локальной. В этой теории калибровочные параметры есть элементы грассмановой алгебры — параметры глобальных суперсимметричных преобразований становятся функциями координат. О физическом смысле локальной суперсимметрии известно еще меньше, чем о калибровочной симметрии, хотя можно не сомневаться в ее важности для физики.

Из других проблем, связанных с калибровочной инвариантностью, выделим следующие. Весьма важна проблема фиксатора калибровки \mathcal{L}' . Нетрудно привести примеры, когда \mathcal{L}' хотя и нарушает калибровочную инвариантность, не снимает вырождения лагранжиана (например, $\mathcal{L}' = m^2 A_\mu^2 / 2$), или даже ведет к противоречивой динамике [95] ($\mathcal{L}' = x^\mu A_\mu$, подробнее см. разд.4).

Далее необходимо сказать о *расширенной по Дираку* [96] *группе калибровочных преобразований* (см. разд.2). Дело в том, что совокупность нефизических степеней свободы не идентична совокупности калибровочных параметров исходного лагранжиана. Анализ показывает, что кроме пер-

вичных связей (их число равно числу параметров калибровочной группы) имеются еще и вторичные связи [97,98]. Они свидетельствуют о наличии дополнительной совокупности нефизических переменных. Обычно закон изменения со временем этих последних полностью определяется законом изменения первых, отвечающих первичным связям. Но, в принципе, этот закон можно задать независимо, т.е. реальный произвол теории шире. Теория, в которой число калибровочных (произвольных) параметров равно числу всех связей первого рода (и первичных, и вторичных), называется теорией с расширенной калибровочной группой.

Наконец, само понятие калибровочной инвариантности требует уточнения. Стандартный лагранжиан калибровочной теории не меняется при калибровочных преобразованиях. В этом случае говорят о сильной калибровочной инвариантности. Существуют, однако, физические объекты, изменение которых пропорционально связям, т.е. они не меняются лишь с учетом связей (говорят: «инвариантны на связях»). В этом случае имеет место *слабая калибровочная инвариантность*. Примером такого объекта служит гамильтониан (см. разд.2).

Уже из сказанного становится ясно, что теория калибровочных полей достаточно сложна и далека от завершенности. Проблемам выбора и тонкостям применения различных калибровок посвящена огромная литература. Для изложения их в полном объеме потребуется книга. В данном обзоре обсуждаются лишь некоторые принципиальные вопросы, связанные с калибровочной инвариантностью теорий. Внимание при этом обращается главным образом на роль, которая отводится физическим и нефизическим степеням свободы при том или ином выборе калибровки. Здесь лишь вскользь затрагиваются вопросы фиксации калибровки в гравитации и струнах. Не обсуждаются и проблемы вычислений в той или иной калибровке — фейнмановская калибровка является стандартной, и соответствующая техника изложена во всех руководствах по квантовой теории поля, а нековариантные калибровки подробно рассмотрены в обстоятельном обзоре [31] и книге [79].

В разд.2 обсуждается вопрос о физических и нефизических степенях свободы — главным образом в электродинамике. Подчеркнута важность введенного Дираком понятия расширенной калибровочной группы и понятия слабой калибровочной инвариантности. В разд.3 изучаются простые модели с конечным числом степеней свободы, иллюстрирующие некоторые типичные проблемы калибровочных теорий. В разд.4 дается сравнительный анализ различных калибровок. Показана особая роль калибровки Фока. Раздел 5 посвящен вопросам калибровочных преобразований. В разд.6 кратко подводятся итоги обсуждения. В приложении помещен материал, касающийся тех или иных аспектов калибровочной инвариантности и калибро-

вочных условий: метод фонового поля, роль остаточной калибровочной группы, замечания исторического плана и т.п.

Обозначения. Принята метрика $g_{\mu\nu}(+---)$; компоненты координатного 4-вектора x обозначаются $x^\mu = (x, t)$. Под координатами, как правило, понимаем пространственные координаты и время. Греческие индексы пробегают значения $0, 1, 2, 3$, латинские i, j, k, l, \dots — если не оговорено особо — $1, 2, 3$, тогда как индексы a, b, c, d, \dots — $1, 2, \dots$, $\dim X$, где X — алгебра Ли калибровочной группы G . Используется сокращенное обозначение для оператора дифференцирования $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ и оператора Даламбера $\square \equiv -g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ (или $\square = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu$, где $g = \det g_{\mu\nu}$ в случае, если $\partial_\rho g_{\mu\nu} \neq 0$). По повторяющимся индексам одинаковой вариантности предполагается суммирование с надлежащим метрическим тензором, например, $q_\mu x_\mu = g^{\mu\nu} q_\mu x_\nu = q_\mu x^\mu \equiv qx$. Коммутатор или антикоммутатор определяются знаком при квадратных скобках $[A, B]_\pm = AB \pm BA$. Скобки Пуассона определяются согласно условию $\{q, p\} = 1$. Равенства, справедливые лишь при учете связей («равенства в слабом смысле»), обозначаются знаком \approx . В континуальных интегралах игнорируется присутствие постоянного множителя в мере. Произведение функций может подразумевать интегрирование по координатам: $JA \equiv \int dx J_\mu(x) A_\mu(x)$, где $dx \equiv d^4x$.

2. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ — МЕТОДЫ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА

Типичный калибровочно-инвариантный лагранжиан выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 + \sum_f \bar{\psi}_f (i\hat{D} - m_f) \psi_f + \sum_f D_\mu \phi_f (D_\mu \phi_f)^* + \dots, \quad (2.1)$$

где $F_{\mu\nu} = (ig)^{-1} [D_\mu, D_\nu]$, $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$, $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a$, $\hat{D} = \gamma_\mu D_\mu$, и матрицы λ^a , образующие базис алгебры Ли в фундаментальном представлении, нормированы на единицу $\text{Tr} \lambda^a \lambda^b = \delta^{ab}$, а матрицы Дирака γ_μ удовлетворяют стандартному условию $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu}$. Далее, ψ — спинорное поле, $\bar{\psi} = \psi^* \gamma_0$, ϕ — скалярное комплексное поле; очевидно, A_μ в ковариантной производной от ϕ есть $A_\mu = A_\mu^a T^a$, где T^a — генераторы группы в пред-

ставлении, реализуемом этим полем. Суммирование в (2.1) ведется по сортам полей f («ароматам»), если их несколько; точками обозначены иные допустимые калибровочно-инвариантные члены, например, самодействие скалярного поля и вклады других полей. Лагранжиан (2.1) инвариантен относительно преобразований (1.2). Чтобы выяснить особенности динамики калибровочных систем, рассмотрим простейшую и наиболее изученную теорию — электродинамику (абелева калибровочная группа).

2.1. Свободная электродинамика. Соответствующий лагранжиан получается из (2.1) переходом $\lambda^a \rightarrow 1$ (единичная матрица):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi + D_\mu \varphi (D_\mu \varphi)^* + \dots \quad (2.2)$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$; для простоты взято лишь одно заряженное поле. Особенности динамики систем с калибровочной группой определяются уже первым слагаемым в (2.2).

Лагранжиан свободного электромагнитного поля может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \equiv \frac{1}{2} \partial_\rho A_\mu T^{\rho\mu\sigma\nu} \partial_\sigma A_\nu, \quad (2.3)$$

где

$$T^{\rho\mu\sigma\nu} = g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} - g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

С помощью тензорного оператора

$$K^{\mu\nu} = -T^{\rho\mu\sigma\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \quad (2.5)$$

перепишем (2.3) следующим образом:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A_\mu K^{\mu\nu} A_\nu + \frac{1}{2} \partial_\rho (A_\mu T^{\rho\mu\sigma\nu} \partial_\sigma A_\nu). \quad (2.6)$$

Последний член в (2.6) есть полная дивергенция и может быть опущен. Особенности классического и квантового описания электромагнитного поля вытекают из формул (2.3)—(2.6). Зависимость \mathcal{L}_0 от скоростей (билинейный член) определяется матрицей

$$T^{\mu\nu} = T^{0\mu 0\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu \partial A_\nu} = g^{0\mu} g^{0\nu} - g^{00} g^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Эта матрица вырождена, ибо, будучи диагональной, она имеет на диагонали нуль, $T^{\mu\nu} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$. Лагранжианы, обладающие этим свойством, также называются *вырожденными* (или сингулярными): \mathcal{L}_0 не есть квадратичная функция скорости A_0 , т.е. коэффициент при A_0^2 в (2.3)

равен нулю. В действительности лагранжианы (2.2), (2.3) вообще не зависят от A_0 . Вырожденной оказывается и матрица K :

$$K_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu, \quad \square = -\partial_\mu^2, \quad (2.8)$$

поскольку $P_{\mu\nu}^{(1)} = -\square^{-1} K_{\mu\nu}$ есть проектор ($g_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^{(1)} + P_{\mu\nu}^{(0)}$, $P_{\mu\rho}^{(i)} P_{\rho\nu}^{(j)} = P_{\mu\nu}^{(i)} \delta^{ij}$, $i, j = 0, 1$). Наиболее важными следствиями этих обстоятельств являются:

а) в классике — проблема перехода к гамильтонову описанию системы (неразрешимость уравнений $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ относительно \dot{q}^i [96]);

б) в квантовой теории — проблема определения пропагатора, ибо в невырожденной теории пропагатор $\Delta_{\mu\nu} \sim K_{\mu\nu}^{-1}$.

2.2. Расширенная группа калибровочных преобразований. Общая теория динамических систем со связями построена Дираком и Бергманном [96—98], хотя ее основные элементы для случая электродинамики содержались уже в статьях Гейзенберга и Паули [32,33]. Существо дела проясняется при переходе к гамильтонову формализму. Из (2.3) имеем

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = F^{\mu 0}, \quad (2.9)$$

т.е. импульс, канонически сопряженный A_0 , равен нулю:

$$\pi^0 = 0. \quad (2.10)$$

По терминологии Бергманна — Дирака это есть первичная связь (следуя традиции, связями будем называть и функции канонических переменных, и условия их обращения в нуль). Если игнорировать (2.10), то стандартным образом находим «гамильтониан»

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \partial A_0 \mathbf{E} + \pi^0 \dot{A}_0 \right],$$

$$\mathbf{E}^k = \pi^k = F^{k0}, \quad \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2} F_{ik}^2. \quad (2.11)$$

Строго говоря, это не есть гамильтониан, так как H_0 зависит от скорости \dot{A}_0 . Но, считая \dot{A}_0 произвольной функцией времени и учитывая (2.10), функционал (2.11) можно использовать для получения гамильтоновых уравнений движения [96]. Проверка на согласованность (2.10) и (2.11) (проверка того, что $\dot{\pi}^0 = 0$) приводит к условию*

*Относительно поверхностных членов, возникающих при интегрировании по частям во втором слагаемом (2.11), см. [99].

$$\pi^0 = \{\pi^0, H_0\} = \partial_x E^k = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (2.12)$$

где $\{, \}$ — функциональные скобки Пуассона:

$$\{A_\mu(x, t), \pi^\nu(y, t)\} = \delta_\mu^\nu \delta(x - y). \quad (2.13)$$

Итак, мы получили вторичную связь, которая, очевидно, находится в инволюции с первичной ($\{\pi^0, \partial \mathbf{E}\} = 0$), т.е. π^0 и $\partial \mathbf{E}$ — связи первого рода. Других связей нет ($\{\partial \mathbf{E}, H_0\} = 0$). Согласно анализу Дирака [96] можно перейти к полному гамильтониану H_{0T} :

$$H_{0T} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{E}_\perp^2 + \mathbf{H}^2) + u\pi^0 - v\partial \mathbf{E} \right\}, \quad \partial \mathbf{E}_\perp = 0, \quad (2.14)$$

с произвольными функциями времени u, v . Гамильтониан (2.14) свидетельствует: (i) в теории имеются две связи первого рода, т.е. из четырех компонент A_μ только две физические; (ii) группа преобразований, не затрагивающих физического сектора, характеризуется двумя зависящими от координат и времени параметрами u и v . Связи π^0 и $\partial \mathbf{E}$ играют роль генераторов этих преобразований. Определим

$$G = \int d^3x \{u\pi^0 - v\partial \mathbf{E}\}. \quad (2.15)$$

Вычисляя скобки Пуассона A_μ и G , находим

$$\begin{aligned} \delta A_0 &= \{A_0, G\} = u \equiv \delta_u A_0, \\ \delta \mathbf{A} &= \{\mathbf{A}, G\} = \partial v \equiv \delta_v \mathbf{A}; \quad \delta_v A_0 = \delta_u \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Совокупность преобразований, задаваемых (2.16), будем называть расширенной по Дираку группой калибровочных преобразований свободной электродинамики. Ими исчерпывается калибровочный произвол теории. То, что лагранжиан (2.3) инвариантен лишь относительно преобразований (1.1) (одна произвольная функция), означает: уравнения движения в свободной электродинамике таковы, что фиксация одной нефизической степени свободы целиком (или с точностью до начальных условий) фиксирует вторую. Однопараметрическая группа преобразований (1.1) получается из (2.15), (2.16) редукцией $u = \dot{v}$, $v \equiv \Lambda$; тогда равенства (2.16) запишутся в привычном виде:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda. \quad (2.17)$$

Сказанное можно проиллюстрировать и на лагранжевых уравнениях движения

$$\partial_{\mu} F_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Выражая $F_{\mu\nu}$ через потенциалы, имеем

$$\partial_{\kappa} F_{\kappa 0} = \partial(\dot{A} - \partial A_0) = 0, \quad \partial_{\mu} F_{\mu i} = -[\square A + \partial(\dot{A}_0 - \partial A)]_i = 0. \quad (2.19)$$

Разбив A на поперечную и продольную компоненты

$$A = A_{\perp} + A_{\parallel}, \quad \partial A_{\perp} = 0, \quad A_{\parallel} = \Delta^{-1} \partial(\partial A) \quad (2.20)$$

(поскольку $\partial A_{\parallel} = \partial A$), запишем уравнения (2.19) в виде

$$\Delta A_0 = \partial_0 \partial A_{\parallel}, \quad \square A_{\perp} = \partial_0 (\partial_0 A_{\parallel} - \partial A_0). \quad (2.21)$$

Первое из этих уравнений есть лагранжевская связь (содержит лишь первые производные по времени, ср. (2.12)). Его решение обращает в нуль правую часть второго. Отсюда заключаем: 1) поперечные (физические) компоненты A удовлетворяют уравнению Даламбера

$$\square A_{\perp} = 0; \quad (2.22)$$

2) продольная компонента выражается через

$$A_{\parallel} = \int dt \partial A_0. \quad (2.23)$$

Итак, задав A_0 , мы тем самым фиксируем и вторую нефизическую переменную A_{\parallel} .

2.3. Слабая калибровочная инвариантность. Обычно, когда говорят о калибровочной инвариантности в электродинамике, подразумевают неизменность какой-либо функции или функционала от калибровочных полей и их производных при градиентных преобразованиях (1.1). Примером служит лагранжиан (2.2). В гамильтоновом формализме динамическая величина есть калибровочный инвариант, если ее скобки Пуассона с генератором (2.15) (при $u = \dot{v}$) равны нулю. Говорят, что данная величина инвариантна в сильном смысле. Физически это требование представляется завышенным. Физический сектор теории определяется учетом всех связей, поэтому необходимым условием принадлежности динамической величины физическому сектору является ее слабая инвариантность относительно расширенной калибровочной группы: данная величина должна быть в инволюции со всеми связями первого рода. Это означает, что ее скобки Пуассона со связями первого рода должны обращаться в нуль при учете связей. Отказ от этого требования (его усиление) ведет к неприемлемым последствиям. Например, скобки Пуассона гамильтониана (2.11) (в нем произведена замена $A_0 \rightarrow u$) с генератором калибровочных преобразований (2.15) равны

$$\{H_0, G\} = - \int d^3x v(x) \delta E, \quad (2.24)$$

т.е. гамильтониан (2.11) неинвариантен даже относительно исходной группы (1.1) (когда в (2.15) $u = \dot{v}$). Между тем гамильтониан системы есть, безусловно, физическая величина. Скобки Пуассона (2.24) равны нулю в слабом смысле, т.е. при учете связи $\delta E = 0$.

Требование слабой калибровочной инвариантности согласуется с требованием инвариантности относительно расширенной калибровочной группы и с точки зрения лагранжевского формализма. Действительно, лагранжиан свободной теории (2.3) неинвариантен в сильном смысле относительно калибровочных преобразований из расширенной группы (2.16). Поскольку при этом

$$\delta F_{k0} = \partial_k(u - \dot{v}), \quad \delta F_{ik} = 0, \quad (2.25)$$

то

$$\delta \mathcal{L}_0 = F_{k0} \delta F_{k0} = -(u - \dot{v}) \delta E + \partial[(u - \dot{v})E]. \quad (2.26)$$

Последний член здесь несуществен (полная дивергенция), поэтому вариация функционала Лагранжа $L_0 = \int d^3x \mathcal{L}_0$ при преобразованиях (2.16) обращается в нуль лишь при учете лагранжевской связи (2.21): $\delta L_0 = 0$ при $\delta E = \partial(A - \partial A_0) = 0$.

Требования, обсуждавшиеся в двух последних пунктах, лежат в основе всех калибровочных теорий.

2.4. Электродинамика со взаимодействием. Включение взаимодействия меняет лишь вторичную связь, причем связи по-прежнему находятся в инволюции:

$$G_1 = \pi^0 = 0, \quad G_2 = \partial E - j_0 = 0, \quad \{G_1, G_2\} = 0 \quad (2.27)$$

(j_0 — нулевая компонента тока $j_\mu = -\partial \mathcal{L} / \partial A_\mu$), т.е. в теории по-прежнему две нефизические степени свободы. Одна из них, как и раньше, A_0 , вторая же — величина, канонически сопряженная G_2 (2.27). Так как $\{A_\parallel, G_2\} \neq 0$, A_\parallel меняется при калибровочных преобразованиях, поэтому продольная компонента поля A не есть физическая степень свободы. Это проявляется в том, что она не может распространяться независимо от зарядов. Но продольная компонента A_\parallel легко регистрируется — статическое кулоновское поле, окружающее заряды, и есть возбужденное продольное поле [100]; в этом смысле поле A_\parallel наблюдаемо. Подробный анализ вопроса можно найти в [95]. Существо дела в том, что и A_\parallel , и фаза заряженного поля есть линейные комбинации физической и нефизической степеней свободы. Из них и комбинируется калибровочный инвариант, описыва-

ющий кулоновское поле. Калибровочным преобразованием A_{\parallel} можно обратить в нуль, но при этом заряженные поля становятся нелокальными. Физическая информация о кулоновском поле перенесена в фазу заряженных полей.

Генератор расширенной калибровочной группы запишется в виде

$$G = \int d^3x [\pi^0 - v(\partial E - j_0)], \quad (2.28)$$

а уравнения (2.18), (2.21) изменятся очевидным образом:

$$\partial_{\mu} F_{\mu\nu} = j_{\nu}, \quad (2.29)$$

$$\Delta A_0 = \partial \mathbf{A} - j_0, \quad \square A_{\perp} = \partial_0(\partial_0 A_{\parallel} - \partial A_0) - \mathbf{j}. \quad (2.30)$$

Первое из них есть лагранжевская связь (содержит лишь первые производные по времени бозе-поля). Пользуясь разбиением $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel}$, $\partial \mathbf{j}_{\perp} = 0$, $\mathbf{j}_{\parallel} = \Delta^{-1} \partial(\partial \mathbf{j})$ и первым из уравнений (2.30), переписываем второе в виде

$$\square A_{\perp} = -\mathbf{j}_{\perp} + \Delta^{-1} \partial(\partial_{\mu} j_{\mu}); \quad (2.31)$$

итак, распространяются только поперечные возбуждения, поскольку, ввиду сохранения тока $\partial_{\mu} j_{\mu} = 0$, из (2.31) следует

$$\square A_{\perp} = -\mathbf{j}_{\perp}. \quad (2.32)$$

Что же касается продольного поля A_{\parallel} , то из закона Гаусса (2.27) находим для продольной компоненты напряженности электрического поля: $E_{\parallel} = \partial \Delta^{-1} j_0$ ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_{\parallel}$, $\partial \mathbf{E}_{\perp} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E}_{\parallel} = 0$). Подставляя это выражение в новый гамильтониан

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \mathbf{A} \mathbf{j} \right] + G \quad (2.33)$$

и учитывая равенства

$$\mathbf{A} \mathbf{j} = A_{\perp} \mathbf{j}_{\perp} + \mathbf{j}_{\parallel} \partial(\Delta^{-1} \partial A), \quad E_{\parallel}^2 = (\Delta^{-1} \partial j_0)^2, \quad (2.34)$$

закключаем, что в радиационной калибровке (1.9) гамильтониан (2.33) запишется в виде

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}_{\perp}^2 + \mathbf{H}^2) - \frac{1}{2} j_0 \Delta^{-1} j_0 + \mathbf{j}_{\perp} A_{\perp} \right] + G. \quad (2.35)$$

Продольное поле исчезло, но не бесследно — второе слагаемое в (2.35) есть вклад в гамильтониан кулоновского поля (ядро оператора Δ^{-1} есть

$\Delta^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^{-1}$). Изменяются и заряженные поля. Так как $\mathbf{A}_{\parallel} = \partial(\Delta^{-1}\partial\mathbf{A})$, из условия $\mathbf{A}_{\parallel} + \partial\Lambda = 0$ находим Λ , обращающее \mathbf{A}_{\parallel} в нуль, т.е. осуществляющее переход к кулоновской калибровке: $\Lambda = -\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}$. Согласно (1.1) имеем

$$\psi' = e^{-ie\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}}\psi, \quad \mathbf{A}_{\parallel} = \partial(\Delta^{-1}\partial\mathbf{A}). \quad (2.36)$$

Поле ψ становится нелокальным, его скобки Пуассона с каноническим импульсом $\pi^k = E^k$ отличны от нуля. Фактор, стоящий перед ψ , отвечает кулоновскому полю, окружающему заряд [100, §80; 95].

Обычно считается (и не без оснований), что физическая величина, переменная, должна быть калибровочным инвариантом, а калибровочно-преобразующаяся величина не может иметь отношения к физике, поскольку ее можно, например, обратить в нуль. Рассмотренный случай кулоновского поля вносит необходимые уточнения. Нефизическими переменными (степенями свободы) являются величины, канонически сопряженные связям первого рода. Величины, меняющиеся при калибровочных преобразованиях, могут нести физическую информацию. Тогда калибровочное преобразование сводится к передаче содержащейся в них информации другим степеням свободы (пример: \mathbf{A}_{\parallel} , см. также разд.4). И наоборот, калибровочно-инвариантная величина может оказаться нефизической (примеры: $\partial\mathbf{E}$ для свободных полей и $G_2 = \partial\mathbf{E} - j_0$ — для взаимодействующих).

2.5. Неабелевы теории. При переходе к теории с неабелевой калибровочной группой (лагранжиан (2.1)) общая структура формализма не меняется. Правда, теперь уже нельзя начать исследование со свободного лагранжиана, положив в (2.1) $g=0$ — он калибровочно-неинвариантен. Но матрица

$$T_{ab}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_0}{\partial A_{\mu}^a \partial A_{\nu}^b} = T^{0\mu 0\nu} \delta_{ab} \quad (2.37)$$

по-прежнему вырождена, т.е. все проблемы, присущие электродинамике, здесь сохраняются. Канонически сопряженный A_{μ}^a импульс есть

$$\pi_a^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}^a} = F_a^{\mu 0}, \quad F_{\mu\nu}^a = \text{Tr}(\lambda^a F_{\mu\nu}), \quad (2.38)$$

т.е. имеются первичные связи

$$G_1^a = \pi_0^a = 0. \quad (2.39)$$

Первому члену в (2.1) отвечает гамильтониан

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{H}_a^2) - \mathbf{E}^a \mathbf{D}^{ab} A_0^b + \dot{A}_0^a \pi_0^a \right],$$

$$\mathbf{H}_a^2 = \frac{1}{2} (F_{ik}^a)^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} (F_{ik}^2), \quad (2.40)$$

где

$$\mathbf{D}^{ab} = \delta^{ab} \partial - g f^{abc} \mathbf{A}^c, \quad [\lambda^a, \lambda^b] = i\sqrt{2} f^{abc} \lambda^c. \quad (2.41)$$

Отметим, что последний член в гамильтониане (2.40) можно представить в виде $D_0^{ab} A_0^b \pi_0^a$. Вторичные связи

$$G_2^a = \{\pi_0^a, H\} = \mathbf{D}^{ab} \mathbf{E}^b = 0 \quad (2.42)$$

находятся в инволюции

$$\{G_2^a(x, t), G_2^b(y, t)\} = f^{abc} G_2^c(x, t) \delta(x - y), \quad (2.43)$$

т.е. их скобка Пуассона пропорциональна связям и исчезает вместе с ними. Нетрудно убедиться, что $\{G_2, H\} \approx 0$, $\{G_1, G_2\} = 0$, т.е. найдены все связи и они находятся в инволюции (связи первого рода). Полный гамильтониан и генератор расширенной группы калибровочных преобразований даются формулами

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{H}_a^2) + u^a G_1^a - v^a G_2^a \right], \quad (2.44)$$

$$G = \int d^3x (u^a G_1^a - v^a G_2^a), \quad (2.45)$$

где $u^a(x), v^a(x)$ — произвольные функции, так что поля A_μ^a меняются следующим образом:

$$\delta A_0^a = u^a, \quad \delta \mathbf{A}^a = \mathbf{D}^{ab} v^b. \quad (2.46)$$

Если в (2.45) положим $u^a = D_0^{ab} v^b$, то придем к стандартным калибровочным преобразованиям

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} v^b. \quad (2.47)$$

Так же, как и в случае электродинамики, убеждаемся, что относительно расширенной группы калибровочных преобразований гамильтониан и лагранжиан инвариантны лишь в слабом смысле, а полный гамильтониан H_T слабоинвариантен и относительно стандартной калибровочной группы.

Если в электродинамике проследить за судьбой физических и нефизических степеней свободы не представляло труда, то в теориях с неабеле-

вой калибровочной симметрией это не так. Очевидная совокупность нефизических переменных A_0^a (их скорости не входят в лагранжиан) не доставляет особых хлопот. Выделить же лоренц-инвариантным образом все нефизические переменные достаточно непросто [101]. Отчасти это связано с тем общим для всех калибровочных теорий обстоятельством, что преобразования из группы симметрии пространства-времени перемешивают физические и нефизические степени свободы, т.е. в новой системе отсчета физические компоненты могут содержать нефизические. Именно поэтому в теории возмущений преобразования вектор-потенциала A_μ под действием группы Лоренца должны сопровождаться калибровочными преобразованиями [102]. Главным же образом это связано с некоммутативностью калибровочной группы. Попытки выделить физические переменные, переформулировав теорию в терминах лишь калибровочно-инвариантных величин, также не сулят успеха — в простейших случаях формализм сильно усложняется [101,23,103]. Единственной разумной стратегией представляется следующая: присоединить связи к уравнениям движения в классической теории и потребовать их исчезновения на векторах из физического гильбертова пространства — в квантовой (см. ниже).

2.6. Квантование. Общая процедура квантования динамических систем со связями была разработана Дираком [96] (см. также [32—37]). В случае связей первого рода она сводится к рецепту: 1) все канонические переменные, входящие в гамильтониан, подчиняются каноническим перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [A_\mu^a(x, t), \pi_b^y(y, t)]_- &= i\delta_\mu^y \delta_b^a \delta(x - y), \\ [\psi_\rho^+(x, t), \psi_\sigma(y, t)]_+ &= \delta_\rho^\sigma \delta(x - y), \end{aligned} \quad (2.48)$$

где буквы ρ, σ включают в себя как спинорные, так и иные индексы; 2) векторы из физического гильбертова подпространства Φ фиксируются исчезновением на них всех связей первого рода

$$G_i^a \Phi = 0. \quad (2.49)$$

Это единственный надежный рецепт квантования. Все остальные рецепты — например, квантование в рамках метода континуального интегрирования — требуют, строго говоря, доказательства своей эквивалентности каноническому.

Подчеркнем: правила, применяемые в классической теории, не переносятся автоматически на квантовую теорию. Нельзя, например, требовать выполнения условия (1.8) для операторов — это привело бы к нарушению перестановочных соотношений (2.48). Сказанное относится и ко всем дру-

гим калибровочным условиям данного типа. Наиболее естественный путь здесь — использование динамических калибровок. В этом случае нефизические компоненты полей наделяются простейшей (а иногда и сложной, см. (1.20)) динамикой, и формально с ними можно обращаться так же, как и с физическими. Их отсутствие в физическом секторе гильбертова пространства обеспечивается исчезновением на физических векторах канонически сопряженных им импульсов (связей). Равным образом в квантовой теории и связи нельзя понимать в сильном смысле, т.е. как операторные равенства [96], это тоже ведет к нарушению перестановочных соотношений (2.48).

2.7. Метод континуального интегрирования. Метод континуального интегрирования играет важную роль в современной квантовой теории поля. Его популярность объясняется несколькими причинами. Во-первых, это наиболее адекватный задаче математический аппарат; во-вторых, его применение сильно упрощает выкладки (вывод правил Фейнмана, тождеств Уорда и т.п.); наконец, он позволяет развить единственный регулярный метод, не опирающийся на малость постоянной взаимодействия, т.е. позволяющий выйти за рамки теории возмущений (квазиклассическое разложение). Производящий функционал для функции Грина в этом подходе задается континуальным интегралом [40]:

$$Z[\mathcal{J}] \equiv e^{iW[\mathcal{J}]} = \int d[A\bar{\psi}\psi] e^{i(S[Q] + \mathcal{J}Q)}. \quad (2.50)$$

Здесь S — некоторое действие (для калибровочных теорий — инвариантное действие, задаваемое, например, лагранжианом (2.1), $S = \int dx \mathcal{L}$; в дальнейшем ограничимся одним сортом полей), $\mathcal{J}Q \equiv \int dx (JA + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)$, A_μ^a — калибровочное поле, $\psi, \bar{\psi}$ — спинорные заряженные поля, $J_\mu^a(x), \eta(x), \bar{\eta}(x)$ — классические источники (последние два принадлежат грассмановой алгебре); по всем невыписанным индексам (векторным, спинорным, групповым) предполагается суммирование. В этом интеграле могут присутствовать и другие поля. Определяемый (2.50) производящий функционал $W[\mathcal{J}]$ есть производящий функционал для связанных функций Грина*. Преобразованием Лежандра определяется еще один важный объект [50—53]:

$$\Gamma[\phi] = W[\mathcal{J}] - \mathcal{J}\phi, \quad \frac{\delta W}{\delta \mathcal{J}} = \phi. \quad (2.51)$$

*Насколько известно автору, это простое утверждение не имеет пока простого доказательства.

Предполагается, что в правой части первого равенства (2.51) стоит решение второго: $\mathcal{J} = \mathcal{J}[\phi]$. Тогда, как легко убедиться,

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} = -\mathcal{J}. \quad (2.52)$$

$\Gamma[\phi]$ есть производящий функционал для 1-неприводимых функций Грина (удалены полюсные диаграммы). Он задает все вершины эффективного лагранжиана [53]: $\Gamma = S_{\text{eff}}$. Основное свойство последнего — воспроизведение точной S -матрицы уже в низшем порядке теории возмущений (точная амплитуда вероятности любого процесса дается суммой древесных диаграмм [51,53]). В операторном формализме ϕ есть вакуумное среднее от Q (т.е. от $A, \psi, \bar{\psi}$) в присутствии внешних токов.

Как упоминалось, одна из главных проблем, порождаемых калибровочной инвариантностью, связана с интегрированием по чисто калибровочным степеням свободы. При вычислении связных функций Грина (т.е. функциональных производных от W по токам при нулевых значениях последних) интегрирование по калибровочным параметрам ведет к бесконечностям (см. пп.2.1, 2.5). Прямолинейный способ устранения калибровочного произвола заключается в подстановке под знак интеграла (2.50) произведения δ -функций от всех групповых параметров ω , т.е. $\delta(\omega)$. Обычно же калибровочный произвол устраняют с помощью калибровочных условий на вектор-потенциалы A вида $F(A) = 0$ (разд.1). Для инфинитезимальных преобразований (2.47) пишут

$$\delta(\omega) = \delta(F(A^\omega))D, \quad (2.53)$$

где $A_\mu^\omega = A_\mu + D_\mu \omega$, а коэффициент при δ -функции есть функциональный определитель

$$D = \det \left(\frac{\partial F^a(A^\omega)}{\partial \omega^b} \right). \quad (2.54)$$

Это и есть определитель Фаддеева — Попова [71,78]. Например, для калибровки Лоренца (1.8) имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)^{ab} = \frac{\partial [\partial_\mu (A_\mu^a + D_\mu^{ac} \omega^c)]}{\partial \omega^b} = \partial_\mu D_\mu^{ab}. \quad (2.55)$$

Заметим, что формула (2.53) справедлива без дальнейших уточнений лишь для малых возбуждений полей A_μ и для малых параметров ω .

Во-первых, это связано с тем, что уравнение $F(A^\omega) = 0$ может иметь несколько решений [73] (в действительности — бесконечно много [74,75]), а во-вторых — с тем, что в разложении

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|\det \partial f / \partial x|}, \quad (2.56)$$

где x_n — нули функции f , стоит модуль определителя, тогда как в (2.53) — определитель (в (2.56) фигурируют многомерные δ -функции). Практически поступают следующим образом.

1) Выбирают неоднородную калибровку

$$F = \partial_\mu A_\mu - f = 0, \quad (2.57)$$

где f — произвольная функция.

2) После подстановки δ -функции (2.53) под знак интеграла (2.50) интегрируют по f с гауссовским весом $P[f] = \text{const} \exp(-if^2/2\alpha)$. При этом к действию добавляется член типа (1.16) (фиксатор калибровки; подразумевается, что все сделанные предположения останутся верны при любом f).

3) Определитель D заменяется интегралом по скалярным антикоммутирующим полям c^a, \bar{c}^a [71,78]:

$$D = \int d[\bar{c}, c] e^{-i \int dx \bar{c} F' c}, \quad (2.58)$$

т.е. к исходному лагранжиану добавится еще и лагранжиан фиктивных полей $\mathcal{L}'' = \bar{c} F' c$, $F' = \partial F / \partial \omega$ (см. (2.55)).

После процедуры фиксации калибровки производящий функционал (2.50) приобретает вид

$$Z[\mathcal{J}] = \int d[A \bar{\psi} \psi \bar{c}, c] e^{i(S + S' + S'' + \mathcal{J})}, \quad (2.59)$$

где штрихованные добавки к действию отвечают лагранжианам \mathcal{L}' и \mathcal{L}'' . Полный лагранжиан в (2.59) $\mathcal{L}_T = \mathcal{L} + \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ уже инвариантен относительно калибровочных преобразований, но он инвариантен относительно глобальных суперсимметричных преобразований [68—70]. Например, для калибровки Лоренца это преобразования

$$\delta A_\mu^a = \varepsilon D_\mu^{ab} c^b, \quad \delta \bar{c}^a = \frac{1}{\alpha} \varepsilon \partial_\mu A_\mu^a, \quad \delta c^a = -\frac{1}{2} \varepsilon g f^{abc} c^b c^c, \quad (2.60)$$

где ε — не зависящий от координат антикоммутирующий параметр. Формально вектор-потенциалы преобразуются стандартно:

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \tilde{\omega}^b, \quad \tilde{\omega}^b(x) = \varepsilon c^b(x), \quad (2.61)$$

только теперь калибровочные параметры $\tilde{\omega}$ есть четные элементы грассмановой алгебры. Замечательно, что эти преобразования, будучи формально глобальными, не ослабляют ограничений, налагаемых локальной калибровочной инвариантностью ($\tilde{\omega}$ есть функции координат).

3. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Скалярная электродинамика в пространстве-времени (0 + 1). Теория поля сложна сама по себе, поэтому особенности теорий с локальной калибровочной симметрией лучше всего изучать на моделях. Простейшей из них является скалярная электродинамика в пространстве-времени (0 + 1) [104,103]:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x} - eyTx)^2 - V(x^2), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где компонентами вектора x являются вещественная и мнимая части комплексного поля ϕ (точнее, $\phi = (x_1 + ix_2)/2$), y отвечает нулевой компоненте вектор-потенциала A_μ , V — потенциальная энергия. Лагранжиан (3.1) описывает движение частицы единичной массы в плоскости (x_1, x_2) , т.е. x_1, x_2 — координаты частицы. Кроме них имеется еще одна динамическая переменная — это y . Калибровочные преобразования задаются соотношениями

$$\delta x = \omega eTx, \quad \delta y = \dot{\omega} = d\omega(t)/dt, \quad (3.2)$$

в которых ω есть произвольная инфинитезимальная функция времени. Лагранжиан не зависит от скорости y , поэтому в теории имеются связи. Первичная связь очевидна: $\pi = \partial L / \partial \dot{y} = 0$. Определяя импульс $p = \partial L / \partial \dot{x}$, находим гамильтониан

$$H = h + eyrTx + y\pi, \quad h = \frac{p^2}{2} + V(x^2), \quad (3.3)$$

а из условия $\dot{\pi} = \{\pi, H\} = 0$ находим вторичную связь

$$\sigma = eyrTx = 0. \quad (3.4)$$

Связи находятся в инволюции, других связей нет. Связь (3.4) с точностью до множителя есть генератор вращений в плоскости (x_1, x_2) , поэтому единственной физической переменной является инвариант $r = |x|$. Нефизических переменных две: y и $\theta = \text{arctg } x_2/x_1$, $\{\theta, \sigma/e\} = 1$. Несмотря на свою простоту, эта модель позволяет проиллюстрировать многие принципиальные особенности калибровочных теорий.

1. Фазовое пространство. Физическое фазовое пространство модели есть развертываемый в полуплоскость конус [104], т.е. наличие нефизической степени свободы решающим образом влияет на такую фундаментальную характеристику гамильтоновой системы, как фазовое пространство.

2. Исключение нефизических переменных в лагранжиане. Положив в (3.1) $y = 0$, получим совсем другую модель — некалибровочную теорию

с двумя физическими степенями свободы. В ней нет никакой информации о вторичных связях.

3. Остаточная дискретная калибровочная группа. Фиксируя калибровку условием

$$x_2 = 0 \quad (3.5)$$

(тензорная калибровка) обнаруживаем, что она оказывается неполной: имеется остаточная дискретная калибровочная группа Z_2 [23,76], нетривиальный элемент которой задается преобразованием

$$x_1 \rightarrow -x_1. \quad (3.6)$$

Данное утверждение легко обобщается на модели с любой редуктивной калибровочной группой [23,76]. Остаточной группой в этом случае является группа Вейля [105,106] (группа симметрии корневой диаграммы, подгруппа калибровочной группы).

4. Динамическая калибровка $\mathcal{L}' = -\dot{y}^2/2\alpha$. Добавление к лагранжиану (3.1) \mathcal{L}' не только задает динамику нефизических переменных, но и, вообще говоря, меняет динамику физических. Действительно, гамильтониан теперь выглядит так:

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r^2) - \frac{\alpha}{2} \pi^2 + eyp_\theta, \quad (3.7)$$

где r и θ есть полярные координаты ($r = |x|$), p_r, p_θ — канонически сопряженные импульсы, $\sigma = ep_\theta$. Но θ есть циклическая переменная, т.е. p_θ есть постоянная движения, задаваемая начальными условиями. Нетрудно убедиться, что при $p_\theta \neq 0$ меняются уравнения движения физических переменных r, p_r (из-за второго слагаемого в скобках равенства (3.7)). Итак, для того, чтобы нефизический сектор не влиял на физический, начальные условия для нефизических переменных в динамической калибровке не должны противоречить связям (в данном случае: $\pi(0) = p_\theta(0) = 0$).

5. Калибровка $\mathcal{L}' = -m^2 y^2/2$. Иногда в качестве фиксатора калибровки берут $\mathcal{L}' = -(nA)^2/2\alpha$. Хотя данный член и нарушает калибровочную инвариантность, он не снимает вырождения — лагранжиан по-прежнему остается вырожденным. Существо происходящих при этом изменений динамики лучше всего выяснить на модели (3.1) с добавлением члена $\mathcal{L}' = -m^2 y^2/2$. Сразу же подчеркнем, что это не динамическая калибровка — скорость \dot{y} не входит и в новый лагранжиан, т.е., как и раньше, $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{y} = 0$ (первичная связь). Гамильтониан имеет вид

$$H = h + \frac{1}{2} m^2 y^2 + e \mu r T x + i \pi, \quad (3.8)$$

где u — произвольная функция времени. Из условия $\dot{\pi} = \{\pi, H\} = 0$ находим вторичную связь

$$\dot{\pi} = \tilde{\sigma} = - (m^2 y + e \mu r T x) = 0. \quad (3.9)$$

Связи π и $\tilde{\sigma}$ не находятся в инволюции

$$\{\pi, \tilde{\sigma}\} = -m^2, \quad (3.10)$$

т.е. это есть связи второго рода. Согласно Дираку [96], в этом случае нужно видоизменить скобки Пуассона — перейти к скобкам Дирака. Условие самосогласованности $\{\pi, \tilde{\sigma}\} = -m^2 u = 0$ теперь есть условие на множитель Лагранжа $u(t)$. Исключая из H переменные y, π , получаем

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r^2) - \frac{e^2}{2m^2} p_\theta^2, \quad (3.11)$$

т.е., как и в случае (3.7), p_θ есть постоянная движения. Неудачный выбор начальных условий ($p_\theta \neq 0$) меняет динамику в физическом секторе. Единственное согласованное с условием (3.4) значение p_θ : $p_\theta(0) = 0$.

6. Квантование. Модель (3.1) позволяет проще всего проиллюстрировать тезис: в теориях со связями первого рода операции исключения нефизических переменных и квантования, вообще говоря, неперестановочны [107]. Действительно, нефизическими импульсами в (3.3) являются π и p_θ . Полагая их равными нулю, получаем

$$H'_{ph} = \frac{1}{2} p_r^2 + V(r^2). \quad (3.12)$$

Гамильтониан H'_{ph} описывает одномерное движение частицы в поле потенциала V . Рецепт квантования здесь стандартный: $r, p_r \rightarrow \hat{r}, \hat{p}_r$, $[\hat{r}, \hat{p}_r] = i$, т.е.

$$\hat{H}'_{ph} = -\frac{1}{2} \partial_r^2 + V. \quad (3.13)$$

С другой стороны, квантуя модель до исключения нефизических переменных, имеем:

$$\hat{H}_{ph} = -\frac{1}{2} \left[\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right] + V - i e y \partial_\theta - i u \partial_y. \quad (3.14)$$

Физический сектор задается условиями $\hat{\pi} \Phi = \hat{\sigma} \Phi = 0$, т.е. $\partial_y \Phi = \partial_\theta \Phi = 0$, и на векторах из физического гильбертова пространства гамильтониан (3.14) имеет вид

$$\hat{H}_{ph} = -\frac{1}{2} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) + V. \quad (3.15)$$

Гамильтонианы (3.13) и (3.15) не идентичны. С этим обстоятельством следует считаться при подстановке в континуальный интеграл δ -функций от исключаемых переменных (см. разд.4).

7. Противоречивая калибровка $\mathcal{L}' = yt$. Данный фиксатор хотя и нарушает калибровочную инвариантность, но ведет к противоречивой динамике. Имеем: $\pi = \partial L / \partial \dot{y} = 0$,

$$H = h + e\gamma T \mathbf{x} + i\pi - yt. \quad (3.16)$$

Условие самосогласованности $\dot{\pi} = \{\pi, H\} \equiv \Sigma = 0$ дает

$$\Sigma = -e\gamma T \mathbf{x} + t. \quad (3.17)$$

Так как время явным образом входит в Σ , условие согласованности (3.17) с динамикой, задаваемой гамильтонианом (3.16), теперь должно формулироваться так:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \{\Sigma, H\} = 0. \quad (3.18)$$

Но $\{\Sigma, H\} = 0$, т.е. (3.18) сводится к абсурдному требованию $1 = 0$.

8. Неоднозначные (неполные) калибровки. Модель (3.1) позволяет прояснить так называемую «проблему копий» [73]. При перенесении условий (1.8), (1.9) на неабелевы теории выяснилось, что они не полностью устраняют калибровочный произвол [73—75]. Одно время этому обстоятельству придавалось принципиальное значение. В действительности проблема не относится к разряду физических — своим происхождением она обязана не особенностям динамики физического сектора полей Янга — Миллса, а выбору калибровки, т.е. обстоятельству сугубо нефизическому. Об этом, впрочем, говорит уже тот факт, что существуют «бездуховые» калибровки, например, калибровки Вейля (1.10), Фока (1.14), аксиальные и т.п. Проблему копий можно создать даже в электродинамике. Для выяснения существа вопроса обратимся к рис.1 из работы [23]. Калибровочные орбиты на нем (множества точек, связанных калибровочным преобразованием) — окружности. Калибровочное условие $f(x_1, x_2) = 0$, f — некоторая функция, задает линию в плоскости. Так как точки, лежащие на одной орбите, физически неразличимы, для описания эволюции физических степеней свободы достаточно взять по одной точке каждой орбиты. В этом и заключается роль калибровочного условия. Может случиться, однако, что при неудачном выборе f задаваемая калибровочным условием кривая будет пересекать орбиты два и более раз. Например, прямая $f = x_2 = 0$ пересекает все орбиты дважды. Это неполная калибровка — остается произвол, задаваемый дискретной калибровочной группой Z_2 с элементами $(1, P)$, $Px_1 = -x_1$. Кривая 2 пересе-

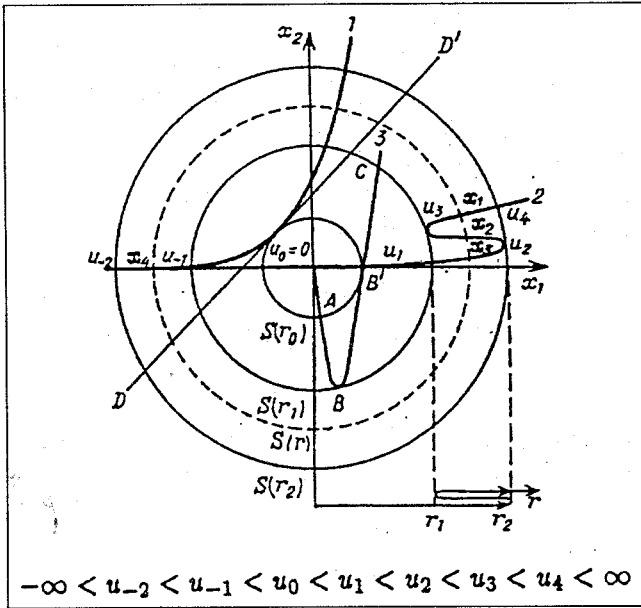


Рис.1

кает некоторые орбиты четыре раза, а кривая *1* вообще не пересекает орбит в окрестности нуля. Это недостаточная (неполная) калибровка — произвол переменных x_1, x_2 при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_0$ не устраняется (подробнее см. [23]).

Таким образом, накладывая калибровочное условие, необходимо убедиться, что оно непротиворечиво и не меняет динамики физических переменных.

3.2. Модель с калибровочной группой трансляций. Поучительна и модель, задаваемая лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}} - e\mathbf{T}\mathbf{x})^2 + \frac{1}{2} [(\dot{x}_3 - y)^2 + (\dot{x}_4 - y)^2] - V(x^2, x_3 - x_4), \quad (3.19)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Его группа инвариантности задается инфинитезимальными преобразованиями

$$\delta \mathbf{x} = \omega e \mathbf{T} \mathbf{x}, \quad \delta y = \dot{\omega}, \quad \delta x_3 = \delta x_4 = \omega, \quad \omega \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Отличительная черта модели: для переменной $2y_+ = x_3 + x_4$ калибровочные преобразования сводятся к трансляциям, тогда как $2y_- = x_3 - x_4$ есть калибровочный инвариант. Первичная связь: $\pi = \partial L / \partial \dot{y} = 0$; гамильтониан:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{1}{2}(p_3^2 + p_4^2) + V(x^2, x_3 - x_4) + y(p_3 + p_4 + e\mathbf{r}T\mathbf{x}) + \dot{y}\pi, \quad (3.21)$$

т.е. вторичная связь есть

$$\sigma = \{\pi, H\} = -(p_3 + p_4 + e\mathbf{r}T\mathbf{x}) = 0. \quad (3.22)$$

Модель позволяет прояснить вопрос о том, к каким физическим последствиям может привести исключение той или иной степени свободы. В модели (3.1) переменные x_1 и x_2 переводятся друг в друга калибровочным преобразованием, поэтому безразлично, какую из этих переменных исключать. В данной модели условие (3.22) связывает три импульса (p_3, p_4 и p_θ). Возникают вопросы: какой из них исключать, эквивалентны ли (физически) альтернативные варианты?

Нетрудно построить инвариантные переменные. Это

$$|x|, \quad z_+ = e^{-y_+ eT} \mathbf{x}, \quad z_{3,4} = e^{-x_{3,4} eT} \mathbf{x},$$

$$y_- = \frac{x_3 - x_4}{2}, \quad y_{3,4} = x_{3,4} - e^{-1} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}. \quad (3.23)$$

Переменные $z_{3,4,+}$ аналогичны нелокальному полю Ψ' (2.36). Экспонента в нем описывает кулоновское поле заряженной частицы, т.е. квант этого поля соответствует заряженной частице вместе с окружающим его электростатическим полем. Инвариантность переменных (3.23) очевидна — она вытекает из законов преобразования

$$\mathbf{x}' = e^{eT\Lambda} \mathbf{x}, \quad x'_{3,4} = x_{3,4} + \Lambda, \quad (3.24)$$

где Λ есть произвольная функция времени. Руководствуясь аналогией с электродинамикой, заключаем, что с вектором \mathbf{x} могут ассоциироваться три переменные: x_3, x_4 или y_+ . Соответствующие наборы инвариантных переменных таковы:

$$\{y_3, y_4, |x|\}, \quad \{y_4, z_3\}, \quad \{y_3, z_4\}, \quad \{y_-, z_+\}. \quad (3.25)$$

Перечисленные возможности априори равноправны. Надо полагать, что в реальном мире за счет тех или иных причин реализовывалась бы лишь одна из них. Из (3.23) видно, что «физические частицы», описываемые переменными $z_{3,4,+}$, обладают «сопутствующими полями» $\exp(-x_{3,4}eT)$, $\exp(-y_+eT)$, причем все они разные. Поучительно выписать исключаемые переменные и соответствующие гамильтонианы:

$$\begin{aligned}
 \theta & \quad \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \frac{1}{2} \frac{(p_3 + p_4)^2}{e^2 r^2} + p_3^2 + p_4^2 \right] + V(r^2, x_3 - x_4) \\
 x_{3,4} & \quad \frac{1}{2} [p^2 + (p_{4,3}^2 + e p_\theta)^2] + V(x^2, \mp y_{4,3}) \\
 x_3 + x_4 & \quad \frac{1}{2} \left[p^2 + \frac{1}{2} (p_3 - p_4)^2 + \frac{e^2 p_\theta^2}{2} \right] + V(x^2, 2y_-).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Переход к квантовому описанию не представляет труда. Векторы из физического гильбертова подпространства выделяются условиями исчезновения на них связей. Операторы Гамильтона получаются из (3.26) переходом к каноническим операторам (за исключением первого — в нем к p_r^2 необходимо добавить оператор $(i/r)\hat{p}_r$), а физические волновые функции будут зависеть от соответствующих наборов физических переменных: $r, y_3, y_4; z_{3,4,+}, y_{3,4,-}$. Таким образом, в данной модели все возможности равноправны. В реальном мире вопрос решается физикой дела. В качестве примера можно взять фотоны в сверхпроводнике выше и ниже критической точки [40], когда или продольная компонента $A_{||}$ ассоциируется с заряженным полем, формируя кулоновский фактор (см. (2.36)), или фаза заряженного поля вместе с компонентой $A_{||}$ образуют массивное продольное векторное поле.

Замечание. Очевидно, модель легко обобщается на любую полупростую группу G . Рассмотрим лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \text{Tr} (\dot{x} - yx)^2 + \frac{1}{2} \sum_{a,k} (\dot{z}_k^a - y^a)^2 + \sum_{i>k} V(\text{Tr} x^2, (z_i^a - z_k^a)^2), \tag{3.27}$$

где $\text{Tr} x^2 = \sum x_a^2$, $\text{Tr} y^2 = \sum y_a^2$, $\text{Tr} z_k^2 = \sum (z_k^a)^2$, $a = 1, 2, \dots, \dim G$, т.е. x, y, z — элементы алгебры Ли группы G в фундаментальном представлении, k — натуральные числа, $0 < k < \infty$. Он инвариантен относительно инфинитезимальных преобразований:

$$\delta x = \omega x, \quad \delta z_k = \omega, \quad \delta y = \dot{\omega}, \quad \omega \rightarrow 0. \tag{3.28}$$

Модель (3.19) с $e = 0$ рассматривалась Бурнелем [108, 109].

Проблема ненормируемости физических состояний. Одной из проблем квантовой электродинамики (КЭД) была проблема ненормируемости физических состояний. Хотя логически безупречную формулировку основ КЭД

можно найти уже в основополагающих статьях Гейзенберга и Паули [32,33] (см. также [34—37]), именно эта проблема была причиной появления работ Гупты и Блейлера [110—112], допустивших в физический сектор нефизические состояния (векторы с нулевой нормой). Данная модель позволяет разобраться в этом вопросе. Рассмотрим ее частный случай:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\dot{z} - y)^2. \quad (3.29)$$

Варьируемыми переменными являются $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, y и z . Переменная y — нефизическая, так как L не зависит от скорости \dot{y} , $\pi = \partial L / \partial \dot{y} = 0$. Гамильтониан таков ($p_z = \partial L / \partial \dot{z} = \dot{z} - y$):

$$H = h + \frac{1}{2} p_z^2 + y p_z; \quad (3.30)$$

из условия самосогласованности находим $\dot{\pi} = \{\pi, H\} = -p_z = 0$, т.е. z также является нефизической переменной. В квантовой теории все переменные, входящие в лагранжиан (3.29), становятся операторами. Согласно (2.49) связи первого рода должны исчезать на физических векторах Φ :

$$\hat{\pi} \Phi = -i \frac{d\Phi}{dy} = 0, \quad \hat{p}_z \Phi = -i \frac{d\Phi}{dz} = 0, \quad (3.31)$$

т.е. все физические волновые функции не зависят от y и z . Между тем при нормировании физических состояний необходимо интегрировать по всем переменным x, y, z , и так как каждая из двух последних пробегает всю вещественную ось, физические волновые функции оказываются ненормируемыми:

$$\int d^2x dy dz |\Phi(\mathbf{x})|^2 = \infty. \quad (3.32)$$

Ясно, что эта ненормируемость не имеет никакого отношения к физическим процессам в плоскости (x_1, x_2) , поэтому нет смысла требовать нормируемости Φ в подпространстве y, z . В данном случае задача решается просто — эти переменные нужно игнорировать: от них не зависят волновые функции, поэтому и не нужно по ним интегрировать в нормировочных условиях. После выяснения гамильтоновой структуры теории о них можно забыть. Подчеркнем, однако, что так просто дело обстоит лишь в рассматриваемой модели. В полевых калибровочных теориях имеет место лоренцевская инвариантность, физические и нефизические компоненты вектор-потенциалов перемешиваются, что и вынуждает прибегать к ухищрениям.

Инвариантные по форме калибровки. В модели (3.19) рассмотрим калибровки (см. (3.24), $\theta = e\Lambda$):

$$x_2' = x_2 \cos \theta - x_1 \sin \theta = 0 \quad (3.33)$$

и

$$x_4' = x_4 + \Lambda = 0. \quad (3.34)$$

Для переменных x_1', x_3' имеем равенства

$$x_1' = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \quad x_3' = x_3 + \Lambda. \quad (3.35)$$

Подставляя в первое из них решение уравнения (3.33) $\theta = \arctg x_2/x_1$, а во второе — решение (3.34) $\Lambda = -x_4$, находим

$$x_1' = x_1 \cos \arctg \frac{x_2}{x_1} + x_2 \sin \arctg \frac{x_2}{x_1} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |x|, \quad (3.36)$$

$$x_3' = x_3 - x_4 = 2y_-. \quad (3.37)$$

Но переменные $|x|$ и y_- есть калибровочные инварианты. С аналогичным фактом мы уже сталкивались в электродинамике: переменная ψ' (2.36) была получена переходом к кулоновской калибровке (см. [23]).

4. КАЛИБРОВОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

4.1. Нединамические калибровки. Калибровки Вейля ($A_0 = 0$), Максвелла ($\partial A = 0$) и Лоренца ($\partial_\mu A_\mu = 0$). Проанализируем роль, которая отводится физическим степеням свободы при том или ином выборе калибровки. Будут рассмотрены не все калибровки. Некоторые из них редко используются, в отношении других отсутствует полная ясность. С точки зрения физического содержания теории естественной является калибровка Вейля (1.10). Скорость A_0 не входит в лагранжиан (2.2), поэтому переменная A_0 заведомо нефизическая. Это верно и для неабелевых теорий — лагранжиан Янга — Миллса также не зависит от A_0^a . Полный гамильтониан (2.14) (или (2.33) с учетом (2.28)) дает $\dot{A}_0 = u(x)$, где u — произвольная функция, т.е. A_0 есть произвольная функция и ее можно положить равной нулю. Далее, в свободной теории $\partial E = 0$, следовательно, $A_{||}$ — также нефизическая переменная и ее тоже можно положить равной нулю: $\text{div } A = 0$, т.е. поле A поперечно. В свободной теории анализ на этом и заканчивался бы, если бы лоренцевское преобразование не перемешивало физические и нефизические компоненты. Но здесь приходит на помощь требование слабой калибровочной инвариантности физического сектора относительно расширенной группы калибровочных преобразований (2.16): надлежащий выбор функций u и v

позволяет обратить в нуль A_0 и A_{\parallel} в любой системе отсчета. Этим достигается релятивистская инвариантность и локальность теории (см. также [102,113]). Именно с этой целью и допускались в формализм нефизические степени свободы.

Ситуация несколько меняется при включении взаимодействия. Теперь вторичная связь есть $\sigma = \partial E - j_0 = 0$. Это условие утверждает, что бессмысленно рассматривать отдельно электрический заряд и продольное электрическое поле — достаточно ограничиться чем-то одним. Обычно выбирают заряд (заряженное поле). Может показаться, что здесь, наряду с $A_0 = 0$, нельзя требовать $A_{\parallel} = 0$ (т.е. $\text{div } \mathbf{A} = 0$), поскольку в этом случае имеем $j_0 = \partial E = \partial(\mathbf{A} - \partial A_0) = 0$ [114]. В действительности аналогичная проблема существует и в свободной теории: если u и v произвольны, то, вообще говоря, $\delta \partial E = \Delta(u - \dot{v}) \neq 0$, т.е. нарушается вторичная связь. Обсуждение этих вопросов см. ниже.

Совершим теперь калибровочное преобразование $A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu}$ (1.1), потребовав $\partial A' = 0$, т.е. $\partial \mathbf{A} + \Delta \Lambda = 0$; отсюда находим

$$\Lambda = -\Delta^{-1} \partial \mathbf{A}. \quad (4.1)$$

Ясно, что теперь Λ содержит информацию о продольном электромагнитном поле A_{\parallel} . Но $A'_0 = A_0 + \Lambda$, т.е. эта информация переносится в нулевую компоненту A'_0 . Полагая $A_0 = 0$ и обозначая $A'_0 = \phi$, имеем: $\phi = -\Delta^{-1} \partial \mathbf{A} = -\Delta^{-1} \partial E$. Фактически мы перешли от калибровки Вейля к радиационной калибровке. Учитывая закон Гаусса, получаем привычное выражение для кулоновского потенциала:

$$\phi = -\Delta^{-1} j_0. \quad (4.2)$$

Заряженное поле ψ также меняется — оно приобретает фактор $\exp(-ie\Delta^{-1} \partial \mathbf{A})$, отвечающий кулоновскому полю. Приведенная выкладка демонстрирует, каким образом нефизическая переменная ($A'_0 = \phi$) может содержать физическую информацию: калибровочным преобразованием она передается нефизической компоненте. Сказанное поясняет, почему A_0 обычно ассоциируется с кулоновским потенциалом.

Лоренцева калибровка, как правило, используется в классической электродинамике. Ее достоинства — релятивистская инвариантность и полнота (остающийся произвол сводится к произволу начальных условий, см. п.7.1). Согласно (2.2), (2.6), (2.8) уравнения движения

$$\square A_{\mu} + \partial_{\mu} (\partial_{\nu} A_{\nu}) = -j_{\mu} \quad (4.3)$$

сводятся в этой калибровке к уравнениям Л.Лоренца [24]:

$$\square A_\mu = -j_\mu \quad (4.4)$$

Нефизическая степень свободы исключается из теории релятивистски-инвариантным образом. Совершая разбиение

$$A_\mu = A_\mu^{tr} + A_\mu^l, \quad \partial_\mu A_\mu^{tr} = 0, \quad (4.5)$$

имеем: $\partial_\mu A_\mu = \partial_\mu A_\mu^l$. Очевидно, $A_\mu^l = -\square^{-1} \partial_\mu (\partial_\nu A_\nu)$, т.е. A_μ^l есть чисто градиентное поле и его можно устранить калибровочным преобразованием. Из (4.4) следует, что оно не взаимодействует с заряженными полями: $\square A_\mu^l = 0$, поскольку $\partial_\mu j_\mu = 0$. Следовательно, оно не излучается и не поглощается. Пропагатор электромагнитного поля в этой калибровке

$$\Delta_{\mu\nu}^c = \frac{-i}{q^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (4.6)$$

имеет дополнительный полюс, который, однако, не доставляет хлопот ввиду сохранения тока. В статическом случае ($A_0^{tr} = 0$) поле A_0^{tr} удовлетворяет уравнению Пуассона, решение которого (4.2) есть кулоновский потенциал.

Переход к лоренцевской калибровке сопровождается изменением фазы заряженного поля: $\partial_\mu A'_\mu = \partial_\mu A_\mu - \square \Lambda = 0$, т.е. $\Lambda = \square^{-1} \partial_\mu A_\mu$, $\psi \rightarrow \psi' = \exp(i e \square^{-1} \partial_\mu A_\mu) \psi$. Итак, калибровочным условием из динамики исключается поле $\partial_\mu A_\mu$, присутствующее в лагранжиане (2.2). Оно ассоциируется с заряженным полем ψ , т.е. теперь его динамика определяется динамикой ψ' . При переходе к статическим полям ($A_\mu = 0$) экспонента в ψ' превращается в кулоновскую экспоненту (2.36).

Теперь мы готовы к тому, чтобы подробнее обсудить вопрос об одновременном устранении полей A_0 и A_\parallel с помощью преобразований из расширенной калибровочной группы. Он тесно связан с другим вопросом: вполне ли произвольны калибровочные параметры u и v ? Этот последний эквивалентен вопросу о допустимости нарушения связей первого рода (до перехода в физический сектор), в частности, преобразованиями из расширенной калибровочной группы, поскольку $\delta(\partial E - j_0) = \Delta(u - \dot{v}) \neq 0$. В лагранжиан входят все компоненты A_μ , физические и нефизические, и все они, как мы видели в разд.3, существенны для физики. Известно, что теория допускает формулировку в терминах лишь физических величин, инвариантных относительно преобразований из расширенной калибровочной группы,

именно величин ψ' (2.36) и \mathbf{A}_\perp : $\delta_{u,v} \psi' = \delta_{u,v} \mathbf{A}_\perp = 0$. Соответствующий гамильтониан скалярной электродинамики таков [95]:

$$H_{ph} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{E}_\perp^2 + \mathbf{H}^2 - j_0 \Delta^{-1} j_0] + \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} [(\partial + e\mathbf{A}_\perp T) \Phi']^2 \right\}, \quad (4.7)$$

где компоненты двумерного вектора Φ есть вещественная и мнимая части скалярного комплексного поля $\Phi = (\Phi_1 + i\Phi_2)/\sqrt{2}$, Π — канонический импульс скалярного поля, матрица T выписана в (3.1), а штрихованное поле Φ' отличается от Φ кулоновской экспонентой:

$$\Phi'(x) = \exp \left(-e \int \frac{d^3y}{4\pi} \frac{\partial \Delta(y)}{|x-y|} T \right) \Phi(x). \quad (4.8)$$

Таким образом, в физическом секторе, т.е. с учетом всех связей первого рода, теория формулируется в терминах лишь поперечных полей:

$$A_0 = \mathbf{A}_\parallel = 0. \quad (4.9)$$

Ее отличительная черта — нелокальность всех физических полей (Φ' дается (4.9), ψ' — (2.36), $\mathbf{A}_\perp = -\Delta^{-1} \text{rot } \mathbf{H}$). В гамильтониане (4.7) уже учтены связи, поэтому, несмотря на условия (4.9), нельзя говорить о нарушении закона Гаусса, т.е. о противоречии требований (4.9) связям. Подчеркнем, впрочем, что поле \mathbf{A}_\parallel исчезает лишь в данном представлении. С точки зрения исходных (локальных) переменных Φ , A_μ оно не исчезло — продольное поле перешло в экспоненту (4.8). Это означает, для того, чтобы проследить за судьбой \mathbf{A}_\parallel , необходимо решить уравнения движения для поля Φ' .

Итак, нефизическими степенями свободы являются величины, канонически сопряженные всем связям первого рода (их скобки Пуассона со всеми остальными каноническими переменными должны равняться нулю). С помощью калибровочных преобразований можно фиксировать нефизические переменные: или положить их равными нулю, или перенести в них информацию, содержащуюся в физических степенях свободы. Пользуясь тем, что физический сектор не зависит от нефизических переменных, последние можно произвольно менять. В частности, можно менять генераторы калибровочных преобразований (связи), что и происходит, например, в калибровке Фейнмана: $\pi_0 = \partial_\mu A_\mu \neq 0$. Здесь важно лишь, чтобы в физическом секторе $\pi_0 = 0$. Используя в полном объеме калибровочную свободу, т.е. переходя к расширенной группе преобразований, мы оперируем в пространстве, включающем как физические, так и нефизические переменные. Поэтому на данном этапе нельзя говорить о нарушении каких-либо условий

(уравнений движения, связей) — важно лишь, чтобы эти операции не затрагивали физического сектора, переход в который возможен в любой момент и осуществляется учетом связей.

Резюмируем: до перехода в физический сектор можно пользоваться преобразованиями из расширенной калибровочной группы с произвольными параметрами u и v .

Аксиальная калибровка $A_3 = 0$. Аксиальные калибровки вызвали особый интерес в связи с тем, что при их использовании отпадает необходимость прибегать к фиктивным полям: матрица в (2.54) не зависит от полей, вследствие чего не возникает и проблемы копий. Фиксацией третьей компоненты A_μ

$$A'_3 = A_3 + \partial_3 \Lambda = 0 \quad (4.10)$$

содержащаяся в ней информация переносится в другие компоненты, поскольку

$$\Lambda = \int_{x_3} A_3 dx^3. \quad (4.11)$$

Обращают на себя внимание следующие обстоятельства. Нарушается явным образом не только релятивистская инвариантность, но и изотропность 3-мерного пространства. Далее, даже при убывающих на бесконечности полях $A_\mu (A_3 \sim 1/x_3, |x_3| \rightarrow \infty)$ функция Λ не убывает: $\Lambda \sim \ln |x_3|, |x_3| \rightarrow \infty$. Очевидно, применение этой калибровки корректно лишь в задачах с быстро убывающими потенциалами. Наконец, параметры остаточной калибровочной группы $\Lambda', \partial_3 \Lambda' = 0$ зависят от времени. Следовательно, калибровочный произвол устранен не полностью — остались нефизические степени свободы, которые могут произвольно меняться со временем. Правда, $\Lambda' = \Lambda'(x_1, x_2, t)$ зависит лишь от двух координат, т.е. множество нефизических переменных двухпараметрическое, и с точки зрения исходного (трехмерного) множества имеет меру нуль. В рамках расширенной калибровочной группы преобразование (4.10) генерируется вorticной связью, т.е. $\Lambda = v$.

Пропагатор электромагнитного поля в аксиальной калибровке [31]

$$\Delta_{\mu\nu}^c = \frac{-i}{q^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu}{qn} + \frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2} n^2 \right) \quad (4.12)$$

имеет полюс при $qn = 0$, т.е. поля, распространяющиеся в плоскости, нормальной к n , полностью коррелированы.

Причинная функция может выглядеть довольно сложно при использовании вычурных калибровок. Существует простой критерий, которому дол-

жен удовлетворять пропагатор электромагнитного поля (он естествен для динамических калибровок, но пригоден и для нединамических, за исключением вейлевской): обмен фотоном статическими источниками должен воспроизводить кулоновский потенциал. Рассмотрим электродинамику со статическими источниками J_μ [115]:

$$S = - \int dx \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + A_\mu J_\mu \right]. \quad (4.13)$$

Подстановка этого действия в (2.50) дает

$$W[J] = \frac{i}{2} J_\mu \Delta_{\mu\nu}^c J_\nu, \quad (4.14)$$

где $\Delta_{\mu\nu}^c$ — пропагатор фотона. Включение токов меняет энергию «вакуума» (теперь это основное состояние в присутствии токов). В случае статических источников имеем

$$\Delta E_{\text{vac}} T = - W[J], \quad (4.15)$$

ΔE_{vac} — сдвиг энергии вакуума, T — временной интервал, $T = t_2 - t_1 \rightarrow \infty$. Поскольку $J_\mu(x) \rightarrow J_0(x)$, $J_0 = 0$ и в импульсном пространстве $\tilde{J}_0(q) = 2\pi\delta(q_0)\tilde{J}_0(\mathbf{q})$, находим

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{vac}} T &= - \frac{i}{2} \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \tilde{J}_0(q) \Delta_{00}^c(q) \tilde{J}_0(-q) = \\ &= \frac{2\pi\delta(0)}{2i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{J}_0(\mathbf{q}) \Delta_{00}^c(\mathbf{q}) \tilde{J}_0(-\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

т.е., ввиду замены $2\pi\delta(0) \rightarrow T$,

$$\Delta E_{\text{vac}} = - \frac{i}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{J}_0(\mathbf{q}) \Delta_{00}^c(\mathbf{q}) \tilde{J}_0(-\mathbf{q}). \quad (4.17)$$

С другой стороны, переход к гамильтониану в физическом секторе (2.35) дает

$$\Delta E_{\text{vac}} = - \frac{1}{2} J_0 \Delta^{-1} J_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{J}_0(\mathbf{q}) \frac{1}{q^2} \tilde{J}_0(-\mathbf{q}). \quad (4.18)$$

Сравнивая (4.17) и (4.18), получаем искомый критерий

$$-i \Delta_{00}^c(q) \Big|_{q_0=0} = \frac{1}{q^2}. \quad (4.19)$$

Данный пример еще раз демонстрирует специфику нефизических степеней свободы. Казалось бы, выбирая в случае $\mathbf{J} = 0$ калибровку $A_0 = 0$, мы

избавляемся от взаимодействия в (4.13). Но в лагранжиане нельзя полагать равными нулю переменные, даже нефизические. Роль A_0 заключается в генерации вторичной связи (закона Гаусса), свидетельствующей о появлении в окрестности покоящегося заряда статического электрического (т.е. продольного) поля. Продольные поля не могут распространяться в отрыве от зарядов — при желании можно говорить об их пленении. Впрочем, можно так распорядиться произволом (например, выбрать калибровку Фейнмана, см. ниже), что A_0 и A_{\parallel} удовлетворяют уравнениям движения Л.Лоренца (4.4), а совокупный эффект обмена квантами этих полей дает кулоновский потенциал.

Калибровка Фока. К калибровке (1.15) Фок пришел, изучая движение заряженной релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле. Действие

$$S = -\frac{m}{2} \int \left[\dot{x}^2 + 1 + \frac{e}{m} A_{\mu} \dot{x}^{\mu} \right] d\tau, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \quad (4.20)$$

где τ — инвариантный параметр, ведет к тем же самым уравнениям движения, что и стандартное с лагранжианом

$$L_0 = -m \sqrt{1 - v^2} - A_{\mu} J_{\mu}, \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad (4.21)$$

если $\dot{x}^2 = 1$, т.е. если τ — «собственное время». Взаимодействие классической частицы с током $J_{\mu} = edx_{\mu}/dt$ в (4.21) есть результат перехода к массивным полям в лагранжиане (2.2): $m \rightarrow \infty$, $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi \rightarrow dx^{\mu}/dt \delta(x - x(t))$.

Применение этой идеи к релятивистскому электрону позволило найти решение уравнения Дирака при наличии внешнего поля [28,29]. Совершая калибровочное преобразование с функцией

$$\Lambda = \int_x^{x_0} A_{\mu} dx^{\mu}, \quad (4.22)$$

обнаруживаем, что новые потенциалы $A' = A + \partial\Lambda$ удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^{\mu} A'_{\mu}(x) = 0, \quad (4.23)$$

если в (4.22) интегрируется по прямой, соединяющей точки x и x_0 . Эта калибровка удобна в случае массивных частиц или частиц высоких энергий, когда излучение не слишком жестких фотонов мало меняет их импульс, т.е. когда применимо «инфракрасное приближение». Именно поэтому она применяется при изучении жестких процессов, в частности, при изучении процессов глубоконеупругого рассеяния [60,116]. Отсюда

же ее связь с контурными калибровками [60]. Калибровка Фока замечательна тем, что позволяет выразить потенциалы через напряженности

$$A_{\mu}(x) = x_{\nu} \int_0^1 s F_{\mu\nu}(sx) ds. \quad (4.24)$$

Подробное доказательство этого можно найти в [30]. Формула (4.24) справедлива и в неабелевых теориях. Отметим попутно, что калибровочная инвариантность потенциалов в (4.24) иллюзорна — к A_{μ} можно добавить $\partial_{\mu}\Lambda$, сохранив $F_{\mu\nu}$, но нарушив калибровку; по существу (4.24) — частный случай (именуемый калибровкой Фока), когда неинвариантный объект принимает инвариантный вид. Относительно связи представления (4.24) с внешними дифференциальными формами см. приложение 7.3.

Связь калибровки Фока с другими калибровками. Калибровка Фока является как бы центром, объединяющим многие физически важные калибровки.

Калибровка Максвелла. В [117,99] было показано, что экспоненциальный фактор в (2.36), описывающий кулоновское поле, представляется бесконечным произведением линейных экспонент:

$$\prod_{ij}^N \exp\left(-ie \int_{-\infty}^x A_{\mu}(y_{ij}) dy_{ij}^{\mu}\right) \rightarrow e^{-ie\Delta^{-1}\partial A}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.25)$$

Индексы i, j нумеруют площадки на окружающей заряд единичной сфере, через которые проходят исходящие из заряда прямые (контурные интегрирования (4.25)). Ясно, что в случае статического источника калибровка Фока (1.14) эквивалентна калибровке Максвелла (1.9), ассоциирующей продольное поле A_{\parallel} с полем материи. Независимо от представления (4.25) это можно увидеть непосредственно из формулы (4.8). Интегрируя в показателе экспоненты по частям, записываем ее в виде

$$\exp\left(e \int \frac{d^3y(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathbf{A}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} T\right). \quad (4.26)$$

Очевидно, как и в случае радиационной калибровки, в задаче с фиксированным источником требование (1.15) ассоциирует продольное поле A_{\parallel} с зарядом.

Другие калибровки. Калибровка Фока тесно связана с калибровками, использующими линейные экспоненты. Она полезна в задачах, где встречаются линейные интегралы от вектор-потенциалов, т.е. интегралы 1-форм. Характерный пример дает физика инфракрасного излучения. Инфракрасные фотоны генерируются классическим током [118;119], и для их учета

достаточно рассмотреть задачу с действием (4.13). Движение точечного заряда связано с током

$$J_{\mu}(p, x) = \frac{ep_{\mu}}{E_p} \delta \left(x - \frac{\mathbf{p}}{E_p} t \right), \quad p_{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{ds} m = \frac{dx_{\mu}}{dt} E_p, \quad (4.27)$$

где p_{μ} — импульс частицы, E_p — ее энергия, $p^2 = m^2$. Типичный фактор, описывающий поле излученных фотонов в калибровке Фейнмана, дается экспонентами

$$\exp \left(i \int_0^{\infty} dt \int d^3x A_{\mu}^{\Delta} J_{\mu} \right) = \exp \left(ie \int_0^{\infty} dt A_{\mu}^{\Delta} (n_p^{\mu} t) n_p^{\mu} \right) = \exp \left(ie \int_{n_p} A_{\mu}^{\Delta}(x) dx^{\mu} \right). \quad (4.28)$$

Здесь $n_p^{\mu} = p^{\mu} / E_p = dx^{\mu} / dt$; интегрирование в последнем члене (4.28) ведется по прямой, задаваемой вектором n_p . Значок Δ при A_{μ} означает, что учитываются нерегистрируемые фотоны в интервале энергий $\Delta = E - \epsilon$, где E — разрешающая способность аппаратуры (регистрируются лишь фотоны с энергией $\omega_q > E$); ϵ^{-1} характеризует минимальный размер области, в которой находится излучающая частица и полный заряд которой равен нулю (фотоны с длиной волны $\lambda_q > \epsilon^{-1}$ не излучаются). Экспоненты (4.28) описывают поле инфракрасных фотонов рассеянной частицы; переход к полю налетающей частицы достигается изменением знака показателя экспоненты. Эти формулы справедливы и в том случае, когда энергии излученных фотонов не малы. Для их применимости необходимо лишь, чтобы излучение квантов пренебрежимо мало влияло на импульс заряженной частицы, т.е. при $|p| \rightarrow \infty$. Отсюда становится ясной причина, по которой калибровка Фока оказывается связанной с калибровками, употребляемыми при описании жестких процессов. Так как $n_p^2 = m^2 / E_p^2$, то $n_p^2 \rightarrow 0$ при $E_p \rightarrow \infty$, и мы приходим к калибровке светового конуса. Ей близка калибровка Липатова [45] (см. ниже (4.39)). Импульсы фотона q и протона p , участвующих в процессе глубоконеупругого рассеяния, представляются в виде $q = q' + p'q^2 / s'$, $p = p' + q'm^2 / s'$, где $q'^2 = p'^2 = 0$, $s' = 2p'q'$; произвольный импульс k представляется суммой $k = \alpha q' + \beta p' + k_{\perp}$, $q'k_{\perp} = p'k_{\perp} = 0$. Пропагатор векторной частицы (глюона) с импульсом k в этом подходе

$$\Delta_{\mu\nu}^c = \frac{-i}{k^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q'_{\mu} k_{\nu} + k_{\mu} q'_{\nu}}{q'k} \right). \quad (4.29)$$

идентичен пропагатору в калибровке светового конуса ((4.12) при $n^2 = 0$); роль вектора n играет компонента q' налетающего фотона ($q'^2 = 0$). В дан-

ной калибровке вклад диаграмм с тормозными квантами пренебрежим в главном логарифмическом приближении. В неабелевых теориях формулы (4.28) сохраняют смысл, если считать, что поля принимают значения из алгебры Ли калибровочной группы, и ввести упорядочение операторов вдоль пути интегрирования.

Итак, калибровка Фока связана с целой группой физически важных калибровок, имеющих разный физический смысл. Суть любого калибровочного условия заключается в указании поля (степени свободы), не содержащегося или исключаемого из уравнений движения. В случае калибровки Максвелла это продольное поле A_{\parallel} . Оно ассоциируется с заряженным полем материи и не может излучаться (кулоновская экспонента (2.36)), поэтому изучается динамика лишь заряженных полей и поперечных полей A_{\perp} , которые распространяются свободно. Эти последние удовлетворяют условию $\partial A_{\perp} = 0$; по существу, совершено калибровочное преобразование $A \rightarrow A' = A_{\perp}$. Связь с калибровкой Фока (1.14) выясняется из возможности представления кулоновского фактора в (2.36) бесконечным произведением линейных экспонент (4.25), (4.26).

Калибровки, используемые в физике частиц высоких энергий, также связаны с линейными интегралами от вектор-потенциалов. При $|p| \rightarrow \infty$ применимо квазиклассическое приближение, когда траектории частиц аппроксимируются прямыми, и поле нерегистрируемых («мягких») квантов, сопровождающее частицу, дается экспонентами (4.28). Отсюда появление калибровки Фока — «инфракрасные поля», сопутствующие частице, исключаются из динамики, т.е. фактически совершается калибровочное преобразование $A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu}$, $(x - x_0)_{\mu} A'_{\mu} = 0$. Теперь для того, чтобы проследить за их судьбой, достаточно проследить за излучающей частицей. При $|p| \rightarrow \infty$ вектор $n_p \sim x - x_0$ становится светоподобным и калибровка Фока превращается в калибровку светового конуса.

Хотя условия (1.14), (1.15) лежат в основе и калибровки Максвелла, и светового конуса, физически они совершенно различны. Как мы выяснили, нединамические калибровочные условия выделяют поля, ассоциируемые с зарядами и не фигурирующие явным образом в уравнениях движения. В случае радиационной калибровки — это кулоновское поле, описываемое A_{\parallel} . Оно связано с зарядами и может распространяться лишь вместе с ними, тогда как поля A_{\perp} — динамические, т.е. могут поглощаться, излучаться и распространяться независимо от зарядов. В случае же аксиальных калибровок, связанных с введением факторов (4.28), поле $n_p A^{\Delta}$ — поле нерегистрируемого излучения, т.е. это скрытые, пассивные степени свободы. Активно

проявляют себя остающиеся компоненты A_μ , которые могут наблюдаться. Разумеется, применение более совершенной аппаратуры позволит наблюдать и эти, в данных обстоятельствах исключаемые из динамики поля. Сказанное означает, что разделение полей на пассивные и активные условно. Наконец, еще одно отличие калибровок, используемых при изучении реальных процессов, связано с тем, что в калибровке светового конуса (1.12) исключаются все поля, тогда как согласно (4.28) в жестких процессах следует исключать лишь кванты с энергией из интервала Δ .

Отметим в заключение, что линейные экспоненты имеют глубокий геометрический смысл: с точки зрения расслоенных пространств поля A_μ есть связности, а линейные экспоненты — операторы параллельного переноса [22,121]. Учитывая, что калибровка Фока естественно интерпретируется и на языке внешних дифференциальных форм (см. приложение 7.3), становится ясным, что ее появление — это результат глубокого проникновения в существо калибровочных теорий.

4.2. Динамические калибровки. Калибровка Фейнмана $\mathcal{L}' = -(\partial_\mu A_\mu)^2/2$. Прежде всего покажем, что классические уравнения движения в калибровках Лоренца и Фейнмана совпадают. Действительно, из представления (2.6), (2.8) следует, что за вычетом четырехмерной дивергенции лагранжиан свободного электромагнитного поля \mathcal{L}_0 записывается в виде

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} A_\mu \square A_\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2. \quad (4.30)$$

Фиксация калибровки по Гейзенбергу — Паули — Фейнману [32,33] заключается в добавлении к \mathcal{L}_0 члена $\mathcal{L}' = -(\partial_\mu A_\mu)^2/2$, поэтому в обеих калибровках второе слагаемое в лагранжиане (4.30) исчезает, и мы приходим к (4.4). Разница между ними в том, что в калибровке Лоренца поле $\partial_\mu A_\mu = 0$, а в калибровке Фейнмана оно, согласно (4.4), удовлетворяет уравнению Даламбера $\square \partial_\mu A_\mu = 0$.

Калибровка Фейнмана по существу является стандартной. Тому по крайней мере две причины: 1) ее явная релятивистская инвариантность; 2) возможность проследить судьбу физических степеней свободы. Действительно, пропагатор фотона в этой калибровке пропорционален метрическому тензору

$$\Delta_{\mu\nu}^c = \frac{-i}{q^2 + i0} g_{\mu\nu}, \quad (4.31)$$

т.е. заряженные частицы обмениваются не только поперечными квантами A_\perp , но и квантами полей A_0, A_\parallel . Совокупный эффект последних должен

сводиться к кулоновскому взаимодействию. Каким же образом здесь сосуществуют физические и нефизические степени свободы? Ответ на этот вопрос дал Фейнман [122—124]. В импульсном представлении эффект от обмена квантами A_μ пропорционален M :

$$iM = \frac{j_\mu j_\mu}{q^2 + i0} \quad (4.32)$$

Учитывая сохранение тока $q_\mu j_\mu = q_0 j_0 - \mathbf{q} \mathbf{j}_\parallel = 0$, подставляем в сумму $j_\mu j_\mu = j_0^2 - \mathbf{j}_\parallel^2 - \mathbf{j}_\perp^2$ выражение для продольной компоненты:

$$\mathbf{j}_\parallel = \frac{\mathbf{q}}{q^2} q_0 j_0 \quad (4.33)$$

Получаем

$$iM = \frac{1}{q^2 + i0} \left[j_0^2 - \frac{q_0^2}{q^2} j_0^2 - \mathbf{j}_\perp^2 \right] = -\frac{j_0 j_0}{q^2} - \frac{\mathbf{j}_\perp \mathbf{j}_\perp}{q^2 + i0} \quad (4.34)$$

Представление (4.34) имеет ясный физический смысл: обмен квантами полей A_0 и A_\parallel дает кулоновское взаимодействие $-j_0^2/q^2$, тогда как эффект обмена поперечными (калибровочно-инвариантными) компонентами A_\perp определяется магнитными характеристиками частиц. Зная пропагатор в калибровке Фейнмана, легко получить пропагаторы в лоренцевской и аксиальной калибровках. Исходной является формула

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (4.35)$$

Переходя, например, к калибровке Лоренца $\partial_\mu A'_\mu = 0$, имеем $\Lambda = \square^{-1} \partial_\mu A_\mu$, т.е. $A'_\mu = A_\mu + \square^{-1} \partial_\mu \partial_\nu A_\nu$ и, учитывая, что пропагатор A_μ дается (4.31), получаем (4.6). В случае аксиальных калибровок имеем $nA' = 0$, т.е. $\Lambda = -(n\partial)^{-1} nA$ и $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu (n\partial)^{-1} nA$. Снова пользуясь (4.31), получаем пропагатор (4.12) в аксиальных калибровках: Вейля ($n^2 = 1$), светового конуса ($n^2 = 0$) и Арновита — Фиклера ($n^2 = -1$). Наконец, для перехода к радиационной калибровке (1.9) необходимо взять $\Lambda = -\Delta^{-1} \partial A$. С помощью матрицы T (2.7) и операторов $\square_T = T^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \Delta$, $\partial_\mu^T = g_{\mu\nu} T^{\nu\rho} \partial_\rho$, $\partial \partial_T = \partial_T^2 = -\square_T$, $\partial_\mu^T A_\mu = -\partial A$ записываем A'_μ в калибровке Максвелла в инвариантной форме: $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \square_T^{-1} \partial_\nu^T A_\nu$. Искомый пропагатор фотона имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}^M = \frac{-i}{q^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu^T + q_\mu^T q_\nu}{q_T^2} + \frac{q_\mu q_\nu}{q_T^2} \right). \quad (4.36)$$

В силу сохранения тока производная в (4.35) не меняет амплитуды вероятности процесса, т.е. во всех этих калибровках будут иметь место разбиение (4.34) и критерий (4.19). Для полной ясности приведем все же детали вычислений для какой-нибудь одной калибровки. Например, в калибровке Вейля $\Delta_{00}^W = 0$ (см. (4.12)), следовательно,

$$iM^W = \frac{1}{q^2 + i0} \left(-\mathbf{j}^2 + \frac{(\mathbf{qj})^2}{q_0^2} \right). \quad (4.37)$$

Но $\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}_{\parallel}^2 + \mathbf{j}_{\perp}^2$, $(\mathbf{qj})^2 = \mathbf{q}^2 \mathbf{j}_{\parallel}^2$, и, учитывая (4.33), приходим к представлению (4.34) для M^W . Соответствующие выкладки для других калибровок отличаются лишь не принципиальными деталями.

Другие калибровки. Обсудим вкратце некоторые другие калибровки, связанные с добавлением в лагранжиан калибровочно-неинвариантных членов. Добавление \mathcal{L}' (1.21) (планарная калибровка) меняет матрицу K (2.8) в лагранжиане (2.6):

$$K_{\mu\nu} \rightarrow K'_{\mu\nu} = -\square \left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \frac{n_\mu n_\nu}{\alpha n^2} \right). \quad (4.38)$$

Пропагатор векторной частицы имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}^{Pl} = \frac{-i}{q^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu}{qn} + \frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2} (1 - \alpha)n^2 \right). \quad (4.39)$$

При $\alpha \rightarrow 1$ получается планарная калибровка работы [46] ($n^2 \neq 0$), а при $n^2 \rightarrow 0$ приходим к калибровке Липатова [45], $\square n A = 0$. Последняя относится к калибровке светового конуса $nA = 0$ так же, как калибровка Фейнмана ($\square \partial A = 0$) к калибровке Лоренца ($\partial A = 0$). Названием «планарная калибровка» [46] термин обязан плоскости, в которой лежит вектор $n = \alpha q' + \beta p'$, $n^2 \neq 0$ (см. (4.29)). Таким образом, термин, связываемый с фиксатором (1.21), охватывает разные калибровки.

Калибровка (1.22) для $n^2 = 0, 1$ — динамическая (\mathcal{L}' квадратичен по скоростям \dot{A}_0), а при $n^2 = -1$ фиксатор \mathcal{L}' меняет динамику компоненты nA .

Фоновая калибровка (1.23) важна не только для получения результатов общего характера, но и для конкретных вычислений [49]. В этом подходе

помимо выбора \mathcal{L}' важной находкой является идея разбиения связности на тензор и связность (условие (1.24)).

Иногда в качестве фиксаторов предлагают брать [44]:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} (\partial A)^2 \quad (4.40)$$

или

$$\mathcal{L}' = -\frac{\beta^2}{2} (nA)^2. \quad (4.41)$$

Прежде всего отметим, что эти калибровки не относятся к классу динамических — в них не входит скорость A_0 . Далее, добавление к \mathcal{L} (4.40) эквивалентно радиационной калибровке лишь при $\alpha \rightarrow 0$, а добавление (4.41) [31] сводится к наделению массой поля nA и при $n^2 < 0$ меняет динамику физического сектора. Псевдоаксиальная калибровка (4.41) сводится к аксиальной при $\beta \rightarrow \infty$.

4.3. Квантование. Принципиальная роль динамических калибровок проявляется при квантовании. Нединамические калибровочные условия, например, $A_0 = 0$, не могут трактоваться как операторные равенства. Как операторные равенства не могут трактоваться и связи: скажем, равенство $\pi^0 = 0$ противоречит перестановочным соотношениям (2.48). Связи следует понимать в слабом смысле, т.е. как условия на физические векторы состояний (2.49). Но тогда калибровочное условие Вейля нельзя понимать даже в слабом смысле (как условие на волновую функцию), ибо это противоречило бы соотношению неопределенностей. Поэтому с точки зрения канонической квантовой теории единственный допустимый способ устранения произвола — использование динамических калибровок. Так и поступают в КЭД. Новые калибровки начали появляться при изучении неабелевых теорий, а также в связи с использованием аппарата континуальных интегралов. В интеграл (2.50) подставляют $\delta(A_0)$, а в соответствующий гамильтон-нов континуальный интеграл — $\delta(A_0)\delta(\pi^0)$ [71]. Оба эти способа устранения произвола противоречат постулатам квантовой механики. Но даже в классике, как мы видели в разд.3, устранение переменной y (т.е. A_0) из лагранжиана ($y \rightarrow 0$) ведет к потере вторичной связи. Удалять нефизические переменные с помощью δ -функций можно лишь после выявления всех связей. Как показано в п.3.2, после того, как все нефизические переменные установлены, их, в принципе, можно считать равными нулю, точнее, игнорировать их существование. Другими словами, считать, что волновые функции от них не зависят, поскольку они не влияют на физический сектор. Но так просто дело обстоит лишь в случае, когда нефизические переменные не связаны с криволинейными координатами. В противном случае

правила канонического квантования неприменимы [100]. Корректная процедура квантования предполагает переход к декартовым координатам [100] или специальный набор правил при квантовании в рамках метода континуального интегрирования [107]. Между тем связь нефизических переменных в калибровочных теориях с криволинейными координатами является скорее правилом, чем исключением. Как мы видели на модели (3.1), даже в электродинамике нефизическая переменная θ есть угол в полярных координатах. Именно по этой причине операции квантования и устранения нефизических переменных непрерывны [107, с.1137]. Необходимо соблюдение правил квантования систем со связями, сформулированных Дираком [96]. В случае модели (3.1) учет указанных обстоятельств приводит к появлению дополнительного члена $(-1/2r)\delta_r$ в физическом гамильтониане (3.15). Анализ данного вопроса в теории полей Янга — Миллса сделан в [125,126]. Показано, что учет криволинейности координат и в этом случае ведет к модификации физического оператора Гамильтона.

5. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.1. Локальные и глобальные калибровочные преобразования. Хотя относительно принципиального различия локальных и глобальных калибровочных преобразований уже писалось [63,127], этот важный вопрос до сих пор не нашел отражения на страницах учебников и монографий (в [63] речь идет лишь об ОТО, а в [127] он обсуждается в общем плане). Между тем и сегодня приходится сталкиваться с отсутствием ясного понимания физики, стоящей за свойствами инвариантности относительно упомянутых преобразований. Обсудим вкратце эту проблему.

1. Глобальная калибровочная инвариантность формально сводится к инвариантности действия (плотности лагранжиана) относительно преобразований полей и координат с постоянными параметрами ω ($\partial_\mu \omega = 0$). Следствием такой инвариантности являются законы сохранения (первая теорема Нетер [128]). Утверждение становится тривиальным, если обратиться к одномерному движению. Лагранжиан L , вообще говоря, зависит от координаты и скорости, однако требование инвариантности относительно сдвига $x \rightarrow x + a$, $a = \text{const}$, исключает зависимость L от x : $\partial L / \partial x = 0$. Физически это означает, что все точки оси равноправны, т.е. состояние и физические условия, в которых частица находится, скажем, в окрестности начала координат, неотличимы от состояния и условий в окрестности точки $x = a$. Но если на частицу ничто не воздействует, то ее импульс сохраняется. Формально это следует из уравнения движения: $p = \partial L / \partial \dot{x}$, поэтому $dp / dt = 0$. Другими словами, p есть циклическая переменная [129]. Ситуация не меня-

ется в более общем случае — утверждение о глобальной симметрии эквивалентно утверждению о наличии циклических переменных, от которых не зависит лагранжиан, и о сохранении канонически сопряженных им импульсов, являющихся генераторами преобразований данной симметрии.

2. *Локальная калибровочная инвариантность*, как уже говорилось, сводится к утверждению, что действие (лагранжиан, лагранжева плотность) не меняется при преобразовании полей и координат с параметрами, зависящими от времени (в полевых теориях параметры обычно зависят еще и от пространственных координат x). Следствия данной симметрии формулируются во второй теореме Нетер [128]: локальная симметрия действия влечет тождественные соотношения между эйлерианами \mathcal{E} и производными от них по координатам, если в законы преобразования полей входят производные от параметров (как это имеет место, например, в электродинамике, см. (1.1); $\mathcal{E} = \partial\mathcal{L} / \partial\varphi - \partial[\partial\mathcal{L} / \partial\partial_\mu\varphi] / \partial x^\mu$, где φ — поля, т.е. равенства $\mathcal{E} = 0$ и есть уравнения движения). В случае одномерного движения требование инвариантности лагранжиана относительно замены

$$x \rightarrow x + a(t) \quad (5.1)$$

приводит к условию $L = 0$, что означает отсутствие какого-либо физического процесса, т.е. отсутствие движения. Это легко понять, если учесть произвольность функции $a(t)$. Роль уравнения движения заключается в фиксации закона изменения x со временем. Возможность замены (5.1) означает, что ничто не изменится, если в момент времени t заменить x на $x + a(t)$. Но тогда, пользуясь произвольностью $a(t)$, можно, например, выбрать $a(t) = -x$. В этом случае частица все время будет находиться в начале координат независимо от выбора начальных условий, т.е. в действительности движения нет. Это и означает, что переменная x — нефизическая (чисто калибровочная степень свободы). Импульс частицы равен нулю, следовательно, мы имеем связь. В случае более сложной калибровочной группы нефизических переменных будет больше, но существо дела останется прежним.

В этом и заключается разница между локальными и глобальными симметриями: первая означает наличие законов сохранения, т.е. наличие циклических переменных с тривиальной динамикой, вторая — отсутствие динамики, т.е. полную произвольность переменных, входящих в лагранжиан. Таким образом, это принципиально разные свойства инвариантности физически совершенно разных систем.

В заключение отметим следующее. Ничто не мешает включению в группу локальных преобразований и глобальных, тогда как расширение группы глобальных преобразований до локальной радикально меняет физическую систему. Действительно, в теориях с глобальной симметрией обобщенные

импульсы (генераторы преобразований) сохраняются, а в теориях с локальной симметрией они равны нулю. Но одновременно это значит и то, что они сохраняются — остаются равными нулю в процессе движения. Следовательно, включение в калибровочную группу глобальных преобразований представляется естественным; более того, неестественным было бы их исключать. Несколько видоизменяя аргументацию, можно сказать: если допускаются произвольные независимые сдвиги координат в любые моменты времени, то сдвиги на одну и ту же произвольную величину независимо от времени являются частным случаем этого допущения. Мы так подробно останавливаемся на этом вопросе потому, что его положительное решение имеет важные физические следствия: во-первых, равенство нулю полного электрического заряда Вселенной, во-вторых, правила суперотбора для электрического заряда [99,130,131].

5.2. Большие калибровочные преобразования. Во введении отмечалось, что произвольные параметры (функция Λ , матрицы U в (1.1)) не могут быть вполне произвольны. Самое очевидное ограничение — они не должны выводить поля из заданного класса, определяемого при формулировании теории (поля не могут менять геометрическую и алгебраическую природу и т.п.; исключение — преобразования БРСТ, превращающие вектор-потенциалы в четные элементы грассмановой алгебры). Однако помимо этих очевидных ограничений существуют более тонкие, затрагивающие вопросы непрерывности полей, топологию пространства и т.п. Так, переходя от евклидова пространства R^3 к трехмерной сфере S^3 (т.е. компактифицируя пространство), мы получаем совершенно другую теорию. Матрицы $U(x)$ в (1.2), реализующие в каждой точке пространства представление калибровочной группы G , осуществляют отображение S^3 на группу. Из топологии известно [121], что множество матриц $U(x)$ разбивается на классы (1.40), причем элементы разных классов нельзя перевести друг в друга непрерывным преобразованием. Это ставит серьезные вопросы и имеет важные физические следствия, касающиеся структуры вакуума (θ -вакуум, кирально-неинвариантный вакуум и т.д. [26]). Показать существо возникающих проблем лучше всего на примере электродинамики в пространстве-времени $(1+1)$. Однако, прежде чем переходить к этой модели, поясним, почему в полевых теориях применимы топологические методы.

Топология изучает непрерывные отображения множеств и их свойства, не меняющиеся при таких отображениях. Но в классической теории поля допускаются лишь непрерывные поля, поскольку их конфигурации с разрывами обладают бесконечной энергией. Проще всего это можно увидеть из лагранжиана (2.2). Скалярное поле ϕ (точнее, одна из его компонент) дает вклад в потенциальную энергию $\int d^3x (\nabla\phi)^2/2$. Так как производная от раз-

рывной функции имеет δ -образную особенность, под интегралом оказывается квадрат δ -функции, что и ведет к расходимости интеграла энергии. Поэтому в теории допустимы лишь непрерывные конфигурации полей, и именно поэтому топологические методы оказываются столь эффективными. В классике конфигурации полей, разделенные бесконечным потенциальным барьером, не могут переходить друг в друга, и можно ограничиться изучением лишь непрерывных полей одного класса. В квантовой теории вопрос о переходах одной конфигурации полей в другие решается подсчетом соответствующих вероятностей.

Для иллюстрации некоторых топологических аспектов калибровочных преобразований обратимся к электродинамике в двумерном пространстве-времени с компактифицированной пространственной осью (цилиндр с псевдоевклидовой метрикой). В этом случае у тензора $F_{\mu\nu}$ отлична от нуля лишь компонента F_{01} . Из свойства непрерывности полей вытекает их периодичность: $A(x+L, t) = A(x, t)$, $\psi(x+L, t) = \psi(x, t)$, где L — длина окружности цилиндра. Лагранжиан и гамильтониан получаются непосредственно из (2.2), (2.35) переходом к двумерному пространству. Из закона преобразований для ψ, F вытекает непрерывность матриц $U(x, t)$ в (1.1); в случае электродинамики $U(x, t) = \exp(ief(x, t))$ (в данной модели вместо Λ используем f). Так как преобразованные поля также должны обладать свойством периодичности, имеем

$$f(x+L, t) = f(x, t) + \frac{2\pi n}{e}. \quad (5.2)$$

При фиксированном заряде e параметр f меняется в интервале $0 \leq f \leq 2\pi/e$, т.е. калибровочная группа изоморфна окружности. С точки зрения теории расслоенных пространств [21,22] мы пришли к следующей структуре: каждой точке окружности S^1 , $x \in S^1$, сопоставлена группа $G = U(1)$, $U \in G$, т.е. окружность радиуса $1/e$. В итоге получаем тор (см. рис.2). Экспонента U (функция $f(x, t)$) в каждый момент времени задает некоторую линию на торе (сечение). Топологическая характеристика преобразования U (аналог (1.40)) в данном случае есть

$$n = \frac{i}{2\pi} \int_0^L dx U \partial U^{-1} = \frac{e}{2\pi} \int_0^L dx \partial f / \partial x = \frac{e}{2\pi} [f(L, t) - f(0, t)]. \quad (5.3)$$

В случае $U=1$ ($f=0, 2\pi/e$) — это окружность S^1 , тривиальное отображение, $n=0$. Этому же классу принадлежит и любое другое отображение, «траектория» которого на торе может быть переведена без разрывов в окружность S^1 (на рис.2 — линия 1). Как видно из (5.3), если

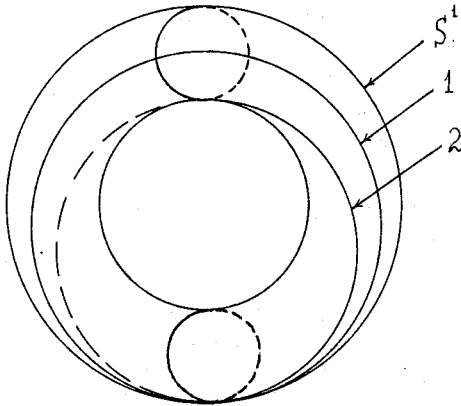


Рис.2

$f(L, t) - f(0, t) = 2\pi n / e$, т.е. если функция f разрывна в точке $x=0$ окружности S^1 , то соответствующее преобразование принадлежит классу, характеризуемому числом n . На рис.2 пример преобразования с $n=1$ дает траектория 2. Из рисунка видно, что траектория 1 не может быть переведена в траекторию 2 без разрывов.

Как упоминалось во введении, вакуумными значениями полей можно считать $A_\mu^{vac} = U \partial_\mu U^{-1}$, поскольку для них $F_{\mu\nu} = 0$. Но матрицы (экспоненты) характеризуются

числом n ($U \equiv U^{(1)} \rightarrow U^{(n)} = U^n$), т.е. связности также распадаются на классы. В данном случае они различаются инвариантом Чжена — Саймонса

$$C(t) = \int dx A_1. \tag{5.4}$$

Преобразования $U^{(n)}$ с $n \neq 0$ называются большими [26]. Из (1.1), (5.3) заключаем, что большие преобразования меняют индекс Чжена — Саймонса. Индекс Понтрягина в этой модели

$$Q = \frac{1}{2} \int dx dt \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \int dx dt \partial_t A_1 = C(\infty) - C(-\infty) \tag{5.5}$$

есть изменение C в процессе движения. Пример обобщается на неабелевы группы и пространства больших размерностей [26].

5.3. Сингулярные калибровочные преобразования. Сингулярные преобразования лучше всего иллюстрировать на примере монополя Дирака [82,83,40]. Так как в электродинамике фундаментальным полем является вектор-потенциал A_μ , и дивергенция магнитного поля $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ по определению равна нулю, единственной возможностью сконструировать магнитный монополь в пространстве R^3 — это снабдить магнитный заряд нитью, заключающей в себе магнитный поток заряда и обеспечивающей выполнение условия $\text{div } \mathbf{H} = 0$ во всем пространстве. Данная конструкция действительно являла бы собой модель магнитного заряда, если бы нить была ненаблюдаемой [82]. Ненаблюдаемость нити открывает следующую возможность: поскольку теперь ее перемещение в пространстве не есть физическая операция, оно должно сводиться к калибровочному преобразованию. Покажем, что такое преобразование действительно существует [84].

Пусть L_1 на рис.3 — исходное положение нити Дирака, а L_2 — конечное (магнитные силовые линии, исходящие из магнитного заряда в точке O , не показаны). Это последнее получается добавлением к L_1 замкнутого контура $C(L_1 + L_2)$ с циркулирующим в нем магнитным полем, направление которого определяется его направлением на отрезке L_2 .

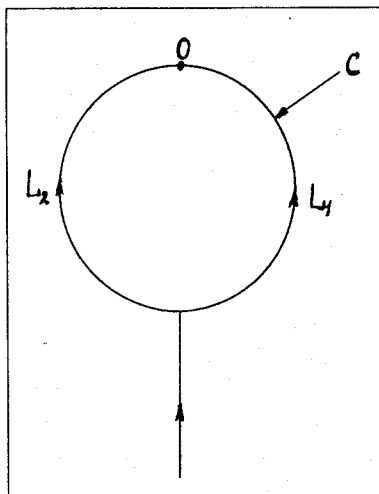


Рис.3

Построим соответствующую функцию Λ . Определим: $\Lambda = g\Omega(x)/4\pi$, где $\Omega(x)$ — телесный угол, под которым контур C виден из точки x , g — магнитный заряд. Эта функция не зависит от времени, так как задача стационарная. Главные особенности $\Lambda(x)$: 1) многозначность — при обходе вокруг нити, образующей контур C , она меняется на g ; 2) сингулярность — она не определена на контуре C ; 3) применение этого преобразования к A сводится к сдвигу нити $L_1 \rightarrow L_2$. Первые два утверждения очевидны, доказательство последнего — элементарно. Пусть $A' = A + \delta\Lambda$, причем

$$\oint_{L_1} A_1 dx' = g$$

(с контуром интегрирования вокруг L_1). (5.6)

Но по определению

$$\oint_{L_1} \delta\Lambda dx = \frac{g}{4\pi} \Delta\Omega = -g, \quad (5.7)$$

т.е. интеграл (5.6) от A' есть ноль. Напротив, вычисление аналогичного интеграла с контуром, охватывающим отрезок L_2 , дает g . Это и означает перемещение нити. Переход к общему случаю, когда Λ произвольным образом зависит от времени, не встречает трудностей. Зависимость Λ от времени означает, что нить Дирака со временем может произвольным образом менять свою кинфигурацию. Это не влияет на динамику магнитного заряда и вообще на физику, если нить ненаблюдаема. В действительности она не может быть ненаблюдаемой — ее магнитный поток отличен от нуля, она должна гравитировать и т.п. Отсюда становится ясной разница между обычными локальными калибровочными преобразованиями и большими или сингулярными: последние меняют физические характеристики системы (топологические числа, магнитные потоки и др.).

Относительно суперсимметричных калибровочных преобразований см. [88]. Здесь, как отмечалось, также имеются глобальные и локальные преобразования. По-видимому, это единственное, что о них можно сказать с полной достоверностью. Неизвестна природа суперсимметрии, недостаточно разработана теория суперсимметричных пространств [132].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ калибровочных систем показывает, что присутствие нефизических степеней свободы в лагранжиане оказывает решающее влияние на структуру физического сектора теории. В этой связи их нельзя признать вполне нефизическими. Очевидно, их смысл станет ясен лишь в будущей единой теории всех калибровочных полей. Во всяком случае, калибровочный принцип, лежащий в основе всех фундаментальных взаимодействий, свидетельствует в пользу такой возможности. В заключение коротко остановимся на некоторых, отчасти уже обсуждавшихся выше вопросах.

Представляется принципиально важным различие между динамическими и нединамическими калибровками. Лишь первые допускают последовательное квантование в рамках исходной теории, когда во внимание принимаются все присутствующие в лагранжиане степени свободы. Во втором случае приходится модифицировать формализм — исключать нефизические переменные, что ведет к осложнениям в неабелевых теориях. Правда, динамические калибровки сводятся к изменению исходного лагранжиана, поэтому и здесь приходится модифицировать динамический принцип, хотя не столь радикально. Следующие два условия должны с необходимостью выполняться при добавлении к лагранжиану фиксирующих членов:

- непротиворечивость модифицированной теории,
- неприкосновенность физического сектора.

То, что эти условия не надуманные, показывает пример противоречивой калибровки в разд.3. Помимо этих очевидных условий имеются и другие, связанные с требованиями, традиционно предъявляемыми к лагранжианам: это релятивистская инвариантность, локальность, перенормируемость, отсутствие производных от полей старше первых [95]. Перечисленные требования представляются естественными, особенно в теории возмущений. Они практически однозначно ведут к фиксатору Гейзенберга — Паули (1.16).

Следует подчеркнуть важность введенной Дираком [96] расширенной группы калибровочных преобразований, генераторами которой являются все связи первого рода (и первичные, и вторичные). В согласии с требованием слабой калибровочной инвариантности физических величин она дает естественное обобщение калибровочной группы исходного лагранжиана.

Непротиворечивость итоговой картины гарантирует анализ в рамках гамильтонова формализма [96].

Обращает на себя внимание особая роль калибровки Фока (1.14). Если калибровка Фейнмана удобна при вычислениях по теории возмущений, то калибровка Фока выдвигается на первый план при непертурбативном подходе. Замечательным образом она оказывается основой многих популярных калибровок. Она отражает глубокую связь калибровочных теорий с геометрией расслоенных пространств и с теорией внешних дифференциальных форм (разд.4,7).

В случае компактифицированных пространств имеется теорема [133], утверждающая, что для теорий с компактной неабелевой группой Ли в S^4 нельзя однозначно фиксировать калибровку.

Важным инструментом при изучении калибровочных теорий является калибровка фонового поля [47—49], точнее, идея разбиения калибровочного поля на квантовое поле (тензор) и классическое фоновое (связность), позволяющая не только доказывать общие утверждения (например, калибровочную инвариантность эффективного действия), но и упрощать конкретные вычисления [49].

В калибровочных теориях бросается в глаза сочетание локальности и нелокальности. Все теории формулируются в терминах локальных полей с локальными взаимодействиями. Вместе с тем физические объекты нелокальны. Электрон немислим без окружающего его электрического поля. Калибровочные теории просто формулируются в координатном пространстве, тогда как в импульсном пространстве даже простейшее калибровочное преобразование заряженного поля (1.1) оказывается интегральным. Это, в частности, означает, что нельзя калибровочно-инвариантным образом отделить область низких энергий от области высоких. Запишем закон Гаусса в импульсном представлении

$$iq\mathbf{E}(q) = e \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \psi^*(q-k) \psi(k). \quad (6.1)$$

Интегрирование здесь затрагивает весь спектр импульсов, и пренебрежение, например, квантами малых длин волн нарушает вторичную связь, т.е. нарушает калибровочную инвариантность теории.

Весьма важен вопрос относительно области значений, принимаемых параметром Λ в (1.1). Он может меняться как в конечных ($\Lambda \in [0, 2\pi/e]$), так и в бесконечных ($\Lambda \in (-\infty, \infty)$) областях. Физически это принципиально разные возможности. Переходя к глобальным преобразованиям и замечая, что они генерируются электрическим зарядом [131], обнаруживаем: в первом случае спектр оператора заряда дискретный (квантование заряда), а во втором — непрерывный. Поскольку электрический заряд квантован, область значений, принимаемых параметром Λ , ограничена.

Тождества Уорда, наряду с тождествами Нетер, являются очевидными проявлениями нефизических степеней свободы. Будучи формально допущены в теорию, они остаются произвольными, что и выражается в виде тождеств Уорда в квантовой теории и тождеств Нетер — в классической. Первые свидетельствуют об их отщеплении от физического сектора, вторые — об отсутствии для них уравнений движения (п.7.5).

Особенности фиксации калибровки при стохастическом квантовании обсуждаются в работе [134].

7. ПРИЛОЖЕНИЕ

7.1. Остаточный калибровочный произвол. Нединамические калибровки обычно не полностью устраняют произвол. Как правило, теория все еще допускает преобразования из более узкой группы, не меняющей динамики в физическом секторе. Например, калибровка Вейля $A_0 = 0$ допускает преобразования вектор-потенциалов с параметрами Λ , не зависящими от времени, $\dot{\Lambda} = 0$. Между тем принципиальное различие между глобальными и локальными калибровочными преобразованиями связано с зависимостью параметров преобразования от времени. Поэтому говорить здесь об остаточном произволе как о калибровочном, не указывая типа, к которому относится соответствующее преобразование (см., например, [121, с.77]), — это недоразумение. В действительности остающаяся симметрия с параметрами $v = v(x)$ не является динамической (т.е. локальной, см. ниже п.7.5) и должна приводить к бесконечному числу законов сохранения. Рассмотрим пример: $\mathcal{L} = \dot{\phi}^2(x, t)/2$. Лагранжиан инвариантен относительно группы преобразований $\phi \rightarrow \phi + v(x)$, и хотя группа здесь бесконечномерная, а поля преобразуются локально (с точки зрения 3-мерного пространства), следствием является бесконечное число сохраняющихся величин

$$\frac{\partial \pi(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}. \quad (7.1)$$

Возникает вопрос: почему этого нет в электродинамике? Дело в том, что здесь речь идет о сильной (точной) локальной симметрии лагранжиана. Физически же важна лишь слабая калибровочная инвариантность относительно расширенной группы преобразований. Именно вторичные связи генерируют преобразования с параметрами $v(x, t)$. Расширение симметрии как раз и заключается в переходе $v(x) \rightarrow v(x, t)$. Поэтому и не возникает новых законов — имеются вторичные связи и отвечающие им нефизические степени свободы. Можно сказать, что существует бесконечное число сохраняющихся тривиальных величин, которые могут принимать лишь нулевые значения (см. разд.5).

Ситуация несколько меняется при переходе к калибровке Лоренца (1.8). Остаточный калибровочный произвол связан теперь с функциями, удовлетворяющими уравнению Даламбера $\square \Lambda = 0$, что также нередко интерпретируется как неполное устранение калибровочного произвола. В действительности, хотя теперь параметр Λ и может зависеть от времени, функция Λ не произвольна — она удовлетворяет уравнению движения, и ее произвол сводится к произволу начальных условий ($\Lambda_{t=0}, \dot{\Lambda}_{t=0}$). Ясно, что это не есть калибровочный произвол (локальная калибровочная инвариантность). В рассмотренной выше модели одномерного движения (разд.5) уравнение Даламбера свелось бы к условию на калибровочный параметр $\ddot{a} = 0$, т.е. $a(t) = a + bt$, $\dot{a} = \dot{b} = 0$. Подобная инвариантность не ограничивает динамику переменной x и не лишает ее смысла, поскольку уравнение Ньютона $\ddot{x} = 0$ инвариантно относительно преобразования (5.1) с таким параметром a — это есть преобразование Галилея. Сказанное относится и к теории тяготения. Гармонические координаты удовлетворяют уравнению (1.34) $\square x = 0$. При надлежащих граничных условиях произвол сводится к преобразованиям из группы Лоренца [63], также линейным по времени.

7.2. О «нарушении» локальной симметрии. Принципиальное различие между локальной и глобальной калибровочными симметриями ярко проявляется при изучении систем с «нарушенной симметрией». Под нарушением глобальной симметрии понимается наличие неинвариантных решений уравнений движения; в квантовой теории поля — наличие неинвариантного вакуума. Но в случае локальной калибровочной симметрии физический сектор во всяком случае должен быть инвариантен относительно расширенной группы калибровочных преобразований. Вакуумный вектор состояния во всяком случае не может нарушать локальную симметрию — это противоречит исходным постулатам теории (калибровочной инвариантности лагранжиана). Применительно к конкретному механизму нарушения симметрии — появлению неинвариантного вакуумного среднего у поля Хиггса, которое при калибровочных преобразованиях меняется нетривиально, имеет место теорема Елизура [135] (см. также [136]), утверждающая, что подобные средние должны равняться нулю.

7.3. Калибровка Фока и внешние дифференциальные формы. В [28] Фок не только формулировал калибровочное условие (1.14), но и дал его решение

$$A_{\mu}(x) = \int_0^1 s x^{\nu} F_{\mu\nu}(sx) ds. \quad (7.2)$$

Поле A_{μ} (7.2) удовлетворяет калибровочному условию (1.14). В теории внешних дифференциальных форм [137] важную роль играет оператор

Пуанкаре I . Если ω — дифференциальная m -форма в пространстве R^n , то имеет место тождество

$$\omega = d(I\omega) + I(d\omega), \quad (7.3)$$

где

$$I\omega \equiv \sum_{\{i\}} \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} \int_0^1 dt t^{m-1} \omega_{i_1 \dots i_m}(tx) x^r [dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m]_r. \quad (7.4)$$

Здесь символ $\{i\}$ означает суммирование по всем $i_k, k=1, \dots, m$ в пределах $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, а индекс r у квадратных скобок означает отсутствие дифференциала с номером i_r . Если форма ω замкнутая ($d\omega=0$), то она является точной ($\omega=d\Omega$). Все это справедливо для так называемой звездной области $S \subset R^n$: если $x \in S$, то и $tx \in S$, $0 \leq t \leq 1$, и заведомо справедливо для R^n .

В электродинамике $F_{\mu\nu}$ — 2-форма ($F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$); F — замкнутая форма ($dF=0$); это однородное уравнение Максвелла $\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. Формула (7.2) есть результат применения оператора Пуанкаре I к 2-форме F , в результате чего получается 1-форма $A = A_\mu dx^\mu$.

Связь калибровки Фока с оператором Пуанкаре и с теорией внешних дифференциальных форм свидетельствует о глубине проникновения ее автора в существо дела. В [28] эта калибровка естественно появилась из физических соображений. Была ли формула (7.2) получена независимо или при ее выводе сыграла роль лемма Пуанкаре?

7.4. Метод фонового поля. Метод фонового поля позволяет получать эффективные лагранжианы вычислением лишь вакуумных диаграмм. Фоновое поле является варьируемой переменной и по определению равно вакуумному среднему от квантового поля. Метод весьма удобен не только для вычисления эффективных лагранжианов, но и для доказательства их калибровочной инвариантности. Определим

$$e^{i\tilde{W}[J, \mathcal{F}]} \equiv \int DQ e^{i[S(Q+\mathcal{F}) + \mathcal{J}Q]}. \quad (7.5)$$

Как и в разд.2, Q символизирует все квантовые поля ($A, \bar{\psi}, \psi, \dots$), \mathcal{F} — соответствующие классические (внешние, фоновые) поля, т.е. в действии под интегралом (2.50) произведена замена $Q \rightarrow Q + \mathcal{F}$. Теперь вместо (2.51) имеем

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}, \mathcal{F}] = \tilde{W}[J, \mathcal{F}] - \mathcal{J}\tilde{\phi}, \quad \frac{\delta \tilde{W}[J, \mathcal{F}]}{\delta \mathcal{J}} = \tilde{\phi}. \quad (7.6)$$

В первое равенство (7.6) вместо \mathcal{J} подставлено решение второго. Совершая в (7.5) замену переменных $Q \rightarrow Q - \mathcal{F}$ и используя определение W (2.50), имеем

$$\tilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}] = W[\mathcal{J}] - \mathcal{J}\mathcal{F}, \quad \tilde{\phi} = \phi - \mathcal{F}, \quad (7.7)$$

т.е.

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}, \mathcal{F}] = W[\mathcal{J}] - \mathcal{J}\mathcal{F} - \mathcal{J}\tilde{\phi} = W[\mathcal{J}] - \mathcal{J}\phi = \Gamma[\phi]. \quad (7.8)$$

Пользуясь вторым равенством (7.7), находим

$$\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}] = \Gamma[\mathcal{F}]. \quad (7.9)$$

Это и есть основная формула метода — эффективное действие $\Gamma[\mathcal{F}]$ равно действию $\tilde{\Gamma}[\tilde{\phi}, \mathcal{F}]$, вычисленному при нулевых вакуумных средних $\tilde{\phi} = 0$, т.е. первому члену в разложении функционала $\tilde{\Gamma}$ по степеням $\tilde{\phi}$. (Напомним, что $\Gamma[\phi, \mathcal{F}]$ есть производящий функционал 1-неприводимых функций Грина на фоне внешних полей \mathcal{F} ; при $\tilde{\phi} = 0$ функционал $\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}]$ есть совокупность 1-неприводимых вакуумных диаграмм на фоне \mathcal{F}).

В калибровочных теориях метод формулируется следующим образом. Как уже говорилось (разд. 1), калибровочное поле A_μ разбивается на сумму

$$A_\mu \rightarrow q_\mu + A_\mu, \quad (7.10)$$

где q_μ — квантовое поле, по которому интегрируется в континуальном интеграле, A_μ — классическое поле. Выбирается специфическая для данного метода калибровка фонового поля (1.23)

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} (D_\mu q_\mu)^2, \quad D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - gf^{acb} A_\mu^c, \quad (7.11)$$

т.е. $F = D_\mu q_\mu$. Поле q_μ преобразуется как тензор (однородно)

$$\delta q_\mu = igT\omega q_\mu \quad (7.12)$$

($T\omega = T^a \omega^a$, T^a — генераторы группы в присоединенном представлении, ω^a — инфинитезимальные параметры преобразования), а поле A_μ — как связность (неоднородно)

$$\delta A_\mu = D_\mu \omega. \quad (7.13)$$

Согласно общему равенству (7.9) и в данном случае $\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}] = \Gamma[\mathcal{F}]$, поэтому для доказательства калибровочной инвариантности $\Gamma[\mathcal{F}]$ достаточно доказать инвариантность $\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}]$. Но это почти очевидным образом следует из явного выражения для W :

$$e^{i\tilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}]} = \int d[q, \bar{c}, c, \bar{\psi}, \psi] e^{i[S[Q + \mathcal{F}] - \frac{1}{2\alpha} F^2 + \bar{c}F'c + \mathcal{J}Q]} \quad (7.14)$$

Здесь $Q = (q_\mu, \bar{\psi}, \psi)$, $\mathcal{F} = (A_\mu, \bar{\zeta}, \zeta)$ ($\psi \rightarrow \psi + \zeta$), $F' = \delta F(A^\omega) / \delta \omega$, \bar{c}, c — скалярные антикоммутирующие поля, а в качестве плотности действия можно взять лагранжиан (2.1); предполагаем, что внешние токи преобразуются однородно:

$$\delta \mathcal{J} = g T_{\mathcal{J}} \omega \mathcal{J}. \quad (7.15)$$

В (7.15) $T_{\mathcal{J}}$ — генераторы группы в представлении, реализуемом током \mathcal{J} . Поскольку сумма $q_\mu + A_\mu$ преобразуется как связность, а $\bar{\psi}, \psi, \bar{\zeta}, \zeta$ и \mathcal{J} — как тензоры, показатель экспоненты в (7.14) есть калибровочный инвариант, если фиктивные поля преобразуются по присоединенному представлению. Следовательно, и $\tilde{W}[\mathcal{J}, \mathcal{F}]$ есть калибровочный инвариант, а ϕ (7.6) преобразуется, ввиду (7.15), как тензор. Но тогда $\tilde{\Gamma}[\phi, \mathcal{F}]$ (7.6) также есть калибровочный инвариант, а ввиду тензорной природы ϕ таковым является и $\tilde{\Gamma}[0, \mathcal{F}] = \Gamma[\mathcal{F}]$. Поле A_μ в наборе $\mathcal{F} = (A_\mu, \bar{\zeta}, \zeta)$ преобразуется неоднородно (как связность), поэтому эффективное действие $\Gamma[\mathcal{F}]$ удовлетворяет тождествам

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \mathcal{F}} \delta \mathcal{F} \equiv \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} D_\mu \omega + \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} ig \hat{\omega} \psi - ig \bar{\psi} \hat{\omega} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} = 0, \quad (7.16)$$

где $\hat{\omega} \equiv T\omega$, T — генераторы в представлении, реализуемом полями материи.

Отметим, что эти условия калибровочной инвариантности $\Gamma[\mathcal{F}]$ есть не что иное, как тождества Нетер [128] для эффективного действия $\Gamma \equiv S_{\text{eff}}$.

7.5. Условия локальной инвариантности эффективного действия и тождества Нетер. Прежде чем доказывать сделанное выше утверждение, напомним вкратце вывод тождеств Нетер. При изучении свойств инвариантности динамических систем обычно рассматривают общие преобразования полей, включающие в себя и преобразования координат:

$$\delta \phi = \phi'(x') - \phi(x), \quad \delta x = x' - x \quad (7.17)$$

(тензорные и прочие индексы опущены). Вводя локальные вариации полей [138]

$$\bar{\delta} \phi = \phi'(x) - \phi(x), \quad (7.18)$$

после некоторых преобразований можно получить следующие условия инвариантности действия:

$$\delta S \equiv \int dx \left[\mathcal{E} \bar{\delta} \phi + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \bar{\delta} \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \right] = 0. \quad (7.19)$$

Здесь

$$\mathcal{E} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \quad (7.20)$$

есть «эйлерово выражение» (эйлериан) — приравнивание его нулю дает уравнения движения. Общая формула (7.19) позволяет получить все важнейшие соотношения лагранжева формализма:

— из условия стационарности относительно вариации полей, исчезающих на границе, получаем уравнения движения ($\mathcal{E} = 0$);

— из условия инвариантности относительно глобальных калибровочных преобразований получаем законы сохранения (первая теорема Нетер [128] — речь идет о величинах, сохраняющихся в процессе движения, т.е. когда $\mathcal{E} = 0$);

— из условия инвариантности относительно локальных калибровочных преобразований получаем вторую теорему Нетер [128] — тождественные соотношения между эйлеровыми выражениями \mathcal{E} и производными от них, если в преобразования полей входят производные от параметров (как в (1.1)). Записывая локальные вариации полей в виде

$$\bar{\delta}\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \sum_{r=0}^m V_k^{\mu_1 \dots \mu_r}(\varphi, x) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} \omega_k(x), \quad N = \dim X, \quad (7.21)$$

приходим к следующему выражению для тождеств Нетер:

$$\sum_{r=0}^m (-1)^r \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_r} (\mathcal{E} V_k^{\mu_1 \dots \mu_r}) \equiv 0. \quad (7.22)$$

Поскольку $\mathcal{E} = \delta S / \bar{\delta}\varphi$ (или $\mathcal{E} = \delta S / \delta \mathcal{F}$ в обозначениях (7.14)), идентичность получающихся тождеств соотношениям (7.16) становится очевидной. Разница лишь в том, что плотностью действия в S является локальный лагранжиан, тогда как его аналог в S_{eff} существенно нелокален [51—53].

7.6. Пропагатор фотона в различных калибровках. Приведем выражения для пропагатора фотона в некоторых часто встречающихся калибровках. Ограничимся выписыванием лишь матриц при общем множителе $1/i(q^2 + i0)$.

1) Класс калибровок Гейзенберга — Паули — Ферми:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2; \quad g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \quad (7.23)$$

2) Калибровка Лоренца:

$$\partial_\mu A_\mu = 0; \quad g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \quad (7.24)$$

3) Калибровка Максвелла:

$$\delta A = 0; \quad g_{\mu\nu} = \frac{q_\mu q_\nu^T + q_\mu^T q_\nu}{q_T^2} + \frac{q_\mu q_\nu}{q_T^2}, \quad (7.25)$$

где $q_T^\mu = T^{\mu\nu} q_\nu$, $T^{\mu\nu} = g^{0\mu} g^{0\nu} - g^{00} g^{\mu\nu}$.

4) Аксиальные калибровки:

$$nA = 0; \quad g_{\mu\nu} = \frac{q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu}{qn} + \frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2} n^2. \quad (7.26)$$

5) Псевдоаксиальные калибровки:

$$\mathcal{L}' = -\frac{\beta^2}{2} (nA)^2; \quad g_{\mu\nu} = \frac{q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu}{qn} + \frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2} \left(n^2 + \frac{q^2}{\beta^2} \right). \quad (7.27)$$

6) Планарная калибровка:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\alpha n^2} nA \square nA; \quad g_{\mu\nu} = \frac{q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu}{qn} + \frac{q_\mu q_\nu}{(qn)^2} n^2 (1 - \alpha). \quad (7.28)$$

В зависимости от параметра α \mathcal{L}' (7.23) фиксирует следующие калибровки: $\alpha \rightarrow 0$ — Лоренца, $\alpha = 1$ — Фейнмана, $\alpha = 1/3$ — Фрида — Йенни.

В (7.28) при $n^2 \rightarrow 0$ получаем калибровку Липатова [45], а при $\alpha \rightarrow 1$ — планарную калибровку [46], в которой $n^2 \neq 0$.

Для получения пропагаторов полезна следующая формула. Матрица

$$K_{\mu\nu}^{-1} = g_{\mu\nu} + c(q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu) + dq_\mu q_\nu \quad (7.29)$$

является обратной матрице

$$K_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + aq_\mu q_\nu + bn_\mu n_\nu \quad (7.30)$$

при $a = -1/q^2$, $c = -1/qn$, $d = (1 + bn^2)/b(qn)^2$.

Пропагаторы глюонов отличаются от приведенных фактором δ^{ab} .

7.7. Замечания исторического плана

1. Впервые калибровка (1.8) появилась в работе Л.В.Лоренца (L.V.Lorenz, 1867). Х.А.Лоренцу (H.A.Lorentz) в это время было 14 лет. Максвелл [1, т.2, с.347] так комментировал работу [24]: «...Лоренц вывел ... путем добавления некоторых членов, не влияющих ни на какие экспериментальные результаты, новую систему уравнений... Эти выводы сходны с выводами настоящей главы [гл. XX], хотя они получены совсем другим методом. Приведенная в этой главе теория впервые была опубликована в ...1865 г.». Между прочим, Л.Лоренц не только выписывает уравнения

Приведенная в этой главе теория впервые была опубликована в ...1865 г.». Между прочим, Л.Лоренц не только выписывает уравнения

$$\square A_{\mu} = -j_{\mu}, \quad (7.31)$$

т.е. уравнения движения в калибровке Лоренца, но и приводит их запаздывающие решения, ссылаясь на свою более раннюю работу. Любопытно, что в [24] совсем не упоминаются работы Максвелла. Краткие сведения о жизни и научной деятельности Людвиг Лоренца в [139,с.169] заканчиваются фразой: «Независимо от Дж.Максвелла и не зная его теории, построил (1867) электромагнитную теорию света».

2. Хотя общепринятые названия калибровки (1.9) представляются удачными, они отступают от традиции называть их именами авторов. Признание авторства Максвелла было бы актом исторической справедливости.

3. Общепринятые названия калибровки (1.10) неудачны, поэтому предложение Джакива [26] связать ее с именем Г.Вейля можно только приветствовать.

4. Впервые аксиальная калибровка появилась в работе Куммера [140], посвященной квантованию свободного электромагнитного поля. При этом, однако, требование (1.13) сопровождалось условием $nq = \text{const}$, где q — импульс фотона.

5. Больше всего «повезло» калибровке Фока. Похоже, что название «калибровка Фока — Швингера» приживается, хотя иногда она именуется калибровкой Швингера — Фока, и даже калибровкой Швингера [116, с.115]. Швингер, конечно, знал об авторстве Фока. В статье [141], применяя метод собственного времени Фока, он ссылается на работу [28]. Позднее эта калибровка неоднократно переоткрывалась [142,143] (работы написаны после выхода в свет книги Швингера [30] (1970), и даже после ее перевода на русский язык). В статье [144] она именуется «калибровкой фиксированной точки», авторы [143] называют ее «калибровкой Пуанкаре» (что, впрочем, имеет некоторый резон, см. п.7.3). В обзоре [31] условие (1.15) именуется калибровкой Фока — Швингера, а (1.14) — калибровкой Пуанкаре.

Но и это не все. Еще раньше калибровка Фока была переоткрыта в статьях [145,146]. В последовавшем цикле работ (см. литературу в [147]) она именуется «мультиполярной калибровкой», а работы [143,144] квалифицируются как «пионерские». Обращает на себя внимание то, что даже публикации первостепенной важности выдающихся физиков оказываются незамеченными, а также то постоянство, с которым эта калибровка воспроизводилась на страницах авторитетных журналов, — верный признак ее важности. Калибровка Фока не применяется в стандартных вычислениях теории возмущений, но она естественно появляется при выходе за ее рамки.

6. Фиктивные скалярные поля с аномальным знаком для петель (добавочный фактор для каждой петли) впервые появились в работе Фейнмана [77].

7. Калибровочная инвариантность эффективного действия Γ свидетельствует о фундаментальном характере этой величины. Точная S -матрица при использовании S_{eff} получается в низшем порядке теории возмущений, т.е. без учета квантовых поправок [53]. Данный факт можно также интерпретировать как сокращение всех поправок к Γ от диаграмм с петлями, в которые входят точные пропагаторы и точные вершины. В [148] выписаны уравнения для Γ , явным образом учитывающие это свойство эффективных вершин.

8. По-видимому, первым, кто обратил внимание на принципиальное различие локальных и глобальных преобразований в общей теории относительности, был Фок [63]. Физики довольно сдержанно отнеслись к этим выводам. Однако Фока решительно поддержал Вигнер [127], который рассматривал не только ОТО, но и электродинамику. Локальные и глобальные калибровочные преобразования он называл, соответственно, динамическими и геометрическими.

9. Модель с калибровочной группой лишь трансляций (с тривиальным первым слагаемым в лагранжиане (3.19) — $e = 0$) впервые была предложена Бурнелем [108,109]. Модель (3.19) изучалась автором независимо (1988, не опубликовано).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максвелл Дж.К. — Тракта́т об электричестве и магнетизме. Пер. с англ. М.: Наука, 1989, т.1,2.
2. Паули В. — Труды по квантовой теории. Статьи 1928—1958. М.: Наука, 1977.
3. Klein O. — New Theories in Physics. Conference in Warsaw. 1938, p.66.
4. Yang C.N., Mills R.L. — Phys. Rev., 1954, vol.96, p.191.
5. Shaw R. — Ph.D. Thesis, Cambridge University, 1954.
6. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1973, vol.31, p.494.
7. Pati J., Salam A. — Phys. Rev., 1973, vol.D8, p.1240.
8. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H. — Phys.Lett., 1973, vol.47B, p.365.
9. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1967, vol.19, p.1264.
10. Salam A. — Elementary Particle Theory (Ed. N.Svartholm). Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968, p.367.
11. Einstein A. — Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss., 1915, vol.48, p.844.
12. Hilbert D. — Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1915, vol.3, p.395.
13. Барбашов Б.М., Нестеренко В.В. — Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
14. Lüst D., Theisen S. — Lectures on String Theory. Lecture Notes in Physics, No.346. Springer Verlag, Berlin, 1989.
15. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. — Теория суперструн. Пер. с англ. М.: Мир, 1990, т.1,2.

16. Кафиев Ю.Н. — Аномалии и теория струн. Новосибирск: Наука, 1991.
17. Nambu Y. — Lectures at the Copenhagen symposium, 1970.
18. Goto T. — Progr. Theor. Phys., 1971, vol.46, p.1560.
19. Hara O. — Progr. Theor. Phys., 1971, vol.46, p.1549.
20. Барбашов Б.М., Черников Н.А. — ЖЭТФ, 1966, т.50, с.1296; т.51, с.658.
21. Daniel M., Viallet C.M. — Rev. Mod. Phys., 1980, vol.52, p.175.
22. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. — Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
23. Прохоров Л.В., Шабанов С.В. — УФН, 1991, т.161, с.13.
24. Lorenz L. — Phil. Mag., 1867, vol.34, p.287.
25. Weyl H. — Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1930.
26. Jackiw R. — Rev. Mod. Phys., 1980, vol.52, p.661.
27. Arnwitt R., Fickler S. — Phys. Rev., 1962, vol.127, p.1821.
28. Fock V. — Sow. Phys., 1937, vol.12, p.404. Перевод: [29].
29. Фок В.А. — Работы по квантовой теории поля. Изд-во Ленинградского ун-та, 1957.
30. Швингер Ю. — Частицы, источники, поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
31. Leibbrandt G. — Rev. Mod. Phys., 1987, vol.59, p.1067.
32. Heisenberg W., Pauli W. — Zeit. Phys., 1929, vol.56, p.1.
33. Heisenberg W., Pauli W. — Zeit. Phys., 1930, vol.59, p.168. Перевод [32,33]: [2, с.30, с.89].
34. Fermi E. — Rend. Acad. Lincei, 1929, vol.9, p.881.
35. Fermi E. — Rend. Acad. Lincei, 1930, vol.12, p.431.
36. Fermi E. — Rev. Mod. Phys., 1932, vol.4, p.87. Перевод [34—36]: [37, с.302, с.359; с.375].
37. Ферми Э. — Научные труды. М.: Наука, 1971, т.1.
38. 't Hooft G. — Nucl. Phys., 1971, vol.B35, p.167.
39. Higgs P.W. — Phys. Lett., 1964, vol.12, p.132.
40. Райдер Л. — Квантовая теория поля. Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
41. 't Hooft G. — Nucl. Phys., 1981, vol.B190, p.455.
42. Min H., Lee T., Pac P.Y. — Phys. Rev., 1985, vol.D32, p.440.
43. 't Hooft G., Veltman M. — Nucl. Phys., 1972, vol.B50, p.318.
44. Kummer W. — Acta Phys. Austriaca, Suppl., 1976, vol.XV, p.423.
45. Липатов Л.Н. — ЯФ, 1974, т.20, с.181.
46. Dokshitzer Yu.L., Dyakonov D.I., Troyan S.I. — Phys. Rep., 1980, vol.58, p.269.
47. De Witt B.S. — Phys. Rev., 1967, vol.162, p.1195.
48. Девитт Б.С. — Динамическая теория групп и полей. Пер. с англ. М.: Наука, 1987.
49. Abbott L.F. — Acta Phys. Polonica, 1982, vol.B13, p.33.
50. Iona-Lasinio G. — Nuovo Cim., 1964, vol.34, p.1790.
51. Prokhorov L.V. — Nuovo Cim., 1968, vol.57A, p.245.
52. Prokhorov L.V. — Phys. Rev., 1969, vol.183, p.1515.
53. Ильичев Н.А., Прохоров Л.В. — ТМФ, 1971, т.6, с.305.
54. 't Hooft G. — Nucl. Phys., 1973, vol.B62, p.444.
55. Deser S., Kay J., Stelle K. — Phys. Rev. Lett., 1977, vol.38, p.527.
56. Chan H.S., Halpern M.B. — Phys. Rev., 1985, vol.D33, p.540.
57. Urrutia F. — Lett. Nuovo Cim., 1972, vol.5, p.788.

58. Каршенбойм С.Г. — ЯФ, 1989, т.50, с.1374.
59. Fried H.M., Yennie D.R. — Phys. Rev., 1958, vol.112, p.1391.
60. Иванов С.В. — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.75.
61. De Donder — La gravitique einstenienne. Paris: Gauthier-Villars, 1931.
62. Lanczos K. — Phys. Zs., 1922, vol.23, p.537.
63. Фок В.А. — Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1955.
64. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. — Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
65. Scherk J., Schwarz J.H. — Gen. Rel. Grav., 1975, vol.6, p.537.
66. Kaku M. — Nucl. Phys., 1975, vol.B91, p.99.
67. Dirac P.A.M. — Phys. Rev., 1959, vol.114, p.924.
68. Vecchi C., Rouet A., Stora R. — Phys. Lett., 1974, vol.52B, p.344.
69. Vecchi C., Rouet A., Stora R. — Ann. Phys., 1976, vol.98, p.287.
70. Тютин И.В. — Препринт ФИАН, №39, 1975.
71. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988, 2-е изд.
72. Zinn-Justin J. — Nucl. Phys., 1984, vol.B246, p.246.
73. Gribov V.N. — Nucl. Phys., 1978, vol.B139, p.1.
74. Логачев М.Ю. — ТМФ, 1987, т.70, с.412.
75. Соловьев М.А. — ТМФ, 1989, т.78, с.163.
76. Prokhorov L.V., Shabanov S.V. — Phys. Lett., 1989, vol.216B, p.341.
77. Feynman R.P. — Acta Phys. Polonica, 1963, vol.24, p.697.
78. Faddeev L.D., Popov V.N. — Phys. Lett., 1967, vol.25B, p.29.
79. Bassetto A., Nardelli G., Soldati R. — Yang-Mills Theories in Algebraic Noncovariant Gauges. Singapore: World Scientific, 1991.
80. Pauli W. — Phys. Rev., 1940, vol.58, p.716.
81. Coleman S. — In: The Whys of Subnuclear Physics. Ed. A.Zichichi, Plenum Press, N.-Y., 1979.
82. Dirac P.A.M. — Proc. Roy. Soc., 1931, vol.A133, p.60. Перевод: [83].
83. Монополь Дирака. — Сб. Пер. с англ. под ред. Б.М.Болотовского и Ю.Д.Усачева. М.: Мир, 1970.
84. Goddard P., Olive D.I. — Repts. Progr. Phys., 1978, vol.41, p.1357.
85. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т.13, с.452.
86. Волков Д.В., Акулов В.П. — Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, с.621.
87. Wess J., Zumino B. — Phys. Lett., 1974, vol.49B, p.52.
88. Wess J., Zumino B. — Nucl. Phys., 1974, vol.B70, p.39.
89. Neveu A., Schwartz J.H. — Nucl. Phys., 1971, vol.B31, p.86.
90. Gervais J.L., Sakita D. — Nucl. Phys., 1971, vol.B34, p.632.
91. Zumino B. — Relativistic Strings and Supergauges. CERN Preprint, Th-1779, 1973.
92. Aharonov Y., Casher A., Susskind L. — Phys. Lett., 1971, vol.35B, p.512.
93. Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S. — Phys. Rev., 1976, vol.D13, p.3214.
94. Deser S., Zumino B. — Phys. Lett., 1976, vol.62B, p.355.
95. Прохоров Л.В. — УФН, 1988, т.154, с.299.
96. Дирак П.А.М. — Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
97. Dirac P.A.M. — Can. J. Math., 1950, vol.2, p.129.

98. Bergmann P. — *Rev. Mod. Phys.*, 1961, vol.33, p.510.
99. Прохоров Л.В. — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.559.
100. Дирак П.А.М. — Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960; Наука, 1974, 1979.
101. Goldstone J., Jackiw R. — *Phys. Lett.*, 1978, vol.74B, p.81.
102. Weinberg S. — *Phys. Rev.*, 1964, vol.B135, p.1049.
103. Прохоров Л.В., Шабанов С.В. — Гамильтонова механика калибровочных систем. ОИЯИ Б1-2-93-312, Дубна, 1993; изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996.
104. Прохоров Л.В. — ЯФ, 1982, т.35, с.229.
105. Желобенко Д.П. — Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
106. Лоос О. — Симметрические пространства. М.: Мир, 1985.
107. Прохоров Л.В. — ЭЧАЯ, 1982, т.13, с.1094.
108. Burnel A. — *Phys. Rev.*, 1982, vol.D26, p.442.
109. Burnel A. — *Phys. Rev.*, 1985, vol.D32, p.450.
110. Gupta S.N. — *Proc. Phys. Soc. Ser.A*, 1950, vol.63, p.681.
111. Bleuler K. — *Helv. Phys. Acta*, 1950, vol.23, p.567.
112. Gupta S.N. — *Can. J. Phys.*, 1957, vol.35, p.961.
113. Weinberg S. — *Phys. Rev.*, 1964, vol.B134, p.882.
114. Гитман Д.Н., Тютин И.В. — Каноническое квантование полей со связями. М.: Наука, 1986.
115. Прохоров Л.В., Фурсаев Д.В., Шабанов С.В. — ТМФ, 1993, т.97, с.373.
116. Радиошкин А.В. — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.58.
117. Прохоров Л.В. — Вестн. ЛГУ, 1990, №18, с.3.
118. Bloch F., Nordsieck A. — *Phys. Rev.*, 1937, vol.52, p.54.
119. Murota T. — *Progr. Theor. Phys.*, 1960, vol.24, p.1109.
120. Ivanov S.V., Korchemsky G.P. — *Phys. Lett.*, 1985, vol.154B, p.197.
121. Шварц А.С. — Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.
122. Feynman R.P. — *Phys. Rev.*, 1949, vol.76, p.769. Перевод: [123].
123. Фейнман Р.П. — В сб.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М.: ИЛ, 1954, с.184.
124. Фейнман Р.П. — Теория фундаментальных процессов. М.: Наука, 1978, с.110.
125. Christ N.H., Lee T.D. — *Phys. Rev.*, 1980, vol.D22, p.939.
126. Малышев Ю.П., Прохоров Л.В. — Вестн. ЛГУ, 1986, №18, с.99.
127. Вигнер Е. — Этюды о симметрии. Пер. англ. М.: Мир, 1971, с.20.
128. Нетер Э. — В кн.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959.
129. Голдстейн Г. — Классическая механика. Пер. с англ. М.: ГИТТЛ, 1957.
130. Prokhorov L.V. — *Lett. Math. Phys.*, 1990, vol.19, p.245.
131. Прохоров Л.В. — Вестн. СПбУ, 1994, №18, с.87.
132. Лейтес Д.А. — Теория супермногообразий. Петрозаводск, 1983.
133. Singer I.M. — *Commun. Math. Phys.*, 1978, vol.60, p.7.
134. Zwanziger D. — *Nucl. Phys.*, 1981, vol.B192, p.259.
135. Elitzur S. — *Phys. Rev.*, 1975, vol.D12, p.3978.
136. Прохоров Л.В., Шабанов С.В. — Вестн. ЛГУ, 1990, №4, с.3.
137. Картан А. — Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с фр. М.: Мир, 1971.

138. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1985, 4-е изд.
139. Храмов Ю.А. — Физики. Биографический справочник. М.: Наука, 1983, 2-е изд.
140. Kummer W. — Acta Phys. Austriaca, 1961, vol.14, p.149.
141. Schwinger J. — Phys. Rev., 1951, vol.82, p.664. Перевод: в сб. [123].
142. Fateev V.A., Schwarz A.S., Tyupkin Yu.S. — Lebedev Phys. Inst. Preprint No.155, 1976.
143. Brittin W.E., Smythe W.R., Wyss W. — Am. J. Phys., 1982, vol.50, p.693.
144. Dubovikov M.S., Smilga A.V. — Nucl. Phys., 1981, vol.B185, p.109.
145. Power E.A., Zienau S. — Nuovo Cim., 1957, vol.6, p.7.
146. Power E.A., Zienau S. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1959, vol.A251, p.427.
147. Yang K.-H. — Ann. Phys., 1988, vol.186, p.209.
148. Прохоров Л.В. — ЯФ, 1972, т.16, с.854.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ РИМАНОВОМ МИРЕ

Н.С.Шавохина

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре рассматривается спинорное поле в четырехмерном римановом мире событий. Это поле подчиняется уравнению Дирака — Фока — Иваненко. Затем формулируются принципы квантования спинорного поля в римановом мире, которые в частном случае плоского мира эквивалентны каноническим правилам квантования. Сформулированные принципы апробируются на примере мира де Ситтера. Изучение квантовой теории поля в мире де Ситтера интересно потому, что оно само собой приводит к методу инвариантного ящика для плоского мира. Изучение же квантовой теории спинорного поля в произвольно заданном римановом мире позволяет учесть влияние внешнего гравитационного поля на квантованное спинорное поле.

The review deals with the spinor field in the four-dimensional Riemannian space-time. The field obeys the Dirac-Fock-Ivanenko equation. Principles of quantization of the spinor field in the Riemannian space-time are formulated which in a particular case of the plane space-time are equivalent to the canonical rules of quantization. The formulated principles are exemplified by the De Sitter space-time. The study of quantum field theory in the De Sitter space-time is interesting because it itself leads to a method of an invariant well for plane space-time. However, the study of the quantum spinor field theory in an arbitrary Riemannian space-time allows one to take into account the influence of the external gravitational field on the quantized spinor field.

ВВЕДЕНИЕ

В литературе мы встречаем авторитетные указания на то, что с помощью идей общей теории относительности (ОТО) можно найти выход из трудностей теории квантованных полей и элементарных частиц [1—12]. Полное включение этих идей в теорию квантованных полей, очевидно, предполагает, наряду с другими полями, квантование гравитационного поля [13—18], но в столь общей постановке эта задача, по-видимому, далека от своего решения. Поэтому представляет немалый интерес эта задача хотя бы и в частной постановке, когда поля, отличные от гравитационного, рассматриваются в четырехмерном мире событий с фиксированной римановой

геометрии. Согласно ОТО, это позволяет учитывать влияние внешнего гравитационного поля на поведение негравитационных полей.

С необходимостью учитывать влияние внешнего гравитационного поля на прочие поля впервые встретились в электродинамике при записи уравнений Максвелла в ОТО. При этом только потребовалось частные производные от бивектора электромагнитного поля заменить ковариантными [19]. С другими полями дело оказалось сложнее. Так, было установлено, что в уравнении Клейна — Фока для скалярного поля при переходе от плоской геометрии мира к римановой одной лишь замены частных производных ковариантными недостаточно: потребовалось еще добавить слагаемое, пропорциональное скалярной кривизне мира [20—22]. Напротив, в уравнении Дирака для спинорного поля при таком же переходе добавлять новое слагаемое не нужно, зато пришлось ввести новое геометрическое понятие — ковариантную производную спинорного поля, что само по себе является очень крупным достижением. Последнее принадлежит Фоку и Иваненко [23—30]. Ввиду важности полученного ими результата уравнение Дирака в условиях риманова мира мы будем называть уравнением Дирака — Фока — Иваненко (ДФИ). Сравнительный анализ описания спинорного и скалярного полей в римановом мире событий был сделан в работе [31]. В данном обзоре, напротив, все внимание будет сосредоточено на описании спинорного поля.

Спинорное поле, в самом деле, заслуживает особого внимания: оно содержит информацию о поведении электронов и нейтрино (и других частиц со спином $1/2$) во внешнем гравитационном поле, а значит, и об их поведении в необозримых просторах Вселенной.

Уравнение ДФИ мы будем записывать в форме Картана. Согласно Картану [32], спинор имеет метрическую, а не аффинную природу, и поэтому *«...невозможно ввести спинорные поля в классическую технику исследования в римановой геометрии; то есть при произвольном выборе системы координат x^i пространства невозможно определить спинор при помощи конечного числа N составляющих u_α таким образом, чтобы u_α допускали ковариантные производные вида*

$$u_{\alpha,i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i} + \Lambda_{\alpha i}^\beta u_\beta,$$

где $\Lambda_{\alpha i}^\beta$ являются определенными функциями от x^h » [32, с.218]. (Выделено самим Картаном).

Для того чтобы ввести спинорное поле в риманов мир, необходимо, как это и было сделано Фоком и Иваненко, задать в мире поле метрически конгруэнтных касательных базисов. Переход от одного такого поля базисов к другому достигается обобщенным преобразованием Лоренца. Уравнение

Дирака — Фока — Иваненко инвариантно относительно обобщенных преобразований Лоренца. Последние привлекают большое внимание [33—35]. В теории же спинорного поля они просто необходимы.

Уравнение Дирака — Фока — Иваненко рассматривается в первой части обзора. Во второй части рассматриваются общие принципы квантовой теории спинорного поля в условиях римановой геометрии. В третьей, вспомогательной, части эти принципы реализуются на примере двумерных римановых миров в базисе F . В четвертой части эти принципы реализуются на примере двумерного сферического мира де Ситтера в базисе dX . Определение базисов F и dX дается попутно в тексте обзора.

Интересно, что в тридцатые годы с целью установить связь между теоретической физикой и математической теорией групп Дирак изучал, к чему приводит замена мира Пуанкаре — Минковского на мир де Ситтера. В работе [36] он предложил специальное уравнение для спинорного поля в мире де Ситтера. В работе [37] мне удалось доказать, что это уравнение Дирака является особой формой спинорного уравнения, написанного Фоком и Иваненко для римановых миров. Оно получается при переходе от базиса F к базису dX .

Мир де Ситтера заслуживает внимания потому, что, будучи пространством постоянной кривизны, он допускает десятипараметрическую группу изометрий. В пределе бесконечно большого радиуса кривизны эта группа переходит в группу Пуанкаре, сам же мир де Ситтера переходит в мир Пуанкаре — Минковского. Вместо интегралов Фурье, с которыми приходится иметь дело в плоском мире, в мире де Ситтера выступают ряды. В указанном выше пределе эти ряды переходят в интегралы. Таким образом, изучение квантовой теории поля оправдывается уже тем, что приводит нас к методу инвариантного ящика для плоского мира. Применительно к спинорному полю этот метод предложен в работе [38]. Квантовая теория спинорного поля в четырехмерном мире де Ситтера в базисе dX рассмотрена в работе [39].

Но и в общем случае риманова мира теория спинорного поля может иметь прикладной характер. Так, Виттен [40] применил уравнение ДФИ к доказательству теоремы о положительности энергии поля тяготения и материи. Багров и Обухов [41] решили проблему полной классификации пространственно-временных многообразий, в которых уравнение Дирака — Фока — Иваненко допускает полное разделение переменных. С начала шестидесятых годов спиноры и связанные с ними изотропные тетрады широко применяются к изучению ряда вопросов ОТО [42,43].

В обзоре нумерация формул внутри одной части идет независимо от других частей. При ссылке на формулу из другой части перед номером формулы ставится номер этой другой части. Таких ссылок немного. При ссылке же на формулу из одной и той же части номер части не ставится.

I. СПИНОРНОЕ ПОЛЕ В РИМАНОВОМ МИРЕ

1. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

В 1928 году П.А.М.Дирак [44] для описания поведения релятивистского электрона установил следующую систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка (см. также [29, с.87]):

$$\begin{aligned}
 (E - mc^2) \psi_1 - c(p_x - ip_y) \psi_4 - cp_z \psi_3 &= 0, \\
 (E - mc^2) \psi_2 - c(p_x + ip_y) \psi_3 + cp_z \psi_4 &= 0, \\
 (E + mc^2) \psi_3 - c(p_x - ip_y) \psi_2 - cp_z \psi_1 &= 0, \\
 (E + mc^2) \psi_4 - c(p_x + ip_y) \psi_1 + cp_z \psi_2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где c — скорость света, m — масса электрона, она же масса позитрона, \hbar — постоянная Планка,

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}.$$

Систему (1), следуя Дираку, записывают в матричном виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \tag{2}$$

располагая искомые функции $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ в виде столбца Ψ и приводя тем самым систему к канонической форме Шредингера, в соответствии с чем оператор \hat{H} называют гамильтонианом (см. [45, с.136—139]):

$$\hat{H} = \alpha_0 mc^2 + c\alpha_1 p_x + c\alpha_2 p_y + c\alpha_3 p_z, \tag{3}$$

где α_ν — матрицы Дирака, равные

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Эти матрицы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2e\delta_{\mu\nu}, \tag{5}$$

где e — единичная матрица. Поэтому

$$\hat{H}\hat{H} = \{m^2c^4 + c^2(p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z)\}e, \quad (6)$$

так что гамильтониан \hat{H} является квадратным корнем из оператора (6).

Разумеется, открытие системы уравнений (1) шло обратным путем. Было известно, что нерелятивистский электрон описывается двумя (а не четырьмя) функциями, поскольку спин электрона равен $\frac{1}{2}\hbar$, и что спин электрона описывается следующими матрицами:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Последние называются матрицами Паули [46, с.239—241]. Перестановочные соотношения для этих матриц имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 &= 2i\sigma_1, \\ \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 &= 2i\sigma_2, \\ \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 &= 2i\sigma_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Для матриц Паули были известны и соотношения вида (5), т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_2 = \sigma_3\sigma_3 = e, \\ \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3 &= 0, \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В отличие от (5) здесь e — единичная матрица, состоящая из двух строк и столбцов. Впрочем, дальше единичную матрицу любого порядка и любой единичный оператор будем обозначать, как правило, через 1. Равным образом нулевую матрицу любого порядка, любой нулевой оператор, а также и любой нулевой вектор будем обозначать через 0. При этом условия матрицы Дирака (4), например, как это замечено в [47, с.84], могут быть выражены через матрицы Паули (7) следующим образом:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поставив перед собой задачу составить для релятивистского электрона уравнение Шредингера, Дирак принял за основу уравнение Клейна — Фока

$$E^2\psi = \{m^2c^4 + c^2(p_x p_x + p_y p_y + p_z p_z)\}\psi. \quad (10)$$

Поиск квадратного корня из оператора, стоящего в правой части уравнения (10), увенчался успехом. Составив с помощью матриц Паули матрицы (4), Дирак установил формулу (6), а затем и уравнение Шредингера (2), которое в развернутом виде записывается в виде системы уравнений (1):

Тот факт, что для описания релятивистского электрона потребовались не две, а четыре функции, привел Дирака к открытию позитрона.

Надо сказать, что выбор матриц α_ν не является однозначным. Так, Фок [46, с.291—301] указал следующие две подстановки:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\psi_1 + \psi_3}{\sqrt{2}}, & \eta_2 &= \frac{\psi_2 + \psi_4}{\sqrt{2}}, \\ \eta_3 &= \frac{\psi_2 - \psi_4}{\sqrt{2}}, & \eta_4 &= \frac{\psi_3 - \psi_1}{\sqrt{2}}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\psi_1 - i\psi_3}{\sqrt{2}}, & \zeta_2 &= \frac{\psi_2 - i\psi_4}{\sqrt{2}}, \\ \zeta_3 &= \frac{-\psi_3 + i\psi_1}{\sqrt{2}}, & \zeta_4 &= \frac{-\psi_4 + i\psi_2}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Они переводят уравнения Дирака (1), соответственно, в уравнения

$$\begin{aligned} -i\hbar c \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} - i \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial z} \right) - mc^2 \eta_4 &= i\hbar \frac{\partial \eta_1}{\partial t}, \\ -i\hbar c \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + i \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial z} \right) + mc^2 \eta_3 &= i\hbar \frac{\partial \eta_2}{\partial t}, \\ -i\hbar c \left(\frac{\partial \eta_4}{\partial x} + i \frac{\partial \eta_4}{\partial y} + \frac{\partial \eta_3}{\partial z} \right) + mc^2 \eta_2 &= i\hbar \frac{\partial \eta_3}{\partial t}, \\ -i\hbar c \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial x} - i \frac{\partial \eta_3}{\partial y} - \frac{\partial \eta_4}{\partial z} \right) - mc^2 \eta_1 &= i\hbar \frac{\partial \eta_4}{\partial t} \end{aligned} \quad (13)$$

и в уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_4}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \frac{mc}{\hbar} \zeta_2 &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} - \frac{mc}{\hbar} \zeta_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_4}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \zeta_3}{\partial t} - \frac{mc}{\hbar} \zeta_4 &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - \frac{\partial \zeta_4}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \zeta_4}{\partial t} + \frac{mc}{\hbar} \zeta_3 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Замечательно, что в последней системе уравнений, в отличие от систем (1) и (13), все коэффициенты — вещественные числа.

В свою очередь, Картан указал следующую подстановку:

$$\begin{aligned} \psi_1^c = \xi_0 &= \frac{\psi_2 - \psi_4}{\sqrt{2}}, & \psi_2^c = \xi_{12} &= \frac{\psi_1 - \psi_3}{\sqrt{2}}, \\ \psi_3^c = \xi_1 &= \frac{\psi_1 + \psi_3}{\sqrt{2}}, & \psi_4^c = \xi_2 &= \frac{-\psi_2 - \psi_4}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (15)$$

(см. [32, с.196]). Она переводит систему уравнений (1) в систему уравнений

$$\begin{aligned} c(p_x + ip_y) \xi_1 + (E + cp_z) \xi_2 &= -mc^2 \xi_0, \\ (cp_z - E) \xi_1 - c(p_x - ip_y) \xi_2 &= -mc^2 \xi_{12}, \\ c(p_x - ip_y) \xi_0 + (E + cp_z) \xi_{12} &= mc^2 \xi_1, \\ (cp_z - E) \xi_0 - c(p_x + ip_y) \xi_{12} &= mc^2 \xi_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Несколько неожиданная система индексов имеет глубокий смысл.

Для доказательства инвариантности уравнения Дирака (2) относительно группы Лоренца обычно вводят матрицы γ [45,47,48,49], и записывают уравнение в виде

$$\left(i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - m \right) \psi(x) = 0 \quad (17)$$

(см. [49, с.50]), хотя можно обойтись и без этого [46, с.301—309]. Мы не будем останавливаться на этом, потому что для той же цели, а равным образом и для других, удобнее записывать уравнение Дирака в форме Картана, указанной в книге [32, с.195].

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В ФОРМЕ КАРТАНА

Систему уравнений (16) Картан объединил в одном уравнении

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - mcK \right) \xi = 0, \quad (18)$$

что в более подробной записи, предложенной в [37], означает

$$\left(i\hbar \sum_{\nu=0}^3 H^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} + mcH^4 \right) \xi = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (20)$$

матрицы H равны

$$H^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^4 = K = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Мы будем употреблять также матрицы $H_0 = -H^0$, $H_a = H^a$, где $a = 1, 2, 3, 4$. Матрицы H удовлетворяют следующим соотношениям:

$$H^A H^B + H^B H^A = 2\eta^{AB}, \quad (22)$$

где $\eta^{00} = -1$, $\eta^{aa} = 1$, $\eta^{AB} = 0$ при $A \neq B$. Кроме того,

$$H_0 H_1 H_2 H_3 H_4 = i. \quad (23)$$

Мы встретились с индексами трех сортов. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. Большие латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, 4. Малые латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4. По одинаковым верхнему и нижнему индексам предполагается суммирование в пределах, указанных сортом этих индексов, например:

$$\sum_{\nu=0}^3 H^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = H^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}, \quad \sum_{B=0}^4 \eta^{AB} H_B = \eta^{AB} H_B = H^A. \quad (24)$$

С помощью тензора η^{AB} и обратного к нему тензора n_{AB} мы будем поднимать и опускать индексы. Смысл этого очевиден: $\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ — метрическая форма четырехмерного, а $\eta_{AB} dx^A dx^B$ — метрическая же форма пятимерного мира Пуанкаре — Минковского.

Полагая

$$\Xi = \xi \exp \left\{ -\frac{imc}{\hbar} x^4 \right\}, \quad (25)$$

мы можем записать уравнение (19) в виде

$$H^A \frac{\partial}{\partial x^A} \Xi = 0. \quad (26)$$

Заметим, что слова «спин» и «спинор» английского происхождения: первоначальный смысл английского глагола «to spin» есть «вертеть веретено» (см. [46, с.239]). Так был наречен собственный момент количества движения электрона, не зависящий от его движения в пространстве. Затем это название отнесли к собственному моменту количества движения всякой элементарной частицы. Что до спиноров, то это такие геометрические объекты, поведение которых принципиально отличается от поведения векторов и тензоров. С ними физики встретились впервые после открытия Дирака. Вернее, они встретились с ними немного раньше, в теории Паули, но заинтересовались их поведением лишь после открытия Дирака, когда потребовалось понять инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца. Однако на самом деле спиноры были открыты Картаном в 1913 году, о чем не только физики, но и алгебраисты, по-видимому, не ведали. Мы осмеливаемся так говорить, поскольку спиноры были перестановочны Ван дер Варденом [50] после 1928 года. Поэтому лекции Картана по теории спиноров [32], написанные им в 1938 году, представляют исключительный интерес. Прочитав их, можно понять, сколь велика услуга, которую оказал нам П.А.Широков, переведя эту книгу на русский язык и снабдив ее замечательным комментарием. (Широков Петр Алексеевич (1895—1944), выдающийся геометр, профессор Казанского университета [51]).

А вот перестановочные соотношения типа (5), (9) и (22) были изучены еще раньше, в прошлом веке [52]. Порожденная ими алгебра в современной литературе называется алгеброй Клиффорда.

В алгебре Клиффорда с любым числом независимых элементов H , при любой сигнатуре метрического тензора и в любом базисе выполняются следующие соотношения:

$$H^\nu H^\alpha H^\mu = [H^\nu H^\alpha H^\mu] + \eta^{\alpha\mu} H^\nu + \eta^{\alpha\nu} H^\mu - \eta^{\mu\nu} H^\alpha, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ [H^\alpha H^\beta][H^\mu H^\nu] - [H^\mu H^\nu][H^\alpha H^\beta] \} = \\ & = \eta^{\mu\beta} [H^\alpha H^\nu] - \eta^{\alpha\mu} [H^\beta H^\nu] + \eta^{\nu\beta} [H^\mu H^\alpha] - \eta^{\nu\alpha} [H^\mu H^\beta]. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь квадратные скобки означают альтернированное произведение.

3. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА — ФОКА — ИВАНЕНКО

Переход к уравнению Дирака в римановом мире (то есть к уравнению Дирака — Фока — Иваненко) совершается следующим образом [37]. Метрическая форма $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ пространства-времени с помощью подходящим образом выбранных линейных дифференциальных форм

$$f^\alpha = f^\alpha_\beta(x) dx^\beta \quad (29)$$

может быть приведена к следующему каноническому виду:

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} f^\alpha f^\beta. \quad (30)$$

Разрешая уравнение (29) относительно dx , получаем

$$dx^\alpha = e^\alpha_\beta f^\beta,$$

где $f^\alpha_\sigma e^\sigma_\beta = \delta^\alpha_\beta$, а следовательно, и $e^\alpha_\sigma f^\sigma_\beta = \delta^\alpha_\beta$, в свою очередь, δ^α_β — единичный аффинор. Дуальный к f^α базис состоит из векторных полей

$$e_\alpha = e^\beta_\alpha \partial_\beta. \quad (31)$$

Имеем также

$$\partial_\alpha = f^\beta_\alpha e_\beta.$$

Всякое ковекторное поле a_α можно задать как в координатном базисе $d = dx$, так и в ортогональном базисе f : $a_\alpha d^\alpha = A_\alpha f^\alpha$, откуда $A_\alpha = a_\beta e^\beta_\alpha$, $a_\alpha = A_\beta f^\beta_\alpha$.

Аналогично всякое векторное поле a^α можно задать как в координатном базисе $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, так и в ортогональном базисе e : $a^\alpha \partial_\alpha = A^\alpha e_\alpha$, откуда $A^\alpha = a^\beta f^\beta_\alpha$, $a^\alpha = A^\beta e^\alpha_\beta$.

Ковариантный дифференциал векторного поля равен

$$DA^\alpha = dA^\alpha + \omega_\mu^\alpha A^\mu, \quad (32)$$

а ковариантный дифференциал ковекторного поля равен

$$DA_\alpha = dA_\alpha - \omega_\alpha^\mu A_\mu, \quad (33)$$

где $\omega_\mu^\alpha = \omega^\alpha_{\beta\mu} f^\beta$, в свою очередь, $\omega^\alpha_{\beta\mu}$ — компоненты аффинной связности в ортогональном базисе, задаваемой метрикой (30). Отсюда получаются ковариантные производные вектора и ковектора:

$$D_\beta A^\alpha = e_\beta A^\alpha + \omega^\alpha_{\beta\mu} A^\mu, \quad (34)$$

$$D_\beta A_\alpha = e_\beta A_\alpha - \omega^\mu_{\beta\alpha} A_\mu. \quad (35)$$

Компоненты связности находятся из двух условий. Первое из них — отсутствие кручения. Для скалярной функции F это означает

$$D_{\alpha} e_{\beta} F = D_{\beta} e_{\alpha} F.$$

Отсюда следует равенство

$$\omega_{\alpha\beta}^{\gamma} - \omega_{\beta\alpha}^{\gamma} = C_{\alpha\beta}^{\gamma}, \quad (36)$$

где компоненты $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ определяются операцией Ли:

$$e_{\alpha} e_{\beta} - e_{\beta} e_{\alpha} = C_{\alpha\beta}^{\gamma} e_{\gamma}. \quad (37)$$

Они равны

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} \left(\frac{\partial f_{\nu}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial f_{\mu}^{\gamma}}{\partial x^{\nu}} \right) = (e_{\alpha}^{\mu} e_{\beta}^{\nu} - e_{\beta}^{\mu} e_{\alpha}^{\nu}) f_{\mu\nu}^{\gamma}. \quad (38)$$

Второе условие, определяющее компоненты связности, — сохранение метрического тензора при параллельном переносе:

$$D_{\alpha} \eta_{\beta\gamma} = -\omega_{\alpha\beta}^{\mu} \eta_{\mu\gamma} - \omega_{\alpha\gamma}^{\mu} \eta_{\beta\mu} = 0. \quad (39)$$

Разрешая уравнения (36) и (39) относительно ω , находим

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2} (C_{\nu\beta\alpha} + C_{\nu\alpha\beta} - C_{\beta\alpha\nu}), \quad (40)$$

где обозначено

$$\omega_{\nu\beta\alpha} = \omega_{\alpha\beta}^{\mu} \eta_{\nu\mu}, \quad C_{\nu\beta\alpha} = C_{\alpha\beta}^{\mu} \eta_{\nu\mu}. \quad (41)$$

Подобно метрическому тензору, матрицы H при параллельном переносе не меняются. Поэтому для векторной матрицы $A = A^{\alpha} H_{\alpha}$ имеем

$$DA = dA + \omega_{\mu}^{\alpha} A^{\mu} H_{\alpha} = dA + \Omega A - A \Omega, \quad (42)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{4} \omega_{\alpha\mu\nu} f^{\nu} H^{\alpha} H^{\mu}. \quad (43)$$

Так как для векторной матрицы согласно (42) с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка получилось равенство

$$DA - dA + A = (1 + \Omega) A (1 + \Omega)^{-1}, \quad (44)$$

то для спинора должно выполняться равенство

$$D\xi - d\xi + \xi = (1 + \Omega)\xi. \quad (45)$$

Следовательно, ковариантный дифференциал спинора ξ равен

$$D\xi = d\xi + \frac{1}{4} \omega_{\alpha\mu\nu} f^{\nu} H^{\alpha} H^{\mu} \xi, \quad (46)$$

а его ковариантная производная

$$D_\nu \xi = e_\nu^\alpha \xi + \frac{1}{4} \omega_{\alpha\mu\nu} H^\alpha H^\mu \xi. \quad (47)$$

Последнее заключение сделано на том основании, что если векторная матрица преобразуется по закону A в SAS^{-1} , то вслед за ней спинор преобразуется по закону ξ в $S\xi$.

Уравнение Дирака — Фока — Иваненко получается из уравнения (19) заменой частной производной спинора на ковариантную, так что оно выступает в следующем виде:

$$(i\hbar H^\mu D_\nu + mcH^4) \xi = 0. \quad (48)$$

Уравнение ДФИ, очевидно, можно записать в виде

$$H^\nu D_\nu \xi = \frac{imc}{\hbar} H^4 \xi. \quad (49)$$

Следовательно, для дираковски-сопряженного спинора

$$\bar{\xi} = \xi^\dagger H_0 \quad (50)$$

уравнение ДФИ принимает вид

$$D_\nu \bar{\xi} H^\nu = -\frac{imc}{\hbar} \bar{\xi} H^4, \quad (51)$$

где

$$D_\nu \bar{\xi} = e_\nu^\alpha \bar{\xi} - \bar{\xi} \frac{1}{4} \omega_{\alpha\mu\nu} H^\alpha H^\mu. \quad (52)$$

Наконец, заметим, что решение (40) находится с помощью равенства

$$\begin{aligned} \omega_{\nu\beta\alpha} = & \frac{1}{2} (\omega_{\nu\beta\alpha} + \omega_{\beta\nu\alpha}) + \frac{1}{2} (\omega_{\alpha\nu\beta} + \omega_{\nu\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\omega_{\alpha\beta\nu} + \omega_{\beta\alpha\nu}) + \\ & + \frac{1}{2} (\omega_{\alpha\beta\nu} - \omega_{\alpha\nu\beta}) + \frac{1}{2} (\omega_{\nu\beta\alpha} - \omega_{\nu\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\omega_{\beta\nu\alpha} - \omega_{\beta\alpha\nu}). \end{aligned}$$

4. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА — ФОКА — ИВАНЕНКО В БАЗИСЕ ЛАМЕ

Уравнение ДФИ заметно упрощается в случае ортогональных координат (если таковые имеются), когда можно построить базис Ламе, то есть положить $f_\beta^\alpha = h^\alpha \delta_\beta^\alpha$. Прибегая к формуле (27), получаем

$$\frac{1}{4} \omega_{\alpha\mu\nu} H^\nu H^\alpha H^\mu = \frac{1}{4} \omega_{[\alpha\mu\nu]} H^\nu H^\alpha H^\mu + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} \omega_{\alpha\mu\nu} H^\mu.$$

Но

$$\omega_{[\alpha\mu\nu]} = \frac{1}{2} C_{[\alpha\mu\nu]}, \quad \eta^{\alpha\nu} \omega_{\alpha\mu\nu} = C_{\alpha\mu}^\alpha,$$

а в базисе Ламе

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{h^{\alpha}h^{\beta}} \left[\delta_{\alpha}^{\gamma} \frac{\partial h^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \delta_{\beta}^{\gamma} \frac{\partial h^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right]$$

и, следовательно,

$$C_{[\alpha\mu\nu]} = 0, \quad \frac{1}{2} C_{\alpha\mu}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{hh^{\mu}}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \sqrt{\frac{h}{h^{\mu}}},$$

где $h = h^0 h^1 h^2 h^3$. Таким образом, в базисе Ламе

$$\frac{1}{4} \omega_{\alpha\mu\nu} H^{\nu} H^{\alpha} H^{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{H^{\mu}}{\sqrt{hh^{\mu}}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \sqrt{\frac{h}{h^{\mu}}} \quad (53)$$

и уравнение ДФИ в таком базисе записывается в виде

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{H^{\mu}}{\sqrt{hh^{\mu}}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{\frac{h}{h^{\mu}}} \xi \right) = \frac{imc}{\hbar} H^4 \xi. \quad (54)$$

Сопряженное уравнение ДФИ в базисе Ламе записывается в виде

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{1}{\sqrt{hh^{\mu}}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{\frac{h}{h^{\mu}}} \bar{\xi} \right) H^{\mu} = \frac{imc}{\hbar} \bar{\xi} H^4. \quad (55)$$

5. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

Метрическая форма $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} f^{\alpha} f^{\beta}$ определяет базис f лишь с точностью до ортогонального преобразования: $f^{\alpha} = L_{\beta}^{\alpha} f'^{\beta}$ и, наоборот, $f'^{\alpha} = \tilde{L}_{\beta}^{\alpha} f^{\beta}$. Из $\eta_{\alpha\beta} f'^{\alpha} f'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} f^{\alpha} f^{\beta}$ следует $\eta_{\alpha\sigma} \tilde{L}_{\beta}^{\sigma} = \eta_{\beta\sigma} \tilde{L}_{\alpha}^{\sigma}$. Имеем также

$$e'_{\alpha} = L_{\alpha}^{\beta} e_{\beta}, \quad e_{\alpha} = \tilde{L}_{\alpha}^{\beta} e'_{\beta}, \quad e_{\beta}^{\alpha} = e'_{\gamma} \tilde{L}_{\beta}^{\gamma}, \quad f_{\alpha}^{\beta} = f'_{\alpha} L_{\gamma}^{\beta}.$$

Подставляя две последние формулы в (38), находим

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = C_{\mu\nu}^{\sigma} \tilde{L}_{\alpha}^{\mu} \tilde{L}_{\beta}^{\nu} L_{\sigma}^{\gamma} + \tilde{L}_{\alpha}^{\sigma} e_{\beta} L_{\sigma}^{\gamma} - \tilde{L}_{\beta}^{\sigma} e_{\alpha} L_{\sigma}^{\gamma}. \quad (56)$$

Следовательно,

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \omega'_{\mu\nu\sigma} \tilde{L}_{\alpha}^{\mu} \tilde{L}_{\beta}^{\nu} \tilde{L}_{\gamma}^{\sigma} + \eta_{\mu\nu} \tilde{L}_{\alpha}^{\mu} e_{\gamma} \tilde{L}_{\beta}^{\nu}. \quad (57)$$

Отсюда легко получаются формулы

$$D_{\beta}^{\alpha} A^{\alpha} = \tilde{L}_{\beta}^{\mu} L_{\nu}^{\alpha} d'_{\mu} A'^{\nu}, \quad D_{\beta} A_{\alpha} = \tilde{L}_{\beta}^{\mu} \tilde{L}_{\alpha}^{\nu} D'_{\mu} A'_{\nu}$$

и аналогичные формулы для любых тензоров.

Рассмотрим теперь, как преобразуются ковариантный дифференциал спинора при ортохронных преобразованиях Лоренца. Всякое такое преобразование $f'^{\alpha} = \tilde{L}_{\beta}^{\alpha} f^{\beta}$ можно разложить в произведение некоторого числа p пространственных симметрий. Число p четное, если определитель матрицы преобразования равен 1, и нечетное, если этот определитель равен -1 , так что $(-1)^p = \det(L_{\beta}^{\alpha})$. Симметрия же относительно гиперплоскости P , ортогональной к единичному вектору a^{α} , выражается формулой $f'^{\alpha} = f^{\alpha} - 2a^{\alpha}a_{\beta}f^{\beta}$. Так как

$$-AH^{\alpha}A = H^{\alpha} - 2a^{\alpha}A,$$

где $A = a_{\alpha}H^{\alpha}$, то при всяком ортохронном преобразовании Лоренца

$$\begin{aligned} (-1)^p S^{-1}H^{\alpha}S &= \tilde{L}_{\beta}^{\alpha}H^{\beta}, & (-1)^p SH^{\alpha}S^{-1} &= L_{\beta}^{\alpha}H^{\beta}, \\ (-1)^p SH_{\alpha}S^{-1} &= \tilde{L}_{\alpha}^{\beta}H_{\beta}, & (-1)^p S^{-1}H_{\alpha}S &= L_{\alpha}^{\beta}H_{\beta}, \end{aligned} \quad (58)$$

где $S = A_p \dots A_1$, $S^{-1} = A_1 \dots A_p$.

Поэтому, согласно (57), матрица (43) преобразуется следующим образом:

$$\Omega = S\Omega'S^{-1} + \frac{1}{4}S^{-1}H_{\mu}Sd(S^{-1}H^{\mu}S). \quad (59)$$

Докажем, что

$$\frac{1}{4}S^{-1}H_{\mu}Sd(S^{-1}H^{\mu}S) = S^{-1}dS. \quad (60)$$

При $p = 1$ это равенство легко проверяется. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}AH_{\mu}Ad(AH^{\mu}A) &= \frac{1}{4}(2a_{\mu}A - H_{\mu})d(2a^{\mu}A - H^{\mu}) = \\ &= \frac{1}{2}(2a_{\mu}A - H_{\mu})(Ada^{\mu} + a^{\mu}dA) = AdA. \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь учтено, что $2a_{\mu}da^{\mu} = d(a_{\mu}a^{\mu}) = 0$, $dA^2 = A \cdot dA + dA \cdot A = d(a_{\mu}a^{\mu}) = 0$, так как по условию $A^2 = a_{\mu}a^{\mu} = 1$. Докажем теперь, что если равенство (60) выполняется при некотором p , то оно выполняется и при $p + 1$. Нам требуется, таким образом, доказать, что из (60) следует равенство

$$\frac{1}{4}S^{-1}AH_{\mu}ASd(S^{-1}AH^{\mu}AS) = S^{-1}Ad(AS). \quad (62)$$

Здесь для краткости мы опустили номер $p + 1$ у матрицы A . Имеем

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_{\mu} A S d(S^{-1} A H^{\mu} A S) = \frac{1}{4} S^{-1} A H_{\mu} H^{\mu} A dS + \\ + \frac{1}{4} S^{-1} A H_{\mu} A d(A H^{\mu} A) S + \frac{1}{4} S^{-1} A H_{\mu} A S (dS^{-1}) A H^{\mu} A S.$$

Так как $H_{\mu} H^{\mu}$ равно числу — размерности пространства-времени, то первое слагаемое

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_{\mu} H^{\mu} A dS = \frac{1}{4} S^{-1} H_{\mu} H^{\mu} dS.$$

Второе слагаемое, согласно (61),

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_{\mu} A d(A H^{\mu} A) S = S^{-1} A (dA) S.$$

Третье же слагаемое

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_{\mu} A S (dS^{-1}) A H^{\mu} A S = \\ = \frac{1}{4} S^{-1} (2a_{\mu} A - H_{\mu}) S (dS^{-1}) (2a^{\mu} A - H^{\mu}) S = \\ = \frac{1}{4} (2a_{\mu} a^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu}) (2a^{\mu} a_{\sigma} - \delta_{\sigma}^{\mu}) S^{-1} H_{\nu} S (dS^{-1}) H^{\sigma} S = \\ = \frac{1}{4} S^{-1} H_{\mu} S (dS^{-1}) H^{\mu} S.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4} S^{-1} A H_{\mu} A S d(S^{-1} A H^{\mu} A S) = \\ = \frac{1}{4} S^{-1} H_{\mu} S d(S^{-1} H^{\mu} S) + S^{-1} A (dA) S. \quad (63)$$

Таким образом, из (60) следует (62). По индукции равенство (60) доказано, а значит, согласно (59),

$$\Omega = S \Omega' S^{-1} + S^{-1} dS. \quad (64)$$

Полагая

$$\xi' = S \xi, \quad (65)$$

отсюда находим

$$D \xi = d \xi + \Omega \xi = S^{-1} (d \xi' + \Omega' \xi') = S^{-1} D' \xi'. \quad (66)$$

Таким образом, ξ и $D \xi$ преобразуются по одному и тому же правилу.

Рассмотрим, как преобразуется сопряженный спинор (50). Нетрудно проверить, что если матрица A соответствует единичному вектору, то

$$A^+ H_0 = -H_0 A^{-1}, \quad (67)$$

где знак +, как и в (50), указывает эрмитово сопряжение. Поэтому

$$S^+ H_0 = -(-1)^P H_0 S^{-1}. \quad (68)$$

Следовательно, сопряженный спинор преобразуется по правилу

$$\bar{\xi}' = (-1)^P \bar{\xi} S^{-1}. \quad (69)$$

По такому же правилу преобразуется и его ковариантный дифференциал:

$$D\bar{\xi} = d\bar{\xi} - \bar{\xi}\Omega = (-1)^P (d\bar{\xi}' - \Omega'\xi') S = (-1)^P (D'\bar{\xi}') S. \quad (70)$$

Теперь нетрудно доказать, что уравнения (49) и (51) ковариантны относительно преобразования от одного ортогонального базиса к другому. Действительно, из (66) и (70) следуют правила преобразования ковариантных производных спинора:

$$\begin{aligned} D_\nu \xi &= \tilde{L}_\nu^\mu S^{-1} D'_\mu \xi', \\ D_\nu \bar{\xi} &= (-1)^P \tilde{L}_\nu^\mu (D'_\mu \bar{\xi}') S. \end{aligned} \quad (71)$$

Согласно (58) получаем

$$\begin{aligned} H^\nu D_\nu \xi &= (-1)^P S^{-1} H^\mu D'_\mu \bar{\xi}', \\ D_\nu \bar{\xi} H^\nu &= D'_\mu \bar{\xi}' H^\mu S. \end{aligned} \quad (72)$$

Кроме того, имеем

$$(-1)^P S H^4 S^{-1} = H^4. \quad (73)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H^\nu D_\nu \xi - \frac{imc}{\hbar} H^4 \xi &= (-1)^P S^{-1} \left(H^\nu D'_\nu \xi' - \frac{imc}{\hbar} H^4 \xi' \right), \\ D_\nu \bar{\xi} H^\nu + \frac{imc}{\hbar} \bar{\xi} H^4 &= \left(D'_\nu \bar{\xi}' H^\nu + \frac{imc}{\hbar} \bar{\xi}' H^4 \right) S, \end{aligned} \quad (74)$$

так что уравнения (49) и (51) действительно ковариантны.

6. ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ СПИНОРА И ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

Вторая ковариантная производная спинора приводит нас к определению тензора кривизны Римана — Кристоффеля

$$R_{\mu\nu, \alpha\beta} = \eta_{\nu\sigma} R_{\mu, \alpha\beta}^\sigma \quad (75)$$

где

$$R_{\mu,\alpha\beta}^{\sigma} = e_{\beta}^{\sigma} \omega_{\alpha\mu}^{\sigma} - e_{\alpha}^{\sigma} \omega_{\beta\mu}^{\sigma} + C_{\alpha\beta}^{\gamma} \omega_{\gamma\mu}^{\sigma} + \omega_{\alpha\mu}^{\gamma} \omega_{\beta\gamma}^{\sigma} - \omega_{\beta\mu}^{\gamma} \omega_{\alpha\gamma}^{\sigma} \quad (76)$$

Действительно, ковариантная производная (47) спинора ξ имеет и спинорный и ковекторный характер. Поэтому вторая ковариантная производная спинора ξ имеет и спинорный и тензорный характер. В соответствии с (35) и (47) она равняется

$$D_{\alpha} D_{\beta} \xi = \left(e_{\alpha} + \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu\alpha} H^{\mu} H^{\nu} \right) D_{\beta} \xi - \omega_{\alpha\beta}^{\sigma} D_{\sigma} \xi. \quad (77)$$

Отсюда следует, что

$$D_{\alpha} D_{\beta} \xi - D_{\beta} D_{\alpha} \xi = \frac{1}{4} H^{\mu} H^{\nu} R_{\mu\nu,\alpha\beta}. \quad (78)$$

Для доказательства надо воспользоваться равенствами (28) и (37).

7. КВАДРИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА — ФОКА — ИВАНЕНКО

Так называемое квадрирование уравнения ДФИ достигается следующим приемом. Имеем

$$\left(H^{\alpha} D_{\alpha} - \frac{imc}{\hbar} H^4 \right) \left(H^{\beta} D_{\beta} - \frac{imc}{\hbar} H^4 \right) = H^{\alpha} H^{\beta} D_{\alpha} D_{\beta} - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2$$

и, далее,

$$H^{\alpha} H^{\beta} D_{\alpha} D_{\beta} = \frac{1}{2} H^{\alpha} H^{\beta} (D_{\alpha} D_{\beta} + D_{\beta} D_{\alpha}) + \frac{1}{2} H^{\alpha} H^{\beta} (D_{\alpha} D_{\beta} - D_{\beta} D_{\alpha}).$$

В последней сумме первое слагаемое

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H^{\alpha} H^{\beta} (D_{\alpha} D_{\beta} + D_{\beta} D_{\alpha}) &= \frac{1}{4} (H^{\alpha} H^{\beta} + H^{\beta} H^{\alpha}) (D_{\alpha} D_{\beta} + D_{\beta} D_{\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (D_{\alpha} D_{\beta} + D_{\beta} D_{\alpha}) = \eta^{\alpha\beta} D_{\alpha} D_{\beta}, \end{aligned}$$

а второе слагаемое, согласно (79), равно

$$\frac{1}{2} H^{\alpha} H^{\beta} (D_{\alpha} D_{\beta} - D_{\beta} D_{\alpha}) = \frac{1}{8} H^{\alpha} H^{\beta} H^{\mu} H^{\nu} R_{\mu\nu,\alpha\beta}.$$

Далее, так как альтернация тензора Римана — Кристоффеля по трем значкам дает нуль, то, согласно (27),

$$\begin{aligned} H^{\alpha} H^{\beta} H^{\mu} R_{\mu\nu,\alpha\beta} &= (\eta^{\beta\mu} H^{\alpha} + \eta^{\beta\alpha} H^{\mu} - \eta^{\alpha\mu} H^{\beta}) R_{\mu\nu,\alpha\beta} = \\ &= 2H^{\alpha} \eta^{\beta\mu} R_{\mu\nu,\alpha\beta} = 2H^{\alpha} R_{\nu\alpha}. \end{aligned}$$

Следовательно, второе слагаемое

$$\frac{1}{2} H^\alpha H^\beta (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) = \frac{1}{4} H^\alpha H^\nu R_{\nu\alpha} = \frac{1}{4} R.$$

Тем самым мы получили квадрированное уравнение ДФИ:

$$\left\{ \eta^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + \frac{1}{4} R - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right\} \xi = 0. \quad (79)$$

В общем случае эта система уравнений второго порядка не распадается на четыре отдельных уравнения для каждой компоненты спинорного поля. Тем не менее в следующей части эта система нам пригодится.

II. ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ

1. АНТИКОММУТАТОР СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Стремясь сохранить основные понятия квантовой теории поля, мы будем рассматривать только такие римановы миры, в которых находятся пространственно-подобные гиперповерхности, разделяющие мир на две части. Причем одна из частей мира может служить образом прошедшего, другая — образом будущего, сама же гиперповерхность — образом настоящего. Такие гиперповерхности мы будем называть полными и обозначать Σ . Будем предполагать, что решение уравнения ДФИ во всем римановом мире однозначно задается значениями спинорного поля на полной гиперповерхности Σ . На самой же гиперповерхности спинорное поле может быть задано произвольно.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} H^\nu D_\nu u &= \frac{imc}{\hbar} H^4 u, \\ D_\nu \bar{\nu} H^\nu &= -\frac{imc}{\hbar} \bar{\nu} H^4, \end{aligned} \quad (1)$$

состоящую из уравнения ДФИ и сопряженного с ним уравнения. Пусть $u, \bar{\nu}$ — решение этой системы. Дивергенция вектора

$$S^\nu = -\bar{\nu} H^\nu u, \quad (2)$$

равная

$$D_\nu S^\nu = -(D_\nu \bar{\nu} H^\nu) u - \bar{\nu} (H^\nu D_\nu u),$$

в силу (1) равна нулю. Следовательно, по теореме Гаусса интеграл

$$\int_{\Sigma} S_{\mu} d\sigma^{\mu} \quad (3)$$

не зависит от выбора полной гиперповерхности Σ . В интеграле (3) $d\sigma^{\alpha}$ — вектор элементарной площадки на Σ . Если обозначить $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ полностью антисимметричный тензор с условием $\epsilon_{0123} = 1$, то

$$S_{\mu} d\sigma^{\mu} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} q_1^{\alpha} q_2^{\beta} q_3^{\gamma} S^{\mu}, \quad (4)$$

где $q_1^{\alpha}, q_2^{\alpha}, q_3^{\alpha}$ — векторы элементарных смещений по Σ . Если, например, гиперповерхность Σ задана уравнениями

$$x^{\alpha} = T^{\alpha}(q^1, q^2, q^3),$$

то

$$q_1^{\alpha} = f_{\mu}^{\alpha} \frac{\partial T^{\mu}}{\partial q^1} dq^1, \quad q_2^{\alpha} = f_{\mu}^{\alpha} \frac{\partial T^{\mu}}{\partial q^2} dq^2, \quad q_3^{\alpha} = f_{\mu}^{\alpha} \frac{\partial T^{\mu}}{\partial q^3} dq^3.$$

Иначе сумма (4) записывается в виде определителя

$$S_{\mu} d\sigma^{\mu} = \begin{vmatrix} q_1^0 & q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 \\ q_2^0 & q_2^1 & q_2^2 & q_2^3 \\ q_3^0 & q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 \\ S^0 & S^1 & S^2 & S^3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Далее, так как

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} H^{\mu} = -iH_4[H_{\alpha}H_{\beta}H_{\gamma}], \quad (6)$$

то согласно (2)

$$S_{\mu} d\sigma^{\mu} = i\bar{v}H_4[Q_1Q_2Q_3]u, \quad (7)$$

где

$$Q_1 = H_{\alpha} q_1^{\alpha}, \quad Q_2 = H_{\alpha} q_2^{\alpha}, \quad Q_3 = H_{\alpha} q_3^{\alpha}. \quad (8)$$

Интеграл (3) задает скалярный квадрат в пространстве решений системы уравнений (1). При этом спинорные поля u и \bar{v} здесь и далее считаются классическими, а не операторными.

Напротив, спинорное поле ξ квантуется, и квантуется согласно статистике Ферми. При этом требуется, чтобы пара ξ и $\bar{\xi}$ удовлетворяла уравнениям (1) и порождала (бесконечномерную) алгебру Клиффорда. Генераторы этой алгебры, то есть ξ и $\bar{\xi}$, на полной гиперповерхности Σ считаются линейно независимыми.

Рассмотрим следующие векторы из линейной оболочки этой алгебры:

$$U = i \int_{\Sigma} \bar{\xi} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u, \quad V^* = i \int_{\Sigma} \bar{v} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] \xi. \quad (9)$$

Интегралы (9) не зависят от выбора полной гиперповерхности Σ , так как пары u , $\bar{\xi}$ и ξ , \bar{v} удовлетворяют системе уравнений (1).

Сумма

$$U + V^* \quad (10)$$

по определению является общим элементом линейной оболочки генераторов алгебры Клиффорда, которую хотим построить. Полагая

$$(U + V^*)^2 = i \int_{\Sigma} \bar{v} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u, \quad (11)$$

вводим симметричное скалярное произведение в оболочке генераторов, что является точным выражением принципа квантования по статистике Ферми.

Так как пары u , 0 и 0 , \bar{v} удовлетворяют системе уравнений (1), то из (11) следует, что

$$U^2 = 0, \quad V^{*2} = 0. \quad (12)$$

Следовательно, антикоммутатор

$$\{UV^*\} = UV^* + V^*U \quad (13)$$

равен

$$\{UV^*\} = i \int_{\Sigma} \bar{v} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u. \quad (14)$$

Ввиду того, что на Σ спинорное поле \bar{v} можно задать произвольно, получаем, что на Σ

$$\{\xi(x)U\} = u(x), \quad (15)$$

а ввиду того, что на Σ и спинорное поле u можно задать произвольно, получаем, что на Σ

$$\{V^* \bar{\xi}(x)\} = \bar{v}(x). \quad (16)$$

Далее видим: так как пара ξ , $\bar{\xi}$ подчиняется системе (1), то и пара $\{\xi U\}$, $\{V^* \bar{\xi}\}$ подчиняется системе (1). Но этой же системе уравнений подчиняется и пара u , \bar{v} . Поскольку на полной поверхности Σ последние две пары совпадают, то в силу предполагаемой единственности задачи Коши для системы (1) равенства (15) и (16) оказываются справедливыми не только на Σ , но и во всем мире.

Подобным же образом из (12) выводится, что во всем мире

$$\{\xi(x)V^*\} = 0, \quad \{U \bar{\xi}(x)\} = 0. \quad (17)$$

Ввиду произвольности u , \bar{v} на Σ из (17) получаем, что для любой точки y , лежащей на Σ ,

$$\{\xi_p(x) \xi_q(y)\} = 0, \quad \{\bar{\xi}_q(y) \bar{\xi}_p(x)\} = 0, \quad (18)$$

где p и q — номера компонент спиноров ξ и $\bar{\xi}$. В силу единственности задачи Коши для системы уравнений (1) равенства (18) оказываются справедливыми для любой мировой точки y .

Обозначим

$$\{\xi(x) \bar{\xi}(y)\} \tag{19}$$

матрицу с компонентами $\{\xi_p(x) \bar{\xi}_q(y)\}$. Она удовлетворяет следующему условию:

$$\{\xi(x) \bar{\xi}(y)\} H^0 = H_0 \{\xi(x) \bar{\xi}(y)\}^+. \tag{20}$$

Как и раньше, знак $+$ указывает на эрмитово сопряжение.

Из (9) и (13) следует, что если через две точки x и y можно провести полную гиперповерхность Σ , то $\{\xi(x) \bar{\xi}(y)\} = 0$. В частности, $\{\xi(x) \bar{\xi}(x)\} = 0$.

Записав равенства (15) и (16) в развернутом виде

$$\begin{aligned} u(x) &= i \int_{\Sigma} \{\xi(x) \bar{\xi}(y)\} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u(y), \\ \bar{v}(x) &= i \int_{\Sigma} \bar{v}(y) H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] \{\xi(y) \bar{\xi}(x)\}, \end{aligned} \tag{21}$$

замечаем, что антикоммутирует $\{\xi(x) \bar{\xi}(y)\}$ дает решение задачи Коши для системы уравнений (1).

Поскольку и сам антикоммутирует $\{\xi(x) \bar{\xi}(y)\}$ удовлетворяет этой системе, то, согласно (21), имеем

$$\{\xi(x) \bar{\xi}(y)\} = i \int_{\Sigma} \{\xi(x) \bar{\xi}(z)\} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] \{\xi(z) \bar{\xi}(y)\}. \tag{22}$$

Пусть теперь для некоторой полной гиперповерхности Σ для системы уравнений (1) каким-либо методом решена задача Коши и решение представлено в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= i \int_{\Sigma} \bar{S}(x, y) H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u(y), \\ \bar{v}(x) &= i \int_{\Sigma} \bar{v}(y) H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] S(y, x). \end{aligned} \tag{23}$$

Сравнивая (21) с (23), замечаем, что на прямом произведении $M \times \Sigma$, где M — весь пространственно-временной мир,

$$\begin{aligned} \{\xi(x) \bar{\xi}(y)\} &= \bar{S}(x, y), \\ \{\xi(y) \bar{\xi}(x)\} &= S(y, x). \end{aligned} \tag{24}$$

В соответствии с (20) функции \bar{S} и S связаны условием

$$\bar{S}(x, y) H^0 = H_0 S^+(y, x). \tag{25}$$

Согласно (22) находим антикоммутатор в виде

$$\{\xi(x) \bar{\xi}(y)\} = i \int \bar{S}(x, z) H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] S(x, y) \quad (26)$$

всюду на $M \times M$.

Заметим, что если пара (u, \bar{v}) является решением системы (1), то и пара $(u, \bar{v})^* = (v, \bar{u})$ тоже является решением системы (1). Решение назовем действительным, если $(u, \bar{v})^* = (u, \bar{v})$, т.е. если $u = v$. Элемент

$$U + U^* \quad (27)$$

оболочки генераторов, соответствующий действительному решению, называется действительным или эрмитовым элементом.

2. ВЕКТОР ТОКА И ОПЕРАТОР ЗАРЯДА

В спинорном случае вектор тока определяется выражением (2) и равняется

$$J^\mu = e \bar{\xi} H^\mu \xi, \quad (28)$$

где e — заряд позитрона.

Оператор заряда задается интегралом

$$\hat{e} = \int_{\Sigma} J_\mu d\sigma^\mu = -ie \int_{\Sigma} \bar{\xi} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] \xi \quad (29)$$

по полной гиперповерхности Σ . Он не зависит от выбора Σ , поскольку

$$D_\mu J^\mu = 0. \quad (30)$$

3. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Компоненты тензора энергии-импульса в римановом мире во всяком ортогональном базисе имеют такой же вид, как в плоском мире в прямоугольных координатах, а именно:

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4} \{S_{\mu\nu} + S_{\nu\mu}\}, \quad (31)$$

где

$$S_{\mu\nu} = \bar{\xi} H_\mu \xi_\nu - \bar{\xi}_\nu H_\mu \xi. \quad (32)$$

В свою очередь,

$$\xi_\mu = D_\mu \xi, \quad \bar{\xi}_\mu = D_\mu \bar{\xi}. \quad (33)$$

Докажем, что обе дивергенции тензора (32) равны нулю. Действительно, одна из них равна

$$D^\nu S_{\mu\nu} = \bar{\xi}^\nu H_\mu \xi_{,\nu} + \bar{\xi} H_\mu (D^\nu \xi_{,\nu}) - (D^\nu \bar{\xi}_{,\nu}) H_\mu \xi - \bar{\xi}_{,\nu} H_\mu \xi^\nu = \\ = \bar{\xi} H_\mu (D^\nu \xi_{,\nu}) - (D^\nu \bar{\xi}_{,\nu}) H_\mu \xi,$$

а последняя разность равна нулю в силу того, что спинорное поле подчиняется квадрированному уравнению ДФИ (1.79). Следовательно,

$$D^\nu S_{\mu\nu} = 0. \quad (34)$$

Переходя к рассмотрению другой дивергенции тензора (32), заметим, что если пара ξ и $\bar{\xi}$ удовлетворяет системе уравнений (1), то

$$S_{\nu\mu} - S_{\mu\nu} = D_\alpha \{ \bar{\xi} [H_\mu H_\nu H^\alpha] \xi \}. \quad (35)$$

Это проверяется с помощью соотношений (1.22). Из (34) и (35) находим

$$D^\nu S_{\nu\mu} = D_\nu D_\alpha \{ \bar{\xi} [H_\mu H^\nu H^\alpha] \xi \} = \\ = \frac{1}{2} (D_\nu D_\alpha - D_\alpha D_\nu) \{ \bar{\xi} [H_\mu H^\nu H^\alpha] \xi \} = \\ = \frac{1}{2} R_{\mu\sigma\nu\alpha} \{ \bar{\xi} [H^\sigma H^\nu H^\alpha] \xi \} = 0. \quad (36)$$

Итак, имеем

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad D^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (37)$$

Кроме того,

$$T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -mc \bar{\xi} H^4 \xi. \quad (38)$$

Из (31) и (35) следует, что

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4} (2S_{\mu\nu} + D_\alpha \{ \bar{\xi} [H_\mu H_\nu H^\alpha] \xi \}). \quad (39)$$

В таком виде тензор энергии-импульса нам понадобится в дальнейшем.

4. ВТОРИЧНО-КВАНТОВАННЫЕ ИЗОМЕРИЧЕСКИЙ И КОНФОРМНЫЙ МОМЕНТЫ

По теореме Гаусса, если гиперповерхность $\partial\sigma$ ограничивает простую область σ , то для всякого тензорного поля $T_{\mu\nu}$ и всякого векторного поля K^μ

$$\int_{\partial\sigma} K^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu = \int_\sigma D^\nu (K^\mu T_{\mu\nu}) dv. \quad (40)$$

Если тензорное поле $T_{\mu\nu}$ удовлетворяет условиям (37), то

$$D^\nu (K^\mu T_{\mu\nu}) = K_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + FT, \quad (41)$$

где T — след тензора $T_{\mu\nu}$, в данном случае равный (38);

$$F = \frac{1}{4} D_{\alpha} K^{\alpha}, \quad (42)$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (D_{\mu} K_{\nu} + D_{\nu} K_{\mu}) - F \eta_{\mu\nu}. \quad (43)$$

Однопараметрическая группа преобразований пространственно-временного мира, получающаяся в результате решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_{\beta}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = \frac{f^{\alpha}}{d\lambda} = K^{\alpha}, \quad (44)$$

называется конформной в случае, когда

$$K_{\mu\nu} = 0. \quad (45)$$

В более частном случае, когда

$$K_{\mu\nu} = 0, \quad F = 0, \quad (46)$$

она называется изомерической. Система равенств (46) эквивалентна системе

$$D_{\mu} K_{\nu} + D_{\nu} K_{\mu} = 0. \quad (47)$$

В случае (46) дивергенция (41) равна нулю, а вместе с ней равен нулю и интеграл (40). Следовательно, в этом случае интеграл

$$\hat{\mathcal{K}} = \int_{\Sigma} K^{\mu} T_{\mu\nu} d\sigma^{\nu} \quad (48)$$

не зависит от выбора полной гиперповерхности Σ . Назовем его вторично-квантованным оператором изомерического момента.

По той же причине в случае (45) интеграл (48) также не зависит от выбора полной гиперповерхности Σ , но только при условии $T = 0$, что, согласно (38), выполняется, если масса спинорной частицы равна нулю. В этом случае интеграл (48) при $m = 0$ назовем вторично-квантованным оператором конформного момента.

Дадим общее (в спинорном варианте) определение вторично-квантованного оператора.

Пусть некоторый оператор \hat{K} действует в пространстве решений уравнения ДФИ; это значит, что если ξ удовлетворяет уравнению ДФИ, то и $K\xi$ удовлетворяет этому уравнению. Всякому такому оператору соответствует интеграл

$$\mathcal{K} = (\bar{\xi}, \hat{K} \xi) = i \int_{\Sigma} \bar{\xi} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] \hat{K} \xi, \quad (49)$$

не зависящий от выбора полной гиперповерхности Σ , который назовем вторично-квантованным оператором.

В частности, таким (вторично-квантованным) оператором является оператор заряда (29):

$$\hat{e} = (\bar{\xi}, -e\xi). \quad (50)$$

В данном случае \hat{K} — это оператор умножения на число $-e$.

Интеграл (48) подходит под общее определение вторично-квантованного оператора, так как он равен интегралу (49), где

$$\hat{K} = -i\hbar \left\{ K^\mu D_\mu + \frac{1}{4} (D_\alpha K_\beta) H^\alpha H^\beta \right\} \quad (51)$$

в изомерическом случае и

$$\begin{aligned} \hat{K} &= -i\hbar \left\{ K^\mu D_\mu + \frac{1}{4} (D_\alpha K_\beta) H^\alpha H^\beta + \frac{1}{2} F \right\} = \\ &= -i\hbar \left\{ K^\mu D_\mu + \frac{1}{4} (D_\alpha K_\beta - F \eta_{\alpha\beta}) H^\alpha H^\beta + \frac{3}{2} F \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

в конформном случае. Действительно, взяв $T_{\mu\nu}$ в виде (39), нетрудно убедиться, что векторное поле

$$T^\alpha = K^\mu T_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} + \bar{\xi} H^\alpha \hat{K} \xi$$

является дивергенцией $T^\alpha = D_\beta A^{\alpha\beta}$ антисимметричного тензорного поля

$$A^{\alpha\beta} = i\hbar \left\{ \frac{1}{4} \bar{\xi} [H^\alpha K H^\beta] \xi + \frac{1}{2} \bar{\xi} (K^\alpha H^\beta - K^\beta H^\alpha) \xi \right\},$$

где $K = K^\nu H_\nu$, а значит, по теореме Стокса

$$\int_\Sigma T^\alpha \eta_{\alpha\nu} d\sigma^\nu = 0.$$

5. ОПЕРАТОР ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Уравнение (47) имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда в пространственно-временном мире действует группа изометрий. Поэтому выполняется равенство

$$f_{\beta'}^{\alpha'}(x') = f_\beta^\alpha(x), \quad (53)$$

где штрихом отмечен результат операции из этой группы. Для бесконечно малого преобразования

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + K^{\mu} e_{\mu}^{\alpha} \lambda \quad (54)$$

это означает, что

$$K^{\mu} e_{\mu}^{\alpha} f_{\beta}^{\alpha} = 0. \quad (55)$$

Рассмотрим соответствующее преобразование репера. В силу (53) и (54)

$$\begin{aligned} f^{\alpha'} &= f_{\beta'}^{\alpha'}(x') dx^{\beta'} = f_{\beta}^{\alpha}(dx^{\beta} + dK^{\mu} e_{\mu}^{\beta} \lambda + K^{\mu} de_{\mu}^{\beta} \lambda) = \\ &= f^{\alpha} + (dK^{\alpha} - K^{\mu} e_{\mu}^{\beta} df_{\beta}^{\alpha}) \lambda. \end{aligned}$$

Согласно (I.38)

$$C_{\mu\nu}^{\alpha} f^{\nu} = e_{\mu}^{\beta} df_{\beta}^{\alpha} - e_{\nu}^{\beta} e_{\mu}^{\alpha} f_{\beta}^{\nu} f^{\nu}.$$

Поэтому, ввиду (55), в данном случае

$$K^{\mu} C_{\mu\nu}^{\alpha} f^{\nu} = K^{\mu} e_{\mu}^{\beta} df_{\beta}^{\alpha},$$

так что

$$f^{\alpha'} = f^{\alpha} + (dK^{\alpha} - K^{\mu} C_{\mu\nu}^{\alpha} f^{\nu}) \lambda.$$

Учитывая (I.32) и (I.36), наконец, находим

$$f^{\alpha'} = f^{\alpha} + (D_{\nu} K^{\alpha} - K^{\mu} \omega_{\mu\nu}^{\alpha}) f^{\nu} \lambda. \quad (56)$$

Таким образом, при бесконечно малом изометрическом преобразовании (54) репер испытывает бесконечно малое вращение (56), задаваемое антисимметричной матрицей

$$D_{\nu} K_{\alpha} + K^{\mu} \omega_{\nu\alpha\mu}. \quad (57)$$

В соответствии с (I.42) и (I.47) отсюда следует, что приращение спинорного поля при рассматриваемом преобразовании (54) равняется

$$\begin{aligned} \xi'(x') - \xi(x) &= \lambda \left\{ K^{\mu} e_{\mu}^{\alpha} + \frac{1}{4} K^{\mu} \omega_{\nu\alpha\mu} H^{\nu} H^{\alpha} + \frac{1}{4} (D_{\mu} K_{\alpha}) H^{\nu} H^{\alpha} \right\} \xi = \\ &= \lambda \left\{ K^{\mu} D_{\mu} + \frac{1}{4} (D_{\nu} K_{\alpha}) H^{\nu} H^{\alpha} \right\} \xi. \end{aligned} \quad (58)$$

Таким образом, мы приходим к оператору (51) изометрического момента спинорного поля.

Докажем, что он коммутирует с оператором $H^{\nu} D_{\nu}$ из левой части уравнения ДФИ; имеем

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} [H^{\nu} D_{\nu} \hat{K} - \hat{K} H^{\nu} D_{\nu}] &= K^{\mu} H^{\nu} (D_{\nu} D_{\mu} - D_{\mu} D_{\nu}) + \\ &+ \frac{1}{4} (D_{\nu} D_{\alpha} K_{\beta}) H^{\nu} H^{\alpha} H^{\beta} + \hat{O}, \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\hat{O} = (D_\nu K^\mu) H^\nu D_\mu + \frac{1}{4} (D_\alpha K_\beta) (H^\nu H^\alpha H^\beta - H^\alpha H^\beta H^\nu) D_\nu.$$

Так как

$$H^\nu H^\alpha H^\beta - H^\alpha H^\beta H^\nu = 2\eta^{\alpha\nu} H^\beta - 2\eta^{\beta\nu} H^\alpha,$$

то $\hat{O} = 0$. Учитывая далее (1.78), находим, что коммутатор (59) равен

$$\frac{1}{4} \{K^\mu R_{\alpha\beta, \nu\mu} + (D_\nu D_\alpha K_\beta)\} H^\nu H^\alpha H^\beta.$$

Нетрудно убедиться, что для поля, подчиненного уравнению (47),

$$K^\mu R_{\alpha\beta, \nu\mu} + (D_\nu D_\alpha K_\beta) = 0. \tag{60}$$

Поэтому коммутатор (59) равен нулю. Но очевидно, что и $\hat{K}H^4 = H^4\hat{K}$.

Следовательно, если спинорное поле ξ удовлетворяет уравнению ДФИ, то и спинорное поле $\hat{K}\xi$ удовлетворяет тому же уравнению.

6. КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПОВЕДЕНИЯ НЕЙТРИНО

Если пренебречь всеми взаимодействиями фермионов, кроме их взаимодействия с гравитационным полем, то в таком приближении поведение фермионов вполне определяется уравнением ДФИ (1.49), скалярным произведением

$$(\bar{\nu}, u) = i \int_{\Sigma} \bar{\nu} H_4 [\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_3] u, \tag{61}$$

определяющим алгебру полевых операторов, и тензором энергии-импульса (31). Для рассматриваемых здесь вопросов, изученных в [49], неважно, описывать ли нейтринное поле четырехкомпонентным спинором или двухкомпонентным полуспинором. Поэтому будем его описывать уравнением

$$H^\nu \xi_\nu = 0, \tag{62}$$

попросту полагая в уравнении ДФИ $m = 0$.

Докажем, что поведение нейтрино конформно-инвариантно. Это значит, что нейтрино ведет себя в мире с метрикой ds^2 так же, как и в мире с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$. Два гравитационных поля, из которых одно отвечает метрике ds^2 , а другое — метрике ds'^2 , для нейтрино одинаковы.

Поясним это на важном примере, когда одно из такой пары полей статическое. Оно отвечает метрике, приводимой к следующему виду:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^k - c^2 dt^2. \quad (63)$$

Понятно, что статическое поле не может порождать нейтрино, как, впрочем, и другие фермионы или бозоны. Утверждение о конформной инвариантности поведения нейтрино означает, в частности, что и гравитационное поле с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$, пропорциональной (63), тоже не может порождать нейтрино.

К числу таких полей принадлежит гравитационное поле в мире Фридмана. В этом случае множитель B зависит только от времени, пространственная же часть в (63) является метрической формой либо евклидова пространства, либо сферического пространства, либо пространства Лобачевского.

Чтобы доказать наше утверждение о конформной инвариантности поведения нейтрино, достаточно доказать конформную инвариантность уравнения (62), скалярного произведения (61) и интеграла (48), где K^μ — векторное поле.

Доказательство будем проводить для n -мерного мира. Для уравнения ДФИ существенно, однако, чтобы число n было четным. В реальном случае, разумеется, $n = 4$. Но в третьей части обзора мы рассмотрим модельный случай $n = 2$.

Пусть в мире с метрикой ds^2 выбран ортогональный репер f^α , так что $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} f^\alpha f^\beta$. В мире с метрикой $ds'^2 = B^2 ds^2$ репер $f'^\alpha = B f^\alpha$ удовлетворяет аналогичному условию $ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} f'^\alpha f'^\beta$. Имеем также $e'_\alpha = B e'_\alpha$. Таким образом, полагаем

$$f'_\beta{}^\alpha = B f_\beta^\alpha, \quad e'_\beta{}^\alpha = B e_\beta^\alpha. \quad (64)$$

Отсюда следует, что

$$[Q'_1 \dots Q'_{n-1}] = B^{n-1} [Q_1 \dots Q_{n-1}].$$

Поэтому, если сделаем подстановку

$$u = B^{\frac{n-1}{2}} u', \quad \bar{v} = B^{\frac{n-1}{2}} v', \quad (65)$$

то добьемся равенства

$$\bar{v}' H_n [Q'_1 \dots Q'_{n-1}] u' = \bar{v} H_n [Q_1 \dots Q_{n-1}] u, \quad (66)$$

нужного для доказательства конформной инвариантности скалярного произведения, определяющего алгебру полевых операторов.

В соответствии с (65) мы должны прибегнуть далее к подстановке

$$\xi = B^{\frac{n-1}{2}} \xi'. \quad (67)$$

Затем из (64) находим связь между коэффициентами неголономности

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = BC_{\alpha\beta}^{\gamma'} + \delta_{\beta}^{\gamma} e'_{\alpha} B - \delta_{\alpha}^{\gamma} e'_{\beta} B$$

и коэффициентами вращения реперов

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = B\omega'_{\alpha\beta\gamma} + \eta_{\beta\nu} e'_{\alpha} B - \eta_{\alpha\nu} e'_{\beta} B.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \xi_{\nu} &= B^{\frac{n+1}{2}} \xi'_{\nu} + \frac{1}{2} B^{\frac{n-1}{2}} (ne'_{\nu} B - H_{\nu} H^{\alpha} e'_{\alpha} B) \xi', \\ \bar{\xi}_{\nu} &= B^{\frac{n+1}{2}} \bar{\xi}'_{\nu} + \frac{1}{2} B^{\frac{n-1}{2}} \bar{\xi}'_{\nu} (ne'_{\nu} B - e'_{\alpha} B H^{\alpha} H_{\nu}). \end{aligned} \quad (68)$$

Следовательно,

$$H^{\nu} \xi_{\nu} = B^{\frac{n+1}{2}} H^{\nu} \xi'_{\nu}; \quad (69)$$

$$T_{\mu\nu} = B^n T'_{\mu\nu}. \quad (70)$$

В силу (69) уравнение (62) конформно-инвариантно.

Наконец, векторному полю K^{μ} в одном мире соответствует векторное поле $K'^{\mu} = BK^{\mu}$ в другом. Кроме того, $d\sigma^{\nu} = B^{n-1} d\sigma'^{\nu}$. В силу (70), следовательно,

$$K'^{\mu} T'_{\mu\nu} d\sigma'^{\nu} = K^{\mu} T_{\mu\nu} d\sigma^{\nu}. \quad (71)$$

Последнее равенство нужно для доказательства конформной инвариантности интеграла (48).

Мы почти уже доказали наше утверждение о конформной инвариантности поведения нейтрино. Чтобы завершить доказательство, остается предположить, что функции B и B^{-1} заданы всюду и нигде не обращаются в нуль.

Можно, однако, ослабить последнее условие и потребовать, чтобы эти функции были заданы и не обращались в нуль в некоторой области, содержащей полную гиперповерхность Σ . В этой области поведение нейтрино будет опять-таки конформно-инвариантным.

Это ослабленное условие особо интересно в случае мира Фридмана, когда функция не зависит от пространственных координат, а в качестве полных можно выбирать такие гиперповерхности, на которых координата времени задана. Мы видим, что поведение нейтрино в мире Фридмана определяется только знаком кривизны гиперповерхности $t = \text{const}$. Таким обра-

зом, чтобы изучить поведение нейтрино в мире Фридмана, достаточно рассмотреть плоский мир с метрикой

$$d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2 dt^2,$$

сферический мир с метрикой

$$d\rho^2 + R^2 \sin^2 \frac{\rho}{R} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2 dt^2,$$

и мир Лобачевского с метрикой

$$d\rho^2 + k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\rho}{k} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2 dt^2.$$

А вот если на функции B и B^{-1} не накладывать никаких ограничений, то в области, где они обе не обращаются в нуль, сохраняются не все черты конформно-инвариантного поведения нейтрино, не те, которые, наподобие (61) и (48), описываются интегральными характеристиками, а только те, что подобно (62), (66) и (71) описываются характеристиками дифференциальными. Этим замечанием мы воспользуемся дальше для вывода оператора конформного момента (52).

7. ОПЕРАТОР КОНФОРМНОГО МОМЕНТА

Оператор конформного момента спинорного поля выведен в работах [53] и [54]. Для двух миров, находящихся в конформном соответствии, имеем

$$BD'_\alpha K'_\beta = BD_\alpha K_\beta + \eta_{\alpha\beta} K^\nu e_\nu B + K_\beta e_\alpha B - K_\alpha e_\beta B. \quad (72)$$

Рассматривая тензор (43), где в n -мерном случае

$$F = \frac{1}{n} D_\alpha K^\alpha, \quad (73)$$

а не (42), находим

$$K'_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}, \quad BF' = BF + K^\nu e_\nu B. \quad (74)$$

Пусть теперь для поля K^α выполняется условие (44). В таком случае это же условие выполняется и для поля K'^α , какова бы ни была функция B . Но в некоторой окрестности мировой точки всегда можно найти такую функцию B , чтобы выполнялось условие $F' = 0$. Подобрав так функцию B , то есть решив уравнение

$$BF + K^\nu e_\nu B = 0, \quad (75)$$

мы будем располагать оператором изометрического момента, переводящего спинор ξ' в спинор

$$- i\hbar \left\{ K'^{\mu} \xi'_{\mu} + \frac{1}{4} (D'_{\alpha} K'_{\beta}) H^{\alpha} H^{\beta} \xi' \right\}.$$

С помощью подстановки (67) и формул (68), (72), (75) отсюда нетрудно получить оператор канформного момента

$$\begin{aligned} \hat{K} &= -i\hbar \left\{ K^{\mu} D_{\mu} + \frac{1}{4} (D_{\alpha} K_{\beta} - F \eta_{\alpha\beta}) H^{\alpha} H^{\beta} + \frac{n-1}{2} F \right\} = \\ &= -i\hbar \left\{ K^{\mu} D_{\mu} + \frac{1}{4} (D_{\alpha} K_{\beta}) H^{\alpha} H^{\beta} + \frac{n-2}{4} F \right\}. \end{aligned} \quad (76)$$

Для произвольного векторного поля получается коммутатор

$$\frac{i}{\hbar} [H^{\nu} D_{\nu} \hat{K} - \hat{K} H^{\nu} D_{\nu}] = \frac{1}{2} H^{\alpha} (D^{\beta} K_{\alpha\beta}) + H^{\alpha} K_{\alpha\beta} D^{\beta} + F H^{\alpha} D_{\alpha}. \quad (77)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} [H^{\nu} D_{\nu}, K^{\mu} D_{\mu}] &= K^{\mu} H^{\nu} (D_{\nu} D_{\mu} - D_{\mu} D_{\nu}) + H^{\nu} (D_{\nu} K^{\mu}) D_{\mu}, \\ [H^{\nu} D_{\nu}, \frac{1}{4} (D_{\alpha} K_{\beta}) H^{\alpha} H^{\beta}] &= \frac{1}{4} (D_{\nu} D_{\alpha} K_{\beta}) H^{\nu} H^{\alpha} H^{\beta} + \\ &+ \frac{1}{4} (D_{\alpha} K_{\beta}) (H^{\nu} H^{\alpha} H^{\beta} - H^{\alpha} H^{\beta} H^{\nu}) D_{\nu}, \\ [H^{\nu} D_{\nu}, \frac{n-2}{4} F] &= \frac{n-2}{4} F H^{\nu} D_{\nu}. \end{aligned}$$

Далее, из тождества

$$\begin{aligned} D_{\nu} D_{\alpha} K_{\beta} &= D_{\nu} (K_{\alpha\beta} + F \eta_{\alpha\beta}) + D_{\alpha} (K_{\beta\nu} + F \eta_{\beta\nu}) - D_{\beta} (K_{\alpha\nu} + F \eta_{\alpha\nu}) + \\ &+ \frac{1}{2} \{ (D_{\beta} D_{\alpha} - D_{\alpha} D_{\beta}) K_{\nu} + (D_{\nu} D_{\alpha} - D_{\alpha} D_{\nu}) K_{\beta} - (D_{\nu} D_{\beta} - D_{\beta} D_{\nu}) K_{\alpha} \} \end{aligned}$$

следует равенство

$$\begin{aligned} D_{\nu} D_{\alpha} K_{\beta} &= D_{\nu} K_{\alpha\beta} + D_{\alpha} K_{\beta\nu} - D_{\beta} K_{\alpha\nu} + \\ &+ F_{\nu} \eta_{\alpha\beta} + F_{\alpha} \eta_{\beta\nu} - F_{\beta} \eta_{\alpha\nu} + R_{\nu, \beta\alpha}^{\sigma} K_{\sigma}. \end{aligned}$$

Учитывая (1.78), получаем (77).

Следовательно, если спинорное поле ξ удовлетворяет уравнению (62), то тому же уравнению удовлетворяет и поле $\hat{K}\xi$, если $K_{\alpha\beta} = 0$.

III. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ МИРЕ

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДФИ В ДВУМЕРНОМ МИРЕ

Эта часть написана по материалам работ [55,56,57]. Метрику двумерного мира можно локально привести к виду

$$ds^2 = a^2(dz^2 - c^2 dt^2), \quad (1)$$

где a — некоторая функция от z и t . Можно развить спинорный анализ непосредственно в двумерном мире, но здесь предпочтительней вложить двумерный мир в четырехмерный с метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + a^2(dz^2 - c^2 dt^2)$$

и воспользоваться вышеизложенными результатами.

Если в оригинальных уравнениях Дирака (I.1) положить

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = \Psi_2(z, t), \quad \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 = \Psi_4(z, t), \quad (2)$$

то получаются уравнения Дирака в двумерном мире Минковского

$$(E - mc^2) \Psi_2 + cp_z \Psi_4 = 0,$$

$$(E + mc^2) \Psi_4 + cp_z \Psi_2 = 0. \quad (3)$$

Подстановка Картана (I.15) с условиями (2) приводит уравнения (I.16), а также и уравнения (3), к следующему виду:

$$(E + cp_z) \xi_2 = -mc^2 \xi_0,$$

$$(cp_z - E) \xi_0 = mc^2 \xi_2. \quad (4)$$

В соответствии с (I.53) уравнения ДФИ в форме Картана принимают вид (4) не только в двумерном мире Минковского, но и мире с метрикой (1), если положить

$$E \xi = \frac{i\hbar}{a\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{a}\xi), \quad p_z \xi = -\frac{i\hbar}{a\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{a}\xi).$$

Для величин $u = \sqrt{a}\xi$ отсюда следуют уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u_2 + i \frac{mc}{\hbar} a u_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u_0 - i \frac{mc}{\hbar} a u_2 = 0. \quad (5)$$

В этой части обзора все рассмотрение проводится в двумерном мире, и поэтому не вызовут путаницы следующие обозначения для изотропных координат:

$$x = \frac{ct + z}{2}, \quad y = \frac{ct - z}{2}. \quad (6)$$

В изотропных координатах (6) уравнения (5) переписутся в следующем каноническом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_0 &= i \frac{mc}{\hbar} au_2, \\ \frac{\partial}{\partial y} u_2 &= i \frac{mc}{\hbar} au_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для этой системы уравнений будем решать задачу Коши: требуется найти решение системы (7), если функции u_0 и u_2 произвольно заданы на произвольной пространственно-подобной кривой $y = \lambda(x)$. Последнее означает, что произвольная $\lambda'(x)$ отрицательна.

Классический метод Римана для одного уравнения второго порядка гиперболического типа удастся распространить на систему уравнений (7).

Если пара функций u_0, u_2 удовлетворяет системе уравнений (7), а пара функций v_0, v_2 удовлетворяет сопряженной системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_0 &= -i \frac{mc}{\hbar} av_2, \\ \frac{\partial}{\partial y} v_2 &= -i \frac{mc}{\hbar} av_0. \end{aligned} \quad (8)$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x} (v_0 u_0) + \frac{\partial}{\partial y} (v_2 u_2) = 0. \quad (9)$$

Следовательно, линейная форма

$$v_2 u_2 dx - v_0 u_0 dy \quad (10)$$

является полным дифференциалом и интеграл

$$\oint (v_2 u_2 dx - v_0 u_0 dy) = 0 \quad (11)$$

по любому замкнутому контуру равен нулю.

Выберем контур $P_0 M_0 Q_0$ (рис.1), образованный прямыми $x = x_0$, $y = y_0$ и кривой $y = \lambda(x)$, где $M_0 = (x_0, y_0)$ — точка, в которой мы хотим найти значение искомой пары функций; точка Q_0 имеет координаты $x_0, \lambda(x_0)$; точка P_0 имеет координаты $\lambda^{-1}(y_0), y_0$; $x = \lambda^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = \lambda(x)$. Для такого контура условие (11) означает

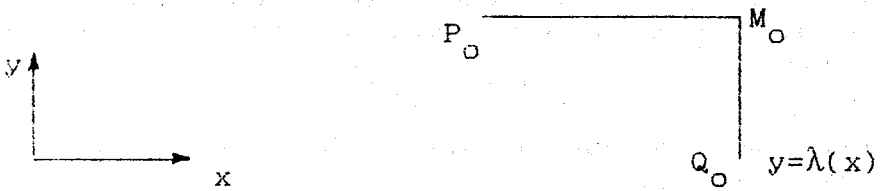


Рис.1

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q_0}^{M_0} v_0(M) u_0(M) \Big|_{x=x_0} dy + \int_{P_0}^{M_0} v_2(M) u_2(M) \Big|_{y=y_0} dx = \\
 & = \int_{P_0}^{Q_0} [v_2(M) u_2(M) - \lambda'(x) v_0(M) u_0(M)] \Big|_{y=\lambda(x)} ds. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Подберем функции $v_0(M) = v_{00}(M; M_0)$ и $v_2(M) = v_{20}(M; M_0)$ так, чтобы

$$\begin{aligned}
 & v_{00}(M; M_0) \Big|_{x=x_0} = 0, \\
 & v_{20}(M; M_0) \Big|_{y=y_0} = i \frac{mc}{\hbar} a(x, y_0). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Первая из формул (7) и формула (12) дают

$$\begin{aligned}
 & u_0(M_0) = u_0(P_0) + \\
 & + \int_{P_0}^{Q_0} [v_{20}(M; M_0) u_2(M) - \lambda'(x) v_{00}(M; M_0) u_0(M)] \Big|_{y=\lambda(x)} ds. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Подберем теперь функции $v_0(M) = v_{02}(M; M_0)$ и $v_2(M) = v_{22}(M; M_0)$ так, чтобы

$$\begin{aligned}
 & v_{02}(M; M_0) \Big|_{x=x_0} = i \frac{mc}{\hbar} a(x_0, y), \\
 & v_{22}(M; M_0) \Big|_{y=y_0} = 0. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Вторая из формул (7) и формула (12) дают

$$\begin{aligned}
 & u_2(M_0) = u_2(Q_0) + \\
 & + \int_{P_0}^{Q_0} [v_{22}(M; M_0) u_2(M) - \lambda'(x) v_{02}(M; M_0) u_0(M)] \Big|_{y=\lambda(x)} dx. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Формулы (14) и (16) сводят задачу Коши к отысканию функции Римана (матричной) $v_{ik}(M; M_0)$. Последняя выражается через матричную функцию $w_{ik}(M; M_0)$, которая удовлетворяет тем же уравнениям, что и $v_{ik}(M; M_0)$, то есть уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} w_{00} &= -i \frac{mc}{\hbar} a w_{20}, & \frac{\partial}{\partial x} w_{02} &= -i \frac{mc}{\hbar} a w_{22}, \\ \frac{\partial}{\partial y} w_{20} &= -i \frac{mc}{\hbar} a w_{00}, & \frac{\partial}{\partial y} w_{22} &= -i \frac{mc}{\hbar} a w_{02}, \end{aligned} \quad (17)$$

но подчиняется более простым характеристическим условиям, а именно

$$\begin{aligned} w_{00} \Big|_{x=x_0} &= 1, & w_{02} \Big|_{x=x_0} &= 0, \\ w_{20} \Big|_{y=y_0} &= 0, & w_{22} \Big|_{y=y_0} &= 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Дифференциальные уравнения (17) с условиями (18) эквивалентны следующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} w_{00}(x, y; x_0, y_0) &= 1 - i \frac{mc}{\hbar} \int_{x_0}^x a(\xi, y) w_{20}(\xi, y; x_0, y_0) d\xi, \\ w_{20}(x, y; x_0, y_0) &= -i \frac{mc}{\hbar} \int_{y_0}^y a(x, \eta) w_{00}(x, \eta; x_0, y_0) d\eta, \\ w_{22}(x, y; x_0, y_0) &= 1 - i \frac{mc}{\hbar} \int_{y_0}^y a(x, \eta) w_{02}(x, \eta; x_0, y_0) d\eta, \\ w_{02}(x, y; x_0, y_0) &= -i \frac{mc}{\hbar} \int_{x_0}^x a(\xi, y) w_{22}(\xi, y; x_0, y_0) d\xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Функция Римана $v_{ik}(M; M_0)$ получается из функции $w_{ik}(M; M_0)$ дифференцированием по параметрам x_0 и y_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{00}}{\partial y_0} &= v_{00}, & \frac{\partial w_{02}}{\partial x_0} &= v_{02}, \\ \frac{\partial w_{20}}{\partial y_0} &= v_{20}, & \frac{\partial w_{22}}{\partial x_0} &= v_{22}, \end{aligned} \quad (20)$$

в чем нетрудно убедиться.

Функцию $w_{ik}(M; M_0)$ можно найти методом последовательных приближений, сведя систему уравнений (19) к следующим уравнениям:

$$w_{00}(x, y; x_0, y_0) = 1 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \int_{x_0}^x a(\xi, y) d\xi \int_{y_0}^y a(\xi, \eta) w_{00}(\xi, \eta; x_0, y_0) d\eta,$$

$$w_{22}(x, y; x_0, y_0) = 1 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \int_{y_0}^y a(\xi, \eta) d\eta \int_{x_0}^x a(\xi, \eta) w_{22}(\xi, \eta; x_0, y_0) d\xi. \quad (21)$$

Как нетрудно видеть, первое из уравнений (21) получается подстановкой второго из уравнений (19) в первое. Второе из уравнений (21) получается подстановкой четвертого из уравнений (19) в третье.

2. АНТИСИММЕТРИЧНОСТЬ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ РИМАНА

Антисимметричность матричной функции Римана означает

$$v_{ik}^*(M_1; M_2) = -v_{ki}(M_2; M_1). \quad (22)$$

Докажем это равенство.

Выберем произвольно две точки $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ и построим по ним точку $M_3 = (x_3, y_3)$, лежащую на пересечении прямых $P_1 M_1$ и $Q_2 M_2$, и точку $M_4 = (x_4, y_4)$, лежащую на пересечении прямых $P_2 M_2$ и $Q_1 M_1$ (рис.2). Теперь мы располагаем четырьмя контурами $P_k M_k Q_k$, $k = 1, 2, 3, 4$ типа контура $P_0 M_0 Q_0$, изображенного на рисунке 1, причем $P_3 = P_1$, $Q_3 = Q_2$, $P_4 = P_2$, $Q_4 = Q_1$. Применяя к ним формулу (11), получим четыре формулы типа (12).

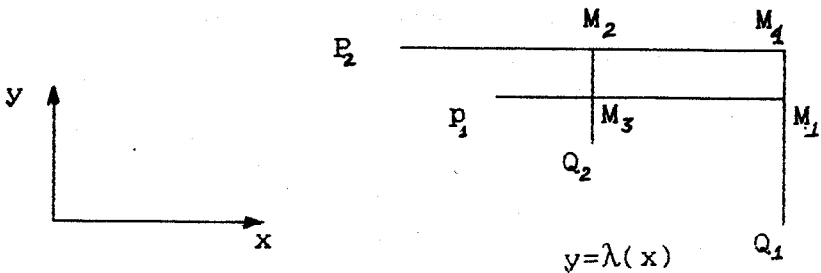


Рис.2

В каждой из четырех формул типа (12) положим сначала

$$\begin{aligned} u_0(M) &= v_{00}^*(M; M_1), & u_2(M) &= v_{20}^*(M; M_1), \\ v_0(M) &= v_{00}(M; M_2), & v_2(M) &= v_{20}(M; M_2), \end{aligned}$$

затем

$$\begin{aligned} u_0(M) &= v_{00}^*(M; M_1), & u_2(M) &= v_{20}^*(M; M_1), \\ v_0(M) &= v_{02}(M; M_2), & v_2(M) &= v_{22}(M; M_2), \end{aligned}$$

потом

$$\begin{aligned} u_0(M) &= v_{02}^*(M; M_1), & u_2(M) &= v_{22}^*(M; M_1), \\ v_0(M) &= v_{00}(M; M_2), & v_2(M) &= v_{20}(M; M_2), \end{aligned}$$

наконец,

$$\begin{aligned} u_0(M) &= v_{02}^*(M; M_1), & u_2(M) &= v_{22}^*(M; M_1), \\ v_0(M) &= v_{02}(M; M_2), & v_2(M) &= v_{22}(M; M_2). \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{Q_1} \Lambda_{ik} \Big|_{y=\lambda(x)} dx &= \int_{Q_1}^{M_1} X_{ik} \Big|_{x=x_1} dy + \int_{P_1}^{M_1} Y_{ik} \Big|_{y=y_1} dx, \\ \int_{Q_1}^{P_2} \Lambda_{ik} \Big|_{y=\lambda(x)} dx &= \int_{M_4}^{Q_1} X_{ik} \Big|_{x=x_1} dy + \int_{M_4}^{P_2} Y_{ik} \Big|_{y=y_2} dx, \\ \int_{P_2}^{Q_2} \Lambda_{ik} \Big|_{y=\lambda(x)} dx &= \int_{Q_2}^{M_2} X_{ik} \Big|_{x=x_2} dy + \int_{P_2}^{M_2} Y_{ik} \Big|_{y=y_2} dx, \\ \int_{Q_2}^{P_1} \Lambda_{ik} \Big|_{y=\lambda(x)} dx &= \int_{M_3}^{Q_2} X_{ik} \Big|_{x=x_2} dy + \int_{M_3}^{P_1} Y_{ik} \Big|_{y=y_1} dx \end{aligned} \quad (23)$$

(эти формулы написаны в порядке 1, 4, 2, 3; в формулах, относящихся к вершинам M_3 и M_4 по сравнению с (12) переставлены местами верхние и нижние пределы интегрирования), где

$$\Lambda_{ik} = Y_{ik} - \lambda'(x)X_{ik},$$

$$\begin{aligned} X_{00} &= v_{00}(M; M_2) v_{00}^*(M; M_1), & Y_{00} &= v_{20}(M; M_2) v_{20}^*(M; M_1), \\ X_{20} &= v_{02}(M; M_2) v_{00}^*(M; M_1), & Y_{20} &= v_{22}(M; M_2) v_{20}^*(M; M_1), \\ X_{02} &= v_{00}(M; M_2) v_{02}^*(M; M_1), & Y_{02} &= v_{20}(M; M_2) v_{22}^*(M; M_1), \\ X_{22} &= v_{02}(M; M_2) v_{02}^*(M; M_1), & Y_{22} &= v_{22}(M; M_2) v_{22}^*(M; M_1). \end{aligned}$$

Складывая в левой части равенства (23) четыре интеграла по кривой $y = \lambda(x)$, получаем нуль. Поэтому сумма всех интегралов, расположенных в правой части равенств (23), тоже равна нулю. Сумма двух интегралов по прямой $x = x_1$ равна интегралу от M_4 до M_1 , такая же сумма по прямой $x = x_2$ равна интегралу от M_3 до M_2 . Сумма двух интегралов по прямой $y = y_1$ равна интегралу от M_3 до M_1 , такая же сумма по прямой $y = y_2$ равна интегралу от M_4 до M_2 . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{M_4}^{M_1} X_{ik} \Big|_{x=x_1} dy + \int_{M_3}^{M_2} X_{ik} \Big|_{x=x_2} dy + \\ & + \int_{M_3}^{M_1} Y_{ik} \Big|_{y=y_1} dx + \int_{M_4}^{M_2} Y_{ik} \Big|_{y=y_2} dx = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, в соответствии с (13) и (15) имеем

$$\begin{aligned} X_{00} \Big|_{x=x_1} &= 0, & X_{00} \Big|_{x=x_2} &= 0, \\ X_{20} \Big|_{x=x_1} &= 0, & Y_{20} \Big|_{y=y_2} &= 0, \\ X_{02} \Big|_{x=x_2} &= 0, & Y_{02} \Big|_{y=y_1} &= 0, \\ Y_{22} \Big|_{y=y_1} &= 0, & Y_{22} \Big|_{y=y_2} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Поэтому равенства (24) эквивалентны следующим равенствам:

$$\begin{aligned} & \int_{M_3}^{M_1} Y_{00} \Big|_{y=y_1} dx + \int_{M_4}^{M_2} Y_{00} \Big|_{y=y_2} dx = 0, \\ & \int_{M_3}^{M_2} X_{20} \Big|_{x=x_2} dy + \int_{M_4}^{M_1} Y_{20} \Big|_{y=y_1} dx = 0. \end{aligned}$$

$$\int_{M_4}^{M_1} X_{02} \Big|_{x=x_1} dy + \int_{M_4}^{M_2} Y_{02} \Big|_{y=y_2} dx = 0,$$

$$\int_{M_4}^{M_1} X_{22} \Big|_{x=x_1} dy + \int_{M_3}^{M_2} X_{22} \Big|_{x=x_2} dy = 0. \quad (26)$$

Теперь, в соответствии с (13) и (15) имеем

$$Y_{00} \Big|_{y=y_1} = -i \frac{mc}{\hbar} a(x, y_1) v_{20}(x, y_1; M_2),$$

$$Y_{00} \Big|_{y=y_2} = +i \frac{mc}{\hbar} a(x, y_2) v_{20}^*(x, y_2; M_1),$$

$$Y_{20} \Big|_{y=y_1} = -i \frac{mc}{\hbar} a(x, y_1) v_{22}(x, y_1; M_2),$$

$$Y_{02} \Big|_{y=y_2} = +i \frac{mc}{\hbar} a(x, y_2) v_{22}^*(x, y_2; M_1),$$

$$X_{20} \Big|_{x=x_2} = +i \frac{mc}{\hbar} a(x_2, y) v_{00}^*(x_2, y; M_1),$$

$$X_{02} \Big|_{x=x_1} = -i \frac{mc}{\hbar} a(x_1, y) v_{00}(x_1, y; M_2),$$

$$X_{22} \Big|_{x=x_1} = -i \frac{mc}{\hbar} a(x_1, y) v_{02}(x_1, y; M_2),$$

$$X_{22} \Big|_{x=x_2} = +i \frac{mc}{\hbar} a(x_2, y) v_{02}^*(x_2, y; M_1), \quad (27)$$

а так как функция v_{ik} удовлетворяет уравнениям (17), то, следовательно,

$$Y_{00} \Big|_{y=y_1} = \frac{\partial}{\partial x} v_{00}(x, y_1; M_2), \quad Y_{00} \Big|_{y=y_2} = \frac{\partial}{\partial x} v_{00}^*(x, y_2; M_1),$$

$$X_{20} \Big|_{x=x_2} = \frac{\partial}{\partial y} v_{20}^*(x_2, y; M_1), \quad Y_{20} \Big|_{y=y_1} = \frac{\partial}{\partial x} v_{02}(x, y_1; M_2),$$

$$X_{02} \Big|_{x=x_1} = \frac{\partial}{\partial y} v_{20}(x_1, y; M_2), \quad Y_{02} \Big|_{y=y_2} = \frac{\partial}{\partial x} v_{02}^*(x, y_2; M_1),$$

$$X_{22} \Big|_{x=x_1} = \frac{\partial}{\partial y} v_{22}(x_1, y; M_2), \quad X_{22} \Big|_{x=x_2} = \frac{\partial}{\partial y} v_{22}^*(x_2, y; M_1). \quad (28)$$

Подставляя (28) в (26), получаем

$$\begin{aligned}
v_{00}(M_1; M_2) - v_{00}(x_3, y_1; M_2) + v_{00}^*(M_2; M_1) - v_{00}^*(x_4, y_2; M_1) &= 0, \\
v_{20}^*(M_2; M_1) - v_{20}^*(x_2, y_3; M_1) + v_{02}(M_1; M_2) - v_{02}(x_3, y_1; M_2) &= 0, \\
v_{20}(M_1; M_2) - v_{20}(x_1, y_4; M_2) + v_{02}^*(M_2; M_1) - v_{02}^*(x_4, y_2; M_1) &= 0, \\
v_{22}(M_1; M_2) - v_{22}(x_1, y_4; M_2) + v_{22}^*(M_2; M_1) - v_{22}^*(x_2, y_3; M_1) &= 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Так как $x_3 = x_2$, $x_4 = x_1$, $y_3 = y_1$, $y_4 = y_2$, то

$$\begin{aligned}
v_{00}(x_3, y_1; M_2) &= v_{00}(M_3; M_2) = v_{00}(x_2, y_1; M_2), \\
v_{00}^*(x_4, y_2; M_1) &= v_{00}^*(M_4; M_1) = v_{00}^*(x_1, y_2; M_1), \\
v_{20}^*(x_2, y_3; M_1) &= v_{20}^*(M_3; M_1) = v_{20}^*(x_2, y_1; M_1), \\
v_{02}(x_3, y_1; M_2) &= v_{02}(M_3; M_2) = v_{02}(x_2, y_1; M_2), \\
v_{20}(x_1, y_4; M_2) &= v_{20}(M_4; M_2) = v_{20}(x_1, y_2; M_2), \\
v_{02}^*(x_4, y_2; M_1) &= v_{02}^*(M_4; M_1) = v_{02}^*(x_1, y_2; M_1), \\
v_{22}(x_1, y_4; M_2) &= v_{22}(M_4; M_2) = v_{22}(x_1, y_2; M_2), \\
v_{22}^*(x_2, y_3; M_1) &= v_{22}^*(M_3; M_1) = v_{22}^*(x_2, y_1; M_1).
\end{aligned} \tag{30}$$

Из условий (13) и (15) получаются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
v_{00}(x_3, y_1; M_2) &= 0, \quad v_{00}^*(x_4, y_2; M_1) = 0, \\
v_{20}^*(x_2, y_3; M_1) &= -i \frac{mc}{\hbar} a(x_2, y_1), \\
v_{02}(x_3, y_1; M_2) &= +i \frac{mc}{\hbar} a(x_2, y_1), \\
v_{20}(x_1, y_4; M_2) &= +i \frac{mc}{\hbar} a(x_1, y_2), \\
v_{02}^*(x_4, y_2; M_1) &= -i \frac{mc}{\hbar} a(x_1, y_2), \\
v_{22}(x_1, y_4; M_2) &= 0, \quad v_{22}^*(x_2, y_3; M_1) = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Подставляя эти равенства в (29), получаем (22).

3. АНТИКОММУТАТОР СПИНОРНОГО ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ МИРЕ

Как видно из формул (14) и (16), антикоммутиатор спинорного поля определяется во всем двумерном мире перестановочными соотношениями на некоторой пространственно-подобной кривой $y = \lambda(x)$. На этой кривой перестановочные соотношения запишем, введя операторы вида

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \{f_2 u_2^*(x) + \tilde{f}_2 u_2(x) - \lambda'(x)[f_0 u_0^*(x) + \tilde{f}_0 u_0(x)]\} dx, \quad (32)$$

где (f_0, f_2) и $(\tilde{f}_0, \tilde{f}_2)$ — некоторые «пробные» спинорные функции от x , а

$$u_k(x) = u_k(x, \lambda(x)), \quad u_k^*(x) = u_k^*(x, \lambda(x)), \quad k = 0, 2.$$

Оператор (32) будет эрмитово самосопряженным, если $\tilde{f}_k = f_k^*$.

Для всяких двух операторов вида (32) положим

$$\{FG\} = FG + GF = 2(f, g), \quad (33)$$

где

$$(f, g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{f_2 \tilde{g}_2 + \tilde{f}_2 g_2 - \lambda'(x) [f_0 \tilde{g}_0 + \tilde{f}_0 g_0]\} dx. \quad (34)$$

Тем самым заданы перестановочные соотношения на кривой $y = \lambda(x)$.

Согласно (14) и (16) операторы $u_k(M_0)$ и $u_k^*(M_0)$ имеют вид (32), и поэтому для них справедливы формулы (33) и (34). Очевидно,

$$\{u_j(M_1) u_k(M_2)\} = 0, \quad \{u_j^*(M_1) u_k^*(M_2)\} = 0. \quad (35)$$

Воспользовавшись равенствами (23) для функции Римана, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \{u_0(M_1) u_0^*(M_2)\} &= \varepsilon(M_1, M_2) v_{00}^*(M_1; M_2) + \delta(y_2 - y_1), \\ \{u_0(M_1) u_2^*(M_2)\} &= \varepsilon(M_1, M_2) v_{02}^*(M_1; M_2), \\ \{u_2(M_1) u_0^*(M_2)\} &= \varepsilon(M_1, M_2) v_{20}^*(M_1; M_2), \\ \{u_2(M_1) u_2^*(M_2)\} &= \varepsilon(M_1, M_2) v_{22}^*(M_1; M_2) + \delta(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\varepsilon(M_1, M_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } M_2 \text{ в «будущем» по отношению к } M_1, \\ 0, & \text{если } M_1 \text{ и } M_2 \text{ пространственно-подобны,} \\ -1, & \text{если } M_1 \text{ в «будущем» по отношению к } M_2. \end{cases}$$

Функцию $\varepsilon(M_1, M_2)$ можно записать в виде

$$\varepsilon(M_1, M_2) = \theta(x_2 - x_1)\theta(y_2 - y_1) - \theta(x_1 - x_2)\theta(y_1 - y_2), \quad (37)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (38)$$

Из (36) следует, что антикоммутир не зависит от выбора кривой $\lambda(x)$. Равенство нулю антикоммутиратора при пространственном расположении точек M_1 и M_2 является выражением принципа причинности.

4. ФУНКЦИЯ РИМАНА В ДВУМЕРНОМ ПЛОСКОМ МИРЕ

В этом случае $a = 1$. Найдем функцию $w_{ik}(M; M_0)$. Согласно (21) при $a = 1$, очевидно,

$$w_{00}(x, y; x_0, y_0) = w_{22}(x, y; x_0, y_0) = w(x, y; x_0, y_0). \quad (39)$$

Для функции $w(x, y; x_0, y_0)$ имеем уравнение

$$w(x, y; x_0, y_0) = 1 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \int_{x_0}^x d\xi \int_{y_0}^y w(\xi, \eta; x_0, y_0) d\eta, \quad (40)$$

которое легко решается методом последовательных приближений. Решение выражается через функцию Бесселя $J_0(z)$:

$$w(x, y; x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} = J_0(z), \quad (41)$$

где

$$z = 2 \frac{mc}{\hbar} \sqrt{(x - x_0)(y - y_0)}.$$

Таким образом, функция $w(M; M_0)$ зависит только от интервала между точками M и M_0 .

Из (19) находим

$$w_{20} = -i \frac{mc}{\hbar} (y - y_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} = \sqrt{\frac{y - y_0}{x - x_0}} J_1(z),$$

$$w_{02} = -i \frac{mc}{\hbar} (x - x_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} = \sqrt{\frac{x - x_0}{y - y_0}} J_1(z). \quad (42)$$

Функция Римана находится отсюда по формулам (20).

5. ФУНКЦИЯ РИМАНА В ДВУМЕРНОМ МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Двумерный мир де Ситтера представляется в виде однополостного гиперболоида $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^0)^2 = r^2$ в трехмерном плоском мире с метрикой $(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^0)^2$. В качестве координат на гиперболоиде удобны углы θ и φ :

$$x^0 = r \operatorname{tg} \theta, \quad x^1 = r \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}, \quad x^2 = r \frac{\sin \varphi}{\cos \theta},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (43)$$

Метрика на гиперболоиде равна

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^0)^2 = a^2(d\varphi^2 - d\theta^2),$$

где

$$a = \frac{r}{\cos \theta}. \quad (44)$$

Вводя изотропные координаты

$$x = \frac{\theta + \varphi}{2}, \quad y = \frac{\theta - \varphi}{2}, \quad (45)$$

находим, что в данном случае функция Римана подчиняется уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} v_{0k} = -\frac{i m}{\cos(x+y)} v_{2k},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} v_{2k} = -\frac{i m}{\cos(x+y)} v_{0k}, \quad (k = 0, 2) \quad (46)$$

и удовлетворяет следующим характеристическим условиям:

$$v_{00} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad v_{02} \Big|_{x=x_0} = \frac{i m}{\cos(x_0 + y)},$$

$$v_{20} \Big|_{y=y_0} = \frac{i m}{\cos(x + y_0)}, \quad v_{22} \Big|_{y=y_0} = 0, \quad (47)$$

где $m = \frac{mcr}{\hbar}$ — безразмерный параметр.

Введем теперь связанные с точкой M_0 координаты $\gamma = \operatorname{ch} \Gamma$ и $\beta = \operatorname{th} B$, где Γ — геодезическое расстояние между точками M и M_0 , а B — угол между отрезком M_0M и координатной линией $\varphi = \varphi_0$:

$$\gamma = \frac{\cos(x - x_0 + y_0 - y) - \sin(x + y) \sin(x_0 + y_0)}{\cos(x + y) \cos(x_0 + y_0)},$$

$$\beta = \frac{\cos(x_0 + y_0) \sin(x - x_0 + y_0 - y)}{\sin(x + y) - \sin(x_0 + y_0) \cos(x - x_0 + y_0 - y)}. \quad (48)$$

Угол f лоренцева поворота от локального репера $(d\theta, d\varphi)$ к локальному реперу $(d\gamma, d\beta)$ находится по формуле

$$e^{f/2} = \sqrt{\frac{\sin(x - x_0) \cos(x + y_0)}{\sin(y - y_0) \cos(x_0 + y)}}. \quad (49)$$

Общая процедура преобразования спинора при переходе от одного локального репера к другому приводит к подстановке

$$\tilde{v}_{00} = v_{00} \sqrt{\frac{\cos(x + y)}{r}} e^{-f/2}, \quad \tilde{v}_{02} = v_{02} \sqrt{\frac{\cos(x + y)}{r}} e^{-f/2},$$

$$\tilde{v}_{20} = v_{20} \sqrt{\frac{\cos(x + y)}{r}} e^{f/2}, \quad \tilde{v}_{22} = v_{22} \sqrt{\frac{\cos(x + y)}{r}} e^{f/2}, \quad (50)$$

которая существенно упрощает систему уравнений (46).

Действительно, \tilde{v}_{jk} подчиняются системе уравнений с разделяющимися переменными, а именно:

$$\left(\frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \frac{\partial}{\partial \beta} + \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) \tilde{v}_{0k} = -im \tilde{v}_{2k},$$

$$\left(\frac{\beta^2 - 1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \frac{\partial}{\partial \beta} + \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) \tilde{v}_{2k} = -im \tilde{v}_{0k}. \quad (51)$$

Чтобы удовлетворить характеристическим условиям (47) и чтобы v_{jk} не имели особенностей, надо положить

$$\tilde{v}_{j1} = \frac{im}{\sqrt{r \cos(x_0 + y_0)}} G_{j1}(\gamma) e^{B/2},$$

$$\tilde{v}_{j2} = \frac{im}{\sqrt{r \cos(x_0 + y_0)}} G_{j2}(\gamma) e^{-B/2} \quad (52)$$

и потребовать выполнения равенств

$$G_{02}(\gamma) = G_{20}(\gamma) = G_0(\gamma), \quad G_0(1) = 1.$$

$$G_{22}(\gamma) = G_{00}(\gamma) = G_2(\gamma). \quad (53)$$

При этом функции G_0 и G_2 подчиняются следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{d}{d\gamma} G_0 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} G_0 &= imG_2, \\ \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{d}{d\gamma} G_2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} G_2 &= imG_0, \end{aligned} \quad (54)$$

решение которой известно [58]:

$$\begin{aligned} G_0(\gamma) &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} F\left(1 - im, 1 + im; 1; \frac{1-\gamma}{2}\right), \\ G_2(\gamma) &= -im \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} F\left(1 - im, 1 + im; 2; \frac{1-\gamma}{2}\right), \end{aligned} \quad (55)$$

где F — гипергеометрическая функция.

Собирая результаты, получаем функцию Римана:

$$\begin{aligned} v_{00} &= \frac{m^2}{\cos(x+y) \cos(x_0+y_0)} F\left(1 - im, 1 + im; 2; \frac{1-\gamma}{2}\right), \\ v_{20} &= \frac{im}{\cos(x+y) \cos(x_0+y_0)} F\left(1 - im, 1 + im; 1; \frac{1-\gamma}{2}\right), \\ v_{02} &= \frac{im}{\cos(x+y) \cos(x_0+y_0)} F\left(1 - im, 1 + im; 1; \frac{1-\gamma}{2}\right), \\ v_{22} &= \frac{m^2}{\cos(x+y) \cos(x_0+y_0)} F\left(1 - im, 1 + im; 2; \frac{1-\gamma}{2}\right). \end{aligned} \quad (56)$$

6. ОПЕРАТОРЫ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ДВУМЕРНОМ МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Чтобы ввести операторы рождения и уничтожения частиц в двумерном мире де Ситтера, запишем уравнения ДФИ в следующем матричном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{im}{\cos \theta} Lu + K \frac{\partial u}{\partial \phi}, \quad (57)$$

где u — столбец, K и L — матрицы:

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Решение уравнения (57) будем искать в виде ряда Фурье

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{s+1/2} \exp \left\{ i \left(s + \frac{1}{2} \right) \varphi \right\}. \quad (59)$$

Разложение по полуцелым гармоникам определяется следующим условием:

$$u(\theta, 2\pi) = -u(\theta, 0). \quad (60)$$

Заметим, что этому глобальному условию удовлетворяет и функция Римана, определяемая локально.

Для коэффициентов ряда (59) получаем уравнение

$$\frac{d}{d\theta} u_{s+1/2} = i \left(s + \frac{1}{2} \right) K u_{s+1/2} + \frac{im}{\cos \theta} L u_{s+1/2}. \quad (61)$$

Так как сумму в разложении (59) можно представить в виде

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[u_{p+1/2} \exp \left\{ i \left(p + \frac{1}{2} \right) \varphi \right\} + u_{-p-1/2} \exp \left\{ -i \left(p + \frac{1}{2} \right) \varphi \right\} \right], \quad (62)$$

то для определения коэффициентов разложения требуется решить для всех $p > 0$ следующие две системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\theta} + i \left(p + \frac{1}{2} \right) f &= \frac{im}{\cos \theta} g, \\ \frac{dg}{d\theta} - i \left(p + \frac{1}{2} \right) g &= \frac{im}{\cos \theta} f \end{aligned} \quad (63)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\theta} - i \left(p + \frac{1}{2} \right) f &= \frac{im}{\cos \theta} g, \\ \frac{dg}{d\theta} + i \left(p + \frac{1}{2} \right) g &= \frac{im}{\cos \theta} f. \end{aligned} \quad (64)$$

Первая система имеет следующие два решения:

$$\begin{aligned} 1) f &= f_p(\theta), \quad g = g_p(\theta); \\ 2) f &= -g_p^*(\theta) = -g_p(-\theta), \quad g = f_p^*(\theta) = f_p(-\theta). \end{aligned}$$

Они линейно независимы, так как составленный из них характерный определитель равен

$$\begin{vmatrix} f_p(\theta) & g_p(\theta) \\ -g_p^*(\theta) & f_p^*(\theta) \end{vmatrix} = |f_p(\theta)|^2 + |g_p(\theta)|^2 \quad (65)$$

и вследствие (63) не зависит от времени θ .

Вторая система имеет следующие два решения:

$$1) f = -g_p(\theta), \quad g = -f_p(\theta), \quad 2) f = f_p^*(\theta), \quad g = -g_p^*(\theta).$$

По той же причине они также линейно независимы.

Таким образом, коэффициенты ряда Фурье (62) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{p+1/2}(\theta) &= \begin{pmatrix} f_p(\theta) \\ g_p(\theta) \end{pmatrix} A_{p+1/2} + \begin{pmatrix} -g_p^*(\theta) \\ f_p^*(\theta) \end{pmatrix} B_{-p-1/2}^+, \\ u_{-p-1/2}(\theta) &= \begin{pmatrix} -g_p(\theta) \\ -f_p(\theta) \end{pmatrix} A_{-p-1/2} + \begin{pmatrix} f_p^*(\theta) \\ -g_p^*(\theta) \end{pmatrix} B_{p+1/2}^+, \end{aligned} \quad (66)$$

где A и B — операторные константы.

Что до явного вида функций $f_p(\theta)$ и $g_p(\theta)$, то они равны

$$\begin{aligned} f_p(\theta) &= N_p e^{-i(p+1/2)\theta} F\left(-im, im; p+1; \frac{e^{-i\theta}}{2 \cos \theta}\right), \\ g_p(\theta) &= -N_p \frac{m}{2(p+1) \cos \theta} e^{-i(p+1/2)\theta} \times \\ &\times F\left(1-im, 1+im; p+2; \frac{e^{-i\theta}}{2 \cos \theta}\right), \end{aligned} \quad (67)$$

где N_p — нормировочный множитель. Считая, что определитель (65) равен 1, находим

$$N_p = \frac{\sqrt{\Gamma(p+1+im)\Gamma(p+1-im)}}{p!}. \quad (68)$$

В соответствии с (36) полевой оператор подчиняется коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \{u_k(\theta, \varphi_2) u_j(\theta, \varphi_1)\} &= 0, \quad \{u_k^*(\theta, \varphi_2) u_j^*(\theta, \varphi_1)\} = 0, \\ \{u_k(\theta, \varphi_2) u_j^*(\theta, \varphi_1)\} &= \delta_{kj} \delta(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (69)$$

Отсюда следует, что операторы A и B удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} \{A_{r+1/2}, A_{s+1/2}\} &= 0, & \{B_{r+1/2}, B_{s+1/2}\} &= 0, \\ \{A_{r+1/2}^+, A_{s+1/2}^+\} &= 0, & \{B_{r+1/2}^+, B_{s+1/2}^+\} &= 0, \\ \{A_{r+1/2}, A_{s+1/2}^+\} &= \delta_{rs}, & \{B_{r+1/2}, B_{s+1/2}^+\} &= \delta_{rs}. \end{aligned} \quad (70)$$

К тому же операторы, обозначенные разными буквами (A и B), независимо от того, какими индексами они снабжены, антикоммутируют. Операторы A^+ и A можно истолковать как операторы рождения и уничтожения электронов, а операторы B^+ и B — как операторы рождения и уничтожения позитронов.

7. КАНОНИЧЕСКИЙ ПУТЬ

Для метрики

$$ds^2 = a^2(\varphi, \theta) (d\varphi^2 - d\theta^2) \quad (71)$$

уравнение ДФИ

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{imc}{\hbar} aLu + K \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad (72)$$

частным случаем которого является уравнение (57), можно получить каноническим путем из интеграла действия

$$S = \iint \Lambda d\varphi d\theta, \quad (73)$$

где

$$\Lambda = \frac{i\hbar}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial u^*}{\partial \theta} u - u^* K \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial u^*}{\partial \theta} K u - \frac{2imc}{\hbar} a u^* L u \right). \quad (74)$$

Каноническим же путем отсюда получается вектор тока

$$J_\theta = -u^* u, \quad J_\varphi = -u^* K u \quad (75)$$

и тензор энергии-импульса

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta} &= \frac{i\hbar}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial u^*}{\partial \theta} u \right), \\ T_{\theta\varphi} = T_{\varphi\theta} &= \frac{i\hbar}{2} \left(u^* K \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial u^*}{\partial \theta} K u \right) = \frac{i\hbar}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} u \right), \\ T_{\varphi\varphi} &= \frac{i\hbar}{2} \left(u^* K \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} K u \right). \end{aligned} \quad (76)$$

След тензора энергии-импульса равен

$$T = a^{-2}(T_{\varphi\varphi} - T_{\theta\theta}) = \frac{mc}{a} u^* Lu. \quad (77)$$

Ковариантные дивергенции любого вектора J_α и любого симметричного тензора $T_{\alpha\beta}$ в мире с метрикой (71) равны

$$g^{\mu\alpha} \nabla_\mu J_\alpha = g^{\mu\alpha} \partial_\mu J_\alpha, \quad (78)$$

$$g^{\mu\alpha} \nabla_\mu T_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \partial_\mu T_{\alpha\beta} - T a^{-1} \partial_\beta a. \quad (79)$$

Подставляя сюда (75), (76) и (77) и учитывая уравнение (72), находим, что ковариантные дивергенции вектора тока и тензора энергии-импульса равны нулю.

В силу этого интеграл

$$\hat{e} = \int j_\alpha d\sigma^\alpha \quad (80)$$

по Σ , где Σ — пространственно-подобная кривая, разделяющая мир на две части, не зависит от выбора Σ . Это есть оператор заряда. Если существует векторное поле ζ^α , порождающее изометрическое преобразование, то интеграл

$$M = \int T_{\alpha\beta} \zeta^\alpha \sigma^\beta \quad (81)$$

по кривой Σ также не зависит от выбора Σ . На кривой $\theta = \text{const}$, являющейся одной из кривых вида Σ ,

$$j_\alpha d\sigma^\alpha = j_\theta d\varphi, \quad T_{\alpha\beta} \zeta^\alpha d\sigma^\beta = T_{\alpha\theta} \zeta^\alpha d\varphi. \quad (82)$$

В частном случае (44) три векторных поля

$$\frac{-i}{\hbar} X_{(01)} = \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\frac{-i}{\hbar} X_{(02)} = \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\frac{-i}{\hbar} X_{(12)} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (83)$$

порождают группу изометрических преобразований гиперboloида (43). При этом два вещественных поля $X_{(01)}$ и $X_{(02)}$ удобно объединить в одно комплексное поле

$$\frac{-i}{\hbar} \left(X_{(01)} + i X_{(02)} \right) = e^{i\varphi} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + i \sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (84)$$

Воспользовавшись разложением (59), получаем интеграл (80) в виде

$$\hat{e} = -e \int_0^{2\pi} u^* u d\varphi = -e \sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{s+1/2}^* u_{s+1/2} \quad (85)$$

и два интеграла типа (81) в виде

$$M = - \int_0^{2\pi} T_{\theta\varphi} d\varphi = h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) u_{s+1/2}^* u_{s+1/2}, \quad (86)$$

$$M + iM = \int_0^{2\pi} (\cos \theta T_{\theta\theta} + i \sin \theta T_{\theta\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi = -h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu_s, \quad (87)$$

где

$$\mu_s = u_{s+1/2}^* (mL + sK e^{iK\theta}) u_{s-1/2}. \quad (88)$$

Все эти интегралы не зависят от θ , в чем можно убедиться, проверив, что в силу уравнения (61)

$$\frac{d}{d\theta} u_{s+1/2}^* u_{s+1/2} = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \mu_s = 0. \quad (89)$$

На основании (66) находим

$$\begin{aligned} u_{p+1/2}^* u_{p+1/2} &= A_{p+1/2}^+ A_{p+1/2} + B_{-p-1/2} B_{-p-1/2}^+, \\ u_{-p-1/2}^* u_{-p-1/2} &= A_{-p-1/2}^+ A_{-p-1/2} + B_{p+1/2} B_{p+1/2}^+, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= m(B_{-1/2} B_{1/2}^+ - A_{1/2}^+ A_{-1/2}), \\ \mu_{p+1} &= \sqrt{(p+1)^2 + m^2} (B_{-p-3/2} B_{-p-1/2}^+ - A_{p+3/2}^+ A_{p+1/2}), \\ \mu_{-p-1} &= \sqrt{(p+1)^2 + m^2} (B_{p+1/2} B_{p+3/2}^+ - A_{-p-1/2}^+ A_{-p-3/2}). \end{aligned} \quad (91)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{e} &= e \sum_{s=-\infty}^{\infty} (B_{s+1/2}^+ B_{s+1/2} - A_{s+1/2}^+ A_{s+1/2}), \\ M &= h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) (A_{s+1/2}^+ A_{s+1/2} + B_{s+1/2}^+ B_{s+1/2}), \\ M + iM &= h \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sqrt{s^2 + m^2} (A_{s+1/2}^+ A_{s-1/2} + B_{s+1/2}^+ B_{s-1/2}). \end{aligned} \quad (92)$$

Из двух первых этих формул видно, что $A_{s+1/2}^+$ и $B_{s+1/2}^+$ являются операторами рождения электрона и позитрона в состоянии с моментом $\hbar \left(s + \frac{1}{2} \right)$ и что $A_{s+1/2}$ и $B_{s+1/2}$ являются операторами уничтожения электрона и позитрона в состоянии с моментом $\hbar \left(s + \frac{1}{2} \right)$.

Замечательно, что операторы (92) инвариантны относительно подстановки

$$\begin{aligned} A_{s+1/2} &\rightarrow \frac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}} (A_{s+1/2} + i(-1)^s B_{-s-1/2}^+), \\ B_{s+1/2} &\rightarrow \frac{e^{i\beta}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}} (B_{s+1/2} + i(-1)^s A_{-s-1/2}^+), \end{aligned} \quad (93)$$

где α и β — любые действительные числа, λ — любое комплексное число. Эта подстановка каноническая в том смысле, что она сохраняет коммутационные соотношения (70). Она аналогична подстановке Боголюбова в теории сверхпроводимости [59].

Следовательно, непрерывная группа изометрий в мире де Ситтера не определяет однозначно вакуумное состояние. Не уменьшает произвола в выборе вакуума и пространственное отражение $\varphi \rightarrow -\varphi$. Напротив, отражение $\theta \rightarrow -\theta$ времени накладывает следующие ограничения:

$$\alpha = \beta, \quad \lambda = \lambda^*. \quad (94)$$

8. РАЗЛОЖЕНИЕ АНТИКОММУТАТОРА В РЯД ФУРЬЕ

В разделе 3 и 5 антикоммутатор спинорного поля в двумерном мире де Ситтера был получен нами с помощью метода Римана, но его можно получить и непосредственно из условий (70). Для ряда (59) с коэффициентами (66) антикоммутатор равен

$$\{u_0(M_1)u_0^*(M_2)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} F_{s+1/2} \exp \left\{ i \left(s + \frac{1}{2} \right) \varphi_0 \right\},$$

$$\{u_2(M_1)u_0^*(M_2)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_{s+1/2} \exp \left\{ i \left(s + \frac{1}{2} \right) \varphi_0 \right\},$$

$$\{u_0(M_1)u_2^*(M_2)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} G_{-s-1/2} \exp \left\{ i \left(s + \frac{1}{2} \right) \varphi_0 \right\},$$

$$\{u_2(M_1)u_2^*(M_2)\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} F_{-s-1/2} \exp \left\{ i \left(s + \frac{1}{2} \right) \varphi_0 \right\}, \quad (95)$$

где $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$.

Коэффициенты разложения равны

$$\begin{aligned} F_{p+1/2} &= f_p(\theta_1) f_p^*(\theta_2) + g_p^*(\theta_1) g_p(\theta_2), \\ F_{-p-1/2} &= f_p(\theta_1) f_p^*(\theta_2) + g_p^*(\theta_1) g_p(\theta_2), \\ G_{p+1/2} &= g_p(\theta_1) f_p^*(\theta_2) - f_p^*(\theta_1) g_p(\theta_2), \\ G_{-p-1/2} &= f_p(\theta_1) g_p^*(\theta_2) - g_p^*(\theta_1) f_p(\theta_2), \end{aligned} \quad (96)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$. Они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta_1} + i \left(s + \frac{1}{2} \right) F &= \frac{im}{\cos \theta_1} G, \\ \frac{\partial G}{\partial \theta_1} - i \left(s + \frac{1}{2} \right) G &= \frac{im}{\cos \theta_1} F, \end{aligned} \quad (97)$$

с начальными данными $F = 1, G = 0$, при $\theta_1 = \theta_2$.

Но такой же системе дифференциальных уравнений и с теми же начальными данными удовлетворяет следующая пара функций:

$$\begin{aligned} I_{s+1/2} &= \exp \left\{ -i \left(s + \frac{1}{2} \right) \theta_0 \right\} - \\ &- \frac{m^2}{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\sin \frac{\theta_0 + \varphi_0}{2}}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} F \left(1 - im, 1 + im; 2; \frac{1-\gamma}{2} \right) \exp \left\{ -i \left(s + \frac{1}{2} \right) \varphi_0 \right\} d\varphi_0, \\ J_{s+1/2} &= \frac{im}{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\cos \frac{\theta_0 + \varphi_0}{2}}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} F \left(1 - im, 1 + im; 2; \frac{1-\gamma}{2} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -i \left(s + \frac{1}{2} \right) \varphi_0 \right\} d\varphi_0, \end{aligned} \quad (98)$$

где

$$\theta_0 = \theta_1 - \theta_2, \quad \gamma = \frac{\cos \varphi_0 - \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}. \quad (99)$$

Следовательно,

$$F_{s+1/2} = I_{s+1/2}, \quad G_{s+1/2} = J_{s+1/2}. \quad (100)$$

Это позволяет просуммировать ряды (95) и получить антикоммутирующий спинорного поля в известном нам виде (36).

IV. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В БАЗИСЕ dx

1. СПЕЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В МИРЕ ДЕ СИТТЕРА

Переход от уравнения ДФИ к специальному уравнению, указанному Дираком для мира де Ситтера в работе [36], установлен в работе [37]. $2n$ -мерный случай рассмотрен в работе [60].

$2n$ -мерный мир де Ситтера можно представить в виде гиперboloида $\eta_{AB} x^A x^B = r^2$ в $(2n + 1)$ -мерном мире Минковского. Здесь при $\eta_{aa} = -\eta_{00} = 1, \eta_{AB} = 0$ при $A \neq B$, большие латинские индексы пробегают значения $0, 1, \dots, 2n$, малые латинские индексы пробегают значения $1, 2, \dots, 2n$. В этом общем случае спинор имеет 2^n компонент [32], и можно подобрать одну антиэрмитову матрицу H^0 и $2n$ эрмитовых матриц H^a , удовлетворяющих условиям $H^A H^B + H^B H^A = 2\eta^{AB}$.

Специальное уравнение Дирака в $2n$ -мерном случае обобщается в следующем виде:

$$H^A m_A \Xi = (n + im) \frac{X}{r} \Xi, \quad (1)$$

где Ξ — спинор ξ , отнесенный к базису $dx^A, X = x^A H_A$,

$$m_A = r \frac{\partial}{\partial x^A} - \frac{x_A x^B}{r} \frac{\partial}{\partial x^B}. \quad (2)$$

Так как

$$\frac{1}{2} H^A H^B m_{AB} = \frac{1}{2} (X H^A - H^A X) \frac{\partial}{\partial x^A} = \frac{X}{r} H^A m_A, \quad (3)$$

где

$$m_{AB} = x_A \frac{\partial}{\partial x^B} - x_B \frac{\partial}{\partial x^A}, \quad (4)$$

то уравнение (1) можно записать в виде

$$\left(\frac{1}{2} H^A H^B m_{AB} - n \right) \Xi = i m \Xi. \quad (5)$$

Оператор M , равный

$$M = \frac{1}{2} H^A H^B m_{AB} - n, \quad (6)$$

антикоммутирует с оператором X , то есть

$$MX + XM = 0. \quad (7)$$

Отсюда заключаем, что оператор, равный $(-iH_0XM)$, эрмитов. Кроме того, эрмитов и оператор H_0X . Следовательно, при действительных значениях параметра m уравнение (1) «эрмитизируется» умножением на оператор, равный $(-iH_0)$.

Дираковски-сопряженный спинор

$$\bar{\Xi} = \Xi^* H_0 \quad (8)$$

удовлетворяет уравнению

$$m_A \bar{\Xi} H^A = (n - im) \bar{\Xi} \frac{X}{r} \quad (9)$$

или

$$\frac{1}{2} m_{AB} \bar{\Xi} H^A H^B = (n - im) \bar{\Xi}. \quad (10)$$

Наряду с (7) оператор M обладает еще одним важным свойством, а именно

$$(M + n)(M + 1 - n) = -\frac{1}{2} m_{AB} m^{AB} = -m_A m^A. \quad (11)$$

В силу этого каждая из 2^n компонент спинора Ξ в отдельности удовлетворяет одному и тому же уравнению

$$m_A m^A \Xi = (n + im)(n - 1 - im) \Xi, \quad (12)$$

если сам спинор Ξ удовлетворяет уравнению (5). При этом каждая компонента сопряженного спинора $\bar{\Xi}$ удовлетворяет уравнению

$$m_A m^A \bar{\Xi} = (n - im)(n - 1 + im) \bar{\Xi}. \quad (13)$$

Из очевидного тождества

$$\begin{aligned} (M + n)(M + 1 - n) - (n + im)(n - 1 - im) &= \\ &= (M - im)(M + 1 + im) \end{aligned} \quad (14)$$

следует лемма:

Если спинор Φ удовлетворяет уравнению (12), то спинор

$$\Xi = (M + 1 + im)\Phi \tag{15}$$

удовлетворяет уравнению (1) (или, что то же, уравнению (5)).

Аналогично доказывается сопряженная лемма:

Если спинор Φ удовлетворяет уравнению (13), то спинор

$$\bar{\Xi} = \bar{\Phi}(M + 1 - im) \tag{16}$$

удовлетворяет уравнению (9) (или, что то же, уравнению (10)).

В случае $n = 2$ уравнения (1), (5) и (12) были указаны самим Дираком в работе [36]. Здесь мы подробно рассмотрим случай $n = 1$.

2. ПЕРЕХОД ОТ БАЗИСА F К БАЗИСУ dX

Уравнение (III.72) можно записать в виде

$$H^0 \frac{\partial u}{\partial \theta} + H^1 \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{imc}{\hbar} aH^2 u, \tag{17}$$

где матрицы H^A равны

$$H^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Эти матрицы удовлетворяют следующим условиям:

$$H^0 H^1 = H^2, \quad H^0 H^2 = -H^1, \quad H^1 H^2 = -H^0, \quad H^0 H^1 H^2 = 1, \\ H^A H^B + H^B H^A = 2\eta^{AB}. \tag{19}$$

Столбец u связан со спинором ξ , отнесенным к базису $f(f^0 = ad\theta, f^1 = ad\varphi)$, следующим образом; $u = \sqrt{a}\xi$.

Ковариантная производная спинора в базисе f равна

$$\xi_{;\mu} = D_{\mu} \xi = e_{\mu} \xi + \frac{1}{4} \omega_{\alpha\beta\mu} H^{\alpha} H^{\beta} \xi, \tag{20}$$

где $e_0 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}$, $e_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\omega_{\alpha\beta\mu} = \epsilon_{\alpha\beta} C_{\mu}$, $\epsilon_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор и $\epsilon_{10} = 1$, $C_0 = a^{-2} \frac{\partial a}{\partial \varphi}$, $C_1 = a^{-2} \frac{\partial a}{\partial \theta}$. Ковариантная производная сопряженного спинора $\bar{\xi} = \xi^* H_0$ в базисе f равна

$$\bar{\xi}_{;\mu} = D_{\mu} \bar{\xi} = e_{\mu} \bar{\xi} - \frac{1}{4} \bar{\xi} \omega_{\alpha\beta\mu} H^{\alpha} H^{\beta}. \tag{21}$$

В этих обозначениях уравнение (17) записывается в следующем виде:

$$\left(H^\nu D_\nu - \frac{imc}{\hbar} H^2 \right) \xi = 0. \quad (22)$$

Вернемся к рассмотрению двумерного мира де Ситтера и представим его в виде гиперboloида (III.43). При этом $a = r(\cos \theta)^{-1}$. К дифференциальным формам f^0, f^1 добавим форму $f^2 = dr$ и от базиса

$$F = \left\{ \frac{r}{\cos \theta} d\theta, \frac{r}{\cos \theta} d\varphi, dr \right\} \quad (23)$$

перейдем к базису

$$dX = \{dx^0, dx^1, dx^2\}, \quad (24)$$

составленному из дифференциалов функций (III.43). При этом удобно сделать замену

$$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (25)$$

Переход от базиса F к базису dX достигается преобразованием Лоренца вида $dx^A = \tilde{L}_B^A f^B, f^B = L_A^B dx^A$. Можно подобрать такую матрицу S , что

$$\begin{aligned} S^{-1} H^A S &= \tilde{L}_B^A H^B, & S H^A S^{-1} &= L_B^A H^B, \\ S H_A S^{-1} &= \tilde{L}_A^B H_B, & S^{-1} H_A S &= L_A^B H_B. \end{aligned} \quad (26)$$

Если обозначить $dX = H_A dx^A, F = H_A f^A$, то $dX = SFS^{-1}, F = S^{-1}dXS$. Переход от базиса F к базису dX сопровождается подстановкой

$$\Xi = S \xi. \quad (27)$$

В данном случае

$$\begin{aligned} S &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + H_1 H_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\cos \theta}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + H_0 H_2 \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ S^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{\cos \theta}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - H_0 H_2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\varphi}{2} - H_1 H_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Имеем

$$\begin{aligned} S^{-1} H^0 S &= H^0 \frac{1}{\cos \theta} + H^2 \operatorname{tg} \theta, \\ S^{-1} H^1 S &= H^0 \operatorname{tg} \theta \sin \varphi + H^1 \cos \varphi + H^2 \frac{\sin \varphi}{\cos \theta}, \\ S^{-1} H^2 S &= H^0 \operatorname{tg} \theta \cos \varphi - H^1 \sin \varphi + H^2 \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (29)$$

и, наоборот,

$$SH^0S^{-1} = H^0 \frac{1}{\cos \theta} - H^1 \operatorname{tg} \theta \sin \varphi - H^2 \operatorname{tg} \theta \cos \varphi,$$

$$SH^1S^{-1} = H^1 \cos \varphi - H^2 \sin \varphi,$$

$$SH^2S^{-1} = -H^0 \operatorname{tg} \theta + H^1 \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} + H^2 \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} = \frac{X}{r}. \quad (30)$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{4} \omega_{\alpha\beta\nu} H^\alpha H^\beta = S^{-1} e_\nu S - \frac{1}{2r} H_\nu H^2. \quad (31)$$

Следовательно,

$$D_\nu \xi = S^{-1} e_\nu \Xi - \frac{1}{2r} H_\nu H^2 S^{-1} \Xi,$$

$$D_\nu \bar{\xi} = (e_\nu \bar{\Xi}) S + \frac{1}{2r} \bar{\Xi} S H_\nu H^2. \quad (32)$$

Поэтому

$$H^\nu D_\nu \xi = H^\nu S^{-1} e_\nu \Xi - \frac{1}{r} H^2 S^{-1} \Xi,$$

$$D_\nu \bar{\xi} H^\nu = (e_\nu \bar{\Xi}) S H^\nu - \frac{1}{r} \bar{\Xi} S H^2. \quad (33)$$

Далее, векторные поля (2) в рассматриваемом случае равны

$$m_0 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad m_1 = -\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$m_2 = -\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (34)$$

Поэтому, ввиду (30),

$$rSH^\nu S^{-1} e_\nu = H^A m_A, \quad (35)$$

так что уравнение (22) в базисе dX принимает вид (1) при $n = 1$. Сопряженное с ним уравнение

$$D_\nu \bar{\xi} H^\nu = -\frac{imc}{\hbar} \bar{\xi} H^2 \quad (36)$$

принимает вид (9) при $n = 1$.

3. ВЕКТОР ТОКА И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В БАЗИСЕ dX

В двумерном мире в базисе F вектор тока равен (II. 28), а тензор энергии-импульса согласно (II. 31) и (II. 35) равен

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{2} (\bar{\xi} H_{\mu} \xi_{\nu} - \bar{\xi}_{\nu} H_{\mu} \xi) = \frac{i\hbar}{2} (\bar{\xi} H_{\nu} \xi_{\mu} - \bar{\xi}_{\mu} H_{\nu} \xi), \quad (37)$$

так как в двумерном случае $[H_{\mu} H_{\nu} H^{\alpha}] = 0$.

Чтобы преобразовать вектор тока и тензор энергии-импульса к базису dX , наряду с (27) и (32) надо воспользоваться равенствами

$$\bar{\xi} = \bar{\Xi} S, \quad D_{\mu} \bar{\xi} = (e_{\mu} \bar{\Xi}) - \frac{1}{2r} \bar{\Xi} S H_2 H_{\mu}. \quad (38)$$

В результате получается

$$J^A = \frac{e}{r} \bar{\Xi} X^A \Xi, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \frac{i\hbar}{2r^2} [\bar{\Xi} X_A \Xi_B - \bar{\Xi}_B X_A \Xi + \varepsilon_{ABC} X^C \bar{\Xi} \Xi = \\ &= \frac{i\hbar}{2r^2} [\bar{\Xi} X_A \Xi_B - \bar{\Xi}_B X_A \Xi + \bar{\Xi} X_B \Xi_A - \bar{\Xi}_A X_B \Xi], \end{aligned} \quad (40)$$

где ε_{ABC} — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon_{012} = 1$, $\Xi_A = m_A \Xi$,

$\bar{\Xi}_A = m_A \bar{\Xi}$, $X_A = m_A X = r H_A - \frac{X_A}{r} X = \frac{X}{2r} [X H_A - H_A X]$. Так как в базисе F дивергенция вектора тока и дивергенция тензора энергии-импульса равны нулю, то в базисе dX

$$m_A J^A = 0, \quad m_A T^{AB} = 0. \quad (41)$$

4. ОПЕРАТОР ЗАРЯДА В БАЗИСЕ dX

Оператор заряда \hat{e} в базисе F равен интегралу от определителя

$$\begin{vmatrix} f^0 & f^1 \\ J^0 & J^1 \end{vmatrix}$$

по кривой Σ . Тот же оператор в базисе dX равен интегралу по кривой Σ от определителя

$$\frac{1}{r} \begin{vmatrix} J^0 & x^0 & dx^0 \\ J^1 & x^1 & dx^1 \\ J^2 & x^2 & dx^2 \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Подставляя сюда вектор тока (39), находим

$$\hat{e} = \frac{-e}{r} \int \bar{\Xi} X dX \Xi. \quad (43)$$

Этот интеграл не зависит от выбора кривой Σ . Задавая ее уравнением $\theta = 0$, находим $X dX = r^2 H^0 d\varphi$ и

$$\hat{e} = -er \int_0^{2\pi} \Xi^* \Xi d\varphi. \quad (44)$$

5. ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ В БАЗИСЕ dX

В двумерном мире де Ситтера имеется три векторных поля Киллинга вида (4) с компонентами, равными

$$Z_{(PQ)}^C = x_P \delta_Q^C - x_Q \delta_P^C. \quad (45)$$

Им соответствуют изометрические операторы

$$K_{(PQ)} = -i\hbar \left(m_{PQ} + \frac{1}{2} H_P H_Q \right) \quad (46)$$

и вторично квантованные операторы, представленные интегралами

$$M_{(PQ)} = \frac{-1}{r} \int \bar{\Xi} X dX K_{(PQ)} \Xi \quad (47)$$

по кривой Σ . Последние определяются интегралами по кривой Σ от выражений вида (42), в которых компоненты J^A заменяются на свертки $T_C^A Z_{(PQ)}^C$ тензора (40) с вектором (45). Задавая Σ уравнением $\theta = 0$, получаем

$$M_{(PQ)} = -i\hbar r \int_0^{2\pi} \Xi^* (m_{pq} + H_P H_Q) \Xi d\varphi. \quad (48)$$

6. АНТИКОММУТАТОР СПИНОРНОГО ПОЛЯ В БАЗИСЕ dX

В третьей части данного обзора получен антикоммутатор поля, подчиненного уравнению (17). Для этого потребовалось решить задачу Коши. Последняя была решена методом Римана, и антикоммутатор выразился через функцию Римана для уравнения (17). Там же была в явном виде найдена функция Римана для уравнения (17). Если полученный там антикоммутатор преобразовать к базису dX , то он выразится в любом из следующих двух видов:

$$\begin{aligned} \{\bar{\Xi}(x) \Xi(y)\} &= r^{-2}(M + 1 + im) D^{(+)}(x, y) Y = \\ &= r^{-2} \chi D^{(-)}(x, y) (M + 1 - im), \end{aligned} \quad (49)$$

где $\{\Xi(x) \bar{\Xi}(y)\}$ — матрица, элементы которой равны $\Xi_p(x) \bar{\Xi}_q(y) + \bar{\Xi}_q(y) \Xi_p(x)$. Значки x и y под M означают, что оператор M отнесен, соответственно, к точкам x и y . Матрица Y равна $Y = y^A Y_A$.

Функция $D^{(+)}$ равна

$$D^{(+)}(x, y) = \varepsilon(x^0 - y^0) \frac{1 + \varepsilon(\Lambda)}{2} F\left(-im, 1 + im; \frac{\Lambda}{4}\right), \quad (50)$$

где $\Lambda = r^{-2}(x^A - y^A)(x_A - y_A)$, $\varepsilon(\Lambda)$ равно знаку Λ . Функция $D^{(+)}$ подчиняется уравнению (12) при $n = 1$.

Функция $D^{(-)}$ получается из $D^{(+)}$ заменой m на $-m$. Она подчиняется уравнению (13) при $n = 1$.

Антикоммутатор (49) подчиняется уравнению

$$(M - im) \{\Xi(x) \bar{\Xi}(y)\} = 0. \quad (51)$$

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ В БАЗИСЕ dX

Антикоммутатор (49) можно получить непосредственно, решая задачу Коши для уравнения (1). При $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{\partial}{\partial \theta}, & m_1 &= -\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ m_2 &= -\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (52)$$

Отсюда получаем

$$m_A m^A = \cos^2 \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (53)$$

Согласно (12) спинорное поле в данном случае подчиняется уравнению

$$\cos^2 \theta \left(\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \varphi^2} \right) = im(1 + im) \Xi. \quad (54)$$

Пусть данные Коши относятся к кривой Σ , разделяющей гиперboloид (23) на две части. Ее можно задать уравнением $\theta = f(\varphi)$, причем $f(2\pi) = f(0)$ и $-1 < \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} < 1$. Решение задачи Коши для уравнения (54) выражается через функцию $D^{(+)}$:

$$\Xi(x) = \int_0^{2\pi} [D^{(+)}(x, y) \Xi_{(o)}(y) - D_{(o)}^{(+)}(x, y) \Xi(y)] \Big|_{\tilde{\theta} = f(\tilde{\varphi})} d\tilde{\varphi}, \quad (55)$$

где (o) — знак нормальной производной к кривой Σ . Например,

$$\Xi_{(o)}(y) = \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{df(\tilde{\varphi})}{d\tilde{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \right] \Xi(y). \quad (56)$$

Взяв ее из уравнения (1) при $n = 1$, можно получить для этого уравнения решение задачи Коши [56] в виде (15), где

$$\Phi = \frac{1}{r} \int D^{(+)}(x, y) dY \Xi(y), \quad (57)$$

$$dY = \left[\frac{\partial Y}{\partial \tilde{\varphi}} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{df(\tilde{\varphi})}{d\tilde{\varphi}} \right] d\tilde{\varphi} \quad (58)$$

— элементарное смещение матрицы Y вдоль кривой Σ .

Полученное решение можно записать через антикоммутиатор (49):

$$\Xi(x) = \int \{ \Xi(x) \bar{\Xi}(y) \} \frac{Y}{r} dY \Xi(y). \quad (59)$$

Решение задачи Коши для сопряженного уравнения Дирака можно записать через тот же антикоммутиатор (49):

$$\bar{\Xi}(x) = \int \bar{\Xi}(y) \frac{Y}{r} dY \{ \Xi(x) \bar{\Xi}(y) \}. \quad (60)$$

Предложенный метод решения задачи Коши легко обобщается на $2n$ -мерный случай.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь рассмотрены далеко не все задачи о спинорном поле в римановом мире. Например, осталась в стороне построенная в работах [37—39] квантовая теория спинорного поля в четырехмерном мире де Ситтера. Остался в стороне общий метод разделения переменных в уравнении ДФИ. По-видимому, точное, а не приближенное квантование спинорного поля возможно как раз в тех мирах, где допустимо разделение переменных. Не рассмотрено здесь и взаимодействие спинорного поля с другими полями и, в первую очередь, с электромагнитным полем. Рассмотрение всех таких вопросов далеко выходит за рамки одного обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блохинцев Д.И. — Флуктуации пространственно-временной метрики. Тезисы 1-й советской гравитационной конференции. М., 1961.
2. Блохинцев Д.И. — Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
3. Markov M.A. — Prog. Theor. Phys. Suppl. Extra Number. 1965, p.85—95. Commemoration Issue for 30-th Anniversary of Meson Theory by Dr. H.Yukawa.
4. Марков М.А. — ЖЭТФ, 1966, 51, №9, с.878.
5. Марков М.А. — В сб.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев: Наукова думка, 1967, с.671.
6. Марков М.А. — Проблемы теоретической физики (сб., посвященный Н.Н.Боголюбому в связи с его шестидесятилетием). М.: Наука, 1969.
7. Марков М.А. — В сб.: Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля. ОИЯИ 27-41, Дубна, 1970.
8. Тамм И.Е. — Природа, 1968, №11, с.17.
9. Станюкович К.П. — Гравитационное поле и элементарные частицы. М.: Наука, 1965.
10. Станюкович К.П. — ДАН СССР, 1970, т.190, №2, с.309.
11. Уилер Д. — Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: ИЛ, 1962.
12. Utiyama R. — Progr. Theor. Phys., 1965, vol.33, No.3, p.524.
13. Dirac P.A.M. — Proc. Roy. Soc., 1958, vol.A246, p.326. (Русский перевод в сб.: Новейшие проблемы гравитации. М.: ИЛ, 1961, с.128).
14. Dirac P.A.M. — Proc. Roy. Soc., 1958, vol.A246, p.333. (Русский перевод в сб.: [13], с.139).
15. Gupta S. — Proc. Roy. Soc., 1952, vol.A26, p.161. (Русский перевод в сб.: [13], с.326).
16. Gupta S. — Proc. Roy. Soc., 1952, vol.A26, p.601. (Русский перевод в сб.: [13], с.341).
17. Bergman P., Komar A. — Preprint. (Русский перевод в сб.: [13], с.361).
18. Brill D., Wheeler J. — Rev. Mod. Phys., 1957, vol.29, p.465. (Русский перевод в сб.: [13], с.381).
19. Паули В. — Теория относительности. М.: Наука, 1983.
20. Черников Н.А. — ЭЧАЯ, 1987, т.18, вып.5, с.1000.

21. Chernikov N.A., Tagirov E.A. — Ann. Inst. Henri Poincare. 1968, vol.IX, No.2, p.109. Section A: Physique theorique.
22. Penrose R. — In: Relativity, Groups and Topology. Ed. by C.De Witt, New York — London, 1964, p.565. Русский перевод в сб.: Гравитация и топология. Мир.: 1966, с.152.
23. Fock V., Ivanenko D. — Zs. f. Phys., 1928, vol.54, p.798.
24. Fock V., Ivanenko D. — C.R., Paris., 1929, vol.188, p.1470.
25. Fock V., Ivanenko D. — Zs. f. Phys., 1929, vol.60, p.648.
26. Fock V. — Zs. f. Phys., 1929, vol.57, p.261.
27. Фок В. — Журнал Русского физ.-хим. общ., 1930, т.62, с.133.
28. Фок В.А. — В сб.: А.П.Котельников, В.А.Фок. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950, с.59.
29. Соколов А.А., Иваненко Д.Д. — Квантовая теория поля. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.
30. Ivanenko D. — Gravitation and Unified Picture of Matter. Attid. Convegno. s. Relativity, Firenze, 1965.
31. Chernikov N.A., Shavokhina N.S. — Acta Physica Polonica, 1989, vol.B20, No.2, p.177.
32. Карган Э. — Теория спиноров. (Перевод с французского под редакцией профессора П.А.Широкова). М.: ИЛ, 1947.
33. Родичев В.И. — ЖЭТФ, 1961, т.40, вып.5, с.1469.
34. Levashev A. — Ann. Phys. (DDR), 1966, vol.18, No.5—6, p.209.
35. Иваницкая О.С. — Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск: Наука и техника, 1969, с.1.
36. Dirac P.A.M. — Ann. of Mathematics, 1935, vol.36, No.3, p.657.
37. Шавохина Н.С. — ТМФ, 1972, т.10, №3, с.412.
38. Черников Н.А., Шавохина Н.С. — ТМФ, 1973, т.15, №1, с.91.
39. Черников Н.А., Шавохина Н.С. — ТМФ, 1973, т.16, №1, с.77.
40. Witten E. — Commun Math. Phys., 1981, vol.80, p.381.
41. Багров В.Г., Обухов В.В. — В сб.: Труды V семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны», ОИЯИ, P2-92-559, Дубна, 1993, с.182.
42. Алексеев Г.А., Хлебников В.И. — Формализм Ньюмена-Пенроуза и его применение в общей теории относительности. ЭЧАЯ, 1978, т.9, вып.5, с.790.
43. Пенроуз Р., Риндлер В. — Спиноры и пространство-время. М.: Мир, т.1, 1987; т.2, 1988.
44. Dirac P.A.M. — The Quantum Theory of the Electron. Proc. Roy. Soc. of London, (A), 1928, vol.117, p.610.
45. Соколов А.А., Тернов И.М. — Релятивистский электрон. М.: Наука, 1974.
46. Фок В.А. — Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.
47. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. — Квантовая электродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1969.
48. Паули В. — Релятивистская теория элементарных частиц. М.: ИЛ, 1947.
49. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. 3-е изд. М.: Наука, 1976.
50. V.L.Van der Waerden — Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. 1932. (Ван дер Варден. Метод теории групп в квантовой механике. Харьков: ОНТИ, 1938).

51. Лаптев Б.Л. — П.А.Широков (1895—1944) — Избранные работы по геометрии. Казань: изд-во Казанского университета, 1966, с.5.
52. Clifford W.K. — Mathematical papers. London: Macmillan&Co, 1882, p.267.
53. Черников Н.А., Шавохина Н.С. — В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М.: Атомиздат, 1974, вып.5, с.154.
54. Черников Н.А., Шавохина Н.С. — ТМФ, 1974, т.18, №3, с.310.
55. Шавохина Н.С. — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: изд-во Казанского университета, 1970, №7, с.139.
56. Шавохина Н.С. — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: изд-во Казанского университета, 1970, №7, с.147.
57. Шавохина Н.С. — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: изд-во Казанского университета. 1971, №8, с.142.
58. Виленкин Н.Я. — Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
59. Боголюбов Н.Н. — О новом методе в теории сверхпроводимости. ЖЭТФ, 1958, т.34, вып.1, с.58.
60. Шавохина Н.С. — В сб.: Гравитация и теория относительности. Казань: изд-во Казанского университета. 1970, №9, с.82.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 517957

Интегрируемые системы. Лезнов А.Н. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.5, с.1161.

Предложен алгебраический подход к построению солитонных решений интегрируемых нелинейных систем, основанный на исследовании алгебр их симметрии. Его универсальность продемонстрирована на примерах явных решений многих известных интегрируемых уравнений и их иерархий в $(1+1)$ и $(2+1)$ измерениях.

Библиогр.: 57.

УДК 539.12.01

Баба-рассеяние на малые углы. Арбузов А.Б., Кураев Э.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.5, с.1247.

Процесс упругого электрон-позитронного рассеяния на малые углы используется на установке LEP I для прецизионного определения светимости. Требование минимизации неопределенностей в теоретически рассчитываемом сечении до уровня десятой доли процента приводит к необходимости учета радиационных поправок вплоть до третьего порядка теории возмущений. Обзор посвящен систематическому изложению аналитического подхода в решении этой задачи. При рассмотрении виртуальных поправок используется обобщенное эйконоальное представление для амплитуды и известные выражения для формфакторов электрона в одно- и двухпетлевом приближении. Использовано обобщение методов квазирезальных электронов и эквивалентных фотонов для вычисления вкладов в сечение от процессов одно- и двукратного тормозного излучения и процесса образования пар. Вычисления вкладов высших порядков проведены с помощью аппарата ренормгруппы. Получены явные выражения для ведущих и неведущих вкладов в логарифмическом приближении. Результаты иллюстрируются численными расчетами. Дан краткий обзор других подходов к решению этой задачи, основанных на использовании приближенных формул и методов Монте-Карло.

Табл.4. Ил.4. Библиогр.: 27.

УДК 539.17

Рождение дилептонов и фотонов в высокоэнергетических столкновениях тяжелых ионов. Емельянов В., Хаглин К. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.5 с.1321.

Обсуждается проблема образования нагретого ядерного вещества, в частности, кварк-глюонной плазмы, в столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ионов. Рассмотрены возможные сценарии эволюции ядерного вещества. Показано, что дилептоны и фотоны, в отличие от адронов, несут информацию о начальной стадии в столкновениях тяжелых ионов. Рассмотрены современные методы расчетов спектров фотонов и лептонных пар и возможные сигналы образования термализованного ядерного вещества в столкновениях тяжелых ионов.

Табл. 2. Ил.38. Библиогр.: 146.

УДК 539.12.01

Калибровочные условия и калибровочные преобразования. Прохоров Л.В. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.5, с.1399.

В обзоре обсуждаются принципиальные вопросы устранения произвола в калибровочных теориях. Подчеркивается роль расширенной по Дираку калибровочной

группы и важность требования лишь слабой калибровочной инвариантности физических величин. В квантовых теориях отмечается принципиальное различие между динамическими калибровками. Главным образом на примере электродинамики наиболее популярные калибровки анализируются с точки зрения роли, отводимой физическим степеням свободы. Выявлена ключевая роль калибровки Фока. Подробно рассмотрены простейшие квантово-механические модели, иллюстрирующие некоторые утверждения, касающиеся полевых систем. Обсуждаются различные типы калибровочных преобразований и их физический смысл, подчеркнута принципиальная разница между локальными и глобальными преобразованиями.

Ил.3. Библиогр.: 148.

УДК 531.145

Квантовая теория спинорного поля в четырехмерном римановом мире. *Шавахина Н.С.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1996, том 27, вып.5 с.1469.

В обзоре детально рассмотрено спинорное поле в четырехмерном римановом мире событий, подчиненное уравнению Дирака — Фока — Иваненко. Изложена история открытия спиноров и перенесения этого объекта в риманов мир. Сформулированы принципы квантования такого поля, в частном случае мира Пуанкаре — Минковского, эквивалентные каноническим правилам квантования. Введение новых принципов квантования позволило учесть влияние гравитационного поля на квантованное спинорное поле. Новые принципы апробированы на примере мира де Ситтера. Рассмотрение спинорного поля в мире де Ситтера привело к методу инвариантного ящика, в котором группа Пуанкаре четырехмерного мира заменяется на группу Лоренца пятимерного мира. Наряду с четырехмерным рассмотрен двумерный мир событий. Простота двумерного мира позволила более выпукло изложить суть дела. Приведено оригинальное развитие метода Римана в теории дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Ил.2. Библиогр.: 60.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Лезнов А.Н.</i> Интегрируемые системы	1161
<i>Арбузов А.Б., Кураев Э.А.</i> Баба-рассеяние на малые углы	1247
<i>Емельянов В., Хаглин К.</i> Рождение дилептонов и фотонов в высокоэнергетических столкновениях тяжелых ионов	1321
<i>Прохоров Л.В.</i> Калибровочные условия и калибровочные преобразования	1399
<i>Шавохина Н.С.</i> Квантовая теория спинорного поля в четырехмерном римановом мире	1469

CONTENTS

<i>Leznov A.N.</i> Integrable Systems	1161
<i>Arbuzov A.B., Kuraev E.A.</i> Small-Angle Bhabha Scattering	1247
<i>Emel'yanov V., Haglin K.</i> Dilepton and Photon Production in High-Energy Heavy-Ion Collisions	1321
<i>Prokhorov L.V.</i> Gauge Conditions and Gauge Transformations	1399
<i>Shavokhina N.S.</i> Quantum Theory of Spinor Field in Four-Dimensional Riemannian Space-Time	1469

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения \subscript , верхние — знаком повышения \superscript ; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя \exp , дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (\underline{S} и \overline{s} , \underline{C} и \overline{c}). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы \underline{O} и $\overline{0}$ отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\underline{\quad}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. Лезнов А.Н., Савельев М.В. — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. Годен М. — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. Turbinger A.V. — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. Ушверидзе А.Г. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. Endo I., Kasai S., Harada M. et al. — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректурa с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**
Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**
Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 29.04.96. Подписано в печать 3.09.96. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 23,6. Уч.-изд.л. 28,23.
Тираж 500. Заказ 49338. Цена 4500 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1996. Том 27. Вып.5. 1157—1538.