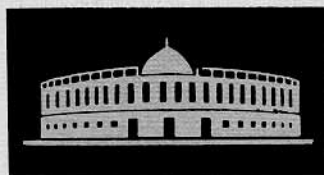


ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ



ЧАСТИЦ

И АТОМНОГО

ЯДРА

ФЕИД



JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.28

PART 4

Six issues per year

DUBNA 1997

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 28

ВЫПУСК 4

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1997

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ

(зам. главного редактора),

П.Н.БОГОЛЮБОВ,

С.К.БРЕШИН,

В.В.БУРОВ,

В.В.ВОЛКОВ,

Ц.Д.ВЫЛОВ,

Ю.П.ГАНГРСКИЙ,

В.П.ДЖЕЛЕПОВ,

П.И.ЗАРУБИН,

И.С.ЗЛАТЕВ,

П.С.ИСАЕВ

(ответственный секретарь),

В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ

(зам. главного редактора),

К.КАУН,

Д.КИШ,

Н.Я.КРОО,

Р.М.ЛЕБЕДЕВ,

И.Н.МИХАЙЛОВ,

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

(зам. главного редактора),

Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,

Ю.П.ПОПОВ,

А.Н.СИСАКЯН,

В.Г.СОЛОВЬЕВ

(зам. главного редактора),

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,

А.А.ТЯПКИН,

А.И.ХРЫНКЕВИЧ,

Ч.К.ШИМАНЕ

Редакторы **Е.К.Аксенова**, тел. (09621) 65-165

Э.В.Ивашевич

МНОГОУРОВНЕВАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ НЕЙТРОННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ СЕЧЕНИЙ

А.А.Лукьянов

Софийский университет, София, Болгария

Н.Б.Янева

Институт ядерных исследований и ядерной энергетики БАН,
София, Болгария

Исходя из классических выводов R -матричной теории Вигнера формулируются методологические принципы построения различных практически реализуемых методов многоуровневой параметризации нейтронных резонансных сечений. Рассмотрена общая структура схемы SAMMY, эффективно используемой в последние годы для анализа и представления детальной энергетической структуры сечений в широких интервалах области разрешенных уровней. Показано, что, кроме этой схемы, подобные результаты могут быть получены в комбинированном методе и методе строгого полюсного разложения U -матрицы. Представлены алгоритмы преобразования параметров разных методов и рассмотрены их преимущества при практическом использовании данных библиотеки ENDF/B-VI.

The methodological principles for construction of different practically realizable methods for neutron resonance cross sections multilevel parametrization are formulated by derivation from the classic results of Wigner R -matrix theory. The general structure of the scheme of well known code SAMMY, which is effectively used during the last years for the analysis and presentation of the cross sections detailed structure in wide intervals of the resolved levels region, is considered. It is shown, that similar results can be achieved also with the combined method and the method of the rigorous pole expansion of U -matrix. The algorithms for transformation of different methods parameters are presented and the advantages of these in practical use of ENDF/B-VI parameters are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

На фоне современных впечатляющих достижений физики ядра, таких как открытие новых сверхтяжелых элементов в реакциях с ионами или обнаружение уровней ядер с аномально большими моментами (гипердеформация ядер), как-то незаметно прошли также неординарные события в такой, казавшейся «спокойной», области, как спектрометрия резонансных

нейтронов. Объем и точность экспериментальных данных за последние 10 лет здесь настолько увеличились, что для многих ядер практически исчезла так называемая «область неразрешенных резонансов». К уровням s -волны в нейтронных каналах добавилось множество резонансов с $l = 1, 2, \dots$, довольно ясно проявляются интерференционные минимумы в сечениях, появилось множество данных по измерению спектров γ -квантов в отдельных резонансах, по взаимодействию поляризованных нейтронов с ориентированными ядрами и т.п. Для многих ядер число экспериментально разрешенных резонансов исчисляется сотнями, и для большинства из них определены такие параметры уровней, как энергия, полная и парциальные ширины, а также значения спина и четности. В этой ситуации согласованный анализ и оценка рекомендованных данных по резонансным сечениям различных реакций в широких энергетических интервалах требуют привлечения весьма общих многоуровневых методов параметризации, основанных на выводах формальной теории ядерных реакций [1—5].

Иллюстрацией прогресса в нейтронной спектроскопии могут служить, в частности, современные оцененные данные для резонансных сечений наиболее важных для практики ядер ^{235}U и ^{239}Pu , где область разрешенных уровней за последние годы расширилась почти в 10 раз (см. рисунок) [5,6]. Для воспроизведения детальной энергетической структуры этих сечений в библиотеке ядерных данных ENDF/B-IV используется непосредственно R -матричный метод параметризации (схема SAMMY) [5,6]. Здесь в общих кинематических соотношениях для полного сечения

$$\sigma(E) = 2\pi k^{-2} \sum_J g(J) \sum_n \text{Re} [1 - U_{nn}^J(E)],$$

суммарного сечения поглощения нейтронов (деление и радиационный захват)

$$\sigma_a(E) = \pi k^{-2} \sum_J g(J) \sum_n \text{Re} [1 - |U_{nn}^J(E)|^2]$$

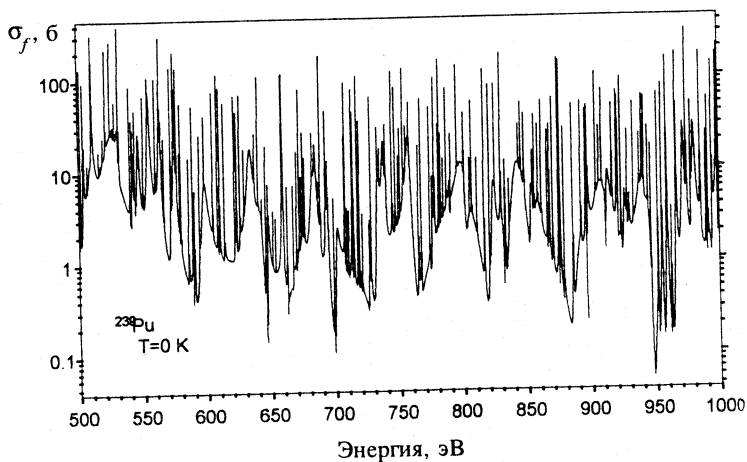
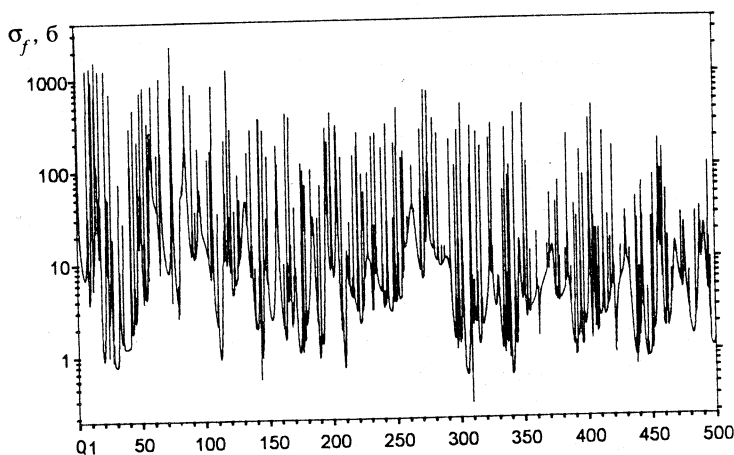
и сечения канала реакции c (в данном случае канала деления $c(f)$)

$$\sigma_c(E) = \pi k^{-2} \sum_J g(J) \sum_n \text{Re} |U_{cn}^J(E)|^2 \quad (1)$$

элементы матрицы столкновений U_{cn}^J для нескольких делительных (c) и нейтронных (n) каналов для каждого из возможных значений полного момента J и четности выбираются в виде

$$U_{cn}^J(E) = e^{-i\varphi_c} \left[\frac{2}{1 - iK^J(E)} - 1 \right]_{cn} e^{-i\varphi_n}, \quad (2)$$

где φ_n — фаза рассеяния, а

Сечение деления ^{239}Pu (ENDF/B-VI [1])

$$K_{c'c}^J(E) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda(J)} \Gamma_{\lambda c'}^{1/2} \Gamma_{\lambda c}^{-1/2} / (E_{\lambda} - E - i\Gamma_{\lambda\gamma}/2) \quad (3)$$

— аналог R -матрицы Вигнера с исключенными каналами радиационного захвата [1—4]. Параметры E_{λ} , $\Gamma_{\lambda\gamma}$, $\Gamma_{\lambda c(f)}$ предполагаются не зависящими от энергии, а $\Gamma_{\lambda l}(E) = \Gamma_{\lambda l}^0 \sqrt{E}$ (табл.1), где $\Gamma_{\lambda l}^0$ — приведенная нейтронная ширина (определяемая для $l = 0$ как $\Gamma_{\lambda l}^0 = \Gamma_{\lambda l}^{\text{рез}} / \sqrt{E_{\lambda}^{\text{рез}}}$).

Таблица 1. R-матричные параметры ^{239}Pu

#	E_λ , эВ	$\Gamma_{\lambda\lambda}^0$, эВ ^{1/2}	$\Gamma_{\lambda\gamma}$, эВ ^{1/2}	$\Gamma_{\lambda\gamma_1}$, эВ ^{1/2}	$\Gamma_{\lambda\gamma_2}$, эВ ^{1/2}	J
1	-1.5002E+2	3.5017E-2	4.5720E-2	1.9050E-1	0.0000E-1	1
2	-1.5467E+1	3.4454E-5	2.6850E-2	-2.5530E-6	0.0000E-1	1
3	-6.9087E+0	4.7024E-3	2.6000E-1	-9.4170E-1	2.9620E-1	0
4	-2.1944E-1	6.5045E-5	2.5910E-3	-1.6140E-3	-5.8250E-1	0
5	2.9562E-1	1.4701E-4	3.9300E-2	5.7380E-2	0.0000E-1	1
6	7.8158E+0	2.8329E-4	3.7750E-2	-4.4750E-2	0.0000E-1	1
7	1.0928E+1	5.4299E-4	3.6120E-2	-1.5400E-1	0.0000E-1	1
8	1.1898E+1	2.8269E-4	3.7960E-2	2.0710E-2	0.0000E-1	1
9	1.4329E+1	1.5975E-4	2.9210E-2	5.9040E-2	0.0000E-1	1
10	1.4678E+1	4.9854E-4	3.9160E-2	3.0450E-2	0.0000E-1	1
11	1.5417E+1	5.2567E-4	4.2000E-2	-7.5480E-6	7.5500E-1	0
12	1.7657E+1	4.2908E-4	3.8240E-2	-3.6400E-2	0.0000E-1	1
13	2.2266E+1	5.4846E-4	4.1580E-2	-6.2990E-2	0.0000E-1	1
14	2.3933E+1	1.7522E-5	3.5340E-2	2.5880E-2	0.0000E-1	1
15	2.6269E+1	3.0105E-4	3.9040E-2	4.1120E-2	0.0000E-1	1
16	2.7288E+1	2.8581E-5	3.8710E-2	2.7880E-3	0.0000E-1	1
17	3.2327E+1	1.5310E-4	4.2520E-2	8.1710E-3	-1.2790E-1	0
18	3.5486E+1	4.5291E-5	4.0920E-2	3.5470E-3	0.0000E-1	1
19	4.1457E+1	5.1315E-4	4.8939E-2	-6.4090E-3	0.0000E-1	1
20	4.1736E+1	1.4473E-4	3.7700E-2	6.1030E-2	0.0000E-1	1
21	4.4531E+1	9.1891E-4	4.0030E-2	-4.3730E-3	0.0000E-1	1
22	4.7534E+1	7.0186E-4	3.1460E-2	4.8150E-1	-1.2740E-1	0
23	4.9576E+1	6.0730E-4	4.2000E-2	-1.0490E+0	4.9830E-3	0
24	5.0144E+1	4.5952E-4	2.2500E-2	-4.9960E-3	0.0000E-1	1
25	5.2648E+1	1.3038E-3	4.3940E-2	-9.0450E-3	0.0000E-1	1
26	5.5704E+1	2.0205E-4	3.7560E-2	2.4270E-2	0.0000E-1	1
27	5.6924E+1	1.5666E-3	4.2000E-2	-2.2040E+0	2.5300E-2	0
28	5.9291E+1	5.7727E-4	3.3900E-2	9.8690E-2	0.0000E-1	1
29	6.1621E+1	3.5835E-3	4.2000E-2	7.0980E+0	6.6790E-3	0
30	6.3170E+1	7.9190E-5	3.5279E-2	7.2420E-2	0.0000E-1	1
31	6.5454E+1	4.6537E-4	2.4110E-2	4.5020E-1	-2.1170E-9	0
32	6.5793E+1	1.1948E-3	6.1610E-2	1.0910E-1	0.0000E-1	1
33	7.4167E+1	3.7285E-4	3.1210E-2	-2.9710E-2	0.0000E-1	1
34	7.4885E+1	3.0346E-4	4.2000E-2	1.2530E-3	-3.4030E-1	0
35	7.5034E+1	2.4116E-3	4.0160E-2	-8.9020E-2	0.0000E-1	1
36	7.9085E+1	4.8263E-6	4.1820E-2	6.1800E-3	0.0000E-1	1

#	E_{λ} , эВ	$\Gamma_{\lambda i}^0$, эВ ^{1/2}	$\Gamma_{\lambda \gamma}$, эВ ^{1/2}	$\Gamma_{\lambda f_i}$, эВ ^{1/2}	$\Gamma_{\lambda f_2}$, эВ ^{1/2}	J
37	8.0872E + 1	5.0095E - 4	4.2000E - 2	1.8600E + 0	- 1.7600E - 3	0
38	8.2774E + 1	3.6404E - 5	4.6850E - 2	5.1500E - 3	0.0000E - 1	1
39	8.5507E + 1	5.3974E - 3	5.1000E - 2	- 1.8440E + 0	3.0440E - 3	0
40	8.5618E + 1	8.8555E - 4	2.6180E - 2	5.8660E - 3	0.0000E - 1	1
41	9.0850E + 1	1.2810E - 3	3.3990E - 2	7.3610E - 3	0.0000E - 1	1
42	9.3079E + 1	6.9965E - 5	3.7640E - 2	- 2.8980E - 3	0.0000E - 1	1
						.
						.
400	9.9424E + 2	5.9972E - 4	4.3060E - 2	3.2550E - 2	0.0000E - 1	1
401	9.9797E + 2	1.1256E - 3	3.1420E - 2	- 2.7140E - 1	0.0000E - 1	1
402	9.9867E + 2	1.1167E - 3	3.9660E - 2	- 4.0760E - 2	0.0000E - 1	1
403	1.0050E + 3	2.4361E - 3	4.6000E - 2	1.1950E - 3	0.0000E - 1	1
404	1.0100E + 3	5.8243E - 3	4.6000E - 2	- 4.9200E + 0	2.0850E - 2	0
405	1.1000E + 3	3.6784E - 2	4.6000E - 2	4.2000E - 2	0.0000E - 1	1

Знаки $\pm$ при $\Gamma_{\lambda f}$ соответствуют знаку произведения $(\Gamma_{\lambda i}^0)^{1/2} \Gamma_{\lambda f_i}^{1/2}$.

Создание и реализация в многоуровневом анализе резонансных сечений программного комплекса SAMMY, несомненно, является существенным достижением группы ORNL [6,7], позволяющим в полной мере использовать современные данные о детальной энергетической структуре сечений в прикладных задачах. Однако воспроизведение здесь резонансных сечений по параметрам K -матрицы (3) приводит в общем случае к существенным вычислительным трудностям при учете доплеровского уширения резонансов, например, или нахождении резонансных интегралов в отдельных интервалах энергии, что связано как с необходимостью учета на каждом шаге интегрирования всего набора параметров уровней, так и со сложной матричной формой энергетической зависимости сечений (необходимость обращения матрицы $[1 - iK^J(E)]$ (2)). Вместе с тем весьма общие аналитические свойства элементов U -матрицы приводят к выводу о принципиальной возможности их представления в виде суммы полюсных членов по переменной E или $k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$ [3,8]. В этом случае резонансные сечения воспроизводятся как сумма простых брейт-вигнеровских членов, что, несомненно, удобнее для практических приложений и не требует принципиального пересмотра существующих расчетных методов при использовании современной информации о резонансной структуре нейтронных сечений во всем интервале разрешенных уровней.

Полюсные формы матрицы столкновений характерны для формализмов Капура — Пайерлса [1] и Юмбле — Розенфельда [8]. И хотя общие схемы

преобразования параметров R -матрицы к параметрам полюсных разложений в принципе известны, их практическая реализация стала актуальной лишь сейчас с появлением новых данных о резонансных сечениях в широких энергетических интервалах и результатов их многоуровневого анализа по схеме SAMMY [5,6]. В данной работе представлен обзор схем и методов, используемых при многоуровневой параметризации нейтронных резонансных сечений и алгоритмов для установления взаимосвязи между параметрами разных схем. В практическом плане нашей целью является построение удобных в приложениях многоуровневых выражений для сечений, математически тождественных SAMMY, т.е. воспроизводящих при соответствующем переопределении параметров реальную энергетическую структуру сечений во всей области разрешенных уровней.

1. R -МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

Приведем здесь известные соотношения R -матричной теории Вигнера для матрицы столкновений $U(E)$ с элементами $U_{c'c}(E)$ и рангом, равным полному числу эффективных (при рассматриваемых энергиях) каналов. Как основное, выберем унитарное представление [1]:

$$U(E) = e^{-i\Phi} P^{1/2} [1 - R(E)\bar{L}]^{-1} [1 - R(E)\bar{L}^*] P^{-1/2} e^{-i\Phi}, \quad (4)$$

где $\exp[-i\Phi]$ и $\bar{L}$ — диагональные матрицы внешних решений: Φ_c — фаза потенциального рассеяния, $\bar{L}_c = L_c + b_c$, b_c — вещественная константа граничного условия, $L_c = S_c + iP_c$ — логарифмическая производная на радиусе канала a_c , мнимая часть которой P_c — есть фактор проницаемости канала c (приложение 1). Элементы матрицы $R(E)$ определяются в общем случае как суммы по полному набору собственных состояний во внутренней области ($0 < r_c < a_c$) с энергиями E_λ для фиксированного значения полного момента J и четности (соответствующие индексы в U и R мы здесь временно опускаем):

$$R_{c'c} = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda c'} \frac{1}{E_{\lambda} - E} \gamma_{\lambda c}, \quad (5)$$

где параметры E_λ и $\gamma_{\lambda c}$ — вещественные константы [1].

Можно также представить $R_{c'c}$ (5) как элементы матрицы каналов

$$R(E) = \gamma^T \frac{1}{\mathcal{E} - E} \gamma, \quad (6)$$

где $\mathcal{E}$ — диагональная матрица уровней с элементами E_λ , γ — прямоугольная матрица $(\lambda \times c)$ с элементами $\gamma_{\lambda c}$ (γ^T — транспонированная матрица). Введем также матрицу

$$G = (1 - R\bar{L})^{-1}R, \quad (G = R + R\bar{L}G), \quad (7)$$

и если определить

$$G = \gamma^T A^{-1} \gamma, \quad (8)$$

то из соотношения (7) найдем матрицу уровней A :

$$A = \mathcal{E} - E - \gamma \bar{L} \gamma^T, \quad A_{\lambda\mu} = (E_\lambda - E) \delta_{\lambda\mu} - \xi_{\lambda\mu}, \quad (9)$$

где

$$\xi_{\lambda\mu} = (\gamma \bar{L} \gamma^T)_{\lambda\mu} = \Delta_{\lambda\mu} + i\Gamma_{\lambda\mu}/2 = \sum_c \gamma_{\lambda c} (S_c - b_c) \gamma_{\mu c} + i \sum_c \gamma_{\lambda c} P_c \gamma_{\mu c}.$$

В результате получим так называемое альтернативное представление для $U(E)$ (4) через матрицу уровней A [1]:

$$\begin{aligned} U(E) &= e^{-i\varphi} [1 + 2iP^{1/2}GP^{1/2}] e^{-i\varphi} = \\ &= e^{-i\varphi} [1 + 2iP^{1/2}\gamma^T A^{-1}\gamma P^{1/2}] e^{-i\varphi} \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$U_{cn}(E) = e^{-i\varphi_c} [\delta_{cn} + 2iP_c^{1/2} \sum_{\lambda\mu} \gamma_{\lambda c} \gamma_{\mu n} (A^{-1})_{\lambda\mu} P_n^{1/2}] e^{-i\varphi_n} \quad (11)$$

(в обзоре [1] для A используется обратное обозначение A^{-1}).

Эти две тождественные формы $U(E)$ -матрицы (4) и (11), определяемые в R -матричной теории Вигнера, уже более 40 лет служат методической основой для построения различных практических схем параметризации резонансных сечений и физического анализа параметров. Наиболее популярно, конечно, одноуровневое приближение (формулы Брейта — Вигнера), использующееся для описания энергетической зависимости сечений в изолированных резонансах. Определяемые здесь параметры E_λ (энергии уровней) и резонансные ширины в отдельных каналах $\Gamma_{\lambda c}$ находят качественную интерпретацию в микроскопических моделях взаимодействия [1—3,9]. Известны статистические распределения величин этих параметров, стандартизованы процедуры учета доплеровского уширения резонансов, усреднения сечений по энергии, анализа данных по пропусканию резонансных нейтронов. Одноуровневое приближение используется также в теории и методах нейтронно-физического расчета ядерных реакторов [10].

Но уже двухуровневое приближение для случая двух близких резонансов ($\lambda = 1, 2$ в R -матрице (5)) иллюстрирует эффект их интерференции, приводящий к увеличению или уменьшению сечений по сравнению с простой суммой одноуровневых формул, а иногда при наличии нерезонансного фона возможно и появление фиктивных резонансов [3—5]. Практически учет интерференции уровней наиболее существен для резонансных сечений делящихся ядер. Поэтому и задачи многоуровневой параметризации концентрируются в основном в приложениях к делящимся изотопам, хотя в последние годы R -матричный анализ эффективно используется и для анализа резонансных сечений неделящихся ядер [7,11].

Очевидно, что при большом числе каналов реакций прямое использование в многоуровневом анализе R -матричных соотношений (4), (11) весьма проблематично из-за отсутствия полного набора данных по каждому из каналов и обилия свободных параметров. Необходимы определенные физические предположения, упрощающие анализ. Наиболее эффективным здесь оказалось приближение Райха — Мура (RM), предполагающее число каналов для радиационного захвата нейтронов большим со случайным (гауссовским) распределением величин соответствующих амплитуд $\gamma_{\lambda c}$, так что

$$2 \sum_{c(\gamma)} \gamma_{\lambda c} P_c \gamma_{\mu c} \approx \Gamma_{\lambda\gamma} \delta_{\lambda\mu}. \quad (12)$$

Погрешность RM -приближения оценивается малостью величины отношения

$$\sum_{c(\gamma)} \gamma_{\lambda c} P_c \gamma_{\mu c} / (E_\lambda - E_\mu) \ll 1 \quad (\lambda \neq \mu),$$

что практически, по-видимому, всегда выполняется. По крайней мере, до последнего времени при многоуровневой параметризации сечений не отмечались эффекты, связанные с ограниченностью RM -приближения. В то же время с его использованием резко уменьшается число явно учитываемых в анализе каналов, и в соотношениях для сечений (1) можно перейти к так называемой редуцированной матрице столкновений $U'(E)$, имеющей ранг, равный числу оставшихся после исключения радиационного захвата каналов (нейтронные и делительные в наших приложениях), и отличающейся от $U(E)$ (11) выбором матрицы уровней A (9) в виде

$$A_{\lambda\mu} = (E_\lambda - E - i\Gamma_{\lambda\gamma}/2) \delta_{\lambda\mu} - \xi'_{\lambda\mu}, \quad (13)$$

где

$$\xi'_{\lambda\mu} = \sum_c' \gamma_{\lambda c} \bar{L}_c \gamma_{\mu c} = \Delta'_{\lambda\mu} + i \sum_c' \gamma_{\lambda c} P_c \gamma_{\mu c}$$

есть сумма по оставшимся каналам. В соответствующем основном представлении матрицы $U'(E)$ (4) элементы редуцированной R -матрицы определяются как

$$R'_{c'c} = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda c'} \frac{1}{E_{\lambda} - E - i\Gamma_{\lambda\gamma}/2} \gamma_{\lambda c}. \quad (14)$$

Заметим, что в отличие от $U(E)$ (4) редуцированная $U'(E)$ -матрица не унитарна, и если сечения (полное, поглощения и деления) определяются, как и в общем случае, элементами $U'_{nn}(E)$ и $U'_{cn}(E)$ (1), то сечение радиационного захвата находится здесь из условия унитарности по всем каналам матрицы $U(E)$ (4):

$$\sigma_{\gamma} \sim \sum_{c(\gamma)} |U_{cn}|^2 = 1 - \sum_c |U'_{cn}|^2.$$

Менее очевидно другое предположение схемы SAMMY — о несущественной зависимости от энергии факторов проницаемости для каналов деления и, соответственно, делительных ширин. Основным аргументом здесь может служить лишь ограниченность области разрешенных резонансов интервалом ~ 1 кэВ, в то время как факторы проницаемости для деления есть функции разности $E - E_{th}$, где энергии барьеров E_{th} имеют масштаб ~ 1 МэВ [2].

Наконец, пренебрежение фактором сдвига уровня $\Delta'_{\lambda\mu}$ (13) в матрице столкновений (2), очевидное для нейтронных каналов с $l = 0$, допустимо, по-видимому, и для $l \geq 1$ при энергиях ниже порога неупругого рассеяния нейтронов при феноменологическом характере резонансных параметров схемы.

Обратим внимание на то, что сумма по $\lambda(J)$ (3) в схеме SAMMY содержит как угодно большое, но конечное число членов $N(J)$. Поэтому здесь нет необходимости в формальном выделении фоновой (нерезонансной) части $K(E)$ -матрицы, как это обычно делалось в ранних схемах R -матричной параметризации [1,3]. Фактически существующий фон учитывается соответствующим расширением суммы (3) в область как положительных, так и отрицательных значений E_{λ} , по сравнению с числом реально наблюдаемых в рассматриваемом интервале энергии резонансов.

В приложении к неделящимся ядрам подобная схема R -матричной параметризации выглядит более просто. Так, в типичном случае с одним нейтронным каналом для системы уровней с данным J и четностью полное сечение и сечение поглощения нейтронов можно представить как отношения сумм [3]:

$$\sigma(E) = 4\pi k^{-2} \sum_J g(J) \left[\sin^2 \varphi_n + \operatorname{Re} \left(e^{\frac{-2i\varphi_n}{1 - iK_{nn}^J(E)}} \right) \right],$$

$$\sigma_a(E) = 4\pi k^{-2} \sum_J g(J) \operatorname{Re} \left(\frac{-iK_{nn}^J(E)}{|1 - iK_{nn}^J(E)|^2} \right), \quad (15)$$

где

$$K_{nn}^J(E) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda(J)} \Gamma_{\lambda n}(E) / (E_\lambda - E - i\Gamma_{\lambda\gamma}/2).$$

Здесь параметры $\Gamma_{\lambda n}(E_\lambda)$, $\Gamma_{\lambda\gamma}$ и E_λ имеют тот же физический смысл, что и в одноуровневом приближении. Подобная же функциональная зависимость от энергии в виде отношения сумм полюсных членов получается прямым обращением матрицы $[1 - iK^J(E)]$ (2) для двух и более нейтронных каналов (см. разд.6).

2. МЕТОД АДЛЕРОВ

Другой классический вариант представления резонансной матрицы $U(E)$ дает формализм Капура — Пайерлса [1]. Соответствующее преобразование R -матричного выражения (11) иллюстрируется обычно как результат диагонализации симметричной матрицы уровней A (9) методом ортогонального комплексного преобразования [1,12]:

$$VAV^T = \tilde{\mathcal{E}} - E, \quad A^{-1} = V^T(\tilde{\mathcal{E}} - E)^{-1}V, \quad (VV^T = 1), \quad (16)$$

где V — преобразующая матрица, а $\tilde{\mathcal{E}}$ — диагональная матрица уровней с элементами $\tilde{E}_k = \mu_k - i\nu_k$. В результате выражение для $U(E)$ приводится к виду

$$U(E) = e^{-i\varphi} [1 + 2iP^{1/2} \tilde{\gamma}^T (\tilde{\mathcal{E}} - E)^{-1} \tilde{\gamma} P^{1/2}] e^{-i\varphi}, \quad \tilde{\gamma} = V\gamma,$$

или

$$U_{cn}(E) = e^{-i\varphi} [\delta_{cn} + 2iP_c^{1/2} P_n^{1/2} \sum_k \tilde{\gamma}_{kc} \tilde{\gamma}_{kn} (\tilde{E}_k - E)^{-1}] e^{-i\varphi_n}, \quad (17)$$

где параметры $\tilde{\gamma}_{kc}$ и $\tilde{E}_k$ — комплексные и в общем случае зависящие от энергии величины [1—4].

В отличие от R -матричных методов параметризации, где резонансные сечения представляют собой в общем случае сложные функции энергии, причем зависящие от числа членов в суммах по λ , формализм Капура —

Пайерлса выглядит более удобным для приложений, так как сечения здесь записываются в виде подобных одноуровневых членов (см. ниже). Но, как уже отмечалось, параметры формализма зависят от энергии, хотя, возможно, и несущественно, так как это связано лишь с составляющей $\xi'_{\lambda n}$ (13), относящейся к нейтронным каналам. Поэтому в приложении к делящимся ядрам, где $\Gamma_{\lambda f} + \Gamma_{\lambda \gamma} \gg \Gamma_{\lambda n}$, при диагонализации матрицы уровней **A** (13) можно положить

$$\sum_n \gamma_{\lambda n} \tilde{L}_n(E) \gamma_{\mu n} \approx i/2 \sum_n \Gamma_{\lambda n}^{1/2}(E_\lambda) \Gamma_{\mu n}^{1/2}(E_\mu),$$

и тогда матрица преобразования **V** и комплексные параметры $\tilde{E}_k = \mu_k - i\nu_k$ и $\tilde{\gamma}_{kc}$ не зависят уже от энергии. Соответствующий вариант формализма Капура — Пайерлса в приложении к задачам параметризации резонансных сечений известен как метод Адлеров (АА) [5,13].

Подставив $U_{cn}(E)$ (17) в соотношения для сечений (1), получим многоуровневые формулы АА-метода:

$$\sigma(E) = \sigma_p + 4\pi k^{-2} \sum_J g(J) \sum_n P_n(E) \sum_k \operatorname{Re} \left[(-i) e^{-2i\varphi_n} \frac{g_k + ih_k}{\mu_k - E - i\nu_k} \right], \quad (18)$$

где $g_k + ih_k = \tilde{\gamma}_{kn}^2$, σ_p — потенциальное сечение;

$$\sigma_c(E) = 4\pi k^{-2} \sum_J g(J) \sum_n P_n(E) \sum_k \operatorname{Re} \left[(-i) \frac{g_k^c + ih_k^c}{\mu_k - E - i\nu_k} \right], \quad (19)$$

$$g_k^c + ih_k^c = 2iP_c \sum_{k'} \frac{\tilde{\gamma}_{kn} \tilde{\gamma}_{kc} \tilde{\gamma}_{k'n}^* \tilde{\gamma}_{k'c}^*}{(\mu_{k'} - \mu_k) + i(\nu_{k'} + \nu_k)}. \quad (20)$$

Очевидно, что это суммы типичных брейт-вигнеровских членов с не зависящими от энергии параметрами $g_k, h_k, g_k^c, h_k^c, \mu_k, \nu_k$ в АА-методе. В приложении к делящимся ядрам обычно ограничиваются одним нейтронным каналом с $l = 0$ ($P_n = P_0 = ka$), и тогда сечения можно представить в виде [5,13]:

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \sigma_p + \frac{1}{\sqrt{E}} \sum_k \operatorname{Re} \left[(-i) e^{-2i\varphi_0} \frac{G_k + iH_k}{\mu_k - E - i\nu_k} \right], \\ \sigma_f(E) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \sum_k \frac{G_k^f \nu_k + H_k^f (\mu_k - E)}{(\mu_k - E)^2 + \nu_k^2} \end{aligned} \quad (21)$$

с не зависящими от энергии параметрами

$$G_k + iH_k = (4\pi a\hbar/\sqrt{2\mu}) g(J) (g_k + ih_k),$$

$$G_k^f + iH_k^f = (4\pi a\hbar/\sqrt{2\mu}) g(J) \sum_{c(f)} (g_k^c + ih_k^c).$$

Такая форма представления резонансных сечений делящихся ядер также используется в библиотеке ENDF [5].

Формулы (18)—(21), несомненно, более удобны в приложениях, так как при произвольном числе уровней имеют однообразную энергетическую структуру, непосредственно ассоциируемую с наблюдаемыми резонансами. Однако при независимом выборе параметров АА-метода здесь возможны парадоксы «отрицательных» сечений, появляющихся в расчетах из-за знакопеременной составляющей H [14]. Поэтому на практике при ограниченном числе резонансных членов к суммам (18)—(21) добавляют некоторую фоновую часть, формируемую хвостами остальных уровней и компенсирующую, в частности, отрицательные значения. В результате появляются дополнительные параметры фона в отдельных энергетических интервалах [5,13].

В действительности же параметры формализма Капура — Пайерлса нельзя считать независимыми, так как между ними существует определенная взаимосвязь, следующая из условия унитарности $U(E)$ -матрицы (17). В отличие от R -матричных схем, где используется унитарное при любом выборе независимых параметров выражение для $U(E)$ (4), для полюсного представления (17) это условие приводит к соотношению [13,14] (приложение 2):

$$\tilde{\gamma}_{kn}^2 = 2i \sum_c P_c \sum_{k'(J)} \frac{\tilde{\gamma}_{kn} \tilde{\gamma}_{kc} \tilde{\gamma}_{k'n}^* \tilde{\gamma}_{k'c}^*}{\tilde{E}_{k'}^* - \tilde{E}_k} = \sum_c (g_k^c + ih_k^c), \quad (22)$$

где суммирование по c включает все учитываемые каналы, в том числе и радиационные. Из него, в частности, следует, что в полном сечении поглощения, определяемом подобно (19) суммированием по каналам $c \neq n$:

$$\sigma_a(E) = 4\pi k^{-2} \sum_J g(J) \sum_n P_n(E) \sum_k \operatorname{Re} \left[(-i) \frac{g_k^a + ih_k^a}{\mu_k - E - i\nu_k} \right], \quad (23)$$

параметры

$$g_k^a + ih_k^a = \tilde{\gamma}_{kn}^2 - \sum_n (g_k^n + ih_k^n).$$

Тогда, если из анализа полного сечения (для случая одного нейтронного канала, например) найдены $\tilde{\gamma}_{kn}^2$ вместе с μ_k и ν_k , то этого достаточно для

нахождения параметров $g_k^a + ih_k^a$ (23) и построения резонансного сечения $\sigma_a(E)$. Сечение радиационного захвата при этом находится как разность $\sigma_\gamma(E) = \sigma_a(E) - \sigma_f(E)$, а сечение рассеяния есть $\sigma_n(E) = \sigma(E) - \sigma_a(E)$ [14].

Преобразование параметров R -матрицы к параметрам метода Адлеров, сводящееся к диагонализации матрицы уровней A (14), можно выполнить без трудоемкой процедуры нахождения матрицы ортогонального преобразования V методом прямого обращения, реализованным в программе POLLA [15]. Действительно, если воспользоваться обычным определением элементов обратной матрицы:

$$(A^{-1})_{\lambda\mu} = M_{\lambda\mu}(E) / D(E), \quad (24)$$

где $D(E)$ — детерминант, а $M_{\lambda\mu}(E)$ — алгебраическое дополнение матрицы A , то детерминант здесь представляет собой полином по E степени N , равной рангу матрицы (числу уровней). Определив N корней этого полинома E_k методом Ньютона — Рапсона, например, представим

$$D(E) = \prod_{k=1}^N (\tilde{E}_k - E). \quad (25)$$

Алгебраические дополнения здесь — также полиномы по E степени $N - 1$ для диагональных членов и $N - 2$ для недиагональных. Предполагая затем все N корней детерминанта разными (невырожденными), запишем отношение полиномов (24) в виде разложения на простые дроби:

$$(A^{-1})_{\lambda\mu} = \sum_{k=1}^N \frac{m_{\lambda\mu}(\tilde{E}_k)}{\tilde{E}_k - E}, \quad (26)$$

где

$$m_{\lambda\mu}(\tilde{E}_k) = -M_{\lambda\mu}(\tilde{E}_k) / D'(\tilde{E}_k).$$

Подстановка (26) в выражение (11) для матрицы $U(E)$ непосредственно приводит к полюсной форме (17) с

$$\tilde{\gamma}_{kn} \tilde{\gamma}_{kc} = \sum_{\lambda\mu} \gamma_{\lambda n} m_{\lambda\mu}(\tilde{E}_k) \gamma_{\mu c}. \quad (27)$$

Такой способ преобразования формально эквивалентен диагонализации матрицы уровней A методом ортогонального преобразования (16) [12,15].

Обратная задача — нахождение R -матричных параметров по заданным параметрам AA -метода — в общем случае неоднозначна как с математической точки зрения, так и из-за приближений самого метода.

3. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД

При внешней привлекательности рассмотренной выше схемы параметрического представления резонансных сечений очевидна и ее ограниченность относительно небольшими интервалами энергии, где можно пренебречь изменением логарифмических производных нейтронных каналов. Но при расширении области разрешенных уровней это приводит к необходимости соответствующей коррекции параметров при переходе от одного интервала к другому. В то же время сама идея воспроизведения резонансных сечений как сумм одноуровневых членов следует, как уже отмечалось, из общих аналитических свойств матрицы $U(E)$. Ниже мы вернемся к задаче более строгого, чем в АА-методе, обоснования полюсного разложения $U(E)$ -матрицы (разд.5), но предварительно рассмотрим кажущиеся нам наглядными как с математической, так и с физической точки зрения результаты комбинированного метода многоуровневой параметризации, где функциональная зависимость сечений от энергии представляется как отношение сумм полюсных по E членов подобно (15).

В принципе результаты этого метода следуют из известной процедуры Тейхмана — Вигнера для исключения каналов реакций в матрице $U(E)$ [1]. Приведем здесь более компактный вывод, использующий матричные соотношения для $G(E)$ (7), (8). Разделим весь набор учитываемых в анализе каналов на две (в нашем случае) группы: $\mathbf{n}$ — нейтронные каналы и $\mathbf{a}$ — каналы реакций, включая радиационные. Соответственно, представим прямоугольную матрицу γ в виде двух блоков: $\gamma_{\mathbf{n}}$ с числом столбцов, равным числу нейтронных каналов ($\lambda \times \mathbf{n}$) и $\gamma_{\mathbf{a}}$ — ($\lambda \times \mathbf{a}$) для каналов группы $\mathbf{a}$. Воспользуемся также матричным тождеством (9):

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathcal{E} - E - \gamma \bar{L} \gamma^T} = \frac{1}{\mathcal{E} - E - \gamma_{\mathbf{a}} \bar{L}_{\mathbf{a}} \gamma_{\mathbf{a}}^T} \left[1 + \gamma_{\mathbf{n}} \bar{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\mathbf{n}}^T \frac{1}{\mathcal{E} - E - \gamma \bar{L} \gamma^T} \right], \quad (28)$$

где

$$(\gamma_{\mathbf{a}} \bar{L}_{\mathbf{a}} \gamma_{\mathbf{a}}^T)_{\lambda\mu} = \sum_{c(a)} \gamma_{\lambda c} \bar{L}_c \gamma_{\mu c}, \quad (\gamma_{\mathbf{n}} \bar{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\mathbf{n}}^T)_{\lambda\mu} = \sum_{c(n)} \gamma_{\lambda c} \bar{L}_c \gamma_{\mu c}$$

— скалярные произведения для каждой из групп каналов. Умножая затем справа и слева на соответствующие матрицы $\gamma_{\mathbf{a}}$ или $\gamma_{\mathbf{n}}$, получим матричные соотношения

$$\begin{aligned} G_{\mathbf{nn}} &= \gamma_{\mathbf{n}}^T A^{-1} \gamma_{\mathbf{n}} = \mathcal{R}_{\mathbf{nn}} + \mathcal{R}_{\mathbf{nn}} \bar{L}_{\mathbf{n}} G_{\mathbf{nn}}, \\ G_{\mathbf{an}} &= \gamma_{\mathbf{a}}^T A^{-1} \gamma_{\mathbf{n}} = \mathcal{R}_{\mathbf{an}} + \mathcal{R}_{\mathbf{an}} \bar{L}_{\mathbf{n}} G_{\mathbf{nn}}, \\ G_{\mathbf{aa}} &= \gamma_{\mathbf{a}}^T A^{-1} \gamma_{\mathbf{a}} = \mathcal{R}_{\mathbf{aa}} + \mathcal{R}_{\mathbf{an}} \bar{L}_{\mathbf{n}} G_{\mathbf{na}}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\mathcal{R}_{nn} = \gamma_n^T \mathbf{B}^{-1} \gamma_n, \quad \mathcal{R}_{an} = \gamma_a^T \mathbf{B}^{-1} \gamma_n, \quad \mathcal{R}_{aa} = \gamma_a^T \mathbf{B}^{-1} \gamma_a \quad (30)$$

— блоки редуцированной $\mathbf{R}$ -матрицы с элементами

$$\mathcal{R}_{c'c} = \sum_{\lambda\mu} \gamma_{\lambda c'} (B^{-1})_{\lambda\mu} \gamma_{\mu c} \quad (31)$$

и матрицей уровней

$$\mathbf{B} = \mathcal{E} - \mathbf{E} - \gamma_a \bar{\mathbf{L}}_a \gamma_a^T, \quad B_{\lambda\mu} = (E_\lambda - E) \delta_{\lambda\mu} - \sum_{c \neq n} \gamma_{\lambda c} \bar{\mathbf{L}}_c \gamma_{\mu c}. \quad (32)$$

В отличие от $\mathbf{A}$ (9), матрица $\mathbf{B}$ не содержит нейтронных каналов, и ее недиагональная часть $\gamma_a \bar{\mathbf{L}}_a \gamma_a^T$ предполагается не зависящей от энергии E . Тогда результат диагонализации $\mathbf{B}$ методом ортогонального комплексного преобразования (16), например, приводит к полюсному разложению редуцированной $\mathbf{R}$ -матрицы:

$$\mathcal{R}_{c'c} = \sum_q \bar{\gamma}_{qc'} \bar{\gamma}_{qc} / (\bar{E}_q - E) \quad (33)$$

с комплексными, не зависящими от энергии параметрами $\bar{\gamma}_{qc}$ и $\bar{E}_q$:

$$\bar{\gamma}_{qc} = \sum_{\lambda} V_{q\lambda} \gamma_{\lambda c}, \quad \bar{E}_q = \sum_{\lambda} V_{q\lambda}^2 E_{\lambda} - \sum_{\lambda\mu} V_{q\lambda} (\gamma_a \bar{\mathbf{L}}_a \gamma_a^T)_{\lambda\mu} V_{q\mu}.$$

(Матрица преобразования $\mathbf{V}$ здесь иная, чем при диагонализации $\mathbf{A}$ (16), поэтому и параметры отличны от используемых в разд.2).

Для неделящихся ядер элементы редуцированной матрицы (31) в RM -приближении совпадают с $R'_{c'c}(E)$ (13), и, полагая $\text{Re } \bar{\mathbf{L}}_n = 0$, приходим непосредственно к схеме SAMMY с сечениями в виде отношений сумм полюсных членов (15). Покажем, что к подобной форме преобразуются выражения для сечений и в случае делящихся ядер. Действительно, из соотношений (29) следует:

$$\mathbf{G}_{nn} = \mathcal{R}_{nn} (\mathbf{1} - \bar{\mathbf{L}}_n \mathcal{R}_{nn})^{-1}, \quad \mathbf{G}_{an} = \mathcal{R}_{an} (\mathbf{1} - \bar{\mathbf{L}}_n \mathcal{R}_{nn})^{-1}, \quad (34)$$

и в случае, например, одного нейтронного канала и произвольного числа каналов реакций элементы матрицы столкновений (10) записываются в функциональной форме как

$$U_{cn}(E) = e^{-i\Phi_c} \left[\delta_{cn} + 2iP_c^{1/2} \frac{\mathcal{R}_{cn}(E)}{1 - \bar{\mathbf{L}}_n(E) \mathcal{R}_{nn}(E)} P_n^{1/2} \right] e^{-i\Phi_n}. \quad (35)$$

При этом выражения для полного сечения и сечения поглощения нейтронов подобны (15):

$$\sigma(E) = 4\pi k^{-2} \sum_J g(J) \left[\sin^2 \varphi_n + \operatorname{Re} \left(e^{-2i\varphi_n} \frac{-iP_n(E) \mathcal{R}_{nn}^J(E)}{1 - \bar{L}_n(E) \mathcal{R}_{nn}^J(E)} \right) \right],$$

$$\sigma_a(E) = 4\pi k^{-2} \sum_J g(J) P_n(E) \operatorname{Im} \mathcal{R}_{nn}^J(E) / |1 - \bar{L}_n(E) \mathcal{R}_{nn}^J(E)|^2, \quad (36)$$

а сечение реакции в канале $c \neq n$ есть

$$\sigma_c(E) = 4\pi k^{-2} \sum_J g(J) \frac{P_c P_n |\mathcal{R}_{cn}^J(E)|^2}{|1 - \bar{L}_n(E) \mathcal{R}_{nn}^J(E)|^2} =$$

$$= 4\pi k^{-2} \sum_J \frac{g(J) P_n(E)}{|1 - \bar{L}_n(E) \mathcal{R}_{nn}^J(E)|^2} \operatorname{Re}(-i) \sum_{q(J)} \frac{\bar{g}_q^c + i\bar{h}_q^c}{\bar{E}_q - E}, \quad (37)$$

где

$$\bar{g}_q^c + i\bar{h}_q^c = 2iP_c \sum_{q'} \frac{\bar{\gamma}_{qn} \bar{\gamma}_{qc} \bar{\gamma}_{q'n}^* \bar{\gamma}_{q'c}^*}{\bar{E}_{q'}^* - \bar{E}_q} \quad (38)$$

— комплексные константы (если $P_c(E) = \text{const}$). В подобной же форме (37) записываются и суммарные по своим каналам сечения деления и радиационного захвата c

$$\bar{g}_q^f + i\bar{h}_q^f = \sum_{c(f)} (\bar{g}_q^c + i\bar{h}_q^c), \quad \bar{g}_q^\gamma + i\bar{h}_q^\gamma = \sum_{c(\gamma)} (\bar{g}_q^c + i\bar{h}_q^c). \quad (39)$$

Условие унитарности матрицы столкновений в комбинированном методе сводится к соотношениям между элементами

$$\operatorname{Im} \mathcal{R}_{nn}^J = \sum_{c \neq n} P_c |\mathcal{R}_{cn}^J|^2 \quad (40)$$

и параметрами комбинированного метода (приложение 2):

$$\bar{\gamma}_{qn}^2 = \bar{g}_q^f + i\bar{h}_q^f + \bar{g}_q^\gamma + i\bar{h}_q^\gamma, \quad (41)$$

так что для параметризации сечений здесь достаточно определить набор комплексных констант $\bar{E}_q$, $\bar{\gamma}_{qn}^2$ и $\bar{g}_q^f + i\bar{h}_q^f$ для всех q .

Как видим, такой способ многоуровневой параметризации представляет собой комбинацию известного в R -матричной теории преобразования матрицы U (или G) к блочной форме (метод Тейхмана — Вигнера) и процедуры диагонализации матрицы уровней в редуцированной R -матрице (33). То обстоятельство, что в отличие от АА-метода параметры $\bar{\gamma}_{qc}$ и $\bar{E}_q$ здесь не зависят от энергии (если $\bar{L}_c(E) = \text{const}$ для $c \neq n$), обеспечивает формально тождественность результатов многоуровневой параметризации в комбинированном методе и схеме SAMMY (см. разд.4).

В задачах с двумя и более нейтронными каналами также сохраняется характерное для комбинированного метода представление сечений в виде отношения сумм, так как детерминант матрицы $(1 - L_n R_{nn})$ и элементы блоков G_{nn} и G_{an} (34) преобразуются здесь к подобной одноканальному варианту форме с соответственно переопределенными параметрами (разд.6, приложение 3).

Отметим также, что в своей общей формулировке комбинированный метод не содержит ограничений по числу как каналов деления, так и каналов радиационного захвата (не требует обязательно RM -приближения). В явном виде учитывается и фактор сдвига уровня, что важно вблизи порога неупругого рассеяния, например (разд.6). Поэтому и параметризация здесь имеет более универсальный смысл, чем в схеме SAMMY.

4. ПАРАМЕТРЫ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА

Алгоритмы R -матричных методов многоуровневого анализа сечений неделящихся ядер [7,11,3] могут служить основой для построения схемы независимого определения параметров комбинированного метода из анализа данных по резонансным сечениям неделящихся ядер, так как общая структура представления энергетической зависимости (15) и (36), (37) во многом подобна. Анализ полного сечения и сечения поглощения (36) дает нам параметры $R_{nn}(E) - \bar{\gamma}_{qn}^2$ и $\bar{E}_q$, а данные по сечению деления определяют $\bar{g}_q^f + i\bar{h}_q^f$ (39). Однако с реализацией здесь схемы SAMMY подобный независимый анализ теряет свою актуальность, а наша задача практически сводится к нахождению параметров комбинированного метода по известным параметрам R - или K -матрицы (3).

Для этого воспользуемся RM -приближением (12) и установим соотношения между редуцированными матрицами R_{nn} , R_{in} и R_{ff} , где индекс f относится к оставшимся после исключения радиационного захвата каналам (в нашем случае к каналам деления), и соответствующими блоками

$R'(E)$ -матрицы (13). Запишем обратную матрицу уровней B^{-1} (31) в этом приближении как

$$B^{-1} = \frac{1}{\mathcal{E}' - E - \gamma_f \bar{L}_f \gamma_f^T} = \frac{1}{\mathcal{E}' - E} \left[1 + \gamma_f \bar{L}_f \gamma_f^T \frac{1}{\mathcal{E}' - E - \gamma_f \bar{L}_f \gamma_f^T} \right], \quad (42)$$

где $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - i\Gamma_\gamma/2$ — диагональная матрица с элементами $E'_\lambda = E_\lambda - i\Gamma_{\lambda\gamma}/2$, а γ_f — прямоугольная матрица $(\lambda \times f)$ с числом столбцов, равным числу каналов деления. Умножая затем обе части этого тождества справа и слева на соответствующие матрицы γ_n и $\gamma_f(\gamma_n^T$ и $\gamma_f^T)$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{nn} &= R'_{nn} + R'_{nf} \bar{L}_f \mathcal{R}_{fn}, & \mathcal{R}_{fn} &= R'_{fn} + R'_{ff} \bar{L}_f \mathcal{R}_{fn}, \\ \mathcal{R}_{ff} &= R'_{ff} + R'_{ff} \bar{L}_f \mathcal{R}_{ff}, & (\mathcal{R}_{ff}) &= (1 - R'_{ff} \bar{L}_f)^{-1} R'_{ff}. \end{aligned} \quad (43)$$

Эти соотношения следуют также из эквивалентности двух форм редуцированной $\mathcal{R}$ -матрицы (31) и (33).

Для конкретного примера с двумя каналами деления $f = 1, 2$, реализованного в схеме SAMMY, элементы матрицы $\mathcal{R}_{ff}$ (при $\bar{L}_{1,2} = iP_{1,2}$) записываются в виде

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{1}{D} (R'_{11} - iP_2 \rho_{12}), \quad \mathcal{R}_{22} = \frac{1}{D} (R'_{22} - iP_1 \rho_{12}), \quad \mathcal{R}_{12} = \frac{1}{D} R'_{12}, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= R'_{11} R'_{22} - (R'_{12})^2 = \sum_{\lambda=1}^N \frac{\alpha_\lambda}{E'_\lambda - E'}, \\ \alpha_\lambda &= \sum_{\mu \neq \lambda}^N \frac{(\gamma_{\lambda 1} \gamma_{\mu 2} - \gamma_{\lambda 2} \gamma_{\mu 1})^2}{E'_\mu - E'_\lambda}, \\ D &= |1 - R'_{ff} \bar{L}_f|_2 = 1 - \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_\lambda}{E'_\lambda - E}, \\ a_\lambda &= iP_1 \gamma_{\lambda 1}^2 + iP_2 \gamma_{\lambda 2}^2 + P_1 P_2 \alpha_\lambda, \end{aligned} \quad (45)$$

а элементы R' -матрицы (13) есть суммы по произвольному, но конечному числу уровней N (приложение 3). Умножая затем числитель и знаменатель элементов (44) на произведение

$$\prod_{\lambda=1}^N (E'_\lambda - E),$$

получим отношения полиномов по степеням E . Дальнейшие преобразования подобны рассмотренным в разд.2 для АА-метода (код POLLA [14]) и сводятся к нахождению различных N корней полинома знаменателя:

$$D(E) \prod_{\lambda=1}^N (E'_\lambda - E) = \prod_{q=1}^N (\bar{E}_q - E). \quad (46)$$

Представляя отношение полиномов в виде разложений на простые дроби (28)

$$\mathcal{R}_{11} = \sum_{q=1}^N \bar{\gamma}_{q1}^2 / (\bar{E}_q - E), \quad \mathcal{R}_{22} = \sum_{q=1}^N \bar{\gamma}_{q2}^2 / (\bar{E}_q - E), \quad \mathcal{R}_{12} = \sum_{q=1}^N \bar{\gamma}_{q1} \bar{\gamma}_{q2} / (\bar{E}_q - E),$$

найдем параметры

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{q1}^2 &= \Theta_q [R'_{11}(\bar{E}_q) - iP_2 \rho_{12}(\bar{E}_q)], \quad \bar{\gamma}_{q2}^2 = \Theta_q [R'_{22}(\bar{E}_q) - iP_1 \rho_{12}(\bar{E}_q)], \\ \bar{\gamma}_{q1} \bar{\gamma}_{q2} &= \Theta_q R'_{12}(\bar{E}_q), \quad \Theta_q = \prod_{\lambda=1}^N (E'_\lambda - \bar{E}_q) / \prod_{q' \neq q}^N (\bar{E}'_{q'} - \bar{E}_q). \end{aligned} \quad (47)$$

Это преобразование реализуется программой SIGMA [16], и формально оно эквивалентно схеме с диагонализацией матрицы $\mathbf{B}$ методом ортогонального преобразования [12].

Таким же способом находятся и параметры полюсного разложения для элементов $\mathcal{R}_{fn}$ матрицы (43):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1n} &= \frac{1}{D} [R'_{1n} - iP_2 (R'_{22} R'_{1n} - R'_{12} R'_{2n})] = \sum_{q=1}^N \frac{\gamma_{q1} \gamma_{qn}}{\bar{E}_q - E}, \\ \mathcal{R}_{2n} &= \frac{1}{D} [R'_{2n} - iP_1 (R'_{11} R'_{2n} - R'_{21} R'_{1n})] = \sum_{q=1}^N \frac{\gamma_{q2} \gamma_{qn}}{\bar{E}_q - E}, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{q1} \bar{\gamma}_{qn} &= \Theta_q \{R'_{1n}(\bar{E}_q) - iP_2 [R'_{22}(\bar{E}_q) R'_{1n}(\bar{E}_q) - R'_{12}(\bar{E}_q) R'_{2n}(\bar{E}_q)]\}, \\ \bar{\gamma}_{q2} \bar{\gamma}_{qn} &= \Theta_q \{R'_{2n}(\bar{E}_q) - iP_1 [R'_{11}(\bar{E}_q) R'_{2n}(\bar{E}_q) - R'_{21}(\bar{E}_q) R'_{1n}(\bar{E}_q)]\}. \end{aligned} \quad (49)$$

Определив эти произведения вместе с (47), найдем непосредственно и параметры $\bar{\gamma}_{qn}^2$. Заметим, что здесь коэффициенты проницаемости каналов деления P_1 и P_2 — не зависящие от энергии величины, выделенные нами лишь для сохранения методической общности выводов. Практически их можно положить равными единице, заменив $\sqrt{2}\bar{\gamma}_{q1,2} = \bar{\Gamma}_{q1,2}^{1/2}$ и $\sqrt{2}\gamma_{\lambda 1,2} = \Gamma_{\lambda 1,2}^{1/2}$.

В табл.2 приведен набор параметров комбинированного метода для ^{239}Pu :

$$\begin{aligned}\bar{E}_q &= \bar{\mu}_q - i\bar{\nu}_q, \quad \bar{\Gamma}_{qn}^0 = (2ka/\sqrt{E}) \gamma_{qn}^2, \quad \bar{G}_q^f = (2ka/\sqrt{E}) \sum_{c(f)} \bar{g}_q^c, \\ (\bar{H}_q^f &= (2ka/\sqrt{E}) \sum_{c(f)} \bar{h}_q^c \approx \text{Im } \bar{\Gamma}_{qn}^0),\end{aligned}$$

приводящих к тождественным с SAMMY резонансным сечениям (см. рисунок).

Нет принципиальных сложностей в расширении подобной схемы преобразования R -матричных параметров и в случае трех и более каналов деления, если имеются соответствующие данные относительно вклада каждого из них. Заметим также, что обратная задача — преобразование параметров комбинированного метода к R -матричным — кажется нам вполне реализуемой.

Таблица 2. Параметры комбинированного метода ^{239}Pu

#	$\bar{\mu}_q$, эВ	$\bar{\nu}_q$, эВ	$\text{Re } \bar{\Gamma}_{qn}^0$, эВ $^{1/2}$	$\text{Im } \bar{\Gamma}_{qn}^0$, эВ $^{1/2}$	G_q^f , эВ $^{1/2}$	J
1	-1.5002E+2	1.1810E-1	3.5017E-2	1.7724E-5	2.8239E-2	1
2	-1.5467E+2	1.3426E-2	3.4454E-5	3.7983E-9	3.2718E-9	1
3	-6.7253E+0	6.8977E-1	4.7096E-3	3.0707E-5	3.8197E-3	0
4	-1.6705E-1	2.8381E-1	6.6072E-5	-1.6508E-6	6.6140E-5	0
5	2.9665E-1	4.8305E-2	1.4710E-4	-3.2058E-6	8.7230E-5	1
6	7.8170E+0	4.1188E-2	2.8289E-4	8.3775E-6	1.5322E-4	1
7	1.0931E+1	9.5041E-2	5.4277E-4	-4.0432E-5	4.3818E-4	1
8	1.1898E+1	2.9328E-2	2.8319E-4	2.8369E-5	9.7870E-5	1
9	1.4330E+1	4.4169E-2	1.5920E-4	3.5923E-5	1.0799E-4	1
10	1.4677E+1	3.4783E-2	4.9908E-4	-3.4116E-5	2.1878E-4	1
11	1.5481E+1	3.8772E-1	5.1584E-4	5.9756E-5	4.8787E-4	0
12	1.7657E+1	3.7323E-2	4.2908E-4	7.3761E-6	2.0912E-4	1
13	2.2266E+1	5.2288E-2	5.4865E-4	-1.1649E-5	3.3026E-4	1
14	2.3933E+1	3.0612E-2	1.7329E-5	3.7853E-6	7.0465E-6	1
15	2.6269E+1	4.0083E-2	3.0108E-4	6.5730E-6	1.5438E-4	1
16	2.7288E+1	2.0749E-2	2.8568E-5	-5.9072E-7	1.9461E-6	1
17	3.2341E+1	8.5920E-2	1.5299E-4	-1.0403E-5	1.1499E-4	0

#	$\bar{\mu}_q, \text{эВ}$	$\bar{\nu}_q, \text{эВ}$	$\text{Re } \bar{\Gamma}_{qn}^0, \text{эВ}^{1/2}$	$\text{Im } \bar{\Gamma}_{qn}^0, \text{эВ}^{1/2}$	$G_{q'}^f, \text{эВ}^{1/2}$	J
18	3.5486E + 1	2.2233E - 2	4.5290E - 5	9.3945E - 8	3.6117E - 6	1
19	4.1457E + 1	2.7630E - 2	5.1534E - 4	- 1.8391E - 5	5.5075E - 5	1
20	4.1736E + 1	4.9397E - 2	1.4254E - 4	1.7746E - 5	8.4850E - 5	1
21	4.4531E + 1	2.2201E - 2	9.1891E - 4	4.7583E - 7	9.0465E - 5	1
22	4.7657E + 1	1.3654E - 1	7.5621E - 4	- 4.5742E - 5	6.6420E - 4	0
23	4.9837E + 1	3.7252E - 1	5.7772E - 4	2.1183E - 5	5.4210E - 4	0
24	5.0144E + 1	1.3747E - 2	4.5954E - 4	- 6.4607E - 7	8.3470E - 5	1
25	5.2648E + 1	2.6489E - 2	1.3041E - 3	- 1.0559E - 5	2.2238E - 4	1
26	5.5704E + 1	3.0902E - 2	2.0164E - 4	9.5319E - 6	7.8965E - 5	1
27	5.7521E + 1	4.8474E - 1	2.9440E - 3	- 1.2090E - 3	2.7907E - 3	0
28	5.9292E + 1	6.6270E - 2	5.7717E - 4	1.1906E - 5	4.2957E - 4	1
29	6.2810E + 1	3.9221E + 0	2.4702E - 3	1.6033E - 3	2.4498E - 3	0
30	6.3171E + 1	5.3839E - 2	7.9248E - 5	3.1718E - 6	5.3465E - 5	1
31	6.5343E + 1	1.6554E - 1	1.8308E - 4	- 2.8108E - 4	1.5898E - 4	0
32	6.5793E + 1	8.5382E - 2	1.1950E - 3	- 4.1060E - 5	7.6350E - 4	1
33	7.4168E + 1	3.0427E - 2	3.6807E - 4	6.1105E - 5	1.7860E - 4	1
34	7.4940E + 1	1.7167E - 1	3.3310E - 4	- 8.2165E - 5	2.9091E - 4	0
35	7.5033E + 1	6.4628E - 2	2.4163E - 3	- 3.6803E - 5	1.6664E - 3	1
36	7.9085E + 1	2.4000E - 2	4.8085E - 6	6.3463E - 7	5.7680E - 7	1
37	8.1183E + 1	8.9264E - 1	4.4572E - 4	- 9.0978E - 4	4.1511E - 4	0
38	8.2774E + 1	2.6000E - 2	3.6395E - 5	9.8468E - 7	3.5931E - 6	1
39	8.5531E + 1	9.9764E - 1	5.3377E - 3	8.8836E - 4	5.1770E - 3	0
40	8.5618E + 1	1.6023E - 2	8.8554E - 4	2.2929E - 6	1.6208E - 4	1
41	9.0850E + 1	2.0675E - 2	1.2811E - 3	- 2.2217E - 6	2.2797E - 4	1
42	9.3079E + 1	2.0269E - 2	6.9940E - 5	1.0630E - 6	4.9900E - 6	1
						.
						.
400	9.9424E + 2	3.7805E - 2	5.9838E - 4	- 3.9601E - 5	2.5650E - 4	1
401	9.9797E + 2	1.5213E - 1	1.1571E - 3	2.1899E - 4	1.0418E - 3	1
402	9.9866E + 2	3.9174E - 2	1.0874E - 2	- 1.4656E - 4	5.3470E - 4	1
403	1.0050E + 3	2.3595E - 2	2.4363E - 3	2.6225E - 6	6.1425E - 5	1
404	1.0093E + 3	2.2617E + 0	5.8504E - 3	5.0642E - 5	5.7900E - 3	0
405	1.1000E + 3	4.3992E - 2	3.6784E - 2	- 2.6026E - 5	1.7553E - 2	1

5. ПОЛЮСНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ U-МАТРИЦЫ

В отличие от матричной формы представления энергетической зависимости элементов $U_{cn}(E)$ [$G_{cn}(E)$] в схеме SAMMY (2), комбинированный метод определяет математически тождественные функциональные соотношения для этих элементов в виде отношений сумм полюсных по E членов с

выделенными явно факторами $L_n(E)$ (35). Но здесь по-прежнему сохраняется сложная зависимость сечений от энергии, и учет доплеровского уширения резонансов, например, возможен лишь численным интегрированием. Вместе с тем определяемые в комбинированном методе довольно простые выражения для элементов матриц G_{nn} и G_{an} (34) явно иллюстрируют возможность их дальнейшего преобразования к эквивалентным полюсным разложениям.

Хотя сама идея полюсного разложения матрицы столкновений, как уже отмечалось, следует из формализма теории резонансных реакций Юмбле — Розенфельда [8], лишь в последние годы в работах Хванга [17,18] установлены и программно реализованы алгоритмы прямого преобразования R -матричных выражений для $U(E)$ (4), (11) к тождественным полюсным формам (код WHOPPER [17]).

Рассмотрим пример подобного преобразования для случая одного нейтронного канала и произвольного числа каналов реакций, для которых предполагается $L_c = iP_c = \text{const}$ ($c \neq n$). По аналогии с комбинированным методом элементы матрицы столкновений $U_{cn}(E)$ определяются здесь как отношения функций энергии (35), и, в частности, диагональный элемент есть

$$U_{nn}(E) = e^{-2i\varphi_n} [1 - \mathcal{R}_{nn}(E) L_n(E)]^{-1} [1 - \mathcal{R}_{nn}(E) L_n^*(E)], \quad (50)$$

где

$$\mathcal{R}_{nn} = \sum_{q=1}^N \bar{\gamma}_{qn}^2 / (\bar{E}_q - E).$$

Логарифмические производные нейтронных каналов $L_n = L_l$ есть функции переменной $\rho = ka = \alpha E^{1/2}$, которые можно представить в виде отношений известных полиномов степени l по k , или $\sqrt{E}$ (приложение 1):

$$\bar{L}_l(\sqrt{E}) = i\alpha\sqrt{E} \bar{\Phi}_l(\sqrt{E}) / \Phi_l(\sqrt{E}), \quad \bar{L}_l^*(\sqrt{E}) = \bar{L}_l(-\sqrt{E}). \quad (51)$$

Аналогично и фазовый множитель в (50) можно записать как

$$e^{-2i\varphi_n} = e^{-2i\rho} \Phi_l(-\sqrt{E}) / \Phi_l(\sqrt{E}). \quad (52)$$

Подставим эти выражения в (50) и умножим числитель и знаменатель на

$\prod_{q=1}^N (E - \bar{E}_q)$. Тогда U_{nn} приобретает вид отношения полиномов степени $2N + l$ по $\sqrt{E}$:

$$U_{nn} = e^{-2i\rho} Q^{(2N+l)}(-\sqrt{E})/Q^{(2N+l)}(\sqrt{E}), \quad (53)$$

где

$$Q^{(2N+l)}(\sqrt{E}) = \alpha^{-l} \left[\Phi_l(\sqrt{E}) \prod_{k=1}^N (E - \bar{E}_k) + i\alpha\sqrt{E} \bar{\Phi}_l(\sqrt{E}) \sum_{k=1}^N \bar{\gamma}_{kn}^2 \prod_{k' \neq k}^N (E - \bar{E}_{k'}) \right].$$

Определяя затем $2N+l$ корней этого полинома $\tilde{E}_k^{1/2}$ и предполагая их невырожденными, представим отношение в (53) в виде разложения на простые дроби:

$$U_{nn} = e^{-2i(\rho - \pi l/2)} \left(1 + i \sum_{k=1}^{2N+l} \frac{r_{kn}}{\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}} \right), \quad (54)$$

где

$$r_{kn} = i \prod_{k'=1}^{2N+l} (\tilde{E}_k^{1/2} + \tilde{E}_{k'}^{1/2}) / \prod_{k' \neq k}^{2N+l} (\tilde{E}_k^{1/2} - \tilde{E}_{k'}^{1/2})$$

— комплексные константы.

Выделим в сумме по k (54) N_1 членов ($1 \leq k \leq N_1$) с $\text{Re } \tilde{E}_k^{1/2} > 0$, ассоциируемых с наблюдаемыми в рассматриваемом интервале энергии резонансами, и преобразуем U_{nn} к виду

$$U_{nn}(E) e^{-2i(\rho - \pi l/2)} \left(W_{nn}^0(E) + 2i\sqrt{E} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{r_{kn}}{\tilde{E}_k - E} \right), \quad (55)$$

где

$$W_{nn}^0(E) = 1 + i \sum_{k=N_1+1}^{2N+l} \frac{r_{kn}}{\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}} + i \sum_{k=1}^{N_1} \frac{r_{kn}}{\tilde{E}_k^{1/2} + E^{1/2}} \quad (56)$$

не имеет полюсов в нашем интервале, формируя плавно зависящий от энергии фон. В результате мы пришли к часто используемому в теории ядерных реакций представлению U как суммы резонансной и нерезонансной составляющих. По своей форме оно подобно соответствующему результату формализма Капура — Пайерлса (17) с не зависящими от энергии параметрами $\tilde{E}_k = \mu_k - i\nu_k$, $\tilde{\gamma}_{kn}^2$, но с обязательным даже в одноуровневом случае выделением фоновой части (56), скоррелированной с параметрами резонансов N_1 . Используя $U_{nn}(E)$ (55) в определении полного сечения (1), получим такое же, как и в АА-методе, многоуровневое выражение (18) с потенциальным сечением

$$\sigma_p(E) = 2\pi k^{-2} \sum_J g(J) [1 - \operatorname{Re} e^{-2i(\rho - \pi l/2)} W_{nn}^{0J}(E)]. \quad (57)$$

Несложно также построить и полюсную форму для суммарного по всем каналам реакций сечения поглощения $\sigma_a(E)$ (1). Для этого снова обратимся к разложению $U_{nn}(E)$ (55) и представим

$$1 - |U_{nn}|^2 = 2\operatorname{Re}(-i) \sum_{k=1}^{2N+l} \frac{r_{ka}}{\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}}, \quad (58)$$

где $r_{ka} = r_{kn} \left(1 - i \sum_{k'=1}^{2N+l} \frac{r_{k'n}^*}{\tilde{E}_{k'}^{1/2*} - \tilde{E}_k^{1/2}} \right)$ — также не зависящие от энергии

величины. Выделяем затем в сумме по k (58) N_{1J} резонансных членов (или N_{1J} для каждой из независимых систем J) и формируем из них сумму с полюсами в физической области E подобно (55), а остальные члены относим к нерезонансному фону. В конечном счете снова придем к результату АА-метода (18), но с выделенным и формально определенным фоновым сечением поглощения:

$$\sigma_a(E) = \sigma_a^0(E) + 4\pi k^{-2} \sqrt{E} \sum_J g(J) \sum_{k=1}^{N_{1J}} \operatorname{Re}(-i) \frac{r_{ka}}{\tilde{E}_k - E}, \quad (59)$$

где

$$\sigma_a^0 = 2\pi k^{-2} \sum_J g(J) \operatorname{Re} \left[(-i) \left(\sum_{k=N_{1J}+1}^{2N_J+l} \frac{r_{ka}}{\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}} + \sum_{k=1}^{N_{1J}} \frac{r_{ka}}{\tilde{E}_k^{1/2} + E^{1/2}} \right) \right].$$

Подобное представление в виде суммы резонансных членов и фоновой части возможно, очевидно, и для сечений в отдельных каналах реакций $c \neq n$. Это следует, например, из полюсного разложения (34):

$$\begin{aligned} G_{cn} P_n^{1/2} &= \mathcal{R}_{cn} (1 - \mathcal{R}_{nn} \bar{L}_n)^{-1} P_n^{1/2} = \\ &= (\alpha \sqrt{E})^{l+1/2} (\Phi_l / \Phi_l^*)^{1/2} \mathcal{R}_{cn} [\Phi_l(\sqrt{E}) - i\alpha \sqrt{E} \bar{\Phi}_l(\sqrt{E}) \mathcal{R}_{nn}]^{-1}, \end{aligned} \quad (60)$$

где фактор проницаемости $P_n = P_l$ выбран в виде (приложение 1) $P_l(\sqrt{E}) = (\alpha \sqrt{E})^{2l+1} / \Phi_l(\sqrt{E}) \Phi_l^*(\sqrt{E})$ и $L_n = L_l(\sqrt{E})$ (51). Схема разложения аналогична уже использованным ранее процедурам с преобразованием к отношению полиномов по $\sqrt{E}$ и последующим разложением на простые дроби:

$$\begin{aligned}
 G_{cn} P_n^{1/2} &= (\alpha \sqrt{E})^{1/2} (\Phi_l / \Phi_l^*)^{1/2} \left[E^{1/2} \mathcal{R}_{cn} \prod_{q=1}^N (E - \bar{E}_q) / Q^{(2N+1)}(\sqrt{E}) \right] = \\
 &= (\alpha \sqrt{E})^{1/2} (\Phi_l / \Phi_l^*)^{1/2} \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{\tilde{r}_{kc}}{\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}}, \\
 \tilde{r}_{kc} &= \tilde{E}_k^{1/2} \sum_{q=1}^N \tilde{\gamma}_{qc} \tilde{\gamma}_{qn} \prod_{q' \neq q}^N (\tilde{E}_k - \bar{E}_{q'}) / \prod_{k' \neq k}^{2N+1} (\tilde{E}_k^{1/2} - \tilde{E}_{k'}^{1/2}). \quad (61)
 \end{aligned}$$

Сечение реакции (n, c) для отдельной системы J определяется квадратом модуля (61) и может быть приведено к виду

$$\begin{aligned}
 \sigma_c^J(E) &= 4\pi k^{-2} g(J) P_c |G_{cn} P_n^{1/2}|^2 = \\
 &= 2\pi k^{-2} g(J) \operatorname{Re}(-i) \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{r_{kc}}{\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}}, \quad (62)
 \end{aligned}$$

где

$$r_{kc} = 4i \tilde{r}_{kc} \alpha \tilde{E}_k^{1/2} \sum_{k'=1}^{2N+1} \frac{\tilde{r}_{k'c}^*}{\tilde{E}_{k'}^{1/2} - \tilde{E}^{1/2}} P_c.$$

Дальнейшие преобразования с выделением N_{1J} резонансных членов в сумме (62) и формированием фонового сечения подобны уже рассмотренным примерам (57), (61) и приводят в конечном счете к выражению для сечения $\sigma_c(E)$, совпадающему по форме с (59) (с заменой индекса a на c).

Таким образом, строгое полюсное разложение элементов U -матрицы по переменной k (или $\sqrt{E}$) приводит к формулам АА-метода, дающим наиболее простое представление энергетической зависимости резонансных сечений как сумм одноуровневых членов и нерезонансного фона. Однако корректный выбор параметров АА-метода и фоновой части сечений, приводящий к эквивалентным SAMMY результатам, устанавливается здесь соответствующим преобразованием параметров R -матрицы, или комбинированного метода. К сожалению, обратное преобразование — от полюсного представления к параметрам R -матрицы — в общем случае весьма проблематично, так как параметры полюсов вне интервала резонансных энергий определяются в основном фоновой частью сечений, мало информативной с точки зрения однозначного определения этих параметров. Поэтому здесь могут оказаться полезными результаты модельных оценок вклада нерезонансных процессов при относительно низких энергиях [2,3].

Более общий вариант преобразования матрицы столкновений (11) к полюсной по $\sqrt{E}$ форме, учитывающий несколько нейтронных каналов, реализуется многоцелевым кодом WHOPPER [17]. Здесь так же, как и в методе POLLA [15], строится полюсное разложение непосредственно для элементов матрицы A^{-1} (26), где

$$A_{\lambda\mu} = (E_\lambda - E) \delta_{\lambda\mu} - i\Gamma_{\lambda\mu}^a/2 - \sum_n \gamma_{\lambda n} L_n(\sqrt{E}) \gamma_{\mu n}, \quad (63)$$

$\Gamma_{\lambda\mu}^a = \Gamma_{\lambda\gamma} \delta_{\lambda\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^f$ и $L_n = L_{l(n)}(\sqrt{E})$ (51). Решения детерминантного уравнения $|A(\sqrt{E})|_N = 0$ определяют полюсы $\tilde{E}_k^{1/2}$, число которых равно $2N + \Sigma l$, где N — ранг матрицы A (приложение 3). Соответствующее представление A^{-1} аналогично (26):

$$(A^{-1})_{\lambda\mu} = \frac{M_{\lambda\mu}(\sqrt{E})}{D(\sqrt{E})} = \sum_{k=1}^{2N+\Sigma l} \frac{m_{\lambda\mu}(\tilde{E}_k^{1/2})}{\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}}, \quad (64)$$

где

$$m_{\lambda\mu}(\tilde{E}_k^{1/2}) = (-1)^{N+1} M_{\lambda\mu}(\tilde{E}_k^{1/2}) \prod_l \Phi_l(\tilde{E}_k^{1/2}) \alpha^l / \prod_{k' \neq k} (\tilde{E}_k^{1/2} - \tilde{E}_{k'}^{1/2}).$$

Подставляя затем (64) в (11), получим строгое полюсное разложение для элементов U -матрицы:

$$U_{cn} = e^{-i\varphi_c} \left[\delta_{cn} + iP_c^{1/2} P_n^{1/2} \sum_{k=1}^{2N+\Sigma l} \beta_k^{cn} / (\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}) \right] e^{-i\varphi_n}, \quad (65)$$

где

$$\beta_k^{cn} = 2 \sum_{\lambda\mu} \gamma_{\lambda c} \gamma_{\mu n} m_{\lambda\mu}(\tilde{E}_k^{1/2})$$

— комплексные константы. Дальнейшая процедура выделения N_1 резонансных членов и фоновой составляющей подобна рассмотренной выше (57), (61) с добавлением в общем случае сечений упругого рассеяния между разными нейтронными каналами.

6. РЕЗОНАНСНЫЕ СЕЧЕНИЯ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Рассмотренные математически тождественные методы параметризации резонансных сечений — R -матричный, комбинированный и со строгим полюсным разложением U -матрицы (метод Хванга) — практически реали-

зованы в области энергий ниже порога неупругого рассеяния нейтронов. Этого вполне достаточно для основных делящихся ядер. Но для многих неделящихся изотопов резонансная структура сечений наблюдается и выше порога — как в полных, так и в сечениях возбуждения первого уровня [5,7,11].

Для неделящихся ядер R -матричный подход в RM -приближении эквивалентен комбинированному методу с редуцированной матрицей $\mathbf{R}(E)$ (13). Формально учет неупругого рассеяния сводится к соответствующему увеличению числа нейтронных каналов n (ранга матрицы $\mathbf{G}_{nn}$ (34)) и выборе логарифмических производных неупругих каналов (51) при энергиях $E - E_{th}$, где E_{th} — энергия порога.

В простейшем примере с одним каналом упругого рассеяния (n) и одним каналом неупругого (n') элементы $\mathbf{G}_{nn}$ матрицы (34) преобразуются аналогично (44) к характерной для комбинированного метода функциональной форме как отношение сумм:

$$G_{nn}(E) = \sum_{\lambda=1}^N \frac{\gamma_{\lambda n}^2 - \bar{L}_n \alpha_{\lambda}}{E'_{\lambda} - E} / \left[1 - \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_{\lambda}}{E'_{\lambda} - E} \right],$$

$$G_{n'n}(E) = \sum_{\lambda=1}^N \frac{\gamma_{\lambda n'} \gamma_{\lambda n}}{E'_{\lambda} - E} / \left[1 - \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_{\lambda}}{E'_{\lambda} - E} \right], \quad (66)$$

где

$$\alpha_{\lambda} = \sum_{\mu \neq \lambda}^N (\gamma_{\lambda n} \gamma_{\mu n'} - \gamma_{\mu n} \gamma_{\lambda n'})^2 / (E'_{\mu} - E'_{\lambda}),$$

$$a_{\lambda} = \gamma_{\lambda n}^2 \bar{L}_n + \gamma_{\lambda n'}^2 \bar{L}_{n'} - \bar{L}_n \bar{L}_{n'} \alpha_{\lambda}.$$

Соответственно и формулы для сечений, определяемых этими элементами, подобны приведенным в разд.3. Но здесь учитываются особенности энергетической зависимости, определяемые функцией $L_n(E - E_{th})$, вблизи порога, причем не только при $E > E_{th}$, но и при отрицательных $E - E_{th}$ (эффект закрытого канала [1,2] в полном сечении и сечении радиационного захвата).

Комбинированный метод, эквивалентный в RM -приближении соответствующему варианту SAMMY [7], в полной мере отражает эти особенности и без особых сложностей может быть распространен на случай нескольких упругих и неупругих нейтронных каналов. Но преобразование (66) к полюсной форме в общем случае — более сложная задача, чем для только упругого рассеяния (разд.5). В принципе, элементы $\mathbf{U}$ -матрицы являются здесь функциями двух переменных — начальной и конечной энергий нейтрона.

Однако, если ограничиться областью энергий ниже, например, второго уровня ядра-мишени (учитывая лишь первый эффективный для системы с определенным полным моментом и четностью уровень), то можно построить реализуемый алгоритм преобразования результатов комбинированного метода (66) к эквивалентным полюсным формам лишь по одной переменной $\sqrt{E}$.

Действительно, задача полюсного разложения сводится здесь в основном к представлению G_{nn} и $G_{n'n}$ в виде отношения полиномов. В нашем случае, умножая числитель и знаменатель (66) на фактор

$$\Phi_l(\rho) \Phi_{l'}(\rho') \prod_{\lambda=1}^N (E'_\lambda - E),$$

представим знаменатель отношения в виде

$$F_1(\sqrt{E}) - \sqrt{E - E_{th}} F_2(\sqrt{E}),$$

где $F_1(\sqrt{E})$ и $F_2(\sqrt{E})$ — полиномы по $\sqrt{E}$ (мы не будем здесь выписывать их явные выражения). Умножая затем обе части отношения на

$$F_1(\sqrt{E}) + \sqrt{E - E_{th}} F_2(\sqrt{E}),$$

в результате придем в знаменателе к полиному по $\sqrt{E}$ вида

$$F_1^2(\sqrt{E}) - (E - E_{th}) F_2^2(\sqrt{E})$$

со степенью $2(2N + l + l')$. Корни этого полинома $\tilde{E}_k^{1/2}$ определяют полный набор полюсов в соответствующем полюсном разложении (66):

$$G_{n'n} = \sum_{k=1}^{2(2N+l+l')} \frac{d_k^{n'n} \sqrt{E} + f_k^{n'n} \sqrt{E - E_{th}}}{\tilde{E}_k^{1/2} - E^{1/2}}, \quad (67)$$

где $d_k^{n'n}$, $f_k^{n'n}$, d_k^{nn} , f_k^{nn} — комплексные константы, определяемые параметрами $\mathbf{R}$ -матрицы по схемам, подобным уже рассмотренным выше (разд.5).

Однако в приложениях, где используется параметрическое представление резонансных сечений для широкого энергетического интервала, можно по-видимому, ограничиться приближенным вариантом полюсного разложения, где в матрице уровней (9) не учитывается энергетическая зависимость логарифмических производных неупругих каналов [4]:

$$\gamma_{\lambda n} \bar{L}_{n'}(E) \gamma_{\mu n'} \approx \gamma_{\lambda n} \bar{L}_{n'}^{1/2}(E_\lambda) \bar{L}_{n'}^{1/2}(E_\mu) \gamma_{\mu n'}.$$

Тогда процедура полюсного разложения элементов матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ математически не отличается от рассмотренной ранее схемы для делящихся ядер

(разд.5) и может быть реализована в случае произвольного числа нейтронных каналов, например, кодом WHOPPER (63)—(65) [17]. Матрица столкновений при этом преобразуется к виду (65), где собственно особенности энергетической зависимости выше порога неупругого рассеяния учитываются соответствующими факторами проницаемости $P_n(E - E_{th})$ в числителе U_{nn} (65). Хотя такое приближение формально не эквивалентно уже R -матричной параметризации (66), практически оно не приводит к заметной разнице в резонансных сечениях и к парадоксам «отрицательных значений», как в АА-методе. В специальных случаях, когда анализируется, например, форма резонанса, расположенного непосредственно вблизи энергии порога, можно воспользоваться приближением слабой энергетической зависимости в ограниченном интервале логарифмических производных для каналов упругого рассеяния и точно учесть эту зависимость в неупругих каналах. Тогда матрица уровней A (9) определяется для энергии $E - E_{th}$, и полюсные разложения элементов A^{-1} строятся по переменной $\sqrt{E - E_{th}}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы видим, прогресс в спектрометрии резонансных нейтронов и практическая реализация R -матричной схемы SAMMY в многоуровневом анализе и оценке резонансных сечений привели к существенному расширению объема данных о параметрах резонансов [5—7]. Используемое в этой схеме RM -приближение, а также и пренебрежение энергетической зависимостью фактора сдвига уровня, представляются вполне приемлемыми для большинства ядер. Конечно, остаются сомнения относительно однозначности определения наборов параметров R (или K)-матрицы, и здесь с появлением новых данных возможны изменения, например, включение в анализ 3-го канала деления для ^{235}U . Статистический анализ распределения R -матричных параметров не обнаруживает заметных отличий от известных закономерностей, но в новых данных более очевидно проявляются промежуточные структуры (см. рисунок). Их интерференция с компаунд-резонансами весьма интересна с точки зрения анализа «размазывания» промежуточных состояний («spread») и проверки соответствующих правил сумм [1—3,9].

Преобразование R -матричных параметров к параметрам других формализмов, или, вернее, практических методов многоуровневого представления сечений (комбинированного и метода Хванга), с использованием современных программ обращения комплексных матриц высокого ранга оказалось, в конечном счете, задачей, вполне реализуемой на РС. Здесь мы хотели бы привлечь внимание к комбинированному методу как наиболее близкому по

своей структуре к R -матричной параметризации. Независимое определение параметров комбинированного метода для делящихся ядер может дать ответ на вопрос об однозначности выбора соответствующих параметров R -матрицы, а для неделящихся ядер оценить погрешности от пренебрежения фактором сдвига уровней в SAMMY, особенно в области энергий, где эффективны $l \geq 1$, и вблизи порога неупругого рассеяния. Заметим также, что функциональная форма энергетической зависимости $U(E)$ (35) более предпочтительна, чем R -матричная (2), для статистической теории средних по резонансам сечений [1—4].

Наконец, переход к строгому полюсному разложению элементов U -матрицы по переменной импульса ($\sqrt{E}$) служит как методическим обоснованием АА-метода, так и практическим рецептом для построения соответствующих параметров уровней и определения фоновой части сечений. Представление здесь сечений в виде сумм одноуровневых членов дает возможность элементарного учета температурного уширения резонансов путем замены их брейт-вигнеровской формы энергетической зависимости известными доплеровскими функциями Ψ и X (профили Войта) [5,17]. С его использованием многие стандартные методы одноуровневого приближения — усреднение сечений по резонансам, анализ функций пропускания нейтронов для широких по энергии пучков, расчеты факторов самоэкранирования резонансов в задачах переноса нейтронов в средах — могут быть перенесены без существенных изменений и на многоуровневое представление [3].

Наш обзор относится в основном к проблемам обоснованного выбора методов для оценки и представления накопленных к настоящему времени больших массивов данных о резонансной структуре нейтронных сечений с помощью наборов не зависящих от энергии параметров. Их использование в современных библиотеках ядерных данных есть, несомненно, качественный прогресс в информационном обеспечении прикладных задач. Вместе с тем многократное увеличение объема данных о нейтронных резонансах дает также богатый материал для совершенствования как методов теории резонансных реакций, так и физических представлений о механизме ядерных реакций и структуре состояний составного ядра.

Можно привести ряд примеров эффективности многоуровневого представления сечений: от R -матричного анализа легких ядер [11] до параметризации резонансов при высоких энергиях [19]. Интересные для физики деления результаты получены при многоуровневой интерпретации данных по угловым распределениям осколков деления для выстроенных ядер [20]. Несомненно, что резкое увеличение объема данных по нейтронным резонансам рано или поздно должно привлечь к себе внимание теоретиков, и, возможно, оно станет стимулом для утверждения новых физических идей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ
И ФАЗЫ ДЛЯ НЕЙТРОННЫХ КАНАЛОВ

Приведем здесь основные соотношения для логарифмических производных внешних решений L_c и фаз рассеяния φ_c в матрице столкновений $U(E)$ (4). Согласно общему определению [3—5]

$$L_c = \left[x_c O_l^{-1}(x_c) \frac{d}{dx_c} O_l(x_c) \right]_{x_c = \rho_c} = S_c(\rho_c) + iP_c(\rho_c), \quad (1.1)$$

$$e^{-2i\varphi_c} = I_l(\rho_c) / O_l(\rho_c), \quad \rho_c = k_c a_c, \quad (1.2)$$

где $O_l(x_c)$ и $I_l(x_c) = O_l^*(x_c)$ — функции параметра $x_c = k_c r_c$, являющиеся радиальными решениями задачи о рассеянии во внешней области $r_c \geq a_c$, где нет ядерного взаимодействия. Вронскиан этой пары решений есть

$$I_l(x_c) O_l'(x_c) - O_l(x_c) I_l'(x_c) = 2i, \quad (1.3)$$

и, соответственно, для реальной и мнимой частей L_c (1.1) имеем

$$S_c(\rho_c) = \frac{1}{2} \rho_c \left[\frac{d}{dx_c} |O_l(x_c)|^2 \right]_{x_c = \rho_c} / |O_l(\rho_c)|^2, \\ P_c(\rho_c) = \rho_c / |O_l(\rho_c)|^2. \quad (1.4)$$

Значения $S_c(\rho_c)$ определяют факторы сдвига уровня (9), а $P_c(\rho_c)$ — факторы проницаемости канала c . В определение $U(E)$ (4) входят логарифмические производные

$$\bar{L}_c = L_c - b_c, \quad (1.5)$$

отличающиеся от L_c на в общем произвольную вещественную константу граничного условия b_c [3].

Для нейтронных каналов с положительной энергией решения $O_l(x)$ ($x = x_n$) представляют собой линейную комбинацию сферических функций Бесселя [3] и могут быть записаны в форме:

$$O_l(x) = -x[n_l(x) - ij_l(x)] = e^{i(x - \pi l/2)} x^{-l} \Phi_l(x), \quad (1.6)$$

где

$$\Phi_0 = 1, \quad \Phi_1(x) = x + i, \quad \Phi_2(x) = x^2 + 3ix - 3, \\ \Phi_l(x) = x^2 \Phi_{l-2}(x) + i(2l-1) \Phi_{l-1}(x), \quad (1.7)$$

что следует из рекуррентных соотношений

$$O_l(x) = (l/x) O_{l-1}(x) - O'_{l-1}(x), \quad O_0(x) = e^{ix}, \\ lO_l(x) + xO'_l(x) = xO_{l-1}(x) \quad (l \geq 1). \quad (1.8)$$

Последнее соотношение определяет также и логарифмические производные нейтронных каналов $L_l(\rho)$ (1.1) при $x = \rho = k_n a_n = \alpha \sqrt{E} = 0,22 \cdot 10^{-3} a_n \sqrt{E}$ [эВ], (a_n — радиус ядра в единицах 10^{-13} см):

$$l + L_l(\rho) = i\rho \frac{\bar{\Phi}_l(\rho)}{\Phi_l(\rho)} = \frac{i\rho \bar{\Phi}_l(\rho) \Phi_l^*(\rho)}{\Phi_l(\rho) \Phi_l^*(\rho)} = i\rho \left[1 + i \sum_{k=1}^l \frac{1}{\rho_k^{(l)} - \rho} \right], \quad (1.9)$$

где $\bar{\Phi}_l(\rho) = \rho \Phi_{l-1}(\rho)$, $\rho_k^{(l)}$ — корни полинома $\Phi_l(\rho)$ (1.7). Различные формы представления $L_l(\rho)$ иллюстрируют здесь структуру зависимости логарифмической производной от ρ как отношения полиномов или разложения по простым полюсам. Очевидно и удобство выбора для нейтронных каналов константы граничных условий $b_l = -l$, так что

$$\bar{L}_l(\rho) = L_l(\rho) + l = \bar{S}_l(\rho) + iP_l(\rho), \quad (1.10)$$

и для $l = 0, 1, 2$ имеем

$$\bar{L}_0(\rho) = i\rho, \quad \bar{L}_1(\rho) = i\rho \frac{\rho}{\rho + i} = \frac{\rho^2 + i\rho^3}{1 + \rho^2} = i\rho \left[1 + i \frac{1}{-i - \rho} \right], \\ \bar{L}_2(\rho) = i\rho \frac{\rho(\rho + i)}{\rho^2 + 3i\rho - 3} = \frac{\rho^2(3 + 2\rho^2 + i\rho^3)}{9 + 3\rho^2 + \rho^4} = i\rho \left[1 + i \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\rho_k^{(2)} - \rho} \right], \\ \left(\rho_{1,2}^{(2)} = -\frac{3}{2}i \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (1.11)$$

Реальная и мнимая части $\bar{L}_l(\rho)$ (1.10) выражаются через функции $\Phi_l(\rho)$ как (1.4):

$$\bar{S}_l(\rho) = S_l(\rho) + l = \frac{1}{2} \rho \frac{[\Phi_l(\rho) \Phi_l^*(\rho)]}{\Phi_l(\rho) \Phi_l^*(\rho)}; \quad P_l(\rho) = \frac{\rho^{2l+1}}{\Phi_l(\rho) \Phi_l^*(\rho)}. \quad (1.12)$$

Фазы рассеяния нейтронов $\varphi_l(\rho)$ (1.2) можно также записать в виде

$$e^{-2i\varphi_l} = (-1)^l e^{-2ip} \Phi_l^*(\rho) / \Phi_l(\rho) \quad (1.13)$$

или

$$\operatorname{tg}(\varphi_l - \rho - \pi l / 2) = \operatorname{Im} \Phi_l(\rho) / \operatorname{Re} \Phi_l(\rho),$$

что приводит к известным соотношениям для фаз [3]:

$$\varphi_0 = \rho, \quad \varphi_1 = \rho - \operatorname{arctg} \rho, \quad \varphi_2 = \rho - \operatorname{arctg} \frac{3\rho}{3 - \rho^2}. \quad (1.14)$$

Логарифмические производные нейтронных каналов — аналитические функции $\rho(\sqrt{E})$, что и используется нами при полюсном разложении $U(E)$ (5). Как аналитическое продолжение в область отрицательных энергий, можно рассматривать и логарифмические производные закрытых нейтронных каналов

$$L_l^-(|\rho|) = L_l(ip) = S_l^-(|\rho|), \quad P_l^-(|\rho|) = 0, \quad (1.15)$$

необходимые, в частности, для анализа энергетической зависимости вблизи порога неупругого рассеяния E_{th} , где $\rho = \alpha\sqrt{E - E_{\text{th}}}$ [1,2].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

СООТНОШЕНИЯ УНИТАРНОСТИ

По своей форме основное выражение для матрицы столкновений в R -матричной теории (4) унитарно и симметрично при произвольных значениях вещественных параметров. Если же использовать альтернативное представление через матрицу уровней (10), то условию унитарности $UU^+ = 1$ отвечает соотношение для матриц G (7):

$$G - G^* = 2iGPG^* \quad (2.1)$$

или, используя определение (8), матричное тождество

$$A^* - A = 2i\gamma P \gamma^T, \quad A_{\lambda\mu}^* - A_{\lambda\mu} = 2i \sum_c \gamma_{\lambda c} P_c \gamma_{\mu c}, \quad (2.2)$$

соответствующее определению матрицы уровней A (9).

Переход к формализму Капура — Пайерлса заключается в диагонализации матрицы уровней A методом ортогонального преобразования (16):

$$\tilde{E} - E = VAV^T, \quad (VV^T = 1).$$

Запишем тождество (2.2) в виде

$$\mathbf{V}\mathbf{A}^*\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^+ = 2i \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}\boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{V}^+, \quad [\mathbf{V}^+ = (\mathbf{V}^T)^*] \quad (2.3)$$

или

$$(\mathbf{V}\mathbf{V}^+) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{V}\mathbf{V}^+) = 2i\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\mathbf{P}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^+, \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}.$$

Тогда

$$(\mathbf{V}\mathbf{V}^+)_{kk'} = 2i \sum_c (\tilde{\gamma}_{kc} P_c \tilde{\gamma}_{k'c}^*) / (\tilde{E}_{k'}^* - \tilde{E}_k). \quad (2.4)$$

Умножив затем обе части этого выражения на $\tilde{\gamma}_{k'n}^*$ и просуммировав по k' , получим соотношения между параметрами формализма

$$\tilde{\gamma}_{kn} = 2i \sum_c \sum_{k'} (\tilde{\gamma}_{k'n}^* \tilde{\gamma}_{kc} \tilde{\gamma}_{k'c}^* P_c) / (\tilde{E}_{k'}^* - \tilde{E}_k), \quad (2.5)$$

отвечающими свойству унитарности матрицы $\mathbf{U}$ (17). Вводя здесь комбинации параметров, используемые в формулах для сечений (3)

$$g_k^c + ih_k^c = 2i \sum_{k'} (\tilde{\gamma}_{kn} \tilde{\gamma}_{kc} \tilde{\gamma}_{k'n}^* \tilde{\gamma}_{k'c}^* P_c) / (\tilde{E}_{k'}^* - \tilde{E}_k), \quad (2.6)$$

можно записать соотношение унитарности (2.5) также в виде

$$\tilde{\gamma}_{kn}^2 = \sum_c (g_k^c + ih_k^c). \quad (2.7)$$

В общем случае здесь возможна зависимость от энергии через факторы пронизываемости $P_c(E)$. Лишь в приближении Адлеров, где в формулах (2.4)—(2.6) предполагается $P_c(E) \approx \text{const}$, это соотношения между комплексными константами. Исключение каналов радиационного захвата резко уменьшает число параметров в (2.5), и, например, в частном случае одинаковых радиационных ширин уровней $\Gamma_{\lambda\gamma} = \Gamma_\gamma$ имеем

$$\tilde{\gamma}_{kn} = 2i \sum_{c \neq c(\gamma)} \sum_{k'} (\tilde{\gamma}_{k'n}^* \tilde{\gamma}_{kc} \tilde{\gamma}_{k'c}^* P_c) / (\tilde{E}_{k'}^* - \tilde{E}_k - i\Gamma_\gamma). \quad (2.8)$$

Комбинированный метод (разд.3) использует блочное представление матрицы $\mathbf{G}$, и в этом случае соотношение унитарности (2.1) можно записать, например, как

$$\mathbf{G}_{nn} - \mathbf{G}_{nn}^* = 2i[\mathbf{G}_{nn} \mathbf{P}_n \mathbf{G}_{nn}^* + \mathbf{G}_{na} \mathbf{P}_a \mathbf{G}_{an}^*]. \quad (2.9)$$

Подставляя $\mathbf{G}_{nn}$ и $\mathbf{G}_{an}$ (34), получим соответствующее соотношение между редуцированными $\mathbf{R}$ -матрицами:

$$\mathcal{R}_{nn} - \mathcal{R}_{nn}^* = 2i \mathcal{R}_{na} \mathbf{P}_a \mathcal{R}_{an}^*, \quad (\text{Im } \mathcal{R}_{nn} = \sum_{c \neq n} P_c |\mathcal{R}_{cn}|^2). \quad (2.10)$$

Если для элементов этих матриц используется R -матричная форма (31), то будем иметь тождество, подобное (2.2) для матрицы уровней $\mathbf{B}$ (32):

$$B_{\lambda\mu}^* - B_{\lambda\mu} = 2i \sum_{c \neq n} \gamma_{\lambda c} P_c \gamma_{\mu c}, \quad (2.11)$$

а для $\mathcal{R}_{cn}$ с диагональной матрицей уровней (33) получим по схеме, подобной рассмотренной для формализма Капура — Пайерлса, соотношение между параметрами комбинированного метода:

$$\bar{\gamma}_{qn} = 2i \sum_{q'} \bar{\gamma}_{q'n}^* \sum_{c \neq n} (\bar{\gamma}_{qc} P_c \bar{\gamma}_{q'c}^*) / (\bar{E}_{q'}^* - \bar{E}_q). \quad (2.12)$$

Если умножить обе части (2.12) на γ_{qn} и ввести параметры $\bar{g}_q^c + i\bar{h}_q^c$ (37), то придем к соотношению:

$$\bar{\gamma}_{qn}^2 = \sum_{c \neq n} (\bar{g}_q^c + i\bar{h}_q^c). \quad (2.13)$$

Хотя внешне эти выводы подобны полученным выше для формализма Капура — Пайерлса (2.6)—(2.8), здесь нет слагаемых, содержащих нейтронные каналы $P_n(E)$. Таким образом, в рамках общего предположения о слабой энергетической зависимости проницаемостей для каналов реакций $P_c(c \neq n)$, соотношения унитарности комбинированного метода (2.12), (2.13) есть правила сумм для комплексных, не зависящих от энергии параметров метода.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ $(1 - \mathbf{R}\bar{\mathbf{L}})$

Для двух каналов (1 и 2) этот определитель можно довольно просто привести к виду

$$\begin{aligned} |1 - \mathbf{R}\bar{\mathbf{L}}|_2 &= \\ &= 1 - R_{11}\bar{L}_1 - R_{22}\bar{L}_2 + (R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})\bar{L}_1\bar{L}_2 = 1 - \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_\lambda^{(2)}}{E_\lambda - E}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$a_{\lambda}^{(2)} = \gamma_{\lambda 1}^2 \bar{L}_1 + \gamma_{\lambda 2}^2 \bar{L}_2 - \bar{L}_1 \bar{L}_2 \sum_{\mu \neq \lambda}^N \frac{(\gamma_{\lambda 1} \gamma_{\mu 2} - \gamma_{\lambda 2} \gamma_{\mu 1})^2}{E_{\mu} - E_{\lambda}}, \quad (3.2)$$

и элементы $\mathbf{R}$ -матрицы (5) (или $\mathcal{R}$ -матрицы (33)) есть суммы по конечному числу уровней N .

В случае трех каналов представим определитель как сумму:

$$\begin{aligned} |1 - \mathbf{R}\bar{\mathbf{L}}|_3 = \\ = 1 - \sum_{i=1}^3 R_{ii} \bar{L}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{k>i}^3 \bar{L}_i \bar{L}_k \begin{vmatrix} R_{ii} & R_{ik} \\ R_{ki} & R_{kk} \end{vmatrix} - \bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{L}_3 \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где последний детерминант

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}|_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = \\ = \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu \neq \lambda}^N \sum_{\nu \neq \mu}^N \frac{\gamma_{\lambda 1} \gamma_{\mu 2} \gamma_{\nu 3}}{(E_{\lambda} - E)(E_{\mu} - E)(E_{\nu} - E)} \begin{vmatrix} \gamma_{\lambda 1} \gamma_{\lambda 2} \gamma_{\lambda 3} \\ \gamma_{\mu 1} \gamma_{\mu 2} \gamma_{\mu 3} \\ \gamma_{\nu 1} \gamma_{\nu 2} \gamma_{\nu 3} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

с суммированием по индексам уровней $\lambda, \mu \neq \lambda, \nu \neq \mu$. Последующее разложение на простые дроби дает нам шесть произведений вида

$$\frac{1}{E_{\lambda} - E} \frac{1}{E_{\mu} - E_{\lambda}} \frac{1}{E_{\nu} - E_{\mu}},$$

отличающихся перестановками индексов λ, μ и ν . Но при этих перестановках меняется, соответственно, лишь знак определителя в правой части (3.4), что, в конечном счете, приводит к полюсному разложению:

$$|\mathbf{R}|_3 = \sum_{\lambda}^N \frac{1}{E_{\lambda} - E} \sum_{\mu \neq \lambda}^N \sum_{\nu \neq \mu}^N \frac{1}{(E_{\mu} - E_{\lambda})(E_{\nu} - E_{\mu})} \begin{vmatrix} \gamma_{\lambda 1} \gamma_{\lambda 2} \gamma_{\lambda 3} \\ \gamma_{\mu 1} \gamma_{\mu 2} \gamma_{\mu 3} \\ \gamma_{\nu 1} \gamma_{\nu 2} \gamma_{\nu 3} \end{vmatrix}^2. \quad (3.5)$$

В результате и для определителя 3-го порядка получаем представление, подобное (3.1):

$$|1 - \mathbf{R}\bar{\mathbf{L}}|_3 = 1 - \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_{\lambda}^{(3)}}{E_{\lambda} - E},$$

$$\begin{aligned}
 a_{\lambda}^{(3)} = & \sum_{i=1}^3 \gamma_{\lambda i}^2 \bar{L}_i - \sum_{\mu \neq \lambda}^N \frac{1}{E_{\mu} - E_{\lambda}} \sum_{i=1}^3 \sum_{k>i}^3 \bar{L}_i \bar{L}_k \left| \frac{\gamma_{\lambda i} \gamma_{\lambda k}}{\gamma_{\mu i} \gamma_{\mu k}} \right|^2 + \\
 & + \sum_{\mu \neq \lambda}^N \sum_{v \neq \mu}^N \frac{\bar{L}_1 \bar{L}_2 \bar{L}_3}{(E_{\mu} - E_{\lambda})(E_v - E_{\mu})} \left| \frac{\gamma_{\lambda 1} \gamma_{\lambda 2} \gamma_{\lambda 3}}{\gamma_{\mu 1} \gamma_{\mu 2} \gamma_{\mu 3}} \right|^2. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Соответствующее преобразование определителя n -го порядка использует известное разложение по различным главным минорам матрицы $Q = \mathbf{RL}$ [21]:

$$\begin{aligned}
 |1 - Q|_n = & 1 - \sum_{i=1}^n Q_{ii} + \\
 & + \sum_{i=1}^n \sum_{k>i}^n \left| \frac{Q_{ii} Q_{ik}}{Q_{ki} Q_{kk}} \right| + \dots + (-1)^n \left| \frac{Q_{11} Q_{12} \dots Q_{1n}}{Q_{n1} Q_{n2} \dots Q_{nn}} \right|, \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

а сами миноры представляют собой так называемые определители Грама [22], вычисляемые в нашем случае следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{Q_{11} Q_{12} \dots Q_{1m}}{Q_{m1} Q_{m2} \dots Q_{mm}} \right| = \\
 & = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda=1}^N \sum_{\mu \neq \lambda}^N \dots \sum_{\theta \neq \theta-1}^N \frac{1}{(E_{\lambda} - E)(E_{\mu} - E) \dots (E_{\theta} - E)} \left| \frac{\gamma_{\lambda 1} \gamma_{\lambda 2} \dots \gamma_{\lambda m}}{\gamma_{\mu 1} \gamma_{\mu 2} \dots \gamma_{\mu m}} \right|^2. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Разложение на простые дроби дает здесь $m!$ произведений вида

$$\frac{1}{E_{\lambda} - E} \frac{1}{E_{\mu} - E_{\lambda}} \frac{1}{E_v - E_{\mu}} \dots \frac{1}{E_{\theta} - E_{\theta-1}}$$

с различными перестановками индексов, при которых квадрат детерминанта $|\gamma|_m$ не изменяется. В итоге снова придем к представлению (3.1):

$$|1 - \mathbf{RL}|_n = 1 - \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_{\lambda}^{(n)}}{E_{\lambda} - E}, \quad (3.9)$$

где $M_{\lambda\mu}(E)$ — алгебраическое дополнение $\mathbf{A}$ -матрицы (26). Из равенства знаменателей очевидным образом следует соотношение (3.11).

Для метода Адлеров, где пренебрегается энергетической зависимостью логарифмических производных, мы определяем, таким образом, в явном виде характеристический полином матрицы уровней $\mathbf{A}$, N корней которого $\bar{E}_k$ соответствуют полюсам $\mathbf{U}(E)$ -матрицы (17). Таким же точно способом, но с исключенными нейтронными каналами, находятся и корни определителя матрицы $\mathbf{B}$ (33) в комбинированном методе. При переходе же к полюсному разложению матрицы столкновений по волновому числу k (или $\sqrt{E}$) (6) наше функциональное представление определителя $D(\sqrt{E})$ (3.11) явно учитывает зависимость логарифмических производных каналов от $\rho = ka$ (приложение 1). При энергиях ниже порога неупругого рассеяния нейтронов число корней уравнения $D(\sqrt{E}) = 0$ (3.11) равно

$$2N + l_{n1} + l_{n2} + \dots, \quad (3.13)$$

где n_i — различные возможные для фиксированного значения полного момента и четности каналы упругого рассеяния нейтронов, что следует непосредственно из определения коэффициентов $a_{\lambda}^{(n)}$ (3.10) и рационального представления $\bar{L}_i(\rho)$ (1.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейн А., Томас Р. — Теория ядерных реакций при низких и средних энергиях. М.: ИЛ, 1960.
2. Lynn J.E. — The Theory of Neutron Resonance Reactions. Oxford: Clarendon Press, 1968.
3. Лукьянов А.А. — Структура нейтронных сечений. М.: Атомиздат, 1978.
4. Froëner F.H. — Applied Neutron Resonance Theory, KFK-2669, 1978.
5. Rose P.F., Dunford C.L. — ENDF-102 Data Formats and Procedures for Evaluated Nuclear Data File ENDF-6, BNL-NCS-44945, 1990.
6. Derrien H., de Saussure G., Larson N.M., Leal L.C., Perez R.B. — In: Nucl. Data for Science and Technology. Proc. Int. Conf., Mito, Japan, 1988. JAERI, 1988, p.83, 573.
7. Larson N.M. — In: Nuclear Data Evaluation Methodology, Proc. Int. Symp. BNL, 1992, World Sc. Publ. Co., 1993, p.285.
8. Humblet J., Rosenfeld L. — Nucl. Phys., 1961, v.26, p.529.
9. Mahaux C., Weidenmuller H.A. — Shell-Model Approach to Nuclear Reactions. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1969.
10. Вайнберг А., Вигнер Е. — Физическая теория ядерных реакторов. М.: ИЛ, 1961.
11. Hale G.M. — In: Nuclear Data Evaluation Methodology. Proc. Int. Symp. BNL, 1992, World Sc. Publ. Co., 1993, p.306.
12. Гантмахер Ф.Р. — Теория матриц. М.: Наука, 1988.

13. **Adler F.T., Adler D.B.** — In: Neutron Cross-Sections Technology. Proc. Int. Conf., Washington, 1966. CONF-660303, Am. Phys. Soc., 1966, v.2, p.873; Phys. Rev. C, 1972, v.6, p.986.
14. **Lukyanov A.A.** — In: Nuclear Data Evaluation Methodology. Proc. Int. Symp. BNL, 1992, World Sc. Publ. Co., 1993, p.295.
15. **de Saussure G., Perez R.B.** — Report ORNL-2599, 1969.
16. **Сираков И.А.** — В печати.
17. **Hwang R.N.** — Nucl. Sci. Eng., 1987, v.96, p.192.
18. **Hwang R.N.** — In: Nuclear Data Evaluation Methodology. Proc. Int. Symp. BNL, 1992, World Sc. Publ. Co., 1993, p.316.
19. **Хеннер В.К., Белозерова Т.С.** — Сообщения ОИЯИ Р4-95-114, Р4-95-115, Дубна, 1995.
20. **Bogdzel A.A., Furman W.I. et al.** — Prep. JINR E3-96-220, Dubna, 1996;
Barabanov A.L., Furman W.I. — In: Nuclear Data for Science and Technology. Proc. Int. Conf., Gatlinburg, 1994, ANS Publ. USA, 1994, p.448.
21. **Смирнов В.И.** — Курс высшей математики. М.: Наука, 1974, т.3, ч.1, с.28.
22. **Беллман Р.** — Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.

ЭФФЕКТЫ НЕАДИАБАТИЧНОСТИ КОЛЛЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДРАХ

П.Н.Усманов, И.Н.Михайлов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре описываются и проверяются на практических задачах ряд методов и моделей ядер, предназначенных для описания свойств основного и возбужденных состояний положительной четности четно-четных деформированных ядер. Отдельные модели проиллюстрированы примерами их применений. Расчеты проводятся для изотопов $^{164,166,168,170}\text{Er}$, $^{156,158,160,162,164}\text{Dy}$ и ^{156}Gd . Вычисляются вероятности монопольных, квадрупольных электрических и магнитных дипольных переходов между состояниями вращательных полос. Обсуждаются эффекты неадиабатичности, проявляемые в энергиях и электромагнитных характеристиках ядер. В частности, изучается влияние $K^\pi = 1^+$ -состояний на свойства низколежащих уровней. Демонстрируются предсказательные возможности методов и моделей.

In this review paper, a series of methods and models of nuclei that are constructed for description of the properties of ground and excited positive-parity states of even-even deformed nuclei are described and tested in practical problems. Some models are illustrated by the examples of their applications. The calculations for the isotopes $^{164,166,168,170}\text{Er}$, $^{156,158,160,162,164}\text{Dy}$ and ^{156}Gd are performed. The probabilities of monopole, quadrupole electric and magnetic dipole transitions between the states of rotation bands are calculated. The nonadiabatic effects that are manifested in energies and electromagnetic characteristics of nuclei are discussed. In particular, the influence of the $K^\pi = 1^+$ states on the properties of low-lying levels is studied. The prediction power of the methods and models are demonstrated.

ВВЕДЕНИЕ

Адиабатическая модель ядра, предложенная Бором и Моттельсоном и представляющая феноменологическое направление, сыграла большую роль при изучении свойств деформированных ядер. Согласно этой модели низкие

возбужденные состояния четно-четных деформированных ядер связаны с вращением аксиально-симметричного ядра как целого. Более высоколежащие возбужденные состояния рассматриваются как колебания ядерной поверхности. Такая простая феноменологическая трактовка позволила описать большое число экспериментальных фактов, относящихся к деформированным ядрам, и предсказать ряд новых свойств этих ядер [1—3].

Прогресс экспериментальной ядерной физики, связанный с совершенствованием ускорительной техники, методов детектирования и с модернизацией обработки получаемых данных, обусловил появление качественно новой экспериментальной информации о спектре, электромагнитных свойствах и данных по β -распаду состояний в широкой области угловых моментов [4—9].

Можно отметить несколько общих особенностей структуры деформированных четно-четных ядер, определивших направление теоретического описания экспериментальных данных. В них прослеживаются достаточно «длинные» ротационные полосы. Спектр неротационных состояний весьма богат (особенно для ядер редкоземельной и актиноидной областей). Нередки случаи существования нескольких ротационных полос с отрицательной и положительной четностями, расположенных в очень узком интервале энергий возбуждения. Все это создает предпосылки для смешивания адиабатических состояний с фиксированными значениями K — проекции углового момента на ось симметрии ядра. Действительно, данные экспериментов четко указывают на наличие отклонений от адиабатической теории. С ростом углового момента I выполнение закона $E(I) \sim I(I+1)$ нарушается. Это может быть связано как с изменением момента инерции при изменении частоты вращения, так и с выстраиванием внутренних угловых моментов возбуждений разной природы. Разложение в виде степенного ряда [1]

$$E(I) = AI(I+1) + BI^2(I+1)^2 + CI^3(I+1)^3 + \dots,$$

где I — угловой момент состояния, а величины A , B и C — феноменологические параметры, оказалось мало пригодным для описания энергий «длинных» ротационных полос ядер: их практически невозможно использовать для экстраполяции данных в область больших угловых моментов. Установить физическую картину, приводящую к отклонению от адиабатической теории, на феноменологическом уровне весьма трудно, если опираться на параметры типа A , B , C , а микроскопический расчет их также связан с различными неопределенностями.

Более успешными в смысле воспроизведения данных об энергиях ротационных полос являются разложения момента инерции и энергии по степеням частоты вращения (ω_{rot}). Используя соотношение классической механики

$$\frac{\partial}{\partial \omega_{\text{rot}}} (E(\omega_{\text{rot}}) - \omega_{\text{rot}} \tilde{I}) = 0$$

между энергией (E), угловым моментом ($\tilde{I} = \sqrt{I(I+1)}$) и угловой частотой вращения ($\omega_{\text{rot}} = \partial E / \partial \tilde{I}$), получаем выражение

$$E(I) = \alpha \omega_{\text{rot}}^2(I) + \beta \omega_{\text{rot}}^4(I) + \gamma \omega_{\text{rot}}^6(I) + \dots, \quad (1)$$

в котором параметрами (α, β, γ) являются величины в разложении углового момента по степеням ω_{rot} :

$$\sqrt{I(I+1)} = 2\alpha \omega_{\text{rot}}(I) + \frac{4}{3} \beta \omega_{\text{rot}}^3(I) + \frac{6}{5} \gamma \omega_{\text{rot}}^5(I) + \dots \quad (2)$$

Это разложение было предложено Харрисом [10] на основе кренкинг-модели Инглиса [11,12]. Сходимость (2) значительно лучше (1), так что только два параметра достаточны для описания зависимости энергии от спина вплоть до величины $\sim 10\hbar$. Как следует из [12], формулы (1), (2) позволяют воспроизвести энергетические спектры и при более высоких спинах. Однако и такое описание спектра ротационных полос имеет свои ограничения, особенно четко проявляющиеся при описании ротационных полос, построенных над состояниями с внутренним возбуждением.

Изучение спектров ротационных полос четко свидетельствует о том, что неадиабатические эффекты не всегда можно описать в первом приближении теории возмущений по параметрам кориолисова смешивания состояний. Существенные отклонения от правил адиабатической теории наблюдаются в спектре энергий ротационных полос возбужденных состояний и ветвлении электромагнитных переходов между состояниями ротационных полос. Предсказания адиабатической теории нередко отличаются на сотни процентов или даже на порядки величины от данных эксперимента. Как правило, эти отклонения также не поддаются описанию в нижайших порядках теории возмущений по параметрам кориолисовой связи полос. Например, формула В.М.Михайлова [13], полученная для описания отклонений от правил интенсивностей $E2$ -переходов между взаимодействующими полосами $K^\pi = 0^+$ и $K^\pi = 2^+$ (с учетом членов первого порядка в разложении энергии по $I(I+1)$):

$$B(E2; K = 2I_i \rightarrow K = 0I_f) = 2M_i^2 \{ C_{I_i 2; 2-2}^{I_f 0} [1 + a_2 [I_f(I_f+1) - I_i(I_i+1)]] \}^2, \quad (3)$$

во многих случаях не может воспроизвести экспериментальные данные [14—20].

В этой связи актуальным является поиск феноменологических и микроскопических подходов, способных описать спектральные и распадные характеристики состояний в широком диапазоне энергии возбуждения и углового момента.

В области умеренных спинов описание неадиабатических эффектов возможно в рамках моделей, в которых рассматривается смешивание ограниченного числа состояний, имеющих относительно небольшую энергию возбуждения. Учет связи коллективных полос в рамках подобных моделей проводился многими авторами. Однако во многих случаях они ограничились рассмотрением низкой части спектра энергии и недостаточного числа ротационных полос, участвующих в смешивании.

Интерес к исследованию свойств деформированных ядер особенно повысился в последние годы в связи с открытием новой коллективной изовекторной магнитной дипольной моды. Измеренные значения энергий возбужденных состояний таких мод свидетельствуют о том, что они расположены не очень высоко в спектре возбуждений, и учет смешивания состояний изовекторных магнитных мод с низколежащими состояниями может привести к интересным физическим явлениям.

В данном обзоре описывается ряд методов и моделей ядер, предназначенных для изучения отклонений от адиабатической теории, проявляющихся в энергиях и электромагнитных характеристиках возбужденных состояний четно-четных деформированных ядер. Проводится систематическое исследование экспериментально наблюдаемых свойств низколежащих состояний и анализируется структура волновых функций вращательных уровней. Выясняется роль состояний углового $M1$ -резонанса в смешивании состояний с разными внутренними конфигурациями в радионуклидах деформированной области.

1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СВОЙСТВ СОСТОЯНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЧЕТНОСТИ

Неадиабатические эффекты свидетельствуют о наличии связи между вращательным движением и внутренними возбуждениями в ядрах. Использование феноменологических моделей дает возможность установить наиболее важные элементы этой связи и интерпретировать кажущиеся подчас неожиданными эффекты.

Для построения подобных моделей существенно сделать адекватный выбор пространства состояний, смешивание которых может объяснить наблюдаемые явления. В этой связи отметим следующие обстоятельства.

Известно, что в четно-четных ядрах, как правило, момент инерции основной (gr) полосы меньше моментов инерции β - и γ -вибрационных

полос ($\nu_{gr} < \nu_{\beta}, \nu_{\gamma}$). Такое соотношение интервалов энергии невозможно воспроизвести в случае, когда отклонение от модели жесткого ротатора рассматривается как результат прямого ротационного смешивания gr , β - и γ -полос, но это можно объяснить в модели, где допускается кориолисова связь между состояниями gr , β -, γ -полос с более высоколежащими полосами.

В экспериментах по рассеянию электронов и фотонов на многих ядрах деформированной области [21—28] обнаружены коллективные состояния $K^{\pi} = 1^{+}$, которые имеют сильные $M1$ -переходы на основное состояние. Такие моды возбуждения описываются в различных подходах [29—40]. В эксперименте по рассеянию фотонов на изотопах $^{160,162,164}\text{Dy}$, $^{172,174,176}\text{Yb}$ и ^{156}Gd также найдено по несколько состояний с $I^{\pi} = 1^{+}$ и измерены соответствующие значения $B(M1)$ [27,28]. Отношения приведенных вероятностей $M1$ -переходов $R = B(M1; 1^{+}1 \rightarrow 2^{+}0_{gr}) / B(M1; 1^{+}1 \rightarrow 0^{+}0_{gr})$ из этих уровней согласуются с адиабатическими значениями, вычисленными по правилу Алаги, и позволяют приписать этим полосам квантовые числа $K^{\pi} = 1^{+}$. В связи с этим представляет интерес изучение влияния состояний $K^{\pi} = 1^{+}$ на свойства низколежащих уровней. В такой ситуации большие, чем у основной полосы, эффективные моменты инерции β - и γ -полос объясняются более интенсивным смешиванием их с $K^{\pi} = 1^{+}$ -полосой, по сравнению со смешиванием gr - и $K^{\pi} = 1^{+}$ -полос. Существенные эффекты, вызываемые связью β -, γ - и $K^{\pi} = 1^{+}$ -полос, могут ожидать в случае, когда основания энергий β - и γ -ротационных полос расположены близко друг к другу.

В данном разделе анализируется феноменологическая модель для изучения свойств состояний положительной четности, в которой рассматривается кориолисово смешивание состояний gr , β -, γ - и $K^{\pi} = 1^{+}$ -полос. Проводятся расчеты для изотопов $^{164,166,168,170}\text{Er}$, $^{156,158,160,162,164}\text{Dy}$ и ^{156}Gd . Описываются спектры энергий. Вычисляются приведенные вероятности квадрупольных и монопольных электрических переходов между состояниями вращательных полос. Обсуждаются эффекты неадиабатичности, проявляющиеся в электромагнитных переходах, и поведение параметра Расмуссена $X_I^{gf} = B(E0; I0_i^{+} \rightarrow I0_f^{+}) / B(E2; I0_i^{+} \rightarrow I0_f^{+})$ между уровнями ненулевого спина. Оцениваются значения безразмерного ядерного матричного элемента $E0$ -перехода — $\rho(E0)$. В частности, исследуется влияние состояний $K^{\pi} = 1^{+}$ -полос на электромагнитные характеристики низколежащих уровней. Объясняется различие g_K -факторов состояний основной и γ -полос при

низких спинах. Вычисляются значения коэффициентов смеси мультиполей δ для $\gamma \rightarrow \gamma$, $\gamma \rightarrow gr$ и $\beta \rightarrow gr$ переходов и сравниваются с экспериментальными данными.

1.1. Формулировка модели. Будем рассматривать деформированные атомные ядра, в которых выделены хорошо локализованные главные оси (внутренней системы координат). Пространственная ориентация системы определяется углами Эйлера θ_i . В обобщенной модели ядра предполагается, что полный гамильтониан ядра состоит из двух частей:

$$H = H(R^2) + H_{\text{int}},$$

$$H_{\text{int}} = \sum_K \omega_K b_K^+ b_K, \quad (1.1)$$

где $H(R^2)$ описывает вращательную энергию ядра и является функцией вращательного углового момента R ($R = I - j$, где I — полный и j — внутренний угловые моменты). Второй член является внутренней частью гамильтониана, которую мы записываем, вводя фоновые операторы b_K^+ (b_K) рождения (уничтожения) возбужденных состояний положительной четности, ω_K — значения энергий возбуждения нижайших состояний полос.

Собственная волновая функция гамильтониана имеет вид

$$|IMK\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}} \left\{ \sqrt{2} \Psi_{gr,K}^I D_{M,0}^I(\theta) + \sum_{K'} \frac{\Psi_{K',K}^I}{\sqrt{1+\delta_{K',0}}} \times \right. \\ \left. \times [D_{M,K}^I(\theta) b_{K'}^+ + (-1)^{I+K'} D_{M,-K'}^I(\theta) b_{-K'}^*] \right\} |0\rangle. \quad (1.2)$$

Здесь $\Psi_{K',K}^I$ — амплитуды смешивания базисных состояний. Пространство состояний состоит из $(3+l)$ полос, где l — число включенных 1^+ -состояний. В него входят основная $|0\rangle$, однофоновые полосы $b_{\lambda=2,K}^+ |0\rangle = b_K^+ |0\rangle$ с $K^\pi = 0^+, 2^+$ и 1^+ -полосы.

Гамильтониан (1.1) обладает такими трансформационными свойствами, что состояние (1.2) можно классифицировать квантовым числом — сигнатурой $\sigma = \pm 1$, которая накладывает ограничения на значения углового момента $(-1)^I \sigma = 1$. Это приводит к существенному различию смешивания состояний различной сигнатуры.

Представим вращательную часть гамильтониана $H(R^2)$ в виде разложения Тейлора по степеням j . Оставляя в этом разложении лишь члены нулевого и первого порядка, получаем гамильтониан

$$H = H_{\text{rot}}(I^2) + H_{K,K}^{\sigma}(I), \quad (1.3)$$

$$H_{K,K}^{\sigma}(I) = \omega_K \delta_{K,K'} - \omega_{\text{rot}}(I) - (j_x)_{K,K'} \chi(I, K) \delta_{K', K \pm 1}, \quad (1.4)$$

действующий в пространстве состояний (1.2) с фиксированными значениями углового момента I . В формуле (1.4) $\omega_{\text{rot}}(I) = dE_{\text{core}}(I)/dI$ — угловая частота вращения остова ($E_{\text{core}}(I) \equiv H_{\text{rot}}(I(I+1))$), j_x — проекция внутреннего углового момента на ось X и

$$\chi(I, 0) = 1, \quad \chi(I, 1) = \left[1 - \frac{2}{I(I+1)} \right]^{1/2},$$

$$(j_x)_{gr,1} = -\sqrt{3} \cdot \eta_0, \quad (j_x)_{\beta,1} = -\sqrt{3} \cdot \eta_1, \quad (j_x)_{\gamma,1} = -1 \cdot \eta_2. \quad (1.5)$$

Решая уравнение Шредингера

$$(H_{K,v}^{\sigma}(I) - \epsilon_v^{\sigma}) \psi_{K,v}^{\sigma} = 0, \quad (1.6)$$

определяем собственные функции и энергии состояний положительной четности.

Полная энергия состояния определяется формулой

$$E_v^{\sigma}(I) = E_{\text{core}}(I) + \epsilon_v^{\sigma}(I). \quad (1.7)$$

Энергию вращающегося остова $E_{\text{core}}(I)$ можно определить различными методами, например, параметризацией Харриса для энергии и углового момента [10] (уравнение (1)).

1.2. Электрические квадрупольные переходы. Вычислим приведенную вероятность $E2$ -переходов [1,2]:

$$B(E2; I_i K_i \rightarrow I_f K_f) = \frac{1}{2I_i + 1} |\langle I_f K_f | m(E2; \mu) | I_i K_i \rangle|^2 \quad (1.8)$$

между состояниями типа (1.2).

Компоненты электрического квадрупольного тензора в лабораторной системе связаны с компонентами во внутренней системе стандартным преобразованием

$$\hat{m}(E2; \mu) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} eQ_0 D_{\mu,0}^2(\theta) + \sum_v \hat{m}'(E2; \nu) D_{\mu,\nu}^2(\theta), \quad (1.9)$$

где $\hat{m}'(E2; \nu) = m_\nu(b_\nu^+ + (-1)^\nu b_{-\nu})$.

Здесь Q_0 — внутренний квадрупольный момент ядра, m_ν — некоторые константы, определяемые из эксперимента для $B(E2)$.

Определим приведенную вероятность $E2$ -переходов из однофононных состояний $|I_i K_i b_i\rangle$ на уровни основной полосы:

$$\begin{aligned} B(E2; I_i K_i \rightarrow I_f gr) = & \left\{ \sqrt{\frac{5}{16\pi}} eQ_0 \left[\psi_{gr,gr}^{I_f} \psi_{gr,K_i}^{I_i} C_{I_i 0; 20}^{I_f 0} + \right. \right. \\ & + \sum_n \psi_{K_n,gr}^{I_f} \psi_{K_n,K_i}^{I_i} C_{I_i K_n; 20}^{I_f K_n} \left. \right] + \sqrt{2} \left[\psi_{gr,gr}^{I_f} \sum_n \frac{(-)^{K_n} m_{K_n} \psi_{K_n,K_i}^{I_i}}{\sqrt{1 + \delta_{K_n,0}}} \times \right. \\ & \times C_{I_i K_n; 2-K_n}^{I_f 0} + \psi_{gr,K_i}^{I_i} \sum_n \frac{m_{K_n} \psi_{K_n,gr}^{I_f}}{\sqrt{1 + \delta_{K_n,0}}} C_{I_i 0; 2K_n}^{I_f K_n} \left. \right] \left. \right\}^2, \quad (1.10) \end{aligned}$$

где

$$m_K = \langle gr | \hat{m}(E2) | K^\pi \rangle, \quad K^\pi = 0^+, 2^+ \text{ и } 1_\nu^+.$$

В адиабатическом приближении для приведенной вероятности $E2$ -переходов из β - и γ -вибрационных полос имеем

$$B^{\text{rot}}(E2; I_i \beta \rightarrow I_f gr) = \left| m_0 C_{I_i 0; 20}^{I_f 0} \right|^2, \quad (1.11)$$

$$B^{\text{rot}}(E2; I_i \gamma \rightarrow I_f gr) = \left| m_2 C_{I_i 2; 2-2}^{I_f 0} \right|^2, \quad (1.12)$$

что позволяет вычислить значения параметров m_0 и m_2 из эксперимента.

Но в случае, когда β - и γ -полосы расположены близко друг к другу, они сильно смешиваются даже при $I = 2$, и адиабатическое приближение (1.11) и (1.12) становится неприменимым (например, в ядре ^{232}Th) [15].

Для приведенных вероятностей $E2$ -переходов из состояний γ -полосы с $\sigma = -1$ (I — нечетный) формула (1.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
 B(E2; I_i \gamma \rightarrow I_f 0_{gr}) = \\
 = \left\{ \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_0 \sum_{K=1} \psi_{K, gr}^{I_f} \psi_{K, \gamma}^{I_i} C_{I_i K; 20}^{I_f K} + \right. \\
 \left. + \sqrt{2} \psi_{gr, gr}^{I_f} \sum_{K=1} (-1)^K m_K \psi_{K, \gamma}^{I_i} C_{I_i K; 2-K}^{I_f 0} \right\}. \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

Эта формула позволяет определить значение m_1 , если известны экспериментальные значения $B(E2)$ или отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов $R_{I\gamma} = B(E2; I_\gamma \rightarrow (I+1)_{gr}) / B(E2; I_\gamma \rightarrow (I-1)_{gr})$. Отличие отношения $B(E2) / B^{\text{rot}}(E2)$ от единицы определяет степень неадиабатичности $E2$ -переходов.

1.3. Электрические монополярные переходы. Для понимания природы и анализа различных мод ядерных возбуждений чрезвычайно важны электромагнитные переходы. Среди них особое место занимают монополярные переходы электрического типа. С ними связаны такие интересные и довольно слабо изученные аспекты ядерной структуры, как изменения в среднеквадратичных радиусах, сжимаемость ядерной материи, радиальные осцилляции плотности, дыхательная мода и др. [41].

Основной причиной, вызывающей $E0$ -переходы, является кулоновское взаимодействие нуклонов ядра с электронами атомной оболочки. Остальные — как электромагнитные, так и другие — взаимодействия обычно не играют роли [42]. Однофотонные $E0$ -переходы строго запрещены законом сохранения углового момента.

Монополярные переходы сопровождаются, как правило, более интенсивными квадрупольными. В тех случаях, когда время жизни исследуемого уровня определить не удастся, измеряют величину $E0/E2$ -смешивания [43]:

$$X_I(E0/E2) = \frac{B(E0; i \rightarrow f)}{B(E2; i \rightarrow f')} = \frac{e^2 R_0^4 \rho^2(E0; i \rightarrow f)}{B(E2; i \rightarrow f')}, \quad (1.14)$$

где ρ — безразмерный матричный элемент $E0$ -перехода и $R_0 = r_0 A^{1/3}$ — зарядовый радиус ядра. Состояния i и f должны иметь одинаковые спины и четности. Переходы между монополярными состояниями сравнивают с $E2$ -переходами с данного 0^+ -уровня на 2^+ -уровень, ближайший к конечному состоянию в $E0$ -переходе. Зачастую значением именно этого параметра

ограничивается экспериментальная информация о переходе. С другой стороны, так как отношение $X(E0/E2)$ не зависит от электронных факторов и энергий перехода, оно полезно при сравнении с ядерными моделями.

В рамках модели, описанной выше, для приведенных вероятностей $E0$ -переходов из состояний $K^\pi = 0_v^+$ -полос на уровни основной вращательной полосы имеем следующую формулу:

$$B(E0; I0_v \rightarrow Igr) = \left\{ \sum_v m'_0 (\Psi_{0_v 0_2}^I \Psi_{gr, gr}^I + \Psi_{gr, 0_2}^I \Psi_{0_v gr}^I) \right\}^2, \quad (1.15)$$

где v — квантовое число 0^+ -полосы, включенной в базисные состояния гамильтониана (1.3), $m'_0 = \langle gr | m(E0) | 0_v^+ \rangle$ — матричные элементы между внутренними волновыми функциями основной и 0_v^+ -полос, которые являются численными параметрами и определяются из эксперимента. В рамках нашей модели для адиабатического случая формула (1.14) имеет следующий вид:

$$X_I(E0/E2) = X_0(E0/E2) \frac{(2I-1)(2I+3)}{I(I+1)}, \quad (1.16)$$

где

$$X_0(E0/E2) = \frac{B(E0; 00_v - 0gr)}{B(E2; 00_v \rightarrow 2gr)} = \left[\frac{m'_{0_v}}{m_{0_v}} \right]^2. \quad (1.17)$$

Используя экспериментальные данные $X_0^{\text{эксп}}(E0/E2)$, для переходов из 0_v^+ -уровней по формуле (1.17) можно определить численные значения матричных элементов m'_{0_v} . При этом численные значения параметров m_{0_v} определяются по адиабатической формуле (1.11). Определение параметров m'_{0_v} по (1.17) является достаточно точным, так как 0_v^+ -уровни не возмущены силами Кориолиса.

1.4. Магнитный момент и M1-переходы. Дипольный магнитный момент ядра в состоянии (1.2) определяется из соотношения [1]:

$$\mu = \langle IM = IK | \mu_Z | IM = IK \rangle,$$

где Z -составляющая оператора магнитного момента связана с оператором M1-перехода:

$$\hat{\mu}_Z = \frac{2Mc}{e\hbar} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \hat{M}(M1; \mu=0).$$

Оператор $M1$ -перехода во внутренней системе состоит из двух членов [1]:

$$\begin{aligned} \hat{M}(M1; \mu=0) = & \sum_v \hat{m}(M1; v) D_{\mu=0, v}^1 + \\ & + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) g_R (I_{\mu=0} - I_3 D_{\mu=0,0}^1), \end{aligned} \quad (1.18)$$

первый из которых дает вклад внутреннего движения в магнитный момент, второй — вклад вращательного движения, который пропорционален компоненте углового момента, перпендикулярной оси симметрии.

Используя общепринятое обозначение

$$\langle K | m(M1; v=0) | K \rangle = \sqrt{3/4\pi} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) g_K K, \quad (1.19)$$

где g_K — внутренний g -фактор полосы с $K \neq 0$, получим выражение для магнитного момента K -полосы:

$$\mu_{IK} = g_R I + \sum_{K'=1} |\Psi_{K, K'}^I|^2 (g_{K'} - g_R) \frac{K'}{I+1}. \quad (1.20)$$

При выводе (1.20) мы ограничились лишь диагональными матричными элементами (1.19).

В адиабатическом приближении имеем:

для $K^\pi = 0^+$ -полос (g_r и β) $\mu_I = g_R I$;

для $K^\pi \neq 0^+$ -полос (γ и $K^\pi = 1^+$) $\mu_{IK} = g_R I + (g_K - g_R) \frac{K^2}{I+1}$.

Из систематики g_R -факторов деформированных ядер редкоземельной и трансурановой областей следует $g_R \simeq 0, 4 \pm 0,1$ ($g_R = Z/A$) [1,2].

Вероятность $M1$ -перехода из однофононных состояний на уровни основной ротационной полосы определяется выражением

$$\begin{aligned} B(M1; IK \rightarrow I' 0_{gr}) = \\ = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2 \left| \sum_{K_1=1}^2 \Psi_{K_1, K}^I \Psi_{K_1, gr}^{I'} K_1 C_{IK_1, 10}^{I' K_1} (g_{K_1} - g_R) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Согласно (1.21), в адиабатическом приближении $M1$ -переходы из состояний γ -полос на уровни основной полосы запрещены, т.е. такие переходы возможны за счет кориолисова смешивания состояний с $\Delta K=1$. В реакциях по рассеянию электронов и фотонов на ядрах обнаружены низлежащие коллективные $K^\pi = 1^+$ -состояния в нескольких ядрах редкоземельной и трансурановой областей, имеющие довольно большое значение $B(M1; 11^+ \rightarrow 00^+)$ [21—28]. Эти переходы происходят между нижайшими уровнями $K^\pi = 1^+$ и $K^\pi = 0_{gr}^+$ -полос, невозмущенными силами Кориолиса. Для описания таких переходов в рамках данной модели запишем:

$$\hat{m}(M1; \nu) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right) [\hat{m}_{K\nu=0} (b_K b_K^+ + b_K^+ b_K) \delta_{\nu,0} + m'_\nu (b(b^+b)_K^1)_\nu^1 + \text{э.с.}], \quad (1.22)$$

включив в оператор внутреннего магнитного дипольного момента дополнительный член, приводящий к изменению числа фононов на единицу. Оператор (1.22) приводит к дополнительному члену в выражении (1.21):

$$B(M1; IK \rightarrow I'0_{gr}) = \frac{3}{4\pi} \left| \sum_{K_1=1}^2 \Psi_{K_1, K}^I \Psi_{K_1, gr}^{I'} K_1 C_{IK_1; 10}^{I'K} \times \right. \\ \left. \times (g_{K_1} - g_R) + \frac{\sqrt{6}}{10} m'_1 \Psi_{gr, gr}^{I'} \Psi_{1, K}^I C_{11; 11}^{I'0} \right|^2 \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2. \quad (1.23)$$

В адиабатическом приближении имеем

$$B(M1; 11^+ \rightarrow 00_{gr}^+) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2 0,02(m'_1)^2. \quad (1.24)$$

Из известного экспериментального значения вероятности таких $M1$ -переходов можно вычислить m'_1 .

Для магнитного момента состояния имеем следующее выражение:

$$\mu_K(I) = g_R I + \sum_{K'=1} |\Psi_{K', K}^I|^2 (g_{K'} - g_R) \frac{K'^2}{I+1} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{10} m'_1 \Psi_{gr, K}^I \Psi_{1, K}^I \sqrt{\frac{I}{I+1}}. \quad (1.25)$$

Вместо приведенных вероятностей $M1$ -переходов обычно исследуются коэффициенты смеси мультиполей δ , значения которых устанавливаются экспериментально, используя соотношение

$$\delta(I_i K_i \rightarrow I_f K_f) = 0,834 \cdot E_\gamma (\text{МэВ}) \frac{\langle I_f K_f \| \hat{m}(E2) \| I_i K_i \rangle}{\langle I_f K_f \| \hat{m}(M1) \| I_i K_i \rangle} \left(\frac{e \cdot 6}{\mu_\gamma} \right). \quad (1.26)$$

В адиабатическом приближении для (1.26) внутри одной полосы с $K \neq 0$ имеем

$$\delta = 0,933 \frac{eQ_0}{g_K - g_R} E_\gamma / \sqrt{I^2 - 1}, \quad (1.27)$$

где E_γ — энергия γ -перехода.

1.5. Результаты расчетов. Расчеты для изотопов $^{164,166,168,170}\text{Er}$.

В расчетах для изотопов использовались экспериментальные данные из [4—6, 44—62]. При описании спектра состояний положительной четности параметры модели подбирались следующим образом.

1) Согласно [63] предполагали, что при низких значениях спина энергия вращающегося остова совпадает с энергией основной вращательной полосы. Поэтому инерционные параметры вращающегося остова v_0 и v_1 определялись из наилучшего согласия энергии вращательных состояний основной полосы до спина $I \geq 8$, используя (1) ($v_0 = 2\alpha$, $v_1 = 4/3 \cdot \beta$).

2) Параметры оснований gr - и β -полос брались равными экспериментальным значениям энергии при спине, так как они не возмущаются силами Кориолиса $I=0$: $\omega_{gr} = E_{gr}^{\text{эксп}}(0) = 0$ и $\omega_\beta = E_\beta^{\text{эксп}}(0)$, энергию основания $K^\pi = 1^+$ -полосы полагали равной $\omega_1 \simeq 3$ МэВ [24].

3) Свободными параметрами модели являются параметры в формуле (1.5) η_γ , определяющие кориолисово взаимодействие между состояниями ротационных полос, и энергия основания γ -полосы ω_γ , которые подбирались из условия наилучшего согласия расчетных энергий gr -, β - и γ -полос с экспериментальным.

Параметры, использованные при вычислении спектра энергии, приведены в табл.1.1. Вычисленные значения энергий gr -, β -, γ - и $K^\pi = 1^+$ -полос представлены в [14]. Эффекты, связанные с взаимодействием Кориолиса, можно видеть на рис.1.1, на которых изображена зависимость абсолютных значений амплитуды смешивающихся состояний от углового момента для

Таблица 1.1. Параметры, использованные в расчетах для изотопов Ег

A	ω_β	ω_1	ω_γ	η_0	η_1	η_2	ϑ_0	ϑ_1
164	1,246	3,0	0,777	0,28	1,95	1,50	31,4	118,4
166	1,460	3,0	0,710	0,62	1,69	2,05	35,3	181,2
168	1,217	3,0	0,732	0,0	2,04	1,10	35,9	111,3
170	0,891	3,0	0,845	0,03	1,29	0,0	36,5	117,8

γ -вибрационных полос в $^{164,166,168}\text{Ег}$. Из рис.1.1 видно, что смешивание полос сильно проявляется в ядрах $^{164,168}\text{Ег}$, что должно сказываться на значениях вероятностей электромагнитных переходов.

Далее рассмотрим результаты вычислений электромагнитных характеристик вышеописанных ядер. Параметры m_0 и m_2 определены на основе выражений (1.11) и (1.12) соответственно, с использованием экспериментальных значений приведенных вероятностей $E2$ -переходов в $^{164}\text{Ег}$ [44,45], равных $m_0 = (-7,0 \pm 1,2) \text{ е} \cdot \text{фм}^2$ и $m_2 = (+30,5 \pm 4,0) \text{ е} \cdot \text{фм}^2$.

Для отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов из состояний $K^\pi = 2^+$ с нечетным I на уровни $I \pm 1$ основной полосы, используя (1.10), можно написать следующее выражение:

$$R_{I\gamma} = \frac{B(E2; I_\gamma \rightarrow (I+1)_{gr})}{B(E2; I_\gamma \rightarrow (I-1)_{gr})} = \left| \frac{-\psi_{1,\gamma}^I + Z\psi_{\gamma,\gamma}^I \sqrt{\frac{I-1}{I+1}}}{\psi_{1,\gamma}^I \sqrt{\frac{I-1}{I+1}} + Z\psi_{\gamma,\gamma}^I} \right|^2, \quad (1.28)$$

где $Z = m_2/m_1$.

Параметр m_1 был определен на основе (1.28) по экспериментальному значению $R_{5\gamma}$ для $I = 5$ в $^{164}\text{Ег}$ [17] и оказался равным $m_1 = -80,0 \text{ е} \cdot \text{фм}^2$.

В табл.1.2—1.4 даны вычисленные значения отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов из γ -полосы $R_{I\gamma}$. Рассчитанные значения $R_{IK}^{\text{теор}}$ сравниваются с различными экспериментальными $R_{IK}^{\text{эксп}}$, а также с R_{IK}^A , вычисленными по адиабатической теории, и с $R_{IK}^{\text{теор}}$ (DRM), вычисленными в рамках «двухроторной» модели [77]. Надо отметить, что для всех изотопов Ег отношения R_{IK} вычислялись с определенным выше набором парамет-

Рис.1.1. Структура волновых функций состояний γ -полосы для ^{164}Er (а), ^{166}Er (б), ^{168}Er (в)

ров m_K и $Q_0 = 742$ фм [4]. Как видно из табл.1.2—1.4, модель удовлетворительно описывает все известные значения $R_{IK}^{\text{эксп}}$ этих ядер.

Отклонение $R_{I\gamma}^{\text{эксп}}$ от $R_{I\gamma}^A$ является заметным как для четных, так и для нечетных спинов при $I = 3, 5$. В случае ^{164}Er $R_{3\gamma}^{\text{эксп}}$ от $R_{3\gamma}^A$ отличается в два раза, и с ростом I различие увеличивается, что является подтверждением смешивания γ -полосы с полосой $K^\pi \neq 0^+$. Наша модель, учитывающая такое смешивание, удовлетворительно описывает отклонение $R_{IK}^{\text{эксп}}$ от правила Алаги.

Вычислены характеристики магнитных дипольных переходов из β - и γ -вибрационных полос и внутри γ -полосы по (1.23). Параметр m'_1 определяется по (1.24) с использованием следующего экспериментального значения: для ^{168}Er [24] $B(M1; 00^+_{gr} \rightarrow$

$\rightarrow 11^+) \simeq 1,0 \mu_N^2$. Параметры g_K предполагали равными ($g_{K=1} = g_{K=2}$), и они определялись по (1.27) с экспериментальным значением δ для $I = 4$ в

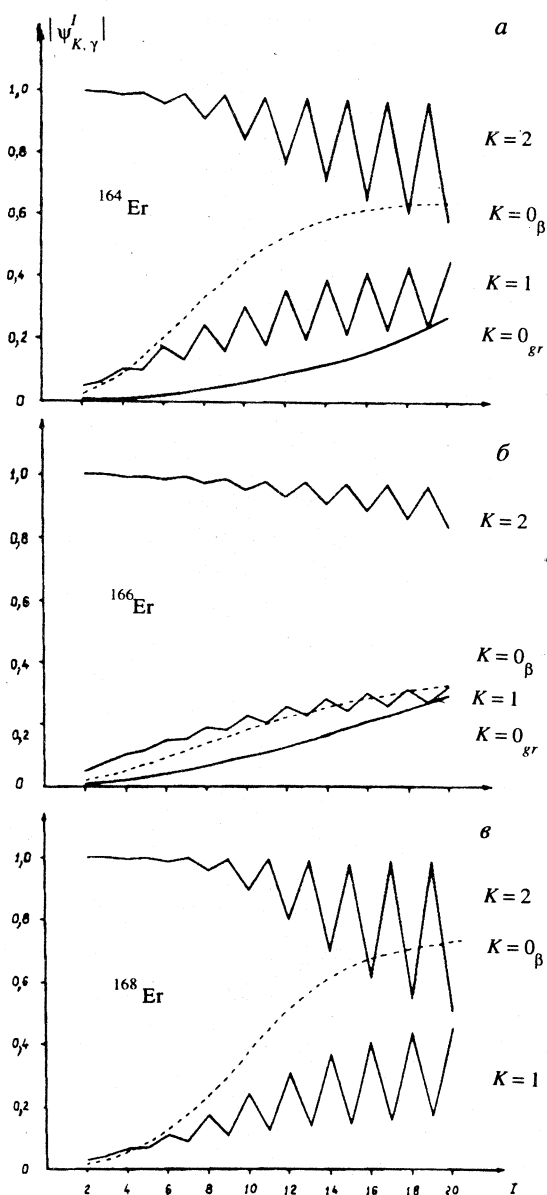


Таблица 1.2. Отношения приведенных вероятностей E2-переходов в ^{164}Er

$(I_\gamma \rightarrow I'_{gr}) / (I_\gamma \rightarrow I''_{gr})$	Эксперимент		Теория		
	[46]	[17]	Феном. [14]	ДРМ [77]	Алага
$(2_\gamma \rightarrow 2_{gr}) / (2_\gamma \rightarrow 0_{gr})$	2,23(14)	1,97(30)	1,86	1,97	1,43
$(2_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (2_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	0,11(5)	0,15(3)	0,09	0,09	0,05
$(3_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (3_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	0,89(7)	0,82(20)	0,69	0,81	0,40
$(4_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (4_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	13,3(19)	5,4(13)	6,1	7,1	2,94
$(5_\gamma \rightarrow 6_{gr}) / (5_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	1,45(13)	1,3(3)	1,3	1,8	0,57
$(2_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (2_\gamma \rightarrow 0_{gr})$	0,25(10)	0,36(6)	0,17	0,18	0,075

Таблица 1.3. Отношения приведенных вероятностей E2-переходов в ^{166}Er

$(I_\gamma \rightarrow I'_K) / (I_\gamma \rightarrow I''_{gr})$	Эксперимент		Теория		
	[47]	[48]	Феном. [14]	ДРМ [77]	Алага
$(2_\gamma \rightarrow 2_{gr}) / (2_\gamma \rightarrow 0_{gr})$	1,86(10)	1,91	1,80	1,92	1,43
$(2_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (2_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	0,097(8)	0,063	0,084	0,091	0,05
$(3_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (3_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	0,66(5)	0,73	0,66	0,78	0,40
$(3_\gamma \rightarrow 2_\gamma) / (3_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	—	34,3	30,8	43,8	—
$(4_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (4_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	5,67(45)	6,3	5,22	6,24	2,94
$(4_\gamma \rightarrow 6_{gr}) / (4_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	0,256(65)	0,186	0,191	0,21	0,086
$(4_\gamma \rightarrow 2_\gamma) / (4_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	64,3(70)	53,5	44,7	66,8	—
$(5_\gamma \rightarrow 6_{gr}) / (5_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	1,36(10)	1,52(25)	1,2	1,66	0,57
$(5_\gamma \rightarrow 4_\gamma) / (5_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	—	25(20)	21	33,7	—
$(6_\gamma \rightarrow 6_{gr}) / (6_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	10,9(8)	13(7)	10,0	13,6	3,7
$(6_\gamma \rightarrow 8_{gr}) / (6_\gamma \rightarrow 6_{gr})$	—	0,28(16)	0,30	0,35	0,11
$(6_\gamma \rightarrow 4_\gamma) / (6_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	241(17)	220(150)	170	283	—
$(7_\gamma \rightarrow 8_{gr}) / (7_\gamma \rightarrow 6_{gr})$	2,12(18)	2,5(5)	1,73	2,96	0,67
$(7_\gamma \rightarrow 6_\gamma) / (7_\gamma \rightarrow 6_{gr})$	—	18,8(40)	14,1	26,9	—
$(8_\gamma \rightarrow 8_{gr}) / (8_\gamma \rightarrow 6_{gr})$	18,9(45)	—	19,3	31,8	4,17

Таблица 1.4. Отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов в ^{168}Er

$(I_\gamma \rightarrow I'_{gr}) / (I_\gamma \rightarrow I''_{gr})$	Эксперимент		Теория		
	[49]	[50]	Феном. [14]	ДРМ [77]	Алага
$(2_\gamma \rightarrow 2_{gr}) / (2_\gamma \rightarrow 0_{gr})$	2,27(45)	1,79(4)	1,74	1,73	1,43
$(2_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (2_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	0,044(22)	0,075(4)	0,077	0,076	0,05
$(3_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (3_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	0,65(30)	0,64(4)	0,61	0,62	0,4
$(4_\gamma \rightarrow 4_{gr}) / (4_\gamma \rightarrow 2_{gr})$	6,3(30)	5,27(55)	5,0	4,6	2,94
$(4_\gamma \rightarrow 6_{gr}) / (4_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	0,076(38)	—	0,178	0,16	0,086
$(5_\gamma \rightarrow 6_{gr}) / (5_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	1,0(4)	—	1,1	1,15	0,57
$(6_\gamma \rightarrow 6_{gr}) / (6_\gamma \rightarrow 4_{gr})$	10,7(42)	—	10,6	6,9	3,7
$(6_\gamma \rightarrow 8_{gr}) / (6_\gamma \rightarrow 6_{gr})$	0,19(8)	—	0,31	0,24	0,11
$(7_\gamma \rightarrow 8_{gr}) / (7_\gamma \rightarrow 6_{gr})$	1,64(80)	—	1,57	1,72	0,67

^{166}Er [56]. Вычисленные значения коэффициента смеси мультиполей δ представлены в табл. 1.5—1.6, они сравниваются с экспериментальными значениями, также вычисленными в рамках «двухроторной» модели (ДРМ) [77]. Знаки экспериментальных значений δ , приводимые разными авторами для одного и того же перехода в данном ядре, нередко противоположны. В ряде случаев эти противоречия кажущиеся: знак δ зависит от того, какими формулами для анализа угловых корреляций и какими соглашениями пользовались авторы. В данном обзоре приводятся знаки δ , следующие из соглашения о знаках Стефана — Беккера [62], как в [4]. Как видно из таблиц, экспериментальные значения δ имеют большой разброс. Видно, однако, что одно из них согласуется с $\delta^{\text{теор}}$, вычисленным в рамках данной модели. В таблицах приведены значения величин, характеризующих переходы между ротационными полосами γ - и gr -полос и переходов внутри γ -полосы.

Надо отметить, что значения параметра m_1 , определенные из отношений вероятностей $E2$ -переходов, оказались большими, чем в других работах. Это связано с тем, что мы в базисные состояния гамильтониана включили только одну полосу с $K^\pi = 1^+$, тогда как таких состояний может быть несколько, как в ядрах $^{160,162,164}\text{Dy}$ и $^{172,174,176}\text{Yb}$ [27,28]. Поэтому и

Таблица 1.5. Коэффициенты смеси мультиполей δ для ^{164}Er

I_i	I_f	Эксперимент [51]	Теория	
			Феном. [14]	ДРМ [77]
2_γ	2_{gr}	—	- 5,1	- 3,6
3_γ	2_{gr}	$0,13^{+0,28}_{-0,25}$ или $-7,7^{+5,1}_{-\infty}$	- 5,2	- 3,1
4_γ	4_{gr}	$-1,15^{+0,35}_{-1,02}$ или > 7	- 2,45	- 1,78
5_γ	4_{gr}	$-4,8^{+1,5}_{-5,8}$ или $0,0^{+0,07}_{-0,04}$	- 3,0	- 1,63
6_γ	6_{gr}	$-1,19^{+1,6}_{-1,02}$ или > 3,3	- 1,42	- 1,16
7_γ	6_{gr}	$-6,5^{+2,2}_{-5,5}$	- 2,19	- 1,0
8_γ	8_{gr}	$-1,5^{+0,75}_{-3,0}$ или $12,0^{+\infty}_{-6,8}$	- 0,89	- 0,82

значения $B(M1)$ -переходов из 1^+ -состояний, полученные в рамках нашей модели, могут оказаться завышенными.

Из результатов расчета сделаны следующие выводы, которые коротко изложены в [14].

1. Отклонения R_{IK} от правила Алаги связаны со смешиванием gr -, β -, γ - и $K^\pi = 1^+$ -полос.

2. Присутствие $K^\pi = 1^+$ -компонентов в волновых функциях вибрационных состояний приводит к $M1$ -переходам из них на состояния основной полосы.

3. Значения коэффициентов δ для переходов из γ -полосы имеют отрицательный знак, что соответствует большинству имеющихся экспериментальных данных. С ростом углового момента коэффициент δ уменьшается по абсолютной величине.

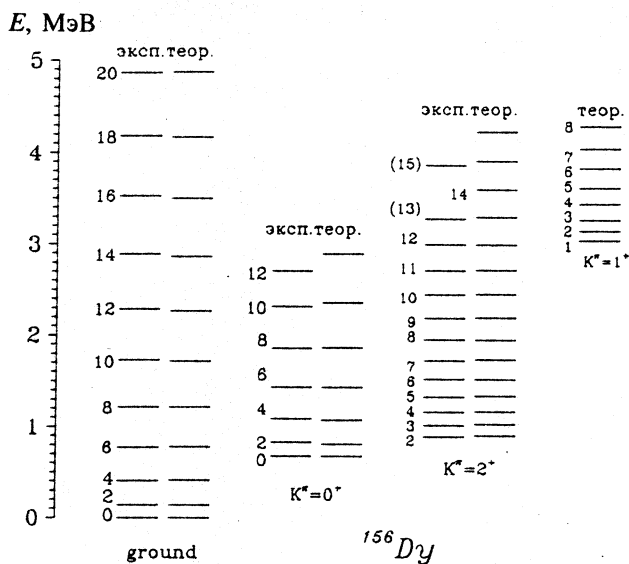
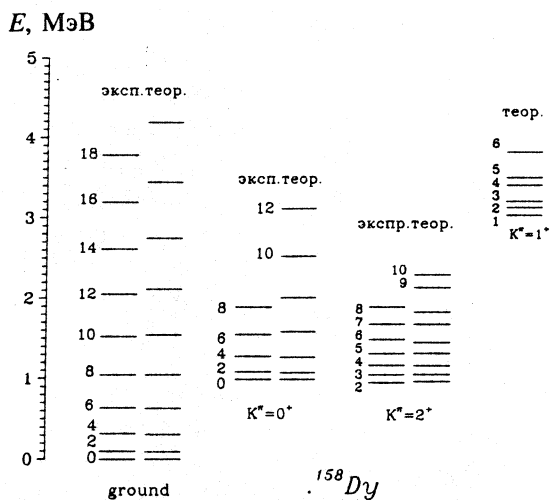
Таблица 1.6. Коэффициенты смеси мультиполей δ для ^{168}Er

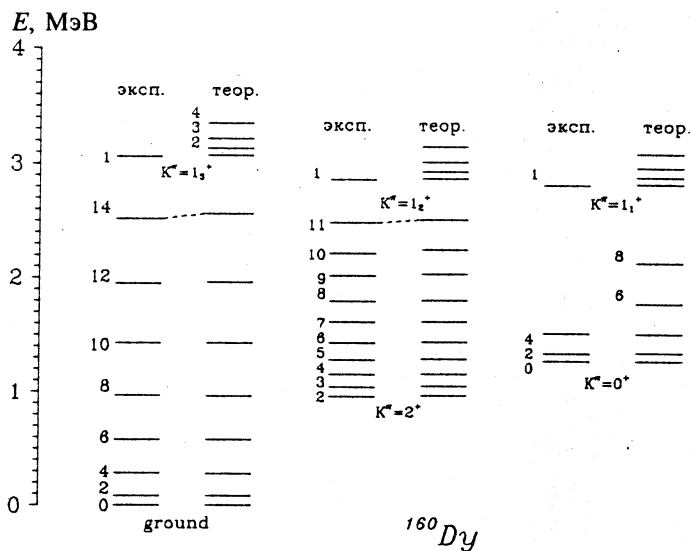
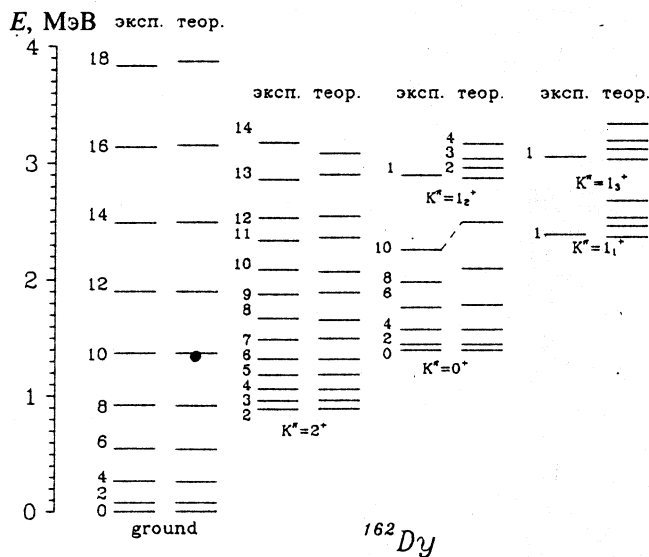
I_i	I_f	Эксперимент	Теория	
			Феном. [14]	ДРМ [77]
2_γ	2_{gr}	$ \delta \geq 6,4$ [57] $ \delta \geq 29$ [52] или $\begin{matrix} \geq 9,4 \\ < -4,8 \end{matrix}$ [59]	- 7,9	- 4,4
3_γ	2_{gr}	$ \delta = 8,1$ [58] 16,5(23) [59]	- 7,9	- 4,0
3_γ	4_{gr}	- 4,9(3) [59]	- 5,5	- 3,0
4_γ	4_{gr}	$-5,7^{+5,7}_{-3,7}$ [52] или $\begin{matrix} 25^{+\infty}_{-13} \\ 50^{+\infty}_{-33} \end{matrix}$ [57]	- 3,7	- 2,5
5_γ	4_γ	$ \delta = 1,41$ [49] $ \delta = 1,38^{+2,05}_{-0,71}$ [60]	- 1,6	3,3
6_γ	5_γ	$ \delta = 1,05$ [49] $ \delta = 1,55^{+1,05}_{-0,76}$ [60]	- 1,5	2,3
7_γ	6_γ	$ \delta = 1,92$ [49] $ \delta = 1,52^{+1,14}_{-0,82}$ [60]	- 1,6	3,6
8_γ	7_γ	$ \delta = 0,245$ [49]	- 1,3	2,5

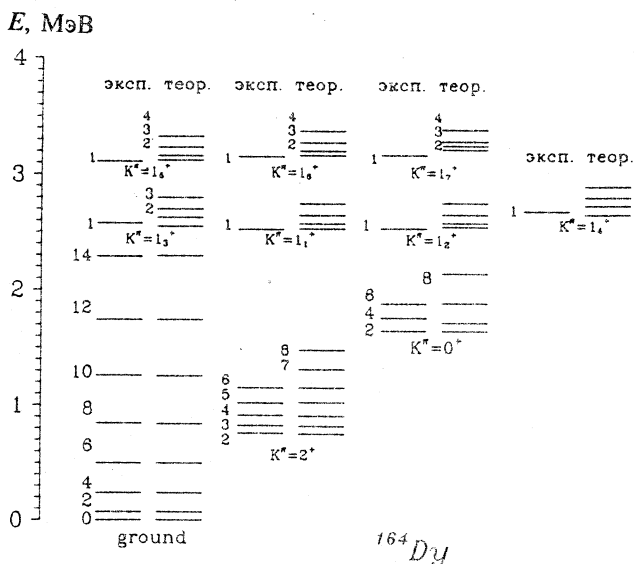
4. В ядрах $^{164,166}\text{Er}$ должно существовать $K^\pi = 1^+$ -состояние, и $B(M1)$ -фактор из этого уровня должен быть такого же порядка ($\approx 0,33\mu_N^2$), как в $^{168,170}\text{Er}$ [24].

Расчеты для изотопов $^{156,158,160,162,164}\text{Dy}$. На рис.1.2—1.6 приведены спектры теоретических и экспериментальных энергий изотопов $^{156,158,160,162,164}\text{Dy}$ соответственно. Из сравнения видно, что модель качественно воспроизводит экспериментальные значения энергий.

Данные о структуре состояний β - и γ -полос $^{156,162}\text{Dy}$, полученные при описании энергии, представлены в [18]. В состояниях γ -полосы β -компоненты становятся заметными уже при низких спинах. Смешивание состояний β - и γ -полос сильно проявляется в $^{156,158}\text{Dy}$ из-за близости энергий оснований полос.

Рис.1.2. Сравнение теоретического и экспериментального спектров энергии для ^{156}Dy Рис.1.3. То же, что на рис.1.2, для ^{158}Dy

Рис.1.4. То же, что на рис.1.2, для ^{160}Dy Рис.1.5. То же, что на рис.1.2, для ^{162}Dy

Рис.1.6. То же, что на рис.1.2, для ^{164}Dy

Вычислены электрические $E2$ -переходы из коллективных состояний основной полосы по (1.10). При расчетах значения Q_0 брались из эксперимента. Параметры m_0 и m_2 определялись также из эксперимента [4] с использованием формул (1.11) и (1.12) для приведенных вероятностей $E2$ -переходов в адиабатическом приближении. Экспериментально не определены значения $B(E2)$ из 1^+ -полос, поэтому, считая $B(E2)$ из состояний 1^+ -полос на уровни основной полосы одинаковыми в адиабатическом приближении (т.е. $m_1 = m_{1_1} = m_{1_2} = \dots$), параметр m_1 определяли из наилучшего согласия вычисленных значений отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов из состояний γ -полосы с экспериментальными данными. На рис.1.7 показаны вычисленные значения $B(E2)$ для $I_\gamma \rightarrow (I-2)_{gr}$, $I_\gamma \rightarrow I_{gr}$ и $I_\beta \rightarrow (I-2)_{gr}$ переходов и приведенные матричные элементы $\langle (I+2)_{gr} || m(E2) || I_{gr} \rangle$, $\langle I_{gr} || m(E2) || I_{gr} \rangle$ в ^{156}Dy , которые сравниваются с экспериментом [19] и вычисленными значениями в адиабатическом приближении. Как видно из рисунков, неадиабатичности $B(E2)$ -переходов из β - и γ -полос можно объяснить смешиванием состояний gr -, β -, γ - и $K^\pi = 1^+$ -полос.

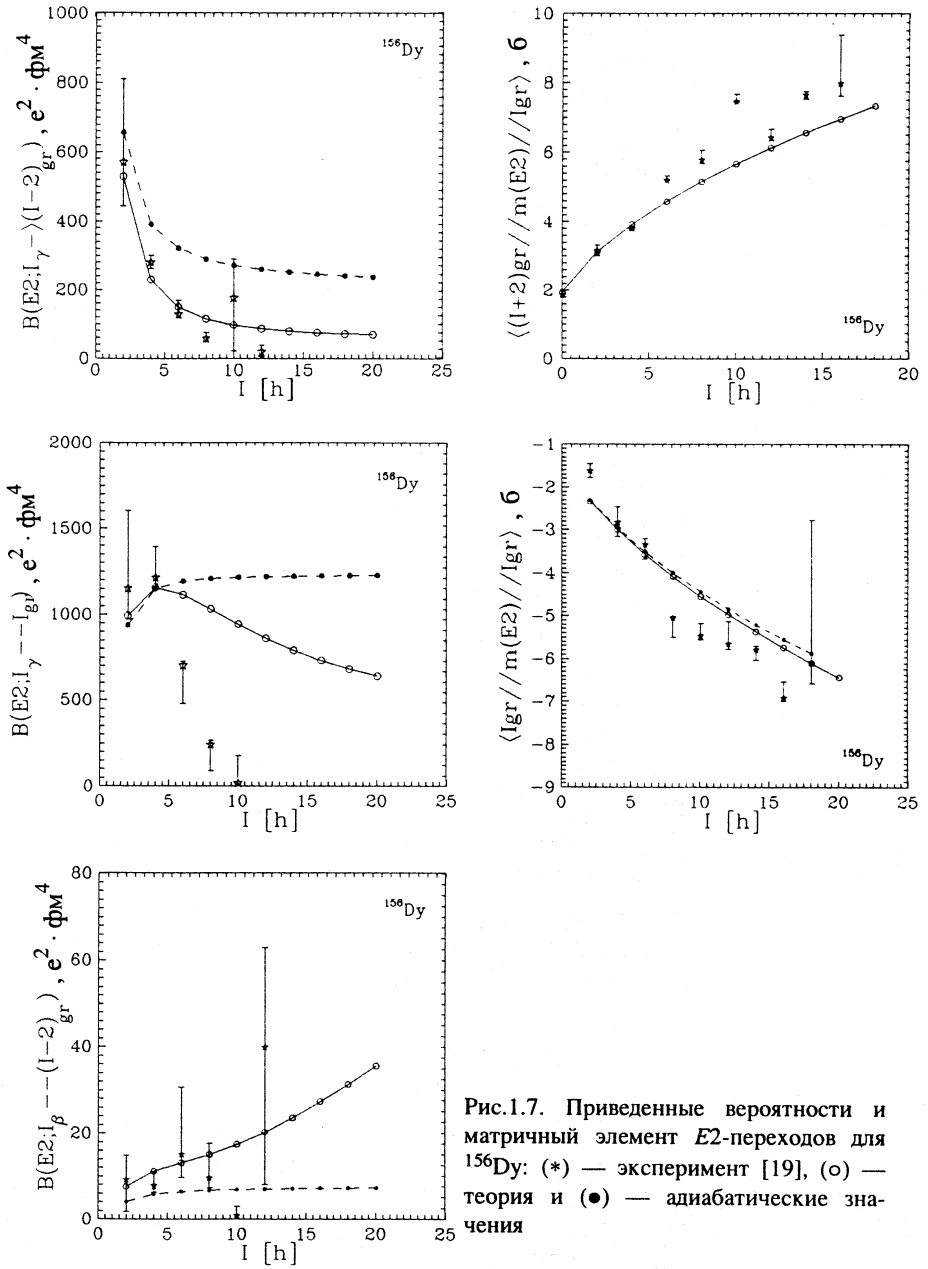


Рис.1.7. Приведенные вероятности и матричный элемент $E2$ -переходов для ^{156}Dy : (*) — эксперимент [19], (o) — теория и (•) — адиабатические значения

Таблица 1.7. Отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов
 $B(E2; I_\gamma \rightarrow I_1 gr) / B(E2; I_\gamma \rightarrow I_2 gr)$ [18]

I	I_1	I_2	^{156}Dy		^{158}Dy		Алага
			Эксперимент [64]	Теория	Эксперимент [65]	Теория	
2	0	2	0,60(9)	0,53	0,44(9)	0,55	0,7
3	2	4	0,37(6)	1,2	1,72(35)	1,20	2,5
4	2	4	0,15(2)	0,21	0,21(4)	0,22	0,34
5	4	6	0,21(2)	0,62	0,77(15)	0,58	1,57
6	4	6	0,20(3)	0,17	0,26(10)	0,12	0,27
8	6	8	0,18(2)	0,18	—	0,03	0,24
9	8	10	0,07(2)	0,31	—	0,24	1,38

Таблица 1.8. Отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов
 $B(E2; I_\gamma \rightarrow I_1 gr) / B(E2; I_\gamma \rightarrow I_2 gr)$ [18]

I	I_1	I_2	^{160}Dy		^{162}Dy		^{164}Dy		Алага
			Экспе- римент [66]	Теория	Экспе- римент [67,68]	Теория	Экспе- римент [69,70]	Теория	
2	0	2	0,58(6)	0,59	0,56(2)	0,58	0,55(3)	0,55	0,7
3	2	4	1,5(2)	1,64	1,61(7)	1,58	1,35(15)	1,33	2,5
4	2	4	0,22(4)	0,23	0,20(1)	0,21	0,30(4)	0,19	0,34
5	4	6	0,83(14)	0,93	0,92(6)	0,87	0,5	0,69	1,75
6	4	6	0,17(5)	0,15	0,16(3)	0,13	0,22(2)	0,10	0,27
2	4	2	0,06(1)	0,08	0,07(1)	0,08	0,11(1)	0,08	0,05

В табл.1.7 и 1.8 приведены вычисленные значения отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов из γ -вибрационной полосы для вышеперечисленных ядер. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными значениями $R_{I\gamma}^{\text{эксп}}$ [64—70], также вычисленными по формуле Алаги. Как видно из таблиц, модель удовлетворительно описывает отклонения $R_{IK}^{\text{эксп}}$ от правила Алаги.

Значения параметра m_1 , характеризующего $E2$ -переходы из уровней 1^+ -полос, для $^{156,158}\text{Dy}$ оказались больше, чем для $^{160,162,164}\text{Dy}$. Это связано с тем, что для изотопов $^{156,158}\text{Dy}$ в базисные состояния гамильтониана включили только одну полосу с $K^\pi = 1^+$, хотя этот уровень не обнаружен в эксперименте, тогда как в эксперименте для $^{160,162,164}\text{Dy}$ найдены несколько 1^+ -состояний. Большое значение m_1 в расчетах указывает на возможность существования нескольких уровней и в ядрах $^{156,158}\text{Dy}$.

Вычислены $M1$ -переходы по (1.23) из состояний β - и γ -полос. Параметры m'_1 определялись по (1.24) с экспериментальными значениями $B(M1)$ из 1^+ -уровней [28]. Параметры g_K и g_R найдены из экспериментальных значений магнитных моментов для основной ($\mu(4^+, gr) = 1,48_{-0,54}^{+0,67} \mu_N$) и γ ($\mu(2^+, \gamma) = (0,32 \pm 0,4) \mu_N$) полос для ^{160}Dy [71]: $g_K = 0,10$ и $g_R = 0,36$. В работе [72] показано, что $g_R^{\text{экс}}(4^+, ^{158}\text{Dy}) \simeq g_R^{\text{экс}}(2^+, ^{160}\text{Dy}) \simeq g_R^{\text{экс}}(2^+, ^{162}\text{Dy})$. Поэтому в расчетах для всех изотопов Dy использовались определенные выше значения g_K и g_R . Вычисленные значения $g_R^{\text{эф}}(I) = \mu(I)/I$ в зависимости от спина представлены на рис.1.8 для $^{158,160,162}\text{Dy}$. Как видно из рисунков, g_R -фактор γ -полосы при низких I меньше, чем в основной полосе (g_R), и с ростом I становится близким к g_R^{gr} . В нашей схеме значения g_R для состояний основной полосы оказались постоянными, что и подтверждает эксперимент при $I \leq 10\hbar$ в ^{158}Dy [72,73].

Эксперимент [73] для ^{158}Dy при спинах $I \simeq 14\hbar$ в gr -полосе дает $g_R = 0,04 \pm 0,11$. Это, наверное, связано со сложной структурой основной полосы при высоких спинах. Например, в нашей схеме не учитывается смешивание gr -полосы с выстроенной S -полосой, которая имеет большой момент инерции. На рис.1.9 даны вычисленные значения $B(M1)$ по формуле (1.24) для переходов $I_\gamma \rightarrow (I \pm 1)_{gr}$, $I_\gamma \rightarrow I_{gr}$. Во всех случаях $B(M1)$ монотонно растет с увеличением спина, и для ^{160}Dy $B(M1)$ всегда меньше, чем для других ядер.

В табл.1.9 приводится сравнение теоретических и экспериментальных значений δ для $^{160,162,164}\text{Dy}$. Экспериментальные данные по δ для ^{160}Dy оказались больше, чем для $^{162,164}\text{Dy}$, а для $^{156,158}\text{Dy}$ они отсутствуют. Значения $\delta^{\text{экс}}$ для переходов в γ -полосе есть только для ^{162}Dy . В пределе погрешности эксперимента $\delta^{\text{экс}}$ согласуется с вычисленными $\delta^{\text{теор}}$. Для

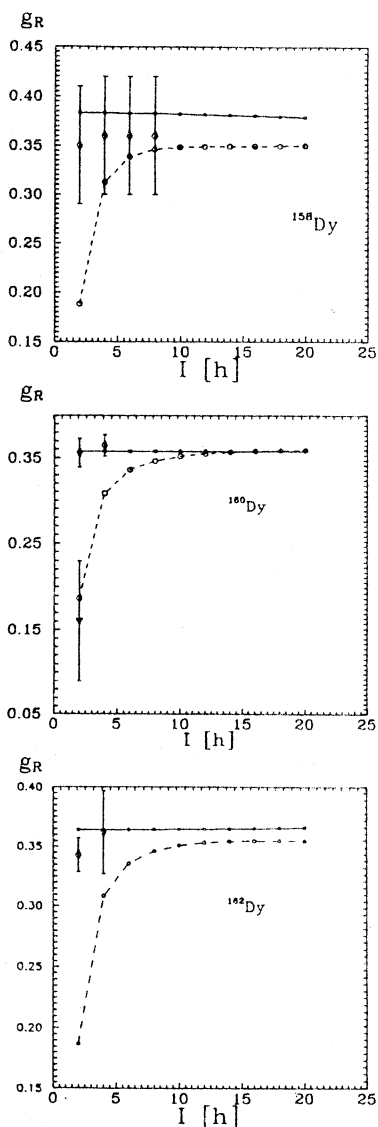


Рис.1.8. Спиновая зависимость g_R -фактора для $^{158,160,162}\text{Dy}$: эксперимент для состояний основной полосы ($\diamond$) и γ -полосы (∇), теоретические значения для основной ($\bullet$) и γ -полосы ($\circ$)

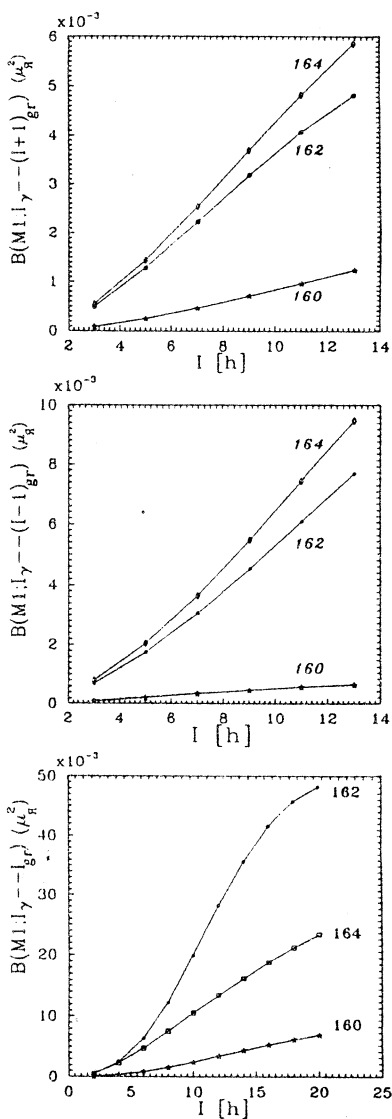


Рис.1.9. Теоретические значения $B(M1)$: (*) — для ^{160}Dy , ($\bullet$) — для ^{162}Dy и ($\diamond$) — для ^{164}Dy

Таблица 1.9. Значения коэффициентов δ для изотопов Dy [19]

I_i	I_f	^{160}Dy		^{162}Dy		^{164}Dy	
		Эксперимент [99]	Теория	Эксперимент [68]	Теория	Эксперимент [68]	Теория
2_γ	2_{gr}	$\delta > 0,5$	14,1	$-8,3 < \delta < 3,4$	-5,64	$-16,3 < \delta < 31,5$	-5,22
4_γ	4_{gr}	$< 1; > -8$	7,62	$-5,3^{+4,7}_{-0,8}$	-2,65	$-0,87^{+0,11}_{-0,13}$	-2,63
6_γ	6_{gr}	$\delta > 1,4$	4,96	$-17,9 < \delta < 2,3$	-1,64	—	-1,78
8_γ	8_{gr}	$\delta > 1,5$	3,5	—	-1,08	—	-1,80
10_γ	10_{gr}	$< -2,7; > 1,2$	2,6	—	-0,74	—	-1,39
3_γ	2_{gr}	$\delta > 11,0$	15,8	$-2,6^{+1,6}_{-5,3}$	-5,27	$-6,7 < \delta < 55,5$	-4,48
5_γ	4_{gr}	$< 8; > -14,0$	10,3	$\delta < 62,7$	-2,72	$-5,5^{+2,1}_{-6,1}$	-2,54
7_γ	6_{gr}	7,2(10)	6,9	—	-2,13	—	-1,76
9_γ	8_{gr}	7,0(12)	5,8	—	-1,65	—	-1,31
11_γ	10_{gr}	$\delta > 0,0$	5,0	—	-1,33	—	-1,13
3_γ	4_{gr}	-0,05(5)	9,7	$-11,7 < \delta < 10,4$	-5,41	$-5,4^{+3,2}_{-2,5}$	-3,63
5_γ	6_{gr}	$\delta > 10$	6,1	$-3,9^{+1,5}_{-4,1}$	-2,60	—	-2,31
7_γ	8_{gr}	5(8)	4,7	—	-1,95	—	-1,72
4_γ	3_γ	—	-0,77	$ \delta = 1,2(80)$	-0,67	—	-0,60
5_γ	4_γ	—	-0,75	$ \delta = 1,2(8)$	-0,66	—	-0,59
6_γ	5_γ	—	-0,70	$ \delta = 0,67$	-0,63	—	-0,59

$\gamma \rightarrow gr$ -переходов в большинстве случаев теория дает удовлетворительное согласие с экспериментом.

Представленные в [69] экспериментальные значения $B(E2; 2\gamma \rightarrow 2gr) = 0,045(25); 0,0446(27); 0,0411 \text{ e}^2 \cdot \text{ф}^2$ для изотопов $^{160,162,164}\text{Dy}$ соответственно и коэффициентов смеси мультиполей $\delta^{\text{экс}}(2\gamma \rightarrow 2gr; ^{160}\text{Dy}) = -16,7(14)$ [74], $\delta^{\text{экс}}(2\gamma \rightarrow 2gr; ^{162}\text{Dy}) = -8,1(11)$ [75], $\delta^{\text{экс}}(2\gamma \rightarrow$

$\rightarrow 2gr; {}^{164}\text{Dy} = -5,7(12)$ [75], позволяют определить $B^{\text{экс}}(M1)$. Они оказались равными: $B^{\text{экс}}(M1; {}^{160}\text{Dy}) = 0,086(6) \cdot 10^{-3} \mu_{\text{Я}}^2$, $B^{\text{экс}}(M1; {}^{162}\text{Dy}) = 0,44(3) \cdot 10^{-3} \mu_{\text{Я}}^2$, $B^{\text{экс}}(M1; {}^{164}\text{Dy}) = 0,42(3) \cdot 10^{-3} \mu_{\text{Я}}^2$. Наши вычисления дают $B^{\text{теор}}(M1; {}^{160}\text{Dy}) = 0,082 \cdot 10^{-3} \mu_{\text{Я}}^2$, $B^{\text{теор}}(M1; {}^{162}\text{Dy}) = 0,52 \cdot 10^{-3} \mu_{\text{Я}}^2$ и $B^{\text{теор}}(M1; {}^{164}\text{Dy}) = 0,42 \cdot 10^{-3} \mu_{\text{Я}}^2$, что хорошо согласуется с экспериментальными значениями.

Расчеты для ${}^{156}\text{Gd}$. Достаточно полный анализ состояний положительной и отрицательной четности был проведен Баклином и др. в работе [76]. Ядро ${}^{156}\text{Gd}$ — одно из наиболее хорошо изученных ядер — является одним из первых ядер, в котором был обнаружен новый тип возбуждения — коллективные состояния $I^\pi = 1^+$ в области энергий $2 + 3,5$ МэВ [21]. В настоящее время в эксперименте по рассеянию γ -квантов идентифицировано несколько таких состояний в ${}^{156}\text{Gd}$ [62]. В табл.1.10 представлены энергии 1^+ -коллективных уровней, значения вероятностей $B(M1)$ и отношения приведенных вероятностей $R = B(M1; 1^+1 \rightarrow 2^+gr) / B(M1; 1^+1 \rightarrow 0^+gr)$. Также в β -распаде ${}^{156}\text{Eu}$ наблюдалось три 1^+ -состояния с энергиями 1966, 2027 и 2187 кэВ [76]. Установлены ротационные уровни, построенные на 1^+ -состояниях до 4^+ для первых двух полос и до 3^+ для последней полосы. Отношения $M1$ -переходов из этих уровней согласуются с адиабатическими значениями, вычисленными по правилу

Таблица 1.10

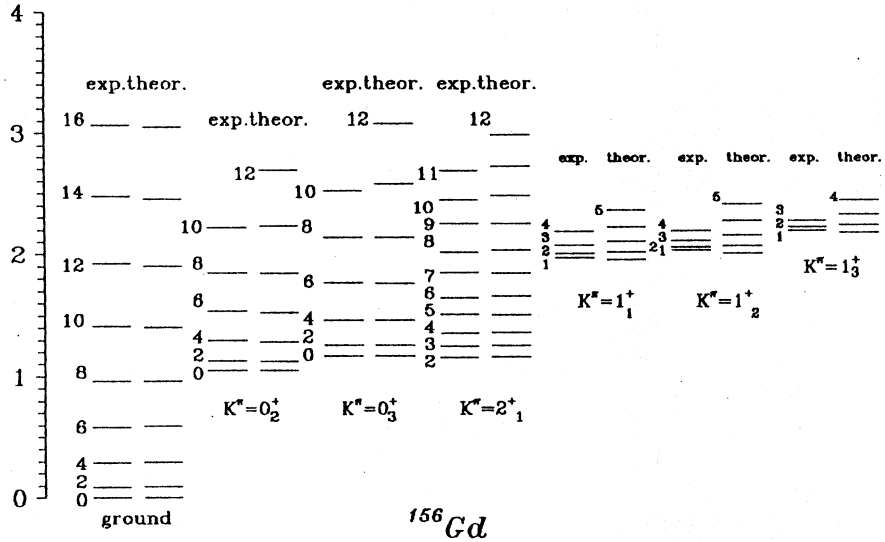
Характеристики 1^+ -состояний [79]

E_1 , кэВ	$R_{\text{экс}}$	$B(M1) \uparrow$, $\mu_{\text{Я}}^2$
2027	0,25(24)	0,16(5)
2974	0,45(8)	0,35(7)
3010	0,53(23)	0,09(2)
3050	0,39(17)	0,11(3)
3070	0,64(7)	1,21(23)
3122	0,47(20)	0,09(3)
3158	0,50(13)	0,34(7)
3218	0,48(11)	0,31(6)

Алаги, подтверждаают интерпретацию этих полос как полос $K^\pi = 1^+$ [76]. Уровень с энергией 2027 кэВ также наблюдался в эксперименте по рассеянию фотонов (см. табл.1.10).

В реакции $(\alpha, 2n)$ получены сведения об уровнях ротационных полос с $K^\pi = 0_1^+$ (основная) — до $I = 16^+$, $K^\pi = 0_2^+$ и 0_3^+ (β -вибрационные) — до $I = 10^+$ и $K^\pi = 2_1^+$ (γ -вибрационная) — до $I = 11^+$.

Для изучения свойств уровней приведенных полос проводились расчеты в рамках вышеописанной модели. В базисные состояния гамильтониана вклю-

$E, \text{МэВ}$ Рис.1.10. Энергии состояний положительной четности в ^{156}Gd

чены gr , 0_2^+ , 0_3^+ , 2_1^+ и все известные из эксперимента полосы с $K^\pi=1^+$. Энергии оснований 1^+ -полос также определялись из эксперимента:

$$\omega_{1_v} = E_{1_v}^{\text{эксп}}(I=1) - E_{\text{core}}^{\text{теор}}(I=1).$$

На рис.1.10 приведены теоретические и экспериментальные энергии состояний положительной четности.

Структура состояний gr , 0_2^+ , 0_3^+ и 2_1^+ -полос приведена в [20]. Основная полоса является более чистой сравнительно с 0_2^+ , 0_3^+ и 2_1^+ -полосами, эффекты смешивания в которых проявляются достаточно заметно. Особенно сильно смешиваются состояния 0_3^+ и 2_1^+ -полос. Это приводит к неадиабатичностям вероятностей электромагнитных переходов между состояниями полос положительной четности, в частности, к $E0$ -переходам из состояний 2_1^+ -полосы на вращательные уровни основной полосы.

Вычисление приведенных вероятностей $E2$ -переходов будем производить по формуле (1.10). В расчетах величина внутреннего квадрупольного

Таблица 1.11. Отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов
 $R_I = B(E2; I0_2 \rightarrow I_1 gr) / B(E2; I0_2 \rightarrow I_2 gr)$ [20]

I	I_1	I_2	R_I		
			Эксперимент	Теория	Алага
2	2	0	5,1 (5) [76] 2,7 (7) [78] 3,45 (34) [80]	4,1	1,43
2	4	2	1,1 (1) [76] 0,84 (8) [69]	0,74	1,80
4	4	2	2,3 (2) [76]	2,4	0,91
4	6	4	0,65 (9) [76] 0,7 (3) [78]	0,32	1,75
6	6	4	1,2 (8) [78]	1,8	0,81
10	10	8	> 1,7 [78]	1,33	0,74

момента бралась равной $Q_0 = 6,81(6)$ б [4]. Значения m_K подбирались из условия наилучшего согласия вероятностей $E2$ -переходов с экспериментальными данными. В табл.1.11 и 1.12 представлены отношения вероятностей $E2$ -переходов из 0_2^+ - и 2_1^+ -полос соответственно. Наиболее сильные отклонения от правила Алаги наблюдаются для отношений R_{IK} из состояний $\beta(0_2^+)$ -полосы. Это объясняется тем, что β -состояния оказываются менее коллективными, чем $\gamma(2_1^+)$ -состояния, и малая компонента последнего в волновых функциях β -полосы приводит к существенным отклонениям от адиабатической теории. Как видно из этих таблиц, используемая модель удовлетворительно воспроизводит экспериментальные данные.

В табл.1.13 проводится сравнение экспериментальных и адиабатических значений приведенной вероятности $E2$ -переходов в основной полосе, а также значений, вычисленных в рамках ИВА [78] и нашей модели. Как видно из таблицы, экспериментальные данные хорошо согласуются с адиабатическими значениями $B(E2)$, и, следовательно, можно говорить о том, что основная полоса при указанных спинах почти не смешивается с другими полосами. Этот вывод наглядно подтверждается результатами расчета, проведенного в рамках нашей модели.

Таблица 1.12. Отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов
 $R_1 = B(E2; I2_1 \rightarrow I_{1gr}) / B(E2; I2_{2gr})$ [20]

I	I_1	I_2	R_1		
			Эксперимент	Теория	Алага
2	2	0	1,75(55) [78] 1,60(9) [69] 1,56(17) [81] 1,96(22) [80] 1,60(12) [76]	1,90	1,43
2	4	2	0,090(9) [69] 0,105(3) [81] 0,14(2) [76]	0,060	0,05
3	4	2	0,56(21) [78] 0,695(8) [81] 0,77(15) [76]	0,65	0,40
4	4	2	5,81(24) [81] 5,9(6) [76]	4,4	2,94
5	6	4	1,22(16) [78] 1,45(19) [81] 1,40(16) [76]	1,16	0,57
6	6	4	5,9(14) [78]	5,55	3,7
7	8	6	2,0(12) [78]	1,62	0,67
9	10	8	2,5(12) [78]	2,1	0,72
10	10	8	$\simeq 5$ [78]	6,6	4,48

Используя экспериментальные данные $X_0(E0/E2) = 0,23(1)$ и $0,031(13)$ [4] для переходов из 0_2 - и 0_3 -уровней соответственно, по формуле (1.17) определяем численные значения матричных элементов $m'_{0_2} = 0,058(1) \text{ е} \cdot \text{б}$ и $m'_{0_3} = 0,023(4) \text{ е} \cdot \text{б}$. При этом для параметров m_{0_v} брались следующие

Таблица 1.13. Экспериментальные и теоретические значения приведенной вероятности $E2$ -переходов в основной полосе [20]

I	$B(E2; I^+gr \rightarrow (1-2)^+gr) \cdot 10^4 \text{ e}^2 \cdot \text{фм}^4$			
	Эксперимент [82]	IBA [78]	Теория	Адиаб.
2	0,92(3)	0,92	0,91	0,92
4	1,29(2)	1,29	1,29	1,31
6	1,47(4)	1,39	1,43	1,44
8	1,57(15)	1,39	1,50	1,51
10	1,59(9)	1,34	1,55	1,55

Таблица 1.14. Характеристики $E0$ -переходов между возбужденными состояниями ^{156}Gd [20]

$I^\pi K_v$	$E_{\text{ур}},$ кэВ	$E_\gamma,$ кэВ	$X_f(E0/E2)$			$B(E2) \cdot 10^{-4}, \text{e}^2 \cdot \text{б}^2$	
			Эксперимент	Теория	Адиаб.	Теория	Адиаб.
0^+0_2	1049	1049	0,23(1) [4]	0,23	0,23	144	144
2^+0_2	1258	1168	0,19(5) [41]	0,240	0,762	130	41
4^+0_2	1298	1010	0,20(4) [41]	0,091	0,838	277	37
6^+0_2	1540	956	0,18(8) [41]	0,071	0,855	318	37
8^+0_2	1848	883	0,05 – 0,08 [41]	0,065	0,862	331	36
10^+0_2	2220	804	0,06(3) [41]	0,061	0,865	335	36
0^+0_3	1168	1168	0,031(13) [4]	0,031	0,031	169	169
2^+0_3	1258	1169	0,017(9) [83]	0,096	0,105	45	48
4^+0_3	1462	1174	0,036(4) [83]	0,057	0,115	60	44
6^+0_3	1766	1181	—	0,040	0,117	71	43
8^+0_3	2134	1169	—	0,033	0,118	77	43
10^+0_3	2523	1107	—	0,028	0,119	81	43

величины: $m_{0_2} = 0,12 \text{ е} \cdot \text{б.}$ и $m_{0_3} = 0,13 \text{ е} \cdot \text{б.}$ Далее, по формуле (1.15) вычисляем приведенную вероятность $B(E0)$. В табл.1.14 представлены вычисленные значения $X_I(E0/E2)$, которые сравниваются с экспериментальными значениями [4,41,83] и вычисленными по адиабатической формуле (1.16). Также в табл.1.14 приводятся $B^{\text{теор}}(E2)$, вычисленные по (1.10), и адиабатические значения $B(E2)$, определяемые по формуле:

$$B(E2; I0_v \rightarrow Igr) = m_{0_v}^2 \frac{I(I+1)}{(2I-1)(2I+3)}. \quad (1.29)$$

Как видно из таблицы, с ростом углового момента различие между экспериментальными $X_I(E0/E2)$ и рассчитываемыми по правилу Алаги значениями увеличивается. То есть с увеличением I адиабатические значения $X_I(E0/E2)$ для переходов из 0_2^+ - и 0_3^+ -полос медленно растут и при определенных I приближаются к пределу, тогда как экспериментальные значения $X_I(E0/E2)$ имеют тенденцию к уменьшению. Это объясняется следующим:

а) в адиабатическом приближении $B(E0)$ является постоянной величиной, следовательно, причиной увеличения параметра $X_I^A(E0/E2)$ является поведение $B^A(E2)$ (см. табл.1.14);

б) смешивание состояний положительной четности приводит к уменьшению $B(E0)$ со спином I и к увеличению значения $B(E2)$, что приводит к уменьшению $X_I(E0/E2)$.

Вычисляем безразмерный ядерный параметр $E0$ -перехода, зависящий от структуры ядра:

$$\rho(E0; I0_v^+ \rightarrow Igr) = \frac{\langle Igr || m(E0) || I0_v^+ \rangle}{eR_0^2}, \quad (1.30)$$

где $R_0 = r_0 A^{1/3}$ и $r_0 = 1,2 \text{ фм.}$

На рис.1.11 проводится сравнение вычисленных и экспериментальных значений $\rho(E0)$. Как видно из рис.1.11, для переходов из 0_2^+ -полосы теоретические значения $\rho(E0)$ согласуются в пределах погрешности эксперимента, а для переходов из 0_3^+ -полосы дают качественное согласие.

Отметим, что экспериментальные значения $\rho(E0)$ определялись по формуле (1.30). При этом использовались данные для $X_I(E0/E2)$ и $B(E2)$, представленные в табл.1.14.

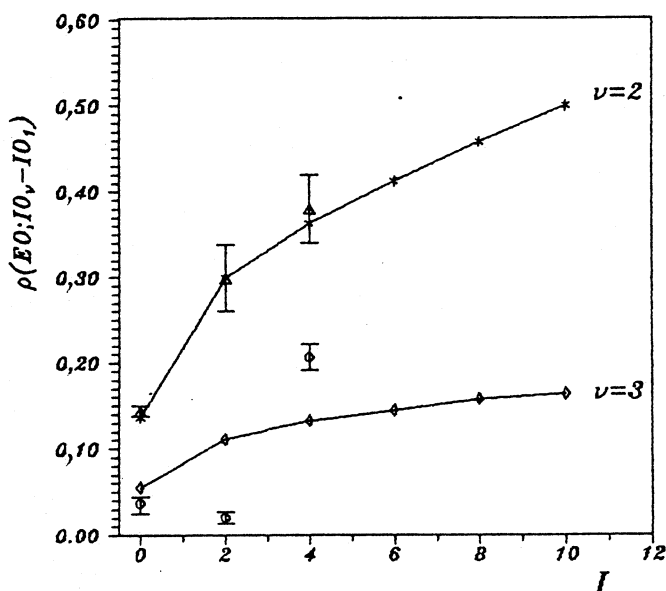


Рис.1.11. Зависимость безразмерного матричного элемента $\rho(E0; I0_v \rightarrow Igr)$ от спина I

В ядре ^{156}Gd наблюдаются $E0$ -переходы из состояний 2^+ , 1828 кэВ и 3^+ , 1916 кэВ полосы $K^\pi = 2_2^+$ на уровни $K^\pi = 2_1^+$, имеющие большие значения $X_2(E0/E2) = 1,2$ и $X_3(E0/E2) = 1,0$. Это, вероятно, связано с тем, что $E2$ -переходы между однофононными состояниями являются малыми, так как такие переходы проявляются в основном за счет gr -компонент в состояниях 2_1^+ - и 2_2^+ -полос.

Наши расчеты, проведенные с учетом кориолисова смешивания состояний положительной четности, хорошо воспроизводят экспериментальные данные. Используемая модель качественно описывает экспериментальные значения спектра энергий, вероятности квадрупольных электрических переходов из состояний 0_2^+ , 0_3^+ и 2_1^+ -полос на ротационные уровни основной полосы. Таким образом, в рамках проведенного нами теоретического анализа представляется возможность объяснить отклонения значений отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов $R_{IK} = B(E2; IK \rightarrow$

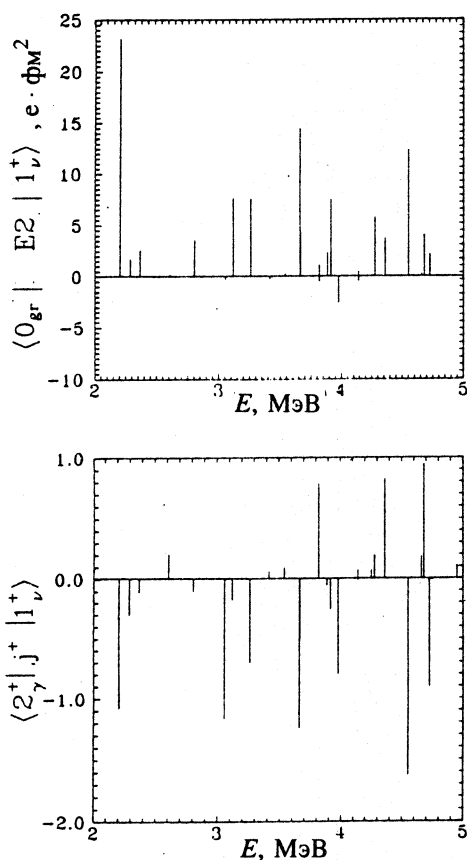


Рис.1.12. Вычисленные значения $E2$ -матричных элементов $\langle 0_{gr}^+ | E2 | 1_{\nu}^+ \rangle$ и матричных элементов кориолисова взаимодействия $\langle 2_{\gamma}^+ | j^+ | 1_{\nu}^+ \rangle$ для ^{166}Er [84]

ты кориолисова взаимодействия не являются свободными параметрами. Такая задача обсуждалась в [84,85], где проведен микроскопический анализ в рамках RPA с точным выделением духовых примесей, вызванных нарушением ротационной инвариантности гамильтониана.

На рис.1.12 показана корреляция между коллективными состояниями и матричными элементами Кориолиса [84]. Из рис.1.12 видно, что более коллективные 1_{ν}^+ -состояния имеют большие матричные элементы, связывающие их с γ -полосой.

Следует отметить, что знаки приведенных $E2$ -матричных элементов $\langle 0_{gr}^+ | E2 | 1_{\nu}^+ \rangle$ являются в основном положительными, а мат-

ричные элементы кориолисова взаимодействия $\langle 2_{\gamma}^+ | j^+ | 1_{\nu}^+ \rangle$ — отрицательными (см. рис.1.12). Это означает, что вклады состояний 1_{ν}^+ в матричные элементы $E2$ -переходов являются когерентными. Это усиливает неадиабатичность $E2$ -переходов, вызванную взаимодействием с 1_{ν}^+ -состояниями.

В работе [84] также показано, что если в вычислениях RPA ротационная инвариантность учитывается корректно, то кориолисово взаимодействие между основной и 1^+ -полосами должно быть точно равно нулю, и 1_{ν}^+ -полосы связаны силами Кориолиса только с γ -полосой. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о наличии связи основной полосы с другими полосами. Чтобы объяснить связь основной полосы с 1^+ - и γ -поло-

сами, следует учесть γ -деформацию и относительное движение протонной и нейтронной компонент, рассматриваемое в следующем разделе. При этом будет показано, что оператор внутреннего углового момента не является единственным оператором, описывающим связь с характерной для кориолисова смешивания зависимостью от квантовых чисел I и K .

2. ГИГАНТСКИЙ УГЛОВОЙ РЕЗОНАНС И СТРУКТУРА НИЖАЙШИХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР

В первом разделе отмечалась возможность описания неадиабатических характеристик состояний низколежащих полос деформированных ядер в рамках моделей, включающих кориолисово смешивание уровней этих полос с некоторой полосой, имеющей квантовые характеристики $K^\pi = 1^+$. Проведенный расчет в рамках RPA [84,85], содержащий анализ неадиабатических эффектов с позиций микроскопического подхода, в некоторой степени обосновывает такой феноменологический подход, свидетельствуя о наличии когерентности между матричными элементами кориолисова взаимодействия и электрического квадрупольного момента между состояниями γ -вибрационной и многочисленными 1^+ -состояниями из области «ножничной» моды возбуждения. Одновременно микроскопическое рассмотрение поставило вопрос о природе связи между основной и 1^+ -полосами, следы которой присутствуют в экспериментальных данных и учитываются в феноменологическом подходе наравне со связью 1^+ и других возбужденных полос.

В настоящем разделе рассматриваются физические причины, приводящие к такому смешиванию. Предполагается, что состояния полосы $K^\pi = 1^+$ соответствуют возбуждению гигантского углового резонанса (ГУР), предсказанного теоретически в работах [39,40] и вызываемого относительным отклонением осей симметрии протонной и нейтронной компонент ядра. Такие возбуждения подробно изучались в рамках различных подходов и были экспериментально идентифицированы в ряде ядер [21—28]. На основе этого предположения оказалось возможным построить модель с небольшим числом параметров, описывающую неадиабатические эффекты в спектре ротационных полос и в электромагнитных характеристиках состояний положительной четности деформированных четно-четных ядер.

2.1. Двухроторная модель ядра. Следуя [40], рассмотрим модель ядра, описываемого как два аксиальных ротатора (протонный и нейтронный), которые могут поворачиваться друг относительно друга, как показано на рис.2.1. Введем переменную θ , равную половине угла между осями

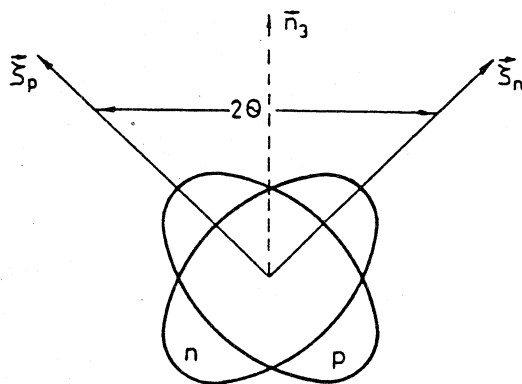


Рис.2.1. Относительное движение нейтронного и протонного роторов

симметрии роторов, направление которых определено единичными векторами ζ_p и ζ_n :

$$\cos(2\theta) = \zeta_p \zeta_n, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2. \quad (2.1)$$

Ориентацию ядра в целом определим правой ортонормированной тройкой векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= [\zeta_p \zeta_n] / \sin(2\theta), & \mathbf{n}_2 &= (\zeta_p - \zeta_n) / 2\sin \theta, \\ \mathbf{n}_3 &= (\zeta_p + \zeta_n) / 2\cos \theta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Движению в направлении угла θ противодействует сила, вклад в энергию которой определяется функцией $V(\theta)$. При $\theta \leq \pi/4$ (или при $\pi/2 - \theta \ll \pi/4$) считаем

$$V(\theta) = c\theta^2/2, \quad (V(\pi/2 - \theta) = c(\pi/2 - \theta)/2). \quad (2.3)$$

В работе [40] протонная и нейтронная компоненты рассматриваются как бесструктурные системы; здесь же допускается наличие внутренних возбуждений этих подсистем со свойствами, типичными для аксиальных ядер. Более конкретно внутренние состояния каждой из подсистем характеризуются сохраняющимся квантовым числом проекции внутреннего углового момента на ось симметрии подсистемы (k_p, k_n). Эти числа совпадают с проекцией полного протонного (нейтронного) углового момента на ось симметрии протонной (нейтронной) компоненты ядра:

$$(\zeta_p \mathbf{I}_p) \Psi = k_p \Psi, \quad (\zeta_n \mathbf{I}_n) \Psi = k_n \Psi. \quad (2.4)$$

Согласно [86,87], гамильтониан ядра записываем в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_{0,0} + \hat{H}_{0,1} + \hat{T}', \quad (2.5)$$

где

$$H_{0,0} = \frac{1}{4} (A_p^0 + A_n^0) (\hat{\mathbf{I}}^2 + \hat{\mathbf{S}}^2) + V(\theta) + \hat{H}_{\text{int}}, \quad (2.6)$$

$$\hat{H}_{0,1} = \frac{1}{2} (A_p^0 - A_n^0) (\hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{S}}), \quad (2.7)$$

$$\hat{T}' = \hat{T}'_{\beta} + \hat{T}'_{\gamma}, \quad (2.8)$$

$$\hat{T}'_{\beta} = a_{\beta,1} (\hat{H}_{0,0} - V(\theta) - \hat{H}_{\text{int}}) + a_{\beta,2} \hat{H}_{0,1},$$

$$\begin{aligned} \hat{T}'_{\gamma} = \hat{T}'_1 + \hat{T}'_2 + \hat{T}'_3 = & b_1 \hat{\mathbf{I}}_+^2 + \hat{\mathbf{I}}_-^2 b_1^+ + b_2 (\hat{\mathbf{I}}_+ \hat{\mathbf{S}}_+ + \hat{\mathbf{S}}_+ \hat{\mathbf{I}}_+) + \\ & + (\hat{\mathbf{S}}_- \hat{\mathbf{I}}_- + \hat{\mathbf{I}}_- \hat{\mathbf{S}}_-) \hat{b}_2^+ + \hat{b}_1 \hat{\mathbf{S}}_+^2 + \hat{\mathbf{S}}_-^2 b_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь A_i^0 — числовые параметры ($A_i^0 = 1/(2v_i)$, где v_i — момент инерции i -й подсистемы), $\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{I}}_p + \hat{\mathbf{I}}_n$ — оператор полного углового момента и $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{I}}_p - \hat{\mathbf{I}}_n$ — оператор «относительного движения двух ротаторов».

Собственные волновые функции $\hat{H}_{0,0}$, описывающего систему с аксиальной симметрией, ищем в виде [86,87]:

$$\begin{aligned} \Psi(ImkK\kappa n) = & \left(\frac{2I+1}{16\pi^2} \right)^{1/2} (1 + \delta_{K,0} \delta_{k,0})^{-1/2} \Phi_{\kappa,n}(x) \times \\ & \times (D_{MK}^I(\alpha, \beta, \gamma) \chi_k + (-1)^{I+K} D_{M,-K}^I(\alpha, \beta, \gamma) \chi_{-k}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь

$$K \geq 0, \quad k = k_p + k_n, \quad \kappa = |k - K| = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Для функций $\Phi_{\kappa,n}(x)$ имеем уравнение

$$\frac{\omega}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2} \left(\kappa^2 - \frac{1}{4} \right) + x^2 \right) \Phi_{\kappa,n}(x) = \mathcal{E}_{\kappa,n} \Phi_{\kappa,n}(x), \quad (2.12)$$

тельность уровней с квантовыми характеристиками $(k=0, K=\kappa=1, n)_{gr}$, $(k=0, K=\kappa=1, n)_{\beta}$ и $(k=2, K=1, 3; \kappa=1, n)_{\gamma}$ соответственно. Эти состояния связаны с основным, β - и γ -вибрационными состояниями дипольными магнитными переходами. Состояния $(k=0, K=\kappa=1, n=0)_{\beta}$ и $(k=2, K=1, 3; \kappa=1, n=0)_{\gamma}$ в настоящее время экспериментально не обнаружены. Но в работе [31] в рамках квазичастично-фононной модели проведены расчеты для изотопов $^{156,158}\text{Gd}$ и показано, что некоторые 1^+ -состояния имеют более сильные $M1$ -переходы не на основное, а на возбужденные состояния ядра.

Оператор $\hat{H}$ недиагонален в базисе, образованном функциями (2.10), (2.14), и его собственные функции являются смесью состояний с различными n , κ , и K . Отличными от нуля матричными элементами $\hat{H}_{0,1}$ являются

$$\begin{aligned} \langle IMk, K \pm 1, \kappa + 1, n' | H_{0,1} | IMkK\kappa n \rangle = \\ = \frac{1}{2} \omega_{\theta_0} \frac{A_p^0 - A_n^0}{A_p^0 + A_n^0} ((I \mp K)(I \pm K - 1)[1 + (-1)^I \delta_{K,0} \delta_{k,0}])^{1/2} \times \\ \times \left\{ -\frac{n \pm K + 1}{(n + \kappa + 1)^{1/2}} \delta_{n,n'} + (\kappa \mp K) \left(\frac{(n)!(n + \kappa)!}{n!(n' + \kappa + 1)!} \right)^{1/2} - \sqrt{n} \delta_{n',n-1} \right\} \\ (n' > n). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Этот матричный элемент описывает связь между состояниями с характерной для кориолисова смешивания зависимостью от квантовых чисел I и K . Но в оператор $\hat{H}_{0,1}$ в матричные элементы входит не сумма внутренних угловых моментов протонных и нейтронных компонент $\hat{J}_+ = \hat{j}_p^+ + \hat{j}_n^+$, а их разность $\hat{S}_+ = \hat{j}_p^+ - \hat{j}_n^+$ (см. формулу (2.7)).

2.2. Смешивание состояний с разной внутренней структурой. Рассмотрим теперь свойства оператора $\hat{T}'$ в формуле (2.8). Приступим к рассмотрению каждого из членов в формулах (2.8) и (2.9).

1. Оператор $a_{\beta,1} H_{0,0}$ является диагональным по всем коллективным квантовым числам и по k .

2. Оператор $a_{\beta,1} V(\theta)$ смешивает состояния как с одинаковыми, так и с разными значениями κ и n , причем матричные элементы этого оператора не зависят от квантового числа углового момента состояния. Таким образом,

оператор $a_{\beta,1}(\hat{H}_{0,0} - V(\theta) - \hat{H}_{\text{int}})$ приводит к сдвигу энергий оснований gr - и β -полос, к перенормировке момента инерции, а также к отклонениям от формулы жесткого ротатора в спектре этих полос.

3. Оператор $a_{\beta,2}\hat{H}_{0,1}$ в силу условий аксиальной симметрии смешивает состояния с одинаковыми значениями квантового числа $k = k_p + k_n$. Зависимость матричных элементов этого оператора от квантовых чисел I, K, k, n начального и конечного состояний полностью определяется формулой (2.16). Такое смешивание приводит к сдвигу энергий оснований β - и 1^+ -полос и дополнительной перенормировке моментов инерции.

4. Операторы в формуле (2.8) смешивают состояния с различными $k(k(1) - k(2) = 2)$, т.е. оператор $\hat{T}'_\gamma$ позволяет смешивать состояния полос gr , β и $K^\pi = 1^+$ с состояниями γ -полосы. Операторы $\hat{b}_1$ и $\hat{b}_2$ в гамильтониане (2.9) меняют квантовые числа k на 2 и могут связывать состояния gr - и β -полос с состояниями γ -полосы. Для них мы принимаем следующее выражение:

$$\hat{b}_l = b_l | \gamma \rangle \langle \alpha | + b_l | \alpha \rangle \langle \gamma |, \quad (2.17)$$

где $l = 1, 2$ и $\alpha = gr, \beta$.

При сделанных предположениях отличными от нуля матричными элементами от операторов в (2.8) по волновым функциям (2.10) являются

$$\begin{aligned} \langle IMK'K'kn | \hat{T}'_1 | IMKKkn \rangle &= [(1 + \delta_{K'0} \delta_{k'0})(1 + \delta_{K,0} \delta_{k,0})]^{1/2} \times \\ &\times \{ \langle k' | \hat{b}_1 | k \rangle \delta_{k',k-2} \delta_{K',K-2} [(I+K)(I-K+1)(I+K-1)(I-K+2)]^{1/2} + \\ &+ \langle k' | \hat{b}_1^+ | k \rangle \delta_{k',k+2} \delta_{K',K+2} [(I-K)(I+K+1)(I-K-1)(I+K+2)]^{1/2} \}, \quad (2.18) \end{aligned}$$

$$\langle IMK'K'k'n' | \hat{T}'_2 | IMKKkn \rangle = \frac{2i}{\theta_0} [(1 + \delta_{K',0} \delta_{k',0})(1 + \delta_{K,0} \delta_{k,0})]^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \langle k' | \hat{b}_2 | k \rangle \delta_{k',k-2} \delta_{K',K-1} [(I+K)(I-K+1)]^{1/2} \times \right.$$

$$\times \left[\langle k'n' | \frac{\partial}{\partial x} | kn \rangle + \left(k - K - \frac{1}{2} \right) \langle k'n' | \frac{1}{x} | kn \rangle \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \langle k' | \hat{b}_2^+ | \kappa \rangle \delta_{k'k+2} \delta_{K'K+1} [(I-K)(I+K+1)]^{1/2} \times \\
& \times \left[\langle \kappa' n' | \frac{\partial}{\partial x} | \kappa n \rangle - \left(k - K + \frac{1}{2} \right) \langle \kappa' n' | \frac{1}{x} | \kappa n \rangle \right], \quad (2.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle IMk'K' \kappa' n' | \hat{T}_3' | IMkK \kappa n \rangle = & - \frac{1}{2\theta_0^2} [(1 + \delta_{K'0} \delta_{k'0})(1 + \delta_{K,0} \delta_{k,0})]^{1/2} \delta_{k', k \pm 2} \times \\
& \times \left\{ \langle \mp k' | \hat{b}_1^+ | k \rangle \left[\langle \kappa' n' | \frac{\partial^2}{\partial x^2} | \kappa n \rangle + (\mp k \pm K)^2 \langle \kappa' n' | \frac{1}{x^2} | \kappa n \rangle \mp \right. \right. \\
& \left. \mp (k - K) \langle \kappa' n' | F(x) | \kappa n \rangle \right] + \langle k' | \hat{b}_1^+ | \pm k \rangle \left[\langle \kappa' n' | \frac{\partial^2}{\partial x^2} | \kappa n \rangle + \right. \\
& \left. \left. + (\pm k \mp K)^2 \langle \kappa' n' | \frac{1}{x^2} | \kappa n \rangle \mp (k - K) \langle \kappa' n' | F(x) | \kappa n \rangle \right] \right\}, \quad (2.20)
\end{aligned}$$

где

$$F(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Матричные элементы $\langle \kappa' n' | \frac{\partial}{\partial x} | \kappa n \rangle$, $\langle \kappa' n' | \frac{1}{x} | \kappa n \rangle$ и $\langle \kappa' n' | F(x) | \kappa n \rangle$ легко рассчитать, пользуясь формулой (2.14). Вообще говоря, они отличны от нуля при любом соотношении n и n' .

Учет недиагональных матричных элементов инерционных операторов ($A^{p,n}$) по разным внутренним функциям приводит к дополнительной перенормировке моментов инерции полос и к отклонениям от формулы жесткого ротатора в спектре полос. Кроме прямого смешивания коллективных полос, построенных на разных внутренних функциях, появляется смешивание таких полос с полосами $\kappa = 1$. Спиновая зависимость матричных элементов гамильтониана, связывающих состояния $\Delta \kappa = 1$, совпадает с таковой для гамильтониана кориолисова взаимодействия, так что в модели естественным образом возникает кориолисово взаимодействие β -, γ - и $K^\pi = 1^+$ -полос, эффекты которого рассмотрены, например, в первом разделе данного обзора.

2.3. Метод проекционных операторов в двухротаторной модели. Формулы предыдущего раздела свидетельствуют о том, что часть гамильтониана, не включенная в оператор $\hat{H}_{0,0}$, использованный для построения базисных функций, имеет недиагональные матричные элементы, связывающие каждое

из базисных состояний $\Psi(IMkK\kappa n)$ с бесконечным числом других состояний $n \neq n'$. Состояния, которые могут смешиваться, хорошо разделены по энергии (см. формулу (2.15)), так что роль каждого из них невелика, однако для последовательного учета эффектов смешивания необходимо просуммировать эффекты, связанные с влиянием многих высоколежащих состояний. Прямому использованию теории возмущений препятствует наличие недиагональных матричных элементов в гамильтоновской матрице, связывающих низколежащие ядерные состояния, смешивание которых может быть произвольно сильным. Удобным методом для учета высоколежащих состояний является метод проекционных операторов Фешбаха [88], делящих пространство состояний на две части.

Метод Фешбаха в модели. Следуя [88], введем оператор $\hat{P}$, проектирующий на пространство интересующих нас состояний (gr -, β - и γ -полос):

$$\hat{P} = \sum_{IM} [|IM_{gr}\rangle \langle IM_{gr}| + |IM\beta\rangle \langle IM\beta| + |IM\gamma\rangle \langle IM\gamma|]. \quad (2.21)$$

Пространство этих состояний будем называть P -пространством. Имея в виду приложение схемы в случае, когда данному числу соответствует несколько различных внутренних состояний, в P -пространство включены две полосы с квантовой характеристикой $K^\pi = 0^+$ (gr - и β -полосы), отличающиеся внутренними свойствами. Все остальные состояния с квантовыми характеристиками $(k=0, K=\kappa=1, n)_{gr}$, $(k=0, K=\kappa=1, n)_\beta$, $(k=2, K=\kappa=1, n)_\gamma$ и $(k=0, K=3, \kappa=1, n)_\gamma$, которые считаем расположенными достаточно высоко по энергии, включены в Q -пространство.

Для проектированного гамильтониана имеем

$$\hat{H}_{pp} = \hat{H}_{0,0}^P + \hat{P}_0 \hat{T}_1' \hat{P}_0. \quad (2.22)$$

В (2.22) включены $\hat{H}_{0,0}^P$, являющийся диагональным по базисным волновым функциям Ψ^0 , и часть оператора $\hat{T}_1'$, описывающего смешивание состояний полос в P -пространстве. Все остальные состояния считаем включенными в дополнительное Q -пространство. Хорошим приближением для наших целей является

$$\hat{H}_{QQ} = \hat{H}_{0,0}^0$$

Для гамильтониана $\hat{H}_{PQ}$ имеем

$$\hat{H}_{PQ} = \hat{P}\hat{H}_{0,1}\hat{Q} + \hat{P}\hat{T}'_{\beta}\hat{Q} + \hat{P}\hat{T}'_2\hat{Q} = \hat{H}_{QP}^+ . \quad (2.23)$$

Операторы в (2.23) смешивают состояния P -пространства с состояниями, включенными в Q -пространство.

Полная волновая функция определяется как сумма:

$$\Psi = P\Psi + Q\Psi = \Phi + \chi . \quad (2.24)$$

Волновая функция Φ в P -пространстве имеет вид

$$\Phi^{IK} = \sum_i \psi_i^{IK} \Phi_i^{IK} , \quad (2.25)$$

где ψ_i^{IK} — амплитуды смешивания состояний IK , включенных в P -пространство. Волновая функция Φ удовлетворяет уравнению

$$\hat{H}\Phi = E\Phi .$$

Мы считаем, что собственные значения низколежащих состояний существенно меньше собственных значений оператора $\hat{H}_{QQ}$, а последние считаем близкими к собственным значениям $\hat{H}_{0,0}^Q = Q\hat{H}_{0,0}Q$.

На этом основании используем приближение

$$\hat{H} = \hat{H}_{PP} + \hat{H}_{PQ} \frac{1}{E - \hat{H}_{0,0}^Q} \hat{H}_{QP} . \quad (2.26)$$

Для матричных элементов $\hat{H}$ после этого получаем выражение

$$\hat{H}_{ii'} = (\hat{H}_{PP})_{ii'} + \sum_j (\hat{H}_{PQ})_{ij} \frac{1}{E - E_j} (\hat{H}_{QP})_{ji'} , \quad (2.27)$$

где j обозначает квантовые числа базисных функций, включенных в Q -пространство (дополнительные по отношению к I и M). Для энергии E в знаменателе второго члена мы принимаем значение энергии состояний иррадиационной полосы.

Используя приведенные в предыдущем разделе формулы для матричных элементов гамильтониана, получаем следующее выражение для матрицы $\tilde{H}$ с матричными элементами, определенными формулой (2.27):

$$\tilde{H} = \sum_{i, i'} [\omega_i \delta_{i, i'} + P_{i, i'} I(I+1)], \quad (2.28)$$

где $i, i' = gr, \beta$ и γ ;

$$P_{gr, gr} = A[1 - A_0^2(1 + |\langle gr | a_{\beta, 2} | \beta \rangle|^2)] - \frac{4}{A} |\langle gr | b_2 | \gamma \rangle|^2,$$

$$P_{\beta, \beta} = A[1 - A_0^2(1 + \eta^2 |\langle \beta | a_{\beta, 2} | gr \rangle|^2)] - \frac{4}{A} |\langle \beta | b_2 | \gamma \rangle|^2,$$

$$P_{\gamma, \gamma} = A[1 - A_0^2 \Sigma'] - \frac{2}{A} [|\langle gr | b_2 | \gamma \rangle|^2 + |\langle \beta | b_2 | \gamma \rangle|^2] \left[1 - \frac{2}{I(I+1)} \right],$$

$$P_{\beta, gr} = A[\langle gr | a_{\beta, 1} | \beta \rangle - A_0^2 \langle gr | a_{\beta, 2} | \beta \rangle (1 + \eta)],$$

$$P_{gr, \gamma} = \sqrt{2} [\langle gr | b_1 | \gamma \rangle - A_0 \langle gr | a_{\beta, 2} | \beta \rangle \langle \beta | b_2 | \gamma \rangle] \left[1 - \frac{2}{I(I+1)} \right]^{1/2},$$

$$P_{\beta, \gamma} = \sqrt{2} [\langle \beta | b_1 | \gamma \rangle - A_0 \eta \langle \beta | a_{\beta, 2} | gr \rangle \langle gr | b_2 | \gamma \rangle] \left[1 - \frac{2}{I(I+1)} \right]^{1/2}. \quad (2.29)$$

$A = \frac{1}{2} \omega \theta_0^2$ — инерционный параметр остова,

$$A_0 = (A_p^0 - A_n^0) / (A_p^0 + A_n^0), \quad \Sigma' = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)(n+1)} \approx 6,543,$$

ω_i — энергии оснований полос. Отметим, что в диагональных членах все величины, не зависящие от спина I , включены в ω_i .

Электромагнитные переходы. Вычислим матричный элемент от мультипольного оператора $\hat{m}(\lambda, \mu)$. В рамках данной модели матричный элемент от оператора $\hat{m}(\lambda, \mu)$ по волновым функциям (2.24) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \Psi_2^{I_2} \rangle &= \langle \Phi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \Phi_2^{I_2} \rangle + \langle \Phi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \chi_2^{I_2} \rangle + \\ &+ \langle \chi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \Phi_2^{I_2} \rangle + \langle \chi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \chi_2^{I_2} \rangle, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где

$$\langle \Phi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \Phi_2^{I_2} \rangle = \sum_{ii'} \psi_i^{I_1} \psi_{i'}^{I_2} \langle \chi_i^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \chi_{i'}^{I_2} \rangle, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \chi_2^{I_2} \rangle = \\ & = \sum_j \frac{\sum_{ii'} \psi_i^{I_1} \psi_{i'}^{I_2} \langle \Phi_i^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \Phi_j^{I_2} \rangle \langle \Phi_j^{I_2} | \hat{H}_{QP} | \Phi_{i'}^{I_2} \rangle}{E - E_j}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} & \langle \chi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \Phi_2^{I_2} \rangle = \\ & = \sum_j \frac{\sum_{ii'} \psi_i^{I_1} \psi_{i'}^{I_2} \langle \Phi_i^{I_1} | \hat{H}_{PQ} | \Phi_j^{I_1} \rangle \langle \Phi_j^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \Phi_{i'}^{I_2} \rangle}{E - E_j}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & \langle \chi_1^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \chi_2^{I_2} \rangle = \\ & = \sum_{ij'} \frac{\sum_{ii'} \psi_i^{I_1} \psi_{i'}^{I_2} \langle \Phi_i^{I_1} | \hat{H}_{PQ} | \Phi_j^{I_1} \rangle \langle \Phi_j^{I_1} | \hat{m}(\lambda, \mu) | \Phi_{j'}^{I_2} \rangle \langle \Phi_{j'}^{I_2} | \hat{H}_{QP} | \Phi_{i'}^{I_2} \rangle}{(E - E_j)(E - E_{j'})}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Здесь суммирование идет по индексам i - и j -состояний P - и Q -пространств соответственно.

Для магнитного дипольного перехода используем мультипольный оператор [40]. Изоскалярный оператор $M_0(M1, \mu)$ в [40] дает вклад только в статистический магнитный момент ядра в состоянии с I [40,86]. Изовекторный магнитный дипольный момент $M_0(M1, \mu)$ также дает вклад в статический магнитный момент и не изменяет внутреннего состояния ядра, т.е. является диагональным по χ_k . Следовательно, $M1$ -переход между собственными функциями $\hat{H}_{0,0}^P$ отсутствует. Согласно [40], отличные от нуля матричные элементы от $M_0(M1, \mu)$ между функциями P -пространства ($i \equiv kK, k=0$,

$n=0$) и функциями Q -пространства ($j \equiv k, K \pm 1, \kappa = 1, n'$) определяются формулой:

$$\begin{aligned} & \langle I_2 M_2 k, K \pm 1, \kappa + 1, n_2 | m_\theta(M1, \mu) | I_1 M_1 k K \kappa n_1 \rangle = \\ & = \pm \frac{i}{\theta_0} \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{1/2} (g_p - g_h) \frac{e\hbar}{2mc} \left[\frac{1 + \delta_{K,0} \delta_{k,0}}{2} \right]^{1/2} \times \\ & \times \left(\frac{2I_1 + 1}{2I_2 + 1} \right)^{1/2} C_{I_1 M_1, 10}^{I_2 M_2} C_{I_1 K, 1 \pm 1}^{I_2 K \pm 1} \left\{ \frac{n_1 \mp (k - K) + 1}{(n_1 + \kappa + 1)^{1/2}} \delta_{n_1 n_2} + \right. \\ & \left. + (\pm K \mp k - \kappa) \left[\frac{n_2!(n_1 + \kappa)!}{n_1!(n_2 + \kappa + 1)!} \right]^{1/2} + \sqrt{n_1} \delta_{n_2 n_1 - 1} \right\} \\ & (n_2 > n_1). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Учет смешивания полос P - и Q -пространств в формализме Фешбаха, описанном в предыдущем разделе, приводит к появлению $M1$ -переходов между состояниями P -пространства, т.е. матричные элементы (2.32) и (2.33) являются отличными от нуля. Явное выражение для $\langle \Phi_i^{I_1^1} | \hat{m}(M1) | \Phi_j^{I_2^2} \rangle$ получается подстановкой (2.35) в формулы (2.32) и (2.33):

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{gr}^{I_f} | M_\theta(M1; \mu) | \Psi_K^{I_i} \rangle = & - \left(\frac{3}{16\pi} \right)^{1/2} (g_p - g_n) \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right) \times \\ & \times \sqrt{2I_i + 1} \sum_{i, i'} \Psi_i^{I_f gr} \Psi_{i'}^{I_i K} a_{i, i'}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$a_{gr, gr} = a_{\beta, \beta} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{I_i(I_i + 1)} C_{I_i 1; 1-1}^{I_f 0} - \sqrt{I_f(I_f + 1)} C_{I_i 0; 11}^{I_f 1} \right],$$

$$\begin{aligned} a_{\gamma, \gamma} = & \frac{A_0}{2\sqrt{2}} \left[\sqrt{I_i(I_i + 1) - 2} C_{I_i 1; 11}^{I_f 2} - \sqrt{I_f(I_f + 1) - 2} C_{I_i 2; 11}^{I_f 1} - \right. \\ & \left. - 3\sqrt{I_f(I_f + 1) - 6} C_{I_i 2; 11}^{I_f 3} + 3\sqrt{I_i(I_i + 1) - 6} C_{I_i 3; 1-1}^{I_f 2} \right], \end{aligned}$$

$$a_{gr, \beta} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \langle gr | a_{\beta, 2} | \beta \rangle \left[\eta \sqrt{I_i(I_i + 1)} C_{I_i 1; 1-1}^{I_f 0} - \sqrt{I_f(I_f + 1)} C_{I_i 0; 11}^{I_f 1} \right],$$

$$a_{\beta, gr} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \langle gr | a_{\beta, 2} | \beta \rangle \left[\sqrt{I_i(I_i + 1)} C_{I_i 1; 1-1}^{I_f 0} - \eta \sqrt{I_f(I_f + 1)} C_{I_i 0; 11}^{I_f 1} \right],$$

$$a_{\alpha, \gamma} = \frac{\langle \alpha | b_2 | \gamma \rangle}{A} \left[\sqrt{I_i(I_i + 1)} - 2 C_{I_i 1; 1-1}^{I_f 0} + \sqrt{I_f(I_f + 1)} C_{I_i 2; 1-1}^{I_f 1} \right],$$

$$a_{\gamma, \alpha} = - \frac{\langle \alpha | b_2 | \gamma \rangle}{A} \left[\sqrt{I_i(I_i + 1)} C_{I_i 1; 1-1}^{I_f 2} + \sqrt{I_f(I_f + 1)} - 2 C_{I_i 0; 11}^{I_f 1} \right],$$

где $\alpha = gr, \beta, g_p$ и g_n — гиромагнитные отношения протонной и нейтронной подсистем.

Формула (2.36) для приведенных вероятностей $M1$ -переходов из нечетных состояний γ -полосы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} B(M1; I_\gamma \rightarrow (I-1)K) &= \frac{3}{16\pi} (g_p - g_n)^2 \left(\frac{e\hbar}{2mc} \right)^2 \times \\ &\times \left(\frac{I+2}{2I+1} \right) \left\{ \frac{\sqrt{2}}{A} [\langle gr | b_2 | \gamma \rangle \Psi_{gr}^{I-1K} + \right. \\ &\left. + \langle \beta | b_2 | \gamma \rangle \Psi_{\beta}^{I-1K}] \sqrt{I^2 - 1} + 4A_0 \sqrt{\frac{I-2}{I}} \Psi_{\gamma}^{I-1K} \right\}^2 (\Psi_{\gamma}^{I\gamma})^2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для магнитного момента коллективных состояний имеем

$$\mu = g_R(I) \cdot I, \quad (2.38)$$

где

$$g_R(I) = \frac{1}{2} (g_p + g_n) - \frac{1}{2} (g_p - g_n) \sum_{i, i'} \Psi_i^{IK} \Psi_{i'}^{IK} a_{i, i'}, \quad (2.39)$$

$$a_{gr, gr} = a_{\beta, \beta} = A_0,$$

$$a_{\gamma, \gamma} = A_0 [1 - 8/I(I+1)],$$

$$a_{\beta, gr} = a_{gr, \beta} = A_0 \langle \beta | a_{\beta, 2} | gr \rangle (1 + \eta),$$

$$a_{gr, \gamma} = a_{\gamma, gr} = \frac{\sqrt{2}}{A} \langle gr | b_2 | \gamma \rangle [1 - 2/I(I+1)]^{1/2},$$

$$a_{\gamma, \beta} = a_{\beta, \gamma} = \frac{\sqrt{2}}{A} \langle \beta | b_2 | \gamma \rangle [1 - 2/I(I+1)]^{1/2}.$$

Для описания g_R -фактора состояний P -пространства появляется некоторый дополнительный параметр $\frac{1}{2}(g_p + g_n)$, который определяется из эксперимента.

Аналогичным образом получаем выражение для приведенной вероятности $E2$ -переходов, введя следующее выражение для оператора квадрупольного электрического момента ядра:

$$M(E2, \mu) = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^2(\Omega) m'_{2\nu} + \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} D_{\mu 0}^2(\Omega) Q_0, \quad (2.40)$$

где

$$m'_{2\nu} = m_{\text{IV}}(|\nu \rangle \langle gr| + |gr\rangle \langle \nu|). \quad (2.41)$$

Здесь $m'_{2\nu}$ определены в системе координат, связанной с ядром, Q_0 — внутренний квадрупольный момент ядра и $|\nu\rangle = |\beta\rangle, |\gamma\rangle$. Изовекторная часть оператора (2.40) обсуждается ниже.

Формула (2.31) описывает вероятности $E2$ -переходов между состояниями gr -, β - и γ -полос, включенных в P -пространство. Приведенный матричный элемент $E2$ -перехода от мультипольного оператора (2.40), вычисленный по (2.31), имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{gr}^{I_2} \| M(E2) \| \Phi_K^{I_1} \rangle = & \sqrt{2I_1 + 1} \left\{ \left(\frac{5}{16\pi} \right)^{1/2} Q_0 \times \right. \\ & \times \left[\psi_{gr}^{I_2 gr} \psi_{gr}^{I_1 K} C_{I_1 0; 20}^{I_2 0} + \sum_i \psi_{K_i}^{I_2 gr} \psi_{K_i}^{I_1 K} C_{I_1 K_i; 20}^{I_2 K_i} \right] + \\ & \left. + \sqrt{2} \left[\psi_{gr}^{I_2 gr} \sum_i \frac{m_i \psi_i^{I_1 K}}{\sqrt{1 + \delta_{K_i, 0}}} C_{I_1 K_i; 2 - K_i}^{I_2 0} + \psi_{gr}^{I_1 K} \sum_i \frac{m_i \psi_i^{I_2 gr}}{\sqrt{1 + \delta_{K_i, 0}}} C_{I_1 0; 2 K_i}^{I_2 K_i} \right] \right\}. \quad (2.42) \end{aligned}$$

Это уравнение описывает основную компоненту вероятности переходов между состояниями P -пространства, и матричные элементы (2.32) и (2.33) от квадрупольного оператора равны нулю.

2.4. Влияние гигантских угловых резонансов на электромагнитные характеристики низколежащих уровней. Расчеты проводились для изотопов Ег. Параметры модели подбирались следующим образом. Энергии оснований gr - и β -полос брались из эксперимента. Инерционный параметр A

определяли, используя экспериментальную энергию $E_{gr}^{\text{exp}}(I=2)$ основной полосы. Параметры A_0 и ω_γ определялись по экспериментальным данным энергии состояний γ -полосы с нечетными I .

Смешивание состояний приводит к сильному нарушению правил адиабатической теории для ветвления переходов. Эффекты смешивания проще всего интерпретировать, используя волновые функции первого приближения теории возмущений по параметрам связи полос [89]:

$$\begin{aligned}
 |grIM\rangle &= |gr(K=0)IM\rangle - \mathcal{E}_{gr,\beta} I(I+1) |\beta(K=0)IM\rangle - \\
 &\quad - \mathcal{E}_{gr,\gamma} \sqrt{2} \tilde{I} |\gamma(K=2)IM\rangle, \\
 |\beta IM\rangle &= |\beta(K=0)IM\rangle + \mathcal{E}_{gr,\beta} I(I+1) |gr(K=0)IM\rangle - \\
 &\quad - \mathcal{E}_{\beta,\gamma} \sqrt{2} \tilde{I} |\gamma(K=0)IM\rangle, \\
 |\gamma IM\rangle &= |\gamma(K=0)IM\rangle + \sqrt{2} \tilde{I} [\mathcal{E}_{gr,\gamma} |gr(K=0)IM\rangle + \\
 &\quad + \mathcal{E}_{\beta,\gamma} |\beta(K=0)IM\rangle],
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{gr,\beta} &= \frac{A\langle gr|a_{\beta,1}|\beta\rangle}{\omega_\beta}, \quad \mathcal{E}_{\alpha,\gamma} = \frac{\langle \alpha|b_1|\gamma\rangle}{\omega_\gamma - \omega_\alpha}, \\
 \tilde{I} &= I(I+1) \left[1 - \frac{2}{I(I+1)} \right]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Используя выражения (2.40) для матричного элемента оператора квадрупольного момента распределения заряда, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
 \langle grI_2 \| m(E2) \| \gamma I_1 \rangle &= \langle gr(K=0)I_2 \| m(E2) \| \gamma(K=2)I_1 \rangle + \\
 &+ \sqrt{2} \tilde{I}_1 \left\{ \mathcal{E}_{gr,\gamma} + \mathcal{E}_{\beta,\gamma} \left(\frac{16\pi}{5} \right)^{1/2} \frac{m_\beta}{Q_0} \right\} \langle gr(K=0)I_2 \| \hat{m}(E2) \| gr(K=0)I_1 \rangle - \\
 &- \sqrt{2} \tilde{I}_1 \mathcal{E}_{gr,\gamma} \langle \gamma(K=2)I_2 \| m(E2) \| \gamma(K=2)I_1 \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Для отношения приведенных вероятностей $E2$ -переходов из γ -вибрационной полосы имеем формулу:

$$R_{I\gamma} = \frac{B(E2; I_{i\gamma} \rightarrow I_{fgr})}{B(E2; I_{i\gamma} \rightarrow I'_{fgr})} = \left| \frac{C_{I_i 2, 2-2}^{I_f 0} + \frac{Z_\gamma(0)}{\sqrt{24}} \tilde{I}_i C_{I_i 0; 20}^{I_f 0} - \frac{Z_\gamma(2)}{\sqrt{24}} \tilde{I}_f C_{I_i 2; 20}^{I_f 2}}{C_{I_i 2, 2-2}^{I_f' 0} + \frac{Z_\gamma(0)}{\sqrt{24}} \tilde{I}_i C_{I_i 0; 20}^{I_f' 0} - \frac{Z_\gamma(2)}{\sqrt{24}} \tilde{I}_f C_{I_i 2; 20}^{I_f' 2}} \right|^2. \quad (2.45)$$

Ветвление переходов из γ -полос полностью определяется двумя не зависящими от спина параметрами

$$Z_\gamma(2) = \varepsilon_{gr, \gamma} \sqrt{24} \frac{\sqrt{5/16\pi} Q_0}{m_\gamma},$$

$$Z_\gamma(0) = \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_{\beta, \gamma}}{\varepsilon_{gr, \gamma}} \left(\frac{16\pi}{5} \right)^{1/2} \frac{m_\beta}{Q_0} \right\} Z_\gamma(2). \quad (2.46)$$

Спиновая зависимость приведенных вероятностей переходов, рассчитанная таким образом, совпадает с таковой для случая двух смешивающихся полос, обладающих разными внутренними квадрупольными моментами [47]. Фактор

$$1 + \frac{\varepsilon_{\beta, \gamma}}{\varepsilon_{gr, \gamma}} \left(\frac{16\pi}{5} \right)^{1/2} \frac{m_\beta}{Q_0}$$

перенормирует внутренний квадрупольный момент полосы основного состояния.

Значения матричных элементов $\langle gr | b_1 | \gamma \rangle$, $\langle \beta | b_1 | \gamma \rangle$, описывающих прямые смешивания gr -, β - и γ -полос, находили по формуле (2.46). При этом параметры $Z_\gamma(K)$ определяли по формуле (2.45), используя экспериментальные данные об отношениях приведенных вероятностей $E2$ -переходов из γ -вибрационной полосы. Параметры m_β , m_γ найдены по формуле (1.12) и (1.13) с использованием экспериментальных данных $B(E2)$ для ^{164}Er [4]. Свободными параметрами модели являлись: η , $\langle gr | a_{\beta, 2} | \beta \rangle$, $\langle gr | b_2 | \gamma \rangle$ и

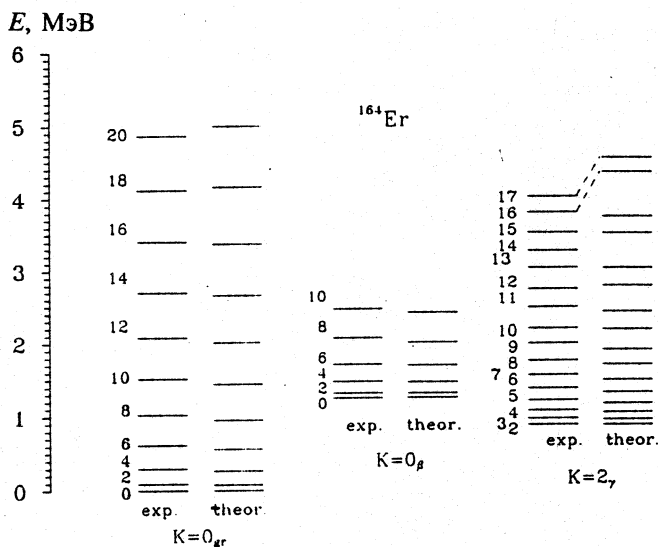


Рис.2.3. Сравнение экспериментальных и теоретических энергий состояний положительной четности для ^{164}Er

$\langle \beta | b_2 | \gamma \rangle$, которые определялись по методу наименьших квадратов из условия наилучшего согласия теоретического спектра энергий с экспериментом. Расчеты спектров коллективных состояний положительной четности для изотопов $^{164,166,168}\text{Er}$ приведены на рис.2.3—2.5 соответственно. Из рис.2.3 видно, что при спинах $I \geq 14$ в γ -полосе ^{164}Er наблюдается отклонение теории от эксперимента. Это, наверное, связано с тем, что в P -пространство не включены экспериментально наблюдаемые:

а) полосы с $K^\pi = 0^+$ с энергиями оснований полос 1,698, 1,766, 2,173 и 2,185 МэВ [4,5];

б) выстроенная полоса, начинающаяся со спина $I = 12$, пересекающаяся с основной и приводящая к обратному загибу момента инерции.

Отметим, что мы ограничиваемся изучением свойств низковозбужденных уровней. Пренебрегаемые полосы не так сильно влияют на характеристики изучаемых уровней.

Приведенные вероятности $E2$ -переходов из γ -вибрационной полосы по (2.42) вычисляли с определенными выше значениями $m_0 = \pm 0,10$ б, $m_2 = \pm 0,27$ б и $Q_0 = 7,42$ б [4].

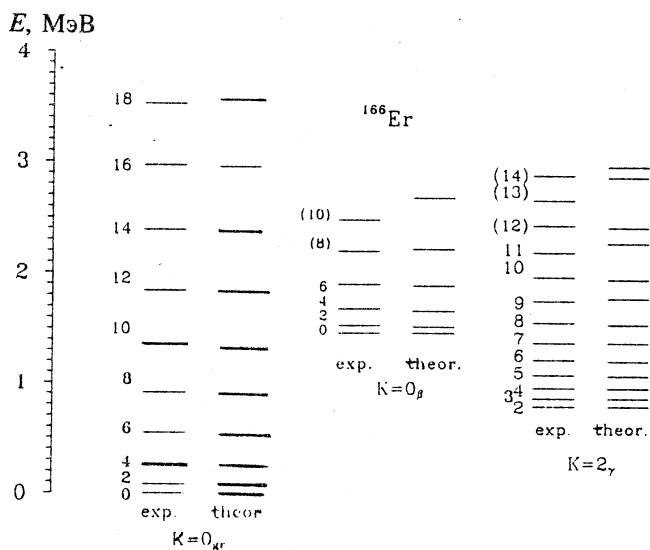
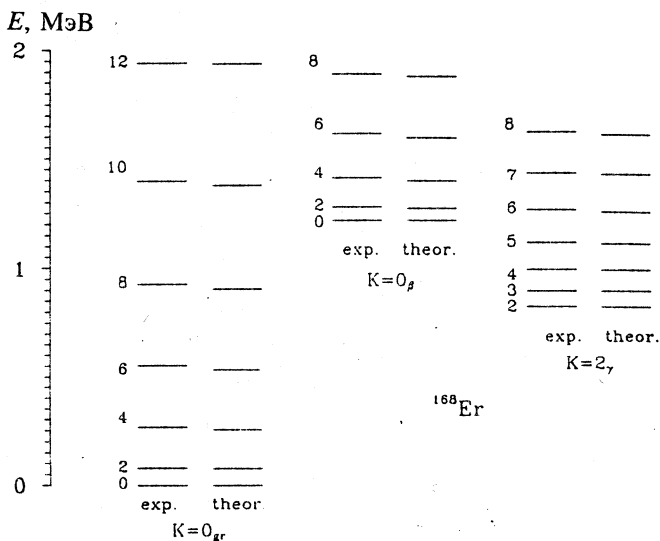
Рис.2.4. То же, что на рис.2.3, для ^{166}Er Рис.2.5. То же, что на рис.2.3, для ^{168}Er

Таблица 2.1. Значения $B(E2)$ для $\gamma \rightarrow gr$ -переходов в ^{168}Er

Переходы	$B(E2), e^2 \cdot \text{б}^2$		
	[90]	[91]	ДРМ [77]
$2_\gamma \rightarrow 0_{gr}$	0,028(2)	0,028	0,026
$\rightarrow 2_{gr}$	0,051(7)	0,066	0,046
$\rightarrow 4_{gr}$	0,0035(5)	0,0025	0,0035
$3_\gamma \rightarrow 2_{gr}$	0,046(13)	0,054	0,047
$\rightarrow 4_{gr}$	0,030(8)	0,041	0,029
$4_\gamma \rightarrow 2_{gr}$	0,0094(14)	0,0068	0,012
$\rightarrow 4_{gr}$	0,048(7)	0,080	0,055
$\rightarrow 6_{gr}$	0,0065(10)	0,0039	0,0089
$5_\gamma \rightarrow 4_{gr}$	0,027(4)	0,036	0,036
$\rightarrow 6_{gr}$	0,034(6)	0,054	0,041
$6_\gamma \rightarrow 4_{gr}$	0,005(1)	0,0021	0,0079
$\rightarrow 6_{gr}$	0,043(7)	0,079	0,055

В табл.2.1 приводятся значения $B(E2)$ из γ -полосы для ^{168}Er и сравниваются с экспериментом [90], а также с теоретическими значениями $B(E2)$, вычисленными в рамках МВБ2 [91]. Как видно из табл.2.1, значения $B(E2)$, вычисленные в рамках нашей модели, лучше согласуются с экспериментом.

В работе [92] Фахландером и др. экспериментально определены значения матричных элементов $E2$ -переходов между состояниями положительной четности в ^{166}Er , где матричный элемент $\langle (I-2) \gamma || E2 || I_{gr} \rangle$ имеет не монотонную зависимость от углового момента I . Такое поведение матричного элемента удачно описывает данная модель (см. рис.2.6). Другие модели [92], в том числе модель, рассматривающая кориолисово смешивание состояний полос через $\Delta K = 1$, не позволяют описать подобную ситуацию, хотя последняя модель хорошо воспроизводит отношения вероятностей $E2$ -переходов из состояний γ -полосы (см. табл.1.3). В табл.2.2 представлены матричные элементы $E2$ -переходов для ^{166}Er , вычисленные в рамках данной модели, которые сравниваются с вычисленными ИВА-1 и экспериментом [92].

В табл.1.2 + 1.4 приводятся теоретические значения отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов для $^{164,166,168}\text{Er}$. Они сравниваются с

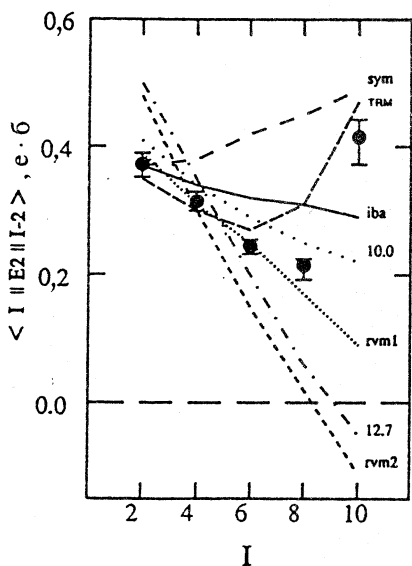


Рис.2.6. Спиновая зависимость экспериментальных и вычисленных значений $I_\gamma \rightarrow (I - 2)_{gr}$ матричных элементов в ^{166}Er .

Приведены вычисленные значения матричных элементов в рамках следующих моделей: (sym) — модель симметричного ротатора, модель асимметричного ротатора [93] (10,0 и 12,7, вычисленные со значениями $\gamma = 10^\circ$ и $12,7^\circ$ соответственно), ротационно-вибрационная модель [94] (RVM), модель взаимодействующих бозонов [95] (IBM) и двухротаторная модель [77] (TRM)

экспериментальными данными и со значениями, вычисленными по формуле Алаги. Как видно из таблиц, модель удовлетворительно описывает отклонение отношений приведенных вероятностей $E2$ -переходов от правила Алаги,

используя одинаковый внутренний квадрупольный момент Q_0 для основной ($K=0$) и γ ($K=2$) полос, в отличие от работы [47], где $Q_0(K=0) \neq Q_0(K=2)$. Здесь надо отметить, что $B(E2)$ вычислялся одним набором m_K и Q_0 для всех изотопов Ер.

Вычислялись коэффициенты смешивания мультиполей δ . В табл.1.5 и 1.6 сравниваются δ , вычисленные в рамках данной модели, с экспериментальными значениями для $^{164,168}\text{Er}$. Наилучшее воспроизведение δ получилось при

$$B(M1; 00_{gr} \rightarrow 1^+1) = \frac{\omega_1}{2A} \frac{3}{16\pi} (g_p - g_n)^2;$$

$B(M1; 00_{gr} \rightarrow 1^+1) = 0,8 \mu_J^2$ для ^{164}Er и $1,75 \mu_J^2$ для $^{166,168}\text{Er}$ при фиксированном значении $\omega_1 = 3$ МэВ. Вычисления по МВБ2 для ^{168}Er дают $B(M1) = 1,5 \mu_J^2$ [96]. Эксперимент [22,23] для ^{168}Er дает $B(M1) = 1,5 \mu_J^2$ и $\omega_1 = 3,4$ МэВ. Эксперименты (e, e') и ядерно-резонансная флюоресценция для суммы переходов $\sum B(M1) \uparrow (E_x \leq 4 \text{ МэВ})$ в ^{168}Er дают $(2,50 \pm 0,21) \mu_J^2$ и $(2,20 \pm 0,16) \mu_J^2$ соответственно [97,98]. Они всегда больше, чем наши

**Таблица 2.2. Матричные элементы $E2$ -переходов
между состояниями положительной четности в ^{166}Er**

Переходы	Эксперимент [92]	Теория	
		IBA-1 [92]	ДРМ [77]
$2_{gr} \rightarrow 0_{gr}$	$2,28^{+0,11}_{-0,11}$	2,40	2,33
$4_{gr} \rightarrow 2_{gr}$	$3,86^{+0,12}_{-0,12}$	3,84	3,75
$6_{gr} \rightarrow 4_{gr}$	$4,70^{+0,19}_{-0,14}$	4,79	4,76
$8_{gr} \rightarrow 6_{gr}$	$5,81^{+0,20}_{-0,20}$	5,52	5,60
$10_{gr} \rightarrow 8_{gr}$	$6,47^{+0,25}_{-0,25}$	6,08	6,35
$12_{gr} \rightarrow 10_{gr}$	$7,00^{+0,30}_{-0,30}$	6,51	7,01
$14_{gr} \rightarrow 12_{gr}$	$8,15^{+0,41}_{-0,86}$	6,81	7,58
$16_{gr} \rightarrow 14_{gr}$	$7,66^{+2,04}_{-2,18}$	6,98	8,09
$2_{\gamma} \rightarrow 0_{gr}$	$0,375^{+0,019}_{-0,019}$	0,37	0,36
$4_{\gamma} \rightarrow 2_{gr}$	$0,315^{+0,016}_{-0,016}$	0,34	0,30
$6_{\gamma} \rightarrow 4_{gr}$	$0,244^{+0,012}_{-0,012}$	0,32	0,27
$8_{\gamma} \rightarrow 6_{gr}$	$0,214^{+0,011}_{-0,022}$	0,31	0,30
$10_{\gamma} \rightarrow 8_{gr}$	$0,416^{+0,027}_{-0,044}$	0,29	0,45
$2_{gr} \rightarrow 2_{gr}$	$-2,33^{+0,19}_{-0,12}$	-2,87	-2,78
$4_{gr} \rightarrow 4_{gr}$	$-2,12^{+0,34}_{-0,16}$	-3,61	-3,53
$6_{gr} \rightarrow 6_{gr}$	$-4,03^{+0,25}_{-0,20}$	-4,19	-4,17
$8_{gr} \rightarrow 8_{gr}$	$-4,74^{+0,24}_{-0,47}$	-4,62	-4,72
$10_{gr} \rightarrow 10_{gr}$	$-6,78^{+0,45}_{-0,95}$	-4,92	-5,25
$4_{\gamma} \rightarrow 2_{\gamma}$	$2,60^{+0,13}_{-0,13}$	2,28	2,38
$6_{\gamma} \rightarrow 4_{\gamma}$	$4,44^{+0,22}_{-0,22}$	3,80	4,01
$8_{\gamma} \rightarrow 6_{\gamma}$	$5,28^{+0,26}_{-0,26}$	4,69	5,02
$10_{\gamma} \rightarrow 8_{\gamma}$	$5,65^{+0,28}_{-0,28}$	5,29	5,84
$12_{\gamma} \rightarrow 10_{\gamma}$	$6,00^{+0,77}_{-1,20}$	5,29	6,57

Продолжение таблицы 2.2

Переходы	Эксперимент [92]	Теория	
		ИВА-1 [92]	ДРМ [77]
$2_{\gamma} \rightarrow 2_{gr}$	$0,518^{+0,026}_{-0,026}$	0,49	0,49
$4_{\gamma} \rightarrow 4_{gr}$	$0,727^{+0,036}_{-0,036}$	0,71	0,73
$6_{\gamma} \rightarrow 6_{gr}$	$0,834^{+0,042}_{-0,042}$	0,83	0,89
$8_{\gamma} \rightarrow 8_{gr}$	$0,969^{+0,048}_{-0,048}$	0,92	1,01
$2_{\gamma} \rightarrow 4_{gr}$	$0,161^{+0,026}_{-0,022}$	0,13	0,14
$4_{\gamma} \rightarrow 6_{gr}$	$0,326^{+0,016}_{-0,041}$	0,27	0,27
$6_{\gamma} \rightarrow 8_{gr}$	$0,33^{+0,31}_{-0,30}$	0,39	0,31
$8_{\gamma} \rightarrow 10_{gr}$	$0,37^{+0,18}_{-0,30}$	0,49	0,18

оценки $B(M1; 0^+0 \rightarrow 1^+1) = 1,75 \mu_{\gamma}^2$, так как мы здесь не оценили переходы из состояний $(k=0, K=\kappa=1, n)_{\beta}$ и $(k=2, K=1, \kappa=1, n)_{\gamma}$ на основное состояние. Но их вклады в вычислениях коэффициентов смеси мультиполей δ учитываются.

Из результатов исследований можно сделать следующие выводы.

1. Смешивание P - и Q -пространств приводит к перенормировке моментов инерции полос, включенных в P -пространство. Это отражается на структуре собственных функций состояний и существенно проявляется на вероятностях электромагнитных переходов между состояниями P -пространства. Отклонения отношений $R_{I\gamma}$ от правила Алаги связаны в основном со смешиванием состояний P -пространства, а также со смешиванием состояний P - и Q -пространств.

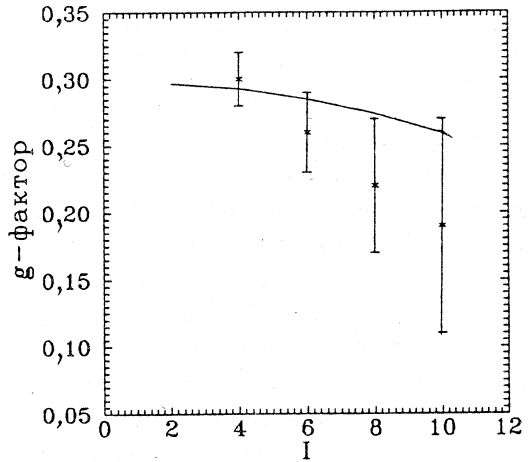
2. Присутствие компонентов ГУР в волновых функциях β - и γ -вибрационных состояний приводит к $M1$ -переходам из них на состояния основной полосы.

3. Значения коэффициентов смеси мультиполей δ для переходов из γ -полосы с ростом углового момента I уменьшаются по абсолютной величине.

4. Из наилучшего воспроизведения коэффициентов $\delta^{\text{экср}}$ низколежащих уровней имеем $B(M1; 00_{gr} \rightarrow 1^+1) = 0,8 \mu_{\gamma}^2$ для ^{164}Er и $\approx 1,75 \mu_{\gamma}^2$ для $^{166,168}\text{Er}$, при фиксированном значении $\omega_1 = 3$ МэВ.

Рис.2.7. Сравнение вычисленных и экспериментальных значений [100] g_R -фактора для состояний основной полосы ^{166}Er

На рис.2.7 представлены вычисленные значения g_R -фактора для основной полосы ^{166}Er , которые сравниваются с экспериментальными данными [100]. Как видно из рисунка, модель описывает уменьшение g_R с ростом угло-



вого момента, что есть проявление неадиабатичности в состояниях основной полосы. Такое поведение g_R невозможно описать в рамках моделей [84,85]. В основной полосе во внутриволосных $E2$ -переходах неадиабатичности нет (см. табл.1.13), она проявляется в магнитных характеристиках состояний. Это свидетельствует о смешивании состояний gr -полосы с уровнями полос, имеющими большие матричные элементы $M1$ -переходов, т.е. с состояниями ГУР.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре основное внимание было уделено феноменологическим моделям и методам, которые позволили описать обширный экспериментальный материал по отклонениям свойств состояний положительной четности в четно-четных деформированных ядрах от закономерностей адиабатической теории. В частности, продемонстрирована возможность исследования эффектов смешивания адиабатических полос с использованием одинаковых основных параметров (моментов инерции и внутренних квадрупольных моментов).

Предложен усовершенствованный вариант двухроторной модели, где учет внутренних состояний протонной и нейтронной подсистем привел к предсказанию существования возбуждений ГУР над состояниями, имеющими разные внутренние конфигурации. Показано, что смешивание состоя-

ний $\Delta K = 1$ определяется матричным элементом оператора $\hat{S} = \hat{I}_p - \hat{I}_n$, имеющим ту же зависимость от квантовых чисел I и K , что и в матричном элементе кориолисова взаимодействия. Данный вариант модели развит с использованием формализма Фешбаха разделения пространства состояний на два подпространства. Изучен спектр системы и показано, что в ядрах с большим избытком нейтронов эффекты связи вращения ядра как целого и относительные перемещения нейтронной и протонной компонент приводят к сильным перенормировкам момента инерции ядра, а также магнитных моментов состояний разных полос. Показано, что присутствие компонентов состояний ГУР в волновых функциях вибрационных состояний приводит к $M1$ -переходам на состояния основной полосы.

Подводя итог, можно констатировать, что используемые в данном обзоре модели и методы дают возможность последовательного учета эффектов смешивания ротационных полос в четно-четных деформированных ядрах, что, в частности, позволило: 1) описать аномальное поведение приведенных вероятностей $E0$ -, $E2$ - и $M1$ -переходов, а также g_R -фактора с ростом полного спина ядра; 2) предсказать ряд новых характеристик возбужденных состояний ядра.

Авторы выражают признательность коллегам по работе Ш.Бриансон, Е.П.Григорьеву, К.Я.Грому, В.Г.Калинникову, Р.Кулессе, В.М.Михайлову, И.А.Митропольскому, Р.Г.Назмитдинову, В.О.Нестеренко, Р.А.Ниязову, А.А.Охуну, В.Г.Соловьеву, С.Фахландеру, А.Х.Холматову за интерес к работе, поддержку и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бор О., Моттelson Б. — Структура атомного ядра. М.: Мир, 1971—1977, т.1—2.
2. Соловьев В.Г. — Теория сложных атомных ядер. М.: Наука, 1971.
3. Григорьев Е.П., Соловьев В.Г. — Структура четных деформированных ядер. М.: Наука, 1974.
4. Бегжанов Р.Б., Беленький В.М., Залюбовский И.И., Кузнеценко А.В. — Справочник по ядерной физике. Ташкент: «ФАН», 1989, т.1—2.
5. Беленький В.М., Григорьев Е.П. — Структура атомных ядер. М.: Энергоатомиздат, 1987.
6. Sood P.C., Headly D.M., Sheline R.K. — Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1991, v.47, No.1, p.89.
7. Shurshikov E.N., Timofeeva N.V. — Nucl. Data Sheets, 1992, v.67, No.1, p.45.

8. Balraj Singh — Nucl. Data Sheets, 1995, v.75, No.2, p.199.
9. Бриансон Ш., Михайлов И.Н. — ЭЧАЯ, 1982, т.13, вып.2, с.245.
10. Harris S.M. — Phys. Rev. B, 1965, v.138, No.3, p.509.
11. Инглис Д. — В сб.: Проблемы современной физики. М.: ИЛ, 1956, вып.1, с.139.
12. Инглис Д. — В сб.: Проблемы современной физики. М.: ИЛ, 1956, вып.1, с.152.
13. Михайлов В.М. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1966, т.30, №8, с.1334.
14. Михайлов И.Н., Усманов П.Н. — Ядерная физика, 1991, т.54, с.1239.
15. Михайлов И.Н., Бриансон Ш., Усманов П.Н., Юлдашбаева Э.Х. — Сообщение ОИЯИ, Р4-85-8, Дубна, 1985.
16. Mikhailov I.N., Briançon Ch., Walen R.L., Usmanov Ph.N., Yuldashbaeva E.Kh. — Rapport D'ACTIVITE CSNSM, 1983-84, ORSAY, France, p.83.
17. Громов К.Я., Исламов Т.А., Усманов П.Н. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1989, т.53, с.858.
18. Михайлов И.Н., Усманов П.Н., Охунов А.А., Бриансон Ш. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1992, т.56, №1, с.121.
19. Михайлов И.Н., Усманов П.Н., Охунов А.А., Бриансон Ш., Кулесса Р. — Изв. РАН, сер. физ., 1993, т.57, №1, с.17.
20. Громов К.Я., Усманов П.Н., Холматов А.Х., Бутабаев Ю.С., Ниязов Р.А. — Ядерная физика, 1993, т.56, вып.12, с.28.
21. Bohle D., Richter A., Steffen W. et al. — Phys. Lett. A, 1984, v.137, No.1, p.27.
22. Bohle D., Kuchler G., Richter A., Steffen W. — Phys. Lett. B, 1984, v.148, No.4, 5, p.260.
23. Berg U.E.P., Blasing C., Drexler J. et al. — Phys. Lett. B, 1984, v.149, No.1—3, p.59.
24. Richter A. — In: Proc. of the Niels Bohr Centennial Conference. Nuclear Structure, North-Holland, 1985, p.469.
25. Corr J.A., Petrovich F., Philpott R.J. et al. — Phys. Rev. Lett., 1985, v.54, No.9, p.881.
26. Djalali C., Marty N., Morlet M. et al. — Phys. Lett. B, 1985, v.164, No.4—6, p.269.
27. Wesselborg C., Von Brentano P., Zell K.O. et al. — Phys. Lett. B, 1988, v.207, p.22.
28. Zilges A., Von Brentano P., Wesselborg C. et al. — Nucl. Phys. A, 1990, v.507, p.399.
29. Кулиев А.А., Пятов Н.И. — ЯФ, 1974, т.20, вып.2, с.297.
30. Suzuki T., Rowe D.J. — Nucl. Phys. A, 1977, v.289, No.2, p.461.
31. Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu. — Nucl. Phys. A, 1994, v.568, No.2, p.244.

32. Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu. — 5th Int. Spring Seminar on Nucl. Phys. «New Perspectives in Nucl. Structure», p.340—353, Rovello, Italy, May 22—26, 1995.
33. Iachello F. — Phys. Rev. Lett., 1984, v.53, No.15, p.1427.
34. Sambataro M., Scholten O., Dieperink A.E.L., Piccotto G. — Nucl. Phys. A, 1984, v.423, No.2, p.333.
35. Lipparini E., Stringari S. — Phys. Lett. B, 1983, v.130, No.3, 4, p.139.
36. Nojarov R., Faessler A. — Z. Phys. A — Atomic Nuclei, 1990, v.336, p.151.
37. Faessler A., Nojarov R., Scholtz F.G. — Nucl. Phys. A, 1990, v.515, p.237.
38. Lo Iudice N. — IV Int. Conf. on Selected Topics in Nucl. Struc., Dubna, Russia, July 5—9, 1994, E4-94-168, p.72.
39. Lo Iudice N., Polumbo F. — Phys. Rev. Lett., 1978, v.41, No.22, p.1532.
40. De Franceschi G., Polumbo F., Lo Iudice N. — Phys. Rev. C., 1984, v.29, No.4, p.1496.
41. Воинова-Елисеева Н.А., Митропольский И.А. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, вып.6, с.1173.
42. Борисоглебский Л.А. — УФН, 1963, т.81, с.271.
43. Rasmussen J.O. — Nucl. Phys., 1960, v.19, p.85.
44. Ronningen R.M., Grantham R.S., Hamilton J.H. et al. — Phys. Rev. C, 1982, v.26, p.97.
45. Grantham R.S. et al. — Bull. Amer. Phys. Soc., 1975, v.20, p.1190.
46. De Boer F.W.N., Goudsmit P.F.A., Koldewich P. et al. — Nucl. Phys. A, 1971, v.169, p.577.
47. Reich C.W., Cline J.E. — Nucl. Phys. A, 1970, v.159, p.181.
48. Cline J.G., Reich C.W. — Phys. Rev., 1963, v.129, p.2152.
49. Прокофьев П.Т., Резвая Г. Л. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1970, т.34, с.719.
50. Tirsell K.G., Multhauf L.G. — Phys. Rev. C, 1973, v.7, p.2108.
51. West R.L., Funk E.G., Visvanathan A. et al. — Nucl. Phys. A, 1976, v.270, p.300.
52. Domingos J.M., Symons G.D., Douglas A.C. — Nucl. Phys. A, 1972, v.180, p.600.
53. Ikegami H. et al. — Bull. Inst. Chem. Research, Kyoto Univ., 1974, v.52, p.132.
54. Baker K.L., Hamilton J.H., Lange J. et al. — Phys. Lett., B, 1975, v.57, p.441.
55. Haenni D.R. et al. — Report ORO-4322-18, 1976.
56. Григорьев Е.П. и др. — В сб.: Призмённые бета-спектрометры и их применение. Вильнюс: Изд. АН Лит. ССР, 1974, с.69.
57. Sunyar A.W. — Preprint Brookhaven Nat. Lab., Upton, N.Y. BNL-13530, 1969.
58. Reidy J.J. et al. — Phys. Rev. B, 1964, v.133, p.556.
59. Quinones L.M., Behar M., Grobowsky H. — Bull. Amer. Phys. Soc., 1973, v.18, p.37.
60. Gelletly W., Davidson W.F., Simic J. et al. — J. Phys. G, 1978, v.4, p.575.

61. Mc. Gowan F.K., Milner W.T., Robinson R.L. et al. — Nucl. Phys. A, 1978, v.297, p.51.
62. Becker A.J., Steffen R.M. — Phys. Rev., 1969, v.180, p.1043.
63. Bengtsson R., Frauendorf S. — Nucl. Phys. A, 1979, v.327, No.1, p.139.
64. El Masri, Ferte J.M., Janssens R. et al. — Nucl. Phys. A, 1976, v.271, p.133.
65. Абдуразаков А.А., Врзал Я., Громов К.Я. и др. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1968, т.32, с.749.
66. Бонч-Осмоловская Н.А., Врзал Я., Григорьев Е.П. и др. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1968, т.32, с.98.
67. Kawade K., Yamamoto H., Ikeda Y. et al. — Nucl. Phys. A, 1977, v.279, p.269.
68. Hungerford P., Hamilton W.D., Scott S.M., Warner D.D. — J. Phys. G, 1980, v.6, p.741.
69. McGowan F.K., Milner W.T. — Phys. Rev. C, 1981, v.23, p.1926.
70. Madueme G.Ch. — Phys. Rev. C, 1981, v.24, p.894.
71. Saghurun-Nisa Khan, Fox R.A., Hamilton W.D., Finger M. — J. Phys. G: Nucl. Phys., 1975, v.1, No.7, p.727.
72. Kalish R., Herskind B., Hagemann G.B. — Phys. Rev. C, 1973, v.8, p.757.
73. Seiler-Clark G., Pelte D., Emling H. et al. — Nucl. Phys. A, 1983, v.399, p.211.
74. Krane K.S. — Nucl. Phys. A, 1982, v.377, p.176.
75. Hooper H.R., Davidson J.M., Green P.W. et al. — Phys. Rev. C, 1977, v.15, p.1665.
76. Backlin A., Hedin G., Fogelberg B., Sarakeno M. et al. — Nucl. Phys. A, 1982, v.380, p.189.
77. Mikhailov I.N., Usmanov Ph.N. — Ann. Physik. 1993, v.2, p.239.
78. Konijn J., de Boer F.W.N., Van Poelgeest A. et al. — Nucl. Phys. A, 1981, v.352, p.191.
79. Pitz H.H., Berg U.E.P., Heil R.D. et al. — Nucl. Phys. A, 1989, v.492, p.411.
80. Bjorn V. — Acta Univ. Uppsal. Uppsala Diss. Fac. Sci. 1987, No.22, p.1.
81. Iwata Y. — J. Phys. Soc. Jap., 1980, v.49, p.2114.
82. Sie S.H., Ward D., Geiger J.S. et al. — Nucl. Phys. A, 1977, v.291, p.443.
83. Yamada H., Katon T., Fujioka M. et al. — J. Phys. Soc. Jap., 1976, v.41, p.1843.
84. Nesterenko V.O., Usmanov Ph.N., Okhunov A.A., Fahlander C. — J. Phys. G, 1993, v.19, p.1339.
85. Нестеренко В.О. — ЭЧАЯ, 1993, т.24, вып.7, с.1517.
86. Михайлов И.Н., Усманов П.Н., Юлдашбаева Э.Х. — ЯФ, 1987, т.45, вып.3, с.646.
87. Бриансон Ш., Михайлов И.Н., Усманов П.Н. — ЯФ, 1989, т.50, вып.1(7), с.52.
88. Feshbach H.A. — An. of Phys., 1962, v.19, No.2, p.287.
89. Kulesa R., Lauterbach Ch., Boer J.D. et al. — Z. Phys., 1989, A334, No.3, p.299.
90. Warner D.D., Casten R.F., Davidson W.F. — Phys. Rev. C, 1981, v.24, p.1713.

91. **Gelletly W., Van Isacker P., Warner D.D. et al.** — Phys. Lett. B, 1987, v.191, p.240.
92. **Fahlander C., Thorslund I.** — Nucl. Phys. A, 1992, v.537, p.183; **Thorslund I., Fahlander C., Backlin A. et al.** — Z. Phys. A — Hadrons and Nuclei, 1992, v.342, p.35.
93. **Davydov A.S., Filippov G.F.** — Nucl. Phys., 1958, v.8, p.237.
94. **Faessler A., Grainer W., Sheline R.K.** — Nucl. Phys., 1965, v.70, p.33.
95. **Arima A., Iachello F.** — Adv. Nucl. Phys., 1984, v.13, p.139.
96. **Arima A.** — J. Phys. G: Nucl. Phys., 14 Suppl., No.88, p.S1.
97. **Metzger F.R.** — Phys. Rev. C, 1976, v.13, No.2, p.626.
98. **Rangacharyulu C., Richter A., Wortche H.J., Ziegler W.** — Phys. Rev. C, 1991, v.43, p.949.
99. **Riezebos H.J. et al.** — Nucl. Phys. A, 1987, v.465, p.1.
100. **Kuyucak S., Morrison I.M.** — Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.315.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В.Г.Багров, Б.Ф.Самсонов

Томский государственный университет
Институт сильноточной электроники СО РАН, Томск

Обсуждаются последние достижения в области генерации потенциалов, для которых уравнение Шредингера имеет точное решение. Подробно рассмотрено обобщение преобразования Дарбу на нестационарное уравнение Шредингера. Сформулировано суперсимметричное обобщение нестационарного уравнения Шредингера. Рассмотрены варианты, соответствующие точной и спонтанно нарушенной суперсимметрии. В качестве примеров получены новые точно решаемые нестационарные потенциалы. Стационарное преобразование Дарбу рассматривается как частный случай введенного преобразования. Получены семейства изоспектральных потенциалов со спектрами гармонического осциллятора и водородоподобного атома. Показана эффективность предлагаемых методов для описания когерентных состояний преобразованных гамильтонианов.

One discuss recent developments in the domain of the generation of potentials for which the Schrödinger equation has an exact solution. Detailed consideration of the generalisation of the Darboux transformation for the case of the time-dependent Schrödinger equation is given. The supersymmetric generalisation of the nonstationary Schrödinger equation is formulated. As an example new time-dependent exactly solvable potentials are generated. Stationary Darboux transformation is treated as a particular case of new transformation. Families of isospectral potentials with the spectra of harmonic oscillator and hydrogenlike atom are obtained. The effectiveness of elaborated methods for the investigation of the coherent states of transformed Hamiltonians is demonstrated.

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из основных способов решения дифференциальных уравнений, основанный на их приведении к уравнениям, решения которых известны, имеет длительную историю. Началом ее, по-видимому, можно считать работы Куммера [1] и Лиувилля [2], где была решена задача о приведении дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами к уравнению наперед заданного вида. Использованное ими преобразование, известное с тех пор как преобразование Куммера — Лиувилля,

является наиболее общим преобразованием, сохраняющим линейность и порядок уравнения [3] (см. также [4]). Современное систематическое изложение имеющихся здесь результатов можно найти в [4]. Применение этого преобразования к уравнению Шредингера имеет свою специфику. Наиболее полное исследование уравнений Шредингера, сводящихся к уравнению для гипергеометрических функций, содержится в работах [5].

Преобразования, при которых возрастает порядок уравнения, исследовались Мутардом [6] и Имшенецким [7]. Систематическое их исследование впервые предпринял Дарбу [8], после чего эти преобразования стали носить его имя. Впоследствии они неоднократно переоткрывались. Так, известный после работ Шредингера [9] и систематически изученный Инфельдом и Холлом [10,11] метод факторизации является, по сути, другой формулировкой преобразования Дарбу (обсуждение см. в [12]). Суперсимметричная квантовая механика, впервые введенная Виттенем [13], использует преобразования, сплетающие отдельные компоненты супергамильтониана, являющиеся преобразованиями Дарбу исходного уравнения Шредингера [14]. Отметим также интегральные преобразования Абрагама — Мозеса — Пюрсея [15—17], применяющие методы обратной задачи квантовой теории рассеяния [18] для генерации точно решаемых потенциалов одномерного стационарного уравнения Шредингера. В наиболее важном и практически единственном случае, когда можно получить решение уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко [19,20] в замкнутом виде (случай вырожденного ядра), эти преобразования эквивалентны частному случаю обобщенных преобразований Дарбу [12,21,22].

Этот факт приводит, в частности, к тому, что ряд результатов, получаемых методом обратной задачи рассеяния, можно воспроизвести при помощи преобразования Дарбу. Такой подход имеет определенные преимущества вследствие дифференциального характера данного преобразования. Особенно перспективным может оказаться совместное использование качественных методов управления спектрами, развитых в [23] на основе методов обратной задачи рассеяния, с преобразованием Дарбу, позволяющим достаточно просто получать решения преобразованного уравнения Шредингера.

Отметим, что метод преобразования Дарбу активно развивается в последнее время. В работе [24] рассмотрено гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными, в [25,26] подробно рассмотрено преобразование Дарбу второго порядка для одномерного и двумерного стационарных уравнений Шредингера, а работы [27—29] посвящены исследованию преобразования Дарбу в связи с проблемой рассеяния в квантовой механике. Работы [30—32] посвящены развитию этого метода для нестационарного одномерного уравнения Шредингера, впервые введенного в [33] в связи с решением уравнения Кадомцева — Петвиашвили (см. также [34]). Рассмотрим эти вопросы более подробно.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрим уравнение Шредингера для частицы с потенциальной энергией $-V_0(x, t)$:

$$(i\partial_t - h_0) \psi(x, t) = 0, \quad h_0 = -\partial_x^2 - V_0(x, t), \quad \partial_t = \partial/\partial t, \\ \partial_x^2 = \partial_x \cdot \partial_x, \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

Будем говорить, что оператор $\hat{L}$, определенный на решениях уравнения (1), является оператором преобразования для этого уравнения, если он удовлетворяет операторному уравнению

$$\hat{L}(i\partial_t - h_0) = (i\partial_t - h_1) \hat{L}, \quad (2)$$

где $h_1 = -\partial_x^2 - V_1(x, t)$ — преобразованный гамильтониан. Оператор $\hat{L}$, определяемый уравнением (2), преобразует всякое решение $\psi(x, t)$ уравнения (1) в решение $\phi(x, t) = \hat{L}\psi(x, t)$ преобразованного уравнения Шредингера:

$$(i\partial_t - h_1) \phi(x, t) = 0, \quad x \in [a, b]. \quad (3)$$

Обозначим T_0 и T_1 — линейные пространства решений уравнений (1) и (3) соответственно. Если для операторов, действующих в пространствах T_0 и T_1 , определена операция сопряжения (мы ее будем обозначать знаком $(+)$), обладающая свойством $(AB)^+ = B^+A^+$, относительно которой операторы Шредингера $i\partial_t - h_{0,1}$ самосопряжены: $(i\partial_t - h_{0,1})^+ = i\partial_t - h_{0,1}$, то из (2) следует, что

$$(i\partial_t - h_0) \hat{L}^+ = \hat{L}^+(i\partial_t - h_1). \quad (4)$$

Оператор $\hat{L}^+$ осуществляет в этом случае преобразование в обратном направлении, то есть от решений уравнения (3) к решениям уравнения (1). Произведение операторов $\hat{L}^+\hat{L}$ будет, очевидно, преобразовывать решения уравнения (1) в другие его решения и, следовательно, будет являться оператором симметрии этого уравнения. Совершенно аналогично $\hat{L}\hat{L}^+$ будет оператором симметрии уравнения (3).

Если $\hat{L}$ является дифференциальным относительно переменных x и t оператором, то, решая уравнение (2) на пространстве T_0 , можно в нем заменить $i\partial_t$ на h_0 . Оператор $\hat{L}$, следовательно, можно без ущерба считать дифференциальным оператором по переменной x , коэффициенты которого являются функциями переменных x и t .

Дифференциальный оператор N -го порядка по переменной x с коэффициентами, зависящими от x и t , удовлетворяющий уравнению (2), будем называть *оператором преобразования Дарбу N -го порядка*. При $N = 1$ будем называть его просто *оператором преобразования Дарбу*.

Отметим, что класс операторов, определяемых только соотношением (2), шире класса операторов, преобразующих одно решение уравнения Кадомцева — Петвиашвили

$$\partial_x(V_t + 6VV_x + V_{xxx}) = 3V_{yy} \quad (5)$$

в другое его решение и рассмотренных ранее в работах [33,34]. Этот факт можно пояснить следующими соображениями. Уравнение (5) представляет собой условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений (так называемое представление Лакса, см., например, [35]):

$$\begin{aligned} B^{(0)}\psi(x, y, t) &= 0, \quad B^{(0)} = i\partial_y + \partial_x^2 + V^{(0)}, \\ A^{(0)}\psi(x, y, t) &= 0, \quad A^{(0)} = \partial_t + 4\partial_x^3 + 6V^{(0)}\partial_x + 3V^{(0)} + 3iw^{(0)}, \end{aligned} \quad (6)$$

наложенное на функцию $V^{(0)} = V^{(0)}(x, y, t)$. Уравнение (6) является нестационарным уравнением Шредингера, в котором роль времени играет переменная y . Если теперь, следуя Захарову и Шабату [36], найти оператор L , который участвует одновременно в двух соотношениях сплетения:

$$LB^{(0)} = B^{(1)}L, \quad LA^{(0)} = A^{(1)}L, \quad (7)$$

где $B^{(1)}$ и $A^{(1)}$ отличаются от $B^{(0)}$ и $A^{(0)}$ лишь заменой $V^{(0)}$ на $V^{(1)}$ и $w^{(0)}$ на $w^{(1)}$, то система уравнений

$$B^{(1)}\varphi = 0, \quad A^{(1)}\varphi = 0, \quad \varphi = L\psi$$

будет совместной, и функция $V = V^{(1)}(x, y, t)$ будет решением уравнения (5). Отсюда ясно, что, отказавшись от условия (7), мы расширяем класс операторов L .

2.1. Преобразование первого порядка. Рассмотрим вначале случай $N = 1$: $\hat{L} = L_0(x, t) + L_1(x, t) \partial_x$. Считая операторы дифференцирования различных порядков линейно независимыми, из уравнения (2) получим систему уравнений на функции L_0, L_1 и разность потенциалов $A(x, t) = V_1(x, t) - V_0(x, t)$:

$$L_{1x} = 0, \quad iL_{1t} + 2L_{0x} = -AL_1, \quad L_1V_{0x} - iL_{0t} - L_{0xx} = AL_0. \quad (8)$$

Если это не вызовет недоразумений, аргументы у функций с целью облегчения записи указывать не будем.

Вводя новую функцию $u(x, t)$ при помощи равенства $u_x/u = -L_0/L_1$, можно один раз проинтегрировать систему (8). При этом для функции u получим уравнение

$$iu_t + u_{xx} + (V_0 - C(t)) u = 0.$$

Функция $L_1 = L_1(t)$ остается произвольной, а отношение $r = L_0/L_1$ не зависит от $C(t)$ и, следовательно, может быть вычислено при $C(t) \equiv 0$. Функция u будет в этом случае каким-либо решением уравнения (1). Для разности потенциалов система (8) приводит к выражению $A = i(\ln L_1)_t + 2(\ln u)_{xx}$. Произволом в выборе функции $L_1(t)$ можно воспользоваться так, чтобы обеспечить вещественность разности потенциалов A . Условие ее вещественности, записанное в виде $i(\ln |L_1|^2)_t = (2\bar{r}_x - r_x)$ (чертой обозначаем комплексное сопряжение), приводит к следующему условию для функции u :

$$(\ln u/\bar{u})_{xxx} = 0. \quad (9)$$

Если функцию L_1 выбрать вещественной, то она определяется функцией u :

$$L_1 = \exp \left[2 \int dt \operatorname{Im} (\ln u)_{xx} \right], \quad (10)$$

а для разности потенциалов получается обычное для преобразования Дарбу выражение

$$A = (\ln |u|^2)_{xx}. \quad (11)$$

Для оператора преобразования Дарбу имеем окончательное выражение

$$\hat{L} = L_1(-u_x/u + \partial_x) = L_1 u^{-1} \begin{vmatrix} u & 1 \\ u_x & \partial_x \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Операторные определители здесь и далее будем считать дифференциальными операторами, которые получаются при разложении определителя по последнему столбцу с функциональными коэффициентами, записанными перед операторами дифференцирования. Подчеркнем, что функция u , удовлетворяющая исходному уравнению Шредингера, полностью определяет оператор преобразования (12) и разность потенциалов (11). Будем называть систему функций, полностью определяющую оператор преобразования и преобразованное уравнение Шредингера, *функциями преобразования*. Функция u является, таким образом, функцией преобразования для оператора преобразования Дарбу первого порядка.

Из формулы (12) следует, что $\hat{L}u = 0$. Тем не менее, решению $\psi = u$ исходного уравнения Шредингера можно сопоставить нетривиальное решение нового уравнения. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при выполнении условия (9) и выборе функции $L_1(t)$ в виде (10) решением уравнения (3) будет функция

$$v = 1 / [L_1(t)\bar{u}]. \quad (13)$$

Условие (9) является дополнительным условием на решение $\psi = u$ уравнения Шредингера (1). Поэтому в общем случае могут существовать такие потенциалы $V^{(0)}(x, t)$, для которых уравнение Шредингера не имеет ни одного решения, удовлетворяющего этому условию. Однако можно установить общий вид потенциала $V = V^{(0)}$, уравнение Шредингера для которого имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию (9). Для этого будем искать функцию u в виде $u = R \exp(i\Phi)$, $\Phi = x^2 f / (2f) + x \ddot{s} / (2f^2) + \alpha$, где произвольные вещественнозначные функции f , s и α не зависят от переменной x и точкой обозначена производная по t . Подставляя $\psi = u$ в исходное уравнение (1), получим систему уравнений на функции R и Φ . Первое из них определяет общий вид функции R : $R = fP(\xi)$, $\xi = f^2 x + s$, где $P(\xi)$ — произвольная вещественнозначная функция одной переменной, а второе является определяющим для потенциала V :

$$V = \frac{3\dot{f}^2 - f\ddot{f}}{2f^2} x^2 + \frac{4f\dot{s} - f\ddot{s}}{2f^3} x + \frac{\dot{s}^2}{4f^4} - \dot{\alpha} - f^4 \frac{P''}{P}, \quad (14)$$

где $P'' = d^2 P / d\xi^2$.

В частном случае, когда произвольные функции выбраны следующим образом:

$$s = -x_0 f^2, \quad f^2 = [\gamma_0^2 (t - t_0)^2 + 1]^{-1/2}, \quad \dot{\alpha} = (\log f)_{tt} x_0^2 / 2,$$

где x_0 , t_0 и γ_0 — произвольные вещественные постоянные, и в качестве функции P выбрано вещественное решение уравнения

$$P'' + (U(\xi) - \gamma_0^2 \xi^2 / 4) P = 0,$$

где $U(\xi)$ — произвольная вещественнозначная функция одной переменной, потенциал V принимает вид

$$V = \frac{1}{\gamma^2 (t - t_0)^2 + 1} U \left(\frac{x - x_0}{[\gamma^2 (t - t_0)^2 + 1]^{1/2}} \right). \quad (15)$$

Именно такой потенциал получен в работе [37] как потенциал, допускающий существование новых вещественных решений уравнения Кадомцева — Петвиашвили (5). Подчеркнем здесь, что уравнение Шредингера с потенциалом вида (14) или (15) может иметь решения, не удовлетворяющие условию (9).

2.2. Преобразование высших порядков. Для оператора преобразования Дарбу второго порядка соответствующая система уравнений имеет более сложный вид. В отличие от предыдущего случая здесь не удалось ее проинтегрировать в полной мере. В работе [30] установлено, что уравнения для коэффициентов оператора преобразования допускают решение, которое в компактном виде записывается следующим образом:

$$\hat{L}_{02} = L_{02}(t) W^{-1}(u_1, u_2) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 1 \\ u_{1x} & u_{2x} & \partial_x \\ u_{1xx} & u_{2xx} & \partial_x^2 \end{vmatrix}, \quad (16)$$

где u_1, u_2 — произвольные линейно независимые решения исходного уравнения Шредингера. Через $W(u_1, u_2, \dots, u_N)$ мы будем обозначать определитель Вронского (вронскиан) функций $u_1, u_2, \dots, u_N$.

При выполнении условия

$$\left[\ln \frac{W(u_1, u_2)}{W(u_1, u_2)} \right]_{xxx} = 0 \quad (17)$$

функцию $L_{02}(t)$ можно выбрать вещественной

$$L_{02}(t) = \exp \left(2 \int dt \operatorname{Im} [(\ln W(u_1, u_2))_{xx}] \right), \quad (18)$$

а разность потенциалов нового и исходного уравнений Шредингера будет вещественнозначной функцией

$$A_{02} = [\ln |W(u_1, u_2)|^2]_{xx}. \quad (19)$$

Используя функции преобразования u_1 и u_2 , мы можем совершить два последовательных преобразования Дарбу, определяемых операторами $\hat{L}_{01}$ и $\hat{L}_{12}$. Функцией преобразования при втором преобразовании будет та функция, в которую перейдет u_2 после первого преобразования, то есть

$$v_2 = \hat{L}_{01} u_2 = L_{01}(t) (-u_2 u_{1x} / u_1 + u_{2x}). \quad (20)$$

Через v_1 обозначим решение нового уравнения Шредингера, соответствующее функции преобразования u_1 : $v_1 = 1/[L_{01}(t) \overline{u_1}]$. Предполагаем, что функция преобразования u_1 удовлетворяет условию (9), а функция $L_{01}(t)$ вычисляется по формуле (10). Решения промежуточного уравнения Шредингера, $\chi(x, t)$, с потенциалом, отличающимся от потенциала уравнения (1) на функцию A_{01} , вычисляемую по формуле (11), в которой u следует заменить на u_1 , находим при помощи оператора преобразования (12):

$$\chi = \hat{L}_{01} \psi = L_{01}(t) (-\psi u_{1x}/u_1 + \psi_x). \quad (21)$$

Повторное преобразование Дарбу $\hat{L}_{12}$ решений χ (21) имеет тот же вид (12). При этом получим

$$\phi = \hat{L}_{12} \chi = L_{12}(t) (-\chi v_{2x}/v_2 + \chi_x). \quad (22)$$

Функция (22) является решением уравнения Шредингера с потенциалом, отличающимся от потенциала предыдущего уравнения на функцию

$$A_{12} = -i(\ln L_{12})_t + 2(\ln v_2)_{xx}.$$

Используя тот факт, что решения v_2 и χ выражаются через решения u_2 и ψ исходного уравнения по формулам (20) и (21), можно полностью избавиться от решений промежуточного уравнения Шредингера и выразить решения ϕ (22) нового уравнения через решения уравнения (1). При этом получим для ϕ следующее выражение:

$$\phi = \hat{L}_{02} \psi = \hat{L}_{12} \hat{L}_{01} \psi = L_{02}(t) W(u_1, u_2, \psi) / W(u_1, u_2); \quad (23)$$

где $L_{02}(t) = L_{01}(t)L_{12}(t)$. Разность потенциалов для полученного и исходного уравнений будет иметь вид

$$A_{02} = A_{01} + A_{12} = -i(\ln L_{02})_t + 2[\ln W(u_1, u_2)]_{xx}. \quad (24)$$

Произволом в выборе функции $L_{02}(t)$ можно воспользоваться, чтобы потребовать вещественности функции A_{02} . Условие ее вещественности имеет вид (17), и если функция L_{02} выбрана согласно формуле (18), то выражение для разности потенциалов (24) совпадет с (19), а функция ϕ (23) получится путем применения оператора (16) к решению ψ уравнения (1). Отсюда ясно, что формулы (16) и (19) дают реализацию оператора преобразования Дарбу второго порядка в виде произведения операторов преобразования Дарбу первого порядка.

Из (23) следует, что при $\psi = u_1, u_2$ функция ϕ обращается в нуль. Однако непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что если функция L_{02} вычисляется по формуле (18), то имеются два линейно независимых решения ϕ_1 и ϕ_2 уравнений Шредингера с потенциалом

$$\begin{aligned} V_2 &= V_0 + A_{02} = V_0 + i(\ln L_{02})_t + 2[\ln \bar{W}(u_1, u_2)]_{xx} = \\ &= V_0 + [\ln |W(u_1, u_2)|^2]_{xx}, \\ \phi_1 &= \frac{\bar{u}_1}{L_{02} \bar{W}(u_1, u_2)}, \quad \phi_2 = \frac{\bar{u}_2}{L_{02} \bar{W}(u_1, u_2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим, что решения u_1 и u_2 исходного уравнения (1) полностью определяют оператор преобразования (16) и разность потенциалов A_{02} и являются, таким образом, функциями преобразования для оператора преобразования Дарбу второго порядка $\hat{L}_{02} = \hat{L}_{12} \hat{L}_{01}$.

Если нас не интересует промежуточное уравнение Шредингера, то требовать вещественности его потенциала не имеет смысла. Единственным ограничением на функции преобразования u_1 и u_2 будет условие (17). Если нам необходимо также и промежуточное уравнение Шредингера, определяемое функцией преобразования u_1 , то эта функция должна удовлетворять условию (9).

Необходимо отметить, что, поскольку найденное решение для коэффициентов оператора преобразования второго порядка не является общим решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, остается открытым вопрос о том, всякий ли дифференциальный оператор преобразования второго порядка допускает факторизацию операторами преобразования первого порядка. Аналогичный вопрос для стационарного уравнения Шредингера может быть полностью решен. Мы отложим его рассмотрение до п.3.1 данной работы.

Формулы (16)—(19) очевидным образом обобщаются на цепочку N преобразований Дарбу. Для этого достаточно иметь N линейно независимых решений уравнения (1), $u_1, u_2, \dots, u_N$, и заменить вронскиан второго порядка на вронскиан N -го порядка $W(u_1, u_2) \rightarrow W(u_1, u_2, \dots, u_N)$, а в формуле (16) операторный определитель третьего порядка — на соответствующий определитель $N + 1$ -го порядка. Если, кроме того, необходимо знать все промежуточные уравнения Шредингера и их решения, то условие (17) необходимо наложить на все вронскианы $W(u_1, u_2, \dots, u_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, считая $W(u) \equiv u$.

Отметим также, что, кроме вещественности, на разности потенциалов $A_{pq}(x)$, $p < q \leq N$ разумно наложить условие регулярности на интервале $R = [a, b]$, на котором потенциал $V_0(x, t)$ исходного уравнения (1) непрерывен по переменной x . Потенциал преобразованного уравнения (3) в этом случае будет непрерывной функцией на том же интервале $\tilde{R}$. Из формулы (19) ясно, что для этого достаточно потребовать сохранения знака вронскиана $W(u_1, u_2, \dots, u_N)$, а для цепочки преобразований это условие нужно наложить на все вронскианы $W(u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_q)$, $p < q \leq N$. Для некоторых частных случаев в дальнейшем мы проанализируем это условие подробнее.

2.3. Связь с алгеброй симметрии. Вернемся вновь к рассмотрению оператора преобразования $\hat{L}$ первого порядка. Оператор вида (12) с функцией $L_1(t)$, вычисляемой согласно (10), можно построить, только если функция преобразования u удовлетворяет условию (9). Кроме того, оператор $\hat{L} + \hat{L}$ второго порядка по ∂_x является оператором симметрии уравнения (1). Операторы симметрии первого порядка по ∂_x и ∂_t для уравнения (1) хорошо известны. Они образуют (вещественную) алгебру Ли. Максимальная вещественная алгебра $sch(1.1)$ соответствует потенциалу, являющемуся полиномом второго порядка по x с произвольными постоянными коэффициентами. Если этот полином имеет отличный от нуля коэффициент перед x^2 , то мы будем иметь дело с линейным гармоническим осциллятором с постоянной частотой. Случай, когда этот коэффициент равен нулю, но отличен от нуля коэффициент при x , соответствует частице в однородном внешнем поле. Если оба эти коэффициента равны нулю, то рассматриваемая частица будет свободной. Во всех случаях алгеброй симметрии уравнения Шредингера является шестимерная вещественная алгебра $sch(1.1)$ [38]. Для других потенциалов алгеброй симметрии уравнения Шредингера может быть подалгебра этой алгебры. Поэтому мы рассмотрим более подробно алгебру $sch(1.1)$ и, в частности, ее представление, соответствующее свободной частице [38].

Базис алгебры $sch(1.1)$ составляют следующие операторы:

$$K_2 = -t^2 \partial_t - t x \partial_x - t/2 + i x^2/4, \quad K^0 = x \partial_x + 2t \partial_t + 1/2, \\ K_{-2} = \partial_t, \quad K_1 = -t \partial_x + i x/2, \quad K_0 = i, \quad K_{-1} = \partial_x. \quad (26)$$

Всякий нетривиальный оператор симметрии второго порядка уравнения (1) с $V_0(x, t) = 0$ принадлежит пространству операторов второго порядка обертывающей алгебры алгебры $sch(1.1)$ (то есть уравнение (1) является уравнением класса I по терминологии [38]).

Алгебра $sch(1.1)$ является полупрямой суммой алгебры Вейля $w_1 = \text{span}(K_1, K_0, K_{-1})$ (через span обозначим линейную оболочку над полем $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ в зависимости от того, хотим ли мы получить комплексное или вещественное линейное пространство, что обычно ясно из контекста) и алгебры $sl(2, R)$, изоморфной алгебре $su(1.1) = \text{span}(K_2, K^0, K_{-2})$. Отметим, что на решениях уравнения (1) (то есть в пространстве T_0) имеет место равенство $\partial_t = i\partial_{xx}$. Алгебра $su(1.1)$, следовательно, может быть реализована дифференциальными операторами второго порядка по переменной x , в то время как алгебра w_1 по-прежнему остается алгеброй операторов порядка не выше первого. Кроме того, базис операторов второго порядка по ∂_x обертывающей алгебры алгебры w_1 (то есть операторы вида K_1^2, K_{-1}^2 и $K_1K_{-1} + K_{-1}K_1$) принадлежит алгебре $su(1.1)$, в чем не сложно убедиться непосредственными вычислениями. Отсюда ясно, что все операторы симметрии второго порядка по ∂_x , действующие в пространстве T_0 , ограничиваются элементами алгебры $su(1.1)$.

Представление группы Вейля W_1 в пространстве аналитических на всей оси функций дается выражением [38]:

$$T(u, v, \rho) \Phi(t, x) = \exp[ip + i(uv + 2ux - u^2t)/4] \Phi(t, x + v - ut). \quad (27)$$

Соответствующее представление группы $SL(2, R)$ имеет вид

$$\begin{aligned} T(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \Phi(t, x) = \\ = (\delta + t\beta)^{-1/2} \exp\left[\frac{ix^2\beta}{4(\delta + t\beta)}\right] \Phi\left(\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta}, \frac{x}{\delta + t\beta}\right), \end{aligned} \quad (28)$$

где u, v, ρ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($\alpha\delta - \gamma\beta = 1$) — групповые параметры.

Из этих выражений следует, что если функция $\Phi(t, x)$ удовлетворяет условию (9), то этому условию также удовлетворяют и преобразованные функции (27) и (28). Иными словами, соотношение (9) инвариантно относительно групповых преобразований из группы Шредингера $SCH(1.1)$. Этим свойством можно воспользоваться и классифицировать пространство $sch(1.1)$ относительно присоединенного представления Ad группы $SCH(1.1)$. Пространство $sch(1.1)$ разбивается при этом на пять орбит с представителями [38] $O_1 = K_{-2} - K_2$, $O_2 = K^0$, $O_3 = K_{-2} - K_1$, $O_4 = K_{-2}$, $O_5 = K_{-1}$. Представитель O_5 является оператором первого порядка по ∂_x , и, кроме

того, в T_0 выполняется равенство $iK_{-1}^2 = K_2$. Поэтому мы этот представитель рассматривать не будем.

Собственные функции операторов $O_1, \dots, O_4$ находим методом R -разделения переменных [38]. Решением уравнения

$$(K_{-2} - K_2) \psi_\lambda = i\lambda \psi_\lambda$$

является функция

$$\psi_\lambda(x, t) = (1 + t^2)^{-1/4} \exp \left[\frac{i}{4} x^2 t (1 + t^2)^{-1} + i\lambda \operatorname{arctg} t \right] Q_\lambda(z),$$

$$z = x / \sqrt{1 + t^2}, \quad (29)$$

где $Q_\lambda(z)$ — функция параболического цилиндра, удовлетворяющая уравнению $Q_\lambda''(z) - (z^2/4 + \lambda) Q_\lambda(z) = 0$. Отметим, что функция (29) удовлетворяет условию (9) при всех вещественных λ . Кроме того, выбрав функцию преобразования в виде

$$u = \psi_{-1/2}(x, t) = (1 + t^2)^{-1/4} \exp \left[\frac{x^2(it - 1)}{4(1 + t^2)} - \frac{i}{2} \operatorname{arctg} t \right],$$

найдем

$$\hat{L} = L_1(t)[x(1 - it)(2 + 2t^2)^{-1} + \partial_x], \quad L_1(t) = (1 + t^2)^{1/2}$$

$$\text{и } O_1 = i(\hat{L}^+ \hat{L} - 1/2).$$

Собственные функции оператора K^0 :

$$\psi_\lambda(x, t) = t^{i\lambda/2 - 1/4} \exp \left(\frac{i}{8t} x^2 \right) Q_{i\lambda} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} e^{-i\pi/4} \right), \quad K^0 \psi_\lambda = i\lambda \psi_\lambda$$

не при всех значениях λ удовлетворяют условию (9). Отметим, что в тех частных случаях, когда эта функция удовлетворяет условию (9), она также является собственной функцией некоторого другого оператора симметрии, который и факторизуется операторами преобразования, построенными при помощи этой функции. Например, взяв функцию преобразования в виде $u = t^{-1/2} \exp(ix^2/(4t))$, $K^0 u = 0$, найдем $\hat{L} = ix/2 + t\partial_x$. Откуда $\hat{L}^+ \hat{L} = iK_2$ и $K_2 u = 0$. Собственные же функции оператора K_2 , $\psi_\alpha(x, t) = t^{-1/2} \times \exp \left[\frac{i}{4t} (x^2 - \alpha^2) - \frac{\alpha x}{2t} \right]$ удовлетворяют условию (9) при всех вещественных значениях α . Операторы преобразования, построенные при помощи

этих функций, факторизуют оператор $K_2 = -i(\hat{L}^+ \hat{L} + \alpha^2/4)$ и являются его собственными функциями $K_2 \psi_\alpha(x, t) = -i\alpha^2/4 \cdot \psi_\alpha(x, t)$.

Рассмотрим теперь оператор O_3 . Его собственные функции

$$\psi_\lambda(x, t) = \exp [it(x/2 - t^2/6 - \lambda)] Ai(2^{-1/3}x - 2^{-4/3}t^2 - 2^{2/3}\lambda),$$

где $Ai(z)$ — функция Эйри, удовлетворяющая уравнению $Ai''(z) = zAi(z)$, также удовлетворяет условию (9) при всех вещественных λ . Оператор преобразования Дарбу, построенный при помощи этой функции, осуществляет факторизацию оператора $O_3 = K_{-2} - K_1 = -i(\hat{L}^+ \hat{L} + \lambda)$.

Последний оператор $K_{-2} = \partial_t = i\partial_x^2$ имеет собственные функции

$$\psi_\lambda(x, t) = \exp(i\lambda^2 t + \lambda x), \quad K_{-2} \psi_\lambda = i\lambda^2 \psi_\lambda,$$

которые также удовлетворяют условию (9) при всех значениях параметра λ и факторизуют этот оператор $K_{-2} = -i(\hat{L}^+ \hat{L} - \lambda^2)$.

Таким образом, путем непосредственных вычислений нами установлена справедливость следующего утверждения. Всякий оператор $g \in sch(1.1)$, ограничением которого на пространство T_0 является оператор второго порядка по ∂_x (∂_t исключено), все собственные функции которого, соответствующие чисто мнимым собственным значениям, удовлетворяют условию (9), допускает факторизацию операторами преобразования Дарбу $\hat{L}$ вида $g = -i(\hat{L}^+ \hat{L} + \alpha)$ с функцией преобразования u , удовлетворяющей уравнению $igu = \alpha u$, $\alpha \in \mathbb{R}$; оператор L определяется соотношениями (12) и (10).

Кроме того, поскольку в каждом из рассмотренных случаев мы имели дело с решениями уравнения (1) в R -разделенных переменных, то можно утверждать, что в качестве функций преобразования могут выступать только такие решения. Аналогичный результат для стационарного уравнения Шредингера в двумерном пространстве получен в работах [24,43,39].

Отметим также работу [40], в которой рассмотрена возможность факторизации операторов симметрии для гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой. Как мы видим, такой подход практически эквивалентен нестационарному преобразованию Дарбу. Преимуществом развиваемого нами подхода является то, что соотношения (9)—(12) дают ясный конструктивный способ нахождения операторов, осуществляющих факторизацию.

2.4. Вопросы обратимости. Если мы ограничиваемся лишь такими операторами преобразования высших порядков, которые являются произведе-

ниями операторов первого порядка, то достаточно рассмотреть обратимость операторов первого порядка.

Оператор первого порядка $\hat{L}$ (12) имеет нетривиальное ядро $\ker \hat{L} = \text{span}(u)$. Поэтому для определения обратного ему оператора необходимо ограничить действие оператора $\hat{L}$ некоторым подпространством. Кроме того, будем искать обратный оператор в классе линейных операторов, не зависящих от функций, на которые они действуют. Это условие также может привести к ограничению пространства, на котором следует рассматривать действие оператора $\hat{L}$.

Интуитивно ясно, что оператор, обратный дифференциальному, должен быть интегральным. Рассматривая действие оператора $\hat{L}$ (12) на некоторую произвольную функцию $f(x)$ (положим временно $L_1(t) = 1$) как дифференциальное уравнение относительно $f(x)$,

$$F(x) = \hat{L}f(x) = -f(x)u_x/u + f_x(x),$$

определяем эту функцию

$$f(x) = u \left(C + \int_{x_0}^x u^{-1} F(x) dx \right). \quad (30)$$

Функция u , фигурирующая в этом соотношении, должна быть решением уравнения (1), а функция F , желательно, должна удовлетворять уравнению (3). Чтобы правая часть соотношения (30) была выражена через решения одного и того же уравнения (3), необходимо, согласно равенству (13), произвести в нем замену $u \rightarrow v = (L_1 \bar{u})^{-1}$. Отметим, что производная по x от выражения, стоящего в скобках равенства (30), пропорциональна в этом случае произведению vF . Кроме того, при определении обратного оператора необходимо учесть зависимость всех функций от времени.

Для каждых v и $\varphi \in T_1$ определим функцию $w = w(\bar{v}, \varphi) = w(x, t)$ при помощи равенств

$$w_x(\bar{v}, \varphi) = \bar{v}\varphi,$$

$$w_t(\bar{v}, \varphi) = i(\bar{v}\varphi_x - \bar{v}_x\varphi).$$

Используя уравнение (3), устанавливаем непротиворечивость этих равенств $w_{xt} = w_{tx}$. Функция w , следовательно, может быть вычислена двумя различными способами:

$$w = i \int_{t_0}^t (\bar{v}\varphi_x - \bar{v}_x\varphi) dt + C_1(x), \quad (31)$$

$$w = \int_{x_0}^x \bar{v} \varphi dx + C_2(t), \quad (32)$$

где функции C_1 и C_2 определяются условиями

$$C_1'(x) = (\bar{v}\varphi)_{t=t_0},$$

$$C_2'(t) = i(\bar{v}\varphi_x - \bar{v}_x\varphi)_{x=x_0}.$$

Здесь штрихом обозначена производная функции по ее аргументу. Зафиксируем функцию $v \in T_1$ и, считая, что она удовлетворяет условию (9), назовем *функцией преобразования*.

Ясно, что множество функций φ , для которых $C_1'(x) = 0$ (или $C_2'(t) = 0$), образует линейное пространство. Обозначим $T_{11} = \{\varphi : C_1'(x) = 0\}$ и $T_{12} = \{\varphi : C_2'(t) = 0\}$. Определим теперь линейный оператор M при помощи равенства

$$\psi(x, t) = M\varphi(x, t) = [L_1(t)\bar{v}]^{-1} w(\bar{v}, \varphi), \quad (33)$$

в котором функция w определена соотношением (31), когда $\varphi \in T_{11}$, и (32) при $\varphi \in T_{12}$, а функция $L_1(t)$ вычисляется по формуле (10), в которой нужно произвести замену $u \rightarrow \bar{v}^{-1}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция (33) при этих условиях удовлетворяет уравнению (1). Решением этого уравнения будет также функция $u = (L_1\bar{v})^{-1}$.

Если функции преобразования u и v уравнений (1) и (3), используемые в формулах (12) и (33), подчинить условию $v = (L_1\bar{u})^{-1}$, то функция $L_1(t)$, фигурирующая в этих соотношениях, будет одной и той же. Кроме того, очевидно, что образ T_{01} пространства T_{11} (или T_{12}), индуцированный оператором M , то есть $T_{01} = \{\psi : \psi = M\varphi, \varphi \in T_{11}\}$ (или $T_{02} = \{\psi : \psi = M\varphi, \varphi \in T_{12}\}$), будет, в силу линейности оператора M , линейным подпространством в T_0 . Ограничив действие оператора $\hat{L}$ на это подпространство, можно установить, что $M\hat{L}\psi = \psi, \forall \psi \in T_{01}$. Кроме того, устанавливаем также справедливость равенства $\hat{L}M\varphi = \varphi, \forall \varphi \in T_{11}$ (или T_{12}). Операторы $\hat{L}$ и M являются, таким образом, взаимно обратными.

2.5. Преобразование гильбертовых пространств. Если в пространстве T_0 существует подпространство $H_0(R)$ функций, интегрируемых по Лебегу (модуль в квадрате на интервале $R = [a, b]$ по переменной x), то в $H_0(R)$ скалярное произведение можно определить обычным образом:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_a^b \bar{\psi}_1(x, t) \psi_2(x, t) dx. \quad (34)$$

На пространстве T_0 , таким образом, определяется структура сепарабельного гильбертова пространства [38]. Ограничение оператора $\hat{L}$ на пространство $H_0(R)$ будем обозначать тем же символом $\hat{L}$.

Поскольку мы считаем, что $H_0(R) \subset T_0$, то в операторах $g \in al$ (в частности, $g \in sch(1.1)$) можно заменить $i\partial_t$ на h_0 . Полученные в результате операторы будут кососимметрическими на пространстве бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, а операторы ig будут существенно самосопряженными [38]. Будем предполагать, что в al существует полуограниченный оператор g_0 с чисто дискретным спектром, и его собственные функции, принадлежащие $H_0(R)$, будем нумеровать количеством их нулей $n = 0, 1, 2, \dots$. Мы не обсуждаем здесь точную область определения операторов g , отсылая заинтересованного в этом читателя к монографии [38], в которой указаны соответствующие ссылки. Если, кроме того, g_0 удовлетворяет условию факторизации, обсуждавшемуся в п.1.3, то его собственные функции можно использовать в качестве функций преобразования. Единственной (с точностью до постоянного множителя) функцией преобразования из пространства $H_0(R)$, приводящей к регулярной разности потенциалов (11), будет $u = \psi_0(x, t)$. За пределами пространства $H_0(R)$ существуют более богатые возможности для выбора функций преобразования. При этом, считая спектр оператора ig_0 ограниченным, например, снизу значением ε_0 , мы должны выбирать в качестве функций преобразования собственные функции ψ_α оператора ig_0 ($ig_0\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$) с $\alpha < \varepsilon_0$. Функция $[\psi_\alpha(x, t)]$ будет обращаться в бесконечность на одном или обоих концах интервала R .

Выберем $u = \psi_\alpha(x, t)$ в качестве функции преобразования. Тогда, согласно свойству факторизации, $g_0 = -i(\hat{L}^+ \hat{L} - \alpha)$ или $\hat{L}^+ \hat{L} = ig_0 + \alpha$. Если мы теперь рассмотрим скалярное произведение векторов ψ и $\hat{L}^+ \hat{L} \psi' \neq 0$ из $H_0(R)$, то, используя косоэрмитовость оператора $\partial_x[(\partial_x)^\dagger = -\partial_x]$ относительно скалярного произведения (34), приводящую к тому, что введенная ранее операция сопряжения для оператора $\hat{L}$ совпадает с операцией эрмитова сопряжения относительно скалярного произведения (34), то есть $\hat{L}^+ = \hat{L}^\dagger$, можем записать $\langle \psi | \hat{L}^+ \hat{L} \psi' \rangle = \langle \hat{L} \psi | \hat{L} \psi' \rangle = \langle \psi | \psi' \rangle$. Отсюда видно, что если в качестве ψ и ψ' выбираются собственные функции оператора ig_0 , являю-

шиеся также собственными функциями оператора $\hat{L}^+\hat{L}$, то система функций $\varphi = \hat{L}\psi$ будет ортогональной и нормируемой, а пространство $H_1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi, \psi \in H_0(R)\}$ будет являться подпространством функций, интегрируемых по модулю в квадрате на R . Определив на нем скалярное произведение таким же образом, как и в $H_0(R)$ (то есть по формуле (34)), мы получим некоторое гильбертово пространство, включенное в T_1 .

Весьма важным является вопрос о полноте пространства $H_1(R)$, то есть вопрос о том, всякое ли квадратично интегрируемое решение уравнения (3) можно получить действием оператора $\hat{L}$ на некоторое квадратично интегрируемое решение уравнения (1). Этот вопрос тесно связан с проблемой взаимно однозначного соответствия векторов из T_0 и T_1 .

Функция преобразования $u \in T_0$ является решением дифференциального уравнения второго порядка по x $\hat{L}^+\hat{L}u = 0$, а функция $v = (L_1\bar{u})^{-1} \in T_1$ удовлетворяет аналогичному уравнению $\hat{L}\hat{L}^+v = 0$. Каждое из этих уравнений имеет еще одно линейно независимое решение. В частности, функция

$$v' = \frac{1}{L_1\bar{u}} \int u\bar{u} dx = vL_1^{-2} \int \frac{dx}{v\bar{u}}, \quad (35)$$

обладающая свойством $\hat{L}^+v' = u$, также, очевидно, удовлетворяет уравнению (3).

Для уравнения (1) аналогичным свойством обладает функция

$$u' = uL_1^{-2} \int \frac{dx}{u\bar{u}}, \quad (36)$$

$\hat{L}u' = v$ и $\hat{L}^+\hat{L}u' = 0$. Несколько сложнее убедиться в том, что она является решением уравнения (1). Для этого нужно воспользоваться свойством $i(u\bar{u})_t = W_x(u, \bar{u})$ и выражением для функции $L_1(t) : i(\ln L_1)_t = [\ln(u/\bar{u})]_{xx}$. Отсюда получаем выражение для интеграла

$$i \int \frac{(u\bar{u})_t}{(u\bar{u})^2} dx = -\frac{W(u, \bar{u})}{(u\bar{u})^2} - \frac{2iL_{1t}}{L_1} \int \frac{dx}{u\bar{u}}. \quad (37)$$

Используя выражение (37), прямой проверкой убеждаемся, что функция (36) является решением уравнения (1).

Представим теперь каждое из пространств T_0 и T_1 в виде прямой суммы $T_{0,1} = T_{0,1}^0 \oplus T_{0,1}^1$, где $T_0^1 = \text{span}(u, u') = \ker(\hat{L}^+\hat{L})$ и $T_1^1 = \text{span}(v, v') = \ker(\hat{L}\hat{L}^+)$. Функции u, u' и v, v' образуют базисы пространств T_0^1 и T_1^1 . Из

этого построения ясно, что операторы $\hat{L}$ и $\hat{L}^+$ осуществляют взаимно однозначное соответствие между пространствами T_0^0 и T_1^0 , и с их помощью мы устанавливаем соответствие между базисами пространств T_0^1 и T_1^1 : $u' \rightarrow v, v' \rightarrow u$.

Вернемся вновь к гильбертову пространству $H_0(R)$. Пусть функция преобразования $u = \psi_0 \in H_0(R)$. Тогда, очевидно, $u' \notin H_0(R)$. Поскольку u в этом случае обращается в нуль на границах R , то u^{-1} обращается в бесконечность на границах R и, следовательно, неизмерима на R . Поэтому ни v , ни v' не принадлежат гильбертову пространству $H_1(R) \subset T_1$. Отсюда ясно, что оператор $\hat{L}$ отображает пространство $H_0^0(R) = \text{span} \{\psi_n, n = 1, 2, \dots\}$ на все пространство $H_1(R)$ и, следовательно, совокупность векторов $\{\varphi_n = \hat{L}\psi_n, n = 1, 2, \dots\}$ образует базис пространства $H_1(R)$. Функция $u = \psi_0$ не имеет образа в $H_1(R)$.

Пусть теперь $u \in H_0(R)$ и обращается в бесконечность только на одном из концов интервала R , обращаясь в нуль на другом его конце. В этом случае u' также не принадлежит $H_0(R)$, поскольку ее поведение на границах интервала R совпадает с точностью до перестановки граничных точек $a \leftrightarrow b$ с поведением функции u . Очевидно, что функция u^{-1} при этом также будет неизмеримой на R , так что $v, v' \notin H_1(R)$. Операторы $\hat{L}$ и $\hat{L}^+$ осуществляют взаимно однозначное соответствие между пространствами $H_0(R)$ и $H_1(R)$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $u \in H_0(R)$ и обращается в бесконечность на обоих концах интервала R , так что u^{-1} будет измеримой функцией. Тогда $v = (L_1 \bar{u})^{-1} \in H_1(R)$, а $v' \notin H_1(R)$. Оператор $\hat{L}$ отображает в этом случае прямую сумму $H_0(R) \oplus \text{span}(u')$ в $H_1(R)$, а оператор $\hat{L}^+$ отображает пространство $H_1(R)$ в $H_0(R)$. Очевидно, что этот случай эквивалентен первому, если за исходное уравнение Шредингера взять (3), а за преобразованное — (1).

Подчеркнем еще раз, что мы всюду предполагали сохранение знака функции u на R .

Остановимся теперь на особенностях, которые могут возникнуть при рассмотрении преобразований высших порядков.

До настоящего времени авторам не известны преобразования N -го ($N > 1$) порядка, которые нельзя было бы представить в виде произведения

N преобразований первого порядка. Доказательств невозможности таких преобразований также нет. Фактически всякое известное преобразование N -го порядка можно рассматривать как некоторую цепочку преобразований первого порядка. Замечательным свойством такой цепочки является то, что некоторые промежуточные уравнения Шредингера могут не иметь физического смысла (потенциал становится комплекснозначной функцией или может иметь сингулярности внутри интервала R), в то время как конечное уравнение остается вполне приемлемым с физической точки зрения. Если промежуточное уравнение Шредингера нас не интересует, то мы можем допустить такого типа преобразования.

Рассмотрим некоторое решение уравнения (1) с R -разделенными переменными [38] $u_\lambda = R(x, t)u_{1\lambda}u_{2\lambda}$, полагая, что функция $u_{2\lambda}$ является собственной функцией некоторого оператора симметрии $igu_{2\lambda} = \lambda u_{2\lambda}$. Из условия $(ig)^+ = ig$ получаем $u_{2\lambda} = \bar{u}_{2\lambda}$. Использование функций u_λ и $u_{\bar{\lambda}}$ при комплексных значениях λ в качестве функций преобразования в некоторых преобразованиях приводит к комплексным потенциалам. Однако можно сформулировать условия на функции R и $u_{1\lambda}$, при которых результирующий потенциал цепочки таких преобразований будет вещественным. Для этого необходимо вычислить вронскиан $W(u_\lambda, u_{\bar{\lambda}})$ и воспользоваться соотношением (17). После чего достаточно потребовать, чтобы функции $u_{1\lambda}$ и $R(x, t)$ удовлетворяли следующим условиям:

$$u_{1\lambda x} = 0, \quad [\ln(R(x, t)/\bar{R}(x, t))]_{xxx} = 0. \quad (38)$$

Используя решения, рассмотренные в п.1.3, соответствующие операторам $K_2 - K_{-2}$, K^0 и $K_{-2} - K_1$ алгебры $sch(1.1)$, убеждаемся, что все они удовлетворяют условиям (38).

Однократное преобразование с функцией $u_k \neq \psi_0$, $u_k \in H_0(R)$ приводит к сингулярной на R разности потенциалов, поскольку функция u в этом случае имеет нули внутри R . При повторном преобразовании возникает дополнительная возможность использования функции преобразования $u_{k+1} \in H_0(R)$, приводящей к регулярной результирующей разности потенциалов. Такая возможность связана с тем, что вронскиан $W(u_{k_1}, u_{k_2}, \dots, u_{k_N})$, определяющий результирующую разность потенциалов цепочки N преобразований Дарбу, сохраняет знак на R , если функции $u_{k_i} \in H_0(R)$, где k_i совпадает с числом нулей этих функций, выбраны так, что неравенство $(k - k_1)(k - k_2) \dots (k - k_N) > 0$ выполняется при всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Это свойство для стационарных функций преобразования впервые сформули-

ровано Крейном [41]. Оно, в частности, выполняется, если функции u_{k_i} парно соседние. Для стационарного уравнения Шредингера последнее условие $\hat{L}$ недавно обсуждалось в работах [42,12]. В этом случае $\ker \hat{L}_{0N} = \text{span} \{u_{k_i}, i = 1, 2, \dots, N\}$, а пространство $H_1(R)$ полностью определяется оператором $\hat{L}_{0N} : H_1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}_{0N} \psi, \psi \in H_0(R)\}$.

2.6. Суперсимметрия нестационарного уравнения Шредингера.

Суперсимметричная квантовая механика впервые появилась в работах Виттена [12] в качестве модели, иллюстрирующей спонтанное нарушение суперсимметрии на квантовом уровне. Подавляющее большинство работ в этой области (см. обзоры [43,44]) следует отнести к так называемой стационарной суперсимметричной квантовой механике. Ее нестационарное обобщение практически не развито. Авторам известна всего одна работа [32], посвященная суперсимметрии нестационарного уравнения Шредингера.

Связь суперсимметричной квантовой механики Виттена с преобразованием Дарбу отмечена в [14]. Преобразование Дарбу нестационарного уравнения Шредингера можно использовать, чтобы сконструировать его суперсимметричное обобщение.

Пусть два уравнения Шредингера с гамильтонианами h_0 и h_1 связаны между собой операторами $\hat{L}$ и $\hat{L}^+$. Рассмотрим матричный гамильтониан (супергамильтониан) $\mathcal{H} = \text{diag}(h_0, h_1)$ и матрицы взаимно сопряженных суперзарядов

$$\mathcal{Q}_0 = \hat{L}^+ \sigma^+, \quad \mathcal{Q}_0^+ = \hat{L} \sigma^-, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Уравнения Шредингера (1) и (3) можно теперь переписать в виде одного матричного уравнения

$$(iI\partial_t - \mathcal{H}) \Psi(x, t) = 0, \quad (40)$$

где I — единичная матрица второго порядка, и пространство столбцовых функций $\Psi(x, t)$ для каждой функции $\psi(x, t)$ определено следующим образом:

$$\Psi(x, t) = \text{span}(\Psi_+, \Psi_-), \quad \Psi_+(x, t) = \psi(x, t) e_+, \\ \Psi_-(x, t) = \varphi(x, t) e_-, \quad \varphi(x, t) = \hat{L}\psi(x, t),$$

$e_{\pm}$ — одностолбцовые матрицы: $e_+ = (1, 0)^t$, $e_- = (0, 1)^t$ (t означает транспонирование).

Условие коммутации суперзарядов (39) с супероператором Шредингера $iI\partial_t - \mathcal{H}$ эквивалентно соотношениям сплетания (2) и (4). Используя опера-

торы симметрии $g_0^0 = -i(\hat{L}^+ \hat{L} + \alpha)$ и $g_0^1 = -i(\hat{L} \hat{L}^+ + \alpha) = g_0^0 + iL_1^2(t)A$ уравнений (1) и (3), строим оператор симметрии уравнения (40) $\mathcal{G}_0 = \text{diag}(g_0^0, g_0^1)$. Операторы $\mathcal{G}_0$, $\mathcal{Q}_0^+$ и $\mathcal{Q}_0$ образуют простейшую супералгебру $[\mathcal{Q}_0, \mathcal{G}_0] = [\mathcal{Q}_0^+, \mathcal{G}_0] = 0$, $\{\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_0^+\} = i\mathcal{G}_0 - \alpha I$, $\mathcal{Q}_0^2 = (\mathcal{Q}_0^+)^2 = 0$ и переводят одно решение уравнения (40) в другое.

Используя оператор $M = \hat{L}^{-1}$, можно построить операторы симметрии уравнения (3): $g^1 = \hat{L} g^0 M$, $g^0 \in al$. Ясно, что они образуют алгебру, изоморфную алгебре al уравнения (1), и с их помощью можно построить матричные операторы симметрии $\mathcal{G}_g = \text{diag}(g^0, g^1)$ уравнения (40), также образующие алгебру, изоморфную al .

Нечетный сектор супералгебры можно расширить нильпотентными операторами $\mathcal{Q}_g = g^0 M \sigma^+$, поскольку они удовлетворяют следующим соотношениям: $\{\mathcal{Q}_g, \mathcal{Q}_0^+\} = \mathcal{G}_g$, $[\mathcal{G}_{g^1}, \mathcal{Q}_{g^2}] = \mathcal{Q}_{g^{12}}$, где $g_{12} = [g_1^0, g_2^0]$ и $\{\mathcal{Q}_{g^1}, \mathcal{Q}_{g^2}\} = 0$, $[\mathcal{G}_g, \mathcal{Q}_0^+] = 0$. При этом элемент $\mathcal{Q}_0$, определенный в (39), будет равен $\mathcal{Q}_0 = (ig_0^0 - \alpha) M \sigma^+$. Кроме того, для системы нечетных $(\mathcal{Q}_g, \mathcal{Q}_0^+)$ и четных $(\mathcal{G}_g)$ элементов можно установить справедливость обобщенных тождеств Якоби, то есть эти элементы образуют супералгебру Ли.

Отметим, что при таком подходе не вполне ясно, как следует определить супергильбертово пространство, чтобы экспоненцируя эти операторы, получить представление супергруппы. Такой трудности не возникает, если ограничиться подалгеброй, образованной операторами $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_0^+$, $\mathcal{G}_0$.

Рассмотрим теперь цепочку преобразований, порожденных системой N линейно независимых решений $u_1, u_2, \dots, u_N$ уравнения (1) с регулярным на R потенциалом V_0 , таких, что $ig^0 u_k = \alpha_k u_k$, и вронскианы $W(u_q, u_{q+1}, \dots, u_p)$, $q \leq p = 1, \dots, N$ сохраняют знак на R и удовлетворяют условию вещественности (17). Эти преобразования порождают цепочку эрмитовых гамильтонианов $h_0 \rightarrow h_1 \rightarrow \dots \rightarrow h_N$, потенциалы которых регулярны на R , и цепочку операторов симметрии $g^0 \rightarrow g^1 \rightarrow \dots \rightarrow g^N$. Каждые два соседних уравнения Шредингера и два соседних оператора симметрии g^p, g^{p+1} сплетаются операторами преобразования Дарбу первого порядка $\hat{L}_{p, p+1}^+$, $\hat{L}_{p, p+1}^+$ $p = 0, 1, \dots, N-1$, вычисляемыми согласно уравнениям (10) и (12). Операторы преобразования n -го ($\leq N$) порядка $\hat{L}_{p, p+n} = \hat{L}_{p+n-1, p+n}, \dots$,

$\hat{L}_{p+1, p+2} \hat{L}_{p, p+1}$ и ему сопряженный сплетают операторы симметрии g^p , g^{p+n} и уравнения Шредингера с гамильтонианами h_p , h_{p+n} и участвуют в

следующей факторизации: $\hat{L}_{p, p+n}^+ \hat{L}_{p, p+n} = \prod_{k=1}^n (ig^p - \alpha_{p+k}), \hat{L}_{p, p+n} \hat{L}_{p, p+n}^+ = \prod_{k=1}^n (ig^{p+n} - \alpha_{p+k})$. Такую цепочку преобразований будем называть

полностью приводимой. Понятие приводимости цепочки преобразований Дарбу стационарного уравнения Шредингера впервые введено в работе [45]. Отметим, что преобразование Дарбу второго порядка, называемое в [45] неприводимым, соответствует комплекснозначному промежуточному потенциалу и вещественнозначному конечному потенциалу.

Мы полагаем, что неприводимыми можно также назвать преобразования, дающие сингулярные промежуточные потенциалы, но регулярный на данном интервале R конечный потенциал. Поэтому вполне естественно назвать цепочку преобразований, в которой каждый гамильтониан эрмитов, а потенциал регулярен на R , полностью приводимой.

С рассматриваемой цепочкой можно связать супергамильтониан $\mathcal{H} = i \operatorname{diag} (h_0, h_1, \dots, h_N)$, оператор симметрии $\mathcal{G}_0 = i \operatorname{diag} (g^0, g^1, \dots, g^N)$ и суперзаряды $\mathcal{Q}_{p, q}^+ = \hat{L}_{p, q}^+ e_{p, q}$, $\mathcal{Q}_{p, q} = \hat{L}_{p, q}^+ e_{q, p}$, где $e_{q, p}$ — матрица размерности $N+1$, у которой единственный отличный от нуля и равный единице элемент стоит на пересечении p -го столбца и q -й строки. Цепочка $N+1$ уравнений Шредингера сводится к одному матричному уравнению (40), в котором I — единичная матрица размерности $N+1$. Соотношения сплетания операторов Шредингера $i\partial_t - h_p$ и $i\partial_t - h_q$ операторами $\hat{L}_{pq}$ и $\hat{L}_{pq}^+$ эквивалентны коммутации суперзарядов $\mathcal{Q}_{pq}$ с супероператором Шредингера $i\partial_t - \mathcal{H}$. Следовательно, все операторы $\mathcal{Q}_{pq}$ являются интегралами движения системы с супергамильтонианом $\mathcal{H}$. Условие полной приводимости цепочки преобразований приводит к следующей нелинейной алгебре:

$$\mathcal{Q}_{s, p} \mathcal{Q}_{p, q} = \mathcal{Q}_{s, q}, \quad N+1 \geq q > p > s,$$

$$\mathcal{Q}_{p, p+n}^+ \mathcal{Q}_{p, p+n+m} = \prod_{i=1}^n (\mathcal{G}_0 - \alpha_{p+i}) \mathcal{Q}_{p+n, p+n+m}, \quad p+n+m \leq N+1,$$

$$\mathcal{Q}_{p-n-m, p} \mathcal{Q}_{p-n, p}^+ = \prod_{i=1}^n (\mathcal{G}_0 - \alpha_{p+i-1}) \mathcal{Q}_{p-n-m, p-n},$$

$$p - n - m \geq 0, p \leq N + 1,$$

$$\mathcal{Q}_{p,p+n} \mathcal{Q}_{p,p+n}^+ \mathcal{Q}_{p,p+n} = \prod_{i=1}^n (\mathcal{G}_0 - \alpha_{p+i}) \mathcal{Q}_{p,p+n},$$

$$p + n \leq N + 1, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (41)$$

и соотношения, эрмитово-сопряженные этим. Все остальные произведения любых двух суперзарядов равны нулю. Соотношения (41) характерны для парасупералгебр (см., например, [46,47]), которые известны для стационарных преобразований Дарбу [48].

2.7. Нестационарные точно решаемые потенциалы. Мы приведем здесь простейшие применения развиваемой нами методики, иллюстрирующие возможность генерации нестационарных точно решаемых потенциалов.

Рассмотрим свободную частицу: $V_0(x, t) = 0$, $R = (-\infty, +\infty)$. Дискретный базис пространства $H_0(R)$ образован функциями (29) при $\lambda = \lambda_n = -n - 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\psi_n \equiv \psi_{\lambda_n}$. Кроме того, при $\lambda = \lambda_m = m + 1/2$, $m = 0, 2, 4, \dots$ эти функции сохраняют знак на R при всех t и могут быть выбраны в качестве функций преобразования $u_1^{(m)} = \psi_{\lambda_m}$. Оператор преобразования $\hat{L}$ находим согласно (10) и (12):

$$\hat{L} = \hat{L}_{0,1} = L_1(t) \partial_x - \frac{x}{2} \frac{\sqrt{1+it}}{\sqrt{1-it}} - im \frac{He_{m-1}(iz)}{He_m(iz)}, \quad L_1(t) = \sqrt{1+t^2}, \quad (42)$$

где $He_m(z) = 2^{-m/2} H_m(z/\sqrt{2})$ — многочлены Эрмита. Потенциал нового уравнения Шредингера находим по формуле (11):

$$V_1 = A_{0,1} = (1+t^2)^{-1} \left[1 - 2m(m-1) \frac{He_{m-2}(iz)}{He_m(iz)} + 2m^2 \frac{He_{m-1}^2(iz)}{He_m^2(iz)} \right]. \quad (43)$$

Эта же разность потенциалов определяет оператор симметрии $g^1 = g^0 - iL_1^2(t) A_{0,1}$. Ортонормированный базис пространства $H_1(R)$ получаем при помощи оператора $\hat{L}$ (42) и решения (13):

$$\varphi_{-1} = \sqrt{m!} (2\pi)^{-1/4} [L_1(t) \bar{u}_m(x, t)]^{-1}, \quad g^1 \varphi_{-1} = i(m+1/2) \varphi_{-1},$$

$$\varphi_n = [n!(n+m+1)(1+it)\sqrt{2\pi}]^{-1/2} \exp[-x^2/(4+4it) - in \arctg t] \times$$

$$\times \left[He_{n+1}(z) + im He_n(z) \frac{He_{m-1}(iz)}{He_m(iz)} \right],$$

$$ig^1 \varphi_n = (n+1/2) \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Действуя оператором (42) на функцию (29) с $\lambda = \lambda_l = l + 1/2$, $l = m+1, m+3, \dots$, получим всюду отличные от нуля решения уравнения Шредингера с потенциалом (43):

$$v^{(l)}(x, t) = \hat{L}_{0,1} \varphi_{\lambda_l}(x, t) = (1-it)^{-1/2} \exp [x^2/(4-4it) + il \arctg t] \frac{f_{m,l}(z)}{He_m(iz)},$$

$$f_{m,l}(z) = i[He_l(iz) He_{m+1}(iz) - He_m(iz) He_{l+1}(iz)],$$

пригодные для повторного преобразования. Оператор преобразования вновь конструируется по формулам (10) и (12) с функцией преобразования $u = v^{(l)}(x, t)$. Получается следующий результирующий потенциал:

$$V_{0,2} = 2(1+t^2)^{-1} \left[1 + \frac{f_{ml}''(z)}{f_{ml}(z)} - \left(\frac{f_{ml}'(z)}{f_{ml}(z)} \right)^2 \right]. \quad (44)$$

Соответствующий ему оператор симметрии имеет вид $g^{(2)} = g^{(0)} - iL_1^2(t)V_{0,2}$. Дискретный базис пространства $H_2(R)$ находим при помощи оператора $\hat{L}_{0,2} = \hat{L}_{1,2}\hat{L}_{0,1}$ и формул (25):

$$\chi_{-2} = [(2\pi)^{-1/2} l!(l-m)(1-it)^{-1}]^{1/2} \exp [-x^2/(4+4it) + il \arctg t] \frac{He_m(iz)}{f_{ml}(z)},$$

$$\chi_{-1} = [(2\pi)^{-1/2} m!(l-m)(1-it)^{-1}]^{1/2} \exp [-x^2/(4+4it) + im \arctg t] \frac{He_l(iz)}{f_{ml}(z)},$$

$$\begin{aligned} \chi_n &= L_{1,2} \varphi_n = L_{1,2} L_{0,1} \psi_n = [(n+l+1)(n+m+1)]^{-1/2} \times \\ &\times \left[-(l+n+1) \psi_n + (l-m) u_m \frac{W(\psi_n, u_l)}{W(u_m, u_l)} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где

$$W(\psi_n, u_l) = -(n!\sqrt{2\pi})^{-1/2} (1+t^2)^{-1} \exp [itx^2/(2+2t^2) + i(l-n) \arctan t] \times$$

$$\times [nHe_{n-1}(z) He_l(iz) + iHe_n(z) He_{l+1}(iz)]$$

и

$$W(u_m, u_l) = ((1 - it) \sqrt{1 + t^2})^{-1} f_{ml}(z) \exp [x^2 / (2 - 2it) + i(m + l) \arctan t].$$

Операторы преобразования $\hat{L}_{0,2}$ и $\hat{L}_{0,2}^+$ сплетают исходное и конечное уравнения Шредингера и участвуют в следующей факторизации $\hat{L}_{0,2}^+ \hat{L}_{0,2} = (ig^0 + m + 1/2)(ig^0 + l + 1/2)$ и $\hat{L}_{0,2} \hat{L}_{0,2}^+ = (ig^2 + m + 1/2)(ig^2 + l + 1/2)$. При помощи операторов преобразования $\hat{L}_{p,q}$, $p, q = 0, 1, 2$ ($p < q$) конструируем операторы суперзарядов $\mathcal{Q}_{p,q} = \hat{L}_{p,q} e_{p,q}$ и $\mathcal{Q}_{p,q}^+ = (\mathcal{Q}_{p,q})^\dagger$ и супероператор симметрии $\mathcal{G}_0 = i \operatorname{diag} \{g^0, g^1, g^2\}$, которые образуют нелинейную алгебру парасуперсимметричной структуры [49]:

$$[\mathcal{G}_0, \mathcal{Q}_{p,q}] = 0, \quad \mathcal{Q}_{1,2} \mathcal{Q}_{0,1} = \mathcal{Q}_{0,2},$$

$$\mathcal{Q}_{0,1} \mathcal{Q}_{0,1}^+ \mathcal{Q}_{0,1} = (\mathcal{G}_0 + m + 1/2) \mathcal{Q}_{0,1}, \quad \mathcal{Q}_{1,2} \mathcal{Q}_{1,2}^+ \mathcal{Q}_{1,2} = (S + l + 1/2) \mathcal{Q}_{1,2},$$

$$\mathcal{Q}_{0,1} \mathcal{Q}_{0,2}^+ = (\mathcal{G}_0 + m + 1/2) \mathcal{Q}_{1,2}^+, \quad \mathcal{Q}_{0,2}^+ \mathcal{Q}_{1,2} = (\mathcal{G}_0 + l + 1/2) \mathcal{Q}_{0,1}^+,$$

$$\mathcal{Q}_{0,2} \mathcal{Q}_{0,2}^+ \mathcal{Q}_{0,2} = (\mathcal{G}_0 + m + 1/2)(\mathcal{G}_0 + l + 1/2) \mathcal{Q}_{0,2},$$

и соотношения, эрмитово-сопряженные этим. Все остальные произведения любых двух суперзарядов равны нулю. Наинизшее собственное значение супероператора $\mathcal{G}_0$, равное $-l - 1/2$, невырождено. Ему соответствует функция $\Psi_{-2} = (0, 0, \chi_{-2})^t$. Следующее его собственное значение, равное $-m - 1/2$, дважды вырождено, и ему соответствуют две собственные функции $\Psi_{-1}^1 = (0, \varphi_{-1}, 0)^t$ и $\Psi_{-1}^2 = (0, 0, \chi_{-1})^t$. Остальной дискретный спектр супероператора $\mathcal{G}_0$ совпадает со спектром гармонического осциллятора и является трехкратно вырожденным. Соответствующие собственные функции строятся при помощи функций ψ_n , φ_n и χ_n .

Однократное преобразование с функцией $u_1 = \psi_n$ дает разность потенциалов с n особенностями. Однако повторное преобразование с функцией $u_2 = \psi_{n+1}$ устраняет все особенности и приводит к регулярной разности потенциалов

$$V^{(n, n+1)} = \frac{2}{1+t^2} \left[\frac{J_n''(z)}{J_n(z)} - \left(\frac{J_n'(z)}{J_n(z)} \right)^2 - 1 \right],$$

$$J_n(z) = \sum_{s=0}^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+1)} He_s^2(z) = nJ_{n-1}(z) + He_n^2(z),$$

$$J_0(z) = 1, \quad J_1(z) = z^2 + 1, \quad J_2(z) = z^4 + 3, \dots \quad (45)$$

Оператор второго порядка $\hat{L}_{0,2}$ и ему сопряженный $\hat{L}_{0,2}^+$ участвуют в факторизации оператора $\mathcal{G}_0$: $\hat{L}_{0,2}^+ \hat{L}_{0,2} = (i\mathcal{G}_0 - n - 1/2)(i\mathcal{G}_0 - n - 3/2)$. Построенные с его помощью суперзаряды $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}^+$ и оператор $\mathcal{G}_0 = i \operatorname{diag} \{g^0, g^1\}$, $g^1 = g^0 - i(1+t^2)V^{(n, n+1)}$ образуют квадратичную супералгебру $[\mathcal{G}_0, \mathcal{Q}] = [\mathcal{G}_0, \mathcal{Q}^+] = 0$, $\mathcal{Q}^2 = (\mathcal{Q}^+)^2 = 0$, $\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^+\} = (\mathcal{G}_0 - n - 1/2) \times (\mathcal{G}_0 - n - 3/2)$. Основное состояние оператора $\mathcal{G}_0$ двукратно вырождено, и соответствующие собственные функции $\Psi_0^+ = (\psi_0, 0)^t$ и $\Psi_0^- = (0, \hat{L}_{0,2}\psi_0)^t$ преобразуются друг в друга операторами суперзарядов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^+$. Состояния $\Psi_n = (\psi_n, 0)^t$ и $\Psi_{n+1} = (\psi_{n+1}, 0)^t$, аннигилируемые обоими суперзарядами, являются невырожденными и соответствуют собственным значениям $n + 1/2$ и $n + 3/2$ оператора $\mathcal{G}_0$. Мы получаем, таким образом, суперсимметричную квантово-механическую модель, в которой наинизшее состояние оператора симметрии не аннигилируется обоими суперзарядами, а состояния, аннигилируемые ими, находятся внутри дискретного спектра. Такая ситуация впервые обсуждалась для стационарного уравнения Шредингера в работе [50]. Она может возникнуть только в суперсимметричных моделях с суперзарядами, содержащими высшие производные по x .

В качестве следующего примера рассмотрим гармонический осциллятор с переменной частотой

$$h_0 = -\partial_x^2 + \omega^2(t) x^2, \quad (46)$$

где $\omega(t)$ — произвольная вещественная функция. Решение уравнения Шредингера с таким гамильтонианом хорошо известно (см., например, [51, 52]). Для наших целей понадобятся не только функции пространства $H_0(R)$, но и решения $\psi(x, t) \notin H_0(R)$. Поэтому рассмотрим эту задачу подробнее.

Рассмотрим операторы уничтожения и рождения следующего вида [53]:

$$a = \varepsilon \partial_x - \frac{i}{2} \dot{\varepsilon} x, \quad a^+ = -\bar{\varepsilon} \partial_x + \frac{i}{2} \dot{\bar{\varepsilon}} x, \quad \varepsilon = \varepsilon(t). \quad (47)$$

Точкой обозначаем производную по t . Требование, чтобы операторы (47) являлись интегралами движения системы с гамильтонианом (46), приводит к следующему уравнению на параметр ε :

$$\ddot{\epsilon} + 4\omega^2 \epsilon = 0. \quad (48)$$

В силу вещественности функции ω^2 из уравнения (48) следует, что $(\dot{\epsilon}\bar{\epsilon} - \epsilon\dot{\bar{\epsilon}})_t = 0$. Уравнение (48) определяет функцию ϵ с точностью до постоянного множителя. Этим произволом можно воспользоваться, чтобы выполнить условие $[a, a^+] = 1$. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\dot{\epsilon}\bar{\epsilon} - \epsilon\dot{\bar{\epsilon}} = 2i.$$

Операторы (47) реализуют в этом случае представление алгебры Гейзенберга — Вейля w_1 , а их квадратичные комбинации

$$K_- = \frac{1}{2} a^2, \quad K_+ = \frac{1}{2} (a^+)^2, \quad K_0 = \frac{1}{4} \{a, a^+\} \quad (49)$$

— представление алгебры $su(1,1)$:

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_-, K_+] = 2K_0.$$

Полупрямая сумма этих представлений дает представление алгебры Шредингера $sch(1,1)$, отличное от рассмотренного в п.2.3, а совокупность операторов a, a^+, I, K_0 и $K_{\pm}$ реализуют базис Картана — Вейля этой алгебры

$$[a, K_0] = \frac{1}{2} a, \quad [a^+, K_0] = -\frac{1}{2} a^+.$$

Подалгеброй Картана является $\text{span}(K_0, I)$. Представление дискретной серии определяется, следовательно, уравнением квантования для оператора K_0 , которое можно получить, также действуя оператором рождения a^+ на вакуумное состояние $\psi_0(x, t)$. Последнее, в свою очередь, определяется условием $a\psi_0 = 0, \psi_0 \in H_0(R)$.

Поскольку нас будут интересовать не только решения уравнения (1) из пространства $H_0(R)$, то мы используем метод R -разделения переменных [38] для их нахождения. Решения уравнения (1) в R -разделенных переменных

$$\psi(x, t) = R(x, t) P(\tau) Q(\xi) \quad (50)$$

определяются как совместные решения уравнения Шредингера (1) и уравнения на собственные функции оператора K_0 . Подставив явный вид операторов a и a^+ (47) в выражение для K_0 (49), получим

$$4K_0 = -2\gamma\partial_x^2 + i\dot{\gamma}x\partial_x + \frac{i}{2}\dot{\gamma} + \frac{1}{4}\ddot{\gamma}x^2 + 2\omega^2\gamma x^2, \quad (51)$$

где $\gamma = \epsilon \bar{\epsilon}$. Поскольку на пространстве T_0 выполняется равенство $i\partial_t + \partial x^2 - \omega^2(t)x^2 = 0$, то оператор (51) можно переписать в виде оператора первого порядка по ∂_x и ∂_t :

$$4K_0 = 2i\gamma\partial_t + i\dot{\gamma}x\partial_x + \frac{i}{2}\dot{\gamma} + \frac{1}{4}\ddot{\gamma}x^2. \quad (52)$$

Уравнения на собственные значения операторов (51) и (52) в координатах $\xi = x/\sqrt{\gamma}$ и $\tau = t$, при выборе функции $R(x, t)$ в виде

$$R(x, t) = \exp \left(i \frac{\dot{\gamma}x^2}{8\gamma} \right), \quad (53)$$

являются уравнениями на функции $Q(\xi)$ и $P(\tau)$ в разделенных переменных. Первое из этих уравнений имеет вид

$$Q_{\xi\xi}(\xi) - (\xi^2/4 + \lambda) Q(\xi) = 0, \quad (54)$$

а второе легко интегрируется:

$$P(t) = \gamma^{-1/4} \exp(i\lambda \int \gamma^{-1} dt), \quad (55)$$

где λ — постоянная разделения, выражается через фазу функции $\epsilon(t)$ [52].

Дискретный базис $\psi_n(x, t)$ пространства $H_0(R)$ соответствует выбору $\lambda = \lambda_n = -n - 1/2$:

$$\psi_n(x, t) = N_n \gamma^{-1/4} \exp \left(\frac{(i\dot{\gamma} - 2)x^2}{8\gamma} + i\gamma \int \frac{dt}{\gamma} \right) He_n(x/\sqrt{\gamma}), \quad (56)$$

где N_n — нормировочный коэффициент.

Из формул (53)—(55) следует, что функция (50) удовлетворяет условию вещественности (9) при всех вещественных λ . В полной аналогии с предыдущим случаем мы можем использовать попарно соседние функции (56) в качестве функции преобразования для преобразования Дарбу N -го порядка, либо при $N=1$ функции $u = \psi_\lambda$ при $\lambda > 0$, в частности, значениям $\lambda = n + 1/2$ соответствуют функции преобразования элементарного вида. Получающиеся в результате точно решаемые потенциалы выражаются формулами (43)—(45) с заменой $1 + t^2 \rightarrow \gamma$.

Отметим в заключение этого раздела, что использование других представителей орбит в алгебре Шредингера для получения решений уравнения Шредингера с гамильтонианом (46) позволяет получить другие точно решаемые нестационарные гамильтонианы.

потенциала и уточнить, исключив из цепочки преобразования, композиция которых является оператором симметрии исходного уравнения Шредингера.

2. Рассмотрим уравнение Шредингера (57). Пусть в данном случае T_0 — функциональное (при необходимости топологическое) пространство решений уравнения (57). Для оператора дифференцирования будем в этом разделе использовать обозначение $\partial_x \equiv D$.

Определение. Линейный, дифференциальный порядка N оператор $\hat{L}^{(N)}$ с коэффициентом при D^N , равным единице, действующий из T_0 в $T_{N1} = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi, \psi \in T_0\}$, назовем оператором преобразования Дарбу порядка N , если

$$\hat{L}^{(N)}h_0 - h_0\hat{L}^{(N)} = A_N(x)\hat{L}^{(N)}, \quad (58)$$

где $A_N(x)$ — некоторая достаточно гладкая функция. При $A_N(x) \equiv 0$ оператор $\hat{L}^{(N)}$ назовем тривиальным.

Из этого определения непосредственно следует, что функция $\varphi = \hat{L}^{(N)}\psi$ удовлетворяет уравнению Шредингера с потенциалом $V_N(x) = V_0(x) + A_N(x)$, а пространство $T_{N1} \subset T_N$, где T_N — функциональное пространство решений уравнения Шредингера с потенциалом $V_N(x)$.

При $N = 1$ уравнение (58) определяет обычное преобразование Дарбу первого порядка (см. ф-лы (11), (12) при $L_1 = 1$). Функция u_α , входящая в эти выражения, называется функцией преобразования и определяется исходным гамильтонианом h_0 : $h_0u_\alpha = \alpha u_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{Im } u_\alpha = 0$. Оператор $\hat{L}$ имеет нетривиальное ядро $\ker \hat{L} = \text{span} \{u_\alpha\}$, где span означает линейную оболочку над полем $\mathbb{C}$.

Если $\tilde{u}_\alpha$ выбрано так, что $W(u_\alpha, \tilde{u}_\alpha) = 1$, где через W мы обозначаем вронскиан, то $\hat{L}\tilde{u}_\alpha = u_\alpha^{-1} = v_\alpha$ и $h_1v_\alpha = \alpha v_\alpha$, $h_1 = h_0 + A_1(x)$. Кроме того, путем непосредственных вычислений убеждаемся, что $\lim_{E \rightarrow \alpha} R^{-1}(E)\hat{L}\psi_E(x) = \tilde{v}_\alpha(x)$, $R(E) = E - \alpha$ при условии, что $\psi_E(x) \rightarrow u_\alpha(x)$ при $E \rightarrow \alpha$. В этом случае $h_1\tilde{v}_\alpha = \alpha\tilde{v}_\alpha$ и $W(v_\alpha, \tilde{v}_\alpha) = W(u_\alpha, \tilde{u}_\alpha) = 1$. Поэтому на пространстве T_0 всегда можно определить линейный оператор L , положив $\varphi_E = L\psi_E = R^{-1/2}(E)\hat{L}\psi_E$, $\forall E \neq \alpha$, $L\tilde{u}_\alpha = \hat{L}\tilde{u}_\alpha = v_\alpha = u_\alpha^{-1}$ и $Lu_\alpha = \tilde{v}_\alpha$. Оператор L каждому элементу $\psi \in T_0$ ставит в соответствие единственный элемент $\varphi \in T_1$, где T_1 — функциональное пространство решений уравнения Шредингера с гамильтонианом h_1 , причем $W(\varphi_E, \tilde{\varphi}_E) = W(\psi_E, \tilde{\psi}_E)$, $\forall \psi_E, \tilde{\psi}_E \in T_0$.

Из (58) следует, что если $A_N(x)$ — функция вещественнозначная, то $\hat{L}^{(N)+} \hat{L}^{(N)}$, где $\hat{L}^{(N)+}$ — формально сопряженный к $\hat{L}^{(N)}$ оператор, будет дифференциальным (порядка $2N$) оператором симметрии уравнения (57) и, следовательно, многочленом порядка N от h_0 .

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы, рассмотрим три леммы.

Лемма 1. Оператор $\hat{L} \equiv \hat{L}^{(1)}$ тогда и только тогда является оператором преобразования Дарбу, когда $\hat{L}^+ \hat{L} = h_0 - \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Лемма достаточно просто доказывается путем непосредственных вычислений, и мы на этом не останавливаемся. Отметим только, что это утверждение представляет собой основу известного метода факторизации в квантовой механике (см., например, [11]).

Поскольку $\ker \hat{L}^+ = \text{span} \{v_\alpha = u_\alpha^{-1}\}$, то на пространстве T_1 можно определить оператор L^+ , положив $L^+ \varphi_E = R^{-1/2}(E) \hat{L}^+ \varphi_E$, $\forall E \neq \alpha$ и $L^+ \tilde{v}_\alpha = \hat{L}^+ \tilde{v}_\alpha = u_\alpha = v_\alpha^{-1}$, $L^+ v_\alpha = \tilde{u}_\alpha$. Операторы L и L^+ осуществляют взаимно однозначное отображение пространств T_0 и T_1 . Кроме того, $T_0 = T_{01} \cup \text{span} \{\tilde{u}_\alpha\}$, $T_1 = T_{11} \cup \text{span} \{\tilde{v}_\alpha\}$, $T_{01} = \{\psi : \psi = \hat{L}^+ \varphi, \varphi \in T_1\}$.

Лемма 2. Оператор $\hat{L} \equiv \hat{L}^{(2)}$ всегда можно представить в виде $\hat{L} = \hat{L}_2 \hat{L}_1$, где $\hat{L}_1 = -u'_1/u_1 + D$, $\hat{L}_2 = -v'/v + D$ — операторы преобразования Дарбу первого порядка, u_1 — функция преобразования, удовлетворяющая уравнению (57) при некотором собственном значении C_1 , v — функция преобразования для повторного преобразования Дарбу первого порядка, удовлетворяющая уравнению Шредингера с промежуточным потенциалом V_1 , полученным из V_0 в результате преобразования Дарбу с оператором $\hat{L}_1$, и соответствующая собственному значению C_2 . Если C_1 и $C_2 \in \mathbb{R}$, то они произвольны, а функции u_1 и v — вещественнозначные. Если C_1 и $C_2 \in \mathbb{C}$, то $C_2 = \bar{C}_1$ и $v = \hat{L}_1 \bar{u}_1$. Разность потенциалов $A_2(x)$ является вещественнозначной функцией.

Отметим прежде всего, что аналогичное утверждение содержится в работе [24], однако для дальнейшего будут полезны некоторые детали доказательства, и мы приведем его полностью.

Рассмотрим $\hat{L} = a_0(x) + a_1(x)D + a_2(x)D^2$. Из (58) получаем систему уравнений на функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ и $A(x) \equiv A_2(x)$. Из этой системы следует, что $a_2 = \text{const}$, и без ущерба можно положить $a_2 = 1$. Кроме того,

$A = 2a_1'$. Исключив из системы a_0 и A , получим дифференциальное уравнение для функции a_1 , которое без труда может быть дважды проинтегрировано с постоянными $2\alpha_1$ и $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. В результате получим следующее дифференциальное уравнение для a_1 :

$$a_1^2 V_0 + a_1^2 a_1' - \frac{1}{2} a_1 a_1'' + \frac{1}{4} a_1'^2 - \frac{1}{4} a_1^4 - \alpha_1 a_1^2 - \alpha_2 = 0. \quad (59)$$

Введем новую переменную u_1 , положив

$$u_1'/u_1 = \frac{1}{2} a_1'/a_1 - \frac{1}{2} a_1 - \sqrt{\alpha_2}/a_1. \quad (60)$$

Уравнение (59) при этом примет вид $-D^2 u_1 + (V_0 - C_1) u_1 = 0$, где $C_1 = \alpha_1 - \sqrt{\alpha_2}$, то есть функция u_1 является решением исходного уравнения Шредингера. Определив эту функцию, решаем уравнение (60). Введем новую функцию v , положив $a_1 = -[\ln(vu_1)]'$. Из уравнения (60) получим уравнение для функции v :

$$-D^2 v + (V_1 - C_2) v = 0,$$

где $C_2 = \alpha_1 + \sqrt{\alpha_2}$, $V_1 = V_0 - 2(\ln u_1)_{xx}$. Отсюда ясно, что функция v является решением уравнения Шредингера, полученного из уравнения (57) при помощи оператора преобразования $\hat{L}_1$ с функцией преобразования u_1 . Учитывая, что $a_1 = -[\ln(vu_1)]'$ и $a_0 = u_1'v'/(u_1v) - (\ln u_1)''$, получаем устанавливаемое леммой выражение для оператора $\hat{L}$. Кроме того, при $C_2 \neq C_1$ имеем $v = \hat{L}_1 u_2 = u_1^{-1} W(u_1, u_2)$, где $h_0 u_2 = C_2 u_2$. Для разности потенциалов получаем выражение

$$A = -2[\ln W(u_1, u_2)]''. \quad (61)$$

При $C_2 = C_1 = C$ имеем $v = \beta_1 u_1^{-1} + \beta_2 \tilde{v}$, где $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ и $u_1^{-1}, \tilde{v}$ линейно независимые решения уравнения Шредингера с потенциалом V_1 при $E = C$. Вронскиан W в формуле (61) необходимо заменить в этом случае на $W \rightarrow \beta_1 + \beta_2 u_1 \tilde{v}$.

Следствие 1. Из лемм 1 и 2 сразу же следует, что $\hat{L}^+ \hat{L} = (h_0 - C_1)(h_0 - C_2)$.

Замечание 1. При $C_1 = C_2 = C \in \mathbb{R}$ и $v = u_1^{-1}$ ($\beta_2 = 0$) оператор $\hat{L} = -\hat{L}_1^+ \hat{L}_1 = C - h_0$ — тривиальный оператор преобразования.

Замечание 2. В случае $C_2 \neq C_1$ промежуточную функцию v можно исключить. При этом получим для $\hat{L}$ известное [41] выражение, которое для цепочки N преобразований имеет вид

$$\hat{L}^{(N)} = \hat{L}_N \hat{L}_{N-1} \dots \hat{L}_1 = W^{-1}(u_1, \dots, u_N) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & 1 \\ u_1' & u_2' & \dots & D \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(N)} & u_2^{(N)} & \dots & D^N \end{vmatrix}. \quad (62)$$

Кроме того, $\hat{L}^{(N)+} \hat{L}^{(N)} = P(h_0) = \prod_{i=1}^N (h_0 - C_i)$, где $h_0 u_i = C_i u_i$, и все C_i

различны. Если коэффициенты многочлена $P(x)$ принадлежат полю $\mathbb{R}$, то промежуточные потенциалы (при наличии комплексных нулей у $P(x)$) могут быть комплекснозначными, но результирующий потенциал при соответствующем выборе функций преобразования будет вещественнозначной функцией.

Обозначим через Q следующий многочлен степени N с вещественными коэффициентами: $Q(h_0) = \hat{L}^{(N)+} \hat{L}^{(N)}$. Пусть $C_1, \dots, C_N$ — нули многочлена $Q(x)$ произвольной кратности.

Лемма 3. Если $\hat{L}^{(N)}$ — оператор преобразования Дарбу N -го порядка, то $\ker \hat{L}^{(N)} \cap \bigcup_{i=1}^N \ker (h_0 - C_i) \neq \emptyset$.

Рассмотрим один из нулей многочлена $Q(x)$, например, C_1 . Если $\ker \hat{L}^{(N)} \cap \ker (h_0 - C_1) \neq \emptyset$, то лемма доказана. Пусть

$$\ker \hat{L}^{(N)} \cap \ker (h_0 - C_1) = \emptyset. \quad (63)$$

Обозначим $v_1 = \hat{L}^{(N)} u_1$, $\tilde{v}_1 = \hat{L}^{(N)} \tilde{u}_1$, где $u_1, \tilde{u}_1$ — некоторый базис в пространстве $\ker (h_0 - C_1)$. В силу линейности оператора $\hat{L}^{(N)}$ и предположения (63), $\text{span} \{v_1, \tilde{v}_1\}$ не может быть одномерным пространством. Тогда

$$\text{span} \{v_1, \tilde{v}_1\} = \ker (h_N - C_1) \subset \ker \hat{L}^{(N)+}.$$

Используя предложение 2.1 работы [4], оператор $\hat{L}^{(N)+}$ можно записать в виде $\hat{L}^{(N)+} = \hat{L}^{(N-2)+} \hat{L}_2^+ \hat{L}_1^+$, где $\hat{L}_1^+ = \frac{d}{dx} \ln v_1 - D$, $\hat{L}_2^+ = \frac{d}{dx} \ln \frac{W(v_1, \tilde{v}_1)}{v_1} - D$.

Учитывая то, что функции v_1 и $\tilde{v}_1$ являются линейно независимыми решениями уравнения Шредингера при данном значении E , получаем

$$\hat{L}^{(N)+} = -\hat{L}^{(N-2)+}(h_N - C_1).$$

Здесь $\hat{L}^{(N-2)+}$ — оператор преобразования Дарбу $N-2$ -го порядка от решений уравнения Шредингера с гамильтонианом h_N к решениям этого же уравнения с гамильтонианом h_0 . Но тогда $\hat{L}^{(N)} = -\hat{L}^{(N-2)}(h_0 - \bar{C}_1)$, что при $C_1 \in \mathbb{R}$ противоречит (63), а при $C_1 \in \mathbb{C}$ приводит к утверждению леммы, поскольку в этом случае $\bar{C}_1$ есть также нуль многочлена $Q(x)$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

Теорема. Действие всякого нетривиального оператора $\hat{L}^{(N)}$ эквивалентно результирующему действию некоторой цепочки $k(\leq N)$ преобразований Дарбу первого порядка.

Используя леммы 2 и 3 и соображения индукции, оператор $\hat{L}^{(N)}$ всегда можно представить в виде $\hat{L}^{(N)} = \hat{L}_N \hat{L}_{N-1} \dots \hat{L}_1$, что соответствует цепочке N преобразований Дарбу первого порядка. Если выполняются условия замечания 1, то отдельные произведения операторов цепочки будут являться тривиальными операторами преобразования. В этом случае $\hat{L}^{(N)} = \hat{L}^{(k)} P(h_0)$, где $\hat{L}^{(k)} = \hat{L}_{t+k} \hat{L}_{t+k-1} \dots \hat{L}_t$ и $P(x)$ — некоторый многочлен. Операторы преобразования $\hat{L}^{(N)}$ и $\hat{L}^{(k)}$ приводят к одной и той же разности потенциалов $A_N(x)$, что и доказывает теорему.

Замечание 3. Нами отмечена возможность тривиальных операторов преобразования, которая может реализоваться для произвольного потенциала $V_0(x)$. Известны такие примеры потенциалов [54], для которых цепочки большей длины приводят к тривиальному оператору преобразования.

3. В заключение отметим, что оператор $\hat{L}^{(k)+}$, осуществляющий преобразование от решений уравнения Шредингера с потенциалом V_N к решениям уравнения (57), может быть использован для конструирования оператора $\hat{L}^{(k)-1}$. Кроме того, если $C_1, \dots, C_q$ — различные нули многочлена $P(h_0) = \hat{L}^{(k)+} \hat{L}^{(k)}$, то для пространства T_0 выполняется разложение

$T_0 = T_{01} \cup \bigcup_{i=1}^q \text{span} \{ \tilde{u}_i \}, \ker(h_0 - C_i) = \text{span} \{ u_i, \tilde{u}_i \}, i = 1, \dots, q$. Функции u_i являются функциями преобразования для промежуточного оператора преобразования $\hat{L}^{(q)} = \hat{L}_q \hat{L}_{q-1} \dots \hat{L}_1$. Аналогичное разложение можно записать для пространства T_N .

3.2. Одевающие цепочки. Рассмотрим, какие конструкции приводят к так называемым «одевающим цепочкам», введенным в работах [55,56] и подробно изученным в [54]. Пусть цепочка гамильтонианов $h_0, h_1, \dots, h_i = -\partial_x^2 + V_i(x)$ порождается последовательным применением преобразований Дарбу первого порядка. Тогда, согласно (58), они сплетаются операторами преобразования Дарбу $\hat{L}_i = -L_{0i}(x) + \partial_x$:

$$h_{i+1} \hat{L}_i = \hat{L}_i h_i. \quad (64)$$

Из (64) следует, что $V_{i+1} - V_i = -2L'_{0i}(x)$ и $L''_{0i} + (L^2_{0i})' - V'_i = -L''_{0i} + (L^2_{0i})' - V'_{i+1} = 0$.

Отсюда ясно, что

$$L'_{0i} + L^2_{0i} - V_i = -L'_{0i} + L^2_{0i} - V_{i+1} = -\alpha_i, \quad (65)$$

где α_i — постоянная интегрирования. Именно отсюда следуют обычные для преобразований Дарбу соотношения

$$L_{0i} = \ln u_i, \quad A_i = V_{i+1} - V_i = -2(\ln u_i)'', \quad h_i u_i = \alpha_i u_i. \quad (66)$$

Рассмотрим разность двух последовательных соотношений (65):

$$(L_{0i} + L_{0i+1})' - L^2_{0i} + L^2_{0i+1} = \beta_i, \quad \beta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}. \quad (67)$$

Система уравнений (67) и названа в [54] «одевающей цепочкой». Ясно также, что в основе свойства гамильтоновости такой цепочки, подробно рассмотренного в [54], лежат соотношения (66) и, в частности, возможность ее проинтегрировать при помощи функций преобразования u_i , удовлетворяющих уравнению Шредингера с гамильтонианом h_i .

В работе [54] подробно изучены свойства замкнутых цепочек. Условие замыкания в терминах цепочки гамильтонианов выглядит следующим образом: $h_N = h_0 + \alpha$, где α — произвольная вещественная постоянная. Оператор N -го порядка $\hat{L}^{(N)} = \hat{L}_{N-1} \hat{L}_{N-2} \dots \hat{L}_0$ будет осуществлять преобразо-

вание от гамильтониана h_0 непосредственно к h_N . Согласно (58) он определяется соотношением

$$[\hat{L}^{(N)}, h_0] = \alpha \hat{L}^{(N)}. \quad (68)$$

Соотношение (68) можно рассматривать как уравнение для определения операторов h_0 и $\hat{L}^{(N)}$. Оказывается [54], что свойства оператора h_0 сильно зависят от того, равняется ли α нулю. При $\alpha = 0$ оператор $\hat{L}^{(N)}$ является оператором симметрии для уравнения Шредингера с гамильтонианом h_0 . Если $N = 2n + 1$ — нечетное число, то оператор h_0 имеет в своем спектре не более n зон, и все операторы цепочки h_0, h_1, h_{N-1} являются конечнозонными. Такие операторы исследовались, в частности, в [57]. В простейшем нетривиальном случае $N = 3$ получаем однозонный потенциал вида $V_0(x) = 2\wp(x - x_0) + \text{const}$, где $\wp$ — эллиптическая $\wp$ -функция Вейерштрасса, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3),$$

где e_i — параметры потенциала. Решения уравнения Шредингера с таким потенциалом выражаются через эллиптические функции. Случай с четным N сводится к предыдущему. Все элементы теории конечнозонных потенциалов можно воспроизвести, используя свойства одевающей цепочки [54].

При $\alpha \neq 0$ соотношение (68) дает переопределенную систему уравнений для коэффициентов оператора $\hat{L}^{(N)}$. Условие ее разрешимости приводит к нелинейному уравнению для потенциала $V_0(x)$ [58]. В работах [58] и [59] получены некоторые элементарные решения этого уравнения, приводящие к потенциалам, спектр которых состоит из эквидистантной части и отдельно расположенного уровня основного состояния. В работе [12] установлено, что эти решения можно получить путем обычного преобразования Дарбу из потенциала гармонического осциллятора. В дальнейшем мы приведем и другие потенциалы элементарного вида, которые можно получить таким способом.

В работе [54] установлено, что спектр оператора h_0 , удовлетворяющего уравнению (68) при нечетных N , состоит из N арифметических прогрессий с первыми членами $0, \epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_2, \dots, \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{N-1}$ и разностью $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_N$, где $\epsilon_i = -\beta_i > 0$. В частности, при $N = 3$ общее решение цепочки и явный вид потенциала $V_0(x)$ выражаются через решения четвертого уравнения Пенлеве (PIV). Для $V_0(x)$ в [54] получено следующее выражение:

$$V_0(x) = -2Z' + \alpha^2 x^2/4 + \text{const}, \quad (69)$$

где функция Z является решением уравнения

$$(Z'')^2 - \alpha^2(Z - xZ')^2 + 4P(Z') = 0, \quad P(t) = t(t + \beta_2)(t - \beta_3).$$

Функция $L_{01}(x)$, определяющая первый из операторов цепочки преобразований, выражается через решения уравнения PIV:

$$y'' = \frac{1}{2y} (y')^2 + \frac{3}{2} y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{b}{y}, \quad L_{01} = y - x.$$

Отметим, что вид потенциала $V_0(x)$ наталкивает на мысль, что этот потенциал можно получить из потенциала гармонического осциллятора $\alpha^2 x^2/4$ при помощи преобразования Дарбу или цепочки таких преобразований при надлежащем выборе функций преобразования. Такой подход мог бы установить связь уравнения PIV с уравнением Шредингера для гармонического осциллятора. В частности, элементарное решение уравнения (68), полученное в [58], соответствует одному из рациональных решений уравнения PIV [60]. Мы полагаем, что, используя результаты работы [12], можно установить аналогичное соответствие между другими известными полиномиальными решениями уравнения PIV [61] и решениями уравнения Шредингера для гармонического осциллятора.

3.3. Примеры точно решаемых потенциалов. 3.3.1. Потенциалы с эквидистантными и квазиэквидистантными спектрами. Пусть $h_0 = -\partial_x^2 + x^2/4 - 1/2$. Рассмотрим вначале случай, когда функция преобразования $u(x) \notin H_0(R)$. В этом случае существует серия элементарных решений уравнения Шредингера вида

$$u_m(x) = \psi_{-m}(x) = \exp(x^2/4) H_m(ix/\sqrt{2}),$$

$$h_0 u_m = -(m+1)u_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (70)$$

где $H_m(z)$ — полиномы Эрмита [62]. Однократное преобразование Дарбу с функциями (70) при четных $m = 2k$ генерирует семейство регулярных на всей оси потенциалов

$$V_1^{(2k)} = x^2/4 - 3/2 + 8k^2[q_{2k-1}(x)/q_{2k}(x)]^2 - 4k(2k-1)q_{2k-2}(x)/q_{2k}(x),$$

$$q_k(x) = (-i)^k He_k(ix), \quad He_k(x) = 2^{-k/2} H_k(x/\sqrt{2}),$$

$$q_{k+1}(x) = xq_k(x) + kq_{k-1}(x), \quad q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x. \quad (71)$$

Потенциал (71) при $k = 1$ подробно изучен в работе [59]. Согласно результатам работы [54] эти потенциалы можно интерпретировать как потенциалы, спектр которых складывается из $2k + 1$ участков с эквидистантным спектром. Дискретный спектр новых гамильтонианов $h_1^{(m)} = -\partial_x^2 + V_1^{(m)}(x)$ имеет один дополнительный уровень основного состояния $E_0 = -(m + 1)$ по сравнению с эквидистантным спектром исходного гамильтониана h_0 . Все потенциалы (71) имеют острый минимум вблизи $x = 0$, и с ростом x их поведение все больше приближается к параболическому закону $x^2/4$. Волновые функции дискретного спектра имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \sqrt{(2k)!} (2\pi)^{-1/4} \exp(-x^2/4) / q_{2k}(x), \\ \varphi_{n+1}(x) &= (2\pi)^{-1/4} (n!)^{-1/2} (n+2k+1)^{-1/2} \times \\ &\times [He_n(x) q_{2k+1}(x) / q_{2k}(x) - n He_{n-1}(x)] \exp(-x^2/4), \\ n &= 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (72)$$

При нечетных $m = 2k + 1$ функции (70) обращаются в нуль только при $x = 0$ и могут быть использованы в качестве функций преобразования для спектральной задачи на полуоси $x \geq 0$. При этом получим следующее семейство новых потенциалов:

$$\begin{aligned}V_1^{(2k+1)}(x) &= x^2/4 - 3/2 + 2(2k+1)^2 [q_{2k}(x) / q_{2k+1}(x)]^2 - \\ &- 4k(2k+1) q_{2k-1}(x) / q_{2k+1}(x).\end{aligned}$$

В качестве решений нового уравнения Шредингера при $E = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) мы получим следующие функции:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \sqrt{2} (2\pi)^{-1/4} (n!)^{-1/2} (n+2k+2)^{-1/2} \times \\ &\times [He_n(x) q_{2k+2}(x) / q_{2k+1}(x) - n He_{n-1}(x)] \exp(-x^2/4).\end{aligned}\quad (73)$$

При нечетных n функции (73) обращаются в нуль при $x = 0, \infty$, а при четных n они сингулярны в начале координат. Поэтому дискретному спектру новых потенциалов соответствуют нечетные значения n . Функции (73) нормированы на единицу на полуоси. При $n = 1$ мы получаем функцию основного состояния.

Используем теперь две функции дискретного спектра: $\psi_k(x) = \exp(-x^2/4) He_k(x)$ и $\psi_{k+1}(x)$ в качестве функций преобразования при двукратном преобразовании Дарбу. В результате получим другое семейство потенциалов:

$$V_2^{(k, k+1)}(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2} - 2 \frac{J_k''(x)}{J_k(x)} + 2 \left[\frac{J_k'(x)}{J_k(x)} \right]^2,$$

$$J_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(i+1)} He_i^2(x).$$

Эти потенциалы являются четными функциями x , подобными параболе $x^2/4$, на дне которой находятся k небольших минимумов одной и той же глубины. На рис.1 построены графики смещенных для удобства сравнения потенциалов $V = V_2^{(k, k+1)} + 5k$, где k совпадает с номером кривой. Дискретный спектр этих потенциалов отличается от спектра гармонического осциллятора отсутствием уровней $E = k$ и $E = k + 1$. Нормированные на единицу функции дискретного спектра имеют вид

$$\varphi_n(x) = (2\pi)^{-1/4} (n!)^{-1/2} [(n-k)(n-k-1)]^{-1/2} \exp(-x^2/4) \times$$

$$\times [(n-k) He_n(x) + (He_k(x) He_{n+1}(x) - He_n(x) He_{k+1}(x)) He_{k+1}/J_k(x)],$$

$$n \neq k, k+1.$$

Рассмотрим теперь свойства вронскиана второго порядка, сконструированного из функций (70), не принадлежащих дискретному спектру исходной задачи:

$$W_{m,l}(x) \equiv W(u_m, u_l) = f_{m,l}(x) \exp(x^2/2),$$

$$f_{m,l}(x) = q_m(x) q_{l+1}(x) - q_l(x) q_{m+1}(x).$$

Используя выражение для производной этого вронскиана $W'_{m,l}(x) = (l-m)q_m(x) q_l(x) \exp(x^2/2)$ и определение многочленов $q_m(x)$ (71), можно

установить свойство монотонности функции $W_{m,l}(x)$. Четность многочленов $q_m(x)$ совпадает с четностью их номера m . Коэффициенты перед всеми степенями x целочисленные. При четных m $q_m(x) > 0$, а при нечетных $q_m(x) = 0$ только при $x = 0$ и нуль — простой. Кроме того, $W_{m,l}(0) = l!(m-1)! > 0$.

Отсюда следует, что при положительных m и l разной четности функция $W_{m,l}(x)$ при $l > m$ убывает при $x < 0$, возрастает

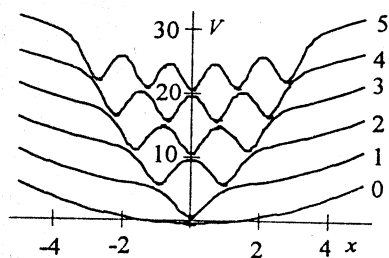


Рис.1. k -ямные потенциалы с квазиэквидистантным спектром

при $x > 0$ и имеет единственный минимум при $x = 0$, оставаясь все время положительной. При $m > l$ $W_{m,l}(x)$ возрастает при $x < 0$, убывает при $x > 0$ и имеет два симметрично расположенных простых нуля. Когда m и l имеют одинаковую четность, полагая для определенности $l > m$, получаем, что при четных m, l $W'_{m,l}(x) \geq 0$ и равенство имеет место только при $x = 0$ и нуль имеет второй порядок; при нечетных m, l $W'_{m,l}(x) > 0$ и в обоих случаях $W'_{m,l}(x) = W'_{m,l}(-x)$. Функция $W_{m,l}(x)$ при этом является монотонно возрастающей и имеет при $x = 0$ единственный простой нуль при четных m и l и тройной при нечетных m и l . Отсюда следует, что при $m = 0, 2, 4, \dots$ и $l = m + 1, m + 3, m + 5, \dots$ функции (70) пригодны для двукратного преобразования Дарбу.

Для нового потенциала получаем следующее выражение:

$$V_2^{(m,l)}(x) = x^2/4 - 5/2 - 2f''_{m,l}(x)/f_{m,l}(x) + 2[f_{m,l}(x)/f_{m,l}(x)]^2. \quad (74)$$

Потенциал (74) является регулярной функцией на всей вещественной оси. Гамильтонианы $h_2^{(m,l)}$ имеют два дополнительных уровня в дискретном спектре $E_0 = -l - 1$ и $E_1 = -m - 1$ по отношению к h_0 . Первый уровень соответствует основному состоянию, а второй — первому возбужденному. Нормированные на единицу волновые функции этих состояний имеют вид

$$\phi_0^{(m,l)}(x) = (2\pi)^{-1/4} \sqrt{l!(l-m)} \exp(-x^2/4) q_m(x)/f_{m,l}(x),$$

$$\phi_1^{(m,l)}(x) = (2\pi)^{-1/4} \sqrt{m!(l-m)} \exp(-x^2/4) q_l(x)/f_{m,l}(x).$$

Для остальных функций дискретного спектра получаем выражение

$$\begin{aligned} \phi_{n+2}(x) = & (2\pi)^{-1/4} (n!)^{-1/2} [(n+l+1)(n+m+1)]^{-1/2} \exp(-x^2/4) \times \\ & \times [(n+1) He_n(x) + ((m-l)q_m(x)q_l(x) He_{n+1}(x) - m l He_n(x) f_{m-1,l-1}(x))/f_{m,l}(x)], \\ & n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно рассмотреть преобразования более высоких порядков. Например, преобразование Дарбу четвертого порядка с двумя функциями дискретного спектра с $n = 2$ и $n = 3$ и двумя функциями (70) с $m = 2$ и $m = 3$ генерирует потенциал следующего вида:

$$\begin{aligned} V_4(x) = & x^2/4 - 1/2 - 24(1467x^2 + 6x^6 - x^{10}) Q^{-1}(x) + \\ & + 82944(105x^2 + 140x^6 + 3x^{10}) Q^{-2}(x), \\ Q(x) = & 315 + 315x^4 + 9x^8 + x^{12}. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще один интересный потенциал, получающийся при однократном преобразовании Дарбу. Функцию преобразования выберем в виде $u = \Psi_{-1/2}(x) = {}_0F_1(3/4, x^4/64)$ (${}_0F_1$ — гипергеометрическая функция ${}_pF_q$). Эта функция является решением уравнения Шредингера для гармонического осциллятора при $E = -1/2$. В результате получим двухъямный потенциал. Минимумы расположены симметрично в точках $x = \pm 1,68$. Соответствующее минимальное значение потенциальной энергии равно $V_1(x_{\min}) = -0,94$. Потенциальная энергия достигает локального максимума при $x = 0$ и $V_1(0) = -1/2$. Дополнительный уровень дискретного спектра расположен при $E = -1/2$, то есть энергетический уровень касается потенциальной кривой в ее максимуме. Волновая функция основного состояния с точностью до нормировочного множителя определяется функцией преобразования $\phi_0(x) = \Psi_{-1/2}^{-1}(x)$.

Рассмотрим теперь семейства изоспектральных потенциалов. Простейший из них генерируется при помощи следующего решения исходного уравнения Шредингера:

$$u(x) = \exp(x^2/4) (C + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})), \quad h_0 u(x) = -u(x). \quad (75)$$

Получающийся здесь потенциал

$$V_1(x) = x^2/4 - 3/2 + 2xQ_1^{-1}(x) \exp(-x^2/2) + 2Q_1^{-2}(x) \exp(-x^2),$$

$$Q_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (C + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})) \quad (76)$$

был сгенерирован при помощи интегрального преобразования в работе [15] и впоследствии при помощи преобразования Дарбу в [63]. Однако полные выражения для волновых функций, включающие нормировочные коэффициенты, авторам не встречались в доступной литературе. При $|C| > 1$ мы получаем следующую систему нормированных на единицу волновых функций:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= (2\pi)^{-1/4} \sqrt{C^2 - 1} u^{-1}(x), \\ \phi_{n+1}(x) &= (2\pi)^{-1/4} [(n+1)!]^{-1/2} \times \\ &\times (He_{n+1}(x) \exp(-x^2/4) + He_n(x) Q_1^{-1}(x) \exp(-3x^2/4)), \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (77)$$

Используя общее решение исходного уравнения Шредингера при $E = -2$

$$u(x) = \exp(-x^2/4) + x \exp(x^2/4) \left(-C + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}) \right),$$

получаем при $|C| < \sqrt{\pi/2}$ другой изоспектральный потенциал

$$V_1(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x + (2 + x^2) \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}) - C \right) \exp(x^2/2)}{1 - x \left(C - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}) \right) \exp(x^2/2)} \right)^2.$$

3.3.2. Эффективный кулоновский потенциал. В качестве следующего примера рассмотрим эффективный кулоновский потенциал

$$V_0(x) = -2z/x + l(l+1)/x^2, \quad E_n = -z^2/n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Psi_{nl}(x) = N_{nl}^0 x^{l+1} \exp(-zx/l) L_{n-l-1}^{2l+1}(2zx/n),$$

$$N_{nl}^0 = (2/n^2) (2/n)^l z^{l+3/2} \sqrt{(n-l-1)!/(n+l)!}.$$

Здесь $L_n^\alpha(x)$ — обобщенные многочлены Лагерра [62], и функции Ψ_{nl} нор-

мированы условием $\int_0^\infty \Psi_{nl}^2(x) dx = 1$.

Двукратное преобразование Дарбу с функциями дискретного спектра при $n = k$ и $n = k+1$ в качестве функций преобразования генерирует следующий точно решаемый потенциал:

$$V_2^{(l, k, k+1)}(x) = -2z/x + (l+1)(l+4)/x^2 - 2u''(x)/w_0(x) + 2[w'_0(x)/w_0(x)]^2,$$

где

$$w_0(x) = 2(k+1) L_{k-l-2}^{2l+2}(2zx/k) L_{k-l}^{2l+1}(2zx/(k+1)) + L_{k-l-1}^{2l+1}(2zx/k) \times \\ \times [L_{k-l}^{2l+1}(2zx/(k+1)) - 2k L_{k-l-1}^{2l+2}(2zx/(k+1))].$$

Нормированные на единицу функции дискретного спектра имеют вид

$$\Phi_{nl}^{(k)}(x) = N_{nk} \left[\left(\frac{1}{n^2} + \frac{w_1(x)}{nk(k+1)w_0(x)} \right) \Psi_{nl}(x) - N_{nl}^0 \frac{2(2k+1)}{nk(k+1)w_0(x)} \times \right. \\ \left. \times L_{k-l-1}^{2l+1}(2zx/k) L_{k-l}^{2l+1}(2zx/(k+1)) x^{l+1} L_{n-l-2}^{2l+2}(2zx/n) \exp(-zx/n) \right],$$

где

$$w_1(x) = 2n(k+1) L_{k-l-1}^{2l+1}(2zx/k) L_{k-l-1}^{2l+2}(2zx/(k+1)) + L_{k-l}^{2l+1}(2zx/(k+1)) \times \\ \times [(n-1) L_{k-l-1}^{2l+1}(2zx/k) - 2k(n L_{k-l-2}^{2l+2}(2zx/k) + L_{k-l-1}^{2l+1}(2zx/k))],$$

и

$$N_{nk} = n^2 k(k+1) [(k^2 - n^2) ((k+1)^2 - n^2)]^{-1/2}.$$

Простейший нетривиальный потенциал соответствует случаю $l=0, k=2$:

$$V_2^{(0,2,3)}(x) = -2z/x + 10/x^2 + 40Q_0^{-1}(xz)(2-xz)/x^2 - 100Q_0^{-2}(xz)(2xz-3)/x^2,$$

$$Q_0(x) = -15 + 10x - 2x^2.$$

Уровни с $n=2$ и $n=3$ отсутствуют в его дискретном спектре. Нормированные на единицу функции дискретного спектра определяются системой новых, ортогональных на интервале $(0, \infty)$ многочленов $P_n(x)$:

$$\varphi_{nl}(x) = \frac{1}{6} N_{nl}^0 N_{n2} n^{-2} z^2 x^3 P_n(xz) Q_0^{-1}(xz) \exp(-xz/n).$$

Эти многочлены определяются через многочлены Лагерра следующим образом:

$$x^3 P_n(x) = 10n(-54 + 63x - 22x^2 + 2x^3) L_{n-2}^2(2x/n) + L_{n-1}^1(2x/n) \times \\ \times [270n(n-1) - 45(2-7n+5n^2)x + 10(6-11n+5n^2)x^2 - 2(6-5n+n^2)x^3].$$

Первые пять многочленов имеют вид

$$P_1(x) = -4, \quad P_2(x) = P_3(x) = 0, \quad P_4(x) = \frac{1}{24} (-84 + 63x - 18x^2 + 2x^3),$$

$$P_5(x) = \frac{8}{625} (-875 + 700x - 220x^2 + 30x^3 - x^4).$$

Приведем также выражение для потенциала, получающегося при четырехкратном преобразовании Дарбу с функциями преобразования с $l=0, n_1=3, n_2=4, n_3=5$ и $n_4=6$:

$$V_4^{(0,3,4,5,6)}(x) = -2z/x + 38/x^2 - 144x^{-2} Q_2^{-1}(xz)(492 - 228xz + 27x^2 z^2 - x^3 z^3) -$$

$$- 31104x^{-2} Q_2^{-2}(xz)(9240 - 2640xz + 255x^2 z^2 - 8x^3 z^3),$$

$$Q_2(x) = 11880 - 3960x + 540x^2 - 36x^3 + x^4.$$

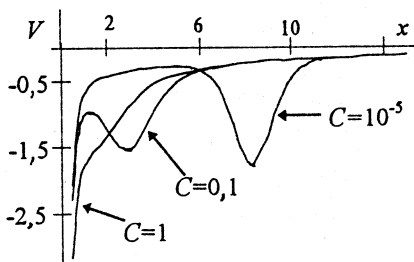


Рис.2. Изоспектральные потенциалы со спектром атома водорода

В противоположность гармоническому осциллятору здесь можно получить семейства изоспектральных потенциалов элементарного вида. Для этого нужно использовать в качестве функций преобразования сингулярные при $x = 0, \infty$ решения исходного уравнения. Мы конструируем элементарные решения с необходимыми свойствами при помощи функций

$$u_{nl}(x) = x^{-1} L_n^{-2l-1}(2zx/(n-l)) \exp(-zx/(n-l)),$$

$$h_0 u_{nl}(x) = -z^2/(n-l)^2 u_{nl}(x).$$

При $l = 1$ и $n = 2$ общее решение исходного уравнения Шредингера имеет вид

$$u(x) = x^{-1} \exp(-xz) Q_3(xz), \quad Q_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + C \exp(2x),$$

$$h_0 u(x) = -z^2 u(x).$$

С помощью этой функции преобразования получаем семейство потенциалов, спектр которых совпадает со спектром водородоподобного атома:

$$V_1(x) = -2z/x - 16z^3 x(xz-1) Q_3^{-1}(xz) + 32z^6 x^4 Q_3^{-2}(xz),$$

$$C \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty).$$

Эти потенциалы при $z = 1$ и некоторых значениях C приведены на рис.2. Нормированные на единицу функции дискретного спектра имеют вид

$$\varphi_1(x) = 2\sqrt{z^3 C(C+1)} u^{-1}(x),$$

$$\varphi_n(x) = N_{nl}^0 n z^{-1} (n^2 - 1)^{-1/2} \exp(-xz/n) \times$$

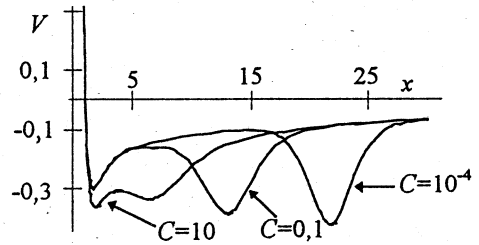
$$\times [x(2 - xz/n) L_{n-2}^3(2xz/n) - 2x^2(z/n) L_{n-3}^4(2xz/n) +$$

$$+ x(1 + xz + C \exp(2xz)(1 - xz) + 2x^3 z^3) L_{n-2}^3(2xz/n) Q_3^{-1}(xz)],$$

$$n = 2, 3, \dots$$

Следующие по сложности потенциалы генерируются при $n = 4$ и $l = 2$ при помощи функции преобразования

Рис.3. Изоспектральные центрально-симметричные потенциалы с центробежным членом



$$u(x) = x^{-2} \exp(-xz/2) Q_4(xz),$$

$$Q_4(x) = 24 + 24x + 12x^2 + 4x^3 + x^4 + C \exp(x).$$

Получающиеся при этом потенциалы имеют центробежный член

$$V_1(x) = -2z/x + 2/x^2 + 2z^5 x^3 (4 - xz) Q_4^{-1}(xz) + 2z^{10} x^8 Q_4^{-2}(xz).$$

Ход этих потенциалов при $z = 1$ приведен на рис.3. Нормированные на единицу функции дискретного спектра вычисляются следующим образом:

$$\varphi_2(x) = z^{5/2} \sqrt{C(C/4! + 1)} u^{-1}(x), \quad C \in (-\infty, -4!) \cup (0, \infty),$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = & 2N_{n2}^0(n/z) \cdot (n^2 - 4)^{-1/2} \exp(-xz/n) \times \\ & \times [x^2(3 - xz/n) L_{n-3}^5(2xz/n) - 2zx^3/n L_{n-4}^6(2xz/n) + \frac{1}{2} x^2 Q_4^{-1}(xz) \times \\ & \times (96 + 72xz + 24x^2 z^2 + 4x^3 z^3 + x^5 z^5 + (4 - xz) C \exp(xz)) L_{n-3}^5(2xz/n)], \\ & n = 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Интересно отметить, что, как это видно из рис.2 и 3, график кулоно-подобных потенциалов похож на график движущегося солитона, особенно если изменить знак $V \rightarrow -V$.

3.3.3. Потенциал Морса. Рассмотрим в качестве исходного потенциал Морса

$$V_0(x) = \exp(-2\alpha x) - A \exp(-\alpha x), \quad A = \text{const},$$

$$E_n = -\frac{1}{4} [A - \alpha(2n + 1)]^2, \quad \psi_n = z^\mu \exp(-z/2) L_n^{2\mu}(z),$$

$$z = \frac{2}{\alpha} \exp(-\alpha x), \quad \mu = \sqrt{|E_n|}/\alpha, \quad n \leq (A/\alpha - 1)/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Будем считать, что переменная x принимает все вещественные значения. Преобразование Дарбу второго порядка с функциями ψ_1 и ψ_2 приводит к следующему точно решаемому потенциалу:

$$V_2^{1,2}(x) = \exp(-2\alpha x) - \exp(-\alpha x)(a - 4\alpha) + \\ + 128(2\alpha - A)^{-1}\alpha^3 Q_4^{-2}(x) [(A - 3\alpha) \exp(\alpha x) - 1] + \\ + 8(2\alpha - A)^{-1}\alpha^2 Q_4^{-1}(x) [4\alpha - (A - 2\alpha)(A - 3\alpha) \exp(\alpha x)],$$

$$Q_4(x) = 4 - 4(A - 3\alpha) \exp(\alpha x) + (A - 2\alpha)(A - 3\alpha) \exp(2\alpha x), \quad A \neq 2\alpha.$$

В его дискретном спектре отсутствуют уровни с $n = 1$ и $n = 2$.

На основе потенциала Морса можно построить семейство изоспектральных потенциалов элементарного вида с одним уровнем дискретного спектра. Эта возможность основана на том, что при полуцелых μ оба частных решения уравнения Шредингера имеют элементарный вид.

Пусть μ равно некоторому фиксированному значению: $\mu = -(k + 1)/2$ и $A = -k\alpha$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае потенциал Морса

$$V_0(x) = \alpha^2 z^2 / 4 + \alpha^2 k z / 2$$

совсем не имеет дискретного спектра. Однако при $E_0 = -\frac{1}{4}(k + 1)^2 \alpha^2$ общее решение уравнения Шредингера имеет элементарный вид:

$$u(x) = \exp(-z/2) z^{-(k+1)/2} Q_5(z),$$

$$Q_5(z) = 1 + C \exp(z) \left(z^k + k! \sum_{i=1}^k (-1)^i z^{k-i} / (k-i)! \right).$$

Используя эту функцию в качестве функции преобразования, получим семейство потенциалов с одним уровнем дискретного спектра

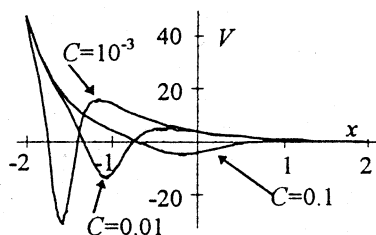
$$V_1(x) = \alpha^2 z^2 / 4 + \alpha^2 (k/2 + 1) z - 2\alpha^2 z d \ln Q_5(z) / dz - 2\alpha^2 z^2 d^2 \ln Q_5(z) / dz^2,$$

с энергией $E = E_0$ и нормированной на единицу волновой функцией вида

$$\varphi_0(x) = [\alpha C ((-1)^k k! C + 1)]^{1/2} u^{-1}(x).$$

Из этого соотношения ясно, что при четных n постоянная C должна удовлетворять условию $C \in (-\infty, -1/k!) \cup (0, \infty)$, а при нечетных — лежать внутри интервала $C \in (0, 1/k!)$.

Рис.4. Изоспектральные одноуровневые потенциалы, построенные на основе потенциала Морса



Простейший из этих потенциалов соответствует $k = 0$:

$$V_1(x) = \exp(-2\alpha x) + 2\alpha[1 - C \exp(2e^{-\alpha x}/\alpha)] Q_6^{-1}(x) - 8C \exp(2e^{-\alpha x}/\alpha) Q_6^{-2}(x),$$

$$Q_6(x) = \exp(\alpha x) [1 + C \exp(2e^{-\alpha x}/\alpha)].$$

Для $k = 2$ поведение этих потенциалов представлено на рис.4.

3.3.4. Сингулярный осциллятор. Под сингулярным осциллятором мы понимаем квантово-механическую систему с гамильтонианом

$$h_0 = -\partial_x^2 + x^2/4 + b/x^2, \quad b \in \mathbb{R} \quad x \in R = [0, \infty). \quad (78)$$

Многие квантово-механические задачи и ряд задач квантовой теории поля сводятся к решению уравнения Шредингера с гамильтонианом (78). К ним, в частности, относятся известная задача о движении частицы в кулоновском поле и задача о парном взаимодействии трех частиц в одномерном пространстве, впервые решенная Калоджеро [65]. Интерес к данному гамильтониану в последнее время вновь возрос в связи с его использованием при описании спиновых цепочек [66], квантового эффекта Холла [67], дробных статистик и анионов [68].

Дискретный базис пространства $H_0(R)$ определяется представлением дискретной серии алгебры $su(1,1)$, характеризуемым значением $k = 1/2 + (1/4)\sqrt{1 + 4b} = E_0/2$, определяющим собственное значение оператора Казимира:

$$C = \frac{1}{2} \{K_+, K_-\} - K_0 = 3/16 - b/4 = k(k+1),$$

где

$$K_+ = \frac{1}{2} [(a^+)^2 - b/x^2], \quad K_- = \frac{1}{2} [a^2 - b/x^2], \quad K_0 = \frac{1}{2} h_0,$$

$$a = \partial_x + x/2, \quad a^+ = -\partial_x + x/2,$$

$K_{\pm}$ и K_0 — генераторы алгебры $su(1,1)$. Вектор основного состояния (вектор младшего веса) определяется условиями

При нечетных p разность потенциалов $A_p(x)$ имеет сингулярность на полуоси $(0, \infty)$. Только при четных p функции (80) пригодны в качестве функций преобразования. Количество различных значений p ограничено условием $p < 2k - 1$. Поскольку $k \geq 1$, то всегда можно выбрать $p = 0$. Этому случаю соответствует форм-инвариантный потенциал, отличающийся от исходного только значением параметра b , $A_1 = -1 + (3 - 4k)/x^2$. Понятие форм-инвариантности введено в работе [69]. Совершенно ясно, что все форм-инвариантные потенциалы, классифицированные в этой работе, имеют среди решений уравнения Шредингера такие, которые после взятия второй логарифмической производной дают функциональную зависимость, отличающуюся от исходного потенциала только значениями параметров. Преобразование Дарбу для них, при соответствующем выборе функции преобразования, не изменяет вид функциональной зависимости.

Функции (80) порождают при четных p суперсимметричную квантовомеханическую модель, в которой суперсимметрия точная. Невырожденное вакуумное состояние супергамильтониана строится при помощи функции

$$\varphi_0(x) = 2^{k-1} \sqrt{p! \Gamma(2k - p - 1)} u_p^{-1}(x).$$

Для конструирования модели со спонтанно нарушенной суперсимметрией рассмотрим решение исходного уравнения Шредингера, обращающееся в нуль в начале координат и в бесконечность — при $x \rightarrow \infty$:

$$u_p(x) = \psi_p(ix), \quad h_0 u_p = -2(k + p) u_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Интеграл нормировки функции u_p^{-1} имеет вид

$$\int_0^\infty u_p^{-2}(x) dx = (-1)^p 2^{-2k} p! \Gamma(1 - p - 2k).$$

Отсюда следует, что функция u_p^{-1} ненормируема при всех p , но генерируемая с ее помощью разность потенциалов

$$A_p(x) = -1 + \frac{4k-1}{x^2} - 2 \frac{x^2 L_{p-2}^{2k+1}(y) + L_{p-1}^{2k}(y)}{L_p^{2k-1}(y)} + 2x^2 \left[\frac{L_{p-1}^{2k}(y)}{L_p^{2k-1}(y)} \right]^2$$

является регулярной функцией на полуоси $(0, \infty)$. Решения нового уравнения Шредингера, образующие базис пространства $H_0(R)$, получаем при помощи оператора преобразования

$$\hat{L} = \frac{1-4k}{2x} - \frac{x}{2} - \frac{xL_{p-1}^{2k}(y)}{L_p^{2k-1}(y)} - \partial_x.$$

В простейших случаях $p = 0, 1$ для разностей потенциалов получаем выражения

$$A_0(x) = \frac{4k-1}{x^2} - 1, \quad A_1(x) = A_0(x) + \frac{4}{4k+x^2} - \frac{32k}{(4k-x^2)^2}.$$

3.4. Когерентные состояния преобразованных гамильтонианов. Когерентные состояния, как нерасплывающиеся волновые пакеты, были впервые введены для гармонического осциллятора Шредингера [70]. Затем их свойства изучались Клаудером [71] и Глаубером [72]. К настоящему времени они нашли весьма широкое применение в самых разных областях физики и математики [41], [73]. Можно отметить, в частности, их применение в квантовой оптике [72,74,75], радиофизике [76], математической физике [77,78]. Существуют различные определения когерентных состояний [79], приводящие к одинаковому результату для гармонического осциллятора и, как правило, к различным результатам для других систем.

К настоящему времени накоплено значительное количество точно решаемых потенциалов (см. обзор [44] и п.3.3 данного обзора). Однако практически отсутствуют работы, посвященные построению и исследованию систем когерентных состояний для новых гамильтонианов. Исключая гармонический осциллятор, когда при обычном суперсимметричном подходе новый потенциал отличается от исходного на аддитивную постоянную, и, следовательно, имеет ту же систему когерентных состояний, что и исходный потенциал, авторам известны только три работы на данную тему. Две из них [80,81] посвящены исследованию когерентных состояний изоспектральных гамильтонианов с эквидистантным спектром и одна [60] — исследованию систем когерентных состояний q -деформированных потенциалов гармонического осциллятора и одного класса автодуальных потенциалов.

Метод операторов преобразования Дарбу является мощным инструментом для построения и исследования систем когерентных состояний преобразованных гамильтонианов.

Определим когерентное состояние как собственное состояние оператора уничтожения, являющегося интегралом движения рассматриваемой системы. Под операторами уничтожения и рождения $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ будем понимать любые два интеграла движения, образующие алгебру Гейзенберга — Вейля w_1^0 : $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$. Будем предполагать, что представление этой алгебры в гильбертовом пространстве $H_0(R)$ неприводимо.

Как отмечалось в п.2.5, у нас могут возникнуть три возможности. В первом случае функция преобразования $u = \psi_0 \in H_0(R)$ и $H_1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi, \psi \in H_0^0(R)\}$. Во втором случае $u \notin H_0(R)$ и $H_1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi, \psi \in H_0(R)\}$. В третьем $u \notin H_0(R)$, $H_1^1(R) = \{\varphi : \varphi = \hat{L}\psi, \psi \in H_0(R)\}$ и $H_1(R) = H_1^1(R) \oplus \ker \hat{L}^+$.

Будем предполагать, что оператор $M = \hat{L}^{-1}$ определен на всем пространстве $H_1(R)$ в первом и втором случаях. В третьем случае пространство $H_0(R)$ отображается не на все гильбертово пространство $H_1(R)$, а лишь на его подпространство $H_1^1(R)$. Поэтому обратный оператор M определен на пространстве $H_1^1(R)$.

При этих предположениях на пространстве $H_1(R)$ (а в третьем случае на $H_1^1(R)$) можно определить операторы $\tilde{a} = \hat{L}\tilde{a}M$ и $\tilde{a}^+ = \hat{L}\hat{a}^+M$, которые реализуют представление алгебры Гейзенберга — Вейля w_1^1 . Кроме того, если для исходного гамильтониана h_0 известна система когерентных состояний ψ_α , $\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$, $\psi_\alpha \in H_0(R)$, то функция $\varphi_\alpha = \hat{L}\psi_\alpha$ будет собственной для оператора уничтожения $\tilde{a}$ и ее можно интерпретировать как когерентное состояние преобразованного гамильтониана h_1 . В силу неприводимости представления алгебры Гейзенберга — Вейля w_1^1 эти состояния образуют полную (а точнее, переполненную) систему состояний в соответствующих неприводимых пространствах.

Пусть теперь в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ изменения переменной α для состояний ψ_α известна мера $\mu(\alpha)$, реализующая разложение единицы в пространстве $H_0(R)$:

$$1 = \int_D |\psi_\alpha\rangle \langle \psi_\alpha| d\mu(\alpha).$$

Тогда соответствующее разложение для пространства $H_1(R)$ (или $H_1^1(R)$) примет вид

$$1 = (h_1 - C)^{-1} \int_D |\varphi_\alpha\rangle \langle \varphi_\alpha| d\mu(\alpha),$$

где C является собственным значением оператора h_1 , соответствующим функции преобразования $v = [L_1(t)\bar{u}]^{-1}$ и по построению $h_1\varphi \neq C\varphi$, $\forall \varphi \in H_1(R)$ (или $H_1^1(R)$).

3.4.1. Когерентные состояния простых квантовых систем. Здесь мы приведем необходимые для дальнейшего изложения хорошо известные системы когерентных состояний квантовых систем, для которых нами построены точно решаемые преобразованные гамильтонианы.

1. Рассмотрим когерентные состояния гармонического осциллятора: $V_0(x) = x^2/4$. Операторы уничтожения и рождения, являющиеся интегралами движения для рассматриваемой системы и образующие алгебру Гейзенберга — Вейля w_1^0 , имеют вид

$$\hat{a}(t) = \exp(it)(\partial_x + x/2), \quad \hat{a}^+(t) = \exp(-it)(-\partial_x + x/2).$$

Когерентные состояния $|z, t\rangle$, являющиеся собственными состояниями оператора уничтожения, соответствуют решению уравнения Шредингера в разделенных переменных

$$\begin{aligned} \psi_z(x, t) &= (2\pi)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}it + zx - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z\bar{z}\right), \\ \hat{a}\psi_z(x, t) &= \zeta\psi_z(x, t), \quad z = \zeta \exp(-it), \quad \zeta \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (81)$$

Вектор $|z, t\rangle$ можно разложить по ортонормированной системе стационарных состояний $|n, t\rangle = \exp(-i(n+1/2)t)|n\rangle$, полной в $H_0(R)$:

$$|z, t\rangle = \exp(-z\bar{z}/2 - it/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n, t\rangle. \quad (82)$$

Нам понадобится также координатное представление стационарных состояний

$$\psi_n(x, t) = (2\pi)^{-1/4} (n!)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{4}x^2 - i\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) He_n(x). \quad (83)$$

2. Рассмотрим когерентные состояния свободной частицы. Операторы уничтожения и рождения для такой системы определяются следующим образом:

$$\hat{a}(t) = (i-t)\partial_x + ix/2, \quad \hat{a}^+(t) = (i+t)\partial_x - ix/2.$$

Когерентные состояния определяем из уравнения $\hat{a}\psi_z = z\psi_z$, $\psi_z \in H_0(R)$, $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \psi_z(x, t) &= (2\pi)^{-1/4} (1+it)^{-1/2} \exp\left(-(z+\bar{z})^2/4 - \right. \\ &\quad \left. - (1+it)^{-1}(x/2 + iz)^2\right). \end{aligned} \quad (84)$$

Функции дискретного базиса пространства $H_0(R)$ являются собственными для оператора $K_{-2} - K_2$ (см. [38]):

$$\begin{aligned} \psi_n(x, t) = & (-i)^n (n! 2^n \sqrt{2\pi})^{-1/2} (1 + it)^{-1/2} \times \\ & \times \exp(-in \operatorname{arctg} t - (1 + it)^{-1} x^2 / 4) H_n(x / \sqrt{2 + 2t^2}). \end{aligned} \quad (85)$$

Операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ являются лестничными для этих функций $\hat{a}\psi_n = \sqrt{n}\psi_n$, $\hat{a}^+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$. Разложение функции (84) по базису (85) выглядит следующим образом:

$$|z, t\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}(z + \bar{z})^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n, t\rangle. \quad (86)$$

3.4.2. Когерентные состояния ангармонических осцилляторов с квазиэквидистантным спектром. Под квазиэквидистантным спектром мы понимаем эквидистантный спектр с конечным числом лагун, то есть эквидистантный спектр, из которого вычеркнуто конечное число уровней. Такой спектр получается, в частности, из спектра гармонического осциллятора при преобразованиях Дарбу. Когерентные состояния таких систем рассмотрены в [31].

Рассмотрим в качестве функций преобразования функции (70) при $m = 2k$. Остановимся более подробно на интегральном операторе преобразования M , определяемом формулами (31), (33). Выбор $t_0 = -i\infty$ приводит к условию $C_1'(x) = 0$, и мы положим в (31) $C_1 = (0)$. Действие оператора M на стационарные состояния (83) дает с точностью до постоянного множителя те же функции (72) стационарных состояний гамильтониана $h_1^{(2k)} = -\partial_x^2 + V_1^{(2k)}(x) + 1/2$, $\varphi_{n+1}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, что и дифференциальный оператор преобразования (12). Подействуем оператором M на когерентное состояние (81). В результате получим функцию

$$\begin{aligned} \varphi_z(x, t) = & \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{z\bar{z}}{2} - i\left(2k + \frac{1}{2}\right)t\right) \left[\frac{P_{2k}'(x)}{P_{2k}(x)} + x - \frac{\partial}{\partial x}\right] \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} I(z, x), \\ I(z, x) = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{z-x}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \quad (87)$$

описывающую когерентные состояния гамильтониана $h_1^{(2k)}$. Разложение (82) позволяет получить разложение функций (87) по системе стационарных состояний $\{\varphi_n(x, t) = \varphi_n(x) \exp(-i(n + 1/2)t), n = 1, 2, \dots\}$:

$$\varphi_z(x, t) = (2\pi)^{1/4} \exp(-z\bar{z}/2) \times \\ \times \left[\sqrt{(2k)!} \psi_0 + \exp(-it/2) \zeta^{2k+1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\sqrt{(2k+s+1)s!}} \psi_{s+1} \right], \quad \zeta \in \mathbb{C}. \quad (88)$$

Коэффициент разложения при функции $\psi_0(x, t) = \psi_0(x) \exp(i(2k+1/2)t)$ необходимо вычислить непосредственным интегрированием.

Отметим, что при $\zeta = 0$ функция (88) совпадает с функцией основного состояния φ_0 . Разложение (88) полезно при вычислении интегралов с функциями (87), например, для нормировочного коэффициента этих функций и среднего значения энергии находим

$$\langle z, t | z, t \rangle = \sqrt{2\pi} (2k)! \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!} (z\bar{z})^s, \quad (89)$$

$$\langle h_1^{(2k)} \rangle = \left[(2k)! \sum_{s=0}^{2k} \frac{(-1)^s}{s!} (z\bar{z})^{s-2k-1} \right]^{-1} - 2k - \frac{1}{2}. \quad (90)$$

Функция (87) выражена через интеграл вероятностей $\text{erfc}(z)$. Однако явные выражения для функции $\varphi_z(x, t)$ содержат только элементарные функции. В частности, при $k=0$ мы получаем гармонический осциллятор со сдвинутым на единицу вверх началом отсчета энергии. Формулы (71), (72) и (87)—(90) переходят в соответствующие осцилляторные формулы. Например, из (90) получаем $\langle h_1^{(0)} \rangle = z\bar{z} - 1/2$.

При $k=1$ функция (87) имеет вид

$$\varphi_z(x, t) = N_z \left[z^2 + 2 \frac{1 - xz}{1 + x^2} \right] \exp \left(\frac{x^2}{4} + xz - \frac{z^2}{2} - \frac{z\bar{z}}{2} + \frac{5}{2} it \right), \quad (91)$$

где $N_z = [(2\pi)^{1/2} (1 + (1 - z\bar{z})^2)]^{-1/2}$.

Среднее значение координаты и импульса в состояниях (91) выражается через интеграл вероятностей $\text{erfc}(z)$, в частности,

$$\langle x \rangle = z + \bar{z} + \frac{\sqrt{2\pi}}{1 + (1 - z\bar{z})^2} \exp \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (z + \bar{z})^2 \right) \times \\ \times \text{Re} \left[(i - z - \bar{z} - iz\bar{z}) \exp(-iz - i\bar{z}) \text{erfc} \frac{1 - iz - i\bar{z}}{\sqrt{2}} \right].$$

Дифференциальное преобразование приводит к другой системе когерентных состояний; например, при $k=1$ получим состояния

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_z(x, t) &= \hat{L}\psi_z(x, t) = \\ &= (2\pi)^{-1/4} \left(z - x - \frac{2x}{1+x^2} \right) \exp \left(-\frac{1}{4}x^2 + zx - \frac{1}{2}z\bar{z} - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}it \right),\end{aligned}$$

которые при $\zeta = 0$ совпадают с функцией первого возбужденного состояния гамильтониана $h_1^{(2)}$, обладающей свойством $\tilde{a}\varphi_1 = 0$.

3.4.3. Ангармонические изоспектральные гамильтонианы с эквидистантным спектром. Когерентные состояния изоспектральных ангармонических гамильтонианов с эквидистантным спектром рассмотрены в работах [80—82]. Мы в своем изложении будем следовать работе [82].

Рассмотрим гамильтониан $h_1 = -\partial_x^2 + V_1(x) + 1/2$, где потенциал $V_1(x)$ получен при помощи функции преобразования (75) и определен соотношением (76). На самом деле, мы имеем семейство потенциалов, зависящих от параметра C , спектр собственных значений которых совпадает со спектром гармонического потенциала. Собственные функции этих потенциалов могут быть получены действием как интегрального оператора преобразования (31), (33), так и дифференциального (12) на стационарные состояния (83), и они определяются соотношениями (77):

$$\varphi_0(x, t) = \varphi_0(x) \exp(it/2),$$

$$\varphi_n(x, t) = \varphi_n(x) \exp(-i(n+1/2)t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим вновь более подробно действие интегрального оператора (31), (33) на когерентные состояния гармонического осциллятора (81). При этом получим когерентные состояния преобразованных гамильтонианов

$$\begin{aligned}\varphi_z(x, t) = M\psi_z(x, t) &= (2\pi)^{-1/4} (z\zeta)^{-1/4} \exp \left(-\frac{1}{2}z\bar{z} - \frac{1}{4}x^2 \right) \times \\ &\times \left[\exp \left(xz - \frac{1}{2}z^2 \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{z-x}{\sqrt{2}} \right) Q_1^{-1}(x) \right], \quad \zeta \neq 0.\end{aligned}$$

Прямое вычисление нормировочного коэффициента этой функции приводит к следующему результату:

$$\langle \varphi_z | \varphi_z \rangle = (z\bar{z})^{-1} \left(\frac{\exp(-z\bar{z})}{C^2 - 1} + 1 \right).$$

Эту функцию можно разложить по системе функций $\{\varphi_i(x, t)\}$. Коэффициент разложения при функции $\varphi_0(x, t)$ должен быть вычислен непосредственным интегрированием:

$$\langle \varphi_0 | \varphi_z \rangle = (2\pi)^{-1/4} \zeta^{-1} C(C^2 - 1)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} z \bar{z}\right),$$

в то время как для вычисления остальных коэффициентов мы используем разложение (82):

$$\varphi_z(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2} z \bar{z}\right) \left[\frac{C}{\sqrt{C^2 - 1}} \varphi_0(x, t) + \sqrt{z \zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{(n+1)!}} \varphi_{n+1}(x, t) \right].$$

Принимая во внимание значение нормировочного коэффициента, получаем окончательное выражение для когерентных состояний ангармонических осцилляторов с эквидистантным спектром

$$\begin{aligned} \Theta_z(x, t) &= C[1 + (C^2 - 1) \exp(z \bar{z})]^{-1/2} \times \\ &\times \left[\psi_0(x, t) + \frac{\sqrt{C^2 - 1}}{C} \sqrt{\frac{\zeta}{z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (92)$$

Отметим, что функция (92) допускает значение $\zeta = 0$ и совпадает в этом случае с функцией основного состояния нового гамильтониана. Другой предельный случай, $C \rightarrow \infty$, соответствует гармоническому осциллятору со сдвинутым началом отсчета энергии. Нетрудно видеть, что функция $\Theta_z(x, t)$ стремится в этом случае к когерентному состоянию гармонического осциллятора (82).

Используя разложение (92), вычисляем среднее значение энергии в когерентном состоянии $\Theta_z(x, t)$:

$$\langle E \rangle = \frac{z \bar{z} (C^2 - 1)}{\exp(-z \bar{z}) + C^2 - 1} - \frac{1}{2}.$$

Дифференциальный оператор преобразования $\hat{L}$ приводит к другой системе когерентных состояний:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_z(x, t) &= (2\pi)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2} z \bar{z} - \frac{1}{2} z^2 + zx - \frac{1}{4} x^2 - \frac{i}{2} t\right) \times \\ &\times \left(z - x - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(-x^2/2)}{C + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2})} \right). \end{aligned} \quad (93)$$

При $\zeta = 0$ эта функция совпадает с функцией первого возбужденного состояния нового гамильтониана, которая обладает свойством $\tilde{a}\psi_1 = 0$.

В работе [81] с использованием w -деформированной алгебры Гейзенберга — Вейля получены когерентные состояния рассматриваемой системы, которые при значении параметра деформации $w = 2$ совпадают с состояниями (93). Подход, развиваемый в цитированной работе, не позволяет получить когерентные состояния (92) ни при каких значениях параметра деформации.

3.4.4. Когерентные состояния односолитонного потенциала. Когерентные состояния односолитонного потенциала рассмотрены в работе [83]. Односолитонный потенциал уравнения KDF $V_1(x) = -2a^2 \operatorname{sech}(ax + b)$, $a > 0$, имеющий единственный уровень дискретного спектра $E = -a^2$, положение которого не зависит от значения параметра b , получается однократным преобразованием Дарбу из уравнения Шредингера для свободной частицы, если в качестве функции преобразования взять

$$u(x, t) = \operatorname{ch}(ax + b) \exp(ia^2 t). \quad (94)$$

Параметр b , осуществляющий изоспектральную деформацию потенциала, для нас несуществен, и мы положим $b = 0$. Волновая функция дискретного спектра имеет вид

$$\varphi_0(x) = \sqrt{a/2} \operatorname{sech}(ax),$$

$$h_1 \varphi_0 = -a^2 \varphi_0, \quad h_1 = -\partial_x^2 - 2a^2 \operatorname{sech}^2(ax). \quad (95)$$

Оператор преобразования Дарбу от решений уравнения Шредингера с нулевым потенциалом к решениям с потенциалом $V_1(x)$ имеет вид

$$\hat{L} = -a \operatorname{th}(ax) + \partial_x. \quad (96)$$

Действуя им на базисные функции (85) пространства $H_0(R)$, найдем

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x, t) = & \frac{(-i)^n}{2} (2^n \sqrt{2\pi} n!)^{-1/2} (1+it)^{-3/2} \exp(-(1+it)^{-1} x^2/4 - in \operatorname{arctg} t) \times \\ & \times [2\sqrt{2} n(1+it) (1+t^2)^{-1/2} H_{n-1}(x/\sqrt{2+2t^2}) - \\ & - (x + 2a(1+it) \operatorname{th}(ax) H_n(x/\sqrt{2+2t^2}))], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (97)$$

Система функций (95), (97) образует базис пространства $H_1(R)$.

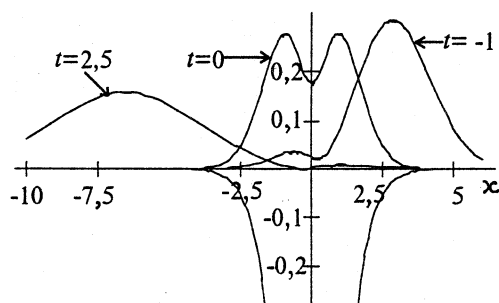


Рис.5. Плотность вероятности когерентного состояния односолитонного потенциала

Оператор симметрии $\hat{L}^+ \hat{L}$ выражается через гамильтониан свободной частицы $h_0 = -\partial_x^2$: $\hat{L}^+ \hat{L} = h_0 + a^2 = (1/4)(\hat{a} + \hat{a}^+)^2 + a^2$. Это свойство позволяет вычислить интеграл нормировки базисных функций $\langle \varphi_{n+1} | \varphi_{n+1} \rangle = \langle \psi_n | h_0 + a^2 | \psi_n \rangle = n/2 + 1/4 + a^2$. Каждая базисная функция (97), кроме $n = 1, 2$, неортогональна двум другим: $\langle \varphi_{n+1} | \varphi_{n+3} \rangle = (1/4) \sqrt{(n+1)(n+2)}$.

Действуя оператором (96) на функцию когерентного состояния свободной частицы (84), найдем функцию когерентного состояния односолитонного потенциала

$$\varphi_z(x, t) = -\frac{1}{2} (2\pi)^{-1/4} (1 + it)^{-3/2} [x + 2iz + 2a(1 + it) \operatorname{th}(ax)] \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{4} (z + \bar{z})^2 - (1 + it)^{-1} (x/2 + iz)^2 \right). \quad (98)$$

Интеграл нормировки для этой функции имеет вид $\langle \varphi_z | \varphi_z \rangle = 1/4 + (1/4)(z + \bar{z})^2 + a^2$.

Если через Θ_n обозначить нормированные на единицу функции дискретного базиса пространства $H_1(R)$, то, используя формулу (86), можно записать разложение нормированной на единицу функции когерентного состояния по этому базису:

$$|z, t\rangle = [1 + 4a^2 + (z + \bar{z})^2]^{-1/2} \times \\ \times \exp \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4} (z + \bar{z})^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{1 + 4a^2 + 2n} |\Theta_{n+1}\rangle.$$

Непосредственным интегрированием можно установить следующее свойство ортогональности: $\langle \Theta_0 | z, t \rangle = 0$.

Вследствие безотражательности потенциала выполняется равенство $|\varphi_z(x, t)|^2 = |\varphi_z(-x, -t)|$. На рис.5 приведен график функции плотности вероятности $|\varphi_z(x, t)|^2$ при $a = 1$ и $z = 1$ для моментов времени $t = -1, 0, 2, 5$. В нижней части графика приведена часть потенциальной ямы, глубина которой равна -2 . Уровень дискретного спектра $E_0 = -1$ расположен точно посередине ямы. В моменты времени, соответствующие $t = \pm \infty$, частица максимально делокализована. При $t < 0$ частица более локализована в области $x > 0$, при $t = 0$ частица локализована симметрично в области ямы, при $t > 0$ частица более локализована в области $x < 0$, то есть частица движется справа налево, максимально локализуясь при $t = 0$ в области ямы. Действие интегрального оператора M , определенного формулами (31) и (33) при $C_1 = 0$, приводит к другой системе когерентных состояний:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_z(x, t) = M\psi_z(x, t) = & \frac{-i}{4} \sqrt{\pi} (2\pi)^{-1/4} \operatorname{ch}^{-1}(ax) \exp \left(-\frac{1}{4} (z + \bar{z})^2 + a^2(1 + it) \right) \times \\ & \times \left[\exp(2iaz) \operatorname{erfc} \left(a\sqrt{1 + it} + \frac{x/2 + iz}{\sqrt{1 + it}} \right) - \right. \\ & \left. - \exp(-2iaz) \operatorname{erfc} \left(a\sqrt{1 + it} + \frac{x/2 + iz}{\sqrt{1 + it}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что, производя повторное преобразование Дарбу, можно получить многосолитонные потенциалы и когерентные состояния для них.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-02-16279).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kummer E.F. — J. Reine Angew. Math., 1887, v.100, p.1.
2. Liouville J. — J. Math. Pures et Appl., 1837, v.2, p.16.
3. Stäckel P. — J. Reine Angew. Math., 1893, v.111, p.290.
4. Беркович Л.М. — Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений. Саратов: изд-во СГУ, 1989.
5. Натанзон Г.А. — Вестник ЛГУ, 1971, №10, с.22; ТМФ, 1979, т.38, с.219.
6. Moutard T.F. — Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1875, v.80, p.729.
7. Имшенецкий В.Г. — Зап. Имп. Акад. Наук, 1882, т.42, с.1.
8. Darboux G. — Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1882, v.94, p.1456; Leçons sur la théorie générale des surfaces et les application géométriques du calcul infinitésimal. Deuxiem partie. Paris, 1889.
9. Schrödinger E. — Proc. Roy. Irish. Acad., 1940, v.A46, p.9; v.A47, p.53.

10. Hull H., Infeld T.E. — Phys. Rev., 1948, v.74, p.905.
11. Infeld T.E., Hull H. — Rev. Mod. Phys., 1951, v.53, p.21.
12. Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. — ТМФ, 1995, т.104, с.356.
13. Witten E. — Nucl. Phys., 1981, v.B185, p.513; 1982, v.B202, p.253.
14. Андрианов А.А., Борисов Н.В., Иоффе М.В., Эйдеcs М.И. — ТМФ, 1984, т.61, с.17.
15. Abraham P.B., Moses H.A. — Phys. Rev., 1980, v.A22, p.1333.
16. Pursey D.L. — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.431.
17. Luban M., Pursey D.L. — Phys. Rev., 1986, v.D33, p.431.
18. Фаддеев Л.Д. — УМН, 1959, т.105, с.57.
19. Левитан Б.М. — Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
20. Агранович З.С., Марченко В.А. — Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд-во ХГУ, 1969.
21. Schnizer W.A., Leeb H. — J. Phys. A: Math. Gen., 1994, v.27, p.2605.
22. Samsonov B.F. — J. Phys. A: Math. Gen., 1995, v.28, p.6989.
23. Захарьев Б.Н., Чабанов В.М. — ЭЧАЯ, 1994, т.25, с.1561.
24. Шабат А.Б. — ТМФ, 1995, т.103, с.170.
25. Andrianov A.A., Ioffe M.V., Cannata F. — Mod. Phys. Lett., 1996, v.17, p.1417.
26. Андрианов А.А., Иоффе М.В., Нишнианидзе Д.Н. — ТМФ, 1995, т.104, с.463.
27. Cannata F., Ioffe M.V. — Phys. Lett. B, 1992, v.278, p.399.
28. Cannata F., Ioffe M.V. — J. Phys. A: Math. Gen., 1993, v.26, p.L89.
29. Andrianov A.A., Ioffe M.V., Cannata F., Dedonder J.-P. — Int. J. Mod. Phys., 1995, v.10, p.2683.
30. Багров В.Г., Самсонов Б.Ф., Шекоян Л.А. — Изв. вузов. Физика, 1995, №7, с.59.
31. Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. — ЖЭТФ, 1996, т.109, вып.4, с.1105.
32. Bagrov V.G., Samsonov B.F. — Phys. Lett., 1996, vol.A210, p.60.
33. Matveev V.B. — Lett. Math. Phys., 1979, v.3, p.213.
34. Matveev V.B., Salle M.A. — Darboux Transformations and Solitons. Berlin: Springer, 1990.
35. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. — Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
36. Захаров В.Е., Шабат А.Б. — Функциональный анализ и его приложения, 1974, т.8, с.43.
37. Boiti M., Pempinelli F., Pogrebkov A.K., Polivanov M.C. — Inverse Problems, 1991, v.7, p.43.
38. Миллер У. — Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
39. Andrianov A.A., Ioffe M.V., Nishnianidze D.N. — Preprint SpbU-IP-96-12. St.-Petersburg, 1996.
40. Агаева Р.Г. — Современный групповой анализ. Методы и приложения. Сб. статей под ред. Максудова Ф.Г. и Рустамова К.А. Баку: «Элм», 1989, с.3.
41. Крейн М.Г. — ДАН, 1957, т.113, с.970.
42. Адлер В.Э. — ТМФ, 1994, т.101, с.323.

43. Генденштейн Л.Э., Криве И.В. — УФН, 1985, т.146, с.553.
44. Cooper F., Khare A., Sukhatme V. — Phys. Rep., 1995, v.251, p.267.
45. Andrianov A.A., Ioffe M.V., Spiridonov V. — Phys. Lett., 1993, v.A174, p.273.
46. Rubakov V.A., Spiridonov V.P. — Mod. Phys. Lett., 1988, v.A3, p.1337.
47. Beckers J., Debergh N. — J. Math. Phys., 1991, v.32, p.1808.
48. Andrianov A.A., Ioffe M.V., Spiridonov V.P., Vinet L. — Phys. Lett., 1991, v.B272, p.297.
49. Samsonov B.F. — Mod. Phys. Lett. A, 1996, v.11, p.2095.
50. Samsonov B.F. — Mod. Phys. Lett. A, 1996, v.11, p.1563.
51. Husimi K. — Progr. Theor. Phys., 1953, v.9, p.381.
52. Малкин И.А., Манько В.И. — Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
53. Agayeva R.G. — J. Phys. A: Math. and Gen., 1980, v.13, p.1685.
54. Веселов А.П., Шабат А.Б. — Функциональный анализ и его приложения, 1993, т.27, вып.2, с.1.
55. Shabat A. — Inverse Probl., 1992, v.8, p.303.
56. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. — Алгебра и анализ, 1990, т.2, вып.2, с.183.
57. Новиков С.П. — Функциональный анализ и его приложения, 1974, т.8, вып.3, с.814.
58. Дубов С.Ю., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. — ЖЭТФ, 1992, т.102, вып.3, с.814.
59. Dubov S.Yu., Eleonskii V.M., Kulagin N.E. — Chaos, 1994, v.4, p.47.
60. Spiridonov V. — Phys. Rev., 1995, v.A52, p.1909.
61. Лукашевич Н.А. — Дифференциальные уравнения, 1967, т.3, с.395.
62. Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука, 1979.
63. Березовой В.П., Пашиев А.И. — ТМФ, 1987, т.10, с.146.
64. Самсонов Б.Ф., Овчаров И.Н. — Изв. вузов. Физика, 1995, т.38, №4, с.77.
65. Calogero F. — J. Math. Phys., 1969, v.10, p.2191.
66. Polychronakos A.P. — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.703.
67. Frahm H. — J. Phys. A: Math. and Gen., 1993, v.26, p.L473.
68. Leinaas J.M., Myrheim J. — Phys. Rev., 1988, v.B37, p.9286.
69. Генденштейн Л.Э. — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.299.
70. Schrödinger E. — Naturwiss., 1926, v.14, p.664.
71. Klauder J.R. — Ann. Phys. (N.Y.), 1960, v.11, p.123; J. Math. Phys., 1963, v.4, p.1055; 1963, v.4, p.1058.
72. Glauber R.J. — Phys. Rev., 1963, v.130, p.2529; 1964, v.131, p.2766.
73. Переломов А.М. — Обобщенные когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987.
74. Sudarshan C.G. — Phys. Rev. Lett., 1963, v.10, p.227.
75. Klauder J.R., Skagerstam B.-S. — Coherent States. World Scientific, Singapore, 1985.

- 76. **Daubechies I.** — Ten lectures in Wavelets. — CBMS—NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. 1992, v.61, SIAM, Philadelphia.
- 77. **Berezin F.A.** — Comm. Math. Phys., 1975, v.40, p.153.
- 78. **Onofri E.** — J. Math. Phys., 1975, v.16, p.1087.
- 79. **Nieto M.M., Simmons L.M.** — Phys. Rev., 1979, v.D20, p.1321.
- 80. **Fernandez C.D.J., Hussin V., Nieto L.M.** — J. Phys., 1994, v.A27, p.3547.
- 81. **Fernandez C.D.J., Nieto L.M., Rosas-Ortiz O.** — J. Phys., 1995, v.A28, p.2963.
- 82. **Bagrov V.G., Samsonov B.F.** — J. Phys. A: Math. and Gen., 1996, v.29, p.1011.
- 83. **Самсонов Б.Ф.** — ЯФ, 1996, т.59, №4, с.753.

УДК 621.3.038
621.3.038.628
621.3.038.615:621.318.3
621.3.038.615:621.319
621.384.634.5

CLOSED ORBIT CORRECTION IN SYNCHROTRONS

D.Dinev

Bulgarian Academy of Sciences
Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgaria

Algorithms for closed orbit correction in synchrotrons as well as related topics as error sources, statistical characteristics of the orbit, etc., are discussed. The review covers both traditional methods for orbit correction: beam-bump, harmonical correction, etc., and the newest developments: eigenvector correction, SVD, algorithms for optimum positioning of dipoles, etc. The use of expert system and artificial neural systems is described as well. The last chapter is devoted to the first turn steering.

Обсуждаются алгоритмы для коррекции замкнутой орбиты в синхротронах и связанные с ними вопросы — источники ошибок, статистические свойства орбиты и т.д. Обзор охватывает как традиционные методы коррекции: метод локального искажения орбиты, гармонический метод и т.д., так и новейшие алгоритмы: коррекцию с применением собственных векторов, сингулярное разложение матрицы связи, алгоритмы для оптимального расположения дипольных магнитов и т.д. Обсуждается применение экспертных систем и искусственных нейронных сетей для коррекции орбиты. Последний раздел посвящен коррекции первого оборота.

1. INTRODUCTION

The transverse motion of the particles in a cyclic accelerator is a superposition of a motion along a closed trajectory (equilibrium or closed orbit) and betatron and radial-phase oscillations around this curve. In a real magnetic structure both the closed orbit and the oscillations around it are distorted due to errors in the magnetic fields, displacements and tilts of the elements from their designed positions, stray fields, and ground movements. As far as the closed orbit is concerned, perturbations cause its deformation. The maximum deviation of the distorted orbit from the reference orbit reaches to some ten millimeters. Such a large deviation does not allow for the accelerator aperture to be used effectively and hampers the work of the injection and extraction systems.

In storage rings the beam lifetime and the maximum current of the accumulated particles depend on the accuracy of the orbit.

An important point is the orbit stability. The time changes of the orbit increase the dynamic aperture. In synchrotron light sources an unstable orbit will increase the effective emittance thus reducing the effective brightness of the photon beams.

This is the reason why in accelerators special systems of either small correcting magnets or additional correcting coils in the main dipoles or controlled displacements of the quadrupoles are used.

The purpose of the orbit correction consists in choosing the proper strengths and positions of the correction elements so that the smallest possible deviations from the reference orbit may be achieved.

A special problem is the first turn steering which we discuss in the last chapter.

In this paper a survey of both the major orbit correction algorithms used in synchrotrons and storage rings and original results on the orbit correction obtained by the author during his work on the superconducting synchrotron NUCLOTRON in JINR (Dubna) and on the cooler-synchrotron COSY (Jülich) is done.

2. TRANSVERSE PARTICLE MOTION UNDER LINEAR PERTURBATIONS

We shall begin our discussion of the closed orbit distortion and correction with a brief survey of the transverse particle motion in cyclic accelerators in the presence of the so-called linear perturbations.

In a curvilinear coordinate system (s, x, y) used in cyclic accelerators where s is directed along the reference orbit; x , along the main normal vector; z , along the binormal vector, the Lagrangian of the transverse particle motion can be presented in the form [1]

$$\mathcal{L}(x, x', z, z', s) = p \sqrt{\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 + x'^2 + z'^2} + e \left[\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) A_s + x' A_x + z' A_z \right]. \quad (2.1)$$

In (2.1) the distance along the reference orbit s was taken to be the independent variable; $(\prime)$ denotes differentiation with respect to s ; p and e are the particle momentum and charge; ρ is the radius of the curvature of the reference orbit; and A_s, A_x, A_z are the vector potential components.

From (2.1) the following expression about the transverse motion Hamiltonian can be deduced

$$\mathcal{H}(x, p_x, x, p_z, s) = - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{p^2 - (p_x - eA_x)^2 - p_z^2 - eA_z^2} - e \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) A_s. \quad (2.2)$$

We shall consider here the cases of a sector magnetic field and of a quadrupole field, which are the most important for particle accelerators. For these cases substituting in (2.2) the relevant expressions for the vector potential A and expanding the kinematical part in a power series, retaining only the major first few members, one can obtain that

$$\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{p_0} + \frac{1}{2} \frac{p_z^2}{p_0} + p_0 \frac{(1-n)}{2} \left(\frac{x}{\rho} \right)^2 + p_0 \frac{n}{2} \left(\frac{z}{\rho} \right)^2, & \text{for a sector magnetic field} \\ \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{p_0} + \frac{1}{2} \frac{p_z^2}{p_0} - \frac{eg}{2} (x^2 - z^2), & \text{for a quadrupole field.} \end{cases} \quad (2.3)$$

In (2.3) we denoted with $\mathcal{H}_0$ the Hamiltonian of the linearized transverse motion; $p_0 = -eB_0\rho$ is the particle momentum corresponding to the reference trajectory; $B_0\rho$ is the beam rigidity; $n = -(\rho/B_0)(\partial B/\partial x)$ is the field index; and g is the quadrupole gradient.

We shall consider in this paper correcting magnets as short magnets, with small ($B_c \ll B_0$) and uniform ($n=0$) field. Thus the linearized Hamiltonian for the corrections is

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{p_0} + \frac{1}{2} \frac{p_z^2}{p_0} - eB_c x. \quad (2.4)$$

Let's now introduce in the Hamiltonian the so-called linear perturbations:

- field errors $\Delta B = B - B_0$,
- magnetic element misalignments, Δx and Δz ,
- dipole tilts around the axis s , θ ,
- stray magnetic field, ΔB .

These errors cause linear about x and z members to appear in the Hamiltonians

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \delta\mathcal{H}^{(1)}, \quad (2.5)$$

where

$$\delta\mathcal{H}^{(1)} = \begin{cases} -e\Delta B_z x + \frac{p_0}{\rho} \theta z + \frac{p_0(1+n)}{\rho^2} x\Delta x - \frac{p_0 n}{\rho^2} z\Delta z + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \Delta p, & \text{for dipoles} \\ egz\Delta x - egx\Delta z, & \text{for quadrupoles.} \end{cases} \quad (2.6)$$

The quadratic part $\mathcal{H}_0$ of the Hamiltonian (2.5) describes particle oscillations, as long as the linear part $\delta\mathcal{H}^{(1)}$ causes an internal force depending on the variable s . This is the well-known classical mechanics case of forced small oscillations. Because of the internal force, the orbit is distorted. The new orbit is a periodical solution of the Hamilton equations

$$\begin{aligned}\frac{dx_{c0}}{ds} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{x,c0}}, & \frac{dp_{x,c0}}{ds} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_{c0}}, \\ x_{c0}(s + 2\pi R) &= x_{c0}(s), \\ p_{x,c0}(s + 2\pi R) &= p_{x,c0}(s).\end{aligned}\quad (2.7)$$

In (2.7) R is the mean radius of the accelerator.

Equations equivalent to (2.7) are valid for the vertical plane as well.

Let u and p_u be the conjugate variables describing the oscillations around the orbit

$$x = x_{c0} + u, \quad p = p_{x,c0} + p_u. \quad (2.8)$$

If we now perform a canonical transformation from the variables x, p_x to u, p_u using as a generating function

$$f_2(x, p_u, s) = (p_{x,c0}(s) + p_u)x - x_{c0}(s)p_u, \quad (2.9)$$

we shall obtain for the new Hamiltonian

$$\begin{aligned}K(u, p_u, v, p_v, s) &= \mathcal{H}(x_{c0}(s) + u, p_{x,c0}(s) + p_u, z_{c0}(s) + v, p_{z,c0}(s) + p_v, s) = \\ &= \mathcal{H} - \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_{c0}} u + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{x,c0}} p_u + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z_{c0}} v + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_{z,c0}} p_v \right).\end{aligned}\quad (2.10)$$

The Hamiltonian K does not contain linear in u, p_u, v, p_v members, i.e., it describes only the particle oscillations around the closed orbit.

From the Hamiltonians (2.3), (2.6) one can deduce the equations of the transverse particle motion. In Newton's form they are

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2} + k_x(s)x &= F_x(s), \\ \frac{d^2z}{ds^2} + k_z(s)z &= F_z(s),\end{aligned}\quad (2.11)$$

where

$$k_x(s) = \begin{cases} \frac{(1-n)}{\rho^2}, & \text{for dipoles} \\ 0, & \text{for correctors} \\ \frac{-g}{B_0\rho}, & \text{for quadrupoles,} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$k_z(s) = \begin{cases} \frac{n}{\rho^2}, & \text{for dipoles} \\ 0, & \text{for correctors} \\ \frac{g}{B_0\rho}, & \text{for quadrupoles,} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$F_x(s) = \begin{cases} -\frac{\Delta B_z}{B_0\rho} - \frac{(1+n)}{\rho^2} \Delta x, & \text{for dipoles} \\ -\frac{B_c}{B_0\rho}, & \text{for correctors} \\ -\frac{g\Delta x}{B_0\rho}, & \text{for quadrupoles,} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$F_z(s) = \begin{cases} -\frac{n}{\rho^2} \Delta z - \frac{\theta}{\rho}, & \text{for dipoles} \\ -\frac{B_c}{B_0\rho}, & \text{for correctors} \\ -\frac{g\Delta x}{B_0\rho}, & \text{for quadrupoles.} \end{cases} \quad (2.15)$$

3. CLOSED ORBIT

The equations (2.11) are Hill's equations with a non-zero right-hand side. Its general solution can be represented as a sum of the general solution of the homogeneous equation and a particular solution of the non-homogeneous one. The latter can be taken as periodic, keeping in mind the accelerator symmetry. This periodic particular solution will describe the closed orbit as long as the general solution of the homogeneous equation describes the particle oscillation.

The particle oscillations in an accelerator can be described by the Twiss's amplitude function $\beta(s)$ [2]

$$x(s) = a \sqrt{\beta(s)} \cos \left(Q \int_0^s \frac{ds}{Q\beta(s)} \right), \quad (3.1)$$

where Q is the number of the betatron oscillations per turn.

Let us introduce the new variables:

a) generalized azimuth

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{Q\beta(s)}, \quad (3.2)$$

b) normalized deviation

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\beta(s)}}. \quad (3.3)$$

In these new variables the oscillations (3.1) can be written as

$$\eta(\varphi) = a \cos(Q\varphi). \quad (3.4)$$

By implication we shall describe the closed orbit using the variables (3.2), (3.3).

Using the properties of the β function it is possible to transform the equation (2.11) to an equation of forced oscillations

$$\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + Q^2\eta = Q^2f(\varphi), \quad (3.5)$$

where

$$f(\varphi) = \beta^{3/2}(\varphi)F(\varphi). \quad (3.6)$$

Using the method of varying the integration constants the following periodical particular solution of (3.5) can be obtained [2]

$$\eta = \frac{Q}{2 \sin \pi Q} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f(t) \cos Q(\varphi + \pi - t) dt. \quad (3.7)$$

The integral representation (3.7) is the base formula for the closed orbit description.

There exist two approaches to the closed orbit treatment:

a) A matrix approach

As the perturbations are equal to zero out of the magnetic elements ($f(\varphi) = 0$) and the elements are short enough compared to the accelerator circumference ($\Delta\varphi \ll 2\pi$), the integral (3.7) can be transformed to the sum

$$\eta(\varphi_i) = \frac{Q}{2 \sin \pi Q} \sum_{\substack{j=1 \\ \varphi_i \leq \varphi_j \leq \varphi_i + 2\pi}}^{M+L} \bar{f}_j \Delta \varphi_j \cos Q(\varphi_i + \pi - \varphi_j). \quad (3.8)$$

Here M is the total number of the dipoles, L is the number of quadrupoles and the bar above a symbol means averaging over the magnetic element.

It is convenient to put (3.8) in the matrix form

$$\eta_i = \sum_{\substack{j=i \\ \varphi_i \leq \varphi_j \leq \varphi_i + 2\pi}}^{M+L} A_{ij} \delta_j, \quad (3.9)$$

where

$$A_{ij} = \cos Q(\varphi_i + \pi - \varphi_j) \quad (3.10)$$

and

$$\delta_j = \begin{cases} -\frac{Q \bar{\beta}_j^{3/2} \Delta \varphi_j}{2 \sin \pi Q} \Delta B_j - \frac{Q \bar{\beta}_j^{3/2} \eta_j \Delta \varphi_j}{2 \sin \pi Q \rho_j^2} \Delta x_j, & \text{for dipoles} \\ -\frac{Q \bar{\beta}_j^{3/2} \Delta \varphi_j}{2 \sin \pi Q} B_{cj}, & \text{for correctors} \\ -\frac{Q \bar{\beta}_j^{3/2} g_j \Delta \varphi_j}{2 \sin \pi Q B \rho} \Delta x_j, & \text{for quadrupoles} \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{\beta}}{2 \sin \pi Q} \varepsilon, \quad (3.12)$$

ε being the kick in the element.

The reason for introducing the generalized perturbations δ_i is that they have the same dimensions as the normalized orbit η , i.e., $m^{1/2}$.

b) Harmonic analysis approach

The orbit $\eta(\varphi)$ is periodic with a period of 2π . Let us expand it in a Fourier series

$$\eta(\varphi) = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \cos k \varphi + v_k \sin k \varphi). \quad (3.13)$$

Let us also expand the perturbations $f(\varphi)$ in a Fourier series

$$f(\varphi) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k \cos k \varphi + g_k \sin k \varphi). \quad (3.14)$$

From the equation (3.5) the following relation between the Fourier coefficients of the orbit and the perturbations can be deduced

$$u_0 = f_0$$

$$u_k = \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right) f_k, \quad v_k = \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right) g_k. \quad (3.15)$$

Of course, the matrix and the harmonic orbit treatments give the same results which can be demonstrated using the formula

$$\cos Q(\varphi_i + \pi - \varphi_j) = (\sin \pi Q) \frac{2Q}{\pi} \left(\frac{1}{2Q^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \cos k \frac{(\varphi_i - \varphi_j)}{k^2 - Q^2} \right). \quad (3.16)$$

4. ERROR SOURCES

The linear perturbations causing the closed orbit distortion can be summarized in the following way.

a) Constant errors.

i) Errors in the coercive force.

This kind of errors can be estimated approximately by

$$\Delta B \approx \mu_0 \frac{l_{st}}{l_a} \Delta H_c, \quad (4.1)$$

where l_{st} is the magnet core length and l_a is the aperture.

ii) Errors due to eddy currents.

iii) Stray magnetic fields.

iv) Earth magnetic field.

b) Errors proportional to the main magnetic field.

i) Permeability errors. Approximately

$$\frac{\Delta B}{B} \approx \left(\frac{l_{st}}{\mu_r^2 l_a} \right) \Delta \mu. \quad (4.2)$$

ii) Errors in the magnet core length

$$\frac{\Delta B}{B} \approx - \frac{1}{\mu_r l_a + l_{st}} \Delta l_{st}. \quad (4.3)$$

iii) Aperture errors

$$\frac{\Delta B}{B} \approx - \frac{1}{\frac{l_{st}}{m_r} + l_a} \Delta l_a \quad (4.4)$$

iv) Adjustment errors — element misalignments, median plane displacements, dipole tilts, quadrupole magnetic centre displacements, errors in the coil positions, etc.

v) Ground movement.

c) Errors appearing only in high fields — these are errors due to saturation.

d) Fast noise: these are ground movements and power supplies ripples in the 1—100 Hz bandwidth which cause fluctuations of the orbit.

5. STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE PERTURBATIONS AND THE ORBIT

The perturbations ΔB and Δx are random functions of the generalized azimuth φ . Keeping in mind that they are non-zero only within the magnetic elements and that these elements are short enough compared to the accelerator circumference ($\Delta \varphi < 2\pi$), one can represent perturbations as sums of elementary random functions — $\Delta B_i \Pi_i(\varphi)$ and $\Delta x_i \Pi_i(\varphi)$, where ΔB_i and Δx_i are random values and $\Pi_i(\varphi)$ are single rectangular pulses of length $\Delta \varphi_i$. The random values ΔB_i and Δx_i are uncorrelated, normally distributed, with a zero mathematical expectation and with standard deviations $\sigma_{\Delta B}$, $\sigma_{\Delta x}$ equal for all elements.

Let's expand the perturbations in a Fourier's series

$$\Delta B(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \varphi + b_k \sin k \varphi). \quad (5.1)$$

Fourier's amplitudes a_k and b_k are random values. Their mathematical means vanish and their variances are

$$D(a_0) = \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^M \left(\frac{\Delta \varphi_j}{2\pi} \right)^2,$$

$$D(a_k) = \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^M \left(\frac{\cos k \varphi_j \Delta \varphi_j}{\pi} \right)^2,$$

$$D(b_k) = \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^M \left(\frac{\sin k \varphi_j \Delta \varphi_j}{\pi} \right)^2. \quad (5.2)$$

In uniform magnetic structures consisting of p equal periods, the formulae (5.2) are simplified leading to a «white» spectrum

$$D(a_k) = D(b_k) = \frac{1}{2} D(a_0) = \frac{\sigma_{\Delta B}^2 P}{2\pi^2} \sum_{j=1}^{M_p} \Delta \varphi_j^2. \quad (5.3)$$

In (5.3) M_p is the number of dipoles per period. Using the accelerator symmetry it is possible to demonstrate as well that $E(a_k b_k) = 0$, i.e., that a_k and b_k are non-correlated. Analogical results can be obtained for Δx .

Let us now discuss the statistical characteristics of the orbit itself.

From (3.9) it follows that the orbit deviation η_i as a sum of normally distributed values is normally distributed itself, with an expected value of zero and a variance

$$D(\eta_i) = \left(\frac{Q}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 \left[\sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^M \beta_j^3 \Delta \varphi_j^2 \cos^2 Q(\varphi_i + \pi - \varphi_j) + \sigma_{\Delta x}^2 \sum_{j=1}^L g_j^2 \beta_j^3 \Delta \varphi_j^2 \cos^2 Q(\varphi_i + \pi - \varphi_j) \right]. \quad (5.4)$$

In uniform magnetic structures, (5.4) is simplified

$$D(\eta_i) = \left(\frac{Q}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 \sigma_{\Delta B}^2 \sum_{j=1}^{M_p} \frac{\beta_j^3 \Delta \varphi_j^2}{2} + \left(\frac{Q}{2B_0 \rho \sin \pi Q} \right)^2 \sigma_{\Delta x}^2 \sum_{j=1}^{L_p} \frac{g_j^2 \beta_j^2 \Delta \varphi_j^2}{2}. \quad (5.5)$$

In the same way the statistical characteristics of the orbit divergence $\eta'(\varphi)$ can be calculated and one obtains that for uniform structures

$$D(\eta') = Q^2 D(\eta). \quad (5.6)$$

Successful accelerator operation requires that the maximum orbit deviation $\eta_{\max}$ and its statistical characteristics be known.

As for every accelerator from a large group of accelerators with different random error distributions, the maximum orbit deviation $\eta_{\max}$ appears at different points $\varphi_{\max}$; $\eta_{\max}$ is not normally distributed.

It is very difficult to obtain the statistical characteristics of $\eta_{\max}$ in the general case. As a rough approximation let us restrict ourselves to the major $k \approx Q$ harmonic in the orbit expansion (3.12)

$$\eta(\varphi) \approx u_k \cos k \varphi + v_k \sin k \varphi = A \cos(Q \varphi + \alpha_k). \quad (5.7)$$

It is easy to see that in this approximation $E(\eta, \eta') = 0$, i.e., η and η' are statistically independent.

We have for the two-dimensional probability [3]

$$p\left(\eta, \frac{\eta'}{Q}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_\eta^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_\eta^2}\right). \quad (5.8)$$

Obviously the orbit amplitude probability $p(A)$ can be obtained by integrating (5.8) along a circle with radius A in the plane $\left(\eta, \frac{\eta'}{Q}\right)$

$$p(A) = \int_0^{2\pi} p\left(\eta, \frac{\eta'}{Q}\right) A d\varphi = \frac{A}{\sigma_\eta^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_\eta^2}\right). \quad (5.9)$$

Formula (5.9) represents Rayleigh's probability distribution:

$$p(A) = \frac{2A}{\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma_A^2}\right) \quad (5.10)$$

with

$$\sigma_A = \sqrt{2} \sigma_\eta = \sqrt{2} \sigma_{u_k} = \sqrt{2} \sigma_{v_k}. \quad (5.11)$$

The integral distribution function for the Rayleigh distribution is:

$$\phi(A) = 1 - \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma_A^2}\right). \quad (5.12)$$

A better estimate will be achieved if two contributing harmonics $k \langle Q \rangle (k+1)$ are taken into account.

In this approximation

$$\begin{aligned} \eta(\varphi) &\approx u_k \cos k \varphi + v_k \sin k \varphi + u_{k+1} \cos(k+1) \varphi + v_{k+1} \sin(k+1) \varphi = \\ &= (u_k + u_{k+1} \cos \varphi + v_{k+1} \sin \varphi) \cos k \varphi + \\ &\quad + (v_k - u_{k+1} \sin \varphi + v_{k+1} \cos \varphi) \sin k \varphi, \end{aligned} \quad (5.13)$$

i.e., we have a harmonic oscillation with a slowly changing amplitude $A(\varphi)$

$$A^2(\varphi) = (u_k + u_{k+1} \cos \varphi + v_{k+1} \sin \varphi)^2 + (v_k - u_{k+1} \sin \varphi + v_{k+1} \cos \varphi)^2. \quad (5.14)$$

From (5.14) the maximum amplitude can be calculated

$$A = \max A(\varphi) = r_k + r_{k+1}, \quad (5.15)$$

where

$$r_k^2 = u_k^2 + v_k^2, \quad r_{k+1}^2 = u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2. \quad (5.16)$$

As it has already been demonstrated above, τ_k and τ_{k+1} which are the random amplitudes of the k^{th} and $(u+1)_{\text{th}}$ harmonics have Rayleigh's distributions. These amplitudes are statistically independent. From these assumptions the following expression for the variance of the maximum amplitude can be derived

$$\sigma_A^2 = R_k^2 + \frac{\pi}{2} R_k R_{k+1} + R_{k+1}^2, \quad (5.17)$$

where

$$R_k^2 = 2\sigma_{u_k}^2; \quad R_{k+1}^2 = 2\sigma_{u_{k+1}}^2. \quad (5.18)$$

In Ref.4 it has been also shown that the probability for the orbit amplitude to be greater than A is

$$F(A) = 2\sqrt{\pi} \frac{R_k R_{k+1}}{R_k^2 + R_{k+1}^2} \frac{A}{\sqrt{R_k^2 + R_{k+1}^2}} \exp\left(-\frac{A}{R_k^2 + R_{k+1}^2}\right). \quad (5.19)$$

In Ref.4 it has been also shown that the best agreement between the analytical estimates and the results of the computer simulation of the closed orbit can be achieved if the major three or four harmonics of the perturbations are taken into account. As the exact solution in this approximation is accompanied by great mathematical difficulties only an approximate estimation for the orbit amplitude variance is carried out

$$\frac{\sigma_A^2}{\sum R_j^2} = \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{i \neq j} R_i R_j}{\sum R_j^2} \right), \quad (5.20)$$

$$F(A) = (4\pi)^{m-1/2} \prod_{j=1}^m \left(\frac{R_j}{\sqrt{\sum R_j^2}} \right) \exp \left(-\frac{A^2}{\sum R_j^2} \right) \times \\ \times \sum_{i=0}^{m-1/2} \frac{(-1)^i (m-1)!}{2^{2i} i! (m-1-2i)!} \left(\frac{A}{\sqrt{\sum R_j^2}} \right)^{m-1-2i}, \quad (5.21)$$

where m is the number of used harmonics.

6. A GENERAL DESCRIPTION OF THE ORBIT CORRECTION METHODS

In accelerators as a rule the number of beam position monitors (N) is less than the numbers of dipoles (M) and quadrupoles (L) — $N < M + L$. This means that from the readings of the BPMs we can calculate only a part of the perturbations correction with uncertainty.

The general block diagram of the orbit correction is shown in Fig.1. Figure 2 gives a classification of the orbit correction methods.

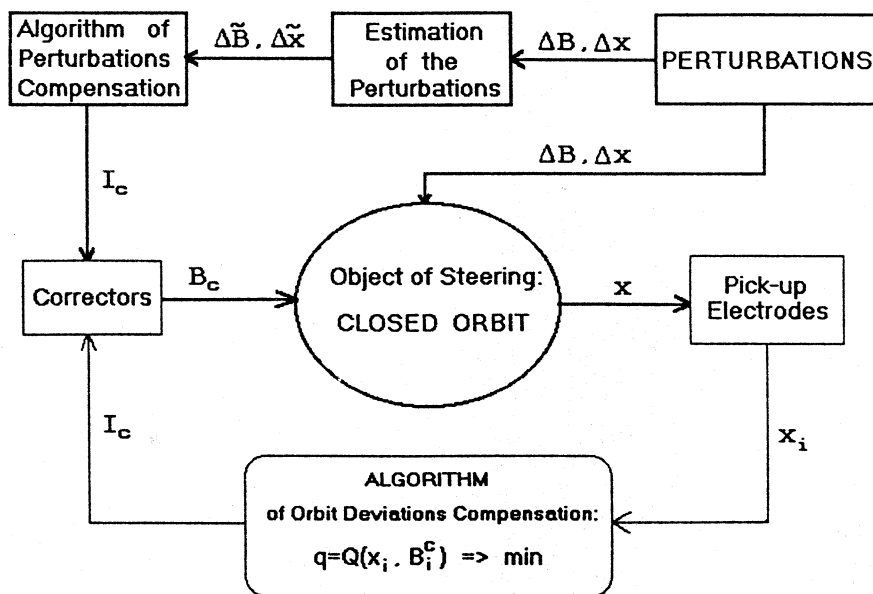


Fig.1. Block diagram of orbit correction

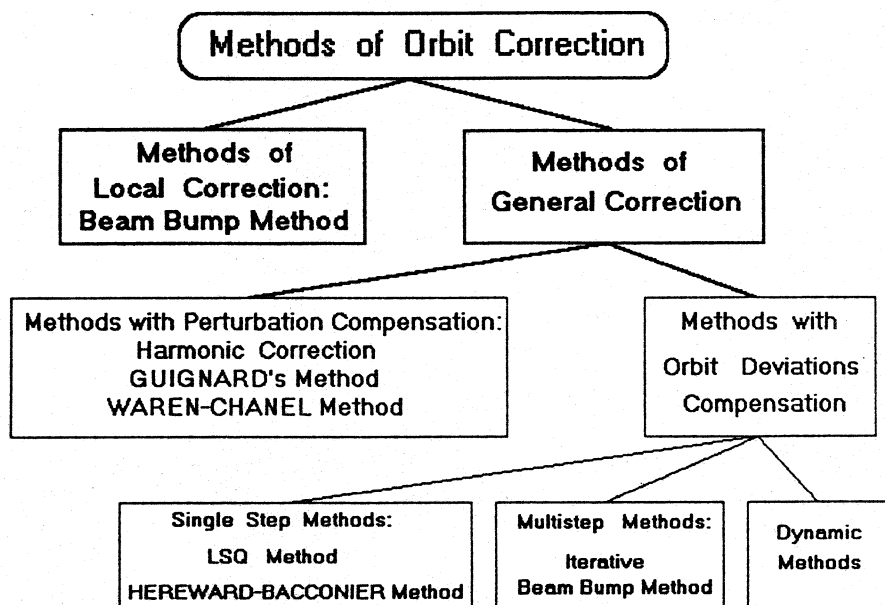


Fig.2. Classification of orbit correction methods

The orbit correction methods can be divided into two main groups: methods for local correction and methods for correction of the orbit over the whole ring (general correction).

The local correction methods correct the orbit only in a part of the accelerator circumference. Outside of this region, the orbit is unchanged.

The methods for general correction cover methods that try to compensate perturbations directly and methods in which a kind of goal function, depending on the orbit deviations and corrector strengths, is minimized.

The methods with perturbation compensation try to assess the perturbation strengths.

In the harmonic correction, this is achieved through the approximate values of the first perturbation harmonics. In the method proposed by G. Guignard and its later improvements, the «probability» of having errors in a given area of the accelerator circumference is found. Finally, in the Warren and Channell's suggestion, the values of all the errors are calculated, applying a special measurement procedure.

After the perturbations have been assessed, corrections with proper values and positions are applied in order to compensate the orbit deviations.

In the methods with orbit deviation compensation a quality criterion is created. It can be either a function or a functional, from the orbit deviations and correctors strengths. Then the minimum of the quality criterion is chosen. The single-step, the multi-step, and the dynamical methods are included in the group.

In the single-step methods, the orbit is considered only at the points where BPMs are situated and is characterized by the state vector $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_i being orbit deviations. A goal function

$$q = Q(\mathbf{x}, \mathbf{B}_c) \quad (6.1)$$

is created.

In (6.1), $\mathbf{B}_c$ is a vector whose components are corrector strengths. They are determined so that q has a minimum.

In the multi-step methods, the whole accelerator circumference is divided into separate areas. At first, the orbit over the first area is corrected. After that we go to the next area taking into consideration the results from the correction in the former step and so on.

The dynamical methods of correction treat the orbit as a whole curve $\eta(\varphi)$ rather than just orbit deviations in BPMs $\eta_i = \eta(\varphi_i)$. The quality criterion is a functional

$$I = \int_0^{2\pi} Q(\eta(\varphi), B_c(\varphi)) d\varphi. \quad (6.2)$$

The condition for I to have a minimum gives us the chosen corrector strengths.

7. CORRECTION METHODS WITH COMPENSATION OF THE PERTURBATIONS

7.1. Harmonic Correction Method. In the harmonic correction method, the orbit Fourier spectrum

$$\eta(\varphi) = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \cos k \varphi + v_k \sin k \varphi) \quad (7.1.1)$$

is calculated at first.

As we know, the orbit deviations are only in the points where BPMs are situated and not on the whole curve $\eta(\varphi)$; the methods of the applied harmonic analysis have to be used. Measuring the orbit with $2N$ BPMs we can determine only the approximate values of the first N orbit Fourier harmonics. In the case

of uniformly situated monitors the simplest way is to approximate first orbit harmonics with the so-called Bessel coefficients [5]

$$\begin{aligned} u_0 &\approx U_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i, \\ u_k &\approx U_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \cos k \varphi_i, \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ v_k &\approx V_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \sin k \varphi_i, \quad (k = 1, 2, \dots, (N-1)). \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

In the general case of non-equidistant monitors the rule of trapezoids for integral approximation gives

$$\begin{aligned} u_k &\approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \eta_i \cos k \phi_i \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2} \right), \\ v_k &\approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \eta_i \sin k \phi_i \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2} \right), \\ \phi_0 &= \phi_N - 2\pi, \quad \phi_{N+1} = \phi_1 + 2\pi. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

In this general case the LSQ criterion of approximation

$$\sum_{i=1}^p \left[\eta_i - \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(\phi_i) \right]^2 \rightarrow \text{Min}, \quad (7.1.4)$$

where c_k are the Fourier coefficients and ψ_k is the system of trigonometrical functions, gives

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{N-1} \end{bmatrix} = (S^T S)^{-1} S^T \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_{2N} \end{bmatrix} \quad (7.1.5)$$

where

$$S = \begin{bmatrix} 1/2 & \cos \phi_1 & \cos 2\phi_1 & \dots & \cos N\phi_1 & \sin \phi_1 & \dots & \sin (N-1)\phi_1 \\ 1/2 & \cos \phi_2 & \cos 2\phi_2 & \dots & \cos N\phi_2 & \sin \phi_2 & \dots & \sin (N-1)\phi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2 & \cos \phi_{2N} & \cos 2\phi_{2N} & \dots & \cos N\phi_{2N} & \sin \phi_{2N} & \dots & \sin (N-1)\phi_{2N} \end{bmatrix}. \quad (7.1.6)$$

Knowing the orbit harmonics, the perturbation harmonics can be calculated using (3.14).

In the harmonic correction method, the fields in $2N$ correcting dipoles are chosen so that the first N perturbations harmonics to be canceled [6—8].

Keeping in mind that the correcting dipoles are short ($\Delta \varphi_c \ll 2\pi$) and transforming integrals to sums, we are to solve therefore the following system of equations

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^c \Delta \varphi_i^c &= U_0, \\ \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^c \cos k \varphi_i \Delta \varphi_i &= \frac{Q^2 - k^2}{Q^2} U_k, \\ \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{2N} f_i^c \sin k \varphi_i \Delta \varphi_i &= \frac{Q^2 - k^2}{Q^2} V_k. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Then the fields in the correcting dipoles B_i^c , $i = 1, 2, \dots, 2N$ can be calculated from the generalized perturbations using (3.6), (2.14), (2.15).

7.2. G.Guignard's Method. It is very important for the biggest error sources to be found. Then we can check more carefully the corresponding elements and the practice shows that in many cases after removing this very rough imperfection the maximum orbit deviation is reduced to sufficiently small values. As in an error-free area of the accelerator circumference, the RHS of equation (3.5) is equal to zero. The orbit in this error-free area is

$$\eta = A \cos Q\varphi + B \sin Q\varphi + C. \quad (7.2.1)$$

The orbit (7.2.1) should be matched to the whole orbit in both ends of the area under consideration. From here the constants A , B , C are calculated.

If now we assume that there are errors in the above area, then the smooth solution (7.2.1) will not be valid any more. In the points with errors, η' will undergo kicks.

Obviously the divergence of the real measured orbit from the smooth model (8.2.1) will be a measure for the perturbation strengths in the area.

According to G. Guignard [9] we shall define the «probability» for the existence of perturbations in an area of the accelerator as

$$\Psi = \frac{1}{n} \sum_{k=p}^{p+n-1} [\sqrt{\beta_k} (A \cos Q\varphi_k + B \sin Q\varphi_k + c) - x_k]^2. \quad (7.2.2)$$

In (7.2.2), p is the number of the first BPM and $n \geq 4$ is the whole number of BPMs included in the area.

The constant A, B, C in (7.2.2) defines the non-perturbed orbit. We shall determine their values so that the non-perturbed orbit will lie as close as possible to the readings x_k in the BPMs (in LSQ sense). In other words we calculate A, B, C from the condition $\Psi \rightarrow \min$.

In Guignard's method, we calculate the «probability» Ψ for successive areas of the accelerator ring. The areas with big Ψ values are possible sources of errors.

7.3. Warren and Channell's Suggestion. As this has been already mentioned in general the number of BPMs, N , is less than the numbers of dipoles — M and quadrupoles — L , $N < M + L$. Therefore we are not able to solve the system of equations (3.9) with respect to the errors. In Ref.10 Warren and Channell suggest enlarging this system adding some new equations. For this purpose, new measurements of the orbit have to be done changing synchrotron parameters and keeping the errors unchanged. A new set of orbit measurements can be carried out changing the quadrupole strengths (i.e., changing Q) or changing the signs of the quadrupole gradients (for example reducing FODO structure into DOFO). The enlarged system of equations is solved by the LSQ method.

8. LOCAL CORRECTION METHODS

8.1. Beam-Bump Method. At some places (injection, extraction, and others) a very high degree of orbit correction is necessary. From the other hand, at some places of the accelerator ring the orbit deviation may be much greater than the average one due to strong local stray fields, strong local imperfections or ground movement. These require the development of methods for local correction.

Such local correction method is the beam-bump method, suggested by Collins in the sixties [11—14].

The idea of the beam-bump method consists in a local orbit correction by means of three correcting dipoles (Fig.3). The orbit deviation is compensated in a BPM or pick-up electrodes (PUE) situated near the middle corrector, as long as out of the area occupied by the correctors the orbit is kept unchanged. Therefore we have the conditions

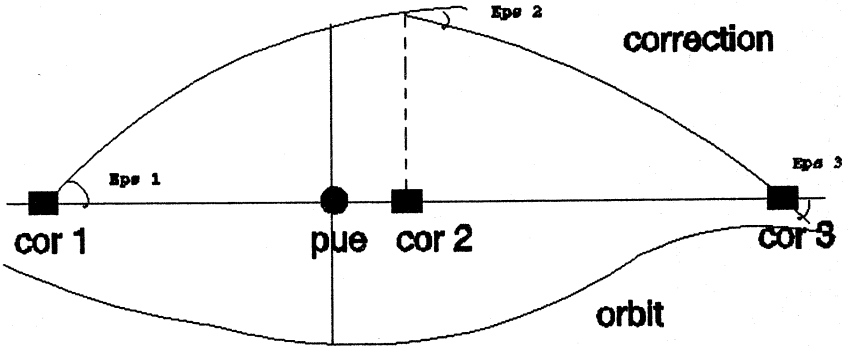


Fig.3. Beam-bump correction

$$x(\varphi_{\text{PUE}}) = -x_m,$$

$$x(\varphi \langle \varphi_1, \varphi \rangle \varphi_3) \equiv x'(\varphi \langle \varphi_1, \varphi \rangle \varphi_3) \equiv 0. \quad (8.1.1)$$

From (8.1.1) and (3.9) the following system of three equations about corrector strength can be deduced

$$\begin{aligned} & \sin \mu_{12} \sqrt{\beta_2} \varepsilon_2 + \sin \mu_{12} \sqrt{\beta_3} \varepsilon_3 = 0, \\ & \sqrt{\beta_1} \varepsilon_1 + \cos \mu_{12} \sqrt{\beta_2} \varepsilon_2 + \cos \mu_{13} \sqrt{\beta_3} \varepsilon_3 = 0, \\ & (\text{ctg } \pi Q \cos \mu_{1\text{pue}} + \sin \mu_{1\text{pue}}) \sqrt{\beta_1} \varepsilon_1 + \\ & + (\text{ctg } \pi Q \cos \mu_{\text{pue}2} + \sin \mu_{\text{pue}2}) \sqrt{\beta_2} \varepsilon_2 + \\ & + ((\text{ctg } \pi Q \cos (\mu_{\text{pue}2} + \mu_{23}) + \\ & + \sin (\mu_{\text{pue}2} + \mu_{23})) \sqrt{\beta_3} \varepsilon_3 = \frac{2x_m}{\sqrt{\beta_{\text{pue}}}}, \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

where

$$\varepsilon = \frac{B_c \Delta s}{B\rho} \quad (8.1.3)$$

is the bump (kick) in the correcting dipole,

$$\mu_{12} = \int_{s1}^{s2} \frac{ds}{\beta(s)} = Q(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (8.1.4)$$

is the betatron phase advance.

For the special case of a BPM situated very close to the central corrector, i.e., when $\mu_{pue2} \approx 0$, the system (8.1.2) is reduced to

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -\frac{\eta_m}{\sqrt{\beta_1} \sin \mu_{12}}, & \varepsilon_2 &= \frac{\sin(\mu_{12} + \mu_{23})}{\sin \mu_{12} \sin \mu_{23}} \frac{\eta_m}{\sqrt{\beta_2} \sin \pi Q}, \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\eta_m}{\sqrt{\beta_3} \sin \mu_{23}}.\end{aligned}\quad (8.1.5)$$

In the completely symmetrical case $\mu_{12} = \mu_{23} = \mu$, $\mu_{pue} = 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta_1} \varepsilon_1 &= \sqrt{\beta_2} \varepsilon_2 = \frac{x_m}{\sqrt{\beta_{pue}} \sin \mu}, \\ \sqrt{\beta_2} \varepsilon_2 &= -\frac{2x_m}{\sqrt{\beta_{pue}}} \operatorname{ctg} \mu.\end{aligned}\quad (8.1.6)$$

Besides using the expression (3.9) about the closed orbit, we can obtain the system (9.1.2) in another way, by using the beam transport matrix between two arbitrary points s_1 and s_2 in Twiss' form

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \mu_{12} + \alpha_1 \sin \mu_{12}) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \mu_{12} \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} (-\sin \mu_{12} - \alpha_1 \alpha_2 \sin \mu_{12} + (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \mu_{12}) & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \mu_{12} - \alpha_2 \sin \mu_{12}) \end{bmatrix}.\quad (8.1.7)$$

Let M^1 be the transport matrix from CD_1 to PUE; M^2 — from CD_1 to CD_2 and M^3 — from CD_2 to CD_3 . Then from (9.1.1) it follows that

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{x_m}{m_{12}^1}, & \varepsilon_2 &= -\frac{m_{11}^3 m_{12}^2}{m_{12}^3} \varepsilon - m_{22}^2 \varepsilon_1, \\ \varepsilon_3 &= -m_{12}^2 m_{21}^3 \varepsilon_1 - m_{22}^3 (m_{22}^3 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2).\end{aligned}\quad (8.1.8)$$

The optimum phase distance between the correctors in the triple is $\mu \approx \frac{\pi}{2}$, when $\varepsilon_2 \approx 0$.

8.2. Generalizations of the Beam-Bump Correction Method. As a rule, the magnetic structure of storage rings and colliders is irregular. However, if the phase distance between BPM and CD_2 is big (Fig.3), the beam-bump method

correcting the orbit in the monitor closely to zero will increase the orbit deviation in CD_2 . This happens when correctors and monitors are situated non-regularly (because of the lack of place) or when the betatron phase changes quite quickly (in the areas with small β). That is why some improvements of the beam-bump method have been put forward. Another reason for such improvements is the fact that in the beam-bump method $\varepsilon_2 \sim 1/\sin \mu$ and in the case when $\mu \approx k \cdot \pi$; $k = 1, 2, \dots$ quite large corrector kicks will be necessary for a full correction to be fulfilled.

In Ref.15, groups of N monitors and $K = N + 2$ correctors are used. The BPMs are considered to be situated close to the corresponding internal correctors.

The kicks of the internal correctors are determined by

$$R\varepsilon_{\text{int}} = -x_{\text{pue}}, \quad (8.2.1)$$

where the matrix R is

$$R_{ij} = \frac{\sqrt{\beta_i \beta_j} \sin \mu_{jk} \sin \mu_{li}}{\sin \mu_{lk}}. \quad (8.2.2)$$

In (8.2.2), μ_{li} is the phase advance between the first corrector and i -th internal corrector; μ_{jk} is the phase advance between the j -th internal corrector and the last corrector; μ_{lk} is the phase advance for the whole group of correctors.

Eq. (8.2.1) is a generalization of eq. (8.1.2) for the case of $(N + 2)$ correctors and N BPMs.

The two end kicks are determined in a way to keep the orbit out of the group unchanged

$$\sqrt{\beta_1} \varepsilon_1 = \frac{x_{\text{pue}1}}{\sqrt{\beta_{\text{pue}1}} \sin \mu_{1\text{pue}1}}, \quad (8.2.3)$$

$$\sqrt{\beta_k} \varepsilon_k = \frac{x_{\text{pue}N}}{\sqrt{\beta_{\text{pue}N}} \sin \mu_{\text{pue}Nk}}. \quad (8.2.4)$$

In the computer program PETROC (an improved CERN variant of the HERA's PETROS) another beam-bump improvement is done [16,17]. One can use K correctors, k being 0, 3, 4, 5. Between the correctors $N \leq 2k$ beam position monitors are situated. No more than two BPMs can be placed between two correctors. Only three correctors are active (with non-zero kicks) — the first, the second, and the last. Let ε be the kick in the first active corrector.

In order for the orbit not to be changed, the two other active kicks have to be εr_2 and εr_k where

$$r_2 = - \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \frac{\sin \mu_{1k}}{\sin \mu_{2k}}, \quad (8.2.5)$$

$$r_k = - \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_k}} \frac{\sin \mu_{12}}{\sin \mu_{2k}}. \quad (8.2.6)$$

The kick ε in the first corrector is determined by the minimum of the function

$$q = \sum_{\text{BPMs}} (x_i + x_{\text{pucl}})^2 + w^2 \beta_1 \beta_2 \sin^2 \mu_{12} \varepsilon^2. \quad (8.2.7)$$

In (8.2.7), x_{pucl} is the measured orbit deviation and x_i is the orbit deviations due to correctors; w is a weight. The second member in (8.2.7) limits the corrector strengths.

9. METHODS WITH ORBIT DEVIATION COMPENSATION

9.1. Iterative Beam-Bump Method. If we move consequently along the accelerator circumference, the local beam-bump method can be used as a method for general correction. Each corrector works once as a first corrector in the correctors triple (Fig.3), once as a second and once as a third corrector.

In this straightforward improvement, a little problem is hidden. In the beam-bump method, the correctors of the triple are tuned to cancel the orbit in the monitor which is situated as a rule near the middle corrector. Correctors affect the orbit locally, i.e., the impact of the correctors is equal to zero out of the triple. But as we pointed out above, in the iterative beam-bump the successive triples overlap a little (they have two common correctors). Hence, each corrector triple will cause a small orbit distortion in the next (belonging to the next triple) beam position monitor. The last correctors triple consisting of correctors $(k-1)$, k and 1 will reduce the orbit deviation in the k -th monitor to zero, but will distort the orbit a little in the first monitor.

To avoid this trouble, one more turn of successive beam-bump corrections along the accelerator will be necessary.

9.2. Least Squares Method. The method can be characterized as a single-step correction method.

The orbit is considered only in the points where beam position monitors are situated and is characterized by the state vector η^c corresponding to the corrections:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{(B+g)} + \boldsymbol{\eta}^c = \boldsymbol{\eta}^{(B+g)} + A\boldsymbol{\delta}^c. \quad (9.2.1)$$

To write (9.2.1) we have used the formula (3.9), $\boldsymbol{\delta}^c$ being the generalized corrections (3.11) and the fact that $\boldsymbol{\eta}^{B+g}$ are known from the BPMs readings.

In the least squares method (LSQ) the following goal function is minimized [8,18—20]

$$q = \sum_{i=1}^N \eta_i^2 = \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} \rightarrow \min. \quad (9.2.2)$$

It is important to note that as a rule the number of correctors, k , is less than that of detectors, n , i.e., $K < N$. It is possible to be demonstrated that the minimum of (9.2.2) occurs when corrector strengths are

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{opt}}^c = - (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{\eta}^{(B+g)}. \quad (9.2.3)$$

The minimum value of q (the so-called residual sum of squares) is equal to

$$q_{\min} = \boldsymbol{\eta}^{(B+g)T} \boldsymbol{\eta}^{(B+g)} A \boldsymbol{\delta}_{\text{opt}}^c. \quad (9.2.4)$$

9.3. Fast Realization of the LSQ Correction. A fast realization of the LSQ correction method is proposed in Ref.15. The idea is at each iteration to optimize the orbit using only one corrector. Having tried in this way all available correctors, we choose for further use this one for which the residual sum of squares of orbit deviations is the smallest.

At the 0-th iteration we begin with the orbit measured by BPMs

$$\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \boldsymbol{\eta}^{(B+g)}. \quad (9.3.1)$$

Let $\boldsymbol{\eta}^{(n-1)}$ be the orbit having been optimized at the $(n-1)$ -th iteration. As at each step at the n -th iteration, we will use only single correctors, therefore

$$\boldsymbol{\eta}_j^{(n)} = \boldsymbol{\eta}^{(n-1)} + \delta_j^{(n)} \mathbf{a}_j, \quad (9.3.2)$$

where $\delta_j^{(n)}$ is the generalized strength of the j -th corrector at n -th iteration; $\mathbf{a}_j$ is the j -th column of the matrix (3.10).

Following the LSQ algorithm we will minimize

$$g_j^{(n)} = \min_{\delta_j^{(n)}} (\boldsymbol{\eta}_j^{nT} \boldsymbol{\eta}_j^{(n)}). \quad (9.3.3)$$

Thus at the n -th iteration, we will obtain k values $g_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots, k$, one for each corrector. From these values $g_j^{(n)}$ we will choose the smallest one. The corresponding corrector will be the optimum corrector at the n -th iteration. Its

optimum strength $\delta_{j(n)}$ will be the correction used at the n -th iteration. Therefore our goal function is

$$q_j^{(n)} \rightarrow \min. \quad (9.3.4)$$

In Ref.15 it is proved that this iterative procedure is convergent and that the corrector strengths found at different steps are added.

9.4. Algorithm MICADO. The MICADO algorithm for closed orbit correction was put forward by B.Autin and Y.Marti in Ref.21 and is realized in many accelerator design programs, for example in MAD [22]. This algorithm can be seen as an improvement of the LSQ method.

MICADO is an iterative algorithm. At the first iteration only single correctors are used. The goal function is as in the LSQ method

$$g_j^{(1)} = \min_{\delta_j} (\boldsymbol{\eta}_j^{(1)T} \boldsymbol{\eta}_j^{(1)}), \quad (9.4.1)$$

where

$$\boldsymbol{\eta}_j^{(1)} = \boldsymbol{\eta}^{(B+g)} + \alpha \boldsymbol{\delta}_j^{(1)}, \quad (9.4.2)$$

$\boldsymbol{\eta}^{(B+g)}$ being the vector of BPM readings and $\boldsymbol{\delta}_j^{(1)}$ being the vector of the generalized corrections (3.11). As at the first iteration we use only single correctors:

$$\boldsymbol{\delta}_j^{(1)} = (0, \dots, \delta_j^{(1)}, \dots, 0), \quad (9.4.3)$$

therefore, at the first iteration we have to solve k equations with one unknown value — $\delta_j^{(1)}$, ($j = 1, 2, \dots, k$).

Next we find out the number j^* of that corrector among all k correctors for which $q_j^{(1)}$ (9.4.1) has the smallest value — $q_{j^*}^{(1)}$.

It is j^* -th corrector that will be used at the second iteration together with each one of the rest $(k-1)$ correctors. We minimize again the square function

$$q_j^{(2)} = \min_{\delta_j} (\boldsymbol{\eta}_j^{(2)T} \boldsymbol{\eta}_j^{(2)}). \quad (9.4.4)$$

But now the corrections vector $\boldsymbol{\delta}_j^{(2)}$ is

$$\boldsymbol{\delta}_j^{(2)} = (0, \dots, \delta_{j^*}, \dots, \delta_j, \dots, 0), \quad (9.4.5)$$

i.e., has two non-zero components: one, δ_{j^*} , is the strength of the j^* -th corrector (remember that this number was found and fixed at the previous step) and another one — the strength of any other corrector. Thus at the second iteration we have to solve $(k-1)$ systems of two equations with two unknown values — δ_{j^*} and δ_j .

Following the first iteration idea we will search now for the number j^{**} of that additional corrector for which $q_j^{(2)}$ has the smallest value. So that after the second iteration we will have fixed numbers j^* and j^{**} of two optimum correctors.

Iteration procedures of this kind go ahead, adding one new corrector at every step, until the sum of the corrected orbit deviations becomes less than a given small value ε . Furthermore the method finds the smallest number of correctors satisfying this condition.

9.5. Hereward-Baconier's Method. In this correction method the following goal function is introduced [23—26]

$$q = \gamma \sum_{i=1}^N \eta_i^2 + (1 - \gamma) \sum_{j=1}^K \delta_j^{c2} \rightarrow \min. \quad (9.5.1)$$

In (9.5.1), γ is a parameter, $0 < \gamma < 1$.

The first sum in (9.5.1) minimizes the orbit deviations in the BPMs, the second one restricts the strengths of the correctors, limiting in this way the influence of the high harmonics of the correction. We saw that from the readings in N BPMs the amplitudes of the first $N/2$ orbit harmonics can be calculated. These $N/2$ orbit harmonics are compensated by the corresponding harmonics of the correction. The higher harmonics of the correction remain uncompensated. As they distort the orbit additionally it is useful to restrict their influence.

The optimum value of the parameter γ is determined either experimentally or by computer simulations.

One can write

$$q = \gamma \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^K a_{ij} \delta_j^c + \eta_i^{(B+g)} \right)^2 + (1 - \gamma) \sum_{j=1}^K \delta_j^{c2}. \quad (9.5.2)$$

The necessary condition for q to have a minimum is

$$\frac{\partial q}{\partial \delta_j^2} = 2\gamma \sum_{i=1}^N a_{ij} \sum_{p=1}^K (a_{ip} \delta_p^c + \eta_i^{(B+g)}) + 2(1 - \gamma) \delta_p^c = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (9.5.3)$$

This can be written in matrix form

$$(\gamma A^T A + (1 - \gamma) E) \delta^c = -\gamma A^T \eta^{(B+g)}. \quad (9.5.4)$$

9.6. LSQ with Singular Value Decomposition. According to the linear algebra [27] any $(N \times K)$ matrix A with $N \geq K$ can be represented as a product of three matrices:

$$A = U \cdot W \cdot V^T, \quad (9.6.1)$$

where U is $(N \times K)$ unitary matrix ($U^T \cdot U = U \cdot U^T = E$), W is a $(K \times K)$ diagonal matrix with positive or zero diagonal elements ($w_i \geq 0$, called singular values) and V is a $(K \times K)$ unitary matrix ($V^T \cdot V = V \cdot V^T = E$). (1) is known as SVD decomposition of the matrix A .

If the matrix A is square (equal numbers of monitors and correctors) and some w_i 's are equal to zero, A will be singular; in case some of the w_i 's are nonzero but very small, A will be illconditioned.

If $N > K$ (which is usual for accelerators), the system of equations for the corrector strengths

$$A \cdot \delta_{BC} = -\eta \quad (9.6.2)$$

will be overdetermined.

Even in this two cases the SVD decomposition of A provides a «reasonable» solution of (2) (in LSQ sense).

It is proven [27] that the vector

$$\delta^{BC} = -V \cdot [\text{diag}(1/W_i)] \cdot U^T \cdot \eta, \quad (9.6.3)$$

where for all w_i 's equal to zero or very small, the corresponding diagonal elements $(1/w_i)$ in the second matrix of the matrix product (9.6.3) are replaced by zero ($\infty \rightarrow 0!$), satisfies

$$|A \cdot \delta^{BC} + \eta|^2 \rightarrow \text{Min}. \quad (9.6.4)$$

If $U_{(i)}$ are the columns of the matrix U (N -vectors) and $V_{(i)}$ are the columns of the matrix V (K -vectors), then

$$\delta^{BC} = - \sum_i \left(\frac{U_{(i)} \cdot \eta}{w_i} \right) V_{(i)}, \quad (9.6.5)$$

i.e., the corrector strengths are linear combination of the vectors $V_{(i)}$ with coefficients equal to the dot product of the vectors $U_{(i)}$ with the measured orbit η weighted by the singular values w_i .

In order to reduce the corrector strengths one can replace $(1/w_i)$ by zero not only for zero (or very small) w_i but when $w_i < \varepsilon$, where ε is chosen in a way to avoid the power supplies saturation [28].

The LSQ correction method with SVD decomposition of the response matrix A is coded in the computer program for orbit simulation and correction ORBIT [29] and has been used in the X-ray ring NSLS and in SPEAR [30].

9.7. Eigenvectors Correction. In the LSQ correction method we have to invert the matrix $(A^T A)$ — (9.2.3). $A^T A$ is square $(K \times K)$ symmetric real matrix, i.e., hermitian matrix, i.e., there exists a transformation $\Lambda = T^{-1}(A^T A)T$ to a square diagonal matrix Λ . The diagonal elements λ_i of the matrix Λ are the eigenvalues of the matrix $(A^T A)$, and the transformation matrix $T = (X_1, X_2, \dots, X_K)$ is formed by the eigenvectors X_i of the matrix $(A^T A)$.

It follows from this transformation and from (9.2.3.) that [8]

$$\delta_i^{BC} = - \sum_{p=1}^K \sum_{q=1}^K \sum_{r=1}^K \frac{X_{p,i} X_{p,q}}{\lambda_p} A_{rq} \eta_r. \quad (9.7.1)$$

Let us represent the corrector vector δ in the basis X_l , $l = 1, \dots, K$

$$\delta = \sum_l C_l X_l. \quad (9.7.2)$$

Then we have for the residual sum of squares (9.2.4)

$$q_{\min} = \delta^T \delta + \sum_l \lambda_l C_l \delta^T X_l. \quad (9.7.3)$$

The eigenvectors with small eigenvalues will have no significant contribution to the correction and may be neglected thus reducing the corrector strengths.

9.8. Dynamical Correction Algorithm. Algorithms described above strive to compensate orbit deviations in the points where BPMs are situated by means of some number of orbit correctors. As a result of the orbit correction, the corrected orbit will have approximately zero deviations in the BPMs. However, between the monitors the corrected orbit will have non-zero deviations. During the computer simulation we noticed that in some particular error distributions the deviations of the corrected orbit in some points are out of control. In general it is important to correct the orbit over the whole accelerator ring and not only in the BPMs.

Emphasizing this fact, we will choose the criterion of correction quality as a functional [31]

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\varphi) d\varphi. \quad (9.8.1)$$

But the orbit $\eta(\phi)$ is a random function of the generalized azimuth. This requires to improve the criterion (9.8.1) taking the mathematical expectation of the functional

$$q = M \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi) d\phi \right), \quad (9.8.2)$$

(9.8.2) is the final form of the correction quality criterion in the DINAM algorithm.

One can write

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi) d\phi &= \frac{u_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^2 + v_k^2) = \\ &= \left[\frac{u_0^{(B+g)^2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k^{(B+g)^2} + v_k^{(B+g)^2} \right) \right] + \\ &+ \left[u_0^{(B+g)} u_0^{Bc} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2u_k^{(B+g)} u_k^{Bc} + 2v_k^{(B+g)} v_k^{Bc} \right) \right] + \\ &+ \left[\frac{u_0^{Bc^2}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k^{Bc^2} + v_k^{Bc^2} \right) \right] = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \end{aligned} \quad (9.8.3)$$

In (9.8.3), $u_{k1} V_k$ are the Fourier coefficients of the orbit, $u_k^{(B+g)}$ and $v_k^{(B+g)}$ being those caused by the dipole and the quadrupole errors and u_k^{Bc} and v_k^{Bc} being those caused by the correctors.

Let us have $2N$ Beam position monitors, M -dipoles, L -quadrupoles, and K -correcting dipoles. As a result of the orbit measurement by BPMs, we shall know the orbit distortions in $2N$ points. However, the total number of the perturbations ($M+L$) is, as a rule, much larger than the number of BPMs. Therefore, we cannot solve (3.9) about the perturbations. From this system of equations only $2N$ perturbations can be expressed by the readings in BPMs and other perturbations. In other words, we have a case of correction with uncertainty.

Let η_i , $i = 1, 2, \dots, 2N$ be the orbit distortions in BPMs. Then we can write:

$$\eta_i = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k \cos k \phi_i + v_k \sin k \phi_i)_{(i=1,2,\dots,2n)}. \quad (9.8.4)$$

From these $2N$ equations, the first N Fourier Coefficients $u_0, u_1, \dots, u_N, \dots, v_{(n-1)}$ can be expressed by the orbit distortions η_i and higher orbit harmonics. Assuming that BPMs are placed uniformly along the accelerator ring, the following relations can be deduced from (9.8.4)

$$\begin{aligned} u_0 &= U_0 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} u_{2Nj} = U_0 - S_0, \\ u_k &= U_k - \sum_{j=1}^{\infty} (u_{2Nj-k} + u_{2Nj+k}) = U_k - S_k, \\ v_k &= V_k - \sum_{j=1}^{\infty} (-v_{2Nj-k} + v_{2Nj+k}) = V_k - R_k, \end{aligned} \quad (9.8.5)$$

where

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i, \\ U_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \cos k \varphi_i; \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ V_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i \sin k \varphi_i; \quad (k = 1, 2, \dots, (n-1)) \end{aligned} \quad (9.8.6)$$

are Bessel's coefficients.

Making use of the relations (9.8.5) one can write for the sums in (9.8.3):

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left[\frac{U_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (U_k^2 + V_k^2) + \frac{U_N^2}{2} \right] + \\ &+ \left[-U_0 S_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (-2U_k S_k - 2V_k R_k) - U_N S_N \right] + \\ &+ \left[\frac{S_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} (S_k^2 + R_k^2) + S_N^2 - \frac{U_N^2}{4} + V_N^{(B+g)^2} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(u_k^{(B+2)^2} + v_k^{(B+g)^2} \right) \right] = \Sigma_a + \Sigma_b + \Sigma_c, \end{aligned} \quad (9.8.7)$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 = & \left[U_0 u_0^{Bc} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (U_k u_k^{Bc} + V_k v_k^{Bc}) + U_N u_N^{Bc} \right] + \\
& + \left[2v_N^{B+g} v_N^{Bc} - u_0^{Bc} S_0 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} (u_k^{Bc} S_k + v_k^{Bc} R_k) - 2u_N^{Bc} S_N \right] + \\
& + \left[2 \sum_{k=N+1}^{\infty} (u_k^{(B+g)} u_k^{Bc} + b_k^{(B+g)} v_k^{Bc}) \right] = \Sigma_d + \Sigma_e + \Sigma_f. \quad (9.8.8)
\end{aligned}$$

Using the fact that the higher orbit harmonics are statistically independent and have a zero mathematical expectation we obtain that

$$M(\Sigma_d) = M(\Sigma_e) = M(\Sigma_f) = 0. \quad (9.8.9)$$

Using the Fourier expansion (3.13) and the reactions (3.14) between the orbit and the perturbation harmonics one can also obtain that

$$M(\Sigma_c) = 4 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right)^2 D, \quad (9.8.10)$$

where D is the variance of the perturbation harmonics

$$D = D(f_k) = D(g_k). \quad (9.8.11)$$

Because the correcting dipoles are short compared to the accelerator circumference, one can reduce integrals in the expressions for correctors Fourier harmonics to sums and write

$$\Sigma_d = \sum_{p=1}^{2N} \sum_{q=1}^K A_{pq} \eta_p \delta_q^{Bc}, \quad (9.8.12)$$

where

$$\begin{aligned}
A_{pq} = & \frac{1}{N} \left(c_0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cos k(\varphi_p - \varphi_q) + c_N \cos N\varphi_p \cos N\varphi_q \right). \\
c_k = & \frac{2Q \sin \pi Q}{\pi^2 (Q^2 - k^2)}. \quad (9.8.13)
\end{aligned}$$

In the same way one can prove that

$$\sum_3 = \sum_{q=1}^k \sum_{r=1}^k B_{qr} \delta_q^{Bc} \delta_r^{Bc}, \quad (9.8.14)$$

where

$$\begin{aligned} B_{qr} &= \frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cos K(\varphi_q - \varphi_r) + \\ &= \cos Q |\varphi_q - \varphi_r| + \frac{\sin \pi Q}{\pi Q} \cos(\pi - |\varphi_q - \varphi_r|) Q - \\ &\quad - \frac{|\varphi_q - \varphi_r| \sin \pi Q}{\pi} \sin(\pi - |\varphi_q - \varphi_r|) Q. \end{aligned} \quad (9.8.15)$$

Finally in the applied harmonic analysis it is proved that

$$\sum_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i^2. \quad (9.8.16)$$

Summarizing all the above results for the quality criterion (9.8.2) we get

$$\begin{aligned} 2q &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N} \eta_i^2 + \sum_{p=1}^{2N} \sum_{q=1}^k A_{pq} \eta_p \delta_q^{Bc} + \\ &+ \sum_{q=1}^k \sum_{r=1}^k B_{qr} \delta_q^{Bc} \delta_r^{Bc} + 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{Q^2 - k^2} \right) D. \end{aligned} \quad (9.8.17)$$

The coefficients A_{pq} and B_{qr} are given by formulae (9.8.13) and (9.8.15), respectively. In these formulae, φ_p are the azimuths of the BPMs and φ_q and φ_r are the azimuths of the correcting dipoles.

The strengths of the correcting dipoles are determined by the condition for a minimum of q to occur

$$2 \sum_{p=1}^k B_{sp} \delta_p^{Bc} = - \sum_{p=1}^{2N} A_{ps} \eta_p, \quad (s = 1, 2, \dots, k). \quad (9.8.18)$$

Introducing matrices $A = \{A_{ij}\}$ and $B = \{B_{ij}\}$ and the vectors of the corrections δ^{Bc} and BPMs readings η , eq. (9.8.18) can be written in the following matrix form

$$2B \delta^{Bc} = -A^T \eta. \quad (9.8.19)$$

Let us introduce the matrix

$$R = -\frac{1}{2} B^{-1} A^T. \quad (9.8.20)$$

The matrix R depends only on the azimuths of the BPMs and on the correctors and for the given accelerator it can be calculated prior to the correction. Then the required strengths of the correcting dipoles will be determined by the matrix expression

$$\delta^{Bc} = R \cdot \eta. \quad (9.8.21)$$

So the algorithm is relatively fast. The computer simulations showed that it works reliably and is free from the undesirable effects mentioned in the beginning of this part.

10. ORBIT CORRECTION WITH NEURAL NETWORKS

Artificial Neural Networks (ANNs) [32] with their ability to tune themselves according to the output errors are well suited for on-line orbit correction. The relationship between corrector kicks and orbit displacements in BPMs is in general non-linear due to the presence of non-linear elements in the machine. The orbit fluctuates during the time. Both these circumstances are well treated by ANNs which have features for solving non-linear problems and self-teaching.

As it is not possible to go in more detail in this paper we will restrict ourselves only to the main principles of the ANNs correction.

An ANN consists of neurons arranged in layers and directed and weighted connections between them (Fig.4).

In the forward propagation of the signals (from input to output) each neuron processes has input signals s_j and produces an output signal s_i according to the relations

$$s_i = f \left(\sum_{j=1} T_{ij} s_j \right), \quad (10.1)$$

where T_{ij} are the synapse weights.

The function $f(x)$ in (10.1) (the so-called action function) is usually a step-function thus if the weighted sum of the input signals exceeds the threshold for the neuron, the neuron «fires» and produces output signal.

In the backward propagation of the signals first of all the output errors ϵ_1 of the ANN are calculated

$$\epsilon_1 = z_i - s_i, \quad (10.2)$$

where z_i are the «ideal» output signals.

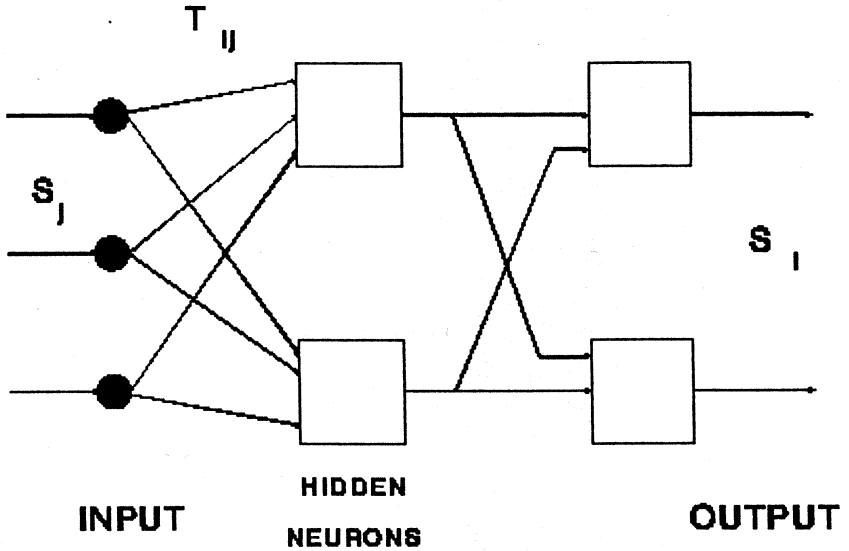


Fig.4. Artificial Neural Network

Let B_{ij} be the blames — the degree of responsibility that each input signal has to the output error

$$B_{ij} = \frac{T_{ij} S_j}{\sum_{j=i} T_{ij} S_j}. \quad (10.3)$$

Finally the weights are corrected according to

$$T_{ij}^{\text{new}} = T_{ij}^{\text{old}} + k B_{ij} \varepsilon_i, \quad (10.4)$$

k being a coefficient.

Before to be ready for use an ANN must be trained. To do this we apply a set of input signals for which the «ideal» outputs are known, record the output errors and tune the weights according to (10.4). After many training cycles the desired accuracy of the output can be reached.

The use of ANNs for orbit correction is quite straightforward. The input signals are the measured orbit displacements $\mathbf{X}$ in BPMs and the output signals are the corrector kicks ε . There is one input and one output neuron for each BPM and corrector.

In the training stage the applied input signals $\mathbf{X}$ are determined by

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\varepsilon, \quad (10.5)$$

where A is the response matrix whose elements can be calculated by the machine model or be measured, which is more accurate, and ϵ are random kicks.

After the training is over and the desired accuracy of the output is reached ANN can be used for on-line orbit correction.

During the machine operation a continuous process of retraining (fine tuning) goes on. The detected orbit errors are feed back and the weights are recalculated-adoptive correction.

ANNs have been used for orbit correction in the NSLS VUV and X-ray storage rings [33,34].

Neural networks have been simulated by means of SNNS computer simulator [35]. A three-layer shortcut connected network (all neurons are connected to each other) and Quickprop training strategy have chosen best results. After 2200 training cycles ANN has been able to correct the orbit to 44 μm maximum deviation.

11. EXPERT SYSTEMS

Knowledge based expert systems differ from conventional computer programs in their intensive use of intuitive and empirical rules which together with facts about the task form the so-called knowledge base [36]. The control strategy (the order in which rules are applied) is determined by the inference engine (Fig.5).

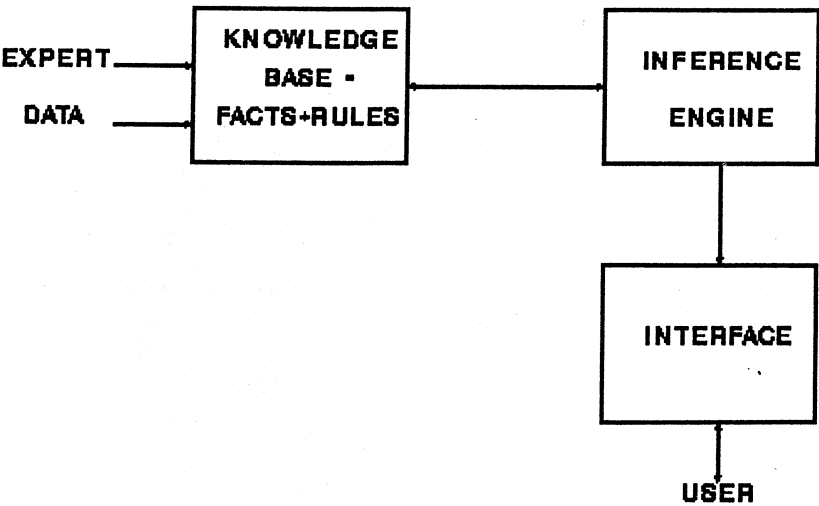


Fig.5. Block diagram of a knowledge based expert system

The expert system approach to closed orbit correction is developing in CERN by D.Brandt and A.Verdier [37,38].

The expert system is based on the fitting method of G.Guignard (chapter 7.2) of searching for field and alignment errors. It can predict and estimate the location of large field defects and to check the correctness of the BPM reading. A convergence test is used as a sensitive mean of detecting whether all errors have been identified.

The main program is written in PROLOG; while the numerical subroutines, in PASCAL.

The expert system has been successfully tested on EAP and LEAR in CERN.

12. ORBIT CORRECTION FEEDBACK SYSTEMS

In synchrotron radiation sources (SRS) we need not only closed orbits with small distortions but also high stable orbits. Orbit stability is a crucial point in achieving low emittance electron beams and therefore high brightness of the photon beams. Orbit correction must be applied dynamically which eliminates fluctuations produced by ground vibrations and magnet power ripples.

In SRS orbit stability is improved by means of correction feedback system (Fig.6).

In general the feedback systems are divided to local and global systems.

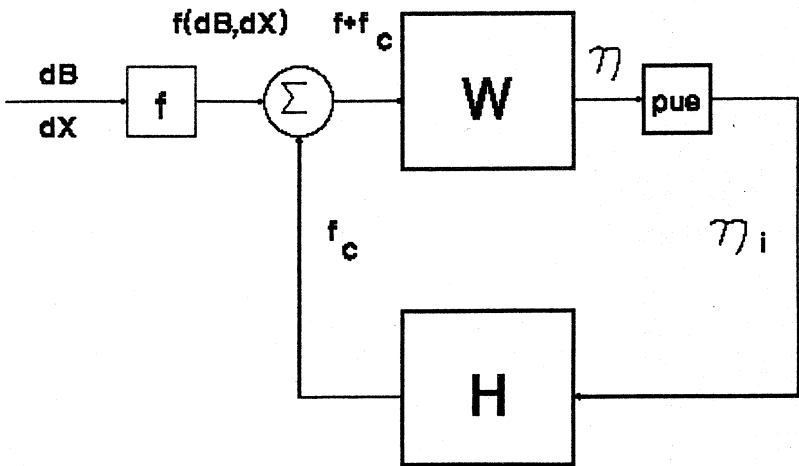


Fig.6. Orbit correction feedback system. $f(dB, dX)$ is the error function (3.6), W is the operator $1/Q^2 (d^2/d\phi^2 + Q^2)^{-1}$, H is the correction operator

In local feedback systems the orbit is locally corrected at the centre of an insertion device by three or four magnet bumps [39].

Global feedback systems can be analog [40] or digital [41].

In Ref.40 a feedback system based on Fourier analysis of the orbit is described. As it has been shown in chapter 7.1. the orbit Fourier coefficients can be expressed by the matrix equality, eq.(7.1.5). This means that a simple linear electronic network can be built to realize on-line Fourier analysis. The input voltages are proportional to the orbit displacements measured by BPMs and in real time the output voltages are proportional to the Fourier harmonics. After that the corrector strengths are adjusted to cancel these harmonics.

Digital feedback systems [41] allow one to avoid drift, offset and temperature problems typical for analog circuits. Orbit data is transferred in digital form by BPM processors distributed around the ring. The digital signal processors then calculate the corrector strengths and control the corrector power supplies.

Digital feedback systems are programmable and therefore more flexible in use.

In principle any orbit correction algorithm can be used in feedback systems.

13. OPTIMUM POSITIONING OF DIPOLE MAGNETS

A different approach to the closed orbit correction is the optimum positioning of the dipole magnets around the ring. According to this approach the dipole magnets are situated in their places on the ring not in an arbitrary way but following a special strategy.

In the stage of accelerator assembling, the field errors in dipoles are carefully measured and only after that they are installed according to a positioning algorithm.

This allows for the orbit distortion to be minimized [42,43].

Let the dipoles be installed around the ring according to the permutation

$$X = (\Delta B_{k_1}, \Delta B_{k_2}, \dots, \Delta B_{k_M}),$$

$$k_i \in \{1, 2, \dots, M\}, \quad k_i \neq k_j, \quad i \neq j. \quad (13.1)$$

If we choose as quality criterion the functional

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta^2(\phi) d\phi \rightarrow \text{Min}, \quad (13.2)$$

it can be shown [42] that the following sum must be minimized

$$\sum_{q=1}^M \sum_{r=1}^M B_{qr} \Delta B_k \Delta B_r \rightarrow \text{Min}, \quad (13.3)$$

where the coefficients B_{qr} are calculated by the machine model.

Let us introduce the X_{jk} integer variables

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if the } K\text{-th dipole is situated} \\ & \text{at the } j\text{-th position} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (13.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M X_{jk} &= 1, \quad \text{i.e., one dipole at a place,} \\ \sum_{j=1}^M X_{jk} &= 1, \quad \text{i.e., each dipole only at one place.} \end{aligned} \quad (13.5)$$

From (13.3) the so-called «quadratic assignment problem» of the discrete programming follows:

«Let us have M dipoles, $k = 1, 2, \dots, M$ and M places $j = 1, 2, \dots, M$ around the ring. We look for such positioning of every dipole at only one place for which

$$\sum_{q=1}^M \sum_{r=1}^M \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M [B_{qr} \Delta B_m \Delta B_n] X_{qm} X_{rn} \rightarrow \text{Min}, \quad (13.6)$$

where X_{jk} are M^2 integer variables (13.4) with constraints (13.5).

Unfortunately in cases of large dimension of the task the quadratic assignment problem proves to be difficult one [42].

That is why in [42,43] new approaches to the problem making full use of its specific character have been developed.

The set of dipole errors (13.1) causes a combinatorial space of permutations P_B . The points in this space are all possible permutations X (13.1) and its power is $M!$.

Let us introduce a metric in the P_B space in the following way: the distance $r(X, Y)$ between the points X and Y is assumed to be equal to the minimum number of the transpositions (elementary or pair shifts) necessary to bring the point X to the point Y .

Here we will describe only one of the algorithms proposed in [42,43], namely the algorithm of controlled random search.

The algorithm uses the following goal function

$$Q = \max_i |x_i|, \quad (13.7)$$

where x_i is the orbit displacement in the i -th BPM.

The logical structure of the algorithm of controlled random search can be described in the following steps.

Controlled Random Search

Step 1. Choose an arbitrary initial arrangement of the dipoles X , i.e., an arbitrary initial point in the combinatorial space P_B . Draw a sphere S_0 centered in the initial point X_0 and having radius equal to R_0 ($R_0 < (M - 1)$ and its value is chosen by physical considerations). Choose the convergence parameter ϵ .

Step 2. Set $i = 1$.

Step 3. Choose a random point $X_i \in S_{(i-1)}$ using uniform probability distribution. Calculate $Q_i = Q(X_i)$.

Step 4. Check whether $Q_i < \epsilon$. If yes, stop the iterations and exit the algorithm. If not go to step 5.

Step 5. Draw a sphere S_i centered in X_i and having radius R_i :

$$R_i = \delta R_0, \quad (13.8)$$

where

$$\delta = \frac{Q_i}{Q_0}. \quad (13.9)$$

Step 6. Set $i = i + 1$ and go back to step 3.

The computational experiments show that the CPU time necessary for the optimizing of a machine with M dipoles is proportional to $M!$.

Other algorithm for optimum positioning of dipoles can be found in [42,43].

14. FIRST TURN CORRECTION

In order for the particles in a circular accelerator to be able to perform hundred of thousands turns before to reach the final energy of the machine they must first of all pass the very first turn.

During the assembling and initial tuning of the accelerator much bigger errors than the random field and alignment errors mentioned above may occur. Sometimes they are caused by unpredictable mistakes and there are several such cases in the accelerator practice.

In the presence of big linear errors the centre of charge trajectory does not follow any more the orbit and can have very big deviations. Even more, the beam can hit somewhere that vacuum chamber not being able to make complete turn around the machine.

Launch errors in the injection system may also cause the beam loss or provided they are not so big-harmful coherent oscillations of the beam.

The situation is complicated by displacement errors in the BPMs and by the low resolution of the monitors for single-pass beam.

So we face the task of threading the beam entire turn around the accelerator ring.

Two different approaches are possible [44].

First we can try to thread the beam around the ring using the existing orbit correctors. Correcting algorithms have been developed for first turn treatment and some of them will be described in this paper.

In a different approach we can search for the sources of big errors — dipole magnets with big field errors of highly displaced quadrupoles. After finding of the candidates for error sources we should carefully examine the corresponding elements. This approach has been successfully applied for beam line steering and can also be used for the first turn treatment.

The first turn correction is closely related to the beam line steering. In fact before closing the first turn onto the second the magnetic structure of a circular accelerator can be looked at as a beam line.

The beam losses are especially dangerous in the superconducting machines causing the loss of the superconductivity and thus making the tuning process much longer.

In big synchrotrons the distorted orbit amplitude can reach values which are compatible with the vacuum chamber radius due mainly to the misalignments of the quadrupoles. This makes the first turn threading a very important task.

Having corrected the center of charge trajectory so that the beam goes entire turn around the ring we should close this trajectory, i.e., make the second turn (and all the following turns) to coincide with the first turn.

This chapter represents some algorithms for first turn steering.

14.1. Beam Threading Algorithm. The idea of the method is straightforward [45,46]. The steering system consists of small correcting dipoles and beam position monitors (BPM) situated near to them (Fig.7).

As BPMs electrostatic pickup electrodes are used.

Because the length of the correcting dipoles is small comparing to the accelerator circumference they can be considered to produce local orbit bumps.

Let

$$\epsilon_n = \frac{B_{cn} \cdot l}{B \cdot \rho} \quad (14.1.1)$$

be the kick in the n -th corrector, where $B \cdot \rho$ denotes the beam rigidity.

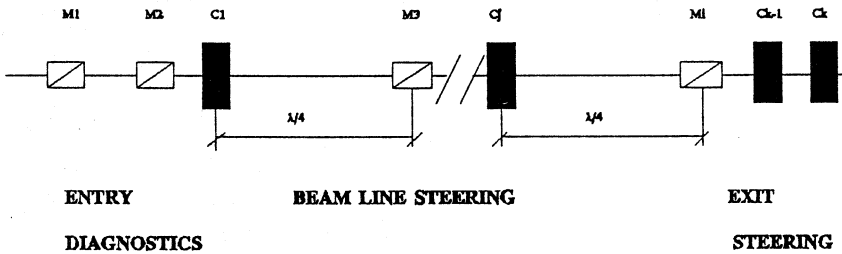


Fig.7. Beam line steering system

If M^{ji} is the transfer matrix between j -th corrector and i -th BPM, we can write

$$x_i = m_{12}^{ji} \cdot \epsilon_j = \sqrt{\beta_j \beta_i} \sin \mu_{ji} \epsilon_n, \quad (14.1.2)$$

where x_i is the deviation in the i -th BPM and we have expressed the matrix elements by the Twiss parameters — amplitude function $\beta(s)$ and betatron phase advance $\mu(s)$:

$$\mu(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}. \quad (14.1.3)$$

Applying the principle of superposition we can write

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta_1 \beta_3} \sin \mu_{13} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{\beta_1 \beta_4} \sin \mu_{14} & \sqrt{\beta_2 \beta_4} \sin \mu_{24} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\beta_1 \beta_n} \sin \mu_{1n} & \sqrt{\beta_2 \beta_n} \sin \mu_{2n} & \dots & \sqrt{\beta_{k-2} \beta_n} \sin \mu_{k-2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \dots \\ \epsilon_{k-2} \end{bmatrix} \quad (14.1.4)$$

The system of equations (14.1.4) can be solved with a trivial forward substitution.

It follows from (14.1.2) that the optimum phase distance between the corrector and the monitor in a corrector-monitor pair is $\pi/2$. In practice it is difficult for one to follow this requirement.

BPMs should be placed near to the points where β has maximum and where we can expect big centre of charge deviations. This improves the BPMs sensitivity.

In order to minimize corrector strengths the correcting dipoles also should be placed near to the points where β has maximum.

Whereas in the simplest FODO structure it is easy for one to follow these rules situating the horizontal BPMs and correctors near to F quadrupoles and

the vertical BPMs and correctors near to D quadrupoles, in more sophisticated magnetic structures with many elements it is almost impossible.

The beam line steering systems have as a rule two additional parts (Fig.7).

In the entrance of the line two pickups are used to measure the position and the slope of the injected beam. The credibility of the entry angle reconstruction however is greatly improved if the two pickups are placed in drift space [45].

At the exit of the line two correctors are used to match the centre of charge position and slope to ones in the following accelerator or target.

14.2. Least Squares Algorithm. The Least Squares (LSQ) approach was successfully applied not only as a method for general orbit correction but also for first turn treatment [47].

Let's have n BPMs and m correcting dipoles, $n \geq m$.

If $c_k, k = 1, 2, \dots, m$ are some changes in the correcting currents, the theoretical changes in the center of charge trajectory x_i^c that they will cause generally speaking are

$$X_i^c = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial x_i^c}{\partial c_k} \right) \cdot c_k = \sum_{k=1}^m F_{ik} \cdot c_k. \quad (14.2.1)$$

In practice due to the error influence the measured centre of the charge position x_i^m will not coincide with the designed position x_i^d . Let $\Delta x_i = x_i^d - x_i^m$ denote the discrepancy between both.

The task of threading the beam around the entire circumference of the ring can be looked at as a least squares problem

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta x_i - x_i^c)^2 \rightarrow \text{Min}. \quad (14.2.2)$$

The corrector strengths which minimize the discrepancy between the measured and desired trajectories follow from the well-known solution of the LSQ problem

$$\mathbf{c} = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot \Delta \mathbf{x}. \quad (14.2.3)$$

In the case of equal number of correctors and BPMs, when F is square matrix (2.2.3) becomes

$$\mathbf{c} = F^{-1} \cdot \Delta \mathbf{x}. \quad (14.2.4)$$

For the first turn steering F is a triangular matrix (like (2.1.4)) as a BPM «sees» only those correctors which are placed downstream to it.

The LSQ method has been used in the Tevatron first turn correction [47]. In superconducting synchrotrons the orbit steering is of special importance because the beam losses cause the loss of the superconductivity. This means that the accelerator will have about one hour stop at every tuning step and is a serious problem. The automatization of the tuning by means of the LSQ algorithm has allowed for an orbit close to the designed orbit to be established after several iterations of the correction.

Another LSQ algorithm for first turn steering is described in [48].

The goal function is defined as

$$\Psi(\varepsilon_j^*) = \sum_{i=1}^n \left[(\eta_i^{\text{PUE}} - \eta_i^{\text{des}}) + \sum_{j=1}^k a_{ij} \varepsilon_j^* \right]^2 \rightarrow \text{Min}, \quad (14.2.5)$$

where

$$\varepsilon_j^* = \sqrt{\beta_j^{\text{COR}}} \varepsilon_j \quad (14.2.6)$$

are the «generalized» kicks.

In eq.(14.2.5), η^{des} denotes the desired centre of charge trajectory; n and k are the current numbers of used pickups and correctors. In the case when we lose the beam before the full turn to be carried out the current number of used pickups n is less than the total number of pickups N and the current number of switched on correctors k is less than the total number of available correctors K .

In practice there are limitations on the maximum allowed kicks in the correcting magnets

$$|\varepsilon_j| < \Delta. \quad (14.2.7)$$

Thus we face a constrained optimization problem [49].

In order to solve this problem the penalty function method has been used.

The general idea of the method of the penalty functions is to reduce the constrained optimization problem to a series of unconstrained problems. To do this we will add to our goal function (14.2.5) the so-called penalty function $\alpha(\varepsilon_j^*)$ which is chosen in such a way that it will «punish» the function $\Psi(\varepsilon_j^*)$ if the constraints (14.2.7) are broken. In [48] the following penalty function is used

$$\alpha(\varepsilon_j^*) = \sum_{j=1}^K \max(0, \varepsilon_j^{*2} - \Delta^2). \quad (14.2.8)$$

The following series of unconstrained optimization tasks is solved

$$\Psi'(\varepsilon_j^*, \mu_k) = \Psi(\varepsilon_j^*) + \mu_k \cdot \alpha(\varepsilon_j^*) \rightarrow \text{Min}, \quad (14.2.9)$$

where $\mu_k > 0$, $k = 1, 2, 3 \dots$ are parameters and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty. \quad (14.2.10)$$

14.3. Closed Bumps Algorithm. The classical method for global orbit correction by means of local orbit bumps can be applied also for first turn correction [49].

The local orbit bump is produced by three correcting dipoles (Fig.3).

Let n BPMs be places between the correctors.

Let « a » be the centre of charge deviation in the middle corrector. The height « a » can be used for the local orbit bump to be parametrized.

A kick ϵ_i centered in a point i produces changes in the centre of charge position and angle at another point s given by

$$\begin{aligned} \Delta x(s) &= \sqrt{\beta_i \beta_s} \sin \mu_{is} \epsilon_i, \\ \Delta x'(s) &= \frac{\sqrt{\beta_s}}{\beta_i} (\cos \mu_{is} - \alpha_s \sin \mu_{is}) \epsilon_i. \end{aligned} \quad (14.3.1)$$

We will want to produce a local bump. This means that if the point s is situated anywhere outside the bump, the effects of the three correctors should compensate each other:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \Delta x_i(s) &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \Delta x'_i(s) &= 0. \end{aligned} \quad (14.3.2)$$

It follows from (14.3.1), (14.3.2) that for s outside the bump

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sqrt{\beta_i} \epsilon_i \sin \mu_{is} &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \sqrt{\beta_i} \epsilon_i \cos \mu_{is} &= 0. \end{aligned} \quad (14.3.3)$$

The kick in the first correcting dipole should produce a deviation equal to « a » in the middle corrector. It should be therefore

$$\epsilon_1 = \frac{a}{\sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \mu_{12}}. \quad (14.3.4)$$

Given (14.3.4), (14.3.3) becomes a system of two equations with two unknowns ϵ_2 and ϵ_3 .

The solution is

$$\epsilon_2 = \frac{a \sin \mu_{12}}{\beta_2 \sin \mu_{12} \sin \mu_{23}} \quad (14.3.5)$$

and

$$\epsilon_3 = \frac{a}{\sqrt{\beta_2 \beta_3} \sin \mu_{23}}. \quad (14.3.6)$$

In [50] the following goal function is introduced

$$G(a) = \sum_{i=1}^n w_i^{\text{PUE}} (x_i^m - x_i^d + x_i^c)^2 + \sum_{j=1}^3 w_j^{\text{COR}} P_j(\epsilon_j). \quad (14.3.7)$$

In (14.3.7), x_i^m denotes again the measured deviation in the i -th BPM, x_i^d — the desired deviation. x_i^c is the deviation in the i -th BPM due to the three correctors and it can be easily calculated using the transfer matrices between the correctors and the monitor.

w^{PUE} is a weight associated with each monitor while w_j^c is a weight associated with each corrector.

$P(\epsilon)$ is a penalty function which punishes the goal function if the kicks are too big.

In particular, the penalty function can be taken as

$$P(a) = \begin{cases} k |\epsilon|, & \text{if } |\epsilon| > \epsilon_{\max} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14.3.8)$$

where $k > 0$ is a large constant.

$G(a)$ is a function of only one independent variable, a . It can be easily minimized using for example the simplex method.

In order for the entire circumference of the accelerator ring to be corrected the above algorithm should be applied iteratively. The ring is divided into overlapping closed bumps and the correction is repeatedly used taken into account the results from the previous steps.

The algorithm is proposed for SSC and has been largely used for SSC first turn and global closed orbit simulations.

14.4. Error Finding Methods. In the periods of machine assembling, initial tuning or upgrading relatively large errors can occur: launch errors in the position and slope of the center of charge of the injected beam, kick errors in the dipoles and misaligned quadrupoles and focus errors in the quadrupole gradients.

As the strengths of the correcting elements are limited it could be impossible to correct the centre of charge trajectory to the required extent. That is why a different approach to the beam steering has been developed [50,51].

In this approach we will rather search for the sources of big errors than try to correct them. After the places and magnitudes of such errors have been found one should carefully check the corresponding elements trying to uncover the physical bases of the errors.

The error-finding approach has been successfully used in SLAC for beam steering in the linear electron-positron collider SLC [50,51].

Two kinds of computer programs are used to determine the error candidates — modeling programs and error-simulating programs.

The modeling programs give the operator a mathematical model of the accelerator. They receive as input a full description of the accelerator elements (their location and strengths) and produce as output a file listing elements and corresponding transfer matrices and Twiss parameters.

Error-simulating programs calculate the effects on the beam parameters due to specific errors in the elements and generate simulated trajectories. To find the predicted trajectories this programs use the transfer matrices calculated by the modeling programs.

As a modeling program any lattice design program can be used.

For simplification the error-simulating programs describe errors introducing thin-lens elements in the lattice. For simulating of focusing errors thin-lens quadrupoles are inserted in the lattice quadrupoles and for simulating of kick errors thin-lens dipoles are inserted either in bending dipoles to describe field errors or in quadrupoles to describe alignment errors.

Two different kinds of error treatment exist:

A. Global Search. The method of global error search makes use of a powerful nonlinear optimization package. All the elements are suspected as possible sources of errors. Thin-lens elements describing errors are inserted in the elements. Then the optimization programs are used to find the settings of these thin-lens elements which will yield BPMs readings matching the measured trajectory. Those thin-lens elements which have nonzero strengths are the sites of possible errors.

B. Local Search. Only few of the elements are used as possible error sources. The operator has to make some guesses about the location of the errors and about the error-free regions. A highly-developed graphical interface can be very useful in this trial-and-error method. The operator display should be able to show a plot of the measured trajectory, desired trajectory and the difference

between both. It is clear that an error originates in the region where the differences grow up. After determining the error places the operator tries to adjust the strengths of the corresponding thin-lens elements so that the calculated trajectory lies close to the measured trajectory. Non-linear optimization programs are used again but due to the small number of independent variables the optimization problem is much more easy for solving.

Several expert systems have been developed to automate the use of the beam line correcting programs and to minimize the time necessary for line commissioning [52-54].

These are hybrid programs combining traditional expert systems with their capabilities for qualitative reasoning, modeling programs giving a mathematical model of the machine and optimization programs. Combining numerical algorithms with symbolic reasoning these hybrid expert systems systematically perform the specific procedures that a human expert follows in order to correct the beam line.

First of all they look for error-free regions where the discrepancies between the predicted and the measured trajectories are small. An assumption that every subregion between two adjacent error-free regions is a possible location of errors and that there is only one error element within each subregion is made. Then the described above error-finding procedures are used in order for the existence of beam line errors to be uncovered. Frames are usually used for representation of the domain knowledge. LISP is the preferable language for the expert system implementation.

This work was supported by Bulgarian Scientific Foundation, contract F-309.

REFERENCES

1. **Kolomensky A.A., Lebedev A.N.** — Theory of Cyclic Accelerators. Amsterdam, North-Holland Publishing Co, 1966.
2. **Bruck H.** — Accélérateurs circulaires de particules. Paris, Press Universitaires de France, 1966.
3. **Strollin P.** — Preprint CERN, ISR-TH/68-4, 1968.
4. **Gluckstern R.** — Part. Accel., 1978, v.8, p.203.
5. **Hamming R.W.** — Introduction to Applied Numerical Analysis. New York, McGraw-Hill, 1971.
6. **Resegotti L.** — Preprint CERN, ISR-MAG/68-30, 1968.
7. **Autin B., Bryant R.J.** — Preprint CERN, ISR-MA/71-36, 1971.
8. **Ando A., Endo E.** — Preprint KEK, 75-4, 1975.
9. **Guignard G.** — Preprint CERN, ISR-BOM/80-21, 1980.

10. **Waren J.L., Channell P.J.** — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1983, v.NS-30, No.4.
11. **Averill P.J.** — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1965, v.NS-12, p.899.
12. **Bovet C., Reich K.H.** — Preprint CERN, SI/Int/DI/69-9, 1969.
13. **Holtey G.** — Preprint CERN, Lab.2-DI-PA/Int. 73-3, 1973.
14. **Pegss S.** — Ph. D. Thesis, Cornell, 1981.
15. **Burnod L., D'Amico E.** — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1983, vol.NS-30, No.4.
16. **Guignard G., Marti Y.** — Preprint CERN, ISR-BOM-TH/81-32, 1981.
17. **Guignard G., Marti Y.** — Preprint CERN, LEP-TH/83-50, 1983.
18. **Bozoki E.** — Preprint CERN, PS/PSR/85-57, 1985.
19. **Martini M., Rinolfi L.** — Proceedings of EPAC, Rome, 1988, p.842.
20. **Riselada T.** — Preprint CERN, PS/87-90, 1987.
21. **Autin B., Marti Y.** — Preprint CERN, ISR-MA/73-17, 1973.
22. **Iselin Ch. F., Niederer J.** — Preprint CERN, LEP-TH/87-37, 1987.
23. **Bacconier Y.** — Preprint CERN, 65-35, 1965.
24. **Guignard G.** — Preprint CERN, SI/Int.DI/70-1, 1970.
25. **Guignard G.** — Preprint CERN, SI/Int.DI/70-2, 1970.
26. **Guignard G.** — Preprint CERN, 70-24, 1970.
27. **Press W. et al.** — Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 1989.
28. **Chung Y., Decker G., Evans K.** — Proceedings of IEEE Part. Accel. Conf., Washington, 1993.
29. **Dinev D.** — Preprint KFA-Julich, Jul-2406, 1980.
30. **Chung Y. et al.** — Preprint of ANL, LS-213, 1992.
31. **Dinev D., Vasilev P.** — Bulg. J. Phys., 1985, v.12, No.5, p.480.
32. **Simpson P.K.** — Artificial Neural Systems. NY, Pergamon Press, 1989.
33. **Bozoki E., Friedman A.** — Proceedings of EPAC, London, 1994, p.1589.
34. **Bozoki E., Friedman A.** — AIP conference proceedings, 1994, v.315.
35. **Zell A. et al.** — SNNS User Manual. Report 3/13 of the University of Stuttgart, 1993.
36. **Levine R. I., Drang D.E., Edelson B.** — AI and Expert Systems. McGraw-Hill Publishing, 1990.
37. **Brandt D., Verdier A.** — Proceedings of EPAC, Rome, 1988, p.654.
38. **Brandt D., Varlot F., Verdier A.** — Part. Accel., 1990, v.29, p.221.
39. **Bocchetta C., Wrulich A.** — Nucl. Instr. Meth., 1991, v.A300, p.223.
40. **Yu L.H. et al.** — Nucl. Instr. Meth., 1989, v.A284, p.268.
41. **Chung Y.** — Beam instrumentation workshop, Santa Fe, 1993.
42. **Dinev D.** — Nucl. Instr. Meth., 1985, v.A237, No.3, p.441.
43. **Dinev D. et al.** — J. Techn. Phys., 1986, v.56, No.6, p.1137.
44. **Dinev D.** — Preprint of KFA-Julich, Jul-2499, 1991.
45. **Bryant P.J.** — CERN Accelerator School, Gif-sur-Yvette, 1984, p.358.
46. **Koutchouk J.P.** — Preprint CERN, LEP-TH/89-2, 1989.
47. **Raya R., Russell A., Aukenbrandt C.** — Nucl. Instr. Meth., 1989, v.A242, p.15.
48. **Dinev D.** — Bulg. J. Phys., 1994, v.21, No.1.

- 49. **Paxson V., Peggs S., Schachinger L.** — Proceedings of EPAC, Rome, 1988, p.824.
- 50. **Sheppard J.C. et al.** — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1985, v.NS-32, p.2180.
- 51. **Lee M. et al.** — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1987, v.NS-34, p.536.
- 52. **Clearwater S.H., Lee M.J.** — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1987, v.NS-34, p.532.
- 53. **Lee M.J., Kleban S.** — Proceedings of EPAC, Rome, 1988, p.767.
- 54. **Weygard D.P.** — IEEE Trans. Nucl. Sci., 1987, v.NS-34, p.564.

КВАЗИУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЛЕГКИХ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ЯДЕР

О.М.Князьков

Санкт-Петербургский государственный университет, С.-Петербург

И.Н.Кухтина

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С.А.Фаянс

РНЦ «Курчатовский институт», Москва

В обзоре представлены полученные в последнее время экспериментальные данные по квазиупругому рассеянию легких нестабильных ядер на стабильных ядрах-мишенях. Даны описания микроскопических подходов к построению плотностей распределения нуклонов в ядрах и потенциалов взаимодействия частиц-снарядов с ядрами-мишенями. Проведен анализ сечений квазиупругого рассеяния для большой группы легких экзотических ядер. Обсуждаются проблема существования нейтронного и протонного гало в ядрах и другие особенности распределения ядерного вещества. Формулируются предложения по проведению новых экспериментов по квазиупругому рассеянию и другим реакциям с радиоактивными пучками.

A review is given of the recently obtained experimental data on quasi-elastic scattering of light unstable nuclei by stable target nuclei. Microscopic approaches, aimed to construct both the nucleon density distributions in nuclei and the projectile-target interaction potentials, are described. An analysis of the cross sections of quasi-elastic scattering is presented for the variety of light exotic nuclei. The existing of neutron or proton halo, as well as other peculiarities of the matter distributions in nuclei is discussed. Some possible future experiments on quasi-elastic scattering and other reactions with radioactive nuclear beams are suggested.

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное использование радиоактивных пучков в последнее десятилетие привело к установлению ряда необычных свойств легких экзотических ядер, т.е. ядер, удаленных от линии β -стабильности (см., например, обзоры [1—4] и ссылки в них). Анализ сечений взаимодействия изотопов

He, Li, Be с большим нейтронным избытком со стабильными ядрами-мишенями при промежуточных энергиях указал на наличие протяженного «хвоста» плотности распределения нейтронов. Особенно ярким этот эффект оказался для ядра ^{11}Li , что в соответствии с дополнительной информацией о сечениях фрагментации $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li} + 2n$ и импульсном распределении ядер ^9Li в этой реакции дало возможность утверждать о наличии у ядра ^{11}Li так называемого нейтронного гало. Есть подтверждения существования нейтронного гало и для ядер ^6He , ^8He , ^{11}Be . В работе [5] аналогичный феномен был обнаружен для ядра ^8B — ядра с протонным избытком. Дальнейшие исследования показали, что в этом случае речь может идти либо о протонном гало, либо о значительной протонной «шубе».

Эксперименты по упругому рассеянию легких экзотических ядер при энергиях от 20 до 100 МэВ/нуклон, с одной стороны, дополняют эксперименты по изучению реакций фрагментации, развала, передачи нуклонов, кулоновской диссоциации и др., с другой стороны, дают специфическую информацию о влиянии на сечение реакции потенциала взаимодействия экзотической частицы-снаряда с ядром-мишенью, а в микроскопическом анализе и информацию о плотности распределения вещества в экзотическом ядре. Таким образом, есть основания считать, что упругое рассеяние легких экзотических ядер может служить индикатором свойств нуклонного гало. Впервые соответствующие соображения были изложены в работе [6]. В обзоре [4] приведены различные методические исследования ожидаемых свойств потенциалов взаимодействия легких экзотических ядер и рассеяния их на стабильных ядрах-мишенях. Однако к моменту выхода из печати обзора [4] отсутствовали какие-либо надежные экспериментальные данные по упругому рассеянию легких экзотических ядер, поэтому реальные экспериментальные ситуации не нашли отражения в нем. Отметим также недавно появившиеся обзоры [7,8], в которых, в основном, анализируются свойства структуры легких экзотических ядер.

К настоящему времени на различных экспериментальных установках получены угловые распределения упругого рассеяния ^{11}Li на ^{28}Si при энергии 29 МэВ/нуклон [9], ^{11}Li на ^{12}C при энергии 60 МэВ/нуклон [10], ^{12}Be и ^{14}Be на ^{12}C при энергии 56 МэВ/нуклон [11] и ядер ^7Be и ^8B на ^{12}C при энергии 40 МэВ/нуклон [12]. Отметим, что во всех перечисленных случаях условия эксперимента таковы, что не отделяется вклад в угловые распределения упругого и неупругих процессов. В силу этого исследованные процессы можно назвать квазиупругим рассеянием. Помимо названных реакций квазиупругого рассеяния, в режиме обратной кинематики изучено упругое рассеяние ядер ^9Li и ^{11}Li с энергией 60 и 62 МэВ/нуклон соответственно на протонах [13] и ядер ^8He с энергией 73 МэВ/нуклон на протонах

[14]. Недавно измерены угловые распределения для упругого рассеяния ^{11}Li с энергией 75 МэВ/нуклон и ^8He с энергией 66 МэВ/нуклон на протонах [15]. Упругое рассеяние ^6He и ^8He на протонах при промежуточных энергиях исследовалось в [16,17]. Угловые распределения для упругого рассеяния ^{10}Be и ^{11}Be на протонах при энергиях 59,3 и 49,3 МэВ/нуклон соответственно были получены в [18].

При анализе этих реакций применялись различные теоретические подходы: стандартная оптическая модель с подгоночными параметрами [19], оптическая модель с потенциалами, вычисленными на микроскопической основе (см., например, [20]), глауберовское приближение [21]. В тех случаях (фолдинг-модель и глауберовское приближение), когда в основу анализа сечений рассеяния была заложена информация о плотности распределения вещества в ядре, эта плотность вычислялась в рамках различных ядерно-структурных моделей. Среди прочих подходов к решению этой задачи отметим метод функционала плотности [22], поскольку в рамках этого метода на единой основе вычисляются нейтронные и протонные плотности как для ядра-мишени, так и для частицы-снаряда.

Помимо угловых распределений упругорассеянных частиц, величиной, чувствительной к оптическому потенциалу, является полное сечение реакции σ_R . Для ряда легких экзотических ядер имеются экспериментальные данные по σ_R при различных энергиях.

Цель данного обзора — сделать анализ существующих экспериментальных данных по упругому рассеянию легких экзотических ядер и соответствующих полных сечений реакции. В первом разделе представлены различные теоретические подходы к описанию механизмов упругого рассеяния легких экзотических ядер и теоретические схемы вычисления плотностей распределения нейтронов и протонов в этих ядрах. Во втором разделе представлен анализ экспериментальных данных по квазиупругому и упругому рассеянию этих ядер, приведены результаты расчетов полных сечений реакции. В третьем разделе обсуждается проявление мягкой дипольной моды в связи с феноменом нуклонного гало. В заключении представлены основные результаты и выводы, рассмотрены дальнейшие возможности изучения свойств легких экзотических ядер с использованием экспериментов по упругому рассеянию и другим ядерным реакциям.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Анализ упругого рассеяния в рамках потенциального подхода естественно проводить, используя комплексный оптический потенциал. Общая теория оптического потенциала была развита Фешбахом в работах [23,24]. В этой теории обобщенный оптический потенциал описывается формулой:

$$V_{\text{opt}} = \langle \varphi_0 | V | \varphi_0 \rangle + \langle \varphi_0 | V \hat{Q} (E - H_{QQ})^{-1} \hat{Q} V | \varphi_0 \rangle. \quad (1)$$

Здесь φ_0 — волновая функция основного состояния сталкивающихся ядер, V — взаимодействие между частицей-снарядом и ядром-мишенью, $\hat{Q}$ — оператор-проектор точной волновой функции всей системы в подпространство неупругих и закрытых каналов, E — полная энергия системы частица-снаряд и ядро-мишень, H_{QQ} — проекция полного оператора Гамильтона всей системы в Q -подпространство. Если взаимодействие V представить в виде суммы эффективных нуклон-нуклонных сил, то первое слагаемое в (1) будет членом первого порядка по эффективным силам, а второе слагаемое будет содержать члены второго и более высокого порядков.

В рамках стандартной макроскопической модели все выражение (1) заменяется комплексным локальным и не зависящим от энергии потенциалом с параметрами, определяемыми из сравнения теоретических и экспериментальных угловых распределений упругорассеянных частиц. В микроскопическом подходе первое слагаемое в (1) вычисляется на основе информации об эффективных силах и плотности распределения вещества в ядрах, а второе слагаемое обычно опускается. Если эффективные силы вещественные, то второе слагаемое полностью определяет мнимую часть оптического потенциала и дает добавку к вещественной части потенциала. Эту добавку называют поляризационным потенциалом, поскольку она связана с эффектами возбуждения («поляризация остова») в процессе рассеяния сталкивающихся ядер. Ее учет при построении оптического потенциала означает выход за рамки приближения «замороженных» нуклонов.

Вычисление второго слагаемого в (1) является чрезвычайно сложной задачей, поэтому зачастую поляризационный потенциал либо вообще опускается, либо как-то параметризуется.

1.1. Макроскопическая оптическая модель. Стандартный потенциал феноменологической оптической модели имеет следующий вид:

$$U_{\text{opt}}(r) = -V_R f_R(r) - iW_v f_I(r) + 4ia_I W_s (d/dr) f_I(r) + 2(\hbar/m_\pi c)^2 \cdot 1/r \cdot (d/dr) V_{LS} f_S(r)(\mathbf{LS}) + V_{\text{coul}}(r), \quad (2)$$

$$R_i = r_i A^{1/3}, \quad f_i(r) = (1 + \exp((r - R_i)/a_i))^{-1},$$

$$i = R, I, LS. \quad (2a)$$

Здесь первое слагаемое — центральная часть вещественного потенциала, второе и третье — потенциалы объемного и поверхностного поглощения, следующее слагаемое — спин-орбитальный член. Последнее слагаемое в (2) обычно берется в виде кулоновского взаимодействия двух заряженных

сфер. Схема анализа сечений упругого и неупругого рассеяния с потенциалом (2) и с использованием процедуры подгонки с минимизацией χ^2 обладает определенной простотой. Но в случае легких экзотических ядер она редко приводит к успешному описанию экспериментальных данных. Это связано с тем, что в формуле (2) радиальная зависимость всех факторов фиксирована и является зависимостью Саксона — Вудса. Однако уже для нуклонов и α -частиц было показано [25,26], что форма потенциала, построенного на основе эффективных сил, отличается от формы Саксона — Вудса.

Тем не менее анализ упругого рассеяния легких экзотических ядер в рамках феноменологической оптической модели может иметь определенный смысл, поскольку позволяет судить о том, насколько свойства оптического потенциала экзотического ядра отличаются от свойств потенциала соседнего стабильного ядра (например, ^{11}Li от ^{11}C или ^6He от ^6Li). Некоторые результаты такого анализа будут представлены во втором разделе.

1.2. Микроскопическая оптическая модель. Рассмотрим взаимодействие двух составных частиц. В первом порядке по эффективным нуклон-нуклонным силам потенциал взаимодействия может быть представлен в виде суммы:

$$U(\mathbf{R}) = U^E(\mathbf{R}) + U^D(\mathbf{R}), \quad (3)$$

где $U^D(\mathbf{R})$ — «прямой» потенциал модели двойной свертки [19]:

$$U^D(\mathbf{R}) = \iint \rho^{(1)}(\mathbf{r}_1) V^D(\mathbf{s}) \rho^{(2)}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (4)$$

Здесь $V^D(\mathbf{s})$ — прямая компонента эффективного взаимодействия, а $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}$, $\rho^{(i)}(\mathbf{r}_i)$ — плотности сталкивающихся ядер ($i = 1, 2$). Основной вклад в «обменный» потенциал $U^E(\mathbf{R})$ дают эффекты однонуклонного обмена, которые могут быть описаны в формализме матрицы плотности [27]:

$$U^E(\mathbf{R}) = \iint \rho^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 + \mathbf{s}) V_E(\mathbf{s}) \rho^{(2)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{s}) \exp(i \mathbf{k}(\mathbf{R}) \mathbf{s} / \eta) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (5)$$

Это есть локализованная форма обменного члена. Здесь $V_E(\mathbf{s})$ — обменная компонента эффективного взаимодействия, $\rho^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — матрицы плотности сталкивающихся ядер ($i = 1, 2$):

$$\rho^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_k \phi_k(\mathbf{r}) \phi_k^*(\mathbf{r}'), \quad (6)$$

$\mathbf{k}(\mathbf{R})$ — локальный импульс, определяемый соотношением

$$k^2(\mathbf{R}) = (2m\eta/\hbar^2)(E - U(\mathbf{R}) - V_c(\mathbf{R})), \quad (7)$$

где

$$\eta = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}, \quad (7a)$$

A_i ($i = 1, 2$) — массовые числа ядер, а $V_c(\mathbf{R})$ — кулоновский потенциал. Расчет матрицы плотности по одночастичной формуле (6) довольно громоздок, поэтому для $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ обычно используется модифицированное слейтеровское приближение, апробированное при описании взаимодействия нуклонов, α -частиц и тяжелых ионов с ядрами [28]:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{s}) = \rho\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}\right) \hat{j}_1\left(k_{\text{eff}}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}\right)s\right). \quad (8)$$

Здесь $\hat{j}_1(x)$ — обменный коррелятор. При $s \rightarrow 0$, т.е. в приближении взаимодействия нулевого радиуса действия, $\hat{j}_1(x) \rightarrow 1$. Эффективный импульс k_{eff} учитывает граничные эффекты, и в бесконечной ядерной материи он совпадает с локальным импульсом Ферми. Выражение для $\hat{j}_1(x)$ и k_{eff} можно найти в [28]. Из формулы (5) следует, что для построения $U^E(R)$ необходимо использовать итерационную процедуру, поскольку искомая величина $U^E(R)$ входит также в правую часть этой формулы через $k(\mathbf{R})$ (см. формулы (7) и (3)).

Кратко остановимся на применении формализма матрицы плотности к анализу процессов рассеяния. В работе [29] этот формализм был впервые применен к описанию неупругого рассеяния протонов на деформированных ядрах. Безытерационная схема расчета обменного потенциала была развита в [30], что позволило в явном виде построить вклад обменных эффектов в нуклон-фононное взаимодействие [31] и применить формализм матрицы плотности к описанию неупругого рассеяния нуклонов и α -частиц на вибрационных ядрах [32—34]. В работах [35,36] безытерационная процедура была развита для выражения (5), и на этой основе проведен анализ эффектов ядерной радуги в упругом и неупругом рассеянии α -частиц на ядрах (см. также [37]). Однако, как показал соответствующий анализ, для более тяжелых частиц-снарядов, малых R и низких энергий более точной является

итерационная процедура, которая и использовалась в дальнейшем применении формализма матрицы плотности к описанию процессов рассеяния [20,38].

Чтобы в явном виде выделить изоспиновую зависимость потенциала, введем в рассмотрение изоскалярные $\rho_0^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и изовекторные $\rho_1^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ компоненты матриц плотности:

$$\rho_0^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_n^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \rho_p^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (9)$$

$$\rho_1^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_n^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \rho_p^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (10)$$

где $\rho_p^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $\rho_n^{(i)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — протонные и нейтронные компоненты матриц плотности сталкивающихся ядер соответственно. Подставляя (7)—(10) в (5), разлагая все функции в ряд по мультиполям и осуществляя фурье-преобразование, будем иметь для сферически-симметричной части обменного потенциала:

$$U^E(R) = 4\pi \int_0^\infty \sum_{\tau=0,1} G_\tau(R, s) V_\tau^E(s) j_0(k(R) s / \eta) s^2 ds, \quad (11)$$

$$G_\tau(R, s) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty f_\tau^{(1)}(t, s) f_\tau^{(2)}(t, s) j_0(tR) t^2 dt, \quad (12)$$

$$f_\tau^{(i)}(t, s) = 4\pi \int_0^\infty \rho_\tau^{(i)}(\mathbf{r}) \hat{j}(k_{\text{eff}}^{(i)}(\mathbf{r}) s) j_0(tr) r^2 dr. \quad (13)$$

В формуле (11) суммирование по τ означает суммирование по изоскалярному ($\tau = 0$) и изовекторному ($\tau = 1$) каналам, V_0^E и V_1^E — соответственно, изоскалярная и изовекторная обменные компоненты эффективного взаимодействия, $j_0(x)$ — сферическая функция Бесселя.

Формулы (11)—(13) являются исходными для расчета вкладов эффектов однонуклонного обмена в потенциал как в изоскалярном, так и в изовекторном каналах. Выделим из полного потенциала взаимодействия его изовекторную часть. Используя изовекторную компоненту $U_1^D(\mathbf{R})$ и соответствующее слагаемое с $\tau = 1$ из формулы (11), получим:

$$\begin{aligned}
 U_1(R) = & \iint \rho_1^{(1)}(\mathbf{r}_1) V_1^D(s) \rho_1^{(2)}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \\
 & + 4\pi \int_0^\infty G_1(R, s) V_1^E(s) j_0(k(R) s / \eta) s^2 ds,
 \end{aligned} \quad (14)$$

где $G_1(R, s)$ дается формулой (12) при $\tau = 1$. В формуле (14) первое слагаемое можно рассматривать как обобщение на случай различных распределений нейтронов и протонов в ядре известной формулы модели свертки [39]:

$$U_1(R) = T_{z1} T_{z2} / A_1 A_2 \cdot \iint \rho^{(1)}(\mathbf{r}_1) V_1^D(s) \rho^{(2)}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (15)$$

где T_{z1} и T_{z2} — значения третьей проекции вектора изотопического спина сталкивающихся ядер. Для протонов или нейтронов, взаимодействующих с ядром, формула (15) дает изобар-спиновый потенциал модели Лейна [40]. Второе слагаемое в (14) представляет собой вклад эффектов одно-нуклонного обмена. Нуклонный изобар-спиновый потенциал в формализме матрицы плотности рассматривался в ряде работ (см., например, [41,42]). Для взаимодействия составных частиц изоспин-изоспиновый потенциал с явным учетом обменных нуклон-нуклонных корреляций впервые был построен в работе [43], а его подробное исследование проведено в [44]. В силу малости изовекторного потенциала по сравнению с изоскалярным его влияние на сечение упругого рассеяния не столь существенно. Однако при сравнительном анализе упругого рассеяния двух изобар на одном и том же ядре-мишени с $N \neq Z$ необходимо учитывать изовекторную часть потенциала. Такого рода исследование было проведено [45] для описания упругого рассеяния ^3He и t при низких энергиях на ядре-мишени ^{14}C . Недиagonalная по заряду часть изоспин-изоспинового взаимодействия ответственна за зарядово-обменные переходы. В этой связи представляет интерес экспериментальное исследование зарядово-обменных процессов с легкими нейтроноизбыточными ядрами и сравнение соответствующих угловых распределений с результатами теории. Недавно были проведены первые такие исследования. В работе [46] изучались зарядово-обменные реакции на пучке ^{11}Li при энергии 65 МэВ/нуклон на мишенях ^1H и ^2H , а в [18] были измерены угловые распределения для возбуждения изобар-аналогового состояния в реакции $^6\text{He}(p, n)^6\text{Li}$. Отмечено [18], что совместный анализ упругого рассеяния и зарядово-обменных реакций позволит лучше определить распределение нейтронов в нейтроноизбыточных ядрах.

Ранее было показано (см., например, [26]), что результирующие потенциалы более чувствительны к способу учета эффектов однонуклонного обмена, чем к виду эффективного взаимодействия. В качестве эффективного нуклон-нуклонного взаимодействия будем рассматривать полное МЗУ-взаимодействие [47], основанное на G -матричных элементах взаимодействий Риды и Эллиота. Для изоскалярных и изовекторных компонент этого взаимодействия имеем

$$V_0^D(s) = 7999 \frac{\exp(-4s)}{4s} - 2134 \frac{\exp(-2,5s)}{2,5s}, \quad (16)$$

$$V_0^E(s) = 4631 \frac{\exp(-4s)}{4s} - 1787 \frac{\exp(-2,5s)}{2,5s} - 7,847 \frac{\exp(-0,7072s)}{0,7072s}, \quad (17)$$

$$V_1^D(s) = -4886 \frac{\exp(-4s)}{4s} + 1176 \frac{\exp(-2,5s)}{2,5s}, \quad (18)$$

$$V_1^E(s) = -1518 \frac{\exp(-4s)}{4s} + 828,4 \frac{\exp(-2,5s)}{2,5s} + 2,616 \frac{\exp(-0,7072s)}{0,7072s}. \quad (19)$$

Представленная в этом разделе схема построения действительной части оптического потенциала применялась в [20] к анализу квазиупругого рассеяния легких экзотических ядер. Результаты этого анализа будут представлены во второй части обзора. Упрощенный вариант рассмотренной схемы состоит в том, что в выражении (3) пренебрегают вторым слагаемым, но при этом к прямой части эффективных сил добавляют псевдопотенциал нулевого радиуса действия [48,49].

Другой широко распространенный вариант построения микроскопического потенциала состоит в том, что по-прежнему в формуле (3) ограничиваются первым слагаемым, но в качестве прямой части эффективных нуклон-нуклонных сил используют так называемое DDM3Y-взаимодействие [50,51]. Отметим, что в настоящее время для анализа квазиупругого рассеяния легких экзотических ядер применяется также подход, в котором в рамках формализма матрицы плотности используется DDM3Y-эффективное взаимодействие [53].

Полный оптический потенциал кроме реальной части должен включать в себя мнимую часть, ответственную за поглощение налетающей частицы в неупругие каналы. Существуют три основных способа учета потенциала поглощения в микроскопической оптической модели. В первом случае

используется стандартная форма мнимой части оптического потенциала с радиальной зависимостью Вудса — Саксона:

$$W^{(1)}(R) = W_{BC}(R), \quad (20)$$

где правая часть может содержать как объемный, так и поверхностный член (см. формулу (2)). В этом случае в схеме анализа экспериментальных данных возникает много подгоночных параметров, что может вносить неопределенность в его результаты. Другой подход состоит в том, что потенциал поглощения выбирается пропорциональным вычисленной реальной части:

$$W^{(2)}(R) = iN_W U(R), \quad (21)$$

где N_W — единственный подгоночный параметр в потенциале поглощения. Однако формула (21) означает, что «геометрия» вещественной и мнимой частей потенциала одна и та же, что может не отвечать физической реальности. Поэтому предлагается использовать для мнимой части оптического потенциала выражение [20]:

$$W^{(3)}(R) = i \left(N_W U(R) - \alpha R \frac{dU(R)}{dR} \right), \quad (22)$$

где $U(R)$ — вычисленный в микроскопическом подходе потенциал. В формуле (22) N_W и α — параметры, характеризующие, соответственно, объемную и поверхностную части потенциала поглощения.

1.3. Поляризационный потенциал. Кратко рассмотрим основные способы учета поляризационной добавки к потенциалу (вещественная часть второго слагаемого в формуле (1)). Эта добавка (будем обозначать ее ΔU) мала по сравнению с первым слагаемым для нуклонов на тех расстояниях от центра ядра, для которых сечение рассеяния чувствительно к оптическому потенциалу [49]. Для составных частиц-снарядов это может быть не так. Выше отмечалось, что в полном объеме вычислить ΔU по формуле (1) затруднительно, но вклад отдельных процессов в ΔU оценить можно. В обзоре [4] представлено описание расчета вклада процесса фрагментации $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li} + 2n$ в ΔU , в расчете использовалась сепарабельность матричных элементов связи каналов и ВКБ-приближение. Другой приближенный вариант оценки ΔU на основе формулы (1) дан в [54].

Если бы была известна левая часть соотношения (1), т.е. полный оптический потенциал, то ΔU можно было бы определить как разность:

$$\Delta U = \text{Re } V_{\text{opt}} - \langle \varphi_0 | V | \varphi_0 \rangle. \quad (23)$$

Второе слагаемое, входящее в правую часть (23), определено комментарием к формуле (1). В ряде работ ΔU было рассчитано на основе этой формулы, причем за $\text{Re } V_{\text{орт}}$ принимался потенциал, вычисленный в глауберовском приближении (см., например, [55]). Идейно близкий способ нахождения ΔU был использован в [56], где к рассчитанному фолдинг-потенциалу добавлялось ΔU , определяемое с помощью сплайн-процедуры из сравнения теоретических и экспериментальных угловых распределений.

Существуют различные феноменологические подходы к учету ΔU . Наиболее простой из них состоит в перенормировке микроскопического потенциала, вычисленного по формуле (1), т.е.:

$$U(R) + \Delta U(R) = N_v U(R). \quad (24)$$

В зависимости от конкретной системы и рассматриваемой энергии N_v может быть как больше, так и меньше единицы. Это означает, что поляризационный потенциал может быть как отталкивающим, так и притягивающим. Однако не всегда ΔU может быть учтено по формуле (24), поскольку радиальная зависимость второго слагаемого в (1) может отличаться от радиальной зависимости фолдинг-потенциала. Другой способ феноменологического учета ΔU состоит в том, что $\Delta U(R)$ считается пропорциональным производной от вудс-саксоновского формфактора [57]. Еще один способ учета ΔU заключается в том, что используется следующее представление [45,58]:

$$\Delta U(R, E) = \alpha(E)W_v(R, E) + \beta(E)W_s(R, E), \quad (25)$$

где α и β — свободные параметры.

1.4. Эйкональное приближение и теория Глаубера. Длительное время анализ рассеяния ядерных частиц промежуточных энергий проводился в рамках эйконального приближения и теории Глаубера [21,59]. По мере появления экспериментальных данных о реакциях с радиоактивными пучками эти подходы стали применяться к анализу взаимодействия легких экзотических ядер со стабильными мишенями, а также экспериментов с инверсной кинематикой. В работе [60] впервые теория Глаубера была использована для анализа полных сечений взаимодействия ^{11}Li при энергии 790 МэВ/нуклон с различными ядрами-мишенями. Был сделан вывод о существовании протяженного «хвоста» нейтронной плотности в ^{11}Li . В работе [61] глауберовское приближение использовалось для анализа зарядово-обменных реакций, а в [62] изучалось упругое рассеяние легких эк-

зотических ядер. Четырехтельный подход в сочетании с теорией Глаубера был развит в [63], а в работе [64] был установлен нижний энергетический предел корректного применения глауберовского приближения — 30 МэВ/нуклон.

Рассмотрим кратко формализм эйконоального приближения и теории Глаубера. Стандартное выражение для сечения и амплитуды рассеяния (см., например, [4]) в эйконоальном приближении имеет вид

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = |F(\Theta)|^2, \quad (26)$$

$$F(\Theta) = f_c(\Theta) + ik \int_0^\infty b j_0(qb) \exp(i\chi_c(b))(1 - \exp(i\chi_0(b))) db, \quad (27)$$

$$q = 2k \sin(\Theta/2). \quad (27a)$$

В этих формулах $f_c(\Theta)$ — кулоновская амплитуда рассеяния, k — импульс относительного движения, $j_0(x)$ — функция Бесселя, интегрирование в (27) проводится по прицельному параметру b , $\chi_c(b)$ и $\chi_0(b)$ — эйконоальные кулоновская и ядерная фазы соответственно:

$$\chi_0(b) = -\frac{1}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\sqrt{b^2 + z^2}) dz, \quad (28)$$

$$\chi_c(b) = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\pi v} \ln(kb). \quad (29)$$

При промежуточных энергиях ядерный потенциал U может быть выражен через двухчастичную нуклон-нуклонную матрицу переходов (t -матрицу). Для нуклон-ядерного и ядро-ядерного рассеяния имеем

$$U_{NA}(R) = \langle t_{pn} \rangle \rho_n(R) + \langle t_{pp} \rangle \rho_p(R), \quad (30)$$

$$U_{A_1 A_2}(R) = \int \langle t_{NN} \rangle \rho_1(R - r') \rho_2(r') dr'. \quad (31)$$

Усредненная t -матрица обычно параметризуется через сечение нуклон-нуклонного рассеяния. Поскольку в потенциалы явно входят плотности распределения вещества в сталкивающихся ядрах, появляется возмож-

ность извлечения информации о распределении вещества при использовании данного формализма в анализе упругого рассеяния.

Другой подход в применении формул (26)—(27) состоит в том, что ядерный потенциал не вводится явно, а эйкональная фаза выражается через так называемую профильную функцию [4] γ_{NN} , которая является фурье-образом нуклон-нуклонной амплитуды рассеяния:

$$\gamma_{NN} = \frac{1}{2\pi i k_{NN}} \int \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{b}) f_{NN}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \quad (32)$$

Использование разложений теории многократного рассеяния приводит к известным выражениям для амплитуды рассеяния в теории Глаубера. Для амплитуды нуклон-ядерного рассеяния имеем

$$F_{NA}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int \exp i\mathbf{q}\mathbf{b} \left(1 - \prod_{j=1}^A (1 - \gamma(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)) \right) |\Psi_A|^2 d^2b d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A. \quad (33)$$

Здесь $\gamma(\mathbf{b})$ — профильная функция, а Ψ_A — волновая функция ядра-мишени в основном состоянии. Амплитуда ядро-ядерного рассеяния является обобщением формулы (33):

$$F_{AB}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int \exp i\mathbf{q}\mathbf{b} \left(1 - \prod_{j=1}^A \prod_{n=1}^B (1 - \gamma(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j + \boldsymbol{\tau}_n)) \right) \times \\ \times |\Psi_A|^2 |\Psi_B|^2 d^2b d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_A d\mathbf{t}_1 \dots d\mathbf{t}_B. \quad (34)$$

Здесь Ψ_A и Ψ_B — волновые функции основного состояния сталкивающихся ядер. Расчет сечений упругого рассеяния с непосредственным применением формул (33) и (34) затруднителен. Различные приближения, используемые для выражений (33) и (34), анализируются в работе [65]. Там же излагаются результаты оценки многократных интегралов теории Глаубера методом Монте-Карло.

1.5. Учет неупругого рассеяния. Стандартный способ описания неупругого рассеяния в том случае, когда упругое рассеяние анализируется в рамках макроскопической оптической модели, состоит в том, что в качестве формфактора неупругого перехода используется следующее выражение [19]:

$$F(R) = \beta_{\lambda} R_R V \frac{df_R(R)}{dR} + i \beta_{\lambda} R_I W \frac{df_I(R)}{dR}. \quad (35)$$

Причем деформационные длины вещественного и мнимого потенциала берутся одинаковыми:

$$\beta_{\lambda} R_R = \beta_{\lambda} R_I. \quad (36)$$

В формуле (35) $f_i(R)$ ($i = R, I$) — обычный вудс-саксоновский радиальный формфактор, а λ — переданный момент. Используя борновское приближение с искаженными волнами или метод связанных каналов, можно на основе формфактора $F(R)$ рассчитать сечение неупругого рассеяния.

Если анализ упругого рассеяния проводится в рамках микроскопической оптической модели, естественно использовать в (35) вместо производных от феноменологических потенциалов производные от микроскопического оптического потенциала. Более последовательным представляется подход, в котором формфакторы неупругих переходов строятся на основе переходных плотностей и эффективных сил с учетом обменных нуклон-нуклонных корреляций в формализме матрицы плотности [36]. В этом случае описание упругого и неупругого рассеяний оказывается не только согласованным, но и появляется возможность апробации переходных плотностей, построенных в микроскопических ядерно-структурных моделях, в анализе неупругого рассеяния. Для легких экзотических ядер это особенно важно в связи с предсказанием существования для них (например, для ^{11}Li) мягкой моды возбуждения [66].

1.6. Нуклонные плотности. Распределения плотности нуклонов в основных состояниях сталкивающихся ядер и формфакторы переходов, особенно для низколежащих коллективных состояний, которые могут играть заметную роль через эффекты связи каналов, необходимы при анализе квазиупругого рассеяния. Для этой цели лучше всего было бы использовать данные других экспериментов. Например, протонные распределения могут быть извлечены с хорошей точностью из электронного рассеяния. Однако такие данные имеются только для ограниченного числа стабильных ядер. Что касается нейтронных плотностей, то для них вообще не существует данных, близких по точности к протонным. Поэтому необходимо привлекать теоретические модели. Для легких экзотических ядер, в которых важны кластерные степени свободы и эффекты близости к трехчастичным порогам, используются модели, основанные на явном выделении нескольких главных кластеров с введением эффективного взаимодействия между ними, взятого из независимых экспериментов. Например, для ^6He , рассматриваемого как трехтельная система $\alpha + n + n$, вводятся $\alpha - n$ - и $n - n$ -взаимо-

действия, а затем уравнение Шредингера решается методом Фаддеева, разложением по K -гармоникам, вариационным методом, и т.п. [67]. Трудности такого подхода связаны с приближенным учетом принципа Паули и «замороженностью» кластеров, свойства которых считаются не меняющимися при возбуждении или развале системы. В микроскопических кластерных моделях [68,69] обменные эффекты, возникающие из-за антисимметризации полной волновой функции, учитываются строго путем вычисления соответствующих матричных элементов нуклон-нуклонного взаимодействия, входящего в гамильтониан системы. Преимущество таких моделей состоит в том, что с одним и тем же эффективным NN -взаимодействием можно пытаться воспроизвести свойства отдельных кластеров на больших расстояниях друг от друга (т.е. свойства основных и возбужденных состояний реальных ядер, комбинация которых при слиянии может образовать рассматриваемую систему), фазы их взаимного рассеяния и включить в рассмотрение эффекты перестройки кластеров на малых относительных расстояниях. В практических применениях пока еще недостаточная мощность компьютеров заставляет существенно ограничивать число учитываемых базисных конфигураций в этих моделях. Эту трудность до некоторой степени позволяет обойти предложенный недавно подход к решению многонуклонного уравнения Шредингера, названный стохастическим вариационным методом [70]. Он использует коррелированный гауссовский базис и основан на методе проб и ошибок для выбора наиболее важных конфигураций, что позволяет предотвратить «взрывной» характер роста размерности базиса с повышением точности расчетов. В самосогласованных моделях типа среднего поля (метод Хартри — Фока — Боголюбова — HFB) принцип Паули строго выполняется и в известной мере учитываются эффекты перестройки при переходе от одного ядра к другому (например, при изменении числа нуклонов на 1—2 единицы, что особенно важно в легких ядрах), а в формировании возбужденных состояний, описываемых в рамках (квазичастичного) приближения случайных фаз (RPA), строго говоря, принимают участие все нуклоны, т.е. ядерная система «разморожена». Однако этот подход позволяет описать только специфические состояния (частично-дырочные, парно-вибрационные), но не состояния кластерной природы и трехчастичную динамику, включая сложные каналы распада. Тем не менее при описании квазиупругого рассеяния, когда фактически необходимо знать только плотности основных состояний, представляется заманчивым применить метод HFB, поскольку он позволяет на единой основе, с одним и тем же набором параметров получить нуклонные распределения для произвольной комбинации сталкивающихся ядер (исключая, конечно, самые легкие). Такой подход был применен в [20], и здесь мы его опишем в некоторых деталях.

В работе [20] использовался метод функционала плотности, применение которого опирается на теорему Хоенберга — Кона [71] и на

квазичастичный формализм Кона — Шема [72], допускающий введение квазичастичного гамильтониана со свободным оператором кинетической энергии, в котором эффективная масса нуклона m^* совпадает с пустотной массой m ($m^*/m = 1$). Плотность нуклонов ρ представляется суммой по заполненным одночастичным орбиталам, т.е. оболочечной суммой, минимизирующей энергию системы. Квазичастичный спектр и волновые функции вычисляются в самосогласованном среднем поле, являющемся первой функциональной производной от полной энергии по соответствующей плотности, а эффективное взаимодействие находится как вторая функциональная производная. Такой подход можно рассматривать как одну из версий самосогласованной теории конечных ферми-систем [73—75], имеющей много общего с методом HFB, оперирующим зависящими от плотности эффективными силами [76]. Основная проблема связана с выбором параметризации функционала, пригодного для практических применений. Одна из форм была предложена в [22], где зависимость от ρ вводится через дробно-линейные функции, а поверхностные эффекты — через силы конечного радиуса.

Один из наборов параметров функционала, успешно используемый для описания свойств ядер, приведен в работе [77]. Распределения нейтронных и протонных плотностей, а также их разностей в изотопах лития с массовым числом $A = 6, 7, 8, 9, 11$, рассчитанные в методе функционала плотности с параметрами из [77], использовались в [44] для анализа изоскалярных и изовекторных оптических потенциалов в модели двойной свертки с эффективным МЗУ-взаимодействием при рассеянии изотопов лития на различных мишенях. Разность среднеквадратичных радиусов $\Delta r_{np} = \langle r_n \rangle^{1/2} - \langle r_p \rangle^{1/2}$ растет монотонно от практически нулевого значения в ${}^6\text{Li}$ до 0,52 фм в ${}^9\text{Li}$, и резко возрастает в ${}^{11}\text{Li}$, достигая 1,02 фм, что является индикатором появления нейтронного гало. Поведение нуклонных плотностей в ${}^{11}\text{Li}$ представлено на рис.1, где показаны также распределения для «экзотического» ядра ${}^8\text{B}$. Они получены по методу функционала плотности с тем же набором параметров. Именно эти плотности использовались в [20] при анализе квазиупругого рассеяния. Соответствующие среднеквадратичные радиусы приведены в табл.1.

Из этих расчетов для ${}^{11}\text{Li}$ получено $\Delta r_{np} = 1,02$ фм, что подтверждает наличие длинного «хвоста» (нейтронного гало) у этого ядра, обнаруженного как экспериментально [60,78,79], так и теоретически (см., например, [67,80]). Расчеты по методу HF [80] дали значение $\langle r_m^2 \rangle^{1/2} = 2,846$ фм, а для зарядового радиуса $\langle r_{ch}^2 \rangle^{1/2} = 2,249$ фм. Свертка точечных распреде-

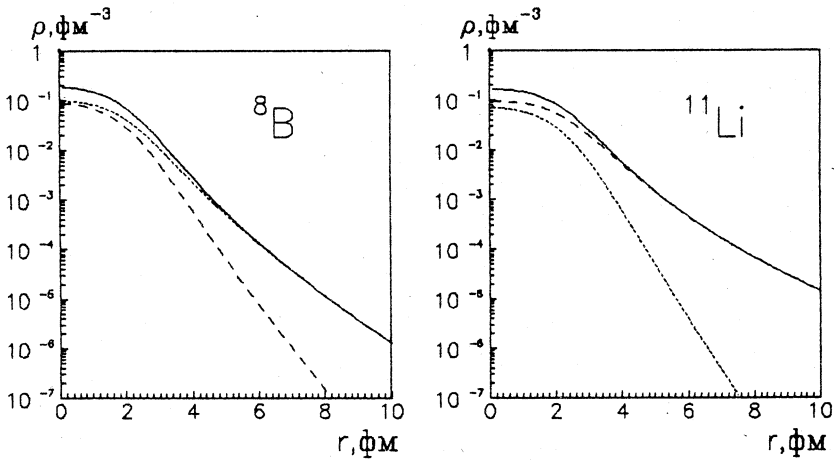


Рис.1. Плотности распределения нейтронов (штриховые линии), протонов (пунктир) и материи (сплошные линии), вычисленные по методу функционала плотности [20]

лений плотности, показанных на рис.1, с зарядовыми нуклонными формфакторами дает для среднеквадратичного зарядового радиуса ^{11}Li значение $\langle r_{ch}^2 \rangle^{1/2} = 2,344$ фм. В трехчастичных кластерных моделях по методу уравнений Фаддеева или гиперсферических гармоник среднеквадратичный радиус материи ^{11}Li получается в пределах от 2,94 до 3,39 фм, в зависимости от используемого взаимодействия [67]. Из эксперимента значе-

Таблица 1. Среднеквадратичные радиусы некоторых ядер, вычисленные по методу функционала плотности (фм)

Ядро	$\langle r_n^2 \rangle^{1/2}$	$\langle r_p^2 \rangle^{1/2}$	$\langle r_m^2 \rangle^{1/2}$	Δr_{np}
^7Be	2,237	2,549	2,420	-0,312
^8B	2,190	2,680	2,507	-0,490
^{11}Li	3,255	2,235	3,011	1,020
^{11}C	2,326	2,456	2,398	-0,130
^{12}C	2,387	2,406	2,396	-0,019
^{28}Si	2,953	2,982	2,967	-0,029

ния эффективного радиуса $\langle r_m^2 \rangle^{1/2}$ и даже сами распределения материи пытаются извлечь, анализируя данные по полным сечениям реакций на различных мишенях при различных энергиях в рамках моделей глауберовского типа. Таким методом для ^{11}Li было получено $\langle r_m^2 \rangle_{\text{exp}}^{1/2} = (3,10 \pm 0,17)$ фм

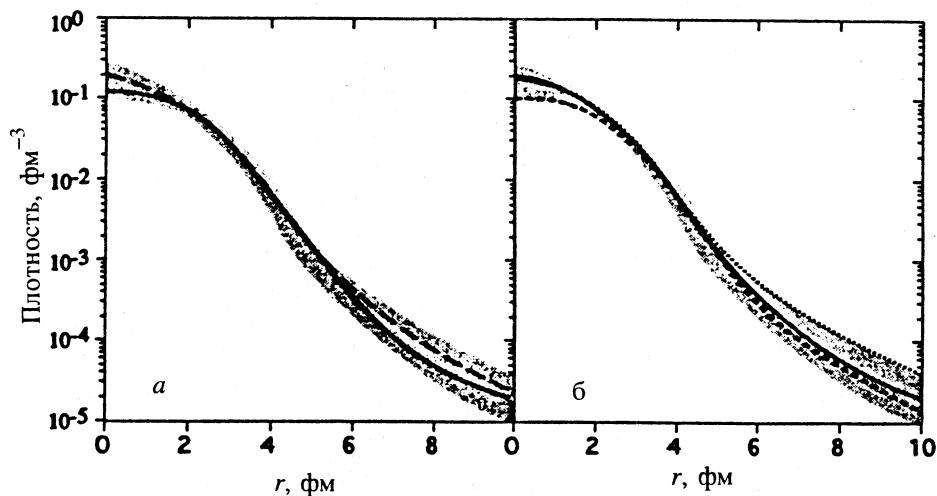


Рис.2. Плотность распределения нуклонов в ^{11}Li , извлеченная из экспериментов по измерению полных сечений взаимодействия на разных мишенях и при различных энергиях [79]. Затемненная область показывает коридор ошибок. Штриховая и сплошная линии получены в предположении, что нейтроны гало находятся на $1p$ - или $2s$ -орбиталях соответственно. Точечная кривая — расчет по методу HF [80] с подгонкой энергии отделения нейтронов к эксперименту

[78], а в работе [79] — профиль плотности, показанный на рис.2. Распределение материи для ^{11}Li , найденное по методу функционала плотности и приведенное на рис.1, находится в хорошем согласии с этими результатами.

Для ядра ^8B по методу функционала плотности получено $\Delta r_{np} = -0,49$ фм, что близко к значению $-0,52$ фм, вычисленному в рамках кластерного подхода на основе метода резонирующих групп в [69] и к значению $-0,42$ фм, полученному на основе метода генераторной координаты в [68]. С другой стороны, это значение Δr_{np} по абсолютной величине существенно больше (в полтора раза), чем найденное в [12], где делается вывод об отсутствии протонного гало у ^8B . Что касается экспериментальных данных для этого ядра, то в первых измерениях на ускорителе в Беркли [78] было получено «нормальное» значение $\langle r_m^2 \rangle^{1/2} = (2,39 \pm 0,04)$ фм, типичное для ядер p -оболочки, однако в более поздних измерениях квадрупольного момента полу-

чено значение 2,71 фм [5]. Расчет по методу функционала плотности дает промежуточное значение $\langle r_m^2 \rangle^{1/2} = 2,507$ фм.

Наконец, для ядра ${}^7\text{Be}$ по методу функционала плотности получено $\Delta r_{np} = -0,31$ фм, что по абсолютной величине существенно меньше, чем для ${}^8\text{B}$, но тем не менее позволяет говорить о существовании протонной «шубы» и в этом ядре. Отметим, что для ${}^7\text{Be}$ это значение Δr_{np} по абсолютной величине также оказывается больше, чем в [12].

Сказанное хорошо иллюстрирует рис.1. Наиболее ярко выражен «хвост» нейтронного распределения в экзотическом ядре ${}^{11}\text{Li}$, а также отчетливо видно, что протонная плотность в ${}^8\text{B}$ существенно превышает нейтронную при $r > 3$ фм. Никаких особенностей не наблюдается в «нормальных» ядрах ${}^{11,12}\text{C}$ и ${}^{28}\text{Si}$. Зарядовые радиусы для ${}^{12}\text{C}$ (2,541 фм) и ${}^{28}\text{Si}$ (3,093 фм), рассчитанные с тем же функционалом плотности, находятся в разумном согласии с экспериментальными значениями 2,471(6) и 3,086(18) фм соответственно [81].

2. АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

2.1. Угловые распределения

2.1.1. Общая характеристика экспериментальных данных по рассеянию. Как отмечалось во введении, проводились эксперименты двух типов по рассеянию легких экзотических ядер: исследовалось их рассеяние на составных ядрах (в качестве таких мишеней, в основном, выбирались ядра ${}^{28}\text{Si}$ и ${}^{12}\text{C}$) и изучалось в режиме инверсной кинематики рассеяние легких экзотических ядер на протонах. Измерение угловых распределений в реакциях с радиоактивными пучками является трудной экспериментальной задачей. К настоящему времени угловые распределения для рассеяния легких экзотических ядер на составных мишенях получены лишь в угловом диапазоне до 20° с довольно большими погрешностями для больших углов рассеяния. Кроме того, вклад неупругих процессов, связанных с возбуждением как ядра-мишени, так и частицы-снаряда, не отделялся от сечений упругого рассеяния.

В случае рассеяния легких экзотических ядер на протонах (эксперименты в режиме инверсной кинематики) доступный измерениям угловой диапазон значительно шире — до 65° . При этом измеряются сечения чисто упругого рассеяния, а в отдельных случаях получены угловые распределения для неупругого рассеяния с возбуждением частицы-снаряда ${}^8\text{He}$ (см. п. 2.1.5).

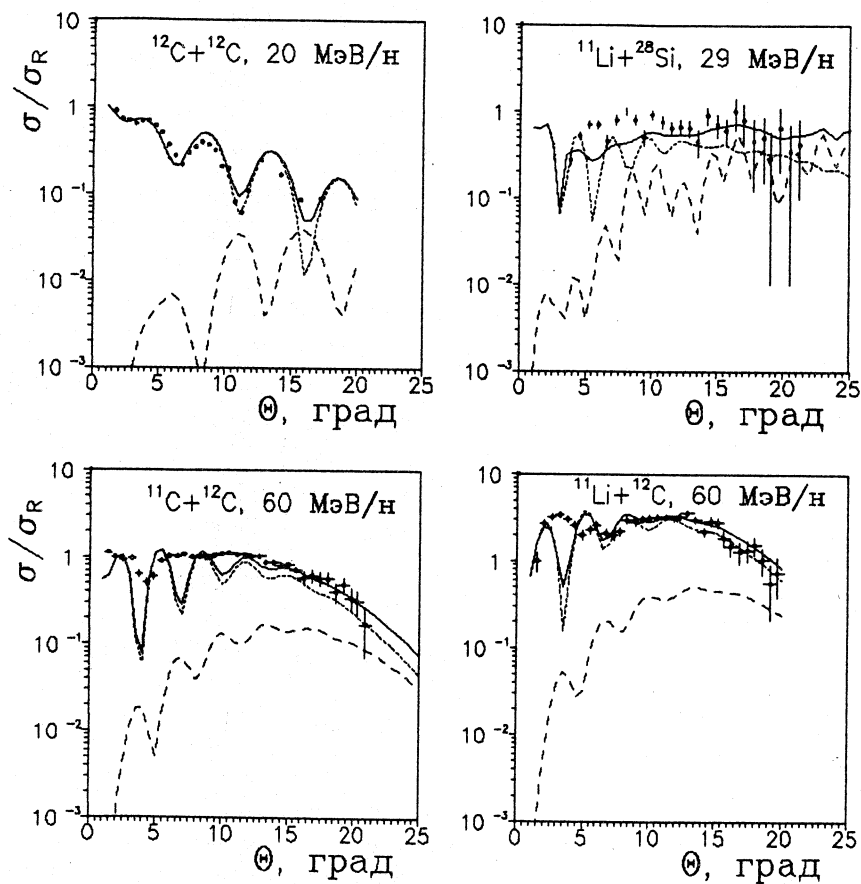


Рис.3. Сечения квазиупругого рассеяния легких ядер. Приведены экспериментальные точки с погрешностями, сплошная линия — сумма сечений упругого и неупругого рассеяния, точечная — упругое, пунктирная — неупругое рассеяние

2.1.2. $^{11}\text{Li} + ^{28}\text{Si}$, $E/A = 29$ МэВ/нуклон. Измерения угловых распределений ядер ^{11}Li , упругорассеянных на ядре-мишени ^{28}Si при энергии $E/A = 29$ МэВ/нуклон, а также ^7Li при энергии $E/A = 25,4$ МэВ/нуклон проведены в [9]. На рис.3 представлены экспериментальные данные с соответствующими погрешностями для частицы-снаряда ^{11}Li . Видно, что в данном угловом диапазоне отношение σ/σ_R для ^{11}Li почти постоянно и близко к единице, в то время как для стабильных частиц-снарядов это отношение

Таблица 2. Параметры оптических потенциалов и σ_R для ${}^7\text{Li}$, ${}^{11}\text{Li}$, взаимодействующих с мишенью ${}^{28}\text{Si}$

Ядро-снаряд	${}^7\text{Li}$	${}^7\text{Li}$	${}^{11}\text{Li}$
N	1	2	1
V_R , МэВ	226,75	114,2	204,48
r_R , фм	1,286	1,286	0,585
a_R , фм	0,853	0,853	1,737
W_v , МэВ	37,26	29,75	8,23
r_I , фм	1,739	1,739	2,18
a_I , фм	0,809	0,809	0,425
$\langle r_R^2 \rangle^{1/2}$	4,38	4,38	6,604
$\langle r_I^2 \rangle^{1/2}$	5,08	5,08	5,36
σ_R , мб	1820	1700	1445,2

следует дифракционной картине и быстро спадает по величине (см., например, экспериментальные данные для ${}^7\text{Li}$ в [9]).

Анализ квазиупругого рассеяния ${}^{11}\text{Li}$ на ${}^{28}\text{Si}$ проводился в рамках оптической модели с феноменологическим [9] и микроскопическими потенциалами [9,20]. В табл.2 даны параметры оптического потенциала, полученные из феноменологического анализа упругого рассеяния ${}^7\text{Li}$ и ${}^{11}\text{Li}$ на ${}^{28}\text{Si}$. Видно, что для ${}^7\text{Li}$ имеются два набора разумных значений параметров. Однако для описания ${}^{11}\text{Li}$ такие значения найти не удалось.

Более последовательный подход к анализу квазиупругого рассеяния ${}^{11}\text{Li}$ на ${}^{28}\text{Si}$ состоит в построении микроскопических оптических потенциалов. Этот подход был реализован в работах [9,20]. Приближенная версия микроскопического подхода к анализу рассеяния ${}^{11}\text{Li}$ на ${}^{28}\text{Si}$ использована в работе [9]. Микроскопические потенциалы рассчитаны на основе DDM3Y эффективного взаимодействия без явного учета эффектов однонуклонного обмена, при этом плотности распределения ядерного вещества построены в рамках стандартной схемы Хартри — Фока с эффективными силами Скирма-2 [76].

Эти же экспериментальные данные анализируются в работе [20]. На рис.3 представлены результаты расчета сечений рассеяния в формализме матрицы плотности (см. п.1.2) с использованием нейтронных и протонных плотностей, построенных по методу функционала плотности (рис.1), причем потенциал поглощения брался в виде (24). Для апробации данного теоретического подхода в аналогичной схеме был проведен анализ рассеяния в системе двух стабильных ядер $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ при энергии $E/A = 20$ МэВ/нуклон. Видно (см. рис.3), что качество описания экспериментальных данных по квазиупругому рассеянию ^{12}C на ^{12}C [82] с учетом неупругих процессов достаточно хорошее.

Качество описания угловых распределений для ^{11}Li можно считать вполне удовлетворительным: в целом воспроизводится величина σ/σ_R и плавный характер зависимости σ/σ_R от угла рассеяния. Плотности всех ядер — снарядов и мишеней (как отмечалось в п.1.2) — рассчитываются в рамках одной и той же теоретической схемы. Поскольку кривые, представленные на рис.3, соответствуют нейтронным и протонным плотностям ^{11}Li , интегральные характеристики которых даны в табл.1, можно сделать вывод о том, что данный микроскопический анализ подтверждает гипотезу о существовании у ядра ^{11}Li нейтронного гало.

Вклад неупругих процессов с возбуждением состояния 2_1^+ в ядре-мишени ^{28}Si при $E_x = 1,78$ МэВ и в ^{12}C при $E_x = 4,44$ МэВ (штриховые кривые на рис.3) вычислялся с использованием неупругого формфактора в виде (37) при условии (38), при этом значения деформационных длин брались в соответствии со значениями $B(E2)$ из [83] и [84] для ^{28}Si и ^{12}C соответственно. Расчеты угловых распределений для упругого и неупругого рассеяния проводились по специально модифицированной [20] версии программы ECIS-88 [85]. Видим, что вклад неупругих процессов существен только при больших углах рассеяния и практически не влияет на положение и величину первых максимумов и минимумов. Сплошные кривые на рис.3 соответствуют некогерентной сумме сечений упругого и неупругого рассеяния.

Подводя итоги анализа квазиупругого рассеяния ^{11}Li на ^{28}Si при энергии $E/A = 29$ МэВ/нуклон, можно сделать следующие выводы. Макроскопическая оптическая модель не приводит к разумному описанию экспериментальных данных со стандартным набором значений параметров оптического потенциала. В то же время два различных микроскопических подхода дают одинаковое, вполне удовлетворительное качество описания экспериментальных угловых распределений. Из обоих микроскопических описаний следует подтверждение гипотезы о существовании у ^{11}Li нейтрон-

ного гало. Однако открытым остается вопрос о расхождении теории с экспериментом в области углов рассеяния $\Theta = 6^\circ \div 10^\circ$. В недавно появившейся работе [86] предпринята еще одна попытка микроскопического анализа квазиупругого рассеяния ^{11}Li на ^{28}Si при $E/A = 29$ МэВ/нуклон, однако улучшения качества описания эксперимента достичь не удалось.

2.1.3. $^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C}$, $^{11}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $E/A = 60$ МэВ/нуклон. Квазиупругое рассеяние изобар ^{11}Li и ^{11}C на мишени ^{12}C при энергии $E/A = 60$ МэВ/нуклон изучалось в работе [10]. Соответствующие экспериментальные данные вместе с погрешностями представлены на рис.3. Качество экспериментальных данных несколько лучше, чем в случае рассеяния ^{11}Li на ^{28}Si . По сравнению с рассеянием ^{11}Li на ^{28}Si отношение σ/σ_R для мишени ^{12}C имеет более ярко выраженную структуру при малых углах рассеяния и быстро спадает по величине, начиная с угла рассеяния $\Theta = 14^\circ$. Сравнивая угловые распределения для изобар ^{11}Li и ^{11}C , можно видеть, что формы угловых распределений различны при малых углах рассеяния ($\Theta \sim 4^\circ$), σ/σ_R для ^{11}Li в $2 \div 3$ раза больше по величине, чем для ^{11}C .

Анализ квазиупругого рассеяния ^{11}C и ^{11}Li на ^{12}C проводился в рамках различных моделей: макроскопической оптической модели [87,88], фолдинг-модели [10,20,53], глауберовского и эйконального приближений [63—65,89—91]. В табл.3 представлены значения параметров оптического потенциала, полученные в [87] для изобар ^{11}C и ^{11}Li , рассеянных ядром-мишенью ^{12}C . Оптимальное (далеко не удовлетворительное) описание экспериментальных угловых распределений ^{11}Li в рамках стандартной оптической модели приводит к аномально большому (в сравнении с ^{11}C и другими систематиками потенциалов) значению диффузности $a_R = 1,907$ фм, в то время как для набора из табл.3 квазиупругое рассеяние ^{11}C описывается вполне удовлетворительно. Другая попытка воспроизвести в [87] экспериментальные угловые распределения ^{11}Li связана с введением в действительную и мнимую части потенциала поверхностных членов, параметры которых приведены в третьей строке табл.3. Использование дополнительных шести параметров позволило достаточно хорошо описать сечения квазиупругого рассеяния, при этом возникает вопрос о смысле этих дополнительных параметров. Отметим, что сделанный в этой работе вывод о том, что рассеяние ^{11}Li на ^{12}C при $E/A = 60$ МэВ/нуклон свидетельствует о явлении рефракции, не проявлявшемся с такой силой ранее в рассеянии тяжелых ионов, опровергается в работе [92], где делается вывод о том, что результаты анализа [87], наоборот, свидетельствуют о более рефрактивном поведении

Таблица 3. Параметры оптических потенциалов и σ_R для ^{11}C и ^{11}Li , взаимодействующих с мишенью ^{12}C

Ядро-снаряд	^{11}C	^{11}Li	^{11}Li
N	1	1	2
V_R , МэВ	40,0	40,0	40,0
r_R , фм	0,990	0,810	1,015
a_R , фм	0,981	1,907	1,055
W_v , МэВ	25,92	25,09	20,73
r_I , фм	0,986	1,226	1,077
a_I , фм	0,407	0,396	0,457
σ_R , мб	800,6	1180,8	1248
V_{Rs}			2,26
r_{Rs}			1,950
a_{Rs}			1,201
W_s			1,18
r_{Is}			1,646
a_{Is}			0,544

рассеяния ^{11}C , чем ^{11}Li . Наилучшим кандидатом на апробацию рефрактивного характера процесса рассеяния является рассеяние в системе $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ при энергии 350 МэВ [93].

В [88] также применялась стандартная макроскопическая модель для анализа рассеяния ^{11}C и ^{11}Li на ^{12}C . В качестве значений параметров оптического потенциала использовались значения параметров потенциала для системы $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$. Удовлетворительного описания экспериментальных данных получено не было, однако метод разложения амплитуды упругого рассеяния, предложенный в [88] (см. также [94]), может быть полезен при анализе рефрактивных свойств потенциалов легких экзотических ядер.

Микроскопическая оптическая модель для анализа рассеяния изобар ^{11}C и ^{11}Li на ^{12}C при энергии 60 МэВ/нуклон использовалась в работах

[10,20,53]. В работе [10] при построении микроскопических потенциалов эффекты однонуклонного обмена явно не учитывались, а в качестве эффективного взаимодействия использовалось DDM3Y-взаимодействие. Для ^{11}Li были взяты плотности, рассчитанные в методе Хартри — Фока [80], а для ^{11}C и ^{12}C — оболочечно-модельные плотности. Оптимальное описание экспериментальных данных потребовало введения перенормировочных констант для вещественной и мнимой частей потенциала: $N_v = 1,175$, $N_w = 0,725$.

Результаты расчета [20] сечений квазиупругого рассеяния по схеме, описанной в п.1.2 и предыдущем, представлены на рис.3. Видно, что теоретические сечения воспроизводят экспериментальные данные для ^{11}C , но имеют более ярко выраженную структуру как функция угла рассеяния. Для ^{11}Li эта структура появляется только при малых углах рассеяния, в частности, в теоретической кривой имеется минимум при 4° и максимум при 6° , не наблюдаемые экспериментально (к такому же расхождению теории и эксперимента приводят расчеты в [10]). Значения параметров N_w и α , полученные для оптимального описания экспериментальных данных, одинаковы для ^{11}C и ^{11}Li , т.е. переход от описания ^{11}C к описанию рассеяния ^{11}Li в [20] происходит без каких-либо изменений параметров.

Еще один микроскопический расчет для систем $^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C}$ и $^{11}\text{C} + ^{12}\text{C}$ был проведен в работе [53]. Такого же качества описания экспериментальных угловых распределений, как и в приведенных микроскопических анализах, удалось добиться в [53] варьированием двух параметров W_v и r_l потенциала поглощения и введением в феноменологическом виде (см. формулу (27)) поляризационных добавок в оптический потенциал. В недавней работе [86], где использовалась микроскопическая версия, близкая к изложенной в п. 1.2, также проводился анализ этих экспериментальных данных, однако улучшения качества их описания достичь не удалось.

В ряде работ [63—65,89,90] применялось глауберовское приближение для анализа данных по рассеянию ^{11}C и ^{11}Li на ^{12}C . Впервые довольно обстоятельный анализ взаимодействия ^{11}Li с ^{12}C в рамках четырехтельной модели и глауберовского приближения был выполнен в работе [89]. Установлено, что существенную роль во взаимодействии ядер ^{11}Li со стабильными ядрами играют процессы фрагментации $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li} + n + n$.

На рис.4 изображены вместе с экспериментальными данными результаты расчетов [63] угловых распределений ^{11}Li , рассеянных ^{11}C при $E/A = 60$ МэВ/нуклон, в глауберовском приближении с плотностями ^{11}Li ,

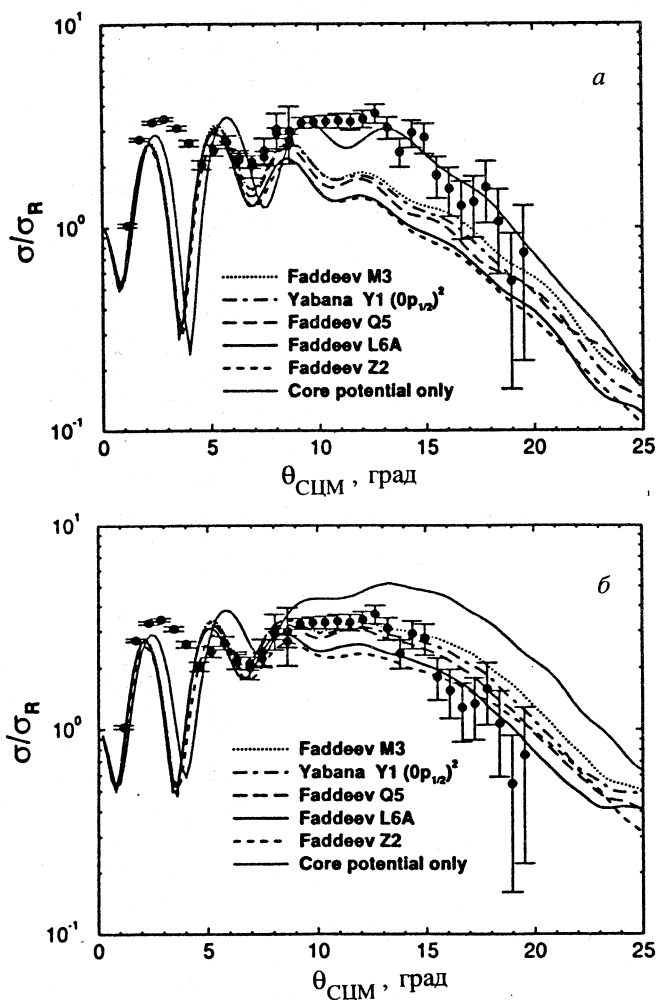
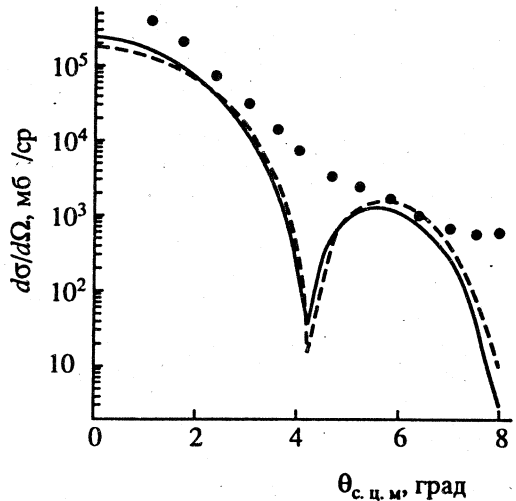


Рис.4. Сечения упругого (а) и квазиупругого (б) рассеяния ^{11}Li на ^{12}C , вычисленные с использованием различных моделей трех тел для ^{11}Li , а также только с потенциалом кора ^9Li

построенными в рамках различных моделей. На рис.4,а приведены результаты для чисто упругого рассеяния, на рис.4,б — для квазиупругого.

Отметим наиболее характерные черты этих результатов: в том случае, когда неупругие процессы не учитываются, все теоретические кривые лежат

Рис.5. Дифференциальные сечения упругого рассеяния $^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C}$ и $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ при 60 МэВ/А (сплошная и штриховая кривые соответственно), точки — экспериментальные данные [10] для $^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C}$



ниже экспериментальных точек, за исключением варианта, в котором расчет проводился только с учетом нуклонов кора, т.е. ^9Li , входящего в состав ^{11}Li . При учете же неупругих процессов все теоретические кривые попадают в область экспериментальных точек, а сечение, вычисленное с учетом

только нуклонов кора, существенно больше экспериментального для углов рассеяния, больших 10° . Отсюда можно сделать вывод о существенной роли нуклонов гало для адекватного описания экспериментальных данных. Картина, представленная на рис.4, характерна и для результатов расчетов в микроскопических оптических моделях. На рис.5 представлены расчеты сечений упругого рассеяния изобар ^{11}C и ^{11}Li при $E/A = 60$ МэВ/нуклон на ^{12}C , выполненные методом Монте-Карло в работе [65]. Видно, что различия между сечениями изобар незначительные.

Остановимся еще на нескольких работах, в которых в глауберовском или полуклассическом приближении анализируется рассеяние ^{11}C и ^{11}Li на ^{12}C . В [55] использовалась модель нескольких тел для построения на основе глауберовского приближения динамического поляризационного потенциала. Показано, что этот потенциал имеет отталкивающий характер и, таким образом, не поддерживается вывод из феноменологического анализа о вкладе дальнедействующей притягивающей части, сделанный в [87] (см. табл.3). В работе [57] рассеяние ^{11}C и ^{11}Li на ^{12}C анализируется в полуклассическом приближении, при этом феноменологически вводится поляризационный потенциал. Делается вывод о том, что в случае рассеяния ^{11}Li не проявляется существенно больше рефрактивных свойств потенциала по сравнению с рассеянием ^{11}C .

Четырехтельная модель в глауберовском приближении применяется к анализу рассеяния ^{11}C и ^{11}Li в работах [64,90]. Установлено, что процесс

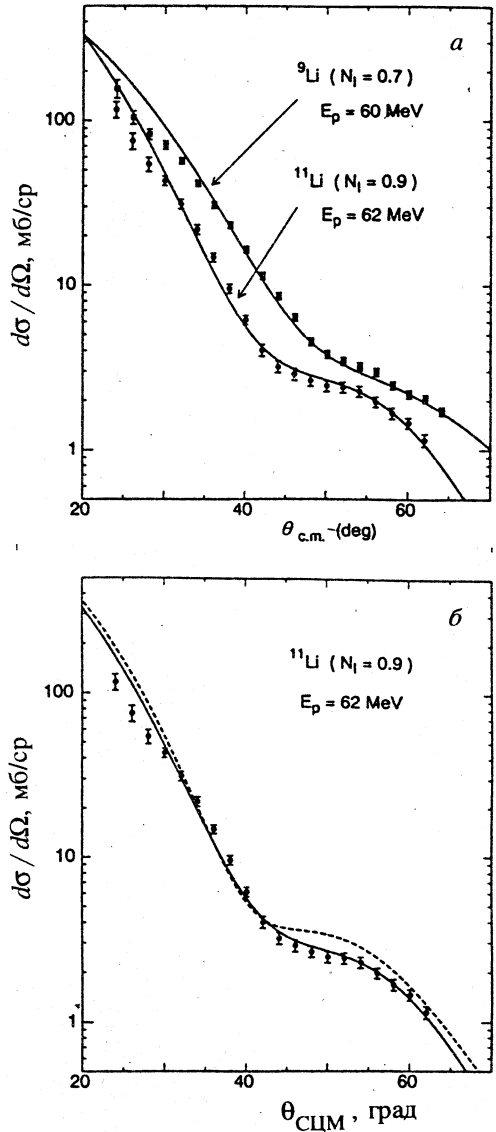
развала $^{11}\text{Li} \rightarrow ^9\text{Li} + n + n$ существенно влияет на сечение упругого рассеяния. Наиболее существенную часть динамического поляризационного потенциала составляет потенциал поглощения, а добавка в вещественную часть является отталкивающей с большим радиусом [89]. Несколько экспериментальных ситуаций, в том числе квазиупругое рассеяние ^{11}Li на ^{12}C при $E/A = 60$ МэВ/нуклон, были проанализированы в эйкональном приближении в [91]. С учетом неупругих процессов качество описания экспериментальных данных получено таким же, как и в других работах.

Подведем некоторые итоги. Как и в случае рассеяния ^{11}Li на ^{28}Si , стандартная макроскопическая оптическая модель не приводит к описанию рассеяния ^{11}Li на ^{12}C при разумных значениях параметров оптического потенциала. Различные микроскопические подходы (фолдинг-модель, эйкональное приближение, теория Глаубера) дают примерно одинаковое (вполне удовлетворительное) качество описания экспериментальных угловых распределений. Однако при этом все теоретические расчеты дают минимум при $\Theta = 4^\circ$ и максимум при $\Theta = 6^\circ$, не наблюдаемые экспериментально. Причину такого расхождения установить не удалось. Проведенный анализ [20] не противоречит гипотезе о существовании у ^{11}Li нейтронного гало.

2.1.4. $^9\text{Li} + p$, $E/A = 60$ МэВ/нуклон; $^{11}\text{Li} + p$, $E/A = 62$ МэВ/нуклон. Упругое рассеяние протонами ядер ^9Li и ^{11}Li при энергиях, соответственно, $E/A = 60$ МэВ/нуклон и $E/A = 62$ МэВ/нуклон изучалось в работах [13,95]. Экспериментальные данные приведены вместе с погрешностями на рис.6. Они охватывают угловой диапазон $25^\circ + 65^\circ$. Можно отметить относительно малые погрешности измерений (в сравнении с рассеянием ^{11}Li на мишенях ^{12}C и ^{28}Si). Другим преимуществом экспериментов с инверсной кинематикой является то, что, в отличие от рассеяния на сложных ядрах, в этом случае измеряются угловые распределения чисто упругого рассеяния. Сравнивая результаты для ^9Li и ^{11}Li , можно отметить две следующие особенности сечения рассеяния для ^{11}Li : во-первых, дифракционный минимум сдвигается в сторону меньших углов по сравнению с ^9Li ($\Theta_{\min} \sim 44^\circ$), и, во-вторых, величина сечения во всей области углов рассеяния, доступной измерению, меньше, чем для ^9Li .

Анализ этих экспериментальных данных проводили в рамках различных моделей, как в случае рассеяния ^{11}Li на сложных ядрах: стандартной оптической модели [13,95,96], микроскопической оптической модели [54,97,98], глауберовского и эйконального приближений [91,99,100]. Анализ угловых распределений для упругого рассеяния изотопов Li проводился в рамках макроскопической оптической модели в [13]. При этом

Рис.6. Угловые распределения (а) для рассеяния ${}^9\text{Li}$ и ${}^{11}\text{Li}$ на протонах при энергиях, соответственно, 60 и 62 МэВ. Перенормировочный фактор $N_I = 0,7$ для ${}^9\text{Li}$ и 0,9 для ${}^{11}\text{Li}$. Зависимость вычисленных угловых распределений (б) от структуры волновой функции ${}^{11}\text{Li}$. Штриховая линия соответствует волновой функции с меньшим среднеквадратичным радиусом

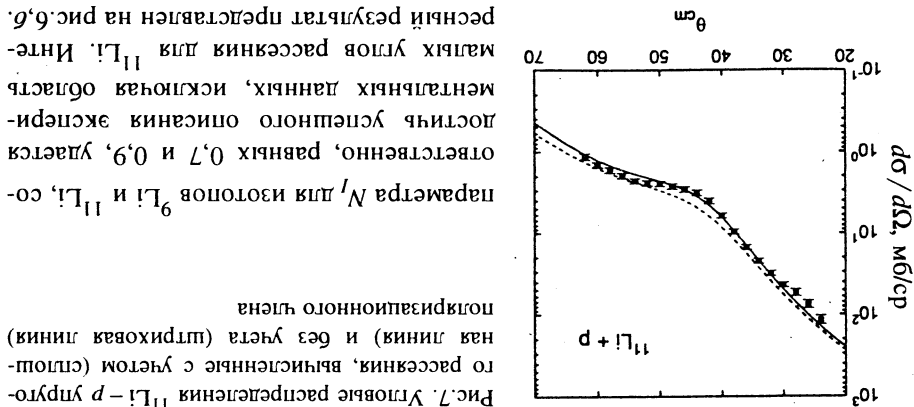


оптимальное описание экспериментальных данных для ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$ и ${}^9\text{Li}$ потребовало лишь незначительного изменения параметров мнимой части оптических потенциалов, принадлежащих глобальной систематике [101]. В то же время для ${}^{11}\text{Li}$ значения ряда параметров (r_R , a_R , r_I , a_I) существенно выпадают из набора систематики. Таким образом, как и в случае рассеяния ${}^{11}\text{Li}$ на сложных мишенях (${}^{12}\text{C}$, ${}^{28}\text{Si}$), все геометрические параметры принимают значения, далекие от стандартных.

Микроскопический анализ рассеяния протонов на изотопах Li был проведен в работе [97]. При этом вещественная и мнимая части оптического потенциала строились в рамках приближения локальной плотности теории

ядерной материи [52,102,103], а для описания экспериментальных данных вводился параметр N_I — перенормировки силы потенциала поглощения. Результаты анализа приведены на рис.6, из которого видно, что при значениях

Рис. 7. Угловые распределения $^{11}\text{Li} - p$ углугото расасения, вычисленные с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) поляризацонного члена



расчету с эффективными силами, приво- длящими к значению $\langle r^2 \rangle^{p}_{1/2} = 3,24$ фм, в то время как штриховая линия соответствует $\langle r^2 \rangle^{p}_{1/2} = 2,82$ фм. Таким образом, изменение на 15% значе- ния $\langle r^2 \rangle^{p}_{1/2}$ для ^{11}Li , как входного параметра в схеме микроскопического анализа, существенно улучшает описание экспериментальных угловых рас-

пределений. Этим расчетом подтверждается гипотеза о сущестовании у ^{11}Li нейтронного гало. Отметим, что и для ^9Li и для ^{11}Li остается проблема расхождения теории с экспериментом при малых углах расасения. Ана- логичный вывод был сделан в работе [98], где в рамках микроскопического анализа углугото расасения ^{11}Li на протонах показано, что оптимальное описание экспериментальных данных достигается в предположении $R_m = 3,20$ фм для ^{11}Li .

Роль нуклонов, составляющих гало в ^{11}Li , показана на рис. 7, где приве- дены результаты расчета из [54] с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) поляризацонного члена в потенциале, обусловленного валентными нуклонами в ^{11}Li . Результаты еще одного микроскопического расчета [65] представлены на рис. 8. Расчет в рамках глауберовского приближения (сплошная линия) дает хорошее описание экспериментальных данных за исключением малых углов расасения, в то время как расчет с использованием углошенной фолдинг-модели (точечная кривая) дает рас- хождение с экспериментом в значительной области углов. Поскольку разни- чие в глауберовском сечении и сечении, рассчитанном в рамках фолдинг- модели, связано с поляризацонным потенциалом, то из рис. 8 видна роль

этого потенциала.

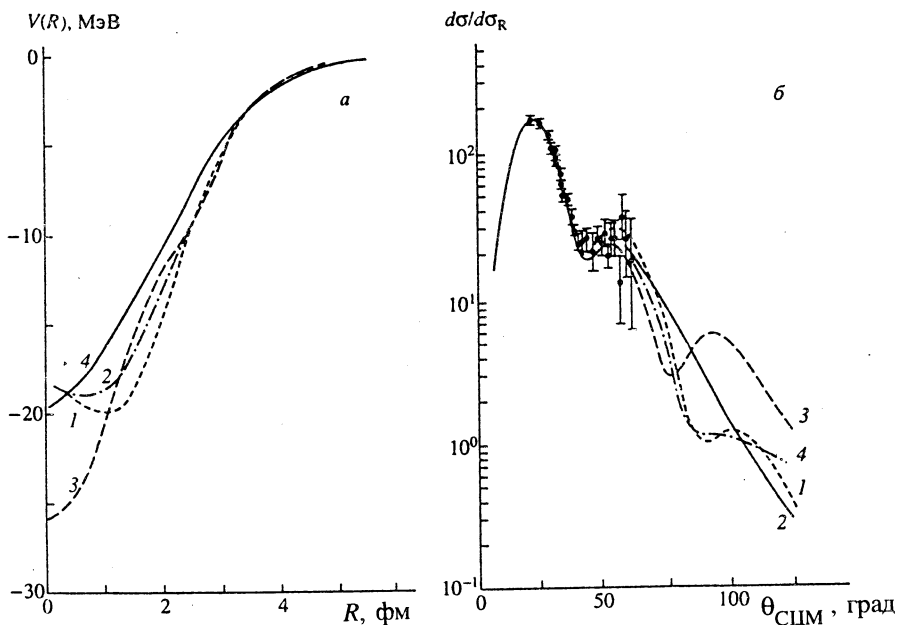


Рис.9. Потенциалы свертки (а) и соответствующие угловые распределения упругого рассеяния ${}^8\text{He} + p$ при энергии $E_{\text{л.с.}} = 73$ МэВ/нуклон в отношении к резерфордскому сечению (б), вычисленные для различных моделей плотности (обозначения кривых 1 + 3 см. на рис.10), в сравнении с феноменологическим реальным потенциалом (кривая 4). Экспериментальные данные из работы [14]

том, что упругое рассеяние при низких энергиях вряд ли может быть эффективным инструментом исследования деталей нуклонного гало.

Эксперимент в условиях инверсной кинематики предоставляет большие возможности для изучения свойств гало в ${}^{11}\text{Li}$. Однако, так же, как и в случае рассеяния ${}^{11}\text{Li}$ на сложных ядрах, стандартная оптическая модель не приводит к разумным значениям параметров оптического потенциала.

2.1.5. ${}^8\text{He} + p$, $E/A = 73$ МэВ/нуклон. Другой эксперимент в условиях инверсной кинематики был проведен в [14] с целью изучения упругого и неупругого рассеяния ${}^8\text{He}$ при энергии $E/A = 73$ МэВ/нуклон на протонах. Экспериментальные данные вместе с погрешностями приведены на рис.9. Угловые распределения для упругого рассеяния получены в угловом диапазоне до $\Theta = 65^\circ$, хотя при углах рассеяния $\Theta > 55^\circ$ погрешности измерений довольно большие. В работе [104] полученные экспериментальные данные

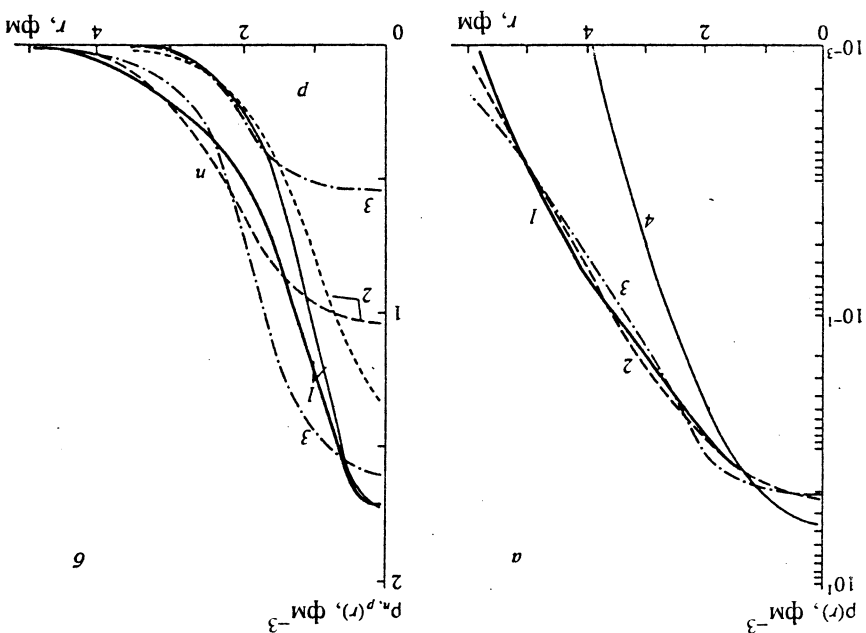


Рис. 10. Материальная (а), протонная и нейтронная (б) плотности ядра ^8He , полученные в моделях: COSM (кривая 1), DROP (2) и SW (3). На рис. (а) показано также распределение плотности α -кора в модели COSM (кривая 4)

вначале были проанализированы в рамках стандартной оптической модели. Использовались два набора параметров оптического потенциала, с которыми одновременно были описаны упругое и неупругое рассеяние протонов на ^8He . Кривые угловых распределений, полученные на основе этих потенциалов, близки друг к другу и хорошо описывают экспериментальные угловые распределения [104]. Однако можно отметить существенные различия в значениях целого ряда параметров, что свидетельствует о том, что невозможно извлечь однозначную информацию о потенциале из анализа полученных экспериментальных данных в рамках стандартной оптической модели. Фолдинг-модель с МЗУ-взаимодействием в приближении псевдопотенциала для учета эффектов однонуклонного обмена была использована в [104, 105] при анализе экспериментальных данных по рассеянию ^8He на протонах. Основной целью анализа была проверка чувствительности угловых распределений к форме плотностей вещества в ^8He , рассчитанных в различных моделях. На рис. 10 представлены материалы, протонная и

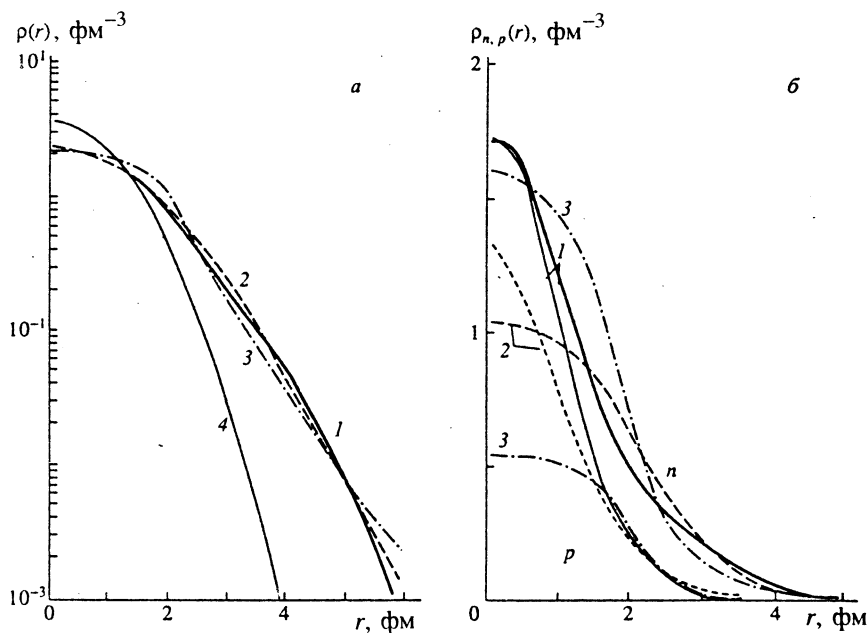


Рис.10. Материальная (а), протонная и нейтронная (б) плотности ядра ${}^8\text{He}$, полученные в моделях: COSM (кривая 1), DROP (2) и SW (3). На рис. (а) показано также распределение плотности α -кора в модели COSM (кривая 4)

вначале были проанализированы в рамках стандартной оптической модели. Использовались два набора параметров оптического потенциала, с которыми одновременно были описаны упругое и неупругое рассеяние протонов на ${}^8\text{He}$. Кривые угловых распределений, полученные на основе этих потенциалов, близки друг к другу и хорошо описывают экспериментальные угловые распределения [104]. Однако можно отметить существенные различия в значениях целого ряда параметров, что свидетельствует о том, что невозможно извлечь однозначную информацию о потенциале из анализа полученных экспериментальных данных в рамках стандартной оптической модели.

Фолдинг-модель с МЗУ-взаимодействием в приближении псевдопотенциала для учета эффектов однонуклонного обмена была использована в [104, 105] при анализе экспериментальных данных по рассеянию ${}^8\text{He}$ на протонах. Основной целью анализа была проверка чувствительности угловых распределений к форме плотностей вещества в ${}^8\text{He}$, рассчитанных в различных моделях. На рис.10 представлены материальная, протонная и

нейтронная плотности ядра ^8He , полученные в моделях: COSM (кластерно-орбитальная оболочечная модель [106]), DROP (капельная модель [107,108]) и SW (модель Соренсена — Винтера [109]). Имеются определенные различия в поведении плотностей в поверхностной области. Фолдинг-потенциалы, рассчитанные с данными плотностями, показаны на рис.9,а, а на рис.9,б дано сравнение угловых распределений, вычисленных на основе этих потенциалов, с экспериментальными угловыми распределениями. Можно отметить следующие важные обстоятельства: во-первых, все модели приводят к одинаково хорошему описанию эксперимента в области углов рассеяния, где погрешности измерений малы, во-вторых, кривые несколько различаются при больших углах рассеяния, где экспериментальные погрешности велики, что не позволяет отобрать оптимальную модель. Наконец, наибольшие различия угловых распределений, построенных с разными плотностями, наблюдаются в области углов рассеяния, для которых отсутствуют измерения.

Анализ рассеяния ^8He с энергией $E/A = 73$ МэВ/нуклон на протонах проводился в [91,110] на основе эйконоального приближения. В расчетах сечений в [110] были использованы плотности, представленные на рис.10. Проведенный анализ показал, что $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ для ^8He согласуется со значением, полученным из изучения фрагментации [111]. Модели, допускающие нейтронную «шубу» в ^8He , лучше описывают экспериментальные данные, однако угловые распределения слабо чувствительны (для углов рассеяния, доступных измерению) к форме распределения вещества. В то же время для более высоких энергий положение дифракционного минимума существенно зависит от распределения вещества в ядре.

В [91] использовалась «tpp»-схема в эйконоальном приближении для анализа рассеяния ^8He на протонах, при этом плотности в ^8He рассчитывались методом Хартри — Фока, однако для хартри-фовковского потенциала валентных нейтронов вводился корректирующий фактор, связанный с энергией отделения. Эти факторы надо рассматривать как дополнительные свободные параметры. В рамках данной схемы удалось получить удовлетворительное описание экспериментальных данных по упругому и неупругому рассеянию ^8He на протонах [91].

В работе [15] были измерены угловые распределения для упругого рассеяния ^8He с энергией 66 МэВ/нуклон на протонах. В рамках эйконоального приближения с плотностями ^8He , построенными в кластерно-орбитально-оболочечной модели, получено удовлетворительное описание экспериментальных данных. Отметим также, что недавно были измерены угловые распределения для упругого рассеяния изотопа ^6He на протонах при $E/A =$

$= 41,6$ МэВ/нуклон [18]. Расчеты, проведенные в рамках как макроскопической, так и микроскопической оптической модели, дали значения сечений, завышенные по сравнению с экспериментальными [18].

Измерение угловых распределений рассеяния ^8He на протонах в условиях инверсной кинематики открывает новые возможности в изучении свойств экзотического ядра ^8He . Однако в рамках стандартной оптической модели невозможно однозначно определить свойства потенциала взаимодействия.

2.1.6. $^{12}\text{Be} + ^{12}\text{C}$, $^{14}\text{Be} + ^{12}\text{C}$, $E/A = 56$ МэВ/нуклон. Сечения квазиупругого рассеяния ^{12}Be и ^{14}Be с энергией $E/A = 56$ МэВ/нуклон на мишени ^{12}C были измерены в [11]. Экспериментальные данные представлены на рис.11. Отметим, что на рисунке не приведены экспериментальные погрешности, довольно значительные, особенно для больших углов рассеяния. Сечения рассеяния имеют слабо выраженную структуру и почти не спадают по величине в данном угловом диапазоне, причем при рассеянии ^{12}Be сечения примерно в два раза больше, чем при рассеянии ^{14}Be . Последнее обстоятельство объясняется в [11] наличием в ^{14}Be нейтронного гало, вызывающего дополнительное поглощение. Оптико-модельный анализ экспериментальных угловых распределений был проведен [11] на основе потенциалов, параметры которых представлены в табл.4 (второй и третий столбцы), при этом было получено удовлетворительное описание сечений. Сечения неупругого рассеяния с возбуждением состояний 2^+ и 3^- в мишени рассчитывались в рамках коллективной модели (их значения приведены также в табл.4) и некогерентно складывались с сечениями упругого рассеяния. Из данных таблицы следует, что для оптимального описания экспериментальных сечений потребовалось введение в оптические потенциалы для обоих изотопов дальнедействующего поверхностного члена в мнимую часть потенциала, а для ^{14}Be — поверхностного члена в реальную часть. Отметим, что значения полных сечений реакций, полученные в этом анализе, существенно больше тех значений, которые следуют из экстраполяции сечений взаимодействия, измеренных при промежуточных энергиях [78].

В работе [112] проведен пересмотр оптико-модельного анализа рассеяния ^{12}Be и ^{14}Be на ^{12}C . Некогерентная сумма сечений упругого рассеяния, рассчитанных на основе потенциалов, представленных в четвертом и пятом столбцах табл.4, и сечений неупругого рассеяния, изображена на рис.11 сплошными линиями. В целом качество описания представленного здесь эксперимента несколько лучше, чем в работе [11]. Полные сечения реакции σ_R , равные, соответственно, 911 и 1123 мб для ^{12}Be и ^{14}Be , по-видимому, ближе к значениям, которые могут быть получены экстраполяцией. Отме-

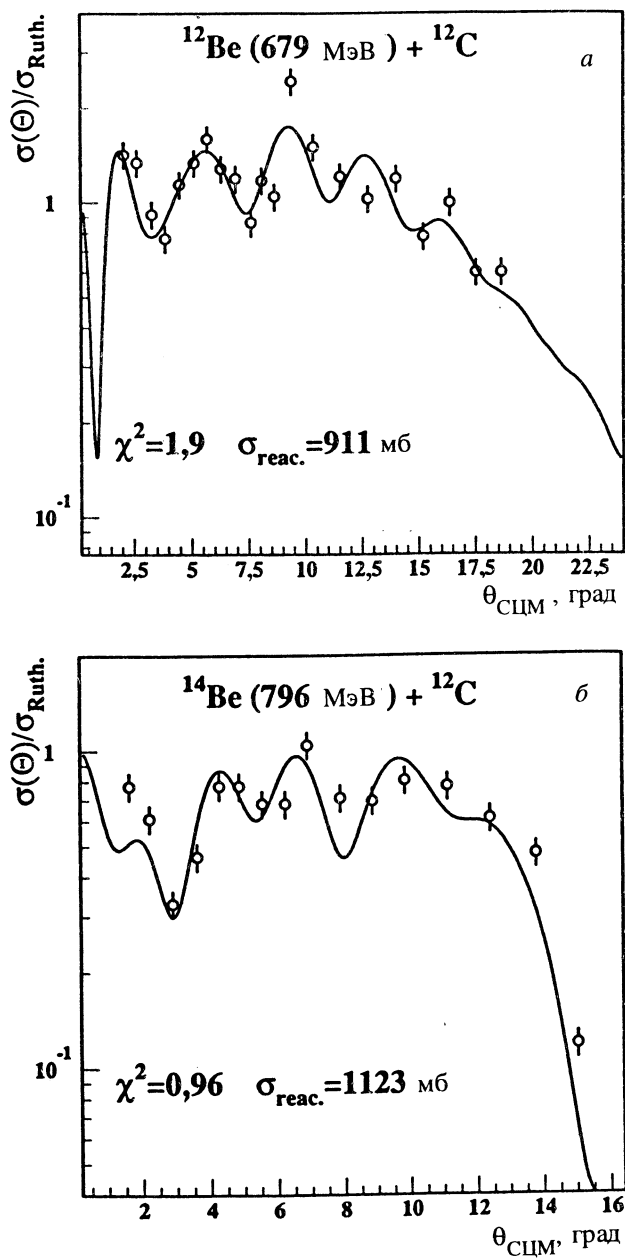


Рис.11. Экспериментальные и теоретические угловые распределения квазиупругого рассеяния ^{12}Be и ^{14}Be на ^{12}C

Таблица 4. Параметры оптических потенциалов и σ_R для ^{12}Be и ^{14}Be , взаимодействующих с мишенью ^{12}C

Ядро-снаряд	^{12}Be		^{14}Be	
E , МэВ	679,0		796,0	
N	1	2	1	2
V_R , МэВ	40,0	20,0	40,0	20,0
r_R , фм	0,990	0,924	0,838	0,702
a_R , фм	0,932	2,466	0,694	0,560
W_V , МэВ	74,76	6,83	86,75	5,44
r_I , фм	1,003	0,683	1,003	0,762
a_I , фм	0,497	1,261	0,716	0,146
V_{Rs} , МэВ		4,99	2,916	0,758
r_{Rs} , фм		1,115	1,954	1,817
a_{Rs} , фм		0,843	0,556	0,531
W_s , МэВ	0,359	7,94	2,319	4,24
r_{Is} , фм	1,753	1,046	1,806	1,323
a_{Is} , фм	0,213	0,366	0,249	0,597
σ_R , мб	1238.	911.	1900.	1123.
σ_{2+} , мб	26,2	29,1	30,0	10,1
σ_{3-} , мб	4,0	10,8	10,3	4,1

тим однако, что целый ряд параметров потенциалов из четвертого и пятого столбцов табл.4 имеют сильные отличия от значений, которые следуют из систематик для соседних стабильных ядер. Для установления свойств потенциалов ^{12}Be и ^{14}Be необходимы расчеты в микроскопическом подходе. Существует единственный расчет в эйкональном приближении с использованием « i rr»-схемы сечений квазиупругого рассеяния ^{12}Be и ^{14}Be на ^{12}C [91]. Однако удовлетворительного описания экспериментальных угловых распределений получить не удалось. Таким образом, на сегодняшний день

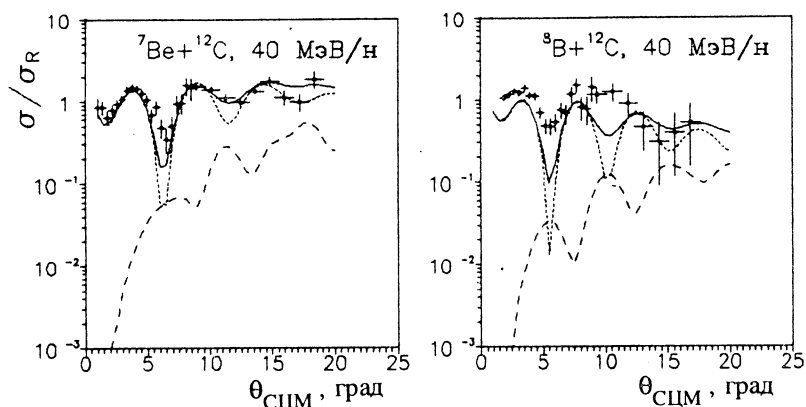


Рис.12. Сечения квазиупругого рассеяния легких ядер. Даны экспериментальные точки с погрешностями, сплошная линия — сумма сечений упругого и неупругого рассеяния, точечная — упругое, пунктирная — неупругое

остается открытым вопрос об интерпретации экспериментальных данных, представленных на рис.11.

Недавно в режиме инверсной кинематики экспериментально измерены угловые распределения упругого рассеяния ^{10}Be и ^{11}Be с энергией 59,3 и 49,3 МэВ/нуклон соответственно на протонах [18]. Анализ проводился в рамках макро- и микроскопической моделей, но расчетные сечения получились завышенными по сравнению с экспериментальными.

2.1.7. $^8\text{B} + ^{12}\text{C}$, $^7\text{Be} + ^{12}\text{C}$, $E/A = 40$ МэВ/нуклон. В результате проведенных исследований [5] ядро ^8B с протонным избытком оказалось первым кандидатом в ядра с протонным гало. В связи с этим представляет интерес изучение упругого рассеяния ^8B , а также ^7Be на стабильном ядре-мишени. Сечения квазиупругого рассеяния ^8B и ^7Be с энергией $E/A = 40$ МэВ/нуклон на ядре-мишени ^{12}C измерены в [12] (ранее были получены сечения рассеяния ^7Be на ^{12}C при энергии 20 МэВ/нуклон [113]). Экспериментальные данные вместе с погрешностями приведены на рис.12, из которого видно, что сечения, как функция угла рассеяния, обладают некоторой структурой. Для частицы-снаряда ^7Be величина сечения практически не спадает с ростом угла рассеяния, в то время как для ^8B значение σ/σ_R уменьшается в этом же угловом диапазоне в 3—4 раза.

Таблица 5. Полные сечения реакций (мб)

Реакция (E/A)	Теория	Теория [20]	Эксперимент
$^{11}\text{Li} + ^{28}\text{Si}$ (29 МэВ/н)	1402 [9]	1970 ($N_w = 0,25, \alpha = 0,03$)	2947 ± 386 [115] ^a
$^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C}$ (60 МэВ/н)	1350 [10]	1488 ($N_w = 0,30, \alpha = 0,05$)	≈ 1600 [89] ^b 1040 ± 60 [60] ^c
$^{11}\text{C} + ^{12}\text{C}$ (60 МэВ/н)	—	1280 ($N_w = 0,30, \alpha = 0,05$)	—
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ (20 МэВ/н)	1453 [117]	1486 ($N_w = 0,30, \alpha = 0,03$)	≈ 1370 [118] ^c
$^7\text{Be} + ^{12}\text{C}$ (40 МэВ/н)	1026 [12]	1102 ($N_w = 0,50, \alpha = 0$)	738 ± 9 [60] ^c
$^8\text{B} + ^{12}\text{C}$ (40 МэВ/н)	1104 [12]	1201 ($N_w = 0,30, \alpha = 0,03$)	784 ± 14 [78] ^c

a) Измерено при 25,5 МэВ/нуклон.

b) Оценка из систематики в [10].

c) Сечение взаимодействия измерено при 790 МэВ/нуклон.

г) Оценка при 20 МэВ/нуклон из систематик.

Микроскопический анализ рассеяния ^7Be и ^8B на ^{12}C проведен в работе [12], где не учитывались явно эффекты однонуклонного обмена, использовались эффективные силы из [52], и в разных моделях строились плотности для ядра-мишени и частиц-снарядов. Для оптимального описания экспериментальных сечений вводились перенормировочные факторы как для мнимой, так и для реальной части построенного потенциала. В работе [20] анализ полученных экспериментальных данных проводился в рамках формализма матрицы плотности, при этом нейтронные и протонные плотности были рассчитаны методом функционала плотности [114]. Интегральные характеристики соответствующих распределений приведены в табл.1. На рис.12 показаны результаты микроскопического расчета угловых распределений со значениями параметров N_w и α , приведенных в табл.5. Из микроскопического анализа, проведенного в [20], следует вывод о значительной протяженности протонной плотности в ^8B и меньшей — в ^7Be .

2.2. Полные сечения реакций. Во введении отмечалось, что величиной, чувствительной к свойствам потенциала, а в микроскопическом подходе — к интегральным свойствам распределения вещества в ядрах, является полное

сечение реакции σ_R . Таким образом, чтобы ограничить неоднозначности, связанные с величиной потенциала, особенно потенциала поглощения, необходимо проводить одновременно анализ угловых распределений и полных сечений реакции и иметь соответствующие экспериментальные данные. К сожалению, основные данные для σ_R получены при промежуточных энергиях ($E/A = 790$ МэВ/нуклон). При этом были измерены не полные сечения реакции σ_R , а сечения взаимодействия σ_I . Различия между σ_R и σ_I обусловлены вкладом неупругого рассеяния. По оценкам эти различия при промежуточных энергиях составляют 5—10%. При низких энергиях σ_R измерены только в отдельных случаях (см., напр., [115,116]). Для остальных ситуаций используется экстраполяция значений σ_I на низкие энергии. Нужно иметь в виду, что сечения реакций имеют сильную зависимость от энергии [116], поэтому процедура экстраполяции может содержать определенные погрешности.

Рассмотрим некоторые результаты, полученные в микроскопических подходах, для полных сечений реакции. В табл.5 представлены σ_R , рассчитанные в микроскопической оптической модели [20] для всех экспериментальных ситуаций, изображенных на рис.6 и 7, здесь же даны значения параметров α и N_W , для которых получено оптимальное описание экспериментальных данных, а также значения σ_R , рассчитанные в других теоретических подходах. Можно утверждать, что в целом микроскопическая модель, развитая в [20], дает разумное описание как угловых распределений, так и полных сечений реакций, при этом используются всего два свободных параметра.

Одновременный анализ угловых распределений и σ_R проводится для системы $^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C}$ также в работе [53]. Значение $\sigma_R = 1473$ мб (ср. с табл.5) получено при увеличении радиуса потенциала поглощения на 10% и включении поляризационных добавок на феноменологическом уровне в вещественную и мнимую части потенциала. В [53] приводится также сравнение теории с экспериментом для σ_R при двух значениях энергии $E/A = 75$ и 87 МэВ/нуклон. Однако угловые распределения квазиупругого рассеяния ^{11}Li на ^{12}C при этих энергиях пока не измерены. В обзоре [8] обсуждаются значения полных сечений реакции для системы $^{11}\text{Li} + ^{12}\text{C}$ при низких и высоких энергиях. Отмечается, что ни одна модель не описывает σ_R во всем энергетическом диапазоне.

В работе [116] измерены полные сечения реакции для системы $^8\text{B} + ^{12}\text{C}$ при четырех значениях энергии. Значения σ_R , вычисленные в гла-

уберовском приближении, хорошо согласуются с экспериментальными значениями. Однако угловые распределения квазиупругого рассеяния $^8\text{В}$ на $^{12}\text{С}$ измерены только при энергии $E/A = 40$ МэВ/нуклон. В [119] также получено хорошее согласие теории с экспериментом для σ_R , при этом проведен анализ влияния параметров N_W и α на величину σ_R и рассчитанные угловые распределения упругого рассеяния $^8\text{В}$ на $^{12}\text{С}$ в широком энергетическом интервале.

3. НУКЛОННОЕ ГАЛО И МЯГКАЯ МОДА

Существование ядерных состояний с необычно протяженными пространственными распределениями обсуждалось уже 25 лет назад [120,121] для систем с двумя резонансно-взаимодействующими частицами, слабо связанными с третьим телом — остовом, но только совсем недавно стало ясно, что подобная ситуация может реализоваться в ядрах. Так, в ядре ^{11}Li , с двумя слабосвязанными нейтронами сверх остова ^9Li , было открыто двухнейтронное гало и связанные с ним сильные дипольные возбуждения вблизи порога континуума с аномально малой энергией, названные мягкой дипольной модой. Аномально протяженные распределения материи и большие вероятности электромагнитной диссоциации были открыты и в других легких ядрах (например, в ядре ^{11}Be , имеющем однейтронное гало). Эти результаты получили широкое освещение в литературе (см., например, [8]). Отметим, однако, что экспериментально пока не наблюдались другие предсказанные [66,122] сильные низкоэнергетические возбуждения в ядрах с малой энергией отделения нуклонов, формирующие целый пакет мультипольных переходов вблизи порога континуума. Их возникновение можно пояснить на простейшей модели независимых частиц в потенциальной яме.

Рассмотрим $1s$ -нейтрон в сферическом потенциале прямоугольной формы с фиксированным радиусом R и найдем распределение монополярных переходов во внешнем поле $V_0 \propto r^2 Y_{00}$ в континуум в зависимости от энергии связи нейтрона, меняя глубину ямы U . Распределение силы переходов дается выражением

$$\frac{dB(E0)}{d\omega} = \frac{1}{4\pi} \int y_\epsilon(r) r^2 y_\lambda(r) dr, \quad (37)$$

а энергетически взвешенное правило сумм имеет вид

$$\int \omega \frac{dB(E0)}{d\omega} d\omega = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\pi} \langle r^2 \rangle, \quad (38)$$

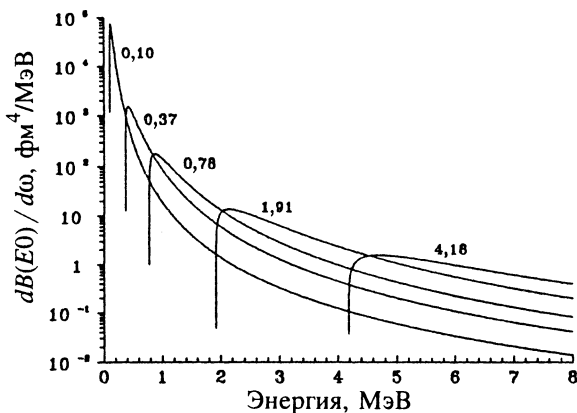


Рис.13. Монопольный отклик $1s$ -нейтрона в сферической прямоугольной яме радиусом 2 фм. Числа у кривых показывают энергию связи нейтронного уровня

где $\langle r^2 \rangle = \int y_\lambda(r) r^2 y_\lambda(r) dr$, $y_\lambda(r)$ — радиальная волновая функция связанного нейтрона на уровне $\lambda = 1s$ с энергией связи ϵ_λ , y_ϵ — волновая функция в континууме с энергией ϵ , нормированная на $\delta(\epsilon - \epsilon')$, $\omega = \epsilon + \epsilon_\lambda$ — энергия перехода. При $r > R$ имеем $y_\lambda(r) \sim \exp(-\kappa r)$, $y_\epsilon \sim \sin(pr + \delta_0)$, где $\kappa = \sqrt{2m\epsilon_\lambda}/\hbar$, $p = \sqrt{2m\epsilon}/\hbar$. При $\epsilon_\lambda \rightarrow 0$ средний квадрат радиуса $\langle r^2 \rangle$ расходится $\sim 1/\kappa^2$ (т.е. $\sim 1/\epsilon_\lambda$) и возникает ситуация «идеального» гало, когда вероятность найти нейтрон вне ямы стремится к единице [7]. При этом в дополнительном пределе $\epsilon \rightarrow 0$ главный расходящийся член в дифференциальной монопольной силе $dB(E0)/d\omega \sim \rho\kappa(p^2 + \kappa^2)^4$ (т.е. $\sim \delta(\omega)/\omega^2$). В результате оказывается, что при $\epsilon_\lambda \rightarrow 0$ вся сила монопольных переходов концентрируется на пороге континуума. Этот вывод иллюстрирует рис.13, где показаны распределения $dB(E0)/d\omega$ для ямы радиусом $R=2$ фм. Первый s -уровень в этой яме появляется при $U_{\min} = 12,79$ МэВ. Принимая глубину ямы $U = U_{\min} + \Delta$ и меняя Δ в пределах от 12 до 1,5 МэВ, можно сдвигать положение s -уровня нейтрона от 4,18 МэВ до 100 кэВ. Из рисунка видно, что при этом вместо пологих распределений монопольной силы, начинающихся от соответствующих порогов $\omega > \epsilon_\lambda$, постепенно появляется δ -образный пик вблизи $\omega = 0$. Это и есть монопольная мягкая мода.

С ростом орбитального углового момента l из-за центробежного барьера «идеальное» гало не возникает: уже для p -нейтрона вероятность найти его при $\epsilon_\lambda \rightarrow 0$ в области $r > R$ составляет $\approx 60\%$, а для d -нейтрона — только $\approx 40\%$ [7]. Для протонов из-за кулоновского барьера ситуация становится еще более неблагоприятной для образования гало, особенно с ростом заряда остова Ze . Так, даже для s -протона найти его с 50%-ной вероятностью вне остова того же радиуса R , что и в рассмотренном выше примере, когда его энергия отделения стремится к нулю, можно, только если $Z < 8$.

Сказанное, однако, не означает, что в ядрах со слабосвязанной валентной оболочкой отсутствуют какие-либо особенности в спектре возбуждений. Тот факт, что в таких ядрах могут возникать сильные мультипольные переходы с малой энергией, концентрирующиеся вблизи порога континуума, можно продемонстрировать на той же простой микроскопической модели независимых частиц в самосогласованном конечном потенциале с помощью правил сумм [66,123]. Она является вполне реалистической, поскольку рассматриваемые возбуждения отделены большой энергетической щелью от возбуждений остова. В этой модели для мультипольного оператора внешнего поля $V_0^{(L)} = r^L Y_{LM}$ интегральная сумма приведенной вероятности переходов дается выражением

$$m_0^{(L)} = \sum_s B(EL\uparrow; \omega_s) = \frac{2L+1}{4\pi} \langle r^{2L} \rangle A - \sum_{nlj, n'l'j'} (nlj \parallel V_0^{(L)} \parallel n'l'j')^2, \quad (39)$$

где суммирование ведется только по заполненным орбиталям. Энергетически взвешенное правило сумм имеет вид

$$m_1^{(L)} = \sum_s \omega_s B(EL\uparrow; \omega_s) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{L(2L+1)^2}{4\pi} \langle r^{2L-2} \rangle A, \quad (40)$$

где A — число частиц, ω_s — энергия возбуждения, а угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают среднее по основному состоянию. Теперь можно ввести центроидную энергию возбуждений $\bar{\omega}^{(L)}$ в поле $V_0^{(L)}$:

$$\bar{\omega}^{(L)} = m_1^{(L)} / m_0^{(L)}. \quad (41)$$

При достаточно больших L второй (двухчастичный) член в $m_0^{(L)}$ исчезает (например, при $L \geq 3$ в ^{11}Li). Когда энергия связи валентных нуклонов ϵ_{val} стремится к порогу, основной вклад в моменты $m_{0,1}^{(L)}$ дает диагональный матричный элемент по волновой функции R_{val} этих нуклонов. Рас-

смаатривая для простоты пример с нейтронами, можно легко получить оценку этих моментов при $\epsilon_{\text{val}} \rightarrow 0$, используя асимптотику $R_{\text{val}}(r) \propto \exp(-kr)/r$, где $k = \sqrt{2m\epsilon_{\text{val}}}/\hbar$. Тогда $\langle r^{2L} \rangle = (2L)! / (2k)^{2L}$, и

$$\bar{\omega}^{(L)} = 2 \frac{2L+1}{2L-1} \epsilon_{\text{val}}. \quad (42)$$

Для ^{11}Li это выражение применимо при $L > 0$. В случае, когда $L = 0$ для поля $V_0^{(0)} = r^2 Y_{00}$, в пределе $\epsilon_{\text{val}} \rightarrow 0$ с учетом диагонального матричного элемента в двухчастичном члене имеем

$$\bar{\omega}^{(0)} = 8\epsilon_{\text{val}}/5. \quad (43)$$

Из вышеизложенного видно, что центр тяжести распределения мультипольной силы для всех L стремится к нулевой энергии, когда валентный уровень приближается к континууму, так что полная сила локализуется на пороге. Из этого также следует, что при достаточно больших мультипольностях $L \gg A^{1/3}$ основной вклад в вероятность возбуждения ядра будут давать слабосвязанные нуклоны, волновая функция которых имеет наиболее далекий «хвост», и при этом сила переходов будет концентрироваться при одной и той же энергии $\bar{\omega} \approx 2\epsilon_s$, где ϵ_s — энергия отделения нуклонов [124,125]. Отметим также, что ширина таких мультипольных «экзотических» распределений должна быть порядка ϵ_{val} , поскольку в задаче нет других параметров, имеющих размерность энергии. Для других операторов, содержащих, в частности, зависимость от передаваемого импульса q при разложении реалистических внешних полей по бесселевым функциям ($V_0^{(L)} \propto j_L(qr)Y_{LM}$), следует ожидать более широких распределений [125]. Дипольная мягкая мода определяет вероятность электромагнитной (кулоновской) диссоциации экзотических ядер, вклад остальных мод в этот процесс пренебрежимо мал. К сожалению, пока не существует экспериментальных возможностей изучения мультипольных мягких мод при $L \neq 1$ в электромагнитных процессах.

Как отмечено в [66], аналогичные сильные мягкие моды должны появляться в любых ядерных моделях, поскольку их существование обязано лишь медленному спаду волновой функции валентных нуклонов на больших расстояниях, хотя асимптотически этот спад может отличаться от экспоненциального. Расчеты по кластерным моделям [126,127] подтвердили это предсказание. Аналогичные пики мягких переходов должны существовать и в других нейтроноизбыточных ядрах вблизи «drip-line» (^6He , ^8He , $^{11,14}\text{Be}$). Поскольку эти переходы вбирают в себя значительную долю правила сумм,

то они были названы гигантскими резонансами на пороге континуума — новой мягкой модой. В то же время они не являются резонансами в общепринятом смысле, а просто соответствуют прямым переходам в континуум, и время их протекания на несколько порядков величины короче, чем можно было бы ожидать из принципа неопределенностей [128].

Низкоэнергетические сильные переходы можно пытаться наблюдать в любых ядерных реакциях неупругого рассеяния, ибо они должны интенсивно возбуждаться как в изовекторных, так и в изоскалярных внешних полях. В частности, как показано в [123], при рассеянии вперед на малые углы велика вероятность возбуждения монопольной мягкой моды. В качестве примера в [123] было рассмотрено неупругое рассеяние ^{11}Li на протонах. Расчеты были выполнены по методу искаженных волн в предположении доминирующей роли одноступенчатого прямого механизма реакции (p, p') на малых углах рассеяния при двух энергиях налетающих протонов $E_p = 60$ и 100 МэВ. Оптические потенциалы, описывающие относительное нуклон-ядерное движение, были взяты из систематики данных по упругому рассеянию протонов на ^{12}C [129]. В качестве эффективного взаимодействия налетающего протона с нуклонами мишени использовалось МЗУ-взаимодействие [130] и свободная t -матрица [131] при 60 и 100 МэВ соответственно, с учетом центральных, тензорных и спин-орбитальных компонент. Обменные эффекты учитывались в псевдопотенциальном приближении.

Еще один пример неупругого адронного рассеяния на экзотическом ядре ^{11}Be , имеющем однеитронное гало, был рассмотрен одним из соавторов настоящего обзора (С.Ф.) и С.Н.Ершовым из ОИЯИ (Дубна). Изучалась реакция $^{11}\text{Be}(p, p')$ при $E_p = 30$ МэВ и реакция $^{11}\text{Be}(\alpha, \alpha')$ при $E_\alpha = 120$ МэВ. Расчеты сечений этих реакций были сделаны в борновском приближении искаженных волн с оптическими потенциалами из работ [132] для (p, p') и [133] для (α, α') и эффективным нуклон-нуклонным взаимодействием МЗУ. Для протонного рассеяния учитывались центральные, тензорные и спин-орбитальные компоненты эффективных сил, для рассеяния α -частиц — центральные и тензорные. Переходные плотности брались в виде произведения одночастичных волновых функций в самосогласованном потенциале, вычисленном в изложенном выше методе функционала плотности с дополнительной вариацией его глубины, чтобы воспроизвести энергию отделения нейтрона 505 кэВ (с уровня $2s_{1/2}$) и первое возбужденное связанное состояние ($1p_{1/2}$) с энергией 320 кэВ. Результаты расчета показаны на рис.14. Видно, что при рассеянии на нулевой угол в рассмотренных реакциях доминирует процесс возбуждения мягкой монопольной моды, особенно для α -частиц. Однако с ростом угла рассеяния бы-

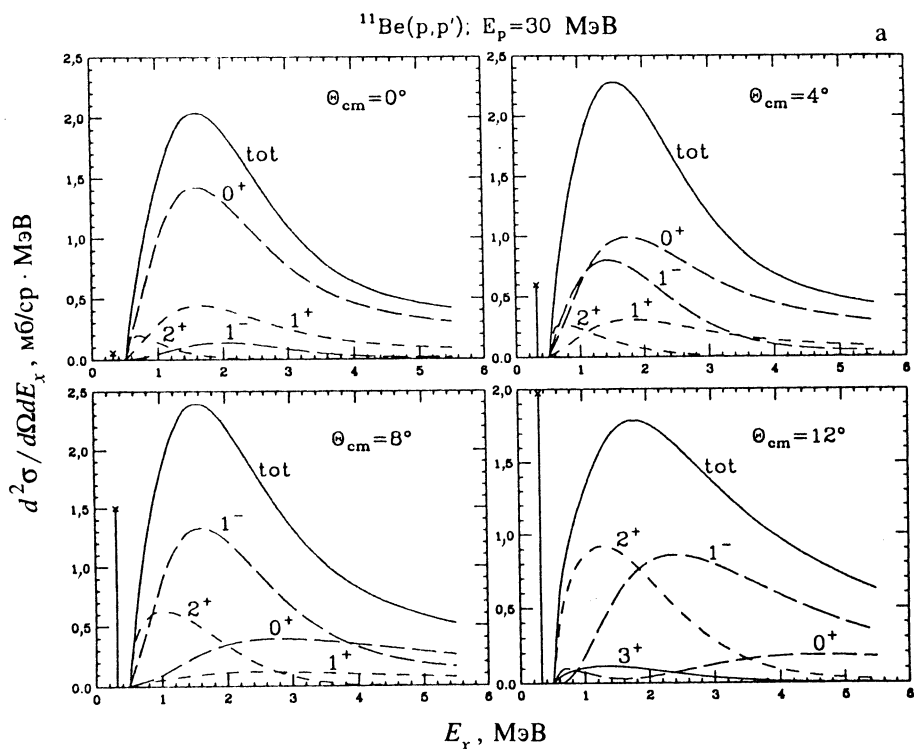


Рис.14а. Энергетические инклюзивные спектры протонов из реакции $^{11}\text{Be}(p, p')$ при $E_p = 30 \text{ МэВ}$ (а) и α -частиц из реакции $^{11}\text{Be}(\alpha, \alpha')$ при $E_\alpha = 120 \text{ МэВ}$ (б) при четырех различных углах рассеяния. Показаны вклады от переходов из однейтронного гало в континуум с различной передачей J^π . Вертикальными отрезками с крестиком показаны сечения (в мб/ср) для перехода между основным ($1/2^+$) и первым возбужденным ($1/2^-$) состоянием в ^{11}Be

стро возрастает роль других мультипольных мягких переходов, которые, тем не менее, для всех рассмотренных углов в сумме приводят к характерному асимметричному максимуму в спектрах неупругорассеянных частиц.

Процесс возбуждения мягких переходов в реакции неупругого рассеяния ^{11}Li на ^{12}C при промежуточных энергиях в эйкональном приближении с использованием микроскопических HF-RPA переходных плотностей был также рассмотрен в [134]. Сделан вывод о принципиальной возможности

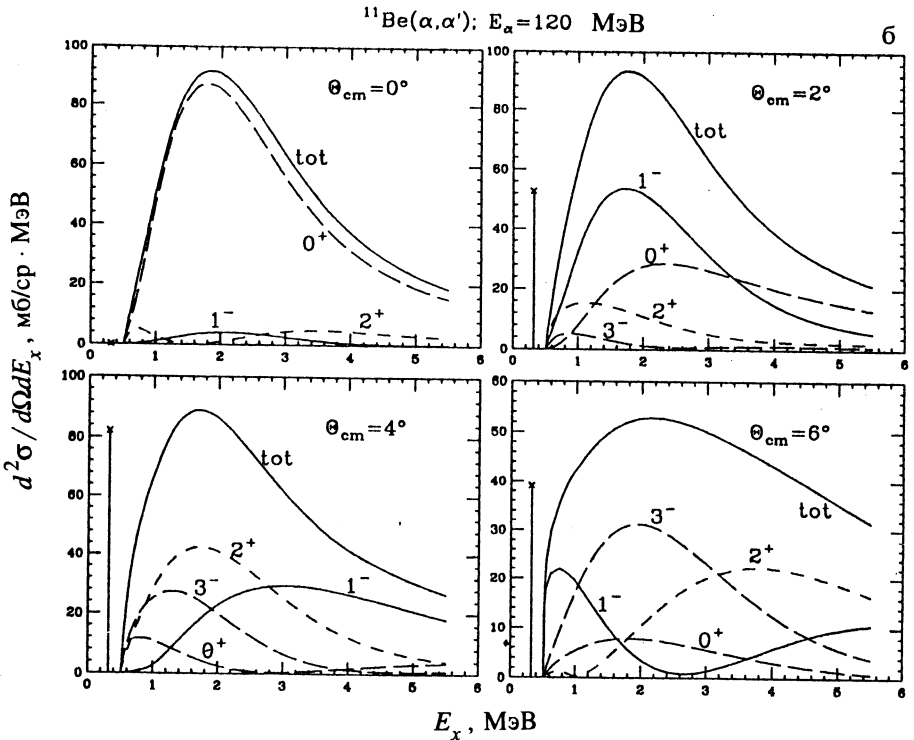


Рис.146

различить вклады на малых углах от монопольных, дипольных и квадрупольных переходов.

Таким образом, неупругое рассеяние адронов может оказаться многообещающим инструментом исследования мягких мод возбуждения в экзотических ядрах со слабосвязанными нуклонами. Наблюдаемый в последние годы быстрый прогресс в экспериментальной технике радиоактивных пучков и методах измерений продуктов реакций позволяет надеяться, что в ближайшем будущем новые мягкие моды будут открыты и изучены достаточно детально, чтобы проверить сделанные предсказания. Эти надежды подкрепляются появившимися недавно первыми экспериментальными данными по спектроскопическому исследованию ядра ^{11}Li в реакции его неупругого рассеяния на протонах при энергии 75 МэВ/нуклон [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение квазиупругого и упругого рассеяния легких экзотических ядер стало составной частью исследования свойств ядер, удаленных от линии β -стабильности. К настоящему времени проведено лишь небольшое количество измерений угловых распределений для частиц-снарядов ${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$, ${}^8\text{B}$, ${}^{12}\text{Be}$ и ${}^{14}\text{Be}$ при энергиях E/A от 20 до 75 МэВ/нуклон. Условия эксперимента при изучении рассеяния на составной мишени (${}^{12}\text{C}$, ${}^{28}\text{Si}$) были таковы, что вклад процессов неупругого рассеяния с возбуждением состояний ядра-мишени или частицы-снаряда не отделялся от сечений упругого рассеяния, а угловой диапазон, доступный измерениям, ограничивался углом рассеяния $\Theta = 20^\circ$. Эксперименты по рассеянию ${}^6\text{He}$, ${}^8\text{He}$, ${}^9\text{Li}$, ${}^{11}\text{Li}$, ${}^{10}\text{Be}$ и ${}^{11}\text{Be}$ на протонах проводились в режиме инверсной кинематики для большего диапазона углов рассеяния и сопровождалась меньшими экспериментальными погрешностями. Кроме того, для этих экспериментов не возникало проблемы отделения вкладов процессов с возбуждением состояний ядра-мишени от сечений упругого рассеяния.

Полученные экспериментальные данные анализировались в рамках различных подходов: макроскопической и микроскопической оптической моделей, эйконального и глауберовского приближений. Применение стандартной оптической модели с потенциалами в вудс-саксоновской форме показало, что разумное описание экспериментальных сечений не может быть получено со значениями параметров потенциалов, взятыми из систематик для стабильных соседних ядер.

Использование в анализе микроскопических подходов — оптической модели с микроскопическими потенциалами и теории Глаубера — требует построения в каких-либо ядерно-структурных моделях плотностей распределения вещества в ядрах. Представляется разумным использовать модель, в которой в рамках единой расчетной схемы вычисляются нейтронные и протонные плотности как для ядер-мишеней, так и для частиц-снарядов. Такая схема в настоящее время реализована на основе метода функционала плотности теории конечных ферми-систем.

Микроскопические подходы, в целом, приводят к разумному описанию экспериментальных данных по упругому и квазиупругому рассеянию легких экзотических ядер, но в ряде случаев наблюдаются серьезные расхождения теории с экспериментом (например, для ${}^{11}\text{Li} + {}^{12}\text{C}$: $E/A = 60$ МэВ/нуклон; ${}^8\text{B} + {}^{12}\text{C}$: $E/A = 40$ МэВ/нуклон; ${}^{12}\text{Be}$ и ${}^{14}\text{Be} + {}^{12}\text{C}$: $E/A = 56$ МэВ/нуклон). Различные микроскопические модели дают одинаковое качество описания эксперимента, и различия между сечениями, предсказанными теорией,

наблюдаются либо в области углов, где экспериментальные погрешности велики, либо при углах рассеяния, пока недоступных для измерений. Тем не менее для большинства моделей предпочтительным является описание экспериментальных данных, в котором содержится информация о значительной протяженности «хвоста» нейтронной плотности в ^8He и ^{11}Li и протонной плотности в ^7Be и ^8B , что подтверждает гипотезу о существовании нейтронного гало у ^8He и ^{11}Li и значительной протонной «шубы» в ^7Be и ^8B . Однако качество полученных экспериментальных данных и уровень развития теоретических моделей (отсутствие возможности учета членов второго порядка по эффективным силам в потенциале и различные приближения при использовании теории Глаубера) не позволяют в настоящее время извлекать из анализа квазиупругого и упругого рассеяния легких экзотических ядер информацию о структуре нейтронного (протонного) гало и деталях распределения протонов и нейтронов в ядрах.

В связи с вышеизложенным представляются актуальными следующие направления в исследованиях квазиупругого рассеяния легких экзотических ядер.

В области эксперимента:

- 1) расширение углового диапазона при измерении угловых распределений;
- 2) отделение вклада процессов неупругого рассеяния от сечений упругого рассеяния;
- 3) экспериментальное изучение вклада мягкой моды возбуждения в сечение рассеяния;
- 4) измерение угловых распределений упругого рассеяния изобар на одном и том же ядре-мишени с $N \neq Z$ с целью анализа изоспиновой зависимости оптического потенциала и роли различий в распределении нейтронов и протонов в частице-снаряде;
- 5) одновременное измерение угловых распределений и полных сечений реакции при одной и той же энергии;
- 6) изучение, наряду с рассеянием других процессов, зарядово-обменных, с передачей нуклонов, сечения которых могут быть чувствительны к распределению вещества в экзотических ядрах.

В области теории:

- 1) построение на микроскопической основе поляризационного потенциала;
- 2) микроскопический беспараметрический расчет потенциала поглощения;
- 3) анализ приближений теории Глаубера, особенно при низких ($E/A < 30$ МэВ/нуклон) энергиях;
- 4) теоретическое описание мягкой моды возбуждения и ее вклада в сечение рассеяния;

5) развитие на основе метода матрицы плотности теоретического формализма для описания неупругих и зарядово-обменных процессов, а также реакций с передачей нуклонов;

6) выяснение относительной роли одночастичных и кластерных степеней свободы в формировании свойств легких экзотических ядер.

В заключение авторы выражают благодарность за полезное, плодотворное обсуждение проблем, затронутых в обзоре, С.А.Гончарову, С.Н.Ершову, А.А.Оглоблину, Ю.Э.Пенионжкевичу и Н.К.Скобелеву.

Один из авторов (С.Ф.) признателен Д.Завише (D.Zawischa) за интересные и важные дискуссии; его работа была частично поддержана Немецким научным обществом (Deutsche Forschungsgemeinschaft — DFG).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tanihata I. — Treatise on Heavy-Ion Science. Ed. Bromley D.A. New York: Plenum, 1989, v.8, p.443.
2. Detraz C., Vietra D.J. — Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1989, v.39, p.407.
3. Roeckl E. — Rep. Progr. Phys., 1992, v.55, p.1661.
4. Bertulani C.A., Canto L.F., Hussein M.S. — Phys. Rep., 1993, v.226, p.281.
5. Minamisono T., Ohtsubo T., Minami I. et al. — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.2058.
6. Satchler G.R., McVoy K.W., Hussein M.S. — Nucl. Phys., 1991, v.A522, p.621.
7. Riisager K. — Rev. Mod. Phys., 1994, v.66, p.1105.
8. Tanihata I. — J. Phys., 1996, v.G22, p.157.
9. Lewitowicz M., Borcea C., Carstoiu F. et al. — Nucl. Phys., 1993, v.A562, p.301.
10. Kolata J.J., Zahar M., Smith R. et al. — Phys. Rev. Lett., 1992, v.69, p.2631.
11. Zahar M., Belbot M., Kolata J.J. et al. — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.1540.
12. Pecina I., Anne R., Bazin D. et al. — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.191.
13. Moon C.B. et al. — Phys. Lett., 1992, v.B297, p.39.
14. Korshennikov A.A. et al. — Phys. Lett., 1993, v.B316, p.38.
15. Korshennikov A.A., Nikolskii E.Yu., Kobayashi T. et al. — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.R537.
16. Neumaier S. et al. — Intern. Conf. on Exotic Nuclei and Atom Masses, Arles, France, June 19—23, Abs. of Contr. Papers, 1995, p.B6.
17. Neumaier S., Alkhazov G.D., Antonenko M.N. et al. — GSI-94-43 Preprint, August 1994.
18. Cortina-Gil M.D., Roussel-Chomaz P., Alamanos L. et al. — Preprint GANIL P95-16, 1995.
19. Satchler G.R. — Direct Nuclear Reactions. N.Y.—Oxford: Oxford, Univ. Press, 1983.
20. Fayans S.A., Knyazkov O.M., Kuchkina I.N. et al. — Phys. Lett., 1995, v.B357, p.509.

21. Glauber R.I. — Lectures in Theoretical Physics, New York, London: Interscience, 1959, v.1, p.315.
22. Смирнов А.В., Толоконников С.В., Фаянс С.А. — ЯФ, 1988, т.48, с.1661.
23. Feshbach H. — Ann. Phys., 1958, v.5, p.357.
24. Feshbach H. — Ann. Phys., 1962, v.19, p.287.
25. Князьков О.М. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.318.
26. Дао Тиен Кхоа, Князьков О.М. — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.1456.
27. Chaudhuri A.K., Basu D.N., Sinha B. — Nucl. Phys., 1985, v.A439, p.415.
28. Campi X., Bouyssy A. — Phys. Lett., 1978, v.B73, p.263.
29. Georgiev B.Z., Mackintosh R.S. — Nucl. Phys., 1978, v.A307, p.377.
30. Князьков О.М., Некрасов А.А. — ЯФ, 1983, т.38, с.36.
31. Князьков О.М. — Изв. АН СССР, сер.физ., 1985, т.49, с.928.
32. Fretwurst E., Lindström G., Reden K.F. et al — Nucl. Phys., 1987, v.A468, p.247.
33. Князьков О.М., Кухтина И.Н. — ЯФ, 1987, т.45, с.1604.
34. Дао Тиен Кхоа, Князьков О.М., Кухтина И.Н., Феофилов Г.А. — ЯФ, 1989, т.50, с.80.
35. Дао Тиен Кхоа, Князьков О.М. — ЯФ, 1988, т.47, с.1246.
36. Dao Tien Khoa, Knyazkov O.M. — Z. Phys., 1987, v.A328, p.67.
37. Dao Tien Khoa — Nucl. Phys., 1988, v.A484, p.376.
38. Bohlen H.G., Stilliaris E., Gebauer B. et al. — Preprint HMI 1992/P2-Boh 3, 1992, Berlin.
39. Demyanova A.S., Bohlen H.G., Gebauer B. et al. — Nucl. Phys., 1993, v.A553, p.727.
40. Lane A.M. — Nucl. Phys., 1962, v.35, p.676.
41. Schery S.D. — The (p, n) -Reaction and the Nucleon-Nucleon Force. Ed.C.D.Goodman et al. — N.Y.: Plenum, 1980, p.409—432.
42. Князьков О.М. — Изв. АН СССР, сер.физ., 1986, т.50, с.2007.
43. Князьков О.М., Коложвари А.А. — Изв. АН СССР, сер.физ., 1993, т.57, с.48.
44. Князьков О.М., Коложвари А.А., Кухтина И.Н., Фаянс С.А. — ЯФ, 1996, т.59, с.466.
45. Гончаров С.А., Князьков О.М., Коложвари А.А. — ЯФ, 1996, т.59, с.666.
46. Shimoura S. — Int. Conf. on Exotic Nuclei and Atom Masses, Arles, France, June 19—23, Abs. of Contr. Papers, 1995, p.B5.
47. Bertsch G., Borysowicz J., McManus H. et al. — Nucl. Phys., 1977, v.A284, p.399.
48. Petrovich F., McManus H., Madsen V.A. et al. — Phys. Rev. Lett., 1969, v.22, p.895.
49. Satchler G.R., Love W.G. — Phys. Rep., 1979, v.55, p.183.
50. Kobos A.M., Brown B.A., Hodgson P.E. et al. — Nucl. Phys., 1982, v.A384, p.65.
51. Kobos A.M., Brown B.A., Lindsay R. et al. — Nucl. Phys., 1984, v.A425, p.205.
52. Jeukenne J.-P., Lejeune A., Mahaux C. — Phys. Rev., 1977, v.C16, p.80.
53. Dao Tien Khoa, Satchler G.R., von Oertzen W. — Phys. Lett., 1995, v.B358, p.14.
54. Ershov S.N., Gareev F.A., Lenske H. — Preprint JINR E4-95-408, Dubna, 1995.

55. Al-Khalili J.S., Tostevin J.A. — Phys. Rev. 1994, v.C49, p.386.
56. Dao Tien Khoa, Satchler G.R., von Oertzen W. — Phys. Rev., 1995, v.C51, p.2069.
57. Hussein M.S., Satchler G.R. — Nucl. Phys., 1994, v.A567, p.165.
58. Гончаров С.А., Оглоблин А.А. — ЯФ, 1993, т.56, с.40.
59. Ситенко А.Г. — Укр. физ. журн., 1957, т.4, с.152.
60. Tanihata I., Hamagaki H., Hashimoto O. et al. — Phys. Rev. Lett., 1985, v.55, p.2676.
61. Blank B. et al. — Z. Phys., 1992, v.A343, p.375.
62. Gareev F.A., Ershov S.N., Kazacha G.S. et al. — JINR Communication E4-92-458, Dubna, 1992.
63. Thompson L.J. et al. — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.1364.
64. Al-Khalili J.S. et al. — Nucl. Phys., 1995, v.A581, p.331.
65. Гареев Ф.А., Ершов С.Н., Казаха Г.С. и др. — ЯФ, 1995, т.58, с.620.
66. Fayans S.A. — Phys. Lett., 1991, v.B267, p.443.
67. Zhukov M.V., Danilin B.V., Fedorov D.V. et al. — Phys. Rep., 1993, v.231, p.151.
68. Baye D., Descouvemont P., Timofeyuk N.K. — Nucl. Phys., 1994, v.A577, p.624.
69. Csótó A. — Phys. Lett., 1993, v.B315, p.24.
70. Varga K., Suzuki Y. — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.2885.
71. Hogenberg P., Kohn W. — Phys. Rev., 1964, v.B136, p.864.
72. Kohn W., Sham L. — Phys. Rev., 1965, v.A140, p.1133.
73. Фаянс С.А., Ходель В.А. — Письма ЖЭТФ, 1973, т.17, с.633.
74. Саперштейн Э.Е., Фаянс С.А., Ходель В.А. — ЭЧАЯ, 1978, т.9, с.221; Fayans S.A., Saperstein E.E., Khodel V.A. — Nucl. Phys., 1979, v.A317, p.424; Khodel V.A., Saperstein E.E. — Nucl. Phys., 1980, v.A348, p.261.
75. Khodel V.A., Saperstein E.E. — Phys. Rep., 1982, v.92, p.185.
76. Vautherin D., Brink D.M. et al. — Phys. Rev., 1972, v.C5, p.626.
77. Fayans S.A., Tolokonnikov S.V., Trykov E.L., Zawischa D. — Phys. Lett., 1994, v.B338, p.1.
78. Tanihata I., Kobayashi T., Yamakawa O. et al. — Phys. Lett., 1988, v.B206, p.592.
79. Tanihata I., Kobayashi T., Suzuki T. et al. — Phys. Lett., 1992, v.B287, p.307.
80. Bertsch G.F., Brown B.A., Sagawa H. — Phys. Rev. 1989, v.C39, p.1154.
81. De Vries H., de Jager C.W., de Vries C. — At. Data Nucl. Data Tables, 1987, v.36, p.495.
82. Bohlen H.G. et al. — Z. Phys., 1993, v.A322, p.241.
83. Endt P.M., van der Leun C. — Nucl. Phys., 1978, v.A310, p.1.
84. Ajzenberg-Selove F. — Nucl. Phys., 1990, v.A506, p.1.
85. Raynal J. — In: Proc. Workshop on Applied Nuclear Theory and Nuclear Model Calculations for Nuclear Technology Applications (Trieste, Italy, 1988), eds. M.K. Mehto and J.J.Schmidt. Singapore: World Scientific, 1988, p.506.
86. Carstoiu F., Lassaut M. — Nucl. Phys., 1996, v.A597, p.269.
87. Mermaz M.C. — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.2213.

88. Da Silveira R., Klarsfeld S., Boukour A., Leclercq-Willain Ch. — Phys. Rev., 1993, v.C48, p.468.
89. Yabana K. et al. — Nucl. Phys., 1992, v.A539, p.295.
90. Al-Khalili J.S. et al. — Nucl. Phys., 1995, v.A581, p.316.
91. Bertulani C.A., Sagawa H. — Nucl. Phys., 1995, v.A588, p.667.
92. Satchler G.R., Hussein M.S. — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.3350.
93. Stiliaris E. et al. — Phys. Lett., 1989, v.B223, p.291.
94. Da Silveira R., Klarsfeld S., Boukour A., Leclercq-Willain Ch. — Phys. Rev., 1995, v.C51, p.1572.
95. Moon C.B. Fujimaki M., Hirenzaki S. et al. — RIKEN-AF-NP-126, 1992, RIKEN.
96. Hirenzaki S. et al. — Nucl. Phys., 1993, v.A552, p.57.
97. Kohno M. — Phys. Rev., 1993, v.C48, p.1322.
98. Roussel-Chomaz P., Alamanos N., Delbourgo-Salvador P. — Preprint GANIL P95-09, 1995.
99. Suzuki Y., Yabana K., Ogawa Y. — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.1317.
100. Chaudhuri A.K. — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.1603.
101. Varner R.L., Thompson W.J., McAbee T.L. et al. — Phys. Rep., 1991, v.201, p.57.
102. Brieda F., Rook J.R. — Nucl. Phys., 1977, v.A291, p.299.
103. Yamaguchi N., Nagata S., Matsuda T. — Prog. Theor. Phys., 1983, v.70, p.459.
104. Goncharov S.A., Korshennikov A.A. — RIKEN-AF-NP-163, 1993, RIKEN.
105. Гончаров С.А., Коршениников А.А. — ЯФ, 1995, т.58, с.1393.
106. Zhukov M.V., Korshennikov A.A., Smedberg M.S. — Phys. Rev., 1994, v.C50, p.R1.
107. Myers W.D. — Nucl. Phys., 1973, v.A204, p.465.
108. Myers W.D., K.-H.Schmidt — Nucl. Phys., 1983, v.A410, p.61.
109. Sorensen J.H., Winther A. — Nucl. Phys. 1992, v.A550, p.329.
110. Chulkov L.V., Bertulani C.A., Korshennikov A.A. — Nucl. Phys., 1995, v.A587, p.291.
111. Tanihata I. — Nucl. Phys., 1988, v.A478, p.795c.
112. Mermaz M.C. — Phys. Rev., 1994, v.C50, p.2620.
113. Yamagata T., Yuasa K. et al. — Phys. Rev., 1989, v.C39, p.873.
114. Fayans S.A., Platonov A.P., Graw G., Hofer D. — Nucl. Phys., 1994, v.A577, p.557.
115. Villari A.C.C. et al. — Phys. Lett., 1991, v.B268, p.345.
116. Warner R.E. et al. — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.R1166.
117. Brandan M.E., Satchler G.R. — Nucl. Phys., 1988, v.A487, p.477.
118. Kox S., Gamp A. et al. — Phys. Lett., 1985, v.B159, p.15.
119. Князьков О.М., Кухтина И.Н., Фаянс С.А. — В сб.: Тез. докладов Межд. сов. по яд. спектроскопии и структ. ат. ядра. М.: Наука, 1996, с.101.
120. Ефимов И.Н. — ЯФ, 1970, т.12, с.1080; Comm. Nucl. Part. Phys., 1990, v.19, p.271.
121. Мигдал А.Б. — ЯФ, 1972, т.16, с.427.

122. **Sagawa H.** — In: Proc. Int. Symp. on Structure and Reactions of Unstable Nuclei (Niigata, 1991). Eds. Ikeda K. and Suzuki Y. Singapore: World Scientific, 1992, p. 149.
123. **Fayans S.A., Ershov S.N., Svinareva E.F.** — Phys. Lett., 1992, v.B292, p.239.
124. **Nguyen Van Giai** — Phys. Lett., 1981, v.B105, p.11.
125. **Fayans S.A., Palichik V.V., Pyatov N.I.** — Z. Phys., 1982, v.A308, p.145.
126. **Timofeyuk N.K., Baye D., Descouvemont P.** — Nucl. Phys., 1993, v.A551, p.1.
127. **Danilin B.V., Thompson I.J., Zhukov M.V. et al.** — Phys. Lett., 1994, v.B333, p.299.
128. **Sagawa H., Van Giai N., Takigawa N. et al.** — Z. Phys., 1995, v.A351, p.385.
129. **Combort J.R., Karp B.C.** — Phys. Rev., 1980, v.C21, p.2162.
130. **Love W.G.** — In: The Reaction and the Nucleon-Nucleon Force. Eds. Goodman C.D., Austin S.M., Bloom S.D., Rapaport J. and Satchler G.R. N.Y. Plenum Press, 1979, p.23.
131. **Love W.G., Franey M.A.** — Phys. Rev., 1981, v.C24, p.1073; 1985, v.C31, p.488.
132. **Fabrichi E. et al.** — Phys. Rev., 1980, v.C21, p.844.
133. **Smith S.M. et al.** — Nucl. Phys. 1973, v.A207, p.273.
134. **Bertulani C.A., Sagawa H.** — Phys. Lett., 1993, c.B300, p.205.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.171.017

Многоуровневая параметризация нейтронных резонансных сечений. Лукьянов А.А., Янева Н.Б. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.4, с.847.

Исходя из классических выводов R -матричной теории Вигнера формулируются методологические принципы построения различных практически реализуемых методов многоуровневой параметризации нейтронных резонансных сечений. Рассмотрена общая структура схемы SAMMY, эффективно использующейся в последние годы для анализа и представления детальной энергетической структуры сечений в широких интервалах области разрешенных уровней. Показано, что, кроме этой схемы, подобные результаты могут быть получены в комбинированном методе и методе строгого полюсного разложения U -матрицы. Представлены алгоритмы преобразования параметров разных методов и обсуждаются их преимущества при практическом использовании данных библиотеки ENDF/B-VI.

Табл.2. Ил.1. Библиогр.: 22.

УДК 539.142

Эффекты неадиабатичности коллективного движения в четно-четных деформированных ядрах. Усманов П.Н., Михайлов И.Н. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.4, с.887.

Описываются и проверяются на практических задачах ряд методов и моделей ядер, предназначенных для описания свойств основного и возбужденных состояний положительной четности четно-четных деформированных ядер. Отдельные модели проиллюстрированы примерами их применений. Расчеты проводятся для изотопов ^{164}Er , ^{156}Dy и ^{156}Gd . Проводится систематическое исследование экспериментально наблюдаемых свойств низколежащих состояний и анализируется структура волновых функций вращательных уровней. Выясняется роль состояний углового $M1$ -резонанса в смешивании состояний с разными внутренними конфигурациями. Демонстрируются предсказательные возможности методов и моделей.

Табл.16. Ил.19. Библиогр.: 100.

УДК 535.3; 551.51

Преобразование Дарбу уравнения Шредингера. Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.4, с.951.

Обсуждаются последние достижения в области генерации потенциалов, для которых уравнение Шредингера имеет точное решение. Подробно рассмотрено обобщение преобразования Дарбу на нестационарное уравнение Шредингера. Установлено, что операторы симметрии второго порядка по импульсам в некоторых случаях допускают факторизацию операторами преобразования Дарбу. Сформулировано суперсимметричное обобщение нестационарного уравнения Шредингера. Введено понятие полностью приводимой цепочки преобразований Дарбу, порождающей нелинейную алгебру парасуперсимметричной структуры. В качестве примеров получены новые точно решаемые нестационарные потенциалы. Преобразование Дарбу нестационарного уравнения Шредингера рассматривается как частный случай введенного преобразования. Изучен вопрос о факторизации преобразования N -го порядка преобразованиями первого порядка. Обсужден подход, основанный на одевающих цепочках. Получены семейства изоспектральных потенциалов со спектрами гармонического осциллятора и водородоподобного атома. Получено одноуровневое солитонодобное семейство

потенциалов Морса. Получены сингулярные в нуле точно решаемые потенциалы элементарного вида. Показана эффективность предлагаемых методов для описания когерентных состояний преобразованных гамильтонианов.

Ил.5. Библиогр.: 83.

УДК 621.3.038; 621.3.038.628; 621.3.038.615:621.318.3; 621.3.038.615:621.319; 621.384.634.5

Коррекция замкнутой орбиты в синхротронах. Динев Д. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.4, с.1013.

Обсуждаются алгоритмы для коррекции замкнутой орбиты в синхротронах и связанные с ними вопросы — источники ошибок, статистические свойства орбиты и т.д. Обзор охватывает как традиционные методы коррекции: метод локального искажения орбиты, гармонический метод и т.д., так и новейшие алгоритмы: коррекцию с применением собственных векторов, сингулярное разложение матрицы связи, алгоритмы для оптимального расположения дипольных магнитов и т.д. Обсуждается применение экспертных систем и искусственных нейронных сетей для коррекции орбиты. Последний раздел посвящен коррекции первого оборота.

Ил.7. Библиогр.: 54.

УДК 539.17

Квазиупругое рассеяние легких экзотических ядер. Князьков О.М., Кухтина И.Н., Фаянс С.А. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.4, с.1061.

Сделан обзор полученных за последние годы экспериментальных данных по квазиупругому рассеянию легких нестабильных ядер на стабильных ядрах-мишенях. Рассмотрены различные подходы, применяемые для описания механизма рассеяния. В частности, обсуждены теоретические подходы, основанные на стандартной оптической модели с феноменологическими параметрами, микроскопические фолдинг-модели с применением формализма матрицы плотности для учета эффектов обмена, эйкональное приближение и теория Ситенко — Глаубера. Рассмотрены возможные способы учета вклада неупругого рассеяния от низкоэнергетических возбуждений сталкивающихся ядер. Обсуждаются наиболее существенные аспекты ядерной структуры, которые могут быть выявлены с помощью квазиупругого рассеяния. Среди них — проблема существования нейтронного и протонного гало в ядрах и другие особенности распределения ядерного вещества в экзотических ядрах, приводящие, в частности, к формированию так называемых мягких мод, т.е. сильных переходов вблизи порога континуума. Кратко рассмотрены различные теоретические модели ядерной структуры, используемые с целью воспроизведения конкретных экспериментальных данных. Проведен анализ угловых распределений и полных сечений реакций для большой группы легких экзотических ядер с использованием микроскопической модели двойной свертки с эффективным взаимодействием МЗУ и нуклонными плотностями, вычисленными в методе плотности. Сформулированы предложения по проведению возможных дальнейших экспериментов по квазиупругому рассеянию и другим реакциям с радиоактивными пучками.

Табл.5. Ил.14. Библиогр.: 134.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Лукьянов А.А., Янева Н.Б.</i> Многоуровневая параметризация нейтронных резонансных сечений	847
<i>Усманов П.Н., Михайлов И.Н.</i> Эффекты неадиабатичности коллективного движения в четно-четных деформированных ядрах	887
<i>Багров В.Г., Самсонов Б.Ф.</i> Преобразование Дарбу уравнения Шредингера	951
<i>Динев Д.</i> Коррекция замкнутой орбиты в синхротронах	1013
<i>Князьков О.М., Кухтина И.Н., Фаянс С.А.</i> Квазиупругое рассеяние легких экзотических ядер	1061

CONTENTS

<i>Lukyanov A.A., Yaneva N.B.</i> Multilevel Parametrization of Resonance Neutron Cross Sections	847
<i>Usmanov Ph.N., Mikhailov I.N.</i> Effects of Nonadiabaticity of Collective Motion in Even-Even Deformed Nuclei	887
<i>Bagrov V.G., Samsonov B.F.</i> Darboux Transformation of the Schrödinger Equation	951
<i>Dinev D.</i> Closed Orbit Correction in Synchrotrons	1013
<i>Khyazkov O.M., Kuchtina I.N., Fayans S.A.</i> Quasielastic Scattering of Light Exotic Nuclei	1061

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху ($\underline{\underline{S}}$ и $\overline{\overline{s}}$, $\underline{\underline{C}}$ и $\overline{\overline{c}}$). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы $\underline{O}$ и $\overline{o}$ отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\vec{}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребляемых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. Лезнов А.Н., Савельев М.В. — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. Годен М. — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. Turbinger A.V. — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. Ушверидзе А.Г. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. Endo I., Kasai S., Harada M. et al. — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректура с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**

Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**

Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 8.4.97. Подписано в печать 26.06.97. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 17,4. Уч.-изд.л. 21,05.
Тираж 500. Заказ 50032. Цена 4500 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1997. Том 28. Вып.4. 843—1120.