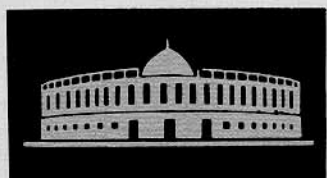


ISSN 0367-2026

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ



ЧАСТИЦ

И АТОМНОГО

ЯДРА

В
Ы
П
У
С
К

1997 том 28 выпуск 3



Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ,

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

В.Г.СОЛОВЬЕВ

(зам. главного редактора),

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редактор **Е.К.Аксенова**, тел. (09621) 65-165

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 28

ВЫПУСК 3

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1997

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.28

PART 3

Six issues per year

DUBNA 1997

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ И КВАЗИКЛАССИКА В БОЗОННЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

М.В.Либанов, В.А.Рубаков, С.В.Троицкий

Институт ядерных исследований РАН, Москва

Обсуждаются вопросы, связанные с процессами многочастичного рождения в модельных скалярных теориях. При числе излучаемых частиц, сравнимом с обратной величиной константы связи, обычная теория возмущений неприменима. Рассматривается возможность применения квазиклассических методов для вычисления многочастичных сечений с учетом всех существенных петлевых поправок.

We discuss the problems of multiparticle production in model scalar theories. When multiplicities are of order of inverse coupling constant, usual perturbation theory breaks down. We consider a possibility to apply semiclassical methods to calculation of multiparticle cross sections when all essential loop corrections are taken into account.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительный интерес вызывает комплекс вопросов, связанных с многочастичными процессами в бозонных теориях поля со слабой связью. Это вызвано, в первую очередь, тем, что при большом числе n участвующих в том или ином процессе бозонов в теории возникает большой параметр. Если величина n сравнима с обратной константой связи λ^{-1} , то обычная теория возмущений по λ неприменима. Для анализа многочастичных процессов необходимо разработать адекватный способ их описания, не связанный с теорией возмущений.

Первоначально интерес к многочастичным процессам был связан с вычислениями в инстантонном секторе, где была продемонстрирована возможность существенного ослабления подавления сечений электрослабых процессов, нарушающих барионное и лептонное число, при наличии большого числа бозонов в конечном состоянии [1,2] (обзор результатов можно найти в работах [3—6]). Затем аналогичные результаты были получены и в топологически тривиальном секторе; на них мы в дальнейшем и оста-

новимся. Уже наивная комбинаторная оценка показывает, что благодаря симметричному фактору амплитуды процессов с n бозонами в конечном состоянии пропорциональны $n!$, что при $n \sim 1/\lambda$ значительно превосходит подавление, связанное с малостью константы связи ($\sim \lambda^{n/2}$ для древесных амплитуд). Более детальный анализ диаграмм [7] и производящих функций [8] для древесных амплитуд в модели скалярного поля с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \quad (1)$$

(которая в основном и будет рассматриваться в дальнейшем) показал, что возможные сокращения между отдельными группами диаграмм не должны приводить к подавлению роста $\sim n! \lambda^{n/2}$ в древесном приближении. Древесные амплитуды процессов $1 \rightarrow n$ в модели (1) были найдены точно при специально выбранной кинематике; наиболее просто анализируются: случай, когда все частицы виртуальные и обладают нулевыми 4-импульсами [9], и физически более интересный случай рождения n реальных частиц на пороге реакции, то есть с 4-импульсами $(m, \mathbf{0})$, причем в начальном состоянии имеется одна виртуальная частица с 4-импульсом $(nm, \mathbf{0})$ [9—11]. Аналогичные результаты для древесных амплитуд были получены в ряде других скалярных моделей [12—14] и при несколько иной кинематике [15].

Эти вычисления (подробнее см. разд.2) подтверждают справедливость приведенных выше оценок для амплитуд и, как следствие, указывают на факториальный рост сечений процессов $1 \rightarrow n$ вблизи порога. Действительно, при росте амплитуд $A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \sim n! \lambda^{n/2}$ в предположении, что амплитуды не очень быстро уменьшаются при удалении от порога, древесное сечение вблизи порога можно оценить как

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \sim \frac{1}{n!} |A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}|^2 \times \text{фазовый объем} \sim n! \lambda^n \varepsilon^n, \quad (2)$$

где мы ввели параметр, характеризующий отклонение от порога, среднюю кинетическую энергию конечных частиц

$$\varepsilon = (E - nm)/n, \quad (3)$$

E — энергия налетающей частицы. Предположение о медленном убывании амплитуд при удалении от порога имеет веские основания; так, в работе [16] была получена нижняя оценка для древесных амплитуд $1 \rightarrow n$, которая указывает на сохранение факториального роста при любых импульсах (подробнее см. п.2.1.3).

Подчеркнем, что оценка (2) получается в древесном приближении, то есть в низшем нетривиальном порядке теории возмущений. Этим она существенно отличается от известных оценок [17] высших порядков теории возмущений для функций Грина с небольшим числом концов. Если последние связаны с асимптотическим характером ряда теории возмущений для малочастичных функций Грина, но не препятствуют использованию теории возмущений для их вычисления — пусть в принципе с ограниченной точностью — в теориях со слабой связью, то оценка (2) указывает на полную неприменимость обычной теории возмущений при $n \geq \lambda^{-1}$, поскольку поведение (2) входило бы в явное противоречие с унитарностью.

В действительности соображения, основанные на унитарности и обычной теории возмущений для малочастичных функций Грина (см., напр., [18—20]), ставят весьма жесткие ограничения на поведение многочастичных сечений. Рассмотрим представление Челлена — Лемана для двухточечной функции Грина в скалярной теории

$$\langle \int T\phi(x) \phi(0) e^{iqx} dx \rangle = \int_0^\infty ds \frac{\rho(s)}{s - q^2}, \quad (4)$$

где

$$\rho(s) = \sum_n |\langle 0 | \phi(0) | n \rangle|^2 \delta(\sqrt{s} - \sum_i p_i^0) = \sum_n \sigma_{1 \rightarrow n}(s).$$

Будем вычислять обе части (4) по теории возмущений, причем импульс q считаем евклидовым и небольшим (скажем, $q^2 \sim -m^2$). Стандартное предположение теории возмущений состоит в том, что двухточечная функция Грина, стоящая в левой части, представима в виде асимптотического ряда по λ . Конечное число его членов, $k \ll 1/\lambda$, вычисленное по обычной теории возмущений, должно давать хорошее приближение для функции Грина. В правой части (4) этим k членам соответствуют члены из разложения $\rho(s)$, содержащие сечения $\sigma_{1 \rightarrow n}$ при $n \leq k$. Оставшаяся часть, связанная с сечениями процессов $1 \rightarrow n$ с $n > k$, включающая многочастичные амплитуды ($n \sim 1/\lambda$), должна давать небольшой вклад:

$$\sum_{n=k+1}^\infty \int ds \frac{\sigma_{1 \rightarrow n}(s)}{s - q^2} < \text{const} \cdot \lambda^{k+1}. \quad (5)$$

Таким образом, многочастичные ($n \sim 1/\lambda$) сечения при не слишком больших энергиях ($\ln s \ll \lambda^{-1}$) должны быть в действительности подавлены сильнее, чем λ^k с произвольным k . Нарушение соотношения (5) было

бы катастрофой для обычной теории возмущений для функции Грина с небольшим числом концов, поскольку учитываемый обычной теорией возмущений для точного пропагатора вклад многочастичных промежуточных состояний в дисперсионный интеграл (4) проявлялся бы в некотором конечном порядке по λ . Подчеркнем, что древесные сечения (2) не удовлетворяют условию (5), так что поведение истинных многочастичных сечений должно быть кардинально иным.

Представление Челлена — Лемана (4) и приведенные аргументы позволяют получить оценку многочастичных сечений рассеяния (по крайней мере, ограничить их сверху из условия унитарности). Зная значение амплитуды на пороге, можно оценить (см., например, [21]), как быстро должна уменьшаться амплитуда при удалении с порога, чтобы после интегрирования по фазовому объему получилось не противоречащее условию унитарности сечение. Для древесных амплитуд такая возможность, однако, исключается оценкой, приведенной в [16] (см. п.2.1.3), что позволяет сделать вывод о принципиальной важности петлевых вкладов. Другой способ оценить многочастичные сечения с помощью (4) предложен в [22]. Двухточечная функция Грина в левой части (4) может быть в ряде случаев вычислена непerturbативным образом — на решетке. Сравнение результата с вычисленной по теории возмущений суммой первых нескольких членов разложения по λ позволяет оценить остаток (5), связанный с вкладом многочастичных промежуточных состояний. Реализованный для скалярной модели в $(1+1)$ -мерном пространстве [22], данный подход указывает, что с хорошей степенью точности теория возмущений применима для вычисления скалярного пропагатора в двумерном пространстве-времени, то есть многочастичные сечения $\sigma_1 \rightarrow n$ в данной модели невелики. Хотя точная двухточечная функция Грина известна недостаточно хорошо из решеточных вычислений и неясно, обобщается ли данный результат на другие модели, в частности, на четырехмерные, он представляет серьезное указание на малость многочастичных сечений.

В связи с приведенными результатами возникает целый ряд вопросов, частичному ответу на которые посвящен настоящий обзор. Один из этих вопросов носит скорее технический характер и заключается в изучении поведения *древесных* многочастичных сечений вне порога реакций. Точные результаты теории возмущений для древесных многочастичных амплитуд получены, главным образом, на кинематическом пороге или вблизи него, что связано со значительным упрощением задачи при нулевых пространственных импульсах. Ясно, что данная кинематика является далеко не общей; нулевой фазовый объем, соответствующий порогу, не позволяет надежно оценить вклад данной конфигурации в полное сечение. Кроме того, точно на пороге возникают специфические расходимости в диаграммах; для про-

цессов $n_{in} \rightarrow n$, $n_{in} \geq 2$, они имеют отношение к существованию несвязанных диаграмм [23] (см. также [24]). Таким образом, первая задача состоит в отыскании надежного способа вычисления многочастичных древесных сечений во всем фазовом объеме, то есть при любых кинетических энергиях конечных частиц. Теория возмущений непригодна для решения этой задачи даже в древесном приближении из-за непреодолимых технических сложностей. Мы увидим, что адекватным для решения этой задачи является квазиклассический подход, использующий сингулярные решения уравнений поля в евклидовом пространстве.

Более важной — и более сложной — задачей является изучение многочастичных процессов с полным учетом петлевых вкладов. Как мы обсуждали выше, древесная оценка многочастичных сечений противоречит унитарности при больших n ($n \sim 1/\lambda$). Поэтому следует ожидать, что петлевые вклады не малы по сравнению с древесными, и их учет приводит к качественному изменению поведения сечений при больших n . Это подтверждается и прямым вычислением однопетлевых вкладов в амплитуду на пороге реакции [29,30,15]: при достаточно больших n этот вклад превышает древесную амплитуду, то есть ряд обычной теории возмущений взрывается.

На первый взгляд, задача вычисления многочастичных сечений во всех порядках теории возмущений кажется безнадежной. Тем не менее имеется ряд наблюдений, указывающих на возможность непerturbативного анализа этой проблемы. Их суть вкратце состоит в следующем.

Рассмотрим в системе центра масс сечение $\sigma_{1 \rightarrow n}$ рождения n реальных частиц одной налетающей виртуальной высокоэнергетической частицей (с энергией E). Проинтегрированное по фазовому объему, оно не зависит от деталей распределения импульсов между конечными частицами и определяется двумя параметрами — числом частиц n и энергией E . Результаты пертурбативных вычислений указывают на следующую функциональную форму выражения для сечения в многочастичном пределе [25] ($\lambda \rightarrow 0$, λl и ϵ фиксированы):

$$\sigma_{1 \rightarrow n} \sim \exp \left(\frac{1}{\lambda} F(\lambda l, \epsilon) \right). \quad (6)$$

Заметим, что, поскольку ϵ фиксирована (то есть $E \sim 1/\lambda$), нас не будут интересовать аспекты, касающиеся перенормировки константы связи или тривиальности теории, так как они становятся существенными только при экспоненциально больших энергиях: $\lambda \ln \frac{E}{m} \sim 1$. Экспоненциальное поведение сечения, описываемое формулой (6), подсказывает возможный путь решения задачи о нахождении $\sigma_{1 \rightarrow n}$. Действительно, (6) имеет вид выра-

жения, полученного в результате некоторой квазиклассической процедуры. Такая процедура должна быть нетривиальной, так как в (6), помимо древесного приближения, существенным образом учитываются петлевые вклады с произвольным количеством петель. Здесь уместна аналогия с инстантонными процессами (см. [4]), где полное сечение при данной энергии (просуммированное по числу конечных частиц) также имеет квазиклассический вид, $\sigma \sim \exp\left(\frac{1}{\lambda} f(\epsilon)\right)$; соответствующая техника, учитывающая петлевые вклады, была разработана в [26] и применена для инстантонных процессов. Эта техника существенным образом использует классические решения уравнений движения с определенными граничными условиями. Возникающий в задаче о многочастичных процессах квазиклассический метод [27] имеет много общего с техникой инстантонных вычислений, хотя и отличается рядом усложнений, связанных с фиксированным числом частиц в конечном состоянии.

Следующая из условия унитарности оценка (5) в терминах (6) означает, что сечения должны быть экспоненциально подавлены, то есть для любых n и ϵ требуется, чтобы $F(\lambda\epsilon, \epsilon)$ была отрицательной. Это, однако, не исключает интересной возможности стремления $F \rightarrow -0$, то есть достижения унитарного предела, например, при больших $\lambda\epsilon$ или при $\epsilon \rightarrow \infty$. Квазиклассическое вычисление функции F может дать ответ, происходит ли это на самом деле.

В разд.2 мы приводим сводку основных результатов теории возмущений для многочастичных процессов, свидетельствующих в пользу гипотезы (6). В частности, кратко описываются специфические пертурбативные методы, используемые для описания процессов при большом числе частиц. Раздел 3 посвящен квазиклассическому вычислению древесных сечений при произвольном ϵ . В разд.4 приведен квазиклассический метод вычисления многочастичных амплитуд за пределами древесного приближения, и в рамках этого подхода воспроизведены некоторые результаты разд.2 и 3. В заключении подводятся итоги и формулируются нерешенные задачи. Интересное явление зануления амплитуд на пороге реакции обсуждается в приложении.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В настоящем разделе перечисляются результаты вычисления многочастичных амплитуд, связанные с прямым или косвенным суммированием диаграмм теории возмущений. Все они дают серьезные указания на справедливость формулы (6) и возможность применения квазиклассических методов для решения задачи о многочастичном рождении. Более того, уже при

пертурбативных вычислениях важную роль начинают играть решения классических уравнений поля, используемые как в древесном приближении, так и для учета петлевых вкладов.

2.1. Древесная диаграмматика

2.1.1. Древесные амплитуды на пороге. Рассмотрим процесс рождения n реальных скалярных частиц с нулевыми пространственными импульсами одной налетающей виртуальной частицей в модели с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (7)$$

Пространство-время будем считать $(d+1)$ -мерным. Древесная амплитуда такого процесса может быть вычислена прямым суммированием диаграмм [9] на основе следующего представления:

$$\text{---} \blacksquare n = \sum_{n_1, n_2, n_3 - \text{нечет}} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} \text{---} \begin{array}{l} \blacksquare n_1 \\ \blacksquare n_2 \\ \blacksquare n_3 \end{array}, \quad (8)$$

где прямоугольник с индексом n обозначает древесную амплитуду $1 \rightarrow n$, $A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}$, линии и вершины соответствуют пропагаторам и вершинам в обычной диаграммной технике (вылетающие, а следовательно, и все промежуточные частицы имеют нулевые пространственные импульсы). Этому диаграммному представлению соответствует рекуррентное соотношение для амплитуд:

$$\begin{aligned} & m^2(n^2 - 1) A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = \\ & = \lambda \sum_{n_1, n_2, n_3 - \text{нечет}} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} A_{1 \rightarrow n_1}^{\text{tree}} A_{1 \rightarrow n_2}^{\text{tree}} A_{1 \rightarrow n_3}^{\text{tree}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение этого функционального уравнения [9]

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = n! \left(\frac{\lambda}{8m^2} \right)^{(n-1)/2} \quad (10)$$

содержит, как и предсказывает оценка [7], множитель $n!$, который имеет комбинаторное происхождение, связанное с бозонным фактором симметрии. Решения подобных рекуррентных соотношений проще всего на-

ходить, используя технику производящих функций [28], с помощью которой, в частности, можно найти зависимость древесных амплитуд от энергии вблизи порога.

2.1.2. *Зависимость древесных амплитуд от энергии вблизи порога.* Пусть частицы в конечном состоянии имеют небольшие (нерелятивистские, $|\mathbf{p}_i| \ll 1$) импульсы $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ (здесь и далее мы будем работать в системе центра масс, так что исходная виртуальная частица вновь имеет нулевой пространственный импульс). Средняя кинетическая энергия вылетающих частиц равна

$$\varepsilon = \frac{1}{2mn} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^2.$$

Процессу многочастичного рождения на пороге соответствует $\varepsilon = 0$. При малых ε первая поправка к пороговой амплитуде (10), в силу симметрии относительно перестановок p_i и инвариантности относительно преобразований Галилея, пропорциональна кинетической энергии $n\varepsilon$:

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n) = A_{1 \rightarrow n} + \alpha(n) n\varepsilon + \dots \quad (11)$$

Рекуррентное соотношение, соответствующее диаграмме (8), теперь включает зависимость от p_i :

$$m^2(n^2(\varepsilon + 1)^2 - 1) A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n) = \lambda \sum_{n_1, n_2, n_3 - \text{нечет}} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} \times \\ \times \sum_p A_{1 \rightarrow n_1}^{\text{tree}}(p_1^{(1)}, \dots, p_{n_1}^{(1)}) A_{1 \rightarrow n_2}^{\text{tree}}(p_1^{(2)}, \dots, p_{n_2}^{(2)}) A_{1 \rightarrow n_3}^{\text{tree}}(p_1^{(3)}, \dots, p_{n_3}^{(3)}), \quad (12)$$

где сумма берется по всем возможным перестановкам $\mathcal{P}$ импульсов p_i .

Рассмотрим случай $\varepsilon \ll 1/n$. Используя разложение (11), находим рекуррентные соотношения (9) для $A_{1 \rightarrow n}$, а в линейном порядке по ε получаем из (12)

$$(n^2 - 1) \alpha(n) + 2n A_{1 \rightarrow n} = \\ = \frac{3\lambda}{m^2} \sum_{n_1 > 1, n_2, n_3 - \text{нечет}} \delta_{n, n_1 + n_2 + n_3} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} \frac{n_1 - 1}{n - 1} \alpha(n_1) A_{1 \rightarrow n_2} A_{1 \rightarrow n_3}. \quad (13)$$

С помощью производящих функций

$$A(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_{1 \rightarrow n} e^{n\tau}, \quad \alpha(\tau) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha(n)(n-1) e^{n\tau} \quad (14)$$

рекуррентные соотношения (9), (13) сводятся к дифференциальным уравнениям для $A(\tau)$ и $\alpha(\tau)$, решение которых после разложения по степеням e^τ приводит к ответу

$$A_{1 \rightarrow n}(p_1, \dots, p_n) = n! \left(\frac{\lambda}{8m^2} \right)^{(n-1)/2} \left(1 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6(n-1)} \right) n\varepsilon \right). \quad (15)$$

Данный результат справедлив при $n\varepsilon \ll 1$, однако он дает возможность вычислить амплитуду $A_{1 \rightarrow n}(p_1, \dots, p_n)$ и при любых $\varepsilon \ll 1$, то есть во всем нерелятивистском фазовом объеме. Действительно, подстановка

$$A_{1 \rightarrow n}(p_1, \dots, p_n) = n! \left(\frac{\lambda}{8m^2} \right)^{(n-1)/2} e^{A n \varepsilon} \quad (16)$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению (12) с точностью до $O(\varepsilon)$ (см. [25]), поэтому при $\varepsilon \ll 1$ амплитуда дается выражением (16), а значение A легко определить из сравнения с (15): $A = -5/6$. Отметим, что выражение (16) согласуется с общей функциональной структурой (6) в интересующем нас режиме ($\lambda \rightarrow 0$ при фиксированных λl и ε).

2.1.3. Оценка древесных амплитуд при произвольных импульсах. Прямой анализ древесных диаграмм позволяет оценить древесные амплитуды $1 \rightarrow n$ при произвольных импульсах вылетающих частиц из кинематических соотношений [16]. Пусть $\omega_{\max}$ — наибольшая из энергий отдельных конечных частиц. Выделим в древесной диаграмме подграф, начинающийся одной виртуальной линией и кончающийся k частицами (в качестве начальной виртуальной линии может быть взята любая из внутренних линий диаграммы). Пропагатор, соответствующий этой виртуальной линии, $(s_k - m^2)^{-1}$, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{\frac{9}{8} \omega_{\max}^2 (k^2 - 1)} < \frac{1}{k^2 \omega_{\max}^2 - m^2} \leq \frac{1}{s_k - m^2} \leq \frac{1}{m^2 (k^2 - 1)}. \quad (17)$$

Здесь использовано неравенство $k^2 \omega_{\max}^2 - m^2 < \frac{9}{8} \omega_{\max}^2 (k^2 - 1)$, которое справедливо при $k \geq 3$, что выполняется для подграфов теории ϕ^4 . Так как

неравенства (17) выполняются для всех пропагаторов диаграммы, имеем неравенство для амплитуд [16]:

$$|A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(\mathbf{p}_{\text{out}} = 0)|_{m^2 \rightarrow \frac{9}{8}\omega_{\text{max}}^2} < |A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(p_1, \dots, p_n)| \leq |A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(\mathbf{p}_{\text{out}} = 0)|. \quad (18)$$

Как выражение (16), так и неравенства (18) показывают, что древесные амплитуды имеют достаточно медленную зависимость от энергии вблизи порога реакции. Древесные сечения факториально растут с ростом n и нарушают ограничения, следующие из унитарности. График энергетической зависимости нижней границы для древесных сечений, получаемой из оценки (18), мы приведем в п.3.4 вместе с более точными оценками.

2.2. Использование классических решений и петлевые поправки

2.2.1. Древесные амплитуды на пороге. Хорошо известная связь древесного приближения в квантовой теории поля с решениями соответствующих классических задач привела к построению эффективного функционального метода пертурбативных вычислений многочастичных амплитуд. Первые оценки, указывающие на наличие факториального роста, были получены с помощью функционального метода в работе [8]; строгий формализм вычисления древесных амплитуд был развит в работе [11], где с его помощью был получен точный ответ (10).

Рассмотрим вновь процесс рождения n частиц с 4-импульсами $(m, \mathbf{0})$ одной начальной виртуальной частицей с импульсом $(nm, \mathbf{0})$. Редукционная формула Лемана — Симанчика — Циммермана для такого процесса может быть записана в виде

$$A_{1 \rightarrow n} = \lim_{\omega^2 \rightarrow m^2} \lim_{J_0 \rightarrow 0} (\omega^2 - m^2)^n \frac{\partial^n}{\partial J_0^n} \int d^4x e^{-inmt} \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_{J=J_0 \exp(i\omega t)},$$

где матричный элемент вычисляется в присутствии внешнего источника $J = J_0 e^{i\omega t}$. В древесном приближении матричный элемент $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle$ должен быть заменен его классическим значением, то есть решением классического уравнения поля

$$\partial^2 \phi + m^2 \phi + \lambda \phi^3 - J_0 e^{i\omega t} = 0. \quad (19)$$

В силу пороговой кинематики (все пространственные импульсы равны нулю), следует искать пространственно-однородные решения, зависящие только от времени. Одно из таких решений имеет следующую структуру:

$$\phi_0(t) = z(t) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(z(t))^k, \quad (20)$$

где

$$z(t) = z_0 e^{imt} \equiv \frac{J_0}{m^2 - \omega^2} e^{imt},$$

а коэффициенты c_k могут быть, в принципе, найдены по теории возмущений для уравнения (19). Пределы $\omega^2 \rightarrow m^2$ и $J_0 \rightarrow 0$ берутся одновременно, так что отношение z_0 остается конечным. При этом источник исчезает из уравнения поля, а разложение (20) начинает играть роль граничного условия, где z_0 — параметр.

Производная по источнику заменяется при этом производной по z с помощью тождества

$$e^{-imt}(m^2 - \omega^2) \frac{\partial}{\partial J_0} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Соответствующее решение однородного уравнения ϕ_0 было найдено явно [11]:

$$\phi_0(t) = \frac{z(t)}{1 - \frac{\lambda}{8m^2} z^2(t)}, \quad (21)$$

а древесная амплитуда на пороге имеет вид

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \phi_0(z(t)) \Big|_{z=0}. \quad (22)$$

Таким образом, классическое решение $\phi_0(t)$ является производящей функцией для древесных амплитуд при $\mathbf{p}_i = 0$ (ср. $A(\tau)$ из (14)*). Формула (22)

*Решение (21) было получено в работе [10] из рекуррентных соотношений для древесных графов независимо от [11].

с решением (21) воспроизводит древесный результат (10), однако ее легко обобщить, выйдя за пределы древесного приближения. В этом случае производящей функцией пороговых амплитуд будет являться матричный элемент $\langle 0|\phi|0\rangle$, вычисленный во внешнем классическом поле (21) с учетом петлевых поправок. Данный подход, в принципе, может быть обобщен на вычисление амплитуд при произвольных импульсах, но при этом уравнения становятся четырехмерными, и решения их должны зависеть не от одного функционального параметра $z(t)$, а от $3n$ параметров, соответствующих импульсам конечных частиц, что делает нахождение решения нереальным с технической точки зрения.

Перейдем теперь к учету петлевых поправок.

2.2.2. Ведущие по $1/N$ петлевые поправки в $O(N)$ -модели. Учет петлевых поправок к амплитудам $1 \rightarrow n$ на пороге реакции возможен различными способами. Либо вычисляются квантовые поправки к матричному элементу $\langle 0|\phi|0\rangle$ [29,30,25], который является производящей функцией амплитуд, либо та же производящая функция получается из анализа диаграмм и рекуррентных соотношений [15] (оба эти способа применимы, вообще говоря, к любым моделям; на первом из них мы остановимся позднее). Существует и третий способ, применимый только в моделях с внутренней симметрией типа $O(N)$. Он позволяет учесть ведущие петлевые поправки в пределе $N \rightarrow \infty$ при фиксированных λ и n [31—33]. Остановимся кратко на результатах [31,32] для $O(N)$ -модели с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^b)^2 - \frac{1}{2} m^2 (\phi^b)^2 - \frac{1}{4} \lambda ((\phi^b)^2)^2, \quad b = 1, \dots, N.$$

Замкнутая система уравнений получается для двух производящих функций, генерирующих амплитуды $1 \rightarrow n$ и $2 \rightarrow n$, на пороге, то есть когда все конечные частицы покоятся (в данной модели такие амплитуды имеют, соответственно, $(n+1)$ и $(n+2)$ групповых $O(N)$ -индексов). Система уравнений может быть получена как из рекуррентных соотношений для диаграмм [31], так и функциональными методами, с помощью уравнений Швингера — Дайсона [32]. Приведем здесь только результат; весьма интересные детали вывода и решения уравнений подробно описаны в [31,32]. Оказывается, что учет ведущих по $1/N$ поправок приводит лишь к перенормировке массы и константы связи в древесном выражении:

$$A_{1 \rightarrow n}^{(N)} \sim n! \left(\frac{\bar{\lambda}}{8m_R^2} \right)^{(n-1)/2}$$

(здесь мы опустили множители, содержащие групповые индексы), где

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_R}{1 + N \frac{\lambda_R}{8\pi^2}}.$$

Перенормированные параметры m_R и λ_R связаны с «голыми» соотношениями

$$m^2 = m_R^2 - \frac{\lambda N}{4\pi^2} \int_{m_R^2} d\omega \sqrt{\omega^2 - m_R^2},$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_R} - \frac{N}{8\pi^2} \int_{m_R^2} d\omega \frac{\sqrt{\omega^2 - m_R^2}}{\omega^2}.$$

Иными словами, амплитуда имеет вид

$$A_{1 \rightarrow n}^{(N)} \sim n! \left(\frac{\lambda}{8m^2(1 + c\lambda N)} \right)^{(n-1)/2}, \quad (23)$$

где постоянная c зависит от схемы перенормировки. Данные вычисления были обобщены и на другие модели [33], причем учет ведущих по $1/N$ поправок там также сводится к перенормировке параметров. Особенностью рассматриваемого режима является то, что $N \rightarrow \infty$ при фиксированном n (иначе, $\lambda \rightarrow 0$, λN и n фиксированы), что отличается от режима $\lambda \rightarrow 0$ с фиксированным λ , когда сечения имеют квазиклассическую форму (6). Два режима совпадают лишь при малых $n\lambda \ll 1$, $N\lambda \ll 1$, при этом результат (23) не противоречит формуле (6).

2.2.3. Однопетлевая поправка. Для нахождения однопетлевой поправки к амплитуде $1 \rightarrow n$ в теории (7) на пороге удобно использовать формулу

$$A_n = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \langle 0 | \phi | 0 \rangle \quad (24)$$

(см. выше), причем матричный элемент в однопетлевом приближении удобно вычислять после викового поворота в евклидово пространство. В рассматриваемой модели имеется один размерный параметр m , поэтому в промежуточных вычислениях можно положить $m = 1$, восстановив степени m в окончательном ответе из размерных соображений.

Введем евклидово время

$$\tau = it + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda}{8} + \ln z_0 + i \frac{\pi}{2},$$

при этом классическое решение (21) запишется в виде

$$\phi_0(\tau) = -i \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau}. \quad (25)$$

Представим оператор ϕ следующим образом:

$$\phi = \phi_0 + \tilde{\phi},$$

где $\tilde{\phi}$ соответствует квантовым поправкам. Тогда $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \phi_0 + \langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle$, и для вычисления последнего матричного элемента можно воспользоваться диаграммной техникой. Запишем евклидов лагранжиан для $\tilde{\phi}$:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2} (1 + 3\lambda\phi_0^2) \tilde{\phi}^2 + \lambda\phi_0 \tilde{\phi}^3 + \frac{\lambda}{4} \tilde{\phi}^4.$$

Соответствующие правила Фейнмана содержат два типа вершин: тройную с множителем $(-6\lambda\phi_0)$ и четверную с множителем (-6λ) ; пропагатор $D(x, x')$ должен быть вычислен во внешнем поле ϕ_0 :

$$\hat{O}D(x, x') \equiv (-\partial_x^2 + 1 + 3\lambda\phi_0^2) D(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (26)$$

Точное выражение для пропагатора было найдено в работах [29,15]. В смешанном импульсно-временном представлении

$$D(x, x') = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} D(\tau, \tau'; \mathbf{p})$$

($x = (\tau, \mathbf{x})$, $x' = (\tau', \mathbf{x}')$) он выглядит следующим образом:

$$D(\tau, \tau'; \mathbf{p}) = \frac{1}{W_{\mathbf{p}}} (f_1^\omega(\tau) f_2^\omega(\tau') \theta(\tau' - \tau) + f_2^\omega(\tau) f_1^\omega(\tau') \theta(\tau - \tau')), \quad (27)$$

где $f_i^\omega(\tau)$, $i = 1, 2$ — два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения

$$\left(-\partial_\tau^2 + \omega^2 - \frac{6}{\operatorname{ch}^2 \tau} \right) f(\tau) = 0, \\ \omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + 1}. \quad (28)$$

Уравнение (28) имеет точное решение

$$f_1^\omega(\tau) = e^{\omega\tau} \left(\omega^2 - 3\omega \operatorname{th} \tau + 2 - \frac{3}{\operatorname{ch}^2 \tau} \right),$$

$$f_2^\omega(\tau) = f_1^{-\omega}(\tau).$$

Пара решений f_1^ω, f_2^ω подобрана так, что

$$f_1^\omega(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow -\infty, \quad f_2^\omega(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

В (27) фигурирует еще W_p — вронскиан решений $f_{1,2}^\omega$:

$$W_p = f_1' f_2 - f_2' f_1 = 2\omega(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4).$$

В однопетлевом приближении вклад в $\langle 0 | \tilde{\Phi} | 0 \rangle$ дается единственной диаграммой (рис.1) и имеет вид

$$\phi_1(x) = (-3\lambda) \int dx' D(x, x') \phi_0(x') D(x', x'). \quad (29)$$

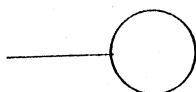


Рис.1. Диаграмма, дающая вклад в однопетлевом приближении

Непосредственное вычисление [29] приводит к выражению для однопетлевой поправки [29,15]:

$$A_{1 \rightarrow n}^{1-\text{loop}} = A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \cdot (B\lambda n^2 + O(\lambda n)), \quad (30)$$

где для модели (7) коэффициент

$$B = \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{9}{4W_p}, \quad (31)$$

в частности, при $d=3$,

$$B = -\frac{1}{64\pi^2} (\ln(7 + 4\sqrt{3}) - i\pi),$$

а вид поправки $O(\lambda n)$ в (30), приведенный в [29,15], вообще говоря, зависит от схемы перенормировки. Отметим, что в модели (7) с положительным m^2 действительная часть B отрицательна, то есть первая петлевая поправка уменьшает амплитуду. Это свойство не является общим для всех моделей; например, в модели с нарушенной дискретной симметрией $\phi \leftrightarrow -\phi$ действительная часть коэффициента B положительна. Для изучения предела $\lambda \rightarrow 0$ (λn фиксировано) важен только первый член в (30), вывод которого несколько более простым, нежели прямые вычисления, способом [25] мы сейчас приведем.

Заметим сперва, что поле ϕ_0 имеет сингулярность в точке $\tau = i\pi/2$. Это дает основание предположить (так и окажется), что вклад от k -й петли в $\langle 0|\phi|0\rangle$, $\phi_k(\tau)$ также сингулярен в этой точке. Если главная сингулярность — полюс порядка n_k , то

$$\phi_k = c_0 \phi_0^{n_k} + c_1 \phi_0^{n_k-1} + c_2 \phi_0^{n_k-2} + \dots \quad (32)$$

Из (32) и (24), учитывая явный вид ϕ_0 (25), находим, что ведущий порядок по n амплитуды $A_{1 \rightarrow n}$ определяется наиболее сингулярным членом в (32), а именно вклад от k -й петли в амплитуду равен

$$\frac{c_0}{(n_k-1)!} \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{(n_k-1)/2} n^{n_k-1} + O(n^{n_k-2}).$$

Рассмотрим теперь $\phi_1(x)$ (29) и найдем его наиболее сингулярную при $\tau = i\pi/2$ часть: согласно сказанному выше, она определит ведущий вклад в амплитуду при больших n .

Представим функции $f_{1,2}^\omega(\tau)$ в виде линейных комбинаций новых функций f и g :

$$f_{1,2}^\omega(\tau) = e^{\pm i\pi\omega/2} (f(\tau) \pm g(\tau)).$$

При $\tau = i\pi/2$ функция f сингулярна, $f \sim 3 \operatorname{ch}^{-2} \tau$, в то время как g не имеет сингулярности в этой точке: $g(\tau) \sim \operatorname{ch}^3 \tau$. Пропагатор $D(\tau, \tau'; \mathbf{p})$, выраженный через f и g , имеет вид

$$D(\tau, \tau'; \mathbf{p}) = D_0(\tau, \tau'; \mathbf{p}) + D_1(\tau, \tau'; \mathbf{p}), \quad (33)$$

где

$$D_0(\tau, \tau'; \mathbf{p}) = \frac{1}{W_{\mathbf{p}}} f(\tau) f(\tau') \sim \frac{9\lambda^2}{4W_{\mathbf{p}}} \phi_0^2(\tau) \phi_0^2(\tau'), \quad (34)$$

последнее утверждение справедливо для главной сингулярности при τ , $\tau' \rightarrow i\pi/2$, а менее сингулярная часть D_1 содержит все остальное. В частности, пропагатор $D(x', x')$, входящий в (29), имеет главную сингулярность

$$D(x', x') \sim \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{9\lambda^2}{4W_{\mathbf{p}}} \phi_0^4(\tau') = \lambda^2 B \phi_0^4(\tau').$$

Подействовав оператором $\hat{O}$, определенным согласно (26), на обе части (29), находим

$$\hat{O}\phi_1 = -3\lambda^3 B \phi_0^5.$$

Непосредственная проверка показывает, что для наиболее сингулярных частей

$$(\hat{O}^{-1}\phi_0^{n+2})(x) \equiv -\frac{2}{(n-2)(n+3)} \frac{1}{\lambda} \phi_0^n,$$

поэтому $\phi_1 = \lambda^2 B \phi_0^3$, откуда сразу же следует результат (30).

2.2.4. Экспоненциация петлевых вкладов. В приведенном выше вычислении однопетлевой поправки принципиальную роль играет утверждение о связи главного по n вклада в k -петлевую амплитуду $A_{1 \rightarrow n}$ и ведущей сингулярности в k -м члене петлевого разложения матричного элемента $\langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle$. Используя эту связь и представление (33) для пропагатора, можно найти главные по n вклады в $A_{1 \rightarrow n}$ во всех порядках разложения по петлям [25]. Благодаря тому, что наиболее сингулярная часть пропагатора D_0 факторизуется (см. (34)), задачу нахождения $\langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle$ в главной сингулярности при $\tau = i\pi/2$ можно свести к вычислению древесных диаграмм некоторой эффективной теории. Результатом является экспоненциация ведущих поправок к амплитуде рождения n частиц на кинематическом пороге:

$$A_{1 \rightarrow n} = A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \exp(B\lambda n^2 + O(\lambda n)). \quad (35)$$

При этом формула (30) представляет собой первые члены разложения экспоненты. До двухпетлевого уровня включительно формула (35) была проверена непосредственным вычислением диаграмм во внешнем поле ϕ_0 (см. [25]).

Сама по себе возможность учета вкладов от всех порядков петлевого разложения для больших n , хотя бы и для тривиальной кинематики, представляется весьма интересной. Более того, экспоненциация амплитуд на

пороге является одним из самых серьезных указаний на квазиклассическую форму многочастичных сечений. Вместе с результатом (16) и целым рядом других аргументов [25] формула (35) дает основания предполагать, что в режиме, когда $\lambda \rightarrow 0$, λn и ϵ фиксированы, сечения $1 \rightarrow n$ действительно имеют форму

$$\sigma_{1 \rightarrow n} \sim \exp \left(\frac{1}{\lambda} F(\lambda n, \epsilon) \right). \quad (36)$$

Вид сечения (36) указывает на возможность вычисления показателя экспоненты квазиклассическими методами. Как мы увидим, подходящий метод связан с обобщением метода Ландау вычисления квазиклассических матричных элементов в квантовой механике [34] на теорию поля (см. разд.3,4).

Специфическим свойством матричных элементов, вычисляемых в одномерной квантовой механике с использованием техники Ландау, является независимость соответствующего показателя экспоненты от выбора оператора. Поэтому, если возможно обобщение метода Ландау на теорию поля, то многочастичные матричные элементы вида $\langle n | \hat{O} | 0 \rangle$ не должны (с экспоненциальной точностью) зависеть от оператора $\hat{O}$, если он не зависит явно от малого параметра λ . На языке многочастичных амплитуд это означает их независимость от начального состояния, если последнее содержит небольшое число частиц. Вычисления таких амплитуд на пороге [35], проделанные с использованием описанной выше техники [25], показали, что амплитуды $2 \rightarrow n$ действительно совпадают с экспоненциальной точностью с амплитудами $1 \rightarrow n$. Точнее, совпадение матричных элементов можно наблюдать в следующих случаях (4-импульсы налетающих частиц равны $(E, \mathbf{p})$ и $(nm - E, \mathbf{p})$): а) $\hat{O} = \phi^2$, то есть амплитуда проинтегрирована по $\mathbf{p}$ и E ; б) $\hat{O} = \phi(x) \phi(0)$, то есть амплитуда вычисляется при фиксированном значении $\mathbf{p}$, причем справедливость утверждения о независимости амплитуды от оператора была показана при $E \ll nm$ и при $E \sim nm$ ($|\mathbf{p}| \sim m$). В последнем случае рассматривались значения E , не принадлежащие интервалу $(0, nm)$ (одна из виртуальных частиц обладает отрицательной энергией, то есть фактически может быть названа вылетающей). При $0 < E < nm$ как древесная амплитуда на пороге, так и петлевые поправки к ней имеют сингулярную зависимость от энергии, поэтому хорошо определенный предел при больших n и фиксированном ϵ отсутствует (это является следствием уже упоминавшихся специфических особенностей пороговой кинематики).

Таким образом, приведенные пертурбативные результаты дают серьезные указания на возможность учета существенных петлевых вкладов и полного вычисления матричных элементов и сечений типа «мало $\rightarrow$ много» квазиклассическими методами. Более того, отсутствие зависимости ведущего экспоненциального вклада в амплитуды от числа частиц в начальном со-

стоянии указывает, что наиболее вероятным кандидатом на подходящий квазиклассический метод может стать обобщение метода Ландау на теорию поля. В следующих разделах мы увидим, какие связанные с этим непerturbативные методы возникают в данной задаче, как они воспроизводят результаты теории возмущений и позволяют продвинуться за ее пределы.

Может показаться странным, что мы получим пертурбативные результаты непerturbативными методами. В действительности никакого противоречия здесь нет. Пертурбативное разложение хорошо описывает поведение амплитуд лишь в режиме $\lambda \rightarrow 0$, n — фиксировано, тогда как непerturbативные вычисления будут справедливы при $\lambda \rightarrow 0$, λn — фиксировано. Эти два режима совпадают при $\lambda n \ll 1$.

3. КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ДРЕВЕСНЫЕ СЕЧЕНИЯ ВНЕ ПОРОГА

Хорошо известно, что в квантовой механике квазиклассические матричные элементы могут быть вычислены с помощью сингулярных классических решений уравнений движения в евклидовом времени [34]. А именно рассмотрим матричный элемент не зависящего от $\hbar$ оператора $\hat{O}$ между двумя высоковозбужденными (квазиклассическими) состояниями $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ в одномерной квантово-механической системе. В этом случае квазиклассическая техника утверждает, что матричный элемент экспоненциально мал:

$$\langle E_2 | \hat{O} | E_1 \rangle \sim e^{-S/\hbar}. \quad (37)$$

Кроме того, имеют место следующие свойства: 1) экспоненциальный фактор не зависит от оператора $\hat{O}$; 2) показатель экспоненты S равен укороченному действию, вычисленному на сингулярном классическом решении в евклидовом времени. Это решение имеет энергии E_1 и E_2 до и после сингулярности соответственно.

Существует замечательное сходство, отмеченное рядом авторов [36—38, 21, 39], между матричными элементами (37) и амплитудами многочастичных процессов при высоких энергиях, так что квазиклассическая техника может быть обобщена для теории поля. Чтобы увидеть это сходство, рассмотрим, например, многочастичное рождение в теории (7). Соответствующая амплитуда выглядит следующим образом:

$$\langle n | \hat{O} | 0 \rangle, \quad (38)$$

где как начальное вакуумное, так и конечное многочастичное состояния могут быть рассмотрены как квазиклассические при $n \sim 1/\lambda$, а оператор $\hat{O}$ — это $\phi(x)$ или $\phi(x)\phi(y)$ для одно- или двухчастичного начального состояния соответственно (подчеркнем, что $\hat{O}$ параметрически не зависит от λ). Тогда аналогия между (37) и (38) очевидна. Более того, в предыдущем разделе мы уже отмечали, что, по крайней мере, вблизи порога матричный элемент (38) имеет экспоненциальную форму и не зависит от оператора $\hat{O}$. Еще более замечательно то, что сингулярные решения полевых уравнений естественным образом возникают при вычислении древесных сечений при любых энергиях [27,20]. Эту связь между сингулярными решениями и древесными сечениями мы сейчас и обсудим более подробно, а к квазиклассическому подходу вычисления сечений с учетом петель перейдем в разделе 4.

3.1. Сингулярные решения и древесные сечения. Общий формализм.

Выше мы уже встречались с решениями классических уравнений при вычислении многочастичных амплитуд на пороге (эти решения являются производящими функциями для древесных амплитуд). Они обладают определенными аналитическими свойствами при продолжении в область комплексного времени, а именно: 1) убывают при $\text{Im } t = \tau \rightarrow \infty$ и 2) имеют особенности при некоторых значениях комплексного времени. Например, решение, генерирующее амплитуды в ненарушенной ϕ^4 -теории (21), сингулярно на пространственноподобной гиперплоскости

$$t_0 = i\tau_0 = \frac{i}{2m} \ln \frac{8m^2}{\lambda z_0^2}$$

и ведет себя вблизи нее следующим образом:

$$\phi = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{m}{\text{Im } t - \tau_0}.$$

То, что поверхность сингулярностей является плоскостью (не зависит от x), есть отражение того факта, что все частицы имеют нулевой пространственный импульс.

Появление таких сингулярных решений не является случайным. Чтобы увидеть это, рассмотрим в древесном приближении процесс $1 \rightarrow n$ вне порога. Очевидно, что амплитуда такого процесса зависит от всех пространственных импульсов вылетающих частиц и, конечно, не является простой

функцией своих переменных*. С другой стороны, полное (то есть проинтегрированное по всему фазовому объему) сечение зависит только от числа частиц n и их полной энергии E , поэтому мы будем искать квазиклассический метод для изучения поведения сечения, а не амплитуд.

Итак, рассмотрим процесс распада одной виртуальной частицы с энергией E и импульсом $\mathbf{P} = 0$ (мы будем изучать процесс в системе центра масс) в n реальных частиц в теории массивного скалярного поля с действием

$$S = \int dt d^d x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} - V(\phi, \lambda) \right), \quad (39)$$

где по-прежнему d — число пространственных измерений и λ — константа связи. Явный вид потенциала нас пока не интересует, но мы считаем, что $\phi = 0$ — классическая вакуумная конфигурация, и $m^2 = V''(\phi = 0)$ — квадрат массы бозона. Нас будет интересовать режим, когда λ мало, а E и n — велики, то есть $\lambda \rightarrow 0$, а λn и E/n — фиксированы.

Рассмотрим сначала матричный элемент оператора ϕ между когерентным состоянием $|\{\beta(\mathbf{k})\}\rangle$ и вакуумом при данной энергии E . Согласно общему формализму представления когерентных состояний [40—42,4], в рамках которого мы далее будем работать, такой матричный элемент дается следующим функциональным интегралом на временном интервале $t \in [T_i, T_f]$, $T_{f,i} \rightarrow \pm \infty$:

$$\langle \{\beta(\mathbf{k})\} | \tilde{\phi}(E) | 0 \rangle = \int D\phi D\phi_i D\phi_f \tilde{\phi}(E) \exp \{ iS + B_i(\phi_i) + B_f(\phi_f, \beta^*) \}, \quad (40)$$

где $B_{i,f}$ — граничные члены:

$$\begin{aligned} B_f(\phi_f, \beta^*) = & -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \beta_k^* \beta_{-k}^* e^{2i\omega T_f} - \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \omega \phi_f(\mathbf{k}) \phi_f(-\mathbf{k}) + \\ & + \int d\mathbf{k} \sqrt{2\omega} \beta_k^* \phi_f(-\mathbf{k}) e^{i\omega T_f}, \\ B_i(\phi_i) = & -\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \omega \phi_i(\mathbf{k}) \phi_i(-\mathbf{k}), \quad \omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

*Выше было показано, что в нерелятивистском пределе амплитуды зависят только от полной энергии частиц (16). Это отражает тот факт, что в первом порядке в разложении по импульсам вылетающих частиц существует только один симметричный относительно перестановок всех частиц и относительно преобразований Галилея инвариант — полная энергия.

$$\tilde{\phi}(E) = \int dx \phi(x) e^{-iEt + iPx},$$

$$\phi_k(t) = \int \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} \phi(x) e^{-ikx}, \quad \phi_{f,i}(\mathbf{k}) = \phi_k(T_{f,i}). \quad (42)$$

В древесном приближении интеграл (40) определяется седловой точкой, которая является решением классического уравнения поля

$$\partial_\mu^2 \phi_c + V'(\phi_c) = 0 \quad (43)$$

с граничными условиями, получаемыми вариацией показателя экспоненты в (40) по ϕ_i и ϕ_f . Именно при $t \rightarrow -\infty$ поле ϕ подчиняется фейнмановским граничным условиям (содержит только положительно-частотную часть):

$$\phi_c(\mathbf{k}) \sim e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (44)$$

при $t \rightarrow +\infty$ положительно-частотная часть определяется β_k^* , а фейнмановская (отрицательно-частотная) часть произвольна:

$$\phi_c(\mathbf{k}) = \frac{\beta_k^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t} + f(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Граничное условие (44) означает, что энергия искомой конфигурации равна нулю при $t \rightarrow -\infty$, поэтому, в силу закона сохранения энергии, ϕ содержит только положительно-частотную часть

$$\phi_c(\mathbf{k}) = \frac{\beta_k^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (45)$$

Легко убедиться, что седловое значение показателя экспоненты в (40) на решении уравнения (43) с граничными условиями (44), (45) равно нулю ($S=0$ из-за определенной частотности решения), поэтому матричный элемент (40) сводится к фурье-образу классического решения $\phi_c(E; \beta^*)$:

$$\langle \{\beta(\mathbf{k})\} | \tilde{\phi}(E) | 0 \rangle = \phi_c(E, \beta^*) = \int dx \phi_c(\beta^*, x) e^{-iEt + iPx}. \quad (46)$$

В соответствии с формализмом когерентных состояний этот матричный элемент является производящей функцией для древесных амплитуд процессов $1 \rightarrow n$:

$$A_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \left. \frac{\partial^n \phi_c(E; \beta^*)}{\partial \beta_{k_1}^* \dots \partial \beta_{k_n}^*} \right|_{\beta^* = 0}. \quad (47)$$

Этот результат совпадает с полученным ранее с помощью редукционной формулы Лемана — Симанчика — Циммермана (см. п.2.2.1).

Для того, чтобы получить n -частичное сечение, введем, в духе [43], производящую функцию

$$\Sigma(\xi, E) = \frac{1}{F} \int D\beta D\beta^* \exp \left(- \int d\mathbf{k} \beta(\mathbf{k}) \beta^*(\mathbf{k}) \right) \phi_c(\sqrt{\xi} \beta^*) \bar{\phi}_c(\sqrt{\xi} \beta), \quad (48)$$

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \Sigma(\xi, E) \Big|_{\xi=0}, \quad (49)$$

где F — нормировочный фактор. В том, что (49) является производящей функцией, легко убедиться, разлагая (48) по ξ и учитывая (47); интегрирование по β и β^* соответствует, как обычно, интегрированию по всему фазовому пространству. Используя теорему Коши и произведя замену переменных $\sqrt{\xi} \beta \rightarrow \beta$, запишем выражение для сечения (49) в виде интеграла в плоскости комплексного ξ по контуру, обходящему точку $\xi = 0$:

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E) = \frac{1}{F} \oint \frac{d\xi}{\xi^{n+1}} \int D\beta D\beta^* \exp \left(- \frac{1}{\xi} \int d\mathbf{k} \beta(\mathbf{k}) \beta^*(\mathbf{k}) \right) \phi_c(\beta^*) \bar{\phi}_c(\beta). \quad (50)$$

Теперь выполним интегрирование в (50) методом перевала, который применим при $n \sim 1/\lambda$. Однако необходима некоторая осторожность, так как интегрирование по β и β^* содержит нулевые моды, связанные с пространственно-временными трансляциями. Кроме того, $\phi_c(E; \beta^*)$ содержит большой параметр $E \sim 1/\lambda$, от которого возможна экспоненциальная зависимость. Чтобы учесть нулевые моды, параметризуем $\beta^*(\mathbf{k})$ следующим образом:

$$\beta^*(\mathbf{k}) = b^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t_0 - i\mathbf{k}\mathbf{x}_0},$$

где t_0 и x_0 — коллективные координаты, соответствующие пространственно-временным трансляциям, а $\{b^*(\mathbf{k})\}$ — новый набор переменных интегрирования, на который мы наложим в дальнейшем некоторую связь, нарушающую трансляционную симметрию. Тогда в силу граничных условий (44) и (45)

$$\phi_c(\beta^*, x) = \phi_c(b^*, x + x_0),$$

так что

$$\phi_c(E; \beta^*) = \phi_c(E; b^*) e^{iEt_0 - i\mathbf{P}\mathbf{x}_0}.$$

Таким образом, интегрирование в (50) по β , β^* заменится на интегрирование по b , b^* и x_0 , x'_0 :

$$\begin{aligned} \sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E) = & \frac{1}{F} \oint \frac{d\xi}{\xi} \int Db Db^* dx_0 dx'_0 J \phi_c(E; b^*) \bar{\phi}_c(E; b) \exp \left[-n \ln \xi + \right. \\ & \left. + iE(t_0 - t'_0) - i\mathbf{P}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0) - \frac{1}{\xi} \int d\mathbf{k} b(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{k}) e^{i\omega(t_0 - t'_0) - i\mathbf{k}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)} \right], \end{aligned}$$

где J содержит δ -функцию, выражающую связь, о которой мы говорили выше, и соответствующий детерминант Фаддеева — Попова. Интегрирование по $(x_0 + x'_0)$ дает обычный объемный фактор, который сокращается с F .

Предположим теперь, что связь на $\{b\}$ можно выбрать таким образом, что $\phi_c(E; b^*)$ не содержит экспоненциальных множителей, несмотря на то, что $E \sim 1/\lambda$. Тогда интегрирование можно выполнить методом перевала. Седловая точка $(x_0 - x'_0)$ равна нулю (напомним, что мы работаем в системе центра масс, то есть $\mathbf{P} = 0$), так что мы больше не будем выписывать эту переменную. Переобозначая

$$\xi = e^\theta, \quad t_0 - t'_0 = -iT,$$

находим «эффективное действие»

$$W_{\text{tree}}(T, \theta, b, b^*) = ET - n\theta - \int d\mathbf{k} b(\mathbf{k}) b^*(\mathbf{k}) e^{\omega T - \theta}, \quad (51)$$

которое должно быть экстремизировано по T , θ , b и b^* при условии, к которому мы сейчас возвращаемся.

Связь, налагаемая на $\{b(\mathbf{k})\}$, должна нарушать трансляционную инвариантность в пространстве-времени. Как уже говорилось выше, мы хотели бы наложить условие на $\{b(\mathbf{k})\}$ таким образом, чтобы $\phi_c(b^*)$ не содержало экспоненциальных факторов. Продолжим полученное решение ϕ_c в область комплексного времени, тогда, согласно граничным условиям (44), (45), оно должно стремиться к нулю при $\text{Im } t = \tau \rightarrow +\infty$, где τ — евклидово время. Так как мы не рассматриваем инстантонные эффекты, то есть не интересуемся классическими решениями, регулярными в евклидовом пространстве (в теории $\lambda\phi^4$ с $\lambda > 0$ их просто нет), то ϕ_c должно быть сингулярным в евклидовом пространстве-времени. В общем случае ϕ_c имеет особенности на d -мерной поверхности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, при этом $\tau_0(\mathbf{x}) < 0$ для решений, гладких на действительной оси времени. Интеграл типа (46) определяется особенностями функции ϕ_c , а именно: он пропорционален $\exp(E\tau_m + i\mathbf{P}\mathbf{x}_m)$, где τ_m и $\mathbf{x}_m$ — координаты особенности, лежащей ближе всего к действительной оси ($\tau_m < 0$). Поэтому, чтобы $\phi_c(b)$ не содержало экспоненциальных факторов, потребуем $\tau_m \rightarrow 0$, $\mathbf{x}_m = 0$. Другими словами, необходимо, чтобы поверхность сингулярностей касалась в евклидовом времени снизу поверхности $\tau = 0$ в точке $\mathbf{x} = 0$, то есть $\tau_0(\mathbf{x} = 0) = 0$ и $\tau_0(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$. Это ограничение нарушает трансляционную инвариантность в пространстве-времени, то есть действительно представляет собой связь, выделяющую нулевые моды. Кроме того, существует еще одно свойство решений, связанное с тем, что мы работаем в системе центра масс. Так как в задаче нет выделенного пространственного направления ($\mathbf{P} = 0$), решение ϕ_c должно обладать симметрией относительно пространственных вращений ($O(d)$ -симметрией). Это означает, что $\tau_0(\mathbf{x})$ зависит только от $x = |\mathbf{x}|$: $\tau_0(\mathbf{x}) = \tau_0(x)$.

Итак, приведем окончательно способ вычисления древесного сечения $\sigma_{1 \rightarrow n}$ в режиме $\lambda \rightarrow 0$, при фиксированных $n\lambda$, E/n .

— Среди всех решений евклидовых уравнений поля выбираем $O(d)$ -симметричные, имеющие следующую асимптотику при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\int \frac{d^d x}{(2\pi)^{d/2}} \phi_c(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{-\omega\tau}, \quad (52)$$

и сингулярные на поверхности $\tau_0(\mathbf{x})$ такой, что $\tau_0(0) = 0$, $\tau_0(\mathbf{x} \neq 0) < 0$.

— Из (52) находим компоненты Фурье b_k^* и подставляем их в (51).

— Экстремизируем W (см.(51)) по всем описанным поверхностям сингулярностей (это эквивалентно экстремизации по b_k с обсуждавшейся выше связью), а также по T и θ . Тогда древесное сечение дается следующим выражением:

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}}(E, n) \sim \exp(W_{\text{tree}}(T(E, n), \theta(E, n))).$$

Этот рецепт совпадает с предложенным из несколько иных соображений в работе [27] (см. разд.4).

Покажем теперь, что экстремум W при фиксированных энергии и числе частиц в действительности является максимумом [44]. Рассмотрим функционал

$$\int d^d k b_k b_k^* e^{\omega T}. \quad (53)$$

Он ограничен снизу, так что достигает наименьшего значения* для решений описанного выше типа при некоторых b_k ($b_k \neq 0$, так как они соответствуют нетривиальному решению ϕ_c):

$$\int d^d k b_k b_k^* e^{\omega T} \Big|_{\min} = C(T) > 0.$$

Допустим, что мы фиксировали некоторую поверхность сингулярностей Σ , тогда значение функционала (53) на этой поверхности больше, чем его минимальное значение:

$$\int d^d k b_k b_k^* e^{\omega T} \Big|_{\Sigma_{\text{fixed}}} = C_{\Sigma}(T) \geq C(T)$$

для всех значений T . Находя экстремальное значение θ , получим $\theta = -\ln n + \ln C(T)$ и

$$W(T) = n \ln n - n + ET - n \ln C(T) \text{ имеет экстремум при } T_1,$$

$$W(T)_{\Sigma} = n \ln n - n + ET - n \ln C_{\Sigma}(T) \text{ имеет экстремум при } T_2.$$

*То есть W , как функционал от b_k , имеет максимум.

Сравнивая $W(T_1)$ и $W(T_2)$, получаем следующую цепочку неравенств:

$$W(T_1) \geq W(T_2) \geq W_{\Sigma}(T_2), \text{ если } T_1 \text{ — максимум } W;$$

$$W_{\Sigma}(T_2) \leq W_{\Sigma}(T_1) \leq W(T_1), \text{ если } T_2 \text{ — минимум } W_{\Sigma}.$$

Таким образом, если мы фиксируем некоторый класс поверхностей сингулярностей, энергию и число частиц или, другими словами, фиксируем некоторое частное сингулярное решение, то мы получим нижнюю границу для функции $W_{\text{tree}}(E, n, \lambda)$.

Кроме того, используя описанный выше метод, можно легко выяснить функциональную зависимость $W_{\text{tree}}(E, n, \lambda)$ от ее аргументов. Поскольку мы изучаем только древесные сечения, то зависимость от λ должна совпадать с зависимостью, которая следует из анализа фейнмановских диаграмм: для теории (7) $\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \sim \lambda$. Такая зависимость легко восстанавливается в W_{tree} простым перемасштабированием полей. Так, в модели (7), перейдя к новым полям $\phi = \bar{\phi}/\sqrt{\lambda}$ и фурье-компонентам $\bar{b}_k = b_k/\sqrt{\lambda}$, легко убедиться, что в терминах $\bar{\phi}$ и $\bar{b}_k$ граничная задача, сформулированная выше, не зависит от λ . Поэтому экстремальное значение функционала

$$\int d\mathbf{k} \bar{b}_k \bar{b}_k^* e^{\omega T} = \bar{C}(T)$$

также не зависит от λ . Переходя обратно к старым полям, убеждаемся, что $C(T) = \bar{C}(T)/\lambda$, поэтому W_{tree} принимает вид

$$W_{\text{tree}}(T, \theta) = ET - n\theta - e^{-\theta} \frac{1}{\lambda} \bar{C}(T).$$

Варьируя по θ , находим $\theta = \ln \bar{C}(T) - \ln(\lambda n)$ и соответствующее значение $W_{\text{tree}}(T)$:

$$W_{\text{tree}}(T) = n(\ln(\lambda n) + \varepsilon T + mT - \ln \bar{C}(T)),$$

где, как и прежде, $\varepsilon = (E - nm)/n$ — средняя кинетическая энергия частиц. Из последнего равенства видно, что экстремальное значение T зависит только от ε , поэтому $W_{\text{tree}}(E, n, \lambda)$ имеет следующую функциональную форму:

$$W_{\text{tree}}(E, n, \lambda) = n \ln(n\lambda) + n\psi(E/n), \quad (54)$$

то есть в терминах (36)

$$F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon) = \lambda n \ln \lambda n + \lambda n \psi(\epsilon),$$

а сечение

$$\sigma_{1 \rightarrow n}^{\text{tree}} \sim e^{W_{\text{tree}}} = e^{(1/\lambda)F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon)} \sim n! \lambda^n e^{n\psi(\epsilon)}.$$

Заметим также, что при фиксированном ϵ древесное сечение увеличивается с ростом числа частиц и при достаточно больших n достигает унитарного предела.

Итак, мы убедились в том, что при вычислении древесных сечений естественным образом возникают сингулярные евклидовы решения уравнений поля. Описанный выше метод позволяет продвинуться значительно дальше в изучении многочастичных древесных сечений, нежели обычная пертурбативная техника. В частности, сравнительно легко получить в теории (7) низкоэнергетическое разложение $F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon)$ [27,44]; кроме того, выбрав некоторый класс поверхностей сингулярностей, можно найти нижнюю границу для $F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow \infty$ [37,27], а также численно найти нижнюю границу при любых энергиях [45]. К обсуждению этих вопросов мы сейчас и перейдем.

3.2. Низкоэнергетическое разложение $F_{\text{tree}}(n\lambda, \epsilon)$. Далее мы будем изучать теорию (7) с действием

$$S = \int d^{d+1}x \left[\frac{\partial_\mu^2 \phi}{2} - \frac{\phi^2}{2} - \frac{\lambda \phi^4}{4} \right]. \quad (55)$$

Мы положили массу бозона равной единице, так как зависимость древесного сечения от λ тривиальна, а других размерных параметров в теории нет, поэтому зависимость от массы легко восстанавливается из размерных соображений. Из действия (55) получаем следующее евклидово уравнение ($\tau = \text{Im } t$, $\partial^2 = \partial_\tau^2 + \partial_l^2$):

$$\partial^2 \phi - \phi - \lambda \phi^3 = 0 \quad (56)$$

с граничным условием

$$\phi(\mathbf{k}, t) = \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{-\omega\tau}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (57)$$

Теперь нам предстоит найти решение задачи (56), (57), сингулярное на некоторой поверхности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$ такой, что $\tau_0(0) = 0$, $\tau_0(\mathbf{x} \neq 0) < 0$, и затем проварьировать функционал (51) по всем таким поверхностям.

Так как в этом разделе мы изучаем низкоэнергетическое поведение $F_{\text{tree}}(\lambda, \epsilon)$, то есть режим $\epsilon \ll 1$ (характерный импульс вылетающих частиц много меньше массы), мы можем ожидать, что решение уравнения (56) медленно меняется с изменением $\mathbf{x}$. Поэтому в качестве нулевого приближения мы выберем решение, не зависящее от $\mathbf{x}$. Такое решение фактически уже обсуждалось нами (см. (21)). Запишем его в следующем виде:

$$\phi_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\text{sh } \tau}. \quad (58)$$

Функция (58) является решением граничной задачи (56), (57), а также имеет сингулярность при $\tau = 0$. Однако она соответствует случаю, когда все вылетающие частицы находятся в покое. Для того чтобы сойти с порога, мы модифицируем решение (58), введя «руками» зависимость от $x = |\mathbf{x}|$ (мы уже говорили о том, что решение должно быть $O(d)$ -симметричным):

$$\phi_0(\tau, x) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\text{sh}(\tau - \tau_0(\mathbf{x}))}, \quad (59)$$

где $\tau_0(\mathbf{x})$ — слабо меняющаяся функция своего аргумента. Заметим, что функция (59) имеет поверхность сингулярности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, поэтому, в соответствии с общим формализмом, $\tau_0(\mathbf{x})$ должна касаться плоскости $\tau = 0$ снизу. Начиная с функции (59), которая является решением (56) с точностью до $O((\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^2)$, мы представим ϕ в виде

$$\phi(\tau, x) = \phi_0(\tau, x) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\tau, x), \quad (60)$$

где ϕ_i порядка $(\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^{2i}$ (мы считаем совпадающими порядки $(\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^{2i}$ и, например, $(\partial_{\mathbf{x}}^{2i} \tau_0(\mathbf{x}))$), а все члены порядка $(\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^{2i-1}$ исчезают в силу $O(d)$ -симметрии. Таким образом, мы будем искать решение (56) по теории возмущений с малым параметром $(\partial_{\mathbf{x}} \tau_0(\mathbf{x}))^*$.

*В действительности разложение по производным (60) соответствует разложению по импульсам вылетающих частиц и поэтому оправданно.

Подставляя разложение (60) в (56), находим, что ϕ_1 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\partial_\tau^2 \phi_1 - \phi_1 - 3\lambda \phi_0^2 \phi_1 = -\partial_i^2 \phi_0 = -\partial_\tau^2 \phi_0 (\partial_i \tau_0)^2 + \partial_\tau \phi_0 \partial_i^2 \tau_0. \quad (61)$$

Его решение можно найти в явном виде. Добавляя $\phi_0(\tau, x)$, получим, что решение (56), (57) с точностью до $(\partial_x \tau_0(x))^4$ принимает вид [27]:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_0 + \phi_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left\{ \frac{1}{\text{sh } z} + \frac{1}{2} \left(\partial^2 \tau_0 \left(\frac{\text{ch } z - \text{sh } z}{3} - \frac{1}{\text{sh } z} + z \frac{\text{ch } z}{\text{sh}^2 z} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\partial \tau_0)^2 z \frac{\text{ch } z}{\text{sh}^2 z} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (62)$$

где $z = \tau - \tau_0(x)$. Чтобы найти $b_{\mathbf{k}}^*$, соответствующие этому решению, найдем асимптотику (62) при $\tau \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$):

$$\phi^{\tau \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-z} \left\{ 2 - \frac{5}{6} \partial^2 \tau_0 + (\partial^2 \tau_0 + (\partial \tau_0)^2) z \right\}. \quad (63)$$

Функция $\phi^{\tau \rightarrow \infty}$, конечно, является решением линеаризованного уравнения (56) ($\lambda = 0$) во втором порядке по производным $\tau_0(x)$, в чем легко убедиться прямой подстановкой. Линеаризованное уравнение (56) имеет общее решение

$$\phi^{\text{linear}}(x, \tau) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d/2}} \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}x - \omega\tau}. \quad (64)$$

Обозначим

$$b(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d/2}} \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}x}. \quad (65)$$

Тогда при $\tau \rightarrow \infty$ интеграл (64) набирается в области малых импульсов, и мы имеем право разложить его следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi^{\text{linear}}(x, \tau) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d/2}} \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{k}x - \tau} \left(1 - \frac{\tau}{2} k^2 + \dots \right) = \\ &= e^{-\tau} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left(b + \frac{\tau}{2} \partial^2 b + \dots \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Предположим, что

$$b = 2e^{\tau_0} + b_1 + \dots, \quad (67)$$

где $b_1 \sim (\partial\tau_0)^2$, тогда с точностью до $O((\partial\tau_0)^4)$ из (66) и (67) найдем, что

$$\phi^{\text{linear}} = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} e^{-\tau} (2e^{\tau_0} + \tau \partial^2 e^{\tau_0} + b_1). \quad (68)$$

Сравнивая члены одинакового порядка по $\partial\tau_0(\mathbf{x})$ в выражениях (68) и (63) при $x=0$ и учитывая, что $\tau_0(0)=0$ и $\partial\tau_0(0)=0$ (последнее равенство обусловлено $O(d)$ -симметрией), находим для решения (63):

$$b_1(0) = -\frac{5}{6} \partial^2 \tau_0,$$

так что

$$b(0) = 2 - \frac{5}{6} \partial^2 \tau_0. \quad (69)$$

Кроме того, дифференцируя (67) по $\mathbf{x}$ два раза, найдем с точностью до $O((\partial\tau_0)^4)$

$$\partial_{ij}^2 b = 2\partial_{ij}^2 \tau_0(\mathbf{x}). \quad (70)$$

Подставляя последнее выражение в (69), имеем ограничение на b в точке $x=0$:

$$\left[b^2 + \frac{5}{12} \partial^2 b \right]_{\mathbf{x}=0} = 2 + O(\partial^4 b). \quad (71)$$

Если внимательно проследить за всеми выполненными шагами, то легко понять, что это ограничение является отражением того факта, что поверхность сингулярностей касается плоскости $\tau=0$ в точке 0. Вместо экстремизации функционала $W_{\text{tree}}(b^*)$ по поверхностям сингулярностей удобнее экстремизировать его по $b_{\mathbf{k}}^*$ при дополнительном условии (71) (напомним, что $b(\mathbf{x})$ связано с соотношением (65)). Для этого запишем (71) в виде

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^{d/2}} \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{\omega}} \left(1 - \frac{5}{12} k^2 + O(k^4) \right) = \sqrt{\frac{16}{\lambda}}. \quad (72)$$

Теперь мы можем найти экстремум (51) при условии (72). Имеем для экстремума

$$b_k = \frac{A e^{-\omega T + \theta}}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\omega}} \left(1 - \frac{5}{12} k^2 \right), \quad (73)$$

где множитель Лагранжа A находится из соотношения (72):

$$A = \sqrt{\frac{16}{\lambda}} \frac{e^{T-\theta}}{(2\pi T)^{d/2}} \left(1 - \frac{d(3d-26)}{24T} + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \right). \quad (74)$$

Мы разложили A в ряд по обратным степеням T , так как при малых ε , как мы увидим ниже, T велико (фактически $T \sim W/E$). Кроме того, мы опустили члены порядка T^{-2} , так как члены такого же порядка возникают при удержании следующего члена в разложении (72), что соответствовало бы нахождению решения (56) с точностью до $O((\partial\tau_0(x))^4)$.

Вариация (51) по θ дает следующее условие:

$$n = \int d\mathbf{k} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^* e^{\omega T - \theta}.$$

Подставляя сюда выражения (73) и (74) и интегрируя, получим уравнение

$$n = \frac{16}{\lambda} \frac{e^{\theta-T}}{(2\pi T)^{d/2}} \left(1 - \frac{d(3d-26)}{24T} \right). \quad (75)$$

Аналогично, варьируя (51) по T , приходим к уравнению

$$\varepsilon = \frac{d}{2T} \left(1 + \frac{3d-26}{12T} \right),$$

так что

$$T = \frac{d}{2\varepsilon} + \frac{3d-26}{12} + O(\varepsilon), \quad (76)$$

Видно, что T действительно велико при малых ε .

Найдя T и θ из уравнений (76) и (75) и подставив результат в (54), получим функцию F_{tree} :

$$F_{\text{tree}} = \lambda n \left(\ln \frac{\lambda n}{16} - 1 + \frac{d}{2} \left(\ln \frac{\varepsilon}{d\pi} + 1 \right) + \varepsilon \frac{(3d-26)}{12} + \varepsilon^2 C_2 \right). \quad (77)$$

Константа C_2 вычислена изложенным здесь методом путем нахождения поправки порядка $(\partial\tau_0)^4$ к решению (62) и равна [44]:

$$-\frac{1}{144d}(9d^2 - 556d + 260 + 48\pi^2(d-1)).$$

В частности, при $d=3$

$$F_{\text{tree}}^{d=3} = \lambda n \left(\ln \frac{\lambda n}{16} - 1 + \frac{3}{2} \left(\ln \frac{\varepsilon}{3\pi} + 1 \right) - \varepsilon \frac{17}{12} + \frac{\varepsilon^2}{432} (1327 - 96\pi^2) \right). \quad (78)$$

Заметим, что W_{tree} имеет правильную функциональную зависимость (сравните с (54)) от λ , n и ε . Кроме того, можно убедиться, что найденное значение W в действительности является максимальным, что согласуется с ранее приведенным доказательством. Скажем еще несколько слов о зависимости W от ε . Первый, логарифмический, член в разложении W возник бы, если бы мы ограничились пространственно-независимым решением (58). Он равен логарифму нерелятивистского фазового объема и в обычной теории возмущений возникает при интегрировании квадрата амплитуды, не зависящей от импульсов (см. (10)), по фазовому объему. Второй, линейный, член совпадает с тем, который получился бы при интегрировании квадрата амплитуды, соответствующей рождению нерелятивистских частиц (см. (16)), по импульсам, в чем можно явно убедиться. Поправка порядка ε^2 пертурбативными методами не получена.

Наконец, последнее, что интересно найти для сравнения с численными вычислениями, на которых мы остановимся ниже (см. п.3,4), это поверхность $\tau_0(\mathbf{x})$, экстремизирующая функционал W . Проще всего это сделать, найдя производные $\tau_0(\mathbf{x})$ при $x=0$ (см. (71)), и затем восстановить $\tau_0(\mathbf{x})$ в виде ряда Тейлора. Итак, подставляя найденное значение b_k^* (см. (73) и (74)) в определение $b(x)$ (65), а затем в равенство (71), найдем, что

$$\partial^2 \tau_0(\mathbf{x})|_{x=0} = -\frac{d}{T} + O\left(\frac{1}{T^2}\right)$$

и, таким образом,

$$\tau_0(x) = x^2 \left(-\frac{1}{2T} + \frac{5}{12} \frac{1}{T^2} \right) = -\frac{x^2 \varepsilon}{d} \left(1 - \varepsilon \frac{3d-16}{6d} \right), \quad (79)$$

где мы также выписали член порядка T^{-2} , вычисление которого можно найти в работе [44]. Соотношение (79) справедливо только для x ,

меньших, чем характерный обратный импульс вылетающих частиц $\varepsilon^{-1/2}$, при этом стоит заметить, что член порядка $x^4 \varepsilon^2$, который мог бы появиться в этом разложении, равен нулю.

3.3. Нижняя граница функции $F_{\text{tree}}(\lambda l, \varepsilon)$ в ультрарелятивистском режиме. Рассмотрим теперь противоположный предел $\varepsilon \gg 1$. В этом случае характерный импульс частиц много больше их массы, и можно пренебречь массовым членом в уравнении поля. При $d=3$ безмассовая ϕ^4 -теория конформно-инвариантна, поэтому некоторые точные решения могут быть найдены аналитически. Простейшее из них — это $O(4)$ -симметричный инстантон [46,17]. Соответствующее решение, сингулярное в точке $\tau = x = 0$, легко строится [37] из инстантона сдвигом его центра и заменой $\rho \rightarrow i\rho$, где ρ — размер инстантона,

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \frac{\rho}{x^2 + (\tau + \rho)^2 - \rho^2}. \quad (80)$$

Легко проверить, что ϕ_0 действительно является решением безмассового уравнения (56) с граничными условиями (57), и ϕ_0 сингулярно на сфере $\tau_0(\mathbf{x}) = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - x^2}$ с центром в точке $(-\rho, 0)$, касающейся поверхности $\tau = 0$ в точке $\tau = x = 0$. Таким образом, выбрав (80) в качестве решения граничной задачи (56), (57), мы ограничились рассмотрением только $O(4)$ -симметричных поверхностей сингулярностей. Поэтому, варьируя функционал (51) по T , θ и ρ (ρ является координатой типа b_k , «нумерующей» поверхности внутри класса сферически-симметричных), мы не должны ожидать получения правильного значения W , но только его нижней границы. Такая вариационная процедура дает следующее выражение для W_{tree} [37,27]:

$$W = n \ln \frac{\lambda n}{16} - \lambda n + n \ln \frac{2}{\pi^2}. \quad (81)$$

Заметим, что W_{tree} не зависит от ε .

Покажем теперь [44], что (81) в действительности не является истинным максимумом функционала (51), а лишь дает его нижнюю границу. С этой целью рассмотрим малые возмущения около решения (80). Так как решение должно быть $O(3)$ -симметрично (по отношению к пространственным вращениям), достаточно рассмотреть возмущенное решение, имеющее

поверхность сингулярностей, зависящую только от ρ и ψ — угла между осью τ и x . Для малых возмущений запишем искомое решение в виде

$$\phi = \frac{2\sqrt{\lambda/2\rho} + \alpha_m f(r) C_m^{(1)}(\cos \psi)}{r^2 - \rho^2(1 + \alpha_m C_m^{(1)}(\cos \psi))^2} = \phi_0 + \sum_m \alpha_m C_m^{(1)}(\cos \psi) \tilde{\phi}_m(r) + O(\alpha^2),$$

где $C_m^{(1)}(\cos \psi)$ — полиномы Гегенбауэра, α_m — малые параметры, а линейные флуктуации $\tilde{\phi}_m$ должны удовлетворять уравнению

$$\left[\partial_r^2 + \frac{3}{r} \partial_r - \frac{m(m+2)}{r^2} - \frac{24\rho^2}{(r^2 - \rho^2)^2} \right] \tilde{\phi}_m(r) = 0. \quad (82)$$

Чтобы решить это уравнение, можно воспользоваться конформной инвариантностью модели и выполнить стереографическую проекцию на сферу S^4 (это обычный способ решать уравнения в конформных моделях, см., например, [47]). Решение уравнения (82) есть

$$\tilde{\phi}_m(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{r^{2-m} \rho^{m+1}}{(r^2 - \rho^2)^2} \left(1 - \frac{2(m-1)}{m+2} \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{(m-1)m}{(m+2)(m+3)} \frac{\rho^4}{r^4} \right).$$

Вычисляя асимптотику этого решения, получаем следующее выражение для b_k^* :

$$b_k = b_k^0 + \sum_m \alpha_m \sqrt{\frac{\pi}{k\lambda}} e^{-k\rho} \left(\rho^{m+1} \frac{k^m}{m!} - 3\rho^2 k \frac{(m+1)}{(m+2)(m+3)} \right)$$

(здесь b_k^0 соответствует решению (80)). Соответствующее изменение в функционале W имеет вид

$$\Delta W \approx \sum_m \alpha_m (m+1) \left(2^{-m-2} - \frac{3}{2(m+2)(m+3)} \right) + O(\alpha^2).$$

Для $m=0, 1$ (дилатации и трансляции ϕ_0) $\Delta W = O(\alpha^2)$. Однако для всех остальных m изменение функционала пропорционально α_m . Это означает, что $O(4)$ -симметричные конфигурации не являются экстремальными для W . Таким образом, выражение (81) действительно является лишь нижней границей для W в ультрарелятивистском режиме.

3.4. Численные оценки. При произвольных ε необходимо рассматривать решения массивных уравнений поля. Точно так же, как и в пределе высоких энергий, рассмотрение $O(4)$ -симметричных решений дает нижнюю оценку на сечение при любых энергиях [45]. Единственное отличие состоит в том, что уравнения движения в этом случае приходится решать численно, так как аналитическое решение для массивной теории неизвестно. Поверхности сингулярностей представляют собой трехмерные сферы в четырехмерном евклидовом пространстве, и единственным вариационным параметром является радиус сферы ρ . Поверхность сингулярностей должна содержать начало координат, поэтому центр сферы располагается в точке

$$x_0 = (-\rho, \mathbf{0}),$$

то есть $O(4)$ -симметричное решение имеет общий вид

$$\begin{aligned}\phi &= \phi(r), \\ r &= \sqrt{\mathbf{x}^2 + (\tau + \rho)^2}.\end{aligned}$$

При больших r членом взаимодействия в уравнениях поля можно пренебречь, поэтому асимптотика искомого решения совпадает с асимптотикой убывающего на бесконечности решения свободного уравнения поля

$$\phi \propto \frac{K_1(r)}{r} \propto \frac{e^{-r}}{r^{3/2}},$$

то есть при $\tau \rightarrow \infty$ решение имеет вид

$$\phi = A(\rho) \frac{\exp(-\sqrt{\mathbf{x}^2 + (\tau + \rho)^2})}{(\mathbf{x}^2 + (\tau + \rho)^2)^{3/4}},$$

где $A(\rho)$ — неизвестная функция, которую нужно найти, решая численно уравнения поля при условии, что при $r = \rho$ решение сингулярно. Этой асимптотике соответствует

$$b_{\mathbf{k}} = 2A(\rho) \frac{e^{-\omega_{\mathbf{k}} \rho}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}},$$

так что функционал W выражается через $A(\rho)$:

$$W = ET - n\theta - 8\pi A^2(\rho) e^{-\theta} \frac{K_1(2\rho - T)}{2\rho - T},$$

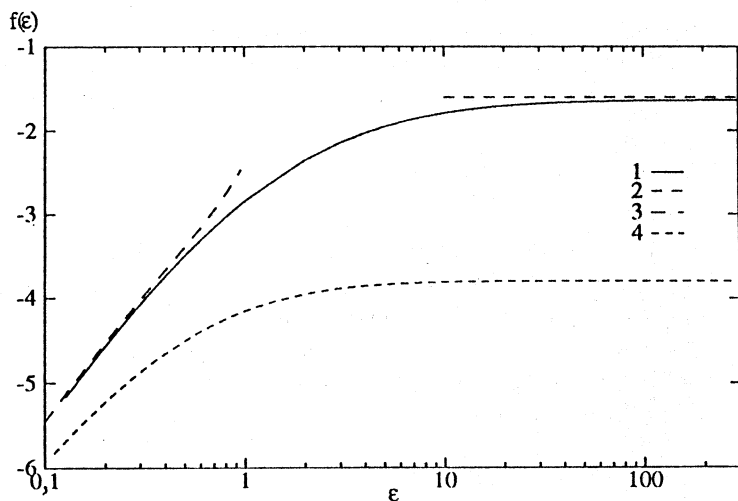


Рис.2. Зависимость функции $f(\epsilon)$: 1) результат $O(4)$ -симметричного вычисления; 2) оценка снизу для ультрарелятивистских конечных частиц; 3) низкоэнергетический аналитический результат (76); 4) оценка, полученная из анализа диаграмм [16], п.2.1.3

и становится функцией параметров ρ , T и θ . Седловые значения этих трех параметров определяются из уравнений

$$\frac{E}{n} = \frac{A'(\rho)}{A(\rho)} = \frac{K_2(2\rho - T)}{K_1(2\rho - T)}, \quad (83)$$

$$\theta = \ln \left\{ \frac{8\pi A^2(\rho)}{n} \frac{K_1(2\rho - T)}{2\rho - T} \right\}. \quad (84)$$

Таким образом, найдя множество решений сферически-симметричных уравнений поля, сингулярных на различных сферах $r^2 = \rho^2$, и из их асимптотик при $\tau \rightarrow \infty$ определив функцию $A(\rho)$, мы можем выразить седловые значения ρ , T и θ через E и n , решая алгебраические уравнения (83), (84). В результате этой процедуры получаем, что показатель экспоненты в сечении имеет вид

$$W_{\text{tree}}(E, n) = \frac{1}{\lambda} F_{\text{tree}}(\lambda n, \epsilon) = n \ln \frac{\lambda n}{16} - n + n f(\epsilon).$$

График функции $f(\epsilon)$ приведен на рис.2. При низких энергиях эти результаты совпадают с полученными из разложения по ϵ . Действительно, форма поверхности сингулярностей определяется, в общем случае, выражением

$$\tau(x) = \alpha x^2 + O(x^4) + \dots,$$

и при малых ϵ играет роль лишь первый член разложения, соответствующий большому радиусу кривизны [27]. Этот член в точности воспроизводится $O(4)$ -симметричными вычислениями, которые, таким образом, дают точный древесный ответ при малых энергиях. При $\epsilon \rightarrow \infty$ массовый член в уравнениях несуществен, и решение, а вместе с ним и $f(\epsilon)$, совпадают с вычисленными аналитически в предыдущем разделе. На рис.2 приведена также нижняя оценка, полученная из анализа диаграмм (см. п.2.1.3) и возникающая из неравенства (18).

4. КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ПЕТЛИ

В предыдущем разделе мы рассмотрели связь между классическими решениями уравнений поля и древесными сечениями. В действительности древесное приближение справедливо лишь при малом числе вылетающих частиц, то есть при $n\lambda \ll 1$. В наиболее интересном режиме, $n\lambda \sim 1$, пертурбативные вычисления показывают, что петлевые поправки становятся сравнимыми с древесным вкладом (см. пп.2.2.3, 2.2.4), и их необходимо учитывать. Оказывается, что для нахождения петлевых поправок также можно применять квазиклассическую технику [27]. Основная трудность при этом заключается в учете поправок по степеням λ к (46). Эти поправки при вычислении многочастичных сечений (см. (47), (49)) могут давать вклады, пропорциональные степеням n , и при достаточно больших n ($n\lambda \sim 1$) подавление степенями λ может компенсироваться степенями n . Пертурбативные вычисления, представленные в п.2.2.4, показывают, что так оно и происходит: k -петлевые поправки к амплитуде ведут себя как $(\lambda n^2)^k$ и сравнимы с древесным вкладом даже при $n \sim 1/\sqrt{\lambda}$.

Чтобы сформулировать метод квазиклассического вычисления экспоненты для сечения $F(\lambda n, \epsilon)$ во всех петлях, мы воспользуемся тем, что с экспоненциальной точностью матричный элемент (38) не зависит от оператора $\hat{O}$, и выберем $\hat{O}$ в удобном для нас виде. Рассмотрим амплитуду

$$\langle n | e^{i\Phi(0)} | 0 \rangle \quad (85)$$

и соответствующее этой амплитуде сечение « $j \rightarrow n$ ». Устремляя $j \rightarrow 0$, мы рассчитываем воспроизвести с экспоненциальной точностью сечение рассеяния $1 \rightarrow n$. При $j \sim 1/\sqrt{\lambda}$ сечение « $j \rightarrow n$ » можно вычислять квазиклассическим методом (появляющиеся функциональные интегралы являются седловыми, см. ниже). Однако при $j \sim 1/\lambda$ оператор $\hat{O}$ зависит параметрически от λ . Чтобы перейти к сечению $1 \rightarrow n$, мы воспользуемся подходом, аналогичным предложенному при изучении инстантонных переходов [43,48]. Проведем квазиклассические вычисления для $j \sim c/\sqrt{\lambda}$, где c — некоторая константа; при этом сечение будет иметь экспоненциальную форму:

$$\sigma_{j \rightarrow n} \sim e^{\frac{1}{\lambda} F(n\lambda, \varepsilon; c)}.$$

Затем устремим c к нулю и воспроизведем экспоненту для сечения $1 \rightarrow n$. Конечно, взятие предела $c \rightarrow 0$ является тонким местом вышеизложенного метода: этот предел может быть не гладким. Также *a priori* не ясно, воспроизведет ли он сечение $1 \rightarrow n$. Однако, ниже мы покажем, что в квантовой механике этот метод эквивалентен методу Ландау [34]; кроме того, воспроизведем результаты, полученные пертурбативными методами. Все это позволяет утверждать, что предел $c \rightarrow 0$ действительно дает экспоненту для сечения $1 \rightarrow n$. Рассмотрим, прежде всего, как этот метод работает в квантовой механике.

4.1. Метод Ландау в квантовой механике. Связь между формализмами источников и сингулярных решений легко проследить на примере метода Ландау в обычной квантовой механике.

Рассмотрим, например, в одномерной квантовой механике с потенциалом $V(x)$, изображенным на рис.3, матричный элемент перехода между состояниями с энергиями E_1 и E_2 . Нас интересует его классическое экспоненциальное подавление. Представим интересующий нас матричный элемент в виде

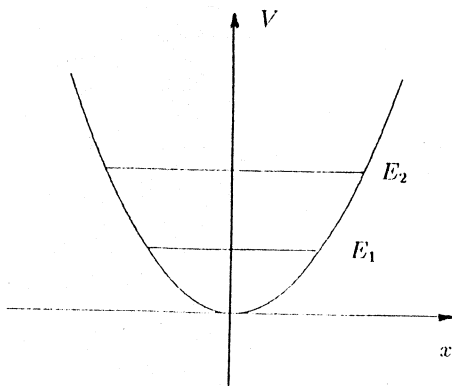


Рис.3. Квантово-механический потенциал

$$\langle E_2 | \hat{x} | E_1 \rangle = \lim_{j \rightarrow 0} \langle E_2 | e^{j\hat{x}} | E_1 \rangle,$$

где в оператор входит внешний источник $j(t) = j_0 \delta(t)$, константа $j_0 \rightarrow 0$ после вычисления матричного элемента. Пусть $P_E = |E\rangle\langle E|$ — проектор на состояние с энергией E , тогда его действие на состояние, характеризуемое некоторой координатой x , выглядит так:

$$P_E |x\rangle = |E\rangle\langle E|x\rangle = |E\rangle \cdot \psi_E^*(x),$$

где $\psi_E^*(x)$ — соответствующая волновая функция. В этих обозначениях

$$\langle E_2 | e^{j\hat{x}} | E_1 \rangle = \langle x_2 | P_{E_2} e^{j\hat{x}} P_{E_1} | x_1 \rangle [\psi_{E_1}^*(x_1)]^{-1} [\psi_{E_2}(x_2)]^{-1}. \quad (86)$$

Если

$$|\psi_{E_{1,2}}(x_{1,2})| \sim 1, \quad (87)$$

что реализуется, например, при выборе $x_{1,2}$ в классически разрешенной области, то с экспоненциальной точностью матричные элементы в левой и правой частях (86) совпадают. Мы предположим, что условие (87) выполнено, и вычислим с экспоненциальной точностью величину

$$\begin{aligned} \langle x_2 | P_{E_2} e^{j\hat{x}} P_{E_1} | x_1 \rangle &= \langle x_2 | \int dt_2 e^{-i(\hat{H} - E_2)t_2} e^{j\hat{x}} \int dt_1 e^{i(\hat{H} - E_1)t_1} | x_1 \rangle = \\ &= \int dt_1 dt_2 e^{iE_2 t_2 - iE_1 t_1} \langle x_2 | e^{-i\hat{H}t_2} e^{j\hat{x}} e^{i\hat{H}t_1} | x_1 \rangle. \end{aligned} \quad (88)$$

Заметим, что в обкладках матричного элемента в (88) стоит хронологическое произведение $T(U(t_2 - t_1) e^{j\hat{x}})$ оператора эволюции между моментами времени $(-t_1)$ и t_2 и $e^{j\hat{x}} = e^{j_0 \hat{x}(0)}$ (источник локализован при $t=0$). Это позволяет переписать (88) в виде функционального интеграла

$$\int dt_1 dt_2 e^{iE_2 t_2 - iE_1 t_1} \int_{\substack{x(t_2) = x_2 \\ x(-t_1) = x_1}} Dx e^{iS(t_2, -t_1) + j_0 x(0)}. \quad (89)$$

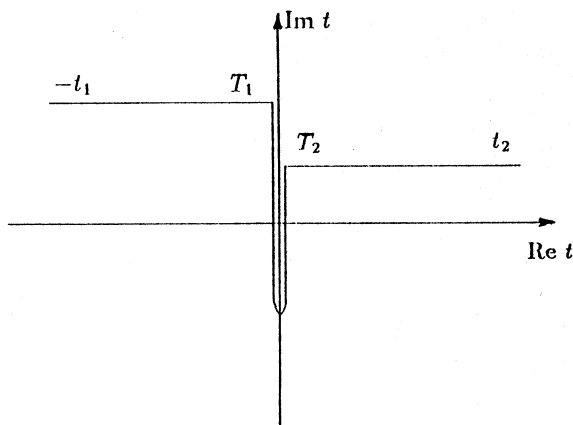


Рис.4. Контур интегрирования в комплексном времени

Интеграл по x , t_1 и t_2 вычислим методом перевала. При этом седловые значения t_1 и t_2 , вообще говоря, комплексные, а седловая траектория $x(t)$ будет определена на некотором контуре в комплексной плоскости времени, который удобно выбрать в виде, изображенном на рис.4. Седловое уравнение для функционального интеграла по $x(t)$ — это классическое уравнение движения,

$$i \frac{\delta S}{\delta x(t)} = -j_0 \delta(t),$$

а для обычного интеграла по $t_{1,2}$ условия экстремальности имеют вид

$$E_1 = \frac{\partial S}{\partial(-t_1)}, \quad E_2 = \frac{\partial S}{\partial t_2},$$

то есть E_1 и E_2 — энергии классического решения в начальном и конечном состояниях соответственно.

Решение $x(t)$ имеет, таким образом, следующий вид. При $t = -t_1$ координата равна x_1 , затем система эволюционирует в действительном времени до точки поворота (отрезок $[-t_1, T_1]$) с энергией $E = E_1$. В точке $t = T_1$ система переходит в классически запрещенную область и продолжает эволюционировать в евклидовом времени (туннелировать). В точке $t = 0$,

где сосредоточено действие внешнего источника, скорость $\dot{x}(t)$ испытывает скачок $\Delta\dot{x} = j_0$ (небольшой при небольших j_0). Энергия

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - V(x)$$

также испытывает скачок:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \dot{x} \Delta\dot{x} + (\Delta\dot{x})^2 = \dot{x} j_0 + O(j_0^2). \quad (90)$$

Далее система продолжает движение с энергией E_2 : до точки поворота T_2 в евклидовом времени, затем, на отрезке $[T_2, t_2]$ — в действительном, заканчивая движение в момент $t = t_2$ в точке x_2 . На частях контура, соответствующих действительному времени, координата $x(t)$ и скорость $\dot{x}(t)$, а стало быть и действие, вещественны, поэтому эти части, равно как и $\text{Re}(E_2 t_2 - E_1 t_1)$, дают вклад только в фазовый множитель, который нас не интересует. Вклад остальной части контура (между T_1 и T_2) равен $\exp(-S^{\text{Eucl}})$, где

$$S^{\text{Eucl}} = S_1 - S_2 \equiv \int_{T_1}^0 L_{E=E_1}^{\text{Eucl}} dt - \int_0^{T_2} L_{E=E_2}^{\text{Eucl}} dt,$$

$$L^{\text{Eucl}} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(x)$$

— евклидов лагранжиан системы, который вычисляется на соответствующем решении. Седловые значения мнимых частей t_1 и t_2 равны $\text{Im } t_1 = -T_1$, $\text{Im } t_2 = T_2$, поэтому весь интеграл (89) равен с экспоненциальной точностью

$$\exp \{ (E_2 T_2 - S_2) - (E_1 T_1 - S_1) + j_0 x(0) \}. \quad (91)$$

Рассмотрим теперь предел $j_0 \rightarrow 0$, в котором восстанавливается интересующий нас матричный элемент $\langle E_2 | \hat{x} | E_1 \rangle$, причем будем считать $\Delta E = E_2 - E_1$ фиксированным и конечным. В этом пределе классическая траектория становится сингулярной: как видно из (90), скачок в энергии остается конечным, только если $\dot{x} \rightarrow \infty$ одновременно с $j_0 \rightarrow 0$, так что $\dot{x} j_0 = \text{const}$. Если потенциал $V(x)$ сам по себе несингулярен и обращается в бесконечность при $x \rightarrow \pm \infty$, то условие $x(0) = \infty$ означает, что евклидова

траектория попадает в $x = +\infty$ (или $x = -\infty$) при $t = 0$. Таким образом, мы приходим к необходимости отыскания сингулярных решений евклидовых уравнений движения в полном соответствии с ВКБ-анализом [34].

Чтобы учесть вклад последнего члена в показателе экспоненты в (91) в пределе $j_0 \rightarrow 0$, следует аккуратно изучить поведение решения $x(t)$ при $t \sim 0$, где имеется сингулярность, $x(t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Точнее, пусть для определенности главная при $x \rightarrow \infty$ асимптотика потенциала есть $V(x) \sim ax^k$. Евклидова энергия при $t \rightarrow \mp 0$ сохраняет значение, равное $E_{1(2)}$:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - ax^k = E_{1(2)},$$

поэтому

$$\dot{x} = \sqrt{2(E + ax^k)} \simeq x^{k/2}.$$

С другой стороны, из (90) следует, что

$$\dot{x} \simeq \frac{E_2 - E_1}{j_0},$$

поэтому при $j_0 \rightarrow 0$ имеем

$$j_0 x(0) \simeq j_0 \left(\frac{E_2 - E_1}{j_0} \right)^{2/k} \sim j_0^{1-2/k}.$$

Следовательно, при наличии хотя бы слабой ангармоничности ($k > 2$) выполняется $j_0 x(0) \rightarrow 0$, и с экспоненциальной точностью получаем окончательно

$$\langle E_2 | \hat{x} | E_1 \rangle = \exp \{ - (S^{\text{tr}}(E_2) - S^{\text{tr}}(E_1)) \}, \quad (92)$$

где $S^{\text{tr}}(E_i) = E_i T_i - S_i$, $i = 1, 2$ — укороченное действие на каждом из участков евклидовой траектории. Формула (92) в точности совпадает с выражением для матричного элемента, вычисленного по методу Ландау [34]. Приведенный вывод устанавливает в случае одномерной квантовой механики соответствие между подходами, использующими формулировки с источниками и с сингулярными классическими решениями. Обобщение метода Ландау на случай нескольких измерений сделано в работе [49].

Перейдем теперь к рассмотрению многочастичных амплитуд в теории поля с использованием метода с источником.

4.2. Общий формализм. Здесь мы применим технику, кратко описанную в начале этого раздела, к вычислению многочастичных сечений в теории поля.

Воспользуемся формализмом когерентных состояний и рассмотрим вместо амплитуды (85) матричный элемент

$$A(j) = \langle \{b(\mathbf{k})\} | P_E e^{j\phi(0)} | 0 \rangle, \quad (93)$$

где P_E — проекционный оператор на пространство состояний с полной энергией E , который может быть записан в интегральной форме [42], так что (93) принимает вид

$$A(j) = \int d\eta e^{i\eta E} \langle \{b(\mathbf{k}) e^{i\omega\eta}\} | e^{j\phi(0)} | 0 \rangle.$$

Применяя к этому матричному элементу технику, описанную в п.3.1 (см. формулы (40), (41), (49), (50)), получим выражение для сечения в системе центра масс:

$$\begin{aligned} \sigma_{j \rightarrow n}(E) = & \int d\theta dT D b_{\mathbf{k}} D b_{\mathbf{k}}^* D \phi D \phi' \exp [ET - n\theta - \int d\mathbf{k} b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} e^{\omega T - \theta} + \\ & + B_i(0, \phi_i) + B_f(b_{\mathbf{k}}^*, \phi_f) + B_i^*(0, \phi_i') + B_f^*(b_{\mathbf{k}}, \phi_f') + \\ & + iS[\phi] - iS[\phi'] + j\phi(0) + j\phi'(0)], \end{aligned} \quad (94)$$

здесь $S[\phi]$ — классическое действие, B — граничные члены (см. (41)), $\theta = \ln \xi$, $T = i\eta$, интегрирование по полям включает в себя также интегрирование по ϕ_i , ϕ_f , ϕ_i' , ϕ_f' . Легко увидеть, что в режиме $\lambda \rightarrow 0$ с фиксированными $i\lambda$, $E\lambda$ и при $j = c/\sqrt{\lambda}$ интеграл (94) имеет седловой характер*. Как уже обсуждалось выше, нас в конечном итоге будет интересовать предел $c \rightarrow 0$.

Итак, считая, что $j \sim 1/\sqrt{\lambda}$, найдем седловую конфигурацию показателя экспоненты в интеграле (94). Заметим, что нулевых мод, связанных с трансляционной симметрией, нет, так как она явно нарушена членом $j\phi(0)$, но при этом $O(d)$ -симметрия остается, и мы можем искать $O(d)$ -симметричную седловую конфигурацию. Седловые уравнения можно разбить на две груп-

*Далее мы будем рассматривать теорию (7), но все наши рассуждения без труда обобщаются на случай произвольной бозонной теории (см. замечание после формулы (39)).

пы. Первая из них получается при вариации показателя экспоненты по ϕ , $\phi_{i,f}$, b_k^* и содержит уравнения для ϕ (мы положили массу равной единице):

$$\partial_\mu^2 \phi + \phi + \lambda \phi^3 = -ij \delta^{d+1}(x), \quad (95)$$

граничные условия

$$\phi(k) \sim e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (96)$$

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (b_k e^{-i\omega t + \omega T - \theta} + b_k^* e^{i\omega t}), \quad t \rightarrow +\infty \quad (97)$$

и аналогичные уравнения для ϕ' . Граничное условие (96) представляет собой обычное фейнмановское условие (вакуум в начальном состоянии), то есть требование положительной частотности поля при $t \rightarrow -\infty$. Условие (97) связывает положительно- и отрицательно-частотные компоненты поля между собой при $t \rightarrow +\infty$, его отличие от фейнмановского обусловлено наличием частиц в конечном состоянии. В интеграле (94) b_k и b_k^* — это независимые переменные интегрирования, однако можно считать, что для седловых значений выполнено $b_k^* = (b_k)^*$ (это соответствует единственности седловой конфигурации для интеграла (94)). При этом не составляет труда убедиться в том, что, если ϕ — решение задачи (95)—(97), то $\phi' = \phi^*$ — решение уравнений для ϕ' . Вторая группа уравнений, получаемых вариацией по T и θ , связывает энергию и число частиц с остальными переменными:

$$E = \int dk \omega b_k^* b_k e^{\omega T - \theta}, \quad (98)$$

$$n = \int dk b_k^* b_k e^{\omega T - \theta}. \quad (99)$$

Подставив решения уравнений (95)—(99) в интеграл (94), найдем

$$\sigma_{1 \rightarrow n}(E) = \lim_{j \rightarrow 0} \sigma_{j \rightarrow n}(E) = \lim_{j \rightarrow 0} e^{W(E, n, j)}, \quad (100)$$

$$W(E, n, j) = \frac{1}{\lambda} F(\lambda n, \varepsilon, j \sqrt{\lambda}) = ET - n\theta - 2\text{Im } S[\phi] + 2j \text{Re } \phi(0), \quad (101)$$

где ϕ — решение задачи (95)—(97), при этом T и θ должны быть найдены из уравнений (98) и (99). Кроме того, видно, что (101) является преобразованием Лежандра от $\text{Im } S(T, \theta) + \text{Re } j \phi(0, T, \theta)$ к $W(E, n, j)$. Таким образом, имеем

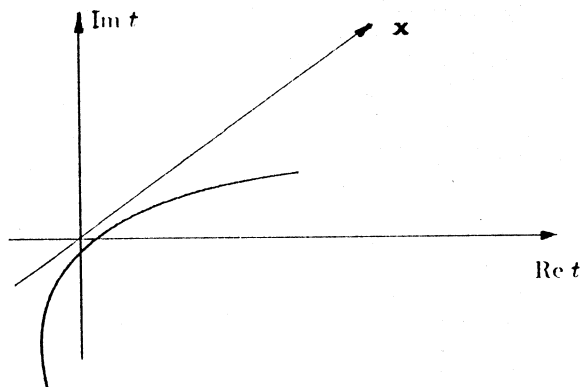
$$\frac{\partial W}{\partial E} = T, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = -\theta. \quad (102)$$

Рассмотрим теперь уравнения (98) и (99) более подробно. Физический смысл этих уравнений очень прост: они показывают, что E и n суть энергия и число частиц классической конфигурации поля* ϕ в его асимптотике $T_f \rightarrow \infty$. Так как уравнение (95) является однородным всюду, кроме точки $t = 0$, то энергия должна сохраняться отдельно при $t > 0$ и $t < 0$. В области $t > 0$ она совпадает с энергией конечного состояния и, таким образом, равна E . В области $t < 0$ мы можем вычислить энергию при $t \rightarrow -\infty$. Так как при $t \rightarrow -\infty$ ϕ содержит только фейнмановскую часть, то соответствующая энергия равна нулю. Таким образом, мы видим, что в точке $t = 0$ энергия испытывает конечный скачок $\Delta E = E$, что связано с присутствием δ -функционального источника.

Обсудим в общих чертах поведение решений граничной задачи при стремлении источника к нулю. При малых, но конечных j решение имеет особенность в пространстве Минковского только в точке $x = 0$, где действует источник. В комплексном времени решение, вообще говоря, имеет сингулярности на некоторой гиперповерхности $t = t(x)$. Так же, как и в квантовой механике, конечный скачок энергии поля при малом j возможен, только если поверхность сингулярностей подходит близко к точке $x = 0$, как схематично изображено на рис.5. В пределе $j \rightarrow 0$ поверхность сингулярностей касается точки $x = 0$, которая становится единственной точкой в пространстве-времени Минковского, где решение уравнения поля без источника с граничными условиями (96), (97) имеет сингулярность. Именно благодаря этой сингулярности происходит несохранение энергии при $j = 0$. Указанные соображения приводят к подходу [27], излагаемому в п.4.4, в котором источник сразу полагается равным нулю, а задача сводится к анализу поверхностей сингулярностей поля.

4.3. Первая квантовая поправка в $F(\lambda l, \epsilon)$ в низкоэнергетическом режиме. Покажем, что сформулированный выше квазиклассический подход приводит к тем же результатам для n -частичных сечений вблизи порога

*Мы всюду предполагаем, что решение $\phi(x)$ диссипирует на линейные волны при $t \rightarrow 0$ (см. (97)). Линейной классической волне с асимптотикой (97) естественным образом можно поставить в соответствие число частиц, которое и дается правой частью формулы (99).

Рис.5. Поверхность сингулярностей при малом j

реакций, что и пертурбативный анализ. Это послужит нетривиальной проверкой квазиклассического метода вычисления сечений многочастичных процессов; подчеркнем, что в его рамках мы восстановим не только древесный результат, но и (экспоненциальный) *однопетлевой вклад* в показатель экспоненты для сечения. Таким образом, мы работаем в режиме $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda n \ll 1$ и ожидаем, что функция $F(\lambda n, \varepsilon)$ имеет вид

$$F(\lambda n, \varepsilon) = F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon) + \text{const} (\lambda n)^2 + O(\lambda^3 n^3) + O(\varepsilon \lambda n), \quad (103)$$

где

$$F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon) = \lambda n \left(\ln \frac{\lambda n}{16} - 1 + \frac{d}{2} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\pi d} + 1 \right) \right) + O(\varepsilon). \quad (104)$$

В последнем выражении мы опустили все члены, содержащие степени ε , так как $\varepsilon \rightarrow 0$ (ср. с (77)). Итак, наша задача — восстановить древесный результат (104) и найти константу перед вторым членом в (103) в рамках квазиклассического подхода. Мы покажем, что эта константа равна $2\text{Re } B$, где B дается формулой (31). Заметим, прежде всего, что в случае малых λn показатель экспоненты при $j=0$ имеет вид

$$W(E, n) = \frac{1}{\lambda} [F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon) + O(\lambda n)].$$

Тогда из (102) следует, что

$$\theta = -\ln(\lambda n) + O(1).$$

Поэтому $\theta \gg 1$ при $(\lambda l) \ll 1$. Далее, решение уравнения (95) можно записать в виде формального ряда по j :

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} j^m \phi_m(x), \quad (105)$$

где $\phi_0(x)$ удовлетворяет однородному нелинейному уравнению и несингулярно в пространстве-времени Минковского, а $\phi_m(x)$ получается путем формального применения теории возмущений по j к уравнению (95). Как $\phi_0(x)$, так и $\phi_m(x)$ должны быть положительно-частотными при $t \rightarrow -\infty$ (см. (96)). Для $\phi_0(x)$ это означает, что эта функция положительно-частотна и при $t \rightarrow +\infty$ (следует из сохранения энергии поля, удовлетворяющего однородному уравнению). Напротив, компоненты $\phi_m(x)$ отрицательно-частотны при $t \rightarrow +\infty$, поскольку теория возмущений по j для уравнения (95) строится с помощью фейнмановского пропагатора во внешнем поле $\phi_0(x)$, который имеет только отрицательно-частотную часть при $t \rightarrow +\infty$. Граничное условие (97) показывает, что при больших θ отрицательно-частотная часть поля ϕ подавлена фактором $e^{-\theta}$ по сравнению с положительно-частотной, то есть ϕ_m малы относительно ϕ_0 при малых λl . Таким образом, формальное разложение (105) позволяет построить разложение решения по степеням $e^{-\theta} \sim \lambda l$. Этим мы сейчас и воспользуемся.

Для наших целей достаточно найти решение граничной задачи (95)—(99) в виде разложения (105), удерживая только линейные по j члены:

$$\phi = \phi_0 + j \phi_1 + O(j^2). \quad (106)$$

Подставляя это разложение в (95)—(99), мы получим уравнения для ϕ_0 :

$$\partial_\mu \phi_0 + \phi_0 + \lambda \phi_0^3 = 0,$$

$$\phi_0(\mathbf{k}) \sim e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow -\infty,$$

$$\phi_0(\mathbf{k}) = \frac{b_{\mathbf{k}}^*}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow +\infty \quad (107)$$

и для ϕ_1 :

$$(\partial_\mu^2 + 1 + 3\lambda \phi_0^2) \phi_1 = -i\delta^{d+1}(x),$$

$$\phi_1(\mathbf{k}) \sim e^{i\omega t}, \quad t \rightarrow -\infty,$$

$$\phi_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{j} \frac{b_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t + \omega T - \theta}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (108)$$

Заметим еще раз, что, согласно (107), функция ϕ_0 имеет только одну частотность. В разд.3 мы уже говорили (см. обсуждение после формулы (78)), что выражение (104) получается, если в качестве ϕ_0 взять пространственно-независимое евклидово решение (58). Это решение сингулярно на гиперплоскости $\tau=0$. При $j \neq 0$, как уже говорилось выше, поверхность сингулярностей в общем случае не должна проходить через точку $\tau=0$, поэтому мы выберем в качестве решения ϕ_0 в действительном времени функцию

$$\phi_0 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{\operatorname{sh}(it - \alpha)}, \quad (109)$$

где $\alpha > 0$ — некоторая константа. Очевидно, что (109) сингулярна на плоскости $\tau = -\alpha$, при этом предполагается, что при выключении источника α также стремится к нулю. Кроме того, ϕ_0 действительно является решением задачи (107). Найдем также $b_{\mathbf{k}}^*$, соответствующие (109) (воспользуемся для этого определением (42) и учтем, что $\alpha > 0$):

$$b_{\mathbf{k}}^* = \sqrt{\frac{16}{\lambda}} \sqrt{\omega} (2\pi)^{d/2} \delta(\mathbf{k}) e^{-\alpha}. \quad (110)$$

Решение задачи (108) в поле (109) может быть найдено из выражения для пропагатора $D(x, x')$ (см. п.2.2.3) сдвигом τ и переходом к действительному времени:

$$\phi_1(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \phi_1(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

$$\phi_1(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} W} (f_1^\omega(t) f_2^\omega(0) \theta(-t) + f_2^\omega(t) f_1^\omega(0) \theta(t)), \quad (111)$$

где

$$f_1^\omega(t) = e^{\omega(it - \alpha)} \left(\omega^2 + 2 - 3\omega \operatorname{cth}(it - \alpha) + \frac{3}{\operatorname{sh}^2(it - \alpha)} \right),$$

$$f_2^\omega(t) = f_1^{-\omega}(t), \quad W = 2\omega(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4).$$

Заметим, что (111) имеет правильное поведение при $t \rightarrow \pm \infty$: при $t > 0$ поведение ϕ_1 определяется функцией f_2^ω , имеющей только фейнмановскую часть при $t > 0$; при $t < 0$, наоборот, функция f_1^ω имеет фейнмановскую часть, и она определяет поведение ϕ_1 . Исследуем более внимательно асимптотику $\phi_1(\mathbf{k})$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \phi_1^{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\frac{e^{-i\omega t}(\omega^2 - 3\omega + 2)f_1(0)}{W} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^{d/2} 2\omega(\omega^2 + 3\omega + 2)} \frac{3}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (112)$$

Так как в дальнейшем мы устремим j к нулю, и, следовательно, α также должна стремиться к нулю, то в последнем равенстве мы удержим только наиболее сингулярный член при $\alpha \rightarrow 0$.

Сравнивая (112) с граничным условием в (108), находим

$$b_{\mathbf{k}} = \frac{j}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{2\omega}(\omega^2 + 3\omega + 2)} \frac{3}{\alpha^2} e^{-\omega T + \theta}. \quad (113)$$

Отметим, что при больших T (большие T соответствуют малым энергиям, как мы сейчас убедимся) эта функция сосредоточена вблизи $\mathbf{k} = 0$, т.е. $b_{\mathbf{k}} \sim \delta(\mathbf{k})$. Это позволяет удовлетворить условию $b_{\mathbf{k}} = b_{\mathbf{k}}^*$, т.е. приравнять (110) и (113). В результате получаем соотношение между j и α :

$$j = \sqrt{\frac{32}{\lambda}} 2\alpha^2 (2\pi T)^{d/2} e^{T - \theta}. \quad (114)$$

Подставив это выражение в $b_{\mathbf{k}}$, с учетом условий (98) и (99), получим

$$n = \frac{16}{\lambda} (2\pi T)^{d/2} e^{T - \theta}, \quad (115)$$

$$\epsilon = \frac{d}{2T}. \quad (116)$$

Теперь из уравнений (115) и (114) имеем

$$j = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} n \alpha^2, \quad (117)$$

так что α действительно стремится к нулю при $j \rightarrow 0$, и, таким образом, $\phi(0)$ становится сингулярной. Из (115) и (116) видно, как и ожидалось, что $\theta \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow 0$, и $T \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Действие на поле $\phi = \phi_0 + j\phi_1$ с точностью j^2 легко вычисляется интегрированием по частям с учетом уравнений поля. Имеем

$$2\operatorname{Re} j\phi(0) - 2\operatorname{Im} S[\phi] = 2\operatorname{Re} j\phi_0(0) + j^2\operatorname{Re} \phi_1(0) - n. \quad (118)$$

На основании (109) и (117) видно, что первый член в правой части (118) при $j \rightarrow 0$ вклада не дает. Второй член, напротив, дает вклад, который легко вычисляется. Для этого найдем

$$\phi_1(0) = \frac{4}{\alpha^4} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \frac{9}{4W} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{4B}{\alpha^4}. \quad (119)$$

Подставив теперь выражения (115)—(119) в формулу (101) и устремив j к нулю (соответственно и $\alpha \rightarrow 0$), имеем

$$F(\lambda n, \varepsilon) = F_{\text{tree}}(\lambda n, \varepsilon) + 2\operatorname{Re} B(\lambda n)^2, \quad (120)$$

что полностью согласуется с пертурбативными вычислениями. Заметим, что аналогичные вычисления можно провести и для теории (7) с нарушенной симметрией $\phi \rightarrow -\phi$.

4.4. Формализм сингулярных решений. Остановимся теперь на другой формулировке классической граничной задачи для вычисления многочастичных сечений (мы будем следовать работе [27]). Как уже отмечалось, процедура вычисления матричного элемента в присутствии источника с последующим устремлением $j \rightarrow 0$ приводит к сингулярным классическим решениям, позволяющим изучать переходы между состояниями с различной энергией. Рассмотрим более подробно структуру сингулярностей решения классической граничной задачи (95)—(99) при $j \rightarrow 0$. В пространстве Минковского решение сингулярно в точке $x = 0$, однако при аналитическом продолжении на комплексное время поле $\phi(x)$, в общем случае, сингулярно на некоторой d -мерной гиперповерхности. Для удобства изложения будем предполагать, что эта гиперповерхность целиком лежит в мнимом (евклидовом) времени и может быть описана уравнением $\tau = \tau_0(x)$, причем $\tau_0(0) = 0$ и $\partial_x \tau_0(0) = 0$. Этого предположения можно было бы не делать; результат от

этого не изменится. Из уравнения движения в случае модели (7) следует, что вблизи сингулярности поле ведет себя как

$$\phi(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{1}{l(x)},$$

где $l(x)$ — расстояние от точки x до поверхности сингулярности. В то же время глобально поверхность сингулярности не фиксирует решение единственным образом; для однозначного определения поля требуется задать, например, граничные условия на бесконечности.

Пусть $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ — решения классических уравнений поля с одной и той же поверхностью сингулярностей, но с различными энергиями, причем

$$\phi_1 \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty, \quad (121)$$

$$\phi_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (b_k e^{i\omega_k T - \theta - i\omega_k t} + b_{-k}^* e^{i\omega_k t}) \text{ при } t \rightarrow +\infty. \quad (122)$$

Данные граничные условия соответствуют тому, что поле ϕ определено (при фиксированном x) на контуре в комплексной плоскости времени (см. рис.6). Поле ϕ_1 определено на мнимой (евклидовой) оси времени $(i\infty; i\tau_0)$; в точке τ_0 поле сингулярно; на отрезке $(i\tau_0, 0)$ и на действительной полуоси $(0, \infty)$ определено поле ϕ_2 (на отрезке евклидовой оси времени $(0, i\tau_0)$ определены оба поля).

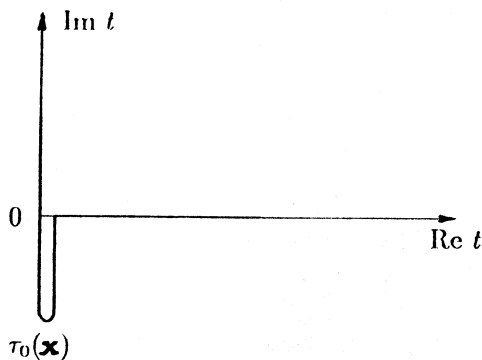


Рис.6. Контур при фиксированном x

В общем случае ϕ_1 и ϕ_2 не совпадают в точке $t=0$, что соответствует скачку поля ϕ при $t=0$ для любых x (а не только в точке $t=x=0$). Стало быть, в общем случае поля ϕ_1 и ϕ_2 в совокупности не представляют собой решение нашей граничной задачи. Однако в частном случае, когда $\phi_1(0, x) = \phi_2(0, x)$ для всех x , кроме $x=0$, описанное поле будет решением.

Чтобы выделить этот частный случай, рассмотрим евклидово действие $S_E[\phi]$, равное сумме действий полей ϕ_1 и ϕ_2 вдоль соответствующих частей контура:

$$S_E[\phi] = - \int_{+\infty}^{\tau_0(\mathbf{x})} d\tau d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + V(\phi_1) \right) - \int_{\tau_0(\mathbf{x})}^0 d\tau d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 + V(\phi_2) \right) - \\ - i \int_0^\infty dt d\mathbf{x} L(\phi_2). \quad (123)$$

Вообще говоря, первые два слагаемых расходятся, ибо в точке $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$ поле имеет особенность. Однако направления интегрирования для них противоположны, и аккуратный учет поведения решений вблизи сингулярности приводит к сокращению расходимостей. Для этой цели можно, например, регуляризовать поле ϕ в сингулярности, положив его значение на поверхности сингулярности равным большому, но конечному числу Φ_0 , и устремив $\Phi_0 \rightarrow \infty$ после вычисления действия.

Покажем, что для нахождения поверхности сингулярности, соответствующей решению граничной задачи, следует экстремизировать по всевозможным поверхностям $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, проходящим через точку $\tau = \mathbf{x} = 0$, действительную часть евклидова действия (123) $\text{Re } S_E[\phi]$.

Регуляризуем поля $\phi_1(\mathbf{x})$ и $\phi_2(\mathbf{x})$ указанным выше способом. Введем на поверхности сингулярности $\mathcal{A}$, определенной условием $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, координаты $i = 1, \dots, d$. (Под поверхностью сингулярности здесь и далее будем подразумевать поверхность, где $\phi_1 = \phi_2 = \Phi_0$). Обозначим скачок нормальной производной поля ϕ на этой поверхности

$$j(s_i) = \partial_n(\phi_1 - \phi_2). \quad (124)$$

Тогда поле ϕ является решением классических уравнений с источником, распределенным по поверхности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$:

$$\frac{\delta S_E}{\delta \phi} = j(\mathbf{x}) = \int d\sigma j(s_i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu(s)), \quad (125)$$

где интегрирование ведется по поверхности $\tau = \tau_0(\mathbf{x})$, мера $d\sigma$ включает

$\prod_{i=1}^d ds_i$ и метрику на поверхности $\mathcal{A}$.

Покажем, прежде всего, что после экстремизации $\text{Re } S_E[\phi]$ по поверхностям сингулярности определенный в (125) источник будет локализован в точке $x=0$ ($j(x) \sim \delta(x)$). Пусть поверхность сингулярностей $\mathcal{A}$ слегка деформирована до поверхности $\mathcal{A}'$, так что каждая лежащая на ней точка x_μ сдвинута на $\delta x_\mu = n_\mu \delta x(s)$, где n_μ — зависящий от положения точки на поверхности единичный вектор нормали к поверхности. Нас интересуют поверхности, проходящие через точку $x=0$, поэтому потребуем $\delta x_\mu|_{x=0} = 0$. Полученная после деформации новая поверхность сингулярностей соответствует новым решениям, $\phi'_{1,2} = \phi_{1,2} + \delta\phi_{1,2}$. Вариация $S[\phi_1]$ связана с вариацией подынтегрального выражения и с изменением пределов интегрирования за счет изменения $\tau_0(x)$; при малых δx она может быть представлена в виде поверхностного интеграла

$$\delta S_E[\phi_1] = \int_{\mathcal{A}} d\sigma \left[(\partial_\mu \phi_1 \cdot n_\mu) \delta\phi - \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + V(\phi_1) \right) \delta x(s) \right],$$

где

$$\delta\phi(x_\mu) = \phi'(x_\mu) - \phi(x_\mu) = \phi'(x_\mu) - \phi'(x_\mu + \delta x_\mu) = -(\partial_\mu \phi \cdot n_\mu) \delta x(s),$$

поэтому

$$\delta S_E[\phi_1] = \int_{\mathcal{A}} d\sigma \left[\frac{1}{2} (\partial_n \phi_1)^2 - V(\phi_1) \right] \quad (126)$$

(мы использовали тот факт, что в выбранной регуляризации поле ϕ_1 постоянно и равно Φ_0 на поверхности $\mathcal{A}$, а поле ϕ'_1 — на поверхности $\mathcal{A}'$).

Вариация части действия, связанной с полем ϕ_2 , вычисляется аналогично с единственной разницей: появляется ненулевой граничный член при $t = +\infty$, равный

$$-i \int dx \partial_0 \phi_2 \delta\phi_2|_{t=+\infty},$$

который, однако, с учетом асимптотики поля ϕ_2 при $t \rightarrow +\infty$ (122), оказывается чисто мнимым, то есть в $\text{Re } S_E[\phi]$ вклада не дает:

$$\delta S_E[\phi_2] = - \int_{\mathcal{A}} d\sigma \left[\frac{1}{2} (\partial_n \phi_2)^2 - V(\phi_2) \right]. \quad (127)$$

С учетом (126) и (127) вариация действительной части (123) оказывается равной

$$\delta \operatorname{Re} S_E[\phi] = \frac{1}{2} \int_A d\sigma ((\partial_n \phi_1)^2 - (\partial_n \phi_2)^2) \delta x(s).$$

В пределе $\Phi_0 \rightarrow \infty$ разница между $\partial_n \phi_1$ и $\partial_n \phi_2$ невелика, поэтому

$$(\partial_n \phi_1)^2 - (\partial_n \phi_2)^2 \approx 2\partial_n \phi \cdot \partial_n (\phi_1 - \phi_2),$$

откуда с учетом (124)

$$\delta \operatorname{Re} S_E[\phi] = \int_A d\sigma (\partial_n \phi) \delta x(s) j(s).$$

Требование $\delta \operatorname{Re} S_E[\phi] = 0$ для вариаций поверхности $\mathcal{A}$, подчиняющихся условию $\delta x|_{x=0} = 0$, может быть удовлетворено только при $j(x) = j_0 \delta(x)$. Стало быть, всюду на поверхности $\mathcal{A}$, кроме точки $x=0$, производные совпадают: $\partial_n \phi_1 = \partial_n \phi_2$, а также равны и сами поля, $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Следовательно, поля совпадают и при $\tau_0(x) < \tau < 0$ (кроме точки $\tau = x = 0$). При снятии регуляризации, то есть при взятии предела $\Phi_0 \rightarrow \infty$, точка $x=0$ становится сингулярной; чтобы скачок энергии в этом пределе остался конечным, надо потребовать $j_0 \rightarrow 0$. Таким образом, поле ϕ удовлетворяет обычным классическим уравнениям без источника и граничным условиями (121), (122) и сингулярно в пространстве Минковского в единственной точке $x=0$, то есть является решением граничной задачи (95)—(99).

Итак, для нахождения решения граничной задачи (95)—(99) нужно экстремизировать действительную часть евклидова действия (123) (или мнимую часть соответствующего действия в пространстве Минковского) по всем поверхностям сингулярности $\mathcal{A}$, проходящим через точку $t = x = 0$. Данная формулировка позволяет получить несколько иным способом те же результаты, что и при решении уравнений с источником с последующим устремлением $j_0 \rightarrow 0$ (см. п.4.2) [27]. В частности, именно в рамках данной формулировки проще всего получить рецепт вычисления древесных сечений, обсуждавшихся в разд.3. Преимуществом данной формулировки является то, что можно сразу решать уравнения без источника. Однако в общем случае оказывается, что нелегко определить, на каких поверхностях искомое решение должно быть сингулярно, — вообще говоря, требуется экстремизировать действие по бесконечнопараметрическому множеству поверхностей. В простейших случаях вид поверхности удается определить. Поверх-

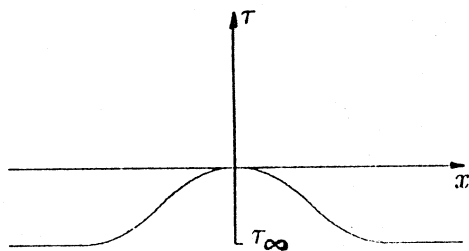


Рис.7. Поверхность сингулярностей, описывающая процессы точно на пороге

ности сингулярностей, возникающие в задаче о древесных сечениях, обсуждались в разд.3. Классическое решение (25), описывающее многочастичное рождение на пороге в древесном приближении (то есть в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\lambda l \rightarrow 0$) сингулярно на плоскости $\tau = 0$. Заметим (см. п.4.2), что в древесном приближении энергия решения сохраняется, то есть источник в точке $x = 0$ эффективного влияния не оказывает. При учете квантовых поправок, то есть при конечных λl , энергия решения уже не постоянна; в терминах поверхности сингулярности этому соответствует искривление последней вблизи источника. Однако при вычислении сечения вблизи порога реакции деформация поверхности должна быть локальной, и при больших $|x|$ кривизна поверхности должна стремиться к нулю, что означает $\tau_0(x) \rightarrow \tau_\infty = \text{const}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Соответствующая поверхность сингулярности имеет форму, схематически изображенную на рис.7.

Изложенная в данном разделе постановка граничной задачи эквивалентна формулировке с источником, и в каждом конкретном случае та или иная из них может оказаться более удобной.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многочастичные процессы представляют собой замечательный пример того, что в некоторых случаях физически наблюдаемые величины в квантовой теории поля — сечения процессов «мало $\rightarrow$ много» — могут быть вычислены квазиклассическими методами с учетом петлевых, то есть квантовых, поправок. Соответствующий метод представляет собой обобщение на теорию поля метода Ландау вычисления квазиклассических матричных элементов в квантовой механике. Две основные черты этого метода позволяют применять его в рассматриваемой задаче. Во-первых, используются сингулярные классические решения, что дает возможность вычислять матричные элементы между состояниями с различной энергией. Во-вторых, вычисляемые с помощью метода Ландау матричные элементы в квантовой механике с экспоненциальной точностью зависят лишь от состояний, между которыми вычисляется элемент, и не зависят от выбора оператора, заключенно-

го между обкладками. На языке теории поля этому соответствует независимость (с экспоненциальной точностью) сечений многочастичных процессов от числа частиц в начальном состоянии (если оно не велико) и позволяет при вычислении амплитуд вводить вместо операторов рождения исходных частиц оператор, содержащий внешний источник (устремляя затем величину источника к нулю). Экспоненциальный характер введенного оператора с источником дает возможность вычислять появляющиеся функциональные интегралы методом перевала; в то же время после устремления величины источника к нулю оператор параметрически не содержит экспоненциальных факторов, то есть, с точки зрения Ландау, неотличим от операторов рождения исходных частиц. Сингулярная форма источника приводит к требуемому скачку энергии, который невозможен в гладком классическом решении из-за сохранения энергии.

Необходимость использования непerturbативного метода в данном случае связана с неприменимостью обычной теории возмущений для процессов, в которых число участвующих частиц n столь велико, что большой параметр n «конкурирует» с малой константой связи λ , так что разложение по λ перестает работать. Соответствующим образом модифицированная теория возмущений требует уже в первых порядках учета вкладов всех членов обычного петлевого разложения, что не позволяет продвинуться в область достаточно больших n . Все имеющиеся пертурбативные результаты подтверждают квазиклассическую форму (6) многочастичных сечений и независимость их от начального состояния, что указывает на адекватность метода Ландау в данной задаче. Описанный в этом обзоре метод воспроизводит все результаты теории возмущений, включая известные петлевые поправки, и позволяет продвинуться за ее пределы. В частности, в древесном приближении сечение может быть вычислено при любых кинетических энергиях конечных частиц. Учет петлевых поправок вне порога требует значительно более сложных численных расчетов, хотя принципиально может быть проведен в рамках предложенной схемы.

Хотелось бы остановиться на нерешенных проблемах и возможных путях дальнейшего углубления знаний о многочастичных процессах.

1. Хотя все имеющиеся результаты в модели (7) свидетельствуют об экспоненциальном подавлении многочастичных сечений, они не исключают возможности того, что функция $F(\lambda n, \epsilon)$, стоящая в показателе экспоненты (6), при большом числе частиц ($\lambda n \gg 1$) окажется близкой к нулю, то есть сечения достигают унитарного предела и не подавлены. Подтвердить или исключить эту возможность могут только вычисления петлевых поправок при произвольных ϵ ; для проведения соответствующих численных расчетов требуется изучение структуры сингулярностей соответствующих комплексных классических решений в комплексной плоскости времени.

2. Как уже отмечалось, в модели ϕ^4 с нарушенной дискретной симметрией $\phi \leftrightarrow -\phi$ коэффициент B в показателе экспоненты для амплитуд $1 \rightarrow n$ на пороге (35) имеет положительную действительную часть, что могло бы служить указанием на экспоненциальное усиление амплитуд, не согласующееся с условием унитарности. При больших n , однако, следующие члены разложения экспоненты по λl могут изменить знак показателя; кроме того, при сходе с порога амплитуды могут убывать достаточно быстро, чтобы в полном сечении функция $F(\lambda l, \epsilon)$ была отрицательной. (Напомним, что выражение (35) — это результат учета первых петлевых поправок, и аргументы п.2.1.3 не противоречат указанной возможности). Объяснение необычного поведения амплитуд в данной модели может быть связано с появлением непертурбативных конфигураций в промежуточных состояниях, подобных использованному в [21] для вычисления амплитуд на пороге. Роль данных конфигураций при ненулевых кинетических энергиях до конца не ясна.

3. В приложении продемонстрировано, что в некоторых случаях сокращения между диаграммами приводят к нулям амплитуд, соответствующим занулению предэкспоненциального множителя в квазиклассическом подходе. По-видимому, за этот эффект в описанных случаях отвечают некоторые классические симметрии, явный вид (генераторы) которых известен далеко не во всех случаях. Также не доказано, что данное явление свойственно только пороговой кинематике (все известные случаи зануления амплитуд имеют место только на пороге) и только древесным (или эффективно древесным, как в $O(N)$ -модели) диаграммам. Иными словами, нет уверенности, что случайные (или вызванные неизвестной симметрией) сокращения не приведут к занулению в некоторых моделях коэффициентов, стоящих перед экспонентами в формулах (6) и (35).

4. Существует (по крайней мере, в принципе) возможность нетривиальной непертурбативной проверки гипотезы (6) для двумерных интегрируемых моделей*. В некоторых моделях благодаря точно известному виду S -матрицы существуют точные аналитические выражения для амплитуд типа $1 \rightarrow n$ при произвольном n (см., напр., [50]) (в контексте интегрируемых теорий эти матричные элементы обычно называют формфакторами). Например, для модели sine-Gordon явный вид таких матричных элементов приведен в работах [51,52]. Разумеется, точный матричный элемент $\langle 0 | \phi | n \rangle$ зависит от n параметров — импульсов конечных частиц. Проинтегрировав квадрат амплитуды по фазовому объему и взяв предел $\lambda \rightarrow 0$ при фиксированных λl и ϵ , можно проверить, будет ли полученное

* Авторы благодарны А.Замолотчикову, указавшему на эту возможность.

сечение действительно иметь вид (6). К сожалению, из-за весьма сложной зависимости амплитуд от импульсов в случае больших n такую программу пока выполнить не удалось.

Таким образом, ряд вопросов, связанных с многочастичными процессами в скалярных теориях поля, пока остается открытым. Мы, тем не менее, надеемся, что описанный квазиклассический метод может дать ответ по крайней мере на некоторые из них.

Авторы глубоко признательны своим коллегам из отдела теоретической физики ИЯИ РАН за многочисленные полезные обсуждения. Мы благодарны Ф.Л.Безрукову, П.Г.Тинякову и Д.Т.Шону за сотрудничество в изучении различных вопросов, затронутых в этом обзоре. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 96-02-17449а, и INTAS, грант 94-2352. Работа М.Л. и С.Т. частично поддержана ISSEP в рамках программы «Соросовские аспиранты».

ПРИЛОЖЕНИЕ

НУЛИ АМПЛИТУД И КЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ

Классический метод, описанный в настоящем обзоре и позволяющий продвинуться за рамки теории возмущений при изучении многочастичных процессов, дает информацию о матричном элементе или о полном сечении с экспоненциальной точностью, то есть учитывает только главное поведение вида (6). Коэффициент перед экспонентой может представлять собой произвольную функцию, пропорциональную некоторой степени λ в пределе $\lambda \rightarrow 0$ при фиксированном λl . В общем случае данное приближение учитывает главный вклад в рассматриваемом пределе. Однако при вычислении конкретных матричных элементов может оказаться, что предэкспоненциальный множитель при определенной кинематике имеет нули или полюсы, и тогда аргументы о квазиклассической вычисляемости и независимости от оператора перестают работать. (Аналогичная ситуация возникает и в квантовой механике, если в качестве оператора выбрать, например, s -число. Его матричный элемент между ортогональными состояниями равен нулю, что не может быть получено квазиклассическими методами).

К сожалению, заранее сказать, имеем ли мы дело с подобным случаем, невозможно; определить наличие нулей или полюсов в предэкспоненте можно, точно вычислив (хотя бы в главном порядке) амплитуду конкретного процесса.

Подобные явления известны для пороговой кинематики, в частности, для процессов $2 \rightarrow n$. Полюсы появляются при определенных соотношениях между энергиями налетающих частиц в древесном приближении, а при

учете петлевых поправок они смещаются (см. п.2.2.4 и [35]). В значительно более широком спектре случаев известно явление зануления древесных амплитуд, на котором остановимся подробнее.

Рассмотрим процесс $2 \rightarrow n$ на пороге в древесном приближении. Пропагатор $D(\tau, \tau'; \mathbf{p})$, введенный в п.2.2.3, имеет отличные от нуля вычеты лишь в точках $\omega = 2$ и $\omega = 4$; это означает, что в точности равны нулю древесные амплитуды $2 \rightarrow n$, кроме $n = 2$ и $n = 4$ [29,15]. В случае нарушенной дискретной симметрии единственной ненулевой амплитудой такого типа является амплитуда $2 \rightarrow 2$ [30]. Более подробный анализ [13] показал, что при рассмотрении моделей с двумя полями χ и ϕ (частным случаем которых при $\phi = \chi$ можно считать (7)), зануление древесных амплитуд $2\chi \rightarrow n\phi$ на пороге имеет место лишь при определенных параметрах лагранжиана (см. ниже). В то же время в модели с мягко нарушенной $O(2)$ -симметрией

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{m_1^2}{2} \phi^2 - \frac{m_2^2}{2} \chi^2 - \lambda (\phi^2 + \chi^2)^2 \quad (128)$$

все древесные амплитуды $n_1 \chi \rightarrow n_2 \phi$ для покоящихся реальных частиц равны нулю [23], кроме $n_1 = n_2 = 2$ ($n_1 = 1, n_2 = 2$ при нарушенной симметрии). Зануление древесных амплитуд $2 \rightarrow n$ на пороге было обнаружено в ряде других моделей, включая бозонный сектор электрослабой теории [53—55], линейную σ -модель [53] и модель sine-Gordon. Однопетлевой вклад в амплитуду $2 \rightarrow n$ в теории (7) отличен от нуля [56,35], однако в $O(N)$ -симметричных обобщениях модели (7) зануление амплитуд $2 \rightarrow n$ сохраняется с учетом главных петлевых поправок при $N \rightarrow \infty$ [31].

Причина зануления древесных амплитуд лежит в (явной или скрытой) симметрии рассматриваемой модели. Так как речь идет о древесных амплитудах, соответствующие симметрии должны проявляться на классическом уровне. Наиболее известным примером является модель sine-Gordon, в которой классические симметрии из-за бесконечного числа законов сохранения в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени приводят к факторизации S -матрицы и занулению всех амплитуд, кроме $2 \rightarrow 2$ (см., напр., [57,51] и ссылки там). Из всех перечисленных случаев зануления амплитуд явный вид ответственной за него классической симметрии (под явным видом мы понимаем выражения для генераторов или сохраняющихся зарядов в терминах классических полей) известен [23] только для системы (128), сужение которой на нулевые пространственные импульсы представляет собой простейший случай системы Гарнье — известной интегрируемой системы классической механики (см., например, [58]).

Для нахождения древесных амплитуд $2 \rightarrow n$ в общем случае требуется рассмотреть возмущения вокруг классического решения, генерирующего амплитуды $1 \rightarrow n$ (амплитуды определяются через вычеты пропагатора в поле соответствующего решения). Производящая функция для амплитуд $2 \rightarrow n$ должна удовлетворять линеаризованному уравнению движения в поле классического решения (в случае пороговой кинематики это будет уравнение типа Шредингера). Большинство известных случаев зануления можно связать [53] с теорией двух полей ϕ и χ , взаимодействующих с потенциалом

$$V_{\text{int}}(\phi, \chi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{\xi}{2} \phi^2 \chi^2;$$

в этом случае оператор в соответствующем линейном уравнении имеет вид

$$-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 - \frac{2\xi}{\lambda} \frac{1}{\text{ch}^2 \tau}. \quad (129)$$

Когда $2\xi/\lambda = m(m+1)$, где m — целое число, это оператор Шредингера из задачи о безотражательных потенциалах [59], и зануление амплитуд имеет место лишь при таком соотношении между ξ и λ , в противном случае амплитуды растут факториально с ростом числа частиц [13]. Оператор (129) возникает также в задачах об устойчивости солитонов в $(1+1)$ -мерных теориях, что указывает на возможную связь интегрируемости последних и скрытой интегрируемости четырехмерных теорий на пороге [59].

Несколько иная формулировка данного свойства систем с занулением амплитуд на пороге [60], проясняющая общие черты с двумерными теориями, связана с функциями Бейкера — Ахиезера*, которые являются собственными функциями конечнозонных операторов Шредингера. Пусть малые возмущения около классического решения, генерирующего амплитуды $1 \rightarrow n$, описываются линейным оператором $(\hat{L} - \omega^2)$ (в описанном случае $\hat{L} = \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{m(m+1)}{\text{ch}^2 \tau}$). Тогда амплитуды $2 \rightarrow n$ равны вычетам собственной

*Функции Бейкера — Ахиезера — это функции на римановых поверхностях, имеющие конечное число существенных особенностей (экспонента на комплексной плоскости) [61,62]. Авторы признательны К.Селиванову, В.Спиридонову и Е.Троицкому за указание на эти работы.

функции оператора L , параметризованной собственным числом ω . Указанная собственная функция является функцией Бейкера — Ахиезера, определенной на спектральной кривой со спектральным параметром ω (из-за фейнмановской асимптотики $e^{-i\omega t}$ она имеет существенную особенность при $t = \infty$). Когда оператор $\hat{L}$ является оператором Лакса некоторой интегрируемой системы с конечнозонным спектром, функция Бейкера имеет конечное число полюсов [61], что соответствует конечному числу отличных от нуля амплитуд $2 \rightarrow n$. В работе [60] приведен ряд конкретных примеров интегрируемых систем, связанных через оператор $\hat{L}$ с моделями, в которых зануляются амплитуды $2 \rightarrow n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ringwald A. — Nucl. Phys., 1990, vol.B330, p.1.
2. Espinosa O. — Nucl. Phys., 1990, vol.B343, p.310.
3. Mattis M.P. — Phys. Rep., 1992, vol.214, p.159.
4. Tinyakov P.G. — Int. J. Mod. Phys., 1993, vol.A8, p.1823.
5. Voloshin M.B. — In: Proc. 27th Int. Conf. on High Energy Physics, Glasgow, 1994. Eds. P.J.Bussey, I.G.Knowles, IOP, 1995, p.121.
6. Рубаков В.А., Шапошников М.Е. — УФН, 1996, т.166, с.493.
7. Goldberg H. — Phys. Lett., 1990, vol.B246, p.445.
8. Cornwall J.M. — Phys. Lett., 1990, vol.B243, p.271.
9. Voloshin M.B. — Nucl. Phys., 1992, vol.B383, p.233.
10. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G. — Nucl. Phys., 1993, vol.B391, p.42; Nucl. Phys., 1993, vol.B391, p.57.
11. Brown L.S. — Phys. Rev., 1992, vol.D46, p.4125.
12. Smith B.H. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.3521.
13. Brown L.S., Cheng-Xing Zhai — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.5526.
14. Libanov M.V., Rubakov V.A., Troitsky S.V. — Nucl. Phys., 1994, vol.B412, p.607.
15. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G. — Nucl. Phys., 1993, vol.B395, p.3.
16. Voloshin M.B. — Phys. Lett., 1992, vol.B293, p.389.
17. Липатов Л.Н. — ЖЭТФ, 1977, т.72, с.411.
18. Zakharov V.I. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.67, p.3650.
19. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G. — Phys. Lett., 1992, vol.B296, p.139.
20. Rubakov V.A. — In: Proc. of the 2nd Recontres du Vietnam, Ho Chi Minh City, Vietnam, 1995; hep-ph/9511236.
21. Gorsky A.S., Voloshin M.B. — Phys. Rev., 1993, vol.D48, p.3843.
22. Mawhinney R.D., Willey R.S. — Phys. Rev. Lett., 1995, vol.74, p.3728.
23. Libanov M.V., Rubakov V.A., Troitsky S.V. — Phys. Lett., 1993, vol.B318, p.134.
24. Brandt F.T., Frenkel J. — Phys. Rev., 1996, vol.D53, p.2256.

25. Libanov M.V., Rubakov V.A., Son D.T., Troitsky S.V. — Phys. Rev., 1994, vol.D50, p.7553.
26. Rubakov V.A., Son D.T., Tinyakov P.G. — Phys. Lett., 1992, vol.B287, p.342.
27. Son D.T. — Nucl. Phys., 1996, v.B477, p.378.
28. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G. — Phys. Lett., 1993, vol.B308, p.292.
29. Voloshin M.B. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.357.
30. Smith B.H. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.3518.
31. Makeenko Yu. — Phys. Rev., 1994, vol.D50, p.4137.
32. Makeenko Yu. — In: Proc. 8th Int. Seminar «Quarks-94». Eds. D.Yu.Grigoriev, V.A.Matveev, V.A.Rubakov, D.T.Son, A.N.Tavkhelidze; Singapore: World Scientific, 1995; hep-ph/9408337.
33. Axenides M., Johansen A., Makeenko Yu. — Nucl. Phys., 1994, vol.B430, p.51.
34. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
35. Libanov M.V., Son D.T., Troitsky S.V. — Phys. Rev., 1995, vol.D52, p.3679.
36. Voloshin M.B. — Phys. Rev., 1991, vol.D43, p.1726.
37. Khlebnikov S.Yu. — Phys. Lett., 1992, vol.B282, p.459.
38. Diakonov D.I., Petrov V.Yu. — Phys. Rev., 1994, vol.D50, p.266.
39. Cornwall J.M., Tiktopoulos G. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.1629.
40. Березин Ф.А. — Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1987.
41. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. — Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
42. Khlebnikov S.Yu., Rubakov V.A., Tinyakov P.G. — Nucl. Phys., 1991, vol.B350, p.441.
43. Rubakov V.A., Tinyakov P.G. — Phys. Lett., 1992, vol.B279, p.165.
44. Bezrukov F.L., Libanov M.V., Son D.T., Troitsky S.V. — In: Proc. of 10th Int. Workshop on High Energy Theory and Quantum Field Theory, Zvenigorod, Russia, 1995; hep-ph/9512342.
45. Bezrukov F.L., Libanov M.V., Troitsky S.V. — Mod. Phys. Lett., 1995, vol.A10, p.2135.
46. Fubini S. — Nuovo Cimento, 1976, vol.A34, p.4125.
47. Кубышин Ю.А. — ТМФ, 1983, т.57, с.363.
48. Tinyakov P.G. — Phys. Lett., 1992, vol.D284, p.410.
49. Khlebnikov S.Yu. — Nucl. Phys., 1995, vol.B436, p.428.
50. Smirnov F.A. — Form-Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory. Advanced Series in Mathematical Physics. Singapore: World Scientific, vol.14, 1992.
51. Fring A., Mussardo G., Simonetti P. — Nucl. Phys., 1993, vol.B393, p.413.
52. Koubek A., Mussardo G. — Phys. Lett., 1993, vol.B311, p.193.
53. Voloshin M.B. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.2573.
54. Smith B.H. — Phys. Rev., 1994, vol.D49, p.1081.
55. Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G. — Phys. Lett., 1993, vol.B308, p.315.
56. Smith B.N. — Phys. Rev., 1993, vol.D47, p.5531.

57. **Раджараман Р.** — Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
58. **Переломов А.М.** — Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
59. **Argyres E.N., Kleiss R.H.P., Papadopoulos C.G.** — Phys. Lett., 1993, vol.B302, p.70.
60. **Gorsky A., Selivanov K.** — Mod. Phys. Lett., 1996, v.A11, p.1597.
61. **Дубровин Б.А.** — Римановы поверхности и нелинейные уравнения. М.: МГУ, 1986.
62. **Дубровин Б.А.** — УМН, 1981, т.36, с.11.

ГРУППЫ ЛИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: СИММЕТРИИ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ФИЗИКЕ

М.Б.Шефтель

Северо-Западный политехнический институт, Санкт-Петербург

В доступной для начинающих форме излагаются основы современного группового анализа дифференциальных уравнений. Это математическая теория симметрий и законов сохранения и технология получения на этой основе точных решений математических моделей, базирующихся на (нелинейных) дифференциальных уравнениях (как обыкновенных, так и в частных производных). При групповом анализе естественным образом возникают наиболее удобные для данной задачи переменные и связанные с ней дифференциально-геометрические структуры, такие как (псевдо)риманова геометрия, связности, гамильтоновы и лагранжевы формализмы. Область возможных приложений включает в себя механику сплошных сред (газо- и гидродинамику, нелинейную теорию упругости и пластичности твердых тел), нелинейную акустику, магнитную гидродинамику, теорию гравитации и другие нелинейные полевые теории (калибровочные и киральные поля, струнные теории и т.п.), химию (хроматографию и электрофорез), биологию. Перспективными являются и приложения к таким линейным теориям, как квантовая механика: построение новых точных решений, теория разделения переменных и др.

We present here the basics of modern group analysis of differential equations in the form suitable for beginners. This is a mathematical theory of symmetries and conservation laws and, being based on it, a technology for production of exact solutions for such mathematical models, which use (nonlinear) partial or ordinary differential equations. The group analysis produces in a natural way the variables, which are most suitable for a problem in question, and also the associated differential-geometric structures, such as (pseudo)Riemann geometry, connections, Hamiltonian and Lagrangian formalism. The domain of possible applications includes continuous media mechanics (gas- and hydrodynamics, nonlinear elasticity and plasticity theory of solids), nonlinear acoustics, magnetic hydrodynamics, gravitation and other nonlinear field theories (gauge and chiral fields, string theories etc.), chemistry (chromatography and electrophoresis), biology. We consider also as promising ones the applications to such linear theories as quantum mechanics: construction of new exact solutions, theory of separation of variables etc.

1. ВВЕДЕНИЕ

Групповой анализ дифференциальных уравнений возник в работах великого норвежского математика Софуса Ли (1842–1899) [1,2], опубликованных в 1885–1895 гг. Это математический аппарат для исследования *непрерывных* симметрий дифференциальных уравнений. Симметриями называются семейства преобразований, непрерывно зависящие от одного или нескольких параметров, такие, что система уравнений остается неизменной, когда зависимые и независимые переменные изменяются под действием данных преобразований. Отсюда следует важное свойство таких преобразований: они переводят любое решение уравнений снова в решение. Если некоторые решения уже известны, то это помогает размножать их: получать бесконечные семейства решений, зависящие от параметров преобразований. В частности, если в качестве «затравочных» решений выбирать тривиальные, то могут порождаться нетривиальные решения. Если же решения неизвестны, но предполагаются инвариантными относительно группы, то условия их инвариантности представляют собой дополнительные дифференциальные уравнения («дифференциальные связи»), которые пополняют исходную систему уравнений, делая ее переопределенной и облегчая тем самым процесс интегрирования.

Первоначально исследование симметрий дифференциальных уравнений было предпринято С.Ли в связи с вопросом о разрешимости в квадратурах обыкновенных дифференциальных уравнений [1], по аналогии с теорией разрешимости в радикалах алгебраических уравнений, построенной Н.Г.Абелем и Э.Галуа. В этой теории впервые появилось понятие группы, а именно дискретной конечной группы симметрий алгебраического уравнения. Аналог этой теории для дифференциальных уравнений основан на понятии непрерывной группы Ли преобразований, оставляющих инвариантными дифференциальные уравнения.

При первом знакомстве с теорией интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений она выглядит как разрозненный набор не объединенных какой-либо общей идеей специальных методов для решения некоторых частных типов уравнений: с разделяющимися переменными, (обобщенно-)однородных, допускающих понижение порядка и т.п. Величайшая заслуга Ли заключалась в демонстрации того, что все эти частные приемы интегрирования имеют в своей основе универсальную теорию. Тем более парадоксально выглядит тот факт, что программа раздела «Обыкновенные дифференциальные уравнения» в университетах до сих пор предусматривает его изложение как «набор трюков», умалчивая о теории Ли, т.е. на уровне середины девятнадцатого века! Особенно большой ущерб это наносит образованию будущих физиков, так как упускается возможность уже на втором курсе в разделах «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

и «Уравнения математической физики» познакомить их с группами и алгебрами Ли и показать им плодотворность понятия симметрии не только как основного принципа построения математических моделей в современной физике, но и как инструмента для получения точных решений этих моделей в аналитической форме.

Сейчас общеизвестно, что группы Ли и их представления играют важную роль в математике, физике, механике и т.д. Однако до сих пор внимание математиков и физиков в основном было сосредоточено на теории представлений групп линейными операторами. Специфика приложений групп Ли к дифференциальным уравнениям такова, что они не укладываются в рамки теории линейных представлений. Рассматриваемые преобразования, вообще говоря, нелинейны и могут быть названы «нелинейными представлениями» групп Ли. Однако вычислительные алгоритмы этой теории основаны на решении линейных уравнений. Дело в том, что хотя условия инвариантности системы уравнений относительно конечных преобразований группы являются сложными и нелинейными, но для непрерывной группы они эквивалентны более простым линейным условиям инфинитезимальной инвариантности (для малых значений параметров группы). Это по-прежнему точные условия, не содержащие каких-либо приближений. Обычно эти линейные «определяющие уравнения» можно точно проинтегрировать и получить группу всех непрерывных симметрий данной системы.

О возможности приложений групп Ли к дифференциальным уравнениям было забыто вплоть до 50-х годов XX века. Возрождению теории Ли мы обязаны в основном Л.В.Овсянникову и его новосибирской школе [3,4], создавшим новые полезные понятия и алгоритмы и получившим эффективные приложения группового анализа (это название также принадлежит Л.В.Овсянникову) к газовой динамике и гидромеханике. Позднее важную роль в становлении и популяризации группового анализа за рубежом сыграл П.Олвер [5] — ученик Г.Биркгофа, впервые указавшего на полезность приложений теории Ли дифференциальных уравнений в гидромеханике [6]. Первые приложения теории Ли — Овсянникова к квантовой теории поля принадлежат Н.Н.Боголюбову и Д.В.Ширкову (ренормализационная группа) [7].

Все сказанное выше относится к «классическим» (лиевским) симметриям, использующим класс точечных преобразований. Около 20 лет тому назад российский и американский математики Н.Х.Ибрагимов и Р.Л.Андерсон открыли обобщенные симметрии дифференциальных уравнений, которые они называли группами Ли — Беклунда [8]. Затем Ибрагимов построил строгую математическую теорию таких групп [9]. Обобщение состояло в том, что в отличие от теории Ли пространство «нелинейного представления» группы становится бесконечномерным и содержит в качестве локальных координат производные от зависимых переменных любого порядка.

Это расширение пространства представления дает, в частности, возможность алгоритмически вычислять такие «скрытые» симметрии в квантовой механике, как $O(4)$ -симметрия атома водорода, открытая лишь благодаря гениальной интуиции В.А.Фока.

В последнее время возникла концепция современного группового анализа, в которую автор вкладывает следующий смысл: полное исследование системы должно включать как ее симметрии, так и законы сохранения (интегралы) и их совместное использование для отыскания решений системы (теория Ли изучает и использует лишь симметрии). Она включает также открытые недавно связи симметрий с интегралами, в определенном смысле обобщающие теорему Э.Нетер без предположения о лагранжевости или гамильтоновости системы. Стало также ясно, что для систем, «богатых симметриями», возникают дифференциально-геометрические конструкции, обобщающие гамильтонов формализм. Примером тому служат полугамильтоновы системы гидродинамического типа [10,11].

Все вычислительные методы современного группового анализа алгоритмичны и могут быть положены в основу компьютерной системы аналитических вычислений, что позволило бы автоматизировать трудоемкую рутинную часть работы при решении действительно сложных задач. Такая система должна работать в режиме диалога, так как на определенных этапах возникает творческий элемент и нельзя полностью исключить участие человека в групповом анализе. Многие существующие системы аналитических вычислений (пакет Шварца, программа МАКСИМА и др.) не отвечают требованиям современного группового анализа: либо вычисляются лишь классические симметрии, либо ищутся только симметрии, но не законы сохранения и т.п. По-видимому, нужная система должна или использовать язык REDUCE, или базироваться на макрокомандах, построенных из команд системы МАТЕМАТИКА. Различные версии таких систем созданы в самое последнее время.

Возможные приложения группового анализа чрезвычайно разнообразны и включают в себя механику жидкости и газа, нелинейную теорию упругости и пластичности твердых тел, нелинейную акустику, теорию фазовых переходов, магнитную гидродинамику, теорию гравитации и другие нелинейные полевые теории (калибровочные и киральные поля, струнные теории и т.п.), химию (хроматографию и электрофорез), биологию. Перспективными являются также приложения к таким линейным теориям, как квантовая механика: генерация новых точных решений, теория разделения переменных и др.

Данный обзор предназначен для физиков, впервые изучающих групповой анализ и желающих научиться использовать его в своих исследованиях. Наиболее обстоятельно удалось изложить теорию интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ уравнений в частных произ-

водных носит более фрагментарный характер из-за ограничений объема. Этот недостаток будет устранен в книге, которую автор надеется издать в ближайшем будущем.

Трудно переоценить влияние, оказанное при работе над этой статьей замечательными монографиями Л.В.Овсянникова, Н.Х.Ибрагимова и П.Олвера как в теоретическом плане, так и при подборе примеров. Отличие данной работы состоит в том, что по возможности избегается аппарат современной математики. Это делает материал доступным для тех, кто владеет математикой в рамках программы университета. Изучение же указанных монографий, как и журнальной литературы, полезно не для первого знакомства с предметом, а для более углубленного изучения специальных вопросов.

2. ГРУППЫ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

2.1. Основные понятия

2.1.1. Группы

Определение 2.1. *Группой называется множество G вместе с групповой операцией — умножением, такой, что для любых двух элементов g, h множества G их произведение $g \cdot h = \varphi(g, h)$ снова есть элемент из G ; причем умножение удовлетворяет следующим аксиомам.*

Аксиомы умножения:

1. *Ассоциативность. Если $g, h, k \in G$, то*

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k.$$

2. *Единичный элемент. Существует элемент $e \in G$ такой, что*

$$e \cdot g = g \cdot e = g, \quad \forall g \in G.$$

3. *Обратные элементы. Для любого $g \in G$ существует обратный элемент g^{-1} такой, что:*

$$g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g.$$

Если групповая операция коммутативна: $g \cdot h = h \cdot g$ для любых $g, h \in G$, то группа G называется *абелевой* (коммутативной). Для абелевых групп произведение $g \cdot h$ часто обозначается как сумма $g + h$, и групповая операция называется не умножением, а *сложением*. Тогда единица группы называется нулем и обозначается 0, а элемент g^{-1} , обратный к g , называется *противоположным* и обозначается $-a$.

2.1.2. Группы Ли

Определение 2.2. Группа G называется **параметрической** (локально-евклидовой), если ее элементы могут быть параметризованы (хотя бы локально, т.е. в окрестности каждой точки) некоторой системой вещественных параметров — координат в группе (r -параметрическая группа):

$$g = g(\tau) = g(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r).$$

Закон умножения выражается теперь в аналитической форме:

$$\tau_i(g \cdot h) = \varphi_i(\tau_j(g), \tau_k(h)) \Leftrightarrow \tau_i = \varphi_i(\rho_j, \sigma_k) \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, r).$$

Единичному элементу e группы сопоставляется начало координат O в пространстве параметров: $e = e(O) = e(0, 0, \dots, 0)$.

Так как $g \cdot e = g$ и $e \cdot h = h$, то

$$\varphi_i(\rho_j, O) = \rho_i, \quad \varphi_i(O, \sigma_k) = \sigma_i.$$

По аксиоме 3 закон умножения в группе $\varphi = \{\varphi_i\}$ порождает операцию перехода к обратному элементу группы: $\psi(g) = g^{-1}$, т.е. при заданных $\tau_j(g)$ система уравнений

$$g \cdot g^{-1} = e \Leftrightarrow \varphi_i(\tau_j(g), \tau_k(g^{-1})) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

однозначно разрешима относительно $\tau_k(g^{-1})$: $\tau_k(g^{-1}) = \psi_k(\tau_j(g))$.

Определение 2.3. Параметрическая группа G называется **r -параметрической группой Ли**, если она является r -мерным гладким многообразием*, а законы умножения $\varphi(g, h) = g \cdot h$ и взятия обратного элемента $\psi(g) = g^{-1}$ есть аналитические функции координат.

Если ограничиться некоторой достаточно малой окрестностью единицы e , т.е. окрестностью начала координат $O = (0, 0, \dots, 0)$ в параметрическом пространстве, то получаем множество, называемое **локальной группой Ли**: множество элементов группы, близких к единичному элементу.

Отличие такой группы в том, что в аксиомах группы операции φ (или $g \cdot h$) и ψ (или g^{-1}) не обязательно определены всюду, а имеют смысл лишь для g и h , достаточно близких к e (т.е. к O).

Группы Ли, определенные выше, называются **глобальными группами Ли**.

*Упрощенно это область в евклидовом пространстве с гладкой координатной сеткой.

2.2. Теория Ли локальных групп преобразований

2.2.1. Однопараметрические локальные группы преобразований

Пусть $G = G_1 \subset \mathbb{R}_\tau^1$ и умножение в группе есть $\tau \cdot \sigma = \varphi(\tau, \sigma)$. Пусть M — n -мерное многообразие (область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$), τ — вещественный параметр, непрерывно меняющийся в некотором интервале Δ оси $\mathbb{R}^1$, содержащем единицу e , т.е. точку $\tau = 0$.

Однопараметрическая локальная группа преобразований, действующая на многообразии M (с фиксированной системой координат), задается гладкой функцией f от z и τ :

$$\bar{z} = f(z, \tau) = T_\tau z \Leftrightarrow \bar{z}^i = f^i(z, \tau)$$

$$(\forall z \in U \subset M, \tau \in \Delta_z, \bar{z} \in M, e = 0 \in \Delta_z) \quad (2.1)$$

(где интервал Δ_z может зависеть от выбора точки z в U), удовлетворяющей трем аксиомам:

$$1) T_0 = I \Leftrightarrow f(z, 0) = z, \quad \forall z \in M. \quad (2.2)$$

$$2) T_\sigma T_\tau = T_{\varphi(\tau, \sigma)} \Leftrightarrow f(\bar{z}, \sigma) \equiv f(f(z, \tau), \sigma) = f(z, \varphi(\tau, \sigma)), \quad (2.3)$$

если $z \in U, \tau \in \Delta_z, \sigma \in \Delta_z, f(z, \tau) \in U, \varphi(\tau, \sigma) \in \Delta_z$.

3) Преобразования T_τ обратимы:

$$T_\tau^{-1} = T_{\tau^{-1}} \Leftrightarrow T_{\tau^{-1}} T_\tau = I \Leftrightarrow f(f(z, \tau), \tau^{-1}) = f(\bar{z}, \tau^{-1}) = z, \quad (2.4)$$

причем если $z \in U, \tau \in \Delta_z$, то $\tau^{-1} \in \Delta_z$.

Аналогично определяется r -параметрическая локальная группа Ли преобразований G_r .

Определение 2.4. Для фиксированной точки $z_0 \in \mathbb{R}^n$ множество $G_r(z_0)$ всех ее образов $Tz_0 (T \in G_r)$ образует локальное многообразие в $\mathbb{R}^n$, называемое **орбитой** или **G_r -орбитой** точки z_0 . Орбита множества точек есть объединение орбит этих точек.

Пример 2.1. Группа переносов (трансляций) вдоль вещественной прямой (оси x):

$$x = T_\tau x = x + \tau,$$

$$T_{\sigma}T_{\tau}x = T_{\sigma}x = x + \sigma = (x + \tau) + \sigma = x + (\tau + \sigma).$$

Здесь $\varphi(\tau, \sigma) = \tau + \sigma$, $\tau^{-1} = -\tau$, $\Delta = \mathbb{R}_{\tau}$.

Пример 2.2. Группа растяжений: $\bar{z} = \tau z$. Тождественное преобразование получается при $\tau = 1$. После сдвига параметра $\tau \rightarrow \tau + 1$ получаем: $\bar{z} = T_{\tau}z = (1 + \tau)z$ и $T_0z = z(T_0 = I)$. Обратное преобразование определяется условием

$$T_{\tau^{-1}}\bar{z} = (1 + \tau^{-1})(1 + \tau)z = z \Leftrightarrow \tau^{-1} = -\frac{\tau}{1 + \tau}$$

при $\tau > -1$, т.е. $\Delta = (-1, +\infty)$. Для $\sigma, \tau \in \Delta$ имеем

$$\bar{z} = T_{\sigma}T_{\tau}z = T_{\sigma}\bar{z} = (1 + \sigma)\bar{z} = (1 + \sigma)(1 + \tau)z = (1 + \tau + \sigma + \tau\sigma)z = T_{\varphi(\tau, \sigma)}z.$$

Получаем $T_{\sigma}T_{\tau} = T_{\varphi(\tau, \sigma)}$, где $\varphi(\tau, \sigma) = \tau + \sigma + \tau\sigma$ — закон умножения в группе.

Легко проверить аксиомы группы.

2.2.2. Уравнения Ли

Рассмотрим однопараметрическую локальную группу преобразований G на M . Пусть умножение в группе G имеет канонический вид

$$\varphi(\tau, \sigma) = \tau + \sigma \Leftrightarrow T_{\sigma}T_{\tau} = T_{\tau + \sigma} \Leftrightarrow f(f(z, \tau), \sigma) = f(z, \tau + \sigma). \quad (2.5)$$

Очевидно, $\tau^{-1} = -\tau$.

Разложим аналитическую функцию $f(z, \tau)$ в ряд Тейлора по степеням параметра τ с учетом условия (2.2), обозначив

$$\xi_i(z) = \left. \frac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \Leftrightarrow \xi_i(z) = \left. \frac{\partial f^i(z, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.6)$$

Получим

$$\bar{z} = T_{\tau}(z) = f(z, \tau) = z + \xi(z)\tau + o(\tau). \quad (2.7)$$

Формула (2.6) задает в каждой точке z касательный вектор к G -орбите (2.7) точки z (к кривой, описываемой точкой под действием преобразований группы G): *касательное векторное поле группы*. Первые два члена в формуле (2.7) определяют *инфинитезимальное* (бесконечно малое) преобразование группы. Смысл следующей теоремы Ли в том, что они однозначно определяют и конечные преобразования (2.1) группы G в силу

группового свойства (2.5) этих преобразований. Поэтому говорят, что группа G полностью определяется своим касательным векторным полем $\xi(z)$. Оно обычно представляется в виде дифференциального оператора первого порядка:

$$X = \xi(z) \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^n \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.8)$$

Теорема 2.1 (С.Ли). Пусть функция $f(z, \tau)$ удовлетворяет групповому свойству (2.5) и разлагается в ряд (2.7). Тогда она является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{df}{d\tau} = \xi(f) \Leftrightarrow \frac{df^i}{d\tau} = \xi^i(f) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.9)$$

с начальными условиями

$$f(z, 0) = \bar{z} \Big|_{\tau=0} = z \Leftrightarrow f^i(z, 0) = z^i. \quad (2.10)$$

Наоборот, для любого гладкого векторного поля $\xi(z)$ решение задачи Коши (2.9), (2.10) удовлетворяет групповому свойству (2.5).

Определение 2.5. Уравнения (2.9) называются **уравнениями Ли**.

Следствие 2.1. Уравнение Ли есть инфинитезимальное выражение группового свойства (2.5) с каноническим параметром.

Пример 2.3. Решим уравнение Ли для векторного поля $\xi(x) = x$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$:

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{x}, \quad \bar{x} \Big|_{\tau=0} = x.$$

Его решение: $\bar{x} = x \exp(\tau)$ дает группу растяжений с каноническим параметром τ в отличие от примера 2.2. Более привычный вид она имеет с параметром $\bar{\tau} = \exp(\tau)$: $\bar{x} = \bar{\tau}x$, но параметр теперь не канонический, и тождественное преобразование получается при параметре, равном 1, а не 0.

2.2.3. Инфинитезимальный оператор группы

Получим закон преобразования функции $F(z)$ при преобразованиях (2.1):

$$\begin{aligned} \bar{F}(z) &= T_\tau F(z) + F(T_\tau(z)) = F(\bar{z}) = F(z + \tau \xi(z) + o(\tau)) = \\ &= F(z) + \tau \sum_{i=1}^n \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} + o(\tau) = F(z) + \tau X F(z) + o(\tau), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где оператор X определен формулой (2.8).

Определение 2.6. *Инфинитезимальным оператором* однопараметрической группы G преобразований называется дифференциальный оператор:

$$X = \xi(z) \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^n \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i} \Leftrightarrow X = \sum_{i=1}^n X(z^i) \frac{\partial}{\partial z^i}. \quad (2.12)$$

Функции $\xi^i(z)$ называются координатами инфинитезимального оператора X .

Здесь использовано соотношение $X(z^i) = \xi^i(z)$.

Из равенства (2.11) следует, что в каждой точке z оператор X совпадает с полной производной по параметру группы вдоль орбиты точки z :

$$\left. \frac{dF(\bar{z})}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(\bar{z}) - F(z)}{\tau - 0} = XF(z) \Leftrightarrow X = d/d\tau. \quad (2.13)$$

Инфинитезимальный оператор — это другой, более удобный способ представления касательного векторного поля $\xi(z) = \{\xi^i(z)\}$ группы G : в отличие от ξ^i оператор X имеет следующее свойство.

Теорема 2.2. *Оператор X инвариантен при преобразованиях системы координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ (на многообразии M).*

Замечание 2.1. *Из инвариантности оператора X следует правило замены переменных в операторе X :*

$$X = \sum_{i=1}^n X((z')^i) \frac{\partial}{\partial (z')^i}. \quad (2.14)$$

В силу уравнения Ли $d\bar{z}^i/d\tau = \xi^i(\bar{z})$ имеем

$$\frac{dF(\bar{z})}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \bar{z}^i} \frac{d\bar{z}^i}{d\tau} = \sum_{i=1}^n \xi^i(\bar{z}) \frac{\partial F}{\partial \bar{z}^i} = XF(\bar{z}).$$

Сравнивая этот результат с (2.13), заключаем, что векторное поле $\xi^i(z)$ на многообразии M инвариантно относительно группы: под действием группы (сдвига вдоль ее орбит), т.е. при изменении параметра τ , это поле не меняется.

2.2.4. Инвариантные группы

Определение 2.7. *Вещественнозначная функция $F(z)$ на многообразии M , не равная тождественно постоянной, называется инвариантом группы преобразований G : $\bar{z} = f(z, \tau)$ (или G -инвариантной), если для всех допустимых z, τ выполняется*

$$F(f(z, \tau)) = F(z). \quad (2.15)$$

Отображение $F: M \rightarrow \mathbb{R}^s$ ($F = (F_1, F_2, \dots, F_s)$) называется G -инвариантом, если и только если каждая его компонента F_ν есть инвариант группы G .

Теорема 2.3. Функция $F(z)$ является инвариантом однопараметрической группы Ли преобразований, если и только если она удовлетворяет уравнению

$$XF = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = 0. \quad (2.16)$$

Определение 2.8. Уравнение (2.16) называется **инфинитезимальным критерием инвариантности**.

Это линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Характеристиками этого уравнения называются такие кривые с параметрическими уравнениями $z^i = z^i(\tau)$, что выполняются уравнения характеристической системы для (2.16):

$$\frac{dz^i}{d\tau} = \xi^i(z) \quad (i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow d\tau = \frac{dz^1}{\xi^1(z)} = \frac{dz^2}{\xi^2(z)} = \dots = \frac{dz^n}{\xi^n(z)}. \quad (2.17)$$

Итак, характеристики — это интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.17) (это уравнения Ли!), и вдоль характеристик левая часть уравнения (2.16) равна полной производной по τ :

$$\sum_{i=1}^n \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} \frac{dz^i}{d\tau} = \frac{dF(z)}{d\tau}.$$

Поэтому уравнение (2.16) эквивалентно следующему:

$$\frac{dF(z(\tau))}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow F(z) \Big|_{z=z(\tau)} = C = \text{const}.$$

Система (2.17), состоящая после исключения $d\tau$ из $(n-1)$ дифференциальных уравнений первого порядка, имеет $(n-1)$ функционально независимых первых интегралов:

$$J_1(z) \Big|_{z=z(\tau)} = C_1, \dots, J_{n-1}(z) \Big|_{z=z(\tau)} = C_{n-1},$$

сохраняющих постоянные значения на характеристиках. Следовательно, эти интегралы $J_i(z)$ составляют $(n-1)$ функционально независимых инвариантов группы, являясь решениями уравнения (2.16). Говорят, что

$\{J_i(z)\}$ образуют базис инвариантов: любой другой инвариант данной группы является функцией этих $(n-1)$ «базисных инвариантов», т.е. функция

$$F(z) = \Phi(J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)),$$

очевидно, удовлетворяет уравнению (2.16) и является его общим интегралом.

Утверждение 2.1. *Любая однопараметрическая группа преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ имеет базис из $(n-1)$ функционально независимых инвариантов $J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)$, и любой другой инвариант $F(z)$ является их функцией.*

Теорема 2.4 (О выпрямлении векторного поля). *Пусть z — любая неособая точка векторного поля $X = \{\xi^i\}$ на многообразии M , т.е. $X(z) \neq 0$, $\forall z \in M$. Тогда в достаточно малой окрестности точки z всякая однопараметрическая локальная группа G преобразований $\bar{z} = f(z, \tau)$ n -мерного многообразия M некоторой невырожденной заменой переменных $z'^i = z'^i(z)$ приводится к группе трансляций по оси z'^n с оператором $X = \partial / \partial z'^n$.*

Доказательство. Пусть $X = \sum_{i=1}^n \xi^i(z) \partial / \partial z^i$ — инфинитезимальный оператор группы G . По правилу замены переменных в операторе X (2.14) при замене $z'^i = z'^i(z)$ оператор X принимает вид $X = \sum_i X(z'^i) \partial / \partial z'^i$. Этот оператор имеет требуемый вид $X = \partial / \partial z'^n$, если и только если функции $z'^i(z)$ удовлетворяют следующим линейным уравнениям в частных производных первого порядка:

$$X(z'^i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \xi^j(z) \frac{\partial z'^i}{\partial z^j} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.18)$$

$$X(z'^n) = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \xi^j(z) \frac{\partial z'^n}{\partial z^j} = 1. \quad (2.19)$$

Система уравнений (2.18) означает, что функции $z'^1(z), z'^2(z), \dots, z'^{n-1}(z)$ являются инвариантами группы G с оператором X . Поэтому в каче-

стве первых $(n - 1)$ новых переменных можно выбрать любой набор $(n - 1)$ функционально независимых инвариантов:

$$z'^1 = J_1(z), \quad z'^2 = J_2(z), \dots, \quad z'^{n-1} = J_{n-1}(z). \quad (2.20)$$

Поскольку $\det(\partial J_i / \partial z^j) \neq 0$, то преобразование (2.20) обратимо (матрица Якоби невырожденная). Итак, новые переменные (инварианты) $J_i(z)$ есть $(n - 1)$ независимых первых интегралов характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.17). В качестве последней новой переменной z'^n можно выбрать любой частный интеграл уравнения (2.19), а общий интеграл искать не обязательно. Например, можно искать решение этого уравнения, зависящее всего от одной из переменных z^i . $\square$

Замечание 2.2. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик (2.17) — это в точности та же задача, что и интегрирование уравнений Ли группы G в исходных переменных. Поэтому задача о выпрямлении векторного поля равносильна задаче интегрирования уравнений Ли.*

2.2.5. Инвариантные уравнения

Прежде чем заняться дифференциальными уравнениями, разберем более простой случай групп симметрий систем конечных уравнений:

$$F_1(z) = 0, F_2(z) = 0, \dots, F_s(z) = 0 \quad (s \leq n; z \in M \subset \mathbb{R}^n), \quad (2.21)$$

где $F_1, F_2, \dots, F_s$ — гладкие вещественные функции, заданные на n -мерном многообразии M (или в пространстве $\mathbb{R}^n$). Если $F_\nu(z)$ функционально независимы, то множество решений системы (2.21) есть $(n - s)$ -мерная поверхность S , лежащая в M .

Определение 2.9. *Группой симметрий системы (2.21) называется локальная группа преобразований, действующая на M , со следующим свойством: группа G преобразует решения этой системы снова в ее решения. Более точно: если z есть решение, $g = g(\tau)$ есть элемент группы и определено действие g в точке z :*

$$\bar{z} = T_\tau z = f(z, \tau) = z + \tau \xi(z) + o(\tau), \quad (2.22)$$

то требуется, чтобы $\bar{z}$ также было решением: т.е. $F_\nu(\bar{z}) = 0$ при $F_\nu(z) = 0$ ($\nu = 1, \dots, s$). Говорят также, что эта система уравнений **инвариантна** относительно группы G или **допускает** группу G . Подмножество $S \subset M$ называется **G -инвариантным**, а группа G — **группой симметрий**

подмножества S , если для любой точки $z \in S$, в которой определено действие элемента $g = g(\tau)$ группы G , выполняется условие: $\bar{z} = T_\tau z \in S$, т.е. точка поверхности S перемещается преобразованием (2.22) только по этой поверхности.

Инвариантность уравнения необязательно означает инвариантность его левой части: если множество нулей гладкой функции $\{z; F(z) = 0\}$ есть инвариантное подмножество многообразия M , то отсюда не следует, что и сама функция F инвариантна.

Утверждение 2.2. Если группа G действует на многообразии M и $F: M \rightarrow \mathbb{R}^s$ — гладкая функция, то F будет G -инвариантной функцией, если и только если каждое множество уровня $\{z: F(z) = C (C \in \mathbb{R}^s)\}$ будет G -инвариантным подмножеством многообразия M .

Полной группой симметрий называется наибольшая группа преобразований, оставляющих многообразие или функцию инвариантными.

Следствие 2.2. Полная группа симметрий множества решений $S = \{x; F(x) = 0\}$ системы уравнений (2.21) может быть шире, чем группа симметрии вектор-функции F , задающей это множество решений.

Расширение понятия симметрии — рассмотрение симметрий множества решений вместо симметрий левых частей уравнений — приводит к большему многообразию симметрий дифференциальных уравнений.

Перенесем инфинитезимальный критерий инвариантности из теоремы 2.3 (формула (2.16)) с функций $F: M \rightarrow \mathbb{R}^s$ на множество решений S системы уравнений $F(z) = 0$ (2.21). Для этого требуется дополнительное условие на функцию $F = (F_1, F_2, \dots, F_s)$ — условие максимальности ранга — ранг матрицы Якоби отображения F :

$$\text{rank} \left(\frac{\partial F_v}{\partial z^i} \right) \Big|_S = s \quad (v = 1, \dots, s; i = 1, \dots, n; s \leq n)$$

наибольший возможный в точках поверхности S , т.е. в каждой точке z , являющейся решением системы (2.21). Тогда говорят, что это система максимального ранга, а задание поверхности S является регулярным.

Теорема 2.5. Пусть G — однопараметрическая локальная группа преобразований n -мерного многообразия M с оператором

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}$$

и гладкое отображение $F: M \rightarrow \mathbb{R}^s$ ($s \leq n$) определяет систему конечных уравнений (2.21) на M : $F_v(z) = 0$ ($v = 1, \dots, s$). Пусть это система

максимального ранга. Тогда G — группа симметрий этой системы, если и только если выполняется условие:

$$X[F_v(z)]|_S = 0 \Leftrightarrow X[F_v(z)]|_{F(z)=0} = 0 \quad (v = 1, \dots, s; s \leq n). \quad (2.23)$$

Базис инвариантов группы позволяет описать не только все инварианты группы, но и все инвариантные многообразия.

Теорема 2.6. Пусть поверхность S_F в n -мерном многообразии M регулярно задана системой уравнений (2.21): $F_v(z) = 0$ ($v = 1, \dots, s$), инвариантной относительно группы G , и инфинитезимальный оператор X этой группы не обращается в нуль на поверхности S_F . Тогда, если $J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)$ образуют базис инвариантов группы G , то та же поверхность S_F может быть равносильным образом задана системой уравнений вида

$$\Phi_v(J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)) = 0, \quad (v = 1, \dots, s), \quad (2.24)$$

выраженных только через базисные инварианты группы.

3. СИММЕТРИИ И ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Теория продолжения

3.1.1. Уравнения в продолженном пространстве

Дифференциальные уравнения (как обыкновенные, так и в частных производных) удобно рассматривать как уравнения многообразий (поверхностей) в продолженном пространстве. Локальными координатами в этом пространстве наряду с независимыми и зависимыми переменными $x = \{x^i\}$ и $u = \{u^\alpha\}$ являются также производные от зависимых переменных по независимым:

$$u_1 = \{u_i^\alpha\}, u_2 = \{u_{ij}^\alpha\}, \dots, \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, m).$$

На решениях уравнений $u = u(x)$ нижние индексы соответствуют дифференцированиям по независимым переменным:

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad u_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}, \dots$$

При анализе симметрий все эти переменные удобно считать алгебраически независимыми, но связанными между собой с помощью *операторов полного дифференцирования*:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{i_1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + \dots + u_{i_1 \dots i_l}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_l}^\alpha} + \dots, \quad (3.1)$$

которые формализуют известное правило вычисления «полной частной производной» от сложной функции. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам:

$$i, i_1, \dots, i_l = 1, \dots, n; \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Дифференциальные связи между переменными имеют вид

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha), u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha), \dots \quad (3.2)$$

Легко проверить, что операторы полного дифференцирования коммутируют между собой:

$$[D_i, D_j] \stackrel{\text{def}}{=} D_i D_j - D_j D_i = 0, \quad (3.3)$$

откуда следует $u_{ji}^\alpha = u_{ij}^\alpha$ и т.п. В формуле (3.1) сумма берется лишь по алгебраически независимым переменным.

Хотя формальное выражение (3.1) для операторов D_i бесконечно, но их действие определяется лишь на множестве всех гладких функций, зависящих от конечного набора переменных $x, u, u_1, u_2, \dots, u_N$, когда это выражение «обрывается».

Дифференциальные уравнения рассматриваются как уравнения поверхности в продолженном пространстве:

$$F_1(x, u, u_1, \dots, u_N) = 0, \dots, F_s(x, u, u_1, \dots, u_N) = 0. \quad (3.4)$$

Дифференциальными следствиями уравнений (3.4) называются результаты их дифференцирований (любого порядка) по независимым переменным:

$$D_i F = 0, \quad D_i D_j F = 0, \quad \dots$$

Для корректного геометрического описания дифференциальных уравнений как поверхностей в продолженном пространстве, к которым применимы понятие симметрии и критерий инвариантности из предыдущего раздела, необходимо рассматривать эти уравнения вместе со всеми их дифференциальными следствиями. Получаем бесконечномерное *дифференциальное многообразие* $[F]$ в продолженном пространстве, заданное бесконечной системой уравнений:

$$[F]: F = 0, \quad D_i F = 0, \quad D_i D_j F = 0, \quad \dots \quad (3.5)$$

Понятие дифференциального уравнения включает еще понятие решения. Будем рассматривать лишь *классические решения*, т.е. гладкие функции $u^\alpha = u^\alpha(x)$, имеющие производные по x^i до порядка N , и такие, что при их подстановке в уравнения (3.4):

$$u^\alpha = u^\alpha(x), \quad u_i^\alpha = \partial u^\alpha(x) / \partial x^i, \quad \dots$$

Эти уравнения превращаются в тождества по x . При этом система дифференциальных уравнений (3.4) считается уже приведенной к пассивной форме: все условия совместности системы (3.4) (получаемые приравнованием смешанных частных производных, вычисленных из различных ее уравнений) являются лишь алгебраическими или дифференциальными следствиями уравнений этой системы.

3.1.2. Продолжение инфинитезимального оператора

Обозначим через z точки продолженного пространства:

$$z = (x, u, u_1, u_2, \dots).$$

Пусть G — однопараметрическая группа преобразований бесконечномерного продолженного пространства с каноническим параметром τ :

$$x^i = f^i(x, u, u_1, u_2, \dots; \tau), \quad \bar{u}^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, u_1, u_2, \dots; \tau),$$

$$\bar{u}_i^\alpha = \psi_i^\alpha(x, u, u_1, u_2, \dots; \tau), \quad \dots, \quad \bar{u}_{i_1 \dots i_l}^\alpha = \psi_{i_1 \dots i_l}^\alpha(x, u, u_1, u_2, \dots; \tau). \quad (3.6)$$

Значению $\tau = 0$ параметра группы соответствует тождественное преобразование:

$$f^i(z; 0) = x^i, \varphi^\alpha(z; 0) = u^\alpha, \psi_i^\alpha(z; 0) = u_i^\alpha, \dots, \psi_{i_1 \dots i_l}^\alpha(z; 0) = u_{i_1 \dots i_l}^\alpha, \dots \quad (3.7)$$

Определим касательное векторное поле группы G преобразований продолженного пространства формулами, аналогичными (2.6):

$$\xi^i(z) = \left. \frac{\partial f^i(z; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad \eta^\alpha(z) = \left. \frac{\partial \varphi^\alpha(z; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0},$$

$$\zeta_i^\alpha(z) = \left. \frac{\partial \psi_i^\alpha(z; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \dots, \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha(z) = \left. \frac{\partial \psi_{i_1 \dots i_l}^\alpha(z; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \dots \quad (3.8)$$

Здесь функции $\zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha$, как и функции $\psi_{i_1 \dots i_l}^\alpha$, симметричны по нижним индексам в силу равенств (3.6) и симметрии величин $\bar{u}_{i_1 \dots i_l}^\alpha$.

Продолженным (инфинитезимальным) оператором или оператором Ли — Беклунда группы G называется оператор X , определенный формулой, аналогичной (2.8):

$$X = \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{l \geq 2} \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_l}^\alpha}. \quad (3.9)$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Каноническому оператору $\hat{X}$ соответствует важный частный случай, когда преобразования (3.6) оставляют инвариантными независимые переменные: $\bar{x}^i = f^i(z; \tau) = x^i$, так что формула (3.8) дает $\xi^i(z) = 0$:

$$\hat{X} = \hat{\eta}^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \hat{\zeta}_i^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{l \geq 2} \hat{\zeta}_{i_1 \dots i_l}^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_l}^\alpha}. \quad (3.10)$$

В формулах (3.9), (3.10) суммирование производится при условии $i_1 \leq \dots \leq i_l$.

Уравнения Ли (2.9) в продолженном пространстве принимают вид бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{x}^i/d\tau = \xi^i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots) \\ d\bar{u}^\alpha/d\tau = \eta^\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots) \\ d\bar{u}_i^\alpha/d\tau = \zeta_i^\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots) \\ \dots \\ d\bar{u}_{i_1 \dots i_l}^\alpha/d\tau = \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots). \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.11)$$

В силу этих уравнений оператор X задает инвариантное относительно группы G векторное поле в продолженном пространстве и совпадает с оператором полного дифференцирования по параметру τ вдоль орбит группы:

$$X = D_\tau = \frac{d\bar{x}^i}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \frac{d\bar{u}^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha} + \frac{d\bar{u}_i^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i^\alpha} + \sum_{l \geq 2} \frac{d\bar{u}_{i_1 \dots i_l}^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_{i_1 \dots i_l}^\alpha}. \quad (3.12)$$

В частности, если независимые переменные x^i инвариантны, то канонический оператор $\hat{X} = D_\tau$ должен коммутировать с операторами D_i (3.1) полного дифференцирования по независимым переменным:

$$[D_\tau, D_i] \equiv [\hat{X}, D_i] = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Действительно, τ есть такая же независимая переменная, как и x^i , причем x^i не зависят от τ , а операторы дифференцирования по независимым переменным перестановочны на гладких функциях. Подстановка выражений (3.1) и (3.10) для D_i и $\hat{X}$ в это условие дает

$$\hat{\zeta}_i^\alpha = D_i [\hat{\eta}^\alpha], \hat{\zeta}_{i_1 i}^\alpha = D_i [\hat{\zeta}_{i_1}^\alpha], \dots, \hat{\zeta}_{i_1 \dots i_l i}^\alpha = D_i [\hat{\zeta}_{i_1 \dots i_l}^\alpha], \dots \quad (3.13)$$

Из соотношений (3.13) следуют формулы продолжения координат канонического оператора:

$$\hat{\zeta}_{i_1 \dots i_l}^\alpha = D_{i_1} \dots D_{i_l} [\hat{\eta}^\alpha]. \quad (3.14)$$

В случае, когда независимые переменные x^i зависят от τ , выражение для оператора полной производной $X = D_\tau$ имеет по сравнению с $\hat{X}$ дополнительное слагаемое:

$$X = D_\tau = \hat{X} + \frac{d\bar{x}^i}{d\tau} D_i = \hat{X} + \xi^i D_i, \quad (3.15)$$

где использовано первое из уравнений Ли (3.11). Подставляя сюда выражения (3.9) и (3.10) для X и $\hat{X}$, получаем связь между координатами операторов X и $\hat{X}$:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}^\alpha &= \eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha, & \hat{\zeta}_i^\alpha &= \zeta_i^\alpha - u_{i_1}^\alpha \xi^i, \dots \\ \dots, \hat{\zeta}_{i_1 \dots i_l}^\alpha &= \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha - u_{i_1 \dots i_l}^\alpha \xi^i, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тогда, используя формулы (3.13) и (3.16), получаем *формулы продолжения инфинитезимального оператора общего вида*:

$$\begin{aligned} \zeta_i^\alpha &= D_i [\eta^\alpha] - u_j^\alpha D_i [\xi^j], \\ &\dots \\ \zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha &= D_i [\zeta_{i_1 \dots i_l}^\alpha] - u_{i_1 \dots i_l}^\alpha D_i [\xi^j], \\ &(l = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из формул продолжения (3.13) и (3.17) видно, что для построения продолженного инфинитезимального оператора группы X нужно знать только координаты ξ, η , т.е. «исходный» оператор:

$$X = \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (3.18)$$

Используя связь (3.15) и учитывая равенство $[D_i, \hat{X}] = 0$, легко получить коммутационное соотношение:

$$[D_i, D_\tau] = [D_i, X] = D_i [\xi^j] D_j. \quad (3.19)$$

С помощью соотношения (3.19) и формул (3.17) легко проверить, что только первые два уравнения Ли из бесконечной цепочки (3.11) независимы. Остальные уравнения получаются действием операторов D_i на вто-

рое из уравнений (3.11), которое при отбрасывании всех остальных следует считать уравнением (системой уравнений) в частных производных:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tau} = \eta^\alpha(x^i, u^\beta, u_i^\beta, u_{ij}^\beta, \dots, u_{i_1 \dots i_l}^\beta). \quad (3.20)$$

3.1.3. Продолжение точечных преобразований. Касательные и контактные преобразования

Определение 3.1. Точечными преобразованиями называются такие преобразования (3.6) продолженного пространства, которые оставляют инвариантным подпространство независимых и зависимых переменных (x, u) :

$$\bar{x}^i = f^i(x, u; \tau), \quad \bar{u}^\alpha = \varphi^\alpha(x, u; \tau) \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, m). \quad (3.21)$$

Тогда действие операторов D_i полного дифференцирования по переменным x^i на $\bar{u}^\alpha$ с учетом равенств (3.21) для $\bar{x}^i$ дает

$$\bar{u}_i^\alpha = \psi_i^\alpha(x, u, u_1; \tau), \dots, \bar{u}_{i_1 \dots i_l}^\alpha = \psi_{i_1 \dots i_l}^\alpha(x, u, u_1, \dots, u_l; \tau). \quad (3.22)$$

Итак, однопараметрические группы точечных преобразований (3.21), (3.22) продолженного пространства обладают следующим характеристическим свойством: они имеют конечномерные инвариантные подпространства в продолженном пространстве, а именно: преобразованные производные от u по x порядка l выражаются снова через производные от u порядка не выше l ($l=0, 1, 2, \dots$). Поскольку все преобразования (3.22) есть следствия преобразований (3.21), то говорят, что группа преобразований продолженного пространства является l -м продолжением на первые и высшие производные $u_1, \dots, u_l$ группы точечных преобразований (3.21).

Если ограничиться преобразованиями (3.22) производных порядка не выше l , то это есть группа касательных преобразований порядка l . В частности, при $l=1$ получаем группу контактных преобразований.

Теорема 3.1 (С. Ли). Если $m > 1$ и $l=1$, то всякая группа G контактных преобразований (3.21), (3.22) является первым продолжением группы точечных преобразований.

Случай $m=1$ рассмотрим чуть позже.

Для точечных преобразований (3.21) формулы (3.8) для координат инфинитезимального оператора дают

$$\xi^i(x, u) = \left. \frac{\partial f^i(x, u; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad \eta^\alpha(x, u) = \left. \frac{\partial \Phi^\alpha(x, u; \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}. \quad (3.23)$$

Исходный (непродолженный) инфинитезимальный оператор (3.18) группы точечных преобразований имеет вид

$$X^0 = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (3.24)$$

Первое продолжение этого оператора получаем с помощью формул (3.9), (3.17):

$$X^1 = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha(x, u, u_1) \frac{\partial}{\partial u_1^\alpha}, \quad (3.25)$$

где

$$\zeta_i^\alpha(x, u, u_1) = D_i [\eta^\alpha(x, u)] - u_j^\alpha D_i [\xi^j(x, u)]. \quad (3.26)$$

Аналогично получаются второе и высшее продолжения этого оператора.

Теорема 3.2 (А.В.Беклунд). *Всякая группа касательных преобразований конечного порядка l является продолжением группы точечных преобразований при $m > 1$ и группы контактных преобразований при $m = 1$.*

Итак, только группы касательных преобразований (3.6) бесконечного порядка, т.е. группы Ли — Беклунда, открытые Н.Х.Ибрагимовым и Р.Л.Андерсоном, не сводятся к продолженным точечным и контактным преобразованиям и представляют собой обобщение теории Ли.

3.2. Инвариантные дифференциальные уравнения

3.2.1. Инфинитезимальный критерий инвариантности

Пусть задана система $F = 0$ дифференциальных уравнений (3.4), определяющая дифференциальное многообразие $[F]$ в продолженном пространстве с уравнениями (3.5).

Определение 3.2. *Говорят, что система дифференциальных уравнений (3.4) инвариантна относительно группы Ли — Беклунда G преобразований (3.6) продолженного пространства, если инвариантно диффе-*

ренциальное многообразие $[F]$, определяемое этой системой. Говорят также, что система уравнений (3.4) **допускает группу G** и что G — **допускаемая группа или группа симметрий** дифференциальных уравнений (3.4).

Инфинитезимальный критерий инвариантности (2.23) переносится на дифференциальные уравнения, рассматриваемые как уравнения поверхности в продолженном пространстве.

Теорема 3.3 (Н.Х.Ибрагимов, Р.Л.Андерсон [8]). Система $F=0$ дифференциальных уравнений (3.4) максимального ранга инвариантна относительно однопараметрической группы G преобразований Ли — Беклунда с инфинитезимальным оператором X , если выполняется условие

$$(XF)|_{[F]}=0 \Leftrightarrow (XF_k)|_{[F]}=0 \quad (k=1, \dots, s). \quad (3.27)$$

При отыскании инфинитезимального оператора X допускаемой группы G , определенного формулой (3.9), с помощью уравнений (3.27) используются формулы продолжения (3.17). Они выражают все координаты оператора X как линейные однородные функции от координат ξ^i, η^α «исходного» оператора X^0 (3.18). Поэтому система (3.27) представляет собой систему линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $\xi^i(z)$ и $\eta^\alpha(z)$. Уравнения (3.27) называются *определяющими уравнениями* группы преобразований, допускаемой дифференциальными уравнениями (3.4). Также говорят, что *оператор X допускается дифференциальными уравнениями*.

3.2.2. Определяющие уравнения и группы симметрии

Для групп Ли точечных преобразований по найденному инфинитезимальному оператору X^0 с координатами ξ, η можно найти допускаемую однопараметрическую группу, интегрируя укороченную систему уравнений Ли (3.11):

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \xi^i(x, u), \quad \frac{du^\alpha}{d\tau} = \eta^\alpha(x, u), \quad (3.28)$$

где $i=1, \dots, n; \alpha=1, \dots, m$. Здесь черточки над x, u опущены.

Для групп Ли — Беклунда касательных преобразований бесконечного порядка ситуация более сложная. Н.Х.Ибрагимов показал [9], что интегрирование бесконечной цепочки уравнений Ли (3.11) выражает конечные преобразования группы Ли — Беклунда в виде бесконечных формальных рядов по степеням группового параметра τ . Это сужает возможности применений конечных преобразований группы Ли — Беклунда для размножения

решений. Однако имеются другие их приложения, использующие только инфинитезимальный оператор, а для размножения решений применяется так называемый оператор рекурсии. Допускаемые группы Ли — Беклунда называются *обобщенными симметриями* дифференциальных уравнений в отличие от *классических* или *геометрических симметрий* С.Ли.

Определяющие уравнения (3.27) допускаемой группы имеют ту особенность, что они обычно содержат в своих коэффициентах производные от u^α по x^i более высокого порядка, нежели те, от которых зависят искомые функции ξ, η . Поэтому определяющие уравнения «расщепляются» по этим свободным переменным, что приводит к переопределенной системе уравнений с нетривиальными условиями совместности. Это сильно облегчает полное интегрирование системы (3.27). Примеры этой техники приведены ниже.

Утверждение 3.1. *Оператор X допускается дифференциальными уравнениями (3.4), если и только если соответствующий ему по формулам (3.15) канонический оператор $\hat{X}$ допускается уравнениями (3.4).*

Утверждение очевидно, так как X отличается от $\hat{X}$ в (3.15) лишь слагаемым $\xi^i D_i$, которое всегда является допускаемым оператором для дифференциальных уравнений: уравнения можно почленно дифференцировать по x^i . Поэтому говорят, что операторы X и $\hat{X}$ эквивалентны. Формулы (3.16) дают связь между координатами эквивалентных операторов.

Определение 3.3. *Набор из t функций $\hat{\eta} = \{\hat{\eta}^\alpha\}$, определяющий посредством соотношений (3.14) все координаты канонического оператора (3.10), допускаемого системой (3.4), называется **характеристикой симметрии** с оператором $\hat{X}$, а также всего класса эквивалентных симметрий X (3.15).*

Это понятие введено П.Олвером [5].

3.3. Алгебры Ли и многопараметрические симметрии

Определяющие уравнения (3.27) обычно имеют не одно, а несколько линейно независимых решений $\xi_\mu^i(z), \eta_\mu^\alpha(z)$ ($\mu = 1, \dots, r$) для неизвестных $\xi^i(z), \eta^\alpha(z)$, т.е. r допускаемых операторов X_μ и соответствующих однопараметрических групп симметрий. Тогда получаем r -параметрическую группу G_r симметрий системы (3.4). В силу линейной однородности определяющих уравнений их решения образуют линейное пространство. Следовательно, любая линейная комбинация допускаемых операторов X_μ с постоянными коэффициентами также является допускаемым оператором: это принцип линейной суперпозиции.

Кроме того, решения определяющих уравнений обладают еще одним важным законом композиции, связанным с понятием алгебры Ли, для которой закон умножения определяется как коммутатор операторов.

Рассмотрим сначала свойства коммутатора операторов общего вида

(2.12): $X_\mu = \sum_{i=1}^n \xi_\mu^i(z) \partial / \partial z^i$. Он снова равен оператору того же вида:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{i=1}^n (X_\mu(\xi_\nu^i) - X_\nu(\xi_\mu^i)) \frac{\partial}{\partial z^i}. \quad (3.29)$$

Из определения (3.29) очевидны следующие свойства коммутатора:

1) *билинейность*:

$$[c_1 X_\mu + c_2 X_\nu, X_\lambda] = c_1 [X_\mu, X_\lambda] + c_2 [X_\nu, X_\lambda],$$

где c_1, c_2 — константы;

2) *кососимметричность*:

$$[X_\nu, X_\mu] = -[X_\mu, X_\nu]; \quad (3.30)$$

3) *тождество Якоби*:

$$[X_\lambda, [X_\mu, X_\nu]] + [X_\nu, [X_\lambda, X_\mu]] + [X_\mu, [X_\nu, X_\lambda]] = 0. \quad (3.31)$$

Определение 3.4. *Алгеброй Ли называется линейное пространство с билинейной операцией (умножением) $[\cdot, \cdot]$, называемой скобкой Ли, удовлетворяющей аксиомам билинейности, кососимметричности и тождеству Якоби.*

Размерностью алгебры Ли называется размерность r соответствующего линейного пространства.

Утверждение 3.2. *Инфинитезимальные операторы X_μ однопараметрических групп преобразований образуют алгебру Ли.*

Пусть r — размерность алгебры Ли L и пусть $X_1, \dots, X_r$ — некоторый базис в этой алгебре. Так как любой элемент X из L разлагается по базису:

$$X = \sum_{\mu=1}^r c^\mu X_\mu \quad (c^\mu = \text{const}),$$

а коммутатор $[X_\mu, X_\nu]$ есть снова элемент из L , то этот коммутатор также разлагается по базису:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\lambda=1}^r c_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda \quad (\mu, \nu = 1, \dots, r). \quad (3.32)$$

Здесь $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ — вещественные числа, называемые *структурными константами* алгебры Ли L .

Условия (3.30) и (3.31) приводят к следующим свойствам структурных констант:

1) *кососимметричность*:

$$c_{\nu\mu}^{\lambda} = -c_{\mu\nu}^{\lambda}; \quad (3.33)$$

2) *тождество Якоби*:

$$\sum_{\lambda=1}^r (c_{\mu\nu}^{\lambda} c_{\lambda\sigma}^{\rho} + c_{\sigma\mu}^{\lambda} c_{\lambda\nu}^{\rho} + c_{\nu\sigma}^{\lambda} c_{\lambda\mu}^{\rho}) = 0. \quad (3.34)$$

Теорема 3.4 (С.Ли). *Всякое множество констант $c_{\mu\nu}^{\lambda}$, удовлетворяющих условиям (3.33), (3.34), является множеством структурных констант некоторой алгебры Ли.*

Коммутатор инфинитезимальных операторов в продолженном пространстве вида (3.9) снова является инфинитезимальным оператором некоторой однопараметрической группы преобразований продолженного пространства: он снова имеет вид (3.9), и для его координат по-прежнему справедливы формулы продолжения (3.17).

Теорема 3.5. *Умножение в алгебре Ли (скобка Ли) коммутирует с операцией продолжения инфинитезимальных операторов.*

Можно показать, что для любой пары операторов X_{μ} , X_{ν} , допускаемых системой (3.4), их коммутатор $[X_{\mu}, X_{\nu}]$ также допускается этой системой.

Следствие 3.1. *Скобка Ли любых двух решений определяющих уравнений (3.27) порождает снова решение этих уравнений.*

Утверждение 3.3. *Линейное пространство L всех решений определяющих уравнений (3.27) является алгеброй Ли.*

3.4. Законы сохранения

3.4.1. Законы сохранения и интегралы движения

Определение 3.5. *Законом сохранения (в дифференциальной форме) для дифференциальных уравнений (3.4) называется всякое равенство нулю n -мерной полной дивергенции:*

$$\sum_{i=1}^n D_i [P_i] \Big|_{(3.4)} = 0, \quad (3.35)$$

являющееся следствием уравнений (3.4).

Здесь $P_i = P_i(x, u, u_1, \dots, u_{N-1})$ — гладкие функции.

В частности, если (3.4) — система обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной $x^1 = x$, то, переобозначая $D_1 = D_x = D$, $P_1 = P$, получаем закон сохранения в виде

$$D[P] \Big|_{(3.4)} = 0 \Leftrightarrow P \Big|_{(3.4)} = C = \text{const.} \quad (3.36)$$

Тогда функция P превращается в константу на решениях системы (3.4) и является *первым интегралом* или *интегралом движения*.

Для эволюционных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = F_\alpha(t, x, u, u_1, \dots, u_N) \quad (3.37)$$

одна из независимых переменных t является временем (параметром эволюции), а остальные аргументы $x = \{x^j\}$ — пространственными координатами. Правые части F_α содержат производные от u только по x . Тогда закон сохранения (3.35) принимает вид уравнения неразрывности:

$$\left\{ D_t[P] + \sum_{i=1}^n D_i[Q_i] \right\} \Big|_{(3.4)} = 0, \quad (3.38)$$

где P — *плотность* закона сохранения, $Q = \{Q_i\}$ — *поток*.

В этом случае при подходящих граничных условиях константой (интегралом движения) является интеграл от плотности:

$$P = \int_{\Omega} P(t, x, u, u_1, \dots, u_{N-1}) dx = \text{const.} \quad (3.39)$$

Например, для быстроубывающих при $x \rightarrow \infty$ решений $u(x, t)$ пределы интегрирования в формуле (3.39) бесконечны, а для периодических решений интегрирование производится по периоду.

П.Олвер показал [5], что законы сохранения (3.35) можно привести к *характеристической форме*:

$$\sum_{i=1}^n D_i[P_i] = \sum_{\alpha=1}^n R_\alpha F_\alpha. \quad (3.40)$$

Здесь набор из m гладких функций $R = \{R_\alpha\}$ от $x, u, u_1, \dots$ называется *характеристикой* закона сохранения (3.40).

3.4.2. Определяющие уравнения для законов сохранения

Пусть $K(u, x)$ есть некоторое гладкое отображение линейного пространства гладких функций от $x, u, u_x, \dots, u_x^{(N)}$, зависящее также от x .

Определение 3.6. Производной Фреше функции K по «направлению» функции v называется выражение [12]:

$$K'(u, x)[v] \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial K(u + \varepsilon v, x)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (3.41)$$

Если $K(u, x)$ зависит только от производных от u до порядка N , то определение (3.41) дает оператор производной Фреше (обобщенный градиент) вида

$$(K')_{\alpha\beta} = \sum_J \left(\frac{\partial K_{\alpha}}{\partial u_J^{\beta}} \right) D_J, \quad (3.42)$$

где $J = (j_1, \dots, j_l)$ — мультииндекс с $1 \leq j_k \leq n$,

$$u_J^{\beta}(x) = \frac{\partial^l u^{\beta}(x)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_l}}, \quad D_J = D_{j_1} \dots D_{j_l}$$

и D_{j_k} — оператор полного дифференцирования по x^{j_k} . Суммирование в (3.42) производится до $l = N$.

Например, если $n = 1, m = 1, K(u) = u_{xxx} + 6uu_x$ и нижние индексы обозначают дифференцирования по x , то $K'(u) = D^3 + 6uD + 6u_x$.

Сопряженным дифференциальным оператором к оператору K' (3.42) называется оператор $(K')^+$, определяемый соотношением

$$(K')_{\alpha\beta}^+ [R] = \sum_J (-1)^l D_J \left[\frac{\partial K_{\beta}}{\partial u_J^{\alpha}} R \right]. \quad (3.43)$$

Оператор, сопряженный к K' из предыдущего примера, имеет вид

$$(K')^+ = -D^3 - 6uD + 6u_x.$$

Теорема 3.6. Вектор R из t гладких функций R_α от $x, u, u_1, \dots$ является характеристикой закона сохранения для системы из t дифференциальных уравнений (3.4): $F = 0$, если и только если определяющие уравнения

$$(R^+)^+[F] + (F^+)^+[R] = 0 \quad (3.44)$$

выполняются тождественно для всех u, x .

3.4.3. Связи между симметриями и интегралами

Локальная группа Ли преобразований продолженного пространства называется группой вариационных симметрий функционала (3.39), если любое из преобразований группы, не выводящее из его области определения, не изменяет значение этого функционала для всех гладких функций $u = f(x)$.

Всякая обобщенная вариационная симметрия функционала $\mathcal{P}$ является симметрией соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа для его экстремалей. Однако обратное неверно: множество экстремалей функционала может обладать дополнительными симметриями, отсутствующими у этого функционала. Поэтому изучение симметрий дифференциальных уравнений не сводится к изучению симметрий порождающих их функционалов. Это полезно иметь в виду и при построении теоретико-полевых моделей: не все наблюдаемые симметрии могут быть симметриями лагранжиана, а могут возникать и как симметрии динамических полевых уравнений.

Если система дифференциальных уравнений (3.4) является уравнениями Эйлера — Лагранжа для некоторого функционала, то Э.Нетер установила связь между симметриями и законами сохранения [13].

Теорема 3.7 (Нетер). Инфинитезимальный оператор $X_{\hat{\eta}}$ порождает группу вариационных симметрий функционала $\mathcal{P}$ (3.39), если и только если характеристика симметрий $\hat{\eta} = \{\hat{\eta}^\alpha\}$ (3.16) является характеристикой $R = \{R_\alpha\}$ закона сохранения соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа.

Эта формулировка принадлежит П.Олверу [5].

Если же система дифференциальных уравнений не имеет лагранжевой (или гамильтоновой) структуры, т.е. не является уравнениями Эйлера — Лагранжа, то теорема Нетер неприменима. Однако остается справедливым утверждение, полученное Н.Х.Ибрагимовым, в определенном смысле обобщающее теорему Нетер [9].

Теорема 3.8 (Обобщенная теорема Нетер). Пусть $\sum_{i=1}^n D_i [P_i] = 0$ — закон сохранения для системы дифференциальных уравнений (3.4) и пусть

$\hat{X}_{\hat{\eta}}$ — канонический оператор симметрии этой системы. Тогда вектор $\tilde{P} = \hat{X}_{\hat{\eta}}(P)$; $\tilde{P}_i = \hat{X}_{\hat{\eta}}(P_i)$ также является законом сохранения для этой системы: $\sum_{i=1}^n D_i[\tilde{P}_i] = 0$.

Доказательство получается, если применить оператор $\hat{X}_{\hat{\eta}}$ к закону сохранения (3.40) в характеристической форме с использованием свойства $[\hat{X}_{\hat{\eta}}, D_i] = 0$ и инфинитезимального критерия инвариантности.

4. ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Симметрии и методы интегрирования

4.1.1. Определяющие уравнения

Рассмотрим сначала одно обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n с одной неизвестной $y = y(x)$ в нормальной форме:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (4.1)$$

Здесь $m = 1$, $n = 1$, $x^1 = x$, $u^1 = y$, $N = n$, $u_1 = y'$, ..., $u_N = y^{(n)}$.

Рассмотрим сначала симметрии этого уравнения в каноническом представлении, когда переменная x является инвариантом и не преобразуется. Канонический оператор Ли — Беклунда (3.10) с координатами (3.14) в продолженном пространстве имеет вид

$$\hat{X} = \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial y} + D[\hat{\eta}] \frac{\partial}{\partial y'} + D^2[\hat{\eta}] \frac{\partial}{\partial y''} + \sum_{l \geq 3} D^l[\hat{\eta}] \frac{\partial}{\partial y^{(l)}}, \quad (4.2)$$

где $D = D_1 = D_x$ есть оператор полного дифференцирования по x вида (3.1):

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \sum_{l \geq 3} y^{(l+1)} \frac{\partial}{\partial y^{(l)}}. \quad (4.3)$$

Применим инфинитезимальный критерий инвариантности (3.27), в котором символ $[F]$ означает, что должны учитываться как само уравнение (4.1), так и уравнения, полученные его дифференцированием по x :

$$y^{(n+s)} = D^s[f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})] \quad (s = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

Условие инвариантности (3.27) уравнения (4.1) имеет вид

$$\left\{ \hat{\eta} f_y + D[\hat{\eta}] f_{y'} + D^2[\hat{\eta}] f_{y''} + \sum_{l=3}^{n-1} D^l[\hat{\eta}] f_{y^{(l)}} - D^n[\hat{\eta}] \right\} \Big|_{(4.1), (4.4)} = 0. \quad (4.5)$$

Здесь и далее нижние буквенные индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным. Рассмотрим в качестве примера уравнение (4.1) порядка $n = 2$:

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (4.6)$$

Условие его инвариантности есть (4.5) при $n = 2$:

$$\begin{aligned} & \hat{\eta}(x, y, y') f_y(x, y, y') + [\hat{\eta}_x(x, y, y') + y' \hat{\eta}_y(x, y, y') + \\ & + f(x, y, y') \hat{\eta}_{y'}(x, y, y')] f_{y'}(x, y, y') - D[\hat{\eta}_x(x, y, y') + \\ & + y' \hat{\eta}_y(x, y, y') + f(x, y, y') \hat{\eta}_{y'}(x, y, y')] \Big|_{(4.1), (4.4)} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь выражение (4.3) для D «обрывается» и с учетом уравнения (4.6) имеет вид

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Получаем следующее определяющее уравнение для характеристики $\hat{\eta}$ канонического оператора симметрии:

$$\begin{aligned} & \hat{\eta}_{xx} + 2y'(\hat{\eta}_{xy} + f \hat{\eta}_{y'y}) + (y')^2 \hat{\eta}_{yy} + f^2 \hat{\eta}_{y'y'} + 2f \hat{\eta}_{xy'} + \\ & + f \hat{\eta}_y + (f_x + y' f_y) \hat{\eta}_{y'} - f_{y'}(\eta_x + y' \hat{\eta}_y) - f_y \hat{\eta} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для групп Ли точечных преобразований формула (3.16) дает линейную зависимость характеристики симметрии от производной:

$$\hat{\eta}(x, y, y') = \eta(x, y) - y' \xi(x, y). \quad (4.9)$$

Подстановка выражения (4.9) в уравнение (4.8) дает

$$\begin{aligned} & \eta_{xx} + y'(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + (y')^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - (y')^3 \xi_{yy} + \\ & + f(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y) - f_y[\eta_x + y'(\eta_y - \xi_x) - \\ & - (y')^2 \xi_y] - f_x \xi - f_y \eta = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При заданном уравнении (4.6) известна вся зависимость от производной y' его правой части f , а следовательно, и левой части уравнения (4.10), так как неизвестные ξ , η не зависят от y' . Отсюда следует, что после приведения подобных членов, одинаково зависящих от y' , коэффициенты при каждой такой группе членов следует приравнять нулю. Происходит «расщепление» уравнения (4.10) по переменной y' на несколько уравнений. Получаем переопределенную систему *определяющих уравнений для классических (лиевских) симметрий*.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение

$$y'' = \frac{1}{x}(y')^2 - \frac{2}{x^2}yy' + \frac{y^2}{x^3} \equiv f(x, y, y'). \quad (4.11)$$

Подстановка функции f из уравнения (4.11) в уравнении (4.10) дает равенства нулю четырех групп членов, пропорциональных четырем различным степеням y' :

$$\xi_{yy} + \frac{1}{x} \xi_y = 0, \quad (4.12)$$

$$\eta_{yy} - \frac{1}{x} \eta_y - 2\xi_{xy} + 4\frac{y}{x^2} \xi_y + \frac{1}{x^2} \xi = 0, \quad (4.13)$$

$$2\eta_{xy} - \frac{2}{x} \eta_x + \frac{2}{x^2} \eta - \xi_{xx} + 2\frac{y}{x^2} \xi_x - 3\frac{y^2}{x^3} \xi_y - 4\frac{y}{x^3} \xi = 0, \quad (4.14)$$

$$\eta_{xx} + 2\frac{y}{x^2} \eta_x + \frac{y^2}{x^3} \eta_y - 2\frac{y}{x^3} \eta - 2\frac{y^2}{x^3} \xi_x + 3\frac{y^2}{x^4} \xi = 0. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.12) легко интегрируется и дает

$$\xi(x, y) = C_1(x) + C_2(x) \exp(-y/x), \quad (4.16)$$

где $C_{1,2}(x)$ — произвольные гладкие функции от x . Подстановка выражения (4.16) для ξ в уравнение (4.13) приводит к линейному уравнению только для неизвестной η , имеющему общее решение

$$\begin{aligned} \eta(x, y) = & [-xC_2'(x) + (y/x + 2)C_2(x)] \exp(-y/x) + \\ & + (y/x + 1)C_1(x) - xC_3(x) + C_4(x) \exp(y/x) \end{aligned} \quad (4.17)$$

с двумя новыми произвольными функциями $C_{3,4}(x)$. Таким образом, вся зависимость от y неизвестных ξ, η уже найдена. Поэтому подстановка выражений (4.16), (4.17) в уравнение (4.14) приводит к его расщеплению по переменной y : приравниваются нулю суммарные коэффициенты членов с одинаковой зависимостью от y . Выражения для координат инфинитезимального оператора симметрии имеют следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} \xi(x) = & C_3x^2 + C_1x + \bar{C}_1, \\ \eta(x, y) = & (C_4x + \bar{C}_4) \exp(y/x) + C_3xy + \bar{C}_1 \frac{y}{x} + \\ & + (C_1 - \bar{C}_3)x + C_1y + \bar{C}_1, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где все величины $C, \bar{C}$ с индексами — произвольные константы, $C_2 = \bar{C}_2 = 0$. Полагая по очереди все константы, кроме одной, равными нулю в формуле (4.18) и используя выражение (3.24) для инфинитезимальных операторов симметрии X_μ :

$$X_\mu = \xi_\mu(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\mu(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.19)$$

получаем базис алгебры операторов симметрии, допускаемых уравнением (4.11):

$$\begin{aligned} X_1 = & \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{y}{x} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = xX_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + (x+y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_4 = & x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = x \exp(y/x) \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_6 = \exp(y/x) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Коммутаторы операторов симметрии вида (4.19) имеют тот же вид:

$$[X_\mu, X_\nu] = \xi_{\mu\nu}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_{\mu\nu}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.21)$$

с координатами, определяемыми формулой (3.29):

$$\xi_{\mu\nu} = X_{\mu}(\xi_{\nu}) - X_{\nu}(\xi_{\mu}),$$

$$\eta_{\mu\nu} = X_{\mu}(\eta_{\nu}) - X_{\nu}(\eta_{\mu}). \quad (4.22)$$

Результаты вычисления коммутаторов операторов симметрии удобно записать в виде таблицы, в которой выражение для коммутатора $[X_{\mu}, X_{\nu}]$ стоит на пересечении μ -й строки и ν -го столбца. В примере 4.1 алгебра Ли симметрий уравнения (4.11) определяется табл.1, вычисленной по формулам (4.22).

Таблица 1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	X_1	0	$2X_2 - X_3$	X_6	0
X_2	$-X_1$	0	0	X_4	X_5	0
X_3	0	0	0	0	X_5	X_6
X_4	$-2X_2 + X_3$	$-X_4$	0	0	0	$-X_5$
X_5	$-X_6$	$-X_5$	$-X_5$	0	0	0
X_6	0	0	$-X_6$	X_5	0	0

4.1.2. Метод канонических переменных

Знание однопараметрической группы симметрии дифференциального уравнения позволяет понизить его порядок на единицу, а для уравнения первого порядка — проинтегрировать его. Метод канонических переменных есть один из двух методов, с помощью которых это достигается [5,14]. Он использует теорему 2.4 о выпрямлении векторного поля.

Каноническими переменными называются те переменные, в которых группа симметрии уравнения приводится к группе трансляций по одной из переменных, и следовательно, уравнение не зависит от этой переменной. Как известно, такое дифференциальное уравнение допускает понижение порядка. В случае же уравнения первого порядка независимость от одной из переменных приводит к разделению переменных, и уравнение интегрируется в квадратурах.

Требуемая замена переменных $(x, y) \rightarrow (t, u): t = t(x, y), u = u(x, y)$ определяется по известному инфинитезимальному оператору симметрии X вида (3.24):

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.23)$$

формулами (2.18), (2.19) при $n = 2, z'^1 = t, z'^2 = u$:

$$X(t) \equiv \xi(x, y) \frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad (4.24)$$

$$X(u) \equiv \xi(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 1. \quad (4.25)$$

Уравнение (4.24) означает, что функция $t(x, y)$ есть инвариант группы с оператором (4.23). Оператор X преобразуется в новых переменных к виду $X = \partial/\partial u$ и порождает группу трансляций по координате u .

Пример 4.2. Применим теперь метод канонических переменных к дифференциальному уравнению (4.11) второго порядка из примера 4.1 для понижения его порядка. Это уравнение допускает 6 однопараметрических групп симметрии с операторами (4.20) и любую из них можно использовать для понижения его порядка. Выберем, например, симметрию с оператором X_1 . Канонические переменные t, u определяются уравнениями (4.24), (4.25):

$$X_1(t) \equiv \frac{\partial t}{\partial x} + \left(\frac{y}{x} + 1 \right) \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad X_1(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{y}{x} + 1 \right) \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

Решая эти линейные уравнения в частных производных первого порядка методом характеристик, находим их общие решения:

$$t = \Phi \left(\frac{y}{x} - \ln |x| \right), \quad u = x + \Psi \left(\frac{y}{x} - \ln |x| \right),$$

зависящие от произвольных гладких функций Φ, Ψ одного аргумента. Простейший их выбор: $\Phi(z) = z, \Psi(z) = z$ дает

$$t = \frac{y}{x} - \ln |x|, \quad u = x + \frac{y}{x} - \ln |x|.$$

Это и есть искомое преобразование к каноническим переменным. Легко находим обратное преобразование:

$$x = u - t, \quad y = (u - t)(t + \ln |u - t|)$$

и формулы преобразования производных y', y'' .

Подстановка этих выражений в уравнение (4.11) преобразует его к каноническим переменным:

$$u''_{tt} = 1 - u'_t.$$

Полученное уравнение не зависит явно от переменной u в соответствии с тем, что оператор симметрии в новых переменных по построению должен стать оператором трансляций по u : $X_1 = \partial/\partial u$, а инвариантное уравнение не должно зависеть от u . С помощью известного приема, вводя новую неизвестную $z(t) = u'_t$, мы теперь можем понизить порядок этого уравнения:

$$\frac{dz}{dt} = 1 - z.$$

Если используется лишь однопараметрическая группа симметрий, то полученное уравнение первого порядка не обязано быть интегрируемым в квадратурах. Тот факт, что в данном примере оно является таковым, будучи уравнением с разделяющимися переменными, объясняется тем, что уравнение (4.11) имеет и другие симметрии (4.20): данное уравнение не зависит явно от t и потому допускает оператор трансляций по t .

Разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение, находим

$$z = \frac{du}{dt} = C_1 \exp(-t) + 1.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$u = t - C_1 \exp(-t) + C_2,$$

где $C_{1,2}$ — произвольные константы. Подставляя сюда выражения $t(x, y)$, $u(x, y)$, находим общее решение уравнения (4.11):

$$y = x \ln \left| \frac{C_1 x}{C_2 - x} \right|.$$

4.1.3. Метод дифференциальных инвариантов

Перейдем теперь ко второму методу понижения порядка и интегрирования дифференциальных уравнений, основанному на понятии *дифференциальных инвариантов*, т.е. инвариантов I группы преобразований продолженного пространства. Дифференциальные инварианты порядка n опре-

деляются условием (2.16), использующим n -е продолжение инфинитезимального оператора (3.9) группы симметрии:

$${}^nXI(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \equiv \xi \frac{\partial I}{\partial x} + \eta \frac{\partial I}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial I}{\partial y'} + \zeta_2 \frac{\partial I}{\partial y''} + \dots + \zeta_n \frac{\partial I}{\partial y^{(n)}} = 0 \quad (4.26)$$

и формулы продолжения (3.17):

$$\zeta_1 = D[\eta] - y' D[\xi], \quad \zeta_2 = D[\zeta_1] - y'' D[\xi], \quad \dots \quad \zeta_n = D[\zeta_{n-1}] - y^{(n)} D[\xi]. \quad (4.27)$$

Здесь n -е продолжение инфинитезимального оператора группы симметрии обозначено nX .

Из формул (4.26), (4.27) видно, что прямой путь отыскания дифференциальных инвариантов высших порядков как решений соответствующей характеристической системы вида (2.17) может оказаться делом довольно сложным. С.Ли показал, что имеется легкий способ построения всех дифференциальных инвариантов с помощью *инвариантного дифференцирования* дифференциальных инвариантов низших порядков.

Теорема 4.1. Пусть для группы G преобразований плоскости XOY известны дифференциальные инварианты порядка n :

$$t = t(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad \text{и} \quad u = u(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Тогда производная

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{du/dx}{dt/dx} \equiv \frac{D[u]}{D[t]} \quad (4.28)$$

является дифференциальным инвариантом группы G порядка $(n+1)$.

Следствие 4.1. Пусть G — однопараметрическая группа преобразований плоскости XOY и $t = t(x, y)$, $u = u(x, y, y')$ — полное множество (базис) функционально независимых дифференциальных инвариантов первого порядка. Тогда производные

$$t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} \quad (4.29)$$

составляют базис дифференциальных инвариантов n -го порядка ($n \geq 1$).

Теорема 4.2. Пусть G — локальная группа преобразований плоскости XOY , и функции

$$w_1(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \dots, w_k(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

составляют базис дифференциальных инвариантов n -го порядка для группы G . Тогда дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

допускает группу G в качестве своей группы симметрий, если и только если это уравнение можно равносильным образом выразить только через базис дифференциальных инвариантов n -го порядка группы G :

$$\tilde{F}(w_1(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \dots, w_k(x, y, y', \dots, y^{(n)})) = 0. \quad (4.30)$$

В частности, если G — однопараметрическая группа симметрий любого дифференциального уравнения n -го порядка, то оно эквивалентно уравнению $(n-1)$ -го порядка:

$$\tilde{F}\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right) = 0, \quad (4.31)$$

выраженному только через дифференциальные инварианты порядка не выше первого: $t = t(x, y)$, $u = u(x, y, y')$ и через их производные.

Доказательство сразу следует из теоремы 2.6 и следствия 4.1.

На этой теореме основано понижение порядка дифференциального уравнения методом дифференциальных инвариантов, а именно: выражая исходное дифференциальное уравнение порядка n через дифференциальные инварианты, мы не только автоматически понижаем его порядок на единицу. На самом деле получается еще более сильный результат. Действительно, если решение полученного уравнения (4.31) $(n-1)$ -го порядка уже найдено: $u = h(t)$, то решение $y = y(x)$ исходного уравнения получается интегрированием вспомогательного уравнения первого порядка, которое получается при подстановке выражений для u , t через x , y :

$$u(x, y, y') = h(t(x, y)). \quad (4.32)$$

Так как это уравнение выражено только через инварианты группы G , то группа G есть однопараметрическая группа его симметрий. Следовательно, уравнение (4.32) можно проинтегрировать в квадратурах методом канонических переменных.

Итак, под понижением порядка дифференциального уравнения понимается не просто переписывание его в новых переменных в виде уравнения меньшего порядка, а тот факт, что по известному решению последнего уравнения решение исходного уравнения восстанавливается только с помощью квадратур. Именно в этом смысле понижение порядка уравнения достигается методом дифференциальных инвариантов. То же замечание справедливо и для метода канонических переменных.

Заметим также, что левая часть уравнения F может быть вектор-функцией, и тогда теорема 4.2, очевидно, применима для понижения порядка также и системы дифференциальных уравнений.

Пример 4.3. Применим этот метод к уравнению диффузионного пограничного слоя в автомодельном режиме для случая гиперболической зависимости коэффициента диффузии от концентрации в растворе диффундирующего вещества [15]:

$$y'' = f(x, y, y') \equiv -vx^n y y' + \frac{1}{y} (y')^2, \quad v = \frac{1}{n+1}. \quad (4.33)$$

Подставим функцию f , заданную формулой (4.33), в определяющее уравнение (4.10) для симметрий. Расщепление по y' дает четыре уравнения для координат $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ инфинитезимального оператора симметрии X вида (4.23) (нижние буквенные индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным):

$$\xi_{yy} + \frac{1}{y} \xi_y = 0, \quad (4.34)$$

$$\eta_{xx} + vx^n y \eta_x = 0, \quad (4.35)$$

$$\eta_{yy} - \frac{1}{y} \eta_y + \frac{1}{y^2} \eta - 2\xi_{xy} + 2vx^n y \xi_y = 0, \quad (4.36)$$

$$2\eta_{xy} - \frac{2}{y} \eta_x + vx^n \eta - \xi_{xx} + vx^n y \left(\xi_x + \frac{n}{x} \xi \right) = 0. \quad (4.37)$$

Получаем $\eta = \eta(y)$, и уравнение (4.35) обращается в тождество. Общее решение уравнения (4.34) имеет вид

$$\xi(x, y) = C_1(x) \ln |y| + C_2(x) \quad (4.38)$$

с двумя произвольными гладкими функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$. Подстановка этих результатов в уравнение (4.36) приводит к его расщеплению по y и

дает $\xi = \xi(x)$, а также уравнение только для η , имеющее следующее общее решение:

$$\eta(y) = C_3 y \ln |y| + C_4 y. \quad (4.39)$$

Окончательно получаем общее решение определяющих уравнений

$$\xi(x) = x, \quad \eta(y) = -\frac{1}{v} y,$$

и оператор симметрии имеет следующий вид:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.40)$$

Мы доказали, что уравнение (4.33) не имеет других классических симметрий.

Используем теперь симметрию этого уравнения для понижения его порядка методом дифференциальных инвариантов. Дифференциальные инварианты порядка не выше первого $t = t(x, y)$, $u = u(x, y, y')$ получаются с использованием первого продолжения $\overset{1}{X}$ инфинитезимального оператора (4.40) и определяются условиями $X(t) = 0$ и

$$\overset{1}{X}(u) \equiv x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{v} y \frac{\partial u}{\partial y} - (n+2) y' \frac{\partial u}{\partial y'} = 0. \quad (4.41)$$

Решая уравнения $X(t) = 0$ и (4.41) методом характеристик, находим базис инвариантов низших порядков:

$$t = x^{n+1} y, \quad u = \frac{xy'}{y}. \quad (4.42)$$

С помощью инвариантного дифференцирования находим отсюда дифференциальный инвариант второго порядка:

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{D[u]}{D[t]} = \frac{1}{t(n+1+u)} \left(\frac{x^{n+3}}{t} y'' - u^2 + u \right).$$

Используя эти выражения в уравнении (4.33), преобразуем его к новым переменным t, u :

$$t(n+1+u) \frac{du}{dt} = (1-vt) u. \quad (4.43)$$

Разделяя здесь переменные и интегрируя, находим общий интеграл этого уравнения:

$$u^{n+1} \exp u = C_1 t \exp(-vt). \quad (4.44)$$

Мы доказали, что уравнение (4.33) не имеет других классических симметрий. Следовательно, дополнительная классическая симметрия, ответственная за разделение переменных в уравнении (4.43), появилась только после понижения порядка уравнения. Ее инфинитезимальный оператор приводится к оператору трансляций $X = \partial/\partial v$ по переменной $v = \ln |t| - vt$, в которой уравнение принимает вид

$$dv = \frac{(n+1+u)}{u} du$$

и не зависит явно от v . Ей соответствует нелокальная симметрия исходного уравнения (4.33), которая получается применением к оператору трансляций по v преобразования Беклунда, обратного к (4.42) и выражающего x, y через t, u . Такая симметрия не могла быть обнаружена при решении определяющих уравнений (4.10) для классических симметрий.

Обозначим через $u = h(t, C_1)$ неявную функцию, определяемую равенством (4.44). Подставляя сюда выражения (4.42) для t, u , получаем вспомогательное дифференциальное уравнение:

$$\frac{xy'}{y} = h(x^{n+1}y, C_1). \quad (4.45)$$

Поскольку это уравнение выражается только через инварианты t, u , то оно автоматически допускает оператор симметрии (4.40). Канонические переменные ищем из условий

$$X(t) \equiv x \frac{\partial t}{\partial x} - \frac{1}{v} y \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad X(w) \equiv x \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{v} y \frac{\partial w}{\partial y} = 1. \quad (4.46)$$

Методом характеристик получаем

$$t = x^{n+1}y, \quad w = \ln |x| + \varphi(x^{n+1}y).$$

Простейший выбор произвольной функции $\varphi \equiv 0$ дает $w = \ln |x|$. Уравнение (4.45), преобразованное к переменным t, w , допускает в силу условий (4.46) трансляции по w и потому не зависит явно от w и интегрируется:

$$w(t) \equiv \ln |x| = \int_0^t \frac{dt}{t[h(t, C_1) + n + 1]} + C_2. \quad (4.47)$$

Обозначая

$$J(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \frac{h(t, C_1) dt}{t[h(t, C_1) + n + 1]}$$

и решая уравнение (4.45) относительно $\ln |y|$, получаем решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\ln |y| = J(t) - (n + 1) C_2, \quad \ln |x| = -\frac{1}{(n + 1)} J(t) + \frac{1}{(n + 1)} \ln |t| + C_2,$$

где использовано равенство (4.42), определяющее t . В определении функции $J(t)$ величина $u = h(t, C_1)$ есть неявная функция, определяемая равенством (4.44), откуда можно извлечь всю нужную информацию о ней. Именно в такой форме решение уравнения (4.33) используется в приложениях [15].

4.2. Многопараметрические симметрии и интегрирование дифференциальных уравнений

4.2.1. Двухпараметрические группы Ли симметрий и понижение порядка

Выше было показано, как наличие у дифференциального уравнения однопараметрической группы симметрий приводит к понижению его порядка на единицу. Были также приведены примеры, где наличие двух однопараметрических групп симметрий у уравнения второго порядка приводит к понижению порядка на две единицы, т.е. к интегрированию этого уравнения. Этот факт базировался на том свойстве, что после понижения порядка на единицу с помощью одной симметрии уравнение сохраняет (или приобретает) вторую классическую симметрию, что и приводит к его интегрированию. Однако это не всегда так: оказывается, что необходимо сформулировать алгоритм интегрирования с правильным порядком использования симметрий. Для этого понадобятся дополнительные сведения о структуре групп и алгебр Ли.

Определение 4.1. *Гомоморфизм групп Ли — это есть гладкое отображение $\varphi: G \rightarrow H$ одной группы Ли в другую, согласованное с групповым умножением:*

$$\varphi(g \cdot \tilde{g}) = \varphi(g) \cdot \varphi(\tilde{g}), \quad g, \tilde{g} \in G.$$

Если гомоморфизм φ гладкий обратный, то он определяет изоморфизм групп Ли G и H .

Практически часто можно не различать изоморфные группы Ли.

Определение 4.2. Подгруппа Ли H группы Ли G есть подмногообразие $H = \varphi(\tilde{H})$, где $\tilde{H}$ также является группой Ли, а отображение $\varphi: \tilde{H} \rightarrow G$ есть гомоморфизм групп Ли.

Определение 4.3. Подгруппа H группы G называется **нормальной**, если $g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$ для любого $h \in H$ и любого $g \in G$.

В группе G можно ввести отношение эквивалентности по ее подгруппе H : элементы g и $\tilde{g}$ группы G эквивалентны $g \sim \tilde{g}$, если и только если $g = \tilde{g} \cdot h$ для некоторого $h \in H$. Множество всех элементов группы G , эквивалентных данному элементу g , называется **смежным классом** или **классом эквивалентности** с представителем g . Всякий элемент этого класса имеет вид $g \cdot h$ с некоторым элементом h подгруппы H . Множество всех смежных классов группы G по подгруппе H обозначается G/H .

Теорема 4.3. Если H — нормальная подгруппа группы G , то на множестве смежных классов G/H можно ввести структуру группы, называемой **фактор-группой** группы G по подгруппе H .

Для групп Ли эти понятия переносятся на алгебры Ли. Пусть L_r — конечномерная алгебра Ли размерностью r , и пусть N — линейное подпространство в L_r .

Определение 4.4. Подпространство N называется **подалгеброй** алгебры Ли L_r , если оно замкнуто относительно скобки Ли, т.е. $[X, Y] \in N$, если $X, Y \in N$. Подпространство называется **идеалом** алгебры Ли L_r , если $[X, Y] \in N$ для всех $X \in N$ и всех $Y \in L_r$.

В алгебре Ли L_r можно ввести отношение эквивалентности по ее идеалу N : операторы X и Y из L_r называются эквивалентными $X \sim Y$, если $Y - X \in N$. Множество всех операторов, эквивалентных данному оператору Y , называется **смежным классом** с представителем X : всякий элемент Y этого класса имеет вид $Y = X + Z$ с некоторым оператором $Z \in N$. Множество всех смежных классов образует алгебру Ли, которая называется **фактор-алгеброй** алгебры Ли L_r по идеалу N и обозначается L_r/N . Элементами этой фактор-алгебры являются представители смежных классов.

Теорема 4.4 (инфинитезимальный критерий нормальности). Подгруппа Ли H группы Ли G нормальна, если и только если ее алгебра Ли N является идеалом алгебры Ли группы G .

Теорема 4.5. Если группа Ли H есть нормальная подгруппа группы Ли G , а N и L — их алгебры Ли соответственно, то фактор-группа G/H есть группа Ли с алгеброй Ли, являющейся фактор-алгеброй L/N .

Теорема 4.6. *Каждая двумерная алгебра Ли L_2 с базисом X_1, X_2 либо абелева: $[X_1, X_2] = 0$, либо изоморфна алгебре Ли, удовлетворяющей соотношению $[X_1, X_2] = X_1$.*

Оба эти случая объединяются соотношением

$$[X_1, X_2] = kX_1, \quad (4.48)$$

где $k = 0$ или $k = 1$.

Здесь одномерная алгебра Ли L_1 , натянутая на X_1 , образует идеал в L_2 . Фактор-алгебра L_2/L_1 отождествляется с одномерной алгеброй Ли, натянутой на X_2 .

Пусть G_r есть r -параметрическая группа Ли преобразований m -мерного многообразия M (в частности, области евклидова пространства $\mathbb{R}^m$). Пусть H есть s -параметрическая подгруппа Ли группы G_r , и функции $J(z) = (J_1(z), \dots, J_{m-s}(z))$ составляют полное множество (базис) функционально независимых инвариантов группы H . Если H является нормальной подгруппой в G , то определено индуцированное действие группы G на $(m-s)$ -мерном подмногообразии $\tilde{M}$, имеющем локальные координаты $y = (y^1, \dots, y^{m-s})$, $y^i = J_i(z)$.

Вернемся теперь к анализу симметрий конечных уравнений вида (2.21), определяющих поверхность S_F , лежащую в M . Согласно теореме 2.6 всякую поверхность S_F , инвариантную относительно группы H , можно задать уравнениями, выраженными только через базис инвариантов группы H :

$$F(z) = \tilde{F}(J(z)) \equiv \tilde{F}(y) = 0, \quad \text{где } y = J(z). \quad (4.49)$$

Отсюда следует утверждение:

Теорема 4.7. *Если H — нормальная подгруппа группы Ли G , то поверхность S_F инвариантна относительно всей группы G , если и только если поверхность S_F , заданная уравнением (4.49) в инвариантах, является инвариантной относительно индуцированного действия группы G на $\tilde{M}$, т.е. допускает фактор-группу G/H как группу симметрий.*

Далее рассматриваем только классические симметрии, т.е. группы Ли точечных преобразований.

Аналог теоремы 4.7 справедлив и для дифференциальных уравнений. Отличие в том, что эти уравнения определяют поверхности в продолженном

пространстве, так что локальные координаты включают в себя производные от неизвестных, а множество инвариантов содержит дифференциальные инварианты.

Пусть M — многообразие в плоскости XOY , а его r -е продолжение $M^{(r)}$ содержит в числе своих координат производные неизвестной y до r -го порядка включительно: $(x, y, y', \dots, y^{(r)})$. Далее принимается следующее

Предположение 4.1. *Группа G_r преобразований $(r+2)$ -мерного многообразия $M^{(r)}$ имеет r -мерные орбиты.*

Тогда группа G_r имеет два независимых дифференциальных инварианта порядка r :

$$t = t(x, y, y', \dots, y^{(r)}), \quad u = u(x, y, y', \dots, y^{(r)}). \quad (4.50)$$

Согласно теоремам 2.6 и 4.2 инвариантность дифференциального уравнения n -го порядка эквивалентна возможности выразить это уравнение только через дифференциальные инварианты n -го продолжения группы G_r в виде дифференциального уравнения $(n-r)$ -го порядка для неизвестной функции $u = u(t)$:

$$\tilde{F} \left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-r}u}{dt^{n-r}} \right) = 0.$$

Если $u = h(t)$ — решение этого редуцированного уравнения, то, подставляя сюда выражения для инвариантов, получаем вспомогательное дифференциальное уравнение r -го порядка:

$$u(x, y, y', \dots, y^{(r)}) = h[t(x, y, y', \dots, y^{(r)})]. \quad (4.51)$$

Поскольку это уравнение выражается только через инварианты, то оно допускает r -параметрическую группу симметрий G_r . Однако отсюда не следует, что группу G_r можно использовать для интегрирования в квадратурах уравнения (4.51). Причина в том, что при поэтапном понижении порядка с использованием на каждом этапе однопараметрических симметрий может произойти потеря еще не использованных симметрий. Этого не случится, если на каждом этапе использовать нормальную подгруппу группы симметрии.

Теорема 4.8. *Пусть H_s есть нормальная подгруппа группы G_r , и дифференциальное уравнение*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4.52)$$

порядка n допускает H_s как группу симметрий. Пусть соответствующее редуцированное уравнение, выраженное через инварианты t, u группы H_s , имеет вид

$$\tilde{F}\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{n-s}u}{dt^{n-s}}\right) = 0. \quad (4.53)$$

Тогда определено индуцированное действие фактор-группы G_r/H_s на плоскости инвариантов t, u (на множестве $\tilde{M}$) и уравнение (4.52) допускает всю группу симметрий G_r , если и только если редуцированное уравнение (4.53) допускает фактор-группу G_r/H_s как свою группу симметрий.

Таким образом, теорема 4.7 для алгебраических уравнений переносится на дифференциальные уравнения.

Теперь можно определить правильную последовательность использования симметрий из двухпараметрической группы для понижения порядка на две единицы.

Теорема 4.9. Пусть дифференциальное уравнение (4.52) n -го порядка инвариантно относительно двухпараметрической группы симметрий G . Тогда существует редуцированное уравнение вида (4.53) с $s=2$ порядка $n-2$, обладающее тем свойством, что по его общему решению можно получить общее решение исходного уравнения (4.52) с помощью двух квадратур.

Доказательство состоит в указании правильного алгоритма понижения порядка с помощью двухпараметрической группы симметрий с базисом алгебры Ли X_1, X_2 , удовлетворяющим соотношению (4.48), в котором можно считать, что $k=1$ (при $k=0$ симметрии можно использовать в любом порядке, и проблемы нет). Такой базис всегда существует в силу теоремы 4.6. Тогда подалгебра Ли, натянутая на X_1 , образует идеал в двумерной алгебре Ли с базисом X_1, X_2 . Поэтому однопараметрическая подгруппа H , порожденная X_1 , является нормальной подгруппой группы G с однопараметрической фактор-группой G/H . Правильная последовательность понижения порядка уравнения (4.52) состоит в том, что сначала используется симметрия X_1 , соответствующая нормальной подгруппе, и уравнение выражается через ее дифференциальные инварианты $t = t(x, y)$, $u = u(x, y, y')$ согласно теореме 4.2. Причем решение исходного уравнения (4.52) восстанавливается по решению редуцированного уравнения $(n-1)$ -го порядка с помощью одной квадратуры. Так как H — нормальная подгруппа, то

редуцированное уравнение инвариантно относительно действия фактор-группы G/H на множестве инвариантов t, u , т.е. сохраняет симметрию X_2 . Поэтому симметрию X_2 можно использовать для понижения порядка уравнения еще на одну единицу.

4.2.2. Разрешимые группы и алгебры Ли и понижение порядка с помощью многопараметрических симметрий

Для группы Ли G_r с числом параметров $r \geq 3$ вообще может оказаться невозможным понижение порядка G_r -инвариантного уравнения на r единиц. Зависящие от r параметров группы Ли и соответствующие r -мерные алгебры Ли, которые можно использовать для понижения порядка уравнения на r единиц, т.е. для полного разрешения в квадратурах дифференциального уравнения r -го порядка, называются *разрешимыми*.

Определение 4.5. Группа Ли G_r называется *разрешимой*, если существует цепочка подгрупп Ли

$$G_r \supset G_{r-1} \supset \dots \supset G_2 \supset G_1 \supset G_0 = \{e\}$$

с размерностями $r, r-1, \dots, 2, 1, 0$ соответственно, в которой каждая последующая подгруппа является нормальной подгруппой предыдущей подгруппы G_s ($s = 2, \dots, r$):

$$g_s^{-1} \cdot g_{s-1} \cdot g_s \in G_{s-1}, \text{ если } g_{s-1} \in G_{s-1}, \quad g_s \in G_s.$$

Определение 4.6. Алгебра Ли L_r называется *разрешимой*, если существует цепочка подалгебр Ли

$$L_r \supset L_{r-1} \supset \dots \supset L_2 \supset L_1$$

размерностей $r, r-1, \dots, 2, 1$ соответственно, в которой каждая последующая подалгебра L_{s-1} является идеалом в предыдущей подалгебре L_s ($s = 2, \dots, r$):

$$[X_{s-1}, X_s] \in L_{s-1}, \text{ если } X_{s-1} \in L_{s-1}, \quad X_s \in L_s.$$

Следующее утверждение устанавливает эквивалентность этих двух определений.

Утверждение 4.1. Группа Ли разрешима, если и только если разрешима ее алгебра Ли.

Критерий разрешимости алгебры Ли формулируется с помощью производной алгебры.

Определение 4.7. Пусть $X_1, \dots, X_r$ — базис алгебры Ли L_r . Подпространство, базисом которого являются коммутаторы $[X_i, X_j]$ всевозможных пар базисных операторов, образует идеал, называемый **производной алгеброй** и обозначаемый L'_r . Производные алгебры высших порядков определяются по индукции:

$$L_r^{(n+1)} = (L_r^{(n)})', \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема 4.10. Алгебра Ли L_r разрешима, если и только если ее производная алгебра некоторого порядка обращается в нуль: $L_r^{(n)} = 0$ для некоторого $n > 0$.

Отсюда очевидно, что всякая абелева алгебра Ли (для которой скобки Ли всех ее элементов равны нулю) разрешима, поскольку ее производная алгебра равна нулю, т.е. состоит лишь из нулевого элемента.

Следствие 4.2. Всякая двумерная алгебра Ли L_2 разрешима.

Теорема 4.11. Пусть дифференциальное уравнение (4.52) порядка n допускает разрешимую r -параметрическую группу симметрий G_r . Тогда общее решение этого уравнения можно получить только с помощью квадратур из общего решения редуцированного уравнения (4.53) $(n-r)$ -го порядка (при $s=r$). В частности, если уравнение (4.52) допускает n -параметрическую разрешимую группу симметрий, то его общее решение можно получить только квадратурами.

Пример 4.4 (П.Олвер [5]). Уравнение третьего порядка

$$(y')^5 y''' = 3(y')^4 (y'')^2 + (y'')^3 \quad (4.54)$$

допускает трехпараметрическую группу симметрии. Соответствующий базис алгебры Ли L_3 состоит из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.55)$$

с коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Цепочка подалгебр $L_3 \supset L_2 \supset L_1$, имеющих базисы (4.55), $\{X_1, X_2\}$ и X_1 соответственно, очевидно, удовлетворяет определению 4.6, и, следовательно

но, L_3 является разрешимой алгеброй. Поэтому уравнение (4.54) интегрируемо в квадратурах.

Применим теперь алгоритм интегрирования, на котором основано доказательство теоремы 4.11. Сначала используем базисный элемент X_1 алгебры L_1 . Инварианты порождаемой им однопараметрической подгруппы имеют вид: $t = x$, $u = y'$. Выразим через них уравнение (4.54), понизив его порядок на единицу:

$$u^5 \frac{d^2 u}{dt^2} = 3u^4 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^3. \quad (4.56)$$

Рассмотрим базисный элемент X_2 алгебры L_2 , не принадлежащий L_1 , и выразим его через инварианты t , u . Получим оператор $X_2 = \tilde{X}_2 = \partial/\partial t$, порождающий индуцированное действие двухпараметрической подгруппы G_2 на множестве инвариантов t , u алгебры L_1 . Найдем теперь дифференциальные инварианты второго порядка оператора $\tilde{X}_2$:

$$z = u, \quad v = \frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dz} = \frac{D_t[v]}{D_t[z]} = \frac{d^2 u/dt^2}{du/dt}.$$

Выразим через них уравнение (4.56), понижая его порядок еще на одну единицу:

$$z^5 \frac{dv}{dz} = 3z^4 v + v^2. \quad (4.57)$$

Это уравнение Риккати должно сохранить еще симметрию X_3 . Действительно, второе продолжение этого оператора, будучи выражено через инварианты z , v , принимает вид

$$X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 3zv \frac{\partial}{\partial v}.$$

Получаем редуцированный инфинитезимальный оператор

$$\tilde{X}_3 = -z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 3zv \frac{\partial}{\partial v},$$

являющийся симметрией уравнения (4.57). Он приводится к оператору трансляций $\tilde{X}_3 = \partial/\partial s$ по новой переменной s заменой переменных:

$$s = \frac{1}{z}, \quad w = \frac{v}{z^3},$$

где w — инвариант оператора $\tilde{X}_3$. Выразим уравнение (4.57) в переменных w, s . Получаем уравнение с разделяющимися переменными с общим решением

$$w = \frac{1}{s + C_1}.$$

Возвращаясь в последнем равенстве к переменным u, t , получим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^4}{C_1 u + 1}.$$

Разделение переменных и интегрирование дает его общий интеграл

$$t = -\frac{C_1}{2u^2} - \frac{1}{3u^3} + C_2.$$

Пусть чисто алгебраическая проблема решения этого уравнения уже преодолена, и $u = h(t)$ есть его решение. Выражая его через исходные переменные x, y , получаем дифференциальное уравнение: $dy/dx = h(x)$, интегрируемое в квадратурах.

Предыдущие результаты легко переносятся на системы дифференциальных уравнений.

4.3. Законы сохранения для обыкновенных дифференциальных уравнений

4.3.1. Интегрирующие множители для уравнений высших порядков

Все известные классические методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на две группы. Во-первых, это замена переменных, приводящая к понижению порядка или разделению переменных и интегрированию уравнения. Во-вторых, это приведение левой части уравнения к полному дифференциалу путем домножения его на соответствующий интегрирующий множитель с последующим понижением порядка или интегрированием в исходных переменных.

Методы интегрирования, относящиеся к первой группе, унифицируются групповым анализом на основе теории Ли классических симметрий. Оказывается, что аналогичный регулярный подход возможен также для отыскания интегрирующих множителей и соответствующих первых интегралов дифференциальных уравнений. Удивительно, что этот подход до сих пор

практически не был развит, хотя техника отыскания интегрирующих множителей аналогична используемой при решении определяющих уравнений для симметрий.

Если интегрируемость уравнения не прогнозируется теорией Ли классических симметрий, то окончательный вывод о возможности его интегрирования может быть получен лишь в результате комбинированного исследования, включающего также поиск интегрирующих множителей и первых интегралов и использующего связи симметрий и интегралов. Для существования этих связей не требуется наличия у уравнений лагранжевой или гамильтоновой структуры, что необходимо для применимости теоремы Нетер 3.7. Они позволяют размножать интегралы с помощью симметрий, а также находить симметрии первых интегралов, что приводит к дальнейшему понижению порядка, а возможно, и к интегрированию уравнения. Указанные связи, базирующиеся на обобщенной теореме Нетер 3.8, также не применялись к обыкновенным дифференциальным уравнениям до самого последнего времени. Исследование и комбинированное использование симметрий, интегралов и связей между ними и составляет концепцию *современного группового анализа*.

Пусть система (3.4) состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_k(x, y, y', y'', \dots, y^{(n_k)}) = 0 \quad (k = 1, \dots, s). \quad (4.58)$$

Здесь $y = \{y_\alpha\}$ ($\alpha = 1, \dots, m$) — неизвестная вектор-функция аргумента x ; $y', y'', \dots$ — ее производные по x ; n_k обозначает порядок уравнения с номером k , и пусть n — наибольший из этих порядков.

В соответствии с формулами (3.36), (3.40) функция

$$P(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

является *первым интегралом* (законом сохранения) для системы (4.58), если существует набор функций R_k ($k = 1, \dots, s$), зависящих от $x, y, y', \dots, y^{(n)}$, таких, что выполняется тождество

$$R \cdot F \equiv \sum_{k=1}^s R_k F_k = D[P]. \quad (4.59)$$

Тогда $R = \{R_k\}$ называется *интегрирующим множителем* (характеристикой закона сохранения), соответствующим интегралу P . В силу системы (4.58) из тождества (4.59) следует

$$P(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C \quad (C = \text{const}), \quad (4.60)$$

что означает понижение порядка уравнения на единицу.

4.3.2. Определяющие уравнения для интегрирующих множителей

Перейдем теперь к регулярным процедурам отыскания интегрирующего множителя R и соответствующего первого интеграла P .

Определяющие уравнения для R получаются применением к равенству (4.59) оператора Эйлера — Лагранжа (вариационной производной):

$$E_{y_\alpha} = \sum_{j=0}^n (-D)^j \frac{\partial}{\partial y_\alpha^{(j)}} \quad (4.61)$$

и имеют следующий вид (признак полной производной):

$$E_{y_\alpha} \left(\sum_{k=1}^s R_k F_k \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m). \quad (4.62)$$

Далее применим к равенству (4.62) правило Лейбница для вариационной производной, используя матрично-дифференциальный оператор производной Фреше (3.42):

$$(F')_{\alpha\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial F_\alpha}{\partial y_\beta^{(j)}} D^j, \quad (4.63)$$

а также сопряженный ему оператор (3.43):

$$(F')_{\alpha\beta}^+[R] = \sum_{j=0}^{\infty} (-D)^j \left[\frac{\partial F_\beta}{\partial y_\alpha^{(j)}} R \right]. \quad (4.64)$$

Получим определяющие уравнения для интегрирующего множителя вида (3.44):

$$\sum_{\beta=1}^s [(R')_{\alpha\beta}^+[F_\beta] + (F')_{\alpha\beta}^+[R_\beta]] = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m). \quad (4.65)$$

Рассмотрим подробнее случай одного уравнения (4.1) с одной неизвестной y . Тогда закон сохранения (4.59) имеет вид

$$D[P] = RF, \text{ где } F = y^n - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (4.66)$$

а определяющее уравнение для интегрирующего множителя

$$\sum_{j=0}^n (-D)^j \left[\frac{\partial R}{\partial y^{(j)}} F + \frac{\partial F}{\partial y^{(j)}} R \right] = 0. \quad (4.67)$$

Отсюда для уравнения (4.1) в нормальной форме порядков $n = 1, 2, \dots$ с правой частью $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ получаем следующие определяющие уравнения (нижние буквенные индексы по-прежнему обозначают частные производные по этим переменным).

$n = 1$:

$$R_x + (fR)_y = 0. \quad (4.68)$$

$n = 2$:

$$2R_y + R_{xy'} + y'R_{yy'} + (fR)_{y'y'} = 0, \quad (4.69)$$

$$R_{xx} + 2y'R_{xy} + (y')^2 R_{yy} + (fR)_{y'x} + y'(fR)_{y'y} - (fR)_y = 0. \quad (4.70)$$

Явный вид определяющих уравнений для R при $n \geq 3$ в общем случае становится слишком громоздким. Поэтому ниже эти уравнения приведем в иной форме, применяя другую процедуру, когда отыскание интегрирующего множителя R и соответствующего интеграла P проводится параллельно.

Если для уравнения (4.1) порядка $n = 1$ известна однопараметрическая группа симметрий с характеристикой

$$\hat{\eta}(x, y, y') = \eta(x, y) - y'\xi(x, y) \equiv \eta(x, y) - f(x, y) \xi(x, y),$$

то обратная величина

$$R = \frac{1}{\hat{\eta}(x, y, y')} = \frac{1}{\eta(x, y) - f(x, y) \xi(x, y)} \quad (4.71)$$

является интегрирующим множителем для этого уравнения.

4.3.3. Метод «зашнуровки» (бутстреп)

Рассмотрим процедуру параллельного отыскания R и P для уравнения порядка $n = 2$.

Имеем

$$RF \equiv R(y'' - f) = D[P(x, y, y')] \equiv P_x + y'P_y + y''P_{y'}, \quad (4.72)$$

где f и R зависят лишь от x, y, y' . Обозначим через L_f дифференциальный оператор первого порядка, зависящий от f :

$$L_f(R) = R_x + y'R_y + (fR)_{y'}.$$

Расщепление равенства (4.72) по y'' с учетом условия совместности полученной системы дает

$$\begin{cases} P_{y'} = R, \\ P_y = -L_f(R), \\ P_x = y'L_f(R) - fR. \end{cases} \quad (4.73)$$

Эта система имеет следующие условия интегрируемости:

$$P_{y'y} = P_{yy'} \Leftrightarrow R_y + [L_f(R)]_{y'} = 0, \quad (4.74)$$

$$P_{xy} = P_{yx} \Leftrightarrow [L_f(R)]_x + y'[L_f(R)]_y - (fR)_y = 0, \quad (4.75)$$

$$P_{y'x} = P_{xy'} \Leftrightarrow L_f(R) = R_x + y'R_y + (fR)_{y'}. \quad (4.76)$$

Здесь условия (4.74) и (4.75) — это определяющие уравнения для интегрирующего множителя R , из которых исключен интеграл P , совпадающие с (4.69), (4.70), а условие (4.76) снова дает определение L_f .

Чтобы сделать возможным расщепление этих уравнений по y' , необходимо предположить вид зависимости R от y' : либо полагаем $R_{y'} = 0$, либо предполагаем линейную, квадратичную, полиномиальную или экспоненциальную и т.п. зависимость R от y' и проверяем совместимость этих анзацев с уравнениями (4.74), (4.75), либо считаем их условиями на f и классифицируем дифференциальные уравнения, допускающие интегрирующие множители данного вида.

Затем мы в общем случае не пытаемся продолжать решение системы (4.74), (4.75) для отыскания зависимости R от x, y , а обращаемся к системе (4.73). Из ее первого уравнения получаем вид зависимости интеграла P от y' . Подставляя это в два последние уравнения данной системы и расщепляя их по y' , получаем ограничения на вид зависимости R от x, y . С этой информацией входим в систему (4.74), (4.75) и получаем из нее дальнейшие сведения о R , возвращаясь после этого к системе (4.73) и получая отсюда информацию об интеграле P . Подобные рекурсивные процедуры в физике обычно называют «зашнуровкой» (бутстрапом).

Для $n \geq 3$ рекурсивная процедура «зашнуровки» аналогична описанной выше.

4.3.4. Комбинирование симметрий и первых интегралов

Согласно обобщенной теореме Нетер из п.3.4.3 канонический оператор симметрии $\hat{X}_{\hat{\eta}}$ дифференциального уравнения, действуя на первый интеграл P этого уравнения, снова порождает его первый интеграл

$$\tilde{P} = \hat{X}_{\hat{\eta}}(P). \quad (4.77)$$

Рассмотрим на примере использование взаимодействия симметрий и интегралов.

Пример 4.5. Рассмотрим интегрирование уравнения

$$y^{IV} = Ay^{-5/3} \quad (4.78)$$

методами современного группового анализа.

Анализ классических симметрий этого уравнения дает трехпараметрическую группу Ли симметрий. Соответствующие инфинитезимальные операторы мы приводим как в канонической форме, выписывая явно лишь первое слагаемое, содержащее характеристику симметрии, так и в «геометрической» форме, как операторы точечных преобразований:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= y' \frac{\partial}{\partial y} + \dots \sim X_1 = -\frac{\partial}{\partial x}, \\ \hat{X}_2 &= (3y - 2xy') \frac{\partial}{\partial y} + \dots \sim X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y}, \\ \hat{X}_3 &= (3xy - x^2 y') \frac{\partial}{\partial y} + \dots \sim X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3xy \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Эти операторы образуют алгебру Ли группы $SL(2, R)$:

$$[X_2, X_3] = 2X_3, \quad [X_2, X_1] = -2X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Эта алгебра не является разрешимой, так что теория Ли классических симметрий прогнозирует неинтегрируемость уравнения (4.78) в квадратурах.

Применим более общие методы современного группового анализа. Решая определяющие уравнения для интегралов, следующие из (4.67), найдем интегрирующие множители вида $R(x, y, y')$, не зависящие от y'' , y''' , и соответствующие первые интегралы:

$$P_1 = y'y''' - \frac{1}{2}(y'')^2 + \frac{3}{2}Ay^{-2/3}, \quad R_1 = y',$$

$$P_2 = 2xP_1 - 3yy''' + y'y'', \quad R_2 = 2xy' - 3y,$$

$$P_3 = x^2P_1 - xP_2 - 3yy'' + 2(y')^2, \quad R_3 = -x^2y' + 3xy. \quad (4.80)$$

Они образуют базис функционально независимых интегралов указанного класса. Вычислим действие операторов симметрии (4.79) на интегралы (4.80) и приведем результаты в табл.2, в которой на пересечении строки с номером i и столбца с номером j стоит выражение для $\hat{X}_i(P_j)$.

Таблица 2

	P_1	P_2	P_3
$\hat{X}_1$	0	$-2P_1$	P_2
$\hat{X}_2$	$-2P_1$	0	$2P_3$
$\hat{X}_3$	$-P_2$	$2P_3$	$-x^2P_2$

Получим уравнение первого порядка, исключая из системы трех уравнений третьего порядка

$$P_1 = C_1, \quad P_2 = C_2, \quad P_3 = C_3 \quad (4.81)$$

третью и вторую производные y''' и y'' . Искомое уравнение первого порядка имеет вид

$$p(x)(y')^2 - 3p'(x)yy' + \frac{1}{2}p^2(x) + 9C_1y^2 - \frac{27}{2}Ay^{4/3} = 0, \quad (4.82)$$

где использованы уравнения (4.81) и обозначено: $p(x) = C_1x^2 - C_2x - C_3$.

Как проинтегрировать уравнение (4.82)? Трудность в том, что в случае дифференциального уравнения первого порядка невозможно расщепление определяющего уравнения для симметрий. Для простых уравнений, интегрируемых классическими методами, этого не требуется, так как очевидны частные решения последнего, дающие искомые симметрии.

Проверим, не сохранила ли комбинация интегралов (4.82) какую-либо симметрию исходного уравнения (4.78). Ищем оператор симметрии, допускаемый уравнением (4.82), в алгебре Ли исходного уравнения с базисом (4.79):

$$\hat{X} = \lambda_1 \hat{X}_1 + \lambda_2 \hat{X}_2 + \lambda_3 \hat{X}_3. \quad (4.83)$$

Применяя инфинитезимальный критерий инвариантности (4.5) уравнения (4.82) относительно оператора (4.83), находим один допускаемый оператор (приведем его в геометрической форме):

$$X = 2C_3 X_1 - C_2 X_2 + 2C_1 X_3 = 2p(x) \frac{\partial}{\partial x} + 3p'(x)y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.84)$$

Проинтегрируем уравнение (4.82) методом канонических переменных с помощью симметрии (4.84). Новые переменные u , t ищем из уравнений (4.24), (4.25) (t и u поменялись ролями):

$$X(u) \equiv 2p(x) \frac{\partial u}{\partial x} + 3p'(x)y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (4.85)$$

$$X(t) = 2p(x) \frac{\partial t}{\partial x} + 3p'(x)y \frac{\partial t}{\partial y} = 1. \quad (4.86)$$

Ищем частное решение уравнения (4.86) вида $t = t(x)$. Получаем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2p(x)}, \quad t = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{p(x)}. \quad (4.87)$$

Переменную u находим как интеграл характеристической системы:

$$\frac{dx}{2p(x)} = \frac{dy}{3p'(x)y}, \quad yp^{-3/2}(x) = C, \quad (4.88)$$

т.е. $u = yp^{-3/2}(x)$ есть инвариант оператора (4.84).

Итак, в уравнение (4.82) подставляем (4.87), а также

$$y = up^{3/2}(x), \quad y' = \frac{D_t[y]}{D_t[x]} = \frac{1}{2} p^{1/2}(x)(u_t + 3p'(x)u). \quad (4.89)$$

Уравнение принимает вид

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 9[4C_1 C_3 + C_2^2] u^2 + 6Au^{4/3} = 0. \quad (4.90)$$

Разделение переменных и интегрирование дает общий интеграл

$$\int \frac{du}{u\sqrt{2C_1C_3 + C_2^2 + 6Au^{-2/3}}} = \pm \frac{3}{2} \int \frac{dx}{C_1x^2 - C_2x - C_3} + C_4. \quad (4.91)$$

Это равенство вместе с подстановкой (4.89):

$$y = u(C_1x^2 - C_2x - C_3)^{3/2}$$

дает общее решение исходного уравнения (4.78) в параметрической форме (с параметром u).

Решение этого уравнения с помощью дискретно-группового анализа рассматривалось В.Ф.Зайцевым [15].

5. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5.1. Симметрии эволюционных уравнений

5.1.1. Определяющие уравнения для симметрий

Рассмотрим системы эволюционных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x, u, u_1, \dots, u_N) \Leftrightarrow \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = F_\alpha(t, x, u, u_1, \dots, u_N), \quad (5.1)$$

где одна из независимых переменных t является временем (параметром эволюции), а остальные аргументы $x = \{x^i\}$ ($i = 1, \dots, n$) — пространственными координатами. Правые части $F = \{F_\alpha\}$ содержат производные от u только по x :

$$u = \{u^\alpha\}, \quad u_1 = \{u_i^\alpha\}, \quad u_2 = \{u_{ij}^\alpha\}, \dots, \quad (i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, m),$$

причем нижние индексы соответствуют дифференцированиям по независимым переменным:

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad u_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}, \dots$$

Область возможных приложений эволюционных уравнений включает в себя механику жидкости и газа, нелинейную теорию упругости и пластичности твердых тел, нелинейную акустику, теорию фазовых переходов, магнитную гидродинамику, теорию солитонов, нелинейные полевые теории и т.п. К этому классу уравнений принадлежат также гамильтоновы системы (континуальный аналог гамильтонова формализма), являющиеся наиболее естественным объектом для квантования.

Симметрии системы (5.1) порождаются уравнениями Ли:

$$u_{\tau}^{\alpha} = \eta_{\alpha}(t, x, u, u_1, \dots, u_N), \quad (5.2)$$

где τ — параметр группы. Здесь выбрано каноническое представление (аргументы t, x инвариантны) и в обозначении характеристики симметрии $\eta = \{\eta_{\alpha}\}$ опущена «шляпка».

Система Ли (5.2) также имеет эволюционный вид (5.1) с «временем» τ . Поэтому условие инвариантности (3.27) системы (5.1) относительно группы Ли — Беклунда, порождаемой системой (5.2), совпадает с условием совместности этих систем — равенством перекрестных производных $u_{\tau t}^{\alpha} = u_{t\tau}^{\alpha}$, вычисленных с учетом уравнений (5.1), (5.2):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + [\eta, F] = 0, \quad (5.3)$$

где $\partial \eta / \partial t$ есть частная производная от η по t , входящему явно, а $[\eta, F]$ обозначает коммутатор, определенный как

$$[\eta, F] = \eta'[F] - F'[\eta]. \quad (5.4)$$

Здесь штрихом обозначена производная Фреше, определенная формулой (3.42) как матрично-дифференциальный оператор. В частности, если симметрия η не зависит явно от t , то определяющее уравнение (5.3) принимает вид

$$[\eta, F] = 0. \quad (5.5)$$

Справедливо очевидное соотношение между производной Фреше и каноническим оператором Ли — Беклунда с характеристикой F :

$$\eta'[F] = \hat{X}_F(\eta), \quad (5.6)$$

в силу которого определяющее уравнение (5.3) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{X}_F - F' \right) [\eta] = 0. \quad (5.7)$$

В частности, если x и u одномерны, то имеем в формуле (5.7):

$$\hat{X}_F = F \frac{\partial}{\partial u} + (D[F]) \frac{\partial}{\partial u_x} + (D^2[F]) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots, \quad (5.8)$$

$$F' = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial u_x^{(j)}} D^j, \quad (5.9)$$

где $u_x^{(j)} = \partial^j u / \partial x^j$.

Пример 5.1. Уравнение Кортевега — де Фриза (КДФ):

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x. \quad (5.10)$$

Здесь $F = u_{xxx} + 6uu_x$ и $F' = D^3 + 6uD + 6u_x$ согласно (5.9). Определяющее уравнение (5.7) для симметрий принимает вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{j=0}^{\infty} (D^j [u_{xxx} + 6uu_x]) \frac{\partial \eta}{\partial u_x^{(j)}} - (D^3 + 6uD + 6u_x) [\eta] = 0. \quad (5.11)$$

Приведем некоторые его решения (характеристики симметрий):

$$\eta_1 = u_x, \quad \eta_3 = u_{xxx} + 6uu_x,$$

$$\eta_5 = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u_x^2 u_x. \quad (5.12)$$

Первые две симметрии соответствуют трансляциям по x и t . Третья симметрия есть начало бесконечной иерархии высших симметрий, указывающей на полную интегрируемость этого уравнения [16].

5.1.2. Размножение решений с помощью группы симметрий

Группа симметрий оставляет уравнение инвариантным и переводит любое его решение снова в решение. Если решение само не инвариантно относительно группы, то каждая однопараметрическая подгруппа порождает из него бесконечное семейство новых решений, зависящих от группового параметра τ .

Пример 5.2 (П.Олвер [5]). Одномерное уравнение теплопроводности:

$$u_t = u_{xx} \quad (5.13)$$

(коэффициент диффузии выбран равным единице).

Приведем инфинитезимальные операторы для классических симметрий этого уравнения, полученные решением определяющих уравнений (5.7):

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, & X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}, & X_6 &= 4tx \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t) u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Еще имеется бесконечномерная подалгебра, порождаемая операторами

$$X_\phi = \phi(x, t) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (5.15)$$

где $\phi(x, t)$ — произвольное гладкое решение уравнения теплопроводности (5.13).

Почти все решения (5.14) и (5.15) соответствуют очевидным симметриям уравнения (5.13). Симметрии X_1 и X_2 (инвариантность относительно сдвигов по x и t) означают, что это уравнение не зависит явно от x , t . Симметрии X_3 и X_ϕ отвечают линейной однородности уравнения: возможность умножения решения на любую константу и прибавления к решению любого другого решения. Оператор X_4 порождает очевидную симметрию относительно растяжений: $x \rightarrow \lambda x$, $t \rightarrow \lambda^2 t$ (анализ размерностей и подобия). Оператор X_5 порождает преобразования Галилея к движущейся системе отсчета, давая закон преобразования температуры u : $x \rightarrow x + vt$, $u \rightarrow u \exp[-v/2(x + vt/2)]$.

Лишь симметрия X_6 не является очевидной. Группу соответствующих конечных преобразований получаем, интегрируя уравнения Ли:

$$\frac{dx}{d\tau} = 4t\tau, \quad \frac{dt}{d\tau} = 4t^2, \quad \frac{du}{d\tau} = -(x^2 + 2t)u.$$

Обозначая чертой преобразованные переменные, получаем

$$x = \frac{x}{1 - 4\tau t}, \quad \bar{t} = \frac{t}{1 - 4\tau t}, \quad \bar{u} = u \sqrt{1 - 4\tau t} \exp\left(\frac{-\tau x^2}{1 - 4\tau t}\right). \quad (5.16)$$

Найдем, как преобразуется решение $u = f(x, t)$ уравнения (5.13) под действием группы (5.16). Для этого подставим $f(x, t)$ вместо u в равенство

(5.16), определяющее u , и выразим x и t через $\bar{x}$ и $\bar{t}$ по формулам (5.16). Опуская черточки, получаем

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+4\tau t}} \exp\left(\frac{-\tau x^2}{1+4\tau t}\right) f\left(\frac{x}{1+4\tau t}, \frac{t}{1+4\tau t}\right). \quad (5.17)$$

Группа симметрии (5.16), оставляя уравнение (5.13) инвариантным, преобразует всякое его решение $f(x, t)$ по формуле (5.17) снова в его решение. Формулы размножения решений, порождаемые другими операторами симметрии (5.14), получаются аналогично с помощью конечных преобразований группы, указанных перед уравнением (5.16) и найденных интегрированием уравнений Ли.

Какое решение порождается преобразованием (5.17), примененным к тривиальному решению $u = c = \text{const}$ уравнения (5.13)? Подстановка $u = c$ в формулу (5.17) дает

$$u = \frac{c}{\sqrt{1+4\tau t}} \exp\left(\frac{-\tau x^2}{1+4\tau t}\right). \quad (5.18)$$

Получилось *фундаментальное решение* уравнения теплопроводности (функция Грина задачи Коши), соответствующее выбору начальной точки $(x_0, t_0) = (0, -1/4\tau)$, если фиксировать нормировку $c = \sqrt{\tau/\pi}$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left(\frac{-x^2}{4(t-t_0)}\right). \quad (5.19)$$

Итак, смысл неочевидной симметрии X_6 в том, что она порождает из тривиального решения функцию Грина, т.е. все решения (с любыми начальными данными)! Таким образом, в этом примере анализ симметрий дает исчерпывающую информацию о решениях уравнения и делает ненужным изучение традиционной его теории. Если вспомнить о том, что в университетском курсе уравнений математической физики на протяжении целого семестра изучаются всего три уравнения: волновое, теплопроводности и Лапласа (Пуассона), то становится очевидной необходимость реформирования преподавания дифференциальных уравнений на основе теории симметрий.

5.2. Инвариантные решения и линеаризация

5.2.1. Инвариантные решения солитонных уравнений

Группы симметрии оставляют уравнения инвариантными и, следовательно, преобразуют решения снова в решения. *Инвариантными решениями*

называются такие, которые не преобразуются группой симметрии или какой-либо ее подгруппой (неподвижные точки преобразований). Обычно группы инвариантности решений ищут среди подгрупп группы симметрии дифференциального уравнения. Очевидно, что это ограничение не обязательно: группа преобразований может оставлять решение инвариантным, не обладая свойством отображать любое решение снова в решение. Отыскание таких «условных симметрий», оставляющих инвариантными не дифференциальные уравнения, а только их некоторые частные интегральные многообразия, является перспективным направлением исследований [17]. Его комбинирование с подходящим вариантом метода инвариантного погружения [18] должно позволить применить методы и алгоритмы группового анализа для регулярного отыскания таких специфических симметрий, как ренормгруппа в квантовой теории поля [7]. Однако мы ограничимся здесь инвариантными решениями в их традиционном понимании.

Пусть X_η — канонический оператор симметрии уравнений (5.1) с характеристикой η . Условием инвариантности решения относительно этой группы симметрий является его независимость от группового параметра τ : $u_\tau^\alpha = 0$, т.е. в силу уравнений Ли (5.2) равенство нулю характеристики симметрии:

$$\eta_\alpha(t, x, u, u_1, \dots, u_N) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, m). \quad (5.20)$$

Итак, условиями инвариантности решения являются «дифференциальные связи» (5.20) — дополнительные дифференциальные уравнения, присоединяемые к исходной системе (5.1). Получается переопределенная система, имеющая нетривиальные условия совместности исходных и добавленных уравнений. Ее интегрирование значительно проще, чем решение системы (5.1), в силу большего числа уравнений. Обычно уравнения (5.1) и (5.20) совместны, т.е. если уравнения инвариантны относительно группы, то существуют и инвариантные решения.

Первыми известными инвариантными решениями были автомодельные решения в газодинамике, полученные с помощью теории размерности и подобия [19], которая, как показал Л.В.Овсянников [3], вытекает из группового анализа, если группа симметрии есть группа растяжений. Позднее оказалось, что инвариантные решения описывают физически интересные режимы и для многих других приложений.

Пример 5.3. Точные решения уравнения КДФ. Уравнение КДФ (5.10) является самым известным уравнением теории солитонов. Найдем его инвариантные решения относительно группы трансляций в пространстве независимых переменных:

$$\bar{x} = x + c\tau, \quad \bar{t} = t + \tau, \quad \bar{u} = u \quad (c = \text{const})$$

с оператором $X = \partial/\partial t + c\partial/\partial x$. Условие инвариантности решений имеет вид

$$\eta \equiv u_{xxx} + 6uu_x + cu_x = 0. \quad (5.21)$$

Оно совместно с исходным уравнением КДФ, если

$$u_t + cu_x = 0 \Leftrightarrow u = f(x - ct),$$

т.е. искомое решение есть бегущая волна (со скоростью c). Уравнение (5.21) интегрируется, и полученное уравнение

$$u_{xx} + 3u^2 + cu = C_1$$

имеет интегрирующий множитель u_x и первый интеграл:

$$\frac{1}{2} u_x^2 = - \left(u^3 + \frac{c}{2} u^2 \right) + C_1 u + C_2.$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах и его общее решение выражается через эллиптические функции Вейерштрасса $\mathcal{P}(x)$. Итак, $u = \mathcal{P}(x - ct)$ и инвариантное решение есть известная кноидальная волна. Быстро убывающее на бесконечности решение получается отсюда при $C_1 = C_2 = 0$:

$$u = \frac{c}{2\text{ch}^2 [\sqrt{c}/2(x - ct) + \delta]}$$

и описывает солитон.

Решение уравнения КДФ, инвариантное относительно высшей симметрии с характеристикой, являющейся линейной комбинацией симметрий (5.12), есть двухзонное решение Б.А.Дубровина и С.П.Новикова [20], а в вырожденном случае — двухсолитонное решение. Известно, что все конечнозонные и, в частности, многосолитонные решения уравнения КДФ являются инвариантными относительно его высших симметрий [16].

5.2.2. Линеаризация систем гидродинамического типа

Системами гидродинамического типа называются системы квазилинейных эволюционных уравнений первого порядка:

$$u_t^i = v_i(u) u_x^i \quad (u = 1, 2, \dots, n) \quad (5.22)$$

с диагональной $(n \times n)$ -матрицей $V(u) = \text{diag}(v_i(u))$. Здесь и далее не предполагается суммирования по повторяющимся индексам. Здесь $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$, u^i — инварианты Римана.

Гидродинамическими симметриями называются такие, характеристики которых (линейно) зависят от первых производных от u по x , так что их уравнения Ли также являются системами гидродинамического типа:

$$u_{\tau}^i = W_i(u, x, t) u_x^i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.23)$$

где допускается также явная зависимость от x, t .

Наложим на систему (5.22) условие

$$v_i(u) \neq v_j(u) \quad (i \neq j). \quad (5.24)$$

Определим коэффициенты связности [10]:

$$\Gamma_{ij}^i(u) = \Gamma_{ji}^j(u) = v_{i, u^j}(u) / (v_j - v_i) \quad (i \neq j). \quad (5.25)$$

Определение 5.1. Диагональная система гидродинамического типа (5.22) называется полугамильтоновой, если ее коэффициенты $v_i(u)$ удовлетворяют условию (5.24) и «условиям Царева» [10]:

$$[v_{i, u^j} / (v_j - v_i)]_{u^k} = [v_{i, u^k} / (v_k - v_i)]_{u^j} \quad (i \neq j \neq k \neq i). \quad (5.26)$$

Теорема 5.1 (С.П.Царев [10]). Диагональная система (5.22), удовлетворяющая условию (5.24), обладает бесконечным множеством гидродинамических симметрий, не зависящих явно от x, t :

$$u_{\tau}^i = w_i(u) u_x^i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.27)$$

имеющим функциональный произвол, если и только если система (5.22) полугамильтонова, т.е. условие (5.26) также должно выполняться. Эти симметрии порождаются уравнениями Ли (5.27) с коэффициентами $w_i(u)$, составляющими произвольное гладкое решение линейной системы:

$$w_{i, u^j} = \Gamma_{ij}^j(w_j - w_i) \quad (i \neq j). \quad (5.28)$$

Теорема 5.2 (М.Б.Шефтель [11]). Любая полугамильтонова система (5.22) обладает бесконечным множеством явно зависящих от x, t гидродинамических симметрий с тем же функциональным произволом, что и в теореме 5.1. Эти симметрии порождаются уравнениями Ли:

$$u_{\tau}^i = [w_i(u) + c(x + tv_i(u))] u_x^i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.29)$$

с коэффициентами $w_i(u)$, составляющими произвольное гладкое решение линейной системы (5.28), и произвольной константой c .

Рассмотрим теперь явно зависящие от x , t гидродинамические симметрии (5.29) с $c = -1$. Условия инвариантности решений полугамильтоновой системы (5.22) относительно этих симметрий с $u_x \neq 0$ имеют вид

$$w_i(u) = tv_i(u) + x \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.30)$$

Теорема 5.3 (С.П.Царев [10]). Пусть функции $w_i(u)$ в равенствах (5.30) составляют произвольное гладкое решение линейной системы (5.28). Тогда любое гладкое решение $u^i(x, t)$ системы (5.30) также является решением полугамильтоновой системы (5.22). Наоборот, любое гладкое решение $u^i(x, t)$ системы (5.22) может быть локально представлено как решение системы (5.30) в окрестности такой точки (x_0, t_0) , в которой условие $u_x^i(x_0, t_0) \neq 0$ удовлетворяется для каждого значения $i = 1, 2, \dots, n$.

Замечание 5.1. Равенства (5.30) определяют линеаризующее преобразование для полугамильтоновой системы (5.22): решение нелинейной системы (5.22) сводится к решению линейной системы (5.28) для функций $w_i(u)$. Оно обобщает классическое преобразование годографа для многокомпонентных систем и называется обобщенным преобразованием годографа.

Мы показали здесь теоретико-групповое происхождение этого линеаризующего преобразования: любое несингулярное решение системы (5.22) является ее инвариантным решением относительно симметрий (5.29). Степень произвола множеств этих симметрий и соответствующих инвариантных решений такая же, как для множества решений системы (5.22): n произвольных функций $c_i(u^i)$ одной переменной. Следовательно, чтобы получить явные формулы для инвариантных решений нелинейной системы (5.22) остается решить линейную систему (5.28) с переменными коэффициентами.

5.3. Операторы рекурсии

5.3.1. Операторы рекурсии и высшие симметрии

Определение 5.2. Оператор R называется оператором рекурсии уравнений (5.1), если и только если он отображает симметрии уравнений (5.1) снова в симметрии этих уравнений [5,9,12].

Теорема 5.4. Для того чтобы оператор R был оператором рекурсии уравнений (5.1), необходимо и достаточно, чтобы R коммутировал с опе-

ратором определяющего уравнения (5.7) для симметрий на многообразии решений уравнения (5.7):

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{X}_F - F' \right), R \right] = 0 \Leftrightarrow R_t + R'[F] - [F', R] = 0, \quad (5.31)$$

где нуль в правой части уравнения (5.31) понимается как оператор, который аннулирует любое решение η уравнения (5.7).

Уравнение (5.31) часто понимается как равенство оператора нулю. Тогда уравнение (5.31) является достаточным условием того, чтобы R являлся оператором рекурсии.

Пример 5.4. Оператор рекурсии для уравнения КДФ [16]. Для уравнения КДФ (5.10) оператор рекурсии дается формулой:

$$R = D^2 + 4u + 2u_x D^{-1}. \quad (5.32)$$

Здесь оператор D^{-1} определен как $(D^{-1}f)(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$.

Оператор рекурсии (5.32) порождает бесконечную иерархию высших симметрий уравнения КДФ, действуя многократно на «затравочную» симметрию с характеристикой $\eta_1 = u_x$, соответствующую трансляционной инвариантности этого уравнения по x . Эти симметрии порождаются уравнениями Ли:

$$u_\tau = R^n u_x \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.33)$$

Например, для симметрий (5.12) имеем

$$\eta_3 = R u_x, \quad \eta_5 = R^2 u_x.$$

Уравнения (5.33) с $n \geq 2$, в которых параметр τ понимается как время t , называются высшими уравнениями КДФ и составляют бесконечную иерархию уравнений, интегрируемых с помощью одной и той же спектральной задачи методом обратной задачи рассеяния. Причем оператор рекурсии оказывается тесно связанным с L -оператором метода обратной задачи, а коммутационное соотношение (5.31) определяет L - A -пару [16]. Все известные точные решения теории солитонов могут быть получены без обращения к этому методу как инвариантные решения относительно высших симметрий, порождаемых оператором рекурсии.

5.3.2. Операторы рекурсии и генерация точных решений

Пусть система (5.1) обладает оператором рекурсии, порождающим бесконечное множество ее высших симметрий. Им соответствуют группы пре-

образований Ли — Беклунда, которые нельзя использовать для размножения решений, как это было возможно для классических лиевских симметрий. В этом случае для размножения решений можно использовать оператор рекурсии.

Рассмотрим эту процедуру для полугамильтоновых систем гидродинамического типа (5.22). Подчиним эти системы, помимо условия (5.26), еще условию существования матрично-дифференциального оператора рекурсии первого порядка:

$$S_{i,u^j} = \Gamma_{ij}^i (S_j - S_i) \quad (j \neq i), \quad (5.34)$$

где функции $S_i(u)$ определены так:

$$S_i(u) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ik}^i(u) c_k(u^k) + d_i(u^i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В.М.Тешуков показал [21], что оператор рекурсии первого порядка вида

$$R = (AD + B) U_x^{-1}, \quad (5.35)$$

где $A(u)$, $B(u, u_x)$ — $(n \times n)$ -матрицы, $U_x = \begin{pmatrix} u_x^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_x^n \end{pmatrix}$, существует при усло-

вии, что найдутся $2n$ функций одного аргумента $c_i(u^i)$, $d_i(u^i)$, удовлетворяющих условию (5.34). Гидродинамические симметрии (5.27), (5.28) образуют инвариантное подпространство для этого оператора рекурсии, и его действие порождает рекурсию гидродинамических симметрий:

$$\bar{w}_i(u) = (\hat{R}[w])_i \stackrel{\text{def}}{=} c_i(u^i) w_{i,u^i}(u) + d_i(u^i) w_i(u) + \sum_{k=1}^n \Gamma_{ik}^i(u) c_k(u^k) w_k(u). \quad (5.36)$$

Здесь через $\hat{R}$ обозначено сужение оператора рекурсии на подпространство гидродинамических симметрий.

Итак, получаем следующий результат.

Теорема 5.5. Для любого решения $\{w_i(u)\}$ линейной системы (5.28) функции $\{\bar{w}_i(u)\}$ также составляют решение этой системы, т.е. формула (5.36) дает рекурсию решений системы (5.28), если и только если удовлетворяются условия (5.34).

Следствие 5.1. Преобразование (5.36) в совокупности с линеаризующим преобразованием (5.30) порождает рекурсию решений нелинейной системы (5.22):

$$\bar{w}_i(u) \equiv (\hat{R}[w])_i = tv_i(u) + x \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.37)$$

Линейная система (5.28) имеет два тривиальных решения:

$$w_i = 1, \quad w_i = v_i(u) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.38)$$

служащих затравочными элементами, из которых оператор рекурсии порождает две бесконечные серии нетривиальных решений:

$$(\hat{R}_1^N[1])_i = tv_i(u) + x, \quad (\hat{R}_1^N[v])_i = tv_i(u) + x. \quad (5.39)$$

Например, первая серия из (5.39) при $N=1$ дает следующее решение системы (5.22) в виде неявной функции:

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_{ik}^i(u) c_k(u^k) + d_i(u^i) = tv_i(u) + x, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.40)$$

где нужно подставить конкретные функции $c_i(u^i)$, $d_i(u^i)$, удовлетворяющие условиям (5.34). Чтобы ослабить эти довольно жесткие условия, в работе [22] был построен оператор рекурсии второго порядка, существующий при менее ограничительных условиях.

Общая теория операторов рекурсии, ее связь с гамильтоновым формализмом, преобразованиями Беклунда и методом обратной задачи рассеяния, а также методы построения операторов рекурсии для систем гидродинамического типа были развиты в работах автора [23—25].

Мощь методов группового анализа дифференциальных уравнений была продемонстрирована недавно для уравнений Эйнштейна теории гравитации: были построены новые гравитационные инстантоны после 18 лет отсутствия прогресса в этой области [26].

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда и правительства России (грант R5B300).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lie S. — Arch. Math., 1883, v.VIII, p.187; 1884, v.IX, p.431.
2. Lie S. — Gesammelte Abhandlungen, bd. 1—6, Leipzig, B.G.Teubner, 1922—1937.
3. Овсянников Л.В. — Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: СО АН СССР, 1962.

4. Овсянников Л.В. — Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Олвер П. — Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
6. Биркгоф Г. — Гидродинамика. М.: ИЛ, 1963.
7. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — ДАН СССР, 1955, т.103, с.203; ДАН СССР, 1955, т.103, с.391.
8. Anderson R.L., Ibragimov N.H. — Lie-Backlund Transformations in Applications. Philadelphia, SIAM, 1979.
9. Ибрагимов Н.Х. — Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
10. Царев С.П. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1990, т.54, с.1048.
11. Шефтель М.Б. — Дифференциальные уравнения, 1993, т.29, с.1782.
12. Fuchssteiner B., Fokas A.S. — Physica D, 1981, v.4, p.47.
13. Нетер Э. — Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959.
14. Ибрагимов Н.Х. — УМН, 1992, т.47, с.83.
15. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. — Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1993.
16. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. — ДАН СССР, 1979, т.244, с.57.
17. Воробьев Е.М. — ДАН СССР, 1986, т.287, с.536.
18. Kovalev V.F., Krivenko S.V., Pustovalov V.V. — In: Renormalization Group'91, Proc. of 1991 Dubna Conf., Eds. D.V.Shirkov and V.B.Priezzhev, WS, Singapore, 1992, pp.300—314.
19. Седов Л.И. — Методы подобия и размерности в механике. М.: ГИТТЛ, 1957.
20. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. — Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
21. Тешуков В.М. — Препринт ЛИИАН, Л., №106, 1989.
22. Шефтель М.Б. — Дифференциальные уравнения, 1994, т.30, с.444.
23. Шефтель М.Б. — Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. Томск: изд. Томского гос. университета, 1994.
24. Sheftel' M.B. — In: CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol.3, «New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods», Ch.4, p.91-137, N.H.Ibragimov ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1995.
25. Sheftel' M.B. — In: CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol.3, «New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods», Ch.7, p.169—189, N.H.Ibragimov ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1995.
26. Nutku Y., Sheftel' M.B., Malykh A.A. — Classical and Quantum Gravity. Cambridge, UK, 1996 (to be published).

R -МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ НА КВАНТОВЫХ ГРУППАХ

А.П.Исаев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

e-mail: isaevap@thsun1.jinr.dubna.su

В теоретической и математической физике все большее применение находят новые симметрии (квантовые симметрии), которые формулируются на языке квантовых групп. Настоящий обзор посвящен обсуждению ковариантного дифференциального исчисления на квантовых группах и квантовых векторных пространствах и является второй частью обзора [1]. Здесь подробно излагается биковариантная теория Вороновича, считающаяся в настоящее время базой для построения некоммутативной дифференциальной геометрии на квантовых группах. На основе R -матричного подхода дано полное описание дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$ и линейных квантовых пространствах. Показано, каким образом дифференциальная алгебра на группе $SL_q(N)$ может быть получена (как подалгебра) из дифференциальной алгебры на группе $GL_q(N)$. Обсуждаются проблемы биковариантного дифференциального исчисления на группах $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. Сделаны также необходимые дополнения по общей теории квантовых групп, не затронутые в первой части обзора.

The new symmetries (quantum symmetries) are being used more and more in theoretical and mathematical physics. This paper is the second part of the review [1] and devoted to the discussion of bicovariant differential calculi on quantum groups and quantum vector spaces. The Woronowicz's bicovariant theory which is a base for constructing the noncommutative differential geometry on quantum groups is considered in detail. A complete description of the differential calculus on $GL_q(N)$ is presented with using of R -matrix approach. We show how to obtain the differential algebra on $SL_q(N)$ as a subalgebra from the $GL_q(N)$ differential algebra. We discuss problems of the bicovariant differential calculi on $SO_q(N)$ and $Sp_q(2n)$ groups. We make also relevant supplements about general theory of quantum groups which are not mentioned in the first part of review.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах Н.Ю.Решетихина, Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева [2] и В.Г.Дринфельда [3] (а также М.Дзимбо [4]) были даны определения и систематический анализ квантовых аналогов простых групп и алгебр Ли. Квантовые группы не являются группами в математическом смысле, тем не менее они обладают рядом свойств, которые позволяют говорить о них как о "группах симметрии". В связи с этим естественной представляется идея о

поиске или конструировании (деформации) каких-либо квантовых физических систем, которые будут обладать симметриями относительно специального действия квантовых групп (отдельные примеры таких систем даны в [8–13]). Наличие данных "квантовых" симметрий, как правило, приводит к интегрируемости рассматриваемых моделей, например, с помощью квантового метода обратной задачи [5–7]. Реализация подобных идей требует более глубокого понимания геометрии квантовых групп и, в частности, предполагает детальную разработку некоммутативной дифференциальной геометрии на квантовых группах. Указание на необходимость последнего содержится, например, в работах [8, 14]. Следует также напомнить, что коммутативное дифференциальное и интегральное исчисления играют важнейшую роль при формулировке и изучении практически всех физических теорий.

Первым шагом в исследовании некоммутативной дифференциальной геометрии на квантовых группах (отметим, что достаточно общая программа построения некоммутативной геометрии была сформулирована А.Коном [15]) является построение некоммутативного дифференциального исчисления на квантовых группах, что и будет основной темой нашего рассмотрения. В данной статье под построением некоммутативного дифференциального исчисления мы будем понимать биковариантное расширение алгебры функций на квантовой группе с генераторами $\{T_j^i\}$, $i, j = 1, \dots, N$ (мы выбираем в качестве объекта исследования RTT -алгебры Хопфа [2], см. также [1]) до алгебры функций с генераторами $\{T_j^i, \Omega_j^i, \mathcal{L}_j^i, \mathfrak{Z}_j^i\}$, где элементы Ω_j^i образуют базис внешних дифференциальных 1-форм, $\mathcal{L}_j^i$ — базис производных Ли и $\mathfrak{Z}_j^i$ — базис внутренних производных. Кроме расширения алгебры функций необходимо также определить внешний дифференциал, т.е. линейный нильпотентный оператор d ($d^2 = 0$), действующий по определенным правилам на расширенную алгебру функций. Градуированная подалгебра $\Gamma^\wedge = \bigoplus_n \Gamma^{\wedge n}$ с генераторами $\{T_j^i \in \Gamma^{\wedge 0}, \Omega_j^i \in \Gamma^{\wedge 1}\}$, на которой задано действие дифференциала $d: \Gamma^{\wedge n} \rightarrow \Gamma^{\wedge n+1}$, определяет дифференциальный комплекс:

$$\Gamma^{\wedge 0} \xrightarrow{d} \Gamma^{\wedge 1} \xrightarrow{d} \dots$$

Поэтому иногда в дальнейшем мы будем называть дифференциальным комплексом саму подалгебру $\Gamma^\wedge$, снабженную отображением d .

К настоящему времени имеется довольно обширная литература, посвященная дифференциальному исчислению на квантовых группах. Однако в большинстве статей, следуя работе [16], оперируют с квантовыми группами как с абстрактными некоммутативными и некокоммутативными алгебрами Хопфа (см., например, обзор [17] и цитируемую там литературу). Если же мы обратимся к рассмотрению конкретных примеров квантовых групп, то, по-видимому, законченным можно считать построение биковариантного дифференциального исчисления только на группе $GL_q(N)$. Значительный

прогресс в построении биковариантного дифференциального исчисления на группе $SL_q(N)$ был достигнут лишь сравнительно недавно в работе [18]. Что касается построений дифференциальных исчислений на группах $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$, то, учитывая аргументы, приведенные в разд. 6 предлагаемого обзора, мы не можем считать эти построения удовлетворительными.

Настоящая статья является продолжением обзора [1] и представляет собой попытку систематизировать и критически осмыслить накопленные факты о дифференциальных исчислениях на квантовых группах. Во втором разделе, посвященном построению дифференциальных форм, векторных полей и дифференциалов над произвольной алгеброй Хопфа (АХ), мы обсуждаем биковариантную теорию Вороновича [16]. Чтение этого раздела предполагает знание основ теории АХ (см., например, [19–21, 1]). В третьем и четвертом разделах на основе R -матричного подхода [2] описаны дифференциальные исчисления на квантовых группах $GL_q(N)$ и соответствующих квантовых векторных пространствах. В разд. 5 показано, как можно получить дифференциальную алгебру на $SL_q(N)$ [18], исходя из дифференциальной алгебры на $GL_q(N)$. В шестом разделе мы изложим (используя результаты работы [22]), каким образом подход Вороновича [16] может быть адаптирован к R -матричной формулировке теории квантовых групп [2]. Кроме того, в этом разделе обсуждаются некоторые проблемы теории Вороновича, возникающие в связи с построением биковариантных дифференциальных исчислений на группах $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. В последнем, седьмом разделе мы приводим ряд необходимых сведений о квантовых группах, которые не были затронуты в первой части обзора [1].

2. ТЕОРИЯ ВОРОНОВИЧА

Центральным понятием при построении дифференциального исчисления на АХ (квантовых группах) по Вороновичу [16] является понятие биковариантного бимодуля.

Определение 1. Пусть $A(\Delta, \epsilon, S)$ является алгеброй Хопфа, Γ есть двухсторонний A -бимодуль, а $\Delta_L = \Delta_\Gamma : \Gamma \rightarrow A \otimes \Gamma$ и $\Delta_R = {}_\Gamma \Delta : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes A$ — левое и правое кодействие. Мы называем $(\Gamma, \Delta_\Gamma, {}_\Gamma \Delta)$ биковариантным бимодулем (ББ), если

1. Для любых $a \in A$ и $\rho \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \Delta_\Gamma(a\rho) &= \Delta(a)\Delta_\Gamma(\rho), \quad \Delta_\Gamma(\rho a) = \Delta_\Gamma(\rho)\Delta(a), \\ {}_\Gamma \Delta(a\rho) &= \Delta(a){}_\Gamma \Delta(\rho), \quad {}_\Gamma \Delta(\rho a) = {}_\Gamma \Delta(\rho)\Delta(a). \end{aligned} \quad (2.1)$$

2. Для любого $\rho \in \Gamma$:

$$(\epsilon \otimes id)\Delta_{\Gamma}(\rho) = \rho, \quad (id \otimes \epsilon)_{\Gamma}\Delta(\rho) = \rho. \quad (2.2)$$

3. Для любого $\rho \in \Gamma$:

$$(\Delta \otimes id)\Delta_{\Gamma}(\rho) = (id \otimes \Delta_{\Gamma})\Delta_{\Gamma}(\rho), \quad (2.3)$$

$$(id \otimes \Delta)_{\Gamma}\Delta(\rho) = (\Gamma\Delta \otimes id)_{\Gamma}\Delta(\rho), \quad (2.4)$$

$$(\Delta_{\Gamma} \otimes id)_{\Gamma}\Delta(\rho) = (id \otimes \Gamma\Delta)\Delta_{\Gamma}(\rho). \quad (2.5)$$

о

ББ над квантовыми группами можно рассматривать как некоммутативные аналоги сечений тензорных расслоений над группами Ли.

Следующим важным понятием в теории Вороновича является понятие биковариантного дифференциального исчисления первого порядка.

Определение 2. Рассмотрим биалгебру $\mathcal{A}$, и пусть Γ есть двухсторонний бимодуль над $\mathcal{A}$, а отображение $d : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ является линейным. Мы называем (Γ, d) дифференциальным исчислением первого порядка над $\mathcal{A}$, если:

1) $d(ab) = (da)b + a(db)$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$.

2) Любое $\rho \in \Gamma$ имеет вид $\rho = \sum_{k=1}^K a_k db_k$, где $a_k, b_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, \dots, K$.

о

Определение 3. Дифференциальное исчисление первого порядка (Γ, d) называется биковариантным, если из равенства $\sum_k a_k db_k = 0$ вытекают условия:

$$\sum_k \Delta(a_k) (id \otimes d)\Delta(b_k) = 0 = \sum_k \Delta(a_k) (d \otimes id)\Delta(b_k). \quad (2.6)$$

о

Условия (2.6) можно понимать так, что "идеалы" $\sum_k a_k db_k = 0$ в пространстве дифференциальных 1-форм являются ковариантами при правом и левом действии биалгебры $\mathcal{A}$ на саму себя и на бимодуль Γ .

Можно показать [16] (прямой проверкой аксиом (2.1)-(2.5)), что если дифференциальное исчисление первого порядка (Γ, d) является биковариантным, то Γ является биковариантным бимодулем со структурными отображениями $\Delta_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \mathcal{A} \otimes \Gamma$, $\Gamma\Delta : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes \mathcal{A}$:

$$\Delta_{\Gamma}(\rho) = \sum_k \Delta(a_k) (id \otimes d)\Delta(b_k), \quad \Gamma\Delta(\rho) = \sum_k \Delta(a_k) (d \otimes id)\Delta(b_k). \quad (2.7)$$

Причем соотношения (2.6) необходимы лишь для того, чтобы линейные отображения (2.7) были хорошо определены.

Выберем теперь в ББ Γ подмножество ${}_{\text{inv}}\Gamma$ элементов ω , которые являются левоинвариантными: $\Delta_{\Gamma}(\omega) = I \otimes \omega$. Ясно, что ${}_{\text{inv}}\Gamma$ является линейным

подпространством в Γ . Аналогично выбирается подпространство Γ_{inv} правоинвариантных элементов $\eta \in \Gamma : \Gamma \Delta(\eta) = \eta \otimes I$. Пусть теперь набор элементов $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \dots, J$, образует базис в ${}_{\text{inv}}\Gamma$. Тогда из аксиомы (2.5) следует, что правое кодействие $\mathcal{A}$ на ω_i имеет вид

$$\Gamma \Delta(\omega_i) = \sum_j \omega_j \otimes \mathbf{r}_{ji}, \quad \mathbf{r}_{ji} \in \mathcal{A}. \quad (2.8)$$

Из аксиом (2.2), (2.4) для ББ, очевидно, вытекает, что

$$\Delta(\mathbf{r}_{ij}) = \sum_k \mathbf{r}_{ik} \otimes \mathbf{r}_{kj}, \quad \epsilon(\mathbf{r}_{ij}) = \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

Если $\mathcal{A}$ – алгебра Хопфа, то из аксиом для АХ следует:

$$\sum_k \mathbf{r}_{ik} S(\mathbf{r}_{kj}) = \sum_k S(\mathbf{r}_{ik}) \mathbf{r}_{kj} = \delta_{ij} I. \quad (2.10)$$

Имеет место важная теорема [16]:

Теорема 1. Пусть $(\Gamma, \Delta_\Gamma, \Gamma \Delta)$ является ББ над алгеброй Хопфа $\mathcal{A}$ и элементы $\{\omega_i\}$ образуют базис в векторном пространстве всех левоинвариантных элементов из Γ . Тогда:

1) Любой элемент $\rho \in \Gamma$ представим в виде

$$\rho = \sum_i a_i \omega_i, \quad \rho = \sum_i \omega_i b_i, \quad (2.11)$$

где элементы $a_i, b_i \in \mathcal{A}$ однозначно определены.

2) Существуют линейные функционалы $f_{ij} \in \mathcal{A}^*$ такие, что

$$\omega_i b = \sum_j (f_{ij} \triangleright b) \omega_j, \quad (2.12)$$

$$a \omega_i = \sum_j \omega_j ((f_{ij} \cdot S^{-1}) \triangleright a) \quad (2.13)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Эти функционалы определяются однозначно равенствами (2.12) и удовлетворяют следующим условиям:

$$f_{ij}(ab) = \sum_k f_{ik}(a) f_{kj}(b), \quad f_{ij}(I) = \delta_{ij}. \quad (2.14)$$

Левое $f \triangleright a$ и правое $a \triangleleft f$ действия $\mathcal{A}^*$ на алгебру $\mathcal{A}$ определяются стандартным образом (см., например, книгу [19], обозначения из которой мы, в частности, используем):

$$f \triangleright a = \sum_a a_{(1)} f(a_{(2)}), \quad a \triangleleft f = \sum_a f(a_{(1)}) a_{(2)}, \quad \Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)} \quad (2.15)$$

(в дальнейшем мы будем опускать знаки сумм $\sum_a$, встречающиеся в аналогичных формулах).

3) Существует базис $\{\eta_i\}$, $i = 1, 2, \dots, J$, в векторном пространстве всех правоинвариантных элементов из Γ такой, что

$$\omega_i = \sum_j \eta_j \mathbf{r}_{ji} \Leftrightarrow \quad (2.16)$$

$$\sum_i \omega_i S(\mathbf{r}_{ij}) = \eta_j, \quad (2.17)$$

и, соответственно, утверждение (2.11) справедливо и для правого базиса. Кроме того, выполняются соотношения

$$\eta_i b = \sum_j (b \triangleleft (\tilde{f}_{ij} \cdot S^{-2})) \eta_j, \quad (2.18)$$

$$a \eta_i = \sum_j \eta_j (a \triangleleft (\tilde{f}_{ij} \cdot S^{-1})) \quad (2.19)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Функционалы $\tilde{f}_{ij}$ в формулах (2.18), (2.19) совпадают с функционалами f_{ij} из соотношений (2.12), (2.13).

4) Для всех $a \in \mathcal{A}$ имеют место тождества:

$$\sum_i \mathbf{r}_{ij} (a \triangleleft f_{ih}) = \sum_i (f_{ji} \triangleright a) \mathbf{r}_{hi}. \quad (2.20)$$

Доказательство.

1) Введем проектор $P_L : \Gamma \rightarrow \Gamma$ следующего вида (суммирование подразумевается, см. разд. 1):

$$P_L(\rho) = S(\bar{\rho}^{(1)})\rho^{(2)}, \quad (P_L^2 = P_L), \quad (2.21)$$

где $\bar{\rho}^{(1)} \in \mathcal{A}$, $\rho^{(2)} \in \Gamma$ определяются из равенства $\Delta_\Gamma(\rho) = \bar{\rho}^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$. Легко показать, используя аксиомы АХ и ББ, что $\Delta_\Gamma(P_L(\rho)) = I \otimes P_L(\rho)$. Таким образом, P_L является проектором на $\text{inv} \Gamma$. Заметим, что для проектора P_L выполняются формулы (необходимо снова использовать аксиомы АХ и ББ):

$$\rho = \bar{\rho}^{(1)} P_L(\rho^{(2)}), \quad (2.22)$$

$$P_L(b\rho) = \epsilon(b)P_L(\rho). \quad (2.23)$$

Проектор, удовлетворяющий (2.22), (2.23), является единственным, т.к. для любого другого проектора такого типа мы имеем

$$P'(\rho) = P'(\bar{\rho}^{(1)} P_L(\rho^{(2)})) = \epsilon(\bar{\rho}^{(1)}) P_L(\rho^{(2)}) = P_L(\rho). \quad (2.24)$$

Существование первого разложения из (2.11) следует из (2.22). Единственность этого разложения следует из линейной независимости элементов ω_i . Аналогично можно ввести проектор P_R и затем показать, что существует единственное разложение

$$\rho = \sum_i \eta_i c_i, \quad (2.25)$$

где $c_i \in \mathcal{A}$ и $\{\eta_i\}$ — любой линейно независимый базис в пространстве Γ_{inv} . Существование и единственность второго представления из (2.11) мы докажем при доказательстве следующего утверждения.

2) Для любого $b \in \mathcal{A}$ элемент $\omega_j b$ может быть представлен в виде первого разложения из (2.11):

$$\omega_j b = \sum_i F_{ji}(b) \omega_i. \quad (2.26)$$

Ясно, что отображения $F_{ij} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ являются линейными. Далее мы имеем

$$\sum_i F_{ji}(ab) \omega_i = \omega_j ab = \sum_k F_{jk}(a) \omega_k b = \sum_k F_{jk}(a) F_{ki}(b) \omega_i,$$

откуда, в силу единственности первого разложения из (2.11), следуют равенства

$$F_{ji}(ab) = F_{jk}(a) F_{ki}(b). \quad (2.27)$$

Определим следующие линейные функционалы: $f_{ij}(a) = \epsilon(F_{ij}(a))$. Тогда, действуя отображением ϵ на обе части (2.27) и учитывая формулу $F_{ij}(I) = \delta_{ij} I$ (которая следует из (2.26) при $b = I$), мы получаем (2.14).

Для того чтобы доказать (2.12), подействуем Δ_Γ на обе части уравнения (2.26). Тогда получим

$$(I \otimes \omega_j) \Delta(b) = \sum_i \Delta(F_{ji}(b)) (I \otimes \omega_i). \quad (2.28)$$

С другой стороны, из (2.26) имеем

$$(I \otimes \omega_j) \Delta(b) = \sum_i (id \otimes F_{ji}) \Delta(b) (I \otimes \omega_i). \quad (2.29)$$

Сравнивая (2.28) и (2.29), получаем равенство

$$\Delta(F_{ji}(b)) = (id \otimes F_{ji}) \Delta(b),$$

действуя на которое отображением $(id \otimes \epsilon)$, видим, что

$$F_{ji}(b) = (id \otimes f_{ji}) \Delta(b) = f_{ji} \triangleright b.$$

Подставляя этот результат в (2.26), получаем (2.12). Т.е. элементы $b \in \mathcal{A}$ можно проносить через $\omega \in {}_{\text{inv}}\Gamma$ справа налево.

Для доказательства (2.13) мы должны показать, что

$$\sum_j f_{ji} \triangleright (f_{hj} \cdot S^{-1}) \triangleright = \delta_{ih} \epsilon \triangleright . \quad (2.30)$$

Действительно (учитывая аксиомы AX):

$$\begin{aligned} \sum_j f_{ji} \triangleright ((f_{hj} \cdot S^{-1}) \triangleright S(a)) &= \sum_j (id \otimes f_{ji} \otimes (f_{hj} \cdot S^{-1})) \Delta^2(S(a)) = \\ &= \sum_j S(a_{(3)}) f_{ji}(S(a_{(2)})) f_{hj}(a_{(1)}) = \\ &= S(a_{(3)}) f_{hi}(a_{(1)} S(a_{(2)})) = \\ &= S(a_{(2)}) f_{hi}(\epsilon(a_{(1)})) I = \\ &= S(a) \delta_{hi} , \end{aligned}$$

что и доказывает (2.30), т.к. $\epsilon \triangleright a = a$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Подставляя в (2.12) $b = (f_{hi} \cdot S^{-1}) \triangleright a$, суммируя по i и используя (2.30), мы получаем (2.13). Формула (2.13) доказывает существование и единственность второго разложения из (2.11).

3) Рассмотрим элементы $\eta_i \in \Gamma$ вида (2.17). Тогда правое кодействие AX $\mathcal{A}$ на эти элементы равно:

$$\Gamma \Delta(\eta_j) = \sum_i \Gamma \Delta(\omega_i) \Delta(S(\mathbf{r}_{ij})) = \sum_{i,h,k} (\omega_h \otimes \mathbf{r}_{hi}) (S(\mathbf{r}_{kj}) \otimes S(\mathbf{r}_{ik})) = \eta_j \otimes I ,$$

и, следовательно, элементы $\{\eta_i\}$ являются правоинвариантными. Из существования и единственности второго разложения из (2.11) и из (2.17), очевидно, следует единственное разложение

$$\rho = \sum_i \eta_i \tilde{b}_i = \sum_{i,j} \eta_i(\mathbf{r}_{ij} b_j) \quad (2.31)$$

для всех $\rho \in \Gamma$ и, в частности, для любого правоинвариантного элемента $\rho = \eta \in \Gamma_{\text{inv}}$. Тогда из (2.31) при $\rho = \eta$ получаем

$$\eta \otimes I = \sum_i (\eta_i \otimes I) \Delta(\tilde{b}_i) .$$

Из этой формулы, учитывая единственность разложения (2.31) ($\rho = \eta$), выводим равенство $\Delta(\tilde{b}_i) = \tilde{b}_i \otimes I$, которое эквивалентно (см. аксиомы AX)

утверждению $\tilde{b}_i = \epsilon(\tilde{b}_i)I$. Таким образом, мы доказали, что любой элемент $\eta \in \Gamma_{\text{inv}}$ представим в виде единственной линейной комбинации элементов η_i (2.17), т.е. $\{\eta_i\}$ – базис в пространстве Γ_{inv} . Далее, абсолютно параллельно тому, как мы доказывали формулы (2.12), (2.13) для левоинвариантного базиса $\{\omega_i\}$, можно доказать аналогичные формулы (2.18), (2.19) для правоинвариантного базиса. Остается доказать, что $f_{ij} = f_{ij}$. Для этого подставим в (2.19) формулу (2.17) и учтем (2.13). В результате имеем

$$\sum_j ((f_{jh} \cdot S^{-1}) \triangleright a) S(\mathbf{r}_{ji}) = \sum_j S(\mathbf{r}_{hj}) (a \triangleleft (\tilde{f}_{ij} \cdot S^{-1})) . \quad (2.32)$$

Действуя на обе части этого равенства отображением ϵ и учитывая тождества $\epsilon(f \triangleright a) = \epsilon(a \triangleleft f) = f(a)$ и (2.9), получаем $f_{ih}(S^{-1}(a)) = \tilde{f}_{ih}(S^{-1}(a))$, что и требовалось доказать.

4) Вычислим S^{-1} от обеих частей соотношения (2.32):

$$\sum_j \mathbf{r}_{ji} S^{-1}((f_{jh} \cdot S^{-1}) \triangleright a) = \sum_j S^{-1}(a \triangleleft (\tilde{f}_{ij} \cdot S^{-1})) \mathbf{r}_{hj} . \quad (2.33)$$

Далее имеем равенства

$$S^{-1}((f_{jh} \cdot S^{-1}) \triangleright a) = S^{-1}(a) \triangleleft f_{jh} , \quad S^{-1}(a \triangleleft (\tilde{f}_{ij} \cdot S^{-1})) = f_{ij} \triangleright S^{-1}(a) ,$$

подставляя которые в (2.33) и заменяя a на $S(a)$, получаем (2.20). Теорема 1 доказана.

Теорема 1 дает полное описание ББ. Действительно, если мы рассмотрим некоторый левый модуль $\tilde{\Gamma}$ с базисом $\{\omega_i\}$ над АХ $\mathcal{A}$ и определим правое умножение, левое и правое коумножение согласно следующим правилам:

$$\begin{aligned} (\sum_i a_i \omega_i) b &= \sum_{ij} a_i (f_{ij} \triangleright b) \omega_j , \\ \Delta_{\tilde{\Gamma}}(\sum_i a_i \omega_i) &= \sum_i \Delta(a_i) (I \otimes \omega_i) , \\ \tilde{\Gamma} \Delta(\sum_i a_i \omega_i) &= \sum_{i,j} \Delta(a_i) (\omega_j \otimes \mathbf{r}_{ji}) , \end{aligned} \quad (2.34)$$

то $(\tilde{\Gamma}, \Delta_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{\Gamma} \Delta)$ является ББ при условии, что $\mathbf{r}_{ij} \in \mathcal{A}$ удовлетворяют (2.9), а функционалы f_{ij} удовлетворяют (2.14), (2.20).

В начале этого раздела мы упомянули, что описание ББ Γ над АХ $\mathcal{A}$ эквивалентно описанию биковариантного дифференциального исчисления первого порядка над $\mathcal{A}$. Другими словами, на данном этапе, имея в своем распоряжении теорему 1, мы имеем конструктивный способ построения пространства Γ дифференциальных 1-форм над $\mathcal{A}$ и, кроме того, мы имеем биковариантные правила коммутации (см. (2.12)) элементов из Γ с элементами АХ $\mathcal{A}$. Следующим этапом должно быть биковариантное построение внешнего произведения

дифференциальных 1-форм и, соответственно, построение всей градуированной внешней алгебры

$$\Gamma^\wedge = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\wedge n},$$

где $\Gamma^{\wedge 0} = \mathcal{A}$, $\Gamma^{\wedge 1} = \Gamma$, а $\Gamma^{\wedge n}$ обозначает пространство всех дифференциальных n -форм.

В действительности мы покажем, как строятся две биковариантные градуированные алгебры, связанные с ББ $(\Gamma, \Delta_\Gamma, \Gamma\Delta)$: тензорная алгебра $(\Gamma^\otimes, \Delta_\Gamma^\otimes, \Gamma\Delta^\otimes)$ и внешняя алгебра $(\Gamma^\wedge, \Delta_\Gamma^\wedge, \Gamma\Delta^\wedge)$. Тензорная алгебра $\Gamma^\otimes = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{\otimes n}$ строится очевидным образом. Элементами пространств $\Gamma^{\otimes n}$ являются тензорные произведения: $\tau = \rho_1 \otimes_{\mathcal{A}} \rho_2 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \rho_n$, где $\rho_i \in \Gamma$, а левое и правое кодействие $\mathcal{A}$ на τ определяется по формулам

$$\Delta_\Gamma^{\otimes n}(\tau) = \bar{\rho}_1^{(1)} \bar{\rho}_2^{(1)} \dots \bar{\rho}_n^{(1)} \otimes (\rho_1^{(2)} \otimes_{\mathcal{A}} \rho_2^{(2)} \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \rho_n^{(2)}),$$

$$\Gamma\Delta^{\otimes n}(\tau) = (\rho_1^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}} \rho_2^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \rho_n^{(1)}) \otimes \underline{\rho}_1^{(2)} \underline{\rho}_2^{(2)} \dots \underline{\rho}_n^{(2)},$$

где $\Delta_\Gamma(\rho_i) = \bar{\rho}_i^{(1)} \otimes \rho_i^{(2)}$, $\Gamma\Delta(\rho_i) = \rho_i^{(1)} \otimes \underline{\rho}_i^{(2)}$ и $\bar{\rho}_i^{(1)}, \underline{\rho}_i^{(2)} \in \mathcal{A}$. Заметим, что в силу некоммутативности $a \in \mathcal{A}$ и $\rho \in \Gamma$ имеем

$$\rho \otimes_{\mathcal{A}} (\rho' a) \neq \rho \otimes_{\mathcal{A}} (a \rho') = (\rho a) \otimes_{\mathcal{A}} \rho' \neq (a \rho) \otimes_{\mathcal{A}} \rho'. \quad (2.35)$$

Прежде чем перейти к построению внешней некоммутативной алгебры $(\Gamma^\wedge, \Delta_\Gamma^\wedge, \Gamma\Delta^\wedge)$, напомним, что внешнее произведение в коммутативной дифференциальной геометрии определяется следующим образом:

$$\rho \wedge \rho' = \rho \otimes_{\mathcal{A}} \rho' - \sigma_0(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \rho'), \quad (2.36)$$

где σ_0 является оператором обычной перестановки:

$$\sigma_0(\rho \otimes_{\mathcal{A}} \rho') = \rho' \otimes_{\mathcal{A}} \rho. \quad (2.37)$$

Естественно попытаться постулировать формулу (2.36) и в некоммутативном случае, однако сразу же видно, что оператор σ_0 (2.37) должен быть модифицирован. Действительно, применяя σ_0 (2.37) к обеим частям равенства из (2.35), получаем в некоммутативном случае, вообще говоря, неравенство

$$a \rho' \otimes_{\mathcal{A}} \rho \neq \rho' \otimes_{\mathcal{A}} \rho a. \quad (2.38)$$

Как было показано в [16], справедливо следующее утверждение:

Предложение 1. Существует единственный бимодульный гомоморфизм $\sigma: \Gamma^{\otimes 2} \rightarrow \Gamma^{\otimes 2}$, самосогласованный в некоммутативном случае, такой, что

$$\sigma(a\omega \otimes_{\mathcal{A}} \eta) = a\eta \otimes_{\mathcal{A}} \omega, \quad (2.39)$$

где a — любой элемент A , ω — любой левоинвариантный и η — любой правоинвариантный элементы ББ Γ . Оператор σ является обратимым и коммутирует с действием $A\chi$:

$$(id \otimes \sigma) \Delta_{\Gamma}^{\otimes 2}(\Gamma^{\otimes 2}) = \Delta_{\Gamma}^{\otimes 2} \sigma(\Gamma^{\otimes 2}), \quad (\sigma \otimes id) \Gamma \Delta^{\otimes 2}(\Gamma^{\otimes 2}) = \Gamma \Delta^{\otimes 2} \sigma(\Gamma^{\otimes 2}).$$

Кроме того, оператор σ удовлетворяет сплетающему соотношению:

$$(id \otimes \sigma)(\sigma \otimes id)(id \otimes \sigma) = (\sigma \otimes id)(id \otimes \sigma)(\sigma \otimes id). \quad (2.40)$$

Отметим, что определение операции σ (2.39), которая является сужением обычной перестановки (2.37), избавляет нас от трудности (2.38). То, что σ переставляет один левоинвариантный и один правоинвариантный элементы Γ , гарантирует биковариантность σ (2.39). Мы не будем приводить здесь полное доказательство предложения 1, отсылая интересующихся к работе [16]. Справедливость соотношения (2.40) будет продемонстрирована в конце этого раздела.

Данное определение σ позволяет вычислить его действие на любой элемент $\Gamma^{\otimes 2}$. Например, для $\sigma(\omega_i \otimes_A \rho)$ мы получаем, пользуясь утверждениями теоремы 1:

$$\begin{aligned} \sigma(\omega_i \otimes_A \sum_j a_j \eta_j) &= \sum_j \sigma(\omega_i a_j \otimes_A \eta_j) = \\ &= \sum_{j,k} (f_{ik} \triangleright a_j) \eta_j \otimes_A \omega_k = \sum_k (f_{ik} \triangleright \rho) \otimes_A \omega_k. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Отсюда, в частности, для $\rho = \omega_j$ выводим

$$\sigma(\omega_i \otimes_A \omega_j) = \sum_{kl} f_{ik}(\mathbf{r}_{lj}) \omega_l \otimes_A \omega_k. \quad (2.42)$$

Теперь с помощью оператора σ (2.39) можно определить внешнее произведение двух дифференциальных 1-форм (двух элементов ББ Γ). Например, в терминах левоинвариантных 1-форм имеем

$$\omega_i \wedge \omega_j = \omega_i \otimes_A \omega_j - \sigma(\omega_i \otimes_A \omega_j) = \quad (2.43)$$

$$= \omega_i \otimes_A \omega_j - \sum_{kl} f_{ik}(\mathbf{r}_{lj}) \omega_l \otimes_A \omega_k = \sum_{kl} (\delta_l^i \delta_k^j - \hat{\sigma}_{lk}^{ij}) \omega_l \otimes_A \omega_k.$$

Аналогичная формула для правоинвариантных 1-форм имеет вид

$$\eta_i \wedge \eta_j = \eta_i \otimes_A \eta_j - \sum_{kl} f_{jl}(\mathbf{r}_{ki}) \eta_l \otimes_A \eta_k = \sum_{kl} (\delta_l^i \delta_k^j - \hat{\sigma}_{kl}^{ji}) \eta_l \otimes_A \eta_k. \quad (2.44)$$

В компактных матричных обозначениях формулы (2.43) и (2.44) представимы следующим образом:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (I_{12} - \hat{\sigma}_{12})\omega_1 \otimes_A \omega_2, \quad \eta_2 \wedge \eta_1 = (I_{12} - \hat{\sigma}_{12})\eta_2 \otimes_A \eta_1. \quad (2.45)$$

Пусть матрицы $\hat{\sigma}$ из (2.45) удовлетворяют характеристическому уравнению

$$(I_{12} - \hat{\sigma}_{12})(\lambda_1 I_{12} - \hat{\sigma}_{12}) \cdots (\lambda_H I_{12} - \hat{\sigma}_{12}) = 0,$$

где $1, \lambda_i \neq 1$ — набор $(H+1)$ собственных значений оператора $\hat{\sigma}$. Тогда для внешнего умножения (2.45) можно получить эквивалентное определение:

$$\mathbf{P}\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 = \mathbf{P}\eta_2 \wedge \eta_1, \quad (2.46)$$

где $\mathbf{P} = (\lambda_1 I_{12} - \hat{\sigma}_{12}) \cdots (\lambda_H I_{12} - \hat{\sigma}_{12})$ — проецирует $\hat{\sigma}$ на единичное собственное значение.

Сплетающее соотношение (2.40), очевидно, переписывается в виде уравнения Янга — Бакстера:

$$\hat{\sigma}_{23}\hat{\sigma}_{12}\hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{12}\hat{\sigma}_{23}\hat{\sigma}_{12} \quad (2.47)$$

и гарантирует, что внешнее умножение (2.45) является ассоциативным:

$$(\rho \wedge \rho') \wedge \rho'' = \rho \wedge (\rho' \wedge \rho'').$$

Однако мы не можем утверждать, основываясь на определении внешнего умножения (2.43)—(2.46), что соответствующая внешняя алгебра обладает свойством Пуанкаре — Биркгофа — Витта (ПБВ), т.е. что любой моном, построенный из дифференциальных 1-форм, может быть однозначно лексикографически упорядочен. Другими словами, мы не можем в общем случае утверждать, что размерности пространств $\Gamma^{\wedge n}$ совпадают с размерностями соответствующих пространств в коммутативном случае. Действительно, внешняя алгебра со структурными соотношениями (2.46) может удовлетворять свойству ПБВ, если ранг проектора $\mathbf{P}$ равен $J(J+1)/2$ (J — размерность пространства Γ 1-форм) и если (2.46) переписывается в виде

$$(I_{12} - \tilde{\sigma}_{12})\omega_1 \wedge \omega_2 = 0 = (I_{12} - \tilde{\sigma}_{12})\eta_2 \wedge \eta_1,$$

где $\sigma_0 \cdot \tilde{\sigma}$ приводится к блочно-треугольному виду и $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера (2.47) (достаточное условие). Как мы увидим в следующих разделах, определения (2.43)—(2.46) в случае квантовой группы $GL_q(N)$ приводят, а в случае групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(N)$ не приводят к внешним алгебрам ПБВ-типа.

Обсудим теперь конструкцию дифференциала, который согласован с внешней алгеброй, построенной выше. Имеет место следующая теорема [16].

Теорема 2. Пусть $(\Gamma^\wedge, \Delta_\Gamma^\wedge, \Gamma\Delta^\wedge)$ является внешней алгеброй, построенной (как это изложено выше) над биковариантным дифференциальным исчислением первого порядка $(\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta_\Gamma, d)$. Тогда существует единственное линейное отображение $d: \Gamma^\wedge \rightarrow \Gamma^\wedge$ такое, что:

- 1) d увеличивает градуировку на единицу, т.е. $d: \Gamma^{\wedge n} \rightarrow \Gamma^{\wedge n+1}$;
- 2) на элементы с нулевой градуировкой оператор d действует так, как это сформулировано в определении 2 (см. выше);
- 3) d является градуированным дифференциалом:

$$d(\theta \wedge \theta') = d\theta \wedge \theta' + (-1)^k \theta \wedge d\theta', \quad (\theta \in \Gamma^{\wedge k}, \theta' \in \Gamma^\wedge); \quad (2.48)$$

4) для всех $\theta \in \Gamma^\wedge$ имеем $d(d\theta) = 0$;

5) оператор d является биковариантным оператором:

$$\Delta_\Gamma^\wedge(d\theta) = (id \otimes d)\Delta_\Gamma^\wedge(\theta), \quad \Gamma\Delta^\wedge(d\theta) = (d \otimes id)\Gamma\Delta^\wedge(\theta).$$

Доказательство. Для доказательства используется метод расширения ББ Γ путем добавления к нему одномерного левого $\mathcal{A}$ -модуля X . Тогда любой элемент $\tilde{\xi}$ расширенного ББ $\tilde{\Gamma}$ имеет вид

$$\tilde{\xi} = cX + \xi, \quad c \in \mathcal{A}, \xi \in \Gamma. \quad (2.49)$$

Правое умножение $a \in \mathcal{A}$ на $\tilde{\xi}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{\xi}a = caX + (cda + \xi a), \quad (2.50)$$

а левое и правое кодействие $\mathcal{A}$ на $\tilde{\Gamma}$ задается формулами

$$\tilde{\Delta}_\Gamma(\tilde{\xi}) = \Delta(c)(I \otimes X) + \Delta_\Gamma(\xi), \quad \Gamma\tilde{\Delta}(\tilde{\xi}) = \Delta(c)(X \otimes I) + \Gamma\Delta(\xi). \quad (2.51)$$

Легко убедиться в том, что двухсторонний бимодуль $\tilde{\Gamma}$ со структурными отображениями (2.49)—(2.51) является биковариантным. Более того, из (2.50) следует, что

$$da = Xa - aX, \quad (2.52)$$

а из (2.51) вытекает, что X — коинвариантный элемент. Таким образом,

$$\sigma(X \otimes_{\mathcal{A}} X) = X \otimes_{\mathcal{A}} X,$$

и, следовательно, $X \wedge X = 0$. Определяя теперь дифференциал от любого элемента $\theta \in \Gamma^{\wedge n}$ согласно формуле

$$d(\theta) = [X, \theta]_{\text{grad}} \equiv X\theta - (-1)^n \theta X, \quad (2.53)$$

мы без труда можем проверить утверждения 1—5 из теоремы 2. Теорема 2 доказана. •

Отметим, однако, что при формулировке условий данной теоремы мы не учитывали возможное наличие нетривиальных идеалов в АХ $\mathcal{A}$ и во внешней алгебре $\Gamma^\wedge$ (типа $\det_q(\Gamma) - 1 = 0$ и $\text{Tr}_q(\omega) = 0$ для группы $SL_q(N)$, см. ниже), и что введение дополнительного элемента X должно быть согласовано с наличием таких идеалов. Неучет этого требования (как мы покажем в разд. 5 и 6) приводит к различным сложностям при построении биковариантного дифференциального исчисления на специальных квантовых группах $SL_q(N)$, $SO_q(N)$ и $Sp_q(N)$. В частности, покажем, что определение внешнего дифференциала с помощью элемента X приводит к несовпадению размерностей пространств $\Gamma^{\wedge n}$ в классическом и квантовом случаях.

Теперь кратко обсудим, каким образом в теории Вороновича вводятся некоммутативные аналоги векторных полей над АХ $\mathcal{A}$. Воспользуемся для этого проектором P_L (2.21), который отображает любой элемент из ББ Γ в некоторый элемент из линейного подпространства ${}_{\text{inv}}\Gamma$ левоинвариантных форм. Тогда, используя базис $\{\omega_i\}$ в ${}_{\text{inv}}\Gamma$, для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ всегда можно записать равенство

$$P_L(da) \equiv S(a_{(1)}) da_{(2)} = \sum_i \chi_i(a) \omega_i, \quad (2.54)$$

где мы ввели набор $\{\chi_i\}$ линейных функционалов из $\mathcal{A}^*$. Очевидно, что для этих функционалов выполняются условия

$$\chi_i(a) = 0, \text{ если } S(a_{(1)})da_{(2)} = 0, \quad \chi_i(I) = 0. \quad (2.55)$$

В работе [16] было показано, что $\{\chi_i\}$ образуют линейное пространство, дуальное к Γ , если в качестве билинейного спаривания определить $(\forall a, b \in \mathcal{A})$:

$$\langle \chi_i, a db \rangle \equiv \epsilon(a) \chi_i(b). \quad (2.56)$$

Легко показать, усредняя (2.54) с χ_j , что $\{\chi_i\}$ является ортонормированным базисом к $\{\omega_j\}$:

$$\langle \chi_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Таким образом, по аналогии с классической дифференциальной геометрией (см., например, [23]) естественно интерпретировать χ_i как базисные элементы в некоммутативном кокасательном пространстве над АХ $\mathcal{A}$.

Свойства функционалов χ_i мы сформулируем в виде следующей теоремы (см. [16]):

Теорема 3.

1) Для любого $a \in \mathcal{A}$ имеем

$$da = \sum_i (\chi_i \triangleright a) \omega_i. \quad (2.57)$$

2) Пусть $\{f_{ij}\}$ является семейством линейных функционалов на $\mathcal{A}$, введенных в теореме 1. Тогда

$$\chi_i(ab) = \sum_j \chi_j(a) f_{ji}(b) + \epsilon(a) \chi_i(b) \quad (2.58)$$

для любых $a, b \in \mathcal{A}$.

3) Пусть $\{r_{ij}\}$ — семейство элементов из $\mathcal{A}$, введенных в (2.8) и рассмотренных в теореме 1. Тогда

$$r_{ij} = (\chi_i \otimes id) \operatorname{ad}_R(a_j), \quad (2.59)$$

где $\operatorname{ad}_R(a) = a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)}$, и элементы a_i из $A\mathcal{X}$ $\mathcal{A}$ удовлетворяют условиям

$$\chi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad \epsilon(a_i) = 0. \quad (2.60)$$

Доказательство.

1) Воспользуемся соотношениями (2.22) и (2.54), тогда имеем

$$da = a_{(1)} P_L da_{(2)} = \sum_i a_{(1)} \chi_i(a_{(2)}) \omega_i = \sum_i (\chi_i \triangleright a) \omega_i.$$

2) Из (2.54) следует, что

$$P_L(d(ab)) = \sum_i \chi_i(ab) \omega_i. \quad (2.61)$$

С другой стороны, используя (2.12), (2.54) и аксиомы $A\mathcal{X}$, получаем

$$\begin{aligned} P_L(d(a)b + a d(b)) &= \sum_i P_L((\chi_i \triangleright a) \omega_i b) + \epsilon(a) P_L(db) = \\ &= \sum_{i,j} \epsilon(\chi_i \triangleright a) \epsilon(f_{ij} \triangleright b) \omega_j + \epsilon(a) \sum_j \chi_j(b) \omega_j = \\ &= \sum_j [\sum_i \chi_i(a) f_{ij}(b) + \epsilon(a) \chi_j(b)] \omega_j. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Сравнивая (2.61) и (2.62), получаем (2.58). Заметим, что (2.58) и второе условие из (2.55) можно формально представить в виде структурных отображений

$$\Delta^*(\chi_i) = \sum_j \chi_j \otimes f_{ji} + \epsilon \otimes \chi_i, \quad \epsilon^*(\chi_i) = 0. \quad (2.63)$$

3) Воспользуемся снова соотношением (2.54) и равенством (2.8):

$$r \Delta(P_L(da)) = \sum_{i,j} \chi_i(a) \omega_j \otimes r_{ji}. \quad (2.64)$$

С другой стороны, (2.64) переписывается в виде

$$\Gamma \Delta(S(a_{(1)}) d a_{(2)}) = P_L(d a_{(2)}) \otimes S(a_{(1)}) a_{(3)} = \sum_j \chi_j(a_{(2)}) \omega_j \otimes S(a_{(1)}) a_{(3)}. \quad (2.65)$$

Формула (2.59) следует из сравнения (2.64) и (2.65) при $a = a_i$, что заканчивает доказательство теоремы 3. •

Из равенства (2.57) легко выводится квантовый аналог формулы Маурера — Картана. Эта формула имеет отношение к дифференциальному исчислению на $\mathcal{A}$ высшего порядка. Принимая во внимание свойства внешнего дифференциала d , сформулированные в теореме 2, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= d(d a) = d\left(\sum_i (\chi_i \triangleright a) \omega_i\right) = \\ &= \sum_i d(\chi_i \triangleright a) \wedge \omega_i + \sum_i (\chi_i \triangleright a) d \omega_i = \\ &= \sum_{i,j} (\chi_j \triangleright \chi_i \triangleright a) \omega_j \wedge \omega_i + \sum_i (\chi_i \triangleright a) d \omega_i. \end{aligned}$$

Применяя P_L к обеим частям этого соотношения (напомним, что пространство 2-форм над $\mathcal{A}$ также является ББ, для которого справедливы формулы (2.23)), мы выводим ($\forall a \in \mathcal{A}$):

$$\sum_i \chi_i(a) d \omega_i = - \sum_{i,j} (\chi_i * \chi_j)(a) \omega_i \wedge \omega_j. \quad (2.66)$$

Здесь $(\chi_i * \chi_j)(a) \equiv \chi_i(a_{(1)}) \chi_j(a_{(2)})$. Теперь, вспоминая определение (2.43) внешнего произведения для 1-форм ω_i , уравнение (2.66) можно представить в виде

$$\sum_i \chi_i(a) d \omega_i = - \sum_{i,j} [\chi_i, \chi_j](a) \omega_i \otimes \omega_j, \quad (2.67)$$

где мы ввели коммутатор двух векторных полей

$$[\chi_i, \chi_j] = \chi_i * \chi_j - \hat{\sigma}_{ji}^{kl} \chi_k * \chi_l. \quad (2.68)$$

Для данного коммутатора может быть написано тождество, которое является аналогом тождества Якоби (см. [16]). Более того, в работе [16] показано, что этот коммутатор снова оказывается векторным полем, для которого выполняются условия (2.55). Пусть (2.68) выражается в виде линейной комбинации базисных функционалов χ_i :

$$[\chi_i, \chi_j] = C_{ij}^k \chi_k. \quad (2.69)$$

Тогда функционалы $\{\chi_i\}$ образуют алгебру относительно билинейной операции умножения (2.68), и можно показать, что при определенных условиях на C_{ij}^k отображения (2.63) являются гомоморфизмами этой алгебры.

Продemonстрируем теперь справедливость соотношений (2.40) и (2.47). Пусть элементы $\{e_A\}$ образуют базис в АХ $\mathcal{A}$, а элементы $\{e^B\}$ образуют базис в дуальной АХ $\mathcal{A}^*$ такой, что $\langle e^B, e_A \rangle = \delta_A^B$. Из соотношений (2.9) и (2.14) следует, что средние

$$\begin{aligned} f_{ij}(e_A) &= \langle f_{ij}, e_A \rangle \equiv \rho_{ij}(e_A), \\ \langle e^A, \mathbf{r}_{ij} \rangle &\equiv \rho_{ij}^*(e^A) \end{aligned} \quad (2.70)$$

дают матричные представления алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Пользуясь обозначениями, введенными в (2.70), элементы $\mathbf{r}_{ij} \in \mathcal{A}$ можно представить в виде

$$\mathbf{r}_{ij} = \sum_A e_A \rho_{ij}^*(e^A). \quad (2.71)$$

В дальнейшем будем опускать знаки сумм по повторяющимся индексам $A, B, \dots$. С помощью базиса $\{e_A\}$ запишем структурные отображения для АХ $\mathcal{A}$ в виде

$$\begin{aligned} e_A e_B &= m_{AB}^C e_C, \quad \Delta(e_A) = \Delta_A^{BC} e_B \otimes e_C, \\ S(e_A) &= S_A^B e_B, \quad \epsilon(e_A) = \epsilon_A, \quad E^A e_A = I, \end{aligned} \quad (2.72)$$

где E^A — коэффициенты разложения единичного элемента $I \in \mathcal{A}$, а m_{AB}^C , Δ_A^{BC} , S_A^B и ϵ_A являются структурными константами для структурных отображений в $\mathcal{A}$. Соответственно для $\mathcal{A}^*$ получаем

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \Delta_{AB}^C e^C, \quad \Delta(e^A) = m_{BC}^A e^B \otimes e^C, \\ S(e^A) &= S_B^A e^B, \quad \epsilon(e^A) = E^A, \quad \epsilon_A e^A = I. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Тогда в обозначениях (2.70)—(2.73) условия (2.20) при $a = e_B$ принимают вид

$$\Delta_B^{DC} m_{AC}^E \rho_{ij}^*(e^A) \rho_{ik}(e_D) = \Delta_B^{CD} m_{CA}^E \rho_{ji}(e_D) \rho_{ki}^*(e^A). \quad (2.74)$$

Данные соотношения можно интерпретировать как правила коммутации матриц $\rho(e_D)$ и $\rho^{*t}(e^A)$, где t обозначает матричное транспонирование. Отметим, однако, что ρ^{*t} уже не является представлением АХ $\mathcal{A}^*$, а является представлением алгебры, имеющей, по крайней мере, противоположное умножение по сравнению с $\mathcal{A}^*$, т.к. $\rho^{*t}(e^A e^B) = \rho^{*t}(e^B) \rho^{*t}(e^A)$. Кроме того, заметим, что соотношения (2.74) напоминают кросс-коммутационные соотношения для квантового дубля [3]. Для того чтобы действительно установить связь соотношений (2.74) с конструкцией квантового дубля, рассмотрим алгебру $\mathcal{A}^0$

с генераторами $\{\bar{e}^A\}$, для которых определим матричное представление ρ^o согласно правилам:

$$\begin{aligned}\rho_{ij}^o(\bar{e}^A) &= \rho_{ji}^*(S^{-1}(e^A)) = (S^{-1})_B^A \rho_{ji}^*(e^B), \\ \rho_{ij}^o \cdot \rho_{kl}^o(\bar{e}^A) &= \rho_{ji}^* \cdot \rho_{lk}^*(S^{-1}(e^A)).\end{aligned}\quad (2.75)$$

Пользуясь этими правилами и структурными отображениями (2.73), можно показать, что структурные отображения в алгебре $\mathcal{A}^o$ должны иметь вид

$$\bar{e}^A \bar{e}^B = \Delta_{C^B}^{A^B} \bar{e}^C, \quad \Delta(\bar{e}^A) = m_{CB}^A \bar{e}^B \otimes \bar{e}^C, \quad S(\bar{e}^A) = (S^{-1})_B^A \bar{e}^B. \quad (2.76)$$

Таким образом, матрицы $\rho^{*t}(S^{-1}(e^A))$ (то же самое справедливо и для $\rho^{*t}(S(e^A))$) реализуют представление AX $\mathcal{A}^o$ с противоположным коумножением и косым антиподом по сравнению с алгеброй $\mathcal{A}^*$. Как показал Дринфельд [3] (см. также [1] и цитируемую там литературу), можно построить квазитреугольную AX $\mathcal{D} = \mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}^o$ (квантовый дубль), как специальное кросс-произведение AX $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^o$, причем универсальная R -матрица для $\mathcal{D}$ дается формулой

$$\mathcal{R} = (e_A \bowtie I) \otimes (I \bowtie \bar{e}^A), \quad (2.77)$$

а кросс-коммутиационные соотношения для элементов алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^o$ следуют из уравнения

$$\mathcal{R}^{-1} \Delta'_{\mathcal{D}}(a \bowtie \bar{a}) = \Delta_{\mathcal{D}}(a \bowtie \bar{a}) \mathcal{R}^{-1}. \quad (2.78)$$

Здесь $\Delta' = \sigma_0 \cdot \Delta$ обозначает коумножение, противоположное к Δ . Подставим в уравнение (2.78) элемент из $\mathcal{D}$ следующего вида:

$$(a \bowtie \bar{a}) = (I \bowtie S^{-1}(\bar{e}^E)) = (I \bowtie S_A^E \bar{e}^A)$$

и учтем (2.77) и (7.2). В результате получаем

$$\Delta_B^{DC} m_{AC}^E (I \bowtie S^{-1}(\bar{e}^A)) (e_D \bowtie I) = \Delta_B^{CD} m_{CA}^E (e_D \bowtie I) (I \bowtie S^{-1}(\bar{e}^A)). \quad (2.79)$$

Запишем это равенство в матричном представлении $\rho_{\mathcal{D}}$:

$$\rho_{\mathcal{D}}(e_A \bowtie \bar{e}^B) \longrightarrow \rho(e_A) \otimes \rho^o(\bar{e}^B)$$

и учтем первую из формул (2.75), тогда мы получим условия (2.74) и, следовательно, $\rho_{\mathcal{D}} = \rho \otimes (\rho^{*t} \cdot S^{-1})$, при действии на $e_A \otimes e^B$, реализует представление квантового дубля. Таким образом, каждый ББ над AX $\mathcal{A}$, который характеризуется элементами $g_{ij} \in \mathcal{A}$ и $f_{ij} \in \mathcal{A}^*$, определяет, согласно (2.70) и (2.71), фиксированное матричное представление квантового дубля $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}^o$. Этот факт был получен в работах [24].

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{kl}^{ij} &= \langle f_{il}, \mathbf{r}_{kj} \rangle = \rho_{il}(e_A) \rho_{kj}^*(e^A) = \\ &= \rho_{il}(e_A) \rho_{jk}^o(S^{-1}(\bar{e}^A)) = (\rho_D)_{lk}^{ij}(\mathcal{R}^{-1}) \equiv (\hat{R}^{-1})_{kl}^{ij},\end{aligned}$$

откуда, в силу того, что универсальная $\mathcal{R}$ -матрица удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера, мы сразу же получаем соотношения (2.40) и (2.47).

В заключение мы сформулируем еще одно важное утверждение [25] относительно свойств внешней алгебры $(\Gamma^\wedge, d)$.

Теорема 4. Пусть $(\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta_\Gamma, d)$ есть биковариантное дифференциальное исчисление первого порядка над АХ A . Тогда внешняя алгебра $(\Gamma^\wedge, d)$ является АХ. Обратное утверждение также справедливо.

Доказательство этой теоремы приведено в [25]. Отметим, что структурные отображения для всей дифференциальной АХ $\Gamma^\wedge$ могут быть построены с помощью очевидного расширения структурных отображений, заданных на подпространстве $\Gamma = \Gamma^{\wedge 1}$:

$$\Delta(\rho) =_\Gamma \Delta(\rho) + \Delta_\Gamma(\rho), \quad (2.80)$$

$$\epsilon(\rho) = 0, \quad S(\omega_i) = -\omega_j S(\mathbf{r}_{ji}) = -\eta_i.$$

Необходимо, однако, помнить, что тензорные произведения элементов алгебры $\Gamma^\wedge$ подчиняются градуированному правилу умножения:

$$(\rho \otimes \rho') \cdot (\rho'' \otimes \rho''') = (-1)^{k \cdot n} (\rho \rho'' \otimes \rho' \rho'''), \quad (2.81)$$

где k и n — степени дифференциальных форм ρ' и ρ'' . В следующем разделе мы покажем, как утверждение этой теоремы реализуется в случае дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА ГРУППЕ $GL_q(N)$

Прежде всего напомним, каким образом строится дифференциальное исчисление на $GL_q(N)$ -ковариантной гиперплоскости с координатами $\{x^i\}$ ($i = 1, \dots, N$). Впервые такое исчисление было получено в работе [26]. Напомним [2, 27], что имеются два типа $GL_q(N)$ -ковариантных гиперплоскостей с определяющими соотношениями ($c = \pm q^{\pm 1}$):

$$R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} x^{j_1} x^{j_2} = c x^{i_2} x^{i_1} \Leftrightarrow R_{12} x_1 x_2 = c x_2 x_1, \quad (3.1)$$

которые можно представить в более удобном виде, используя проекторы $\mathbf{P}^+$ и $\mathbf{P}^-$ [2] (q -симметризатор и q -антисимметризатор):

$$(\hat{R} - c)xx' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}^\pm xx' = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{P}^{\pm} = \frac{1}{q + q^{-1}} (\pm \hat{R} + q^{\pm 1} \mathbf{1}),$$

где $\hat{R} = P_{12} R_{12} \in Mat_N \otimes Mat_N$, 1, 2 обозначают номера матричных пространств, и в случае $GL_q(N)$ мы имеем [2, 4]:

$$R_{12} = R_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} (1 + (q - 1) \delta^{i_1 i_2}) + (q - q^{-1}) \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \Theta_{i_1 i_2}, \quad (3.3)$$

$$\Theta_{ij} = \{1, \text{ если } i > j, 0, \text{ если } i \leq j\},$$

$P_{12} = P_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2}$ — матрица перестановки, $x \equiv x_1$, $x' \equiv x_2$, $\mathbf{1}$ — $N^2 \times N^2$ единичная матрица, и при $c = q$ мы имеем бозонную, а при $c = -q^{-1}$ фермионную гиперплоскость. Напомним, что R -матрица (3.3) удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера:

$$\hat{R}_{12} \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} = \hat{R}_{23} \hat{R}_{12} \hat{R}_{23}. \quad (3.4)$$

Ковариантность соотношений (3.1) и (3.2) относительно кодействия квантовой группы $GL_q(N)$ будет обсуждаться ниже (см. также [1]).

Более или менее очевидно, что соответствующие (3.1) коммутационные соотношения для дифференциалов $\{dx^i\}$ будут иметь вид

$$(\hat{R} + c^{-1}) dx dx' = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}^{\mp} dx dx' = 0. \quad (3.5)$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем знак $\wedge$ внешнего произведения дифференциальных форм. Для того чтобы найти кросс-коммутационные соотношения, переставляющие элементы $\{x^i\}$ и $\{dx^i\}$, продифференцируем соотношение (3.2):

$$\hat{R}(dx x' + x dx') = c(dx x' + x dx'). \quad (3.6)$$

Добавим теперь в обе части этого равенства выражение $-(q - q^{-1})x dx'$ и используем соотношение Гекке для $GL_q(N)$ - R -матрицы (3.3):

$$(\hat{R} - q)(\hat{R} + q^{-1}) = 0 \Leftrightarrow \hat{R}^2 = \lambda \hat{R} + \mathbf{1}, \quad \lambda = q - q^{-1}, \quad (3.7)$$

после чего равенство (3.6) приводится к виду

$$\hat{R} dx x' + \hat{R}^{-1} x dx' = c dx x' + (c - \lambda) x dx'. \quad (3.8)$$

Отметим, что $c - \lambda = c^{-1}$, и, следовательно, (3.8) (соответственно (3.6)) выполняется, если мы положим

$$c \hat{R} dx x' = x dx'. \quad (3.9)$$

Это и есть искомые кросс-коммутационные соотношения для элементов $\{x^i\}$ и $\{dx^i\}$. Если мы продифференцируем (3.9) еще один раз, учитывая градуированное правило Лейбница и условие $d^2 = 0$, то мы получим (3.5). Таким

образом, дифференциальная алгебра (дифференциальный комплекс) $\Omega^\wedge$ на $GL_q(N)$ -ковариантной гиперплоскости имеет вид

$$(\hat{R} - c)xx' = 0, \quad c\hat{R}dx x' = x dx', \quad (\hat{R} + c^{-1})dx dx' = 0. \quad (3.10)$$

Для данной алгебры свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта (т.е. свойство, при котором любой моном, построенный из генераторов x^i , dx^j , может быть однозначно лексикографически упорядочен) гарантируется явным видом соотношений (3.10), расписанных в компонентной форме, и, в частности, подтверждается тем, что $\hat{R}$ -матрица (3.3) удовлетворяет уравнению Янга — Бакстера (3.4). Заметим, что если бы мы добавляли в обе части (3.6) выражения $(-\lambda dx x')$, то пришли бы к кросс-коммутиационным соотношениям, получающимся из (3.9) заменой $c \rightarrow c^{-1}$, $\hat{R} \rightarrow \hat{R}^{-1}$. Этот второй вариант коммутиационных соотношений полностью эквивалентен первому, и он не будет рассматриваться в дальнейшем.

Для R -матрицы более общего типа, удовлетворяющей характеристическому уравнению (ср. с (3.7)):

$$\prod_{j=1}^M (\hat{R} - \lambda_j) = 0, \quad M \geq 2 \quad (3.11)$$

(где λ_j — собственные значения R -матрицы такие, что $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$), также можно определить квантовые гиперплоскости и соответствующие дифференциальные комплексы $\Omega_{\lambda_k}^\wedge$ [28]:

$$\prod_{j \neq k} \frac{(\hat{R} - \lambda_j)}{(\lambda_k - \lambda_j)} xx' \equiv \mathbf{P}_k xx' = 0, \\ \hat{R}(dx)x' = -\lambda_k x(dx)', \quad (3.12) \\ \hat{R}(dx)(dx)' = \lambda_k(dx)(dx)'.$$

В частном случае, когда характеристическое уравнение (3.11) совпадает с соотношением Гекке (3.7), формулы (3.10) и (3.12) идентичны. Отметим, однако, что соотношения (3.12) не всегда удовлетворительны с точки зрения выполнения свойства ПБВ (например, для $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ R -матриц соотношения (3.12) не определяют ПБВ-алгебры).

Расширим теперь алгебру с определяющими соотношениями (3.10), вводя в качестве дополнительных генераторов некоммутативные производные $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Естественно предположить, что при действии алгебры $\text{Fun}(GL_q(N))$ с генераторами $\{T_j^i\}$ на образующие квантовой гиперплоскости:

$$x^i \rightarrow T_j^i \otimes x^j, \quad dx^i \rightarrow T_j^i \otimes dx^j \Leftrightarrow |x \rangle \rightarrow T|x \rangle, \quad |dx \rangle \rightarrow T|dx \rangle \quad (3.13)$$

(гиперплоскость (3.1) и ее дифференциальное расширение (3.10) называются $GL_q(N)$ -ковариантными, т.к. уравнения (3.1), (3.10) являются ковариантными при преобразованиях (3.13), что вытекает из соотношений $\hat{R}_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}$), производная ∂_i преобразуется как контргradientный вектор:

$$\partial_i \rightarrow (T^{-1})_i^j \otimes \partial_j \Leftrightarrow \langle \partial | \rightarrow \langle \partial | T^{-1}. \quad (3.14)$$

Тогда ковариантные правила коммутации для производных очевидны:

$$\langle \partial |' < \partial | \hat{R} = c < \partial |' < \partial |. \quad (3.15)$$

После чего несложно построить ковариантное, удовлетворяющее свойству ПБВ расширение алгебры (3.10). Действительно, естественно рассмотреть в качестве внешнего дифференциала d коинвариантное выражение

$$d = \langle \partial | dx >. \quad (3.16)$$

Тогда из условия $d \cdot x = d(x) + x \cdot d$ с учетом (3.9), (3.16) получаем

$$|x >' < \partial |' = -I_2 + c^{-1} < \partial | \hat{R}^{-1} |x >, \quad (3.17)$$

где I_2 — единичная матрица, действующая во втором матричном пространстве. Остается найти коммутационные соотношения между $|dx >$ и $\langle \partial |$. Будем искать эти соотношения в виде

$$|dx >' < \partial |' = \langle \partial | \hat{Q} |dx >, \quad (3.18)$$

где $\hat{Q} = \hat{Q}_{12} \in \text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$. Умножим (3.18) слева на $|x >$ и применим (3.9) и (3.17). В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} -c\hat{R}'|dx >' + \langle \partial | \hat{R}'\hat{Q}(\hat{R}')^{-1}|dx > |x >' = \\ = -\hat{Q}'|dx >' + \langle \partial | \hat{R}^{-1}\hat{Q}'\hat{R}|dx > |x >', \end{aligned}$$

которое тождественно выполняется, если в (3.18) положить $\hat{Q} = c\hat{R}$. Итак, новая расширенная алгебра наряду с (3.10) задается еще и соотношениями

$$\langle \partial |' < \partial | \hat{R} = c < \partial |' < \partial |, \quad |x >' < \partial |' = -I_2 + c^{-1} < \partial | \hat{R}^{-1} |x >, \quad (3.19)$$

$$|dx >' < \partial |' = c < \partial | \hat{R} |dx >, \quad d < \partial | = c^2 < \partial | d,$$

(3.19)

где последнее равенство следует из определения дифференциала (3.16).

Заметим, что подалгебра с образующими $\{x^i, \partial_j\}$ (q -алгебра Гейзенберга — Вейля) может интерпретироваться как алгебра $GL_q(N)$ -ковариантных квантовых осцилляторов [29–31]. Известна индуктивная процедура построения кольца q -дифференциальных операторов (q -алгебры Гейзенберга — Вейля) с $2N$ образующими из кольца q -дифференциальных операторов с $2(N-1)$ образующими (см. [32, 33]). Определяющие соотношения (3.2), (3.15), (3.17) для рассматриваемой подалгебры имеют удобное графическое представление:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow 1 \searrow 2 \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow 2 \end{array} , \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \searrow 1 \nearrow 2 \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \searrow 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \searrow 2 \end{array} , \\
 c^{-2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow 2 \searrow 1 \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow 1 \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \searrow 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \searrow 1 \end{array} ,
 \end{array}$$

где

$${}^c R_{12}^{-1} = \begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \searrow \\ 1 \end{array} , \quad x_i = \begin{array}{c} \text{---} \\ \nearrow i \end{array} , \quad \partial_i = \begin{array}{c} \text{---} \\ \searrow i \end{array} .$$

С другой стороны, мы можем рассматривать (см. [34, 35]) подалгебру с образующими $\{x^i, \partial_j\}$ как центральное расширение $Sp_q(2N)$ -ковариантной квантовой гиперплоскости [2]. Таким образом, данная подалгебра является конечномерной алгеброй Замолотчикова — Фаддеева [7, 36].

Построенное выше дифференциальное исчисление несколько отличается от дифференциального исчисления, предложенного в [26]. Это связано с тем, что в работе [26] рассматривается отличное от (3.13), (3.14) действие $\text{Fun}(GL_q(N))$ на координаты и производные: $x^i \rightarrow S(T_j^i)x^j$, $\partial_i \rightarrow \partial_j S^2(T_i^j)$. Тем не менее алгебра (3.10), (3.19) легко может быть сведена к соответствующей алгебре, полученной в [26].

Последним шагом в построении дифференциального исчисления на $GL_q(N)$ -ковариантной гиперплоскости должно быть определение внутренней производной $\mathbf{i}_j$, которую формально можно интерпретировать как градуированную производную по дифференциалам dx^j . Очевидно, что алгебра $\text{Fun}(GL_q(N))$ действует на $\mathbf{i}_j$ аналогично действию (3.14):

$$\mathbf{i}_k \rightarrow \mathbf{i}_j (T^{-1})_k^j , \quad (3.20)$$

и в силу антикоммутационного поведения производных $\mathbf{i}_j$ естественно положить

$$\mathbf{i}' \mathbf{i} \hat{R} = -c^{-1} \mathbf{i}' \mathbf{i} . \quad (3.21)$$

Рассмотрим теперь следующий очевидный анзац для правил коммутации элементов $\mathbf{i}_j$ с элементами x^i, dx^i :

$$|dx >' < \mathbf{i}|' = I_2 + < \mathbf{i} | \hat{S} | dx > , \quad |x >' < \mathbf{i}|' = < \mathbf{i} | \hat{U} | x > . \quad (3.22)$$

Матрицы $\hat{S}_{12}$ и $\hat{U}_{12}$ находятся из условия совместности дифференциального комплекса $\Omega^\wedge$ и коммутационных соотношений (3.22). Умножая все соотношения (3.10) справа на $< \mathbf{i}|'$ и пронося $\mathbf{i}_j$ справа налево, получаем

$\hat{S} = -c^{-1}\hat{R}$, $\hat{U} = c^{-1}\hat{R}^{-1}$. Остается найти перестановочные соотношения для $\hat{i}_j$ и ∂_k . Положим

$$\langle \partial' | \langle \mathbf{i} | = \langle \mathbf{i}' | \langle \partial | \hat{W}.$$

Умножим это соотношение слева на $|dx \rangle'$ и пронесем координаты dx^i направо, в результате мы получим $\hat{W} = c\hat{R}$. Таким образом, к соотношениям (3.10), (3.19) необходимо добавить

$$\hat{i}' \hat{i} \hat{R} = -c^{-1} \hat{i}' \hat{i}, \quad |dx \rangle' \langle \mathbf{i}' | = I_2 - c^{-1} \langle \mathbf{i}' | \hat{R} | dx \rangle, \quad (3.23)$$

$$|x \rangle' \langle \mathbf{i}' | = c^{-1} \langle \mathbf{i}' | \hat{R}^{-1} | x \rangle, \quad \langle \partial' | \langle \mathbf{i}' | = c \langle \mathbf{i}' | \langle \partial | \hat{R},$$

что завершает построение дифференциального исчисления на $GL_q(N)$ -ковариантной гиперплоскости. Прямыми вычислениями проверяется, что полная алгебра (3.10), (3.19) и (3.23) удовлетворяет свойству ПБВ. Напомним, что заменой $\hat{R} \rightarrow \hat{R}^{-1}$, $c \rightarrow c^{-1}$ из этой алгебры получается другой самосогласованный вариант дифференциального исчисления.

Прежде чем перейти к построению дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$, отметим, что, перемножая фундаментальные $\{x^i\}$ и контргradientные $\{\partial_i\}$ копредставления $GL_q(N)$, можно конструировать тензоры более высокого ранга. Простейший тензор такого рода имеет вид $E_j^i = x^i \partial_j$. Правила преобразования этого тензора даются формулами

$$E_j^i \rightarrow T_k^i (T^{-1})_j^l \odot E_l^k \equiv (TET^{-1})_j^i, \quad (3.24)$$

которые с очевидностью следуют из (3.13), (3.14). Таким образом, тензор E_j^i реализует пространство присоединенного копредставления $GL_q(N)$. Используя соотношения (3.17), легко получить для величин E_j^i замкнутые тождества [37]:

$$(\hat{R} - c1)(c^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} - \mathbf{E}) = 0, \quad (c^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} - \mathbf{E})(\hat{R} - c1) = 0, \quad (3.25)$$

где матрица $\mathbf{E} = E_1 = E \otimes I$ действует в первом матричном пространстве. Вычитая второе тождество (3.25) из первого, мы получаем коммутационные соотношения

$$\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1} - \hat{R}^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} = c(\mathbf{E}\hat{R}^{-1} - \hat{R}^{-1}\mathbf{E}), \quad (3.26)$$

ковариантные относительно присоединенного кодействия группы $GL_q(N)$ (3.24). Соотношения (3.26) при $q \rightarrow 1$ переходят в структурные соотношения для алгебры Ли $gl(N)$. Заметим, что система уравнений (3.25) эквивалентна уравнению (3.26), где на генераторы E_j^i наложены дополнительные связи:

$$(\hat{R} - c1)(c^{-1}\mathbf{E}\hat{R}^{-1}\mathbf{E} - \mathbf{E})(\hat{R} - c1) = 0.$$

Тривиальной заменой $E \rightarrow E - (c/\lambda)I$ (учитывая тождество Гекке (3.7)) равенства (3.26) записываются в виде уравнения отражения

$$E\hat{R}^{-1}E\hat{R}^{-1} - \hat{R}^{-1}E\hat{R}^{-1}E = 0. \quad (3.27)$$

Эти уравнения впервые возникли в контексте факторизованного рассеяния на полупрямой [38] и в последнее время интенсивно изучались многими авторами (см., например, [39—44]). Отметим, что алгебра со структурными соотношениями (3.27) для геккиевской R -матрицы эквивалентна алгебре

$$E\hat{R}E\hat{R} - \hat{R}E\hat{R}E = \lambda(E^2\hat{R} - \hat{R}E^2).$$

Перейдем теперь к построению дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$. В принципе, такое исчисление можно получить непосредственно исходя из дифференциального исчисления на квантовой гиперплоскости (3.12), как это было сделано, например, в [45]. Однако мы предпочтем здесь более прямой способ. Вначале мы построим, следуя работам [46—51], дифференциальный комплекс на группе $GL_q(N)$, т.е. построим алгебру функций $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$, которая генерируется операторами $T_j^i \in \text{Fun}(GL_q(N))$ и соответствующими дифференциалами $dT_j^i \in \Gamma_{GL_q(N)}^{\wedge 1}$ (как мы увидим ниже, дифференциальное отображение d для этой алгебры определяется стандартным образом). Рассмотрим для этого следующее кодействие алгебры $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$ на образующие дифференциального комплекса $\Omega^\wedge$:

$$\begin{aligned} x^i &\rightarrow \tilde{x}^i = T_j^i \otimes x^j, \\ dx^i &\rightarrow d\tilde{x}^i = T_j^i \otimes dx^j + dT_j^i \otimes x^j. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Эти преобразования являются естественными обобщениями преобразований (3.13) и выглядят как калибровочные преобразования. Последнее наблюдение послужило отправной идеей для введения некоммутативных связностей и кривизн в [43, 50, 51]. Требование ковариантности алгебры $\Omega^\wedge$ (3.10) относительно преобразований (3.28) приводит нас к следующим соотношениям на генераторы T_j^i , dT_j^i алгебры $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$:

$$(\hat{R} - c\mathbf{1})TT'(\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1}) = 0, \quad (\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1})(dT)(dT)'(\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1}) = 0, \quad (3.29)$$

$$(\hat{R}(dT)T' - T(dT)'\hat{R}^{-1})(\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1}) = 0, \quad (3.30)$$

$$(\hat{R} + c^{-1}\mathbf{1})((dT)T'\hat{R} - \hat{R}^{-1}T(dT)') = 0,$$

где $T = T_1 = T \otimes I$, $T' = T_2 = I \otimes T$, и мы, как обычно, опустили знак внешнего произведения дифференциальных форм. Равенства (3.29), (3.30)

должны выполняться как для $c = q$, так и для $c = -q^{-1}$, и, следовательно, они эквивалентны полному набору определяющих соотношений для биковариантного дифференциального комплекса $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$ на $GL_q(N)$ (см. [49, 50], [37, 45, 48, 54]):

$$\hat{R}TT' = TT'\hat{R}, \quad (3.31)$$

$$\hat{R}(dT)T' = T(dT)'\hat{R}^{-1}, \quad (3.32)$$

$$\hat{R}(dT)(dT)' = -(dT)(dT)'\hat{R}^{-1}. \quad (3.33)$$

Биковариантность этих соотношений означает их ковариантность относительно двух типов преобразований:

$$L) \quad T_j^i \rightarrow T_k^i \otimes T_j^k, \quad dT_j^i \rightarrow T_k^i \otimes dT_j^k,$$

$$R) \quad T_j^i \rightarrow T_k^i \otimes T_j^k, \quad dT_j^i \rightarrow dT_k^i \otimes T_j^k,$$

которые можно записать единым образом:

$$T \rightarrow T_L T T_R, \quad (3.34)$$

$$dT \rightarrow T_L dT T_R, \quad (3.35)$$

где элементы матриц T_L , T_R являются генераторами двух взаимно коммутирующих алгебр $\text{Fun}(GL_q(N))$, т.е. удовлетворяют соотношениям (3.31) и $[T_L, T'] = [T_R, T'] = [T_L, T'_R] = 0$. Анализ, аналогичный проведенному в работе [37], показывает, что все алгебры "бозонного типа", обладающие ковариантностью относительно преобразований (3.34), определяются соотношениями (3.31), а все алгебры "фермионного типа", обладающие ковариантностью относительно преобразований (3.35), определяются соотношениями (3.33). Это следует из представлений (3.29) и из подсчета рангов проекторов $P^\pm$. Подчеркнем, что (3.33) выводится из (3.32), если дифференциал d нильпотентен $d^2 = 0$ и подчиняется градуированному правилу Лейбница $d(\rho\eta) = d(\rho)\eta + (-1)^{\hat{\rho}}\rho d(\eta)$, где $\hat{\rho}$ – градуировка элемента ρ (степень дифференциальной формы ρ). Пользуясь указанными правилами, мы можем задать действие d на произвольный элемент алгебры $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$.

В работе [50]) было показано, что алгебра $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$ является алгеброй Хопфа. Коумножение Δ , коединица ϵ и антипод S определяются по формулам:

$$\Delta(T_j^i) = T_k^i \otimes T_j^k, \quad \Delta(dT_j^i) = dT_k^i \otimes T_j^k + T_k^i \otimes dT_j^k, \quad (3.36)$$

$$\epsilon(T) = I, \quad S(T) = T^{-1}, \quad \epsilon(dT) = 0, \quad S(dT) = -T^{-1}dT T^{-1} \quad (3.37)$$

(здесь $\otimes$ – градуированное прямое произведение) и удовлетворяют всем аксиомам АХ. Таким образом, алгебра $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$ представляет собой частный

пример внешних дифференциальных АХ, рассмотренных в конце второго раздела (см. теорему 4). Отметим, что алгебра $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$ обладает также аддитивным копроизведением с нетривиальными правилами "брэйдinга" [55]. Из определения коумножения Δ (3.36) следует, что алгебра $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$ ковариантна не только относительно преобразований (3.34), (3.35), но и относительно преобразований

$$T \rightarrow T_L T T_R, \quad dT \rightarrow dT_L T T_R + T_L dT T_R + T_L T dT_R, \quad (3.38)$$

где $\{T_L, dT_L\}$, $\{T_R, dT_R\}$ и $\{T, dT\}$ — идентичные взаимно коммутирующие дифференциальные комплексы $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$. Легко показать, используя равенства (3.28), (3.36), что понятие дифференциала d можно расширить и определить его действие на градуированное прямое произведение алгебр $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$ и $\Omega^\wedge$. Например, действие d на прямое произведение $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge \otimes \Omega^\wedge$ определяется по следующим правилам:

$$d(\rho \otimes \Omega^\wedge) = d(\rho) \otimes \Omega^\wedge + (-1)^k \rho \otimes d(\Omega^\wedge),$$

где $\rho \in \Gamma_{GL_q(N)}^{\wedge k}$ и $d^2 = 0$.

Расширим теперь алгебру (3.31)–(3.33), добавив к ней новые генераторы

$$\frac{\partial}{\partial T_j^i} = \partial_j^i,$$

имеющие смысл некоммутативных производных по координатам T_j^i . Тогда из (3.34) мы получаем преобразования ковариантности для ∂_j^i в виде [37]:

$$\partial \rightarrow T_R^{-1} \partial T_L^{-1}. \quad (3.39)$$

Следовательно, естественными q -коммутиационными соотношениями для ∂_j^i , которые ковариантны относительно преобразований (3.39), должны быть соотношения

$$\hat{R} \partial' \partial = \partial' \partial \hat{R}. \quad (3.40)$$

Здесь мы, как обычно, подразумеваем $\partial \equiv \partial_1$ и $\partial' \equiv \partial_2$, где 1 и 2 – номера матричных пространств. Определим теперь ковариантные кросс-коммутиационные соотношения генераторов $\{\partial_j^i\}$ и генераторов $\{T_j^i, dT_j^i\}$ дифференциального комплекса $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$. Метод, аналогичный тому, который был использован в случае квантовых гиперплоскостей, плюс проверка свойства ПБВ приводят к тому, что в качестве таких кросс-коммутиационных соотношений необходимо выбрать

$$\partial \hat{R}(dT) = (dT)' \hat{R}^{-1} \partial', \quad (3.41)$$

$$\partial \hat{R}^{\pm 1} T = T' \hat{R}^{\mp 1} \partial' + 1. \quad (3.42)$$

Соотношения (3.41), (3.42), очевидно, ковариантны относительно преобразований (3.34), (3.35) и (3.39).

Итак, мы имеем два варианта (в зависимости от выбора знаков в формуле (3.42)) замкнутой алгебры с генераторами $\{T_j^i, dT_j^i, \partial_j^k\}$ и определяющими соотношениями (3.31)—(3.33), (3.40)—(3.42). Оба варианта этой алгебры обладают свойством ПБВ, что можно проверить непосредственно, рассматривая различные способы упорядочения мономов третьей степени, построенных из генераторов T , dT и ∂ . На самом деле, как показано в работе [54], эти два варианта приводят к изоморфным алгебрам. Действительно, выберем алгебру с нижними знаками и переопределим в ней элементы ∂_j^i в виде (аналогичные преобразования для производных на q -евклидовых пространствах рассматривались в [56]):

$$\partial \rightarrow \tilde{\partial} = \frac{1}{I + \lambda \partial T} \partial. \quad (3.43)$$

Тогда алгебра с нижними знаками переходит в алгебру $\{T, dT, \tilde{\partial}\}$ с верхними знаками. Соотношение (3.43) устанавливает искомым изоморфизм, и следовательно, без ограничения общности, мы можем изучать только один из вариантов (3.42). Заметим, что алгебра с верхними знаками приводит к соотношению $\partial d = d\partial$, однако выбор алгебры с нижними знаками более предпочтителен, так как в этом случае явное выражение для дифференциала имеет более простой вид и является прямым обобщением классической формулы

$$d \equiv q^{-N} \text{Tr}_q(dT \partial) = q^N \overline{\text{Tr}}_q(\partial dT). \quad (3.44)$$

Определение q -следов дано в работах [2, 57]:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_q(E) &\equiv \text{Tr}(DE) \equiv \sum_{i=1}^N q^{-N-1+2i} E_i^i, \\ \overline{\text{Tr}}_q(A) &\equiv \text{Tr}(D^{-1}A) \equiv \sum_{i=1}^N q^{N+1-2i} A_i^i, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где E и A , соответственно, левый и правый присоединенные $\text{Fun}(GL_q(N))$ -комодули:

$$E_j^i \rightarrow T_k^i (T^{-1})_j^l \otimes E_l^k, \quad A_j^i \rightarrow A_l^k \otimes (T^{-1})_k^l T_j^i.$$

Введем теперь вместо генераторов $\{dT, \partial\}$ эквивалентный набор левоинвариантных образующих: $V = \partial T$, $\Omega = T^{-1} dT$, где V — левоинвариантные векторные поля, а Ω — левоинвариантные 1-формы. Тогда структурные соотношения (3.32), (3.33), (3.41) и (3.42) в терминах этих образующих переписываются следующим образом:

$$\Omega T' = T' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1}, \quad (3.46)$$

$$\hat{R} \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' + \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} = 0, \quad (3.47)$$

$$\begin{cases} VT' = T' \hat{R}^{\mp 1} V' \hat{R}^{\mp 1} + T' \hat{R}^{\mp 1}, \\ \hat{R}^{\mp 1} V' \hat{R}^{\mp 1} V' = V' \hat{R}^{\mp 1} V' \hat{R}^{\mp 1} + V' \hat{R}^{\mp 1} - \hat{R}^{\mp 1} V', \\ \hat{R}^{\pm 1} \Omega' \hat{R}^{-1} V' = V' \hat{R}^{\mp 1} \Omega' \hat{R}^{-1} + \Omega' \hat{R}^{-1}. \end{cases} \quad (3.48)$$

Для полноты картины приведем более компактную форму записи соотношений (3.48):

$$\begin{aligned} T' \hat{R}^{\mp 1} Y' \hat{R}^{\mp 1} &= Y T', \quad \hat{R}^{\pm 1} \Omega' \hat{R}^{-1} Y' = Y' \hat{R}^{\mp 1} \Omega' \hat{R}^{-1}, \\ \hat{R}^{\mp 1} Y' \hat{R}^{\mp 1} Y' &= Y' \hat{R}^{\mp 1} Y' \hat{R}^{\mp 1}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где $Y = I \mp \lambda V = I \mp \lambda \partial T$. Отметим, что все формулы (3.46)—(3.49) и доказательство изоморфизма алгебр с разным выбором знаков в (3.42) были сформулированы в работе [54] в терминах правоинвариантных векторных полей и 1-форм: $T \partial$, $dT T^{-1}$.

Расширим теперь построенную алгебру с генераторами $\{T_j^i, dT_j^i, \partial_j^i\}$, добавив к ней еще один набор образующих (внутренних производных) $\dot{\mathbf{i}}_j^i$. Эти образующие переводят дифференциальные (n) -формы в $(n-1)$ -формы и имеют смысл градуированных производных по элементам dT_j^i . Следовательно, в соответствии с правилами (3.35), элементы $\dot{\mathbf{i}}_j^i$ должны преобразовываться так же, как и элементы ∂_j^i (3.39):

$$\dot{\mathbf{i}} \rightarrow T_R^{-1} \dot{\mathbf{i}} T_L^{-1}. \quad (3.50)$$

С учетом "фермионного" характера генераторов $\dot{\mathbf{i}}$ единственно возможные ковариантные коммутационные соотношения для них имеют вид

$$\hat{R}(\dot{\mathbf{i}})' \dot{\mathbf{i}} = -(\dot{\mathbf{i}})' \dot{\mathbf{i}} \hat{R}^{-1} \quad (3.51)$$

(ср. с формулой (3.33)). Далее наш метод построения самосогласованных (с точки зрения ковариантности и выполнения свойства ПБВ) коммутационных соотношений генераторов $\dot{\mathbf{i}}$ с другими генераторами аналогичен тому, которым мы пользовались в случае построения дифференциальных алгебр для квантовых гиперплоскостей, а также для получения коммутационных соотношений элементов T_j^i , dT_j^i с ∂_j^i . В результате получаем

$$\dot{\mathbf{i}}' \partial \hat{R} = \hat{R}^{-1} \partial' \dot{\mathbf{i}}, \quad T' \hat{R} \dot{\mathbf{i}}' = \dot{\mathbf{i}} \hat{R}^{-1} T, \quad (3.52)$$

$$\dot{\mathbf{i}} \hat{R}^{\mp 1} (dT) + (dT)' \hat{R}^{\mp 1} \dot{\mathbf{i}}' = 1. \quad (3.53)$$

Опять же, как и в случае формулы (3.42), мы имеем, в зависимости от выбора знаков в (3.53), два варианта самосогласованной (с точки зрения ковариантности и выполнения свойства ПБВ) алгебры. Можно показать, что оба эти

варианта снова приводят к идентичным алгебрам, связанным друг с другом нелинейным преобразованием, аналогичным преобразованию (3.43):

$$\mathbf{i} \rightarrow \tilde{\mathbf{i}} = \frac{1}{I - \lambda i dT} \mathbf{i},$$

т.е. алгебра с нижними знаками в (3.53) переходит в алгебру $\{\dots, \tilde{\mathbf{i}}\}$ с верхними знаками. Поэтому для определенности мы выберем один из вариантов (3.53), а именно вариант с нижними знаками.

Итак, мы продемонстрировали справедливость следующего утверждения:
Предложение 2. Дифференциальное исчисление на группе $GL_q(N)$ задается дифференциальной алгеброй с образующими $\{T_j^i, dT_j^i, \partial_j^i, \mathbf{i}_j^i\}$, дифференциалом (3.44) и определяющими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{R} T T' = T T' \hat{R}, \\ \hat{R} (dT) T' = T (dT)' \hat{R}^{-1}, \quad \hat{R} (dT) (dT)' = -(dT) (dT)' \hat{R}^{-1}, \end{array} \right. \quad (3.54)$$

$$\hat{R} \partial' \partial = \partial' \partial \hat{R}, \quad \mathbf{i}' \partial \hat{R} = \hat{R}^{-1} \partial' \mathbf{i}, \quad \hat{R} (\mathbf{i})' \mathbf{i} = -(\mathbf{i})' \mathbf{i} \hat{R}^{-1}, \quad (3.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \hat{R} (dT) = (dT)' \hat{R}^{-1} \partial', \quad \partial \hat{R}^{-1} T = T' \hat{R} \partial' + 1, \\ T' \hat{R} \mathbf{i}' = \mathbf{i} \hat{R}^{-1} T, \quad \mathbf{i} \hat{R} (dT) + (dT)' \hat{R} \mathbf{i}' = 1 \end{array} \right. \quad (3.56)$$

(вторая и четвертая формулы в (3.56) выписаны с учетом того выбора знаков, который мы сделали выше). Эти соотношения являются ковариантными относительно копребразований (3.34), (3.35), (3.39) и (3.50) и, кроме того, определяют алгебру, обладающую свойством ПБВ.

Отметим, что подалгебра с генераторами $\{\partial, \mathbf{i}\}$ и определяющими соотношениями (3.55) является АХ, которая аналогична дифференциальной АХ $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$. Действительно, коумножение, антипод и коединица для алгебры (3.55) могут быть заданы в виде

$$\Delta(\partial) = \partial \otimes \partial, \quad \epsilon(\partial) = I, \quad S(\partial) = \partial^{-1}, \quad (3.57)$$

$$\Delta(\mathbf{i}) = \mathbf{i} \otimes \partial + \partial \otimes \mathbf{i}, \quad \epsilon(\mathbf{i}) = 0, \quad S(\mathbf{i}) = -\partial^{-1} \mathbf{i} \partial^{-1},$$

где мы предположили возможность расширения алгебры (3.55) за счет включения в нее обратной матрицы ∂^{-1} . Соотношения (3.56) можно теперь рассматривать как правила для специального кросс-умножения двух АХ (3.55), (3.57) и (3.54), (3.36), (3.37).

Замечательным фактом является то, что все определяющие соотношения (3.31)—(3.33), (3.40)—(3.42) и (3.51)—(3.53) для дифференциальной алгебры на $GL_q(N)$ можно записать в компактной форме:

$$\hat{R} T(x) T(x)' = T(x) T(x)' \hat{R}, \quad (3.58)$$

$$\hat{R} dT(y) T(x)' = T(x) dT(y)' \hat{R}^{-1}, \quad (3.59)$$

$$\hat{R} dT(y) dT(y)' = -dT(y) dT(y)' \hat{R}^{-1}, \quad (3.60)$$

где

$$T(x) = \frac{1}{(x + T\partial)} T, \quad dT(y) = \frac{1}{(y + dT\mathbf{i})} dT, \quad (3.61)$$

и $x, y \neq 0$ — произвольные параметры. Заметим, что соотношения (3.58)—(3.60), содержащие в себе все соотношения дифференциальной алгебры на $GL_q(N)$, идентичны структурным соотношениям дифференциального комплекса (3.31)—(3.33). Таким образом, ковариантность и выполнение свойства ПБВ для всей алгебры дифференциального исчисления на $GL_q(N)$ непосредственно следуют из ковариантности и выполнения свойства ПБВ для дифференциального комплекса $\Gamma_{GL_q(N)}^\wedge$.

Докажем теперь следующее утверждение.

Предложение 3. Дифференциальная алгебра на $GL_q(N)$ с определяющими соотношениями (3.54), (3.55) и (3.56) эквивалентна дифференциальной алгебре на $GL_q(N)$ с определяющими соотношениями:

$$\begin{cases} \hat{R} T T' = T T' \hat{R}, \\ \Omega T' = T' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1}, \quad \hat{R} \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' + \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} = 0, \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\begin{cases} \Im T' = T' \hat{R} \Im' \hat{R}, \quad \hat{R} \Im' \hat{R} \Omega' + \Omega' \hat{R} \Im' \hat{R} = \hat{R}, \\ \hat{R} \Im' \hat{R} \Im' + \Im' \hat{R} \Im' \hat{R}^{-1} = 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\begin{cases} \hat{R} \mathcal{L}' \hat{R} \Im' - \Im' \hat{R} \mathcal{L}' \hat{R} = \Im' \hat{R} - \hat{R} \Im', \\ \mathcal{L} T' = T' \hat{R} \mathcal{L}' \hat{R} + T' \hat{R}. \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\begin{cases} \hat{R} \mathcal{L}' \hat{R} \mathcal{L}' - \mathcal{L}' \hat{R} \mathcal{L}' \hat{R} = \mathcal{L}' \hat{R} - \hat{R} \mathcal{L}', \\ \hat{R} \mathcal{L}' \hat{R} \Omega' - \Omega' \hat{R} \mathcal{L}' \hat{R} = \Omega' \hat{R} - \hat{R} \Omega'. \end{cases} \quad (3.65)$$

Новые образующие $\{\Omega_j^i, \mathcal{L}_j^i, \Im_j^i\}$ имеют следующий смысл. Элементы $\Omega = T^{-1} dT$ задают левоинвариантный базис дифференциальных 1-форм на $GL_q(N)$, элементы

$$\Im \equiv \mathbf{i} T \quad (3.66)$$

определяют базис левоинвариантных внутренних производных на $GL_q(N)$, а

$$\mathcal{L} \equiv d\Im + \Im d \quad (3.67)$$

определяют базис левоинвариантных производных Ли на $GL_q(N)$. Алгебра с определяющими соотношениями (3.62)–(3.65) является алгеброй ПБВ-типа.

Доказательство. Прежде всего заметим, что вторая и третья формулы из (3.62) были получены выше (см. (3.46) и (3.47)). Далее, формулы (3.63) для левоинвариантных внутренних производных $\mathfrak{Z}$ (3.66) легко выводятся из коммутационных соотношений (3.31)–(3.33), (3.55) и (3.56). Для левоинвариантной производной Ли $\mathcal{L}_j^i$, заданной классической формулой Картана (3.67), мы, очевидно, имеем $d\mathcal{L} = \mathcal{L}d$ и, кроме того, из определения (3.66) для $\mathfrak{Z}$ следует соотношение $\mathcal{L} = lT - i(dT)$, в котором мы использовали операторы l_j^i (модификация генераторов ∂):

$$l \equiv di + i d = (I - \lambda i(dT))\partial.$$

Явный вид l_j^i вытекает из явного вида дифференциала (3.44). Далее, из коммутационных соотношений (3.31)–(3.33), (3.55) и (3.56) следуют полезные коммутационные соотношения для операторов l :

$$\hat{R}l'i = i'l\hat{R}, \quad l\hat{R}^{-1}T = T'\hat{R}l' + (I - \lambda i(dT)), \quad (3.68)$$

с учетом которых уже довольно легко получаются равенства (3.64). Отметим, что эти равенства можно проверить, дифференцируя соотношения (3.63). Аналогично, действуя на формулы (3.64) внешним дифференциалом d , мы выводим оставшийся набор основных соотношений (3.65). Выполнение ПБВ-свойства для рассматриваемой алгебры следует из ПБВ-свойства для алгебры с определяющими соотношениями (3.54), (3.55) и (3.56). Таким образом, доказательство предложения 3 завершено. •

Формулы (3.62)–(3.65) (с точностью до замены $\mathfrak{Z}, \mathcal{L} \rightarrow -\mathfrak{Z}, -\mathcal{L}$) совпадают с определяющими соотношениями для дифференциальной алгебры на $GL_q(N)$, построенной в работах [45, 52, 53]. Таким образом, предложение 3 демонстрирует эквивалентность дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$, основанного на формулах (3.54)–(3.56) (соответствующих определенному выбору знаков в (3.42), (3.53)), и дифференциального исчисления на $GL_q(N)$, предложенного в [45, 52, 53]. Другой выбор знаков приведет к дифференциальным исчислениям, которые, как мы показали выше, некоторыми нелинейными преобразованиями генераторов сводятся к рассмотренному.

Заметим, что (3.64) и (3.65) можно представить компактно в виде

$$\hat{R}L'\hat{R}\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}'\hat{R}L'\hat{R}, \quad (3.69)$$

$$LT' = T'\hat{R}L'\hat{R}, \quad \hat{R}L'\hat{R}L' = L'\hat{R}L'\hat{R}, \quad \hat{R}L'\hat{R}\Omega' = \Omega'\hat{R}L'\hat{R}, \quad (3.70)$$

где

$$L = I + \lambda \mathcal{L} = (I - \lambda i dT)(I + \lambda \partial T) \equiv (LWL^{-1})Y \Leftrightarrow L = YW; \quad (3.71)$$

и мы ввели в рассмотрение новый объект $\{W_j^i\}$:

$$W = L^{-1} (I - \lambda \Im \Omega) L = Y^{-1} (I - \lambda \Im \Omega) Y = Y^{-1} L ,$$

который понадобится нам в разд. 5 и который удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} W T' &= T' \hat{R}^{-1} W' \hat{R} , \\ \hat{R}^{-1} W' \hat{R} Y' &= Y' \hat{R}^{-1} W' \hat{R} , \quad \hat{R} W' \hat{R} W' = W' \hat{R} W' \hat{R} . \end{aligned} \quad (3.72)$$

Два последних из этих соотношений легко выводятся из правила коммутации для векторных полей Y и производных Ли L :

$$Y' \hat{R} L' \hat{R} = \hat{R} L' \hat{R} Y' ,$$

которое, в свою очередь, получено с учетом второго и третьего соотношений из (3.49) (нижние знаки) и равенства

$$\hat{R}^{-1} Y' \hat{R} \Im' = \Im' \hat{R} Y' \hat{R} .$$

Компактные соотношения (3.58)—(3.60) также можно переписать в терминах левоинвариантных образующих $\{L, \Omega, \Im\}$:

$$\hat{R} \bar{T}(x) \bar{T}(x)' = \bar{T}(x) \bar{T}(x)' \hat{R} , \quad (3.73)$$

$$\bar{\Omega}(y) T' = T' \hat{R}^{-1} \bar{\Omega}(y)' \hat{R}^{-1} , \quad \hat{R} L' \hat{R} \bar{\Omega}(y)' = \bar{\Omega}(y)' \hat{R} L' \hat{R} , \quad (3.74)$$

$$\hat{R} \bar{\Omega}(y)' \hat{R}^{-1} \bar{\Omega}(y)' = \bar{\Omega}(y)' \hat{R}^{-1} \bar{\Omega}(y)' \hat{R}^{-1} , \quad (3.75)$$

где

$$\bar{T}(x) = T(L + x) , \quad \bar{\Omega}(y) = \left(\Omega \frac{1}{y + \Im \Omega} \right) = \left(\frac{1}{y + \Omega \Im} \Omega \right) .$$

Напомним, что параметры $x, y \neq 0$ являются произвольными. Подчеркнем еще раз, что ключевыми формулами, исходя из которых мы построили полное дифференциальное исчисление на группе $GL_q(N)$, являются определяющие соотношения (3.31)—(3.33) для дифференциального комплекса на $GL_q(N)$.

Пользуясь формулой (3.73) и первой формулой из (3.70), можно довольно быстро вывести выражение для характеристического полинома в некоммутативном случае (см. [58, 59]):

$$\text{Det}_q(L; x) \equiv \frac{1}{\det_q(T)} \det_q[T(L + x)] =$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{E}|^2} \mathcal{E}_{i_2 \dots \hat{N}}^q \prod_{i=1}^N [(L_{\hat{N}} + q^{2(N-i)} x) \hat{R}_{N-1} \dots \hat{R}_1] \mathcal{E}_{i_2 \dots \hat{N}}^q = \sum_{i=0}^N x^i C_N^i(q) \sigma_{N-i}(L), \quad (3.76)$$

где

$$\sigma_{N-i}(L) = \frac{1}{|\mathcal{E}|^2} \mathcal{E}_{i_2 \dots \hat{N}}^q (L_{\hat{N}} \hat{R}_{N-1} \dots \hat{R}_{i+1})^{N-i} \mathcal{E}_{i_2 \dots \hat{N}}^q,$$

$$C_N^i(q) = \frac{[N]_q!}{[i]_q! [N-i]_q!} q^{i(i-N)}, \quad [i]_q \equiv \frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}};$$

$\hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{N}$ — номера матричных пространств; $[j]_q = (q^j - q^{-j})/(q - q^{-1})$; $\hat{R}_{\hat{k}} \equiv \hat{R}_{\hat{k}\hat{k}+1}$; $\mathcal{E}_{i_2 \dots \hat{N}}^q \in (\text{Vect}_N)^{\otimes N}$ обозначает q -аналог полностью антисимметричного тензора [61] (см. также [1]);

$$|\mathcal{E}|^2 = \sum_{i_1, \dots, i_N} \mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_N}^q \mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_N}^q = q^{N(N-1)/2} [N]_q!$$

и

$$\det_q(T) \mathcal{E}_{i_2 \dots \hat{N}}^q = \mathcal{E}_{i_2 \dots \hat{N}}^q T_1 T_2 \dots T_{\hat{N}}. \quad (3.77)$$

Если мы подставим в (3.76) $x = -L$, то получим характеристическое тождество [58, 59]:

$$\sum_{i=0}^N (-L)^i C_N^i(q) \sigma_{N-i}(L) = 0.$$

Заметим, что равенство

$$\text{Det}_{q^{-1}}(Y; x) = \det_{q^{-1}}[(Y + x) T^{-1}] \det_q(T), \quad \det_q(T) = \frac{1}{\det_{q^{-1}}(T^{-1})},$$

аналогичное (3.76), но записанное для образующих алгебры (3.49), есть не что иное, как q -аналог тождеств Капелли (см. [60]).

Важной с точки зрения приложений является задача о явных реализациях и представлениях алгебры (3.31) — (3.33). Приведем одну из возможных реализаций [51] (см. также [62]) этой алгебры, связанную с построением нетривиального отображения из двумерного классического пространства в алгебру $\text{Fun}(GL_q(N))$. При этом внешний дифференциал d выступает как обычный дифференциал: $d = dz \partial_z + d\bar{z} \partial_{\bar{z}}$ по классическому двумерному пространству с координатами $\{z, \bar{z}\}$. Действительно, рассмотрим алгебру (ПБВ-типа):

$$\hat{R} T T' = T T' \hat{R}, \quad T Y' = \hat{R} Y \hat{R} T, \quad \hat{R} Y \hat{R} Y = Y \hat{R} Y \hat{R}, \quad (3.78)$$

$$\bar{Y} T' = T' \hat{R}^{-1} \bar{Y}' \hat{R}^{-1}, \quad \hat{R}^{-1} \bar{Y}' \hat{R}^{-1} \bar{Y}' = \bar{Y}' \hat{R}^{-1} \bar{Y}' \hat{R}^{-1}, \quad [\bar{Y}, Y'] = 0, \quad (3.79)$$

где, как обычно, $Y = Y_1$ и $Y' = Y_2$ и т.д. Алгебра (3.78) называется алгеброй функций на кокасательном расслоении над $GL_q(N)$, и генераторы Y интерпретируются как правоинвариантные векторные поля. Отметим, что соотношения (3.79) можно получить из (3.78), если положить $\bar{Y} = T^{-1} Y T$. Однако для наших целей предпочтительнее считать, что Y и $\bar{Y}$ не связаны какими-либо соотношениями. Теперь можно доказать, что операторы

$$T(z, \bar{z}) = \exp(zY) T \exp(\bar{z}\bar{Y}) = U^{-1} T U, \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} dT(z, \bar{z}) &= dz (\partial_z T(z, \bar{z})) + d\bar{z} (\partial_{\bar{z}} T(z, \bar{z})) = \\ &= dz Y T(z, \bar{z}) + d\bar{z} T(z, \bar{z}) \bar{Y}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

где

$$U = U(z, \bar{z}) = \exp\left[\frac{1}{\lambda}(zq^{-N}\text{Tr}_q(Y) + \bar{z}q^N\overline{\text{Tr}_q(\bar{Y})})\right],$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (3.31)—(3.33). Генераторы $\{x^i, (dx^i)\}$ алгебры $\Omega^\wedge$ (3.10) для $c = q$ могут быть реализованы как столбцы квантовых матриц $T(z, \bar{z})$, $dT(z, \bar{z})$. Подчеркнем, что равенства (3.78)—(3.81) напоминают формулы, возникающие в контексте канонического квантования моделей Весса — Зумино — Новикова — Виттена (ВЗНВ) (см., например, [62—64]) и моделей деформированных волчков [8, 14]. Более того, квантовые матрицы $T(z, \bar{z})$, очевидно, удовлетворяют полевым уравнениям модели ВЗНВ:

$$\partial_{\bar{z}}(\partial_z T T^{-1}) = \partial_z(T^{-1} \partial_{\bar{z}} T) = 0.$$

Представление (3.80) для матриц $T(z, \bar{z})$ примечательно еще и тем, что ведет к соотношениям

$$\text{Det}_q(\exp(zY)) \equiv \det_q(T(z, 0)) \frac{1}{\det_q(T)} = \exp(zq^{1-N}\text{Tr}_q(Y)), \quad (3.82)$$

$$\text{Det}_q(\exp(\bar{z}\bar{Y})) \equiv \frac{1}{\det_q(T)} \det_q(T(0, \bar{z})) = \exp(\bar{z}q^{N-1}\overline{\text{Tr}_q(\bar{Y})}), \quad (3.83)$$

которые можно рассматривать как квантовые аналоги известного классического тождества $\det(A) = \exp(\text{Tr}(\ln A))$, где A — невырожденная числовая матрица. При выводе соотношений (3.82) и (3.83) необходимо воспользоваться равенствами

$$\det_q(T) Y = q^2 Y \det_q(T), \quad \det_q(T) \bar{Y} = q^2 \bar{Y} \det_q(T), \quad (3.84)$$

вытекающими из определения q -детерминанта (3.77) и соотношений (3.78), (3.79).

В заключение приведем формулу [66], обобщающую автоморфизм (3.80):

$$T_n(z) = \exp\left\{z[Y^n + \sum_{m=1}^{n-1} (c_m \text{Tr}_q(Y^{n-m}) Y^m)]\right\} T = U_n(z)^{-1} T U_n(z),$$

где

$$c_m = \frac{\lambda q^{-N}}{[n]_{q^2}} [m]_{q^2}, \quad U_n(z) = \exp \left[z \frac{q^{-N}}{\lambda [n]_{q^2}} \text{Tr}_q(Y^n) \right],$$

а T и Y образуют алгебру (3.78). Соответствующая формула для $\bar{Y}$ легко получается заменой $Y \rightarrow T\bar{Y}T^{-1}$.

4. СВОЙСТВА ВНЕШНЕЙ АЛГЕБРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ НА ГРУППЕ $GL_q(N)$

Укажем ряд важных фактов, касающихся алгебры 1-форм на $GL_q(N)$ (3.47). Эту алгебру, кстати, можно интерпретировать как алгебру некоммутативных БРСТ-полей [67]. Прежде всего перепишем структурные соотношения (3.47) в более удобном виде в терминах правоинвариантных 1-форм $\Omega = dT T^{-1}$:

$$\hat{R} \Omega \hat{R} \Omega + \Omega \hat{R} \Omega \hat{R}^{-1} = 0 \quad (4.1)$$

(мы избавляемся при этом от штрихов и части обратных степеней у R -матриц). Коумножение Δ (3.36) в терминах генераторов Ω представляется следующим образом [37]:

$$\Omega_j^i \rightarrow \Delta(\Omega_j^i) = T_l^i (T^{-1})_j^k \odot \Omega_k^l + \Omega_j^i \odot I \equiv (T \Omega T^{-1} + dT T^{-1})_j^i, \quad (4.2)$$

где в последней части этого соотношения мы использовали краткий способ записи, который демонстрирует, что Ω_j^i преобразуются как 1-формы связности. Таким образом, соотношения (4.1) являются ковариантными относительно преобразований (4.2). В работах [43, 50, 51] алгебра (4.1) интерпретировалась как алгебра 1-форм калибровочных полей. В дальнейшем такая интерпретация была использована в [68] для построения квантовых деформаций инстантонных решений. Вычислим теперь квантовый след от (4.1) по второму пространству. В результате получаем

$$[\Omega^{(1)}, \Omega]_+ = -\lambda q^N \Omega^2, \quad (4.3)$$

где $\Omega^{(1)} = \text{Tr}_q(\Omega)$, и мы воспользовались формулами

$$\text{Tr}_{q^2}(\hat{R}^{\pm 1} E \hat{R}^{\mp 1}) = \text{Tr}_q(E), \quad \text{Tr}_{q^2}(\hat{R}^{\pm 1}) = q^{\pm N}, \quad \text{Tr}_q(I) = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}} \equiv [N]_q. \quad (4.4)$$

Здесь $\text{Tr}_{q^2}(\cdot)$ обозначает квантовый след (3.45) по второму матричному пространству. Умножим (4.1) на $\hat{R}$ справа и снова вычислим q -след по второму пространству

$$\text{Tr}_{q^2}(\hat{R} \Omega \hat{R} \Omega \hat{R}) + q^N \Omega^2 = 0, \quad (4.5)$$

а затем усредним это соотношение и по первому пространству:

$$\lambda(\Omega^{(1)})^2 + q^N(2 + \lambda^2)\text{Tr}_q(\Omega^2) = 0. \quad (4.6)$$

Ключевым моментом при получении (4.6) является циклическое свойство квантовых следов:

$$\text{Tr}_{q1} \text{Tr}_{q2}(\hat{R} E_{12}) = \text{Tr}_{q1} \text{Tr}_{q2}(E_{12} \hat{R}), \quad (4.7)$$

справедливое для любой квантовой матрицы $E_{12} \in \text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$. Это свойство является следствием тождества $[\hat{R}, D_1 D_2] = 0$, которое выполняется не только для линейных квантовых групп, но и для $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ (на самом деле, это тождество выполняется для всех обратимых R -матриц, для которых обратимы еще и матрицы $(R_{12})^{t_1}$, при этом $D \sim \text{Tr}_2(P_{12}((R_{12}^{t_1})^{-1})^{t_1})$, см. [57]).

Усредняя (4.3) еще раз, получаем

$$[\Omega^{(1)}, \Omega^{(1)}]_+ = -\lambda q^N \text{Tr}_q(\Omega^2). \quad (4.8)$$

Однородная система уравнений (4.6) и (4.8) при $q + q^{-1} \neq 0$ дает решение:

$$(\Omega^{(1)})^2 = 0, \quad \text{Tr}_q(\Omega^2) = 0. \quad (4.9)$$

Заметим, что алгебра (4.1) является комодульной алгеброй относительно присоединенного кодействия $\text{Fun}(GL_q(N))$:

$$\Omega_j^i \rightarrow T_l^i(T^{-1})_j^k \otimes \Omega_k^l, \quad (4.10)$$

что, в частности, следует из (4.2). Ясно, что (4.1) можно переписать в виде

$$X^{\pm\pm} \equiv \mathbf{P}^{\pm} \hat{R} \Omega \hat{R} \mathbf{P}^{\pm} = 0. \quad (4.11)$$

Итак, если рассматривать объект $\Omega \hat{R} \Omega \hat{R}$ как прямое произведение двух N^2 -мерных присоединенных $\text{Fun}(GL_q(N)$ -комодулей $\Omega_j^i \in \mathcal{A}$ (в классическом пределе мы имеем $\Omega \hat{R} \Omega \hat{R} \rightarrow \Omega_1 \Omega_2$), то ковариантные соотношения (4.1) и (4.11) можно понимать как зануление некоторых из неприводимых копредставлений, имеющихсся в разложении Клебша — Гордана:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} &= [(N^2 - 1) + 1]^2 = 2[1] \oplus (3 + \theta_{N,2})[N^2 - 1] \oplus \\ &\oplus 2\theta_{N,2} \left[\frac{(N^2 - 1)(N^2 - 4)}{4} \right] \oplus \left[\frac{N^2(N + 3)(N - 1)}{4} \right] \oplus \\ &\oplus \theta_{N,3} \left[\frac{N^2(N + 1)(N - 3)}{4} \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $\theta_{N,M} = \{1 \text{ для } N > M; 0 \text{ для } N \leq M\}$. То есть, $A \otimes A$ расщепляется на 2 коинварианта (явный вид этих коинвариантов совпадает с левыми частями равенств (4.9)), 4 (3 для $N = 2$) присоединенных (бесшпуровых) копредставлений (два из них могут быть извлечены из соотношений (4.3), (4.5)) и 4 (1 для $N = 2$ и 3 для $N = 3$) копредставления более высоких размерностей. Как видно из (4.12), квантовое разложение $A \otimes A$ на неприводимые копредставления по размерностям совпадает с классическим (исключением является случай, когда q равно корню из единицы), что следует из результатов работ [69]. Зная ранги проекторов (см. [1, 2]) $\text{rang}(P^+) = N(N+1)/2$ и $\text{rang}(P^-) = N(N-1)/2$, легко понять, какие из неприводимых копредставлений, входящих в разложение (4.12), зануляются соотношениями (4.11). Имеем

$$X^{++} = \left[\frac{N^2(N+1)^2}{4} \right] = \left[\frac{1}{4} N^2(N+3)(N-1) \right] \oplus [N^2 - 1] \oplus [1],$$

$$X^{--} = \left[\frac{N^2(N-1)^2}{4} \right] = \theta_{N,3} \left[\frac{1}{4} N^2(N-3)(N+1) \right] \oplus \theta_{N,2} [N^2 - 1] \oplus [1]. \quad (4.13)$$

Сравнивая (4.12) и (4.13), заключаем, что

$$A \otimes A / \{X^{\pm\pm} = 0\} = X^{+-} \oplus X^{-+} = \frac{1}{2} N^2 (N^2 - 1) =$$

$$= 2 [N^2 - 1] \oplus 2\theta_{N,2} \left[\frac{(N^2-1)(N^2-4)}{4} \right]. \quad (4.14)$$

Изложенная только что (в случае группы $GL_q(N)$) методика рассмотрения биковариантных соотношений для дифференциальных исчислений была впервые сформулирована в работе [37] (см. также [54]). В конце этого раздела мы приведем аналогичные рассуждения при построении биковариантных соотношений для присоединенных $\text{Fun}(SL_q(N))$ -комодулей.

Формула (4.3), с учетом соотношения $d\Omega = \Omega^2$, показывает, что оператор $(-\lambda q^N)^{-1} \Omega^{(1)} \equiv d'$ можно интерпретировать как X -оператор Вороновича (см. разд. 2), который генерирует действие внешнего дифференциала. Отметим, что d' и $d = q^{-N} \text{Tr}_q(dT \partial)$ (3.44) определяют бидифференциальную структуру на алгебре (3.54) и являются частными случаями ($x = 0$ и $z = 0$) более общей формулы для дифференциала

$$d'' = \frac{q^{-N}}{z - \lambda x} \text{Tr}_q((dT)(xT^{-1} + z\partial)) = \frac{q^N}{z - \lambda x} \overline{\text{Tr}}_q((xT^{-1} + z\partial)(dT)), \quad (4.15)$$

$$d'' \cdot T = (dT) + T \cdot d'', \quad (d'')^2 = 0. \quad (4.16)$$

Оператор d'' является линейной комбинацией d и d' . Подчеркнем, что классический предел предполагает наличие условия $z \neq 0$ при $q = 1$. Тожество

$(d'')^2 = 0$ из (4.16) является следствием первого соотношения из (4.9) и соотношений (3.58)—(3.61), которые показывают, что операторы

$$\Omega_{xyz} = z \frac{1}{(1 + y^{-1} dT\mathbf{i})} dT \left(\frac{x}{z} T^{-1} + \partial \right)$$

являются генераторами алгебры (4.1), и, соответственно, $(\text{Tr}_q \Omega_{xyz})^2 = 0$ для всех значений параметров x, y, z и, в частности, для $y \rightarrow \infty$.

Второе соотношение из (4.9) может быть обобщено, а именно справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. Для дифференциальных 1-форм Ω_j^i на группе $GL_q(N)$, которые образуют алгебру (4.1), имеют место тождества:

$$\Omega^{(2r)} \equiv \text{Tr}_q(\Omega^{2r}) = 0, \quad \forall r = 1, 2, 3, \dots \quad (4.17)$$

Прежде чем перейти к доказательству этого предложения, отметим, что, вообще говоря, мы имеем $\Omega^{(2r+1)} = \text{Tr}_q(\Omega^{2r+1}) \neq 0$ для достаточно малых показателей $(2r + 1)$, и, соответственно, выполняется нетривиальное коциклическое равенство

$$d\Omega^{(2r-1)} = \Omega^{(2r)} = 0,$$

при получении которого мы снова воспользовались связью $d\Omega = \Omega^2$. Доказательство предложения 4 очевидно в классическом пределе $q = 1$. Однако в некоммутативном случае $q \neq 1$ это доказательство требует определенных усилий.

Доказательство. Необходимо вычислить двумя способами антикоммутаторы

$$[\Omega^{(2l+1)}, \Omega^{(2k-1)}]_+ \equiv [\text{Tr}_q(\Omega^{2l+1}), \text{Tr}_q(\Omega^{2k-1})]_+, \quad (4.18)$$

$$\forall l = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Сначала попытаемся пронести оператор $\Omega^{(2l+1)}$ через $\Omega^{(2k-1)}$ с помощью соотношений (4.1) и с учетом тождества Гекке (3.7). При этом необходимо пользоваться равенствами

$$\Omega \hat{R} \Omega^k \hat{R}^{-1} = (-1)^k (\hat{R} \Omega \hat{R})^k \Omega, \quad \hat{R} \Omega^2 \hat{R} \Omega^k = \Omega^k \hat{R} \Omega^2 \hat{R},$$

$$\Omega \text{Tr}_q(\Omega^k) = (-1)^k \text{Tr}_{q^2}((\hat{R} \Omega \hat{R})^k) \Omega, \quad [\Omega^2, \text{Tr}_q(\Omega^k)] = 0,$$

$$(\hat{R} \Omega \hat{R})^{2k} = \hat{R} \Omega^{2k} \hat{R} + \lambda \sum_{n=1}^{2k-1} (-1)^n \Omega^{2k-n} \hat{R} \Omega^n,$$

$$\Omega^k \hat{R} \Omega \hat{R} - \lambda \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \Omega^{k-n} \hat{R} \Omega^{n+1} + (-1)^{k-1} \hat{R}^{-1} \Omega \hat{R} \Omega^k = 0, \quad (4.19)$$

$$\mathrm{Tr}_{q^2} \left((\hat{R} \Omega \hat{R})^{2k-1} \right) = \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2k-1}) + \lambda q^N [2k-1]_q \Omega^{2k-1} + \dots, \quad (4.20)$$

которые непосредственно следуют из (4.1). Точками в (4.20) обозначены члены, которые исчезают при условии выполнения (4.17) для $r < k$. Учитывая эти равенства, антикоммутатор (4.18) сводится к выражению (ср. с (4.8)):

$$\begin{aligned} \Omega^{(2k-1)} \Omega^{(2l+1)} - \mathrm{Tr}_{q^1} \left(\mathrm{Tr}_{q^2} \left((\hat{R} \Omega \hat{R})^{2k-1} \right) \Omega^{2l+1} \right) = \\ = -\lambda q^N [2k-1]_q \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+2k}) + \dots, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где члены, обозначенные точками, снова зануляются, если мы предположим, что условия (4.17) выполняются при $r < l+k$ (см., например, второе тождество из (4.9)).

С другой стороны, протаскивая оператор $\Omega^{(2k-1)}$ через $\Omega^{(2l+1)}$, мы, очевидно, получим вместо (4.21) равенство

$$[\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+1}), \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2k-1})]_+ = -\lambda q^N [2l+1]_q \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+2k}) + \dots, \quad (4.22)$$

которое вместе с (4.21) дает искомое утверждение

$$\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+2k}) = 0 = [\mathrm{Tr}_q(\Omega^{2l+1}), \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2k-1})]_+. \quad (4.23)$$

Предложение 4 доказано. •

Интересно отметить, что из равенств (4.19) можно получить рекуррентные соотношения ($r > 1$):

$$q^N (2 + \lambda^2) \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2r}) = \lambda \sum_{n=1}^{2r-3} (-1)^n \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2r-1-n}) \mathrm{Tr}_q(\Omega^{n+1}),$$

которые в случае выполнения условий $\Omega^{(2n)} = 0$ для $n < r$ сводят выражение $\Omega^{(2r)} = \mathrm{Tr}_q(\Omega^{2r})$ к сумме антикоммутаторов (4.18).

Другим важным наблюдением (см. [54]) относительно алгебры (4.1) является следующий факт.

Предложение 5. Алгебра (4.1) дифференциальных 1-форм на группе $GL_q(N)$ является полупрямым произведением двух подалгебр: одномерной алгебры с генератором $\Omega^{(1)} = \mathrm{Tr}_q(\Omega)$ и определяющим соотношением

$$(\Omega^{(1)})^2 = 0, \quad (4.24)$$

а также $(N^2 - 1)$ -мерной алгебры с бесипуровыми генераторами

$$\tilde{\Omega}_j^i = \Omega_j^i - \frac{1}{[N]_q} \Omega^{(1)} \delta_j^i, \quad (\mathrm{Tr}_q(\tilde{\Omega}) = 0) \quad (4.25)$$

и определяющими соотношениями

$$\hat{R} \tilde{\Omega} \hat{R} \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega} \hat{R} \tilde{\Omega} \hat{R}^{-1} = \kappa (\hat{R} \tilde{\Omega}^2 \hat{R} + \tilde{\Omega}^2) \quad (4.26)$$

с фиксированным параметром

$$\kappa = \kappa_q = \frac{\lambda q^N}{[N]_q + \lambda q^N}. \quad (4.27)$$

Доказательство. Для того чтобы доказать это предложение, введем новые генераторы:

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \alpha \Omega^{(1)} I. \quad (4.28)$$

Здесь α — произвольный параметр. В терминах этих генераторов структурные соотношения (4.1) записываются в виде (4.26), где константа $\kappa = \frac{\alpha \lambda q^N}{1 + \alpha \lambda q^N}$, и мы учли равенство, вытекающее из (4.3):

$$[\tilde{\Omega}, \Omega^{(1)}]_+ = -\frac{\lambda q^N}{1 + \alpha \lambda q^N} \tilde{\Omega}^2. \quad (4.29)$$

Мы можем рассматривать (4.26) как структурные соотношения для однопараметрического семейства алгебр 1-форм на $GL_q(N)$ [54]. Образующие этих алгебр получены некоторым линейным преобразованием генераторов алгебры (4.1), являющейся алгеброй ПБВ-типа. Естественно ожидать, что алгебра с определяющими соотношениями (4.26) также является алгеброй ПБВ-типа для любого значения параметра $\kappa \neq 1$ (прямое доказательство этого утверждения содержится в [54]).

Если мы выберем в определении (4.28) параметр α в виде $\alpha = 1/[N]_q$, то соответствующие генераторы $\tilde{\Omega}$ (4.25) будут бесшпуровыми. В этом случае соотношения (4.26), с фиксированным параметром (4.27), интерпретируются как определяющие соотношения для $(N^2 - 1)$ -мерных подалгебр, которые вкладываются в алгебры дифференциальных 1-форм на группе $GL_q(N)$ (4.1). Тем самым мы показали, что алгебра (4.1) содержит две подалгебры: одна является одномерной и генерируется нильпотентным элементом $\Omega^{(1)}$, а другая имеет $N^2 - 1$ генератор (в силу условия $\text{Tr}_q \tilde{\Omega} = 0$) со структурными соотношениями (4.26), где параметр κ определяется в (4.27). Кросскоммутиационные соотношения этих двух подалгебр приведены в (4.29), где $\alpha = 1/[N]_q$. Утверждения предложения 5 доказаны. •

Данное предложение дает возможность определить набор неприводимых $\text{Fun}(SL_q(N))$ -комодулей, которые зануляются соотношениями (4.26), имеющими эквивалентное представление в виде

$$\tilde{X}^{\pm\pm} \equiv \mathbf{P}^{\pm} \left(\tilde{\Omega} \hat{R} \tilde{\Omega} \hat{R} - \kappa q^{\pm 2} \tilde{\Omega}^2 \right) \mathbf{P}^{\pm} = 0.$$

Пусть $\tilde{\mathcal{A}}$ есть присоединенный $\text{Fun}(SL_q(N))$ -комодуль. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} \otimes \tilde{\mathcal{A}} &= [(N^2 - 1)]^2 = [1] \oplus (1 + \theta_{N,2}) \cdot [N^2 - 1] \oplus \\ &\oplus 2\theta_{N,2} \cdot \left[\frac{(N^2 - 1)(N^2 - 4)}{4} \right] \oplus \left[\frac{N^2(N + 3)(N - 1)}{4} \right] \oplus \\ &\oplus \theta_{N,3} \cdot \left[\frac{N^2(N + 1)(N - 3)}{4} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Предложение 5 утверждает, что (4.1) содержит в себе соотношения (4.26) плюс одно соотношение (4.24) (коинвариант) и плюс $N^2 - 1$ соотношение (4.29) (присоединенный комодуль). Учитывая (4.13), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{++} \oplus \tilde{X}^{--} &= \left[\frac{1}{4} N^2(N + 3)(N - 1) \right] \oplus \\ &\oplus \theta_{N,3} \left[\frac{1}{4} N^2(N - 3)(N + 1) \right] \oplus \theta_{N,2} [N^2 - 1] \oplus [1], \end{aligned} \quad (4.31)$$

и из разложения (4.30) следует, что

$$[\tilde{\mathcal{A}} \otimes \tilde{\mathcal{A}}] / \{ \tilde{X}^{\pm\pm} = 0 \} = [N^2 - 1] \oplus 2\theta_{N,2} \left[\frac{(N^2 - 1)(N^2 - 4)}{4} \right]. \quad (4.32)$$

Подалгебра (4.26) с $(N^2 - 1)$ генератором и параметром κ (4.27) (вместе с нетривиальной идеей Л.Д.Фаддеева [14] о деформации правила Лейбница для внешнего дифференциала) послужила основой для построения "деформированного" дифференциального исчисления на группе $SL_q(N)$ [18], которое выходит за рамки аксиоматики Кона для некоммутативной дифференциальной геометрии.

Квазиклассический предел ($q \equiv \exp(h) \rightarrow 1$) соотношений (4.26) дает нам нечетную скобку Пуассона [70, 71]:

$$\{ \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2 \} = \left[\tilde{r}_{21}, \tilde{\Omega}_2 \right]_+ \tilde{\Omega}_1 + \left(-\kappa^{(1)} + P_{12} \right) (\tilde{\Omega}_1^2 + \tilde{\Omega}_2^2), \quad (4.33)$$

где матрица $\tilde{r}_{21} = \frac{1}{2}(r_{21} - r_{12})$ является решением модифицированного классического уравнения Янга — Бакстера, $\kappa = h\kappa^{(1)} + h^2 \dots$ и $\tilde{\Omega}_j^i$ — классические антикоммутирующие объекты. Скобка Пуассона (4.33) автоматически (в силу ПБВ-свойства алгебры (4.26)) удовлетворяет градуированному тождеству Якоби.

В заключение отметим, что утверждение (4.17) для квантового случая в завуалированном виде содержится в [50]. Очевидно, что это утверждение справедливо и для всех 1-форм, полученных сдвигом (4.28).

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА НА ГРУППЕ $SL_q(N)$

Известна (см. [18, 53, 54]) следующая проблема редукции $GL_q(N)$ -дифференциальной алгебры к дифференциальной алгебре на $SL_q(N)$, а именно: из коммутационных соотношений для образующих T и Ω (3.62) вытекают равенства (ср. с (3.84))

$$\det_q(T) \Omega = q^2 \Omega \det_q(T),$$

которые запрещают одновременно полагать $\det_q(T) = 1$ и $\overline{\text{Tr}}_q(\Omega) = 0$. В данном разделе мы опишем правильную редукцию к дифференциальной алгебре на $SL_q(N)$.

Перейдем в определяющих соотношениях (3.62), (3.63), (3.69) и (3.70) к новому базису дифференциальных форм, внутренних производных и новым генераторам квантовой группы $\text{Fun}(GL_q(N))$:

$$\Omega \rightarrow \Omega_L = \Omega L, \quad \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}_L = L^{-1} \mathfrak{S}, \quad T \rightarrow \frac{1}{(\det_q(T))^\beta} T. \quad (5.1)$$

Тогда указанные соотношения в терминах новых генераторов принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_L T' = T' \hat{R}^{-1} \Omega'_L \hat{R}, \quad \hat{R} \Omega'_L \hat{R} \Omega'_L + \Omega'_L \hat{R} \Omega'_L \hat{R}^{-1} = 0, \\ \hat{R} L' \hat{R} L' = L' \hat{R} L' \hat{R}, \quad \hat{R} L' \hat{R} \Omega'_L = \Omega'_L \hat{R} L' \hat{R}, \\ q^{2\beta} L T' = T' \hat{R} L' \hat{R}, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_L T' = T' \hat{R}^{-1} \mathfrak{S}'_L \hat{R}, \quad \hat{R} \mathfrak{S}'_L \hat{R}^{-1} \mathfrak{S}'_L + \mathfrak{S}'_L \hat{R}^{-1} \mathfrak{S}'_L \hat{R}^{-1} = 0, \\ \hat{R} L' \hat{R} \mathfrak{S}'_L = \mathfrak{S}'_L \hat{R} L' \hat{R}, \quad \mathfrak{S}'_L \hat{R} \Omega'_L \hat{R} + \hat{R} \Omega'_L \hat{R} \mathfrak{S}'_L = \hat{R}. \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Оператор дифференциала (4.15) в терминах переменных (5.1) с учетом (3.71) представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} d &= \frac{q^N}{(z - \lambda x)} \overline{\text{Tr}}_q \left(x \Omega + z \left[\frac{1}{\lambda} (L - I) + L (W^{-1} \mathfrak{S}_L \Omega_L) \right] \Omega \right) = \\ &= \frac{q^N}{u} \overline{\text{Tr}}_q \left(\mathcal{L}_u \Omega_L + \frac{1}{W} \mathfrak{S}_L \Omega_L^2 \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$W = 1 - \lambda \mathfrak{S}_L \Omega_L, \quad u = 1 - \lambda \frac{x}{z}, \quad \mathcal{L}_u = \frac{1}{\lambda} (I - u L^{-1}),$$

и образующие W были введены в (3.71). При $q \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow 0$ выражение (5.4) сводится к известному выражению для БРСТ-заряда. Таким образом, формулу (5.4) можно рассматривать как определение q -деформации БРСТ-заряда (напомним, что $d^2 = 0$).

Алгебра (5.2), (5.3) по построению является алгеброй ПБВ-типа. В действительности имеется большое число вариантов этой алгебры, все они обладают свойством ПБВ и отличаются друг от друга только расстановкой знаков степеней у R -матриц. Например, если вместо (5.1) мы выберем несколько иной базис дифференциальных форм и внутренних производных: $\Omega \rightarrow L\Omega$, $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Z}L^{-1}$, то в первом соотношении из (5.2) и первом соотношении из (5.3) произойдет замена $\hat{R} \rightarrow \hat{R}^{-1}$, а остальные соотношения останутся без изменения. Другой вариант алгебры (5.2), (5.3) можно получить, меняя местами генераторы $\Omega_L \leftrightarrow \mathfrak{Z}_L$, что также сводится к определенной замене степеней у R -матриц в соотношениях (5.2), (5.3). Замечательно, что полученная таким образом новая алгебра будет связана с алгеброй (5.2), (5.3) преобразованием генераторов

$$\Omega_H = \frac{1}{(\overline{W}W)}\Omega_L, \quad \mathfrak{Z}_H = \mathfrak{Z}_L(\overline{W}W), \quad (5.5)$$

где $\overline{W} = (I - \lambda\Omega_L\mathfrak{Z}_L)$, а образующие W уже использовались в (3.71) и (5.4). Для операторов W и $\overline{W}$, кроме (3.72), получаем следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{R}\overline{W}'\hat{R}^{-1}W' &= W'\hat{R}\overline{W}'\hat{R}^{-1}, \quad \hat{R}\overline{W}'\hat{R}\overline{W}' = \overline{W}'\hat{R}\overline{W}'\hat{R}, \\ \hat{R}Y'\hat{R}\overline{W}' &= \overline{W}'\hat{R}Y'\hat{R}, \quad \overline{W}'T' = T'\hat{R}^{-1}\overline{W}'\hat{R}, \\ W'\hat{R}L'\hat{R} &= \hat{R}L'\hat{R}W', \quad \overline{W}'\hat{R}L'\hat{R} = \hat{R}L'\hat{R}\overline{W}', \\ W'\hat{R}\Omega'_L\hat{R}^{-1} &= \hat{R}\Omega'_L\hat{R}W', \quad \overline{W}'\hat{R}\Omega'_L\hat{R} = \hat{R}^{-1}\Omega'_L\hat{R}\overline{W}', \\ \hat{R}W'\hat{R}\mathfrak{Z}'_L &= \mathfrak{Z}'_L\hat{R}^{-1}W'\hat{R}, \quad \hat{R}\overline{W}'\hat{R}^{-1}\mathfrak{Z}'_L = \mathfrak{Z}'_L\hat{R}\overline{W}'\hat{R}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Два соотношения (5.6) и третье равенство из (3.72) автоматически (см., например, [41, 44]) дают уравнение отражения для произведения $(\overline{W}W)$:

$$\hat{R}(\overline{W}W)'\hat{R}(\overline{W}W)' = (\overline{W}W)'\hat{R}(\overline{W}W)'\hat{R}. \quad (5.7)$$

Наконец, коммутационные соотношения $(\overline{W}W)$ с генераторами алгебры (5.2), (5.3) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{R}(\overline{W}W)'\hat{R}\mathfrak{Z}'_L &= \mathfrak{Z}'_L\hat{R}(\overline{W}W)'\hat{R}, \quad \hat{R}(\overline{W}W)'\hat{R}\Omega'_L = \Omega'_L\hat{R}(\overline{W}W)'\hat{R}, \\ (\overline{W}W)T &= T'\hat{R}^{-1}(\overline{W}W)'\hat{R}, \quad (\overline{W}W)'\hat{R}L'\hat{R} = \hat{R}L'\hat{R}(\overline{W}W)'. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Теперь можно заметить, осуществляя сдвиг левоинвариантных 1-форм Ω_H (ср. с формулой (4.25) из разд. 4 для правоинвариантных 1-форм):

$$\Omega_H \rightarrow \tilde{\Omega}_H = \Omega_H - \frac{1}{[N]_q} \overline{\text{Tr}}_q(\Omega_H) I, \quad (5.9)$$

что при $\beta = -1/N$ алгебра (5.2), (5.3) переходит в алгебру с определяющими соотношениями:

$$\tilde{\Omega}_H T' = T' \hat{R}^{-1} \tilde{\Omega}'_H \hat{R}, \quad (5.10)$$

$$\hat{R} \tilde{\Omega}'_H \hat{R}^{-1} \tilde{\Omega}'_H + \tilde{\Omega}'_H \hat{R}^{-1} \tilde{\Omega}'_H \hat{R}^{-1} = \kappa_{1/q} \left(\hat{R}^{-1} (\tilde{\Omega}'_H)^2 \hat{R}^{-1} + (\tilde{\Omega}'_H)^2 \right), \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \hat{R} L' \hat{R} L' = L' \hat{R} L' \hat{R}, & \hat{R} L' \hat{R} \tilde{\Omega}'_H = \tilde{\Omega}'_H \hat{R} L' \hat{R}, \\ q^{2/N} L T' = T' \hat{R} L' \hat{R}, \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} \Im_H T' = T' \hat{R}^{-1} \Im_H' \hat{R}, & \hat{R} \Im_H' \hat{R} \Im_H' + \Im_H' \hat{R} \Im_H' \hat{R}^{-1} = 0, \\ \hat{R} L' \hat{R} \Im_H' = \Im_H' \hat{R} L' \hat{R}, & \hat{R} \Im_H' \hat{R} \tilde{\Omega}'_H + \tilde{\Omega}'_H \hat{R} \Im_H' \hat{R} = \frac{(\kappa_{1/q})/\lambda + \hat{R}}{1 - \kappa_{1/q}}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Здесь

$$\kappa_{1/q} = \frac{-\lambda q^{-N}}{[N]_q - \lambda q^{-N}},$$

и мы воспользовались формулами, аналогичными (4.4):

$$\overline{\text{Tr}}_{q1}(\hat{R}^{\pm 1} E' \hat{R}^{\mp 1}) = \text{Tr}_q(E), \quad \overline{\text{Tr}}_{q1}(\hat{R}^{\pm 1}) = q^{\pm N}. \quad (5.14)$$

Вместе с RTT -соотношениями алгебра (5.10)–(5.13) допускает частичную редукцию к случаю $SL_q(N)$ [18]:

$$\det_q(T) = 1, \quad \overline{\text{Tr}}_q(\tilde{\Omega}_H) = 0, \quad \text{Det}_q(L) = 1,$$

где (см. [72])

$$\text{Det}_q(L) = \frac{1}{\det_q(T)} \det_q(T L), \quad \text{Det}_q(L) = \text{Det}_q(Y) \cdot \text{Det}_q(W).$$

Факт такой редукции не является удивительным, т.к. подалгебра (5.10), (5.11) и (5.12), переписанная в терминах правоинвариантных генераторов, совпадает с дифференциальной алгеброй, предложенной в [18]. Для того чтобы осуществить полную редукцию к случаю $SL_q(N)$, необходимо наложить самосогласованным образом еще одно дополнительное условие на генераторы

$\mathfrak{Z}_H$. Из соотношений (5.8) следует, что для алгебры (5.2), (5.3) можно построить дополнительный центральный элемент:

$$Z = \text{Det}_q((\overline{W}W)) \equiv \frac{1}{\det_q(T)} \det_q(T(\overline{W}W)) \text{ , } Z = \text{Det}_q(\overline{W}) \cdot \text{Det}_q(W) \text{ ,} \quad (5.15)$$

который, в силу выполнения тождества

$$\begin{aligned} \overline{W}W &= W_H \overline{W}_H = (1 - \lambda \mathfrak{Z}_H \Omega_H)(1 - \lambda \Omega_H \mathfrak{Z}_H) = \\ &= \frac{1}{1 - \kappa_{1/q}} - \lambda[\tilde{\Omega}_H, \mathfrak{Z}_H]_+ + \lambda^2(1 - \kappa_{1/q}) \mathfrak{Z}_H \tilde{\Omega}_H^2 \mathfrak{Z}_H = \\ &= (1 - \kappa_{1/q}) \left(\frac{1}{1 - \kappa_{1/q}} - \lambda \mathfrak{Z}_H \tilde{\Omega}_H \right) \left(\frac{1}{1 - \kappa_{1/q}} - \lambda \tilde{\Omega}_H \mathfrak{Z}_H \right) \text{ ,} \end{aligned} \quad (5.16)$$

не зависит от генератора $\overline{\text{Tr}}_q(\Omega_H)$ и, соответственно, является центральным и для алгебры с определяющими соотношениями (5.10)–(5.13). Можно попытаться выбрать дополнительное условие на генераторы $\mathfrak{Z}_H$, в случае $SL_q(N)$, в виде $Z = \text{const}$. Однако не совсем ясно, достаточно ли этого условия для уменьшения на единицу числа генераторов $\mathfrak{Z}_H$, т.к., например, в квазиклассическом пределе соотношение $Z = \text{const}$ не приводит к содержательному условию на $\mathfrak{Z}_H$.

Отметим, что рассмотрение чисто "фермионной" подалгебры B_L с генераторами $\{\Omega_L, \mathfrak{Z}_L\}$, содержащейся в алгебре (5.2), (5.3), или подалгебры B_H с генераторами $\{\Omega_H, \mathfrak{Z}_H\}$ (5.5) (определяющие соотношения для этой подалгебры получаются из определяющих соотношений для B_L заменой $\Omega_L \rightarrow \mathfrak{Z}_H$, $\mathfrak{Z}_L \rightarrow \Omega_H$), имеет также самостоятельный интерес, т.к. эти подалгебры могут интерпретироваться как q -деформации квантовых b – c -систем (систем БРСТ-переменных и их канонически сопряженных переменных на группе $GL_q(N)$). Отметим, что величина $(1 - \overline{W}W)/\lambda$ в этом случае может однозначно интерпретироваться как квантовый аналог фермионного БРСТ-тока.

Как мы только что видели, в алгебре B_H можно "отщепить" генератор $\overline{\text{Tr}}_q(\Omega_H)$, положив его равным нулю (см. (5.10) – (5.13)). Совершенно аналогично в алгебре B_L можно "отщепить" генератор $\overline{\text{Tr}}_q(\mathfrak{Z}_L)$. Так как генераторы алгебр B_L и B_H связаны обратимыми преобразованиями (5.5), то эти алгебры изоморфны, и возникает идея сформулировать алгебру $B_L \simeq B_H$ в терминах образующих $\{\Omega_H, \mathfrak{Z}_L\}$, попытавшись затем "отщепить" генераторы $\overline{\text{Tr}}_q(\Omega_H)$ и $\overline{\text{Tr}}_q(\mathfrak{Z}_L)$ одновременно. Действительно, определяющие соотношения для

$\mathcal{B}_L \simeq \mathcal{B}_H$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \hat{R} \Omega'_H \hat{R}^{-1} \Omega'_H + \Omega'_H \hat{R}^{-1} \Omega'_H \hat{R}^{-1} &= 0, \\ \hat{R} \mathfrak{S}'_L \hat{R}^{-1} \mathfrak{S}'_L + \mathfrak{S}'_L \hat{R}^{-1} \mathfrak{S}'_L \hat{R}^{-1} &= 0, \\ \mathfrak{S}'_L \hat{R}^{-1} \Omega'_H \hat{R} + \hat{R}^{-1} \Omega'_H \hat{R} \mathfrak{S}'_L &= \hat{R}^{-1} \left(\frac{1}{\overline{W}W} \right)'. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Попытаемся теперь выделить из этой алгебры подалгебру с бесшпуровыми генераторами $\tilde{\Omega}_H$ (5.9) и $\tilde{\mathfrak{S}}_L$:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_L = \mathfrak{S}_L - \frac{1}{[N]_q} \overline{\text{Tr}}_q(\mathfrak{S}_L) I.$$

Для упрощения формул мы не будем писать индексы H и L у переменных $\tilde{\Omega}_H$ и $\tilde{\mathfrak{S}}_L$. После довольно утомительных вычислений получаем

$$\begin{aligned} \hat{R} \tilde{\Omega}' \hat{R}^{-1} \tilde{\Omega}' + \tilde{\Omega}' \hat{R}^{-1} \tilde{\Omega}' \hat{R}^{-1} &= \kappa_{1/q} \left(\hat{R}^{-1} (\tilde{\Omega}')^2 \hat{R}^{-1} + (\tilde{\Omega}')^2 \right), \\ \hat{R} \tilde{\mathfrak{S}}' \hat{R}^{-1} \tilde{\mathfrak{S}}' + \tilde{\mathfrak{S}}' \hat{R}^{-1} \tilde{\mathfrak{S}}' \hat{R}^{-1} &= \kappa_{1/q} \left(\hat{R}^{-1} (\tilde{\mathfrak{S}}')^2 \hat{R}^{-1} + (\tilde{\mathfrak{S}}')^2 \right), \\ \tilde{\mathfrak{S}}' \hat{R}^{-1} \tilde{\Omega}' \hat{R} + \hat{R}^{-1} \tilde{\Omega}' \hat{R} \tilde{\mathfrak{S}}' &= \\ = R^{-1} \left(\mathcal{V}' + \frac{\kappa_{1/q}}{\lambda(1 - \kappa_{1/q})} (\mathcal{V}' \hat{R} + \hat{R} \mathcal{V}') \right) - \frac{\kappa_{1/q}}{\lambda(1 - \kappa_{1/q})} \frac{\overline{\text{Tr}}_q(\mathcal{V})}{[N]_q}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где $\mathcal{V} \equiv \frac{1}{\overline{W}W}$. При выводе (5.18) мы учли соотношения, вытекающие из (5.17):

$$\begin{aligned} \Omega_H^2 &= (1 - \kappa_{1/q}) \tilde{\Omega}^2, \quad \mathfrak{S}_L^2 = (1 - \kappa_{1/q}) \tilde{\mathfrak{S}}^2, \\ [\mathfrak{S}_L, \overline{\text{Tr}}_q(\Omega_H)]_+ &= q^{-N} \mathcal{V}, \quad [\Omega_H, \overline{\text{Tr}}_q(\mathfrak{S}_L)]_+ = q^{-N} \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Для того чтобы выяснить, является ли алгебра (5.18) действительно замкнутой подалгеброй в (5.17), необходимо проверить независимость операторов $\mathcal{V}$ и $\overline{W}W$ от $\overline{\text{Tr}}_q(\mathfrak{S}_L)$ и $\overline{\text{Tr}}_q(\Omega_H)$. Подставим определение для $\mathfrak{S}_H$ (5.5) в последнее выражение для $\overline{W}W$ из (5.16). В результате получаем

$$\begin{aligned} \overline{W}W &= (1 - \kappa_{1/q}) \left(\frac{1}{1 - \kappa_{1/q}} - \lambda \overline{W}W \tilde{\Omega} \mathfrak{S}_L \right) \left(\frac{1}{1 - \kappa_{1/q}} - \lambda \mathfrak{S}_L \overline{W}W \tilde{\Omega} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - \kappa_{1/q}} - \lambda [\overline{W}W \tilde{\Omega}, \mathfrak{S}_L]_+ + \lambda^2 (1 - \kappa_{1/q})^2 \overline{W}W \tilde{\Omega} \tilde{\mathfrak{S}}^2 \overline{W}W \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Учтем теперь соотношения

$$[\overline{W}W, \overline{\text{Tr}}_q(\mathfrak{S}_L)] = 0, \quad [\tilde{\Omega}, \overline{\text{Tr}}_q(\mathfrak{S}_L)]_+ = q^{-N} \mathcal{V} - \frac{q^{-N}}{[N]_q} \overline{\text{Tr}}_q(\mathcal{V}),$$

которые следуют из (5.8) и (5.19), тогда из (5.20) выводятся уравнения

$$\begin{aligned} \overline{W}W = & \left(1 - \frac{\kappa_{1/q}}{(1 - \kappa_{1/q})[N]_q} \overline{\text{Tr}}_q \left(\frac{1}{\overline{W}W} \right) \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{1 + \kappa_{1/q}}{1 - \kappa_{1/q}} - \lambda [\overline{W}W \tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{S}}]_+ + \lambda^2 (1 - \kappa_{1/q})^2 \overline{W}W \tilde{\Omega} \tilde{\mathfrak{S}}^2 \overline{W}W \tilde{\Omega} \right). \end{aligned}$$

Эти уравнения решаются методом последовательных приближений и позволяют выразить $\overline{W}W$ только через $N^2 - 1$ переменных $\tilde{\Omega}$ и $N^2 - 1$ переменных $\tilde{\mathfrak{S}}$. Таким образом, соотношения (5.18) (отметим, что они не квадратичны) действительно являются определяющими соотношениями для замкнутой алгебры с образующими $\{\tilde{\Omega}, \tilde{\mathfrak{S}}\}$, которую можно попытаться интерпретировать как алгебру дифференциальных форм и внутренних производных на группе $SL_q(N)$. Единственный вопрос, который остается неясным - выполняется ли для этой алгебры свойство ПБВ?

Несмотря на все остающиеся неясные моменты, изложенный метод получения $SL_q(N)$ -дифференциальной подалгебры (5.10)—(5.12) и (5.18) из дифференциальной алгебры для $GL_q(N)$ позволяет надеяться на решение проблемы построения явного вида (типа (5.4)) оператора деформированного дифференциала, предложенного в [18], а также на прояснение хопфовой структуры этой подалгебры.

6. ТЕОРИЯ ВОРОНОВИЧА И R -МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД. ПРОБЛЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ НА ГРУППАХ $SO_q(N)$ И $Sp_q(2n)$

В разд. 2, посвященном изложению теории Вороновича [16], было показано, что классификация всех биковариантных дифференциальных исчислений над АХ $\mathcal{A}$ сводится к классификации всех биковариантных бимодулей над $\mathcal{A}$, или, другими словами, к классификации всевозможных выборов функционалов $f_{ij} \in \mathcal{A}^*$ и элементов $\mathbf{r}_{ij} \in \mathcal{A}$. Функционалы f_{ij} и элементы $\mathbf{r}_{ij}$ должны удовлетворять определенным условиям (2.9), (2.12), (2.14) и (2.20), сформулированным в теореме 1, доказательство которой было воспроизведено в разд. 2 (см. также [16]).

Для случая квантовых групп $GL_q(N)$ ($SL_q(N)$), $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ классификация всех возможных ББ была проведена в работах [22, 73]. При этом ключевым является R -матричный подход к квантовым группам, сформулированный в [2]. Было доказано [22], что для данных квантовых групп существуют лишь восемь возможностей выбрать подходящие для дифференциального исчисления ББ, которые были обозначены как $\Gamma_i \otimes \Gamma_j^c$, $\Gamma_i^c \otimes \Gamma_j$ ($i, j = 1, 2$). Эти ББ были разделены на две группы [22]: I) ($\Gamma_i \otimes \Gamma_i^c$, $\Gamma_i^c \otimes \Gamma_i$) и

II) $(\Gamma_i \otimes \Gamma_j^c, \Gamma_i^c \otimes \Gamma_j, i \neq j)$. Можно показать, что все ББ внутри каждой из групп соответствуют аналогичным дифференциальным исчислениям. Поэтому мы возьмем в группе I ББ: $\Gamma_I = \Gamma_1^c \otimes \Gamma_1$, который соответствует выбору $\mathbf{r}$ и f в виде:

$$\mathbf{r} \Delta(\Omega_j^i) = \Omega_l^k \otimes \mathbf{r}_{kj}^{li} \equiv \Omega_l^k \otimes (T^{-1})_k^i T_j^l, \quad (6.1)$$

$$\Omega_j^i T_n^m = (f_{jk}^{il} \triangleright T_n^m) \Omega_l^k \equiv (L^{-i}_k S(L^{+l}_j) \triangleright T_n^m) \Omega_l^k. \quad (6.2)$$

Здесь элементы $\{\Omega_j^i\}$ (дифференциальные 1-формы) образуют левоинвариантный базис в Γ_I , $\{T_j^i\}$ – образующие алгебры $\mathcal{A}$ функций на квантовой группе и $\{L^{\pm i}_j\}$ – образующие дуальной алгебры $\mathcal{A}^*$ (см. [2]). Левое действие алгебры $\mathcal{A}^*$ на $\mathcal{A}$ задается соотношениями:

$$L_2^{\pm} \triangleright T_1 = T_1 < L_2^{\pm}, T_1 > = T_1 R^{\pm},$$

$$S(L_2^{\pm}) \triangleright T_1 = T_1 < S(L_2^{\pm}), T_1 > = T_1 (R^{\pm})^{-1},$$

где $R^+ = R_{12}$, $R^- = R_{21}^{-1}$. Согласно правилам, изложенным в разд. 2, объекты $\mathbf{r}$ и f из (6.1), (6.2) определяют для ББ Γ_I дифференциальную алгебру $\Gamma_I^{\wedge}$:

$$\hat{R} T T' = T T' \hat{R}, \quad (6.3)$$

$$\Omega T' = T' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1}, \quad (6.4)$$

$$\hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} \wedge \Omega' = \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega' - \Omega' \otimes_{\mathcal{A}} \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1}, \quad (6.5)$$

причем формула (6.4) является прямым следствием соотношения (6.2). В наборе II мы возьмем ББ: $\Gamma_{II} = \Gamma_1^c \otimes \Gamma_2$, для которого элементы $\mathbf{r}$ совпадают с введенными в формуле (6.1), а в качестве функционалов f из (6.2) необходимо выбрать $f_{jk}^{il} = L^{-i}_k S(L^{-l}_j)$. Тогда ББ Γ_{II} определяет дифференциальную алгебру $\Gamma_{II}^{\wedge}$:

$$\hat{R} T T' = T T' \hat{R}, \quad (6.6)$$

$$\Omega T' = T' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}, \quad (6.7)$$

$$\hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R} \wedge \Omega' = \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega' - \Omega' \otimes_{\mathcal{A}} \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}. \quad (6.8)$$

Отметим, что соотношения (6.5) и (6.8) следуют из определения внешнего умножения (2.36), (2.39), которое в нашем случае записывается в виде

$$\Omega \wedge (T' \Omega' T'^{-1}) = \Omega \otimes_{\mathcal{A}} (T' \Omega' T'^{-1}) - (T' \Omega' T'^{-1}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega.$$

Все другие ББ, содержащиеся в наборах I и II, приводят к дифференциальным алгебрам со структурными соотношениями, которые могут быть получены из формул (6.3)–(6.8) тривиальными преобразованиями, в частности, заменой $R \rightarrow R^{-1}$. Исследование всех таких дифференциальных алгебр проводится

абсолютно аналогично, поэтому мы остановимся на изучении только алгебр (6.3)—(6.8). Подчеркнем, однако, что имеется свобода в задании определяющих соотношений (6.3)—(6.8), которая связана с преобразованиями базиса ББ, например, с преобразованиями типа рассмотренных в (4.28).

Алгебры (6.3)—(6.8) по построению ковариантны относительно кодействия (6.1), соответствующего правым косдвигам на квантовой группе. Согласно теории Вороновича внешние произведения (6.5), (6.8) автоматически определяют ассоциативные внешние алгебры дифференциальных форм. Однако теория Вороновича не гарантирует выполнение свойства ПБВ для этих алгебр. Выполнение свойства ПБВ важно здесь, так как только в этом случае мы можем рассматривать алгебры (6.3)—(6.8) как результат квантовой деформации соответствующих классических дифференциальных комплексов.

Существует возможность (см. [16, 22]) построить полупрямое произведение алгебр $\Gamma_{I,II}^\wedge$ с алгеброй $\mathcal{A}^*$, при этом кросскоммутационные соотношения имеют вид

$$L_2^\pm T_1 = T_1 < L_2^\pm, T_1 > L_2^\pm = T_1 R^\pm L_2^\pm, \quad (6.9)$$

$$L_2^\pm \Omega_1 = < L_2^\pm, T_1^{-1} \Omega_1 T_1 > L_2^\pm = (R^\pm)^{-1} \Omega_1 R^\pm L_2^\pm. \quad (6.10)$$

Соотношение (6.9), которое в абстрактных обозначениях записывается в виде

$$ca = a_{(1)} < c_{(1)}, a_{(2)} > c_{(2)} \quad (a \in \mathcal{A}, c \in \mathcal{A}^*), \quad (6.11)$$

где $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ и $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$, говорит о том, что кросспроизведение алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ образует дубль Гейзенберга [77] (частный случай "smash"-произведения, см., напр., [1]). Соотношение (6.10) является частным случаем более общей формулы

$$c\gamma = \gamma_{(1)} < c_{(1)}, a_{(2)} > c_{(2)} \quad (a \in \mathcal{A}, c \in \mathcal{A}^*, \gamma \in \Gamma)$$

($\Gamma\Delta(\gamma) = \gamma_{(1)} \otimes a_{(2)}$), которая также представляет собой реликт некоторого специального кросспроизведения. Образующие $L = L^+ S(L^-)$ для построенной расширенной дифференциальной алгебры можно связать с некоммутативными производными Ли (см. [52, 53]), т.к. для них, например, выполняются (согласно (6.9) и (6.10)) соотношения (3.70).

Заметим теперь, что вся алгебра первого типа (6.3)—(6.5), (6.9), (6.10) эквивалентна дифференциальной алгебре на $GL_q(N)$ (3.31), (3.46), (3.47), (3.70), если $\hat{R}$ является $GL_q(N)$ - R -матрицей, удовлетворяющей условию Гекке (3.7). Эта алгебра рассматривалась во многих работах [22, 45, 53, 54, 72, 74] и представляет собой прекрасный пример, иллюстрирующий построение дифференциального исчисления на квантовых группах с помощью теории Вороновича. Более того, дифференциальная алгебра (6.3)—(6.5), (6.9), (6.10) на $GL_q(N)$ является алгеброй ПБВ-типа (см. [47, 54] и разд. 3 данного обзора). Как было отмечено выше в разд. 4, бинвариантный элемент $\Omega^{(1)} = \overline{\text{Tr}}_q(\Omega)$

может служить для алгебры $\Gamma_I^\wedge$ первого типа X -элементом Вороновича и, соответственно, генерировать внешний дифференциал для этой алгебры. При этом, используя формулы (6.2), можно получить явные выражения для некоммутативных векторных полей χ_l^k (см. [22], [72] и разд. 2):

$$\begin{aligned} da &\sim [\text{Tr}(D^{-1} \Omega), a] = \\ &= \{((D^{-1})_i^j L^{-i}_k S(L^{+l}_j) - (D^{-1})^l_k I) \triangleright a\} \Omega_l^k \equiv \{\chi_k^l \triangleright a\} \Omega_l^k. \end{aligned}$$

Если мы примем эту идеологию и в случае ББ второго типа, то сразу же получим, что дифференциальную алгебру (6.6) – (6.8) необходимо удалить из рассмотрения (как это было сделано в [22]), так как, используя формулы (см. (5.14))

$$\overline{\text{Tr}}_{q1}(R^{\pm 1} \Omega' R^{\mp 1}) = \Omega^{(1)} I_2, \quad (6.12)$$

имеем, согласно (6.7) и (6.8), тривиальный дифференциал:

$$dT \sim [\Omega^{(1)}, T] \equiv 0, \quad d\Omega \sim [\Omega^{(1)}, \Omega]_+ \equiv 0. \quad (6.13)$$

Другими словами, элемент $\Omega^{(1)}$ является центральным для алгебры второго типа, и мы безболезненно можем его занулить.

Отметим, однако, что элемент X в теории Вороновича (см. разд. 2 и работу [16]) не обязательно должен совпадать с $\Omega^{(1)}$ и тем самым быть встроенным в рассматриваемый ББ. Он может быть внешним элементом для данного ББ. Кроме того, для специальных групп ($SL_q(N)$, $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$) естественно потребовать $\Omega^{(1)} = 0$, и это требование невозможно выполнить (см. [45, 53, 54]), например, при построении биковариантного дифференциального комплекса на группе $SL_q(N)$, исходя из дифференциального комплекса на $GL_q(N)$, основанного на ББ первого типа (см., тем не менее, разд. 5). Нерасширенный биковариантный дифференциальный комплекс на $SL_q(N)$ (для которого мы имеем $\Omega^{(1)} = 0$ и который определяется равенствами (6.3), (5.10) и (5.11)), обладающий свойством ПБВ и предложенный в [18], очевидно, использует ББ второго типа, что проявляется в совпадении равенств (6.7) и (5.10). Отличие заключается в том, что вместо определения внешнего умножения (6.8), вытекающего из теории Вороновича, выбирается внешняя алгебра (5.11), которая связана с ББ первого типа и которая обсуждалась в разд. 4 (см. (4.26), (4.27)). Важно, что нерасширенный биковариантный дифференциальный комплекс на $SL_q(N)$ (дифференциальный комплекс Фаддеева — Пятова) обладает естественным дифференциальным отображением с нарушенным правилом Лейбница (см. [18]), что автоматически запрещает генерирование этого дифференциала с помощью недеформированного (анти)коммутатора с каким бы то ни было элементом X .

Все вышесказанное указывает на то, что соотношения (6.13) являются скорее достоинством, чем недостатком ББ второго типа, и что дифференциальные алгебры (6.6) — (6.8) вполне имеют право на существование. Более того, они являются прекрасными кандидатами на роль биковариантных дифференциальных алгебр для специальных квантовых групп.

Тем не менее в данном обзоре мы сконцентрируемся на обсуждении ББ первого типа и покажем, следуя работе [75] (см. также [42]), что в случае групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ алгебра 1-форм (6.5) и, соответственно, вся дифференциальная алгебра (6.3)—(6.5) не являются алгебрами ПБВ типа (в отличие от случая группы $GL_q(N)$, где алгебра 1-форм (6.5) эквивалентна алгебре (3.47) и обладает свойством ПБВ).

Исследуем алгебру (6.3)—(6.5), соответствующую группам $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$. В этом случае R -матрица не удовлетворяет условию Гекке (3.7), а подчиняется кубическому характеристическому уравнению [2] (см. также [1]):

$$\hat{R} = \hat{R}^{-1} + \lambda - \lambda K, \quad K \equiv -\frac{1}{\lambda\nu}(\hat{R}^2 - \lambda\hat{R} - 1), \quad (6.14)$$

где $\nu = \epsilon q^{\epsilon-N}$ — синглетное собственное значение $\hat{R}$ -матрицы, а $\epsilon = +1$ ($SO_q(N)$) и $\epsilon = -1$ ($Sp_q(2n)$).

В работах [76, 78] было показано (и это очевидным образом следует из (6.5)), что алгебра дифференциальных 1-форм на группах $SO_q(N)$, $Sp_q(N)$ определяется соотношениями

$$X^{(\pm\pm)} \equiv \mathbf{P}^\pm \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' \mathbf{P}^\pm = 0, \quad X^{(00)} \equiv \mathbf{P}^0 \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' \mathbf{P}^0 = 0 \quad (6.15)$$

(знак внешнего умножения мы, как всегда, опускаем). Определение проекторов дано в [2] (см. также [1]):

$$\mathbf{P}^\pm = \frac{1}{q + q^{-1}} (\pm \hat{R} + q^{\mp 1} I + \mu_\pm K), \quad \mu_\pm = -\frac{q^{\mp 1} \pm \nu}{\mu}, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{P}^0 = \mu^{-1} K, \quad \mu = (1 + \epsilon[N - \epsilon]_q) = 1 + \frac{\nu^{-1} - \nu}{\lambda}.$$

Вычисляя квантовый след по первому пространству от уравнения (6.4) и используя характеристическое соотношение (6.14), выводим

$$[T', \Omega^{(1)}] = \lambda T'(\epsilon \nu \Omega' - \overline{\Omega}'), \quad (6.17)$$

где мы учли равенства $\overline{\text{Tr}}_q(\hat{R}^{\pm 1}) = q^{\pm(N-\epsilon)}$ и ввели для удобства операцию линейного преобразования базиса в пространстве 1-форм:

$$\overline{\Omega}' = \overline{\text{Tr}}_{q1}(\hat{R}^{-1} \Omega' K) = \overline{\text{Tr}}_{q1}(K \Omega' \hat{R}^{-1}). \quad (6.18)$$

Полезно отметить, что повторное применение этой операции приводит к соотношению

$$\overline{\overline{\Omega}} = \Omega + \epsilon \lambda \left(\frac{1}{\nu} \Omega^{(1)} - \overline{\Omega} \right),$$

при выводе которого мы воспользовались свойством

$$K \overline{\Omega'} = \epsilon K \Omega' \hat{R}^{-1}, \quad \overline{\Omega'} K = \epsilon \hat{R}^{-1} \Omega' K. \quad (6.19)$$

Подробное изложение технологии, необходимой для вывода соотношений (6.17) — (6.19) и некоторых формул, используемых ниже, можно найти в [1].

Свяжем, как это обычно делается, X -элемент Вороновича с коинвариантом $\Omega^{(1)}$. Тогда естественное определение (см. (6.17)) действия внешнего дифференциала на T выглядит следующим образом:

$$dT \equiv -\frac{1}{\lambda} [\Omega^{(1)}, T] = T(\epsilon \nu \Omega - \overline{\Omega}),$$

и, следовательно, для дифференциальных 1-форм мы должны принять аналогичное соглашение:

$$d\Omega \equiv -\frac{1}{\lambda} [\Omega^{(1)}, \Omega]_+. \quad (6.20)$$

Заметим теперь, что, комбинируя соотношения (6.15) в виде

$$qX^{(++)} + q^{-1}X^{(--)} - \frac{1 + \nu^2}{(q + q^{-1})\mu^2} X^{(00)},$$

их можно переписать единым образом в удобной форме:

$$(\hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} + \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega') - \frac{1}{\mu} (K \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' + \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' K) - \quad (6.21)$$

$$-\frac{1}{\nu \mu} (K \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} + \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' K) = 0,$$

где мы использовали равенства

$$\frac{\mu_+ + \mu_-}{q + q^{-1}} = -\frac{1}{\mu}, \quad \frac{q\mu_+ - q^{-1}\mu_-}{q + q^{-1}} = -\frac{\nu}{\mu}, \quad \frac{q\mu_+^2 + q^{-1}\mu_-^2}{q + q^{-1}} = \frac{1 + \nu^2}{\mu^2}.$$

Уравнения (6.15) очевидным образом выделяются из (6.21) действием проекторов. Умножая (6.21) на $\hat{R}$ справа и вычисляя $\overline{\text{Tr}}_{q1}$ по первому матричному пространству, получаем коммутационные соотношения для генераторов Ω_j^i с коинвариантным элементом $\Omega^{(1)}$:

$$[\Omega^{(1)}, \Omega']_+ = \lambda \epsilon \nu \Omega'^2 + \frac{\nu}{\mu} (\overline{\Omega'} \Omega' + \Omega' \overline{\Omega'}) + \frac{\epsilon}{\mu} (\overline{\overline{\Omega'}} \Omega' + \overline{\Omega'} \overline{\overline{\Omega'}}) = -\lambda d\Omega', \quad (6.22)$$

которые задают действие дифференциала на левоинвариантные 1-формы согласно определению (6.20). Заметим, что, вычисляя $\overline{\text{Tr}}_{q^2}$ от равенства (6.22) и применяя $\overline{\text{Tr}}_{q^1} \overline{\text{Tr}}_{q^2}$ к (6.21), мы получаем (с учетом последнего из соотношений (6.15)) систему уравнений

$$\begin{aligned} 2(\Omega^{(1)})^2 &= \lambda q^{\epsilon-N} \overline{\text{Tr}}_q(\Omega^2), \\ -\lambda(\Omega^{(1)})^2 + q^{\epsilon-N}(2 + \lambda^2) \overline{\text{Tr}}_q(\Omega^2) &= 0, \end{aligned}$$

которая аналогична системе уравнений (4.6), (4.8), для группы $GL_q(N)$. Таким образом, в случае групп $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$ мы имеем те же дополнительные условия на дифференциальные 1-формы ($q + q^{-1} \neq 0$):

$$(\Omega^{(1)})^2 = 0, \quad \overline{\text{Tr}}_q(\Omega^2) = 0, \quad (6.23)$$

что и для группы $GL_q(N)$.

Зная ранги проекторов, можно подсчитать число независимых соотношений, содержащихся в (6.21). Оказывается, что число соотношений (6.21) равно $\frac{N^2(N^2+1)}{2} + 2 - N(N + \epsilon)$ и недостаточно для того, чтобы упорядочить произвольный моном, построенный из независимых дифференциальных 1-форм Ω_j^i , число которых предполагается равным N^2 , т.е. алгебра (6.21) не является алгеброй ПБВ-типа. В работе [76] для решения этой проблемы, в случае квантовых групп $SO_q(N)$ ($\epsilon = +1$), было предложено добавить $N(N + 1) - 2$ дополнительных соотношений:

$$K\Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' \mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^+ \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' K = 0. \quad (6.24)$$

Заметим, что (6.24) можно переписать с учетом (6.15), (6.18) и (6.19) в виде

$$\overline{\overline{\Omega}}\Omega = -q \overline{\Omega}\Omega, \quad \overline{\overline{\Omega\Omega}} = -q \Omega\overline{\Omega}.$$

Теперь суммарное число соотношений (6.24) и равенств (6.21) становится равным $\frac{N^2(N^2+1)}{2}$ и оказывается достаточным для перестановки двух произвольных элементов Ω_j^i , и соответственно, для упорядочения любого монома. Однако возникает другая проблема, которая тем не менее не дает возможности утверждать, что алгебра со структурными соотношениями (6.21) и (6.24) является алгеброй ПБВ-типа, а именно: для этой алгебры упорядочение мономов не является однозначной процедурой. Проще всего продемонстрировать это проверкой свойств дифференциала (6.22), соответствующего алгебре (6.21) и (6.24). Оказывается, что дифференциал (6.22) (с учетом (6.24)) не удовлетворяет аксиоме $d^2 = 0$ и правилу Лейбница. Напомним, что теория Вороновича свободна от этих недостатков, источником которых является несовместимость определения дифференциала по Вороновичу и постулирования

дополнительных соотношений (6.24). В свою очередь, это является отражением того факта, что явный вид антикоммутатора (6.22) (с учетом (6.24)) не удовлетворяет тождеству Якоби, по крайней мере, если мы не будем требовать новых соотношений (не имеющих аналогов в классическом случае) на мономы третьей степени по Ω . Это и есть указание на то, что для алгебры (6.21) и (6.24) не выполняется свойство ПБВ.

Проверим отсутствие аксиомы $d^2 = 0$. Действительно, соотношения (6.24) и (6.21) можно записать единым образом:

$$(\hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' \hat{R}^{-1} + \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega') - \frac{\mu_-}{\nu} (K \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' + \Omega' \hat{R}^{-1} \Omega' K) = 0. \quad (6.25)$$

Аналог соотношения (6.22) в этом случае имеет вид

$$-\lambda d\Omega = [\Omega^{(1)}, \Omega]_+ = \lambda \nu \Omega^2 + \mu_- (\bar{\Omega} \Omega + \Omega \bar{\Omega}). \quad (6.26)$$

Вычисляя еще один коммутатор с $\Omega^{(1)}$ от соотношения (6.26), получаем

$$\lambda^2 d^2 \Omega = [\Omega^{(1)}, [\Omega^{(1)}, \Omega]_+] = \mu_-^2 [\Omega, \bar{\Omega}^2] + \lambda \nu \mu_- [\bar{\Omega}^2, \Omega] + q \mu_-^2 [\Omega^2, \bar{\Omega}].$$

Последняя часть этого равенства в общем случае не равна нулю (в чем можно легко убедиться, вычислив ее квазиклассический предел) и, следовательно, не выполняется условие $d^2 = 0$. С учетом равенства $(\Omega^{(1)})^2 = 0$ это означает, что антикоммутатор из (6.26) не удовлетворяет тождеству Якоби, т.е. мы имеем

$$2 [\Omega^{(1)}, [\Omega^{(1)}, \Omega]_+] \neq [[\Omega^{(1)}, \Omega^{(1)}]_+, \Omega].$$

Это и демонстрирует отсутствие однозначности упорядочения мономов в алгебре (6.25). Более того, как показано в [75], вообще не существует биковариантных квадратичных скобок $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ на SO и Sp , которые удовлетворяли бы тождеству Якоби.

Итак, мы видим, что алгебра первого типа (6.5) (в случае групп $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$) обладает некоторыми неудовлетворительными свойствами, которые не позволяют однозначно связать ее с алгеброй дифференциальных форм на группах $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$. Прежде всего, размерность пространства 1-форм в данной алгебре больше, чем размерность пространства 1-форм в классическом случае (по крайней мере, $\Omega^{(1)} \neq 0$). Кроме того, эта алгебра, являясь ассоциативной, тем не менее не является алгеброй ПБВ-типа. Это может привести к тому, что ряд Пуанкаре для данной алгебры вообще не будет ограничен, и мы будем иметь в наличии дифференциальные формы произвольно высокой степени. С другой стороны, отсутствие свойства ПБВ означает, что мы не можем получить $\Gamma_\hbar^\wedge$ путем квантования некоторой ли-пуассоновской структуры на пространстве классических 1-форм (см. [75]).

Попытка [76] "улучшить" эту алгебру, налагая дополнительные условия (6.24), оказывается также неудовлетворительной. Вопрос о том, возможно ли определение (например, с использованием ББ второго типа) биковариантной дифференциальной алгебры на группах $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$, имеющей правильное количество 1-форм и удовлетворяющей свойству ПБВ (эти требования гарантируют совпадение классического и квантового рядов Пуанкаре), является на сегодняшний день открытым. Отметим также, что неисследованной остается возможность построения квадратичных биковариантных коммутационных соотношений для Ω (не имеющих квазиклассического предела), исходя из рассмотрения всевозможных неприводимых копредставлений, на которые расщепляется прямое произведение присоединенных копредставлений. Эти неприводимые представления можно выделить из ковариантных комбинаций $\mathbf{P}^{\alpha_1} \Omega^{(\alpha_2)} \mathbf{P}^{\alpha_3} \Omega^{(\alpha_4)} \mathbf{P}^{\alpha_5}$, где $\alpha_i = 0, \pm 1$ и $\Omega^{(\alpha)} \equiv \epsilon \text{Tr}_{q^2}(K \Omega \mathbf{P}^{\alpha})$ (часть этих комбинаций являются линейно зависимыми).

В заключение отметим, что случай биковариантного дифференциального исчисления на группах $SO_q(N)$, $Sp_q(2n)$, классические аналоги которых имеют алгебры Ли, изоморфные алгебрам Ли линейных групп (типа $sp(2) \sim so(3) \sim sl(2)$), требует специального рассмотрения. Подчеркнем также, что, в отличие от линейных квантовых групп (см., например, [79]), для ортогональных и симплектических квантовых групп не предпринимались попытки построения небиковариантных дифференциальных исчислений.

7. ДОПОЛНЕНИЕ

Здесь мы сделаем ряд необходимых дополнений к первой части обзора, опубликованной в [1].

1. Еще раз об универсальных R -матрицах. Приведем доказательство (см. [80]) соотношений для универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы

$$(\epsilon \otimes id)\mathcal{R} = (id \otimes \epsilon)\mathcal{R} = I, \quad (7.1)$$

$$(S \otimes id)\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}, \quad (id \otimes S^{-1})\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}, \quad (7.2)$$

которые упоминались в первой части обзора (см. формулы (2.29) [1]) без доказательства. Соотношения (7.1) легко получаются, если применить $(\epsilon \otimes id \otimes id)$ и $(id \otimes id \otimes \epsilon)$ соответственно к

$$(\Delta \otimes id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \quad (id \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \quad (7.3)$$

Далее, мы докажем первое из соотношений (7.2) (второе соотношение доказывается аналогично). Рассмотрим выражение $\mathcal{R} \cdot (S \otimes id)\mathcal{R}$ и учтем аксиомы

АХ:

$$m(S \otimes id)\Delta = \mathbf{i} \cdot \epsilon = m(id \otimes S)\Delta \Rightarrow \quad (7.4)$$

$$S(a_{(1)}) a_{(2)} = \epsilon(a) \cdot I = a_{(1)} S(a_{(2)}) \quad (\forall a \in \mathcal{A})$$

и первую из формул (7.3). Тогда мы получаем искомое равенство:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{23} \cdot (id \otimes S \otimes id) \mathcal{R}_{23} &= (m_{12} \otimes id) \mathcal{R}_{13} (id \otimes S \otimes id) \mathcal{R}_{23} = \\ &= (m_{12} \otimes id) (id \otimes S \otimes id) \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} = (\mathbf{i} \cdot \epsilon \otimes id) \mathcal{R} = I. \end{aligned}$$

2. Ленточные алгебры Хопфа. Следует добавить еще одно важное замечание в конец второго раздела [1].

Замечание 3. Рассмотрим квазитреугольную алгебру Хопфа $\mathcal{A}$ и представим универсальную R -матрицу в виде $\mathcal{R} = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$, где $\alpha_i, \beta_j \in \mathcal{A}$. Положим $u = \sum_i S(\beta_i) \alpha_i$, тогда справедливо

Предложение 6 (см. [80]).

1) Для любого $a \in \mathcal{A}$ выполняется соотношение

$$S^2(a) u = u a. \quad (7.5)$$

2) Элемент u обратим, причем $u^{-1} = \sum_i S^{-1}(\delta_i) \gamma_i$, где $\sum_i \gamma_i \otimes \delta_i = \mathcal{R}^{-1}$.

Доказательство.

1) Из соотношения $\mathcal{R} \Delta(a) = \Delta'(a) \mathcal{R}$ следует, что $\forall a \in \mathcal{A}$ (знаки сумм опущены):

$$\alpha_i a_{(1)} \otimes \beta_i a_{(2)} \otimes a_{(3)} = a_{(2)} \alpha_i \otimes a_{(1)} \beta_i \otimes a_{(3)}.$$

Отсюда получаем

$$S^2(a_{(3)}) S(\beta_i a_{(2)}) \alpha_i a_{(1)} = S^2(a_{(3)}) S(a_{(1)} \beta_i) a_{(2)} \alpha_i,$$

или

$$S^2(a_{(3)}) S(a_{(2)}) u a_{(1)} = S^2(a_{(3)}) S(\beta_i) S(a_{(1)}) a_{(2)} \alpha_i.$$

Применяя к этому равенству последние тождества из (7.4) и учитывая $\epsilon(S(a)) = \epsilon(a)$, получаем (7.5).

2) Положим $\nu = \sum_j S^{-1}(\delta_j) \gamma_j$. Тогда

$$u \nu = \sum_j u S^{-1}(\delta_j) \gamma_j = \sum_j S(\delta_j) u \gamma_j = \sum_{i,j} S(\beta_i \delta_j) \alpha_i \gamma_j.$$

Так как $\mathcal{R} \cdot \mathcal{R}^{-1} = \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \otimes \beta_i \delta_j = 1$, то $u \nu = 1$. Из последнего равенства и из (7.5) следует $S^2(\nu) u = 1$, следовательно, элемент u обладает как правым,

так и левым обратным. Таким образом, элемент u обратим, и мы можем переписать (7.5) в виде

$$S^2(a) = u a u^{-1}. \quad (7.6)$$

Это соотношение, в частности, показывает, что взятие антипода не является инволютивной операцией. В работе [80] было отмечено, что

$$\Delta(u) = (\mathcal{R}_{21} \mathcal{R}_{12})^{-1} (u \otimes u) = (u \otimes u) (\mathcal{R}_{21} \mathcal{R}_{12})^{-1}.$$

Кроме того, было показано, что соотношения (7.6) выполняются и в случае, если мы в качестве элемента $u \equiv u_1$ выберем любой из следующих трех элементов:

$$u_2 = \sum_i S(\gamma_i) \delta_i, \quad u_3 = \sum_i \beta_i S^{-1}(\alpha_i), \quad u_4 = \sum_i \gamma_i S^{-1}(\delta_i).$$

Пользуясь результатами предложения 6, можно заметить, что $S(u)^{-1} = u_2$, $S(u_3)^{-1} = u_4$. Оказывается также, что все u_i коммутируют между собой, а элементы $u_i u_j^{-1} = u_j^{-1} u_i$ являются центральными в $\mathcal{A}$ (см. [80]). Следовательно, центральным является и элемент $u S(u) = u_1 u_2^{-1}$. На основе этих замечаний вводится важное понятие ленточной алгебры Хопфа (см. [81]).

Определение. Рассмотрим квазитреугольную АХ $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$. Тогда тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{R}, v)$ называется ленточной АХ, если v - центральный элемент в $\mathcal{A}$ и

$$v^2 = u S(u), \quad S(v) = v, \quad \epsilon(v) = 1,$$

$$\Delta(v) = (\mathcal{R}_{21} \mathcal{R}_{12})^{-1} (v \otimes v).$$

Для каждой квазитреугольной АХ $\mathcal{A}$ можно определить $\mathcal{A}$ -раскрашенные ленточные графы [81]. Если же $\mathcal{A}$ является, кроме того, ленточной АХ, то для каждого $\mathcal{A}$ -раскрашенного ленточного графа можно определить структуру, которая обобщает инвариантные полиномы Джонса, связанные с инвариантами узлов (см. [57, 81]).

3. Аналог картановских элементов для RTT -алгебр. Пункт 3.1. из первой части обзора [1] необходимо дополнить следующим замечанием о RTT -алгебрах, а именно: для алгебры $\mathcal{A}$ с определяющими соотношениями (3.31), где произвольная невырожденная числовая матрица $\hat{R} \in \text{Mat}(N) \otimes \text{Mat}(N)$ является решением уравнения Янга — Бакстера (3.4), можно построить [83] набор из N коммутирующих между собой элементов $(1 \leq k \leq N)$:

$$\begin{aligned} Q_k &= \text{Tr}_{q1} \dots \text{Tr}_{qk} (\hat{R}_{k-1,k} \hat{R}_{k-2,k-1} \dots \hat{R}_{12} T_1 T_2 \dots T_k) = \\ &= \text{Tr}_{q1} \dots \text{Tr}_{qk} (\hat{R}_{1,2} \hat{R}_{2,3} \dots \hat{R}_{k-1,k} T_1 T_2 \dots T_k). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь мы воспользовались стандартными обозначениями (см. [2, 57], а также [1]):

$$\mathrm{Tr}_q(X) \equiv \sum_{i,j=1}^N D_j^i X_i^j, \quad D_1 \equiv \mathrm{Tr}_2(P_{12}((R_{12}^{t_1})^{-1})^{t_1}). \quad (7.8)$$

Переменные (7.7) можно рассматривать как аналоги картановских элементов для RTT -алгебр. Второе равенство в (7.7) доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr}_{q1} \dots \mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{1,2} \dots \hat{R}_{k-1,k} T_1 \dots T_k) = \\ &= \mathrm{Tr}_{q1} \dots \mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{k-1,k} T_1 \dots T_k \hat{R}_{1,2} \dots \hat{R}_{k-2,k-1}) = \\ &= \mathrm{Tr}_{q1} \dots \mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{1,2} \dots \hat{R}_{k-3,k-2} \hat{R}_{k-1,k} \hat{R}_{k-2,k-1} T_1 \dots T_k) = \dots = \\ &= \mathrm{Tr}_{q1} \dots \mathrm{Tr}_{qk}(\hat{R}_{k-1,k} \hat{R}_{k-2,k-1} \dots \hat{R}_{12} T_1 \dots T_k). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Пусть алгебра $\mathcal{A}$ является АХ, и пусть дуальная к ней алгебра $\mathcal{A}^*$ с генераторами $(L^\pm)_j^i$ (см. [2]) является квазитреугольной АХ. Введем обозначение $\mathcal{R} \in \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*$ для универсальной R -матрицы. Тогда наиболее простой метод, демонстрирующий коммутативность всех элементов Q_k , основывается на том, что имеется (см., например, [57, 74]) невырожденное отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}^*$ следующего вида:

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}_{21}, T_j^i \otimes id \rangle = (L^+)_j^i, \\ & \langle \mathcal{R}_{12}, T_j^i \otimes id \rangle = S((L^-)_j^i), \\ & \langle \mathcal{R}_{12}, S(T_j^i) \otimes id \rangle = (L^-)_j^i. \end{aligned} \quad (7.10)$$

В действительности мы будем использовать несколько иное линейное отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}^*$ [57, 74, 80, 82]:

$$\langle \mathcal{R}_{21} \mathcal{R}_{12}, id \otimes a \rangle = \alpha \quad (a \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathcal{A}^*), \quad (7.11)$$

которое полностью определяется формулами (7.10). Ограничимся достаточно общим случаем квазитреугольных АХ $\mathcal{A}^*$, для которых отображение (7.11) является обратимым (такие АХ называются факторизуемыми [82]). Пользуясь соотношениями (7.10) и тождеством $\mathrm{Tr}_{q2}(\hat{R}_{12}) = I_1$ [1], можно прямым вычислением показать [84], что

$$\langle \mathcal{R}_{21} \mathcal{R}_{12}, id \otimes Q_k(T) \rangle = \mathrm{Tr}_q(L^k), \quad (7.12)$$

где $L \equiv S(L^-) L^+$. Известно, что элементы $\mathrm{Tr}_q(L^k)$ образуют центр в алгебре $\mathcal{A}^*$ (см., например, [1, 2]). Пользуясь этим фактом, мы получаем равенство

$$\langle \mathcal{R}_{21} \mathcal{R}_{12}, id \otimes [Q_k(T), Q_n(T)] \rangle = [\mathrm{Tr}_q(L^k), \mathrm{Tr}_q(L^n)] = 0,$$

которое эквивалентно (для факторизуемых $AX A^*$) искомому тождеству

$$[Q_k(T), Q_n(T)] = 0.$$

Было бы интересно исследовать расширение отображения (7.11), которое связало бы дифференциальный комплекс (3.54) с дифференциальным расширением $GL_q(N)$ - алгебры уравнения отражения [40, 44]:

$$\hat{R}L\hat{R}L = L\hat{R}L\hat{R}, \quad \hat{R}dL\hat{R}L = L\hat{R}dL\hat{R}^{-1}, \quad \hat{R}dL\hat{R}dL = -dL\hat{R}dL\hat{R}^{-1}.$$

4. Аффинные алгебры кос. Определение. Аффинной алгеброй кос $\hat{B}_N$ будем называть ассоциативную алгебру (над полем комплексных чисел) с единицей, обратимыми генераторами σ_i ($i = 1, \dots, N-1$), y_j ($j = 1, \dots, N$) и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad |i - j| > 1, \\ y_j y_k &= y_k y_j, \\ y_j \sigma_i &= \sigma_i y_j \quad j \neq i, i+1, \\ \sigma_i y_i \sigma_i &= y_{i+1}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Будем предполагать также, что генераторы алгебры кос $\sigma_i \quad \forall i$ удовлетворяют одному и тому же характеристическому уравнению

$$\prod_{\alpha=1}^M (\sigma_i - \nu_\alpha) = 0, \tag{7.14}$$

где $\nu_\alpha \neq 0$ – собственные значения σ_i и $\nu_\alpha \neq \nu_\beta$, если $\alpha \neq \beta$. Перенормировкой генераторов σ_i , y_j всегда можно зафиксировать первые два собственных значения так, что $\nu_1 = q$ и $\nu_2 = -q^{-1}$. Если $M = 2$ и (7.14) имеет вид

$$(\sigma_i - q)(\sigma_i + q^{-1}) = 0,$$

то $\hat{B}_N \equiv \hat{H}_N(q)$ называется аффинной алгеброй Гекке. Для алгебры $\hat{H}_N(q)$ элементы $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i y_i - y_i \sigma_i$ также образуют алгебру кос. Если же $M = 3$ и для (7.14) имеем

$$(\sigma_i - q)(\sigma_i + q^{-1})(\sigma_i - \nu) = 0,$$

то соответствующая алгебра $\hat{B}_N$ называется аффинной алгеброй Бирмана — Венцеля.

В качестве простой реализации алгебры $\hat{B}_N$ (7.13) можно предложить следующую конструкцию (на нее автору указал П.Н.Пятов). Рассмотрим алгебру уравнения отражения

$$L \hat{R} L \hat{R} = \hat{R} L \hat{R} L \quad (7.15)$$

с невырожденной *R*-матрицей ($R_{12}^{t_1}$ также предполагается невырожденной), для которой выполняется характеристическое уравнение, совпадающее с (7.14):

$$(\hat{R} - q)(\hat{R} + q^{-1}) \prod_{\alpha=3}^M (\hat{R} - \nu_\alpha) = 0. \quad (7.16)$$

Тогда легко проверить, что операторы

$$\sigma_i = \hat{R}_i = \underbrace{I \otimes \dots \otimes I}_{i-1} \otimes \hat{R} \otimes \underbrace{I \otimes \dots \otimes I}_{N-i-1}, \quad (7.17)$$

$$y_i = \hat{R}_{i-1} \dots \hat{R}_1 L \hat{R}_1 \dots \hat{R}_{i-1}, \quad (7.18)$$

удовлетворяют соотношениям (7.13) и (7.14). Заметим, что (7.16) всегда можно преобразовать к виду

$$\hat{R} = \hat{R}^{-1} + \lambda - \lambda K, \quad (7.19)$$

где $\lambda = q - q^{-1}$ и K — некоторый полином $(M - 1)$ -й степени по $\hat{R}$ (для алгебры Гекке имеем $K = 0$). Отметим, что для предложенной реализации можно ввести еще один (кроме (7.18)) набор коммутирующих переменных

$$I_j = \left(y_j - \text{Tr}_{q,j+1}(\hat{R}_j y_j K_j) \right), \quad (7.20)$$

где $\text{Tr}_{q,j+1}(\cdot)$ — квантовый след (7.8) по $(j + 1)$ -му пространству. Для данного определения квантового следа справедлива формула $\text{Tr}_{q2}(\hat{R}) = I_1$ (см. [1]). Кроме соотношений $[I_i, I_j] = 0$, набор (7.20) интересен еще тем, что имеет простые коммутационные соотношения с $\hat{R}_i$:

$$\begin{aligned} \hat{R}_i (I_i + I_{i+1}) &= (I_i + I_{i+1}) \hat{R}_i, \\ \hat{R}_i I_j &= I_j \hat{R}_i \quad j \neq i, i + 1. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Рассмотрим теперь аффинную алгебру Бирмана — Венцеля, реализованную согласно (7.17), (7.18). Переменные (7.20) для этой алгебры переписыв-

ваются в виде

$$\begin{aligned}
 I_1 &= (L - \bar{L}) , \\
 I_2 &= (\hat{R}_1 L \hat{R}_1 - \hat{R}_1^{-1} \bar{L} \hat{R}_1^{-1}) , \\
 I_3 &= (\hat{R}_2 \hat{R}_1 L \hat{R}_1 \hat{R}_2 - \hat{R}_2^{-1} \hat{R}_1^{-1} \bar{L} \hat{R}_1^{-1} \hat{R}_2^{-1}) , \\
 I_4 &= \dots ,
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

где

$$\bar{L} \equiv \text{Tr}_{q^2}(\hat{R} L K) = \text{Tr}_{q^2}(K L \hat{R}) . \tag{7.23}$$

Для переменных (7.22) можно получить дополнительные равенства

$$(I_i + I_{i+1}) K_i = 0 = K_i (I_i + I_{i+1}) ,$$

которые усиливают соотношения (7.21). Операторы L и $\bar{L}$, кроме (7.15), подчиняются коммутационным правилам

$$\begin{aligned}
 L \hat{R}^{-1} \bar{L} \hat{R}^{-1} &= \hat{R}^{-1} \bar{L} \hat{R}^{-1} L , \quad \hat{R} L \hat{R} \bar{L} = \bar{L} \hat{R} L \hat{R} , \\
 \bar{L} \hat{R}^{-1} \bar{L} \hat{R}^{-1} &= \hat{R}^{-1} \bar{L} \hat{R}^{-1} \bar{L} ,
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

откуда, в частности, следует тождество $\bar{L} L = L \bar{L}$. Если реализовать L в виде $L = S(L^-) L^+$, то из (7.23) легко вывести

$$\bar{L} L = L \bar{L} = I \quad \text{т.е.} \quad \bar{L} = L^{-1} ,$$

после чего соотношения (7.24) становятся очевидными следствиями (7.15).

По-видимому, аффинные алгебры кос (7.13), через соответствующие представления операторов Дункля, будут связаны (см., например, [85]) с квантовой проблемой многих тел (имеются в виду различные обобщения интегрируемых квантовых моделей типа Калоджеро, Руджинарса и т.п.).

5. Решеточные алгебры Каца — Муди [64]. Рассмотрим две биалгебры $B^\pm$ с генераторами $(L^\pm)_j^i$ (L^+ — верхне-, а L^- — нижнетреугольные матрицы) и определяющими соотношениями

$$\hat{R} L_2^\pm L_1^\pm = L_2^\pm L_1^\pm \hat{R} . \tag{7.25}$$

Структурные отображения для биалгебр $B^\pm$ выберем в виде $\epsilon(L^\pm) = I$:

$$\Delta((L^+)_j^i) = (L^+)_k^i \otimes (L^+)_j^k , \quad \Delta((L^-)_j^i) = (L^-)_j^k \otimes (L^-)_k^i . \tag{7.26}$$

Отметим, что коумножение для L^+ отличается от коумножения для L^- . В этом случае биалгебры $B^\pm$ являются дуальными друг к другу относительно спаривания [86]:

$$\langle L_1^-, L_2^+ \rangle = R_{12}^{-1}. \quad (7.27)$$

Будем считать, что алгебры $B^\pm$ включают в себя элементы, соответствующие обратным матрицам $(L^\pm)^{-1}$, после чего определим антиподы в виде

$$S(L^+) = (L^+)^{-1}, \quad S^{-1}(L^-) = (L^-)^{-1},$$

тем самым мы задаем для алгебр $B^\pm$ структуру АХ. Обозначим B^{-O} АХ B^- с противоположным, по отношению к (7.26), коумножением

$$\Delta((L^-)^i_j) = (L^-)^i_k \otimes (L^-)^k_j.$$

Алгебры B^{-O} и B^+ являются антидуальными относительно спаривания (7.27). Как показано в работе [86], из АХ B^{-O} и B^+ можно построить квантовый дубль Дринфельда $B^+ \bowtie B^{-O}$, для которого перекрестные коммутационные соотношения имеют вид

$$\hat{R} L_2^+ L_1^- = L_2^- L_1^+ \hat{R}. \quad (7.28)$$

Таким образом, для алгебр $B^\pm$ (7.25) можно предложить специальное кросс-произведение, задаваемое соотношениями (7.28), которое снова является АХ, и которое использовалось в [2] для *R*-матричной формулировки квантовых деформаций универсальных обертывающих алгебр Ли.

Для определения решеточных алгебр Каца — Мули необходимо использовать более простое кросспроизведение биалгебр $B^\pm$ (7.25). Имеется в виду так называемый дубль Гейзенберга (ДГ), который уже обсуждался в разд. 6 (см. (6.9) и (6.11)). Отметим, что ДГ двух АХ, вообще говоря, не является новой АХ, но сохраняет некоторые свойства комодульности. Используя формулы (6.11) и (7.27), получаем вместо (7.28) соотношения

$$L_2^+ L_1^- = R_{12}^{-1} L_1^- L_2^+. \quad (7.29)$$

Рассмотрим теперь одномерную цепочку, с каждым узлом которой свяжем свой ДГ $B^+ \sharp B^-$ с определяющими соотношениями (7.25) и (7.29). Алгебры $B^+ \sharp B^-$, соответствующие разным узлам цепочки, будем считать коммутирующими. Для n -го узла определим

$$S^{(n)} = (L^-)^{-1}, \quad T^{(n)} = (L^+)^{-1}. \quad (7.30)$$

Тогда из (7.25) и (7.29) следуют соотношения

$$\hat{R} S_1^{(n)} S_2^{(n)} = S_1^{(n)} S_2^{(n)} \hat{R}, \quad \hat{R} T_1^{(n)} T_2^{(n)} = T_1^{(n)} T_2^{(n)} \hat{R}, \quad (7.31)$$

$$S_1^{(n)} T_2^{(n)} = T_2^{(n)} S_1^{(n)} R_{12} . \quad (7.32)$$

Зададим новые генераторы [64]:

$$L^{(n)} = T^{(n+1)} S^{(n)} (T^{(n)})^{-1} . \quad (7.33)$$

Для этих генераторов из (7.31), (7.32) можно получить замкнутые соотношения

$$\hat{R} L^{(n)} P L^{(n)} = L^{(n)} P L^{(n)} \hat{R} ,$$

$$L^{(n)} P L^{(n+1)} P = P L^{(n+1)} \hat{R}^{-1} L^{(n)} , \quad (7.34)$$

$$L^{(n)} P L^{(m)} P = P L^{(m)} P L^{(n)} , \quad m \neq n-1, n, n+1$$

(здесь $P = P_{12}$ и $L^{(k)} \equiv L_1^{(k)}$), которые и определяют решеточную алгебру Каца — Мули [64].

Заметим, что, пользуясь техникой построения ДГ, в соотношения (7.34) довольно просто ввести спектральный параметр. Действительно, в качестве формул (7.25), (7.26) выберем

$$\hat{R}(\lambda\mu^{-1}) L_2^{\pm}(\mu) L_1^{\pm}(\lambda) = L_2^{\pm}(\lambda) L_1^{\pm}(\mu) \hat{R}(\lambda\mu^{-1}) , \quad (7.35)$$

$$\Delta(L^+(\mu)_j^i) = L^+(\mu)_k^i \otimes L^+(\mu)_j^k , \quad \Delta(L^-(\mu)_j^i) = L^-(\mu)_j^k \otimes L^-(\mu)_k^i . \quad (7.36)$$

Соответствующее уравнение Янга — Бакстера имеет вид

$$R_{12}(\lambda) R_{13}(\lambda\mu) R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu) R_{13}(\lambda\mu) R_{12}(\lambda) .$$

Здесь $\lambda, \mu, \nu, \dots$ — спектральные параметры. Выберем спаривание, согласованное с (7.35), (7.36):

$$\langle L_1^-(\lambda) , L_2^+(\mu) \rangle = R_{12}^{-1}(\lambda\mu^{-1}) , \quad (7.37)$$

после чего аналог перекрестных соотношений (7.29) записывается в виде

$$L_2^+(\mu) L_1^-(\lambda) = R_{12}^{-1}(\lambda\mu^{-1}) L_1^-(\lambda) L_2^+(\mu) . \quad (7.38)$$

Теперь можно определить образующие $S^{(n)}(\mu)$, $T^{(n)}(\mu)$, а также

$$L^{(n)}(\mu) = T^{(n+1)}(\mu) S^{(n)}(\mu) (T^{(n)}(\mu))^{-1} ,$$

и соответствующая решеточная алгебра токов будет задаваться соотношениями

$$\hat{R}(\lambda\mu^{-1}) L^{(n)}(\lambda) P L^{(n)}(\mu) = L^{(n)}(\mu) P L^{(n)}(\lambda) \hat{R}(\lambda\mu^{-1}) ,$$

$$L^{(n)}(\mu) P L^{(n+1)}(\lambda) P = P L^{(n+1)}(\lambda) \hat{R}^{-1}(\lambda\mu^{-1}) L^{(n)}(\mu) , \quad (7.39)$$

$$L^{(n)}(\lambda) P L^{(m)}(\mu) P = P L^{(m)}(\mu) P L^{(n)}(\lambda) , \quad m \neq n-1, n, n+1 .$$

В заключение отметим, что квантовый дубль для алгебр (7.35) (необходимо слегка модифицировать формулы (7.36), (7.37) за счет введения центрального элемента [87]) дает центральное расширение "квантовых групп токов" [87].

Работа над данной статьей была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 95-02-05679-а) и фондом INTAS (грант 93-127). Я признателен Г.Э.Арутюнову, П.П.Кулишу, А.Т.Филиппову и особенно А.А.Владимирову и П.Н.Пятову за многочисленные полезные обсуждения и замечания. Я также благодарен Л.Д.Фаддееву за привлечение моего внимания к проблеме определения внутренних производных для дифференциальной алгебры, предложенной в работе [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаев А.П. — ЭЧАЯ, 1995, т.26, вып.5, с.1204; англ. пер.: Phys.Part.Nucl. 1995, vol. 26, No.5, p.501.
2. Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып. 1, с.178.
3. Drinfeld V.G. — In: Proc. Inter. Congress of Mathematics, Acad. Press., Berkley, 1986, vol.1, p.798.
4. Jimbo M. — Lett.Math.Phys., 1986, vol.11, p.247; Comm.Math.Phys., 1986, v.102, p.537.
5. Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. — ТМФ, 1979, т.40, No.2, с.194.
6. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. — Успехи мат. наук, 1979, т.34, No.5, с.13.
7. Фаддеев Л.Д. — В сб.: Проблемы квантовой теории поля (Труды V Международного совещания по нелокальным и нелинейным теориям поля. Алушта, 1979), Дубна, 1979, с.249.
8. Alekseev A.Yu., Faddeev L.D. — Comm.Math.Phys. 1991, vol.141, p.413.
9. Pasquier V., Saleur H. — Nucl.Phys., 1990, vol.B330, p.523.
10. Kulish P.P. — Preprint YITP/K-959, 1991.
11. Alekseev A.Yu. Алгебра и анализ, 1994, т.6, вып.2, с.53.
12. Karowski M., Zapletal A. — Nucl.Phys., 1994, vol.B419, p.567.
13. Khoroshkin S., Lebedev D., Pakuliak S. — Phys. Lett., 1996, vol.A222, p.381; Preprint Bonn TH-96/04; (направлено в ТМФ);
Davies, B., Foda, O., Jimbo, M., Miwa, T., Nakayashiki, A. — Comm. Math. Phys., 1993, vol.151, p.89.
14. Алексеев А.Ю., Фаддеев Л.Д. — Зап.Науч.Сем.ЛОМИ, 1992, т.200, с.3; hep-th/9406196.
15. Connes A. — Geometrie non commutative, Interditions, Paris, 1990.
16. Woronowicz S.L. — Comm.Math.Phys., 1989, vol.122, p.125.
17. Aschieri P., Castellani L. — Int.J.Mod.Phys. A, 1993, vol.8, p.1667.
18. Faddeev L.D., Pyatov P.N. — The Differential Calculus on Quantum Linear Groups, In: Contemporary Mathematical Physics. Eds. R.L.Dobrushin et al, AMS Transactions – Series 2, 1996, vol.175, hep-th/9402070; в сб.: Проблемы современной теоретической физики (к 60-летию А.Т.Филиппова), ОИЯИ, 96-212, Дубна, 1996, с.19.

19. Sweedler M.E. — Hopf Algebras. Benjamin, 1969.
20. Abe E. — Hopf Algebras. Cambridge University Press, 1977.
21. Majid Sh. — Int. J. Mod. Phys., 1990, vol.A5, p.1.
22. Jurčo B. — Lett. Math. Phys., 1991, vol.22, p.177.
23. Кобаяси Ш., Номидзу К. — Основы дифференциальной геометрии, М.: Наука, 1981.
24. Podleś P., Woronowicz S.L. — Comm.Math.Phys., 1990, vol.130, p.381.
Bonechi F., Giachetti R., Maciocco R., Sorace E., Tarlini M. — Let. Math. Phys., 1996, vol.37, p.405; q-alg/9507004.
25. Brzezinski T. — Lett.Math.Phys., 1993, vol.27, p.287.
26. Wess J., Zumino B. — Nucl.Phys. (Proc. Suppl.), 1990, vol.B18, p.302.
27. Manin Yu.I. — Montreal University Prep. CRM-1561, 1989;
Manin Yu.I. — Comm.Math.Phys., 1989, vol.122, p.163.
28. Hlavaty L. — J.Phys. A: Math.Gen., 1989, vol.25, p.485.
29. Pusz W., Woronowicz S. — Rep.Math.Phys., 1989, vol.27, p.231.
30. Kulish P.P., Damaskinsky E.V. — J.Phys. A, 1990, vol.23, p.L415.
31. Chaichian M., Kulish P.P., Lukierski J. — Phys.Lett., 1991, vol.B262, p.43.
32. Ogievetsky O. — Lett. Math. Phys., 1992, vol.24, p.245.
33. Filippov A.T., Isaev A.P., Kurdikov A.B. — Mod. Phys. Lett. A, 1992, vol.7, p.2129; ТМФ, 1993, т.94, с.213.
34. Zumino B. — Mod.Phys.Lett., 1991, vol.A6, p.1225.
35. Kulish P.P. — Phys.Lett., 1991, vol.A161, p.50.
36. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov A.I.B. — Nucl.Phys., 1978, vol.B133, p.525.
37. Isaev A.P., Pyatov P.N. — Phys.Lett., 1993, vol.A179, p.81.
38. Чередник И.В. — ТМФ, 1984, т.61, с.35.
39. Kulish P.P., Sklyanin E.K. — J.Phys. A, 1992, vol.25, p.5963;
Kulish P.P., Sasaki R. — Prog.Theor.Phys., 1993, vol.89, p.741;
Kulish P.P., Sasaki R., Schwiebert C. — J.Math.Phys., 1993, vol.34, p.286.
40. Kulish P.P. — Алгебра и анализ, 1994, т.6, вып.2, с.195;
de Azcarraga J.A., Kulish P.P., Rodenas F. — Fortschr. Phys., 1996, vol.44, No.1, p.1.
41. Majid Sh. — J.Math.Phys., 1991, vol.32, p.3246;
Majid Sh. — J.Math.Phys., 1993, vol.34, p.1176
Majid Sh. — J.Math.Phys., 1995, vol.36, p.1991.
42. Gurevich D. — In: Proc. of Semester "Quantum Groups and Quantum Spaces" (November 1995, Warsaw, Poland), Banach International Mathematical Center Publications, Warsaw, 1996.
43. Isaev A.P. — Lett.Math.Phys., 1995, vol.34, p.333.
44. Isaev A.P., Vladimirov A.A. — Lett.Math.Phys., 1995, vol.33, p.297.
45. Zumino B. — In: Proc. of XIX International Conference on Group Theoretic Methods in Physics (Salamanca, Spain 1992); Berkeley preprint LBL-33249, 1992.
46. Maltsiniotis G. — C.R. Acad.Sci.Paris, 1990, vol.311, Ser.I, p.831;
Maltsiniotis G. — Comm.Math.Phys., 1993, vol.151, p.275;
47. Манин Ю.И. — ТМФ, 1992, т.92, с.425.

48. Sudbery A. — Phys.Lett., 1992, vol.B284, p.61;
Sudbery A. — Math.Proc.Camb. Phil.Soc., 1993, vol.114, p.111.
49. Schirrmacher A. — In: Proc. of the 1st Max Born Symposium, eds. R.Gielerak et al., Kluwer Acad. Publ., 1992, p.55.
50. Isaev A.P., Popowicz Z. — Phys.Lett., 1993, vol.B307, p.353.
51. Isaev A.P. — J.Math.Phys., 1994, vol.35, p.6784.
52. Zumino B. — In: Proc. X-th IAMP Conf. Leipzig, 1991, Heidelberg, Springer, 1992.
53. Schupp P., Watts P., Zumino B. — Lett.Math.Phys., 1992, vol.25, p.139.
54. Isaev A.P., Pyatov P.N. — J.Phys. A, 1995, vol.28, p.2227.
55. Vladimirov A.A. — J.Phys. A, 1994, vol.27, p.4497.
56. Ogievetsky O., Zumino B. — Lett. Math. Phys., 1992, vol.25, p.121.
57. Решетихин Н.Ю. — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып.2, с.169.
58. Pyatov P.N., Saponov P.A. — J.Phys. A; Math.Gen., 1995, vol.28, p.4415.
59. Nazarov M., Tarasov V. — Kyoto Univ. Preprint RIMS-913, 1993.
60. Noumi M., Umeda T., Wakayama M. — Duke Math. Journal, 1994, vol.76, No.2, p.567;
Nazarov M.L. — Lett.Math.Phys., 1991, vol.21, p.123.
61. Гуревич Д.И. — Алгебра и анализ, 1990, т.2, вып. 4, с.119;
Burroughs N. — Comm.Math.Phys., 1990, vol.133, p.91.
62. Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. — Phys.Lett., 1991, vol.B264, p.62.
63. Faddeev L.D. — In: Fields and Particles, Proceedings of the XXIX Winter School in Nuclear Physics, eds. H.Mitter and W.Schweiger, Schladmig, Austria, Springer, Heidelberg, 1990, p.89.
64. Alekseev A.Yu., Faddeev L.D., Semenov-Tian-Shansky M. — Comm.Math.Phys., 1992, vol.149, p.335;
Alekseev A.Yu., Faddeev L.D., Semenov-Tian-Shansky M., Volkov A. — Preprint CERN TH-5981/91, 1991.
65. Исаев А.П. — ТМФ, 1987, vol.71, No.3, p.395.
66. Isaev A.P., Pyatov P.N. — In: Proc. of Workshop "Geometry and Integrable Models". Eds. P.Pyatov and S.Solodukhin, World Sci., 1996, p.182.
67. Wataamura S. — Comm.Math.Phys., 1992, vol.158, p.67.
68. Зупник Б.М. — Письма в ЖЭТФ, 1995, т.61, No.6, с.434; там же, 1955, т.62, No.4, с.364.
69. Lusztig G. — Adv. in Math., 1988, vol.70, p.237;
Rosso M. — C.R.Acad.Sci., Paris, Ser. I, 1987, vol.305, p.587.
70. Arutyunov G.E., Medvedev P.B. — J.Math.Phys., 1995, vol.36, p.6981;
Arutyunov G.E., Medvedev P.B. — Препринт SMI-11-93, 1993, hep-th/9311096.
71. Aref'eva I.Ya., Arutyunov G.E., Medvedev P.B. — J.Math.Phys., 1994, vol.35, p.6658.
72. Drabant B., Jurčo B., Schlieker M., Weich W., Zumino B. — Lett.Math.Phys., 1992, vol.26, p.91.
73. Schmudgen K., Schuler A. — C.R. Acad.Sci., Paris, Ser. I, 1993, vol.316, p.1155.
74. Schupp P., Watts P., Zumino B. — Comm.Math.Phys., 1993, vol.157, p.305.
75. Arutyunov G.E., Isaev A.P., Popowicz Z. — J.Phys. A, 1995, vol.28, p.4349.
76. Carow-Watamura U., Schlieker M., Wataamura S. — Comm.Math.Phys., 1991, vol.142, p.605;

77. Семенов-Тянь-Шанский М.А. — ТМФ, 1992, т.93, с.302.
78. Castellani L., Monteiro M.A.R. — Phys.Lett., 1993, vol.B314, p.25.
79. Woronowicz S.L. — Publ.Res.Inst.Math.Sci., Kyoto University, 1987, vol.23, p.117;
Акулов В.П., Гершун В.Д., Гуменчук А.И. — Письма в ЖЭТФ, 1993, т.58, с.462.
80. Дринфельд В.Г. — Алгебра и анализ, 1989, т.1, вып. 2, с.30.
81. Reshetikhin N.Yu., Turaev V.G. — Comm.Math.Phys., 1990, vol.127, p.1.
82. Reshetikhin N.Yu., Semenov-Tian-Shansky M.A. — Geometry and Physics, 1988, vol.5, p.533.
83. Maillet J.M. — Phys.Lett., 1990, vol.B245, p.480.
84. Isaev A.P., Ogievetsky O.V., Pyatov P.N., Saponov P.A. — Preprint CPT Marseille, CPT - 96/p.3366.
85. Cherednik I. — In: Proc. XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, July 18-23, 1994) International Press, 1995, p.716;
Pasquier V. — Preprint Saclay SPhT/94-060, hep-th/9405104 (1994).
86. Vladimirov A.A. — Mod.Phys.Lett. A, 1993, vol.8, p.1315.
87. Reshetikhin N.Yu., Semenov-Tian-Shansky M.A. — Lett. Math. Phys., 1990, vol.19, p.133.

μ SR-ИССЛЕДОВАНИЯ НА ФАЗОТРОНЕ ЛАБОРАТОРИИ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ ОИЯИ

В.А.Жуков, Т.Н.Мамедов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Б.А.Никольский, А.Н.Пономарев

РНЦ «Курчатовский институт», Москва

В.Г.Фирсов

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Представлены наиболее значительные результаты по исследованию вещества с помощью мюонов, полученные за 30-летний период развития этих исследований на ускорителе протонов на энергию 680 МэВ (фазотроне) Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ. Эта техника, получившая теперь название μ SR-метода, впервые широкомасштабно начала использоваться группой исследователей из ЛЯП ОИЯИ, РНЦ «Курчатовский институт» и ИТЭФ (Москва) именно в Лаборатории ядерных проблем. В обзоре представлены принцип μ SR-метода и экспериментальные условия на фазотроне для проведения этих исследований. Рассмотрены результаты опыта по измерению коэффициента асимметрии в $\mu^+ \rightarrow e^+$ -распаде, а также экспериментов, приведших к открытиям двухчастотной прецессии спина мюония, подбарьерной некогерентной диффузии положительного мюона в металлах, мюония в твердых веществах. Приводятся наиболее существенные результаты по исследованию полупроводников, изоляторов, ферро- и антиферромагнетиков, высокотемпературных сверхпроводников, процессов диффузии положительного мюона в металлах, химических реакций с участием мюония, а также применению отрицательных мюонов для изучения вещества.

The most significant results of matter study with muons, obtained for 30 years of the research at the 680-MeV proton accelerator (phasotron) at the Laboratory of Nuclear Problems (LNP) of JINR, are presented. It is at the LNP that this technique, now called the μ SR method, was first widely used by a group of researchers from LNP, «Kurchatov Institute», and ITEP. The review describes the principle of the μ SR method and the relevant experimental conditions at the phasotron. The results of the experimental measurement of the asymmetry coefficient in the $\mu^+ \rightarrow e^+$ decay and of the experiments that led to discovery of two-frequency precession of muonium spin, underbarrier incoherent diffusion of the positive muon in metals and muonium in solids are considered. Also the most important results of investigating semiconductors, dielectrics, ferromagnets, antiferromagnets, high-temperature superconductors, processes of positive muon diffusion in metals, muonium-involving chemical reactions, and of using negative muons to study matter are described.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия на ускорителях промежуточных энергий интенсивно развивается новый метод изучения конденсированного состояния вещества с использованием мюона в качестве элементарного магнитного зонда [1]. Эта техника была названа μSR -методом, что может быть расшифровано как «*Muon Spin Rotation*», или «*Relaxation*», или «*Resonance*», или в более общем виде «*Research*». Эксперименты проводятся с помощью как положительно, так и отрицательно заряженных мюонов.

Положительный мюон, локализуясь с междоузлиях и вакансиях кристаллической решетки, измеряет распределения локальных магнитных полей в этих областях. Он может выступать также как примесная частица, моделирующая процессы с участием других однозарядных примесей (например, протона). В тех случаях, когда в веществе образуется экзотический атом мюония (μ^+e^-), аналогичный атому водорода, могут быть изучены быстрые химические реакции этой системы.

С помощью отрицательных мюонов, которые, останавливаясь в веществе, образуют мюонные атомы, зондируется область в узле кристаллической решетки. Поскольку орбита мюона в мюонном атоме в основном состоянии примерно в 200 раз меньше электронной орбиты (из-за различия масс $m_\mu/m_e = 209$), то образованный мюонный атом может рассматриваться как примесная частица с зарядом псевдоядра ($Z - 1$).

На фазотроне (бывшем синхроциклотроне) Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ μSR -исследования интенсивно ведутся с конца 60-х годов группами исследователей Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ, Курчатовского института, ИТЭФ и МИФИ. Отдельные результаты этих работ, относящиеся главным образом к начальному периоду исследований, приведены в обзорах и книгах [2,3].

В 1985 г. после реконструкции синхроциклотрона в фазотрон, позволившей повысить в 20—25 раз интенсивность выведенного пучка протонов, возможности μSR -исследований существенно расширились. В данной статье систематизируются наиболее существенные результаты ранних работ и дается обзор современного состояния μSR -исследований на фазотроне ОИЯИ.

2. ПРИНЦИП μSR -МЕТОДА

Использование мюонов для изучения вещества основано на явлении не сохранения чистоты в слабых взаимодействиях, в силу которого получаемые на ускорителях мюоны от распада $\pi^+(\pi^-) \rightarrow \mu^+(\mu^-) + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ поляризованы вдоль направления своего импульса. Взаимодействие магнитных мо-

ментов мюонов, имплантированных в образец, с локальными магнитными полями в веществе приводит к изменению начальной поляризации. Направление поляризации мюонов в веществе определяется по угловому распределению позитронов (электронов) распада $\mu^+(\mu^-) \rightarrow e^+(e^-) + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$, которое также в силу несохранения четности имеет асимметричный вид:

$$f(\theta) \approx 1 + a \cos \theta,$$

где θ — угол между импульсом позитрона (электрона) и направлением спина мюона, $a = \xi/3$ — коэффициент асимметрии, $\xi = 1$ по универсальной V-A-теории слабого взаимодействия. Наиболее точное значение коэффициента a получено на синхроциклотроне ЛЯП в эксперименте [4,5], в котором для подавления деполяризующего действия среды использовалось продольное (вдоль направления спина положительного мюона) магнитное поле 140 кГс. Эксперимент проводился в фотоэмульсии, получено значение $a = 0,325 \pm 0,005$.

Эксперименты могут проводиться в нулевом внешнем магнитном поле, а также в магнитных полях, направленных перпендикулярно ($H_\perp$) и параллельно ($H_\parallel$) начальной поляризации мюонов. Большинство экспериментальных результатов до сих пор получено с использованием способа индивидуального счета событий, заключающегося в отдельной регистрации имплантированного в образец мюона и принадлежащего ему вылетающего из образца позитрона (электрона) $\mu \rightarrow e$ -распада.

Принцип μSR-техники может быть пояснен на примере эксперимента с положительными мюонами (рис.1) в перпендикулярном поле (случай вращения спина мюона). Пучок мюонов с известной начальной поляризацией направляется на образец 5. Позитроны регистрируются в направлении, перпендикулярном направлению внешнего магнитного поля. Момент остановки мюона t_μ в исследуемом образце 5 фиксируется по совпадению сигналов от сцинтилляционных счетчиков 1 и 2 при отсутствии сигнала в счетчике 3, момент вылета позитрона распада t_e — по совпадению сигналов от счетчиков 3 и 4 при отсутствии сигнала в счетчике 2.

Экспериментальный спектр, представляющий собой число зарегистрированных позитронов как функцию временного интервала $t = t_e - t_\mu$, может быть описан теоретической формулой

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_\mu) [1 + \sum a_i G_{xi}(t) \cos(\omega_{\mu i} t + \varphi_i)] + B, \quad (1)$$

где N_0 — нормировочная постоянная, $\tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с — среднее время жизни мюона и B — фон. Через a_i , G_{xi} , $\omega_{\mu i}$ и φ_i соответственно обозначены

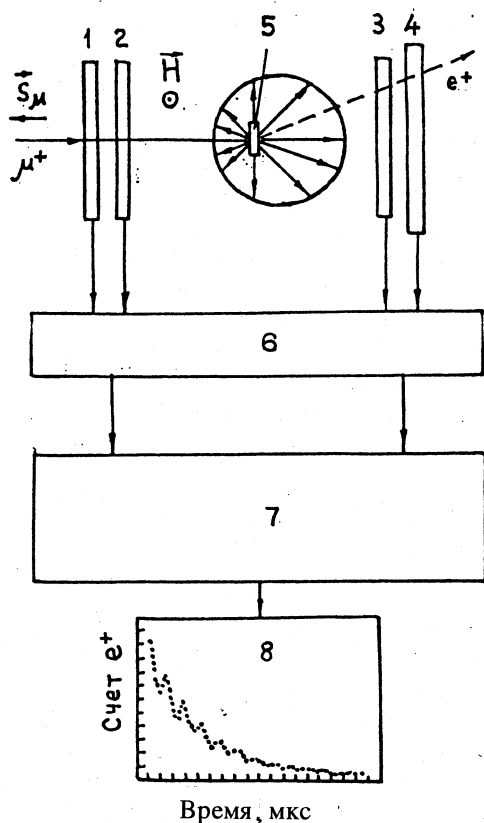


Рис.1. Схема μ^+SR -эксперимента в перпендикулярном по отношению к направлению спина мюона внешнем магнитном поле: 1, 2 — сцинтилляционные счетчики, регистрирующие μ^+ ; 3, 4 — сцинтилляционные счетчики, регистрирующие e^+ ; 5 — образец; 6 — система отбора событий; 7 — преобразователь время-код и блоки памяти; 8 — μSR -гистограмма

ны экспериментальный коэффициент асимметрии (начальная поляризация), функция поперечной поляризации, частота и начальный сдвиг фазы прецессии спина мюона, соответствующие вкладам в прецессионный сигнал i -го распределения магнитного поля в исследуемом веществе. Случайная компонента небольшого (~ 1 Гс) локального магнитного поля вдоль приложенного сильного внешнего поля приводит к дефазировке прецессии мюонного ансамбля.

Сопоставление теоретического спектра с экспериментальным позволяет подобрать по методу максимального правдоподобия параметры, входящие в формулу (1).

По асимметрии a_i может быть вычислена доля определенной фазы вещества, вносящая вклад в отдельный прецессионный сигнал.

Частота прецессии связана со средним локальным магнитным полем на мюоне $\langle B_{\mu i} \rangle$ соотношением $\omega_{\mu i} = \gamma_{\mu} \langle B_{\mu i} \rangle$, где $\gamma_{\mu} = 2\pi \cdot 13,55$ кГц/Гс — гиромагнитное отношение мюона. Для определения отдельных частот $\omega_{\mu i}$ временная гистограмма (1) может быть трансформирована в частотный спектр с помощью фурье-преобразования.

Вид функции $G_{xi}(t)$ определяется природой деполяризации мюонного ансамбля. Аналитическое выражение для функции поляризации в соответствии с [6—8] может быть записано следующим образом:

$$G_{xi}(t) = \exp \{ -\sigma_{xi}^2 \tau_c^2 [\exp(-t/\tau_c) - 1 + t/\tau_c] \}, \quad (2)$$

где σ_{xi} — скорость деполяризации связана со вторым моментом распределения магнитного поля на мюоне $\langle \Delta B_{\mu i}^2 \rangle$ соотношением $\sigma_{xi}^2 = \gamma_{\mu}^2 \langle \Delta B_{\mu i}^2 \rangle$, а параметр τ_c представляет собой корреляционное время флуктуаций локальных полей. Для диффундирующего мюона τ_c относится к времени пребывания мюона в данном положении. В двух предельных случаях для функции $G_{xi}(t)$ используется гауссовская и экспоненциальная зависимости:

$$G_{xi}(t) = \exp(-\sigma_{xi}^2 t^2 / 2) \quad (3)$$

— в случае непрерывного изотропного гауссовского распределения статистических локальных полей и

$$G_{xi}(t) = \exp(-\Lambda_{xi} t) \quad (4)$$

— в случае беспорядочных локальных полей, быстро флуктуирующих во времени. Здесь $\Lambda_{xi} = \gamma_{\mu}^2 \langle \Delta B_{\mu i}^2 \rangle \tau_c$.

Начальная фаза φ_i также может быть связана с процессами взаимодействия мюона с веществом. Например, в случае образования мюония, ларморовская частота прецессии которого, определяемая магнитным моментом электрона, в ~ 100 раз превышает ларморовскую частоту мюона, сдвиг начальной фазы, пока мюоний не вступит в химическую реакцию, может быть заметным.

В нулевом внешнем магнитном поле или в поле, параллельном начальной поляризации мюона (случай релаксации поляризации мюона) в эксперименте регистрируются позитроны, испущенные вперед и назад по отношению к направлению пучка мюонов. Формула (1) запишется следующим образом:

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_{\mu}) [1 + \sum a_i G_{zi}(t)] + B. \quad (5)$$

$G_{zi}(t)$ представляет собой в данном случае функцию продольной поляризации. Она может быть найдена из сравнения скоростей счетов позитронов, вылетающих вперед N^+ и назад N^- :

$$G_{zi} = \frac{1}{a_i} \frac{N^+ - RN^-}{N^+ + RN^-}, \quad (6)$$

где R — экспериментальный коэффициент, учитывающий характеристики детекторов.

Особый интерес представляет вид функции поляризации (функция Кубо — Тойабе) [9] для случая замороженных, беспорядочно ориентированных локальных магнитных полей (характерных, например, для спинового стекла) при измерениях в нулевом внешнем поле:

$$G_z(t) = 1/3 + 2/3 (1 - \Delta_z^2 t^2) \exp \left(-\frac{1}{2} \Delta_z^2 t^2 \right), \quad (7)$$

где $\Delta_z^2 = \gamma_\mu^2 \langle B_z^2 \rangle$.

В типичном μSR -спектрометре характерное время открытия ворот для регистрации индивидуального события составляет ~ 10 мкс (несколько времен жизни мюона), что ведет к ограничению числа остановок мюонов в образце до $5 \cdot 10^4$ μ /с, а следовательно, и к ограничению начальной интенсивности мюонного пучка.

Обычная статистика ($\sim 5 \cdot 10^6$ зарегистрированных позитронов $\mu^+ \rightarrow e^+$ -распада) при умеренной скорости деполяризации ($\sim 0,1 + 0,2$ мкс $^{-1}$) позволяет измерить $\omega \sim \langle B_\mu \rangle$ с точностью лучше 10^{-4} , Λ или $\sigma \sim \langle \Delta B_\mu^2 \rangle^{1/2}$ — с точностью 10^{-3} и a — с точностью 10^{-2} .

С помощью μSR -метода изучаются динамические процессы в диапазоне времен $10^{-9} + 10^{-5}$ с.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ НА ФАЗОТРОНЕ [10,11]

Общий план вывода пучков частиц и размещения экспериментальной аппаратуры для μSR -экспериментов приведен на рис.2.

Мюоны образуются в мишенях, облучаемых пучком протонов фазотрона, имеющим следующие характеристики: энергия (659 ± 6) МэВ; интенсивность $1,6 + 2,0$ мкА.

Используются два вида мюонных пучков.

Мюоны (μ^+ или μ^-) от распада пионов на лету. Пионы образуются в результате облучения протонным пучком бериллиевой мишени M_1 . Часть пионов направляется в мюонные каналы 1 или 2, состоящие из последовательности фокусирующих квадрупольных магнитных линз. Проходя мюонный канал и распадаясь на лету, пионы создают на выходе канала в месте расположения μSR -установок пучок довольно энергичных мюонов. В данных экспериментах используются мюоны с импульсом 125 МэВ/с ($E_\mu = 58$ МэВ). Импульсный разброс в пучках $\Delta p/p = 10\%$, поляризация 80%. Интенсивности пучков мюонов на 1 мкА протонного пучка через телескоп счетчиков с размерами сцинтиллятора 10×10 см следующие:

канал 1: $3 \cdot 10^5$ μ^+ /с (примесь 3% e^+)

10^5 μ^- /с (примесь 6% e^- ; 2,4% π^-),

канал 2: $2 \cdot 10^5$ μ^+ /с (примесь 3% e^+ ; 0,45% π^+)

$6 \cdot 10^4$ μ^- /с (примесь 9% e^- ; 0,4% π^-).

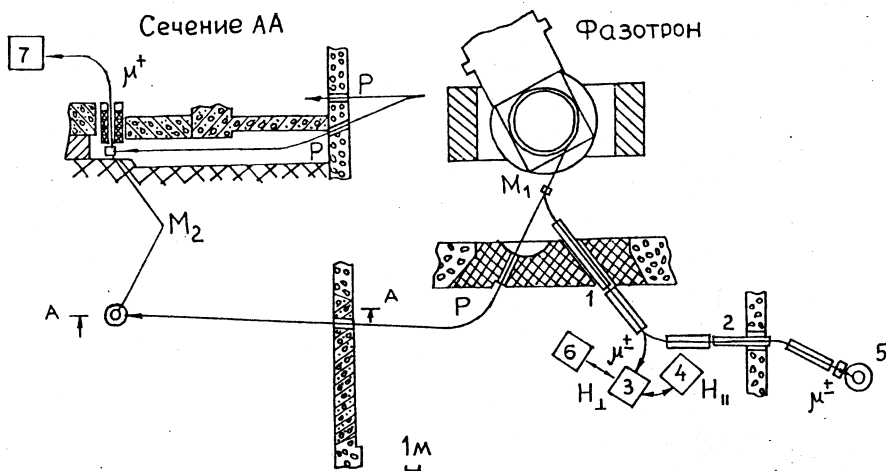


Рис.2. Схема пучков частиц фазотрона и расположение μSR-установок. M_1 , M_2 — пионообразующие мишени; 1, 2 — мюонные каналы; 3, 4 — μSR-спектрометры с перпендикулярным и параллельным по отношению к направлению спина мюона магнитными полями; 5 — μSR-спектрометр на базе рефрижератора растворения $^3\text{He}/^4\text{He}$; 6 — спектрометр для изучения химических реакций мюония; 7 — μSR-спектрометр на пучке «поверхностных» мюонов

«Поверхностные» [13] мюоны (μ^+). Они образуются в результате облучения протонным пучком пионообразующей мишени M_2 . Магнитная система отбора мюонов настроена таким образом, что отбираются только те мюоны, которые возникают от распада π^+ -мезонов, родившихся в глубине мишени M_2 и достигших ее поверхности при нулевой кинетической энергии.

Пучок μ^+ характеризуется низкой кинетической энергией $E_{\mu}^{\text{кин}} = 4,12 \text{ МэВ}$ ($p_{\mu} \sim 30 \text{ МэВ/с}$) и 100% поляризацией. Интенсивность на площадь $\sim 80 \text{ см}^2$ составляет $4,3 \cdot 10^5 \mu^+/\text{с} \cdot \text{мкА}$, импульсный разброс $\Delta p/p = 5,8\%$.

4. КОМПЛЕКС μSR-УСТАНОВОК [12,14]

Эксперименты проводятся с помощью нескольких μSR-установок, входящих в экспериментальный комплекс «МЮСПИН» и обеспечивающих исследования в широких диапазонах внешних магнитных полей и температур (рис.2). Установки располагаются на подвижных платформах. В зави-

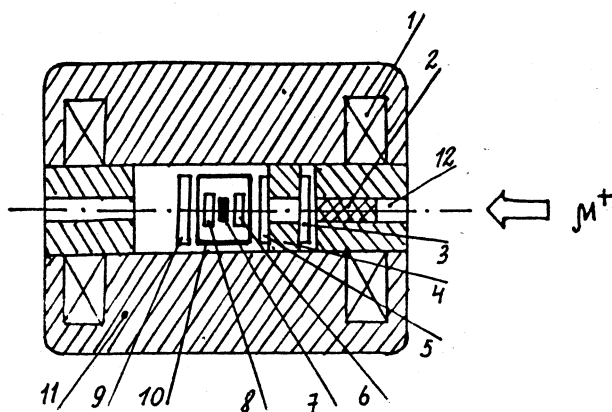


Рис.3. Схематический вид μ SR-установки: 1 — катушка электромагнита; 2 — поглонитель; 3, 5, 6, 8, 9 — сцинтилляционные счетчики; 4 — коллиматор; 7 — исследуемый образец; 10 — криостат; 11 — ярмо электромагнита; 12 — отверстие в ярме для пучка мюонов

симости от требований эксперимента установка с необходимыми параметрами может быть передвинута на нужный пучок мюонов.

Схема одной из μ SR-установок, предназначенной для экспериментов на пучке мюонного канала 1 (рис.2, поз.3) представлена на рис.3. Установка позволяет получить временные спектры позитронов распада, вылетающих вперед и назад по отношению к направлению пучка мюонов. Магнитное поле на образце $7 H_{\perp} \sim 0 \div 5$ кГс создается с помощью панцирного электромагнита 11. Мюоны проходят через отверстие 12 в ярме магнита, теряют часть своей энергии в замедлителе 2 и после прохождения коллиматора 4 попадают в образец 7, помещенный в криостат 10. Типичный образец для исследований имеет вид шайбы диаметром ~ 3 см с количеством вещества $4 \div 5$ г/см² в направлении мюонного пучка. Сигнал совпадений от сцинтилляционных счетчиков 3, 5, 6 (при отсутствии сигнала в счетчике 8) фиксирует момент остановки мюона в образце. Совпадения сигналов в счетчиках 8, 9 регистрируют позитроны, вылетающие по направлению пучка мюонов. Совпадения сигналов в счетчиках 5, 6 (при отсутствии сигнала в счетчике 3) регистрируют позитроны, вылетающие назад. Сигнал, фиксирующий остановку мюона в образце, открывает стартовые «ворота» длительностью 10 мкс для регистрации события $\mu \rightarrow e$ -распада. Временной

интервал между появлением мюона в образце и вылетом позитрона с помощью время-цифрового преобразователя трансформируется в цифровой код. Система отбора событий позволяет эффективно исключить частицы, проходящие напролет все счетчики (мюоны, пионы и позитроны), а также предотвратить запись в спектры событий, когда во временном интервале «ворот» 10 мкс регистрируется более одного мюона и одного позитрона. Разрешающее время спектрометрической системы $\sim 1,2$ нс, отношение фона случайных совпадений к полезным событиям $B/N_0 \sim 3 \cdot 10^{-4}$ (см. формулу (1)). Сбор и анализ экспериментальных данных осуществляется с помощью системы на основе PC/486 и VAX, подключенных к сети Ethernet.

Эксперименты могут проводиться также в параллельном (рис.2, поз.4) по отношению к направлению спина мюона магнитном поле ($0 \div 7$ кГс). Неоднородность магнитных полей (как $H_{\perp}$, так и $H_{\parallel}$) в объеме исследуемого образца (~ 10 мм вдоль пучка мюонов и ~ 40 мм диаметром) не превышает $\sim 10^{-4}$.

Изменение температуры образца — одно из важных условий проведения μSR-экспериментов. Для обеспечения температур $4,2 \div 300$ К используются криостаты, где охлаждение образцов осуществляется потоком холодного газообразного ^4He . Температура газа регулируется с помощью нагревателей. Точность поддержания температур во всех криостатах в диапазоне $4,2 \div 300$ К составляет $\sim 0,1$ К.

Условия эксперимента контролируются автоматизированной системой на базе PC/AT 386.

Установка на пучке «поверхностных» мюонов (рис.2, поз.7) содержит криостат ($5 \div 300$ К), помещенный в поперечное магнитное поле (до 1 кГс, неоднородность $\sim 10^{-3}$), создаваемое катушками Гельмгольца.

В установке для изучения химических взаимодействий мюония (рис.2, поз.6) могут быть использованы как поперечные поля, так и продольные (до 400 Гс), создаваемые катушками Гельмгольца. Криостат позволяет проводить исследования при температурах ≥ 77 К.

5. ОБНАРУЖЕНИЕ МЮОНИЯ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Атом мюония Mu (связанное состояние (μ^+e^-)) по основным параметрам (размер, ионизационный потенциал и др.) подобен атому водорода H , отличаясь от последнего массой ($m_{\text{Mu}} \approx 1/9m_{\text{H}}$). Существенным отличием является то, что меченая частица мюон в атоме Mu поляризована. По изменению поляризации можно судить о взаимодействии мюония с веществом.

Впервые атом мюония наблюдался в благородных газах [15]. Однако наибольший интерес вызывает наличие мюония в конденсированной фазе вещества в связи с расширением спектра исследуемых процессов. Имплантируемый в вещество положительный мюон с равной вероятностью образует триплетный мюоний со спином $I = 1$ и синглетный мюоний со спином $I = 0$. Синглетный мюоний полностью деполяризуется за время $1/\omega_0$, где ω_0 — частота сверхтонкого взаимодействия между состояниями с $I = 1$ и $I = 0$. Дополнительная деполяризация может произойти в результате переходов $I = 1,0 \rightleftharpoons I = 0,0$, возникающих из-за опрокидывания спина электрона мюония при взаимодействии его с электронами проводимости среды. Другой причиной деполяризации может быть вступление мюония в химические соединения. Теория деполяризации мюония развита в работах [20—24]. Из сказанного следует, что обнаружение мюония возможно в химически инертных средах, когда скорость химических реакций или других процессов, приводящих к деполяризации, мала по сравнению с временем жизни мюона. При этом в эксперименте может быть видна в лучшем случае только половина начальной поляризации мюона, соответствующая триплетному мюонию. В достаточно малом поперечном магнитном поле $H_{\perp}$ атом мюония в триплетном состоянии прецессирует как целое с ларморовской частотой $\omega = \frac{eH_{\perp}}{2m_e c}$, где m_e — масса электрона. Наблюдение частоты ω обычно является экспериментальным доказательством существования долгоживущего примесного атома мюония в данном веществе.

Впервые в конденсированной среде мюоний был обнаружен в монокристаллах кварца высокой чистоты при проведении экспериментов на синхротронном циклотроне ЛЯП ОИЯИ [16,17]. На рис.4 представлена прецессионная кривая для кварца. Частота ларморовской прецессии в перпендикулярном магнитном поле ($H_{\perp} = 1,35 \div 37$ Э) соответствовала гиромагнитному отношению системы атомного триплетного мюония (Mu^T) с точностью лучше 0,5%. Значение поляризации в начальный момент времени ($P_0 = 0,51 \pm 0,03$) полностью соответствует ожидаемой доле триплетного состояния мюония. Время релаксации поляризации мюония в кристаллах SiO_2 составляет ~ 400 нс, что свидетельствует о высокой чувствительности магнитного момента мюония к внешним возмущениям, вызванным наличием локальных магнитных полей, протеканием конверсионных взаимодействий или медленными химическими реакциями. Идентификация мюония в конденсированной среде, открывшая перспективу исследования его физико-

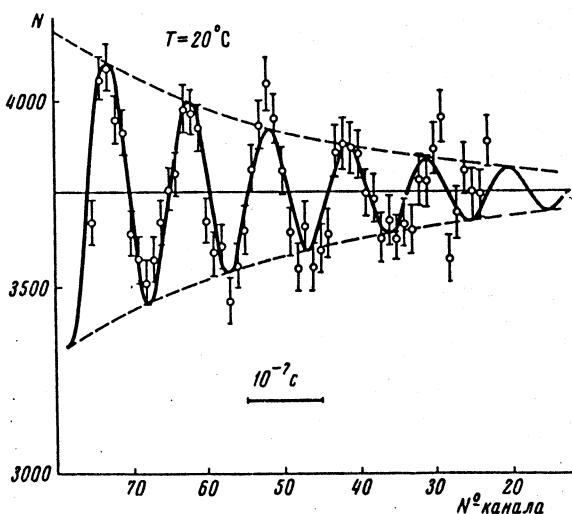


Рис.4. Кривая прецессии мюония в кристаллическом кварце. По оси абсцисс — номер канала (ширина канала 10,1 нс). По оси ординат — число отсчетов, исправленное на экспоненциальный распад мюона

химических взаимодействий с веществом, была зарегистрирована [18] в Государственном реестре СССР в качестве открытия №161. В дальнейшем атомарный мюоний был обнаружен в монокристаллах льда, плавленом кварце, твердой углекислоте и других материалах [19].

6. СВЕРХТОНКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТОМА МЮОНИЯ В ВЕЩЕСТВЕ

В этом разделе рассматривается измерение частоты ω_0 сверхтонкого взаимодействия примесного атома мюония в веществе. Частота ω_0 характеризует плотность $|\varphi(0)|^2$ волновой функции электрона с неспаренным спином на положительном мюоне. Соотношение, связывающее ω_0 и $|\varphi(0)|^2$, имеет следующий вид [25]:

$$\omega_0 = \frac{32\pi\mu_e\mu_\mu}{3\hbar} |\varphi(0)|^2 = \frac{2\mu_e}{\hbar} H_0. \quad (8)$$

Здесь μ_e и μ_μ — магнитные моменты электрона и мюона, $H_0 = 1585 \text{ Э}$ — удвоенное значение магнитного поля, создаваемого магнитным моментом мюона на электроны мюония. В вакууме $\Delta\nu_{\text{вак}} = \frac{\omega_0}{2\pi} = 4463 \text{ МГц}$.

Частота ω_0 в диэлектриках или чистых полупроводниках, где отсутствуют в заметном количестве свободные электроны, определяется методом, который мы назвали двухчастотной прецессией спина мюония. Это явление было предсказано, впервые наблюдалось в работах [26,27] и зарегистрировано как открытие.

Одночастотная прецессия, по которой идентифицировался мюоний (см. разд.5), является лишь приближением, которое справедливо только для относительно коротких времен и малых магнитных полей. В действительности прецессия или временная зависимость поляризации спина μ^+ в мюонии определяется не одной, а несколькими частотами. Это является следствием того, что основное S состояние атома мюония в магнитном поле представляет собой четырехуровневую систему и в общем случае является суперпозицией четырех стационарных состояний с энергиями $\hbar\omega_i$, отвечающими различным комбинациям спинов электрона и мюона (рис.5). Правило отбора $\Delta M = \pm 1$, где M — магнитное квантовое число, приводит к тому, что из шести возможных частот $\omega_{ik} = \omega_i - \omega_k$ ($i, k = 1 + 4$) только четыре ($\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{14}, \omega_{34}$) определяют временную зависимость поляризации.

В общем случае эта зависимость, содержащая частоты ω_{ik} , имеет довольно сложный вид, но существенно упрощается для случаев слабого и сильного внешних магнитных полей $H_\perp$. В слабом ($H_\perp \ll H_0$) магнитном поле экспериментально наблюдаемая зависимость поляризации $P_{\text{набл}}(t)$ может быть записана в виде

$$P_{\text{набл}}(t) = \frac{1}{4} [\cos \omega_{12}t + \cos \omega_{23}t] = \frac{1}{2} \cos \Omega t \cdot \cos \omega t. \quad (9)$$

Здесь $\omega = \frac{1}{2} (\omega_{12} + \omega_{23}) = \frac{eH_\perp}{2m_e c}$ — ларморовская частота прецессии мюония

в поле $H_\perp$, $\Omega = \frac{1}{2} (\omega_{23} - \omega_{12}) \simeq \frac{\omega^2}{\omega_0}$ — частота биений. Из соотношения (9) видно, что временная зависимость $P_{\text{набл}}(t)$ определяется двумя частотами и может быть названа двухчастотной прецессией или биениями спина мюона. В случае сильного поля частота биений определяется частотами ω_{12} и ω_{34} (рис.5).

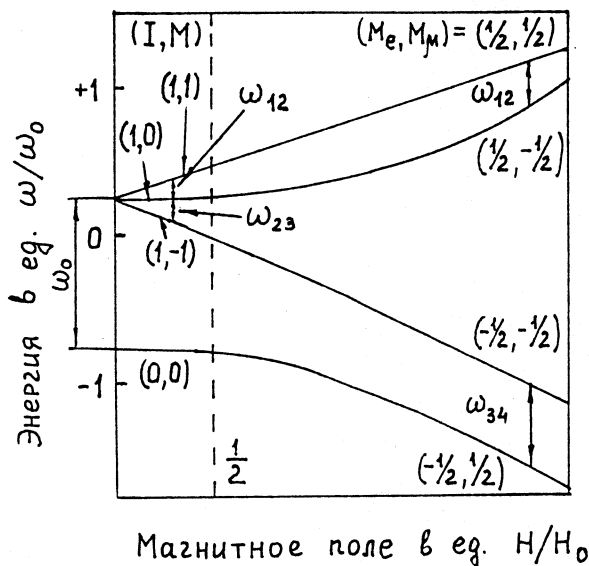


Рис.5. Энергии стационарных состояний мюония в магнитном поле. Стрелками указаны частоты ω_{12} , ω_{23} и ω_{12} , ω_{34} , определяющие двухчастотную прецессию, соответственно, в слабых ($H \ll H_0$) и сильных ($H \gg H_0$) полях. На рисунке указаны квантовые числа, определяющие состояние атома мюония в слабых и сильных полях: полный магнитный момент I и его проекция M на направление магнитного поля при $H \ll H_0$ и проекции спинов положительного мюона (M_μ) и электрона (M_e) при $H \gg H_0$

Экспериментально временная зависимость $P_{\text{набл}}(t)$ измерялась в слабом магнитном поле $H_\perp = 94$ Э методом регистрации позитронов $\mu^+ \rightarrow e^+$ -распада, как это было описано в разделе 2. Временной спектр $I) N(t)$ записывается в данном случае с учетом формулы (9) следующим образом:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau_\mu} \left[1 - \frac{a}{2} e^{-t/\tau} \cos \Omega t \cdot \cos \omega t \right], \quad (10)$$

где τ — время жизни (или деполяризации) атома мюония в веществе.

Двухчастотная прецессия наблюдалась в веществах, где свободный атом мюония живет достаточно долго. К таким веществам относятся, в частности, кварц, германий и лед [17,19]. На рис.6 приведена эксперименталь-

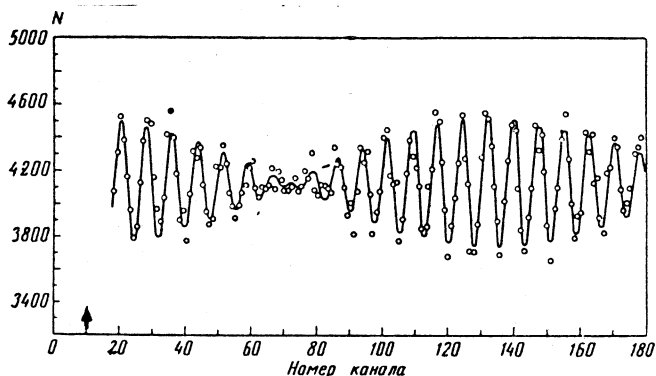


Рис.6. Двухчастотная прецессия (биения) спина положительного мюона в плавленом кварце. Сплошная кривая — теоретическая зависимость (10) $N(t)$ с параметрами, подобранными по методу наименьших квадратов. Теоретические и экспериментальные значения $N(t)$ исправлены на экспоненту распада мюона e^{-t/τ_μ} ($\tau_\mu = 2,2$ мкс). По оси ординат N — число отсчетов в канале временного анализатора шириной $\Delta t = 1$ нс. Магнитное поле $H_\perp = 95$ Э. Стрелкой указан канал, соответствующий $t = 0$

ная зависимость (10) $N_{\text{экс}}(t)$, полученная при наблюдении двухчастотной прецессии в плавленом кварце. Экспериментальные значения частот ω и Ω , а также τ , N_0 и a , входящие в выражение (10), находились из сопоставления теоретической зависимости (10) и экспериментального спектра $N_{\text{экс}}(t)$. Полученные таким образом значения ω и Ω позволяют найти частоты $\omega_0 = \omega^2/\Omega$ сверхтонкого расщепления атома в данном веществе. Экспериментальные значения частот $\Delta\nu = \omega_0/2\pi$ для различных веществ приведены в табл.1. Из нее следует, что частоты $\Delta\nu$ во льду и плавленом кварце близки к вакуумному значению $\Delta\nu_{\text{вак}} = 4463$ МГц. Частоты $\Delta\nu$ в германии существенно меньше $\Delta\nu_{\text{вак}}$. Это означает, что радиус атома мюония

$$r = \left(\frac{32\mu_e \mu_\mu}{3\hbar\omega_0} \right)^{1/3} \sim \left(\frac{1}{\Delta\nu} \right)^{1/3}$$

в германии больше, чем в вакууме:

$$r_{\text{Ге}} = (1,20 \pm 0,01) r_{\text{вак}}$$

Таблица 1. Частота $\Delta\nu$, соответствующая сверхтонкому расщеплению атома мюония в различных веществах

Вещество	T , К	$\Delta\nu$, МГц	Литература
Лед	77	4790 ± 300	[27]
Плавленный кварц	300	4404 ± 70	[27]
	300	4438 ± 8	[62]
Германий	77	2580 ± 50	[27]

7. ДИФФУЗИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО МЮОНА В МЕТАЛЛАХ

Диффузия протона в металлах является предметом интенсивного изучения на протяжении многих лет. Ниже описана диффузия положительного мюона в металлах, который, как уже указывалось, можно рассматривать в этом процессе как легкий изотоп протона. Малая масса μ^+ привела к возможности наблюдения нового процесса, когда мюон диффундирует путем просачивания под потенциальным барьером, разделяющим эквивалентные положения для этой частицы в соседних элементарных ячейках кристалла. Впервые такой процесс, зарегистрированный как открытие, наблюдался в работе [29]. В многочисленных работах (см., например, обзор [28]) было найдено, что температурная зависимость коэффициента диффузии протона в металлах имеет вид

$$D = D_0 e^{-u/T}. \quad (11)$$

Используя соотношение $D = b^2/\tau_c$ (здесь b — размер элементарной ячейки кристалла; τ_c — среднее время, которое диффундирующая частица проводит в одной кристаллической ячейке), а также полагая $D_0 = f_p b^2$, экспериментальную зависимость (11) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\tau_c} = f_p e^{-u/T}. \quad (12)$$

При изучении диффузии протона было найдено, что параметр f_p в выражении (12) одинаков для всех исследованных металлов и равен $f_p \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Совпадение экспериментального значения параметра f_p с частотой f_0 нулевых колебаний протона в кристаллической решетке металла позволяет считать, что экспериментальная зависимость (12) описывает

надбарьерную диффузию протона, где $1/\tau_c$ — вероятность «перескока» диффундирующей частицы из одной кристаллической ячейки в другую, а u — высота потенциального барьера. Было найдено, что высота барьера для протона в различных металлах колеблется в пределах $u = 1000 \div 6000$ К.

Измеренная в работе [29] температурная зависимость $1/\tau_c = f(T)$, характеризующая диффузию μ^+ в меди, также может быть описана экспоненциальной формулой

$$\frac{1}{\tau_c} = f_\mu e^{-Q/T}, \quad (13)$$

однако получающиеся при этом значения (15) параметров f_μ и Q (см. ниже) существенно отличаются от соответствующих значений f_p и u для протона: $f_\mu = 10^{7,6} \text{ с}^{-1}$, $Q = 560$ К (параметр u в меди равен $u_{Cu} = 4600$ К [30—33]). Величина $f_\mu = 10^{7,6} \text{ с}^{-1}$ слишком мала, чтобы ее можно было интерпретировать как частоту колебаний мюона в решетке меди. Отсюда следует, что диффузия мюона в меди не может быть надбарьерной и параметр f_μ не является, как для протона, частотой колебаний.

Простой расчет показывает, что малая масса мюона должна приводить к возможности подбарьерной диффузии этой частицы, которая и объясняет наблюдающиеся на опыте закономерности диффузии μ^+ в меди. Для подбарьерной диффузии вероятность $1/\tau_c$ имеет вид

$$\frac{1}{\tau_c} = f_0 e^{-\varepsilon \sqrt{u m \delta^2 / h^2}} F(T), \quad (14)$$

где ε — коэффициент порядка единицы, зависящий от формы барьера. Здесь u и δ — высота и ширина барьера соответственно, m — масса мюона, $f_0 \simeq 10^{13} \text{ с}^{-1}$ — частота колебаний мюона в решетке меди, $F(T) = e^{-Q/T}$.

Малая величина экспериментального параметра $f_\mu \ll 10^{13} \text{ с}^{-1}$ является, таким образом, результатом малой прозрачности потенциального барьера. Параметр Q , определяющий температурную зависимость $1/\tau_c$ в выражении (14), может интерпретироваться [34] как энергия активации (поляронная энергия), которую необходимо затратить для расширения междоузлия в соседней ячейке, куда диффундирует мюон.

Диффузия μ^+ наблюдалась по изменению скорости релаксации его спина из-за дипольных взаимодействий с магнитными моментами ядер вещества [29]. Максимальная скорость релаксации должна наблюдаться при

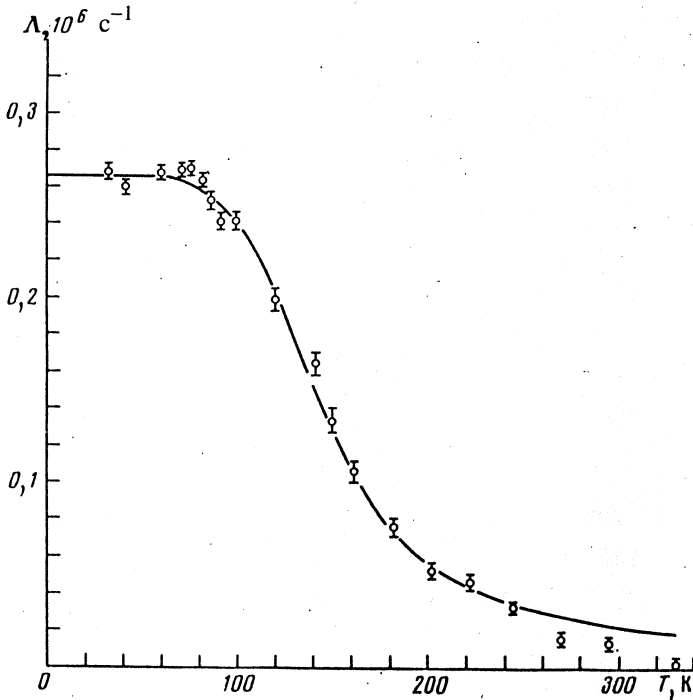


Рис.7. Температурная зависимость $\Lambda(T)$ скорости затухания амплитуды прецессии спина положительного мюона в меди. Плавная кривая — расчетная зависимость $\Lambda_{\text{расч}}(T)$, полученная в предположении, что время τ_c , определяющее скорость затухания Λ , зависит от температуры T согласно (13) с параметрами f_μ и Q (15)

низких температурах, когда среднее время τ_c пребывания мюона в одной элементарной ячейке много больше времени наблюдения, т.е. когда диффузия практически отсутствует. При диффузии μ^+ по кристаллу ядерные магнитные поля на нем становятся переменными во времени и скорость релаксации его спина падает.

Температурная зависимость $\Lambda(T)$ скорости релаксации спина μ^+ в меди приведена на рис.7. Из рисунка видно, что при достаточно низких температурах ($T < 70$ K) величина Λ становится постоянной, как это и должно быть, когда диффузия практически прекращается.

Экспериментальное наблюдение плато функции $\Lambda(T)$ при низких температурах позволяет определить параметр σ в выражении (3), которое описы-

вает зависимость $P(t)$ при отсутствии диффузии, т.е. при $T \rightarrow 0$. Полученное таким образом значение σ для меди при $T < 70$ К равно

$$\sigma_{\text{Cu}} = (0,266 \pm 0,003) \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Найденное значение параметра σ позволяет воспользоваться формулой (2) для определения времени τ_c . Температурная зависимость τ_c приведена на рис.8. Из рисунка видно, что экспериментальная зависимость $\tau_c(T)$ хорошо описывается формулой (13). Наилучшие значения параметров f_μ и Q оказались следующими:

$$f_\mu = 10^{7,61 \pm 0,04} \text{ с}^{-1}, \quad Q = (562 \pm 17) \text{ К}. \quad (15)$$

Эти значения параметров f_μ и Q , как было указано выше, противоречат надбарьерной диффузии положительного мюона в меди и могут быть объяснены, если предположить, что мюон диффундирует путем квантово-механического просачивания под потенциальным барьером.

Изучение диффузии положительных мюонов ограничивается металлами, имеющими довольно большие дипольные моменты ядер. Помимо меди, была изучена диффузия мюонов в бериллии, алюминии, ванадии, галлии, ниобии, индии, сурьме, тантале и висмуте [35—37]. Во многих из этих металлов характер диффузии мюона сходен с характером его диффузии в меди.

Вместе с тем для некоторых металлов зависимости $\Lambda(T)$ не являются монотонными, как в меди. Немонотонная зависимость $\Lambda(T)$ связана, по-видимому, с захватом положительных мюонов в ловушки, например, примеси, вакансии или дислокации, которые находит диффундирующий мюон.

Продemonстрированная впервые на примере меди [29] возможность изучения диффузии в металлах открыла новую перспективу использования положительных мюонов в исследовании вещества. В дальнейшем были развиты методы [38],

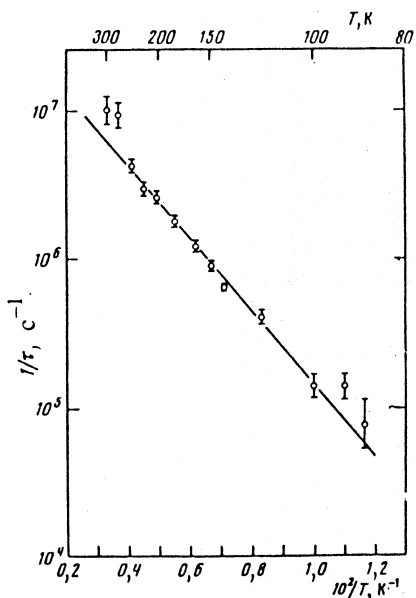


Рис.8. Зависимость $1/\tau_c = F(1/T)$ в меди.

Прямая линия представляет собой выражение

$$(13) \quad 1/\tau_c = f_\mu e^{-Q/T}$$

позволившие получать ценную информацию о местах локализации мюона (а следовательно, однозарядной примеси) в кристаллической решетке, о деформации решетки из-за присутствия мюона, о захвате мюонов вакансиями, деформациями, малыми примесями инородных атомов.

8. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ МЮОНЕ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

В предыдущем разделе рассмотрены процессы деполяризации мюонов за счет взаимодействия их магнитных моментов с ядерными дипольными полями, которые малы и составляют ~ 1 Гс в месте расположения положительного мюона в междоузлии кристаллической решетки металла. Взаимодействия с магнитными моментами d -электронов в магнитоупорядоченных материалах являются наиболее сильными. Первые работы по наблюдению прецессии спина положительного мюона в ферромагнетике были выполнены в 1973 г. [39,40]. В дальнейшем это направление μSR-метода развивалось весьма интенсивно как в области эксперимента, так и в теории. Наиболее важным и интересным результатом, полученным в экспериментах с ферромагнетиками, было измерение контактного магнитного поля поляризованных электронов на мюоне

$$B_k = \frac{8\pi}{3} \mu_e \rho(0) P_e. \quad (16)$$

Здесь μ_e — магнитный момент электрона, P_e и $\rho(0)$ — поляризация и плотность электронной волновой функции на мюоне соответственно. Измерение поля B_k является пока единственным экспериментальным определением контактного магнитного поля на частице с минимальным зарядом $Z = +1$ в ферромагнетике. Эти измерения позволяют оценить правильность теоретических методов, используемых для вычисления величин $\rho(0)$ и P_e , входящих в выражение (16).

Ниже рассматриваются магнитные поля на положительном мюоне в железе, никеле, кобальте и гадолинии по данным работ [40—43]. Образцы указанных ферромагнетиков были выполнены в виде плоских эллипсоидов вращения. Направление пучка мюонов совпадало с направлением малой оси эллипсоида. Внешнее поле $H_{\perp}$ направлено вдоль большой оси эллипсоида перпендикулярно к направлению пучка (и спина) мюонов. Экспериментально наблюдаемая прецессия спина μ^+ в ферромагнетиках описывалась согласно (1) соотношением:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau_{\mu}} (1 - a e^{-\Lambda t} \cos \omega_{\mu} t).$$

Таблица 2. Амплитуда прецессии $a(H_{\perp} = 0)$ и магнитное поле на мюоне $B_{\mu}(H_{\perp} = 0)$ в ферромагнетиках. a_0 — амплитуда прецессии мюона в полностью намагниченном ферромагнетике в сильном поперечном поле $H_{\perp}$. $B_{\text{нас}}$ — индукция насыщения

Ферромагнетик	$T, \text{ К}$	$a(H_{\perp} = 0)/a_0$	$B_{\mu}(H_{\perp} = 0), \text{ Гс}$	$B_{\text{нас}}, \text{ кГс}$
Железо	295	$0,66 \pm 0,03$	3509 ± 4	21,6
Никель	295	$0,78 \pm 0,08$	1341 ± 7	6,08
Кобальт	295	$0,63 \pm 0,10$	200 ± 10	17,9
Гадолиний	130	$0,65 \pm 0,03$	1679 ± 17	23,7

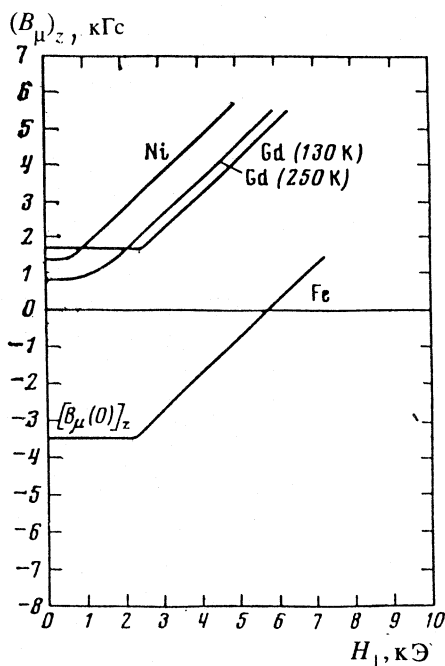
Прецессия спинов положительных мюонов в ферромагнетиках наблюдалась и при $H_{\perp} = 0$. Найденная при этом по частоте ларморовской прецессии величина $B_{\mu}(H_{\perp} = 0)$ представляет собой магнитное поле на мюоне в домене ненамагниченного ферромагнетика. Значения $B_{\mu}(H_{\perp} = 0)$ и наблюдаемой поляризации $a(H_{\perp} = 0)$ приведены в табл.2. Следующее из таблицы значение $a(H_{\perp} = 0)$, составляющее $\sim 2/3$ от поляризации в полностью намагниченном ферромагнетике, является естественным результатом изотропного распределения векторов намагниченности $\mathbf{M}_{\text{дом}}$ в отдельных доменах ферромагнетика. Из таблицы видно далее, что поле B_{μ} на мюоне в ферромагнетике много меньше индукции насыщения $B_{\text{нас}}$, которая, например, для железа равна 21,6 кГс. Структура поля B_{μ} подробно рассматривается ниже. Сейчас отметим только, что существенной составляющей поля B_{μ} является контактное поле поляризованных электронов проводимости, направленное в сторону, противоположную направлению намагниченности.

Зависимости $B_{\mu}(H_{\perp})$ в железе, никеле и гадолинии приведены на рис.9. Направление поля $\mathbf{B}_{\mu}$ на этом рисунке определяется знаком проекции $(B_{\mu})_z$ этого поля на направление $\mathbf{H}_{\perp}$, а абсолютная величина $(B_{\mu})_z$ принята равной величине B_{μ} . Как видно из рисунка, во всех этих ферромагнетиках можно указать такое поле H_1 , что при $H_{\perp} < H_1$ поле B_{μ} не зависит от $H_{\perp}$, а при $H_{\perp} > H_1$ изменение ΔB_{μ} и соответствующее ему изменение $\Delta H_{\perp}$ совпадают. Численные значения полей H_1 указаны в табл.3. Эти значения H_1 отвечают точке пересечения экспериментальных прямых, соответствующих $B_{\mu} = \text{const}$

Таблица 3. Значение полей H_1 , $B_{\text{разм}}^{\text{max}}$ и контактного поля B_k в ферромагнетиках

Ферромагнетик	H_1 , Гс	$B_{\text{разм}}^{\text{max}}$, Гс	$[B_k]_z$, Гс	$[B_k^{\text{теор}}]_z$, кГс
Железо	2330 ± 34	2330	-10697 ± 4	-10,1
Никель	606 ± 21	655	-686 ± 7	-0,59
Кобальт	—	1938	-5993 ± 10	-5,7
Гадолиний	2542 ± 70	2793	-6211 ± 17	-8,7

Рис.9. Зависимости $(B_\mu)_z$ в железе, никеле и гадолинии от $H_\perp$. По оси ординат отложена проекция $(B_\mu)_z$ на направление $H_\perp$. Значения $(B_\mu)_z > 0$ отвечают случаю, когда направления полей B_μ и $H_\perp$ совпадают, значения $(B_\mu)_z < 0$ — когда направления B_μ и $H_\perp$ противоположны. $[B_\mu(0)]_z$ — проекция поля $B_\mu(H_1) = B_\mu(0)$ на направление $H_\perp$ обозначена только для железа



и $\Delta B_\mu = \Delta H_\perp$. Указанные в табл.3 экспериментальные значения H_1 сравниваются с максимальными размагничивающими полями $B_{\text{разм}}^{\text{max}}$ для данных образцов ферромагнетиков:

$$B_{\text{разм}}^{\text{max}} = 4\pi\gamma M_{\text{нас}} = \gamma B_{\text{нас}}.$$

Здесь γ — размагничивающий фактор, $B_{\text{нас}}$ — индукция насыщения. Из табл.3 видно, что для железа поле H_1 совпадает с размагничивающим полем $B_{\text{разм}}^{\text{max}}$. В никеле и гадолинии поле H_1 несколько меньше размагничивающего поля.

Равенство $H_1 = \gamma B_{\text{нас}}$ показывает, что поля $H_{\perp} < H_1$ и $H_{\perp} > H_1$ отвечают, соответственно, ненасыщенному и насыщенному состояниям магнетика. Постоянство B_{μ} при $H_{\perp} \leq H_1$ представляет собой экспериментальное доказательство того, что индукция магнитного поля в домене ненасыщенного ферромагнетика всегда равна индукции насыщения: $B_{\text{дом}} = B_{\text{нас}}$.

Рассмотрим теперь структуру поля B_{μ} более подробно. Для этого представим это поле в виде суммы

$$B_{\mu} = B_k + B_d + H. \quad (17)$$

Здесь B_k — контактное поле (16), которое создают на мюоне поляризованные электроны ферромагнетика; B_d — дипольное поле намагниченных атомов ферромагнетика.

Вычисленные в работах [45—47] значения дипольных полей для исследуемых ферромагнетиков позволяют использовать соотношение (17) для определения контактного магнитного поля B_k на мюоне. Значения контактных магнитных полей $[B_k]_z$ с учетом их направления относительно направления z намагниченности в домене приведены в табл.3. Направление поля $B_{\mu}(H_{\perp} = 0)$ или знак проекции $[B_{\mu}(H_{\perp} = 0)]_z$ в железе, никеле и гадолинии найдены в соответствии с зависимостями $B_{\mu}(H)$, приведенными на рис.9. Направление поля B_{μ} в кобальте определено в работе [45]. В табл.3 указаны также теоретические значения полей $[B_k]_z^{\text{теор}}$, приведенные в работе [48].

Из табл.3 видно, что во всех исследованных ферромагнетиках проекция $[B_k]_z < 0$, то есть контактное поле B_k на мюоне, противоположно направлению намагниченности M . Отрицательное значение $[B_k]_z$ показывает, что электроны ферромагнетика, создающие контактное поле B_k на мюоне, поляризованы против направления намагниченности M . Степень поляризации P_e этих электронов на мюоне зависит от поля B_k согласно соотношению (16) и может быть вычислена, если известна плотность $\rho(0)$ электронной волновой функции.

9. ИССЛЕДОВАНИЕ АНТИФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЕРЕХОДОВ В РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Незаполненная электронная 4*f*-оболочка в редкоземельных элементах приводит к возникновению магнетизма при температурах ниже температуры Нееля T_N . Однако ближний магнитный порядок в какой-то мере существует и выше температуры T_N . Поэтому μSR-метод в силу своей чувствительности к малым корреляционным временам может дать сведения о магнитных флуктуациях при $T > T_N$. Возможности использования положительных мюонов для изучения переходов редкоземельных элементов в магнитоупорядоченное состояние были продемонстрированы в ранних работах [49—51] на примере поликристаллических образцов Pr, Nd, Sm, Eu, Tb, Dy, Ho, Er. Показано, что μSR-метод позволяет весьма точно фиксировать антиферромагнитный фазовый переход, определить температуру Нееля T_N , сделать заключение о роде перехода, исследовать флуктуационное образование магнитоупорядоченной фазы в парамагнитном состоянии при $T > T_N$.

В текстурированных кристаллах Er и Dy [52,53] с преимущественной ориентацией гексагональной оси *C* в одном направлении найдена анизо-

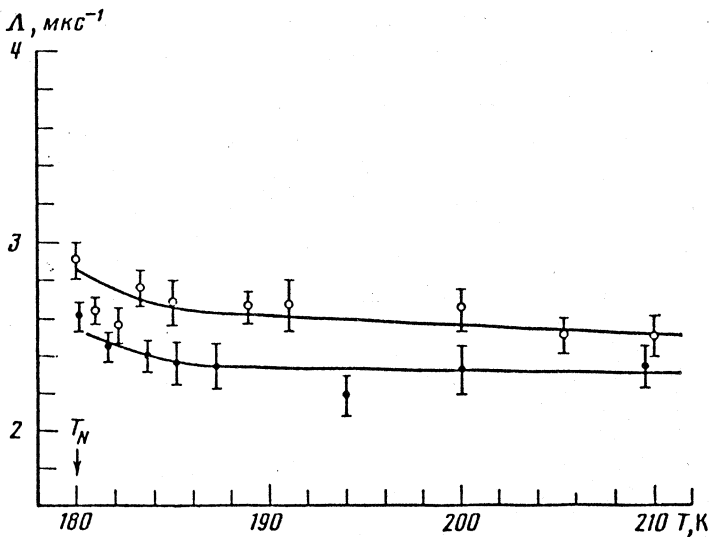


Рис.10. Температурная зависимость в диспрозии $\Lambda(T)$ при $T > T_N$ для $\alpha = 0$ (○) и $\alpha = \pi/2$ (●). Значения Λ при $T = 300$ К для $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ совпадают и равны $\Lambda = (1,9 \pm 0,1) \text{ мкс}^{-1}$

тропия скорости релаксации спина мюона в парамагнитной области. Это видно из рис.10, на котором приведена температурная зависимость скорости релаксации $\Lambda(T)$ при $T > T_N$ (где $T_N = 180$ К) для диспрозия при двух ориентациях образца, соответствующих углам $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ между направлениями поляризации мюонов и направлением преимущественной ориентации гексагональных осей монокристаллов образца.

Скорость релаксации спина мюона пропорциональна корреляционному времени флуктуационного образования магнитоупорядоченной фазы в парамагнитном состоянии кристалла. Низкое значение Λ при температурах $T > T_N$ объясняется тем, что атомные магнитные моменты осциллируют с частотой $\sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$ и, следовательно, с такой же частотой осциллируют внутренние магнитные поля. Переменные магнитные поля высокой частоты приводят к медленной релаксации спина мюона. Возрастание Λ на рис.10 при $T \rightarrow T_N$ связано с уменьшением частоты осцилляций атомных спинов диспрозия из-за флуктуационного образования магнитоупорядоченной фазы в парамагнитном состоянии. На динамику спиновых флуктуаций в парамагнитной области может оказывать влияние диффузия мюона по кристаллу, уменьшая скорость релаксации Λ . Однако в области $T > T_N$ диффузией мюонов можно пренебречь ввиду малой частоты диффузионных перескоков из одной элементарной ячейки в другую по сравнению с частотой $\nu \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$ осцилляций атомных спинов.

То, что мюон диффундирует в кристалле диспрозия, можно видеть из рис.11, где показана зависимость $\Lambda(T)$ в антиферромагнитной области при $T = 100 \div 175$ К. В антиферромагнитном состоянии диспрозия междоузельные поля, действующие на мюон, составляют $H_\mu \geq 10^4$ Э. В сильном постоянном поле релаксация составляющей спина мюона, перпендикулярной к направлению H_μ , происходит ненаблюдаемо быстро. Экспериментально наблюдается только релаксация продольной по отношению к H_μ составляющей спина мюона. Представленная на рис.11 зависимость $\Lambda(T)$ может быть объяснена диффузией мюона по кристаллу диспрозия. В геликоидальном антиферромагнетике, каким является диспрозий, при диффузионном перескоке между двумя соседними междоузлиями продольная составляющая его спина изменится и станет равной $\sigma_{\text{прод}} \cos \varphi$, где φ — угол между направлениями локальных полей в этих междоузлиях. Было показано [53], что диффузия по междоузлиям антиферромагнитно-упорядоченного состояния

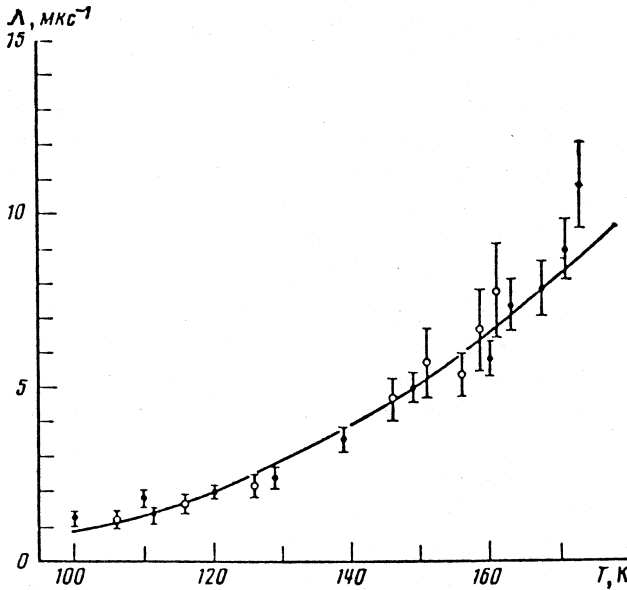


Рис.11. Экспериментальная и теоретическая (19) зависимости скорости релаксации спина диффундирующего мюона в антиферромагнитном состоянии диспрозия для $\alpha = 0$ (○) и $\alpha = \pi/2$ (●)

диспрозия приведет к экспоненциальной зависимости наблюдаемой поляризации $P(t) = e^{-\Lambda t}$ при

$$\Lambda = (\kappa/\tau_c) \sin^2 \varphi, \quad (18)$$

где τ_c — время диффузионного перескока мюона, $\kappa \leq 1$ — относительная вероятность диффузионного прыжка мюона в междоузлие, расположенное в соседнем атомном слое с повернутыми на угол φ атомными спинами. При некогерентной диффузии мюона по кристаллу температурная зависимость $\tau_c(T)$ описывается формулой (13). Тогда из выражений (13) и (18) следует

$$\Lambda_{\text{теор}} = \kappa f_{\mu} e^{-Q/T} \sin^2 \varphi. \quad (19)$$

Параметры κf_{μ} и Q определяются методом максимального правдоподобия при сопоставлении теоретической зависимости с экспериментальными данными (рис.11). Значения этих параметров оказались равными $\kappa f_{\mu} = 10^{8,28 \pm 0,07} \text{ с}^{-1}$, $Q = (313 \pm 20) \text{ К}$, что соответствует процессу подбарьерной диффузии (см.разд.7).

10. ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Возможности μ SR-спектроскопии для исследования сверхпроводников I и II рода. Изучение свехпроводимости методом μ SR-спектроскопии основано на данных о распределении внутренних магнитных полей, воздействующих на мюоны, имплантированные в исследуемое вещество.

В мейснеровской фазе, т.е. в условиях, когда внешнее магнитное поле H меньше критического поля H_c , на магнитный момент мюона воздействуют только поля, создаваемые магнитными моментами ядер кристаллической решетки. Среднее значение распределения локальных полей на мюоне равно нулю, а ширина распределения определяется величиной ядерных магнитных моментов. В эксперименте наблюдается чисто релаксационный μ SR-сигнал.

В образцах сверхпроводников первого рода с коэффициентом размагничивания D в интервале внешних полей от $H_c(1 - D)$ до H_c образуется так называемое промежуточное состояние — объем сверхпроводника разбивается на совокупность нормальных и сверхпроводящих областей. Мюоны, термализовавшиеся в нормальных областях, дают сигнал с характерной ларморовской частотой, определяемой величиной внешнего магнитного поля. В сверхпроводящие области внешнее поле не проникает из-за эффекта Мейсснера, поэтому мюоны дают чисто релаксационный сигнал. Отношение амплитуд релаксационного и прецессионного сигналов определяет отношение объемов мейснеровской и нормальной областей металла.

В сверхпроводниках II рода в интервале полей $H_{c_1} < H < H_{c_2}$ термодинамически устойчивым становится так называемое смешанное состояние сверхпроводника или шубниковская фаза. Магнитное поле проникает в сверхпроводник в виде нитей, образующих упорядоченную решетку вихрей Абрикосова. Магнитное поле в шубниковской фазе весьма неоднородно, поэтому начало ее образования легко обнаруживается по резкому возрастанию величины затухания прецессии μ SR-сигнала — температура сверхпроводящего перехода может быть определена с высокой точностью. Количественная оценка величины указанной неоднородности поля тесно связана с проблемой определения глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

До открытия явления высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) было выполнено несколько работ [54—56], основная задача которых заключалась в демонстрации возможностей μ SR-спектроскопии в исследовании обычных сверхпроводников. В качестве примера рассмотрим результаты работы [56], в которой было исследовано промежуточное состояние поликристаллического образца свинца. Образец был изготовлен в виде

эллипсоида вращения. Сверхпроводник охлаждался в нулевом поле до температуры 4,3 К. Затем прикладывалось внешнее поле, направленное параллельно большой оси эллипсоида и перпендикулярно поляризации пучка мюонов. Размагничивающий фактор составлял величину $\sim 0,15$. Экспериментальные значения относительного объема нормальной фазы и средней величины локальных полей на мюоне B_μ приведены на рис.12. Сплошная линия на полевой зависимости относительного объема нормальной фазы проведена в предположении ее линейного характера:

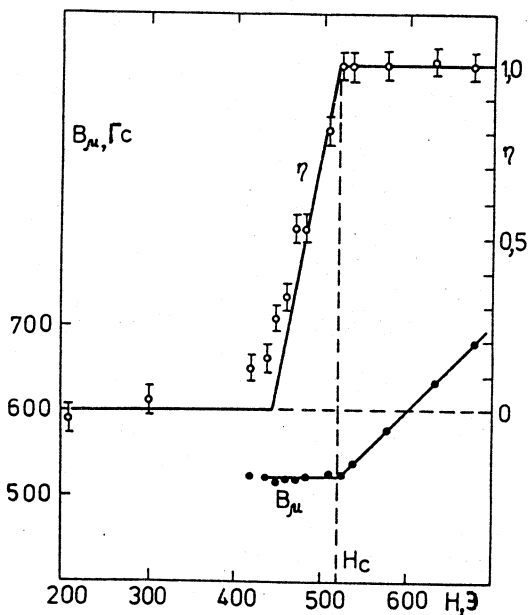


Рис.12. Экспериментальные значения относительного объема нормальной фазы и локального поля B_μ в свинце в зависимости от внешнего поля H

$$\eta = \frac{H - H_c(1 - D)}{DH_c}.$$

В промежуточном состоянии экспериментальные значения среднего поля на мюоне совпадают в пределах ошибок со значениями H_c для свинца при $T = 4,3$ К. Неоднородность магнитного поля в нормальных областях промежуточного состояния была определена по скорости затухания прецессии. Относительная величина неоднородности не превышала 1%.

Исследование высокотемпературной сверхпроводимости. Явление высокотемпературной сверхпроводимости было открыто Дж.Беднорцем и К.Мюллером [57] в 1986 году. На сегодняшний день в исследованиях высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) достигнут значительный прогресс — синтезированы новые соединения с критической температурой выше температуры жидкого азота, хорошо установлена их структура и определены многие физические свойства, в том числе и магнитные. Развитие исследований ВТСП продолжает оставаться актуальной задачей, поскольку

вопрос о механизме сверхпроводимости в этих соединениях остается открытым.

Свойства ВТСП зависят от концентрации носителей заряда. При малом содержании носителей большинство ВТСП являются антиферромагнетиками. Однако увеличение концентрации носителей заряда приводит к подавлению антиферромагнетизма и возникновению сверхпроводимости. Так, в соединениях типа $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_{4-\delta}$ уменьшение содержания кислорода и допирование стронцием сильно изменяют характеристики образцов и приводят к появлению сверхпроводимости, которая ярко проявляется при $x = 0,15$. Такая конкуренция магнетизма и сверхпроводимости привлекает к себе значительное внимание. Многие исследователи считают, что механизм спаривания носителей заряда в ВТСП-системах непосредственно связан с магнетизмом ионов Cu^{2+} . Самостоятельный интерес представляет также исследование магнитного беспорядка, вносимого допированием на свойства антиферромагнитной фазы.

Измерение распределения магнитных полей от решетки вихрей в смешанном состоянии позволяет, как уже отмечалось, определить глубину проникновения магнитного поля λ — один из важнейших параметров сверхпроводника. Зависимость глубины проникновения от температуры $\lambda(T)$ и зависимость $\lambda(T \rightarrow 0)$ от критической температуры T_c сверхпроводника служат критериями проверки различных теорий сверхпроводимости.

Все перечисленные выше проблемы в той или иной степени были затронуты при проведении на фазотроне ОИЯИ μSR -исследований систем $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_{4-\delta}$ (при варьировании x) [58—61], $\text{Bi}_{2-x}\text{Pb}_x\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+y}$ и $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_{1-z}\text{Y}_z\text{Cu}_2\text{O}_{8+y}$ (при варьировании x и z) [70—73].

Исследование магнитоупорядоченного состояния системы $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_{4-\delta}$. μSR -эксперименты, проведенные в нулевом внешнем поле ($ZF - \mu\text{SR}$), показали существование антиферромагнитного порядка в образцах с концентрацией стронция $x = 0$ и $0,01$. В этих образцах наблюдаются осцилляции поляризации во времени, являющиеся следствием скоррелированной прецессии спинов мюонов, обусловленной дальним магнитным порядком.

Самостоятельный интерес представляет изучение распределения температур Нееля в объеме образца. С этой целью были проведены эксперименты в поперечном по отношению к поляризации мюонного пучка магнитном поле ($TF - \mu\text{SR}$). В TF -экспериментах «парамагнитная» доля мюонов, которые не чувствуют полей, обусловленных магнитным упорядочением, определяется по амплитуде прецессии a_p на ларморовской частоте, соответствующей внешнему полю. Величина этой амплитуды определяется с хорошей точностью и практически не подвергнута систематическим ошибкам, обу-

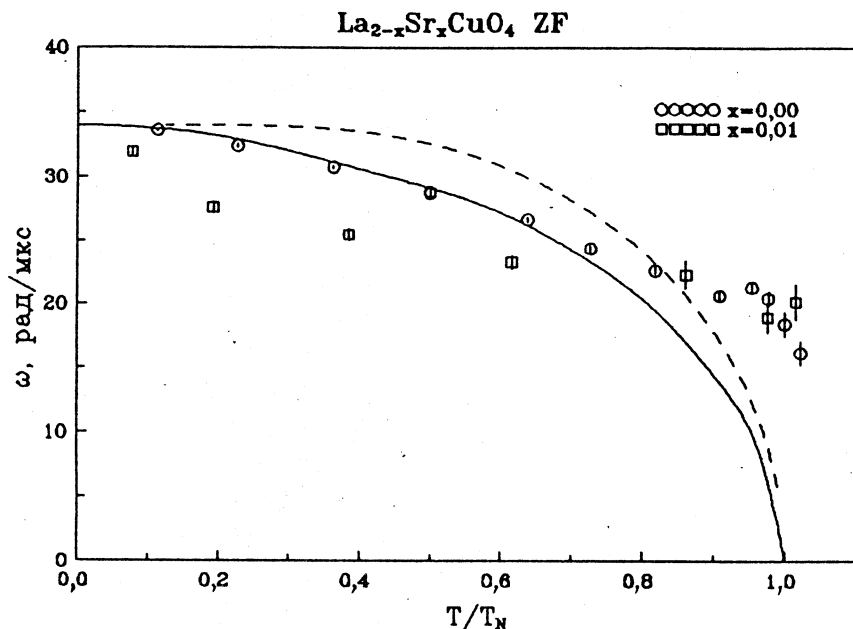


Рис.14. Зависимость частоты прецессии от приведенной температуры $t = T/T_N$.

Пунктирной линией показана теоретическая зависимость в приближении молекулярного поля, сплошной — теоретическая кривая из работы [63]

ную асимметрию спектра, определенную выше точки Нееля. Уменьшение a_p при понижении температуры связано с переходом части образца в антиферромагнитное состояние. Производная величины a_p по температуре дает функцию распределения температур Нееля $n(T_N)$ по образцу. Из рисунка видно, что добавление стронция приводит к понижению средней температуры Нееля и увеличению ширины распределения этих температур.

На рис.14 показаны зависимости частоты прецессии спина мюона (которая является мерой среднего локального магнитного поля на мюоне) от температуры для этих же образцов, полученные в нулевом внешнем поле (ZF— μSR). Экспериментальные данные сравниваются с теоретическими моделями. В качестве T_N взято среднее значение распределения температур Нееля по образцу. Пунктиром показана зависимость, полученная в приближении молекулярного поля, а сплошной линией — теоретическая кривая, вычисленная в работе [63] для плоскостного гейзенберговского антиферро-

магнетика со слабым взаимодействием между слоями. Отношение межплоскостной энергии взаимодействия к энергии в плоскости равнялось 10^{-3} . Зависимость $\omega(T)$ в области низких температур хорошо описывается в рамках анизотропной модели. Расхождение в области температуры Нееля можно объяснить конечной шириной перехода образца в антиферромагнитное состояние. Полученные по той же $ZF - \mu$ SR-процедуре температурные зависимости скорости релаксации спина мюона, характеризующие разброс локальных магнитных полей, показывают увеличение этого разброса с повышением концентрации стронция, что является следствием увеличения ширины распределения температур Нееля. Анализ данных показал, что этот разброс является следствием флуктуации концентрации носителей заряда (дырок) в образцах и практически не зависит от технологий их изготовления, использованных разными группами.

Для образца с $x = 0,05$ не обнаружено магнитного порядка вплоть до доступной в эксперименте температуры 4,4 К, но зато отмечено резкое возрастание скорости релаксации, свидетельствующее о замедлении частоты флуктуаций магнитных моментов Cu^{2+} . Такое замедление характерно при приближении образца к магнитоупорядоченному состоянию.

Анализ экспериментальных данных, полученных для образца $\text{La}_{1,93}\text{Sr}_{0,07}\text{CuO}_{4-\delta}$, показал наличие статических магнитных полей на мюо-

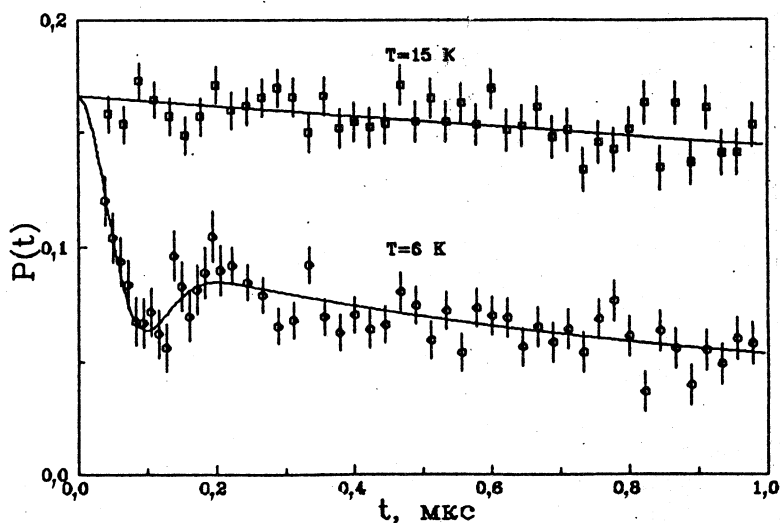


Рис.15. Экспериментальные функции поляризации спина мюона $P(t)$ в $\text{La}_{1,93}\text{Sr}_{0,07}\text{CuO}_{4-\delta}$ в нулевом внешнем магнитном поле при температурах 15 и 6 К

не в области температур ниже 10 К. Однако структура этих полей существенно отличается от структуры магнитоупорядоченного состояния. Временная зависимость поляризации мюона при температуре 6 К хорошо описывалась функцией Кубо — Тойябе (7), соответствующей изотропному гауссовскому распределению локальных магнитных полей. На рис.15 приведены временные зависимости поляризации $P(t)$, измеренные при температурах 15 К и 6 К. При 6 К хорошо виден характерный для функции Кубо — Тойябе минимум при $t = \sqrt{3}/\sigma$, где σ/γ — ширина распределения полей. Этот факт является подтверждением гипотезы о существовании спин-стеклового состояния [64], характеризующегося тем, что магнитные моменты ионов Cu^{2+} оказываются «замороженными» и направленными в пространстве случайным образом. Это приводит к распределению полей на мюоне, близкому к распределению Кубо — Тойябе. Средняя по объему образца температура перехода в спин-стекловое состояние $T_f = 8$ К.

Образцы с содержанием стронция $x = 0,10; 0,15$ и $0,25$ проявляют уже сверхпроводящие свойства, которые рассматриваются в следующем разделе.

Измерение глубины проникновения магнитного поля. Как уже отмечалось, во внешнем магнитном поле, величина которого превышает значение первого критического поля, магнитное поле проникает в сверхпроводник II рода в виде вихревых линий, параллельных внешнему магнитному полю. Вихревая линия состоит из нормального остова с размерами порядка длины когерентности ξ и области порядка глубины проникновения λ , в которой циркулируют незатухающие токи. Определение глубины проникновения является характерной задачей μSR -экспериментов.

Высокотемпературные сверхпроводники являются сильно анизотропными материалами. Из-за одноосного характера анизотропии обычно рассматривают два значения глубин проникновения — λ_{ab} и λ_c , связанных со сверхпроводящими токами в плоскости ab , содержащей CuO , и вдоль оси c , перпендикулярной к плоскости ab . В изотропном сверхпроводнике при достаточно больших магнитных полях величина дисперсии распределения полей в смешанном состоянии определяется только глубиной проникновения [65]. Например, для квадратной решетки вихрей $\langle \Delta B^2 \rangle = 0,003716 \Phi_0^2 \lambda^{-4}$, где $\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-7}$ Гс·см² — квант магнитного потока.

Используя соотношение между дисперсией магнитного поля и частотой прецессии спина мюона $\langle \Delta B^2 \rangle = \langle \Delta \omega^2 \rangle / \gamma_\mu^2$, можно определить лондоновскую глубину проникновения. В лондоновской модели решетки вихрей предполагается, что $\xi \ll \lambda$ и ξ много меньше расстояния между вихрями.

Диапазон внешних полей, обычных для μSR -измерений, позволяет при анализе экспериментальных данных по ВТСП использовать лондоновское

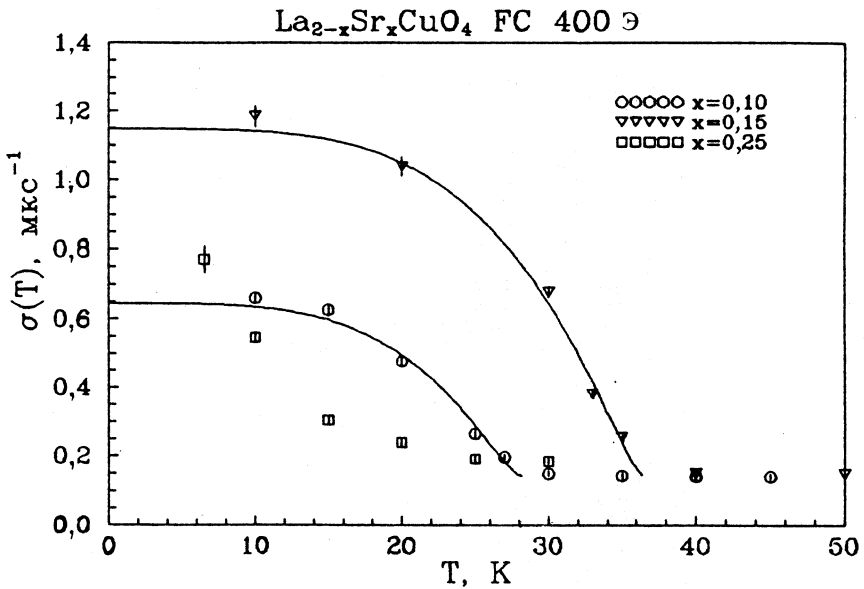


Рис.16. Скорости релаксации спина мюона в $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ как функции температуры, полученные из измерений в поперечном магнитном поле 400 Э. Линиями показаны результаты подгонки к формуле двухжидкостной модели

приближение. В пределе большой анизотропии ($\lambda_c/\lambda_{ab} > 5$) ширина распределения полей в поликристаллическом образце определяется меньшей глубиной проникновения λ_{ab} . В работе [66] была введена так называемая эффективная величина глубины проникновения λ_{eff} , связанная с шириной распределения полей тем же соотношением, что и в изотропном случае, и пропорциональная λ_{ab} :

$$\lambda_{\text{eff}} = 1,23 \lambda_{ab}.$$

Наиболее точное соотношение, связывающее $\langle \Delta\omega^2 \rangle$ с глубиной проникновения в поликристаллическом анизотропном сверхпроводнике, можно найти в работе [67].

На рис.16 показаны температурные зависимости скорости релаксации, полученные в трех сверхпроводящих образцах системы $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4 - \delta$

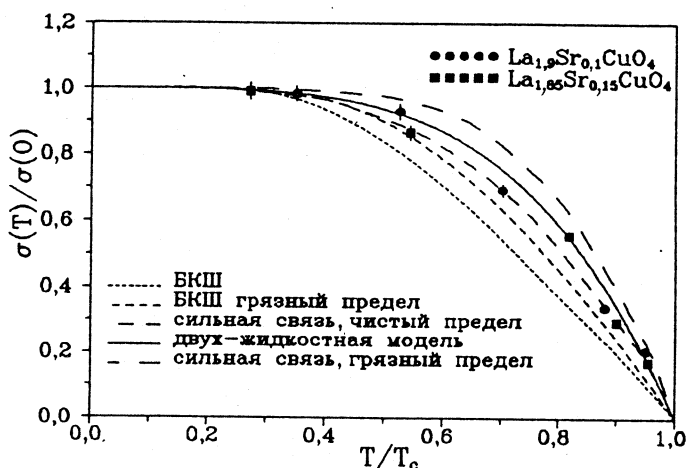


Рис.17. Нормализованная скорость релаксации как функция T/T_c в $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$. Теоретические кривые взяты из работы [68]

при их охлаждении во внешнем магнитном поле ($FC - \mu SR$). Выше температуры сверхпроводящего перехода скорость релаксации σ обусловлена деполяризацией за счет взаимодействия с ядерными магнитными моментами решетки. При переходе в сверхпроводящее состояние возникает сильная неоднородность локальных полей из-за образования решетки вихрей и происходит резкий рост σ . Сплошные линии на рисунке — теоретические кривые, полученные для двухжидкостной модели. Видно хорошее согласие теории и эксперимента для образцов с $x = 0,10$ и $x = 0,15$. Наблюдаемое отличие для образца с $x = 0,25$ вызвано сильной неоднородностью образца из-за высокой концентрации стронция.

На рис.17 представлены температурные зависимости нормализованной скорости релаксации. Теоретические кривые, рассчитанные в рамках различных моделей, заимствованы из работы [68]. Экспериментальные точки лежат заметно выше линии, соответствующей теории Бардина — Купера — Шриффера (БКШ) в чистом пределе, и распределены вблизи кривой двухжидкостной модели, что соответствует s -волновому сильному электрон-фононному взаимодействию. Нельзя, конечно, исключить действия нефонновых механизмов спаривания. Окончательные значения глубин проникновения магнитного поля λ_{ab} ($T = 0$ К) в направлении, перпендикулярном сверхпроводящим плоскостям CuO , полученные в результате полного анализа данных, составляют величины 2300^{+40}_{-200} Å ($x = 0,15$) и 3100^{+50}_{-250} Å ($x = 0,1$).

Глубина проникновения магнитного поля в ВТСП на основе висмута. Рассмотренные выше ВТСП типа La-Sr-Cu-O имеют температуру сверхпроводящего перехода $T_c \sim 37$ К. Более высокие с $T_c > 80 + 90$ К имеют системы Y-Ba-Cu-O и новые ВТСП на основе Bi. В работе [69] Уемура с сотрудниками обратили внимание на то, что для ряда ВТСП (главным образом, типа Y-Ba-Cu-O) с небольшой плотностью носителей заряда имеет место линейная зависимость скорости релаксации спина мюона $\sigma(T \rightarrow 0)$ от температуры T_c . Учитывая то, что лондоновская глубина проникновения λ_c связана с плотностью n_s носителей заряда и их эффективной массой m^* как $1/\lambda^2 = 4\pi n_s e^2 / m^* c^2$ (где e — элементарный заряд, c — скорость света), а также используя указанные в предыдущих разделах для гауссовского распределения локальных полей соотношения между λ и σ , находим, что $\sigma \sim 1/\lambda^2 \sim n_s / m^*$. Если линейная зависимость $\sigma \sim T_c$, найденная в работе [69], носит универсальный характер, то имеет место соотношение $T_c \sim n_s / m^*$ для широкого круга ВТСП. Авторы работы [69] отмечают, что такая зависимость может ожидаться в теориях ВТСП с сильной связью, когда энергия спаривания носителей заряда порядка энергии на поверхности Ферми, и не может ожидаться в теории БКШ в приближении слабой связи, в которой в качестве связующих бозонов рассматриваются фононы с энергией порядка энергии Дебая.

С целью проверки универсальности эмпирического соотношения Уемуры и исследования характеристик ВТСП на основе Bi от концентрации носителей заряда на фазотроне было проведено исследование различных образцов $\text{Bi}_{2-x}\text{Pb}_x\text{Sr}_2\text{Ca}_{1-z}\text{Y}_z\text{Cu}_2\text{O}_{8+y}$ [70—73] (условно обозначаемых как система 2212), в которых варьировалось содержание носителей заряда путем изменения x и z . Для каждого образца также определялся избыток кислорода y . Концентрация носителей (дырок) на один атом Cu может быть определена по формуле:

$$p = y + \frac{x - z}{2}$$

в соответствии с валентностью входящих в соединение элементов при требовании общей зарядовой нейтральности. Отсюда видно, что добавка Pb приводит к увеличению концентрации дырок, в то время как добавка Y уменьшает их число.

Значения x , y , z и p для девяти исследованных образцов представлены в табл.4. В этой же таблице указаны температуры сверхпроводящего перехода T_c , полученные в опытах путем измерения сопротивления образца.

Таблица 4

x	z	y	p	λ_{ab} (Å)	T_c (K)
0,00	0,20	0,19	0,09 (1)	2250 (150)	88 (1)
0,00	0,45	0,33	0,10 (1)	2300 (150)	84 (1)
0,00	0,40	0,31	0,11 (1)	2250 (150)	85 (1)
0,00	0,10	0,17	0,12 (1)	2000 (150)	89 (1)
0,00	0,30	0,28	0,13 (1)	1950 (150)	86 (1)
0,00	0,00	0,16	0,16 (1)	1850 (100)	92 (1)
0,15	0,00	0,10	0,18 (1)	1900 (100)	91 (1)
0,30	0,00	0,25	0,40 (1)	1850 (100)	81 (1)
0,70	0,00	0,28	0,62 (1)	2050 (100)	81 (1)

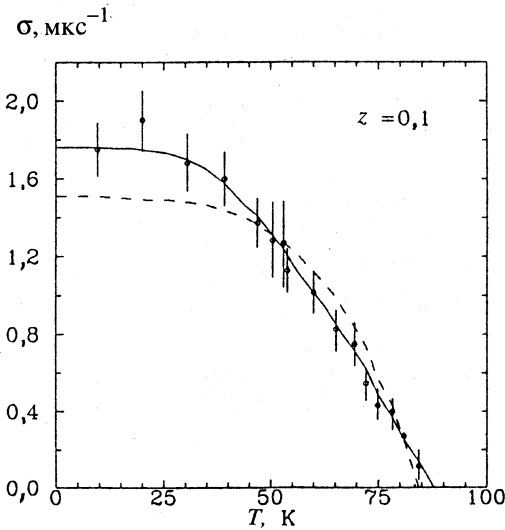


Рис.18. Температурная зависимость экспериментальных значений $\sigma \sim 1/\lambda_{ab}^2$ для образца $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_{1-z}\text{Y}_z\text{Cu}_2\text{O}_{8+y}$ в сравнении с теоретическими моделями. Сплошная линия соответствует теории БКШ в приближении слабой связи, пунктирная — двухжидкостной модели

μSR -исследования образцов проводились в перпендикулярном по отношению к направлению спина мюонов магнитном поле $H_{\perp} = 3$ кГс в интервале температур $10 \div 300$ К. В табл.4 представлены значения глубин проникновения λ_{ab} , полученные при температуре 10 К. Эти же значения принимались в качестве нижнего предела $\lambda_{ab}(T=0)$. На рис.18 показана температурная зависимость $\sigma \sim 1/\lambda_{ab}^2$ для одного из исследованных образцов в сравнении с кривыми для разных теоретических моделей. Как видно из рисунка, предпочтительным является описание экспериментальных данных теоретической моделью БКШ в приближении слабой связи. Аналогичные результаты получены для других образцов.

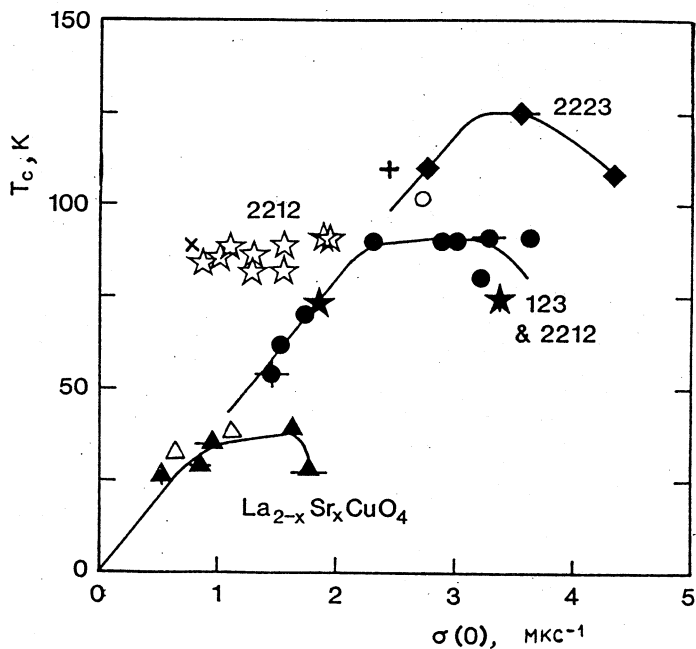


Рис.19. Соотношение между критической температурой T_c и скоростью релаксации $\sigma(T=0) \sim 1/\lambda_{ab}^2(T=0)$ для ряда ВТСП. Светлыми точками представлены результаты, полученные на фазотроне ОИЯИ; черными точками — результаты, взятые из работы [69]. Треугольники — результаты для La-Sr-Cu-O (214), кружки — для Y-Ba-Cu-O (123), ромбы — для ВТСП на основе Bi (2223), звездочки — ВТСП на основе Bi (2212), (x) и (+) — для ВТСП на основе Bi (2201) и (2223) по данным работы [44]

На рис.19 по данным наших работ и работ Уемуры и др. представлены зависимости $\sigma(T=0) \sim 1/\lambda_{ab}^2$ от критической температуры T_c для соединений Y-Ba-Cu-O (123), La-Sr-Cu-O (214) и соединений на основе Bi (2212, 2223). Видно, что линейная зависимость между T_c и $\sigma(T=0)$, которая наблюдается главным образом в образцах (123) с малой концентрацией носителей заряда, не выполняется для образцов (2212) на основе Bi.

На рис.20 показана зависимость частот мюонной прецессии $\langle \Delta\omega^2 \rangle_\lambda^{1/2} \sim 1/\lambda_{ab}^2$ от концентрации p носителей заряда на один атом меди.

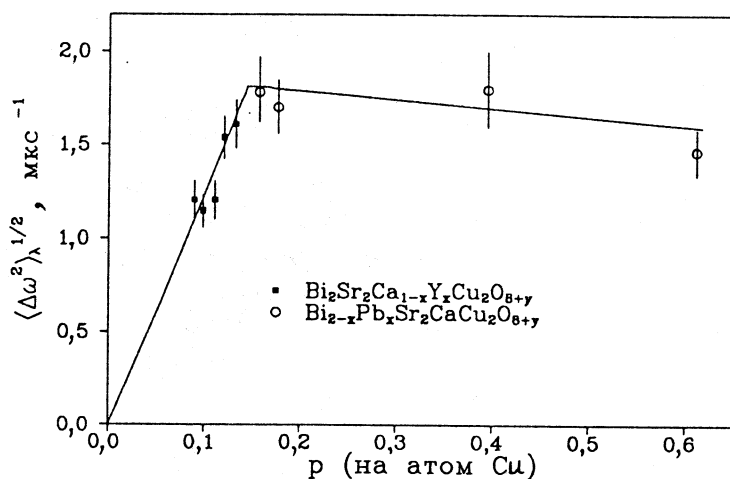


Рис.20. Зависимость второго момента распределения частоты мюонной прецессии $\langle \Delta\omega^2 \rangle_\lambda^{1/2} \sim 1/\lambda_{ab}^2$ от концентрации носителей заряда на один атом меди

Из рисунка видно, что величина $\langle \Delta\omega^2 \rangle_\lambda^{1/2}$ растет линейно с увеличением p для образцов, допированных Y, что подтверждает предположение об увеличении концентрации носителей заряда n_s , участвующих в образовании сверхпроводящего состояния. При допировании свинцом $\langle \Delta\omega^2 \rangle_\lambda^{1/2}$ не зависит от увеличения p . Из этого можно сделать вывод о том, что дополнительные носители заряда, вносимые при допировании свинцом, локализованы и не дают вклада в n_s .

В целом результаты, полученные нами при изучении допированной системы 2212, противоречат предположению об универсальности кривой Уемуры. Хотя концентрация носителей меняется почти в два раза, T_c остается в диапазоне 80 ÷ 90 К. Величина T_c , по-видимому, является более сложной функцией концентрации носителей и, кроме того, зависит от способа допирования.

11. МЮОНИЙ В ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Определение констант скорости и механизма химических реакций мюония с органическими соединениями. Вступление мюония, аналогично атомарному водороду, в химические реакции принципиальным образом ме-

няет факторы его деполяризации в среде. Идея о прекращении деполяризации при вхождении мюония в состав молекулы со скомпенсированными попарно спинами электронов была впервые сформулирована в работе [20] и впоследствии развита в работах [21—24], где рассмотрена кинетическая схема взаимодействия и получены выражения, количественно связывающие экспериментально определяемые параметры с характеристиками реакционной способности мюония в среде.

При образовании диамагнитной молекулы, в состав которой входит мюоний (типичный пример $\text{Mu} + \text{C}_6\text{H}_{12} \rightarrow \text{MuH} + \text{C}_6\text{H}_{11}^\bullet$), спины валентных электронов в молекуле MuH попарно скомпенсированы, и магнитное поле, создаваемое электронной оболочкой в точке нахождения мюона, равно нулю. Частота прецессии в этом случае определяется магнитным моментом и спином мюона (мюонная компонента). При образовании радикальных продуктов, в состав которых входит мюоний (например, реакция его присоединения по кратной связи $\text{Mu} + \text{C}_6\text{H}_6 \rightarrow \text{C}_6\text{H}_6\text{Mu}^\bullet$ с образованием аналога циклогексациенильного радикала), сохраняется взаимодействие магнитных моментов мюона и неспаренного радикала. В этом случае прецессия на мюонной частоте отсутствует, но «скрытая» поляризация определяется либо по ее восстановлению в продольных магнитных полях, либо по конкуренции параллельных реакций мюония в бинарных гомогенных смесях (метод конкурирующих акцепторов). Зависимость поляризации мюония от приложенного продольного поля $H_{\parallel}$ определяется выражением

$$P = 1/2 + 1/2 \frac{x^2}{1 + x^2},$$

где $x = H/H_{\text{крит}}$ — безразмерная напряженность магнитного поля, для мюония в вакууме $H_{\text{крит}} = H_0 = 1585$ Э (см. разд.6). Экспериментально определяемые величины остаточной поляризации на мюонной или мюониевой частоте зависят от скорости вступления мюония в химические реакции и по формулам, выведенным в работах [21—24], позволяют найти абсолютные значения констант этой скорости.

Ядерно-физическими эталонами времени при исследовании химических взаимодействий мюония являются константы — частота $\omega_0 = 2,804 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ переходов между состояниями мюония (1,0) и (0,0) и постоянная распада мюона $1/\tau_\mu = 4,545 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, по отношению к которым определяется скорость изучаемого процесса. Эти величины определяют границы поддающихся исследованию скоростей реакций мюония, причем возможно как непосредственное наблюдение кинетики процесса при характерных временах 10^{-5} – 10^{-8} с, так и изучение стационарных состояний получающихся продуктов реакции.

**Таблица 5. Константы скорости химических реакций мюония
с органическими соединениями различных классов**

Соединение	Химическая формула	$K_1 \cdot 10^{-9}$	$K_2 \cdot 10^{-9}$
Циклогексан	C_6H_{12}	$2,4 \pm 0,2$	—
Метанол	CH_3OH	$0,56 \pm 0,11$	—
Октан	C_8H_{18}	$2,9 \pm 0,4$	—
Хлороформ	$CHCl_3$	$4,2 \pm 1,4$	—
Бензол	C_6H_6	$0,30 \pm 0,11$	$3,1 \pm 0,4$
Бромоформ	$CHBr_3$	11 ± 2	—
Дифенилпикрилгидразил (ДФПГ)	$(C_6H_5)_2N-N^0_-$ $-C_6H_2(NO_2)_3$	76 ± 22	—

**Таблица 6. Константы скорости взаимодействия мюония
с галоидбензолами по параллельным каналам**

Соединение	$(K_1 + K_2) \cdot 10^{-9}$	K_2/K_1	$K_1 \cdot 10^{-8}$
C_6H_6	$3,4 \pm 0,3$	$10,5 \pm 4,2$	$3,0 \pm 1,1$
C_6H_5F	$3,0 \pm 0,3$	$3,4 \pm 1,0$	$6,7 \pm 1,6$
C_6H_5Cl	$2,9 \pm 0,2$	$2,2 \pm 0,5$	$9,3 \pm 1,6$
C_6H_5Br	$3,2 \pm 0,3$	$1,0 \pm 0,4$	16 ± 3
C_6H_5I	$3,5 \pm 0,6$	$1,3 \pm 0,8$	15 ± 6

Таблица 7. Энергии активации реакций мюония

Соединение	Температура, К	E , ккал/моль
C_6H_{12}	$77 \div 303$	$1,41 \pm 0,05$
C_6H_5Br	$80 \div 303$	$0,97 \pm 0,08$
$CHBr_3$	$77 \div 303$	$0,67 \pm 0,05$

Определение абсолютных констант скорости реакций мюония с рядом органических соединений было выполнено как путем измерений с использованием индивидуальных веществ, так и по методу конкурирующих акцепторов в бинарных растворах. Изучались соединения различных классов — насыщенные алифатические и циклические молекулы, спирты, галоидпроизводные, свободные радикалы, ароматические соединения [74,75]. Полученные значения констант скорости при комнатной температуре (K_1 и K_2 — для реакций образования диамагнитных продуктов и радикалов соответственно, литр/моль·с) приведены в табл.5. Результаты экспериментов [76,77], включающие для сравнения бензол, приведены в табл.6.

Исследование температурных зависимостей скорости реакций мюония позволяет получить один из важнейших критериев реакционной способности вещества — энергию активации процесса (ΔE). Эти величины определены для насыщенных и ароматических соединений [77,78]. Особое внимание уделялось точке фазового перехода жидкость — твердое тело. Если диффузионные процессы не лимитируют кинетику процесса, реакционная способность может не испытывать резких изменений при фазовом переходе, что и было найдено для органических соединений, не образующих системы водородных связей (табл.7). Весьма характерно, что для реакций мюония энергии активации процессов существенно меньше, чем для аналогичных реакций атома Н (см., например, [79]), что согласуется с представлениями [80,81] о зависимости ΔE от массы реагирующих частиц.

В то же время для фазового перехода вода — лед выявлен резкий скачок мюонной поляризации [76], соответствующий изменению константы скорости процесса более чем на два порядка величины. Интерпретацию этого результата следует связать с наличием координационно-замкнутой системы водородных связей в бездефектной кристаллической структуре льда, то есть с отсутствием свободных мест для стабилизации мюония в решетке. Соответственно, эта особенность и позволила выявить долгоживущий мюоний во льду.

Спин-обменные взаимодействия и химические реакции с ионами и молекулами в водных растворах. Окислительно-восстановительные реакции мюония с диссоциированными ионами в водных растворах с высокой концентрацией электролитов были исследованы в работах [74,82—84]. Найдено, что с ионами переменной валентности реакция с передачей электрона происходит с высокой скоростью — например, константа скорости реакции восстановления иона Cu^{2+} составляет $(5,6 \pm 0,2) \cdot 10^9$ л/моль·с, а для реакции $\text{Mu} + \text{NO}_3^- \rightarrow \text{OMu}^- + \text{NO}_2$ $K = (1,60 \pm 0,14) \cdot 10^{10}$ л/моль·с [84]. Реакционная способность малозарядных катионов постоянной валентности (Na^+ , Mg^{+2} , Zn^{2+} , Ca^{2+}) и некоторых анионов (Cl^- , SO_4^{2-}) не превышает $(1-2) \cdot 10^8$ л/моль·с, промежуточные значения были получены для ионов

OH^- , H^+ , ClO_4^- , Ni^{2+} , $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2+}$. Эти данные согласуются с результатами радиационно-химических исследований реакций радиолитического водорода [85] при учете разницы в массах атомов.

В последнее время накопленные данные о механизме взаимодействий мюония с простыми молекулами позволили начать исследование реакционной способности в водных растворах сложных соединений, обладающих радиопротекторными свойствами для живых организмов [84].

Физико-химические взаимодействия мюона и мюония в полупроводниковых материалах. Широко используемые в технике монокристаллы полупроводниковых материалов характеризуются промежуточным (по отношению к металлам и диэлектрикам) значением плотности электронов проводимости, причем концентрация носителей заряда может варьироваться в широких пределах путем введения легирующих примесей. Измерения зависимости поляризации мюона от напряженности продольного магнитного поля, проведенные при комнатной температуре с монокристаллами кремния n -типа с концентрацией носителей заряда $(1,6 \pm 0,2) \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\rho = 260 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, показали [86] существенное уменьшение $H_{\text{крит}}$ по сравнению с вакуумным значением. Найденная для кремния величина $H_{\text{крит}} = (643 \pm 42) \text{ Э}$ соответствует уменьшению энергии сверхтонкого расщепления (ΔW) для атома мюония, внедренного в полупроводник, в $\sim 2,5$ раза под действием периодического потенциала кристаллической решетки среды. Следовательно, размер (радиус боровской орбиты r_{Mu}) атома мюония в кремнии увеличен и составляет $(1,351 \pm 0,029) r_{\text{вак}}$ по отношению к изолированному атому, но значительно меньше, чем параметр кристаллической решетки кремния ($a_{\text{Si}} = 5,43 \text{ \AA}$). Таким образом, выполняется неравенство $r_{\text{вак}} < r_{\text{Mu}} < a_{\text{Si}}$, левая часть которого свидетельствует о наличии взаимодействий мюония с кристаллической решеткой, правая — указывает на возможность размещения мюония в междоузлии в пределах элементарной ячейки. В то же время для водородоподобных одноэлектронных атомов замещения, находящихся в узлах решетки (например, литий в кремнии), ΔW уменьшается на несколько порядков величины вследствие поляризационного взаимодействия примесных атомов со средой, которое приводит к размерам боровской орбиты, простирающимся на десятки периодов решетки полупроводника. Теоретические оценки [87] электронной плотности $|\psi(0)|^2$ для атома мюония в решетке полупроводника, основанные на модельных представлениях, согласуются с результатами эксперимента. Таким образом, стало ясно, что мюоний и его аналог атом H являются глубокими донорами со столь большой энергией ионизации, что их донорские свойства не проявляются в обычных условиях. Теперь понятно, почему атомы водо-

рода ведут себя как электрически неактивная примесь в кристаллах элементарных полупроводников, что было известно до этого лишь эмпирически. Глубокодонорские свойства мюония в кристаллических полупроводниках зарегистрированы [88] в Государственном реестре СССР в качестве открытия №259.

Исследования поляризации мюонов в монокристаллах германия [19,89—94], включающие варьирование типа и концентрации носителей заряда ($1 \cdot 10^{14} \div 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$), температуры ($77 \div 550 \text{ K}$), направления и величины напряженности магнитных полей, выявили разнообразный круг эффектов, проявляющихся при взаимодействиях мюонов в решетке полупроводника. Сюда относятся: наличие долгоживущего атомарного мюония в образцах с минимальным содержанием примесей при низких температурах; зависимость поляризации мюонов от температуры и концен-

трации носителей заряда, слабее выраженная для сильнолегированных материалов; сдвиг фазы мюонной прецессии и согласованное изменение остаточной поляризации мюонов с ростом напряженности перпендикулярного магнитного поля (рис.21), в полном соответствии с теорией [23,24] мюониевой деполяризации. Наблюдаемая зависимость продолжительности мюониевой стадии τ , т.е. скорости процесса, от температуры подчиняется уравнению Аррениуса (рис.22), что подтверждает протекание химической реакции с преодолением энергетического активационного барьера и образованием в конечном счете при высоких температурах диамагнитной гидридной связи Mu-Ge — фрагмента аналогичной молекулы германа GeH_4 . Установлена роль и определены параметры спин-обменных процессов. Показано, что в германии радиус орбиты мюония увеличивается в меньшей степени, чем в кремнии, и составляет $\sim 1,2r_{\text{вак}}$.

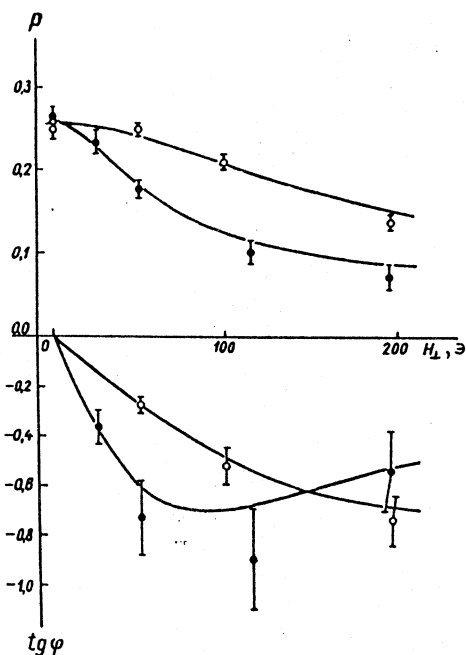


Рис.21. Зависимость поляризации (P) и сдвига фазы (φ) мюонной прецессии в германии ($n = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$) от $H_{\perp}$ при различных температурах (светлые кружки — 192 K; черные кружки — 173 K)

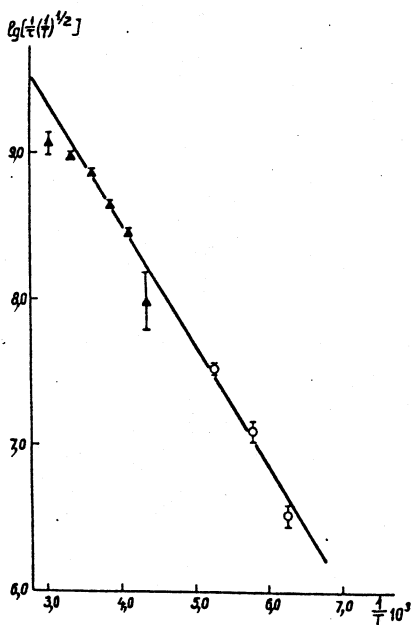


Рис.22. Зависимость продолжительности мюониевой стадии в германии ($n = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$) от температуры. Ось абсцисс — обратная температура ($1/T, \text{ K}^{-1}$), ось ординат — логарифм скорости взаимодействия ($1/\tau$) мюония в Ge с учетом множителя $T^{1/2}$. Кружки и треугольники — результаты различных серий экспериментов. Прямая линия соответствует высоте энергетического барьера $\Delta E = (0,166 \pm 0,005) \text{ эВ}$

Для $\alpha\text{-Sn}$ (полупроводник-полуметалл) с нулевой шириной запрещенной зоны при комнатной температуре не выявлено существования атомарного мюония, но для $\alpha\text{-SiC}$ (полупроводник с шириной запрещенной зоны больше 3 эВ) эксперименты в продольных магнитных полях показали, что осуществляется механизм мюониевой деполяризации, несмотря на малую продолжительность ($\leq 10^{-8} \text{ с}$) мюониевой стадии, а размер атома мюония в этом материале увеличивается до $\sim 1,14 r_{\text{вак}}$ [95]. Таким образом, глубоко-донорские характеристики одноэлектронных атомов присущи различным полупроводниковым соединениям.

Взаимодействие мюония с микропримесями. Возможность измерения абсолютных скоростей быстрых и сверхбыстрых реакций мюония с ионами вещества открывает перспективу использования мюонов для решения такой практической задачи, как определение концентраций микропримесей (уровня химической чистоты) в химически инертных материалах. Убыль мюония во времени за счет химических реакций с ионами замещения примеси легко может быть зафиксирована по измерению скорости релаксации поляризации мюония.

Отмеченная высокая чувствительность мюония к наличию микропримесей позволила провести исследование химических реакций с ионами замещения различных элементов в инертной матрице кварца [96]. Измеренные времена релаксации ($\lambda = 1/\tau$) мюониевой компоненты при варьировании содержания в кварце микропримесей дали значения констант скорости

Таблица 8. Константы скорости химических реакций мюония с ионами микропримесей в кристаллической решетке кварца

Ион	$K_{\text{Mu}}, \text{ л/моль}\cdot\text{с}$	Ион	$K_{\text{Mu}}, \text{ л/моль}\cdot\text{с}$
Fe^{3+}	$(3,6 \pm 0,5) \cdot 10^7$	Cu^{2+}	$(1,4 \pm 0,9) \cdot 10^7$
Al^{3+}	$(6,4 \pm 0,9) \cdot 10^7$	Mn^{2+}	$(3,1 \pm 1,7) \cdot 10^7$
Li^+	$(6,3 \pm 1,1) \cdot 10^7$	Ti^{4+}	$(4,2 \pm 1,6) \cdot 10^7$
Ba^{2+}	$(2,2 \pm 0,4) \cdot 10^9$	Pb^{2+}	$(6,3 \pm 0,7) \cdot 10^8$

реакций мюония с ионами, которые приведены в табл.8. Пример зависимости скорости реакции от концентрации иона алюминия показан на рис.23, угол наклона наблюдающейся прямой определяет константу скорости процесса. Фоновая величина скорости взаимодействий с основной матрицей кварца, включающая гипотетическую химическую реакцию, деполяризацию на магнитных моментах ядер с ненулевым спином, а также внутритрековые процессы, на 4—6 порядков величины меньше, чем скорости реакций мюония с ионами.

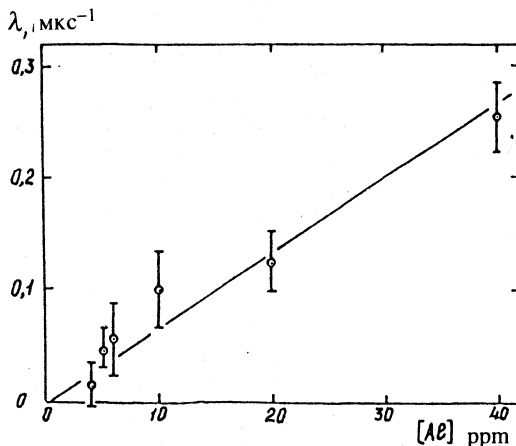


Рис.23. Зависимость скорости релаксации прецессии мюония (λ) от концентрации иона Al^{3+} в матрице кварца (1 ppm соответствует 10^{-6} весового содержания примеси в образце)

12. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МЮОНЫ В ВЕЩЕСТВЕ

Исследование вещества с помощью отрицательных мюонов с методической точки зрения ничем не отличается от исследований с использованием положительных мюонов и проводится практически на одних и тех же установках.

При попадании в среду отрицательный мюон замедляется и захватывается атомами среды благодаря кулоновскому взаимодействию. Мюон вначале захватывается на один из высоковозбужденных уровней атома, а затем,

совершая серии оже- и радиационных переходов, за время порядка 10^{-11} с достигает $1s$ -состояния. При этих переходах мюон существенно теряет поляризацию из-за спин-орбитального взаимодействия, и при достижении $1s$ -состояния его поляризация оказывается близкой к $1/6$ от начальной.

Дальнейшие потери поляризации мюона зависят от состояния электронной оболочки образовавшегося мюонного атома, от его взаимодействия со средой. Отрицательный мюон из $1s$ -состояния либо захватывается ядром, либо распадается, испуская высокоэнергичные электроны. Скорость ядерного захвата мюона зависит от заряда ядра примерно как Z^4 . Соответственно среднее время жизни мюона в $1s$ -состоянии различных атомов имеет различное значение. Благодаря этому обстоятельству можно изучать поведение поляризации мюонов в $1s$ -состоянии разных атомов, входящих в состав сложных соединений.

После захвата отрицательного мюона атомом среды его движение (диффузия) в твердом теле прекращается. Хотя в процессе формирования мюонного атома происходит частичное разрушение и перестройка электронной оболочки атома, смещение атома из исходного положения в кристаллической решетке маловероятно.

Поскольку при захвате отрицательного мюона атомом с зарядом ядра, равным Z , образовавшийся атом обладает электронной оболочкой атома $(Z - 1)$ и, соответственно, является химическим аналогом атома $(Z - 1)$, далее он будет обозначаться как ${}_{\mu}(Z - 1)$ (например, $\mu^- + \text{Si} \rightarrow {}_{\mu}\text{Al}$).

Исследование окислов. Еще в начале 60-х годов было обнаружено, что остаточная поляризация отрицательных мюонов в $1s$ -состоянии данного атома существенно зависит от вещества, в состав которого входит рассматриваемый атом. Например, было установлено [97], что поляризация мюонов в $1s$ -состоянии кислорода в основаниях и кислотах $\text{Э}_k\text{O}_m\text{H}_n$ меняется периодически в зависимости от Z элемента Э, и ее период совпадает с периодом таблицы Менделеева. Это видно из рис.24, где представлена зависимость относительной асимметрии a/a_c (a_c — асимметрия, измеренная в углероде) от Z . Вертикальные линии на рисунке разделяют периоды таблицы Менделеева. Полученные результаты были объяснены быстрыми химическими реакциями мюонного атома ${}_{\mu}\text{N}$.

В случае окислов зависимость остаточной поляризации отрицательных мюонов в $1s$ -состоянии кислорода от Z элемента имеет более сложный характер. Для большинства окислов переходных металлов наблюдается релаксация спина мюонов. Для многих из исследованных окислов [98—102] при температуре 300 К остаточная поляризация мюонов на частоте лармовской прецессии свободного спина мюона ω_{μ} близка к нулю (рис.25,а).

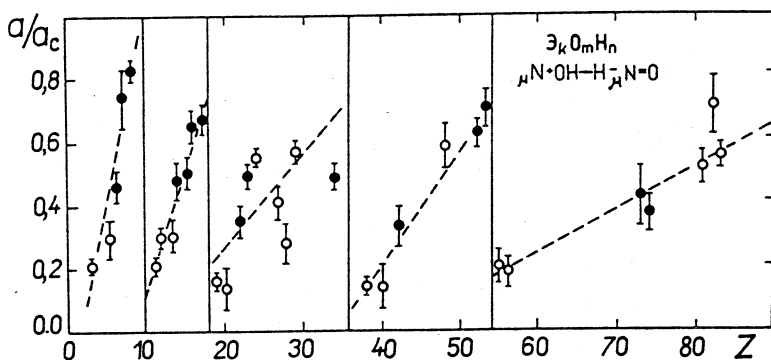


Рис.24. Зависимость a/a_C от Z элемента в основаниях и кислотах: ● — кислоты; ○ — основания. Для Co, Ni и Se представлены данные соединений, соответствующих высшей валентности элементов

Измерения при 77 К (рис.25,б) выполнены в окислах, для которых значения a/a_C при 300 К больше, чем 0,4. При температуре 77 К a/a_C в окислах значительно меньше, чем при 300 К.

Наблюдение величины a/a_C , близкой к единице, на частоте мюона ω_μ для атома μN возможно, если скорость компенсации магнитного момента электронной оболочки μN больше, чем частота сверхтонкого взаимодействия спина мюона Ω_{hf} с магнитным моментом электронной оболочки. Как следует из экспериментов в продольном магнитном поле, значение Ω_{hf} для μN близко к $0,7 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Компенсация магнитного момента электронной оболочки μN в окислах может происходить благодаря следующим процессам: вступлению μN в химические реакции с образованием диамагнитных продуктов; занятию μN в кристалле акцепторного уровня; быстрым обменным взаимодействиям между электронами проводимости и валентными электронами атома μN . Окислы переходных металлов благодаря незаполненной 3d-оболочке металлов обладают магнитными свойствами. Выше так называемой температуры Нееля T_N эти окислы являются парамагнетиками, а ниже — антиферромагнетиками. Значения T_N [103], a/a_C и Λ_p — скорости релаксации для окислов представлены в табл.9. Как видно, для окислов переходных металлов при $T < T_N$ значение a/a_C близко к нулю, тогда как при $T > T_N$ a/a_C больше, чем 0,4. В некоторых случаях при $T > T_N$ a/a_C

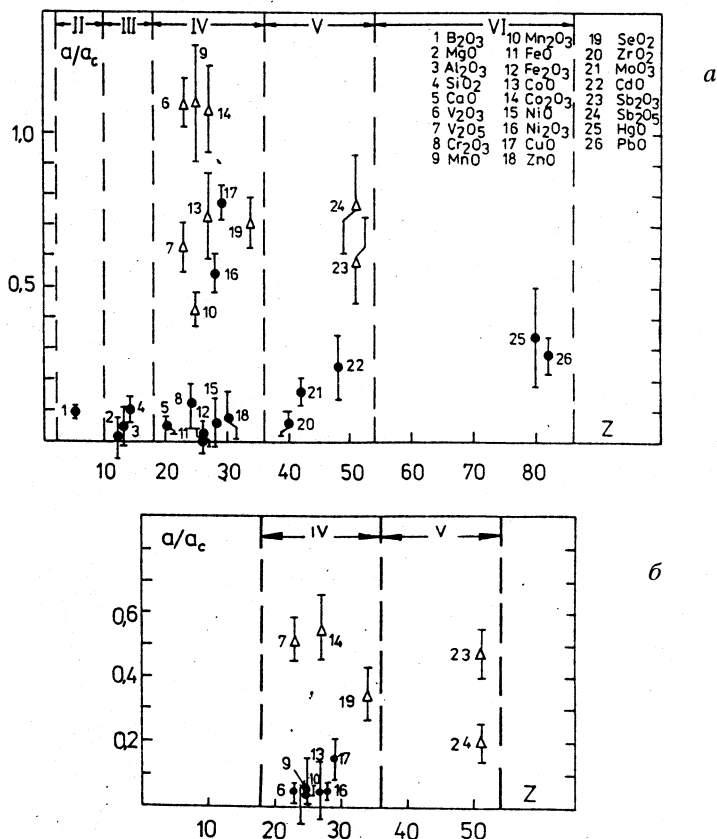


Рис.25. Зависимость a/a_c для кислорода в окислах от Z металла: а) при температуре 300 К; б) при температуре 77 К (треугольниками указаны случаи, где обнаружена релаксация спина мюона)

близко к единице, т.е. остаточная поляризация мюонов равна или близка к ожидаемой в конце каскадных переходов в $1s$ -состояние. Эти данные можно объяснить следующим образом: в окислах переходных металлов магнитный момент электронной оболочки μ_N компенсируется за время, значительно меньшее, чем характерное время сверхтонкого взаимодействия, и, следовательно, существенной потери поляризации на $1s$ -уровне μ_N не происходит. Вследствие этого наблюдается близкая к единице величина a/a_c на частоте прецессии свободного спина мюона во внешнем магнитном поле. Релак-

Таблица 9

Соединение	Z	T_N [103]	a/a_C $T = 300 \text{ K}$	Λ_p $T = 300 \text{ K}$	a/a_C $T = 77 \text{ K}$	Λ_p $T = 77 \text{ K}$	Литература
B ₂ O ₃	5	—	0,09 ± 0,02	—	—	—	[98]
MgO	12	—	0,01 ± 0,06	—	—	—	[100]
Al ₂ O ₃	13	—	0,05 ± 0,06	—	—	—	[98]
SiO ₂	14	—	0,12 ± 0,06	—	—	—	[98]
SiO ₂	14	—	0,09 ± 0,06	—	—	—	[98]
CaO	20	—	0,05 ± 0,03	—	—	—	[98]
V ₂ O ₃	23	167	1,10 ± 0,02	0,34 ± 0,05	0,11 ± 0,05	—	[102]
V ₂ O ₅	23	—	0,63 ± 0,08	0,26 ± 0,08	0,52 ± 0,07	0,21 ± 0,08	[3]
Cr ₂ O ₃	24	308	0,12 ± 0,06	—	—	—	[98]
MnO	25	122	1,10 ± 0,19	0,66 ± 0,18	0,05 ± 0,11	—	[99]
Mn ₂ O ₃	25	80	0,42 ± 0,05	0,28 ± 0,12	0,04 ± 0,12	—	[99]
FeO	26	198	0,00 ± 0,04	—	—	—	[100]
Fe ₂ O ₃	26	953	0,02 ± 0,05	—	—	—	[100]
CoO	27	201	0,73 ± 0,14	0,53 ± 0,14	0,05 ± 0,07	—	[99]
Co ₂ O ₃	27	—	1,08 ± 0,14	0,63 ± 0,12	0,55 ± 0,11	0,43 ± 0,17	[99]
NiO	28	523	0,06 ± 0,08	—	—	—	[100]
Ni ₂ O ₃	28	520	0,54 ± 0,06	—	0,05 ± 0,02	—	[100]
CuO	29	230	0,75 ± 0,05	—	0,16 ± 0,07	—	[3]
ZnO	30	—	0,08 ± 0,08	—	—	—	[100]
SeO ₂	34	—	0,71 ± 0,08	0,16 ± 0,06	—	—	[99]
ZrO ₂	40	—	0,06 ± 0,04	—	—	—	[100]
MoO ₂	42	—	0,16 ± 0,04	—	—	—	[100]
CdO	48	—	0,24 ± 0,10	—	—	—	[100]
Sb ₂ O ₃	51	—	0,59 ± 0,14	0,23 ± 0,14	—	—	[99]
Sb ₂ O ₅	51	—	0,77 ± 0,16	0,83 ± 0,27	—	—	[99]
HgO	80	—	0,34 ± 0,16	—	—	—	[100]
PbO	82	—	0,28 ± 0,06	—	—	—	[98]

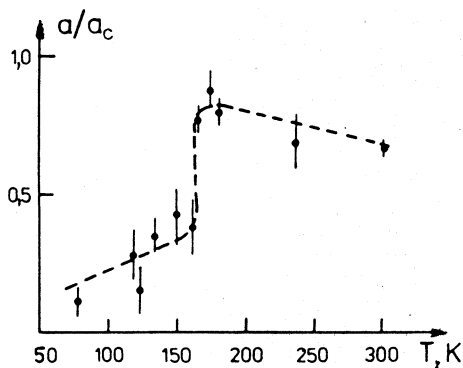


Рис.26. Зависимость относительной остаточной поляризации отрицательных мюонов на кислороде в V_2O_3 от температуры

сация спина мюона обусловлена дипольным взаимодействием магнитных моментов мюона и электронов d -оболочки металла. При $T < T_N$ магнитные моменты d -оболочки металла упорядочены, и скорость релаксации настолько возрастает, что наблюдаемое значение a/a_c становится близким к нулю.

Весомым аргументом в пользу справедливости предложенного механизма деполаризации отрицательных мюонов в окислах переходных металлов являются результаты исследования температурной зависимости a/a_c в V_2O_3 [102]. В V_2O_3 при $T = 167$ К происходит

фазовый переход. Выше этой температуры V_2O_3 является проводником и обладает парамагнетизмом, а при температурах ниже 167 К он является антиферромагнетиком, и его проводимость в 10^6 раз меньше, чем в парамагнитной фазе. Как видно из рис.26, вблизи фазового перехода a/a_c скачкообразно меняется. В парамагнитной фазе a/a_c близко к единице (для представленных данных релаксация не учитывалась, поэтому значения a/a_c выше $T = 167$ К занижены). Температура, при которой существенно изменяется a/a_c , с точностью измерений совпадает с T_N для V_2O_3 . Следовательно, скачкообразное изменение a/a_c в зависимости от температуры обусловлено фазовым переходом в V_2O_3 . Оценка [102] ν -частоты обменного взаимодействия между электронами проводимости и валентными электронами атома μN показывает, что в парамагнитной фазе в V_2O_3 $\nu = 7 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$. Это значение на три порядка больше, чем частота сверхтонкого взаимодействия Ω_{hf} в атоме μN .

Исследование полупроводников. В теоретических работах [104,105], посвященных поведению поляризации отрицательных мюонов в конденсированных средах, было обращено внимание на то, что μSR -метод может оказаться хорошим инструментом для исследования примесных атомов в полупроводниках. Было показано, что использование этого метода позволит исследовать релаксацию магнитных моментов электронных оболочек акцеп-

торных центров и получать, таким образом, информацию о быстрых процессах в полупроводниках, константе сверхтонкого взаимодействия примесных атомов, рассеянии носителей заряда на парамагнитных центрах и т.д.

Применение традиционных методов (ЭПР, ДЭПР, ЭСР и др.) для исследования акцепторных центров в полупроводниках со структурой алмаза (Si, Ge) затруднено из-за высокой скорости релаксации магнитных моментов этих центров [106—108]. Структура валентной зоны кремния такова, что в недеформированных кристаллах энергетические уровни акцепторных центров оказываются вырожденными, и поэтому наблюдение ЭПР-сигнала возможно только в деформированных образцах, в которых это вырождение снимается [107]. По этой причине данных, полученных в этой области, например, ЭПР-методом, практически нет.

В случае остановки отрицательного мюона в кремнии образованный мюонный атом является аналогом примесного атома алюминия. Акцепторный уровень для Al в Si лежит в запрещенной зоне и отстоит от верхней границы валентной зоны на $E_a = 57$ мэВ [109]. Нейтральный мюонный атом в этих условиях будет вести себя аналогично мюонию. Однако проекция момента электронной оболочки акцептора может иметь четыре различных значения [107], и скорость релаксации электронного момента будет значительно выше, чем у мюония.

Скорость затухания поляризации мюона на частоте, близкой к частоте прецессии свободного спина мюона, можно оценить как [20]:

$$\Lambda \sim \Omega_{hf}^2 / (8\nu), \quad (20)$$

где Λ — скорость релаксации спина мюона, Ω_{hf} — константа сверхтонкого взаимодействия, ν — скорость релаксации магнитного момента электронной оболочки мюонного атома.

Наряду с релаксацией должен наблюдаться парамагнитный сдвиг частоты прецессии спина мюона [105]. Верхний предел ожидаемого значения парамагнитного сдвига можно оценить по следующей формуле:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_\mu} = \frac{g\mu_B}{2\mu_\mu} \frac{\hbar\Omega_{hf}}{4kT}, \quad (21)$$

где ω_μ — частота прецессии свободного спина мюона; g — фактор Ланде акцепторного центра в кремнии; μ_B — магнетон Бора; μ_μ — магнитный момент мюона; $\hbar$ и k — постоянные Планка и Больцмана.

Как видно из (20), скорость релаксации спина мюона зависит от константы сверхтонкого взаимодействия и от скорости релаксации магнитного момента электронной оболочки акцепторного центра.

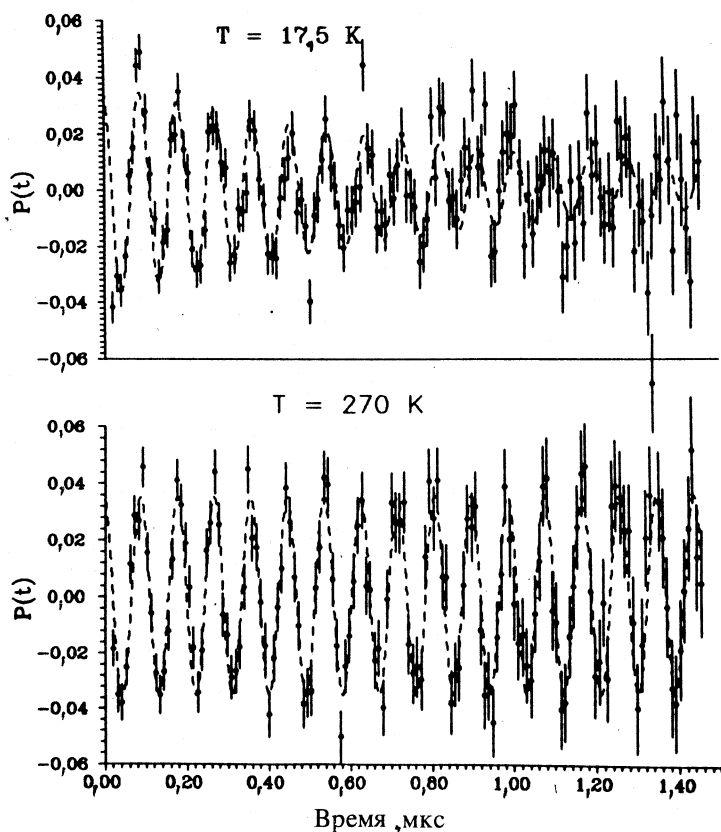


Рис.27. Временное распределение электронов $\mu \rightarrow e$ -распада в Si при 17,5 и 270 К. Экспериментальные данные поправлены на экспоненту распада, исключены вклады компонент, не относящихся к Si. Кривые проведены по методу наименьших квадратов

Первые эксперименты по исследованию поляризации отрицательных мюонов в кремнии были выполнены в Дубне еще в начале семидесятых годов [110]. Измерения были выполнены в кремнии n -типа при $T = 300$ К и 77 К. Оказалось, что остаточная поляризация мюонов в обоих образцах не зависит от температуры и по значению близка к максимально возможной.

Более подробные μ SR-исследования в этой области начались недавно в PSI (Швейцария) [111,112,114] и в ОИЯИ [113,115]. Исследования проводились в кремнии n -, p -типа и в кремнии с собственной проводимостью в диапазоне температур $4,2 \div 300$ К во внешнем магнитном поле, перпендикулярном спину мюона.

В [111,112] было обнаружено, что ниже 30 К остаточная поляризация мюонов уменьшается с понижением температуры, а релаксация спина мюона не наблюдается. Впервые релаксация спина мюона была обнаружена в кремнии *p*-типа с концентрацией примесей $2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ [113]. На рис.27 представлены μSR-спектры, измеренные при 270 К и 17,5 К [113]. Видно, что при 17,5 К наблюдается релаксация спина мюона. При этом величина остаточной поляризации мюонов $P(t=0)$ оказалась постоянной во всем интервале температур. Скорость релаксации при 30 К составляет $(0,18 \pm 0,08) \text{ мкс}^{-1}$ и растет с понижением температуры, превышая 30 мкс^{-1} при 4,2 К (рис.28). Ниже 30 К скорость релаксации зависит от температуры как $\Lambda = bT^{-q}$, с $q = 2,75$. Анализ данных показал, что сдвиг частоты прецессии спина мюона в кремнии не превышает 10^{-3} .

Аналогичные результаты по релаксации спина мюона были получены позже для кремния *n*- и *p*-типа с различными концентрациями примесей [114]. В этой работе экспериментальные данные из [111,112] обработаны заново. Было показано, что во всех исследованных образцах при низких температурах наблюдается релаксация спина отрицательных мюонов, и результаты согласуются с данными [113].

В работе [115] исследована зависимость остаточной поляризации отрицательных мюонов в кремнии *n*-типа с концентрацией примесей $(1,6 \pm 0,2) \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ от температуры в интервале $10 + 300 \text{ К}$. Оказалось, что значение коэффициента асимметрии близко к ожидаемому по теории каскадной деполяризации [116] и практически не зависит от температуры. При комнатной температуре релаксация спина мюона не обнаружена, тогда как при температурах ниже 30 К она отчетливо наблюдается (рис.29,а). Скорость релаксации при 30 К равна $(0,25 \pm 0,08) \text{ мкс}^{-1}$. В области температур

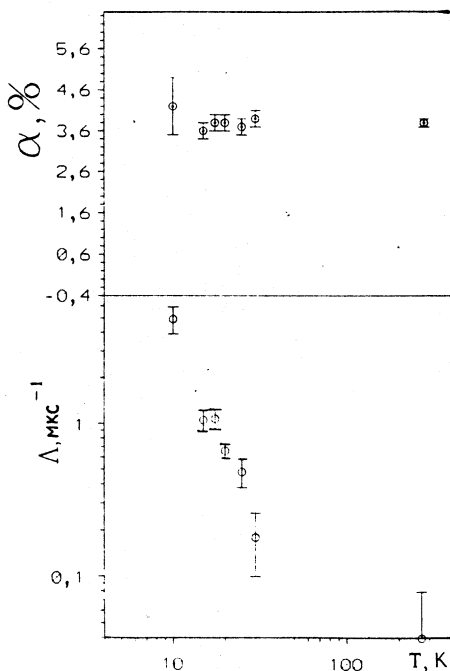


Рис.28. Зависимость коэффициента асимметрии электронов $\mu \rightarrow e$ -распада и скорости релаксации спина мюона Λ от температуры в Si *p*-типа

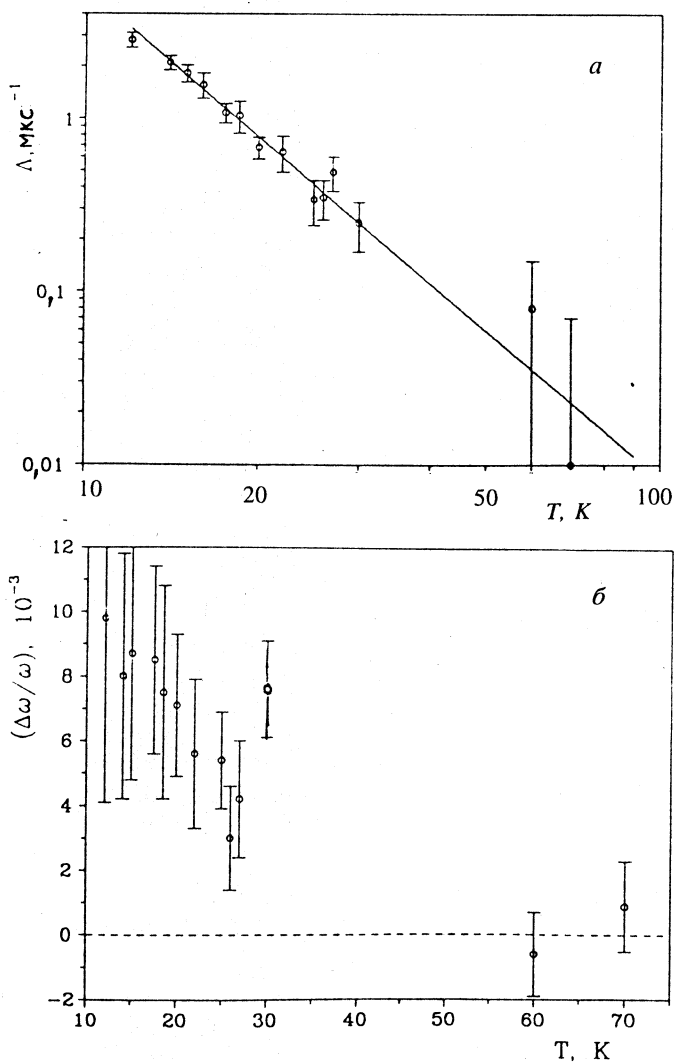


Рис.29. Зависимость скорости релаксации Λ (а) и сдвига частоты прецессии спина мюона $\Delta\omega/\omega$ (б) в кремнии n -типа от температуры. $\Delta\omega$ — сдвиг частоты от ее значения при комнатной температуре (ω). Прямая (а) проведена по методу наименьших квадратов

ниже 30 К данные по скорости релаксации хорошо описываются зависимостью $\Lambda = bT^{-q}$, где $q = 2,8 \pm 0,2$. Поведение скорости релаксации поля-

ризации спина мюона в пределах ошибок совпадает с аналогичной зависимостью для образца p -типа, исследованного ранее [113], а также с результатами [114].

В отличие от кремния p -типа [113], в котором сдвиг частоты прецессии спина мюона не превышал экспериментальных ошибок (был определен только верхний предел: $\Delta\omega/\omega < 10^{-3}$), в образце n -типа обнаружен [115] аномально большой для немагнитных материалов сдвиг этой частоты. При 20 К $\Delta\omega/\omega$ составляет $7 \cdot 10^{-3}$.

Зависимость $\Delta\omega/\omega$ от температуры показана на рис.29,б. Видно, что сдвиг частоты прецессии спина мюона растет с понижением температуры, однако экспериментальные ошибки не позволяют определить аналитическую форму этой зависимости.

Так как кремний является диамагнетиком и наличие примеси ядра Si^{29} , обладающего ядерным магнитным моментом, не может приводить к релаксации спина мюона со скоростью более 10^5 с^{-1} , наблюдаемая релаксация и сдвиг частоты прецессии спина мюона могут быть обусловлены лишь парамагнетизмом электронной оболочки акцепторного центра, образованного мюонным атомом.

В кремнии μAl как акцепторный центр может находиться в ионизованном μAl^{-1} или в неионизованном μAl^0 состояниях. В неионизованном состоянии электронная оболочка мюонного атома обладает отличным от нуля магнитным моментом.

В работе [117] рассмотрена кинетика процессов, происходящих при образовании мюонного атома в кремнии. В рамках предложенной модели мюонный атом образуется в ионизованном μAl^{-1} состоянии. К этому времени вокруг мюонного атома и вдоль трека мюона в пространстве с размерами до 10^{-3} см концентрация дырок и свободных электронов достигает 10^{14} см^{-3} , что обусловлено радиолизом среды при замедлении мюона и образовании мюонного атома. Как показано в [117], в этих условиях при $T = 30 \text{ К}$ μAl^{-1} за 10^{-9} с, захватывая дырку, переходит в состояние μAl^0 . Поскольку характерное время рекомбинации электронов и дырок (см., например, [109]) намного больше времени жизни мюона (среднее время жизни отрицательного мюона в кремнии составляет $0,760 \cdot 10^{-6} \text{ с}$), можно полагать, что мюонный атом в кремнии до распада мюона будет находиться в состоянии μAl^0 в кремнии n - и p -типа. В этом случае наблюдение релаксации спина мюона на частоте, близкой к частоте прецессии свободного спина во внешнем магнитном поле, возможно, если момент электронной оболочки мюонного атома релаксирует с частотой $\nu \gg \Omega_{hf}$.

Из ЭПР-исследований [106] получено, что в недеформированном кристалле кремния скорость релаксации момента электронной оболочки акцепторного центра при $T \geq 4,2$ К превосходит 10^{10} с^{-1} .

В этих условиях зависимость скорости релаксации спина мюона в кремнии от ν описывается формулой (20). Используя значения Λ при 15 К и частоты прецессии спина мюона в нулевом внешнем магнитном поле ($\Omega_{hf}/2\pi = 6,5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ [111]), из формулы (20) получим, что скорость релаксации момента электронной оболочки мюонного атома (акцепторного центра) близка к 10^{12} с^{-1} . Это значение не противоречит вышеприведенному пределу для ν , который следует из ЭПР-экспериментов.

Экспериментальное значение сдвига частоты прецессии спина мюона существенно меньше, чем оценка $(\Delta\omega/\omega)$ по формуле (21). Этот факт является естественным, поскольку при настоящих экспериментальных условиях частота прецессии спина электрона во внешнем поле (ω_e) по порядку величины не превышает ширину электронных уровней парамагнитного центра (мюонного атома) с различными проекциями момента. С этой точки зрения представляют интерес эксперименты с использованием более сильных магнитных полей.

Основные результаты исследований поведения поляризации отрицательных мюонов в кремнии могут быть сформулированы следующим образом.

а) В диапазоне температур $4,2 \div 300$ К остаточная поляризация мюонов в $1s$ -состоянии кремния (n - и p -типа) [113—115] близка к максимально возможной по теории каскадной деполаризации. Этот факт свидетельствует об отсутствии механизмов, приводящих к потере поляризации мюона в $1s$ -состоянии, в том числе не происходит смещения мюонного атома из узла решетки. Несмещенный из узла решетки мюонный атом в данном случае является акцепторным центром.

б) Ниже 30 К в кремнии n - и p -типа обнаружена релаксация спина мюона [113—115]. Как было установлено в [113], температурная зависимость скорости релаксации хорошо описывается выражением $\Lambda \sim T^{-b}$, где $b = 2,7 \div 3,0$. Практическое отсутствие зависимости скорости релаксации спина мюона от типа проводимости и от концентрации носителей заряда в образце указывает на то, что роль взаимодействия мюонного атома с носителями заряда не существенна. Зависимость типа T^{-3} для скорости релаксации может свидетельствовать в пользу фононного механизма релаксации момента электронной оболочки мюонного атома.

в) В работе [111] в кремнии была обнаружена осцилляция спина мюона в нулевом внешнем магнитном поле. Наблюдаемая частота осцилляции может быть интерпретирована как частота сверхтонкого взаимодействия Ω_{hf} . Это позволяет по измеренному значению скорости релаксации спина

мюона определить скорость релаксации момента электронной оболочки мюонного атома и тем самым для акцепторной примеси Al в кремнии [113, 115]. Полученные результаты показывают, что использование μSR-метода позволяет определить скорость релаксации момента электронной оболочки акцепторного центра в недеформированном кристалле кремния, тогда как ЭПР-методом ее измерить не представляется возможным.

г) В кремнии *n*-типа обнаружен [115] сдвиг частоты прецессии спина мюона: $\Delta\omega/\omega = (7 \pm 2) \cdot 10^{-3}$ при $T = 15$ К. Существование сдвига частоты и его значение согласуются с теорией, если рассматривать даваемое теорией значение как верхний предел сдвига частоты. Как было отмечено, имеющиеся экспериментальные данные не позволяют однозначно определить механизм релаксации магнитного момента электронной оболочки мюонного атома (акцепторного центра). Также неясна роль взаимодействия мюонного атома с продуктами радиолиза среды. Расчеты [117] показывают, что это взаимодействие может быть существенным фактором, влияющим на поведение поляризации мюона в кремнии. Можно надеяться, что эти вопросы могут быть прояснены в последующих исследованиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Р. Гаврин, Л. Ледерман и М. Вейнрих, установившие в 1957 г. несохранение пространственной четности в процессах рождения и распада мюонов, предсказали в своей статье, что поляризованные мюоны станут мощным инструментом для исследования магнитных полей в ядрах, атомах и межатомных областях. Спустя приблизительно 10 лет на синхротроне ЛЯП ОИЯИ начались интенсивные эксперименты по исследованию вещества с помощью мюонов. Особенно большой размах эти исследования приобрели в других центрах с начала 70-х годов после ввода в действие мезонных фабрик. В настоящее время исследования ведутся в PSI (Швейцария), TRIUMF (Канада), RAL (Великобритания), ОИЯИ (Дубна, Россия), ПИЯФ (Гатчина, Россия), BOOM/КЕК (Япония), LAMPF (США). Таким образом, был создан и развит новый перспективный метод изучения физических и химических свойств вещества.

В настоящем обзоре представлены только некоторые, наиболее важные результаты, полученные на фазотроне ОИЯИ. Из представленного материала видно, что мюоны могут успешно использоваться для исследований во многих областях физики твердого тела и химии. Они моделируют поведение однозарядной примеси (в частности, протона) в металлах, с их помощью исследуются магнитные явления в ферро- и антиферромагнетиках, изучаются сверхпроводники. μSR-метод позволяет изучать поведение водородоподобных примесных центров (роль которых играет мюоний) или других

примесных атомов (в качестве которых рассматриваются мюонные атомы) в полупроводниках. Весьма плодотворным оказывается применение мюонов для исследования кинетики химических реакций мюония, а следовательно, быстрых химических взаимодействий атомарного водорода. Имеется также множество других применений, о которых можно составить представление из материалов международных конференций, посвященных μSR -методу, [118], регулярно проводимых с 1977 г.

В заключение авторы выражают благодарность чл.-корр. РАН профессору В.П.Джелепову и доктору физ.-мат.наук В.В.Фильченкову за обсуждение настоящего обзора и полезные замечания, а также Г.Д.Соболевой за помощь в подготовке рукописи к публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schenck A. — Muon Spin Rotation Spectroscopy. Adam Hilger Ltd., Bristol and Boston, 1985;
- Смилга В.П., Белоусов Ю.М. — Мюонный метод исследования вещества. М.: Наука, 1991.
2. Никольский Б.А. — В сб.: Мезоны в веществе. ОИЯИ, Д1,2,14-10908, Дубна, 1977, с.246;
- Гуревич И.И., Никольский Б.А. — Эксперименты по физике положительного мюона, ИАЭ, 1976;
- Гуревич И.И. и др. — ЭЧАЯ, 1977, т.8, с.110.
3. Евсеев В.С. и др. — Отрицательные мюоны в веществе. М.: Энергоиздат, 1985;
- Кириллов-Угрюмов В.Г. и др. — Атомы и мезоны. М.: Атомиздат, 1980.
4. Gurevich I.I., Makariyna L.A., Nikol'sky B.A. et al. — Phys. Lett., 1964, v.11, p.185.
5. Ахманов В.В., Гуревич И.И., Добрецов Ю.П. и др. — ЯФ, 1967, т.6, с.316.
6. Anderson P.W. — J. Phys. Soc. Japan, 1954, v.9, p.316.
7. Kubo R., Tomita K. — J. Phys. Soc. Japan, 1954, v.9, p.888.
8. Абрагам А. — Ядерный магнетизм. М.: ИИЛ, 1963, с.407.
9. Kubo R., Toyabe T. — Magnetic Resonance and Relaxation. Ed. R.Blin, North-Holland, Amsterdam, 1967, p.810.
10. Фазотрон Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ и его пучки. ОИЯИ, 9-92-232, Дубна, 1992.
11. Абазов В.М. и др. — Сообщения ОИЯИ 9-90-68, 9-90-69, Дубна, 1990.
12. Dodokhov V.H. et al. — Hyperfine Inter., 1990, v.65, p.1167.
13. Piper A.E. et al. — NIM, 1976, v.135, p.39.
14. Гаганов И.А., Гребинник В.Г., Дугинов В.Н., Жуков В.А. и др. — ОИЯИ, Д14-87-799, 1987, с.437.
15. Hughes V.W., Mecom D.W., Ziock K. et al. — Phys. Rev. Lett., 1960, v.5, p.63;
- Prepost R., Hughes V.W., Ziock K. — Phys. Rev. Lett., 1961, v.6, p.19.
16. Бабаев А.И., Балац М.Я., Мясничева Г.Г. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1966, т.3, с.3.

17. Мяснищева Г.Г., Обухов Ю.В., Роганов В.С. и др. — ЖЭТФ, 1967, т.53, с.451.
18. Бабаев А.И., Балац М.Я., Мяснищева Г.Г. и др. — Бюллетень ОИПОТЗ, 1975, №48, с.2.
19. Андриянов Д.Г., Мяснищева Г.Г., Обухов Ю.В. и др. — ЖЭТФ, 1969, т.56, с.1195.
20. Носов В.Г., Яковлева И.В. — ЖЭТФ, 1962, т.43, с.1750.
21. Фирсов В.Г., Бяков В.М. — ЖЭТФ, 1964, т.47, с.1074.
22. Фирсов В.Г. — ЖЭТФ, 1965, т.48, с.1179.
23. Ивантер И.Г., Смилга В.П. — ЖЭТФ, 1968, т.54, с.559.
24. Ивантер И.Г., Смилга В.П. — ЖЭТФ, 1968, т.55, с.1521.
25. Fermi E. — Zs. Phys., 1930, v.60, p.320;
Fermi E., Segre E. — Zs. Phys, 1923, v.82, p.729.
26. Gurevich I.I., Ivanter I.G., Makariyna L.A. et al. — Phys. Lett, 1969, v.B29, p.387.
27. Гуревич И.И., Ивантер И.Г., Мелешко Е.А. и др. — ЖЭТФ, 1971, т.60, с.471.
28. Birnbaum H.K., Wert C.A. — Berichte Buncen-Gesellschaft Physik. Chem., 1972, v.76, p.806.
29. Gurevich I.I., Meleshko E.A., Muratova I.A. et al. — Phys. Lett., 1972, v.A40, p.143;
Гребинник В.Г., Гуревич И.И., Жуков В.А. и др. — ЖЭТФ, 1975, т.68, с.1548;
Бюллетень «Открытия и изобретения», 1983, т.23, с.3.
30. Eichenauer W., Luser W., Witte H.W. — Zs. Metallkunde, 1965, v.56, p.287.
31. Katze L., Guinan M., Borg R.I. — Phys. Rev., 1971, v.B4, p.330.
32. Eichenauer W., Pebler A. — Zs. Metallkunde, 1957, v.48, p.373.
33. Ransley C.F., Talbot D.E. — Zs. Metallkunde, 1955, v.46, p.328.
34. Каган Ю.М., Клингер М.Л. — J. Phys., 1974, v.C7, p.2791.
35. Гребинник В.Г., Гуревич И.И., Жуков В.А. и др. — Препринт ИАЭ, 2635, 1976.
36. Гребинник В.Г., Гуревич И.И., Дидык А.Ю., Жуков В.А. и др. — В сб.: Мезоны в веществе. ОИЯИ, Д1,2,14-10908, Дубна, 1977, с.266.
37. Гребинник В.Г., Гуревич И.И., Жуков В.А. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1977, т.25, с.322.
38. Материалы μ SR-конференций: Hyperfine Inter, 1990, v.64, p.615—748; 1994, v.85, p.3—122.
39. Foy M.L.G., Heiman N., Kossler W.J. et al. — Phys. Rev. Lett., 1973, v.30, p.1064.
40. Гуревич И.И., Климов А.И., Майоров В.Н. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1973, т.18, с.564.
41. Гуревич И.И., Климов А.И., Майоров В.Н. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т.20, с.558.
42. Гуревич И.И., Климов А.И., Майоров В.Н. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, с.16.
43. Гуревич И.И., Климов А.И., Майоров В.Н. и др. — ЖЭТФ, 1975, т.69, с.439.

44. Гуревич И.И., Климов А.И., Майоров В.Н. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т.69, с.1453.
45. Graf H., Kundig W., Patterson B.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1976, v.37, p.1644.
46. Майоров В.Н., Никольский Б.А. — Препринт ИАЭ-2469, 1974.
47. Nishida N., Nagamine K., Hayano R.S. et al. — Journ. Phys. Soc, Japan, 1978, v.44, p.1131.
48. Keller J. — Hyperfine Inter., 1979, v.6, p.15.
49. Гуревич И.И., Климов А.И., Майоров В.Н. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1976, т.23, с.345.
50. Гребинник В.Г., Гуревич И.И., Жуков В.А. и др. — В сб.: Мезоны в веществе, ОИЯИ, Д1,2,14-10908, Дубна, 1977, с.261.
51. Гребинник В.Г., Гуревич И.И., Жуков В.А. и др. — ЖЭТФ, 1979, т.76, с.2178.
52. Барсов С.Г., Геталов А.Л., Гребинник В.Г. и др. — ЖЭТФ, 1983, т.84, с.1896.
53. Барсов С.Г., Геталов А.Л., Гребинник В.Г. и др. — ЖЭТФ, 1986, т.91, с.298.
54. Гребинник В.Г., Гуревич И.И., Жуков В.А. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1979, т.29, с.82.
55. Grebinnik V.G., Gurevich I.I., Zhukov V.A. et al. — Hyperfine Inter., 1979, v.6, p.103.
56. Гребинник В.Г., Гуревич И.И., Жуков В.А. и др. — ЖЭТФ, 1980, т.79, с.518.
57. Bednorz J.G., Muller K.A. — Z.Phys., 1986, v.B64, p.189.
58. Grebinnik V.G., Duginov V.N., Zhukov V.A. et al. — Physica C, 1989, v.162-164, p.145; Hyperfine Inter., 1990, v.61, p.1093.
59. Grebinnik V.G., Duginov V.N., Zhukov V.A. et al. — Progress in HTSC, 1990, v.21, p.563; World Scientific, Singapore.
60. Grebinnik V.G., Duginov V.N., Zhukov V.A. et al. — Hyperfine Inter., 1990, v.61, p.1085.
61. Grebinnik V.G., Duginov V.N., Zhukov V.A. et al. — Hyperfine Inter., 1990, v.61, p.1093.
62. Гуревич И.И., Климов А.И., Майоров В.Н. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1979, т.30, с.56.
63. Lines M.E. — J. Phys. Chem. Solide, 1970, v.31, p.101.
64. Aharony A. et al. — Phys. Rev. Lett., 1988, v.60, p.1330.
65. Pinkus P. et al. — Phys. Rev. Lett., 1964, v.13, p.21.
66. Barford W., Gunn J.M.F. — Physica, 1988, v.C156, p.512.
67. Fesenko V.I. et al. — Physica, 1991, v.C176, p.551.
68. Rammer J. — Europhys. Lett., 1988, v.5, p.77.
69. Uemura Y.J. et al. — Phys. Rev., 1988, v.B38, p.909; Phys. Rev. Lett., 1989, v.62, p.2317; Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.2665.
70. Weber M. et al. — Supercond. Sci. Technol., 1991, v.4, p.403.
71. Weber M. et al. — Physica C, 1991, v.185-189, p.749, 1093.
72. Maletta H. et al. — J. of Magnetism and Magnetic Materials, 1992, v.104, p.495.
73. Weber M. et al. — Phys. Rev. B, 1993, v.48, p.13022.
74. Бабаев А.И., Балац М.Я., Мясничева Г.Г. и др. — ЖЭТФ, 1966, т.50, с.877.

75. Мясичева Г.Г., Обухов Ю.В., Роганов В.С. и др. — Химия высоких энергий, 1969, т.3, с.510.
76. Мясичева Г.Г., Обухов Ю.В., Роганов В.С. и др. — Химия высоких энергий, 1967, т.1, с.390.
77. Мясичева Г.Г., Обухов Ю.В., Роганов В.С. и др. — Химия высоких энергий, 1970, т.4, с.447.
78. Мясичева Г.Г., Обухов Ю.В., Роганов В.С. и др. — Химия высоких энергий, 1967, т.1, с.387.
79. Кондратьев В.Н. — Кинетика химических газовых реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
80. Бродский А.М., Левич В.Г., Толмачев В.В. — ДАН СССР, 1968, т.183, с.852.
81. Бродский А.М., Левич В.Г. — ДАН СССР, 1969, т.186, с.1344.
82. Минайчев Е.В., Мясичева Г.Г., Обухов Ю.В. и др. — ЖЭТФ, 1974, т.66, с.1926.
83. Vyakov V.M., Chaplygin I.L., Dem'yanov A.V. et al. — Preprint ITEP N57-94, М., 1994.
84. Бяков В.М., Илюхина О.В., Кудинов В.И. и др. — Химия высоких энергий, 1995, т.29, с.230.
85. Anbar M., Neta P. — Intern. J. Appl. Radiation and Isotopes, 1965, v.16, p.227.
86. Андрианов Д.Г., Минайчев Е.В., Мясичева Г.Г. и др. — ЖЭТФ, 1970, т.58, с.1896.
87. Wang J.S.-Y., Kittel C. — Phys. Rev., 1973, v.7B, p.713.
88. Андрианов Д.Г., Минайчев Е.В., Мясичева Г.Г. и др. — Бюллетень ОИПОТЗ, 1982, №41, с.3.
89. Андрианов Д.Г., Обухов Ю.В., Фирсов В.Г. и др. — Доклады АН СССР, 1971, т.201, с.884.
90. Кудинов В.И., Минайчев Е.В., Мясичева Г.Г. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т.21, с.49.
91. Андрианов Д.Г., Гончаров Л.А., Минайчев Е.В. и др. — Физика и техника полупроводников, 1976, т.10, с.1167.
92. Кудинов В.И., Минайчев Е.В., Мясичева Г.Г. и др. — ЖЭТФ, 1976, т.70, с.2041.
93. Кудинов В.И., Минайчев Е.В., Мясичева Г.Г. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1977, т.25, с.331.
94. Андрианов Д.Г., Мясичева Г.Г., Обухов Ю.В. и др. — Физика и техника полупроводников, 1978, т.12, с.161.
95. Андрианов Д.Г., Мясичева Г.Г., Обухов Ю.В. и др. — Физика и техника полупроводников, 1978, т.12, с.202.
96. Гордеев В.А., Гордиенко Л.А., Илюхина О.В. и др. — ЯФ, 1994, т.57, с.1935.
97. Евсеев В.С. и др. — Журнал физической химии, 1983, т.57, с.86.
98. Джураев А.А. и др. — ЖЭТФ, 1972, т.62, с.1425.
99. Евсеев В.С., Мамедов Т.Н., Роганов В.С. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1978, т.27, с.249.

100. Евсеев В.С., Мамедов Т.Н., Роганов В.С. и др. — В сб.: Мезоны в веществе, ОИЯИ, Д1,2,14-10908, Дубна, 1977, с.322.
101. Nagamine S. et al. — Phys. Rev. Lett., 1975, v.35, 5, p.308.
102. Баландин М.П., Евсеев В.С., Мамедов Т.Н. и др. — ЖЭТФ, 1983, т.84, с.1125.
103. Гуденаф Д. — Магнетизм и химическая связь: Пер. с англ. М.: Metallurgia, 1968.
104. Горелкин В.Н., Смилга В.П. — ЖЭТФ, 1974, т.66, с.1201.
105. Горелкин В.Н., Котова Л.П. — ЖЭТФ, 1981, т.80, с.1677.
106. Людвиг Дж., Вудбери Г. — Электронный спиновый резонанс в полупроводниках. М.: Мир, 1964.
107. Бир Г.Л., Пикус Г.Е. — Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. М.: Наука, 1972.
108. Metzner H. et al. — Phys. Rev., 1990, v.B.42, p.11419.
109. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З. — Физические величины. Справочник под редакцией. М.: Энергоатомиздат, 1991.
110. Dzhuraev A.A., Evseev V.S. et al. — JETP, 1972, v.62, p.1424.
111. Koch M. et al. — Hyperfine Inter., 1990, v.65, p.1093.
112. Stammler Th., Abela R., Grund Th. et al. — Phys. Stat. Solid, 1993, v.137, p.381.
113. Mamedov T.N., Duginov V.N., Grebinnik V.G. et al. — Hyperfine Inter., 1994, v.87, p.717; ЯФ, 1993, т.56, с.29.
114. Beez W., Grund T.T., Hampele M. et.al. — PSI Newsletter, 1993, Annex 1, p.125.
115. Горелкин В.Н., Гребинник В.Г., Грицай К.И. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1996, т.63, с.539.
116. Джрбашян В.А. — ЖЭТФ, 1959, т.36, с.277;
Шмушкевич И.М. — ЖЭТФ, 1959, т.36, с.645;
Бухвостов А.П. — ЯФ, 1969, т.9, с.107.
117. Gorelkin V.N., Mamedov T.N., Rubtsov D.V. — Hyperfine Inter. (C), 1996, v.1, p.191.
118. Мюоны и пионы в веществе. ОИЯИ, Д1,2,14,-10908, Дубна, 1977; D14-87-799, Дубна, 1987; D13,14,15-95-49, Дубна, 1995.
Hyperfine Inter. 1978, v.6; 1980, v.8; 1983, v.17-19; 1986, v.31-32; 1990, v.63-65; 1993, v.85-87.

ЭЛЕКТРОЯДЕРНЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ЭНЕРГИИ

В.П.Дмитриевский

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор содержит результаты физических работ и некоторые предложения по энергетическим усилителям на основе протонных ускорителей. Рассмотрены исходные физические предпосылки для работы энергетических усилителей на медленных и быстрых нейтронах.

The survey describes the results of some physical publications and contains certain proposals concerning energy amplifiers based on proton accelerators. The base physical requirements for fast and thermal neutron energy amplifiers are examined.

ВВЕДЕНИЕ

Успешные исследования ядерных реакторов на тепловых и резонансных нейтронах при достаточном количестве делящихся изотопов (^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu) полностью удовлетворяли развитие ядерной энергетики и, как казалось, не требовали разработок новых технологий с использованием ускоренных заряженных частиц. Ускорители заряженных частиц в основном развивались в одном направлении — увеличение энергии ускоренного пучка с интенсивностями, достаточными для исследований взаимодействий элементарных частиц в новых областях параметров и квантовых чисел. Этот естественный процесс определялся интересом к фундаментальным исследованиям, на которых базируется теоретическая физика.

Ядерные взаимодействия при энергиях выше ~ 1 ГэВ/нуклон приводят к очень сложным конечным состояниям. Их исследование долгое время рассматривалось как не соответствующее главному направлению фундаментальных исследований. Однако в 70-х годах были получены пучки релятивистских ядер и началось интенсивное изучение предельных возбуждений ядерной материи, переходов протон-нейтронной материи в кварк-глюонную. Были открыты закономерности фундаментального характера, имеющие также большое значение для астрофизики и космологии.

Область ядерных столкновений при энергиях ≥ 1 ГэВ/нуклон приобрела также большое методическое значение для создания импульсных нейтронных генераторов и для электроядерного метода получения энергии. Обе проблемы стали актуальными, когда интенсивности средних токов ускоренных частиц достигли миллиамперных значений при этих энергиях.

Проблемы ядерной безопасности имеют большую актуальность для планеты при сохранении задачи энергоснабжения ее населения. Поэтому разработка новых технологий, основанных на использовании ядерной энергии, остается одним из главных направлений прикладной ядерной физики.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОЯДЕРНОГО МЕТОДА

Пучок заряженных частиц (для определенности — протонов) с энергией (кинетической) E направляется на мишень из тяжелого элемента (Pb, U), продольный размер которой превышает ионизационный пробег для данной энергии.

Величина пробега обусловлена потерей энергии на ионизацию атомов мишени и образование δ -электронов. Так как сечения ионизации достаточно велики: $\sigma \approx 10^{-16} + 10^{-18}$ см², длина свободного пробега $l = \frac{1}{N\sigma} < 10^{-4}$ см. Флуктуация ионизационного пробега не превышает 1—2% (N — число атомов в 1 см³). В качестве иллюстрации в таблице приведен ионизационный пробег протонов различных энергий в свинце [1].

Таблица

Энергия, МэВ	50	100	150	200	300	400	500	600	700	800	1000	2000	3000
Пробег, см	0,465	1,51	3,008	4,862	9,435	14,87	20,45	27,51	34,44	41,64	56,3	136,1	215,6

Многократное кулоновское рассеяние пучка на ионизационном пробеге мало, так как средний квадрат угла одноактного рассеяния [2]

$$\langle \theta^2 \rangle = \theta^2 \ln \frac{a}{b}, \quad a = a_0 Z^{-1/3}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 5,29 \cdot 10^{-9} \text{ см},$$

b — «радиус» ядра, $\theta = \frac{\lambda}{a}$, $\lambda = \frac{\hbar}{p}$.

Такое рассмотрение справедливо при энергии первичного протонного пучка $E > 100$ МэВ, для которого $\langle \theta^2 \rangle$ будет меньше 10^{-8} , что соответствует среднеквадратичному поперечному отклонению на длине свободного пробега $\langle b^2 \rangle = \frac{\langle \theta^2 \rangle}{(N\sigma)^2}$ и на длине ионизационного пробега $\langle b^2 \rangle = \frac{L}{N\sigma} \langle \theta^2 \rangle$, то есть расширение пучка определяется только дифракционным ядерным рассеянием.

Энергия ниже 100 МэВ, как будет ясно из дальнейшего изложения, не представляет интереса для электроядерного метода получения нейтронов в процессе их испарения из возбужденных ядер. Несмотря на то, что процесс ионизационного замедления ускоренных частиц не вносит заметного вклада в электроядерный метод, он определяет масштаб длины, на которой происходят ядерные процессы с вероятностью, определяемой сечениями ядерного взаимодействия. Полное сечение ядерного взаимодействия принято разделять на два — упругое и неупругое:

$$\sigma_t = \sigma_{el} + \sigma_{in}. \quad (1)$$

Упругое взаимодействие (по определению) не приводит к возбужденному состоянию ядра, так как изменение энергии в соответствии с законом сохранения импульса передается ядру как одной частице.

Общепринятый радиус сферического ядра, состоящего из A нуклонов:

$$r = 1,41A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (2)$$

Геометрическое сечение, соответствующее этому радиусу, всегда будет неупругим, так как выражение (2) получено в предположении о равенстве плотности нуклона и ядра.

Все неупругие взаимодействия приводят к возбужденному состоянию ядра с последующим распадом, который описывается сечением [3]:

$$\sigma_{ip} = \sigma(E) \xi D_p, \quad (3)$$

где i — номер канала распада, ξ — вероятность прилипания, $\sigma(E)$ — сечение столкновения с поверхностью ядра, p — индекс процесса распада,

$$D_p = \frac{\Gamma_p}{\sum_i \Gamma_i}, \quad \Gamma_p = \frac{\hbar}{\tau_p}, \quad \tau_p \text{ — время жизни ядра по отношению к } p\text{-распаду,}$$

$\sum_i \Gamma_i$ — сумма ширин всех возможных процессов распада ядра.

По времени жизни все процессы можно разделить на две группы [4]: протекающие за время взаимодействия $\sim 10^{-22} - 10^{-23}$ с и соответствующие времени жизни возбужденного ядра $10^{-16} - 10^{-17}$ с. Если отвлечься от возможных резонансных эффектов, которые менее существенны при энергиях $E > 100$ МэВ, то геометрическое сечение в этом приближении можно рассматривать как неупругое взаимодействие:

$$\sigma_{in} \approx 2\pi \cdot 10^{-26} A^{2/3} \text{ см}^2. \quad (4)$$

Вероятность прилипания ξ может изменяться в широких пределах: $0 < \xi \leq 1$. Видимым ограничением по энергии возбуждения ядра является величина, при которой температура ядра не превышает энергию связи нуклонов в ядре.

Что касается интересующего нас канала вылета нейтронов из возбужденного ядра (D_n), то наличие множества конкурирующих процессов привело к необходимости использования полуэмпирического метода расчета ядерного каскада [5] (метод Монте-Карло) и к экспериментальному определению выхода нейтронов на каждую падающую заряженную частицу (протон) на длине ионизационного пробега.

Теоретическая величина выхода может быть записана в виде интеграла:

$$\frac{Y}{i} = \int_0^L f(E) X(E) \sigma_{xn}(E) N dl, \quad (5)$$

где $f(E)$ — функция, определяющая уменьшение интенсивности пучка с уменьшением энергии, $X(E)$ — среднее число нейтронов на акт взаимодействия при энергии E , L — ионизационный пробег, i — интенсивность первичного пучка.

Эксперименты по определению выхода нейтронов для различных энергий первичных пучков и различных «тяжелых» мишеней были выполнены в Брукхейвенской национальной лаборатории [6], Лаборатории в Чок-Ривере (Канада) [7] и недавно в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ [8].

На рис. 1—3 приведены результаты, полученные в этих лабораториях. Нетрудно видеть, что в пределах ошибок измерений, результаты совпадают.

Аналитическая обработка результатов, выполненная в Брукхейвенской лаборатории [6], показала, что выход нейтронов от протонного пучка E (МэВ) в различных мишенях (A) можно описать следующей формулой:

$$Y = (E - 120)(A + 20) 10^{-4} \left[\frac{n}{p} \right]. \quad (6)$$

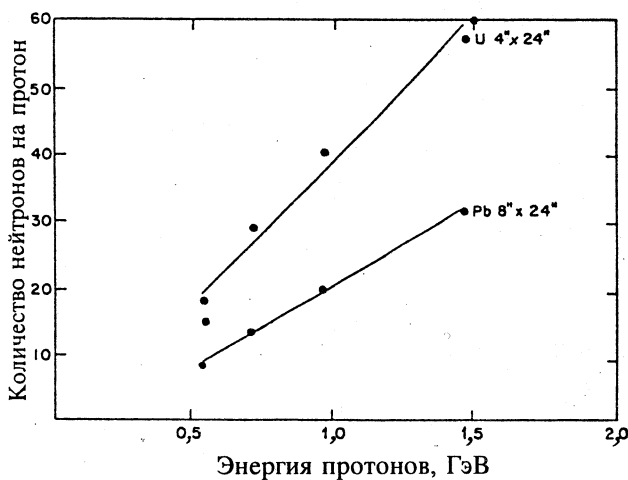


Рис.1. Измеренный выход нейтронов для разных мишеней

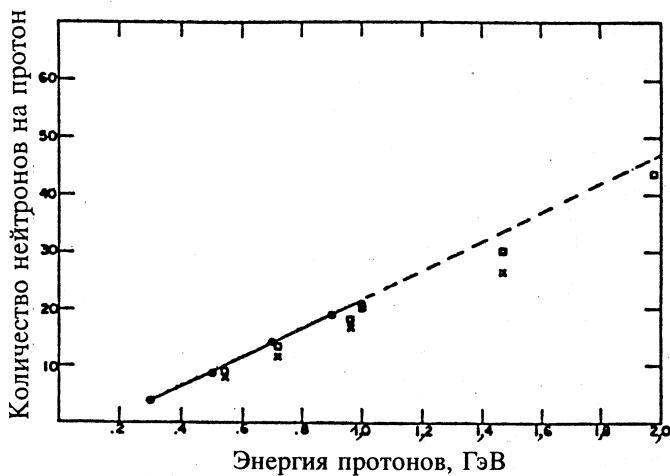


Рис.2. Экспериментальный и теоретический выход нейтронов из свинцовой мишени (диаметр 4", длина 24"): (•) — метод Монте-Карло; (□) — β -детектор; (×) — активационный детектор

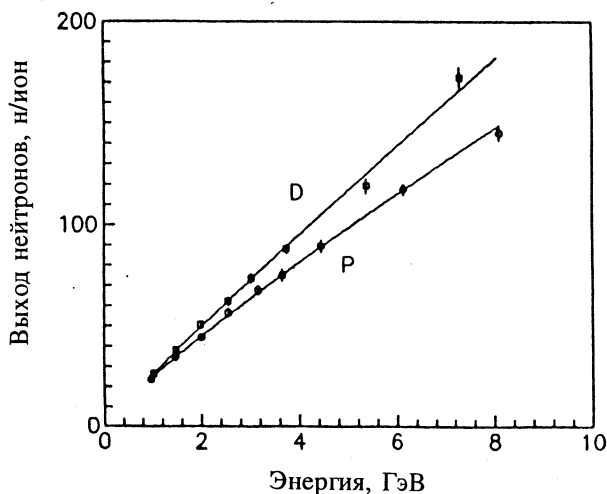


Рис.3. Выход нейтронов из свинцовой мишени ($\varnothing 20 \times 60$ см) в зависимости от энергии ускоренного пучка (p, d)

Для делящегося материала мишени (например, ^{238}U) это выражение отличается от (6):

$$Y = 0,0516 (E - 120). \quad (7)$$

«Порог» выхода при энергии около 120 МэВ определяется малой величиной ионизационного пробега L по сравнению с неупругим ядерным пробегом. Так, например, для свинца при энергии протона 100 МэВ это отношение $LN\sigma_{\text{in}} \approx 0,1$, то есть испарительные процессы практически отсутствуют, оставляя канал прямого выбивания нейтронов из ядра, который реализуется при существенно меньших сечениях.

Теоретический расчет выхода нейтронов методом Монте-Карло выполнялся рядом авторов [9—11] и в значительной степени подтвердил экспериментальные величины, несмотря на разброс результатов, доходящий до коэффициента 1,5, что, по-видимому, связано с неразличимостью нуклонов в ядре.

Вторым экспериментальным подтверждением выхода нейтронов была серия экспериментов по определению среднего числа нейтронов на акт взаимодействия при различных энергиях первичного пучка [12,13]. На рис.4 приведены результаты экспериментов и теоретических расчетов по опреде-

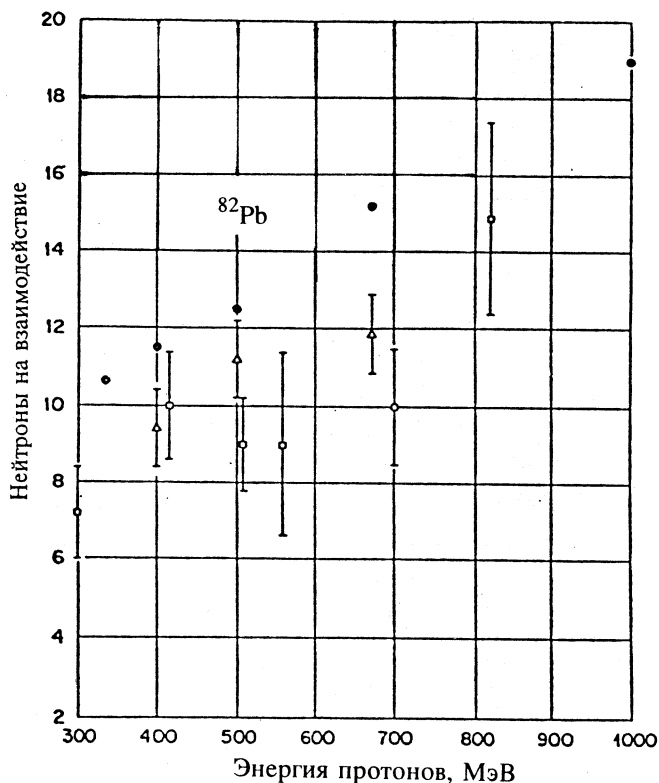


Рис.4. Среднее число нейтронов, эмитируемых на одно взаимодействие протона с ядром свинца: (•) — теоретические результаты; эксперимент: (Δ) — Vasil'kov R.G. et al. Sov. J. Nucl. Phys., 1968, v.7, p.64; ($\square$) — Bercovitch M. et al. Phys. Rev., 1960, v.119, p.412

лению количества нейтронов на акт взаимодействия при различных энергиях протонного пучка для свинца [14].

Измерение количества нейтронов на акт взаимодействия не позволяет рассчитать выход из выражения (2), так как неизвестны функции $f(E)$, $\xi(E)$, $\sigma_{xn}(E)$, однако грубые оценки числа ядерных столкновений на длине ионизационного пробега $\vartheta = LN\sigma_{in}$ указывают на совместимость этих измерений с результатами полного выхода нейтронов при заданной энергии. (Для свинца при $E_p = 1000$ МэВ $\vartheta = 4$.) Таким образом, следует признать,

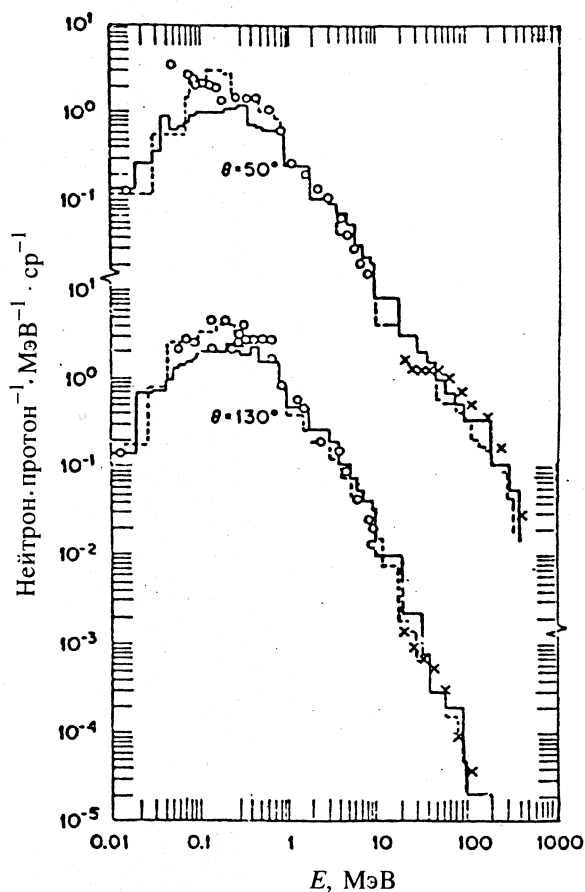


Рис.5. Спектры нейтронов для двух углов из мишени ^{238}U (цилиндр $\varnothing 15$ см, длина 30 см), энергия протонов 750 МэВ. Эксперимент: (o) — Veesser L.R. et al., Nucl. Instr. and Meths., 1974, v.117, p.509; (x) — Madey R., Frank M. et al., Phys. Rev. C, 1973, v.8, No.6, p.2412. Теоретические результаты: (—) — Barashenkov V.S. et al., Sov. Atomic Energy, 1974, v.37, No.6; (---) — Fullwood R.R. et al., LA-4789, 1972

что ф-лы (6) и (7) удовлетворительно описывают выход нейтронов от протонного пучка в длинных тяжелых мишенях. Пучки дейтронов, как это следует из рис.3, дают близкие результаты и также могут рассматриваться как возможный источник нейтронов для электроядерного метода.

Второй, не менее важной характеристикой являются спектры первичного нейтронного пучка, которые были измерены в нескольких лабораториях. Типичные спектры приведены на рис.5 [15] и рис.6 [8].

Наличие нескольких механизмов образования нейтронов не позволяет единым образом трактовать эти спектры.

По современным представлениям, существуют три возможных механизма образования нейтронов:

1) скалывание фрагмента или прямое выбивание нейтрона из ядра за время пролета заряженной частицы сквозь ядро $\tau_c = 10^{-21} + 10^{-22}$ с, такой механизм определяет в основном высокоэнергетическую часть спектра;

2) испарение нейтронов из возбужденного ядра, $\tau_n = 10^{-16} + 10^{-17}$ с;

3) деление (если мишень из делящегося вещества), где $\tau_f = 10^{-14} + 10^{-13}$ с и $\tau_f = 10^{-2} + 10^{-3}$ с.

Если возвратиться к термодинамической модели ядра, то спектр испарительных нейтронов должен быть близким к спектру неупругого рассеяния [3]:

$$f(E) = \frac{E}{T^2} e^{-E/T}, \quad (8)$$

T — температура ядра, зависящая от энергии возбуждения E' и $T \approx \left(\frac{E'}{a}\right)^{1/2}$, где величина a , определяющая плотность уровней ядра для тяжелых элементов, меняется незначительно: $a_{Pb} = 11$ МэВ⁻¹, $a_U = 12$ МэВ⁻¹, то есть разброс возможных температур ядра при $E' = 100$ МэВ и $E' = 1000$ МэВ может находиться в интервале $T = 2,8 + 9,2$ МэВ.

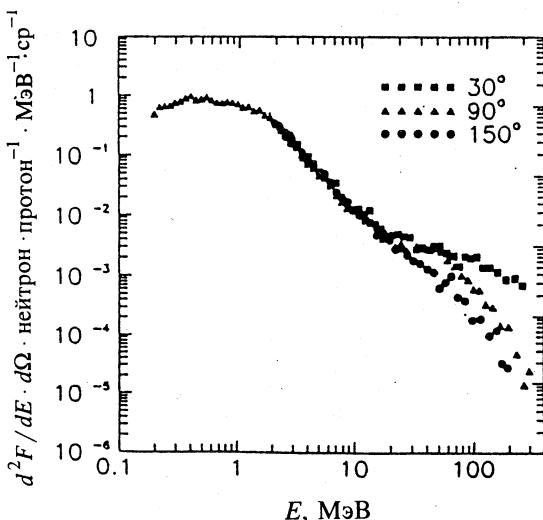


Рис.6. Спектр нейтронов, вылетающих из свинцовой мишени $\varnothing 20 \times 20$ см, от пучка протонов 2,55 ГэВ

Максимальные температуры, по-видимому, будут ограничены энергией связи нуклона в ядре. Суммарный спектр в этом случае будет суперпозицией (8) спектра в указанном интервале температур:

$$f(E) = \sum_i \chi_i \frac{E}{T_i^2} e^{-E/T_i}, \quad (9)$$

где χ_i — статистический вес возбуждения, соответствующий T_i , $\sum_i \chi_i = 1$,

$$T_{\max} > T_i \geq 2,8 \text{ МэВ}.$$

Характерной особенностью такого спектра является почти полное отсутствие в спектре медленных нейтронов с энергией $1 \text{ кэВ} > E > 0$, так как

$$\int_0^E f(E) dE < \frac{E^2}{T^2} < 1,3 \cdot 10^{-7}.$$

2. ВОЗМОЖНЫЕ СПОСОБЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОЯДЕРНЫХ НЕЙТРОНОВ

Энергетическое использование нейтронов, получаемых электроядерным методом, не получило развития по двум основным причинам.

1) Энергетическая «стоимость» нейтрона (жесткого спектра) составляет (на основании выражения (7)) 19,3 МэВ/нейтрон даже без учета коэффициента полезного действия ускорителя. Использование этих нейтронов для процесса деления существенно снижается конкурирующей реакцией $\sigma(n\gamma)$.

2) Интегральный выход нейтронов при интенсивности первичного (протонного) пучка i (мА) составляет $3,1 \cdot 10^{14} \cdot i (E - 120)$, что при максимальных токах (при энергии $\sim 1 \text{ ГэВ}$) $1 + 2 \text{ мА}$ не превышает $\sim 6,0 \cdot 10^{17} \text{ н/с}$, в то время как реактор мощностью 1 ГэВ поглощает $\sim 3,0 \cdot 10^{19} \text{ н/с}$.

Таким образом, без существенного размножения первичных нейтронов и увеличения тока пучка ускорителя электроядерный метод не может конкурировать с реакторным способом по мощности.

В качестве такого усилителя может рассматриваться подкритическая сборка из любого делящегося элемента с коэффициентом размножения нейтронов $k < 1$.

Простейшая теория ядерного реактора (точечного) базируется на уравнении [16] (без члена с запаздывающими нейтронами):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k-1}{\tau_0} n + q, \quad (10)$$

где n — число нейтронов в 1 см^3 , k — эффективный коэффициент размножения, q — внешний источник (нейтрон/ $\text{см}^3 \cdot \text{с}$), τ_0 — время жизни нейтрона в сборке.

Из этого уравнения следует, что внешний источник (q) практически не оказывает влияния на работу реактора при условии $k > 1$. Однако для сборки с $k < 1$ (подкритический реактор) внешний источник начинает играть определяющую роль. Электроядерный метод базируется на подборе такого внешнего источника, при котором подкритическая сборка сохраняет смысл источника энергии. Способ создания такого источника достаточно произволен — пучки протонов, дейтронов многозарядных ионов или даже электронов.

Наиболее проработанным в настоящее время, как это следует из вышеизложенного, является метод получения первичного нейтронного пучка с помощью протонов средних энергий ($\sim 1 \text{ ГэВ}$). Спектр первичного нейтронного пучка приведен на рис.5 и 6, количество нейтронов определяется формулами (6) и (7).

При $k < 1$, как это следует из (10), существует стационарное решение для сборки:

$$n_0 = \frac{q\tau_0}{1-k}, \quad (11)$$

которое справедливо для любого интервала спектра нейтронов. Физический смысл этого выражения весьма прост: величина $\frac{1}{1-k}$ — фактор умножения нейтронов — равна отношению скорости исчезновения нейтронов n_0/τ_0 к мощности внешнего источника нейтронов q . Размножающая подкритическая система «умножает» нейтроны источника в k раз за время τ_0 .

Если геометрические размеры сборки таковы, что можно пренебречь выходом нейтронов из сборки, время жизни каждой из групп нейтронов с заданной скоростью v определяется полным сечением захвата:

$$\tau_0 = \frac{1}{v(\Sigma_a + \Sigma_f)}, \quad (12)$$

где $\Sigma_a = \sigma_a N$ — сечение захвата нейтронов для всех процессов, исключая деление, $\Sigma_f = \sigma_f N$ — сечение деления, N — плотность делящихся ядер в объеме сборки V .

Средний поток нейтронов каждой из групп при известной плотности n_0 равен

$$\Psi = \nu n_0 = \frac{q}{(\Sigma_a + \Sigma_f)(1 - k)}. \quad (13)$$

Так как число делений в единице объема равно $\Sigma_f \Psi$, то энерговыделение мишени в секунду

$$\frac{dW}{dt} = 200 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a + \Sigma_f} \frac{q}{1 - k} V \text{ МэВ/с}, \quad (14)$$

где 200 МэВ — энерговыделение на один акт деления.

Если предположить $\Sigma_f \gg \Sigma_a$, что справедливо для быстрых нейтронов (для медленных сечения могут быть соизмеримы), то при $q = 6,0 \cdot 10^{15} i \frac{Y}{V}$ энерговыделение в мишени можно записать в форме

$$\frac{dW}{dt} = 1,92 \cdot 10^5 \frac{iY}{1 - k} \text{ Вт}, \quad (15)$$

i — величина протонного тока в мА.

Если использовать формулу выхода нейтронов из урановой мишени (7), получим окончательно

$$\frac{dW}{dt} = 1,92 \cdot 10^5 i \frac{0,0516(E - 120)}{1 - k} \text{ Вт}. \quad (16)$$

Таким образом, при $E \sim 1000$ МэВ и $k = 0,95$ выделяемая мощность

$$\frac{dW}{dt} = 175 \text{ МВт} \quad \text{при} \quad i = 1 \text{ мА},$$

$$\frac{dW}{dt} = 1,75 \text{ ГВт} \quad \text{при} \quad i = 10 \text{ мА}. \quad (17)$$

Изложенная схема расчета в неявном виде предполагает постоянство (одинаковость) величины k для всех энергетических групп нейтронов, что в общем случае неверно. Можно предполагать только близость этих значений.

Вторая неточность, использованная в схеме, заключается в предположении равномерного распределения первичных нейтронов по объему мишени.

Для решения этих вопросов необходимо численное решение стационарного группового уравнения диффузии [16]:

$$\nabla[D] \nabla[\Psi_n] - [A][\Psi_n] + \sum_i [\chi_i][v \Sigma_f^i]^T [\Psi_n] + [Q_n] = 0, \quad (18)$$

где $[D]$ — диагональная матрица диффузионных констант для каждой группы нейтронов; $[\Psi_n]$ — вектор-столбец потока нейтронов; $[A]$ — матрица поглощения и перехода из группы в группу; $[\chi_i]$ — матрица-столбец, определяющая функцию распределения нейтронов по энергии при делении; $[v \Sigma_f^i]^T$ — транспонированный вектор сечений деления, увеличенный на число нейтронов в акте деления; $[Q_n]$ — вектор-столбец внешнего источника; $\sum_i$ — сумма делящихся элементов в сборке.

Приведенная выше система линейных уравнений решается с учетом граничных условий для каждой группы нейтронов $\Psi_n = 0$ на расстоянии от поверхности мишени $\frac{0,7104}{\Sigma_{tr}}$, где Σ_{tr} — сечение переноса для каждой группы нейтронов. Если мишень состоит только из тяжелых элементов (включая систему охлаждения), то $\Sigma_{tr} \approx \Sigma_t$, где Σ_t — полное сечение взаимодействия для каждой группы.

Количество нейтронов в мишени каждой группы при известных Ψ_n равно

$$N_n = \frac{1}{v_n} \int_V \Psi_n dV, \quad (19)$$

где v_n — скорость нейтронов, V — объем сборки.

Если τ_n — время жизни в сборке нейтронов группы n , то число нейтронов, исчезающих в единицу времени, равно

$$\frac{N_n}{\tau_n} = \frac{1}{v_n \tau_n} \int_V \Psi_n dV. \quad (20)$$

Произведение $v_n \tau_n$ соответствует пробегу нейтрона до исчезновения, который определяется сечением поглощения и вероятностью вылета из мишени.

Если диффузионная длина $L_g = \sqrt{\frac{1}{3\Sigma_{tr}\Sigma_t}}$ значительно меньше линейных размеров мишени, можно, в первом приближении, пренебречь вероятностью вылета нейтрона из мишени. В этом случае

$$\frac{N_n}{\tau_n} = \Sigma_a \int_V \Psi_n dV, \quad (21)$$

где Σ_a — сечение поглощения для нейтронов группы n .

Так как число поступающих в мишень нейтронов группы n равно $f(E_n) \Delta E$, где $f(E)$ — функция распределения нейтронов по энергии в первичном спектре, коэффициент размножения для каждой группы будет определяться из выражения

$$\frac{1}{1 - k_n} = \frac{\Sigma_a \int_V \Psi_n dV}{Y f(E_n) \Delta E_n}. \quad (22)$$

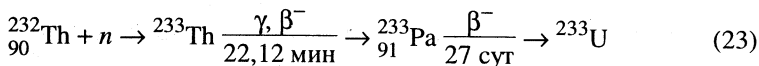
Таким образом, если известно решение системы (18), можно вычислить k_n для любой энергетической группы нейтронов.

Однако, так как нейтронные сечения, входящие в (18), известны с определенной степенью точности, для подтверждения размеров сборки потребуются в каждом случае эксперименты на первичном ионном пучке.

3. СХЕМА ВОЗМОЖНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Существенное развитие электроядерного метода связано с предложением [17] К.Руббиня схемы энергетического усилителя при использовании тория в качестве энергоносителя.

Предложенная для энергетического усилителя реакция



позволяет не только расширить количество элементов для энерговыделения, но и рассматривать две схемы подкритической сборки — на медленных и быстрых нейтронах [18].

Распределение по энергиям нейтронов при делении изучено с хорошей степенью достоверности и описывается функцией

$$N(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi T^3}} \sqrt{E} e^{-E/T}, \quad (24)$$

где температура ядра T зависит от энергии нейтрона, вызвавшего деление. Для нейтронов тепловых энергий $T \approx 1$ МэВ при увеличении энергии нейтронов до 10—15 МэВ температура T возрастает до 1,5 МэВ. Средняя энергия нейтронов распределения (24)

$$\bar{E} = \frac{3}{2} T, \quad (25)$$

а количество нейтронов малых энергий (< 10 кэВ) меньше

$$\int_0^{\Delta E} N(E) dE < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Delta E}{T} \right)^{3/2}, \quad (26)$$

что составляет десятые доли процента от количества нейтронов всего спектра. Многократность процесса деления на спектре (24) приведет к снижению доли медленных нейтронов, поэтому для работы на спектре, близком к тепловому, потребуется замедлитель из легкого элемента. Так как ^{232}Th практически не делится на медленных нейтронах ($\sigma_f < 2,0 \cdot 10^{-4}$ б) авторы [17] предполагают получать ^{233}U с помощью реакции (23). По оценке авторов, стационарное состояние при любых нейтронных потоках в области ниже 1 эВ наступает при $\frac{n_U}{n_{\text{Th}}} = 1,35 \cdot 10^{-2}$,

где n_U и n_{Th} — отношение плотностей ^{233}U и ^{232}Th в сборке.

Таким образом, ториевая сборка с содержанием 1,35% ^{233}U при соответствующем коэффициенте размножения ($k = 0,9 - 0,95$) позволит сжигать только торий при неизменном количестве ^{233}U .

Вторым возможным развитием энергетического усилителя является подкритическая сборка (^{239}Pu , ^{233}U , ^{235}U) на быстрых нейтронах. Если в сборке отсутствует замедлитель, спектр нейтронов деления, как было указано выше, не содержит медленных нейтронов. Замедление нейтронов вследствие упругого рассеяния в тяжелых элементах происходит достаточно медленно:

$$\frac{dE}{d\nu} = -\frac{2}{A} E, \quad (27)$$

где ν — число взаимодействий.

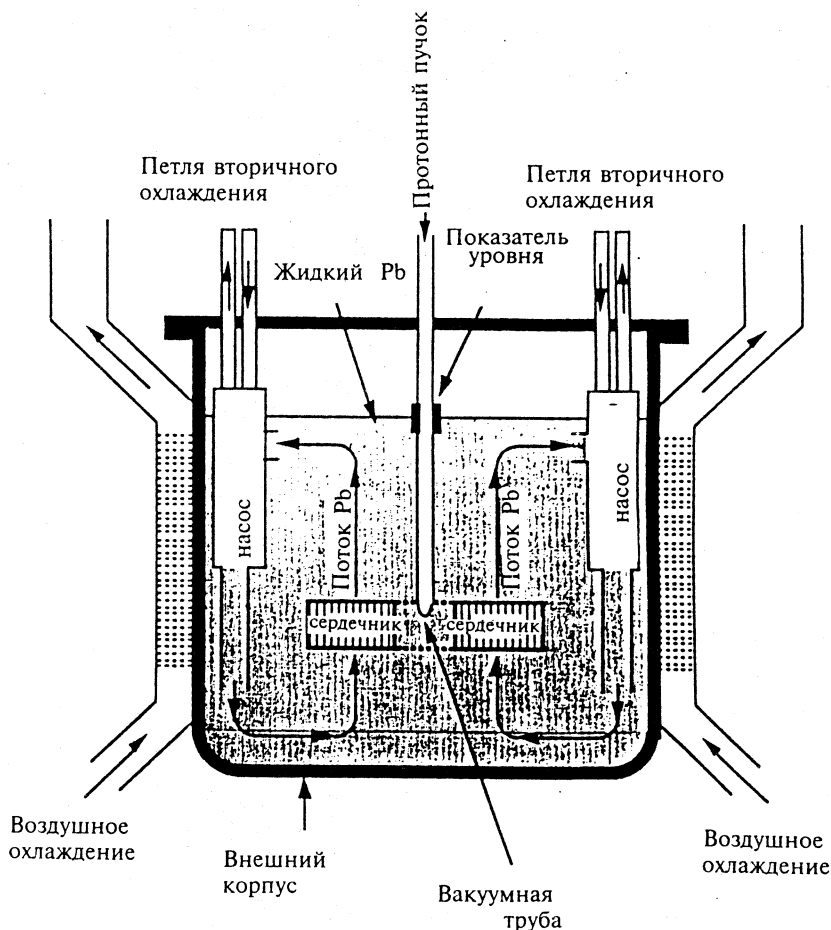


Рис.7. Схема энергетического усилителя на быстрых нейтронах

Если $\nu = \frac{\Sigma_{el}}{\Sigma_a + \Sigma_f} \ll A$, замедлением нейтронов в такой сборке можно

пренебречь для каждой из групп нейтронов, в результате чего сборка будет работать на спектре нейтронов, близком к (24). Коэффициенты размножения для нее вычисляются по формуле (22). Возможная схема сборки приведена на рис.7 [18].

Особенностью этой схемы является система охлаждения, где в качестве охладителя используется свинец, который не оказывает влияния на замедление нейтронов.

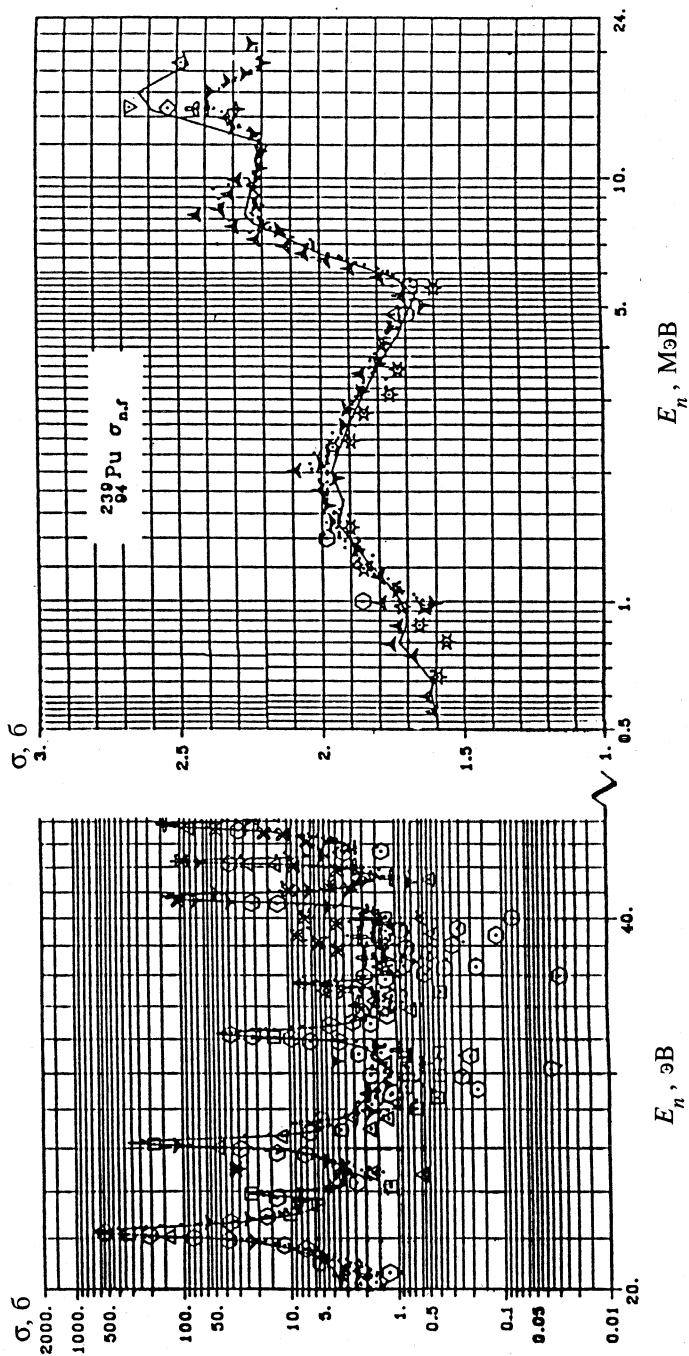


Рис.8. Изменение сечения деления в зависимости от энергии нейтрона

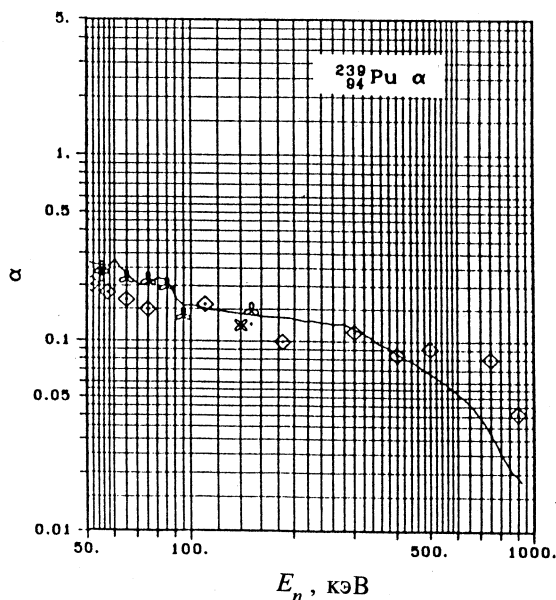


Рис.9. Зависимость коэффициента α от энергии нейтронов

Основным преимуществом схемы на быстрых нейтронах является возможность использования для получения энергии накопленного плутония, для которого известны сечения деления в широкой области энергий нейтронов (рис.8) [19].

Из рис.8 видно, что при использовании нерезонансной области ($E > 100$ кэВ) сечение деления падает до 1,5—2,5 б, что соответст-

вет пробегу $l \approx \frac{1}{N\sigma_f} \approx 10$ см по процессу деления. При наличии тяжелого раз-

делителя (например, Та), в котором должны помещаться плутониевые твэлы, это значение увеличится в несколько раз. В настоящее время отсутствуют опубликованные данные по подкритическим сборкам на быстрых нейтронах. Однако, очевидно, что такая сборка при $k \approx 0,9 - 0,95$ может быть создана.

Основным требованием для материала разделителя будет малое сечение поглощения нейтронов ($\sigma_{n\gamma} \ll \sigma_f$), что для быстрых нейтронов, как правило, имеет место [19] — см. рис.9, 10.

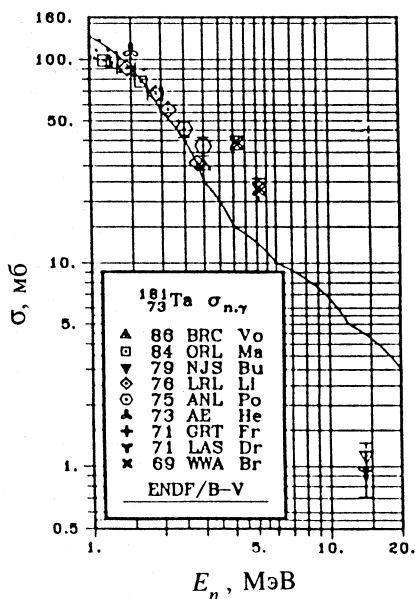
На рис.9 по оси ординат отложен коэффициент $\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_f}$ (отношение сечения поглощения к сечению деления). На рис.10 приведены сечения процесса $\sigma_{n\gamma}$ в тантале при различных энергиях. Оба графика указывают на существенное уменьшение сечений процессов поглощения для быстрых нейтронов (0,5 + 10 МэВ).

Несмотря на то, что работы по энергетическому усилителю на быстрых нейтронах находятся в начальной стадии, по сравнению со схемой на мед-

Рис.10. Зависимость сечения реакции (n, γ) от энергии

ленных нейтронах, следует признать несомненную перспективность этих работ. Сборки на малой мощности ($1 \div 10$ МВт) могут быть выполнены на уже действующих ускорителях, у которых мощности пучков при энергиях ~ 1 ГэВ/нуклон составляют единицы и десятки киловатт.

В зависимости от результатов таких экспериментов может возникнуть необходимость в разработке сильноточных ускорителей в области энергии до 1 ГэВ/нуклон при средних токах $10 \div 100$ мА.



4. СИЛЬНОТОЧНЫЕ УСКОРИТЕЛИ НА СРЕДНИЕ ЭНЕРГИИ

Пучки частиц с токами средней интенсивности в миллиамперной области при энергиях ~ 1 ГэВ/нуклон получают в настоящее время на ускорителях непрерывного или квазинепрерывного действия (скважность определяется режимом работы системы питания). К таким ускорителям с замкнутой орбитой относятся ускорители типа циклотрона, с разомкнутой орбитой — линейные ускорители, разрабатываются ускорители, объединяющие эти два типа [20,21] — циклотрон с малым числом оборотов, у которого шаг спиральной орбиты определяется набором энергии на единице длины, соизмеримым с набором энергии в линейных ускорителях.

Основным фактором, ограничивающим интенсивность в этих ускорителях, являются потери пучка в объеме ускорения. Так, для линейных ускорителей потери в зависимости от тока в импульсе находятся в пределах [22]:

$$\frac{1}{i} \frac{di}{dl} = 10^{-4} \div 10^{-5} \text{ м}^{-1}, \quad (28)$$

для циклотронов — в основном определяется эффективностью системы вывода частиц из камеры ускорителя, которая в настоящее время близка к 0,995 [23]. Таким образом, проблема вывода пучка из сильноточных циклотронов с эффективностью, близкой к 100%, остается весьма актуальной [24].

При возможном энергетическом использовании ускорителей коэффициент полезного действия (КПД) станет определяющей величиной при выборе типа ускорителя. Под КПД ускорителя подразумевается отношение мощности в пучке к подводимой мощности электропитания.

В настоящее время на действующих протонных ускорителях (циклотронах и линейных при энергии ≤ 1 ГэВ) КПД не превышает 18% по различным причинам [23]. При мощности пучка меньше 1 МВт в циклотронах существенный вклад в уменьшение КПД вносит мощность системы питания электромагнита; в линейном ускорителе КПД определяется величиной импульсного тока ускоренного пучка i :

$$\eta = \frac{i}{i + \frac{\epsilon_0}{R_{ш}}}, \quad (29)$$

так как мощность потерь на единице длины структуры линейного ускорителя [25]:

$$P = \frac{\epsilon_0^2}{R_{ш}}, \quad (30)$$

где ϵ_0 для различных структур близка к среднему электрическому полю ускорителя (отношение максимального потенциала на зазоре к длине элемента структуры), $R_{ш}$ — эффективное шунтовое сопротивление на единице длины. Так как диапазон структур линейного ускорителя по величине шунтового сопротивления невелик: $R_{ш} = 20 \div 40$ МОм/м, величина

$$\frac{\epsilon_0}{R_{ш}} \approx 80 \div 150 \text{ мА} \text{ (при среднем наборе энергии на длине ускорителя)}$$

$\frac{dW}{dz} = e\epsilon_0 \cos \varphi_s = 1 \div 2 \text{ МэВ/м}$, и КПД линейного ускорителя определяется величиной этого тока. Средний ток ускоренных пучков в линейных ускорителях на энергию ~ 1 ГэВ обычно не превышает 1 мА при импульсных токах 10—20 мА, так как работа при импульсных токах 100—200 мА связана с увеличением погонных потерь пучка (28).

Таким образом, КПД линейного ускорителя весьма жестко связан со структурой резонансной системы. В циклотронных установках такой жесткой связи нет, а мощность высокочастотных потерь резонансной системы значительно меньше из-за снижения амплитудных величин ускоряющего поля при использовании многооборотного режима ускорения. Так, например, в последних разработках циклотронов серии CYCLONE КПД резонансной системы составляет [26] от 50 до 77% при значениях тока пучка ~ 1 мА.

При значениях тока ~ 10 мА, когда мощность пучка существенно превышает мощность питания электромагнитных систем в циклотроне, КПД циклотрона будет приближаться к 50% (с учетом КПД генератора).

Приблизительно такого же КПД следует ожидать и на линейных ускорителях при импульсных токах больше 100 мА.

Таким образом, выбор типа ускорителя будет в основном определяться величиной потерь пучка при ускорении и выводе из объема ускорения (циклотроны).

Предлагаемые схемы циклотронных комплексов [27—29] вполне соответствуют требованиям энергетических усилителей. Следует, однако, отметить, что проблема создания энергетического усилителя связана с физикой подкритической сборки (на медленных или быстрых нейтронах) — определением максимального коэффициента усиления мощности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными преимуществами энергетического усилителя по сравнению с реакторами являются:

- 1) отсутствие цепной ядерной реакции в объеме сборки;
- 2) возможность использования элементов с высоким порогом деления нейтронами;
- 3) возможность внешней регулировки мощности путем изменения интенсивности пучка ускорителя при накоплении в сборке продуктов деления.

К не решенным в настоящее время вопросам следует отнести получение высокого коэффициента усиления мощности в области, далекой от критичности, а также технические проблемы, связанные с длительной эксплуатацией.

В обзоре не обсуждаются исследования, связанные с возможностью использования пучков многозарядных ионов для электроядерного метода, в связи с тем, что они подробно рассмотрены в [30].

Автор выражает благодарность А.М.Балдину за обсуждение физической интерпретации процессов, затронутых в этом обзоре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таблицы физических величин (справочник), М.: Атомиздат, 1976, с.953.
2. Blechman N.M., Courant E.D. — Phys. Rev., 1948, v.74, p.140.
3. Моррисон Ф. — Экспериментальная ядерная физика. М., 1952, т.2, с.52.
4. Strugalski Z. — JINR Preprint E1-95-231, Dubna, 1995.
5. Fermi E. — Nature, 1934, v.133, p.757.
6. Steinberg M. — In: Proc. of Inf. Meeting on Accelerator Breeding. 1977, p.41, New York, v.11973.
7. Tunncliffe P.R. — In: Proc. of Inf. Meeting on Accelerator Breeding. 1977, p.69, New York, v.11973.
8. Kovalenko A.D., Panebratsev Yu.A., Yurevich V.J. — JINR Rapid Communications 1[64]-94, Dubna, 1994, p.12.
9. Dostrovsky J., Rabinowitz P., Bivins R. — Phys. Rev., 1958, v.111, p.1659.
10. Milton J.C.D., Fraser J.S. — AECL-2259, 1965.
11. Барашенков В.С., Тонеев В.Д., Чигринов С.Е. — АЭ, 1997, т.37, с.480.
12. Bercovitch M., Carmichael H., Hanna G.C., Hincks E.P. — Phys. Rev., 1960, v.119, p.412.
13. Vasilkov R.G. et al. — J. Nucl. Phys., 1968, v.7, p.64.
14. Alsmiller R.G. — In: Proc. of Inf. Meeting on Accelerator Breeding, BNL, 1977, New-York v.11973, p.193.
15. Fraser J.S. — In: Proc. of Inf. Meeting on Accelerator Breeding, BNL, New York, 1977, v.11973, p.162.
16. Walter J.F., Henry A.F. — In: Nuclear Sci. and Eng., 1968, v.32, No.3, p.332.
17. Carminati F., Klapisch R., Revol J.P., Roche C.H., Rubio J.A., Rubbia C. — CERN/AT/93-74(ET), 1993.
18. Rubbia C. — Contribution to the Las-Vegas Conf., 1994.
19. Mc.Lane V., Dunford Ch., Rose Ph. — Neutron Cross Sections, 1988, v.2.
20. Trinks U. — In: Proc. of the 14th Int. Cyclotron Conf., Cape Town, 1995.
21. Шелаев И.А. — Краткие сообщения ОИЯИ, 5[62]-93, Дубна, 1993.
22. Капчинский И.М. — В сб.: Проблемы ускорителей заряженных частиц, ОИЯИ, Д9-12965, Дубна, 1980, с.162.
23. Schryber U. et al. — In: Proc. of the 14th Int. Cyclotron Conf., Cape Town, 1995, p.32.
24. Дмитриевский В.П., Кольга В.В., Полумордвинова Н.И. — ОИЯИ, P9-6733, Дубна, 1972.
25. Смит Л. — Линейные ускорители. М.: Госатомиздат, 1962, с.489.
26. Jongen Y. et al. — In: Proc. of the 14th Int. Conf., Cape Town, 1995, p.115.
27. Fietiez N., Mandrillon P. — CERN/AT/95-03, 1995.
28. Stambach T. et al. — In: 4th Europ Conf. on Acc. in Appl. Res. and Tech. Zurich, 1995.
29. Глазов А.А., Денисов Ю.Н., Желепов В.П. и др. — В сб.: Труды пятого все-союзного совещания по ускорителям. М., 1977, с.123.
30. Толстов К.Д. — Краткие сообщения ОИЯИ, 5[62]-93, Дубна, 1993.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.12.01

Многочастичные процессы и квазиклассика в бозонных теориях поля. *Либанов М.В., Рубаков В.А., Троицкий С.В.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.3, с.551.

Обсуждаются вопросы, связанные с процессами многочастичного рождения в модельных скалярных теориях. При числе излучаемых частиц, сравнимом с обратной величиной константы связи, обычная теория возмущений неприменима. Рассматривается возможность применения квазиклассических методов для вычисления многочастичных сечений с учетом всех существенных петлевых поправок.

Ил.7. Библиогр.: 62.

УДК 517.91.1/958; 512.54

Группы Ли и дифференциальные уравнения: симметрии, законы сохранения и точные решения математических моделей в физике. *Шефтель М.Б.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.3, с.615.

В доступной для начинающих форме излагаются основы современного группового анализа дифференциальных уравнений. Это математическая теория симметрий и законов сохранения и технология получения на этой основе точных решений математических моделей, базирующихся на (нелинейных) дифференциальных уравнениях (как обыкновенных, так и в частных производных). При групповом анализе естественным образом возникают наиболее удобные для данной задачи переменные и связанные с ней дифференциально-геометрические структуры, такие как (псевдо)риманова геометрия, связности, гамильтонов и лагранжев формализм. Область возможных приложений включает в себя механику сплошных сред (газо- и гидродинамику, нелинейную теорию упругости и пластичности твердых тел), нелинейную акустику, магнитную гидродинамику, теорию гравитации и другие нелинейные полевые теории (калибровочные и киральные поля, струнные теории и т.п.), химию (хроматографию и электрофорез), биологию. Перспективными являются и приложения к таким линейным теориям, как квантовая механика: построение новых точных решений, теория разделения переменных и др.

Табл.2. Библиогр.: 26.

УДК 512.667.7; 514.8

R-матричный подход к дифференциальному исчислению на квантовых группах. *Исаев А.П.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.3, с.685.

Настоящий обзор является второй частью обзора, посвященного теории квантовых групп (первая часть опубликована в ЭЧАЯ, 1995, т.26, вып.5, с.1204—1263). Здесь на основе R-матричного подхода обсуждается биковариантное дифференциальное исчисление на квантовых группах и квантовых линейных пространствах. Подробно излагается биковариантная теория Вороновича. Дано полное описание дифференциального исчисления на группе $GL_q(N)$. Специальный раздел посвящен детальному рассмотрению свойств дифференциальных форм на $GL_q(N)$. Показано, каким образом дифференциальная алгебра на группе $SL_q(N)$ может быть получена (как подалгебра) из дифференциальной алгебры на группе $GL_q(N)$. Обсуждаются проблемы биковариантного дифференциального исчисления на группах $SO_q(N)$ и $Sp_q(2n)$. Показано, что все существующие на сегодняшний день конструкции дифференциального исчисления на орто-

гональных и симплектических квантовых группах являются неудовлетворительными. В конце обзора приведены необходимые сведения по теории квантовых групп, которые не вошли в первую часть.

Библиогр.: 87.

УДК 537.622.4—5; 538.945; 539.126.333—334.

μ SR-исследования на фазотроне Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ. Жуков В.А., Мамедов Т.Н., Никольский Б.А., Пономарев А.Н., Фирсов В.Г. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.3, с.753.

Представлен обзор наиболее значительных результатов по исследованию вещества с помощью мюонов, полученных в экспериментах на фазотроне Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ. Рассмотрены результаты опытов по обнаружению мюония в полупроводниках, изоляторах и исследованию его характеристик методом двухчастотной прецессии спина мюония.

Приводятся наиболее существенные результаты по исследованию ферро- и антиферромагнетиков, высокотемпературных сверхпроводников, процессов диффузии положительных мюонов в металлах. Изучены химические реакции мюония с органическими соединениями, с ионами и молекулами в водных растворах, с микропримесями в химически инертных веществах. Представлены данные о применении мюонных атомов для изучения свойств окислов металлов и полупроводников.

Табл.9. Ил.29. Библиогр.: 118.

УДК 621.384.63; 621.3.038.625

Электроядерный метод получения энергии. Дмитриевский В.П. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.3, с.815.

В обзоре содержатся теоретические и экспериментальные результаты по реализации нейтронных пучков, получаемых на протонных (и дейтронных) ускорителях при энергиях ~ 1 ГэВ/нуклон, с целью их дальнейшего использования в подкритических сборках делящихся элементов в энергетических усилителях. Рассматриваются две схемы подкритических сборок — на медленных и быстрых нейтронах, возможные методы расчета таких усилителей, а также некоторые конструктивные схемы.

Табл.1. Ил.10. Библиогр.: 30.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху ($\underline{S}$ и $\underline{s}$, $\underline{C}$ и $\underline{c}$). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы $\underline{O}$ и $\underline{o}$ отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\underline{\underline{}}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребляемых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указывать только первые три фамилии.

Например:
1. Лезнов А.Н., Савельев М.В. — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.

2. Толен М. — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.

3. Turbinder A.V. — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.

4. Ушверидзе А.Г. — УЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.

5. Endo I., Kasai S., Harada M. et al. — Hiroshima Univ. Preprint, NUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну копию корректуры. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Копия корректуры с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова.**

Художественный редактор **А.Л.Вильфсон.**

Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 1.2.97. Подписано в печать 25.04.97. Формат 60х90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печл. 18,4. Уч.-издл. 22,33.
Тираж 500. Заказ 49920. Цена 4500 р.

141980 Дубна Московской области

ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Либанов М.В., Рубаков В.А., Троицкий С.В.</i> Многочастичные процессы и квазиклассика в бозонных теориях поля	551
<i>Шефтель М.Б.</i> Группы Ли и дифференциальные уравнения: симметрии, законы сохранения и точные решения математических моделей в физике	615
<i>Исаев А.П.</i> R-матричный подход к дифференциальному исчислению на квантовых группах	685
<i>Жуков В.А., Мамедов Т.Н., Никольский Б.А., Пономарев А.Н., Фирсов В.Г.</i> μSR-исследования на фазотроне Лаборатории ядерных проблем	753
<i>Дмитриевский В.П.</i> Электроядерный метод получения энергии	815

CONTENTS

<i>Libanov M.V., Rubakov V.A., Troitsky S.V.</i> Multiparticle Processes and Semiclassics in Bosonic Field Theories	551
<i>Sheftel' M.B.</i> Lie Groups and Differential Equations: Symmetries, Conservation Laws, and Exact Solutions of Mathematical Models in Physics	615
<i>Isaev A.P.</i> R-Matrix Approach to the Differential Calculus on Quantum Groups	685
<i>Zhukov V.A., Mamedov T.N., Nikolsky B.A., Ponomarev A.N., Firsov V.G.</i> μSR Investigation at the Phasotron of the Laboratory of Nuclear Problems of JINR	753
<i>Dmitrievsky V.P.</i> Accelerator-Breeding for Nuclear Energy Production	815