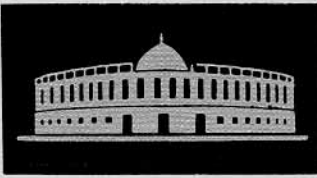


ISSN 0367-2026

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ



ЧАСТИЦ

И АТОМНОГО

ЯДРА

ВЫПУСК

1997 том 28 выпуск 6



JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS  
OF ELEMENTARY  
PARTICLES  
AND ATOMIC  
NUCLEI

---

PARTICLES & NUCLEI

---

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.28

PART 6

Six issues per year

DUBNA 1997

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ  
ЧАСТИЦ  
И АТОМНОГО  
ЯДРА

---

ЭЧАЯ

---

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 28

ВЫПУСК 6

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1997



Главный редактор

**А.М.БАЛДИН**

Редакционная коллегия:

**В.Л.АКСЕНОВ**

(зам. главного редактора),

**П.Н.БОГОЛЮБОВ,**

**С.К.БРЕШИН,**

**В.В.БУРОВ,**

**В.В.ВОЛКОВ,**

**Ц.Д.ВЫЛОВ,**

**Ю.П.ГАНГРСКИЙ,**

**В.П.ДЖЕЛЕПОВ,**

**П.И.ЗРУБИН,**

**И.С.ЗЛАТЕВ,**

**П.С.ИСАЕВ**

(ответственный секретарь),

**В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ**

(зам. главного редактора),

**К.КАУН,**

**Д.КИШ,**

**Н.Я.КРОО,**

**Р.М.ЛЕБЕДЕВ,**

**И.Н.МИХАЙЛОВ,**

**НГУЕН ВАН ХЪЕУ**

(зам. главного редактора),

**Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,**

**Ю.П.ПОПОВ,**

**А.Н.СИСАКЯН,**

**В.Г.СОЛОВЬЕВ**

(зам. главного редактора),

**А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,**

**А.А.ТЯПКИН,**

**А.И.ХРЫНКЕВИЧ,**

**Ч.К.ШИМАНЕ**

Редакторы **Е.К.Аксенова**, тел. (09621) 65-165

**Э.В.Ивашкевич**

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СПОНТАННОГО И НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР

*Г.М.Тер-Акопьян, Ю.Ц.Оганесян, В.А.Даниэль, Г.С.Попеко*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

*Дж.Гамильтон, Я.Кормицки, А.Рамайа*

Факультет физики и астрономии, Университет Вандербилта,

Нешвилл, Теннесси 37235, США

*Я.Климан*

Институт физики САН, 84228 Братислава, Словакия

*Дж.Расмуссен*

Национальная лаборатория им. Лоуренса, Беркли, Калифорния 94720, США

Рассмотрены различные физические методы исследования спонтанного и низкоэнергетического деления ядер, которые применяются для определения кинетической энергии, массы, заряда, энергии возбуждения и спина осколков. Большое внимание уделено изложению нового подхода к исследованию деления, основанного на спектротрии множественных мгновенных  $\gamma$ -квантов деления. Представлены некоторые новые данные для спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$ , которые получены при таком подходе.

The conventional experimental methods employed for the study of spontaneous and low energy fission of atomic nuclei are presented in the paper. These are the methods that, being used in different kind experiments, can give the information about the important characteristics of fission fragments — kinetic energies, masses, nuclear charges, excitation energies and spins. A particular emphasis is placed on a new approach to the problem based on the spectroscopic measurement of multiple prompt fission  $\gamma$  rays. The new data obtained for the spontaneous fission of  $^{252}\text{Cf}$  with the use of the new method are discussed in the paper.

## ВВЕДЕНИЕ

Деление ядер было открыто более полувека тому назад. За время исследования этого явления накоплен огромный объем экспериментальной информации, анализ которой позволил выявить и объяснить основные зако-

номерности ядерного деления [1]. Существует глубокая взаимозависимость между величинами полной кинетической энергии (ТКЕ), масс-асимметрией и энергией возбуждения осколков спонтанного и низкоэнергетического деления ядер. Эти параметры определяются, главным образом, разрывной конфигурацией ядра. Энергия кулоновского взаимодействия после разрыва ядра переходит в кинетическую энергию образовавшихся осколков, а энергия деформации — в энергию возбуждения.

В многомерном пространстве деформаций потенциальная энергия холодного ядра имеет сложную структуру, которая определяется оболочечными эффектами в деформированном ядре. Для различных делящихся систем поверхность потенциальной энергии имеет ярко выраженные долины, которые идут от седловых точек к точкам наиболее вероятного разрыва ядра [2—6]. Процесс деления ядра развивается по этим долинам. Различные пути деления ядра в пространстве деформаций называют каналами или модами деления. Каждая мода деления характеризуется значением средней массы осколков, дисперсией масс, величиной средней ТКЕ и дисперсией ТКЕ [7—9]. Модель мультиканального деления, основанная на анализе поверхности потенциальной энергии деформированного ядра, позволяет успешно предсказывать средние значения масс осколков и среднюю величину ТКЕ для различных каналов деления. Для объяснения дисперсий массовых и энергетических распределений осколков деления необходимо рассматривать не только потенциальную энергию ядра, но и динамику процесса деления. Успешно интерпретировать массовые и энергетические распределения осколков спонтанного и низкоэнергетического деления ядер позволяет сочетание модели мультиканального деления с моделью случайного разрыва шейки ядра, основанной на предположении о возникновении динамической нестабильности при разрыве шейки ядра [10].

При изменении формы ядра от седловой точки до точки разрыва освобожденная энергия  $\Delta V$  частично переходит в кинетическую энергию, так называемую предделительную кинетическую энергию осколков. Часть энергии  $\Delta V$  расходуется на возбуждение коллективных степеней свободы ядра (дипольных колебаний, колебаний в направлении, перпендикулярном оси деления), и, при наличии ядерной вязкости, часть энергии  $\Delta V$  будет переходить во внутреннюю энергию делящегося ядра. Сегодня имеется не много экспериментальных данных, которые позволяют оценить распределение освобожденной энергии  $\Delta V$  и извлечь информацию о динамике деления ядер. Экспериментальная информация явно недостаточна для построения последовательной модели динамики деления, а существующие модели, объясняющие отдельные ее проявления, дают противоречивые результаты.

Подробные исследования изобарных распределений осколков (выходов осколков с различными зарядами  $Z$  при фиксированной массе  $A$ ) привели к новому пониманию некоторых сторон процесса деления, связанных с его

динамикой. Изучение свойств дисперсий изобарных распределений ( $\sigma_z^2$ ) [11] позволило связать формирование зарядовых распределений осколков с нулевыми дипольными колебаниями гармонического осциллятора [12]. Согласно этой модели перед разрывом ядра, когда радиус шейки ядра становится малым, процесс становится неадиабатическим, и зарядовая дисперсия осколков деления определяется скоростью разрыва шейки [13]. Экспериментальные значения  $\sigma_z^2$  для различных делящихся систем воспроизводятся такой моделью при скорости разрыва шейки  $\simeq 2$  фм/ $10^{-21}$  с. Однако осталось непонятным поведение средних зарядов изобарных распределений осколков деления (поляризации зарядов осколков) с изменением массы осколков, которое наблюдается при делении актинидных ядер от Th до Cf.

Исследования свойств протонного четно-нечетного эффекта, то есть превышения выхода осколков с четным зарядом над выходом нечетных по заряду осколков, для различных делящихся систем [11,14,15] позволили получить некоторые сведения об энергии возбуждения ядра при приближении к разрыву. На основе вычислений величины четно-нечетного эффекта из комбинаторного анализа числа разорванных протонных пар [16] была получена оценка энергии диссипации, которая составила около 30% от  $\Delta V$  [17]. Однако эту оценку обычно рассматривают как верхний предел энергии диссипации, так как при расчетах не учитывался разрыв пар при быстром неадиабатическом разрыве шейки ядра [18].

Интересным проявлением динамики ядерного деления является наличие угловых моментов у осколков спонтанного и низкоэнергетического деления ядер, величина которого значительно превышает спин делящегося ядра. Происхождение углового момента осколков принято объяснять возбуждением поперечных колебаний в делящемся ядре при его движении от седловой точки к точке разрыва. Исходя из предположения о статистическом равновесии в точке разрыва, в теоретических работах [19,20] авторы показали, что угловой момент осколков должен возрастать с увеличением их деформации в точке разрыва. Однако угловые моменты осколков и их связь с другими характеристиками спонтанного и низкоэнергетического деления ядер плохо изучены.

Таким образом, в физике ядерного деления существует целый ряд проблем, связанных с динамикой процесса деления, для решения которых необходимы новые, более подробные экспериментальные исследования характеристик ядерного деления. Такие новые данные могут быть получены как на пути совершенствования экспериментальной техники и существующих методов исследования, так и при использовании новых подходов к исследованию деления ядер. В настоящем обзоре рассмотрены физические методы исследования низкоэнергетического и спонтанного деления ядер. В первом

разделе сделан краткий обзор существующих методов, которые применяются для определения различных характеристик ядерного деления. Основное внимание уделено изложению нового оригинального метода исследования деления, описание которого дано во втором разделе статьи. Этот метод был предложен и осуществлен в применении к изучению спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  [21—30].

## 1. ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР

Каждое событие деления ядра характеризуется массой, зарядом, кинетической энергией, энергией возбуждения и спином двух осколков деления. Особенностью процесса деления является широкий спектр состояний образующихся осколков. Характеристики распределений величин, наблюдаемых при делении ядра, а также их корреляции, содержат информацию о свойствах и закономерностях процесса ядерного деления, а также о свойствах ядерной материи, которые проявляются в коллективном движении большой амплитуды.

**1.1. Массы осколков.** Большая часть данных о массовых распределениях осколков низкоэнергетического и спонтанного деления ядер была получена при измерениях кинетической энергии парных осколков в так называемых ( $2E$ )-экспериментах. Для определения массовых распределений осколков деления ядер используется связь между величинами кинетической энергии и массы осколков, которая следует из законов сохранения при бинарном низкоэнергетическом делении ядер. Для первичных осколков (до испарения нейтронов) сумма масс осколков  $A_1$  равна массе делящегося ядра  $A_F$ :

$$A_1 + A_2 = A_F.$$

Это соотношение справедливо для подавляющего числа событий спонтанного и низкоэнергетического деления ядер, так как случаи, когда нейтроны испускаются из еще не разделившегося ядра, очень редки. Так, при спонтанном делении  $^{252}\text{Cf}$ , как показано в работе [31], нейтроны испускаются из полностью ускоренных осколков.

При спонтанном делении, а также при делении тепловыми нейтронами, когда вносимый импульс пренебрежимо мал по сравнению с импульсами осколков, выполняется следующее соотношение:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2. \quad (1)$$

Отсюда следует соотношение для величин кинетической энергии осколков:

$$E_1/E_2 = A_2/A_1, \quad (2)$$

где  $E_i$  — кинетическая энергия первичного осколка. Зная энергии осколков, можно определить массу каждого осколка:

$$A_1 = A_F E_2 / (E_1 + E_2). \quad (3)$$

Однако следует учитывать, что соотношения (1)—(3) справедливы для первичных осколков, когда из осколков не испаряются нейтроны. А это происходит в ~1% случаев деления ядер. В остальных случаях из движущихся осколков испускаются нейтроны. Поэтому попавший в детектор осколок имеет массу  $A_i'$  и кинетическую энергию  $E_i'$ , отличные от начальных:

$$A_i' = A_i - \bar{\nu}_i, \quad (4)$$

где  $\bar{\nu}_i$  — среднее число нейтронов, испускаемых из осколка с массой  $A_i$ . Предполагая, что нейтроны испаряются с нулевой скоростью относительно осколка, можно легко получить следующее соотношение между энергией первичного и вторичного осколка:

$$E_i' = E_i (A_i - \bar{\nu}_i) / A_i. \quad (5)$$

Для определения кинетической энергии и массы первичных осколков необходимо вводить поправки, связанные с испарением нейтронов. Среднее число испарившихся нейтронов является функцией массы осколков. Эти функции известны для некоторых реакций деления ядер тепловыми нейтронами и для спонтанно делящихся ядер. Вычисления масс и энергий осколков проводятся с помощью стандартной процедуры [32].

Кинетическая энергия осколка  $E'$  после испарения нейтронов будет не только смещена относительно начальной энергии осколка (см. формулу (5)), но и размыта вокруг среднего значения энергии  $\langle E' \rangle$  с дисперсией  $\sigma(E')$  из-за вариации числа испущенных нейтронов и уносимых нейтронами импульсов. Поэтому массы осколков, полученные в  $(2E)$ -экспериментах, могут быть определены с погрешностью, которая обусловлена самим процессом деления ядра. В работе [33] проделан тщательный анализ массового разрешения, которое может быть получено для осколков в  $(2E)$ -экспериментах. Для стандартной реакции  $^{235}\text{U}(n_{\text{th}}, f)$  и спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  рассчитанное массовое разрешение составляет величину  $\delta A = 3$  и 4 а.е.м. для  $^{235}\text{U}$  и  $^{252}\text{Cf}$  соответственно. Метод определения массы осколков по отношению кинетических энергий вторичных осколков не дает принципиальной возможности определения масс осколков с точностью лучше этих величин.

Для измерения энергий парных осколков обычно используют два типа детекторов — импульсные ионизационные камеры (ИК) и кремниевые детекторы (КД). Большинство имеющихся данных о делении ядер были получены при использовании КД, так как эти детекторы компактны, не требуют высоковольтных источников питания и поэтому просты и удобны в обращении. Для перехода от амплитуды импульса, который дает детектор при регистрации осколка, к энергии осколка необходимо учесть амплитудный дефект, который в КД в основном определяется дефектом ионизации и неполным сбором носителей заряда. Экспериментально установлено, что существует линейная зависимость амплитуды импульса от энергии осколков с фиксированной массой. Градуировочная функция, связывающая амплитуду импульса  $N$  с энергией  $E$  осколка с массой  $A$  записывается в виде

$$E = (a + bA) N + c + dA,$$

где  $a, b, c, d$  — постоянные коэффициенты, которые определяются индивидуально для каждого детектора по энергетическим спектрам наиболее изученных реакций деления  $^{235}\text{U}(n, f)$  и  $^{252}\text{Cf}(sf)$  с использованием параметризации энергетических спектров осколков, предложенной в работе [34].

Энергетическое разрешение для осколков деления, которое может быть получено с КД, составляет 1—2 МэВ [35]. Массовое разрешение, которое получают в  $(2E)$ -экспериментах, обычно составляет 4—5 массовых единиц [36].

В последние годы для исследования деления успешно используются газонаполненные ионизационные камеры. Причины интереса к ионизационным камерам связаны с возможностью гибкого изменения конструкции камер, с отсутствием радиационного повреждения и существенно лучшим энергетическим разрешением по сравнению с кремниевыми детекторами. Для изучения спонтанного деления или деления ядер, индуцированного нейтронами, наиболее удобны двойные ионизационные камеры с плоскими электродами, разделенные общим катодом [37,38].

Амплитудный дефект ИК в основном определяется дефектом ионизации и потерей энергии в подложке (или во входном окне, если используется внешний источник). Для корректного учета потери энергии в подложке измеряется угол входа осколка в ИК. Угол входа определяется самой ионизационной камерой, например, по соотношению величин анодного и катодного сигналов.

Энергетическое разрешение осколков, полученное в ИК, составляет 0,4 и 0,5 МэВ для легкой и тяжелой группы осколков [39] соответственно. Массовое разрешение для  $(2E)$ -экспериментов с ИК обычно составляет 3—4 массовые единицы. С помощью двойной ионизационной камеры было тщательно изучено явление холодного деления ядер [40—42]. При холод-

ном делении ядер осколки не испускают нейтронов, и почти вся энергия деления переходит в кинетическую энергию осколков. Обнаруженное в холодном делении массовое разрешение, в соответствии с уравнением (3), определяется только энергетическим разрешением камеры.

Массовое распределение осколков можно получить и при измерении скоростей парных осколков в  $(2V)$ -экспериментах. Зная массу делящегося ядра  $A_F$ , можно найти массы и энергии осколков:

$$A_1 = A_F v_2 / (v_1 + v_2), \quad (6)$$

$$E_i = A_i v_i^2 / 2. \quad (7)$$

Из выражений (6) и (7) можно вычислить полную кинетическую энергию первичных осколков  $TKE = A_F v_1 v_2 / 2$ . Полученные при измерении скоростей значения энергий осколков деления не требуют энергетической калибровки. Этот метод дает абсолютные значения кинетической энергии.

Поскольку эмиссия нейтронов происходит изотропно в системе покоя осколка деления, величина средней скорости осколков после испарения нейтронов не изменяется. Измеренные в эксперименте скорости и полученные с помощью выражений (6) и (7) значения массы и энергии относятся к первичным осколкам. Разброс скорости из-за эмиссии нейтронов приводит к разбросу вычисленных масс осколков. Как показано в работе [33], массовая дисперсия в  $(2V)$ -экспериментах меньше массовой дисперсии в  $(2E)$ -экспериментах. В  $(2V)$ -экспериментах массовое разрешение составляет величину  $\delta A = 1,4$  а.е.м. для реакции  $^{235}\text{U}(n_{\text{th}}, f)$  и  $\delta A = 1,9$  а.е.м. для спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$ . Таким образом, оба метода определения массы осколков ( $(2E)$ - и  $(2V)$ -эксперименты) не дают принципиальной возможности однозначного определения массовых чисел осколков.

Скорость осколка определяется из измерений времени пролета  $T$  заданного расстояния  $d$ . Детекторы, дающие временные отметки о начале и конце прохождения осколком пролетной базы  $d$ , должны иметь хорошее временное разрешение. Так как скорость осколков деления составляет величину порядка  $10^9$  см/с, то при пролетной базе 1 м необходимо иметь временное разрешение не хуже  $10^{-9}$  с, чтобы получить разрешение по массе  $\delta A / A = 1\%$ . Кроме того, стартовый детектор должен быть достаточно тонким, чтобы при его прохождении скорость осколков изменялась лишь незначительно.

Наилучшее временное разрешение получено с помощью детекторов, регистрирующих эмиссионные электроны, и поэтому такие детекторы наиболее часто применяются в экспериментах. Для эмиссии электронов



используются тонкие ( $10\text{--}20\text{ мкг/см}^2$ ) углеродные или алундовые пленки. Выход электронов определяется удельными ионизационными потерями энергии и для осколков деления достигает нескольких сотен. Для получения хорошего временного разрешения важно обеспечить изохронность движения электронов от области их образования до детектора. Это достигается, во-первых, увеличением скорости электронов. Средняя энергия эмиссионных электронов находится в области нескольких электронвольт. Перед регистрацией электроны ускоряются в электрическом поле до энергии несколько килоэлектронвольт. Во-вторых, перемещение электронов к детектору осуществляется с помощью однородного магнитного поля или электростатического зеркала таким образом, чтобы получить одинаковые по длине траектории. Детектором электронов служат микроканальные пластины. Такой метод обеспечивает 100% эффективность регистрации осколков деления. Для системы, состоящей из двух таких детекторов и измеряющей время пролета осколков, получено временное разрешение лучше  $\delta T = 100\text{ пс}$  [43]. Для получения временной отметки применяют также тонкие пластиковые сцинтилляторы, временное разрешение которых составляет  $\delta T \geq 200\text{ пс}$  [44].

Для измерения времени пролета осколков деления применяются также плоскопараллельные лавинные счетчики (ППЛС) [45]. Лавинные счетчики имеют хорошее временное разрешение ( $100\text{--}200\text{ пс}$ ) и 100% эффективность регистрации осколков деления. ППЛС можно использовать и в качестве  $\Delta E$ -детектора. Минимальная толщина вещества, которую проходят осколки в ППЛС, составляет  $200\text{--}300\text{ мкг/см}^2$  (в пересчете на углерод), что затрудняет их использование для получения «старт-сигнала». Чтобы увеличить геометрическую эффективность регистрации осколков, используют в качестве датчиков «стоп-сигналов» ППЛС большой площади. Такие ППЛС делают позиционно-чувствительными, чтобы учесть изменение пролетной базы. Место прохождения частицы может быть определено с погрешностью около  $0,5\text{ мм}$ .

Метод определения массы осколка путем одновременного измерения его скорости (или импульса) и энергии ( $(E, V)$ -метод) позволяет получить разрешение по массе, которое не уступает радиохимическим методам. Следует подчеркнуть, что при измерении энергии и скорости одного осколка можно получить массу только вторичных осколков. Энергия и импульс заряженной частицы можно определить с большой точностью по отклонению траектории частицы в электрических и магнитных полях. Для исследования осколков деления успешно используются электромагнитные спектрометры. Так, например, спектрометр «Lohengrin» с двойной фокусировкой, установленный на высокопоточном реакторе в Гренобле, позволяет разделить по массам как тяжелые, так и легкие осколки с разрешением лучше

$\delta A/A = 2 \cdot 10^{-3}$ . Энергетическое разрешение при этом составляет  $\delta E/E = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Достичь такого же массового разрешения, как на масс-спектрометрах, можно и с помощью современных детекторов. Действительно, так как  $A = 2E/v^2$  и  $v = d/T$ , где  $d$  — пролетная база, а  $T$  — время пролета, то массовое разрешение ( $E, V$ )-метода определяется выражением:

$$\delta A/A = [(\delta E/E)^2 + (\delta T/T)^2]^{1/2}.$$

Из этого соотношения видно, что разрешение в одну массовую единицу не может быть получено при измерении энергии осколка кремниевым детектором, так как энергетическое разрешение этих детекторов не лучше 2%. Энергетическое разрешение ионизационных камер позволяет отличить осколки с соседними значениями массовых чисел. В работе [43] для легкой группы осколков получено массовое разрешение  $\delta A = 0,6$  а.е.м. В этих экспериментах энергия осколка измерялась с помощью газонаполненной ионизационной камеры, а скорость — с помощью времяпролетного детектора.

**1.2. Ядерный заряд осколков.** Для идентификации осколков деления, кроме массы осколка, важно также знать его ядерный заряд. Физические методы определения заряда долгое время отставали от радиохимических методов. Однако в последнее время в связи с развитием техники эксперимента было получено много важной информации о зарядовых распределениях осколков физическими методами.

Рассмотрим возможности различных методов определения ядерного заряда. Наиболее простым кажется измерение заряда осколков по  $KX$ -лучам [46]. Действительно,  $\gamma$ -детекторы высокого разрешения позволяют определить заряд осколков по  $KX$ -лучам без сепарации осколков по массе. Трудность заключается в том, что выход  $X$ -лучей зависит от ядерной структуры осколков. Поскольку неясно, как сказывается это влияние на выходе  $X$ -лучей, этот метод не получил широкого применения. Тем не менее следует отметить, что элементный выход осколков спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$ , найденный по  $X$ -лучам, хорошо совпал с элементным выходом, измеренным методом  $(\Delta E - E)$  [47].

В последние годы появились новые возможности для идентификации осколков по характеристическому  $\gamma$ -излучению. Благодаря развитию техники  $\gamma$ -спектроскопии, появлению  $4\pi$ -систем германиевых детекторов, регистрирующих множественные  $\gamma$ -кванты с большой эффективностью, получен большой объем информации по структуре вращательных и квазивращательных уровней, которые заселяются в процессе девозбуждения осколков деления [22,23,49—59]. Гамма-спектроскопия высокого разрешения позволяет по энергии  $\gamma$ -излучения однозначно определять массу и заряд

осколков деления. Кроме того, по интенсивности  $\gamma$ -излучения можно определить выход осколков. Известно, что интенсивность перехода  $2^+ \rightarrow 0^+$  для четно-четного осколка с большой точностью соответствует независимому выходу этого осколка [60]. Методом  $\gamma$ -спектроскопии были определены независимые выходы осколков спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  [60], а также осколков деления ядер  $^{235}\text{U}$  [61] и  $^{239}\text{Pu}$  [62] тепловыми нейтронами. Возможности исследования деления ядер и получения новых характеристик этого процесса методом спектроскопии мгновенных множественных  $\gamma$ -квантов деления будут изложены в следующем разделе.

Для определения ядерного заряда осколков ( $Z$ ) используются различные подходы, основанные на анализе плотности ионизации, которую создает осколок в материале детектора. Осколки спонтанного и низкоэнергетического деления ядер имеют слишком малые скорости и поэтому не дают брэгговского пика в кривой ионизации. Однако кривая ионизации содержит информацию о ядерном заряде. Действительно, потери энергии на ионизацию  $dE/dx$  для осколков, тормозящихся в среде, могут быть представлены в виде

$$dE/dx \sim f(Z)v, \quad (8)$$

а пробег осколка в среде:

$$R \sim Mv/f(Z), \quad (9)$$

где  $v$  — скорость осколка, а  $f(Z)$  — функция заряда осколка, которая для легкой тормозящей среды ( $Z > Z_{\text{ср}}$ ) может быть представлена как  $f(Z) \sim Z^{1/6}$ .

Развиты различные подходы для извлечения информации о заряде осколков из кривой ионизационных потерь. Следует отметить, что все эти подходы позволяют отличить соседние по заряду осколки только для легкой группы осколков с зарядом  $Z < 45$  из-за свойств ионизационных потерь осколков.

Для определения заряда осколков можно успешно использовать хорошо известный метод  $\Delta E - E_{\text{ост}}$ . Остаточная энергия  $E_{\text{ост}}$  измеряется с помощью ионизационных камер с высоким разрешением или времяпролетных детекторов. Метод был реализован в нескольких вариантах с пассивным поглотителем энергии  $\Delta E$  и с активным поглотителем, когда потеря энергии измеряется самим поглотителем. Так, например, осколки, отсепазированные по энергии спектрометром «Lohengrin», теряли часть своей энергии  $\Delta E$  во входном окне ионизационной камеры, а оставшаяся энергия  $E_{\text{ост}}$  измерялась ионизационной камерой [63]. В этих экспериментах получено разрешение по ядерному заряду  $\Delta Z/Z = 0,02$  для осколков с  $Z = 39$ . Для

осколков с заданной массой и энергией, отсепарированных спектрометром «Lohengrin», была использована методика  $\Delta E - E_{\text{ост}}$  в несколько другом варианте. Осколки также теряли часть энергии в пассивном поглотителе, но остаточная энергия измерялась времяпролетным детектором [64]. В качестве  $\Delta E$ -детектора применялись тонкие полупроводниковые детекторы и тонкие сцинтилляторы [65].

Измерение полных и удельных потерь энергии можно осуществить с помощью одной ионизационной камеры. Для этой цели в ионизационной камере с силовыми линиями электрического поля, направленными перпендикулярно траекториям осколков, анод разделяется на две части. Часть электронов из трека, образованного осколком, собирается первой секцией анода, а другая часть электронов — второй. В первой части анода осуществляется измерение  $\Delta E$ , во второй —  $E_{\text{ост}}$ . Для легкой группы осколков с  $Z = 30$  в такой ионизационной камере было получено разрешение по заряду  $\Delta Z/Z = 0,03$  [66].

В ионизационной камере с силовыми линиями электрического поля, направленными параллельно траекториям осколков, форма брэгговской кривой ионизации, которую создает частица в пространстве между катодом и сеткой Фриша, воспроизводится формой анодного сигнала в зависимости от времени. Спектрометрия брэгговской кривой с помощью газонаполненных ионизационных камер является хорошим физическим методом для определения зарядов осколков деления ядер. Чтобы извлечь информацию о заряде осколка, не нужно оцифровывать всю брэгговскую кривую, достаточно выбрать пригодный для этого параметр. Как следует из уравнения (9), это может быть длина трека осколка с заданной массой и скоростью. Длина трека может быть определена по времени задержки появления анодного сигнала относительно момента прихода частицы. Зарядовое разрешение, полученное таким методом для осколков, отсепарированных спектрометром «Lohengrin», составило  $\Delta Z/Z = 0,025$  для осколков с  $Z = 40$  [39]. Такой же способ определения заряда успешно используется в двойном времяпролетном спектрометре «Cosi Fan Tutte» [14], который установлен на реакторе с высоким потоком нейтронов, этот же способ дал прекрасные результаты при изучении холодного деления с помощью двойной ионизационной камеры [40]. Несколько другой подход для определения заряда осколков был реализован в двойной ионизационной камере [67]. Здесь находился центр тяжести ионизации, возникшей при торможении осколка в газе ионизационной камеры.

**1.3. Энергия возбуждения осколков деления.** При спонтанном и низкоэнергетическом делении ядер энергия возбуждения осколков определяется главным образом деформацией, которую имеют осколки в момент разрыва ядра. Кроме того, осколки могут приобрести некоторую энергию возбуж-

дения в результате нагрева делящегося ядра при его движении от седловой точки к точке разрыва. Образовавшиеся осколки характеризуются значительной деформацией. Отношение осей осколков в точке разрыва ядра составляет величину порядка 1:2 (параметр деформации  $\beta_2 = 0,65$ ). Диссипация энергии деформации во внутреннюю энергию возбуждения осколков происходит одновременно с ускорением осколков кулоновским полем за время порядка  $10^{-20}$  с. Энергия возбуждения осколков составляет около 15% всей энергии деления. Так, например, для  $^{252}\text{Cf}$  средняя энергия возбуждения двух осколков составляет  $\sim 30$  МэВ. Девозбуждение осколков хорошо описывается статистической теорией. Сначала возбужденный осколок испаряет нейтроны. Эмиссия нейтронов происходит за время от  $10^{-18}$  до  $10^{-15}$  с после разрыва ядра. Когда энергия возбуждения осколков становится ниже энергии связи нейтрона, дальнейшее снятие возбуждения происходит путем эмиссии  $\gamma$ -квантов. Основная доля  $\gamma$ -квантов излучается осколками в течение  $10^{-12}$ – $10^{-10}$  с после их образования [68].

Эмиссия нейтронов уносит около 80% энергии возбуждения осколков, поэтому исследование множественности мгновенных нейтронов деления является основным источником информации об энергии возбуждения осколков. Большинство экспериментов, в которых изучались множественности мгновенных нейтронов деления, были основаны на прямой регистрации нейтронов. Множественность нейтронов получали в экспериментах разной степени сложности. Наиболее интегральная характеристика  $\bar{\nu}_{\text{tot}}$  — это среднее число нейтронов, испущенных на одно деление. Для  $^{252}\text{Cf}$  эта величина равна  $\bar{\nu}_{\text{tot}} = (3,7676 \pm 0,0047)$  [69]. Более дифференцированная информация извлекается из экспериментов, в которых одновременно с регистрацией нейтронов измеряется кинетическая энергия или/и скорость осколков. Множественность мгновенных нейтронов наиболее изучена для реакции деления тепловыми нейтронами  $^{235}\text{U}$  [70—73] и для спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  [74—81]. Зависимость среднего числа мгновенных нейтронов от массового числа осколков была получена также для реакций  $^{233}\text{U}$  ( $n_{\text{th}}, f$ ) [73,82] и  $^{239}\text{Pu}$  ( $n_{\text{th}}, f$ ) [73]. Для восстановления распределений множественности нейтронов по полученным экспериментальным данным необходимо проводить расчеты, учитывающие разрешающее время и эффективность регистрации нейтронов детектором, с введением априорной информации о форме восстанавливаемых распределений.

Для регистрации нейтронов применяются органические сцинтилляторы (твердые или жидкие) и счетчики с  $^3\text{He}$ . В сцинтилляционных детекторах

отделение импульсов, вызванных мгновенными нейтронами, от импульсов  $\gamma$ -квантов осуществляется по времени прихода частиц в детектор с использованием времяпролетной методики. Широкое использование для регистрации нейтронов деления находят жидкие сцинтилляторы с добавками гадолиния. Изотопы  $^{155}\text{Gd}$  и  $^{157}\text{Gd}$  имеют самые большие сечения захвата тепловых нейтронов, соответственно,  $6,1 \cdot 10^4$  и  $2,5 \cdot 10^5$  б. Нейтрон, попавший в детектор, термализуется в материале детектора и захватывается гадолинием. Гамма-кванты, испускаемые в реакции  $\text{Gd}(n, \gamma)$ , активируют сцинтиллятор и вызывают его свечение, которое регистрируется фотоумножителями. Таким образом, в таких детекторах разделение импульсов нейтронов от импульсов  $\gamma$ -квантов осуществляется самим детектором по времени появления сигналов.

Для корректного измерения множественности нейтронов используются  $4\pi$ -детекторы, имеющие большую эффективность регистрации нейтронов. Так, большой  $4\pi$ -нейтронный детектор в Мельбурне измеряет нейтроны с эффективностью 85% [83]. Этот детектор имеет диаметр 1 м и содержит 500 литров жидкого сцинтиллятора на основе толуола с 0,4% добавкой Gd.

Измерения энергии и множественности мгновенных нейтронов и  $\gamma$ -квантов деления проводятся на большой  $4\pi$ -установке в Гейдельберге. Установка состоит из 162 кристаллов NaI толщиной 20 см [84]. На ней была изучена зависимость множественности  $\gamma$ -квантов деления  $^{252}\text{Cf}$  от массы осколков и от энергии  $\gamma$ -квантов.

Множественность нейтронов деления изучалась также в «непрямых» экспериментах. Так, в работе [86] была получена зависимость  $\bar{\nu}(A)$  для  $^{252}\text{Cf}$  по измеренным кинетическим энергиям двух осколков и скорости одного осколка. Аналогичные данные получены при измерении скоростей двух осколков и кинетической энергии одного осколка [87]. В недавних экспериментах [88] получены функции  $\bar{\nu}(A)$  для реакций деления  $^{233}\text{U}$  и  $^{235}\text{U}$  тепловыми нейтронами в результате измерения скоростей и кинетических энергий двух осколков деления. Массы осколков до испарения нейтронов находились по измеренным скоростям осколков, а по кинетическим энергиям находились массы осколков после испарения нейтронов. Среднее число испарившихся нейтронов определялось как разность масс осколков до и после эмиссии нейтронов. Следует отметить, что полученные в этой работе зависимости  $\bar{\nu}(A)$  в некоторых областях массовых чисел значительно (в 1,3—2 раза) отличаются от аналогичных данных, полученных в классических экспериментах [73,82] при прямой регистрации нейтронов.

Распределения множественности нейтронов для различных разделений по зарядам делящегося ядра можно получить в экспериментах по исследо-

ванию мгновенных совпадающих  $\gamma$ -квантов деления. Об этих исследованиях будет сказано в следующем разделе.

Энергию возбуждения осколков  $E_x(A)$  можно оценить по формуле

$$E_x(A) = \bar{\nu}(A)[S_n(A, Z) + \bar{\eta}(A)] + \bar{E}_\gamma(A), \quad (10)$$

где  $\bar{\nu}(A)$  и  $\bar{\eta}(A)$  — среднее число нейтронов и их средняя кинетическая энергия;  $\bar{E}_\gamma(A)$  — полная энергия, уносимая эмиссией  $\gamma$ -квантов. Величина  $S_n(A, Z)$  — энергия отделения нейтрона для осколка с массой  $A$  и зарядом  $Z$  может быть получена из таблиц масс [89] для наиболее вероятного заряда осколков с массой  $A$ . Для  $^{252}\text{Cf}$  зависимости средней кинетической энергии нейтронов и полной энергии, уносимой эмиссией  $\gamma$ -квантов от массы осколков, известны из литературы [31,90]. Для учета энергии ( $\bar{E}_\gamma(A)$ ), уносимой эмиссией  $\gamma$ -квантов, можно воспользоваться связью, установленной в работе [90] между полной энергией  $\gamma$ -квантов и числом испарившихся нейтронов:  $\bar{E}_\gamma(A) = \bar{\nu}(A) \cdot 0,75 + 2$  (МэВ) для спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  и  $\bar{E}_\gamma(A) = \bar{\nu}(A) \cdot 1,1 + 1,75$  (МэВ) для реакции  $^{235}\text{U}(n, f)$ . Для грубой оценки энергии возбуждения осколков достаточно знать, что  $E_x(A) \simeq \bar{\nu}(A) \cdot 8$  МэВ.

**1.4. Угловые моменты осколков деления.** Известно, что при низкоэнергетическом и спонтанном делении ядер образующиеся осколки имеют угловой момент, величина которого значительно превышает угловой момент делящегося ядра. Так, например, в случае спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  средний угловой момент одного осколка составляет величину 7—8  $\hbar$ . Появление угловых моментов у осколков при низкоэнергетическом и спонтанном делении ядер связано с динамикой деления. При движении ядра от седловой точки к точке разрыва часть освободившейся энергии может переходить в возбуждение коллективных степеней свободы. Некоторые виды колебаний ядерной материи в направлении, перпендикулярном оси деления ядра, приводят к появлению угловых моментов у образовавшихся осколков [19,91]. После разрыва шейки ядра эти колебания проявляются в том, что угловой момент осколков направлен перпендикулярно оси деления. Распределение угловых моментов осколков после разрыва ядра может несколько измениться из-за кулоновского взаимодействия между разделившимися осколками [19,92].

Основная часть углового момента осколков уносится в результате эмиссии  $\gamma$ -квантов. Поэтому исследования мгновенных  $\gamma$ -квантов деления позволяют получить наиболее полную информацию об угловых моментах осколков. Для оценки углового момента осколков использовались методы, основанные на измерении анизотропии [92] и множественности [93] мгновенных  $\gamma$ -квантов деления. Хорошо известен также метод определения угловых

моментов осколков по изомерным отношениям, которые измеряют в экспериментах для различных изомерных пар, образующихся при делении [94]. В последние годы с помощью этого метода было получено много новой информации об угловых моментах осколков низкоэнергетического деления ядер [95,96]. Однако рассчитанные по изомерным отношениям величины угловых моментов первичных осколков сильно зависят от применяемой модели, и поэтому трудно сравнивать результаты различных экспериментов. Обычно сравнивают не абсолютные значения угловых моментов, полученные таким методом, а тенденции их изменения. Большинство расчетов первичных угловых моментов осколков было сделано с использованием статистической модели девозбуждения осколков, развитой в работах [97,98].

Для оценки угловых моментов осколков деления был также применен метод, основанный на определении интенсивности переходов при девозбуждении уровней  $2^+$ ,  $4^+$  и  $6^+$  ротационных полос четно-четных осколков спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  [99]. К настоящему времени получены детальные и точные схемы уровней для многих осколков деления, а также определены спины и четности этих уровней, поэтому появились новые возможности для надежного измерения угловых моментов осколков. Действительно, из экспериментов, в которых регистрируются  $\gamma$ -кванты с хорошим энергетическим разрешением, можно определить вероятности заселения уровней ротационных полос осколков и найти средний спин этих уровней  $\bar{J}_\gamma(A', Z)$  для вторичных осколков с зарядом  $Z$  и массовым числом  $A' = A - \bar{\nu}(A)$ . При девозбуждении осколков основная часть углового момента уносится в результате дискретных  $\gamma$ -переходов между уровнями ротационных полос. Для того чтобы определить первичный угловой момент осколков, необходимо также учесть уменьшение углового момента за счет эмиссии нейтронов  $\bar{J}_n(A, Z)$  и статистических  $\gamma$ -квантов  $\bar{J}_{\text{stat}}(A, Z)$ . Угловой момент первичных осколков можно представить в виде суммы трех компонент:

$$\begin{aligned} \bar{J}(A, Z) &= \bar{J}_\gamma(A', Z) + \bar{J}_n(A, Z) + \bar{J}_{\text{stat}}(A, Z) = \\ &= \bar{J}_\gamma(A - \bar{\nu}, Z) + \bar{\nu}(A, Z) \cdot \bar{j}_n + \bar{M}_{\text{stat}}(A, Z) \cdot \bar{j}_{\text{stat}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\bar{j}_n$  — средний угловой момент, который уносит испарившийся нейтрон,  $\bar{M}_{\text{stat}}(A, Z)$  — средняя множественность статистических  $\gamma$ -квантов,  $\bar{j}_{\text{stat}}$  — средний угловой момент, который уносит статистический  $\gamma$ -квант.

Расчеты, использующие статистическую модель девозбуждения осколков, показывают, что спин осколка при испарении одного нейтрона уменьшается в среднем на  $0,5\text{--}0,6 \hbar$ , а эмиссия статистического  $\gamma$ -кванта уменьшает угловой момент на  $0,3 \hbar$ . Для  $^{252}\text{Cf}$  средняя множественность статис-



тических  $\gamma$ -квантов составляет величину меньше единицы для всей области массовых чисел осколков [85]. Таким образом, определив в эксперименте  $\bar{J}_\gamma(A', Z)$ , можно оценить по формуле (11) угловой момент первичных осколков.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПОНТАННОГО ДЕЛЕНИЯ $^{252}\text{Cf}$ ПО МНОЖЕСТВЕННЫМ $\gamma$ -КВАНТАМ

**2.1. Спектроскопия множественных  $\gamma$ -квантов.** Возможности современных крупных высокоэффективных  $4\pi$ - $\gamma$ -спектрометрических установок [48] и знание схем ядерных уровней, заселяемых при делении для большого числа осколков [22,23,49—59], позволяют осуществить новый подход к исследованию ядерного деления, изучая множественные характеристические  $\gamma$ -кванты, испущенные парами осколков деления ядра. На основе такого подхода были получены новые характеристики спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$ : независимые выходы пар осколков и угловые моменты осколков, составляющих различные пары [21—30].

Измерения  $\gamma$ -квантов спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  проводились в Ок-Риджской национальной лаборатории на установке, состоящей из 20 германиевых детекторов [30], и в Национальной лаборатории им. Лоуренса (Беркли) на установке «Gammasphere» в начальном варианте ее исполнения, когда  $\gamma$ -спектрометр состоял из 36 германиевых детекторов [29]. Источники  $^{252}\text{Cf}$  были герметически закрыты, и эмиссия исследуемых  $\gamma$ -квантов происходила из остановившихся осколков. В экспериментах, проводимых на  $4\pi$ - $\gamma$ -спектрометрах, накапливаются друг за другом все зарегистрированные события с множественностью  $\gamma$ -квантов, равной двум и более.

Анализ экспериментальных данных начинается с построения двумерного спектра совпадающих  $\gamma$ -лучей. Содержание спектра — число событий с зарегистрированными энергиями совпадающих  $\gamma$ -квантов  $E_{\gamma_1}$  и  $E_{\gamma_2}$ . Двумерные спектры  $\gamma\gamma$ -совпадений могут содержать несколько десятков тысяч пиков, которые образуются мгновенными совпадающими  $\gamma$ -квантами, испущенными из парных осколков, из одного из осколков, а также  $\gamma$ -квантами, испущенными после  $\beta$ -распада осколков. Пример двумерного спектра  $\gamma\gamma$ -совпадений для спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  представлен на рис.1. Как видно из рисунка, кроме пиков, образованных совпадающими  $\gamma$ -квантами при полном их поглощении в детекторе, в спектре присутствуют две серии фоновых гребней, параллельных осям  $E_{\gamma_1}$  и  $E_{\gamma_2}$ . Каждый пик с энергиями  $E_{\gamma_1}$ ,  $E_{\gamma_2}$  находится на пересечении двух фоновых гребней. Гребни образуют-

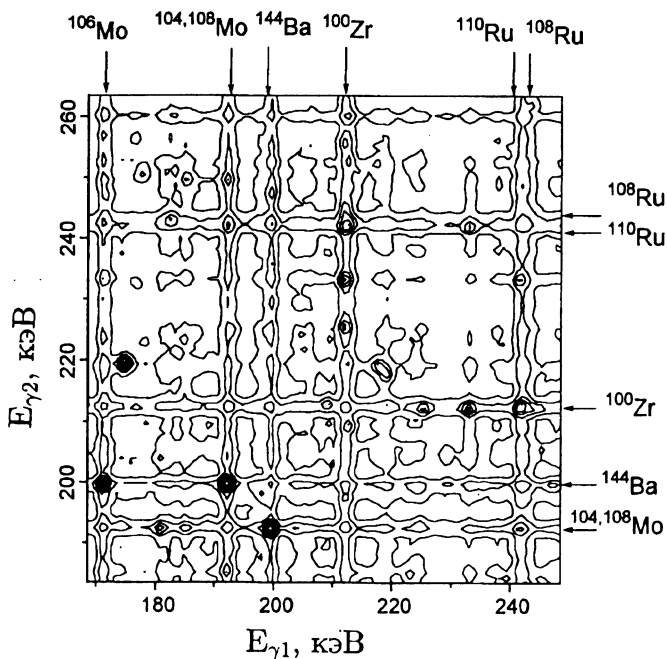


Рис.1. Часть двумерного спектра  $\gamma\gamma$ -совпадений ( $100 \times 100$  кан.).  
Стрелками указаны энергии  $\gamma$ -квантов, соответствующие  $2^+ \rightarrow 0^+$ -переходам в различных осколках

ся при совпадении импульсов от  $\gamma$ -квантов, энергия которых полностью поглотилась в германиевых детекторах, с импульсами, возникающими при неполном поглощении  $\gamma$ -квантов или от  $\gamma$ -квантов квазинепрерывного спектра. Двумерный спектр включает также гладкий фон, созданный совпадающими  $\gamma$ -квантами, энергия которых не полностью выделилась в германиевых детекторах, и  $\gamma$ -квантами квазинепрерывного спектра.

Фон любой локальной области двумерного спектра зависит от интенсивности и энергии  $\gamma$ -переходов более высоких энергий, а также от геометрии детектирующей системы и эффективности комптоновской защиты. Для получения искомой информации важно произвести правильные оценки интенсивностей пиков в двумерном спектре  $\gamma\gamma$ -совпадений, которые могут быть получены при корректном учете как гладкого фона, так и фона гребней.

Для анализа данных, получаемых на  $4\pi$ - $\gamma$ -спектрометрах, были разработаны различные способы вычитания фона и оценки интенсивностей пиков

в спектрах совпадающих  $\gamma$ -лучей [100,101], которые успешно использовались для построения схем ядерных уровней. Однако обсуждаемые в этих работах способы определения интенсивностей пиков не являются точными из-за неполного, некорректного вычитания фона, что отмечается самими авторами.

Мы не будем здесь подробно обсуждать особенности построения фоновых функций, предлагаемых в указанных выше работах. Обратим лишь внимание на один из наиболее часто используемых в ядерной спектроскопии способов обработки данных двумерных спектров  $\gamma\gamma$ -совпадений. Этот способ заключается в анализе одномерных спектров, которые получаются путем наложения так называемых «окон» на одну из осей энергий двумерного спектра ( $E_{\gamma 1}$ ). То есть из двумерного спектра выделяется слой, параллельный второй оси  $E_{\gamma 2}$ , ширина которого и является энергетическим окном. Одномерный спектр получается как проекция этого слоя на ось  $E_{\gamma 2}$ . В качестве фоновых функций используются полные проекции двумерного спектра на оси координат. Множитель фоновой функции определяется как отношение интенсивности фона в энергетическом окне к полному счету в проекции двумерного спектра. При определении этим методом интенсивностей пиков, образованных совпадающими  $\gamma$ -квантами, испущенными из одного и того же ядра, полученные оценки хотя и не являются точными, дают неплохие результаты для соотношений интенсивностей этих пиков. Когда же исследуемые пики образованы  $\gamma$ -квантами, испущенными из разных ядер, ошибки в оценке интенсивностей таких пиков могут быть значительными и при сравнении интенсивностей различных пиков давать ошибочные результаты.

В работах [24,25,102] показано, что для получения точной оценки интенсивностей пиков необходимо анализировать всю область двумерного спектра возле каждого исследуемого пика. Авторами работы [102] предложен способ вычитания фона, позволяющий получить точные оценки интенсивности пиков. В качестве фоновых функций используются проекции спектра небольшой области вблизи исследуемого пика, которая не содержит других пиков сравнимой интенсивности. Интенсивность пика и коэффициенты при фоновых функциях находятся в результате фитирования данных исследуемой области спектра. Однако для сложных спектров совпадающих  $\gamma$ -квантов спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  чаще всего невозможно найти область, свободную от пиков. Поэтому для корректной оценки интенсивностей пиков в работах [24,25] использовался другой подход [103,104], который заключается в аппроксимации небольших участков двумерного спектра аналитической функцией.

Для построения аппроксимирующей функции необходимо найти координаты максимумов всех возможных пиков на исследуемом участке двумерного спектра. Для этой цели формируются проекции исследуемого участка двумерного спектра на оси координат. В одномерных спектрах проекций находятся положения максимумов всех имеющихся пиков. Если форма спектров позволяет предположить, что в данной области существует несколько наложенных линий, то эти линии разделяются, и также находятся координаты их максимумов. Форма пиков описывается гауссовским распределением. Обозначим найденные в одномерных свертках центры пиков и дисперсии, соответственно, через  $c_i$  и  $\sigma_i$  при  $i = 1, 2, \dots, m$  для оси  $x (E_{\gamma 1})$ ; и через  $d_j$  и  $\sigma_j$  при  $j = 1, 2, \dots, n$  для оси  $y (E_{\gamma 2})$ . Аппроксимирующая функция представляет собой сумму трех компонент, которые соответствуют различным составляющим двумерного спектра. Первая компонента этой функции описывает пики  $\gamma\gamma$ -совпадений:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} \exp \left( -\frac{(x - c_i)^2}{2\sigma_i^2} - \frac{(y - d_j)^2}{2\sigma_j^2} \right).$$

Вторая компонента описывает фоновые гребни:

$$\sum_{i=1}^m B_i \exp \left( -\frac{(x - c_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) + \sum_{j=1}^n H_j \exp \left( -\frac{(y - d_j)^2}{2\sigma_j^2} \right).$$

Третья часть функции описывает гладкий фон:

$$k_1 \cdot x + k_2 \cdot y + k_3 \cdot xy + k_4.$$

Свободные параметры аппроксимирующей функции  $A_{ij}$ ,  $B_i$ ,  $H_j$  и  $k_l$  определяются методом наименьших квадратов. На рис.2 представлен пример вычитания фона на участке спектра, который содержит пик, образованный совпадающими  $\gamma$ -квантами с энергиями 192,2 кэВ и 602,3 кэВ, которые соответствуют переходам  $2^+ \rightarrow 0^+$  в  $^{104}\text{Mo}$  и  $^{140}\text{Ba}$ . Для автоматического поиска пиков и обработки всего двумерного спектра была создана программа FIT-2S [24,25]. Результатом работы программы являлась таблица координат и интенсивностей всех найденных пиков.

Для установления точности и надежности сделанных оценок интенсивностей пиков можно использовать различные критерии. Во-первых, полученные относительные интенсивности  $\gamma$ -переходов для различных осколков можно сравнить с аналогичными данными, имеющимися в литературе, например, для  $^{100}\text{Zr}$  [56],  $^{148}\text{Ce}$  [54],  $^{136}\text{Te}$  [59],  $^{144}\text{Ba}$  [55].

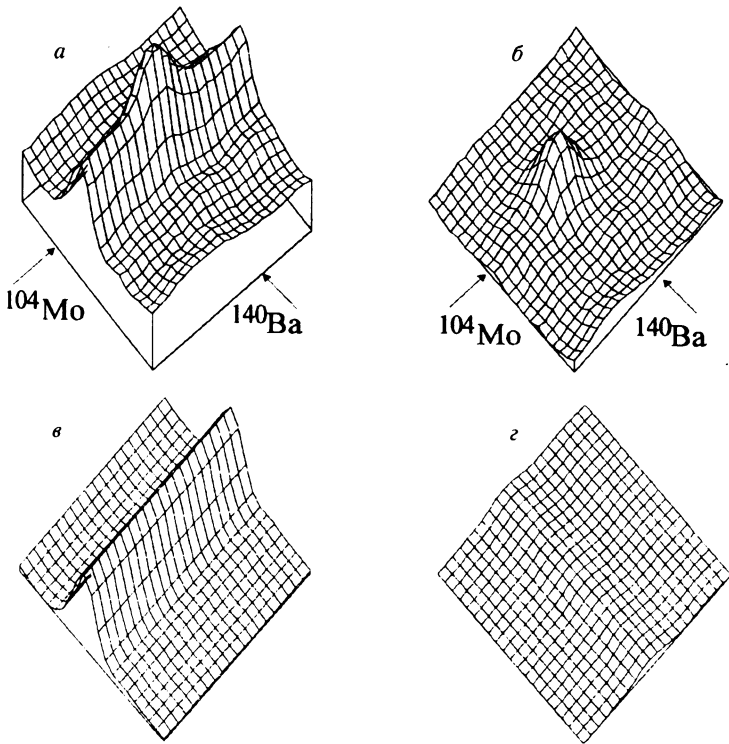


Рис.2. а) Часть двумерного спектра  $\gamma\gamma$ -совпадений, б) спектр после вычитания фона, в) и г) спектры фоновых гребней. Стрелками указаны энергии  $\gamma$ -квантов, соответствующие  $2^+ \rightarrow 0^+$ -переходам в  $^{104}\text{Mo}$  и  $^{140}\text{Ba}$

Другой критерий заключается в проверке соотношений между интенсивностями совпадающих переходов, которые следуют из общих свойств каскада  $\gamma$ -квантов, образующегося при девозбуждении уровней осколков. Известно, что для четно-четных осколков каскад  $\gamma$ -квантов идет последовательно и соответствует  $E2$ -переходам, основное состояние четно-четных ядер имеет нулевой спин, а все состояния вращательной полосы — четный спин. Обозначим состояние уровня осколка  $(2n)^+$ , а  $E2$ -переход  $(2n)^+ \rightarrow (2n-2)^+$ . Тогда для интенсивностей совпадающих переходов (с энергиями  $E_{\gamma 1}$  и  $E_{\gamma 2}$ ) четно-четного ядра выполняются следующие соотношения:

$$I(E_{(2k)^+ \rightarrow (2k-2)^+}, E_{(2n)^+ \rightarrow (2n-2)^+}) = \text{const} \quad (12)$$

при  $k = \text{const}$  и при  $n = 1, 2, \dots, k-1$ ;

$$I(E_{(2k)^+ \rightarrow (2k-2)^+}, E_{2^+ \rightarrow 0^+}) / I(E_{(2k)^+ \rightarrow (2k-2)^+}, E_{4^+ \rightarrow 2^+}) = 1 \quad (13)$$

при  $k > 2$ .

Еще один способ нахождения точности полученных оценок интенсивностей пиков заключается в проверке равенства нулю интенсивностей пиков, соответствующих  $\gamma$ -квантам осколков, для которых сумма ядерных зарядов не равна заряду делящегося ядра ( $Z_1 + Z_2 \neq Z_F$ ) или сумма массовых чисел больше ( $A_1' + A_2' > A_F$ ) или значительно меньше ( $A_1' + A_2' < A_F - 11$ ) массы делящегося ядра. При такой проверке можно также оценить возможности наблюдения тройного деления.

Применение указанных критериев при исследовании спектров показало, что используемый способ определения интенсивностей пиков [24,25] дает правильные оценки, точность которых определяется в основном статистической точностью.

**2.2. Выходы пар осколков.** Изучение совпадающих  $\gamma$ -квантов, испущенных из двух осколков деления, позволяет получать новый тип данных: выходы пар осколков. В работах [24,25,29,30] были определены выходы  $\sim 150$  пар осколков, соответствующих пяти разделениям по зарядам  $^{252}\text{Cf}$ :

$$Z_1/Z_2 = 46/52 \text{ (Pd-Te)}, \quad 44/54 \text{ (Ru-Xe)}, \quad 42/56 \text{ (Mo-Ba)},$$

$$40/58 \text{ (Zr-Ce)}, \quad 38/60 \text{ (Sr-Nd)}.$$

Относительные выходы пар осколков с четными значениями массовых чисел определялись по интенсивности  $\gamma\gamma$ -совпадений, обусловленных  $\gamma$ -переходами с нижнего уровня  $2^+$  в основное состояние  $0^+$  в каждом из ядер. В том случае, когда один из парных осколков имел нечетное значение массы, выход пары осколков находился по сумме интенсивностей  $\gamma\gamma$ -совпадений, образуемых  $\gamma$ -переходом  $2^+ \rightarrow 0^+$  в  $A$ -четном ядре и всеми  $\gamma$ -переходами, ведущими в основное состояние, в  $A$ -нечетном осколке. В случае двух  $A$ -нечетных осколков рассматривалась сумма интенсивностей  $\gamma\gamma$ -совпадений по всем возможным комбинациям  $\gamma$ -переходов, ведущих в основное состояние в каждом из осколков. Интенсивность  $\gamma\gamma$ -совпадений определялась по интенсивности соответствующих пиков в двумерном спектре после учета эффективности регистрации  $\gamma$ -квантов детекторами и вероятности внутренней конверсии ядерных уровней.

Найденные относительные выходы пар осколков были переведены в независимые выходы в результате нормировки с использованием литературных данных о независимых выходах некоторых ядер при спонтанном делении  $^{252}\text{Cf}$  [60]. Для примера в таблице представлены независимые выходы

**Таблица. Независимые выходы Ва-Мо пар осколков спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$ . Выходы даны в процентах**

	$^{138}\text{Ba}$	$^{140}\text{Ba}$	$^{141}\text{Ba}$	$^{142}\text{Ba}$	$^{143}\text{Ba}$	$^{144}\text{Ba}$	$^{145}\text{Ba}$	$^{146}\text{Ba}$	$^{147}\text{Ba}$	$^{148}\text{Ba}$
$^{102}\text{Mo}$			0,048(9)	0,04(2)	0,05(1)	0,07(1)	0,17(5)	0,13(4)	0,10(4)	0,09(4)
$^{103}\text{Mo}$		0,09(3)	0,14(8)	0,08(3)	0,12(8)	0,63(8)	1,3(3)	0,50(6)	0,36(5)	0,15(9)
$^{104}\text{Mo}$	0,07(3)	0,13(4)	0,21(9)	0,32(4)	0,45(7)	1,00(8)	0,84(9)	0,33(3)	0,13(7)	0,05(2)
$^{105}\text{Mo}$		0,10(3)	0,10(3)	0,58(7)	1,16(13)	1,2(1)	0,78(15)	0,12(5)	0,2(1)	
$^{106}\text{Mo}$		0,12(2)	0,35(7)	0,91(8)	1,0(1)	0,58(4)	0,15(6)	0,04(3)		
$^{107}\text{Mo}$		0,10(3)	0,14(3)	0,32(3)	0,37(5)	0,14(5)	0,10(5)			
$^{108}\text{Mo}$		0,10(2)	0,11(3)	0,13(5)	0,16(4)	0,08(5)				

пар осколков для Ва-Мо деления  $^{252}\text{Cf}$ . Аналогичные данные о выходах пар осколков были получены и для Te-Pd, Xe-Ru, Ce-Zr, Nd-Sr разделений  $^{252}\text{Cf}$ .

Из таблиц выходов пар осколков можно получить некоторые интегральные характеристики ядерного деления. Суммируя выходы пар, содержащих осколок с массой  $A_1'$  и зарядом  $Z_1$ , можно определить выход данного осколочка  $Y(Z_1, A_1')$  при делении ядра. Выходы различных изотопов бария и молибдена можно получить из приведенной таблицы, суммируя выходы пар осколков, соответственно, по строчкам и по столбцам. Полученные таким образом изотопные распределения для десяти элементов показаны на рис.3. Представленные на рисунке независимые выходы различных изотопов неплохо согласуются с аналогичными данными, полученными в результате расчетов [105].

Каждая наблюдаемая пара осколков образуется после испарения определенного числа мгновенных нейтронов из первичных осколков  $v_{\text{tot}} = A_F - A_1' - A_2'$ . Поэтому, просуммировав выходы пар осколков, соответствующие эмиссии 0, 1, 2 и т.д. нейтронов, можно получить распределения множественности нейтронов для различных значений ядерных зарядов осколков. На рис.4 представлены распределения множественности нейтронов для пяти разделений по заряду  $^{252}\text{Cf}$ . Для четырех зарядовых разделений экспериментальные точки хорошо описываются гауссовскими кривыми. Разделение Ва-Мо отличается от других разделений повышенным выходом пар осколков, образованных после испарения семи и более нейтронов. Эта

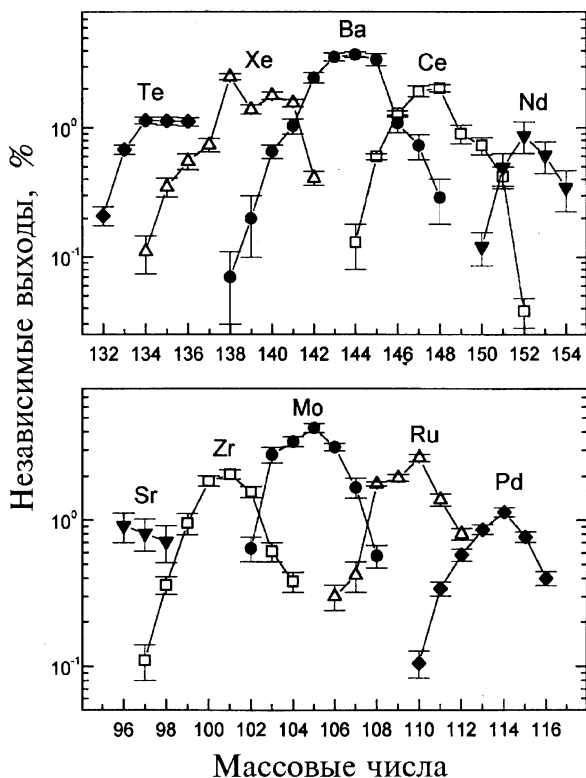


Рис.3. Изотопные распределения осколков спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$

особенность разделения Ва-Мо хорошо проявляется в распределении множественности нейтронов. Как видно из рис.4, Ва-Мо разделение, кроме компоненты, которая присутствует в соседних разделениях, содержит вторую компоненту со средним значением множественности нейтронов, равным 8.

Наблюдаемые в распределении множественности нейтронов Ва-Мо разделения две компоненты позволяют предположить наличие двух мод деления для данной зарядовой асимметрии осколков деления  $^{252}\text{Cf}$ . Действительно, различные моды деления отличаются конфигурацией ядра в точке разрыва. Каждая мода деления имеет распределение конфигураций около наиболее вероятной формы ядра, которая характеризуется масс-асимметрией образующихся осколков и их деформацией (то есть расстоянием меж-



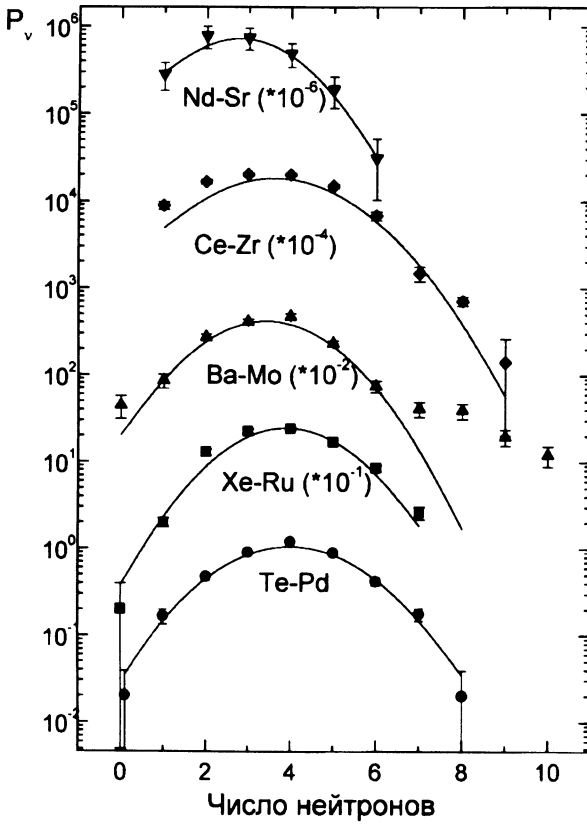


Рис.4. Распределения множественности нейтронов для пяти разделений по зарядам  $^{252}\text{Cf}$ . Линиями изображены результаты аппроксимации экспериментальных точек гауссовскими кривыми. Вероятности испарения нейтронов ( $P_v$ ) после умножения на коэффициенты, указанные на рисунке, дают выходы нейтронов в процентах на деление

ду центрами осколков). Бимодальное деление ядер было обнаружено и исследовано в экспериментах, в которых наблюдали массовые распределения и распределения полной кинетической энергии осколков деления [9,106]. Массовые распределения и спектры кинетической энергии осколков для каждой моды деления хорошо описываются распределением Гаусса. Признаком наличия двух (или более) мод деления является наблюдение в экспериментальных массовых и энергетических спектрах двух (или не-

скольких) компонент, то есть возможность описания экспериментальных спектров суперпозицией гауссианов. Лучшего разрешения делительных мод можно достичь, наблюдая массовые спектры осколков при различных фиксированных значениях кинетической энергии или спектры кинетической энергии при фиксированных значениях масс осколков. Таким способом наблюдались моды асимметричного деления доактинидных ядер [9]. На рис.5 представлены экспериментальные спектры кинетической энергии осколков деления  $^{213}\text{At}$  для различных диапазонов масс, взятые из [9]. Особенностью метода, основанного на измерениях выходов пар осколков, является то, что бимодальное деление наблюдалось в спектрах множественности нейтронов при различных значениях зарядов осколков (см. рис.4).

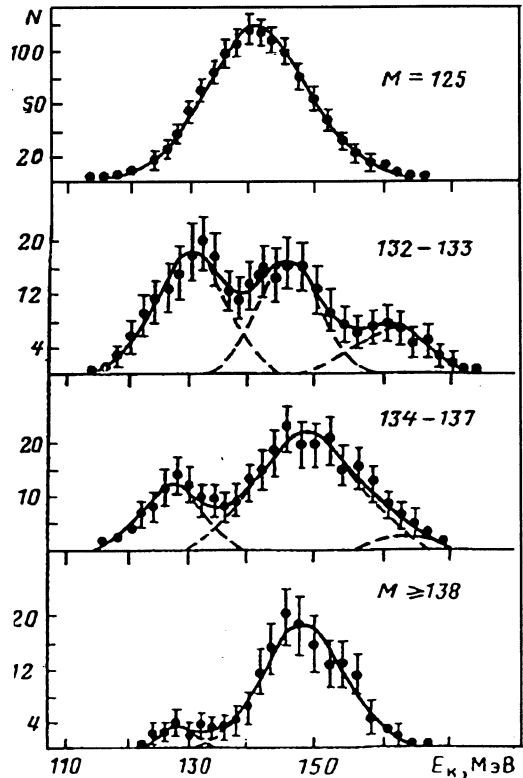


Рис.5. Распределения кинетической энергии осколков деления  $^{213}\text{At}$  для выбранных диапазонов масс осколков [9]

Пары вторичных осколков образуются в результате девозбуждения первичных осколков, и поэтому полученные таблицы выходов пар вторичных осколков содержат информацию о массовых и энергетических распределениях первичных осколков. В работах [24,25,30] на основании выходов пар вторичных осколков были восстановлены параметры массовых и энергетических распределений первичных осколков: Xe-Ru, Ba-Mo и Ce-Zr. Анализ был выполнен в предположении, что распределения первичных осколков по массе, энергии возбуждения и полной кинетической энергии при фиксированном разделении по заряду имеют характер гауссовых для каждой моды деления. Экспериментальные данные хорошо описывались для Xe-Ru и Ce-Zr разделений одной модой деления, а для Ba-Mo разде-

ления — двумя модами деления. Первая мода деления для Ва-Мо деления имела обычное значение полной кинетической энергии осколков  $\overline{TKE}_1 = 189$  МэВ. Для второй моды деления была получена значительно меньшая величина полной кинетической энергии осколков ( $\overline{TKE}_2 = 154$  МэВ). Вторая мода деления дает основной вклад в формирование самых легких пар вторичных Ва-Мо осколков.

Следует отметить, что найденные в результате анализа такие важные характеристики деления, как средние значения полных кинетических энергий ( $\overline{TKE}$ ) и значения дисперсий распределений полной кинетической энергии ( $\sigma_{TKE}$ ) для трех зарядовых разделений Хе-Ru, Ва-Мо и Се-Zr неплохо согласуются с аналогичными данными, полученными в прямых измерениях кинетических энергий осколков [31,90]. Характеристики массовых распределений первичных осколков  $\overline{A}(Z)$  и  $\sigma_A$ , полученные в [24,25,30], неплохо согласуются с результатами расчетов, выполненных на основе анализа совершенно других экспериментальных данных: кумулятивных, фракционных и независимых выходов осколков спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$  [105].

Таким образом, данные о выходах пар осколков позволяют изучать характеристики первичных осколков деления, образующихся сразу после разрыва ядра.

**2.3. Угловые моменты осколков спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$ .** Наблюдение совпадающих  $\gamma$ -квантов, испущенных из двух одновременно образовавшихся осколков деления, позволяет получать более подробные данные, характеризующие угловые моменты осколков, по сравнению с методами исследования, которые применялись ранее. В эксперименте можно измерить интенсивности  $\gamma$ -переходов между различными возбужденными состояниями для осколка с зарядом  $Z_1$  и массой  $A'_1$ , когда этот осколок образуется в паре с определенным дополнительным осколком, имеющим заряд  $Z_2 = Z_F - Z_1$  и массу  $A'_2 = A_F - A'_1 - \nu_{\text{tot}}$ , где  $\nu_{\text{tot}}$  — полное число нейтронов, испарившихся из первичных осколков при формировании исследуемой пары осколков. То есть для осколка с определенными значениями  $Z$  и  $A'$  измеряются интенсивности  $\gamma$ -переходов, когда этот осколок образуется в результате испарения определенного числа нейтронов  $\nu_{\text{tot}}$ .

По измеренным интенсивностям  $\gamma$ -переходов между различными возбужденными состояниями можно определить вероятности заселения этих состояний в делении. Вероятность заселения состояния  $P_i$  находится как разность между суммой интенсивностей  $I_{k \rightarrow i}$  всех переходов, ведущих в это состояние, и суммой интенсивностей  $I_{i \rightarrow l}$  всех переходов, идущих из этого состояния:

$$P_i = R \cdot \Delta I_i = R \left( \sum_k I_{k \rightarrow i} - \sum_l I_{i \rightarrow l} \right),$$

где  $R$  — нормировочный множитель:  $R = 1 / \sum_i \Delta I_i$ .

С найденными значениями  $P_i$  и известными спинами состояний  $J_i$  можно определить среднее значение углового момента для исследуемого осколка:

$$\bar{J}_\gamma = \frac{\sum_i P_i \cdot J_i}{\sum_i P_i}.$$

В работах [28,30] были выбраны для изучения четно-четные осколки, так как для таких ядер наиболее хорошо изучены схемы уровней, которые заселяются при делении. Для выбранного осколка, образованного в паре с дополнительным осколком, имеющим четное значение массового числа, интенсивность  $\gamma$ -перехода определялась по интенсивности совпадений, обусловленных  $\gamma$ -переходом в исследуемом ядре и переходом  $2^+ \rightarrow 0^+$  в дополнительном осколке. В том случае, когда дополнительный осколок имел нечетное значение массы, рассматривалась сумма интенсивностей совпадений, образуемых  $\gamma$ -переходом в исследуемом ядре и всеми переходами, ведущими в основное состояние, в дополнительном осколке.

Интенсивности  $\gamma$ -переходов, вероятности заселения уровней и средние значения угловых моментов были получены для  $^{144}\text{Ba}$ ,  $^{138}\text{Xe}$  и  $^{140}\text{Xe}$ , когда эти осколки образуются в парах с различными изотопами, соответственно, Mo и Ru в результате испарения различного числа нейтронов (от 2 до 6 нейтронов). Зависимости средних угловых моментов для  $^{144}\text{Ba}$ ,  $^{138}\text{Xe}$  и  $^{140}\text{Xe}$  от  $\nu_{\text{tot}}$  представлены на рис.6. Для этих тяжелых осколков величина  $\bar{J}_\gamma$  мало меняется с изменением числа испарившихся нейтронов. Однако, если учесть угловой момент, уносимый испарив-

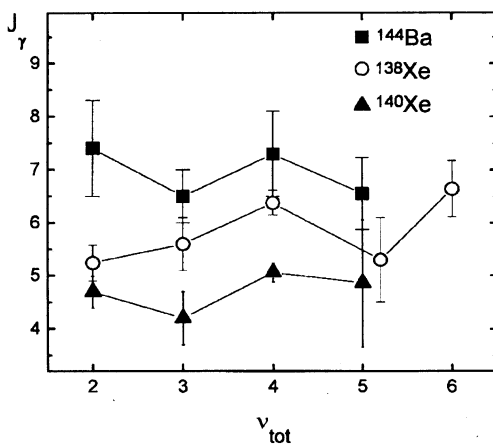


Рис.6. Зависимости угловых моментов осколков  $^{144}\text{Ba}$ ,  $^{138}\text{Xe}$  и  $^{140}\text{Xe}$  от полного числа нейтронов ( $\nu_{\text{tot}}$ ), испарившихся из первичных осколков при образовании этих изотопов

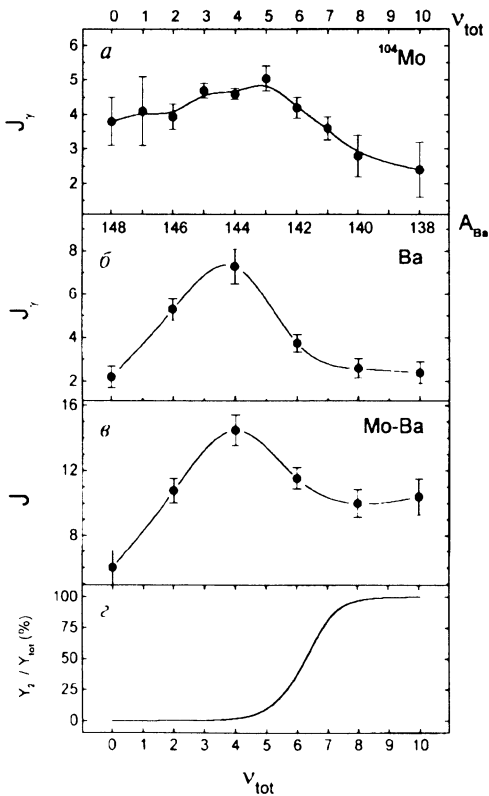


Рис. 7. В зависимости от полного числа нейтронов показаны: а) угловые моменты осколков  $^{104}\text{Mo}$ ; б) угловые моменты осколков Ba, которые образуются в парах с  $^{104}\text{Mo}$ ; в) суммарные угловые моменты первичных Ba-Mo пар осколков; г) относительный вклад второй моды деления в образование Ba- $^{104}\text{Mo}$  пар осколков

шимися нейтронами, полученные величины  $J_\gamma$  позволяют сделать вывод о росте углового момента первичных осколков Xe и Ba с увеличением их энергии возбуждения, что согласуется с выводами теоретических [19, 20] и экспериментальных работ [107, 108].

Необычная зависимость углового момента первичных осколков была получена при исследовании пар осколков, образованных  $^{104}\text{Mo}$  и различными изотопами Ba после испарения от 0 до 10 нейтронов [28, 30].

На рис. 7, а и б представлены зависимости  $J_\gamma$  от  $\nu_{tot}$ , соответственно, для  $^{104}\text{Mo}$  и четных изотопов Ba, которые образуются в парах с  $^{104}\text{Mo}$ . Как видно из этих рисунков, угловые моменты исследуемых пар осколков увеличиваются при изменении числа нейтронов от 0 до 5, а затем уменьшаются при дальнейшем увеличении числа испарившихся нейтронов. На рис. 7, в даны суммарные угловые моменты первичных Ba-Mo пар осколков, полученные в результате учета углового момента, уносимого нейтронами. Угловой момент первичных Ba-Mo пар осколков растет с увеличением множественности нейтронов в диапазоне от 0 до 4, а затем, при дальнейшем увеличении числа испарившихся нейтронов, наблюдается anomalous поведение углового момента осколков — при увеличении числа испарившихся нейтронов, то есть энергии возбуждения осколков, нет роста углового момента осколков. Такое поведение углового момента можно объяснить присутствием двух мод деления и различиями, которые существуют между этими модами в возбуждении коллективных степеней свободы в

делящемся ядре. На рис.7,2 представлен относительный вклад второй моды деления в образование исследуемых Ва-Мо пар осколков, который был получен в результате анализа выходов пар вторичных осколков [24,25]. Из рисунка видно, что имеется корреляция спада углового момента осколков  $J_{\gamma\text{Mo}}$  и  $J_{\gamma\text{Ba}}$  и аномального поведения угловых моментов первичных осколков с вкладом второй моды в образование исследуемых Ва-Мо пар.

**2.4. Заключение.** Метод исследования ядерного деления, основанный на спектрометрии множественных  $\gamma$ -квантов деления, позволяет определить новые детальные характеристики деления: выходы пар осколков и вероятности заселения возбужденных уровней для осколков, составляющих эти пары. Непосредственно из этих экспериментальных данных следуют интегральные характеристики деления, которые также получены впервые, — это распределения множественности нейтронов для различных разделений по заряду делящегося ядра и зависимости угловых моментов индивидуальных осколков от числа испарившихся нейтронов. Полученные экспериментальные данные содержат информацию о зарядах, массах, энергиях возбуждения и спинах пар осколков деления. Эксперименты, в которых новый метод исследования деления будет сочетаться с традиционными методами: измерением скоростей или/и кинетических энергий двух осколков, являются перспективными для исследования процесса ядерного деления, так как позволят получить данные, наиболее полно характеризующие деление ядра. Новый метод может быть применен для исследования как спонтанного, так и низкоэнергетического деления различных ядер.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **The Nuclear Fission Process.** — Ed. C.Wagemans. CRC Press, Boca Raton, USA, 1991.
2. **Pashkevich V.V.** — Nucl. Phys., 1971, v.A161, p.275.
3. **Berger J.F., Girod M., Gogny D.** — In: Proc. Conf. «Fifty Years Research in Nuclear Fission», Berlin, 1989; Nucl. Phys., 1989, v.A502, p.85c.
4. **Brosa U., Grossman S., Müller A.** — Z. Naturforsch., 1986, v.41a, p.1341.
5. **Möller P., Nix J.R., Swiatecki W.J.** — Nucl. Phys., 1989, v.A492, p.348.
6. **Cwiok S., Rozmej P., Sobiczewski A., Patyk Z.** — Nucl. Phys., 1989, v.A491, p.281.
7. **Knitter H.-H. et al.** — Z. Naturforsch., 1987, v.42a, p.786.
8. **Hoffman D.C.** — In: Proc. Conf. «Fifty Years Research in Nuclear Fission»; Nucl. Phys., 1989, v.A502, p.21c.
9. **Иткис М.Г. и др.** — Физика элемент. частиц и атомного ядра, 1988, т.19, с.701.
10. **Brosa U., Grossman S., Müller A.** — Phys. Rep., 1990, v.197, p.167.
11. **Bocquet J.P., Brissot R.** — In: Proc. Conf. «Fifty Years Research in Nuclear Fission», Berlin, 1989; Nucl. Phys., 1989, v.A502, p.213c.
12. **Berlanger M., Gobbi A., Hanappe F. et al.** — Z. Phys., 1979, v.A291, p.133.
13. **Nifenecker H.A.** — J. Phys. Lett., 1980, v.41, p. 47.
14. **Boucheneb N., Geltenbort P., Asghar M. et al.** — Nucl. Phys., 1989, v.A502, p.261c.

15. Djebara M., Asghar M., Bocquet J.P. et al. — Nucl. Phys., 1989, v.A496, p.346.
16. Nifenecker H.A., Mariolopoulos G., Bocquet J.P. et al. — Z. Phys., 1982, v.A308, p.39.
17. Gönnewein F. — In: Proc. Int. Conf. «Fiftieth Anniversary of Nuclear Fission», Leningrad, 1989; Khlopin Institute, S.Petersburg, 1992, v.1, p.182.
18. Bocquet J.P., Faust H.R., Fowler M. et al. — Z. Phys., 1990, v.A335, p.41.
19. Rasmussen J.O., Nörenberg W., Mang H.J. — Nucl. Phys., 1969, v.A136, p.465.
20. Zielinska-Pfabe M., Dietrich K. — Phys. Rev., 1974, v.B49, p.123.
21. Hamilton J.H. et al. — In: Proc. Int. School-Seminar on Heavy Ion Physics, Dubna, Russia, 1993; Oganessian Yu.Ts., Penionzhkevich Yu.E., Kalpakchieva R. (Eds.), JINR, Dubna, 1993, v.1, p.276.
22. Hamilton J.H., Ter-Akopian G.M., Oganessian Yu.Ts. et al. — Low Energy Nuclear Dynamics (LEND'95), St. Petersburg. Singapore: World Scientific, 1995, p.187.
23. Hamilton J.H. et al. — Prog. Part. Nucl. Phys., 1995, v.35, p.635.
24. Ter-Akopian G.M., Hamilton J.H., Oganessian Yu.Ts. et al. — In: Proc. Conf. Exotic Nuclei and Atomic Masses, ENAM 95. M. de Saint Simon and Sorlin (Eds.), Editions Frontiers, 1995, p.383.
25. Тер-Акопьян Г.М. и др. — В сб.: Материалы совещания по ядерной спектроскопии и структуре ядра. С.-Петербург, 1995. Известия РАН, сер. физ., 1996, т.60, с.162.
26. Ter-Akopian G.M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1994, v.73, p.1477.
27. Ter-Akopian G.M. et al. — Phys. Rev. Lett., 1996, v.77, p.32.
28. Тер-Акопьян Г.М. и др. — В сб.: Материалы совещания по ядерной спектроскопии и структуре ядра. М., 1996. Известия РАН, сер. физ., 1997, т.61, №1, с.194.
29. Тер-Акопьян Г.М. и др. — В сб.: Материалы совещания по ядерной спектроскопии и структуре ядра. М., 1996. Известия РАН, сер. физ., 1997, т.61, №4, с.747.
30. Ter-Akopian G.M. et al. — Phys. Rev., 1997, v.C55, №3, p.1146.
31. Budtz-Jørgensen C., Knitter H.-H. — Nucl. Phys., 1988, v.A490, p.307.
32. Watson R.L., Wilhelmy J.B., Jared R.C. et al. — Nucl. Phys., 1970, v.A141, p.449.
33. Terrell J. — Phys. Rev., 1962, v.127, p.880.
34. Schmitt H.W., Gibson W.M., Neiler J.H. et al. — In: Proc. Symp. Physics and Chemistry of Fission. IAEA. Vienna, 1965, v.1, p.531.
35. Weissenberger E., Geltenbort P., Oed A., Gönnewein F., Faust H. — Nucl. Instr. Meth., 1986, v.A248, p.506.
36. Lang D.W., Walsh R.L. — Nucl. Instr. Meth., 1982, v.A200, p.389.
37. Хрячков В.А. и др. — В сб.: Материалы междунар. конф. «Деление ядер — 50 лет». Л., 1989; С.-Петербург, 1992, т.2, с.454.
38. Budtz-Jørgensen C. et al. — Nucl. Instr. Meth., 1987, v.A258, p.209.
39. Oed A., Geltenbort P., Gönnewein F., Manning T., Souque D. — Nucl. Instr. Meth., 1983, v.A205, p.455.
40. Signarbieux C. et al. — J. Physique Lett., 1985, v.46, p.L1095.
41. Hamsch F.-J., Knitter H.-H., Budtz-Jørgensen C. — Nucl. Phys., 1993, v.A554, p.209.
42. Хрячков В.А. и др. — Ядерная физика, 1991, т.53, с.621.
43. Oed A., Geltenbort P., Brissot R. et al. — Nucl. Instr. Meth., 1984, v.A219, p.569.

44. Oed A. et al. — Nucl. Instr. Meth., 1981, v.179, p.71.
45. Gönnerwein F. — Nucl. Phys., 1989, v.A502, p.159c.
46. Reisdorf W., Unik J.P., Griffin H.C., Glendenin L.E. — Nucl. Phys., 1977, v.A177, p.337.
47. Nifenecker H.A., Blachot J., Bocouet J.P. et al. — In: Proc. Symposium Physics and Chemistry of Fission, 1979 Jülich. IAEA, Vienna, 1980, v.2, p.35.
48. Nolan P.J., Beck F.A., Siegert G. — Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1994, v.45, p.561.
49. Aryaeinejad R. et al. — Phys. Rev., 1993, v.C48, p.566.
50. Buttler-Moore K., Hamilton J.H., Ramayya A.V. et al. — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 1993, v.19, p.L121.
51. Buttler-Moore K., Aryaeinejad R., Cole J.D. et al. — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.1339.
52. Lu Q.H., Buttler-Moore K., Zhu S.J. et al. — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.1348.
53. Zhu S.J., Lu Q.H., Hamilton J.H. et al. — Phys. Lett., 1995, v.357B, p.273.
54. Phillips W.R. et al. — Phys. Lett., 1988, v.B212, p.402.
55. Phillips W.R. et al. — Phys. Rev. Lett., 1986, v.57, p.3257.
56. Hotchkis M.A.C., Durell J.L., Fitzgerald J.B. et al. — Nucl. Phys., 1991, v.A530, p.111.
57. Mawbray A.S. et al. — Phys. Rev., 1990, v.C42, p.1126.
58. Hotchkis M.A.C. et al. — Phys. Rev. Lett., v.64, 1990, p.2123.
59. Cizewski J.A. et al. — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.1294.
60. Cheifetz E., Wilhelmy J.B., Jared R.C., Thompson S.G. — Phys. Rev., 1971, v.C4, p.1913.
61. Богдзель А.А. и др. — Сообщение ОИЯИ Р3-87-862, Дубна, 1987.
62. Гундорин Н.А. и др. — Сообщение ОИЯИ Р15-94-526, Дубна, 1994.
63. Quade U., Rudolph K., Siegert G. — Nucl. Instr. Meth., 1979, v.A164, 1979, p.435.
64. Clerc H.G. et al. — Nucl. Instr. Meth., 1975, v.A124, p.607.
65. Siegert G., Wollnik H., Greif J. et al. — Phys. Lett., 1974, v.53B, p.45.
66. Bocquet J.P., Brissot R., Faust H.R. — Nucl. Instr. Meth., 1988, v.A267, p.466.
67. Budtz-Jørgensen C., Knitter H.-H., Straede Ch. et al. — Nucl. Instr. Meth., 1987, v.A258, p.209.
68. Skarsvag K. — Nucl. Phys., 1975, v.A253, p.274.
69. Boldeman J.W. — Nucl. Data Stand. for Nucl. Measur., 1992, p.108.
70. Maslin E.E. et al. — Phys. Rev., 1965, v.164, p.1520.
71. Boldeman J.W. et al. — Aust. J. Phys., 1971, v.24, p.821.
72. Müller R. et al. — Phys. Rev., 1984, v.C29, p.885.
73. Apalin V.F. et al. — Nucl. Phys., 1965, v.71, p.533.
74. Wild J.F., van Aarle J., Westmeier W. et al. — Phys. Rev., 1990, v.C41, p.640.
75. Signarbiieux C., Babinet R., Nifenecker H., Poitou J. — In: Proc. of Simp. Physics and Chemistry of Fission. IAEA, Vienna, 1974, v.2, p.179.
76. Walsh R.L., Boldeman J.W. — Nucl. Phys., 1977, v.A276, p.189.
77. Bowman H.R., Milton J.C.D., Thompson S.G., Swiatecki W.J. — Phys. Rev., 1963, v.129, p.2133.
78. Schmidt R., Henschel H. — Nucl. Phys., 1983, v.A395, p.29.
79. Алхазов И.Д., Герасименко Б.Ф., Кузнецов А.В. и др. — Ядерная физика, 1988, т.48, с.1635.



80. **Van Aarle J., Westmeier W., Esterlund R.A., Patzelt P.** — Nucl. Phys. 1994, v.A578, p.77.
81. **Gindler J.** — Phys. Rev., 1979, v.C19, p.1806.
82. **Milton J.C., Fraser J.S.** — In: Proc. Symp. Physics and Chemistry of Fission. IAEA, 1965, v.2, p.39.
83. **Jahke U. et al.** — In: Proc. Symp. Detectors in Heavy-Ion Reactions, Lecture Notes in Physics, 1983, v.178, p.179.
84. **Habs D. et al.** — In: Proc. Symp. Detectors in Heavy-Ion Reactions, Lecture Notes in Physics, 1983, v.178, p.163.
85. **Glässel P. et al.** — Nucl. Phys., 1989, v.A502, p.315c.
86. **Schmitt H.W., Lide R.W., Picasanton F.** — Nucl. Instr. and Methods, 1968, v.63, p.237.
87. **Stein W.E.** — In: Proc. Symp. Physics and Chemistry of Fission. IAEA, 1965, v.1, p.491.
88. **Nakagome Y., Kanno I., Kimura I.** — In: Proc. 50 Years with Nuclear Fission. Washington, 1989, v.1, p.360.
89. **Möller P., Nix J.R.** — At. Data Nucl. Data Tables, 1981, v.26, p.165.
90. **Nifenecker H., Signarbieux C., Babinet R., Poitou J.** — In: Proc. Symp. Phys. and Chem. of Fission, Rochester, 1973; IAEA, Vienna, 1974, v.2, p.117.
91. **Nix J.R., Swiatecki W.J.** — Nucl. Phys., 1965, v.71, p.1.
92. **Струтинский В.М.** — ЖЭТФ, 1960, т.39, с.781.
93. **Nifenecker H., Signarbieux C., Ribrag M., Poitov J., Matuszek J.** — Nucl. Phys., 1972, v.A189, p.285.
94. **Sarantites D.G., Gordon G.E., Coryell C.D.** — Phys. Rev., 1965, v.138, p.B353.
95. **Naik H., Dange S.P., Singh R.J., Datta T.** — Nucl. Phys., 1995, v.A587, p.273.
96. **De Frenne D.** — The Nuclear Fission Process, ed. C. Wagemans, CRC Press, 1991, p.476.
97. **Huizenga J.R., Vandenbosch R.** — Phys. Rev., 1960, v.120, p.1305.
98. **Vandenbosch R., Huizenga J.R.** — Phys. Rev., 1960, v.120, p.1313.
99. **Wilhelmy J.B. et al.** — Phys. Rev., 1972, v.C5, p.2041.
100. **Radford D.C.** — Nucl. Instr. and Methods, 1995, v.A361, p.306.
101. **Radford D.C.** — Nucl. Instr. and Methods, 1995, v.A361, p.297.
102. **Smith A.G., Vermeer W.J.** — Nucl. Instr. and Methods, 1994, v.A350, p.314.
103. **Emellanov D.A. et al.** — Nucl. Instr. and Meth., 1980, v.178, p.555.
104. **Булла Ф. и др.** — Сообщение ОИЯИ Р10-80-104, Дубна, 1980.
105. **Wahl A.C.** — Atomic Data and Nuclear Data Tables, 1988, v.39.
106. **Hulet E.K. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1986, v.56, p.313.
107. **Densschlag H.O. et al.** — In: Proc. Symp. Physics and Chemistry of Fission. IAEA, Vienna, 1980, v.2, p.153.
108. **Bocquet J.P. et al.** — In: Proc. Symp. Physics and Chemistry of Fission. IAEA, Vienna, 1980, v.2, p.179.

## MAGNETIC DIPOLE EXCITATIONS IN DEFORMED NUCLEI

*N. Lo Iudice*

Dipartimento di Scienze Fisiche, Università di Napoli «Federico II»  
and Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Mostra d'Oltremare Pad. 19, I-80125 Napoli, Italy

The many models adopted to study the properties of the low-lying magnetic dipole excitations known as scissors mode observed in most deformed nuclei are reviewed. Attention is focused first on the geometrical two-rotor model (TRM) whose predictions gave the motivation for searching for such a mode. The consistency of these predictions with the most meaningful collective properties of the mode is emphasized. More sophisticated descriptions carried out within different Boson models are then reviewed. Their strict connection with the TRM is proved. An even closer link is shown to exist between the TRM and schematic random-phase approximation (RPA). From the phenomenological and schematic models, confined to the description of the collective features of the  $M1$  transitions, the analysis moves to the fully microscopic approaches, the only ones capable of accounting for the global properties of the mode as well as for the fragmentation of its  $M1$  strength. shell-model approaches, widely adopted for light and medium-light nuclei, are discussed. A more detailed analysis is devoted to the RPA, the most widely adopted microscopic scheme, especially in heavy nuclei. The path leading from the early incomplete and too approximate approaches yielding contradictory results to the most recent and refined studies converging to similar conclusions is sketched. The quasiparticle-phonon model (QPNM) as a way of improving the RPA description of the  $M1$  spectrum by including the coupling with two-phonon RPA states, is finally illustrated and the related results are discussed. The study of the  $M1$  spectra observed recently in deformed odd-mass nuclei carried out in a QPNM context completes the review.

Рассмотрены свойства низколежащих магнитных дипольных возбуждений, обнаруженных недавно во многих деформированных ядрах экспериментально и названных «ножничной» модой. Представлен обзор ряда моделей, применяемых для изучения указанных состояний. Прежде всего дано описание двухроторной модели (ДРМ), предсказания которой послужили основанием для поиска этой новой коллективной ядерной моды. Проанализированы другие феноменологические и микроскопические ядерные модели, и показана их связь с ДРМ. Детально рассмотрено приближение случайных фаз (ПСФ), наиболее разработанное направление в теории, особенно для тяжелых ядер. Продемонстрированы пути улучшения ПСФ, выполненные в квазичастично-фононной модели ядра (КФМЯ) посредством учета связи с двухфононными конфигурациями. Проведено сравнение  $M1$ -спектров, измеренных недавно в деформированных А-нечетных ядрах, с рассчитанными в КФМЯ.

## 1. INTRODUCTION

The field of magnetic dipole response has expanded considerably its scope since the discovery of low-lying  $M1$  excitations, known as scissors mode, made by Richter and coworkers in  $^{156}\text{Gd}$  through a high-resolution inelastic electron scattering experiment [1]. The search for such a mode was stimulated by the prediction, made within the TRM [2], of a collective  $M1$  mode promoted by a rotational oscillation of proton versus neutron deformed fluids. The name «scissors mode» was indeed suggested by such a geometrical picture. A magnetic excitation of similar nature was predicted as mixed-symmetry state in the proton-neutron interacting boson model (IBM2) [3,4] and as giant angle resonance in a schematic model [5].

The discovery has led to a renaissance of low-energy nuclear spectroscopy. Not only electron scattering but also nuclear resonance fluorescence (NRF) and proton scattering have been adopted for a systematic search of this new mode. As summarized in several review articles [6—10], the mode has been detected in most of the deformed nuclei ranging from the fp-shell to rare-earth and actinide regions. The search has also stimulated important advances in the experimental techniques which have enabled a quite complete characterization of the mode. It is well established by now that this is fragmented into several closely packed  $M1$  transitions. These are mainly promoted by the convection current, and their summed  $M1$  strength grows quadratically with the nuclear deformation parameter. This latter property was found recently in the rare-earth region [11—15] and represents the most spectacular signature of the mode.

With the use of Compton polarimeters in NRF which has enabled parity assignment [16], unexpectedly strong  $E1$  transitions in the same energy range of the scissors mode, or immediately below, have been detected [17—20].

Another byproduct of the systematic study of the mode has been the discovery of spin excitations. Inelastic proton scattering experiments on  $^{154}\text{Sm}$  and other deformed nuclei [21], have found a sizeable, strongly fragmented,  $M1$  spin strength distributed over an energy range of 4 to 12 MeV so as to give rise to a double-hump [22].

The experimental discovery has stimulated a proliferation of theoretical investigations. The gross features of the mode were analysed in several phenomenological models. We recall, among them the IBM2 [23—29], the extended Bohr–Mottelson model [30], the closely related neutron-proton deformation model (NPD) [31], and the generalized coherent state model (CGSM) [32,33]. Studies carried out in a sum rule approach [34], in schematic random-phase approximation [35—37] and in a mean field context [38] have given illuminating insights on the shell structure of the mode.

Phenomenological and schematic models ignore many degrees of freedom, such as spin. For this reason they are inadequate for describing the detailed structure of the mode. An exhaustive analysis covering also the energy strength distribution can be carried out only in fully microscopic approaches.

Microscopic calculations were performed in the context of standard shell-model for medium-light nuclei [39—42]. These can be viewed as the microscopic counterpart of an extended version of the interacting boson model, the IBM3, also used to study the  $M1$  mode in the same nuclei [43,44]. An alternative and valid approach for this nuclear region has consisted in adopting an  $SU(3)$  shell model basis [45—47]. The same  $SU(3)$  scheme was modified so as to enable the description of the mode also in heavy nuclei [48,49]. In heavy deformed nuclei, however, apart from few exceptions [50,51], most of the microscopic studies were carried out in RPA [52—77] or in Tamm-Dancoff approximation (TDA) [78,79].

A new boost to theoretical studies has been stimulated by the discovery of the quadratic deformation law. This property has been studied in practically all models adopted previously either in the microscopic [42,69,74,77,79—83] or phenomenological domain [79,84—92]. All these analyses give a conclusive support to the scissors nature of the magnetic transitions found experimentally. Nonetheless, a complete detailed understanding of the related phenomenology is still lacking. The present situation is in fact more complex than that of the  $E1$  resonance. Unlike in the case of the  $E1$  mode, the  $M1$  transitions lead to bound states, so that the theoretical models have to reproduce the pattern of fragmentation instead of a broad peak. Another feature of the  $M1$  mode which complicates its description is, for example, the interplay between spin and orbital motion. Because of the many degrees of freedom involved in the transitions, several components of the nuclear Hamiltonian enter into play in determining the size and the distribution pattern of the strength. All these aspects are taken into account in RPA calculations. These, however, being confined within a space spanned by two quasiparticle states, may miss some configurations which enter into the  $M1$  channel either directly or through coupling.

An effort for improving and extending the TDA and RPA calculations has been made recently by studying the mode within the quasiparticle-phonon nuclear model (QPNM) [93] which accounts for the coupling with two RPA phonons [94].

Theoretical studies have also posed the question of whether the scissors mode survives as one moves from even- to odd-mass nuclei [95—98]. After a first negative attempt carried out in electron scattering [99], NRF experiments have detected in several odd-mass deformed nuclei of the rare-earth region a sizeable dipole strength whose distribution pattern follows closely the  $M1$  spectrum of the nearby even mass partners [20,100,101]. Schematic and phenomenological models are even more inadequate for facing the extreme complexity

of the  $M1$  spectrum in odd-mass nuclei. Fully microscopic calculations are badly needed for this purpose. The first and only calculation of this kind has been carried out recently using the QPNM formalism [102,103].

Section 2 deals with the TRM prediction and the experimental evidence of the mode. The systematic experimental analyses are briefly reviewed. The consistency of the model with the deformation law is discussed. Its microscopic formulation is illustrated. In Sec. 3 the description of the mode within different Boson models is discussed. The analysis covers the extended Bohr–Mottelson, the NPD, the GCSM and the algebraic IBM2 models. The review then moves to shell-model studies (Sec. 4). Standard as well as  $SU(3)$  shell model calculations are presented. The microscopic investigations go on with RPA. The method, the problem, the early calculations have run into, the way of solving them and, finally, the most meaningful results are discussed in Section 5. We go then beyond RPA by reviewing briefly the QPNM and by discussing the results obtained in relation to experiments and RPA (Sec. 6). The review is completed by the discussion of the  $M1$  spectra observed in deformed odd-mass nuclei and studied within the QPNM formalism in Sec. 7. Conclusions are drawn in the final Section 8.

## 2. SCISSORS MODE: PREDICTION AND EXPERIMENTAL EVIDENCE

The angular momentum carried out by the nucleus does not produce any intrinsic excitation. This reflects the spherical symmetry of the nuclear Hamiltonian just as its translational invariance forbids the occurrence of an isoscalar collective  $E1$  mode. One may however carry further the analogy with translations and assume that protons and neutrons form two distinct deformed fluids free to rotate separately about a common axis (perpendicular to their symmetry axes). Because of their mutual interaction, they may undergo a rotational oscillation giving rise to an intrinsic  $M1$  excitation. This is the underlying idea of the TRM [2] which represents the rotational counterpart of the semi-classical picture of the  $E1$  giant resonance [104,105].

**A. TRM Prediction of the Scissors Mode.** The Hamiltonian describing two axially symmetric rotors interacting via a potential  $V(\vartheta)$  dependent on the angle  $2\vartheta$  between the symmetry axes has the form

$$H_{TR} = \frac{1}{2\mathfrak{I}_p} \mathbf{J}_p^2 + \frac{1}{2\mathfrak{I}_n} \mathbf{J}_n^2 + V(\vartheta), \quad (2.1)$$

where  $\mathfrak{I}_p$  and  $\mathfrak{I}_n$  are the proton and neutron moments of inertia,  $\mathbf{J}_p$  and  $\mathbf{J}_n$  are their angular momenta.

Expressed in terms of the total and relative angular momenta

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_n, \quad \mathbf{S} = \mathbf{J}_p - \mathbf{J}_n \quad (2.2)$$

the Hamiltonian decouples into a rotational and an intrinsic part, if a Coriolis-like term is neglected. For small values of  $\vartheta$ , the intrinsic piece assumes the form of a two-dimensional harmonic oscillator (HO) Hamiltonian

$$H = H_{\text{int}} = \frac{1}{2\mathfrak{J}_{\text{sc}}} (S_1^2 + S_2^2) + \frac{1}{2} C_{\vartheta} (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2), \quad (2.3)$$

where  $\vartheta_k$  ( $k = 1, 2$ ) play the role of  $x$  and  $y$  variables and

$$S_k = J_k^{(p)} - J_k^{(n)} = i \frac{d}{d\vartheta_k} \quad (2.4)$$

are their conjugate momenta. The TRM physical constants are

$$\mathfrak{J}_{\text{sc}} = \frac{4\mathfrak{J}_p \mathfrak{J}_n}{\mathfrak{J}_p + \mathfrak{J}_n}, \quad C_{\vartheta} = \mathfrak{J}_{\text{sc}} \omega^2 = \frac{4C_{\vartheta}^{(p)} C_{\vartheta}^{(n)}}{C_{\vartheta}^{(p)} + C_{\vartheta}^{(n)}}, \quad (2.5)$$

where we have put  $C_{\vartheta}^{(\tau)} = \omega^2 \mathfrak{J}_{\tau}$  with  $\tau = p$  for protons and  $\tau = n$  for neutrons.

The energy eigenvalues are

$$\omega_{nK} = \omega(2n + K + 1). \quad (2.6)$$

The scissors mode corresponds to the first excited level. Its quantum numbers  $n = 0$  and  $K = 1$  define a positive parity band of intrinsic excitation energy  $\omega$ . In order to illustrate the mechanism of excitation we decompose the TRM  $M1$  operator as follow

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(M1, \mu) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (g_p J_{\mu}^{(p)} + g_n J_{\mu}^{(n)}) \mu_N = \\ &= \mathcal{M}_J(M1, \mu) + \mathcal{M}_{\text{sc}}(M1, \mu). \end{aligned} \quad (2.7)$$

The first piece is the rotational component

$$\mathcal{M}_J(M1, \mu) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} J_{\mu} g_R \mu_N, \quad (2.8)$$

where  $g_R = (g_p + g_n)/2$  is the rotational gyromagnetic factor. The second is the scissors  $M1$  component

$$\mathcal{M}_{sc}(M1, \mu) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} S_\mu g_r \mu_N, \quad (2.9)$$

where  $g_r = g_p - g_n$ . This term is responsible for the excitation of the mode. In order to compute the transition strength one may exploit the harmonic relations holding for the TRM Hamiltonian

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{S}_{sc}} \langle S^2 \rangle &= \frac{1}{\mathfrak{S}_{sc}} \sum_{\mu = \pm 1} |\langle \mu | S_\mu | 0 \rangle|^2 = \omega, \\ C &= \omega \sum_{\mu = \pm 1} |\langle \mu | S_\mu | 0 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

In view of the structure of the scissors  $M1$  operator (2.9), the above equations yield for the  $M1$  strength the expression

$$B(M1)\uparrow = \frac{3}{16\pi} \sum_{\mu = \pm 1} |\langle \mu | S_\mu | 0 \rangle|^2 g_r^2 \mu_N^2 = \frac{3}{16\pi} \mathfrak{S}_{sc} \omega g_r^2 \mu_N^2. \quad (2.11)$$

The mode can be further characterized by the  $M1$  form factor. The general expression of the magnetic orbital operator for electron scattering is

$$\begin{aligned} T_\mu^{(\lambda)}(q) &= -\frac{i}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \int d\mathbf{r} \mathbf{j}_p(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \times \nabla (j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \int d\mathbf{r} \rho_p(\mathbf{r}) \mathbf{v}_p(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) (j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}) = \\ &= -\frac{1}{m} \frac{i}{\sqrt{\lambda(\lambda+1)}} \int d\mathbf{r} \rho_p(\mathbf{r}) \mathbf{l}_p \cdot \nabla (j_\lambda(qr) Y_{\lambda\mu}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

where  $m$  and  $\mathbf{l}_p$  are the proton mass and angular momentum, respectively.

The transition operator can be conveniently rewritten by using the classical relations

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= m\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - mr^2\boldsymbol{\Omega}, \\ \mathbf{l}_p &= \frac{1}{\mathfrak{S}_p} \mathbf{I}_p. \end{aligned} \quad (2.13)$$

After some straightforward algebra we obtain ( $\mu = \pm 1$ )

$$T_\mu^{(\lambda)}(q) = \frac{i}{\sqrt{2\lambda(\lambda+1)}} S_\mu \frac{1}{\mathfrak{S}_p} \int d\mathbf{r} \rho_p(\mathbf{r}) \frac{j_\lambda(qr)}{r^\lambda} (r^2 \partial_1 - x_1 \mathbf{r} \cdot \nabla) (r^\lambda Y_{\lambda\mu}). \quad (2.14)$$

For  $\lambda = 1$  the only nonvanishing matrix element is

$$\begin{aligned}
 \langle I = K = 1, n = 0 || T^{(\lambda)}(q) || I = K = n = 0 \rangle = \\
 = -\sqrt{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{\omega}{3}} \int_0^{\infty} dr r^3 \rho(r) j_1(qr), \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

where  $\rho(r)$  is a spherical density normalized to the total number of nucleons.

For  $\lambda > 1$  the integral in eq. (2.14) vanishes unless the density deformation is taken into account. To this purpose [106] let us consider a proton (neutron) density of the form suitable to an axially deformed shape

$$\rho_{\tau}(\mathbf{r}) = \rho_{\tau} [r - R(1 + \alpha_{20}^{(\tau)} Y_{20}(\hat{r}))], \quad (2.16)$$

where

$$\alpha_{20}^{(\tau)} = \beta_{\tau} = \sqrt{\frac{16\pi}{45}} \delta_{\tau}. \quad (2.17)$$

For  $\lambda = 3$  the only nonvanishing matrix element is [106]

$$\begin{aligned}
 \langle I = 3K = 1n = 0 || T^{(\lambda=3)}(q) || I = K = n = 0 \rangle = \\
 = \frac{4}{15} \sqrt{\frac{2\pi}{7}} \delta \sqrt{\frac{\omega}{3}} q \int dr r^4 \rho(r) j_2(qr). \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

The  $M3$  transition strength can be obtained by going to the photon point and results to be related to the  $M1$  transition probability by

$$B(M3)\uparrow = 1.14\delta^2 R^4 B(M1)\uparrow. \quad (2.19)$$

**B. Experimental Evidence and Characterization of the Mode.** A level with the properties of the  $J^{\pi} = 1^+$ ,  $K^{\pi} = 1^+$  state predicted by the TRM was discovered in a high resolution ( $e, e'$ ) experiment on  $^{156}\text{Gd}$  by the group of Richter [1]. The  $M1$  excitation was detected by performing ( $e, e'$ ) scattering at backward angles ( $\theta = 165^\circ$ ), where transverse magnetic transitions are dominant. The experimental form factor of this state is in close agreement with the TRM up to moderately high values of the momentum transfer  $q$ . The discrepancy at high  $q$ 's is to be attributed to spin contributions, absent in the TRM [107,108].

Soon after, this strongly excited state was confirmed in ( $\gamma, \gamma'$ ) experiments [109]. In these reactions the decay of the  $J^{\pi} = 1^+$  state to the  $J^{\pi} = 2_1^+$  level of the ground state band was also observed. This allowed one to determine the  $K$  value of the state under investigation using the Alaga rule [110]. In fact in the rotational limit we have



$$R = \frac{B(M1, 1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(M1, 1^+ \rightarrow 0^+)} = \frac{|\langle 1K\lambda - K | 2\ 0 \rangle|^2}{|\langle 1K\lambda - K | 0\ 0 \rangle|^2}. \quad (2.20)$$

This ratio is  $R = 0.5$  if  $K = 1$ ,  $R = 2$  if  $K = 0$ . Experimentally  $R$  is about 0.5 consistently with the  $K = 1$  assignment.

Subsequent inelastic electron scattering and NRF experiments have ascertained the existence of the mode in three regions of the nuclear table, i.e., the deformed rare-earth nuclei [111—119], the fp-shell nuclei [120—122] and the actinides [123,124]. However, most of the experimental studies were performed on rare-earth nuclei.

We have pointed out already that the electron scattering form factors are in good agreement with the predictions based on the assumption that the excitation mode is of orbital nature. A further support to this property of the mode has been gained by comparing the  $(e, e')$  with the  $(p, p')$  scattering [120,125, 126]. In  $(p, p')$  reactions in fact, the intermediate energy proton scattering at small angles excites magnetic dipole states only through the spin part of the nucleon-nucleon interaction. The fact that the  $M1$  states observed in electron scattering are not appreciably excited in the  $(p, p')$  reaction provides a strong evidence in favour of the orbital nature of the mode.

A combined analysis of  $(e, e')$  and  $(\gamma, \gamma')$  experiments [127] has shown that the mode is fragmented into several peaks closely packed around a prominent one with a total strength  $B(M1)\uparrow \simeq 3\mu_N^2$ . Attempts to clarify the nature of the single peaks have been made through  $(t, \alpha)$  reactions [128,129].

Joint  $(e, e')$  and  $(\gamma, \gamma')$  experiments carried out on a chain of even Sm isotopes have shown that the integrated  $M1$  strength grows quadratically with the deformation parameter [11] and is proportional to the strength of the  $E2$  transition to the lowest  $2^+$  state [12]. The same deformation law was confirmed in Nd isotopes [13] and ascertained by now to hold for all nuclei of the rare-earth region [14,15]. The experiments on some actinides indicate that there is evidence for a  $\delta^2$  law also in this region [10,130]. This law is maybe the most spectacular manifestation of the scissors nature of the  $M1$  transitions.

This systematic study was possible in virtue of the great progress made in gamma spectroscopy. Indeed, the measurement of the linear polarization of the scattered photons in nuclear resonance fluorescence (NRF) experiments has enabled parity assignment [17] and, thereby, the unambiguous identification of the  $M1$  transitions [17—20]. The same experiments have ascertained the existence of  $E1$  transitions intermixed with  $M1$  excitations.

The experimental set-ups have now increased the detection sensitivity to a point that very weak transitions can be identified. A first success was the discovery of scissors-like excitations in  $\gamma$ -soft nuclei [131,132].

The present status of the experimental results can be found in several review articles [6—10]. The salient features of the mode which can be extracted from them are:

— The  $M1$  strength is fragmented and distributed around an energy centroid, which assumes the value  $\omega \simeq 3$  MeV in rare-earth nuclei.

— The summed strength in the most deformed rare-earth nuclei is  $\Sigma B(M1) \uparrow \simeq 3\mu_N^2$ .

— The transition is mainly promoted by the convection current. The orbital-to-spin ratio is typically  $B_l(M1)/B_s(M1) \simeq 10$ .

— The integrated  $M1$  strength depends quadratically on the deformation parameter and is strictly correlated with the strength of the  $E2$  transition to the lowest  $2^+$  state.

While consistent with the observed properties of the mode on a qualitative ground, the TRM, in its original formulation [2], was unable to predict either the exact position of the energy centroid or the size of the total strength. Indeed, the TRM energy was higher than the observed one by about 1 MeV and the  $M1$  strength was five times larger. The main reason of these strong discrepancies is to be found in the crude numerical estimates of the model parameters made in that paper. A rigid body moment of inertia was assumed and the restoring force constant was computed by paralleling the procedure adopted by Goldhaber and Teller for the  $E1$  giant resonance. We know now that both prescriptions are unrealistic. There is however little doubt that the mode predicted by the model corresponds to the observed  $M1$  excitations. We have already said that the experimental form factor is reproduced by the model to a large extent. We will see now that the model is also consistent with the quadratic deformation law.

**C. Consistency of the TRM with the Deformation Law.** As pointed out already, the most meaningful signature of the observed  $M1$  transitions is the quadratic deformation law of the total  $M1$  strength. It is therefore of the utmost importance to investigate if the TRM can predict such a behaviour. To this purpose it is useful to express all TRM quantities in terms of the shape variables  $\alpha_{2\mu}$  instead of the angle  $\vartheta$  and to impose for the proton (neutron) density (2.16) the normalization condition

$$\langle Q_{\lambda\mu}^{(\tau)} \rangle = \int \rho_{\tau}(\mathbf{r}) r^{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \alpha_{\lambda\mu} \rho_0^{(\tau)} R^{\lambda+3}, \quad (2.21)$$

where  $\rho_0^{(p)}$  and  $\rho_0^{(n)}$  are normalized to the number of protons and neutrons, respectively. Under a rotation by  $\vartheta_{\tau}$  ( $\vartheta_p = \vartheta$ ,  $\vartheta_n = -\vartheta$ ), around the  $x$  axis, the proton ( $\tau = p$ ) and neutron ( $\tau = n$ ) densities undergo the following change

$$\rho_{\tau}(R_{\vartheta_{\tau}}^{-1}\mathbf{r}) = \rho_{\tau} \left[ r - R(1 + \sum_{\mu=\pm 1} \alpha_{2\mu}^{(\tau)} Y_{2\mu}^*(\hat{r})) \right], \quad (2.22)$$

where

$$\alpha_{2\mu}^{(\tau)} = D_{0\mu}^{(2)}(\vartheta_{\tau}) \alpha_{20}^{(\tau)} \simeq -i \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_{20}^{(\tau)} \vartheta_{\tau} = -i \sqrt{\frac{3}{2}} \beta_{\tau} \vartheta_{\tau} \quad (2.23)$$

to leading order in  $\vartheta_{\tau}$ . This key relation enables us to express the TRM Hamiltonian (2.3) in terms of shape variables, namely

$$H = \frac{1}{2\mathfrak{S}_{sc}} S^2 + \frac{1}{2} C_{\vartheta} \vartheta^2 = \frac{1}{2B_{sc}} \sum_{\mu=\pm 1} |\pi_{2\mu}|^2 + \frac{1}{2} C \sum_{\mu=\pm 1} |\alpha_{2\mu}|^2, \quad (2.24)$$

where  $\pi_{2\mu}$  are conjugate to  $\alpha_{2\mu}$  and

$$B_{sc} = \frac{4B_p B_n}{B_p + B_n}, \quad C = \frac{4C_p C_n}{C_p + C_n} \quad (2.25)$$

are the new model parameters. Old and new constants are related by

$$\mathfrak{S}_{\tau} = 3\beta_{\tau}^2 B_{\tau}, \quad C_{\vartheta}^{(\tau)} = 3\beta_{\tau}^2 C_{\tau}. \quad (2.26)$$

It follows from a simple inspection that, while the energy is independent of deformation, the scissors  $M1$  strength grows quadratically with it. Indeed, upon insertion of the above expressions into the TRM harmonic relations (2.10), the scissors strength (2.11) becomes

$$B_{sc}(M1)\uparrow = \frac{9}{16\pi} B\omega\beta^2 g_r^2 \mu_N^2. \quad (2.27)$$

The  $\delta^2$  behaviour of the scissors  $M1$  strength has been studied quantitatively in Ref.90 by making an empirical estimate of the mass parameter. The following expression was obtained

$$B_{sc}(M1)\uparrow \simeq 0.004\omega A^{5/3} \delta^2 g_r^2 \mu_N^2. \quad (2.28)$$

Numerical calculations carried out by putting  $g_n=0$  and  $g_r=g_p=2g_R=(2Z)/A$  yield results in good agreement with experiments [11–13]. In particular theoretical and experimental summed  $M1$  strengths have similar saturation properties (Fig.1). A systematic analysis carried out recently [14,15] has shown that the  $M1$  strengths computed by such an empirical formula are in overall agreement with experiments for all nuclei of the whole rare-earth region.

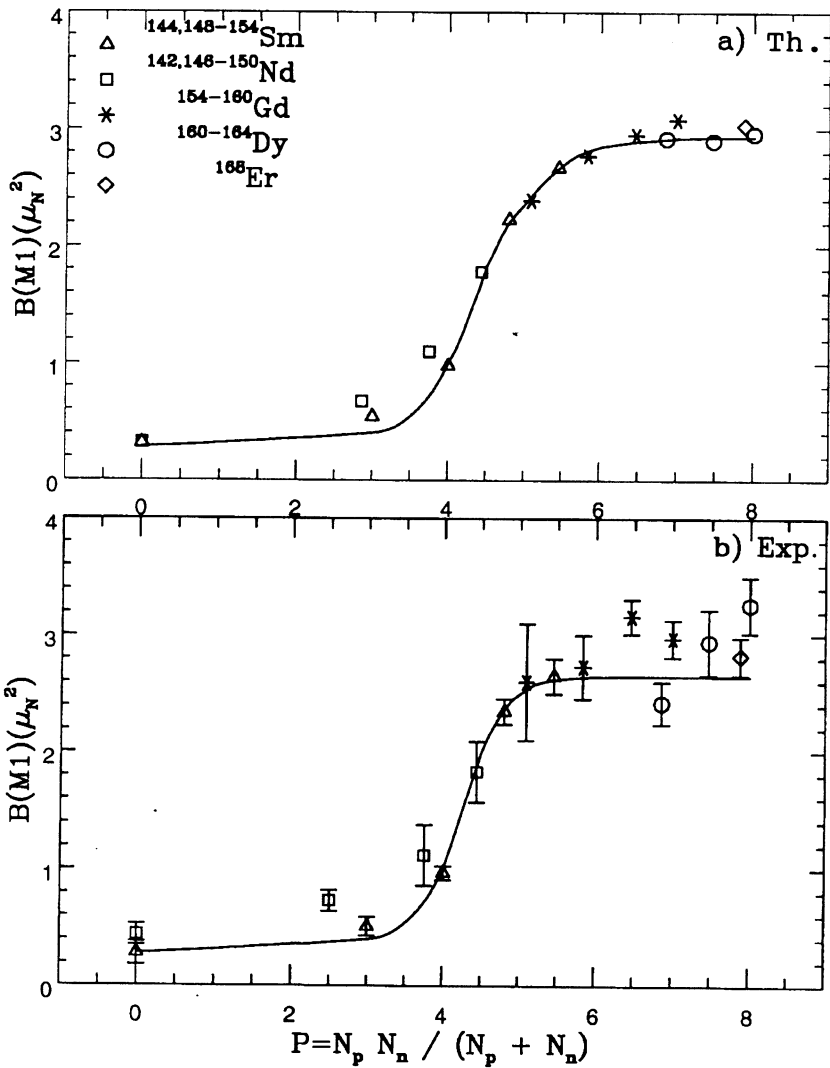


Fig.1. Saturation plot of the scissors  $M1$  strength computed using the TRM formula (2.28). The quantity  $P$  is the Casten number defined in the text (eq. 3.32)

The formula has been shown to account also for the deformation dependence of the  $M1$  strength in actinides isotopes [10,130] and in  $\gamma$ -soft nuclei [131,132].

**D. Theoretical Computation of the TRM Constants: A Low and a High Energy Mode.** *1. Classical Method.* Within the semiclassical domain one may attach to each of the two rotors the velocity fields

$$\mathbf{v}_p = -\nabla\chi_p, \quad \mathbf{v}_n = -\nabla\chi_n, \quad (2.29)$$

where

$$\chi_\tau = \delta(x_{2\tau}x_{3\tau}\Omega_{1\tau} + x_{1\tau}x_{3\tau}\Omega_{2\tau}), \quad (2.30)$$

$\Omega_{i\tau}$  ( $i_\tau = x_\tau, y_\tau$ ) are the proton and neutron angular velocities. One gets a two rotor Hamiltonian of the form given by eq. (2.1) and therefore an intrinsic one given by eq. (2.3) with an irrotational moment of inertia

$$\mathfrak{I}_{sc} = \mathfrak{I}_{irr} = \delta^2\mathfrak{I}_{rig}, \quad \mathfrak{I}_{rig} \simeq \frac{2}{5}mAR^2. \quad (2.31)$$

The restoring force constant can be deduced from the symmetry energy mass formula

$$\Delta V = \frac{1}{2}b_s \int \frac{(\delta\rho)^2}{\rho_0} d\mathbf{r} = \frac{1}{2}b_s \int \frac{(\delta\rho_p - \delta\rho_n)^2}{\rho_0} d\mathbf{r}, \quad (2.32)$$

where  $b_s \simeq 50$  MeV and  $\rho_0$  is the nuclear density normalized to the mass number. The density variation is computed by making use of eqs. (2.22) with the result

$$\delta_{\rho_\tau} = \rho_\tau(\vartheta_\tau) - \rho_\tau(0) = k_\tau \rho_0^{(\tau)} \sum_{\mu=\pm 1} \alpha_{2\mu}^{(\tau)} r^2 Y_{2\mu}^*, \quad (2.33)$$

where the constant  $k_\tau$  is fixed by the normalization condition (2.21) and  $\alpha_{2\mu}^{(\tau)}$  is given by eq. (2.32). The calculation of the integral in eq. (2.32) yields then

$$\Delta V = \frac{1}{2}C\vartheta^2, \quad (2.34)$$

where

$$C \simeq \frac{28}{5}b_s A\delta^2. \quad (2.35)$$

Using the above equations one gets for the energy of the mode and the corresponding strength (eq. (2.11))

$$\omega_+ \simeq 139.4A^{-1/3} \text{ MeV}, \quad B_+(M1) \uparrow \simeq 0.12\delta^2 A^{4/3} g_r^2 \mu_N^2. \quad (2.36)$$

The strength is quadratic in the deformation parameter, but the energy is far higher than the observed one. We obtain indeed for  $^{154}\text{Sm}$   $\omega \simeq 26$  MeV and  $B(M1)\uparrow \simeq 4.7\mu_N^2$ , having put  $g_n = 0$  and  $g_p = 2g_R = 2Z/A$ . Although the  $M1$  strength is reasonably close to the experimental value, the energy lies in the region of the giant isovector quadrupole resonance. What we have found is actually a new scissors mode. It is indeed the  $K^\pi = 1^+$  component of the isovector quadrupole resonance mode. In order to obtain a low energy mode one has to make different assumptions about the nature of the rotors. A natural prescription for all possible alternatives can be found once the model is formulated in a microscopic context.

*2. Microscopic Approach: Equivalence with Schematic RPA.* Let us assume that nucleons move in a deformed mean field described by an anisotropic HO potential with frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_3$  such that  $\omega_1^2\omega_3 = \omega_0^3$  and  $\omega_0 \simeq 41A^{-1/3}$  MeV.

Mapping the procedure of Bohr and Mottelson unified theory [133] to the present case, one can make use of the harmonic relations (2.10) in the specific form

$$\frac{1}{\mathfrak{I}_{sc}} \langle S^2 \rangle = \frac{1}{\mathfrak{I}_{sc}} \sum_{ph \in 2\omega_0} \sum_{\mu \pm 1} |\langle ph | S_\mu | \rangle|^2 = \omega_1 + \omega_3 \simeq 2\omega_0, \quad (2.37)$$

where  $| \rangle$  is the particle-hole (p-h) vacuum. The sum is restricted to the  $\Delta N = 2p$ -h excitations. This condition yields the irrotational mass parameter

$$\mathfrak{I}_{sc} = \mathfrak{I}_{irr} = \delta^2 \mathfrak{I}_{rig}, \quad \mathfrak{I}_{rig} = \frac{1}{\delta\omega_0} \sum_{ph \in \delta\omega_0} |(S_+)_ph|^2 \simeq \frac{2}{5} mAR^2 \quad (2.38)$$

and the restoring force constant

$$C_0^{(+)} \simeq \mathfrak{I}_{irr} (2\omega_0)^2 \simeq \frac{28}{5} b_0 A \delta^2, \quad (2.39)$$

where  $b_0 \simeq 17.5$  MeV. When the p-h interaction is switched on, the restoring force constant gets the additional contribution

$$C_1^{(+)} \simeq \frac{28}{5} b_1 A \delta^2, \quad (2.40)$$

where the constant  $b_1$  follows from its relation to the energy symmetry potential  $V_1 = 4b_1 \simeq 130$  MeV. The full restoring force constant  $C_+ = C_0^{(+)} + C_1^{(+)}$  results to be exactly equal to the classical expression (2.35) with the same symmetry parameter  $b_s = b_0 + b_1 \simeq 50$  MeV. It follows that the resulting energy and strength are given exactly by the semiclassical eqs. (2.36).

We use now eq. (2.10) with the following requirement

$$\frac{1}{\mathfrak{I}_{sc}} \langle S^2 \rangle = \frac{1}{\mathfrak{I}_{sc}} \sum_{ph \in \delta\omega_0} \sum_{\mu = \pm 1} |\langle ph | S_{\mu} | \rangle|^2 \simeq \delta\omega_0, \quad (2.41)$$

where the sum is restricted to the  $\Delta N = 0$  p-h space. This yields a rigid body moment of inertia  $\mathfrak{I}_{sc} = \mathfrak{I}_{rig}$ . The unperturbed restoring force constant is now

$$C_0^{(-)} \simeq (\delta\omega_0)^2 \mathfrak{I}_{rig} = \frac{28}{5} b_0^{(-)} A \delta^2 \quad (2.42)$$

with  $b_0^{(-)} \simeq b_0/4$ . The potential component can be fixed [133] from the ratio between the nuclear isovector and isoscalar average potential strengths  $V_1$  and  $V_0$ ,  $a_- = C_1^{(-)}/C_0^{(-)} = b_1^{(-)}/b_0^{(-)} = -V_1/(4V_0) \simeq 0.6$ . The final result is

$$\omega_- = \sqrt{\frac{C_-}{\mathfrak{I}_{rig}}} = \delta\omega_0 \sqrt{1 + a_-} \simeq 53\delta A^{-1/3} \text{ MeV},$$

$$B_-(M1)\uparrow \simeq \frac{3}{4\pi} \mathfrak{I}_{rig} \omega_- \simeq 0.045\delta A^{4/3} g_r^2 \mu_N^2. \quad (2.43)$$

The method just developed is nearly equivalent to the entirely classical one adopted in the TRM in its original formulation [2]. Both rely on the assumption that protons and neutrons form two rigid rotors. The present method however improves the computation of the restoring force constant with the result that the  $M1$  strength is reduced by about a factor of two. Such a reduction however is not enough. In order to induce a further quenching, one needs to remove the rigid body assumption.

To this purpose one may impose for the low energy mode the alternative condition

$$\frac{1}{\mathfrak{I}_{sc}} \langle S^2 \rangle = E(\epsilon_{sp}) + E(\epsilon_{sp} + \delta\omega_0), \quad (2.44)$$

where  $E(\epsilon_{sp}) = \sqrt{(\epsilon_{sp} - \lambda)^2 + \Delta^2}$  is the quasiparticle energy. Here,  $\epsilon_{sp}$  is the single particle (s.p.) energy referred to the chemical potential  $\lambda$  and  $\Delta$  is the pairing gap. It is natural to use for  $\lambda$  the value  $\lambda = (\delta\omega_0)/2$ . With this choice the harmonic condition (2.10) becomes

$$\frac{1}{\mathfrak{I}_{sc}} \langle S^2 \rangle = 2E = \sqrt{(\delta\omega_0)^2 + (2\Delta)^2}. \quad (2.45)$$

Using closure we obtain for the mass parameter

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{sc} \simeq \mathfrak{S}_{sf} \simeq & \frac{\delta\omega_0}{(2E)} (u(\epsilon_{sp}) v(\epsilon_{sp} + \delta\omega_0) - \\ & - (v(\epsilon_{sp}) u(\epsilon_{sp} + \delta\omega_0))^2) \mathfrak{S}_{rig} \simeq \left( \frac{\delta\omega_0}{2E} \right)^3 \mathfrak{S}_{rig}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

having made use of the standard expressions of the BCS amplitudes  $u$  and  $v$  with  $\lambda = (\delta\omega_0)/2$ . The resulting energy and strength are

$$\begin{aligned} \omega_- &= \sqrt{\frac{C_-}{\mathfrak{S}_{sf}}} \simeq (2E) \sqrt{1 + a_-}, \\ B_-(M1)\uparrow &\simeq \frac{3}{16\pi} \omega_- \mathfrak{S}_{rig} \left( \frac{\delta\omega_0}{2E} \right)^3 g_\tau^2 \mu_N^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

or more explicitly

$$\begin{aligned} \omega_- &\simeq 1.26(2\Delta) \sqrt{1 + x^2}, \\ B_-(M1)\uparrow &\simeq 0.001(2\Delta)A^{5/3} \frac{x^3}{1 + x^2} g_\tau^2 \mu_N^2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

where  $x = \delta\omega_0/(2\Delta)$ . According to these equations the strength goes like  $\delta^3$  for small deformations ( $x \ll 1$ ) and becomes linear for very large deformations ( $x \gg 1$ ). In the range of observed deformations the strength is approximately quadratic in  $\delta$ .

Had we averaged the two quasiparticle energies and the moment of inertia with respect to  $\lambda$  [133] we would have obtained exactly the strength derived by Hamamoto and Magnusson in schematic RPA [69]. This is not an accident. The approach presented here amounts exactly to a schematic RPA treatment. To show this equivalence we observe that, when expressed in terms of shape variables, the intrinsic TRM Hamiltonian (2.24) coincides with the harmonic Hamiltonian adopted within the unified theory [133]. Let us indeed switch from the normalization (2.21) to the new one

$$\langle Q_{\lambda\mu} \rangle = \int \rho(\mathbf{r}) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \alpha_{\lambda\mu}. \quad (2.49)$$

This induces in turn a renormalization of the mass and restoring force parameters which assume the new form

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{sc} \Rightarrow B_\alpha &= \frac{\mathfrak{S}_{sc}}{3\beta^2 \left( \frac{3}{4\pi} AR^2 \right)^2} = \frac{2\pi}{3} \frac{m}{AR^2}, \\ C_\vartheta \Rightarrow C_\alpha &= \frac{C}{3\beta^2 \left( \frac{3}{4\pi} AR^2 \right)^2} = C_\alpha^{(0)} + C_\alpha^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.50)$$



where

$$C_{\alpha}^{(0)} \simeq \frac{8\pi}{3} \frac{m\omega_0^2}{AR^2}, \quad C_{\alpha}^{(1)} \simeq \frac{7}{3} \frac{\pi V_1}{AR^4}. \quad (2.51)$$

The above quantities are just the mass parameters and coupling strengths derived within the unified theory approach [133].

The link with schematic RPA is now obtained simply through the standard mapping condition [133]

$$\sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 = \sum_{\mu} \sum_{\text{ph}} |(Q_{2\mu}(1))_{\text{ph}}|^2, \quad Q_{2\mu}(1) = Q_{2\mu}^{(p)} - Q_{2\mu}^{(n)}. \quad (2.52)$$

Useless to say, an explicit RPA calculation yields exactly the results obtained here [34—36]. Although the deformation dependence is roughly reproduced, the magnitude of the strength produced by these calculations is about a factor of two larger than the experimental summed strength. A quenching mechanism is needed. This is hopefully found if the model can be framed in a fully microscopic context, which accounts also for spin degrees of freedom.

*3. Scissors Modes in Superdeformed Nuclei.* We have seen that, in its reformulated version, the TRM predicts a low and a high energy mode. In the first mode protons and neutrons behave approximately as superfluid systems, in the second as irrotational fluids. Being switched by deformation, the two modes should exist also in superdeformed nuclei. Their existence was indeed predicted in RPA [72] and within the classical TRM [134]. This latter model can be easily adapted to these nuclei. Let us indeed assume that  $K$  is a good quantum number so that the transition goes from  $K$  to  $K + 1$ . The  $M1$  operator couples the state  $|IMK\rangle$  to the states  $|I'M'K+1\rangle$  with  $I' = I - 1, I, I + 1$ . Using the standard expression for the transition matrix elements [133] with the TRM intrinsic wave function [2] and assuming  $I \gg K$  we obtain for the summed strength

$$\sum_{I'} B(M1, IK \rightarrow I'K+1) \simeq \frac{3}{16\pi} \mathfrak{I}_{\text{sc}} \omega \frac{1}{K+1} g_{\tau}^2 \mu_N^2. \quad (2.53)$$

According to this expression the strength decreases with increasing  $K$ . If we assume that the superdeformed state has  $K = 0$ , we gain the standard scissors expression (eq. 2.11). We may use eqs. (2.36) obtaining for the high energy mode of the superdeformed  $^{152}\text{Dy}$  ( $\delta \simeq 0.62$ )

$$\omega_{\pm} \simeq 26 \text{ MeV}, \quad B_{\pm}(M1)\uparrow \simeq 26.1 \mu_N^2, \quad (2.54)$$

where we have put  $g_n = 0$  and  $g_p = 2g_R = 2Z/A$ .

For the low energy mode we may assume rigid rotors and use eqs. (2.48) with  $g_n = 0$  and  $g_p = 1$ , obtaining for the same superdeformed nucleus

$$\omega_- \simeq 6.1 \text{ MeV}, \quad B_-(M1)\uparrow \simeq 22.6 \mu_N^2. \quad (2.55)$$

The above numbers are in agreement with the RPA results of Ref. 72. They have been obtained under the assumption that, in going from deformed to superdeformed nuclei, protons and neutrons in their relative motion remain irrotational at high energy but undergo a transition from a superfluid to a rigid-body phase at low energy. Such an assumption is fully consistent with the conclusions drawn in Ref. 72.

We like to stress that, according to our equations based on the use of the TRM scissors wave function, these strong transitions occur only if the intrinsic superdeformed state has  $K=0$ . If such a state has a nonvanishing but small  $K$  or contains  $K$  admixture, the corresponding strength should be still sizeable.

4. *M1 Mode in Triaxial Nuclei.* The model can be easily extended to triaxial nuclei [135,136]. To this purpose one can easily deduce the quadrupole fields entering into the  $M1$  channel from the density variation induced by the rotation of protons against neutrons around each of the three principal axes. They are

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{i}{\sqrt{2}} r^2 (Y_{21} + Y_{2-1}) \tau_3, \\ Q_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} r^2 (Y_{21} - Y_{2-1}) \tau_3, \\ Q_3 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} r^2 (Y_{22} - Y_{2-2}) \tau_3. \end{aligned} \quad (2.56)$$

The corresponding excitation energies are

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{(\pm)} &= |\omega_2 \pm \omega_3| = \omega_0 |e^{-\alpha \cos(\gamma - 4\pi/3)} \pm e^{-\alpha \cos \gamma}|, \\ \epsilon_2^{(\pm)} &= |\omega_1 \pm \omega_3| = \omega_0 |e^{-\alpha \cos(\gamma - 2\pi/3)} \pm e^{-\alpha \cos \gamma}|, \\ \epsilon_3^{(\pm)} &= |\omega_1 \pm \omega_2| = \omega_0 |e^{-\alpha \cos(\gamma - 2\pi/3)} \pm e^{-\alpha \cos(\gamma - 4\pi/3)}|. \end{aligned} \quad (2.57)$$

The lowest eigenvalues for each mode are

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega \cos \gamma \left( 1 - \frac{(-1)^i}{\sqrt{3}} \text{tg } \gamma \right), \quad i = 1, 2 \\ \omega_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \omega \sin \gamma. \end{aligned} \quad (2.58)$$

We have neglected pairing for simplicity.

The  $E2$  and  $M1$  strengths are

$$B_i(E2) = 1/2 \cos \gamma \left( 1 - \frac{(-1)^i}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \gamma \right) B(E2), \quad i = 1, 2$$

$$B_3(E2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \gamma B(E2), \quad (2.59)$$

$$B_i(M1) = 1/2 \cos \gamma \left( 1 - \frac{(-1)^i}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \gamma \right) B(M1)$$

$$B_3(M1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \gamma B(M1). \quad (2.60)$$

For both kinds of transitions the ratio  $B_2/B_1$  is

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \gamma}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \gamma}. \quad (2.61)$$

A third mode, absent in axial nuclei, emerges. Its frequency and strengths contain  $\gamma$  as leading term consistently with the fact that such a mode disappears in the axial limit. For very small values of  $\gamma$  the frequency is very low and the strength is negligible.

According to the model predictions, a splitting of the  $M1$  strength should signal a triaxial shape. Unfortunately such a splitting is likely to be hidden by the fragmentation induced by the nuclear shell structure. Such a test may therefore work only in some medium-light nuclei where the fragmentation induced by the shell structure can be modest.

**E. Microscopic Formulation of the TRM.** It is not obvious that the scissors picture should be preserved within a microscopic context. The spin degree of freedom can in fact interfere so as to destroy such a picture. This is to be expected to some extent since the spin orbit coupling induces a large fragmentation in the s.p. spectrum. In order to check if the scissors picture still holds, it is useful to analyse the excitation mechanism. The full shell model  $M1$  operator is

$$\mathcal{M}(M1, \mu) = \sqrt{3}/(4\pi) \sum_{i=1}^A (g_l(i) l_\mu(i) + g_s(i) s_\mu(i)) \mu_N. \quad (2.62)$$

The scissors picture remains valid only if the spin contribution is negligible or can be absorbed into the generator  $S$  so that the  $M1$  operator can be written in the TRM form

$$\mathcal{M}(M1, \mu = 1) = \left( \frac{3}{16\pi} \right)^{1/2} S_{+1} (g_p - g_n) \mu_N. \quad (2.63)$$

In such a case general definitions of the TRM constants valid in any microscopic context can be given easily. To this purpose it is useful to write the defining TRM eq. (2.10) in the form [34]

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{sc} &= \sum_{\mu = \pm 1} \langle 0 | S_{\mu}^{\dagger} \frac{1}{H - E_0} S_{\mu} | 0 \rangle, \\ C &= \frac{1}{2} \sum_{\mu = \pm 1} \langle 0 | [S_{\mu}^{\dagger}, [H, S_{\mu}]] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Using closure one obtains the quite general expressions

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{sc} &= \sum_{n\mu} \frac{1}{\omega_n} |\langle n\mu | S_{\mu} | 0 \rangle|^2, \\ C &= \sum_{n\mu} \omega_n |\langle n\mu | S_{\mu} | 0 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

It is now immediate to derive the scissors energy weighted  $M1$  sum rule

$$\begin{aligned} \sum_n \omega_n B_n(M1)\uparrow &= \frac{3}{16\pi} \sum_{n, \tau} \omega_n |\langle n\mu | S_{\mu} | 0 \rangle|^2 g_{\tau}^2 \mu_N^2 = \\ &= \frac{3}{32\pi} \sum_{\mu = \pm 1} \langle 0 | [S_{\mu}^{\dagger}, [H, S_{\mu}]] | 0 \rangle g_{\tau}^2 \mu_N^2 \simeq \frac{3}{16\pi} \mathfrak{S}_{sc} \omega^2 g_{\tau}^2 \mu_N^2. \end{aligned} \quad (2.66)$$

This sum rule holds in the macroscopic as well as in the microscopic domain. Under the experimentally supported assumption of small fragmentation of the mode, we obtain for the summed strength the expression defining the TRM  $M1$  strength (eq. 2.9). It follows that the TRM formula, with  $\mathfrak{S}_{sc}$  and  $C$  given by eq.(2.65), represents a general definition of the scissors  $M1$  summed strength. Microscopic studies of these formulas have been carried out in Ref. 137.

### 3. BOSON MODEL DESCRIPTIONS

The TRM was formulated specifically for identifying a collective mode of scissors nature and predicting its signature. Hence the simplifying assumption that neutrons and protons form two fluids of ellipsoidal shape. On the other hand, the mode can be fully understood only if studied in more realistic

approaches which include additional degrees of freedom. An obvious extension consists in allowing for surface vibrations of proton and neutron deformed fluids. This is accomplished within a semiclassical context by describing these vibrations in terms of the shape variables  $\alpha_p$  and  $\alpha_n$ . These are indeed the classical variables adopted in the phenomenological models described in this section.

**A. Extended Bohr–Mottelson Models.** The TRM Hamiltonian, when written in terms of the Bohr–Mottelson collective variables (2.24), assumes the form adopted by Faessler and coworkers [30] to study the mode. In their approach the TRM Hamiltonian was derived from the proton-neutron Hamiltonian introduced within the extended Bohr–Mottelson model developed by Faessler himself to describe the  $E2$  giant resonances [138]. The novelty of this model consisted in the introduction of collective variables for protons ( $\alpha_p$ ) and neutrons ( $\alpha_n$ ). Nuclear and relative motions could then be decoupled by defining the new variables

$$\alpha_\mu = \frac{1}{2} (\alpha_\mu^p + \alpha_\mu^n), \quad \xi_\mu = \alpha_\mu^p - \alpha_\mu^n. \quad (3.1)$$

The  $\alpha_\mu$  coordinates are quadrupole shape variables describing the motion of the nucleus as a whole, while  $\xi_\mu$  account for the relative motion between the proton and neutron fluids.

In their study of the scissors mode [30], the authors started from an Hamiltonian of the form (2.24) and by using a relation similar to the one given by eq.(2.23) gain a TRM Hamiltonian of the form (2.3). They improved the rigid TRM results [2] by assuming that the motion is determined by a fraction of nucleons only. Because of this ansatz, moment of inertia and restoring force constant are reduced by about a factor of three. Their  $M1$  strength resulted to be only twice the observed one.

The same formalism was adopted by Rohozinski and Greiner [31] in a more extended frame. They in fact formulated the problem in the laboratory frame using a highly anharmonic Hamiltonian in the variables  $\alpha_\mu$  and  $\xi_\mu$ . For small amplitude oscillations the Hamiltonian can be decomposed into

$$H = H_{\text{coll}}(\alpha) + H_{\text{rel}}(\xi) + H_{\text{int}}(\alpha, \xi), \quad (3.2)$$

where  $H_{\text{coll}}$  describes the mass collective motion,  $H_{\text{rel}}$  is an harmonic Hamiltonian in the relative coordinates  $\xi_\mu$  and  $H_{\text{int}}$  is an interaction term which couples the two motions.

A similar decomposition holds for the total angular momentum

$$L_{1\mu} = L_{1\mu}^n(\alpha_n) + L_{1\mu}^p(\alpha_p) = L_{1\mu}^{\text{coll}}(\alpha) + L_{1\mu}^{\text{rel}}(\xi). \quad (3.3)$$

Transforming to the intrinsic frame defined by the principal axes of the system, the variables  $\alpha_\mu$  are turned into the Euler angles  $(\alpha, \beta, \gamma)$  and the intrinsic shape variables  $a_{20}$  and  $a_{21}$ , while the transformed relative coordinates  $\xi_\mu$  remain still five in number. In the strong coupling limit one can put in the interaction term the equilibrium values appropriate for an axially symmetric shape, namely  $a_{20} = \beta$  and  $a_{22} = 0$ . In this limit the transformed Hamiltonian becomes

$$H = H_{\text{rot}} + H_{\beta\gamma} + H_{\text{centr}} + H_{\text{coriolis}} + H_{\text{sc}}. \quad (3.4)$$

$H_{\text{rot}}$  and  $H_{\beta\gamma}$ , describing respectively the nuclear rotation and the  $\beta$  and  $\gamma$  vibrations around an equilibrium spheroidal shape of deformation  $\beta$ , form essentially the Bohr Hamiltonian [133], while  $H_{\text{centr}}$  and  $H_{\text{coriolis}}$  are the centrifugal and Coriolis terms. The last piece is the scissors Hamiltonian. This, in the strong coupling limit, can be written

$$H_{\text{sc}} = H_{\text{rel}}(\xi) + H_{\text{int}}(\xi, \beta) = \sum_{K=0}^2 H_K, \quad (3.5)$$

where  $H_K$  are HO Hamiltonians in the relative coordinates and carry intrinsic angular momenta  $K = 0, 1, 2$ . The coupling between the relative motion and the mass deformation mode induces a dependence of the restoring force constant  $C_K$  and the mass parameter  $B_K$  on  $K$  and  $\beta$ .

The NPD model predicts therefore two other isovector modes in addition to the scissors excitation. The magnetic orbital dipole form-factor operator is obtained from the general expression (2.14) assuming an irrotational velocity field and a proton mass density of the form (2.16). The resulting expression is

$$T_{1\mu}^{(m)} = \frac{i}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} F(q) L_{1\mu}^p \quad (3.6)$$

with

$$F(q) = \frac{\int_0^\infty r^3 dr \left[ j_1(qr) + \frac{qr}{5} j_2(qr) \right] f'(r - R_0)}{\int_0^\infty r^3 dr f'(r - R_0)}. \quad (3.7)$$

The  $M1$  strength is obtained by going to the photon point and results to be of the same TRM form (2.11) with an irrotational moment of inertia. The NPD

model describes therefore the mode as a rotational oscillation between two ir-rotational fluids.

The advantage of this model consists in that it describes on equal footing the scissors as well as the  $\beta$  and  $\gamma$  vibrations and accounts for the coupling between them. The model, however, does not give clear and simple prescriptions for computing the parameters. These are in practice determined by a fit to the energy and the  $B(M1)$  values. Another drawback is the lack of agreement between model and experimental form factors.

The model was extended so as to enable the study of the effect of triaxial deformation on the  $M1$  strength [139]. It was found that, contrary to the TRM, a small triaxiality does not lead to the appearance of  $1^+$  doublets.

**B. Generalized Coherent State Model Description.** The anharmonic terms of the NPD Hamiltonian are not easy to handle. An efficient approach for dealing with is provided by the so-called coherent state model (CSM) [140].

The idea of the CSM is to describe the low-lying collective states of spherical as well as deformed nuclei by wave functions obtained through angular momentum projection from intrinsic coherent states, which represent a quadrupole boson condensate. The second step consists in constructing an effective interacting boson Hamiltonian which is diagonal in the above states to a large extent. As in the NPD model the CSM Hamiltonian is anharmonic and does not preserve the number of bosons. Because of the use of coherent states, however, such a Hamiltonian is of the simplest form. This model has been used successfully to describe the collective properties of nuclei from the spherical to the transitional and deformed regions.

The  $M1$  mode can be studied in its generalized version (GCSM) [32,33], where distinction is made between neutron and proton bosons. The structure of the generic GCSM state is

$$\Psi_{\alpha J M K} = N_{\alpha J} P_{M K}^J \Phi_{\alpha K}, \quad (3.8)$$

where  $N_{\alpha J}$  is a normalization constant,  $P_{M K}^J$  is a projection operator of standard form which projects the good angular momentum out of the intrinsic states  $\Phi_{\alpha K}$ . These are obtained by acting with boson operators, at most quadratic in the quadrupole creation operators  $b_{\mu}^+$ , on a HO coherent state in the deformation parameters  $d_p$  and  $d_n$

$$\varphi_0 = \exp [d_p (b_{p0}^+ - b_{p0}) - d_n (b_{n0}^+ - b_{n0})] | \rangle. \quad (3.9)$$

States describing one  $\beta$  band, two  $\gamma$  bands and two  $K^\pi = 1^+$  bands have been constructed. The one describing the scissors mode band is

$$\Psi_{JM1} = N_1^J P_{M1}^J (b_p^+ \otimes b_n^+)_{11} |0\rangle. \quad (3.10)$$

The Hamiltonian is constructed so as to be diagonal to a good approximation in the bands of the six boson states. Its expression is

$$H = A_1(n_p + n_n) + A_2(n_{pn} + n_{np}) + \sqrt{5} \frac{A_1 + A_2}{2} (P_n^+ + P_{np}^+ + A_3(P_p^+ P_n + P_n^+ P_p - 2P_{np}^+ P_{np})) + A_4 J^2, \quad (3.11)$$

where  $n_p$  and  $n_n$  are the proton and neutron number operators and together with  $n_{pn}$  and  $n_{np}$  can be written in the compact form

$$n_{kk'} = \sum_{\mu} b_{k\mu}^+ b_{k'\mu}, \quad k = p, n; \quad k' = p, n, \quad (3.12)$$

$P_p^+$ ,  $P_n^+$  and  $P_{np}^+$  are proton, neutron and proton-neutron pairing-like boson operators

$$P_{kk'}^+ = (b_k^+ b_{k'}^+)_{00} - d^2 / \sqrt{5} \quad (3.13)$$

and the quantities  $A_i$ ,  $i = 1, 4$  are free adjustable parameters.

Eq.(3.11) defines an interacting boson Hamiltonian which does not commute with the boson number operators  $n_p$  and  $n_n$ . Its excitation energies are obtained as

$$\omega = \langle \Psi_{1M} | H | \Psi_{1M} \rangle - \langle \Psi_0 | H | \Psi_0 \rangle. \quad (3.14)$$

The parameters  $A_i$  are determined from fitting some levels of the ground,  $\beta$  and  $\gamma$  bands while the deformation parameter, assumed equal for protons and neutrons, is fixed by an overall fit of the  $\beta$  band. The only free parameter is the scaling parameter entering into the canonical transformation

$$\alpha_{\tau\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\tau}} (b_{\mu}^+ + b_{\mu}^-). \quad (3.15)$$

In the harmonic limit, this parameter assumes the standard form  $k_{\tau} = \sqrt{B_{\tau} C_{\tau}}$ .

The  $M1$  operator has been derived from the general expression (2.14) using an irrotational velocity field (eq. 2.29) and a charge density of the form (2.16) as in the NPD model. The resulting expression to lowest order is



$$T(M1, \mu) = -iej_1(qR_0)(g_p J_{p\mu} + g_n J_{n\mu}), \quad (3.16)$$

where  $J_{k,\mu} = \sqrt{10}(b_k^+ b_k)_{1\mu}$ . By going to the photon point, it is possible to obtain for the  $M1$  strength a rotational and a vibrational limit [89]

$$B_{\text{rot}}(M1) \uparrow = \frac{9}{4\pi} k_p^2 \beta^2 g_{\text{rel}}^2 \mu_N^2, \\ B_{\text{vib}}(M1) \uparrow = \frac{18}{\pi} k_p^2 \beta^2 g_{\text{rel}}^2 \mu_N^2. \quad (3.17)$$

This value is linear in  $\beta^2$  in both cases but with two different slopes. The full GCSM expression was used to compute the  $M1$  strength for different chains of isotopes. The experimental  $\delta^2$  behaviour was nicely reproduced. If we put  $k_p^2 = B\omega$ , valid in the harmonic approximation, we obtain for the strength in the rotational limit the TRM expression (2.27). The close link between the two approaches was discussed in Ref. 89.

The  $M1$  form factor was computed in plane wave approximation [143]. Although a detailed comparison with experiments cannot be carried out, it looks promisingly close to the observed one. The octupole operator has exactly the same expression of the  $M1$  operator with a gyromagnetic ratio  $g_{p/n}^{(3)} = 12/7g_{p/n}$ . Once the magnetic dipole gyromagnetic ratios are determined, the octupole ones are automatically fixed. The model predicts a scissors, an isoscalar and an isovector  $M3$  transitions [141]. The isoscalar  $M3$  strength is remarkably close to the one measured in  $^{164}\text{Dy}$  and consistently interpreted as isoscalar [142].

The GCSM has also been extended to triaxial nuclei [143]. The results obtained are consistent with the TRM findings.

### C. Algebraic Description of the Mode: The Interacting Boson Model.

*1. The model.* The basic assumption of the interacting boson model [144,145] is that the low-lying collective states of nuclei away from major closed shells are described in terms of a monopole boson with angular momentum and parity  $J^\pi = 0^+$ , called  $s$  boson, and a quadrupole boson with  $J^\pi = 2^+$ , called  $d$  boson. These  $s$  and  $d$  bosons are interpreted as strongly correlated pairs of valence nucleons coupled respectively to  $J^\pi = 0^+$  and  $J^\pi = 2^+$ .

In the first formulation of the model (IBM1) no distinction is made between protons and neutrons. The Hamiltonian has the form

$$H_B = E_0 + \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} B_{\alpha}^{+} b_{\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha}^{+} b_{\beta}^{+} b_{\delta} b_{\gamma}, \quad (3.18)$$

where  $E_0$  is a  $c$  number,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  and  $u_{\alpha\beta\gamma\delta}$  are the free parameters,  $b_{\alpha}^{+}$  and  $b_{\alpha}$  are respectively the creation and destruction ( $s$  or  $d$ ) boson operators. The distinguishing property of this boson Hamiltonian is that it contains in addition to the harmonic term a two-body part and commutes with the total number of bosons. Moreover it has a definite group structure since the bilinear products are the 36 generators of the group  $U(6)$ . This allows one to find the proper basis states for its diagonalization. In fact, one can generate from  $U(6)$  three subgroup chains containing the rotation group as a subgroup. These are

$$\begin{array}{lcl}
 & U(5) \supset 0(5) \supset 0(3) \supset 0(2) & \text{I} \\
 U(6) \supset & \nearrow SU(3) \supset 0(3) \supset 0(2) & \text{II} \\
 & \searrow 0(6) \supset 0(3) \supset 0(2) & \text{III}
 \end{array} \quad (3.19)$$

Each group chain provides the quantum number for labeling a set of basis states.

The boson Hamiltonian, in its general form, can be diagonalized in one of these bases only numerically. For an appropriate choice of the parameters, however, it can be written as a sum of linear and quadratic Casimir invariants of one of the three chains. In these limiting cases the eigenvalue problem can be solved algebraically.

The states obtained in these three limits can be interpreted geometrically by making use of the concept of coherent states. It can be shown that in the chain I the states describe the vibrational motions of spherical nuclei, chain II corresponds to an axially symmetric rotor and chain III to  $\gamma$ -unstable rotor.

In the second version of the interacting boson model (IBM2) one makes distinction between neutrons and protons and assumes that the low-lying levels of nuclei can be explained in terms of pairs of protons and pairs of neutrons with  $J^{\pi} = 0^{+}$  and  $J^{\pi} = 2^{+}$ , treated as  $s_{\pi} d_{\pi}$  and  $s_{\nu} d_{\nu}$  bosons.

In order to take into account the p-h conjugation in particle space, the number of protons,  $N_{\pi}$ , and the number of neutrons,  $N_{\nu}$ , is counted from the nearest closed shell.

The Hamiltonian for the coupled system of proton and neutron bosons can be written as

$$H = H_{\pi} + H_{\nu} + V_{\pi\nu}, \quad (3.20)$$

where  $H_{\pi}(H_{\nu})$  are the proton (neutron) boson Hamiltonian of the form (3.18) and  $V_{\pi\nu}$  is the proton-neutron boson interaction. Also the IBM2 has a group structure, that of the group product  $U_{\pi}(6) \otimes U_{\nu}(6)$ . One can generate from this

group several group chains containing the rotation group as a subgroup, each one leading to a definite classical limit.

The chain leading to the scissors mode is the following

$$U_{\pi}(6) \otimes U_{\nu}(6) \supset U_{(\pi+\nu)}(6) \supset SU_{(\pi+\nu)}(3) \supset O(3) \supset O(2). \quad (3.21)$$

Since the proton and neutron bosons are nonidentical, from the tensor product of the two  $U(6)$  symmetric representations one generates symmetric as well as mixed symmetry representations. In order to label the states of different  $U_{\pi+\nu}(6)$  symmetry it has become customary to introduce a new quantum number, called the  $F$  spin, formally equivalent to isospin for particles. A proton boson has  $F=1/2$  and third component  $F_3=+1/2$ , a neutron boson has  $F=1/2$  and  $F_3=-1/2$ . For a system of  $N=N_{\pi}+N_{\nu}$  bosons, the totally symmetric states have maximum  $F$  spin,  $F=F_{mx}=(N_{\pi}+N_{\nu})/2$ , the states with mixed symmetry have  $F=F_{mx}-1$ , etc.

The most general IBM2 Hamiltonian has too many parameters to be of any practical use. A schematic Hamiltonian frequently used is of the form

$$H = \varepsilon(n_{d\pi} + n_{d\nu}) + 2K_{\pi\nu}Q_{\nu} \cdot Q_{\pi} + K_{\nu\nu}Q_{\nu} \cdot Q_{\nu} + K_{\pi\pi}Q_{\pi} \cdot Q_{\pi} + \lambda M, \quad (3.22)$$

where  $n_{d\pi}$  and  $n_{d\nu}$  are the proton and neutron  $J^{\pi}=2^{+}$  number operators,  $Q_{\pi}$  and  $Q_{\nu}$  are the proton and neutron quadrupole operators and  $M$  is the so-called Majorana operator related to the Casimir invariant of the group  $U_{\pi+\nu}(6)$  and is responsible for the splitting between totally symmetric and mixed symmetry representations.

In the special case  $\varepsilon=0$ , and  $K_{\pi\nu}=K_{\pi\pi}=K_{\nu\nu}=K$ , the Hamiltonian (3.22) can be expressed as the sum of the Casimir invariants of the group chain (3.21) and is therefore diagonal in this scheme. The energy spectrum can be calculated algebraically. One obtains symmetric as well as mixed-symmetry bands, where  $J^{\pi}=1^{+}$  levels appear.

The first excited  $J^{\pi}=1^{+}$  state describes the scissors mode [4]. Due to the lack of experimental information on other mixed symmetry levels, the Majorana parameter is fixed by fitting the observed energy of this  $J^{\pi}=1^{+}$  state. The IBM cannot therefore predict the energy of the scissors mode.

The  $M1$  operator has the form

$$\mathcal{M}(M1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (g_{\pi} L_{\pi} + g_{\nu} L_{\nu}) \mu_N = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_v, \quad (3.23)$$

where the  $F$  spin scalar and vector components are

$$\mathcal{M}_s(M1, \mu) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} g_R L_\mu \mu_N = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} g_R (L_{\pi, \mu} + L_{\nu, \mu}) \mu_N, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{M}_\nu(M1, \mu) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (g_\pi - g_\nu) \left( \frac{N_\nu}{N} L_{\pi, \mu} - \frac{N_\pi}{N} L_{\nu, \mu} \right) \mu_N \quad (3.25)$$

and the gyromagnetic factor is obtained from the  $F$  spin scalar term

$$g_R = \frac{\langle \mu \rangle}{L} = \frac{g_\pi \langle L_\pi \rangle + g_\nu \langle L_\nu \rangle}{\langle L \rangle} = \frac{g_\pi N_\pi + g_\nu N_\nu}{N}. \quad (3.26)$$

The  $g_\pi$  and  $g_\nu$  factors can be computed microscopically by following a boson-fermion mapping procedure [146]. Since the underlying idea in IBM is that the  $s$  and  $d$  bosons represent strongly correlated  $J^\pi = 0^+$  and  $J^\pi = 2^+$  nucleon pairs, one can turn the boson state  $\Psi_B$  into a fermion state  $\Psi_F$  by substituting the boson operators  $s^+$  and  $d^+$  with correlated fermion pair operators

$$S^+ = \sum_i c_i^{(0)} (a_i^+ a_i^+)_0^0, \quad D_\mu^+ = \sum_{ij} c_{ij}^{(2)} (a_i^+ a_j^+)_\mu^2. \quad (3.27)$$

The boson operator  $O_B$  is then defined by equating the matrix elements

$$\langle \Psi_B | O_B | \Psi'_B \rangle = \langle \Psi_F | O_F | \Psi'_F \rangle, \quad (3.28)$$

where  $O_F$  is the shell-model operator.

The microscopic estimates based on the above procedure give [147,148]  $g_\pi \cong 1$  and  $g_\nu \cong 0$ . Alternatively they can be estimated empirically from the comparison with the experimental  $g$  factor of the  $2^+$  states [29,149,150]. The values so determined can deviate from  $g_\pi \cong 1$  and  $g_\nu \cong 0$  by 25–30%.

The  $F$  spin vector term couples the ground state to the  $J^\pi = 1^+$  mixed symmetry state of the scissors mode with a strength given by [4,29,148]

$$B(M1) = \frac{3}{4\pi} \frac{8N_\pi N_\nu}{2N-1} (g_\pi - g_\nu)^2 \mu_N^2. \quad (3.29)$$

It is to be noticed that only valence nucleons contribute to the strength. Using the values  $g_\pi = 1$  and  $g_\nu = 0$  for  $^{156}\text{Gd}$ ,  $N_\pi = 7$  and  $N_\nu = 5$ , one obtains  $B(M1) \cong 2.8 \mu_N^2$ , a value remarkably close to experiments.

The IBM form factor is computed by using the microscopic expression of the  $s$  and  $d$  bosons. It contains therefore some spin contribution. Its agreement with experiments is satisfactory even at high momentum transfers, where the spin term is dominant and where the TRM appears clearly to be inadequate [107,108]. These results have been confirmed in subsequent calculations [151,152]

The IBM description of the mode is on the other hand closely related to the TRM. As we will see, in the classical limit the IBM Hamiltonian assumes indeed the TRM form.

The  $M3$  operator has a similar structure

$$\mathcal{M}(M3) = \sqrt{\frac{35}{8\pi}} (g_{\pi}^{(3)}(d_{\pi}^{\dagger}d_{\pi})_{3\nu} + g_{\nu}^{(3)}(d_{\nu}^{\dagger}d_{\nu})_{3\nu}), \quad (3.30)$$

where, for the lack of experimental data, the gyromagnetic ratios are to be determined microscopically by a boson-fermion mapping procedure similar to the one sketched for the  $M1$  case. The model predicts [24] three  $M3$  transitions, one  $F$  spin symmetric and two of mixed symmetry including the scissor mode. Numerically [24,29] the mixed symmetry transition strengths resulted quite strong ( $B(M3)\uparrow \simeq 0.35 + 0.6 \mu_N^2 b^2$ ), while the symmetric strength comes out to be too weak ( $B(M3)\uparrow \simeq 0.09 \mu_N^2 b^2$ ), with respect to the experimental value [142] ( $B(M3)\uparrow \simeq 0.3 \mu_N^2 b^2$ ).

2. *Connection with the TRM and Deformation Law.* The  $M1$  strength given by eq. (3.29) is valid in the  $SU(3)$  limit. The most general IBM2 summed  $M1$  strength consistent with the conservation of  $F$  spin symmetry is [84]

$$\begin{aligned} B(M1)\uparrow &= \frac{3}{16\pi} \langle 0 | S^2 | 0 \rangle (g_{\pi} - g_{\nu})^2 \mu_N^2 \simeq \\ &\simeq \frac{9}{4\pi} P \frac{\langle N_d \rangle}{N-1} (g_{\pi} - g_{\nu})^2 \mu_N^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

where  $N_{\pi}$  and  $N_{\nu}$  denote the number of valence proton and neutron pairs respectively,  $N = N_{\pi} + N_{\nu}$ ,  $\langle N_d \rangle$  is the average number of quadrupole bosons in the ground state; and  $P$ , the fractional number introduced by Casten [153]

$$P = 2 \frac{N_{\pi} N_{\nu}}{N}. \quad (3.32)$$

The IBM2  $M1$  strength in the  $SU(3)$  limit is obtained as a special case by putting  $n_d = \langle N_d \rangle / N = 2/3$ .

One can derive a semiclassical expression of the IBM2 strength by the following procedure [92]. Let us write

$$N_d = N_d^{(p)} + N_d^{(n)} = d_p^\dagger \cdot d_p + d_n^\dagger \cdot d_n, \quad (3.33)$$

having denoted by  $d_\tau^\dagger$  and  $d_\tau$  the quadrupole boson creation and annihilation operators, respectively. Being a scalar,  $N_d$  can be referred to the intrinsic frame. In the classical limit, the harmonic approximation holds. We can then transform to shape variables by means of the canonical transformation

$$\alpha_{2\mu}^{(\tau)} = \alpha_0^{(\tau)} (d_{\tau,\mu}^\dagger + d_{\tau,\mu}), \quad \alpha_0^{(\tau)} = \sqrt{\frac{1}{2B_\tau \omega}}. \quad (3.34)$$

The  $\mu = 1$  components are the shape scissors variables. We can therefore assume  $\omega$  to be the energy of the scissors mode.

In dealing with an axially symmetric system it is appropriate to take as intrinsic ground state a HO wave function which is coherent only in the proton and neutron  $\mu = 0$  components of  $\alpha_{2\mu}^{(\tau)}$ . We have

$$\begin{aligned} d_{\tau,0} \Psi_c &= d'_\tau \Psi_c \\ d_{\tau,\mu} \Psi_c &= 0, \quad (\mu \neq 0), \end{aligned} \quad (3.35)$$

where  $d'_\tau$  are pure  $c$  numbers. It follows that

$$\beta_\tau = \langle \alpha_{20}^{(\tau)} \rangle_c = 2\alpha_0^{(\tau)} d'_\tau. \quad (3.36)$$

In the strong coupling limit we then obtain

$$\begin{aligned} \langle N_d \rangle &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\beta_p}{\alpha_0^{(p)}} \right)^2 + \left( \frac{\beta_n}{\alpha_0^{(n)}} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \omega (B_p \beta_p^2 + B_n \beta_n^2) \simeq \frac{1}{2} \omega B \beta^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

The above equation shows that the number of quadrupole bosons in the IBM2 ground state is strictly correlated with the Bohr–Mottelson deformation parameter  $\beta$ . The link between the  $M1$  strength and deformation is equally close. Indeed upon insertion in eq. (3.31) we get

$$B^{(cl)}(M1)\uparrow \simeq \frac{9}{8\pi} \frac{P}{N-1} \omega B \beta^2 (g_\pi - g_\nu)^2 \mu_N^2. \quad (3.38)$$

In virtue of this relation, the IBM2 strength appears to be quadratic in the deformation parameter consistently with experiments. Such a property is hidden

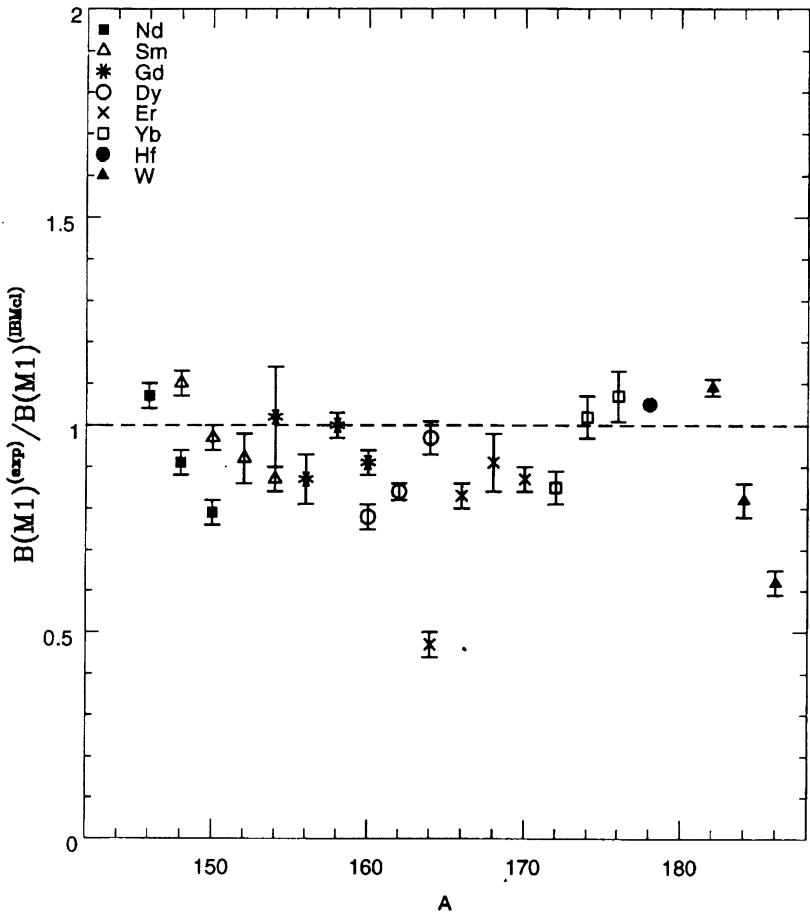


Fig.2. Ratio between the IBM  $M1$  strength computed in the semiclassical limit (eq. 3.38) and the experimental value in the rare-earth region

when the same strength is expressed in the IBM2 formalism. Figure 2 shows that in the classical limit of IBM2 the experimental trend of the  $M1$  strength is closely reproduced. Another method for deriving the classical limit of the same IBM  $M1$  strength (3.31) has been developed in Ref. 91. The results obtained are of the same quality.

3. *The TRM as Geometric Limit of the IBM2: Explicit Derivation.* The close link of the IBM2 approach with the TRM was explicitly proved [154—157]. Using coherent states of the form

$$|\Psi_\alpha\rangle = \exp\left(\sum_{k=\pi, \nu} (\alpha_{sk} s_k^+ + \alpha_{dk} \cdot d_k^+)\right) |0\rangle \quad (3.39)$$

the IBM Hamiltonian is turned into a classical one

$$H(\alpha_{sk}, \alpha_k, \alpha_{sk}^*, \alpha_k^*) = \langle \Psi_\alpha | H_B | \Psi_\alpha \rangle, \quad k=p, n. \quad (3.40)$$

Because of the conservation of the total number of bosons  $N$ ,  $\alpha_{sk}$  can be expressed in terms of  $N$  and  $\alpha_k$ . The resulting Hamiltonian depends on ten coordinates  $\alpha_p$  and  $\alpha_n$ , five for protons and five for neutrons, and their complex conjugates, as in the two-boson models illustrated previously.

The link of the IBM as well as of the other boson model with the TRM can be established by the following procedure.

One can transform these shape coordinates  $\alpha_k$  into the intrinsic coordinates  $\beta_k$  and  $\gamma_k$  and the Euler angles  $(\alpha\beta\gamma)$  by the canonical transformation

$$\alpha_{k,\mu} = \sum_{\nu} a_{k,\nu} D_{\mu\nu}^{(2)}(\Omega_k) \quad (3.41)$$

and similarly for the conjugate momenta  $\pi_k$ . In the above equation  $a_{k,\mu}$  have the expressions

$$\begin{aligned} a_{k,0} &= \beta_k \cos \gamma_k, \\ a_{k,\pm 2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_k \sin \gamma_k, \\ a_{k,\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

In IBM the deformation parameter  $\gamma$  is equal to the Bohr and Mottelson corresponding quantity, while the parameter  $\beta$  is a function of the parameter  $\beta$  of Bohr and Mottelson.

In order to derive the Hamiltonian describing the scissors mode one must freeze the shape variables by putting their equilibrium values. For an axially symmetric system one has  $\gamma_\pi = \gamma_\nu = 0$ , while the values of  $\beta$  are obtained by minimizing the energy. Of the two sets of Euler angles ( $\Omega = \alpha\beta\gamma$ ), the angles  $\gamma$ 's are redundant if we impose  $L_3^\pi = L_3^\nu = 0$  consistently with the assumption of axial symmetry. The remaining angles can be transformed to an angle  $\theta$  between the symmetry axes and to a set of Euler angles describing the orientation of the full system, exactly as in the TRM. This program was carried explicitly for instance in Ref. 154. Their starting point was an IBM2 Hamiltonian of the form

$$H_B = E_0 + \varepsilon_d (n_{d\pi} + n_{d\nu}) + KQ_\pi \cdot Q_\nu + \lambda M. \quad (3.43)$$



After having followed the above prescriptions, by making an expansion in  $\theta$  and keeping the quadratic terms in the angular momenta  $L_{k,\mu}$  they obtained, to lowest order in the  $1/N$  expansion, apart from a constant

$$H = \sum_{k=\pi,\nu} \frac{1}{\mathfrak{I}_k} (\rho_{k2}^2 + \rho_{k\bar{2}}^2) + \frac{1}{\mathfrak{I}_{\pi\nu}} \rho_\pi \cdot \rho_\nu + \frac{1}{2} C \theta^2, \quad (3.44)$$

where  $\rho_{k\mu} = (1/N_k) L_{k\mu}$ . The inertial parameters  $\mathfrak{I}_k$  and  $\mathfrak{I}_{\pi\nu}$  and the restoring force constant are complicated functions of  $N_k$ ,  $\beta_k$  and of the other parameters entering into the starting Hamiltonian.

The classical Hamiltonian (3.44) is formally identical to the TRM Hamiltonian (2.3). The only difference is the presence of the coupling term  $L_\pi \cdot L_\nu$ , which in the TRM appears only for  $N \neq Z$ .

One can therefore quantize the Hamiltonian by following the TRM procedure and obtains as in the TRM a two-dimensional HO Hamiltonian in  $\theta$ . The excitation energy  $\omega$  of the mode is now given by

$$\omega = \frac{4}{N} \left[ C \left( \frac{2}{\mathfrak{I}_k} - \frac{1}{\mathfrak{I}_{\pi\nu}} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.45)$$

The moment of inertia and the restoring force constant are estimated using standard IBM parameters. Taking the average value  $1/\mathfrak{I} = 1/\mathfrak{I}_\pi + 1/\mathfrak{I}_\nu$ , one gets for  $^{156}\text{Gd}$   $\omega = 2.96$  MeV which is a good approximation to the observed value  $\omega = 3.1$  MeV.

We have pointed out already that the IBM and TRM form factors practically coincide up to moderate values of the momentum transfer. The IBM is more successful at higher momenta. The success of the IBM over the semi-classical description is generally attributed to the fact that in IBM the neutron-proton rotational oscillation is performed by valence nucleons only. In order to check this point it was assumed in the TRM that only the part of proton and neutron fluids external to an inert core takes part to the motion [158]. Such a change, however, spoils the agreement of the TRM with the experimental form factor. The success of the IBM description is rather to be ascribed to dynamical correlations which, among other things, allow, though effectively, for spin contributions. In particular the rather satisfactory agreement of the  $M1$  IBM form factor with experiments at high  $q$ 's is due to the spin degrees of freedom which are effective only at high momentum transfer.

Though accounting well for the collective properties of the  $M1$  mode, the IBM2, as all other phenomenological approaches, cannot account for the  $M1$  strength distribution. The attempts to explain the fragmentation of the strength by including additional bosons [25,28] or by changing the parameters of the Majorana force [159] resulted clearly inadequate.

#### 4. MICROSCOPIC DESCRIPTIONS: SHELL-MODEL CALCULATIONS

All boson descriptions are based on the quantization of the quadrupole shape variables  $\alpha_p$  and  $\alpha_n$  and lead in the geometric limit to a semiclassical description formally equivalent to the one provided by the TRM.

Important differences however appear among the same boson descriptions when these are in quantized form. This is to be expected since the Hamiltonians and the methods used to handle the eigenvalue problem differ from model to model. In particular a major difference between IBM and the other two models can be noticed. While in fact the IBM is a boson number conserving scheme, the other two approaches are not.

The microscopic implications of such a difference are of great importance. The IBM bosons, as we saw, can be considered to lowest order as highly correlated valence nucleon pairs. The bosons in the NPD and the GCS models are instead to be viewed to lowest order as highly correlated p-h nucleon states. The IBM can be indeed considered as a truncated shell-model scheme where valence nucleons are so strongly pairwise correlated to allow a description in terms of bosons. The microscopic counterpart of NPD and CGSM is to lowest order the random phase approximation (RPA) scheme.

The microscopic descriptions of the scissors mode fall indeed in these two major schemes, standard shell-model and RPA. The shell model has been adopted to study  $M1$  excitations only in light and medium-light nuclei. In heavy nuclei, calculations of this kind are prohibitive because of the exceedingly large dimensions of the configuration space. Only shell-model calculations using group theoretical basis and relying on severe approximations have been carried out for these latter nuclei.

**A. Shell-Model Approaches in Light Nuclei.** Zamick [39—41] has shown that  $M1$  states with a strength of about  $1\mu_N^2$  can be generated in the restricted  $f_{7/2}^n$  shell-model space. These states have the form

$$\Psi_J = \sum_{L_p L_n \nu} D_J(L_p L_n \nu) [(f_{7/2}^2)_{L_p} \otimes (f_{7/2}^n)_{L_n}]^J, \quad (4.1)$$

where  $\nu$  is the seniority quantum number,  $D_J$  is the probability amplitude for two protons, coupled to angular momentum  $L_p$ , and  $n$  neutrons coupled to angular momentum  $L_n$ , to couple to total spin  $J$ .

The  $M1$  operator induces a transition from the  $J^\pi = 0^+$  ground state to the  $J^\pi = 1^+$  excited states with a strength

$$B(M1, 0^+ \rightarrow 1^+) = |\langle \Psi_{1^+} || \mathcal{M}(M1) || \Psi_{0^+} \rangle|^2 = \\ = (3/4\pi) \mu_N^2 (g_p - g_n)^2 \left| \sum_{L\nu} D_0(LL\nu) D_1(LL\nu) \sqrt{L(L+1)} \right|^2, \quad (4.2)$$

where the proton and neutron gyromagnetic factors are the effective ones appropriate for a single  $j$  shell

$$g = \frac{l}{j} g_l + \frac{g_s}{2j}. \quad (4.3)$$

Using the orthogonality relation

$$\sum_{\alpha} D_{J\alpha}(LL) D_{J\alpha}(L'L') = \delta_{LL'} \quad (4.4)$$

it is straightforward to obtain the integrated strength

$$\sum_{\alpha} B^{\alpha}(M1, 0^+ \rightarrow 1^+) = (3/4\pi) \mu_N^2 (g_p - g_n)^2 \sum_L |D_0(LL)^2|^2 L(L+1). \quad (4.5)$$

The appearance of the factor  $(g_p - g_n)$  stresses the isovector character of the transitions. The scissors nature can be proved by rendering explicit the link with the TRM. Indeed

$$\sum_L |D_0(LL)|^2 L(L+1) = \langle \Psi_0 | J_p^2 | \Psi_0 \rangle = \\ = \frac{1}{4} \langle \Psi_0 | S^2 | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{4} \mathfrak{I}\omega. \quad (4.6)$$

We then get the standard TRM expression (2.11). In this case, however, the strength gets contribution from both the orbital and the spin components. This is due to the fact that the calculation is carried out within a single  $j$  shell so that the  $M1$  operator takes the form (2.63) with effective gyromagnetic ratios (4.3). Similar expressions have been derived for the strengths of magnetic transitions of higher multipolarity ( $\lambda = 3, 5, 7$ ).

Numerical calculations have been performed for Ti isotopes using a nucleon-nucleon interaction empirically determined from the observed levels of  $^{42}\text{Sc}$  under the assumption that these  $^{42}\text{Sc}$  states are due to the configuration  $(1f_{7/2})^2$ . The numerical results show that the  $M1$  transition strength is mostly concentrated into the lowest  $J^\pi = 1^+$  state. The strengths of the transitions of higher multipolarity are instead strongly fragmented and get a spin contribution

which increases with the multipolarity, a result also found by Heyde and Sau [160].

The schematic shell-model underestimates the orbital, with respect to spin, contribution to the  $M1$  strength. For  $^{46}\text{Ti}$  the calculated ratio is  $R = \sqrt{B_l}/\sqrt{B_s} \simeq 0.86$ , while the observed one is  $R \simeq 3.5$ . If configuration mixing with higher shell is accounted for [161,162] the ratio raises to  $R \simeq 2.5$ . The calculation reproduces nicely the  $M1$  and  $M3$  form factors.

Studies of the  $M1$  mode in Ti isotopes have been carried out with satisfactory and, in many ways, similar results also in RPA [71].

**B.  $SU(3)$  Shell Model.** It has been pointed out already that the  $M1$  mode is excited through the operator

$$S_+ = L_+^{(p)} - L_+^{(n)}. \quad (4.7)$$

If we confine ourselves within a major shell and use a HO basis,  $L_+^{(\tau)}$  can be viewed as the generators of the  $SU_\tau(3)$  groups. The connection with this group can be made more transparent by observing that

$$S_+ |0\rangle = -(8\pi/15)^{1/2} m(\omega_1 + \omega_3) \sum_n |K^\pi = 1^+, n\rangle \langle K^\pi = 1^+ n | Q_{+1} |0\rangle, \quad (4.8)$$

where

$$Q = r_p^2 Y_{2,1}(r_p) - r_n^2 Y_{2,1}(r_n). \quad (4.9)$$

Namely,  $L_+^{(\tau)}$  acts just like the quadrupole operators  $Q_{+1}^{(\tau)}$  which are also generators of  $SU_\tau(3)$ .

In the  $SU(3)$  model [163] the Hamiltonian is composed of an HO one-body term  $H_0$  plus a quadrupole-quadrupole (Q-Q) two-body potential. For a given major shell this interaction represents the leading term in the expansion of any long range Wigner interaction. Its use is therefore justified in the  $LS$  coupling limit. This is the case of light nuclei. For these nuclei, isospin is also a good quantum number. The states must therefore belong to the antisymmetric representation of the group  $SU(3) \otimes SU_{\sigma\tau}(4)$ . Being the orbital space of a major shell of degeneracy  $s$ , the states with a given symmetry can be classified according to the irreps of the  $U(s)$ ,  $U(3)$  and  $SO(3)$ . If the spin-isospin components are characterized by  $S$  and  $T$ , the basis states can be written

$$|\Psi_\alpha\rangle = |[f](\lambda\mu) K L M S T\rangle, \quad (4.10)$$

where  $[f]$  and  $(\lambda\mu)$  label the  $U(s)$  and the  $U(3)$  representations, respectively,  $KLM$  are the rotational quantum numbers, while  $S$  and  $T$  label the spin and isospin wave function. The scissors states are obtained by acting with the scissors operator  $S_+$  on the ground state. In  $^{20}\text{Ne}$  for instance the  $M1$  state is

$$\begin{aligned} |1^+T=1\rangle &= S_+ |[4] (80) K=0 L=J=0 S=0 T=0\rangle = \\ &= |[31] (61) K=1 L=1 S=0 T=1\rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

It is worth noticing that the generator  $S_+$  turns the completely symmetric (anti-symmetric) orbital (spin-isospin) part into one of mixed symmetry. In other nuclei with  $T \neq 0$  like  $^{22}\text{Ne}$ ,  $S_+$  generates more than one scissors state.

A shell-model  $SU(3)$  study of  $M1$  excitations in light nuclei of the  $sd$  shell, like  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{22}\text{Ne}$  and  $^{36}\text{Ar}$ , and of the  $pf$  shell, like  $^{44}\text{Ti}$ , was carried out by Poves et al. [45–47]. The findings of their calculation were:

i) The integrated  $M1$  strength of all  $J^\pi = 1^+$  states is  $\sum B(M1) = 2.43 \mu_N^2$  in  $^{20}\text{Ne}$  and  $\sum B(M1) = 3.60 \mu_N^2$  in  $^{36}\text{Ar}$ .

ii) In  $^{20}\text{Ne}$  the 75% of the strength is concentrated into the lowest  $J^\pi = 1^+$  state at  $\omega \simeq 11$  MeV and mostly comes from the convection current.

iii) In  $^{36}\text{Ar}$  the strength is mainly shared by four  $J^\pi = 1^+$  states. The difference between the  $M1$  distribution in the well deformed  $^{20}\text{Ne}$  and that in the vibrational  $^{36}\text{Ar}$  can be interpreted as a confirm of the peculiarity of the scissors mode, whose existence is closely related to deformation according to the TRM and the schematic RPA.

In heavy nuclei the  $SU(3)$  symmetry is spoiled by the strong spin-orbit coupling term. This causes a large separation between the members of the Nilsson spin-orbit doublets and pushes the state of maximum  $j$  down to the next lower major shell. As a result a major shell is composed of a set of normal parity orbits and one abnormal parity s.p. state.

One can observe, however, that the states of a given  $N$  shell with  $l-1/2$  and  $(l-2)+1/2$  are very close in energy [164–166]. Exploiting the fact that the normal parity states of a given shell have the same total angular momenta as the levels of an oscillator shell with  $N=N-1$ , one can make the mapping  $N \rightarrow N-1$ ,  $l-1/2 \rightarrow l+1/2 = (l-1)+1/2$ ,  $(l-2)+1/2 \rightarrow (l-1)-1/2$ .

After relabeling the Nilsson states with pseudo-oscillator quantum numbers  $[\tilde{N}\tilde{n}\tilde{\Lambda}\tilde{\Omega}]$ , the members of the new spin-orbit doublet with  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Lambda} \pm 1/2$  appear very close in energy. The normal parity states can therefore be classified according to a pseudo- $SU(3)$  [167,168]. Such a scheme can work only under the assumption that i) particles in the abnormal parity single  $j$  shell are dominated

by the pairing interaction so that the dominant configurations arising from this shell are zero seniority states with  $J_{\pi}^A = J_{\nu}^A = 0$ , ii) the interaction between normal and abnormal parity states is weak, iii) proton and neutron spatial wave functions in the normal parity space are totally symmetrical so that  $\tilde{S}_{\pi} = \tilde{S}_{\nu} = 0$ . Under these assumptions, the nuclear state is of the form [48,49]

$$\Psi_{JM} = (\Psi_{JM}^N \otimes \Psi_{JA}^A)_{JM}, \quad (4.12)$$

where the completely antisymmetric normal parity ( $\Psi_{JM}^N$ ) and abnormal parity ( $\Psi_{JA}^A$ ) states are respectively classified according to the chains

$$\begin{aligned} U(\Omega_N^{\sigma}) &\rightarrow U(\Omega_{N/2}) \otimes U(2) \rightarrow SU(3) \otimes SU(2) \rightarrow O(3) \otimes SU(2) \rightarrow SU(2) \\ U(\Omega_A^{\sigma}) &\rightarrow S_p(\Omega_A^{\sigma}) \rightarrow O(3), \end{aligned} \quad (4.13)$$

where  $\Omega_N$  and  $\Omega_A$  are the dimensions of the two groups and  $S_p$  is the compact symplectic group. Because of the pseudospin s.p. basis and the assumptions made, the magnetic dipole operator  $\mathcal{M}(M1)$  is purely orbital

$$\mathcal{M}(M1) = 1/2(g_{\pi} + g_{\nu})\tilde{L} + 1/2(g_{\pi} - g_{\nu})(\tilde{L}_{\pi} - \tilde{L}_{\nu}). \quad (4.14)$$

The theory predicts from one to four  $J^{\pi} = 1^{+}$  states, the actual number depending on the leading  $SU(3)$  proton and neutron irreps. For completely symmetric proton and neutron  $SU(3)$  representations  $(\lambda_{\pi}, 0)(\lambda_{\nu}, 0)$ , as in  $^{154}\text{Sm}$  and  $^{238}\text{U}$ , there is only one  $J^{\pi} = 1^{+}$  state. For such a state the  $M1$  transition strength is given by

$$B(M1, J^{\pi} = 0 \rightarrow 1^{+}) = 364\pi(g_{\pi} - g_{\nu})^2 \frac{2\lambda_{\pi}\lambda_{\nu}}{(\lambda_{\pi} + \lambda_{\nu} - 1)} \quad (4.15)$$

which has the same structure as in IBM2 expression (eq. 3.29), with  $\lambda_{\tau}$  replacing  $N_{\tau}$ .

When only one  $\pi$  (or  $\nu$ ) irreps is symmetric, as in  $^{156}\text{Gd}$ , there are two  $J^{\pi} = 1^{+}$  states, both collective. In general, as in  $^{164}\text{Dy}$  or  $^{168}\text{Er}$ , neither the  $SU_{\pi}(3)$  nor the  $SU_{\nu}(3)$  irreps are symmetric. In this case there are four  $J^{\pi} = 1^{+}$  states, three of them corresponding to  $K^{\pi} = 1^{+}$  bands and the other belonging to a  $K^{\pi} = 0^{+}$  band. Only two of the three  $J^{\pi} = 1^{+}$  states have large  $M1$  strength, while the state belonging to the  $K^{\pi} = 0^{+}$  band is moderately collective.

Aside from the  $M1$  strengths, the authors have calculated also the magnetic moments  $\mu$ , which fixed the gyromagnetic factors ( $g_\pi = 1$  and  $g_\nu = 0$ ), as well as the branching ratio  $B(M1, 1^+ \rightarrow 2^+)/B(M1, 1^+ \rightarrow 0^+)$  which supports the axial symmetry of the nuclei under study. The calculations underestimate the  $M1$  strength by about a factor two.

## 5. RPA DESCRIPTIONS

Most of the experimental analyses have been devoted to the search for and characterization of the mode in heavy nuclei, specially of the rare-earth region. A main feature of the mode in these nuclei is the fragmentation of the  $M1$  strength. None of the phenomenological or schematic approaches discussed previously can account for such a property. Full shell-model studies would be needed. They are not feasible, however, for heavy nuclei. One must therefore rely on approximations. RPA has been the approximation scheme more extensively adopted.

**A. RPA General Formalism.** In RPA the nuclear eigenvalue problem is formally turned into a HO eigenvalue equation [169,170]. To this purpose one defines the eigenstates of the nuclear Hamiltonian as

$$|\lambda\rangle = O_\lambda^+ |0\rangle, \quad (5.1)$$

where the operators  $O_\lambda^+$  are such that its hermitian conjugates satisfy the equation

$$O_\lambda |0\rangle = 0. \quad (5.2)$$

The latter equation defines the nuclear ground state  $|0\rangle$  as the vacuum for the operators  $O_\lambda$  and  $O_\lambda^+$ . Such a vacuum is in general a highly correlated state. Because of the above assumptions the eigenvalue equation can be written in the HO form

$$[H, O_\lambda^+] |0\rangle = \omega_\lambda O_\lambda^+ |0\rangle = (E_\lambda - E_0) O_\lambda^+ |0\rangle. \quad (5.3)$$

RPA consists in solving these equations in a restricted p-h space so that the operator  $O_\lambda^+$  is of the form

$$O_\lambda^+ = \sum (Y_{ph}^\lambda a_p^+ a_h - Z_{ph}^\lambda a_h^+ a_p). \quad (5.4)$$

The states  $|\lambda\rangle$  are normalized according to

$$\delta_{\lambda\lambda'} = \langle \lambda | \lambda' \rangle = \langle 0 | O_\lambda O_{\lambda'}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [O_\lambda, O_{\lambda'}^\dagger] | 0 \rangle \equiv \langle | [O_\lambda, O_{\lambda'}^\dagger] | \rangle, \quad (5.5)$$

where  $| \rangle$  is the p-h vacuum. The last approximate equality expresses the quasiboson approximation. In virtue of this approximation, the normalization condition yields

$$\sum_{\text{ph}} (Y_{\text{ph}}^{\lambda*} Y_{\text{ph}}^{\lambda'} - Z_{\text{ph}}^{\lambda*} Z_{\text{ph}}^{\lambda'}) = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (5.6)$$

The RPA eigenvalue equations are

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y_\lambda \\ Z_\lambda \end{vmatrix} = h\omega_\lambda \begin{vmatrix} Y_\lambda \\ -Z_\lambda \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

where

$$\begin{aligned} A_{\text{ph}, p' h'} &= \langle | [a_h^\dagger a_p, [H, a_{p'}^\dagger, a_{h'}]] | \rangle = (\epsilon_p - \epsilon_{h'}) \delta_{pp'} \delta_{hh'} + V_{\text{ph}' h' p}, \\ B_{\text{ph}, p' h'} &= -\langle | [a_p^\dagger a_h, [H, a_{p'}^\dagger, a_{h'}]] | \rangle = V_{\text{pp}' hh'}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

The transition amplitudes for the generic one-body operator  $W$  are given by

$$\begin{aligned} \langle \lambda | W | 0 \rangle &= \langle 0 | [O_\lambda, W] | 0 \rangle \equiv \langle | [O_\lambda, W] | \rangle = \\ &= \sum_{\text{ph}} (Y_{\text{ph}}^{\lambda*} W_{\text{ph}} + Z_{\text{ph}}^{\lambda*} W_{\text{hp}}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

In QRPA the states have the form

$$| \lambda \rangle = O_\lambda^\dagger | 0 \rangle = \sum \{ Y_{\alpha\beta}^\lambda \alpha_\alpha^\dagger \alpha_\beta^\dagger - Z_{\alpha\beta}^\lambda \alpha_\beta \alpha_\alpha \} | 0 \rangle, \quad (5.10)$$

where  $\alpha_\alpha^\dagger$  ( $\alpha_\alpha$ ) are creation (destruction) quasiparticle operators defined by the Bogoliubov transformation

$$\alpha_\alpha^\dagger = u_\alpha a_\alpha^\dagger - v_\alpha a_\alpha, \quad u_\alpha^2 + v_\alpha^2 = 1. \quad (5.11)$$

The QRPA eigenvalues are obtained by still solving eqs.(5.7) with matrix elements

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta, \gamma\delta} &= \langle 0 | [\alpha_\beta \alpha_\alpha, [H, \alpha_\gamma^\dagger \alpha_\delta^\dagger]] | 0 \rangle \equiv (E_\alpha + E_\beta) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \tilde{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\ B_{\alpha\beta, \gamma\delta} &\simeq \langle 0 | [\alpha_\beta \alpha_\alpha, [H, \alpha_\delta \alpha_\gamma]] | 0 \rangle \equiv \tilde{V}'_{\alpha\beta\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

where  $E_\alpha$  is the quasiparticle energy and  $| 0 \rangle$  is now the quasiparticle vacuum. We omit the explicit expressions of  $\tilde{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  and  $\tilde{V}'_{\alpha\beta\gamma\delta}$  which are rather involved and can be found for instance in Ref.169.



The QRPA transition amplitudes for the generic operator  $W$  are given by

$$\begin{aligned} \langle \lambda | W | 0 \rangle &\simeq \langle 0 | [O_\lambda, W] | 0 \rangle = \\ &= \sum_{\alpha > \beta} (Y_{\alpha\beta}^{\lambda*} W_{\alpha\beta} + Z_{\alpha\beta}^{\lambda*} W_{\beta\alpha}) (u_\alpha v_\beta + \tau v_\alpha u_\beta), \end{aligned} \quad (5.13)$$

where  $\tau = +1$  or  $-1$  according that the operator  $W$  is even or odd under time-reversal.

The eigenvalues and the transition amplitudes can be determined only numerically using a proper s.p. deformed basis. In the BCS approach only the coefficients  $u_\alpha$  and  $v_\alpha$  are determined selfconsistently using the pairing force only, while the s.p. basis is determined independently. In Hartree–Bogoliubov (H.B.) both s.p. states  $u_\alpha$  and  $v_\alpha$  and coefficients are to be determined selfconsistently from a unique interaction.

**B. RPA Hamiltonians.** The first studies of the mode have been carried out in schematic RPA [34–37]. As already pointed out, their results coincide with those derived in Sec.IID for the TRM. We therefore will not report on them. We only like to mention that a schematic calculation which accounts also for spin-admixtures was carried out to compute the  $M3$  transition [171]. The results were close to the ones derived for the TRM [106].

Apart from few calculations using a Skyrme interaction [55] or a Landau–Migdal force [59,67,68], most of the realistic studies have been carried out using a separable interaction either in RPA [52–54,56–58,60–66,69–77] or in Tamm–Dancoff approximation [78,79].

A guide for guessing which multipoles should enter in the interaction is provided by phenomenological and schematic models. From their analysis we can infer that an RPA Hamiltonian should contain at least the following terms

$$H = H_0 + V_{P-P} + V_{Q-Q} + V_{\sigma\sigma}. \quad (5.14)$$

The first term is a one-body deformed Hamiltonian

$$H_0 = \sum_i h_i = \sum_i (T_i + V_i), \quad (5.15)$$

where  $T_i$  is the nucleon kinetic term; and  $V_i$ , the nucleon deformed potential. This is either of the Nilsson [78] or Woods–Saxon form (for instance [53,60]). The p-h energy spectrum produced by the one-body potential is extremely fragmented with intermixed orbital and spin excitations [172,173].

The second piece is the monopole and quadrupole pairing for protons and neutrons

$$V_{P-P} = \sum_{k=p,n} \{G_0^{(k)} P_0^{(k)\dagger} P_0^{(k)} + G_2^k P_2^{(k)\dagger} P_2^{(k)}\}, \quad (5.16)$$

where

$$P_J^\dagger = \sum_{\alpha,\beta} [a_\alpha^\dagger \otimes a_\beta^\dagger]_J. \quad (5.17)$$

The third is the  $Q$ - $Q$  interaction which in the isospin formalism is

$$V_{Q-Q} = 1/2 \sum_{T=0,1} \chi_Q(T) [Q(T) Q^\dagger(T) + Q^\dagger(T) Q(T)], \quad (5.18)$$

where

$$Q \left( T = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right) = Q_{+1}^{(p)} \pm Q_{+1}^{(n)}. \quad (5.19)$$

Finally we have the spin-spin interaction

$$V_{\sigma\sigma} = 1/2 \sum_{T=0,1} \chi_\sigma(T) [\sigma(T) \sigma^\dagger(T) + \sigma^\dagger(T) \sigma(T)], \quad (5.20)$$

where

$$\sigma \left( T = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right) = s_{+1}^{(p)} \pm s_{+1}^{(n)}. \quad (5.21)$$

The importance of the  $Q$ - $Q$  and monopole pairing interactions appears clear from the microscopic analysis of the TRM or, which amounts to the same thing, from schematic RPA calculations (Sec. 2D). As shown there, the quadrupole fields are related closely to proton and neutron angular momenta. They enter directly in the  $M1$  p-h channel. Monopole pairing qualifies the rotors as superfluids and has the effect of quenching the  $M1$  strength without spoiling the scissors picture. The necessity of the quadrupole pairing can be inferred from the fact that the  $L = 2$  correlated valence pairs are the building blocks of the IBM states. The major role played by such a term emerges explicitly from displaying the structure of the schematic SM wave function [39]

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= D_0(L_p = 0, L_n = 0) |0\rangle + D_0(L_p = 2, L_n = 2) |(2_p \otimes 2_n)_0\rangle, \\ \Psi_1 &= D_1(L_p = 2, L_n = 2) |(2_p \otimes 2_n)_1\rangle. \end{aligned} \quad (5.22)$$

The  $M1$  transition is clearly due to the  $L = 2$  correlations among alike valence nucleons. Monopole and quadrupole pairings have the effect of redistributing the p-h  $M1$  spectrum by inducing a concentration of scissors excitation around

3 MeV [172,173]. The role of quadrupole pairing in RPA was studied in Ref.70. The spin-spin term is dictated by the spin-orbit admixtures in the s.p. states and by a large number of low energy p-h spin excitations intermixed with the orbital ones. Because of its repulsive character, the spin-spin interaction has the important effect of pushing up in energy the spin excitations, which get separated from the  $M1$  orbital transitions, consistently with experiments and with the scissors picture [78].

Although all terms included in eq.(5.14) play a major role, it is not excluded that other pieces of the nuclear Hamiltonian not present in eq.(5.14) may affect the  $M1$  channel. It has been stressed for instance that the so-called recoil term reduces the fragmentation of the two-quasiparticle spectrum, thereby concentrating the strength around a main peak consistently with experiments, and enforces the scissors nature of the transitions [174—176].

**C. Spurious Rotational Admixtures.** The study of the mode in a realistic RPA approach has gone through a series of problems [177]. A major one was the occurrence of spurious rotational admixtures pointed out for the first time in Ref.60. Since the RPA eigenvalue problem is formulated in the intrinsic system, the RPA ground state breaks spherical symmetry so that

$$J_{+1} |0\rangle \neq 0. \quad (5.23)$$

This state separates out at zero energy from the other RPA states if the starting Hamiltonian is rotationally invariant. In this case in fact we have

$$(H - E_0) J_{+1} |0\rangle = [H, J_{+1}] |0\rangle = 0. \quad (5.24)$$

Namely,  $J_{+1} |0\rangle$  is an exact eigenstate with zero eigenvalue. It is therefore automatically orthogonal to the other RPA states.

The Hamiltonian used in almost all calculations however is not rotationally invariant so that

$$\langle K^\pi = 1^+ | J_{+1} |0\rangle \neq 0. \quad (5.25)$$

Several techniques have been developed to remove the rotational state. The first one [60] consists in adding a symmetry restoring term to the Hamiltonian

$$H \rightarrow H' = H - \sum \nu \lambda_\nu J_- O_\nu^+ (K^\pi = 1^+), \quad (5.26)$$

where the Lagrange multipliers  $\lambda_\nu$  are determined by the constraint

$$\langle K^\pi = 1^+, \nu | J_+ |0\rangle = \langle 0 | O_\nu (K^\pi = 1^+) J_+ |0\rangle = 0. \quad (5.27)$$

Since such a condition depends upon the solution, the RPA equations become nonlinear, so that their final determination requires an iterative procedure.

A second procedure, adopted in TDA [78], consists in using the Schmidt orthogonalization procedure on the two-quasiparticle states. These have the form

$$|\alpha_1 \alpha_2\rangle = |\alpha_1 \alpha_2\rangle_{sp} - J_+ |0\rangle \langle 0| J_- |\alpha_1 \alpha_2\rangle_{sp}. \quad (5.28)$$

The states so constructed are no longer eigenstates of the starting unperturbed Hamiltonian, so that an iterative procedure is needed also in this case.

A third one, adopted in Ref.72, consists in using Pyatov prescription [178] of replacing the quadrupole field in the Hamiltonian with

$$F_1^{(\tau)} = [H_0, J_+^{(\tau)}]. \quad (5.29)$$

The condition of rotational invariance

$$[H, J_+] = 0 \quad (5.30)$$

imposes on the fields  $F$  the following constraint

$$\begin{aligned} 1 + k_{pp} \langle [F_1^{(p)\dagger}, J_+^{(p)}] \rangle + k_{nn} \langle [F_1^{(n)\dagger}, J_+^{(n)}] \rangle &= 0, \\ 1 + k_{nn} \langle [F_1^{(n)\dagger}, J_+^{(n)}] \rangle + k_{pp} \langle [F_1^{(p)\dagger}, J_+^{(p)}] \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

In other approaches [77] the problem is avoided by using a  $j$ -projected s.p. basis which enables one to formulate the problem directly in the laboratory frame. Finally the separation can be achieved by using a selfconsistent basis. This has been done in Ref.61 and partly in Ref.55. The problem can be clearly illustrated in schematic RPA [179].

#### D. Selfconsistent Fields and Rotational Admixtures: A Simple Approach.

Let us assume [179] that  $Z$  protons and  $N$  neutrons move in a spherical HO mean field with frequency  $\omega_0$  and interact through a  $Q - Q$  force. The Hamiltonian is therefore of the rotational invariant form

$$\begin{aligned} H = H_0 + \frac{1}{2} \chi \sum_{\mu} (Q_{2\mu}^{(p)*} Q_{2\mu}^{(p)} + Q_{2\mu}^{(n)*} Q_{2\mu}^{(n)}) + \\ + \frac{1}{2} \chi_{pn} \sum_{\mu} (Q_{2\mu}^{(p)*} Q_{2\mu}^{(n)} + Q_{2\mu}^{(n)*} Q_{2\mu}^{(p)}), \end{aligned} \quad (5.32)$$

where

$$Q_{2\mu}^{(\tau)} = \sum_i q_{2\mu}^{(\tau)}(i) = \sum_i r_i^{(\tau)} Y_{2\mu}^{(\tau)}(i). \quad (5.33)$$

1. *Selfconsistent Mean Field and Doubly-Stretched Coordinates.* In the Hartree approximation we obtain for the  $i_{th}$  proton or neutron deformed mean field

$$V_H^{(\tau)} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 r^2 - \beta_\tau m\omega_0^2 q_{20}^{(\tau)}, \quad (5.34)$$

having defined

$$\begin{aligned} \chi \langle Q_{20}^{(p)} \rangle + \chi_{pn} \langle Q_{20}^{(n)} \rangle &= -\beta_p m\omega_0^2, \\ \chi \langle Q_{20}^{(n)} \rangle + \chi_{pn} \langle Q_{20}^{(p)} \rangle &= -\beta_n m\omega_0^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

The Hartree potential can be written in the form of an anisotropic HO potential

$$V^{(\tau)} = \frac{1}{2} m\omega_1^2(\tau) (x_1^{(\tau)2} + x_2^{(\tau)2}) + \frac{1}{2} m\omega_3^2(\tau) x_3^{(\tau)2} \quad (5.36)$$

with frequencies

$$\begin{aligned} \omega_1(\tau) &= \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2}{3} \delta_\tau} \simeq \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \delta_\tau \right), \\ \omega_3(\tau) &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{4}{3} \delta_\tau} \simeq \omega_0 \left( 1 - \frac{2}{3} \delta_\tau \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

where  $\delta_\tau = \sqrt{45/(16\pi)} \beta_\tau$ . The same potential can be put in the «spherical» form

$$V^{(\tau)} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 (\tilde{x}_1^{(\tau)2} + \tilde{x}_2^{(\tau)2} + \tilde{x}_3^{(\tau)2}) \quad (5.38)$$

if we use double stretched coordinates [180—183]  $\tilde{x}_i = \omega_i/\omega_0 x_i$ . These are to be used in the quadrupole operator entering into the  $Q - Q$  Hamiltonian so as to preserve its spherical character. This transformation indeed ensures that the Hartree field is not further distorted once the interaction is switched on. We have in fact

$$\langle \tilde{Q}_{20}^{(p)} \rangle = \langle \tilde{Q}_{20}^{(n)} \rangle = 0 \quad (5.39)$$

if we impose the conditions

$$\omega_1^{(\tau)} \sum_1^\tau = \omega_2^{(\tau)} \sum_2^\tau = \omega_3^{(\tau)} \sum_3^\tau, \quad (5.40)$$

where  $\sum_i^\tau = \sum_i (n_i + 1/2)$ . The explicit form of the  $\tilde{Q}$  operators is

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{\pm 1} &= \frac{\omega_1 \omega_3}{\omega_0^2} Q_{\pm 1}, & \tilde{Q}_{\pm 2} &= \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} Q_{\pm 2}, \\ \tilde{Q}_0 &= \frac{1}{3\omega_0^2} (\omega_1^2 + 2\omega_3^2) Q_0 - \frac{\sqrt{5}}{3\omega_0^2} (\omega_1^2 - \omega_3^2) r^2 Y_{00}.\end{aligned}\quad (5.41)$$

Since the double stretched quadrupole operator contains also a monopole term, the new  $Q$ - $Q$  potential is composed of pure quadrupole-quadrupole plus monopole-quadrupole and monopole-monopole terms.

The Hartree conditions fix the isoscalar coupling constant. Summing the two eqs.(5.34) and making use of standard formulas for the quadrupole moments, we obtain, to lowest order in  $\delta$ , the well-known result [133]

$$\chi(0) = \frac{1}{2} (\chi + \chi_{pn}) \simeq -\frac{4\pi}{5} \frac{m\omega_0^2}{A\langle r^2 \rangle}. \quad (5.42)$$

The isovector coupling constant  $\chi(1)$  can be derived from the symmetry energy mass formula [133] and results to be related to  $\chi(0)$  by the ratio  $b = -\chi(1)/\chi(0) \simeq 3.6$ . According to some analyses [75,184], however, this value is too large.

A quasiparticle RPA calculation formulated in the  $\Delta N = 0 + 2$  space has been carried out [179]. It is shown that, in virtue of the selfconsistent conditions (5.35), the schematic quasiparticle RPA gives a vanishing root. This is the eigenvalue of the redundant rotational mode. Such a state results to be completely removed from the intrinsic ones. One obtains indeed

$$\langle n, K^\pi = 1^+ | L_+ | 0 \rangle \propto P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (5.43)$$

where  $P(x) = P(\omega^2) = 0$  is the eigenvalue equation giving the roots of the  $M1$  physical states.

The method presented here to remove the spurious rotational state, though developed within schematic RPA, has a more general valence. Indeed, the Hartree conditions (5.35) can be written in the form

$$\begin{aligned}1 + k_{pp} \langle [F_1^{(p)\dagger}, J_+^{(p)}] \rangle + k_{pn} \langle [F_1^{(n)\dagger}, J_+^{(n)}] \rangle &= 0, \\ 1 + k_{nn} \langle [F_1^{(n)\dagger}, J_+^{(n)}] \rangle + k_{pn} \langle [F_1^{(p)\dagger}, J_+^{(p)}] \rangle &= 0,\end{aligned}\quad (5.44)$$

where

$$F_1^{(\tau)} = [H_0, J_+^{(\tau)}]. \quad (5.45)$$

These are just Pyatov ansatz (5.31) for removing the rotational mode. They are therefore valid for any one-body potential and any separable Hamiltonian.

2. *Scissors Sum Rule in RPA.* It has been pointed out already that for the scissors mode the energy weighted  $M1$  sum rule is given by eq.(2.66). This quantity has been computed in phenomenological domains such as IBM2 [79, 86—88], in spherical shell-model [42] and in a schematic approach using a deformed mean field (no interaction) [81]. Recently the same sum rule has been computed in RPA [185]. To this purpose a separable interaction which includes a  $Q$ - $Q$  interaction with double stretched coordinates has been adopted. The final result was

$$S_{EW}^{(sc)}(M1) = \frac{3}{16\pi} (S_1^{(sc)} + S_{20}^{(sc)} + S_{22}^{(sc)} g_r^2 \mu_N^2). \quad (5.46)$$

The first term comes from the Hartree field and is given by

$$\begin{aligned} S_1^{(sc)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu = \pm 1} \langle 0 | [S_{\mu}^{\dagger}, [H_0, S_{\mu}]] | 0 \rangle = \\ &= 3m\omega_0^2 (\beta_p \langle Q_{20}^{(p)} \rangle + \beta_n \langle Q_{20}^{(n)} \rangle) \end{aligned} \quad (5.47)$$

which is what obtained in Ref. 81, where only a deformed mean field is considered. The second piece comes from the two-body interaction involving the monopole operators and is given by

$$S_2^{(0)} = -3m\omega_0^2 (\beta_p \langle Q_{20}^{(p)} \rangle + \beta_n \langle Q_{20}^{(n)} \rangle). \quad (5.48)$$

It is, namely, equal and opposite to the one-body contribution (5.47), which therefore cancels out. It remains therefore only the contribution from the pure  $Q$ - $Q$  potential, apart from modifications induced by the use of stretched coordinates. This is given to lowest order in  $\delta$  by

$$S_{EW}^{(sc)}(M1) \simeq -\frac{9}{4\pi} \chi_{pn} \left( \sum_n B_n^{(0)}(E2) \uparrow - \sum_n B_n^{(1)}(E2) \uparrow \right) \quad (5.49)$$

which is the result obtained in spherical shell model [42]. Stretched coordinates are responsible for higher order terms which however are not negligible [185]. Experimentally the  $E2$  strength to the lowest  $2^+$  state is by orders of magnitude larger than the strengths of the other transitions. If these are ignored, one gets

$$\omega^{(-)} B(M1)^{(-)} + \omega^{(+)} B(M1)^{(+)} \simeq -\frac{9}{4\pi} \chi_{pn} B_0^{(0)}(E2) \uparrow. \quad (5.50)$$

It follows that

$$B(M1)^{(\pm)} \propto B_0^{(0)}(E2) \uparrow \propto \delta^2. \quad (5.51)$$

The sum rule approach presented here gives a quite general theoretical proof of the quadratic deformation law holding for the  $M1$  strengths of both low-lying and high energy scissors modes.

**E. Realistic RPA Calculations.** The earlier RPA calculations produced contradictory results. Some of them had seriously questioned the scissors nature of the mode [53,54,59]. The reason of these discordances can be easily explained. The  $M1$  channel is extremely sensitive to s.p. energies, to the kind of interaction used and, for a given interaction, to the choice of the strengths of the different separable pieces. As already pointed [177], these early approaches used different and incomplete Hamiltonians and relied on several untested approximations. Moreover, the  $M1$  states produced by these calculations were contaminated with spurious rotational admixtures. Most of the recent studies are free of most of these limitations and, consequently, tend to converge to similar results.

The goal of RPA calculations can be summarized in the following points. They should i) account for the collective properties of the mode such as the quadratic deformation dependence of the total  $M1$  strength, ii) put on display the microscopic structure of the  $M1$  states so as to enable one to decide about the scissors nature of the mode, iii) reproduce closely the energy distribution of the  $M1$  strength.

Concerning the first point, calculations carried out by different groups have reproduced fairly well the deformation law [69,74,77,79]. The crucial role of pairing correlation in enforcing such a law was particularly stressed. As clearly illustrated in Fig.3, the agreement with experiments would be almost perfect if the spin contribution could be suppressed [74,79]. Indeed, such a good agreement is reached in Ref.77, where the spin contribution is effectively suppressed by the  $j$ -projected basis. In this basis, in fact, deformation is accounted for only perturbatively. The necessity of spin suppression dictated by the experimental data supports implicitly the scissors picture. Such a picture is tested more explicitly by computing the summed overlap

$$\sum_n |\langle K^+, n | \psi_{sc} \rangle|^2, \quad (5.52)$$

where  $|\psi_{sc}\rangle$  is the scissors state defined as

$$|\psi_{sc}\rangle = \alpha J_+^{(p)} |0\rangle + \beta J_+^n |0\rangle. \quad (5.53)$$

The coefficients are determined by imposing its normalization to unit and its orthogonalization to the rotational state

$$\langle \psi_{sc} | \psi_{sc} \rangle = 1, \quad \langle \psi_{sc} | J_+ | 0 \rangle = 0. \quad (5.54)$$



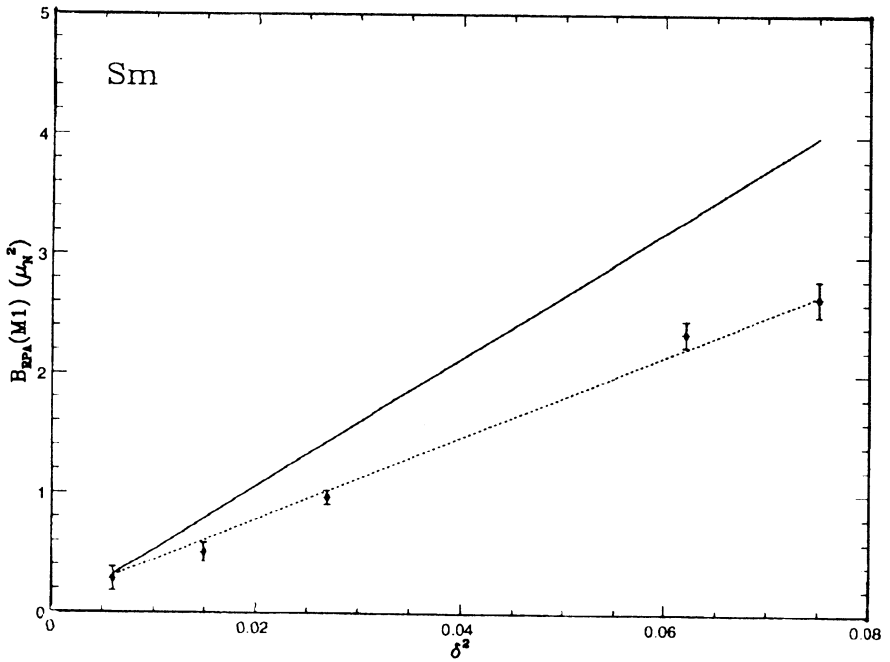


Fig.3. Deformation dependence of the M1 strength computed in RPA versus experiments. The dotted line gives the orbital contribution

The summed overlap for the states below 4 MeV is found to be about 40%, a very large number in view of the fact that, as discussed in Sec.2D, the model predicts another scissors state at high energy [177]. This latter mode is predicted also by realistic RPA calculations [59,68,72,76]. Its extent of fragmentation however is not settled. It seems [186] that if the two-quasiparticle space is truncated up to 30 MeV, the mode is basically not fragmented in agreement with the schematic picture [177]. It becomes strongly fragmented if the two-quasiparticle space is enlarged.

As we said, the experimental systematic study of the scissors mode has led to the other interesting discovery of spin excitations [21,22]. These have been detected in  $^{154}\text{Sm}$  and  $^{156}\text{Gd}$  in the energy range  $5 \div 11$  MeV and have a very peculiar property. The profile of the spectrum exhibits two distinct bumps. These transitions have been studied with good success in TDA [187,188] as well as in RPA [67,68,70,74,77]. There is however no conclusive answer to the interpretation of the observed two-peak structure. It is indeed not clear whether

the two peaks correspond to different proton and neutron excitations [70,77, 187,188] or are of isovector and isoscalar nature [74]. The calculations which support the first picture use a vanishing coupling constant for the isovector spin-spin interaction. The supporters of the other interpretation use a nonvanishing value. In the first case, deformation plays an important role, in the second case, it is not relevant. This fact suggests that the issue can be settled by a systematic analysis which covers both spherical and deformed nuclei.

RPA calculations have been carried out to describe the  $M1$  excitations not only in rare-earth nuclei, but also in actinides [66,73], in medium-light [71] and medium nuclei [63]. On the whole, the results are satisfactory. An unsolved problem remains however. The energy distribution of the  $M1$  strength is not well reproduced. This suggests that maybe the RPA space should be enlarged so as to allow for higher configurations.

## 6. BEYOND RPA: THE QPNM APPROACH

Notably, TDA and RPA calculations are carried out in a p-h or two-quasi-particle space. On energetic ground, however, higher order configurations can also contribute to the mode. Many four-quasiparticle excitations fall within or just above the energy range where the low-lying  $M1$  transitions are observed. In order to study the effect of these states it is necessary to enlarge the space. This has been achieved within the QPNM [93]. In this approach [94] the nuclear system is studied in a space spanned by one plus two RPA phonon states. Most of the properties of all nonrotational states up to 2.5 MeV in deformed nuclei, including all  $E\lambda$  and  $M\lambda$  transitions, have been studied in this scheme [189—196].

**A. Brief Description of the QPNM.** The starting QPNM Hamiltonian has the following structure

$$H = H_{s.p.} + H_{pair} + H_M + H_S + H_T. \quad (6.1)$$

The first term is the one-body Hamiltonian which includes a deformed axially symmetric Saxon–Wood potential, the second is a proton (neutron) monopole pairing interaction, the other three are isoscalar and isovector spin-independent ( $H_M$ ), spin-dependent ( $H_S$ ) and tensor ( $H_T$ ) two-body interactions. All these pieces are written in separable form. The two-body interaction acts in the p-h as well as in the particle-particle (p-p) channels. The p-p component of the spin-independent part yields also a quadrupole pairing term which adds to the monopole pairing interaction. One may notice that the QPNM Hamiltonian is considerably more complex than those adopted in RPA.

The first step of the QPNM is to make use of the Bogoliubov canonical transformation and express the Hamiltonian in terms of quasiparticle operators  $\alpha_{q\sigma}$  and  $\alpha_{q\sigma}^\dagger$ . The symbols  $q\sigma$  stand for the s.p. asymptotic quantum numbers  $q\sigma = Nn_z\Lambda \uparrow$  for  $K = \Lambda + 1/2$  and  $q\sigma = Nn_z\Lambda \downarrow$  for  $K = \Lambda - 1/2$ . RPA phonons are then constructed

$$Q_{Kn\sigma}^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{q_1 q_2} \{ \Psi_{q_1 q_2}^{Kn} A_{K\sigma}^\dagger(q_1 q_2) - \Phi_{q_1 q_2}^{Kn} A_{K-\sigma}(q_1 q_2) \}, \quad (6.2)$$

where  $A_{K\sigma}^\dagger(q_1 q_2)$  ( $A_{K\sigma}(q_1 q_2)$ ) are pairs of creation (annihilation) quasiparticle operators. Their actual structure can be found in Ref.194. Using the equations defining  $Q_{Kn\sigma}^\dagger$  and  $Q_{Kn\sigma}$  it is possible to bring the Hamiltonian (6.1) into the quasiparticle phonon form

$$H_{\text{QPNM}} = H_q + H_v + H_{vq}, \quad (6.3)$$

where  $H_q$  and  $H_q$  are respectively the one-body quasiparticle and RPA phonon Hamiltonians and  $H_{vq}$  is the quasiparticle phonon coupling term. Their expressions can be found in Ref.194.

The transformed Hamiltonian is finally put in diagonal form by using the variational principle with a trial wave function

$$\Psi_n(\sigma K^\pi = 1^+) = \{ I \sum_i R_i^n Q_v^\dagger + \frac{1}{2} \sum_{\nu_1 \sigma_1 \nu_2 \sigma_2} s_{\nu_1 \sigma_1 \nu_2 \sigma_2}^{\sigma} P_{\nu_1 \nu_2}^n Q_{\nu_1 \sigma_1}^\dagger Q_{\nu_2 \sigma_2}^\dagger \} \Psi_0, \quad (6.4)$$

where

$$s_{\nu_1 \sigma_1 \nu_2 \sigma_2}^{\sigma} = \delta_{\sigma_1 \mu_1 + \sigma_2 \mu_2, \sigma K} (1 + \delta_{\nu_1, \nu_2})^{1/2}. \quad (6.5)$$

The labels  $\nu$  and  $\nu_k$  stand for the multipolarities of the RPA phonons,  $\nu = (\lambda_0 \mu_0)_i = (21)_i$  and  $\nu_k = (\lambda \mu)_k$ . The eigenvalues  $E_n$  are the roots of the secular equation

$$\det \| (\omega_\nu - E_n) \delta_{i, i'} - \sum_{\nu_1 \geq \nu_2} \frac{\mathcal{C}(\nu_1 \nu_2) U_{\nu_1 \nu_2}^\nu U_{\nu_1 \nu_2}^{\nu'}}{\omega_{\nu_1} + \omega_{\nu_2} + \Delta\omega(\nu_1 \nu_2) + \Delta(\nu_1 \nu_2) - E_n} \| = 0, \quad (6.6)$$

where

$$\mathcal{C}(\nu_1 \nu_2) = \frac{1 + \mathcal{K}(\nu_1, \nu_2)}{1 + \delta_{\nu_1, \nu_2}}. \quad (6.7)$$

The quantity  $\omega_\nu$  denotes the RPA energies,  $U_{\nu_1\nu_2}^\nu$  describes the coupling between one- and two-phonon states,  $\mathcal{K}$  is a term introduced to take into full account the Pauli principle in the two-phonon components of the total wave function (eq.(6.4)). This term induces the energy shift  $\Delta\omega(\nu_1\nu_2)$  in the eigenvalue equation. The other energy shift  $\Delta(\nu_1\nu_2)$  is due to the coupling with three-phonon states not included explicitly into the calculation. Its value is approximately  $\Delta(\nu_1\nu_2) \simeq -0.2\Delta\omega(\nu_1\nu_2)$ .

**B. Calculations and Results.** Numerical calculations have been carried out for a chain of Gd and Dy isotopes. Single particle energies and wave functions were computed from the deformed axially symmetric Woods–Saxon potential by solving the eigenvalue problem in a space spanned by quasiparticle plus quasiparticle RPA phonon states for each odd nucleus. The calculation, whose details can be found in Refs. 94,194,196,197, is then iterated until a good agreement with the experimental data is reached. Such a procedure fixes the parameters of the potential as well as the quadrupole and hexadecapole deformation parameters  $\beta_2$  and  $\beta_4$ . The values of all parameters can be found in Refs.93,197. The s.p. spectrum was taken from the bottom of the well up to + 5 MeV.

Two-quasiparticle configurations up to an excitation energy of 30 MeV were taken into account. Monopole and quadrupole pairing were included in the calculation of the quasiparticle energies and amplitudes. The quadrupole pairing was extracted from the  $\lambda\mu = 20$  p-p interaction. This term plays an important role in determining the properties of the  $0^+$  states in deformed nuclei [198]. For a fixed value of its strength  $G^{20}$ , the strength of the monopole pairing was determined so as to reproduce the experimental odd-even mass differences. Blocking effect and the Gallagher–Moszkowski corrections [199] were taken into account in computing the two-quasiparticle energies.

The separable interaction includes spin dependent and spin independent p-h multipole terms. The strengths of the spin independent isoscalar p-h interaction terms  $\kappa_0^{\lambda\mu}$  were fixed so as to reproduce the lowest experimental energy level for each  $K^\pi \neq 1^+$  [194—196]. The only parameters left were the isovector multipole constants and the spin strengths. The first were fixed according to the relation  $\kappa_1^{\lambda\mu} = -1.5\kappa_0^{\lambda\mu}$  in substantial agreement with other choices [60]. The spin isoscalar coupling constant was taken to be ten times smaller than the isovector one consistently with the estimates obtained in a sum rule description of spin excitations in heavy spherical nuclei [200]. All parameters used in the study of the  $M1$  modes can be found in Ref.93. The only parameter left was the

coupling constant of the isoscalar  $\lambda\mu = 21$   $Q-Q$  interaction. This was taken to be slightly larger than a critical value, for which the lowest RPA  $K^\pi = 1^+$  state vanishes. With this value the redundant rotational state results to be practically orthogonal to the other intrinsic states. Its overlap with each one of them is less than 0.005.

The basis consists of RPA phonons with  $\lambda = 2-5$  multipolarities. Twenty  $\lambda\mu = 21$  phonons and ten of the others were included. The  $K^\pi = 1^+$  RPA states were computed by including p-h and p-p isoscalar and isovector quadrupole and spin-spin interactions. The  $M1$  strength has been calculated by using a spin quenching factor of  $g_s = 0.7$ .

The  $M1$  strength distributions obtained in RPA and QPNM for  $^{158}\text{Gd}$  is shown in Fig.4 for illustrative purposes.

From the Figure and from a systematic analysis of the results one may draw the following general conclusions:

i) In each nucleus the RPA calculation yields a strong peak of the order of  $(1 \div 1.5)\mu_N^2$ . Because of the coupling with the two-phonon space this peak splits into two of weaker intensity.

ii) The fragmentation induced by the coupling is otherwise modest. It is appreciable only above 3 MeV. This reflects the fact that the coupling between one- and two-phonon states is weak.

iii) On the whole, the moderate increase in fragmentation improves the agreement with experiments. This can be improved by slight changes of properly chosen parameters. As is shown in the Figure, a change of the strength of the  $\lambda\mu = 21$  p-p (pairing) interaction brings sizeable changes on the  $M1$  spectrum.

iv) The nature of the transition is not modified by the coupling with the two-phonon states. Most of the strongly excited low-lying QPNM states are dominated by a single RPA phonon. In both RPA and QPNM calculations, practically all transitions are of orbital nature. A modest spin admixture, however, affects considerably the intensity of the transition. In general the spin contribution to the amplitude is additive.

v) The total overlap with the scissors state is 49% in RPA and 45% in QPNM. Most of the other percentage goes to the high-lying states.

vi) The theoretical summed  $M1$  strength is larger than the one observed experimentally by a factor  $\sim 1.2 \div 1.4$ , mainly because of the spin contribution.

vii) As in RPA (see Fig.3), the agreement with experiment would improve drastically if a mechanism leading to a partial suppression of the spin contribution could be found.

The QPNM was also adopted to study magnetic excitations with higher multipoles, in particular the  $M3$  transitions [191]. It was found that the spin-octupole isovector interaction plays an important role and shifts the  $M3$  strength

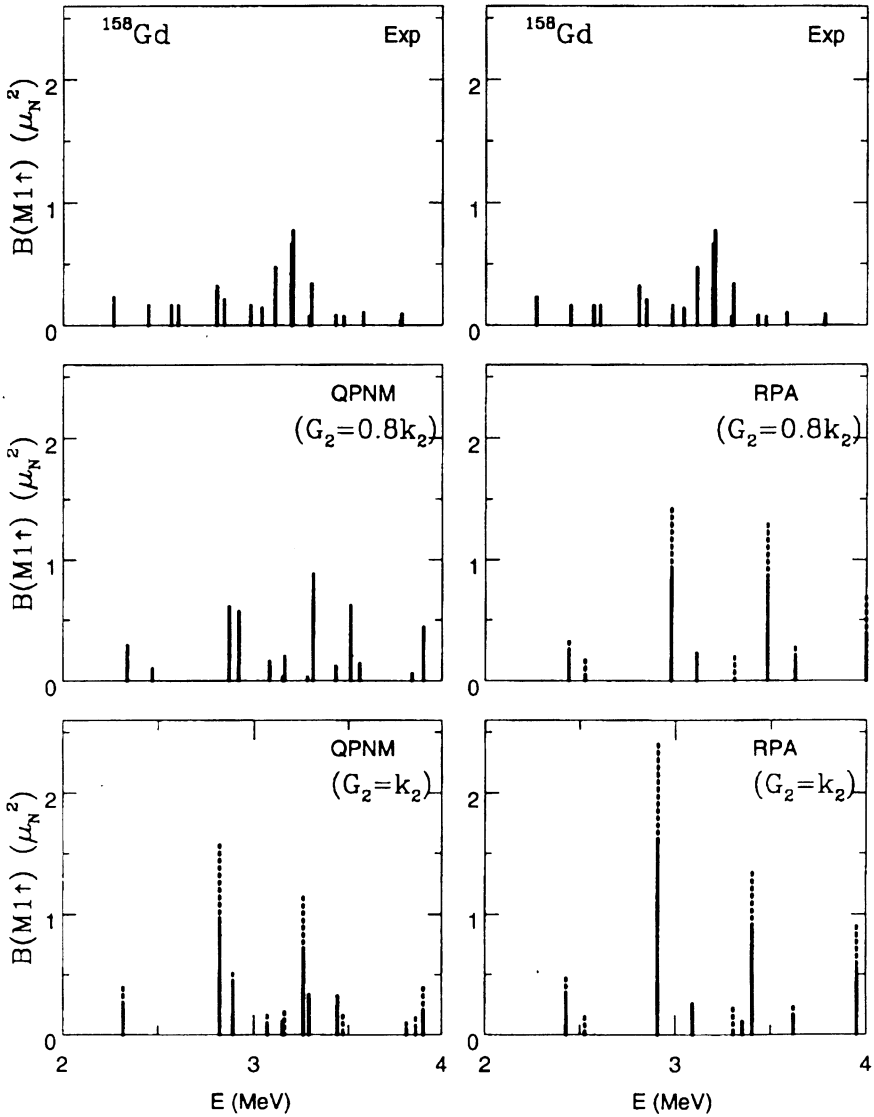


Fig.4. QPNM and RPA  $M1$  strength distributions in  $^{158}\text{Gd}$ . The full part of each peak gives the orbital strength

up in energy in the region of the isovector magnetic resonances. The  $M3$  strength left is fragmented and mainly of spin nature.

## 7. EXCITATIONS IN ODD-MASS DEFORMED NUCLEI

The question of whether the scissors mode survives as we move from even-to odd-mass nuclei was posed some time ago in studies carried out within the interacting Boson-Fermion model (IBFM) [95,96], in schematic RPA [97] and within the generalized coherent state model (GCSM) [98].

After a first negative attempt [99], dipole transitions which seem to have the properties of the scissors mode have been detected in several odd-mass deformed nuclei of the rare-earth region [20,100,101]. The first experimental search for  $M1$  transitions in odd-mass nuclei was carried out in an inelastic electron scattering on  $^{165}\text{Ho}$  [99]. No strong  $M1$  transition around 3 MeV was found in this nucleus.

Subsequent NRF experiments on  $^{163}\text{Dy}$  have detected a sizeable  $M1$  strength around 3 MeV which, though more fragmented, fits nicely into the systematic of the scissors mode in the neighboring even-even Dy isotopes [100]. A concentration of dipole strength with the same properties has been found also in other rare-earth nuclei [20] and more recently in  $^{167}\text{Er}$  [101]. In this latter experiment, which covered a wider energy range,  $1.9 \div 4.3$  MeV, peaks around and above 4 MeV have been detected. The interpretation of these excitations as a manifestation of a scissor-like oscillation mode found support in a theoretical analysis carried out within the IBFM [100,101].

Though appealing, such a response cannot be considered conclusive. In IBFM, in fact, as in all other schematic approaches [97,98], the problem of fragmentation, of crucial importance in odd nuclei, is overlooked.

The theoretical study of  $M1$  excitations in odd-nuclei is rendered difficult not only by the extreme fragmentation of some of these spectra, but also by uncertainties inherent in the experimental analysis which will be discussed later. In fact, the polarization techniques, adopted for parity assignment in doubly-even nuclei, are ineffective when applied to odd-mass nuclei. Because of this limitation, the presence of  $E1$  excitations intermixed with  $M1$  transitions cannot be ruled out. The schematic models are clearly inadequate for clarifying the nature of spectra of such a complexity. One may hope to gain a more clarifying response from microscopic calculations. A fully microscopic calculation which accounts also for the coupling with two-phonon states has been carried out recently [103].

**A. With RPA Core States.** Equations for describing the nonrotational states in odd-mass deformed nuclei using RPA core state were derived in [201]. These states have the form

$$\Psi_n^{\tau_0}(\sigma_0 K_0^{\pi_0}) = \left\{ \sum_{q_0}^{\tau_0} C_{q_0}^n \alpha_{q_0 \sigma_0}^\dagger + \sum_{q_1 \sigma_1}^{\tau_0} \sum_{v_2 \sigma_2} \delta_{\sigma_1 K_1 + \sigma_2 \mu_2, \sigma_0 K_0} D_{q_1 v_2}^n \alpha_{q_1 \sigma_1}^\dagger Q_{v_2 \sigma_2}^\dagger \right\} \Psi_0 \quad (7.1)$$

with the normalization condition

$$\sum_{q_0}^{\tau_0} (C_{q_0}^n)^2 + \sum_{q_1 v_2}^{\tau_0} (D_{q_1 v_2}^n)^2 [1 + \mathcal{L}^{K_0}(q_1; v_2)] = 1. \quad (7.2)$$

Here the factor

$$\mathcal{L}^{K_0}(q_1; v_2) = - \sum_{q_2} (\Psi_{q_1 q_2}^{v_2})^2 \quad (7.3)$$

comes from antisymmetrizing the quasiparticle-phonon components of (7.1). This has been done for the first time in Ref.202. Using the above wave function one deduces energies and eigenvectors from the variational principle. They can be found in Ref.94.

**B. With QPNM Core States.** As shown in [93,195,203], at energies above 2.5 MeV the coupling with the two-phonon configurations induces fragmentation of the  $K^\pi = 1^+$  and  $K^\pi = 0^-, 1^-$  modes in doubly-even nuclei. Being interested in the distribution of the magnetic and electric transitions falling in the energy range (2.5—3.5) MeV, we need to take such a two-phonon coupling into account also in odd-mass nuclei. The mathematical procedure developed in [204] is followed. The basic idea is to use the already fragmented phonons in the wave function of excited states according to the procedure described by eqs.(4.86)—(4.90) in [94]. To this purpose the following trial wave function is chosen

$$\Psi_n^{\tau_0}(\sigma_0 K_0^{\pi_0}) = \left[ \sum_{q_0}^{\tau_0} C_{q_0}^n \alpha_{q_0 \sigma_0}^\dagger + \sum_{q_1 \sigma_1}^{\tau_0} \sum_{\substack{v_2 \sigma_2 \\ \lambda_2 \mu_2 \neq \bar{\lambda} \bar{\mu}}} \delta_{\sigma_1 K_1 + \sigma_2 \mu_2, \sigma_0 K_0} D_{q_1 v_2}^n \alpha_{q_1 \sigma_1}^\dagger Q_{v_2 \sigma_2}^\dagger + \sum_{q_3 \sigma_3}^{\tau_0} \sum_{\bar{n} \bar{\sigma}} \delta_{\sigma_3 K_3 + \bar{\sigma} \bar{\mu}, \sigma_0 K_0} \bar{D}_{q_3 \bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{n}}^n \alpha_{q_3 \sigma_3}^\dagger \Omega_{\bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{n} \bar{\sigma}}^\dagger \right] \Psi_0 \quad (7.4)$$

with the normalization condition



$$\sum_{q_0}^{\tau_0} (C_{q_0}^n)^2 + \sum_{\substack{q_1 v_2 \\ \lambda_2 \mu_2 \neq \bar{\lambda} \bar{\mu}}}^{\tau_0} (D_{q_1 v_2}^n)^2 [1 + \mathcal{L}^{K_0}(q_1; v_2)] + \sum_{q_3 \bar{n}}^{\tau_0} (\bar{D}_{q_3 \bar{\lambda} \bar{\mu} \bar{n}}^n)^2 = 1. \quad (7.5)$$

The QPNM core states have the quantum numbers  $\{\bar{n}, \bar{\lambda} = 2, \bar{\mu} = 1\}$  for the  $M1$  excitations and  $\{\bar{n}, \bar{\lambda} = 3, \bar{\mu} = 0\}$  or  $\{\bar{n}, \bar{\lambda} = 3, \bar{\mu} = 1\}$  for the  $\Delta K = 0$  or  $\Delta K = 1$   $E1$  transitions respectively.

Under the assumption

$$[\alpha_{q\sigma}, \Omega_v^\dagger] = 0 \quad (7.6)$$

which is a valid approximation when the energy of the core states is above 2.5 MeV, a variational calculation yields a secular equation whose rank equals the number of one-quasiparticle states of the wave function (7.4).

The  $E1$  and  $M1$  transition probabilities were computed by using the total wave function

$$\Psi_{nMK}^I \pi_\sigma = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}} [D_{MK}^I \Psi_{nK} \pi_\sigma + (-1)^{I+K} D_{M-K}^I \Psi_{nK} \pi_{-\sigma}]. \quad (7.7)$$

For the reduced  $E1$  transition probabilities an effective charge

$$e_{\text{eff}}^{(1)}(\tau_z) = -\frac{e}{2} \left( \tau_z - \frac{N-Z}{A} \right) (1 + \chi). \quad (7.8)$$

The factor  $\chi$  is a fitting parameter introduced to quench the too large  $E1$  transition probabilities obtained with the standard expression ( $\chi = 0$ ). For the  $M1$  reduced strength a bare orbital gyromagnetic factor and an effective spin factor  $g_s^{\text{eff}} = 0.7g_s^{\text{free}}$  were used. Given the impossibility of distinguishing experimentally between  $E1$  and  $M1$  transitions in odd-mass nuclei, it is appropriate to compute the widths, multiplied by the statistical factor  $g = (2I_f + 1)/(2I_0 + 1)$ . These quantities are in fact parity and spin independent and are related to the reduced strengths according to

$$\begin{aligned} g\Gamma_0(E1) &= 1.0467(E_\gamma[\text{MeV}])^3 B(E1) \uparrow [e^2 \text{fm}^2 10^{-3}] \text{meV}, \\ g\Gamma_0(M1) &= 11.547(E_\gamma[\text{MeV}])^3 B(M1) \uparrow [\mu_N^2] \text{meV}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

A more closely related quantity is represented by the reduced widths

$$\begin{aligned} g\Gamma_0^{\text{red}}(E1) &= 1.0467 B(E1) \uparrow [e^2 \text{fm}^2 10^{-3}] \text{meV} (\text{MeV})^{-3}, \\ g\Gamma_0^{\text{red}}(M1) &= 11.547 B(M1) \uparrow [\mu_N^2] \text{meV} (\text{MeV})^{-3}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

The phonons of different multipolarity were calculated using isoscalar and isovector interactions embodying the appropriate multipole fields. The phonon basis consists of ten ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) phonons of a given multipolarity:  $\lambda\mu = 20, 22, 32, 33, 43, 44, 54$  and  $55$ . Twenty-five ( $i = 1, 2, \dots, 25$ ) phonons of  $\lambda\mu = 21$  and  $\lambda\mu = 30$  and  $31$  multiplicities were used. The same phonon basis was used for doubly-even and odd-mass nuclei.

Numerical calculations were carried out for  $^{157}\text{Gd}$ ,  $^{159}\text{Tb}$ ,  $^{161}\text{Dy}$ ,  $^{163}\text{Dy}$  and  $^{167}\text{Er}$ . The core states entering into the quasiparticle-phonon basis are respectively the states of  $^{156}\text{Gd}$ ,  $^{158}\text{Gd}$ ,  $^{160}\text{Dy}$ ,  $^{162}\text{Dy}$  and  $^{166}\text{Er}$ .

*1. M1 Transitions.* In going from even- to odd-nuclei the fragmentation of the strength is dramatically enhanced. This phenomenon is illustrated in Fig.5 showing the  $M1$  spectra computed within RPA and QPNM for  $^{162}\text{Dy}$  and  $^{163}\text{Dy}$ . The spectrum of the odd-mass nucleus is much richer than in the case of the doubly-even one. A further increase in fragmentation is observed when the  $M1$  core states are computed in QPNM rather than RPA.

That the strength should get strongly fragmented in going from doubly-even to odd-mass nuclei was largely expected. On the one hand, the quasiparticle  $\otimes (\bar{\lambda}\bar{\mu})_i$  components couple to several one-quasiparticle configurations. As a rule, the fragmentation so induced is rather weak due to the small number of one-quasiparticle states. On the other hand, the strength collected by each  $M1$  state in a doubly-even nucleus is distributed among four  $M1$  levels in the neighboring odd-mass nucleus. In this latter system, in fact, the  $M1$  operator can couple the  $\{K_0, I_0 = K_0\}$  ground state to a multiplet of four excited states with quantum numbers  $\{(K_0 - 1, I_0 - 1), (K_0 - 1, I_0), (K_0 - 1, I_0 + 1)\}$  and  $\{K_0 + 1, I_0 + 1\}$ .

Let us study this problem more quantitatively by analyzing the results obtained for  $^{163}\text{Dy}$ . The strength of the strongest  $M1$  transition occurring in  $^{162}\text{Dy}$  at an excitation energy  $E = 2.90$  MeV and estimated to be  $B(M1) \uparrow \simeq \simeq 0.90\mu_N^2$  is distributed in  $^{163}\text{Dy}$  almost equally among the  $K_f^\pi = 3/2^-$  and  $K_f^\pi = 7/2^-$  levels, both having an intrinsic excitation energy 2.89 MeV. The two  $K_f^\pi$  states, indeed, collect respectively

$$\sum_{I_f^\pi} B(M1) \left( K_i^\pi = I_i^\pi = \frac{5^-}{2} \rightarrow K_f^\pi = \frac{3^-}{2} \quad I_f^\pi \right) \simeq 0.45\mu_N^2,$$

$$B(M1) \left( K_i^\pi = I_i^\pi = \frac{5^-}{2} \rightarrow K_f^\pi = I_f^\pi = \frac{7^-}{2} \right) \simeq 0.47\mu_N^2.$$

The  $K_f^\pi = 3/2^-$  strength, however, is further distributed among the  $I_f^\pi = 3/2^-, 5/2^-, 7/2^-$  states with strengths  $B(M1) \simeq 0.30, 0.13, 0.02\mu_N^2$ , respectively.

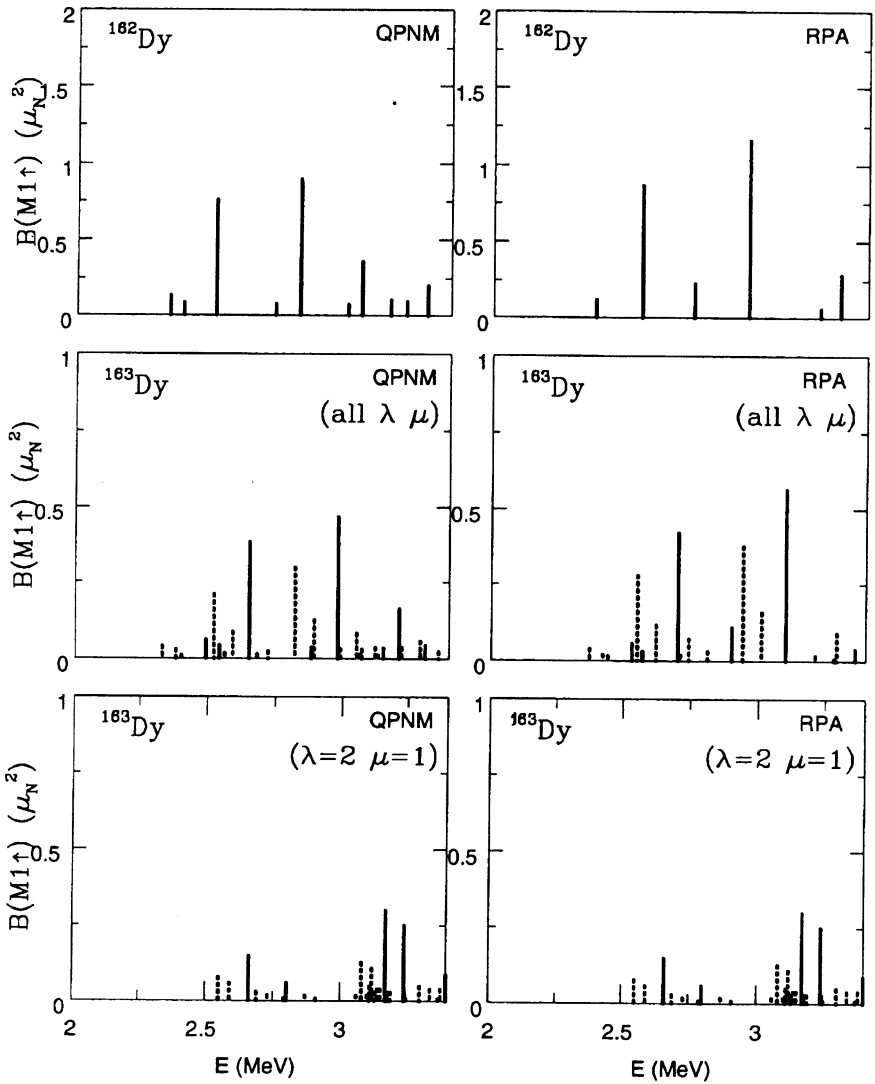


Fig.5. QPNM and RPA M1 strength distributions in  $^{162}\text{Dy}$  and  $^{163}\text{Dy}$ . Full and dotted lines refer respectively to transitions to  $K_f = 3/2$  and  $K_f = 7/2$  final states

The  $I_f^\pi = 3/2^-$  state gets about 2/3 of the strength. That the  $I_f^\pi = K_f^\pi$  states take 2/3 of the  $K_f^\pi$  strength is a general feature to be ascribed to angular momentum coupling.

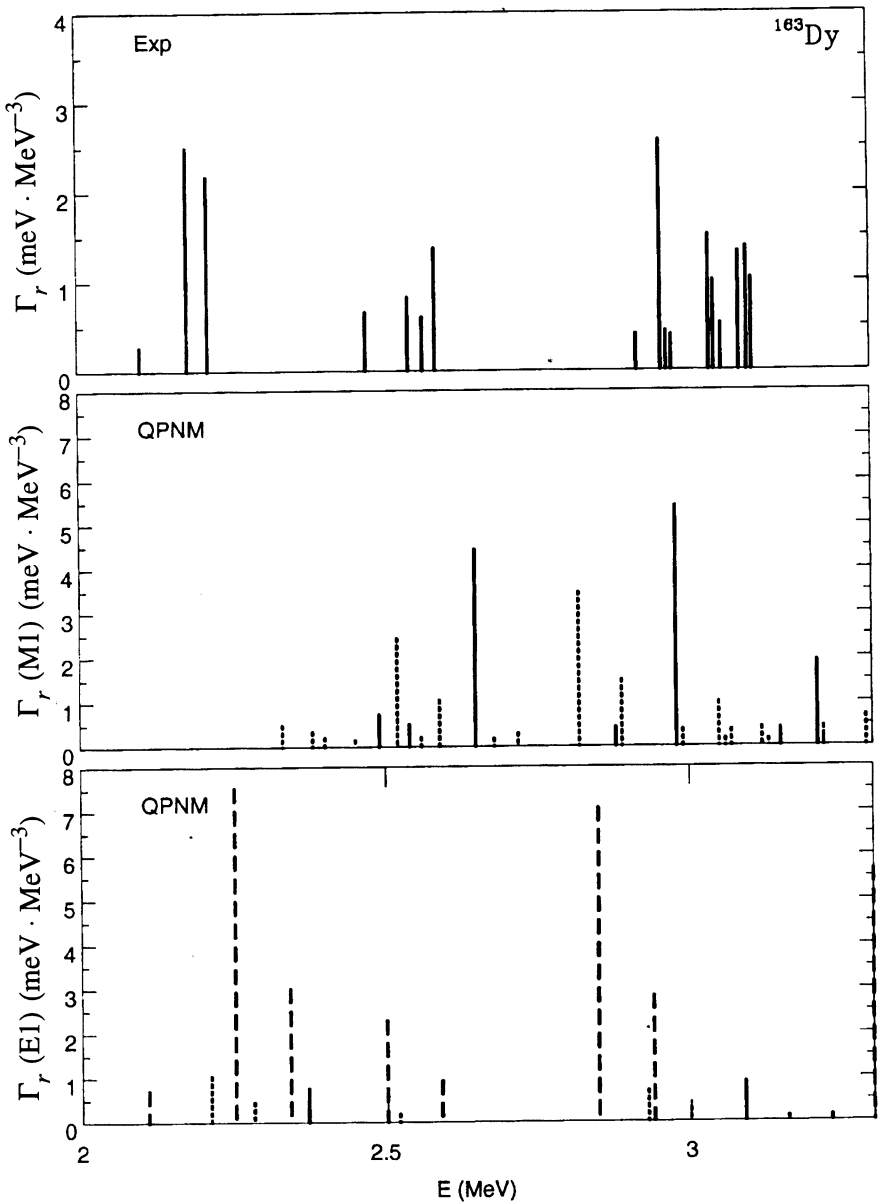


Fig.6. Ground state decay reduced width distribution in  $^{163}\text{Dy}$ . Full, dashed and dotted lines refer respectively to  $K_f = 3/2, 5/2, 7/2$  final state

The states collecting appreciable amounts of  $M1$  strength are dominated by a single quasiparticle-phonon configuration obtained by coupling the valence quasiparticle to the  $(\bar{\lambda}\bar{\mu}) = 21$  phonon. The effect of the substantial purity of the  $M1$  states is illustrated in the lower part of Fig.5 showing the  $M1$  strength distributions when only the  $(\bar{\lambda}\bar{\mu})$  are included in the calculation. This is what is done in schematic approaches [97]. The spectrum so obtained is quite similar to the corresponding one deduced from including all core states.

The spectra of the reduced widths of  $^{163}\text{Dy}$ , computed in QPNM, are compared with the experimental data in Fig.6. The following points are noteworthy: i) The computed  $M1$  transitions fall in the region of the observed peaks in all nuclei. The discrepancies in the energy distribution with respect to experiments are of the same order as in the nearby doubly-even nuclei. ii) The  $K^\pi \rightarrow K^\pi + 1$   $M1$  transitions are fewer but in general much stronger than in the  $K^\pi \rightarrow K^\pi - 1$  case. As already said for  $^{163}\text{Dy}$ , the  $M1$  strength of the neighboring doubly-even nuclei is equally shared by the two  $K_f^\pi$  states, but for  $K_f^\pi = K_i^\pi - 1$  the strength is further distributed mostly among two out of the three  $J_f$  components of the  $K_f^\pi$  multiplet. iii) The magnitude of the strongest  $M1$  peaks is about twice the intensity of the corresponding observed transitions. Also the summed reduced widths are in general about twice the experimental values.

**2.  $E1$  Transitions.** In odd-mass nuclei the fragmentation mechanism of the  $\Delta K = \pm 1$   $E1$  strength is obviously the same as for the  $M1$  transitions. Exactly as in the case of the  $M1$  transitions, the  $\Delta K = 1$   $E1$  strength is also equally shared by the  $K_f^\pi = K_f^\pi - 1$  and  $K_f^\pi = K_f^\pi + 1$  levels and the  $I_f^\pi = K_f^\pi$  states take  $2/3$  of the  $K_f^\pi$  strength. However, as in doubly-even nuclei [193], the  $\Delta K = 1$   $E1$  strength represents a small fraction of the total transition probability. This is mostly concentrated in the  $\Delta K = 0$  transitions. These transitions are in general more than 5 times stronger. As in the  $M1$  case, the  $E1$  states have a dominant configuration embodying the  $(\bar{\lambda}\bar{\mu})$  phonon.

Figure 6 shows that the  $M1$  widths are much larger than the corresponding  $\Delta K = 1$   $E1$  widths. Indeed, as in the doubly-even nuclei, the  $E1$  strength is concentrated almost entirely in the  $\Delta K = 0$  transitions. These can be quite strong. The strongest peaks are larger than the magnetic transitions and more than 3 times the experimental widths. These strong  $E1$  transitions correspond to strong  $E1$  excitations of collective octupole core states. However, no strong  $E1$  transitions above 2 MeV have been observed in the nearby doubly-even nuclei. One could reduce the strength of these transitions by using a smaller effective charge, as done in Ref. 205. This new effective charge, however, would quench

also the low-lying  $E1$  transitions thereby spoiling the agreement with experiments. This is an unsolved problem yet, which requires detailed specific studies.

We can conclude that the occurrence of  $E1$  transitions of appreciable strength in the observation region cannot be ruled out but cannot be assessed with certainty due to the discrepancies between theory and experiments found in the doubly-even nuclei for these transitions. On the other hand, the  $M1$  and  $E1$  transitions are predicted to carry different  $\Delta K$  quantum numbers. More refined experiments may hopefully exploit this fact in order to settle upon the exact nature of the observed widths. In any case, the problem of reproducing the extreme fragmentation of the  $M1$  strength, specially in some nuclei like  $^{157}\text{Gd}$ , remains unsolved.

## 8. CONCLUSIONS

We have seen that the collective features of the low-lying  $M1$  excitations, chiefly the quadratic deformation law, are described fairly well in several phenomenological approaches. All these models have been shown to be mutually correlated. They can actually be put within a unified context having the TRM as the common root. Each of them can be indeed turned into TRM-like models when the variables which describe the shapes oscillations of the nuclei are frozen. The differences among them are to be attached mainly to the different microscopic structure underlying each model. While in fact the IBM boson operators are to be considered as highly correlated valence fermion pairs, in the other two interacting boson models under investigations (NPD and GCSM) the bosons should be viewed, at least in lowest order, as highly correlated p-h fermion states. The microscopic counterpart of IBM is therefore the standard shell model, while RPA is the microscopic scheme underlying the other Boson models. We have shown that in their schematic version both shell-model and RPA are intimately related to the TRM and actually provide the tools for computing the TRM quantities in a realistic way.

In going from schematic to realistic RPA descriptions the correspondence with the TRM as well as with the other phenomenological models is far from appearing obvious. Because of the extreme fragmentation of the two-quasiparticle spectrum the naive HO picture with one single degenerate p-h level seems therefore quite far from reality. It is rewarding that because of the spin-spin interaction which pushes the spin excitations up in energy, the quadrupole pairing which rearranges the  $M1$  strength distribution among different p-h levels and the recoil term, the fragmentation is drastically reduced.

The many RPA calculations carried out since the discovery of the mode have shown that such a mode is extremely sensitive to the choice of the s.p. energy and of the two-body interaction as well as to the approximations invol-

ved. Because of this extreme sensitivity, the calculations had to meet certain requirements. A major one was the removal of the redundant rotational mode from the physical  $M1$  states. This problem has been clearly illustrated here and a simple prescription for its solution has been given. All recent RPA calculations are free from this problem and tend toward converging results. Indeed, all of them agree in interpreting the low-lying  $M1$  peaks around 3 MeV as the signature of a scissors like rotational oscillation between proton and neutron deformed fluids. The simple TRM picture appears therefore valid. Only one should think of a rotational oscillation between two superfluids rather than two rigid bodies or two normal irrotational fluids.

The only point which is still under debate is the collective character of the mode. We observe in this respect that the collectivity of this  $M1$  excitation should not be «measured» in terms of s.p. units as for instance in the case of the  $E1$  or  $E2$  giant resonances. The mode under study here, arises in fact from deformation and disappears as deformation is turned off. This emerges nicely from the  $\delta^2$  dependence of the  $M1$  strength. A more sensitive test of the collectivity of the mode is provided by the  $M1$  energy weighted sum rule. Recent calculations [185] show that the observed strength is short from exhausting such a sum rule. A strong indication in this respect is further provided by the fact that the excitation is observed throughout all deformed (light and heavy) nuclei and its strength goes smoothly with deformation.

The RPA descriptions are not able to reproduce faithfully the  $M1$  energy spectrum. A progress in this direction has been achieved by going beyond RPA. This has been done by accounting for the coupling with the two-phonon RPA state within the QPNM. Even this extension seems not sufficient. It is to be pointed out however that the calculations carried out in this context are parameter free calculations. Minor adjustments may improve the agreement with experiments considerably.

One of the most exciting recent discoveries was the detection of  $M1$  excitations exhibiting the properties of the scissors mode in odd-mass nuclei but with a much more fragmented strength. The only microscopic thorough description of these spectra has been carried out recently in QPNM. Many aspects have been clarified. Many problems remain unsettled. The calculation in fact indicates that the occurrence of  $E1$  excitations intermixed with  $M1$  transitions cannot be ruled out. It also indicates that the detected total strength is quite smaller than that predicted by the calculations. Moreover, the extreme fragmentation observed in some nuclei remains an unexplained puzzle.

Let us now move to future perspectives. It is of great interest the possible occurrence of a high energy mode of scissors nature. The sharing of the  $M1$  strength among a low and a high energy modes is reminiscent of the isoscalar  $E2$  strength known to be concentrated in a high and a low energy modes. The detection of such a mode is related to the discovery of the  $E2$  isovector giant resonance in deformed nuclei.

Strongly excited  $M1$  excitations of scissors nature both at low and high energy are predicted also for superdeformed nuclei. Whether these modes can be observed directly is an open question.

The perspective of finding the mode in  $\gamma$ -soft nuclei is becoming a reality. Pursuing in the search for  $M3$  transitions would help to complete the picture.

We like to conclude by saying that the occurrence of orbital  $M1$  excitations has uncovered a beautiful example of dynamical symmetry in nuclei and has provided a unique and sensitive test ground for many phenomenological models as well as for microscopic theories. From its extensive study we have tested effective interactions and correlations among nucleons in nuclei and we have enriched considerably our knowledge on the low energy nuclear properties.

### REFERENCES

1. Bohle D., Richter A., Steffen W. et al. — Phys. Lett., 1984, v.B137, p.27.
2. Lo Iudice N., Palumbo F. — Phys. Rev. Lett., 1978, v.41, p.1532;  
De Franceschi G., Palumbo F., Lo Iudice N. — Phys. Rev., 1984, v.C29, p.1496.
3. Iachello F. — Nucl. Phys. 1981, v.A358, p.89c.
4. Dieperink A.E.L. — Prog. Part. Nucl. Phys., 1983, v.9, p.121.
5. Hilton R.R. — Z. Phys., 1984, v.A316, p.121.
6. Richter A. — Nucl. Phys., 1990, v.A507, p.99c; 1991, v.A522, p.139c; Nucl. Phys. 1992, v.A553, p.417c.
7. von Brentano P., Zilges A., Heil R.D. et al. — Nucl. Phys., 1993, v.A557, p.593c.
8. Richter A. — Prog. Part. Nucl. Phys., 1995, v.34, p.261.
9. Kneissl U., Margraf J., Pitz H.H. et al. — Prog. Part. Nucl. Phys., 1995, v.34, p.285.
10. Kneissl U., Pitz H.H., Zilges A. — Prog. Part. Nucl. Phys., 1996, v.37, p.349.
11. Ziegler W., Rangacharyulu C., Richter A., Spieler C. — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.2515.
12. Rangacharyulu C., Richter A., Wörtche H.J. et al. — Phys. Rev., 1991, v.C43, p.R949.
13. Margraf J., Heil R.D., Kneissl U. et al. — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.1474.
14. von Brentano P., Zilges A., Herzberg R.-D. et al. — Nucl. Phys., 1994, v.A577, p.191c and references therein.
15. Pietralla N., von Brentano P., Herzberg R.-D. et al. — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.R2317.
16. Heil R.D., Kasten B., Scharfe W. et al. — Nucl. Phys., 1990, v.A506, p.223.
17. Friedrichs H., Schlitt B., Margraf J. et al. — Phys. Rev., 1992, v.C45, p.R892.
18. Zilges A., von Brentano P., Friedrichs H. et al. — Z. Phys., 1991, v.A340, p.155.
19. Friedrichs H., Häger D., von Brentano P. et al. — Nucl. Phys., 1994, v.A567, p.266.
20. Margraf J., Eckert T., Rittner M. et al. — Phys. Rev., 1995, v.C52, p.2429.
21. Frekers D., Wörtche H.J., Richter A. et al. — Phys. Lett., 1990, v.B244, p.178.
22. Richter A. — Nucl. Phys., 1993, v.A553, p.417c.
23. Van Isacker P., Heyde K., Waroquier M. et al. — Phys. Lett., 1984, v.B144, p.1.



24. Scholten O., Dieperink A.E.L., Heyde K., Van Isacker P. — *Phys. Lett.*, 1984, v.B149, p.279.
25. Pittel S., Dukelsky J., Perazzo R.P.J., Sofia H.M. — *Phys. Lett.*, 1984, v.B144, p.145.
26. Otsuka T., Ginocchio J.N. — *Phys. Rev. Lett.*, 1985, v.54, p.777.
27. Scholten O., Heyde K., Van Isacker P. — *Nucl. Phys.*, 1985, v.A438, p.41.
28. Barrett B.R., Halse P. — *Phys. Lett.*, 1985, v.B155, p.133.
29. Van Isacker P., Heyde K., Jolie J., Sevrin A. — *Ann. Phys.*, 1986, v.171, p.253 and references therein.
30. Faessler A., Nojarov R. — *Phys. Lett.*, 1986, v.B166, p.367;  
Nojarov R., Bochnacki Z., Faessler A. — *Z. Phys.*, 1986, v.A324, p.289;  
Faessler A., Bochnacki Z., Nojarov R. — *J. Phys.*, 1986, v.G12, p.L47.
31. Rohozinski S.G., Greiner W. — *Z. Phys.*, 1985, v.A322, p.271.
32. Raduta A.A., Faessler A., Ceasescu V. — *Phys. Rev.*, 1987, v.C36, p.2111.
33. Raduta A.A., Ursu I.I., Delion D.S. — *Nucl. Phys.*, 1987, v.A475, p.439.
34. Lipparini E., Stringari S. — *Phys. Lett.*, 1983, v.B130, p.139.
35. Suzuki T., Rowe D.J. — *Nucl. Phys.*, 1977, v.A289, p.461.
36. Bes D.R., Broglia R.A. — *Phys. Lett.*, 1984, v.B137, p.141.
37. Kurasawa H., Suzuki T. — *Phys. Lett.* 1984, v.B144, p.151.
38. Dieperink A.E.L., Moya de Guerra E. — *Phys. Lett.*, 1987, v.B189, p.267.
39. Zamick L. — *Phys. Rev.*, 1985, v.C31, p.1955; *Phys. Lett.* 1986, v.B167, p.1; *Phys. Rev.*, 1986, v.C33, p.691.
40. Liu H., Zamick L. — *Phys. Rev.*, 1987, v.C36, p.2057; 1987, v.C36, p.2064; *Nucl. Phys.*, 1987, v.A467, p.29.
41. Castel B., Zamick L. — *Phys. Rep.*, 1987, v.148, p.217.
42. Zamick L., Zheng D.C. — *Phys. Rev.*, 1991, v.C44, p.2522; 1992, v.C46, p.2106.
43. Abdelaziz M., Thompson M.J., Elliot J.P., Evans J.A. — *J. Phys. G: Nucl. Phys.*, 1988, v.14, p.219.
44. Abdelaziz M., Thompson M.J., Elliot J.P., Evans J.A. — *Nucl. Phys.*, 1989, v.A503, p.452.
45. Chaves L., Poves A. — *Phys. Rev.*, 1986, v.C34, p.1137.
46. Poves A., Retamosa J., Moya de Guerra E. — *Phys. Rev.*, 1989, v.C39, p.1356.
47. Retamosa J., Udias J.M., Poves A., Moya de Guerra E. — *Nucl. Phys.*, 1990, v.A511, p.221.
48. Castaños O., Draayer J.P., Leschber Y. — *Nucl. Phys.*, 1987, v.A473, p.494.
49. Castaños O., Draayer J.P., Leschber Y. — *Ann. Phys.*, 1987, v.A180, p.290.
50. Hammaren E., Schmid K.W., Faessler A., Grümmer F. — *Phys. Lett.*, 1986, v.B171, p.347.
51. Hammaren E., Heikkinen P., Schmid K.W., Faessler A. — *Nucl. Phys.*, 1992, v.A541, p.226.
52. Iwasaki S., Hara K. — *Phys. Lett.*, 1984, v.B144, p.9.
53. Hamamoto I., Åberg S. — *Phys. Lett.*, 1984, v.B145, p.163.
54. Hamamoto I., Åberg S. — *Physica Scripta*, 1986, v.34, p.697.
55. Hilton R.R., Iwasaki S., Mang H.J. et al. — In: *Microscopic Approaches to Nuclear Structure Calculations*, ed. A. Ciovoello, Editrice Compositori-Bologna, 1986, p.357.
56. Hamamoto I., Rönstrom C. — *Phys. Lett.*, 1987, v.B194, p.6.
57. Civitarese O., Faessler A., Nojarov R. — *Phys. Rev.*, 1987, v.C35, p.2310.

58. **Nojarov R., Faessler A., Civitarese O.** — Phys. Lett., 1987, v.B183, p.122.
59. **Speth J., Zawischa D.** — Phys. Lett., 1988, v.B211, p.247; Phys. Lett., 1989, v.B219, p.229.
60. **Nojarov R., Faessler A.** — Nucl. Phys., 1988, v.A484, p.1.
61. **Sugawara-Tanabe K., Arima A.** — Phys. Lett., 1988, v.B206, p.573.
62. **Scholtz F.G., Nojarov R., Faessler A.** — Phys. Rev. Lett., 1989, v.63, p.1356.
63. **Faessler A., Nojarov R.** — Phys. Rev., 1990, v.C41, p.1243.
64. **Nojarov R., Faessler A.** — Z. Phys., 1990, v.A336, p.151.
65. **Faessler A., Nojarov R., Scholtz F.G.** — Nucl. Phys., 1990, v.A515, p.237.
66. **Faessler A., Khoa D.T., Grigorescu M., Nojarov R.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.65, p.2978.
67. **Zawischa D., Macfarlane M., Speth J.** — Phys. Rev., 1990, v.C42, p.1461.
68. **Zawischa D., Speth J.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.B252, p.4.
69. **Hamamoto I., Magnusson C.** — Phys. Lett., 1991, v.B260, p.6.
70. **Magnusson C.** — Physica Scripta, 1991, v.43, p.460.
71. **Nojarov R., Faessler A., Lipas P.O.** — Nucl. Phys., 1991, v.A553, p.381; 1992, v.A537, p.707.
72. **Hamamoto I., Nazarewicz W.** — Phys. Lett., 1992, v.B297, p.25.
73. **Nojarov R., Faessler A., Sarriguren P.,** — Nucl. Phys., 1993, v.A563, p.349.
74. **Sarriguren P., Moya de Guerra E., Nojarov R., Faessler A.** — J. Phys: Nucl. Phys., 1993, v.G19, p.291; 1994, v.G20, p.315.
75. **Nojarov R., Faessler A.** — Nucl. Phys., 1994, v.A572, p.17.
76. **Nojarov R., Faessler A., Dingfelder M.** — Phys. Rev., 1995, v.C51, p.2449.
77. **Raduta A.A., Lo Iudice N., Ursu I.I.** — Nucl. Phys., 1995, v.A584, p.84.
78. **De Coster C., Heyde K.** — Nucl. Phys., 1991, v.A529, p.507.
79. **Heyde K., De Coster C.** — Phys. Rev., 1991, v.C44, p.R2262.
80. **Garrido E., Moya de Guerra E., Sarriguren P., Udias J.M.** — Phys. Rev., 1991, v.C44, R1250.
81. **Moya de Guerra E., Zamick L.** — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.2604.
82. **Hilton R.R., Höhenberger W., Mang H.J.** — Phys. Rev., 1993, v.C47, p.602.
83. **Smith B.H., Pan X.W., Feng D.H., Guidry M.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.3086.
84. **Ginocchio J.N.** — Phys. Lett., 1991, v.B265, p.6.
85. **Mizusaki T., Otsuka T., Sugita M.** — Phys. Rev., 1991, v.C44, p.R1277.
86. **Heyde K., De Coster C., Richter A., Wörtche H.-J.** — Nucl. Phys., 1992, v.A549, p.103.
87. **Heyde K., De Coster C., Ooms D., Richter A.** — Phys. Lett., 1993, v.B312, p.267.
88. **Heyde K., De Coster C., Ooms D.** — Phys. Rev., 1994, v.C49, p.156.
89. **Lo Iudice N., Raduta A.A., Delion D.S.** — Phys. Lett., 1993, v.B300, p.195; Phys. Rev., 1994, v.C50, p.127.
90. **Lo Iudice N., Richter A.** — Phys. Lett., 1993, v.B304, p.193.
91. **von Neumann-Cosel P., Ginocchio J.N., Bauer H., Richter A.** — Phys. Rev. Lett., 1995, v.75, p.4178.
92. **Lo Iudice N.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.2171.
93. **Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu., Lo Iudice N.** — Nucl. Phys., 1996, v.A600, p.155.

94. **Soloviev V.G.** — Theory of Atomic Nuclei: Quasiparticles and Phonons, Institute of Physics, Bristol and Philadelphia, 1992.
95. **Van Isacker P., Frank A.** — Phys. Lett., 1989, v.B225, p.1.
96. **Frank A., Arias J.M., Van Isacker P.** — Nucl. Phys., 1991, v.A531, p.125.
97. **Raduta A.A., Lo Iudice N.** — Z. Physik, 1989, v.A334, p.403.
98. **Raduta A.A., Delion D.S.** — Nucl. Phys., 1990, v.A513, p.11.
99. **Huxel N., Ahner W., Diesener H. et al.** — Nucl. Phys., 1992, v.A539, p.478.
100. **Bauske I., Arias J.M., von Brentano P. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1993, v.71, p.975.
101. **Schlegel C., von Neumann-Cosel P., Richter A., Van Isacker P.** — Phys. Lett., 1996, v.B375, p.21.
102. **Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.1022.
103. **Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu., Lo Iudice N.** — Nucl. Phys., 1997, v.A613, p.1.
104. **Goldhaber M., Teller E.** — Phys. Rev., 1948, v.73, p.1156.
105. **Steinwedel H., Jensen J.H.D.** — Z. Naturforschung, 1950, v.5a, p.413.
106. **Lo Iudice N.** — Phys. Rev., 1986, v.C34, p.1501.
107. **Bohle D., Kilgus G., Richter A. et al.** — Phys. Lett., 1987, v.B195, p.326.
108. **Richter A.** In: Contemporary Topics in Nuclear Structure Physics, eds. R.F.Casten, A.Frank, M.Moshinsky and S. Pittel, World Scientific, Singapore 1988, p.127.
109. **Berg U.E.P., Bläsing C., Drexler J. et al.** — Phys. Lett., 1984, v.B149, p.59.
110. **Alaga G., Alder K., Bohr A., Mottelson B.R.** — Dan. Mat. Fys. Medd., 1955, v.29, No.9, p.1.
111. **Bohle D., Kuchler G., Richter A., Steffen W.** — Phys. Lett., 1984, v.B148, p.260.
112. **Wesselborg C., von Brentano P., Zell K.O. et al.** — Phys. Lett., 1988, v.B207, p.22.
113. **Hartmann U., Bohle D., Humbert F., Richter A.** — Nucl. Phys., 1989, v.A499, p.93.
114. **Pitz H.H., Berg U.E.P., Heil R.D. et al.** — Nucl. Phys., 1989, v.A492, p.411.
115. **Kasten B., Heil R.D., von Brentano P. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1989, v.63, p.609.
116. **Pitz H.H., Heil R.D., Kneissl U. et al.** — Nucl. Phys., 1990, v.A509, p.587.
117. **Zilges A., von Brentano P., Wesselborg C. et al.** — Nucl. Phys., 1990, v.A507, p.399.
118. **Herzberg R.-D., Zilges A., von Brentano P. et al.** — Nucl. Phys., 1993, v.A563, p.445.
119. **Maser M., Lindenstruth S., Bauske I. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.2749.
120. **Djalali C., Marty N., Morlet M. et al.** — Phys. Lett., 1985, v.B164, p.269.
121. **Richter A.** — Prog. Part. Nucl. Phys., 1985, v.13, p.1.
122. **Degener A., Bläsing C., Heil R.D. et al.** — Nucl. Phys., 1990, v.A513, p.29.
123. **Heil R.D., Pitz H.H., Berg V.E.P. et al.** — Nucl. Phys., 1988, v.A476, p.39.
124. **Margraf J., Degener A., Friedrichs H. et al.** — Phys. Rev., 1990, v.C42, p.771.
125. **Wesselborg C., Schiffer K., Zell K.O. et al.** — Z. Phys., 1986, v.A323, p.485.
126. **Frekers D., Bohle D., Richter A. et al.** — Phys. Lett., 1989, v.B218, p.439.
127. **Bohle D., Richter A., Berg U.E.P. et al.** — Nucl. Phys., 1986, v.A458, p.205.
128. **Freeman S.J., Chapman R., Durell J.L. et al.** — Phys. Lett., 1988, v.B222, p.347.
129. **Freeman S.J., Chapman R., Durell J.L. et al.** — Nucl. Phys., 1993, v.A554, p.333.
130. **Margraf J., Wesselborg C., Heil R.D. et al.** — Phys. Rev., 1992, v.C45, p.R521.
131. **von Brentano P., Eberth J., Enders J. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1996, v.76, p.2029.
132. **Maser M., Pietralla N., von Brentano P. et al.** — Phys. Rev., 1996, v.C54, p.1.

133. Bohr A., Mottelson B.R. — Nuclear Structure, Benjamin, N. Y., Vol.II, 1975, ch.6.
134. Lo Iudice N. — In «Capture Gamma-Ray Spectroscopy», ed. J.Kern, World Scientific, Singapore 1994, p.154.
135. Palumbo F., Richter A. — Phys. Lett., 1985, v.B158, p.101.
136. Lo Iudice N., Lipparini E., Stringari S. et al. — Phys. Lett., 1985, v.B161, p.18.
137. Nojarov R. — Nucl. Phys., 1994, v.A571, p.93.
138. Faessler A. — Nucl. Phys., 1966, v.85, p.653.
139. Rohozinski S.G., Troltenier D., Maruhn J.A., Greiner W. — Z. Phys., 1988, v.A330, p.23.
140. Raduta A.A., Ceasescu V., Gheorghe A., Dreizler R.M. — Phys. Lett., 1981, v.B99, p.444; Nucl. Phys., 1982, v.A381, p.253.
141. Raduta A.A., Delion D.S. — Nucl. Phys., 1989, v.A491, p.24.
142. Bohle D., Richter A., de Jager C.W., de Vries H. — Z. Phys., 1987, v.A328, p.463.
143. Raduta A.A., Ursu I.I., Faessler A. — Nucl. Phys., 1988, v.A489, p.20.
144. Arima A., Iachello F. — Phys. Rev. Lett., 1975, v.35, p.1069; Ann. Phys., 1976, v.99, p.253; Ann. Phys., 1978, v.111, p.201; Ann. Phys., 1979, v.123, p.468.
145. For a review see Arima A., Iachello F. — Adv. Nucl. Phys., 1984, v.13, p.139.
146. Arima A., Otsuka T., Iachello F., Talmi I. — Phys. Lett., 1977, v.B66, p.205; Otsuka T., Arima A., Iachello F., Talmi I. — Phys. Lett., 1978, v.B76, p.139.
147. Sambataro M., Dieperink A.E.L. — Phys. Lett., 1981, v.B107, p.249.
148. Sambataro M., Scholten O., Dieperink A.E.L., Piccitto G. — Nucl. Phys., 1984, v.A423, p.333.
149. Wolf A., Casten R.F., Warner D.D. — Phys. Lett., 1987, v.B190, p.19.
150. Wolf A., Scholten O., Casten R.F. — Phys. Lett., 1993, v.B312, p.372.
151. Lipas P.O., Koskinen M., Harter H. et al. — Phys. Lett., 1989, v.B230, p.1; Nucl. Phys., 1990, v.A509, p.509.
152. Lipas P.O., Harter H., Nojarov R. et al. — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 1991, v.17, 1991, p.971.
153. Casten R.F., Brenner D.S., Haustein P.E. — Phys. Rev. Lett., 1987, v.58, p.658.
154. See, for instance, Walet N.R., Brussard P.I., Dieperink A.E.L. — Phys. Lett., 1985, v.B63, p.1.
155. Balantekin A.B., Barrett B.R. — Phys. Rev., 1985, v.C32, p.288; 1986, v.C33, p.1842.
156. Bijker R. — Phys. Rev., 1985, v.C32, p.1442.
157. Pittel S., Dukelsky J. — Phys. Rev., 1985, v.C32, p.335.
158. Lo Iudice N., Palumbo F., Richter A., Wörtche H. — Phys. Rev., 1990, v.C42, p.241.
159. Scholten O., Heyde K., Van Isacker P. — Phys. Rev. Lett., 1985, v.55, p.1866.
160. Heyde K., Sau J. — Phys. Rev., 1984, v.C30, p.1355.
161. Oda T., Hino M., Muto K. — Phys. Lett., 1987, v.B190, p.14.
162. Hino M., Muto K., Oda T. — J. Phys. G: Nucl. Phys., 1987, v.13, p.1119.
163. Elliott J.P. — Proc. Roy. Soc., 1958, v.A245, pp.128, 562.
164. Arima A., Harvey M., Shimizu K. — Phys. Lett., 1969, v.B30, p.517.
165. Hecht K.T., Adler A. — Nucl. Phys., 1969, v.A137, p.129.
166. Braunschweig D., Hecht K.T. — Phys. Lett., 1978, v.B77, p.33.
167. Draayer J.P., Weeks K.K.J. — Phys. Rev. Lett., 1983, v.16, p.1422.
168. Draayer J.P., Weeks K.J. — Ann. Phys., 1984, v.156, p.41.

169. **Rowe D.J.** — Nuclear Collective Motion, Methuen and Co.Ltd., London, 1970.
170. **Soloviev V.G.** — Theory of Complex Nuclei, Pergamon Press, Oxford, 1976.
171. **Lo Iudice N.** — Phys. Rev., 1988, v.C38, p.2895.
172. **De Coster C., Heyde K.** — Phys. Rev. Lett., 1989, v.63, p.2797.
173. **De Coster C., Heyde K.** — Nucl. Phys., 1991, v.A524, p.441.
174. **Shimano T., Ikeda A.** — Prog. Theor. Phys., 1992, v.88, p.599.
175. **Ikeda A., Shimano T.** — Nucl. Phys., 1993, v.A557, p.573c.
176. **Heyde K., De Coster C.** — Phys. Lett., 1993, v.B305, p.322.
177. **Lo Iudice N., Richter A.** — Phys. Lett., 1989, v.B228, p.291.
178. **Baznat M.I., Pyatov N.I.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1975, v.21, p.365.
179. **Lo Iudice N.** — Nucl. Phys., 1996, v.A605, p.61.
180. **Kishimoto T., Moss J.M., Youngblood D.H. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1975, v.35, p.552.
181. **Sakamoto H., Kishimoto T.** — Nucl. Phys., 1989, v.A501, p.205.
182. **Åberg S.** — Phys. Lett., 1985, v.B157, p.9.
183. **Åberg S.** — Nucl. Phys., 1987, v.A473, p.1.
184. **Fayache M.S., Shelly Sharma S., Zamick L.** — Phys. Lett., 1995, v.B357, p.1.
185. **Lo Iudice N.** — In: New Perspectives in Nuclear Structure, ed. A.Covello, World Scientific, Singapore, 1996.
186. **Faessler Amand.** — In: New Perspectives in Nuclear Structure, ed. A.Covello, World Scientific, Singapore, 1996.
187. **De Coster C., Heyde K.** — Phys. Rev. Lett., 1991, v.66, p.2456.
188. **De Coster C., Heyde K., Richter A.** — Nucl. Phys., 1992, v.A542, p.375.
189. **Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu.** — J. Nucl. Phys., 1991, v.53, p.65; *Iad. Fyz.*, 1991, v.54, p.1232.
190. **Soloviev V.G., Sushkov A.V.** — Phys. Lett., 1991, v.B262, p.189.
191. **Soloviev V.G., Shirikova N.Yu.** — Nucl. Phys., 1992, v.A542, p.410.
192. **Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu.** — Phys. Part. Nucl., 1994, v.25, p.157.
193. **Soloviev V.G., Sushkov A.V.** — Physics of Atomic Nuclei, 1994, v.57, p.1304.
194. **Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu.** — Nucl. Phys., 1994, v.A568, p.244; *Int. J. Mod. Phys.*, 1994, v.E3, p.1227.
195. **Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu.** — Phys. Rev., 1995, v.C51, p.551; *Yad. Fiz.*, 1996, v.59, p.57.
196. **Berzins J., Prokofjevs P., Georgii R. et al.** — Nucl. Phys., 1995, v.A584, p.413.
197. **Gareev F.A., Ivanova S.P., Soloviev V.G., Fedotov S.I.** — Sov. J. Part. Nucl., 1973, v.4, p.357.
198. **Soloviev V.G.** — Z. Phys. A — Atomic Nuclei, 1989, v.334, p.143.
199. **Gallagher G.J., Moszkowski S.A.** — Phys. Rev., 1958, v.111, p.1282.
200. **Lipparini E., Richter A.** — Phys. Lett., 1984, v.B144, p.13.
201. **Soloviev V.G.** — Phys. Lett., 1965, v.16, p.308.
202. **Soloviev V.G., Nesterenko V.O., Bastrukov S.I.** — Z. Phys., 1983, v.A309, p.353.
203. **Soloviev V.G., Sushkov A.V., Shirikova N.Yu.** — J. Phys., 1995, v.G21, p.1217.
204. **Soloviev V.G.** — *Yad. Fiz.*, 1984, v.40, p.1163.
205. **See for instance Hamamoto I.** — Nucl. Phys., 1973, v.A205, p.225; 1993, v.A557, p.515c.

# НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

*В.В.Пупышев*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Результаты недавних экспериментальных и теоретических исследований низкоэнергетических нуклон-нуклонных и нуклон-дейтронных столкновений обсуждаются и сравниваются с давно известными. Особое внимание уделяется двум проблемам: проблеме экстраполяции фаз, амплитуд и сечений таких столкновений в экспериментально недоступную область энергий и проблеме разделения вкладов от ядерного и электромагнитного взаимодействий в параметры низкоэнергетического упругого рассеяния. Анализируются различные классические и недавно предложенные подходы к решению этих проблем. Развивается метод построения низкоэнергетических разложений, позволяющих извлечь информацию о ядерном взаимодействии из измеренных фаз рассеяния в системах двух и трех нуклонов или ядер и исследовать роль электромагнитных поправок к кулоновскому взаимодействию в таком рассеянии.

The results of recent theoretical and experimental investigations of low-energy nucleon-nucleon and nucleon-deuteron collisions are reviewed and compared with the previous ones. A special attention is paid to the following problems: the problem of extrapolation of the phase-shifts, amplitudes and cross-sections of the above collisions to the experimentally inaccessible energy region and the problem of separation of the contributions from the nuclear and electromagnetic interactions to the low-energy scattering parameters. The various classical and recently proposed ways for solving these problems are analyzed. The method for constructing the low-energy expansions, that allows one to extract the information about nuclear interaction in the low-energy limit from the measured two and three nucleons or nucleuses phase-shifts and to investigate the role of the electromagnetic corrections to the Coulomb interaction in that scattering, is developed.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Знание явной низкоэнергетической зависимости вспомогательных функций и физически наблюдаемых величин, характеризующих столкновение квантово-механических объектов, позволяет решить многие прикладные и теоретические задачи. К ним относятся проблема экстраполяции таких наблюдаемых величин, измеренных при возможных низких энергиях исследуемого столкновения, в область еще более низких, но технически

недоступных для прямого эксперимента энергий, и одна из важнейших теоретических проблем, а именно задача о выборе функциональной формы и параметров взаимодействия в пределе низких энергий по имеющимся экспериментальным данным.

Главная цель настоящего обзора — показать, что построение явных низкоэнергетических асимптотик фаз рассеяния в системах двух и трех частиц и определение коэффициентов таких асимптотик остается одной из интересных, но не решенных в полном объеме задач современной теории рассеяния. Одним из таких коэффициентов является длина рассеяния. Понятию длины рассеяния в задаче двух тел, способам ее определения и различным подходам к построению низкоэнергетических асимптотик в такой задаче посвящен второй раздел. В третьем разделе обсуждаются результаты экспериментальных и теоретических исследований длин, эффективных радиусов и низкоэнергетического поведения фаз нуклон-нуклонного ( $NN$ ) рассеяния. В четвертом разделе анализируются некоторые попытки построения низкоэнергетических асимптотик в задаче трехчастичного рассеяния ( $3 \rightarrow 3$ ) и ( $2 \rightarrow 2$ ). В пятом разделе сравниваются результаты различных теоретических исследований нуклон-дейтронного ( $Nd$ ) рассеяния при энергии  $Nd$ -столкновения, близкой к нулю.

В обзоре, как правило, используется терминология и обозначения, принятые в известных математических справочниках [1—4], книгах по теории потенциального рассеяния [5—10] и монографиях, посвященных методам фазовых функций [11,12] и гипергармоник [13,14], теории  $NN$ -взаимодействия [15—17] и физике нейтрона [18,19]. Все термины, означающие относительные понятия, и все компактные авторские обозначения описываются до их использования.

Теория низкоэнергетических разложений строится уже длительное время. Для лучшего понимания ее современного состояния в обзоре цитируются как работы, ставшие классическими, так и статьи, опубликованные сравнительно недавно. Чтобы показать, как развивались фундаментальные понятия метода низкоэнергетических асимптотик и как решались основные проблемы этого метода, работы, посвященные каждому такому понятию или проблеме, обсуждаются в том хронологическом порядке, в котором они появлялись в свет.

Настоящий обзор ни в коей мере не претендует на полноту и по сути дела является естественным продолжением предыдущего обзора [20]. В нем основное внимание было сосредоточено на анализе различных способов оценки границ энергетических интервалов, в которых короткодействующим ( $V^S$ ) или дальнодействующим ( $V^L$ ) потенциалом можно или нельзя пренебречь для корректного описания низкоэнергетических столкновений в рамках эффективно двухчастичной задачи рассеяния суперпозицией

$V^{cls} = V^c + V^l + V^s$ , содержащей кулоновский потенциал  $V^c$ . Знание таких оценок еще не достаточно для экстраполяции фаз и сечений нуклон-ядерного рассеяния в область экспериментально недоступных низких энергий. Для полного решения такой экстраполяционной проблемы необходимо еще знать низкоэнергетические разложения — асимптотические формулы, описывающие аналитическую зависимость экстраполируемых величин при стремящихся к нулю импульсе  $k$  или энергии столкновения  $E = O(k^2)$ .

Различные способы построения таких разложений анализируются в настоящем обзоре. Основная цель этого анализа — ответить на два вопроса: как разделить вклады от ядерного короткодействующего и электромагнитного далекодействующего взаимодействий в фазы, сечения и параметры низкоэнергетического  $NN$ - или  $Nd$ -рассеяния и как потом определить параметры, характеризующие только ядерное взаимодействие.

Решения этих задач ищутся издавна. Полученные результаты разбросаны по многочисленным оригинальным статьям и отражены в существующих книгах [5—10] в рамках различных подходов и даже с разных концептуальных точек зрения. Поэтому представляется важным и интересным просуммировать, сопоставить и оценить правдоподобность результатов, полученных в разное время и разными способами с единой точки зрения и в рамках одного подхода, основанного на использовании низкоэнергетических разложений, построенных в рамках метода фазовых функций. Попытка решить эту нелегкую задачу о систематизации и анализе многочисленных результатов предпринята в настоящем обзоре.

Обобщенному потенциальному описанию взаимодействия легчайших ядер в  $dd$ -,  $p^3\text{He}$ -,  $d^3\text{He}$ -,  $d^4\text{He}$ -рассеянии при сравнительно низких энергиях был посвящен недавний и подробный обзор [21]. Это позволило ограничиться в настоящем обзоре анализом потенциального низкоэнергетического  $NN$ - и  $Nd$ -рассеяния, но зато больше внимания уделить строгим математическим методам решения задачи рассеяния в системах двух и трех тел с парными взаимодействиями в виде суперпозиций коротко- и далекодействующих потенциалов. Эти методы применимы для надежного вывода низкоэнергетических разложений характеристик упругих столкновений в системах из двух и трех ядер, взаимодействие между которыми можно описать подходящими эффективными парными потенциалами. Такие потенциалы, как правило, содержат далекодействующие компоненты, кардинально изменяющие характер столкновения при достаточно низких энергиях. Понятие «низкие энергии» весьма условно. В настоящем обзоре под множеством низких энергий  $NN$ - или  $Nd$ -столкновений подразумевается интервал энергий  $0 \leq E_{\text{lab}} < 10$  МэВ, в котором экспериментальные данные о таких столкновениях бедны, а порой и не согласуются друг с другом. Именно это важное обстоятельство побудило автора ограничиться обсуждением извест-



ных результатов исследований  $NN$ - и  $Nd$ -столкновений только при выше определенных низких энергиях, но зато тщательно протестировать эти результаты на достоверность.

## 2. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

Для обсуждения таких разложений необходимо сначала пояснить, какие потенциалы далее будут называться коротко- или дальнедействующими.

В современной теории рассеяния [5,8] центральный потенциал  $V^s(r)$ , финитный ( $V^s(r) \equiv 0$  при  $r > b$ , где  $0 < b < \infty$ ) или убывающий при увеличении расстояния  $r$  не медленнее юкавского потенциала  $V^Y$ :

$$V^s(r) \sim V^Y(r) \quad \text{или} \quad V^s(r) = o(V^Y(r)), \quad r \rightarrow \infty; \quad (1)$$

$$V^Y(r) \equiv V_0^Y \exp(-r/r^Y) (r^Y/r), \quad V_0^Y = \text{const}, \quad r^Y = \text{const} > 0, \quad (2)$$

принято относить к короткодействующим взаимодействиям, а потенциал, убывающий медленнее, например, как обратная целая степень расстояния:

$$V^l(r) \sim V_0^d r^{-d}, \quad V_0^d = \text{const}, \quad d = 1, 2, 3, \dots, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

принято считать дальнедействующим. Однако понятие коротко- или дальнедействующего потенциала относительно [22]: один и тот же потенциал в одном случае проявляет себя как короткодействующий, в другом — как дальнедействующий. Поэтому вопрос о величине радиуса действия потенциала решается в каждом рассматриваемом случае. Во всех случаях, обсуждаемых ниже, такое уточнение не требуется, и поэтому потенциалы с асимптотиками (1) или (3) называются коротко- или дальнедействующими.

Для краткости изложения все функции и величины, характеризующие рассеяние потенциалом  $V^a$  или суперпозицией  $V^{ca} = V^c + V^a$ , помечаются верхним индексом  $a$  или  $ca$ . Ниже последовательно рассматривается несколько случаев: рассеяние потенциалами  $V^s(a = s)$ ,  $V^l(a = l)$ , их суперпозицией  $V^{ls} (a = ls)$  и суперпозициями  $V^{ca}$  с  $a = s, l, ls$ . Смысловые значения всех остальных индексов не изменяются и совпадают с их первыми по тексту определениями. Символы  $\gamma$ ,  $\Gamma(x)$  и  $B(x, y)$  или  $\hat{\delta}_{nm}$  всюду означают постоянную Эйлера, гамма- и бета- функции или символ Кронекера, также всюду  $R$  — борковский радиус,  $\rho \equiv kr$ , а  $\eta \equiv 1/2kr$ .

**2.1. Понятие длины рассеяния и способы ее вычисления.** Сначала это понятие было введено [5,6] для рассеяния потенциалом  $V^s$  с быстроубывающей асимптотикой (1). Для фазы рассеяния  $\delta_l^s(k)$  таким потенциалом в квантовом состоянии двух частиц  $|k, l\rangle$  с сохраняющимися относительным импульсом  $k$  и угловым моментом  $l$  предел

$$a_l^s \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \text{tg } \delta_l^s(k) / k^{2l+1} \quad (4)$$

конечен [5], а соответствующая функция эффективного радиуса

$$K_l^s(E) \equiv k^{2l+1} \text{ctg } \delta_l^s(k) = k^{2l+1} / \mathcal{K}_l^s(E) \quad (5)$$

является целой [7] функцией  $k^2$  и имеет низкоэнергетическую ( $E \equiv \hbar^2 k^2 / 2\mu \rightarrow 0$ ) асимптотику [6]:

$$K_l^s(E) \sim -1/a_l^s + k^2 r_{0l}^s / 2 - k^4 r_{0l}^s P_l^s, \quad k \rightarrow 0. \quad (6)$$

Функция (5) простым образом связана с элементом  $\mathcal{K}_l$  матрицы Гайтлера [7] (или  $\mathcal{K}$ -матрицы [5]) в базисе парциальных волн  $|k, l\rangle$ . Конечные величины  $a_l^s$ ,  $r_{0l}^s$  и  $P_l^s$ , содержащиеся в (6), называются параметрами рассеяния [15—17] в состоянии  $|k, l\rangle$ , а именно: длиной рассеяния, эффективным радиусом и, соответственно, параметром формы. Среди множества известных способов [5,6] вычисления параметров рассеяния короткодействующим потенциалом наиболее прост и удобен алгоритм метода фазовых функций. Напомним этот алгоритм.

В одной из нелинейных версий метода фазовых функций величина  $\text{tg } \delta_l^s(k)$  определяется как предел при  $r \rightarrow \infty$  фазовой функции  $t_l^s(r; k)$ , равной нулю при  $r = 0$  и удовлетворяющей при  $r > 0$  нелинейному уравнению [12]:

$$\partial_r t_l^a(r; k) = -k^{-1} V^a(r) [j_l(\rho) - t_l^a(r; k) n_l(\rho)]^2, \quad (7)$$

где  $a = s$  и  $\rho \equiv kr$ . Если в уравнении (7) заменить функции Риккати — Бесселя и Риккати — Неймана их соответствующими разложениями [1]:

$$j_\lambda(\rho) = k^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} j_{\lambda n}(r),$$

$$j_{\lambda n}(r) \equiv (r/2)^{2n+\lambda+1} \frac{\sqrt{\pi}(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\lambda+3/2)};$$

$$n_l(\rho) = k^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} n_{ln}(r), \quad n_{ln}(r) \equiv (-1)^{\lambda+1} (2/r) j_{-l, n}(r) \quad (8)$$

с  $\lambda = l$  и использовать анзац

$$t_l^a(r; k) = k^{2l+1} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} t_{ln}^a(r), \quad (9)$$

где  $a = s$ , то можно будет отделить параметр  $k$  от аргумента  $r$  и получить рекуррентные ( $n = 0, 1, \dots$ ) уравнения

$$\begin{aligned} \partial_r t_{ln}^a(r) &= -V^a(r) \sum_{m'+m=n} Q_{lm'}^a(r) Q_{lm}^a(r), \quad r > 0, \\ Q_{ln}^a &\equiv j_{ln}(r) - \sum_{m'+m=n} t_{lm'}^a(r) n_{lm}(r) \end{aligned} \quad (10)$$

для новых неизвестных функций  $t_{ln}^s(r)$ , равных нулю при  $r = 0$ . Энергонезависимость и рекуррентность уравнений (10) существенно упрощают их численное решение и позволяют с высокой точностью найти параметры рассеяния по формулам

$$\begin{aligned} a_l^a &= -t_{l0}^a(\infty), \quad r_{l0}^a = -2t_{l1}^a(\infty)/(a_l^a)^2, \\ P_l^a &= t_{l2}^a(\infty)/[(a_l^a)^2 r_{l0}^a] + a_l^a r_{l0}^a/4, \end{aligned} \quad (11)$$

следующим в рассматриваемом случае ( $a = s$ ) из (5), (6) и (9).

Избежать возможных недоразумений терминологического характера поможет приведенное ниже пояснение часто встречающихся в литературе по низкоэнергетическому потенциальному рассеянию фраз: «Длина рассеяния существует (определена)» и «Длина рассеяния не существует (не определена)». Итак, если при  $k = 0$  рассматриваемая функция эффективного радиуса не равна (равна) нулю, то говорят, что длина рассеяния существует (не существует).

Еще в 1949 г. Блатт и Джексон [23] доказали, что при любом  $l = 0, 1, \dots$  функция (5) является бесконечным рядом по четным степеням  $k$  для более широкого, чем (1), класса потенциалов, а именно для потенциалов, убывающих быстрее, чем  $r^{-d}$  при любом  $d > 1$ . Эти же авторы, исследуя рассеяние дальнедействующими потенциалами (3), не принадлежащими такому классу, показали, что функция (5) конечна при  $k = 0$ , если  $2l + 3 < d$ , а ее следующее по скорости убывания при  $k \rightarrow 0$  слагаемое квадратично по  $k$ , если  $2l + 5 < d$ . Иными словами, при рассеянии потенциалом (3) в состоянии  $|k, l\rangle$  длина рассеяния определена при  $2l + 3 < d$ , а эффективный радиус существует, если  $2l + 5 < d$ . При данном  $l$  длина рассеяния может существовать, а эффективный радиус — нет. Пример такой ситуа-

ции —  $S$ -волновое ( $l = 0$ ) рассеяние поляризационным потенциалом, имеющим асимптотику (3) с показателем  $d = 4$ :

$$V^P(r) \sim V_0^P r^{-4}, \quad V_0^P = -\alpha_e/2|R| = \text{const}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В этом случае низкоэнергетическая асимптотика функции эффективного радиуса, определенной равенством (5), функционально отличается от асимптотики (6), т.к. имеет вид [24,25]:

$$\begin{aligned} K_0^P(E) &\equiv k \operatorname{ctg} \delta_0^P(k) = \\ &= -\frac{1}{\alpha_0^P} - \frac{\pi V_0^P}{3(\alpha_0^P)^2} |k| - \frac{V_0^P}{3\alpha_0^P} k^2 \ln \left( \frac{-V_0^P k^2}{16} \right) + O(k^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\delta_0^P(k)$  — фаза, а  $\alpha_0^P$  — длина рассеяния потенциалом (12). Наличие в сумме (13) линейного и логарифмического по импульсу слагаемых означает, что эффективный радиус  $r_{00}^S$  бесконечен, т.е. не существует. При  $d = 4$  условие Блатта и Джексона  $2l + 3 < d$  выполняется только для  $l = 0$ , а для всех  $l > 0$  длина рассеяния, а значит и эффективный радиус, не определены. Этот же вывод следует из равномерного по  $l > 0$  асимптотического соотношения [24]:

$$\operatorname{tg} \delta_l^P(k) = -\pi V_0^P k^2 / [(4l^2 - 1)(2l + 3)] + O(k^{2l+1}), \quad k \rightarrow 0,$$

согласно которому все фазы  $\delta_l^P(k)$  с  $l > 0$  линейны по энергии.

Продолжая сравнение разложений (6) и (13), отметим, что медленное убывание поляризационного потенциала (12) по сравнению с любым короткодействующим потенциалом (1) порождает неаналитические по  $k$  слагаемые низкоэнергетической асимптотики фазы рассеяния  $\delta_0^P(k)$ . В 1963 г. Леви и Келлер [26] заметили, что если в уравнениях (7) и (10) положить  $a = l$ , т.е. заменить  $V^S$  на  $V^l$ , то конечными при  $r = \infty$  будут функции  $t_{ln}^l(r)$  с индексом  $n$ , подчиненным условию  $2n < d - 2l - 3$ . Поэтому представление функции  $t_l^l(r; k)$  бесконечным рядом (9) с  $a = l$  теряет смысл при  $r = \infty$ , а ее корректное при всех  $r$  разложение имеет вид

$$t_l^l(r; k) = k^{2l+1} \sum_{n=0}^m k^{2n} t_{ln}^l(r) + \beta_l(r; k), \quad (14)$$

где  $m$  — максимально возможное значение  $n$ , при котором верно неравенство  $2n < d - 2l - 3$ , а нетривиальное слагаемое  $\beta_l$  убывает при  $k \rightarrow 0$  быст-

рее, чем  $k^{2(l+m)+1}$ , но медленнее, чем  $k^{2(l+m+1)+1}$ . Подставив (14) в (7), Леви и Келлер вывели уравнения (10) для ограниченных при всех  $r$  функций  $t_{ln}^l(r)$  с индексом  $n \leq m$  и уравнение для функции  $\beta_l(r; k)$ . Исследуя последнее уравнение, они доказали, что при  $k \rightarrow 0$  и любой степени  $d \geq 3$  убывания потенциала (3) верно асимптотическое соотношение

$$\beta_l(r; k) \sim -k^{-1} \int_0^r dr V^l(r) \left\{ [j_l(\rho)]^2 - \rho^{2l+2} \sum_{n=0}^m \tau_{ln} \rho^{2n} \right\},$$

$$\tau_{ln} \equiv \sum_{m'+m=n} d_{lm} d_{lm}, \quad d_{ln} \equiv 2^l (-1)^n \frac{\Gamma(l+n+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(2l+2n+2)}. \quad (15)$$

Заменив  $\beta_l(\infty; k)$  в (14) найденной асимптотикой интеграла (15), Леви и Келлер впервые нашли явные низкоэнергетические ( $k \rightarrow 0$ ) разложения тангенсов фаз рассеяния  $\delta_l^d(k)$  потенциалами (3) вплоть до их первых неаналитических по  $k$  слагаемых:

$$\operatorname{tg} \delta_l^d(k) \sim -2^{-d} \pi V_0^d k |k|^{d-3} \frac{\Gamma(d-1) \Gamma(l+3/2-d/2)}{\Gamma^2(d/2) \Gamma(l+1/2+d/2)}, \quad 3 < d < 2l+3;$$

$$\operatorname{tg} \delta_l^d(k) \sim -V_0^d k |k|^{2l} \ln |k| / [(2l+1)!!]^2, \quad d = 2l+3;$$

$$\operatorname{tg} \delta_l^d(k) \sim k^{2l+1} \sum_{n=0}^m k^{2n} t_{ln}^l(\infty) - V_0^d k |k|^{d-3} \times$$

$$\times \int_0^\infty dr r^{-d} \left\{ [j_l(r)]^2 - r^{2l+2} \sum_{n=0}^m \tau_{ln} r^{2n} \right\}, \quad 2l+3 < d \neq 5, 7, \dots;$$

$$\operatorname{tg} \delta_l^d(k) \sim k^{2l+1} \sum_{n=0}^{(d-5)/2} k^{2n} t_{ln}^l(\infty) +$$

$$+ V_0^d \tau_{l, (d-3)/2-l} k |k|^{d-3} \ln |k|, \quad 2l+3 < d = 5, 7, \dots \quad (16)$$

Согласно (16) все такие слагаемые — произведения функции  $\ln |k|$  и целых степеней  $k$ . Следующие, более быстро убывающие слагаемые низкоэнергетических асимптотик функций  $\operatorname{tg} \delta_l^d(k)$  в случае произвольных констант  $V_0^d$  асимптотик (3) неизвестны. При дополнительном предположении о малости  $V_0^d$  такие слагаемые нетрудно найти в рамках линейного по малому

параметру  $V_0^d$  приближения способом Хинкелмана и Шпрача [27]. Как они показали, фаза рассеяния  $\delta_0^{ps}(k)$  суперпозицией  $V^{ps} \equiv V^p + V^s$  неперекрывающихся потенциалов (1) и (12)

$$V^p(r) \equiv 0, \quad r < b; \quad V^s(r) \equiv 0, \quad r \geq b; \quad 0 < b < \infty \quad (17)$$

имеет при  $k, V_0^p \rightarrow 0$  асимптотику

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_0^{ps}(k) = & -a_0^{ps}k + (V_0^p k^2/3) [\pi + 4a_0^s k \ln |2kb| - (3/2)\tau_0 k] + \\ & + (V_0^p/3) (a_0^s)^2 k^4 [2r_{00}^s k \ln |2kb| - \pi] + O((V_0^p)^2, k^5). \end{aligned} \quad (18)$$

Оказалось, что длина рассеяния  $a_0^{ps}$  суперпозицией (17) и коэффициент  $\tau_0$  связаны с длиной  $a_0^s$  и эффективным радиусом  $r_{00}^s$  рассеяния потенциалом  $V^s$ , обрезанным в точке  $r = b$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0^{ps} = & a_0^s + V_0^p(1 - \tau + \tau^2/3)/b, \quad \tau \equiv a_0^s/b, \\ \tau_0 = & (a_0^s)^2 r_{00}^s / V_0^p + (2b/3) \times \\ & \times [1 + 2(11/3 - 2\gamma)\tau - (3 + r_{00}^s(1 - \tau)/b)\tau^2]. \end{aligned} \quad (19)$$

Формулы (18), (19) позволяют по измеренным константе  $V_0^p$  и фазе  $\delta_0^{ps}(k)$  рассеяния суперпозицией (17) найти параметры рассеяния потенциалом  $V^s$ . Почему такие и другие низкоэнергетические соотношения, связывающие характеристики рассеяния суперпозицией  $V^{ls} = V^l + V^s$  с величинами, характеризующими ее короткодействующую компоненту  $V^s$ , представляют особый интерес? Как вывести такие соотношения в общем случае, и для каких функций импульса столкновения их выводить? Обсуждение этих проблем начнем с одного замечания.

Согласно (4) и (5) фаза  $\delta_l^s(k)$  убывает при  $k \rightarrow 0$  как степенная функция  $-a_l^s k^{2l+1}$  импульса  $k$ . Поэтому длина рассеяния  $a_l^s$  одним короткодействующим потенциалом  $V^s$  имеет простой геометрический смысл: при  $k = 0$  она является коэффициентом наклона графика функции  $\operatorname{tg} \delta^{c,s}(k)$  к оси абсцисс, на которой отложена величина  $-k^{2l+1}$ . По-видимому, желание сохранить аналогичный смысл в случае рассеяния суперпозициями  $V^{ls}$  определило в

40-х годах способ введения *модифицированных* параметров рассеяния. Поясним этот общепринятый способ на примере одной из наиболее важных для ядерной физики суперпозиций такого типа.

В пределе низких энергий полная фаза рассеяния  $\delta_l^{cs}(k)$  суперпозицией  $V^{cs} \equiv V^c + V^s$ , где  $V^c = 1/rR$  — отталкивающий кулоновский потенциал с боровским радиусом  $R > 0$  неограниченно растет [1] как кулоновская фаза  $\delta_l^c(k) \equiv \arg \Gamma(1 + l + i\eta)$ :

$$\delta_l^{cs}(k) \sim \delta_l^c(k) \sim \eta(\ln \eta - 1) + \pi/4, \quad \eta \equiv 1/2kR, \quad k \rightarrow 0,$$

и поэтому аналог

$$a_l^{cs} \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta_l^{cs}(k)/k^{2l+1} = - \lim_{k \rightarrow 0} (2Rk^{2l+2})^{-1}$$

предела (4) равен  $-\infty$ . Это первая причина, по которой в рассматриваемом случае ( $a = cs$ ) понятие длины рассеяния стоит модифицировать. Вторая причина имеет явный физический смысл и заключается в следующем: полная фаза  $\delta_l^{cs}(k)$  описывает совместное влияние потенциалов  $V^c$  и  $V^s$  на рассеяние. При экспериментальном исследовании рассеяния суперпозицией  $V^{cs}$  взаимодействие  $V^s$ , как правило, неизвестно. Чтобы извлечь информацию о нем, из измеренной фазы  $\delta_l^{cs}(k)$  следует вычесть кулоновскую фазу, а функцию эффективного радиуса определить так, чтобы она была рядом по целым степеням  $k^2$ .

Именно этот способ построения теории низкоэнергетического рассеяния одноименно заряженных ядерных частиц ( $R > 0$ ) был выбран Брейтом, Кондоном и Презентом [28] для построения первой теории протон-протонного ( $pp$ ) рассеяния и используется до сих пор. Эти авторы ввели понятие кулон-ядерной фазы рассеяния

$$\delta_l^{c, s}(k) = \delta_l^{cs}(k) - \delta_l^c(k) \quad (20)$$

как вклада в полную фазу рассеяния  $\delta_l^{cs}(k)$  суперпозицией  $V^{cs}$  от ядерного  $pp$ -потенциала  $V^s$ , и показали, что подходящим образом определенная кулон-ядерная функция эффективного радиуса

$$K_l^{c, s}(E) \equiv [k^l C_l(\eta)]^2 [k \operatorname{ctg} \delta_l^{c, s}(k) + h^c(\eta)] \quad (21)$$

должна содержать кулоновские множители [1]:

$$C_l(\eta) \equiv 2^l \exp(-\pi\eta/2) |\Gamma(l+1+i\eta)| / \Gamma(2l+2),$$

$$h^c(\eta) \equiv h(\eta) / RC_0^2(\eta), \quad h(\eta) \equiv \operatorname{Re} \psi(i\eta) - \ln \eta, \quad (22)$$

чтобы получался желаемый тип асимптотики

$$K_l^{c,s}(E) \sim -1/a_l^{c,s} + k^2 r_{0l}^{c,s} / 2 - k^4 r_{0l}^{c,s} P_l^{c,s}, \quad k \rightarrow 0. \quad (23)$$

Так как полученное разложение (23) и разложение (6) имело аналогичную функциональную зависимость от  $k^2$ , то коэффициенты

$$a_l^{c,s}(k) \equiv -\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta_l^{c,s}(k) / k [k^l C_l(\eta)]^2, \quad (24)$$

$r_{0l}^{c,s}$  и  $P_l^{c,s}$  стали называть кулон-ядерными (или модифицированными) длиной рассеяния, эффективным радиусом и, соответственно, параметром формы. Вместо термина «кулон-ядерный» параметр рассеяния [16] употребляется и словосочетание «ядерно-кулоновский» параметр рассеяния [9]. Физический смысл таких параметров наиболее точно отражает более длинное название — ядерный параметр рассеяния в кулоновском поле.

Интерес к проблеме определения кулон-ядерных параметров рассеяния вновь возрос в 1949 г. и был инициирован работой Ландау и Смородинского [29]. Они нашли простое приближенное соотношение

$$1/a_0^{c,s} \approx 1/a_0^s + R^{-1} [\ln(r_s/R) + 2\gamma - 0,824], \quad (25)$$

связывающее кулон-ядерную длину  $a_0^{c,s}$  рассеяния суперпозицией  $V^{cs}$  с длиной рассеяния  $a_0^s$  короткодействующей компонентой  $V^s$  этой суперпозиции, радиусом действия этой компоненты  $r_s$  и боровским радиусом  $R$ .

Невозможно хотя бы кратко упомянуть все многочисленные работы, последовавшие за статьей Ландау и Смородинского и посвященные проблеме определения кулон-ядерных параметров рассеяния, но стоит классифицировать и сравнить по простоте реализации и степени надежности известные методы вычисления таких параметров. Для такого сравнения необходимо напомнить некоторые формулы.

Полная амплитуда упругого ( $k = k'$ ) рассеяния  $f(\theta; k)$  центральным потенциалом  $V(r)$  из начального состояния  $|\mathbf{k}\rangle$  в конечное состояние  $|\mathbf{k}'\rangle$  зависит от одного угла рассеяния  $\theta \equiv \arccos[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')/kk']$  и представляется бесконечным рядом [5] по полиномам Лежандра  $P_l(\cos \theta)$ :



$$f(\theta; k) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^c(k) [(2l+1) P_l(\cos \theta)] \quad (26)$$

и парциальным амплитудам

$$f_l^c(k) = (2ik)^{-1} [\exp(2i\delta_l^c(k)) - 1]. \quad (27)$$

Если  $V = V^{ca}$ , то разбиение

$$\delta_l^{ca}(k) = \delta_l^c(k) + \delta_l^{c,a}(k) \quad (28)$$

каждой ( $l = 0, 1, \dots$ ) фазы рассеяния  $\delta_l^c(k) \equiv \delta_l^{ca}(k)$  на кулоновскую фазу  $\delta_l^c(k)$  и фазу  $\delta_l^{c,a}(k)$ , отсчитанную от нее, порождает разбиения полной (26) и парциальных (27) амплитуд рассеяния

$$f^{ca}(\theta; k) = f^c(\theta; k) + f^{c,a}(\theta; k), \quad f_l^{ca}(k) = f_l^c(k) + f_l^{c,a}(k) \quad (29)$$

на полную [9]

$$f^c(\theta; k) = -R^{-1} [2k \sin(\theta/2)]^{-2} \exp(2i(\delta_0^c(k) - \eta \ln \sin(\theta/2))) \quad (30)$$

и парциальные ( $f_l^c(k)$ ) амплитуды рассеяния кулоновским потенциалом, и соответствующие им амплитуды

$$f_l^{c,a}(\theta; k) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{c,a}(k) [(2l+1) P_l(\cos \theta)], \quad (31)$$

$$f_l^{c,a}(k) = (2ik)^{-1} \exp(2i\delta_l^c(k)) [\exp(2i\delta_l^{c,a}(k)) - 1], \quad (32)$$

порожденные потенциалом  $V^a$  при рассеянии в кулоновском поле. Вклады  $\sigma_l^{c,a}$ ,  $d\sigma^{c,a}/d\theta$  и  $\sigma^{c,a}$  этого потенциала в парциальное, дифференциальное и полное сечения рассеяния суперпозицией  $V^{ca}$  определяются следующим образом:

$$\sigma_l^{c,a}(E) \equiv 4\pi |f_l^{c,a}(k)|^2, \quad (33)$$

$$d\sigma^{c,a}(\theta; E)/d\theta \equiv |f^{c,a}(\theta; k)|^2 \sin \theta, \quad (34)$$

$$\sigma^{c,a}(E) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l^{c,a}(E) = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta (d\sigma^{c,a}(\theta; E)/d\theta). \quad (35)$$

В традиционном подходе [30—34] кулон-ядерные ( $a = s$ ) амплитуды (31) и (32) задаются матричными элементами

$$f^{c, s}(\theta; k) = -\frac{\mu}{2\pi} \langle \mathbf{k} | T^{c, s}(z) | \mathbf{k}' \rangle, \quad f_l^{c, s}(k) = -\frac{\mu}{2\pi} T_l^{c, s}(k, k; z) \quad (36)$$

полного ( $T^{c, s}$ ) и парциальных ( $T_l^{c, s}$ ) кулон-ядерных операторов перехода на энергетической поверхности ( $k = k'$ ,  $z = E + i0 = \hbar^2 k^2 / 2\mu + i0$ ), а определение кулон-ядерных параметров сводится к вычислению пределов при  $z \equiv E + i0 \rightarrow 0+$  функции  $T_l^{c, s}(k, k; z)$  и ее производных по энергии. Эти пределы вычисляются со стороны положительных значений энергии, где матрица  $\langle \mathbf{k} | T^{c, s}(z) | \mathbf{k}' \rangle$  и все ее парциальные компоненты  $T_l^{c, s}(k, k'; z)$  являются комплексными функциями. Таким образом, для определения действительных величин (кулон-ядерных параметров рассеяния) приходится сначала найти комплексное решение  $T_l^{c, s}(k, k'; z)$  парциального уравнения Липпмана — Швингера. Это первая причина, из-за которой традиционный метод не так просто реализуется в вычислительном плане, особенно в случае кулоновского притяжения ( $V^c < 0$ ), когда все кулоновские функции  $T_l^c(k, k'; z)$  имеют бесконечное число полюсов, отвечающих кулоновским связанным состояниям и ступающим к точке  $z = 0$ . Вторая причина малой эффективности традиционного метода состоит в необходимости вычисления вышеупомянутых пределов. Численно такая задача сводится к задаче экстраполяции парциальной амплитуды (32), (36) и ее производных по энергии, найденных для убывающей последовательности  $E_1 > E_2 > \dots > E_N > 0$  положительных значений энергии, в точку  $E = 0$ . Как известно [3], любой экстраполяционный метод приводит к дополнительной потере точности.

В [35] Навроцкий показал, что пределы, определяющие кулон-ядерные параметры, можно вычислить со стороны отрицательных энергий. В качестве стартового им использовалось представление [36]:

$$T^{c, s}(z) = [1 + T^c(z) G_0(z)] \tilde{T}^{c, s}(z) [1 + T^c(z) G_0(z)], \quad (37)$$

содержащее свободную функцию Грина  $G_0$ , вспомогательный кулон-ядерный оператор  $\tilde{T}^{c, s}$  и известную в явном виде кулоновскую матрицу [37]:

$$\langle \mathbf{k} | T^c(z) | \mathbf{k}' \rangle = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu R |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} [1 + \omega^{-1} F_{i\eta}(\tau) - \omega^{-1} F_{i\eta}(\tau^{-1})],$$

$$\omega \equiv - \left[ 1 + \frac{(k^2 - p^2)(k'^2 - p^2)}{p^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \right]^{1/2}, \quad \tau \equiv \frac{\omega + 1}{\omega - 1},$$

$$p^2 \equiv 2\mu z / \hbar^2, \quad (38)$$

где  $F_{i\eta}(x) \equiv {}_2F_1(1, i\eta; 1 + i\eta; x)$  — гипергеометрическая функция [1]. Оператор  $\tilde{T}^{c, s}$ , в отличие от оператора  $T^{c, s}$ , удовлетворяет уравнению

$$\tilde{T}^{c, s}(z) = V^s + V^s G^c(z) \tilde{T}^{c, s}(z) \quad (39)$$

с компактным ядром, содержащим  $V^c$  лишь посредством кулоновской функции Грина

$$G^c(z) = G_0(z)[1 + T^c(z)G_0(z)]. \quad (40)$$

За упомянутой выше переформулировкой (37)—(40) исходной задачи (уравнения Липпмана — Швингера для оператора  $T^{c, s}$  с  $V^c < 0$ ) в обсуждаемой работе [35] последовал анализ ядра уравнения (39). Этот анализ был начат доказательством представления кулоновской матрицы (38) в виде суммы

$$\langle \mathbf{k} | T^c(z) | \mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k} | \omega(z) | \mathbf{k}' \rangle + i \operatorname{cth}(\pi\eta) \langle \mathbf{k} | u(z) | \mathbf{k}' \rangle, \quad (41)$$

где функции  $\langle \mathbf{k} | \omega(z) | \mathbf{k}' \rangle$  и  $\langle \mathbf{k} | u(z) | \mathbf{k}' \rangle$  непрерывны по энергии в точке  $z = 0$ , а множитель  $\operatorname{cth}(\pi\eta)$  описывает явно все полюсные по энергии сингулярности, отвечающие кулоновским связанным состояниям. Представление (41) позволило выделить из функции (40) сингулярную ( $G^u$ ) и гладкую ( $G^\omega$ ) части:

$$G^c = G^u + i \operatorname{cth}(\pi\eta) G^\omega, \quad G^u \equiv G_0 u G_0, \quad G^\omega \equiv G_0(1 + \omega G_0), \quad (42)$$

а затем свести уравнение (39) к двум уравнениям: к уравнению с явно выделенными кулоновскими особенностями

$$\tilde{T}^{c, s}(z) = T^\omega(z) + i \operatorname{cth}(\pi\eta) T^\omega(z) G^u(z) \tilde{T}^{c, s}(z) \quad (43)$$

и уравнению

$$T^\omega(z) = V^s + V^s G^\omega(z) T^\omega(z) \quad (44)$$

для вспомогательного оператора  $T^\omega$ , матрица которого не имеет особенностей кулоновского происхождения и непрерывна в точке  $z = 0$ . Дальнейшие построения были выполнены лишь в случае нулевого  $l$ . Оказалось, что кулон-ядерная  $S$ -волновая длина рассеяния равна пределу нулевой энергии

$$a_0^{c,s} = \frac{\mu}{2\pi} T_{00}(0) \quad (45)$$

матричного элемента несингулярной части оператора  $\tilde{T}^{c,s}$ :

$$T_{kk'}(z) \equiv \langle \phi_k | T^{\text{reg}}(z) | \phi_{k'} \rangle, \\ T^{\text{reg}}(z) = \begin{cases} \tilde{T}^{c,s}(z), & V^c > 0, \\ T^\omega(z), & V^c < 0 \end{cases}, \quad (46)$$

взятой в обкладках перенормированных кулоновских функций  $\phi_k(r) \equiv F_0(\rho, \eta)/\rho C_0(\eta)$ . В случае  $V^c > 0$  получившаяся таким образом функция  $T_{kk'}(z)$  подчиняется уравнению

$$T_{kk'}(z) = V_{kk'}^s + \int_0^\infty \frac{dp p^2 C^2(\eta_p)}{2\pi^2(z - E_p)} V_{kp}^s T_{pk'}(z), \\ V_{kk'}^s \equiv \langle \phi_k | V^s | \phi_{k'} \rangle, \quad \eta_p \equiv 1/2pR, \quad E_p \equiv \hbar^2 p^2 / 2\mu, \quad (47)$$

а эффективный радиус определяется формулой

$$r_{00}^{c,s} = 2R/3 + [1/2\pi(a_0^{c,s})^2] [\lim_{z \rightarrow 0} \partial_z T_{00}(z) + 4\mu \lim_{k \rightarrow 0} \partial_{k^2} T_{k0}(0)]. \quad (48)$$

Итак, в отличие от традиционного подхода, в способе Навроцкого *все* особенности кулоновского происхождения *последовательно* выделены, а пределы (45) и (48), определяющие кулон-ядерные параметры, можно вычислять со стороны отрицательных энергий, когда функция (46) является действительной. Оба эти преимущества упрощают вычисление кулон-ядерных параметров. Однако схема вычислений по формулам (37)—(48) требует нахождения многочисленных вспомогательных операторов и поэтому является довольно громоздкой. Главная причина тому — выбор (в качестве рабочего) импульсного пространства, в котором кулоновская матрица (38) является не только сингулярной, но и очень сложной функцией. Стартуя с уравнения Шредингера в координатном пространстве и используя вместо этой матрицы простые объекты — функции  $F_l$  и  $G_l$ , можно построить более надежные алгоритмы определения кулон-ядерных параметров. Упомянем два таких способа.

Применив к задаче рассеяния Шредингера с  $l = 0$  и взаимодействием  $V^{cs}$  метод эволюции по константе связи [38], Киржниц и Пеньков [39] нашли для разности функций (5) и (21) следующее интегральное представление:

$$\Delta(E) \equiv K_0^s(E) - K_0^{c,s}(E) = R^{-1} \operatorname{cosec}^2 \delta_0^s(k) \times \\ \times \operatorname{Im} \int_0^\infty dr \ln(r/|R|) \partial_r [u_0^{+s}(r; k) u_0^{-s}(r; k) + i[u_0^{+s}(r; k)]^2 - \\ - \sin(\rho + \delta_0^s(k)) \exp(i(\rho + \delta_0^s(k)))] \quad (49)$$

позволяющее определить  $S$ -волновые кулон-ядерные параметры после вычисления фазы  $\delta_0^s(k)$ , регулярной ( $u_0^{+s}$ ) и нерегулярной ( $u_0^{-s}$ ) функций рассеяния потенциалом  $V^s$ . При  $k = 0$  представление (49) принимает вид

$$1/a_0^{c,s} - 1/a_0^s = \Delta(0) \quad (50)$$

и позволяет найти кулон-ядерную длину рассеяния  $a_0^{c,s}$  по известной длине рассеяния  $a_0^s$  и интегралу  $\Delta(0)$ . Соотношение (50) согласуется с формулой (25), но, в отличие от нее, не зависит от радиуса действия  $r_s$  потенциала  $V^s$ . Параметры  $r_{00}^{c,s}$  и  $P_0^{c,s}$  разложения (23) выражаются через первую и вторую производные функции  $\Delta(E)$  по энергии  $E$  в точке  $E = 0$ .

Способ, предложенный Бабиковым [40], более прост, так как в нем вычисление каких-либо производных и пределов по энергии не требуется. Исходную задачу Шредингера с потенциалом  $V^{cs}$  Бабиков сначала переформулировал так, чтобы тангенс фазы  $\delta_l^{c,s}(k)$  был равен пределу при  $r \rightarrow \infty$  вспомогательной функции  $t_l^{c,s}(r; k)$ , равной нулю при  $r = 0$  и удовлетворяющей при  $r > 0$  нелинейному уравнению

$$\partial_r t_l^{c,s}(r; k) = -k^{-1} V^s(r) [F_l(\rho, \eta) + t_l^{c,s}(r; k) G_l(\rho, \eta)]^2. \quad (51)$$

Затем, используя две последовательные подстановки

$$t_l^{c,s}(r; k) = (2l+1) k [k^l C_l(\eta)]^2 \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} A_{ln}^{c,s}(r; h(\eta)), \quad k \rightarrow 0, \quad (52)$$

$$A_{ln}^{c,s}(r; h(\eta)) = t_{ln}^{c,s}(r) / \tau_l(r; h(\eta)), \quad n = 0, 1,$$

$$\tau_l(r; h(\eta)) \equiv 1 + t_{l0}^{c,s}(r) h(\eta) / R,$$

$$A_{l2}^{c,s} = b_l^{c,s}(r; h(\eta)) / \tau_l(r; h(\eta)), \quad t_{l2}^{c,s}(r) = b_l^{c,s}(r; 0). \quad (53)$$

и представление Бесселя — Клиффорда [1] для  $F_l$  и  $G_l$ , Бабиков свел уравнение (51) к рекуррентной цепочке довольно сложных, но зато энергоне-

зависимых уравнений для функций  $t_{ln}^{c,s}(r)$ ,  $n = 0, 1, 2$ , через которые кулон-ядерные параметры с  $l = 0$  выражаются по формулам (11) с  $a = c, s$ .

Заметим, что функции (53) низкоэнергетического разложения (52) параметрически зависят от неаналитической функции  $h(\eta)$  (см. (22)). Выделить эту зависимость в явном виде Бабикову не удалось по простой причине: использованное им исходное уравнение (51) — нелинейное.

Еще более надежный и простой метод определения кулон-ядерных параметров можно попытаться построить по следующей схеме. Сначала исходная задача рассеяния суперпозицией  $V^{cs}$  сводится к системе линейных уравнений для некоторых вспомогательных функций, через которые выражается кулон-ядерная фаза рассеяния. Затем из искомым вспомогательных функций выделяются в явном виде все неаналитические множители и слагаемые кулоновского происхождения, а оставшиеся части этих функций представляются в виде рядов по известным функциям импульса-параметра  $k$  и новым неизвестным функциям расстояния-аргумента  $r$ . Далее, с помощью такого представления исследуемые уравнения сводятся к энергонезависимым уравнениям для новых неизвестных функций, через которые потом выражаются все кулон-ядерные параметры.

Метод, построенный автором по вышеупомянутой схеме, кратко излагается в следующем пункте и позволяет единообразно определить как кулон-ядерные параметры рассеяния суперпозицией  $V^{cs}$ , так и ядерные параметры рассеяния суперпозицией  $V^{cls}$  с  $V^c > 0$ .

Задача определения ядерной длины рассеяния суперпозицией  $V^{cls}$  оказалась достаточно сложной и решалась длительное время. Полную фазу рассеяния  $\delta_l^{cls}(k)$  такой суперпозицией можно разбить двумя способами:

$$\delta_l^{cls}(k) = \delta_l^c(k) + \delta_l^{c,ls}(k); \quad (54)$$

$$\delta_l^{cls}(k) = \delta_l^{cl}(k) + \delta_l^{cl,s}(k), \quad \delta_l^{cl}(k) = \delta_l^c(k) + \delta_l^{c,l}(k), \quad (55)$$

выделив таким образом компоненты, имеющие различный физический смысл. Фаза  $\delta_l^{c,ls}(k)$  характеризует совместное влияние двух взаимодействий ( $V^l$  и  $V^s$ ) на рассеяние в кулоновском поле  $V^c$ , а фаза  $\delta_l^{cl,s}(k)$  описывает вклад одного ядерного потенциала  $V^s$  в полную фазу  $\delta_l^{cls}(k)$ . По низкоэнергетической асимптотике именно этого вклада можно судить о строении ядерного взаимодействия в пределе низких энергий. Экспериментально можно определить лишь полную фазу, а не ее компоненты. Далее возникают две проблемы: как из уже известной полной фазы выделить компоненту

$\delta_l^{cl, s}(k)$  и как построить низкоэнергетическое разложение такой компоненты? Эти до сих пор не решенные в полном объеме задачи теории потенциального рассеяния, представляются достаточно общими и очень важными с теоретической и прикладной точек зрения. Такие задачи неизбежно возникают при теоретическом исследовании роли заданного потенциала  $V^s$ , описывающего ядерное взаимодействие, в молекулярных, атомных и ядерных столкновениях, происходящих при сверхнизких в ядерном масштабе энергиях, и при решении обратной задачи, т.е. определении формы и параметров ядерных сил  $V^s$  по найденным из опыта наблюдаемым, характеризующим такие столкновения.

Основные черты низкоэнергетического рассеяния заряженной частицы мишенью с неточечным распределением электрического и (или) магнитного зарядов (атом, ион, молекула, ядро) можно предсказать, используя эффективно-двухчастичное приближение, в котором частица и мишень рассматриваются как точечные, но взаимодействующие посредством подходящего эффективного потенциала, содержащего различные по своей природе слагаемые, эффективно учитывающие неточечность частицы и мишени. В достаточно общем случае эффективно-двухчастичное взаимодействие представляется суперпозицией  $V^{cls}$  кулоновского потенциала  $V^c$ , дальнедействующей электромагнитной поправки  $V^l$  к этому потенциалу и короткодействующего потенциала  $V^s$ , описывающего сугубо ядерное взаимодействие. Электромагнитные поправки имеют асимптотики (3) с показателем  $d = 2, 3, 4, \dots$

Например, взаимодействие магнитного момента  $\mu = 2s\mu_N$  нуклона с электрическим зарядом  $Ze$  мишени имеет асимптотику [19]:

$$V_{ls}^m \sim V_{ls,0}^m (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) r^{-3}, \quad V_{ls,0}^m \equiv \mu_N Ze^2 / 2m_N c^2, \quad r \rightarrow \infty, \quad (56)$$

где  $\mathbf{s}$  — оператор спина нуклона, а  $m_N$  и  $\mu_N$  — его масса и значение его магнитного момента.

При  $r \rightarrow \infty$  неконтактная часть взаимодействия магнитных моментов  $\mu_1$  и  $\mu_2$  двух нуклонов задается формулой [19]:

$$V^m(r) \sim -\frac{m_N}{h^2} [3(\mu_1 \cdot \mathbf{r})(\mu_2 \cdot \mathbf{r}) r^{-2} - (\mu_1 \cdot \mu_2)] r^{-3}. \quad (57)$$

Поляризационное взаимодействие заряженной частицы с электрическим моментом дейтрона [15] имеет асимптотику (12), в которой  $\alpha_e = 0,007$  фм — константа электрической поляризуемости дейтрона [14], а  $R$  — боровский радиус системы «частица + дейтрон».

Фундаментальное теоретическое исследование низкоэнергетического рассеяния суперпозицией  $V^{cls}$  с  $V^l$  типа (3) было выполнено в [42,43]. Бергер и Шпрач [42] доказали, что в случае  $k \rightarrow 0$ ,  $V^c > 0$ ,  $d \geq 3$  и при любом  $l = 0, 1, \dots$  старшие слагаемые асимптотик компонент  $\delta_l^{c, ls}(k)$  и  $\delta_l^{c, l}(k)$  разбиений (54) и (55) определяются борновским интегралом

$$\delta_l^{c, ls}(k) \sim \delta_l^{c, l}(k) \sim -k^{-1} \int_b^\infty dr V^l(r) F_l^2(\rho, \eta), \quad 0 < b < \infty, \quad (58)$$

из которого следуют *равномерные по  $l$  асимптотики*

$$\delta_l^{c, d}(k) \sim \frac{-V_0^d k}{2l(l+1)(2l+1)} [2l+1 - 2\eta\chi_l(\eta)], \quad d = 3, \quad (59)$$

$$\delta_l^{c, d}(k) \sim \frac{-V_0^d}{2R^2} \frac{2[3\eta^2 + l(l+1)] \chi_l(\eta) - (6l+3)\eta}{l(l+1)(4l^2-1)(2l+3)}, \quad d = 4, \quad (60)$$

$$\chi_l(\eta) \equiv \pi/2 - \text{Im} \psi(l+1+i\eta) \quad (61)$$

и справедливая при всех  $l \ll \eta$  и  $d \geq 3$  асимптотическая формула

$$\delta_l^{c, ls}(k) \sim \delta_l^{c, l}(k) \sim (-V_0^d/2R^{1-d}) k^{2d-3} B(d-1, 1/2), \quad k \rightarrow 0. \quad (62)$$

Как заметили Бергер и Шпрач, из-за медленного, а именно степенного, по  $k$  убывания (62) фазы  $\delta_l^{c, ls}(k)$  аналог кулон-ядерной длины рассеяния (24)

$$\begin{aligned} a_l^{c, ls} &\equiv -\lim_{k \rightarrow 0} \text{tg} \delta_l^{c, ls}(k) / k [k^l C_l(\eta)]^2 = \\ &= \text{const} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} k^{2(d-l-1)} \exp(\pi/kR) \end{aligned} \quad (63)$$

является бесконечной величиной. Так возникла проблема определения ядерной длины рассеяния суперпозицией  $V^{cls}$ . Чтобы ее решить, Бергер, Снодграсс и Шпрач [43] использовали разбиение (55). Введя подходящий аналог кулон-ядерной функции эффективного радиуса (21)

$$K_l^{cl, s}(E) \equiv [k^l C_l(\eta)]^2 [k \text{ctg} \delta_l^{cl, s}(k) + h^{cl}(\eta)] \quad (64)$$

и доказав, что



$$K_l^{cl,s}(E) \sim -1/a_l^{cl,s} + k^2 r_{0l}^{cl,s}/2 - k^4 r_{0l}^{cl,s} P_l^{cl,s}, \quad k \rightarrow 0, \quad (65)$$

они определили модифицированные длину рассеяния

$$a_l^{cl,s} \equiv -\lim_{k \rightarrow 0} \text{tg } \delta_l^{cl,s}(k)/k[k^l C_l^{cl}(\eta)]^2, \quad (66)$$

эффективный радиус  $r_{0l}^{cl,s}$  и параметр формы  $P_l^{cl,s}$  как величины, содержащиеся в коэффициентах асимптотики (65). Такие параметры характеризуют влияние одного потенциала  $V^s$  на рассеяние суперпозицией  $V^{cl,s}$  и поэтому называются ядерными параметрами рассеяния в поле  $V^{cl}$ .

Хотя проблема определения ядерной длины рассеяния была решена с концептуальной точки зрения, интегральные представления, полученные в [42,43] для коэффициентов разложения (65) и неаналитических функций  $C_l^{cl}(\eta)$  и  $h_l^{cl}(\eta)$  параметра  $\eta$ , оказались слишком громоздкими.

Дискуссия о длине рассеяния суперпозицией  $V^{cl,s}$  возобновилась лишь в 1984 г. Начав эту дискуссию докладом [44], Квицинский и Меркурьев показали в последовавшей статье [45], что из-за  $pd$ -поляризационного взаимодействия (12) дублетная ( ${}^2a_{pd}$ ) и квартетная ( ${}^4a_{pd}$ )  $pd$ -длины, определяемые подстановкой в (63) соответствующей  $pd$ -фазы вместо фазы  $\delta_0^{cl,s}(k)$ , оказываются бесконечными. После этого замечания поляризационные эффекты в низкоэнергетических ядерных столкновениях интенсивно исследовались различными способами. Основные результаты этих исследований обобщены в [20].

Наиболее полное теоретическое исследование рассеяния суперпозицией  $V^{cl,s}$  в случае  $V^c > 0$ ,  $V^l = V^p$  и  $l = 0$  выполнено Бенцем и др. [46] в рамках оригинальной линейной версии [47] метода фазовых функций. Основным выводом этого исследования следующий: по крайней мере для вычисления ядерной длины рассеяния в формуле (66) можно заменить  $C_l^{cl}(\eta)$  на  $C_l(\eta)$  и использовать получившееся соотношение

$$a_l^{cl,s} \approx -\lim_{k \rightarrow 0} \text{tg } \delta_l^{cl,s}(k)/k[k^l C_l(\eta)]^2 \quad (67)$$

как приближенное выражение для такой длины.

Теория, построенная Бенцем и др., далеко не полна, потому что авторам не удалось ответить на два важных вопроса: каково строение функций  $C_l^{cl}(\eta)$  и  $h_l^{cl}(\eta)$  из (64) и как вычислить величины  $r_{0l}^{cl,s}$  и  $P_l^{cl,s}$  из (65)?

Недавно автор нашел ответы на эти вопросы. Подробное описание предлагаемого им метода будет дано в отдельной статье, а схематическое приведено ниже для случая  $V^c > 0$ .

**2.2. Низкоэнергетические разложения для рассеяния суперпозицией  $V^{cls}$ .** Следуя [48], введем безразмерные аргумент  $x \equiv r/R$  и параметр  $q \equiv kR$  и запишем исследуемую задачу рассеяния Шредингера в виде дифференциальных уравнений

$$[\partial_x^2 - l(l+1)x^{-2} - V^c(x) - V(x) + q^2] u_l^\pm(x; q) = 0, \quad x \in \mathcal{R}^+, \quad (68)$$

для искомым регулярной ( $u_l^+$ ) и нерегулярной ( $u_l^-$ ) волновых функций, подчиненных соответствующим граничным условиям

$$u_l^\pm(x; q) = O(x^{\pm(l+1/2)+1/2}), \quad x \rightarrow 0, \quad (69)$$

$$u_l^\pm(x; q) \sim \sin[\rho - \eta \ln 2\rho - (2l+1 \mp 1)\pi/4 + \delta_l^c(q) + \delta_l(q)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (70)$$

Здесь  $\mathcal{R}^+ \equiv \{x : 0 \leq x \leq \infty\}$ ,  $\rho = kr = qx$ ,  $\eta = 1/2q$ , а  $\delta_l(q)$  означает фазу, порождаемую потенциалом  $V$  в кулоновском поле  $V^c = 1/x$ . Единственное ограничение

$$I_l(b, x) \equiv (2\pi/(l+1))^{1/2} \int_b^x dt \cdot t |V(t)| < \infty, \quad 0 \leq b \leq x \leq \infty, \quad (71)$$

накладываемое на потенциал  $V$ , является достаточно общим [8]. Ему удовлетворяют большинство короткодействующих потенциалов, используемых в ядерной физике для описания сильного взаимодействия [16,17], все далекодействующие поправки (3) с  $d > 2$  и суперпозиции  $V^{ls}$  таких ядерных и далекодействующих потенциалов. Далее при необходимости будет оговорено, для какого именно класса ( $V^s$ ,  $V^l$  или  $V^{ls}$ ) потенциалов  $V$  будут верны те или иные низкоэнергетические ( $q \rightarrow 0$ ) разложения. Большинство из них — асимптотические [4] бесконечные ряды

$$S(x; q) = N(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} S_n(x), \quad x \in \mathcal{R}^+, \quad q \rightarrow 0, \quad (72)$$

с нормировочным множителем  $N(q)$  и аргументом  $x$ , отделенным от стремящегося к нулю параметра  $q$ . Ряд (72) представим в виде разбиения на его конечную подсумму  $S^{(M)}$  и остаточный член  $^{(M)}S$ :

$$S = S^{(M)} + ^{(M)}S, \quad S^{(M)}(x; q) \equiv N(q) \sum_{n=0}^M q^{2n} S_n(x). \quad (73)$$

Достаточно простым способом исследования *различных* решений уравнения Шредингера (68) является линейная версия метода фазовых функций [11], по сути дела, эквивалентная методу вариации «постоянных» коэффициентов [2]. Калоджеро [47] сформулировал эту версию в терминах амплитудных функций («постоянных» коэффициентов) для вычисления регулярного решения  $u_l^+$  задачи (68)—(70) и фазы рассеяния  $\delta_l(q)$ . Недавно эта оригинальная версия была дополнена способом построения нерегулярного решения [48], развита для исследования искусственных и физических резонансных состояний [49] и объединена с методом комплексного вращения координаты [50] для вычисления функции Йоста [51].

Расширим линейную версию для построения низкоэнергетических разложений функций, связанных с задачей (68)—(71), в виде (72), (73). Сначала напомним, как эта задача была переформулирована в работе [48].

Искомые волновые функции представляются в виде

$$\begin{aligned} u_l^+(x; q) &= N_l^+(q) U_l^+(x; q), \\ u_l^-(x; q) &= \tilde{u}_l^-(x; q) + \alpha_l(q) u_l^+(x; q), \\ \tilde{u}_l^-(x; q) &= N_l^-(q) U_l^-(x; q), \end{aligned} \quad (74)$$

$$U_l^\pm(x; q) \equiv c_l^\pm(x; q) F_l(\rho, \eta) + s_l^\pm(x; q) G_l(\rho, \eta). \quad (75)$$

Котангенс фазы  $\delta_l(q)$  и нормировочные множители  $N_l^\pm(q)$  и  $\alpha_l(q)$ , обеспечивающие асимптотики (70), определяются как пределы при  $x \rightarrow \infty$  соответствующих функций

$$\operatorname{ctg} \delta_l(x; q) \equiv c_l^+(x; q) / s_l^+(x; q), \quad (76)$$

$$N_l^\pm(x; q) \equiv [(c_l^\pm(x; q))^2 + (s_l^\pm(x; q))^2]^\mp 1/2, \quad (77)$$

$$\alpha_l(x; q) \equiv -c_l^+(x; q) c_l^-(x; q) - s_l^+(x; q) s_l^-(x; q). \quad (78)$$

Для амплитудных функций выводятся две незацепляющиеся системы уравнений (первая система для  $c_l^+$  и  $s_l^+$ , а вторая — для  $c_l^-$  и  $s_l^-$ )

$$\partial_x \begin{Bmatrix} c_l^\pm(x; q) \\ s_l^\pm(x; q) \end{Bmatrix} = q^{-1} V(x) U_l^\pm(x; q) \begin{Bmatrix} + G_l(\rho, \eta) \\ - F_l(\rho, \eta) \end{Bmatrix} \quad (79)$$

с соответствующими начальными ( $x \rightarrow 0$ ) условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} c_l^+(x; q) \\ s_l^+(x; q) \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} + q^{-1} \int_0^x dt V(t) F_l(\rho', \eta) \left\{ \begin{array}{l} + G_l(\rho', \eta) \\ - F_l(\rho', \eta) \end{array} \right\}; \quad (80)$$

$$\begin{aligned} c_l^-(x; q) &\sim c_l^-(x_0; q) + q^{-1} \int_{x_0}^x dt V(t) G_l^2(\rho', \eta), \\ s_l^-(x; q) &\sim 1 - q^{-1} \int_0^x dt V(t) F_l(\rho', \eta) G_l(\rho', \eta), \end{aligned} \quad (81)$$

обеспечивающими асимптотики (69) функций (74). В (80) и (81)  $\rho' \equiv tq$ ; если первый интеграл (81) существует при  $x_0 = 0$ , то полагается, что  $x_0 = 0$  и  $c_l^-(0; q) = 0$ , в противном случае параметр  $x_0$  выбирается так, чтобы выполнялись два неравенства:  $x_0 > x$  и  $x_0 q \ll 1$ .

Итак, для построения решений  $u_l^\pm$  исходной задачи (68)—(71) по формулам (74) и (75) необходимо решить задачи (79)—(81), а затем вычислить пределы при  $x \rightarrow \infty$  каждой функции (76)—(78).

Перейдем к построению низкоэнергетических разложений типа (72) для всех функций, связанных с исследуемой задачей (68)—(71).

Сначала рассмотрим случай  $V \equiv 0$ , когда  $u_l^+ = F_l$  и  $u_l^- = G_l$ . Перепишем формулу Ламберта ((3.25) из [52]) в виде

$$\begin{aligned} G_l(\rho, \eta) &= \tilde{G}_l(\rho, \eta) + h^c(q) F_l(\rho, \eta), \\ \tilde{G}_l(\rho, \eta) &\equiv \Theta_l(x, q) / C_l^2(q), \end{aligned} \quad (82)$$

$$C_l(q) \equiv q^l C_l(\eta), \quad h^c(q) \equiv h(\eta) / q C_0(q), \quad (83)$$

где  $C_l(\eta)$  и  $h(\eta)$  даны равенствами (22), а  $\Theta_l$  — целая функция  $q^2$ .

Известные ряды Бесселя — Клиффорда (см. формулы (14.4.1)—(14.4.4) в [1]) содержат полиномы  $b_n(\eta)$  параметра  $k^2$  и модифицированные функции Бесселя  $I_n(z)$  и  $K_n(z)$  переменной  $z \equiv 2x^{1/2}$ . Объединив в этих рядах слагаемые с одинаковыми степенями параметра  $k^2$ , получаем ряды типа (72):

$$F_l(\rho, \eta) = q C_l(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} f_{ln}(x), \quad \tilde{G}_l(\rho, \eta) = C_l^{-1}(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} g_{ln}(x), \quad (84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2f_{ln}(x) \\ (2l+1)g_{ln}(x) \end{array} \right\} \equiv 2^{-2n} \sum_{m=2n}^{3n} a_{nm} z^{m+1} \left\{ \begin{array}{l} I_{2l+m+1}(z) \\ (-1)^{-m} K_{2l+m+1}(z) \end{array} \right\}. \quad (85)$$

Здесь  $a_{nm}$  — энергонезависимые коэффициенты, подчиненные рекуррентным цепочкам ( $m = 2n, \dots, 3n$  для каждого  $n = 1, 2, \dots$ ) уравнений

$$2ma_{nm} + 2(2l+m)a_{n-1, m-2} + a_{n-1, m-3} = 0, \quad (86)$$

причем  $a_{00} \equiv 1$  и  $a_{nm} \equiv 0$ , если  $n > 0$  и  $m < 2n$  или же  $m > 3n$ .

Как известно [4], оценки [1]

$${}^{(M)}F_l(\rho, \eta) = O(q^{2M+3}C_l(q)), \quad {}^{(M)}\tilde{G}_l(\rho, \eta) = O(q^{2M+2}/C_l(q)) \quad (87)$$

остаточных членов разбиений (73) рядов (84) равномерны по  $\rho$ , если

$$\rho \ll \rho_l^c \equiv \eta [1 + (1 + l(l+1)/\eta)^{1/2}]. \quad (88)$$

Построим ряды типа (72) для амплитудных функций. Для этого подставим эти функции в виде искомых рядов

$$c_l^\pm(x; q) = \tilde{c}_l^\pm(x; q) - h^c(q) s_l^\pm(x; q), \quad (89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}_l^\pm(x; q) \\ s_l^\pm(x; q) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (qC_l^2(q))^{-(1 \pm 1)/2} \\ (qC_l^2(q))^{+(1 \pm 1)/2} \end{array} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} \left\{ \begin{array}{l} c_{ln}^\pm(x) \\ s_{ln}^\pm(x) \end{array} \right\} \quad (90)$$

в (75) и (79)—(81), а функции  $F_l$  и  $G_l$  представим в виде (82)—(86). Отделив  $q$  от  $x$  в полученных соотношениях, получаем представления

$$U_l^\pm(x; q) = q^{(1 \pm 1)/2} C_l^{\pm 1}(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^\pm(x),$$

$$U_{ln}^\pm(x) \equiv \sum_{m'+m=n} [c_{lm'}^\pm(x) f_{lm}(x) + s_{lm'}^\pm(x) g_{lm}(x)], \quad (91)$$

бесконечную ( $n = 0, 1, \dots$ ) цепочку энергонезависимых уравнений

$$\partial_x \left\{ \begin{array}{l} c_{ln}^\pm(x) \\ s_{ln}^\pm(x) \end{array} \right\} = V(x) \sum_{m'+m=n} U_{lm'}^\pm(x) \left\{ \begin{array}{l} + g_{lm}(x) \\ - f_{lm}(x) \end{array} \right\} \quad (92)$$

для искомых функций  $c_{ln}^\pm$  и  $s_{ln}^\pm$  и их асимптотики при  $x \rightarrow 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{ln}^+(x) \\ s_{ln}^+(x) \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} \hat{\delta}_{n0} \\ 0 \end{array} \right\} + \sum_{m'+m=n}^{\infty} \int_0^x dt V(t) f_{lm'}(t) \left\{ \begin{array}{l} + g_{lm}(t) \\ - f_{lm}(t) \end{array} \right\}; \quad (93)$$

$$\begin{aligned} c_{ln}^-(x) &\sim c_{ln}^-(x_0) + \sum_{m'+m=n}^{\infty} \int_{x_0}^x dt V(t) g_{lm'}(t) g_{lm}(t), \\ s_{ln}^-(x) &\sim \hat{\delta}_{n0} - \sum_{m'+m=n}^{\infty} \int_0^{x_0} dt V(t) f_{lm'}(t) g_{lm}(t). \end{aligned} \quad (94)$$

Если первый интеграл (94) существует при  $x_0 = 0$ , то полагается  $x_0 = 0$  и  $c_{ln}^-(0) = 0$ , в противном случае считается, что  $x < x_0 \ll 1$ .

Подставив  $U_l^{\pm}$  в виде (91) в (74), получаем искомые ряды

$$\begin{aligned} u_l^+(x; q) &= qC_l(q) N_l^+(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^+(x), \\ \tilde{u}_l^-(x; q) &= (C_l(q) N_l^+(q))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^-(x). \end{aligned} \quad (95)$$

Используя равенства (87), можно показать, что при условии (88) для остаточных членов разбиений (73) рядов (90) и (95) верны следующие оценки:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{(M)}\tilde{c}_l^{\pm}(x; q) \\ {}^{(M)}s_l^{\pm}(x; q) \end{array} \right\} = O \left( q^{2M+2} \left\{ \begin{array}{l} (qC_l^2(q))^{(-1 \pm 1)/2} \\ (qC_l^2(q))^{(+1 \pm 1)/2} \end{array} \right\} \right), \quad (96)$$

$${}^{(M)}u_l^{\pm}(x; q) = O(q^{2M+3} C_l(q)), \quad {}^{(M)}\tilde{u}_l^-(x; q) = O(q^{2M+2} / C_l(q)). \quad (97)$$

Перейдем к построению функций эффективного радиуса. Чтобы формулы имели компактный вид, введем два взаимосвязанных индекса  $a$  и  $a'$ . Символом  $A^{ca}(x, q)$  с индексом  $ca$ , где  $a = s, l, ls$ , обозначаем исследуемую функцию  $A(x, q)$ , характеризующую рассеяние соответствующей суперпозицией  $V^{ca}$  с  $a = s, l, ls$ . Символы типа  $A^{a'}(q)$  со штрихованным индексом  $a' = c, s; a = c, l; a' = cl, s$ , содержащим запятую, будут использоваться для обозначения вкладов  $\delta_l^{c,s}(k)$ ,  $\delta_l^{c,l}(k)$  и  $\delta_l^{cl,s}(k)$  в рассматриваемую полную фазу рассеяния  $\delta_l^{ca}(k)$ , функций эффективного радиуса  $K_l^{c,s}$  или  $K_l^{cl,s}$  и коэффициентов их разложений при  $q \rightarrow 0$ .

Сначала рассмотрим рассеяние суперпозицией  $V^{cs}$ . В этом случае  $V = V^s$ ,  $a = s$  и  $a' = c$ ,  $s$ . Используя (83), запишем кулон-ядерную функцию эффективного радиуса (21) в безразмерной форме

$$K_l^{a'}(q) \equiv R^{2l+1} K_l^{a'}(E). \quad (98)$$

Докажем асимптотическое представление

$$K_l^{a'}(q) = \sum_{n=0}^M q^{2n} K_{ln}^{a'} + O(q^{2M+2}), \quad M < \infty, \quad q \rightarrow 0 \quad (99)$$

и попутно выведем формулы для его трех первых коэффициентов:

$$\begin{aligned} K_{l0}^{a'} &= c_{l0}^{+ca(\infty)} / s_{l0}^{+ca(\infty)}, & K_{l1}^{a'} &= [c_{l1}^{+ca(\infty)} - K_{l0}^{a'} s_{l1}^{+ca(\infty)}] / s_{l0}^{+ca(\infty)}, \\ K_{l2}^{a'} &= [c_{l2}^{+ca(\infty)} - K_{l0}^{a'} s_{l2}^{+ca(\infty)} - K_{l1}^{a'} s_{l1}^{+ca(\infty)}] / s_{l0}^{+ca(\infty)} \end{aligned} \quad (100)$$

и соотношения

$$\begin{aligned} a_l^{a'} &= -R^{2l+1} / K_{l0}^{a'}, & r_{0l}^{a'} &= 2R^{1-2l} K_{l1}^{a'}, \\ P_l^{a'} &= -R^{3-2l} K_{l2}^{a'} / r_{0l}^{a'}, \end{aligned} \quad (101)$$

определяющие кулон-ядерные параметры рассеяния ( $a' = c, s$ ) как простые алгебраические комбинации (100) предельных ( $x \rightarrow \infty$ ) значений  $c_{ln}^{+ca(\infty)}$  и  $s_{ln}^{+ca(\infty)}$  решений  $c_{ln}^+$  и  $s_{ln}^+$  задач (92), (93) с  $V = V^s$  и  $n = 0, 1, 2$ .

Подставим  $c_l^+$  в виде разности (89) в (76). Ряды (90) для функций  $\tilde{c}_l^+$  и  $s_l^+$  запишем в виде (72), (73) и положим  $x \rightarrow \infty$ . Как было показано выше, в этом пределе функции  $c_{ln}^+$  и  $s_{ln}^+$  конечны и верны оценки (96). Поэтому предел функции (76) при  $x \rightarrow \infty$  дает следующее низкоэнергетическое ( $q \rightarrow 0$ ) представление:

$$\operatorname{ctg} \delta_l^{c, s}(q) = q^{-1} C_l^{-2}(q) \left[ \frac{\sum_{n=0}^M q^{2n} c_{ln}^{+ca(\infty)}}{M} + O(q^{2M+2}) \right] - h^c(q).$$

Из этого представления следуют формулы (99) и (101). Сравнив их со стандартным выражением (23), получаем соотношения (101). Согласно им

вычисление кулон-ядерных параметров рассеяния  $a_l^{c, s}$ ,  $r_{0l}^{c, s}$  и  $P_l^{c, s}$  сводится к последовательному ( $n = 0, 1, 2$ ) интегрированию трех энергонезависимых задач (92), (93) с  $V = V^s$ . В случае  $V = V^{ls}$  вычисление модифицированных параметров рассеяния усложняется.

Пусть теперь  $V = V^l + V^s$ , где  $V^s$  удовлетворяет (1), а  $V^l$  имеет асимптотику (3) с  $d \geq 3$ . Докажем, что функция

$$K_l^{cl, s}(q) = [C_l(q)N_l^{+cl}(q)]^2 [q \operatorname{ctg} \delta_l^{cl, s}(q) + q\alpha_l(q)] \quad (102)$$

связана с модифицированной функцией эффективного радиуса (64) соотношением (98) и имеет асимптотику (99) с коэффициентами (100), где теперь  $a = ls$ ,  $a' = cl$ ,  $s$ , а  $c_{ln}^{+cls}(\infty)$  и  $s_{ln}^{+cls}(\infty)$  — некоторые конечные величины, которые мы определим по ходу доказательства.

На его первом этапе находим *вспомогательные* функции  $u_l^{\pm cl}$ , определенные как решения  $u_l^{\pm}$  задач (68)—(71) при выключенном ядерном взаимодействии, т.е. когда  $V = V^l$ ,  $a = l$  и  $a' = c, l$ . Функции  $u_l^{\pm cl}$  и их низкоэнергетические разложения строим вышеизложенным методом. В итоге получаем

$$\begin{aligned} u_l^{+cl}(x; q) &= N_l^{+cl}(q) U_l^{+cl}(x; q), \\ u_l^{-cl}(x; q) &= \tilde{u}_l^{-cl}(x; q) + \alpha_l^{cl}(q) u_l^{+cl}(x; q), \\ \tilde{u}_l^{-cl}(x; q) &= N_l^{-cl}(q) U_l^{-cl}(x; q), \\ U_l^{\pm cl}(x; q) &\equiv c_l^{\pm cl}(x; q) F_l(\rho, \eta) + s_l^{\pm cl}(x; q) G_l(\rho, \eta); \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} u_l^{+cl}(x; q) &= qC_l(q)N_l^{+cl}(q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^{+cl}(x), \\ \tilde{u}_l^{-cl}(x; q) &= [C_l(q) N_l^{+cl}(q)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} U_{ln}^{-cl}(x), \end{aligned}$$

$$U_{ln}^{\pm cl}(x) \equiv \sum_{m'+m=n} [c_{lm'}^{\pm cl}(x) f_{lm}(x) + s_{lm'}^{\pm cl}(x) g_{lm}(x)]. \quad (104)$$

В (103)  $c_l^{\pm cl}$  и  $s_l^{\pm cl}$  означают решения  $c_l^{\pm}$  и  $s_l^{\pm}$  задач (79)—(81) с  $V = V^l$ , а множители  $N_l^{\pm cl}(q)$  и  $\alpha_l^{cl}(q)$  равны пределам при  $x \rightarrow \infty$  соответствующих



функций (77) и (78). Функции  $c_{ln}^{\pm cl}$  и  $s_{ln}^{\pm cl}$ , содержащиеся в (104), означают решения  $c_{ln}^{\pm}$  и  $s_{ln}^{\pm}$  задач (92)—(94) с  $V = V^l$ .

Перейдем к следующему этапу ( $a = ls$ ,  $a' = cl, s$ ) и построим регулярное решение  $u_l^{+cls}$  исходной задачи (68)—(70) с  $V = V^{ls}$  в рамках обобщенной линейной версии метода фазовых функций [11] следующим образом. Сначала запишем асимптотику (70) функции  $u_l^{+ca}$  с  $a = ls$  в виде, отвечающем разбиению (55) полной фазы рассеяния:

$$u_l^{+cls}(x; q) \sim \cos \delta_l^{cl, s}(q) u_l^{+cl}(x; q) + \sin \delta_l^{cl, s}(q) u_l^{-cl}(x; q) \sim \\ \sim \sin(\rho - \eta \ln 2\rho + \delta_l^{cl}(q) + \delta_l^{cl, s}(q)), \quad qx \rightarrow \infty. \quad (105)$$

Функции (103), подчиненные в силу (70) соотношению Вронского

$$u_l^{-cl}(x; q) \partial_x u_l^{+cl}(x; q) + u_l^{+cl}(x; q) \partial_x u_l^{-cl}(x; q) = q, \quad x \in \mathcal{R}^+, \quad (106)$$

используем теперь как эталонные вместо  $F_l$  и  $G_l$ , а  $u^{+cls}$  ищем в виде

$$u^{+cls}(x; q) = N_l^{+cls}(q) U_l^{+cls}(x; q),$$

$$U_l^{+cls}(x; q) \equiv c_l^{+cls}(x; q) u_l^{+cl}(x; q) + s_l^{+cls}(x; q) u_l^{-cl}(x; q), \quad (107)$$

где неизвестные обобщенные амплитудные функции  $c_l^{+cls}$  и  $s_l^{+cls}$  подчинены по определению тождеству Лагранжа

$$\partial_x c_l^{+cls}(x; q) u_l^{+cl}(x; q) + \partial_x s_l^{+cls}(x; q) u_l^{-cl}(x; q) \equiv 0, \quad x \in \mathcal{R}^+. \quad (108)$$

Подставив (107) в (68)—(70) и учтя (106) и (108), выводим уравнения

$$\partial_x \begin{Bmatrix} c_l^{+cls}(x; q) \\ s_l^{+cls}(x; q) \end{Bmatrix} = q^{-1} V^s(x) U_l^{+cls}(x; q) \begin{Bmatrix} + u_l^{-cl}(x; q) \\ - u_l^{+cl}(x; q) \end{Bmatrix} \quad (109)$$

с простыми начальными условиями:  $c_l^{+cls}(0; q) = 1$ ,  $s_l^{+cls}(0; q) = 0$ . Асимптотики функций (107) при  $x \rightarrow \infty$  будут иметь нужный вид (105), если положить по определению

$$\operatorname{ctg} \delta_l^{cl, s}(q) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} c_l^{+cls}(x; q) / s_l^{+cls}(x; q). \quad (110)$$

Используя разложения (104) и анзац

$$c_l^{+cls}(x, q) = \tilde{c}_l^{+cls}(x, q) - \alpha_l^{cl}(q) s_l^{+cls}(x, q), \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_l^{+cls}(x; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} c_{ln}^{+cls}(x), \\ s_l^{+cls}(x; q) &= q [C_l(q) N_l^{+cl}(q)]^2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} s_{ln}^{+cls}(x), \end{aligned} \quad (112)$$

сводим задачу (109) к рекуррентной ( $n = 0, 1, \dots$ ) цепочке зацепляющихся пар энергонезависимых уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x \left\{ \begin{array}{l} c_{ln}^{+cls}(x) \\ s_{ln}^{+cls}(x) \end{array} \right\} &= V^s(x) \sum_{m'+m=n} U_{lm'}^{+cls}(x) \left\{ \begin{array}{l} + U_{lm}^{-cl}(x) \\ - U_{lm}^{+cl}(x) \end{array} \right\}, \\ U_{ln}^{+cls}(x) &\equiv \sum_{m'+m=n} [U_{lm'}^{+cl}(x) c_{lm}^{+cls}(x) + U_{lm'}^{-cl}(x) s_{lm}^{+cls}(x)] \end{aligned} \quad (113)$$

для функций  $c_{ln}^{+cls}$  и  $s_{ln}^{+cls}$  таких, что  $c_{ln}^{+cls}(0) = \hat{\delta}_{n0}$  и  $s_{ln}^{+cls}(0) = 0$ . Методом итераций [2] можно показать, что все эти функции ограничены на  $\mathcal{R}^+$ , если  $V^s$  удовлетворяет (1). Подставив  $c_l^{+cls}$  в виде (111) в (110) и положив  $x \rightarrow \infty$ , приходим к соотношению, которое переписывается в виде формулы (102), определяющей безразмерную функцию  $K_l^{cl,s}$  через функции  $\tilde{c}_l^{+cls}$  и  $s_l^{+cls}$ , взятые при  $x = \infty$ . Разбив ряды (112) на слагаемые типа (73) и используя оценки (97) для конечных сумм рядов (104), доказываем соотношения (99) и (100), где  $a = ls$ ,  $a' = cl$ ,  $s$ , а  $c_{ln}^{+cls}(\infty)$  и  $s_{ln}^{+cls}(\infty)$  означают предельные значения решений задач (113). Сравнив (64) с (102), получаем связи

$$C_l^{cl}(\eta) = C_l(q) N_l^{+cl}(q), \quad h_l^{cl}(\eta) = k\alpha_l^{cl}(q) \quad (114)$$

и формулы (101), определяющие модифицированные параметры рассеяния в рассмотренном случае  $a = ls$ ,  $a' = cl$ ,  $s$ . Согласно (99), (101) и (102) формула для ядерной длины рассеяния имеет вид

$$a_l^{cl,s} \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \text{tg } \delta_l^{cl,s}(k) / k [k^l C_l(\eta) N_l^{+cl}(k)]^2$$

и отличается от приближенного соотношения (67), полученного в [46], наличием множителя  $N_l^{+cl}$ . Последний близок к единице, если  $V^l$  достаточно мал (см. оценки (37) работы [48]). Только в этом случае формула (67) дает правдоподобное, но тем не менее *приближенное* значение длины  $a_l^{cl,s}$ .

Как было показано выше, для вычисления  $C_l^{cl}$  и  $h_l^{cl}$  из (64) посредством формул (114) сначала решаются задачи (79), (80) с  $V = V^l$ . Последующее

вычисление модифицированных параметров рассеяния сводится к решению трех ( $n = 0, 1, 2$ ) энергонезависимых и рекуррентных задач (92)—(94) с  $V = V^l$  и трех ( $n = 1, 2, 3$ ) задач (113). Все упомянутые задачи — системы линейных дифференциальных уравнений с простыми граничными условиями, практическое решение которых с высокой точностью не вызывает каких-либо затруднений. В предложенном методе вычисление параметров ядерного рассеяния центральным потенциалом  $V^s$  в поле  $V^{cl}$  не требует никаких предположений о малости  $V^l$ , но позволяет исследовать лишь модельное рассеяние в системах из двух нуклонов или ядер. Дело в том, что, согласно современным представлениям, сугубо ядерное  $NN$ -взаимодействие не является центральным потенциалом, хотя координатная зависимость всех его компонент описывается короткодействующими потенциалами с асимптотиками (1).

Сначала эмпирически [15], а затем и в рамках мезонной теории [16] было установлено, что реалистическое  $NN$ -взаимодействие должно содержать наряду со сферически-симметричной компонентой спин-орбитальное и тензорное слагаемые. В настоящее время наиболее обоснованными теоретически и позволяющими описать широкую совокупность данных по  $NN$ - и  $3N$ -системам считаются парижский [53], боннский [54], ниджеменгенский [55] и урбана-арагонский [56] потенциалы. Имеется и серия гибридных потенциалов, полученных в рамках кварковых моделей и отражающих обмен мезонами [57]. Исследованию вкладов  $\pi\pi$ - и  $\pi\rho$ -обменов в  $NN$ -взаимодействие была посвящена недавняя работа [58]. Несмотря на обилие версий  $NN$ -потенциалов, построение теории ядерных сил и уточнение представлений о природе этих сил продолжается. Важным аспектом этого построения является вывод низкоэнергетических разложений характеристик  $NN$ -рассеяния суперпозициями  $V^{ls}$  и  $V^{cls}$  с реалистическим ядерным потенциалом и электромагнитной поправкой  $V^l$ . Чтобы пояснить почему, напомним результаты старых исследований эффектов нарушения зарядовой симметрии  $NN$ -сил и проанализируем, как уточнялись величины параметров низкоэнергетического  $NN$ -рассеяния.

### 3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ $NN$ -РАССЕЯНИЕ

В 1932 г. Гейзенберг [59] ввел понятие изоспина прежде всего в качестве изящного счетного средства. Согласно этому понятию нейтрон и протон — два проявления одной и той же частицы нуклона, имеющей по определению изоспин  $1/2$ , причем нейтрон обладает проекцией изоспина  $-1/2$ , а протон — проекцией изоспина  $+1/2$ . Однако два таких состояния

физически различимы за счет заряда протона и разницы масс нейтрона и протона. Поэтому не очевидно, что понятие изоспина как негеометрической (изоспиновой) симметрии имеет истинный смысл. С экспериментальной точки зрения следствие такой симметрии состоит в эквивалентности (зарядовой независимости) ядерных  $pp$ -,  $np$ - и  $nn$ -взаимодействий. Равенство  $pp$ - и  $nn$ -взаимодействий (зарядовая симметрия) — менее ограниченное понятие. Вопрос об источниках нарушения зарядовой симметрии и эффектах, обусловленных таким нарушением, остается одной из фундаментальных проблем современной теории атомного ядра и элементарных частиц. Зарядовая симметрия нарушается электромагнитным и слабым взаимодействиями, подразумевающими наличие разных по цвету кварков ( $u, d, s, c, \dots$ ). Другой источник нарушения этой симметрии — разница масс  $u$ - и  $d$ -кварков, приблизительно равная 3 МэВ.

Одно из известных [60—63] с начала 60-х гг. указаний на  $nn$ - и  $pp$ -асимметрию ядерного взаимодействия — разница масс зеркальных ядер  ${}^3\text{H}$  и  ${}^3\text{He}$  — называется аномалией Окамото — Нолена — Шиффера. В 1971 г. Нигил [64] объяснил ее в рамках предположения о том, что ядерное  $NN$ -взаимодействие зарядово-несимметрично, а именно ядерное  $nn$ -взаимодействие  $V_{nn}^s$  является немного более притягивающим ( $|V_{nn}^s| > |V_{pp}^s|$ ), чем ядерное  $pp$ -взаимодействие  $V_{pp}^s$ . После такого предположения было построено несколько первых версий [65—68] зарядово-несимметричных ядерных  ${}^1S_0$ -потенциалов, учитывающих  $\rho\omega$ - и  $\pi^0\eta$ -смешивания. Последовавшее использование таких потенциалов позволило объяснить основные эффекты, обусловленные нарушением  $NN$ -зарядовой симметрии в ядрах  ${}^3\text{H}$  и  ${}^3\text{He}$ : разницу их масс [69] и различие энергетических зависимостей упругих факторов [70].

Экспериментальное и теоретическое исследования эффектов нарушения зарядовой симметрии в низкоэнергетическом  $NN$ -рассеянии — довольно сложная задача. Протоны заряжены, поэтому их легче ускорять и детектировать, чем нейтроны. Измерения характеристик  $pp$ -столкновения пока является лучшим источником количественной информации о ядерных силах при не очень низких энергиях ( $E_{\text{lab}} > 10$  МэВ). С уменьшением энергии постановка  $pp$ -эксперимента все более затрудняется из-за отталкивающего кулоновского барьера, сильно подавляющего вероятность сближения протонов в области действия ядерных сил. Кулоновское взаимодействие усложняет и теоретический анализ [71—74] экспериментальных  $pp$ -данных. Этот анализ становится еще более громоздким при уменьшении энергии  $pp$ -столкновения из-за возрастающей роли [75,76] различных электромагнитных поправок. В  $np$ -системе, в отличие от  $pp$ - и  $nn$ -систем, возможны два типа

состояний: синглетное и триплетное по полному изоспину. Необходимость учета обоих этих состояний — основная причина, по которой анализ экспериментальных  $np$ -данных и теоретическое определение по ним параметров низкоэнергетического  $np$ -рассеяния — задачи несравненно более сложные, чем в случае  $pp$ - или  $nn$ -столкновений. Непосредственное наблюдение  $nn$ -столкновения еще не было осуществлено, хотя реальная схема  $nn$ -эксперимента в нейтронном пучке обсуждалась в [77]. Пока для экспериментального определения параметров  $nn$ -рассеяния нет иного способа, как анализ кинематики системы из трех и более частиц в конечном состоянии, например,  $D(\pi^-, \gamma) 2n$ ,  $D(n, nn) p$ ,  $D(t, {}^3\text{He}) 2n$ ,  $D(\mu^-, \nu_\mu) 2n$ . Однако любое теоретическое описание системы из трех и более частиц с сильным взаимодействием требует моделирования задачи и, как правило, приближенного алгоритма ее решения. Оба эти приближения, логическое и численное, неизбежно вносят множество трудноконтролируемых теоретических неопределенностей. Пренебрежение ими может привести к неверному заключению. Представляется полезным привести пример, подтверждающий это утверждение.

В литературе 70-х гг. (см. обзор [78]) часто приводилось значение  ${}^1S_0$ -длины  $nn$ -рассеяния  $a_{nn}^s = (-16,6 \pm 0,6)$  фм, полученное простым усреднением многочисленных данных о реакции  $D(n, nn) p$ . При усреднении теоретические неопределенности обработки этого эксперимента с тремя адронами в конечном состоянии не учитывались, и усредненное значение оказалось меньше по абсолютной величине  ${}^1S_0$ -длины  $pp$ -рассеяния  $a_{pp}^{c,s} = (-17,1 \pm 0,2)$  фм, извлеченной из  $pp$ -данных [79]. Как выяснилось позже (см. [80]), именно вследствие этого неучета среднее значение  $a_{nn}^s = (-16,6 \pm 0,6)$  фм, как и более поздний результат  $a_{nn}^s = (-16,9 \pm 0,6)$  фм исследования [81] реакции  $D(n, nn) p$  недостоверны. Оба эти значения противоречат предположению Нигела о том, что  $|V_{nn}^s| > |V_{pp}^s|$  и не согласуются с величиной  $a_{nn}^s = (-18,5 \pm 0,4)$  фм, полученной в [82,83] с помощью полного кинематического анализа фотонного спектра реакции  $D(\pi^-, \gamma) 2n$ , измеренного с большой статистикой. Исследование этой реакции представляет особый интерес, потому что в ее конечном состоянии можно детектировать все три частицы, из которых только две взаимодействуют посредством ядерных сил. Последнее обстоятельство особенно важно: оно предоставляет редкую возможность исследовать все кинематические области, что позволяет определить не только длину  $a_{nn}^s$ , но и эффективный радиус  $r_{nn}^s$  синглетного  $nn$ -рассеяния. Реакция  $D(\pi^-, \gamma) 2n$

привлекательна и с теоретической точки зрения. Действительно, начальное состояние этой реакции можно описать в рамках трехчастичных дифференциальных уравнений Фаддеева, а исследование ее конечного состояния сводится к решению простой задачи двух тел (нейтронов). По этим причинам все теоретические неопределенности анализа  $D(\pi^-, \gamma) 2n$ -данных сводятся до минимума, что позволяет определить параметры  $nn$ -рассеяния с большей точностью и достоверностью, чем из данных по реакциям с тремя адронами в конечном состоянии. В 1987 г. Терамонд и Габиоуд [80], тщательно исследовав взаимодействие нейтронов в конечном состоянии реакции  $\pi^-D$ -захвата, подтвердили ранее измеренные [83] значения  $a_{nn}^s = (-18,5 \pm 0,4)$  фм и  $r_{nn}^s = (2,80 \pm 0,11)$  фм. К 1992 г. наиболее достоверными считались [84] величины  $a_{nn}^s = (-18,5 \pm 0,4)$  фм и  $r_{nn}^s = (2,75 \pm 0,11)$  фм, полученные усреднением всех накопившихся к тому времени данных [85—87], а длину  $pp$ -рассеяния было принято [87] считать равной  $a_{pp}^{c,s} = (-17,3 \pm 0,3)$  фм. Упомянутые выше значения длин согласуются с неравенством  $|V_{nn}^s| > |V_{pp}^s|$  и позволяют объяснить аномалию Окамото — Нолена — Шиффера: если положить разность  $a_{pp}^{c,s} - a_{nn}^s$  равной 1,3 или 1,5 фм, то для разности масс ядер  ${}^3\text{H}$  и  ${}^3\text{He}$  получатся [88] соответствующие величины 59 и 63 кэВ, сравнимые с ее экспериментальным [89] значением  $(62 \pm 3)$  кэВ.

В результате тщательного исследования [90] экспериментальных данных [91] о реакции  $D(n, nn)p$ , выполненного к 1993 г. в рамках  $W$ -матричного AGS-метода [92] с модифицированным парижским  $NN$ -потенциалом [53], было получено значение  $a_{nn}^s = (-17,0 \pm 1,0)$  фм.

Как следует из приведенного выше хронологического обзора, в течение трех последних десятилетий значения  ${}^1S_0$ -параметров низкоэнергетического  $nn$ -рассеяния постоянно уточнялись. В настоящее время понятно, как можно достичь еще большей точности в экспериментальном [80] и теоретическом [90] определении таких  $S$ -волновых параметров. При энергиях  $E_{\text{lab}} < 20$  МэВ вклад  $S$ -фаз в сечения  $NN$ -рассеяния является доминирующим, что существенно затрудняет экспериментальное определение энергетической зависимости  ${}^3P_j$ -фаз ( $j = 0, 1, 2$ ) в этой области энергий. Вторая причина, по которой  ${}^3P_j$ -фазы экспериментально исследованы лишь при  $E_{\text{lab}} > 10$  МэВ, состоит в том, что для их однозначного определения требуется измерить пять независимых  $NN$ -амплитуд [71,73,75]. Измерение лишь

двух таких амплитуд даже при достаточно больших энергиях, например [93]  $np$ -спиновых наблюдаемых  $K_{osko}$  и  $K_{osso}$  при энергиях 230—530 МэВ, представляет трудную экспериментальную задачу. Как отмечено в [84], данные о всех пяти  $NN$ -наблюдаемых в настоящее время неизвестны и вряд ли будут доступны в ближайшем будущем. В связи с такой экспериментальной ситуацией теоретическое определение  $P$ -волновых ( $l = 1$ ) параметров  $NN$ -рассеяния и развитие надежного метода экстраполяции  ${}^3P_j$ -фаз в область низких энергий представляются особенно актуальными задачами. Их решение позволило бы уточнить строение и величину  $P$ -волновых слагаемых современных  $NN$ -потенциалов. Такое уточнение необходимо как для обработки экспериментальных данных о реакциях  $D(\pi^-, \gamma) 2n$  и  $D(n, nn) p$ , так и для надежного теоретического описания  $Nd$ -спиновых наблюдаемых, в частности,  $pd$ -анализирующей способности  $A_{y, pd}$ , которая, в отличие от  $NN$ -анализирующей способности  $A_{y, NN}$ , чрезвычайно чувствительна к величине  $P$ -волновых слагаемых  $NN$ -взаимодействия. Например [84], для правдоподобного описания в рамках задачи трех тел угловой зависимости  $A_{y, pd}(\theta; E)$ , измеренной [94] при энергиях 5,0 и 8,5 МэВ, необходимо модифицировать модель боннского потенциала [54] умножением его  ${}^3P_0$ -слагаемых на заметно отличный от единицы фактор, равный 1,04, 0,86 и 0,75 для  $np$ -,  $pp$ - и  $nn$ -взаимодействий [95] соответственно. Приведем несколько аргументов, позволяющих надеяться, что альтернативным к такой эмпирической модификации способом может оказаться корректный учет электромагнитных поправок к ядерному  $NN$ -потенциалу.

С давних пор исследование роли таких поправок в  $NN$ -столкновениях является одной из задач фазового анализа экспериментальных  $NN$ -данных. Еще в 1950 г. Швингер [96] обратил внимание на то, что контактные, короткодействующие части взаимодействия магнитных моментов нейтрона с протоном и протона с протоном в  ${}^1S_0$ -состояниях отличны друг от друга как по абсолютной величине, так и по знаку:

$$V_{np}^{\delta}(\mathbf{r}) = 4\pi\mu_n(2\mu_p - \mu_0) \delta(\mathbf{r}) < 0,$$

$$V_{pp}^{\delta}(\mathbf{r}) = 2\pi [(2\mu_p^2 - \mu_0^2) + \mu_0^2] \delta(\mathbf{r}) > 0, \quad (115)$$

где  $\mu_n = -1,913\mu_0$  и  $\mu_p = 2,793\mu_0$  — магнитные моменты нейтрона и протона,  $\mu_0 \equiv e\hbar/2m_Nc$  — ядерный магнетон, а  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция. Швингер предположил, что короткодействующие части  $np$ - и  $pp$ -взаимодействий — суперпозиции  $V_{np}^{s\delta} = V^Y + V_{np}^{\delta}$  и  $V_{pp}^{s\delta} = V^Y + V_{pp}^{\delta}$  одинаковых, сугубо ядер-

ных юкавских потенциалов (2) и поправок (115). Оценив вклады  $a_{np}^{s\delta} - a_{np}^s$  и  $a_{pp}^{c, \delta s} - a_{pp}^{c, s}$  от этих поправок в длины  $a_{np}^{s\delta}$  и  $a_{pp}^{c, \delta s}$  синглетного  $np$ - и  $pp$ -рассеяния предположенными им суперпозициями, Швингер показал, что это предположение вполне объясняет известное в его время различие между короткодействующими частями  $np$ - и  $pp$ -взаимодействий.

Так же давно, по-видимому, с 1955 г., известно [97], что учет потенциала поляризации вакуума [98]

$$V^v(r) = \frac{2e^2}{3\pi\hbar c} V^c(r) \int_1^\infty dt \exp(-tr/\lambda_e) t^{-4}(2t^2 + 1)(t^2 - 1)^{1/2} \quad (116)$$

позволяет существенно улучшить фит энергетической зависимости  $^1S_0$ -фазы  $pp$ -рассеяния при низких ( $E_{lab} < 10$  МэВ) энергиях. Потенциал (116) является короткодействующим:

$$V^v(r) \sim (3\sqrt{2\pi}/4) t^{-3/2} \exp(-t), \quad \lambda_e \equiv \hbar/2m_e c, \quad t \equiv r/\lambda_e \rightarrow \infty,$$

но из-за большой комптоновской длины электрона ( $\lambda_e \approx 193$  фм) убывает более медленно, чем ядерное  $pp$ -взаимодействие, радиус действия которого  $r_s \approx 4$  фм. Поэтому даже при низких энергиях фазами  $\delta_l^{c, v}(k)$  с  $l > 0$  нельзя пренебречь при анализе  $pp$ -рассеяния. Как показал Дуранд [98], для того, чтобы извлечь правильное значение ядерной  $^1S_0$ -фазы из экспериментальных  $pp$ -данных, необходимо реализовать следующую, основанную на формулах (26)—(32) и (55), процедуру.

Сначала из экспериментально найденной полной амплитуды  $f^{cvS}(\theta; k)$  синглетного  $pp$ -рассеяния суперпозицией  $V^{cvS} \equiv V^c + V^v + V^s$  вычитается симметризованная «электрическая» амплитуда

$$f^{cv}(\theta; k) \equiv f^c(\theta; k) + f^c(\pi - \theta; k) + f^{c, v}(\theta; k) + f^{c, v}(\pi - \theta; k). \quad (117)$$

При этом кулоновская амплитуда вычисляется по формуле (30), а амплитуда рассеяния  $f^{c, v}$  потенциалом (116) в кулоновском поле, определенная формулами (31) и (32) с  $a = v$ , аппроксимируется следующим соотношением:

$$f^{c, v}(\theta; k) \sim k^{-1} \sum_{l=0}^6 (2l+1) \delta_l^{c, v}(k) \exp(2i\delta_l^c(k)) P_l(\cos \theta), \quad k \rightarrow 0. \quad (118)$$

Полученная разностная симметризованная амплитуда  $f^{cv, s}$  рассеяния потенциалом  $V^s$  в «электрическом» поле  $V^{cv} \equiv V^c + V^v$  заменяется ее удвоенной  $S$ -волновой компонентой  $f_0^{cv, s}$ :



$$\begin{aligned}
 f^{cv, s}(\theta; k) &= f^{cvs}(\theta; k) - f^{cv}(\theta; k) \approx 2f_0^{cv, s}(k) \equiv \\
 &\equiv (ik)^{-1} \exp(2i\delta_0^{c, v}(k)) [\exp(2i\delta_0^{cv, s}(k)) - 1] \approx \\
 &\approx 2k^{-1} \exp(2i\delta_0^{c, v}(k)) \delta_0^{cv, s}(k).
 \end{aligned} \tag{119}$$

Таким образом определяется экспериментальное значение  $^1S_0$ -фазы  $\delta_0^{cv, s}(k)$ , порождаемой только ядерным потенциалом  $V^s$  при рассеянии в поле  $V^{cv}$ .

Реализовав упомянутую выше процедуру, Хеллер [99] показал, что если при анализе  $^1S_0$ -волновой  $pp$ -функции эффективного радиуса пренебречь потенциалом (116), то значение параметра формы  $P_0^{c, s}$  окажется в 0,02 раза меньше величины модифицированного параметра формы  $P_0^{cv, s}$ , получаемой при учете потенциала (116) в рамках борновского приближения по формулам (117)—(119).

В 1949 г. Швингер [100] показал, что взаимодействие (56) магнитного момента  $\mu$  нейтрона с кулоновским полем ядра обуславливает расходимость нейтрон-ядерного дифференциального сечения при рассеянии вперед. Впоследствии этот эффект неоднократно исследовался теоретически и экспериментально [18]. В серии работ [101—103], выполненных в 50 гг., было показано, что учет взаимодействия (56) магнитного момента одного протона с кулоновским полем другого в плосковолновом борновском приближении заметно улучшает фит экспериментальных значений анализирующей  $pp$ -способности  $A_{y, pp}(\theta; E)$  при больших энергиях ( $E_{lab} > 150$  МэВ) и малых углах ( $\theta < 15^\circ$ ). Для удовлетворительного фита значений функции  $A_{y, pp}(\theta; E)$ , измеренных [104] к 1975 г. при более низкой энергии ( $E_{lab} = 10$  МэВ), авторам работы [105] пришлось учесть эффекты кулоновского искажения путем замены в борновском по поправке (56) приближении плоских волн регулярными функциями Кулона. Получившееся приближение стало традиционным и до сих пор применяется для учета взаимодействий (56), (57) и (116) при фазовом анализе  $pp$ -данных. Используя это приближение, Стокс и де Сварт [75] в 1990 г. показали, что включение  $pp$ -поправки (56) позволяет согласовать вычисленную ими угловую зависимость функции  $A_{y, pp}(\theta; E)$  с ее экспериментально измеренной [106, 107] при двух значениях энергии:  $E_{lab} = 9,75$  МэВ и  $E_{lab} = 5,05$  МэВ. Оказалось, что в первом случае учет поправки (56) улучшает согласие в области  $\theta < 30^\circ$ , а во втором — при всех  $\theta < 90^\circ$ . Следовательно, верхняя граница интервала углов рассеяния, где включение поправки (56) заметно изменяет функцию  $A_{y, pp}(\theta; E)$ , увеличивается с уменьшением энергии. Сравнение функций

$A_{y, pp}(\theta; E)$  и  $A_{y, np}(\theta; E)$ , изображенных на рис.1 и 2 работы [75], показывает, что влияние взаимодействия (56) магнитного момента нейтрона с кулоновским полем протона на угловую зависимость функции  $A_{y, np}(\theta; E)$ , измеренную в [108] при энергии  $E_{lab} = 10,03$  МэВ, близкой к энергии  $E_{lab} = 9,75$  МэВ, сказывается в более широком интервале углов, а именно при  $\theta < 60^\circ$ . Измерения функций  $A_{y, NN}(\theta; E)$  и  ${}^3P_j$ -фаз  $NN$ -рассеяния при более низких энергиях особенно интересно потому, что поправки (56) и (57) радикально меняют поведение этих наблюдаемых в низкоэнергетическом пределе. В результате этого изменения общепринятые [17] определения  ${}^3P_j$ -длин  $NN$ -рассеяния, называемых также объемами  $NN$ -рассеяния, теряют смысл. Доказательство этого важного утверждения начнем с триплетного  $pp$ -рассеяния.

Пусть  $\delta_{l,j}^{c,ms}(k)$  — разность между полной фазой  $\delta_{l,j}^{c,ms}(k)$  рассеяния суперпозицией  $V_{pp}^{c,ms} \equiv V^c + V_{ls}^m + V^s$  и кулоновской фазой  $\delta_l^c(k)$ ,  $l = j$ . В силу (59) и (62)

$$\delta_{1,j}^{c,ms}(k) \sim -3^{-1}[j(j+1) - 4] R^2 V_{ls,0}^m k^3, \quad k \rightarrow 0.$$

Следовательно,  ${}^3P_j$ -фазы  $\delta_{1,j}^{c,ms}(k)$  убывают при  $k \rightarrow 0$  гораздо медленнее, чем кулон-ядерные  ${}^3P_j$ -фазы  $\delta_{1,j}^{c,s}(k)$ . Поэтому  ${}^3P_j$ -объем  $pp$ -рассеяния  $a_{1,j}^{c,ms}$ , определенный по аналогии с кулон-ядерным объемом (24), т.е. как

$$a_{1,j}^{c,ms} = - \lim_{k \rightarrow 0} \text{tg } \delta_{1,j}^{c,ms}(k) / k^3 C_1^2(\eta),$$

равен бесконечности при любом  $j = 0, 1, 2$ .

Как было доказано в [109,110], поправка (57) к ядерному  $nn$ -взаимодействию обуславливает линейное по  $k$  убывание  ${}^3P_j$ -фаз

$$\delta_{1,j}^{ms}(k) \sim \frac{(-1)^{j+1} \mu_n^2 m_n k}{\max\{1, j\} (2j+1 - j \hat{\delta}_{1j})}, \quad k \rightarrow 0,$$

$nn$ -рассеяния суперпозицией  $V^{ms} = V^m + V^s$ . Значит, определение

$$a_{1,j}^{ms} = - \lim_{k \rightarrow 0} k^{-3} \text{tg } \delta_{1,j}^{ms}(k) \quad (120)$$

${}^3P_j$ -объема  $nn$ -рассеяния, аналогичное стандартному определению (4), приводит к равенству  $|a_{1,j}^{ms}| = \infty$ .

Применив способ работы [110] для анализа триплетного  $np$ -рассеяния суперпозицией  $V^{ms} = V_{ls}^m + V^s$ , можно показать, что все  ${}^3P_j$ -фазы  $\delta_{1,j}^{ms}(k)$  такого рассеяния имеют линейные по  $k$  асимптотики

$$\delta_{1,j}^{ms}(k) \sim -2^{-3}[j(j+1) - 4] V_{ls,0}^m k, \quad k \rightarrow 0. \quad (121)$$

Следовательно,  $np$ -пределы (120) с  $j = 0, 1, 2$  бесконечны, а параметризация

$$k^3 \operatorname{ctg} \Delta_{ls}^{ms}(k) = -1/a_{ls}^{ms},$$

использованная в [75] для фита энергетической зависимости комбинации

$$12\Delta_{ls}^{ms}(k) \equiv -2\delta_{1,0}^{ms}(k) - 3\delta_{1,1}^{ms}(k) + 5\delta_{1,2}^{ms}(k) \quad (122)$$

${}^3P_j$ -фаз  $np$ -рассеяния, неприменима при  $k \rightarrow 0$ , когда параметр  $a_{ls}^{ms}$  становится бесконечным. В силу формул (121) и (122) в этом пределе известное равенство [111]

$$(d\sigma_{np}^{ms}(\theta; E)/d\theta) A_{y,np}^{ms}(\theta; E) = [\sin \delta_0^s(k)/2k]^2 12\Delta_{ls}^{ms}(k) \sin \theta$$

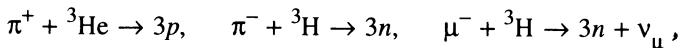
превращается в асимптотическое соотношение

$$(d\sigma_{np}^{ms}(\theta; E)/d\theta) A_{y,np}^{ms}(\theta; E) \sim (-3/4) (a_0^s)^2 V_{ls,0}^m k \sin \theta, \quad k \rightarrow 0,$$

связывающее дифференциальное сечение и анализирующую способность  $np$ -рассеяния с его  ${}^1S_0$ -длиной  $a_0^s$  и константой  $V_{ls,0}^m$  взаимодействия (56).

Итак, при  $k \rightarrow 0$  поведение всех  ${}^3P_j$ -фаз  $pp$ -,  $np$ - или  $nn$ -рассеяния не зависит от ядерного взаимодействия и целиком определяется соответствующими поправками (56) или (57). Этот факт необходимо учитывать как при экстраполяции  ${}^3P_j$ -фаз к нулевой энергии, так и для *корректного* описания характеристик медленных столкновений в трехнуклонных системах. Такое математически строгое описание необходимо и по другим, не менее важным причинам. Поясним некоторые из них.

Как известно [14], волновые функции непрерывного спектра, описывающие конечное состояние в реакциях полного развала



сильно изменяются при учете взаимодействия между всеми продуктами реакции, и соответствующие сечения оказываются достаточно критичными к выбору типа парных взаимодействий. Поэтому исследования таких разва-

лов и совместный анализ столкновений ( $2 \rightarrow 2,3$ ) и ( $3 \rightarrow 3$ ) в системе из трех нуклонов или ядер представляется эффективным способом отбора наиболее реалистичного варианта  $NN$ -сил. Построение теории низкоэнергетических ядерных процессов ( $2 \rightarrow 2,3$ ) и ( $3 \rightarrow 3$ ) особо важно и интересно и с прикладной точки зрения, а именно как способ решения многих задач ядерной астрофизики и термоядерного синтеза. Два подхода к созданию такой теории обсуждаются в следующем разделе.

#### 4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

В работах, посвященных этой задаче, традиционно используются не только различные обозначения координат, квантовых чисел, волновых векторов и мультииндексов, но и различные анзацы для вспомогательных функций. Поэтому обсуждение низкоэнергетических разложений, полученных разными авторами, не представляется возможным без введения единых и по возможности наиболее компактных обозначений. Введем такие обозначения для системы трех бесспиновых частиц с потенциалами  $V_i$ , действующими в каждой из трех ( $i = 1, 2, 3$ ) пар частиц и обладающими сферической симметрией:  $V_i(\mathbf{x}_i) = V_i(x_i)$ . Квантовые состояния такой системы характеризуются наборами  $\varepsilon = \{l, m, E, \sigma\}$  четырех сохраняющихся квантовых чисел. Ими являются полный угловой момент  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{x_i} + \mathbf{I}_{y_i}$ , его третья проекция  $m$ , квадрат  $E$  шестимерного импульса  $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i)$  и четность  $\sigma = \pm 1$  относительно инверсии  $\mathbf{r}_i \rightarrow -\mathbf{r}_i$  любого ( $i = 1, 2, 3$ ) шестимерного вектора  $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ , компоненты которого — трехмерные приведенные вектора Якоби. По определению вектору  $\mathbf{x}_i$  сопряжен угловой момент  $\mathbf{I}_{x_i}$  и импульс  $\mathbf{p}_i$  пары частиц с номером  $i$ , а вектору  $\mathbf{y}_i$ , описывающему положение оставшейся третьей частицы в координатном пространстве  $\mathcal{R}^6 \equiv \mathcal{R}_{x_i}^3 \oplus \mathcal{R}_{y_i}^3$  трех частиц, соответствуют угловой момент  $\mathbf{I}_{y_i}$  и импульс  $\mathbf{q}_i$ . Набору якобиевских координат  $\mathbf{r}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  отвечает набор гиперсферических координат  $\mathbf{r}_i = (r, \Omega_i)$ : гиперрадиус  $r \equiv \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$  и совокупность  $\Omega_i \equiv \{\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i, \varphi_i\}$  двух пар  $\xi \equiv \{\theta_\xi, \varphi_\xi\}$  сферических углов якобиевских векторов  $\xi = \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$  и гиперугла  $\varphi_i \equiv \arctg(y_i/x_i)$ . Аналогичное соответствие имеет место для полного импульса  $\mathbf{k} = (k, \Omega_k)$ . В теории Шредингера [8] считается, что волно-

вая функция  $\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}; \mathbf{k})$  исследуемого трехчастичного состояния  $\varepsilon$  принадлежит линейному пространству  $\mathcal{A}^\varepsilon$  дважды непрерывно-дифференцируемых всюду в  $\mathcal{R}^6$  и по всем своим шести аргументам функций, обладающих набором квантовых чисел  $\varepsilon$ . В пространстве  $\mathcal{A}^\varepsilon$  ортонормированный базис на торе  $T^4 \equiv \mathcal{S}^2(\hat{x}_i) \otimes \mathcal{S}^2(\hat{y}_i)$ , где  $\mathcal{S}^2(\hat{\xi})$  — единичная сфера вектора  $\xi$  в  $\mathcal{R}^3$ , образуют бисферические гармоники

$$\mathcal{Y}_\alpha^\varepsilon(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \equiv [Y_{l_x}^{m_x}(\hat{x}_i) \otimes Y_{l_y}^{m_y}(\hat{y}_i)]^{l, m} = (-1)^{l_x + l_y} \mathcal{Y}_\alpha^\varepsilon(-\hat{x}_i, -\hat{y}_i), \quad (123)$$

обладающие квантовыми числами  $l_x, l_y, l, m, \sigma$ . В (123) компоненты двойного индекса  $\alpha \equiv \{l_x, l_y\}$  подчинены неравенствам треугольника, в частности  $|l_x - l_y| \leq l \leq l_x + l_y$ , и дополнительному условию:  $l_x + l_y$  — четное (нечетное) число, если  $\sigma = +1(-1)$ . В качестве ортонормированного базиса пространства  $\mathcal{A}^\varepsilon$  на единичной сфере  $\mathcal{S}^5$  в  $\mathcal{R}^6$  удобен набор полисферических гипергармоник с квантовыми числами  $l_x, l_y, l, m, \sigma, L$ . Введя тройной индекс  $\nu \equiv \{\alpha, L\}$ , запишем такие гипергармоники в виде произведений

$$Y_\nu^\varepsilon(\Omega_i) \equiv 2 \operatorname{cosec} 2\varphi_i W_\nu(\varphi_i) \mathcal{Y}_\alpha^\varepsilon(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \quad (124)$$

бисферических гармоник (123) и функций

$$W_\nu(\varphi_i) \equiv N_\nu (\sin \varphi_i)^{l_y + 1} (\cos \varphi_i)^{l_x + 1} P_n^{(l_x + 1/2, l_y + 1/2)}(\cos 2\varphi_i). \quad (125)$$

Эти функции содержат полиномы Якоби  $P_n^{(a, b)}$  и имеют единичную  $\mathcal{L}^2_{[0, \pi/2]}$  норму при соответствующем выборе множителя  $N_\nu$ , что и подразумевается далее. Гипермомент  $L = l_x + l_y + 2n$ , где  $n = 0, 1, \dots$ , является четным (нечетным) числом, если  $\sigma = +1(-1)$ .

Теперь напомним, как в методе гипергармоник [112] ставится краевая задача для волновой функции  $\Psi^\varepsilon$ . Сначала из трех якобиевских наборов гиперсферических координат выбирается единственный и наиболее удобный для описания исследуемого процесса набор координат  $(r, \Omega_i)$ . Далее индекс  $i$  этого набора обычно опускается. Функция  $\Psi^\varepsilon$  раскладывается по базису (124) и представляется матричным произведением

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = r^{-5/2} Y^\varepsilon(\Omega) u(r; \mathbf{k}) \equiv r^{-5/2} \sum_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_-}^{\mathbf{v}_+} Y_{\mathbf{v}}^\varepsilon(\Omega) u_{\mathbf{v}}(r; \mathbf{k}) \quad (126)$$

строки  $Y$  гипергармоник  $Y_{\mathbf{v}}^\varepsilon$  и столбца  $u$  неизвестных парциальных компонент  $u_{\mathbf{v}}$ . В анзаце (126)  $\mathbf{v}_\pm \equiv \{\alpha_\pm, L_\pm\}$ ,  $\alpha_\pm \equiv \{l_{x\pm}, l_{y\pm}\}$ ,  $L_\pm \equiv l_{x\pm} + l_{y\pm} + 2n$ . По определению все компоненты мультииндекса  $\mathbf{v}_-$  имеют минимальные из всех возможных для состояния  $\varepsilon$  значения. Замена, вообще говоря, бесконечных верхних пределов суммирования по компонентам мультииндекса  $\mathbf{v}$  конечными ( $\mathbf{v}_+ < \infty$ , т.е.  $l_{x+}, l_{y+}, L_+ < \infty$ ) является *основным* приближением метода гипергармоник. Оно позволяет выполнять расчеты и поэтому подразумевается ниже. Краевая задача для  $\Psi^\varepsilon$ , т.е. уравнение Шредингера в  $\mathcal{R}^6$ :

$$(H_0 + E) \Psi^\varepsilon = \left(-\sum_{i=1}^3 V_i\right) \Psi^\varepsilon, \quad (127)$$

дополненное регулярными асимптотическими условиями в точке тройного столкновения ( $r=0$ ) и на осях  $x=0, y=0$  и граничным условием  $\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}; \mathbf{k}) \sim \Psi^{as}(\mathbf{r}; \mathbf{k})$  при  $r \rightarrow \infty$ , проектируется на конечномерное линейное пространство гипергармоник (124) с  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_-, \dots, \mathbf{v}_+$ . Таким образом, получается одномерная матричная задача Шредингера:

$$[(\partial_r^2 + k^2) I + D_0 r^{-2} - V(r)] u(r; \mathbf{k}) = 0, \quad r \in \mathcal{R}^+, \quad (128)$$

$$u(0; \mathbf{k}) = 0; \quad u(r; \mathbf{k}) \sim u^{as}(r; \mathbf{k}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (129)$$

Здесь и далее  $I$  — единичная, а  $D_0 \equiv \text{diag} \{\lambda(\lambda+1)\}$  — диагональная матрицы; полуцелый индекс  $\lambda$  принимает все значения от  $L_- + 3/2$  до  $L_+ + 3/2$  через единицу; элементы  $V_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}$  матрицы взаимодействия  $V$  и элементы  $u_{\mathbf{v}}^{as}$  столбца  $u^{as}$  — соответствующие интегралы по гиперсфере  $S^5$ :

$$V_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}(r) \equiv \int_{S^5} d\Omega (Y_{\mathbf{v}}^\varepsilon(\Omega))^* \sum_{i=1}^3 V_i(x_i) Y_{\mathbf{v}'}^\varepsilon(\Omega) \equiv \langle Y_{\mathbf{v}}^\varepsilon | \sum_{i=1}^3 V_i(x_i) | Y_{\mathbf{v}'}^\varepsilon \rangle, \quad (130)$$

$$u_{\mathbf{v}}^{as}(r; \mathbf{k}) \equiv r^{5/2} \langle Y_{\mathbf{v}}^\varepsilon | \Psi^{as}(\mathbf{r}; \mathbf{k}) \rangle. \quad (131)$$

Асимптотические трехчастичные функции  $\Psi^{as}(\mathbf{r}; \mathbf{k})$  с действительным и ненулевым импульсом  $\mathbf{k}$  исследованы достаточно полно: они построены в рамках уравнений Фаддеева [10,113,114] для всех типов столкновений, воз-

можных в системах трех нейтральных или заряженных частиц. Поэтому проблема с постановкой задачи в рамках стандартного для метода гипергармоник приближения ( $v_+ < \infty$ ) не возникает. Вся постановка фактически сводится к вычислению интегралов (130) и (131). Система уравнений (128) поставленной краевой задачи (128), (129) выглядит точно так же, как система двухчастичных уравнений Шредингера с потенциалом, не сохраняющим двухчастичный угловой момент [12]. Поэтому известные в задаче двух частиц матричные обобщения различных версий метода фазовых функций достаточно просто модифицируются для переформулировки трехчастичной задачи (128), (129). Насколько этот подход, основанный на объединении теории гипергармоник и нелинейной [115—119] или линейной [49,120—122] версий метода фазовых функций, перспективен для построения низкоэнергетических асимптотик в задаче трех частиц, каковы основные трудности и как их можно преодолеть? Эти вопросы обсуждаются ниже.

**4.1. Метод фазовых функций в задаче трех частиц.** Задача (128), (129) имеет одну особенность: независимо от того, являются парные взаимодействия  $V_i = V_i^a$  коротко- ( $a = s$ ) или дальнедействующими ( $a = l$ ) потенциалами (1) или (3), или же суперпозициями ( $a = ls$ ) таких потенциалов, элементы (130) убывают медленно [123,124]:

$$V^a(r) \sim \sum_{n=n_-}^{\infty} r^{-n} V_n^a, \quad V_n^a \equiv \|V_{v v', n}\|, \quad r \rightarrow \infty, \quad (132)$$

где  $n_- \geq 3$  при  $a = s$  и  $n_- = d$ , если  $a = l, ls$ . Например [124], для состояния  $\epsilon = \{0, 0, 1, E\}$  трех тождественных частиц, взаимодействующих посредством гауссовских потенциалов

$$V_i(x_i) = V_0 \exp(-(\tau x_i)^2), \quad V_0 = \text{const}, \quad \tau = \text{const} > 0$$

элементы (130) с  $v = v' = v_- = \{0, 0, 0\}$  убывают при  $r \rightarrow \infty$  как

$$V_{v_- v_-}(r) = \frac{6V_0}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (\tau r)^{-2n-1} \Gamma^{-1}(n+1) \left[ \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1/2-n)} - \frac{\Gamma(5/2+n)}{\Gamma(5/2-n)} \right].$$

При исследовании низкоэнергетических асимптотик всех функций, связанных с задачей (128), (129), факту медленного убывания элементов потенциальной матрицы следует уделить самое пристальное внимание. В противном случае неизбежны ошибочные выводы. Чтобы пояснить причину, порождающую такие выводы, рассмотрим, насколько верны основные построения работы [115], посвященной «истинно» трехчастичному процессу ( $3 \rightarrow 3$ ) в состоянии  $\epsilon = \{0, 0, 1, E\}$  системы трех попарно не связываю-

щихся одинаковых частиц с парными короткодействующими потенциалами. В этом случае  $v_- = \{0, 0, 0\}$  и в (132)  $a = s$ , а  $n_- = 3$ .

В [115] Джибути и Сигуа предположили, что асимптотическая конфигурация (3 → 3)-столкновения — сумма плоской и сферической волн:

$$\Psi^{as}(\mathbf{r}; \mathbf{k}) \equiv (2\pi)^{-3} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x} + i\mathbf{q}\mathbf{y}) + \mathcal{F}(\Omega; \mathbf{k}) r^{-5/2} \exp(ikr). \quad (133)$$

Отметим, что постулированная авторами асимптотика (133) не содержит слагаемого, отвечающего процессам двукратного перерасеяния [10]. Доминирует ли это слагаемое над вкладом от расходящейся сферической волны в пределе  $k \rightarrow 0$ , неизвестно. Поэтому неучет двукратного перерасеяния — первое необоснованное упрощение авторов. Следующее упрощение, сделанное ими для построения «истинно» трехчастичной амплитуды рассеяния  $\mathcal{F}$ , касалось уже поставленной задачи (128), (129), (133) и состояло в необоснованном предположении о том, что матрица  $V$  диагональна:

$$V_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}(r) = V_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(r) \hat{\delta}_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}. \quad (134)$$

В результате этого «диагонального приближения» система (128) распалась на совокупность незацепляющихся одномерных уравнений

$$[\partial_r^2 - \lambda(\lambda + 1) r^{-2} + k^2 - V_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(r)] u_{\mathbf{v}}(r; \mathbf{k}) = 0, \quad (135)$$

что позволило авторам применить одну из нелинейных версий метода фазовых функций [12] и свести каждое ( $v = v_-, \dots, v_+$ ) уравнение (135) соответствующей подстановкой

$$u_{\mathbf{v}}(r; \mathbf{k}) = r^{1/2} A_{\mathbf{v}}(r; \mathbf{k}) U_{\mathbf{v}}(r; \mathbf{k}), \quad \rho \equiv kr, \\ U_{\mathbf{v}}(r; \mathbf{k}) \equiv \cos \delta_{\mathbf{v}}(r; k) j_{\lambda}(\rho) - \sin \delta_{\mathbf{v}}(r; k) n_{\lambda}(\rho) \quad (136)$$

к двум уравнениям: нелинейному

$$\partial_r \delta_{\mathbf{v}}(r; k) = -k^{-1} V_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(r) U_{\mathbf{v}}(r; k) \quad (137)$$

для фазовой функции  $\delta_{\mathbf{v}}(r; k)$  и линейному, определяющему амплитудную функцию  $A_{\mathbf{v}}(r; \mathbf{k})$ .

Известно [2], что при условии

$$\int_0^{\infty} dx_i x_i |V_i(x_i)| < \infty, \quad i = 1, 2, 3 \quad (138)$$

асимптотика решения уравнения (137) в малой ( $0 \leq r \leq b, bk \ll 1$ ) окрестности точки  $r = 0$  дается первой итерацией эквивалентного ему интегрального уравнения и имеет вид



$$\delta_{\nu}(r; k) \sim -k^{-1} \int_0^r dt V_{\nu\nu}(t) j_{\lambda}^2(\rho'), \quad \rho' \equiv kt, \quad r \rightarrow 0. \quad (139)$$

При условии (132) с  $n_- = 3$  решение этого же уравнения (137) имеет [2] конечный предел при  $r \rightarrow \infty$ . Это дало Джибути и Сигуа основание назвать конечную величину  $\delta_{\nu}(k) \equiv \delta_{\nu}(\infty; k)$  парциальной «истинно» трехчастичной фазой рассеяния и, предполагая ограниченность каждой амплитудной функции при  $r = \infty$ , представить асимптотики функций (136) в виде

$$u_{\nu}(r; \mathbf{k}) \sim A_{\nu}(\infty; \mathbf{k}) \sin(\rho - \pi\lambda/2 + \delta_{\nu}(k)), \\ r \rightarrow \infty, \quad \lambda \equiv L + 3/2. \quad (140)$$

Затем, используя (140) и положив без всяких объяснений

$$A_{\nu}(\infty; \mathbf{k}) \equiv 1, \quad \nu = \nu_-, \dots, \nu_+, \quad (141)$$

авторы записали асимптотику функции (126) при  $r \rightarrow \infty$  в терминах парциальных фаз  $\delta_{\nu}(k)$  и показали, что эта асимптотика будет иметь требуемую форму (133), если амплитуду  $\mathcal{F}$  определить рядом

$$\mathcal{F}(\Omega; \mathbf{k}) = \sum_{\nu=\nu_-}^{\nu_+} Y_{\nu}^{\varepsilon}(\Omega) (Y_{\nu}^{\varepsilon}(\Omega_k))^* \mathcal{F}_{\nu}(k) \quad (142)$$

по парциальным амплитудам

$$\mathcal{F}_{\nu}(k) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} [-\exp(-i\pi/4) k^{-3/2}] (2ik)^{-1} [\exp(2i\delta_{\nu}(k)) - 1]. \quad (143)$$

Главная ошибка обсуждаемой работы [115] — утверждение о том, что старшее слагаемое низкоэнергетической асимптотики фазы  $\delta_{\nu}(k)$  совпадает со старшим слагаемым ее координатной асимптотики (139), взятой в точке  $r = b$ ,  $bk \ll 1$ , и поэтому зависит от  $k$  степенным образом:

$$\delta_{\nu}(k) \sim -\frac{\pi k^{2L+4}}{[2^{L+5/2}\Gamma(L+3)]^2} \int_0^b dr V_{\nu\nu}(r) r^{2L+5}, \quad k \rightarrow 0. \quad (144)$$

Формулы (142)—(144) привели авторов к ошибочным соотношениям

$$\mathcal{F}_{\nu}(k) = O(k^{2L+3/2}), \quad \mathcal{F}(\Omega; \mathbf{k}) = O(k^{2L_-+3/2}), \quad k \rightarrow 0 \quad (145)$$

и, что самое досадное, к неверному выводу о  $E^{3/4}$ -пороговом поведении амплитуды  $\mathcal{F}$  в случае  $l = 0$  и  $\nu_- = \{0, 0, 0\}$ . Эта зависимость и ее качественные объяснения позже упоминались в книге [13]. Поэтому до обсуж-

дения того, как преодолеть ограничения (133), (134) и (141), наложенные в [115], необходимо получить правильные асимптотические соотношения в рамках этих же ограничений. Для этого подстановкой  $t_v(r; k) \equiv \text{tg } \delta_v(r; k)$  сведем уравнение (137) к уравнению

$$\partial_r t_v(r; k) = -k^{-1} V_{vv}(r) [j_\lambda(\rho) - t_v(r; k) n_\lambda(\rho)]^2 \quad (146)$$

с начальным условием  $t_v(0; k) = 0$ . Полученное уравнение функционально отличается от двухчастичного уравнения (7) только тем, что содержит функции  $j_\lambda$  и  $n_\lambda$  с полуцелым индексом  $\lambda = L + 3/2$  вместо функций  $j_l$  и  $n_l$  с целым индексом  $l$ . Это отличие не мешает применить к уравнению (146) метод Леви и Келлера [26], описанный в п.2.1, и доказать, что при любом  $v$  борновский интеграл (аналог функции (15) с  $m = 0$ )

$$\beta_v(\infty; k) \equiv -k^{-1} \int_0^\infty dr V_{vv}(r) j_\lambda^2(\rho), \quad (147)$$

порождаемый первой итерацией этого уравнения, определяет старшее слагаемое искомой асимптотики:

$$\text{tg } \delta_v(k) \sim \beta_v(\infty, k) \sim -\frac{2V_{vv; 3}}{(2L+3)(2L+5)} k, \quad k \rightarrow 0. \quad (148)$$

Такая же линейная по  $k$  зависимость всех парциальных фаз в пределе  $k \rightarrow 0$  получается (см. [125]) в рамках ВКБ-приближения [4] и обуславливает расходимость всех парциальных амплитуд (143):

$$\mathcal{F}_v(k) \sim \frac{2V_{vv; 3} \exp(-i\pi/4)}{(2L+3)(2L+5)} k^{-3/2}, \quad k \rightarrow 0.$$

Аналогичную  $k^{-3/2}$ -сингулярность имеет и полная амплитуда (142) при любых *конечных* значениях всех трех компонент мультииндекса  $v_+$ . Следовательно, при том же условии любая характеристика  $(3 \rightarrow 3)$ -столкновения, пропорциональная  $|\mathcal{F}|^2$ , например, дифференциальное сечение, должна расходиться как  $O(k^{-3})$ , если  $k \rightarrow 0$ . К такому же выводу можно прийти, если в формуле [116]

$$\sigma_{v_-} = 264k^{-5} [\pi \sin \delta_{v_-}(k)]^2,$$

описывающей в рамках минимального  $v = v_- = \{0, 1, 1\}$  приближения сечение  $(3 \rightarrow 3)$ -столкновения трех нейтронов в  ${}^3P_{1/2}$ -состоянии ( $\epsilon = \{1, m, -1, E\}$ ), заменить фазу  $\delta_{v_-}(k)$  ее асимптотикой (148).

Перейдем к качественным объяснениям. Если в (147) положить

$$V_{vv}(r) \equiv 0, \quad r \geq b, \quad b < \infty, \quad (149)$$

то при любом конечном  $b$  можно будет выбрать  $k$  настолько малым, что будет верно соотношение  $kr \ll 1$ , позволяющее аппроксимировать функцию  $j_\lambda(\rho)$  старшим слагаемым ее асимптотики при  $\rho \rightarrow 0$ . В результате такой замены получится формула (144), порождающая соотношения (145). Следовательно, асимптотики (144) и (145), полученные в [115], справедливы в случае *искусственного* обрезания (149) всех элементов  $V_{vv}$  матрицы  $V$  при *любом* конечном значении  $b$  гиперрадиуса  $r$ . Однако из-за медленного убывания (132) элементов  $V_{vv}$  именно эта область больших значений гиперрадиуса ( $kr \gg 1$ ) и определяет лидирующий при  $k \rightarrow 0$  член (148) асимптотики интеграла (147).

Принципиальную возможность выйти за рамки предположений (133), (134) и (141) дает метод, предложенный в [120]. С его помощью можно построить низкоэнергетическое разложение исследуемой функции  $\Psi^\varepsilon$  с произвольной, наперед заданной асимптотикой  $\Psi^{as}$  и при любых конечных значениях  $r, v_+$  и парных потенциалах, подчиненных двум достаточно общим условиям: условию интегрируемости (138) и условию абсолютной сходимости рядов

$$V_i(x_i) = \sum_{n=-1}^{\infty} x_i^n V_i^{(n)}, \quad x_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

обеспечивающему абсолютную сходимость разложений

$$V_{vv}(r) = \sum_{n=-1}^{\infty} r^n V_{vv}^{(n)}, \quad r \rightarrow 0 \quad (150)$$

всех матричных элементов (130) вблизи точки тройного столкновения.

Преимущества и недостатки метода станут очевидными, если обсудить его схему в наиболее общем случае, когда коэффициенты  $V_{vv}^{(-1)}$  всех ( $v, v' = v_-, \dots, v_+$ ) рядов (150) отличны от нуля.

Первый этап — определение и построение фундаментальной [2] матрицы  $U = \|U_{vv'}\|$  регулярных решений уравнения (128). Каждый ( $v' = v_-, \dots, v_+$ ) ее столбец  $U^{v'}$  определяется как решение этого же уравнения, т.е. уравнения

$$[(\partial_r^2 + k^2)I + D_0 r^{-2} - V(r)] U^{v'}(r; k) = 0 \quad (151)$$

со *специальным* начальным ( $r \rightarrow 0$ ) условием

$$U_{\nu}^{\nu'}(r; k) \equiv U_{\nu\nu'}(r; k) = r^{\lambda'+1} [\hat{\delta}_{\nu\nu'} + O(r) (1 - \hat{\delta}_{\nu\nu'})],$$

$$\nu = \nu_-, \dots, \nu_+. \quad (152)$$

Как показал Палумбо [126], условия (152) гарантируют линейную независимость столбцов  $U^{\nu'}$ , а значит, и возможность [2] представить общее регулярное решение  $u$  уравнения (128) в виде линейной комбинации

$$u(r; \mathbf{k}) = U(r; k) N(\mathbf{k}) \quad (153)$$

столбцов  $U_{\nu}^{\nu'}$  и коэффициентов  $N_{\nu}(\mathbf{k})$ , собранных в столбец  $N(\mathbf{k})$ . Частное решение  $u$  с заданной физической асимптотикой (131) получается при выборе столбца  $N(\mathbf{k})$  как решения линейного матричного уравнения

$$U(r; k) N(\mathbf{k}) \sim u^{as}(r; \mathbf{k}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (154)$$

Следовательно, главное преимущество метода — его универсальность в следующем смысле: если при заданной энергии фундаментальная матрица построена, то по формулам (124)—(126), (153) и (154) можно вычислить волновую функцию, описывающую любой возможный при этой же энергии процесс в рассматриваемой трехчастичной системе. Однако это преимущество трудно реализуется в вычислительном плане из-за быстрого роста числа уравнений системы (151) при увеличении хотя бы одной компоненты мультииндекса  $\nu_+$ .

Для исследования асимптотики при  $k \rightarrow 0$  решения  $U$  задачи (151), (152) удобно применить матричную линейную версию метода фазовых функций [120]. В этой версии для  $U$  используется анзац

$$U(r; k) = j(\rho) c(r; k) - n(\rho) s(r; k), \quad (155)$$

содержащий диагональные матрицы  $j \equiv \text{diag} \{j_{\lambda}\}$ ,  $n \equiv \text{diag} \{n_{\lambda}\}$  и неизвестные амплитудные матрицы  $c \equiv \|c_{\nu\nu'}\|$  и  $s \equiv \|s_{\nu\nu'}\|$ . Подстановкой (155) задача (151), (152) сводится к матричным уравнениям

$$\partial_r \begin{Bmatrix} c(r; k) \\ s(r; k) \end{Bmatrix} = -k^{-1} \begin{Bmatrix} n(\rho) \\ j(\rho) \end{Bmatrix} V(r) U(r; k) \quad (156)$$

с начальными ( $r \rightarrow 0$ ) условиями

$$\begin{aligned} k^{\lambda+1} c_{\nu\nu'}(r; k) &\sim \hat{\delta}_{\nu\nu'} / \sigma_{\lambda} - \tau_{\lambda} V_{\nu\nu'}^{(-1)} \begin{Bmatrix} r^{\tau} / \tau, & \tau \equiv \lambda' - \lambda + 1 \neq 0 \\ \ln r, & \tau = 0 \end{Bmatrix}, \\ k^{-\lambda} s_{\nu\nu'}(r; k) &\sim -\sigma_{\lambda} V_{\nu\nu'}^{(-1)} (\lambda + \lambda' + 2)^{-1} r^{\lambda + \lambda' + 2}, \end{aligned} \quad (157)$$

обеспечивающими нужное поведение (152) функций (155).

Для вывода формул (157) необходимо учесть условия (152); в уравнениях (156) заменить элементы матрицы  $V$  рядами (150); функции  $j_\lambda$  и  $n_\lambda$  аппроксимировать их асимптотиками  $j_\lambda(\rho) \sim \sigma_\lambda \rho^{\lambda+1}$  и  $n_\lambda(\rho) \sim \tau_\lambda \rho^{-\lambda}$  при  $\rho \rightarrow 0$  и, наконец, найти первую итерацию получившихся уравнений.

Второй недостаток обсуждаемого метода — сингулярные начальные условия (157) для функций  $c_{\nu\nu}(r; k)$  в случае  $\lambda' + 1 \leq \lambda$  — не так важен, хотя и усложняет численное решение задачи (156), (157).

Следующая трудность, порожденная строением функции  $n_\lambda(\rho)$  с полуцелым индексом, легко преодолима. Функция  $j_\lambda(\rho)$  с полуцелым индексом  $\lambda = L + 3/2$  представима в виде (8), а разложение [1] функции  $n_\lambda$  содержит множитель  $(2/\pi) \ln(\rho/2)$ , зависящий от энергии. Разделение  $r$  и  $k$  в задаче (156), (157) начинается с представления этого множителя в тождественном по отношению к произвольному параметру  $\tau$  виде [121]:

$$\frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{\rho}{2} \right) \equiv h^s(k\tau) + \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{r}{2\tau} \right), \quad h^s(k\tau) \equiv \frac{2}{\pi} \ln(k\tau).$$

Это тождество позволяет выделить из функции  $n_\lambda(\rho)$  неаналитический по  $k$  множитель  $h^s(k\tau)$  и представить ее в следующем виде:

$$n_\lambda(\rho) = \tilde{n}_\lambda(\rho) + h^s(k\tau) j_\lambda(\rho), \quad \tilde{n}_\lambda(\rho) = k^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} n_{\lambda n}(r),$$

$$n_{\lambda n}(r) \equiv - (r/2)^{2n-\lambda} \frac{\Gamma(\lambda + 1/2 - n)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}, \quad n = 0, \dots, \lambda - 1/2;$$

$$n_{\lambda n}(r) \equiv (1/\pi) \left[ \ln \left( \frac{r}{2\tau} \right) - \psi(n+1) - \psi(n - \lambda + 1/2) \right] \times$$

$$\times j_{\lambda, n-\lambda-1/2}(r), \quad n = \lambda + 1/2, \dots \quad (158)$$

Далее, в (155)—(157) функции  $j_\lambda$  и  $n_\lambda$  заменяются их известными суммами (8) и (158), а матрицы  $c$  и  $s$  — искомыми матричными рядами

$$c(r; k) = \tilde{c}(r; k) + h^s(k\tau) s(r; k), \quad \tilde{c}_{\nu\nu}(r; k) = k^{-\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} c_{\nu\nu; n}(r),$$

$$s_{\nu\nu}(r; k) = k^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} s_{\nu\nu; n}(r). \quad (159)$$

В итоге получается формальное асимптотическое разложение

$$U(r; k) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} U_n(r),$$

$$U_n(r) \equiv \sum_{m'+m=n} [j_{m'}(r) c_m(r) - n_m(r) s_m(r)], \quad (160)$$

содержащее матрицы  $c_n \equiv \|c_{\nu\nu'; n}\|$ ,  $s_n \equiv \|s_{\nu\nu'; n}\|$ , подчиненные рекуррентной ( $n = 0, 1, \dots$ ) цепочке энергонезависимых уравнений

$$\partial_r \begin{Bmatrix} c_n(r) \\ s_n(r) \end{Bmatrix} = - \sum_{m'+m=n} \begin{Bmatrix} n_{m'}(r) \\ j_{m'}(r) \end{Bmatrix} V(r) U_m(r) \quad (161)$$

с начальными ( $r \rightarrow 0$ ) условиями

$$c_{\nu\nu'; n}(r) \sim \hat{\delta}_{n0} \hat{\delta}_{\nu\nu'} / \sigma_\lambda - \hat{\delta}_{n0} \tau_\lambda V_{\nu\nu'}^{(-1)} \begin{Bmatrix} r^\tau / \tau, & \tau \equiv \lambda' - \lambda + 1 \neq 0, \\ \ln r, & \tau = 0 \end{Bmatrix},$$

$$s_{\nu\nu'; n}(r) \sim - \hat{\delta}_{n0} \sigma_\lambda V_{\nu\nu'}^{(-1)} (\lambda + \lambda' + 2)^{-1} r^{\lambda + \lambda' + 2}. \quad (162)$$

Из-за медленного убывания (132) элементов  $V_{\nu\nu'}(r)$  все функции  $s_{\nu\nu'; n}(r)$ , удовлетворяющие уравнениям (161) и граничным условиям (162), неограничены при  $r = \infty$ . Следовательно, аппроксимация бесконечных рядов (159) их конечными подсуммами справедлива только во внутренней области  $0 \leq r \leq b_-$ ,  $kb_- \ll 1$  и позволяет только в этой области получить следующее асимптотическое представление ряда (160):

$$U(r; k) = \sum_{n=0}^{M < \infty} k^{2n} U_n(r) + O(k^{2M+2}), \quad k \rightarrow 0.$$

Как было показано в [49], асимптотику матрицы  $U$  при  $\rho \rightarrow \infty$  нетрудно построить, если переписать анзац (155) и ключевую задачу (156), (157) в терминах диагональных матриц  $h^\pm \equiv j \pm in = \text{diag} \{h_\lambda^\pm\}$ , составленных из функций Риккати — Нанкеля  $h_\lambda^\pm = j_\lambda \pm in_\lambda$ , и амплитудных матриц  $f^\pm \equiv c \pm is$ . Тогда анзац (155) и система (156) примут соответствующий вид:

$$U(r; k) = 2^{-1} [h^+(\rho) f^+(r; k) + h^-(\rho) f^-(r; k)], \quad (163)$$

$$\partial_r f^\pm(r; k) = (\mp i/2k) h^\mp(\rho) V(r) U(r; k). \quad (164)$$

Если в (164) подставить  $V = V^a$  в виде (132), заменить матрицы  $h^\pm$  рядами [1]

$$h^\pm(\rho) = \exp(\pm i\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} h_n^\pm, \quad \rho \rightarrow \infty,$$

$$h_n^\pm \equiv (\mp 2i)^{-n} \text{diag} \{(\lambda + 1/2, n) \exp(\mp i\pi(\lambda + 1/2)/2)\}, \quad (165)$$

а матрицы  $f^\pm$  искать в виде

$$f^\pm(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n} [C_{1n}^\pm(k) + \exp(\mp 2i\rho) \rho^{-3} C_{2n}^\pm(k)], \quad (166)$$

то для матриц  $C_{jn}^\pm$  получится рекуррентная ( $n = 1, 2, \dots; j = 1, 2$ ) цепочка уравнений

$$2(n-1) i C_{j, n-1}^\pm(k) - \sum_{m'+m=n} k^{m'-2} V_m D_{jm}^\pm(k) = 0,$$

$$8i C_{j, n}^\mp + 4(1-n) C_{j, n-1}^\mp + \sum_{m'+m=n} k^{m'-2} V_m D_{jm}^\mp(k) = 0;$$

$$D_{jn}^\pm \equiv \sum_{m'+m=n} [\tau_{1m} C_{jm}^\pm + (-1)^{m'} \tau_{2m'} C_{jm'}^\mp],$$

$$\tau_{jn} \equiv (-2i)^{-n} \sum_{m'+m=n} (-1)^{(j-1)m'} h_{m'}^+ h_m^-, \quad (167)$$

определяющих все такие матрицы с  $n > 0$  через матрицы  $C_{j0}^\pm$ . Последние можно найти, «сшивая» в достаточно удаленной ( $kb_+ \gg 1$ ) точке  $r = b_+$  функции  $f^\pm$ , вычисленные интегрированием уравнений (156) или (164) на конечном отрезке  $0 \leq r \leq b_+$ , с функциями  $f^{\pm(M)}$ , порожденными аппроксимацией рядов (166) их конечными ( $M < \infty$ ) подсуммами

$$f^\pm(b_+ - 0; k) = f^{\pm(M)}(b_+ + 0; k),$$

$$\partial_r f^\pm(b_+ - 0; k) = \partial_r f^{\pm(M)}(b_+ + 0; k).$$

Если теперь в (163) аппроксимировать ряды (165) и (166), (167) их конечными подсуммами, то получится искомое асимптотическое представление

$$U(r; k) = (1/2) [U^{+(M)}(r; k) + U^{-(M)}(r; k)] + O(\rho^{-M-1}), \quad \rho \rightarrow \infty,$$

$$U^{\pm(M)}(r; k) \equiv \exp(\pm i\rho) \sum_{n=0}^M \rho^{-n} \sum_{m'+m=n} [h_m^{\pm} C_{1m}^{\pm}(k) + \rho^{-3} h_m^{\mp} C_{2m}^{\mp}(k)],$$

позволяющее снять предположение (149), т.е. учесть все парные взаимодействия при любых  $r \geq b_+$ .

В качестве следующего за выводом правильной асимптотики (148) фазы  $\delta_v(k)$  примера, показывающего, насколько важен такой учет, приведем основной вывод работы [49]: искусственное обрезание (149) матрицы  $V$  при любом конечном значении гиперрадиуса  $r = b$  может порождать трехчастичные резонансы, исчезающие в пределе  $b \rightarrow \infty$  и поэтому называемые искусственными.

Пусть теперь парные взаимодействия описываются суперпозициями  $V_i = V_i^c + V_i^a$  кулоновских ( $V_i^c = 1/R_i x_i$ ) и более быстро убывающих потенциалов  $V_i^a$ ,  $a = s, l, ls$ . Тогда потенциальная матрица  $V$  представляется суммой  $V = V^c + V^a$  кулоновской матрицы  $V^c$  с элементами

$$V_{vv}^c(r) = \sum_{i=1}^3 \langle Y_v | (R_i x_i)^{-1} | Y_{v'} \rangle = (R_{vv}^c r)^{-1} \quad (168)$$

и матрицы  $V^a$ , элементы которой в любом из трех случаев ( $a = s, l, ls$ ) убывают по закону (132). Применить к матричной задаче (128), (129) с  $V = V^{ca}$  метод фазовых функций, выбрав в качестве эталонных функций кулоновские, мешает недиагональность кулоновской матрицы (168). Все результаты, перечисленные ниже, получены в рамках предположения (134), при котором система (128) распадается на незацепляющиеся уравнения (135). Каждое такое уравнение является одномерным уравнением Шредингера с *полуцелым* угловым моментом  $\lambda$  и суперпозицией  $V_{vv} = V_{vv}^{ca} = V_{vv}^c + V_{vv}^a$  кулоновского и дальнедействующего потенциала и поэтому легко переформулируется как в нелинейной [117], так и в линейной [122] версиях метода фазовых функций.

Аналитические выражения для коэффициентов  $R_{vv}$  кулоновских взаимодействий (168), регулярного и нерегулярного решений уравнения (135) в случае  $V_{vv} = V_{vv}^c$ , т.е. кулоновских функций  $F_{\lambda}(\rho, \eta_v)$  и  $G_{\lambda}(\rho, \eta_v)$  с полуцелым индексом углового момента  $\lambda$  и параметром  $\eta_v = 1/2kR_{vv}$ , получены в [127] и обсуждались в [119].



По аналогии с двухчастичным соотношением (20) из фазы  $\delta_V^{ca}(k)$ , порожденной суперпозицией  $V_{VV}^{ca}$ , можно выделить фазу  $\delta_V^{c,a}(k)$ , отсчитанную от кулоновской фазы  $\delta_V^c(k)$ :

$$\delta_V^{c,a}(k) = \delta_V^{ca}(k) - \delta_V^c(k), \quad \delta_V^c(k) = \arg \Gamma(\lambda + 1 + i\eta_V). \quad (169)$$

В случае кулоновского отталкивания и искусственного обрезания (149) потенциала  $V_{VV}^a(r)$  при любом, но конечном значении гиперрадиуса  $r = b$  функция эффективного радиуса, отвечающая разбиению (169), имеет вид [122]

$$K_V^{c,a}(E) \equiv [k^\lambda C_\lambda(\eta_V)]^2 [k \operatorname{ctg} \delta_V^{c,a}(k) + h^c(\eta_V)],$$

где  $C_\lambda$  и  $h^c$  — функции (22) при  $l = \lambda$  и  $\eta = \eta_V$ . Если перейти к необрезанному потенциалу  $V_{VV}^a(r)$ , положив в (149)  $b \rightarrow \infty$ , а затем рассмотреть предел  $a^{c,a}$  функции  $-1/K_V^{c,a}(E)$  при  $E \rightarrow 0$ , то получится  $|a_V^{c,a}| = \infty$ . Описанная попытка определить модифицированную трехчастичную длину рассеяния  $a_V^{c,a}$  оказалась несостоятельной по той же причине, что и в случае рассеяния двух частиц суперпозицией кулоновского и дальнедействующего потенциалов. Дело в том, что из-за медленного убывания потенциала  $V_{VV}^a(r)$  низкоэнергетическая асимптотика фазы  $\delta_V^{c,a}(k)$  не содержит множителя  $k^{2\lambda+1} C_V^2(\eta_V)$  и при любом  $\lambda$  имеет вид [125]:

$$\delta_V^{c,a}(k) \sim -V_{VV;n} (2R_{VV})^{n-1} (\pi/8\tau)^{1/2} \times \\ \times \Gamma(n_- - 1) (\tau^2 - 1)^{(3-2n_-)/4} P_{-1/2}^{3/2-n_-}(1/\tau),$$

$$\tau^2 \equiv 1 + 4(kR_{VV})^2 \lambda(\lambda + 1),$$

где  $n_-$  — показатель лидирующего члена асимптотики (132) функции  $V_{VV}^a(r)$ , а  $P_V^\mu$  — функция Лежандра первого рода [1].

Итак, объединение метода фазовых функций и теории гипергармоник позволяет продвинуться в исследовании низкоэнергетических разложений в задаче трех частиц (126)—(131), записанной в усеченном ( $v_+ < \infty$ ) базисе гипергармоник (124). Как в рамках этого объединения перейти к полному базису, т.е. к пределу  $v_+ \rightarrow \infty$ , неизвестно. Альтернативный путь — заме-

нить дискретную переменную (гипермомент  $L$ ) ее непрерывным аналогом (гиперуглом  $\varphi_i$ ). Такая замена возможна, она приводит к интегродифференциальным фаддеевским уравнениям.

**4.2. Метод интегродифференциальных уравнений в задаче трех частиц.** Как было показано в [128,129,130], если спроектировать на базис гипергармоник (124) не уравнение Шредингера (127), а отвечающую ему систему из трех дифференциальных уравнений Фаддеева

$$(H_0 - E) \Psi_i^\varepsilon = -V_i \Psi^\varepsilon = -V_i \sum_{i=1}^3 \Psi_i^\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3 \quad (170)$$

для фаддеевских компонент

$$\Psi_i^\varepsilon(r, \Omega_i; E) = r^{-2} \sum_{\nu=\nu_-}^{\infty} u_{i\nu}(r; E) Y_\nu^\varepsilon(\Omega_i)$$

волновой функции  $\Psi^\varepsilon$ , а затем просуммировать полученные уравнения для неизвестных функций  $u_{i\nu}$  по индексу  $L$ , то получатся интегродифференциальные уравнения Фаддеева для компонент  $\Psi_{i\alpha}^\varepsilon$  разложений

$$\Psi_i^\varepsilon(r, \Omega_i; E) = 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi_i \sum_{\alpha=\alpha_-}^{\infty} \Psi_{i\alpha}(r, \varphi_i; E) \mathcal{Y}_\alpha^\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) \quad (171)$$

по базису (123). Аналитические свойства интегродифференциальных уравнений исследованы довольно полно. Асимптотики компонент  $\Psi_{i\alpha}^\varepsilon$  при  $r \rightarrow \infty$  известны [113] для всех возможных в системе трех нейтральных или заряженных частиц процессов с *ненулевой* энергией столкновения. Асимптотики компонент  $\Psi_{i\alpha}^\varepsilon$  при  $r \rightarrow 0$  можно построить различными способами [131—133]. Спектральное представление [129,130,134] самых сложных объектов интегродифференциальных уравнений — интегральных по переменной  $\varphi_i$  операторов  $h_{\alpha\alpha}^l$  — и компактные формулы для их ядер [130] позволили выполнить серию аналитических исследований [135—140]. В [135] предложен простой способ регуляризации интегродифференциальных уравнений в предельных точках  $\varphi_i = 0, \pi/2$  их угловых аргументов  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . В [136] получены дифференциальное и интегральное представления коэффициентов Рейнала — Реваи. Некоторые точные решения задачи трех тождественных частиц с  $S$ -волновыми парными потенциалами  $V_i = \text{const } x_i^{-2}$  найдены в [137]. Вслед за работой [141] ложные решения интегродифференциальных уравнений для такой же трехчастичной систе-

мы, но в случае осцилляторных взаимодействий  $V_i = \omega x_i^2$ , исследовались в [138]. Критерий существования ложных решений уравнений (170) в случае центральных потенциалов  $V_i$  доказан в [139,140], способ построения таких решений в явном виде предложен и пояснен примерами в [140].

Спектр ложных решений совпадает со спектром свободного трехчастичного гамильтониана [142]. Ложные решения не отвечают никакой физической конфигурации системы трех частиц, ибо по определению такие решения обращают в нуль одновременно правую и левую части системы (170) и не зависят от взаимодействий  $V_i$ . Поэтому из известных в явном виде ложных решений для системы трех нуклонов [143] невозможно извлечь какую-либо информацию, полезную для построения низкоэнергетических разложений физических решений интегродифференциальных фаддеевских уравнений. Тем не менее эти уравнения привлекательны для построения таких разложений с вычислительной точки зрения, т.к. они сочетают сравнительно простые граничные условия с разреженностью матрицы дискретной задачи. Эффективные алгоритмы [144—150] решения такой задачи основаны на аппроксимации искомых решений различными сплайнами [3]. Значительно упростить вычисления позволяет тензорное представление [147] вспомогательных матриц.

Чтобы пояснить, что существенно мешает выводу трехчастичных низкоэнергетических разложений в рамках интегродифференциальной задачи Фаддеева, рассмотрим случай, когда эта задача не только выглядит наиболее просто, но и неоднократно решалась самыми разными способами.

В случае  $S$ -волновых ядерных потенциалов  $V_i^S$  задача  $pd$ -рассеяния в квантовом состоянии  $\epsilon = \{l, m, S, E\}$  с  $l = 0$ , полным спином  $S = 3/2$  и энергией  $pd$ -столкновения  $E = (3/4m_N)(\hbar k)^2$ , не превышающей ( $\tau^2(k) \equiv B(d) - E > 0$ ) энергию связи дейтрона  $B(d)$ , сводится путем отделения дискретных спин-изоспиновых переменных, подробно описанного в [151], к бесконечной системе зацепляющихся по индексу  $\alpha$  уравнений [10]. Зацепление обуславливается недиагональностью матрицы кулоновского  $pp$ -взаимодействия  $V_1^c = 1/Rx_1$  в базисе бисферических гармоник (123). Если в рядах (171) для пространственных частей фаддеевских компонент ограничиться первым слагаемым, т.е. положить [10]

$$\begin{aligned} \Psi_i^\epsilon(r, \Omega_i; E) &= 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi \Psi_{i, \alpha_-}^\epsilon(r, \varphi; E) \mathcal{Y}_{\alpha_-}^\epsilon(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i) = \\ &= (2r^2\pi)^{-1} \operatorname{cosec} 2\varphi U(r, \varphi; k), \quad \alpha_- = \{0, 0\}, \end{aligned}$$

то останется одно интегродифференциальное уравнение [10]

$$\begin{aligned}
 & [\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2 + \tau^2(k) - V_{\alpha_- \alpha_-}^c(r, \varphi)] U(r, \varphi; k) = \\
 & = V^s(r \cos \varphi) \left[ 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{t_-(\varphi)}^{t_+(\varphi)} d\varphi' U(r, \varphi'; k) \right] \quad (172)
 \end{aligned}$$

с переменными пределами интегрирования [114]

$$t_{\pm}(\varphi) \equiv \min \{ |\varphi \pm \pi/3|, 2\pi/3 - \varphi \} \quad (173)$$

и матричным элементом

$$V_{\alpha_- \alpha_-}^c(r, \varphi) = \frac{1}{rR_0(\varphi)}, \quad R_0(\varphi) \equiv \frac{R}{2} \left\{ \begin{array}{ll} \cos(\varphi), & \varphi < \pi/6 \\ \sqrt{3} \sin \varphi, & \varphi \geq \pi/6 \end{array} \right\} \quad (174)$$

кулоновского взаимодействия  $V_1^c$ .

Следует отметить, что существование и единственность регулярного,

$$U(0, \varphi; k) = 0; \quad U(r, \varphi; k) = 0, \quad \varphi = 0, \pi/2, \quad (175)$$

решения этого уравнения строго доказаны [10] только в одном случае: если  $k$  — отличный от нуля фиксированный параметр, а асимптотика  $U$  при  $r \rightarrow \infty$  имеет вполне определенный вид. Используя разбиение (28)  $pd$ -фазы  $\delta_0^{cs}(k)$  и формулы (29)—(32) для полной  $pd$ - амплитуды  $f^{ca}$  с  $a = s$ , эту асимптотику можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U(r, \varphi; k) = & k^{-1} u_d(x) [\sin \theta^c(t; \eta) + \operatorname{tg} \delta_0^{cs}(k) \cos \theta^c(t; \eta) + O(y^{-1})] + \\
 & + [A^{br}(\varphi; k) + O(r^{-1})] r^{-1/2} \exp(-\tau(k)r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (176)
 \end{aligned}$$

Здесь  $x \equiv x_1 = r \cos \varphi$ ,  $y \equiv y_1 = r \sin \varphi$ ,  $u_d(x)$  — радиальная  ${}^3S_1$ -компонента волновой функции дейтрона, а тригонометрические функции аргумента  $\theta^c$ :

$$\theta^c(t; \eta) \equiv t - 2\eta \ln t + \delta_0^c(k), \quad t \equiv ky, \quad \eta \equiv 1/2kR_0(\pi/2),$$

совпадают со старшими членами асимптотик

$$F_0(t, \eta) = \sin \theta^c(t; \eta) (1 + O(t^{-1})), \quad G_0(t, \eta) = \cos \theta^c(t; \eta) (1 + O(t^{-1}))$$

кулоновских функций [1] при  $t = ky \rightarrow \infty$ .

По-видимому, это совпадение побудило авторов работ [152,153] заметить асимптотику (176), вообще говоря, неэквивалентной ей асимптотикой

$$U(r, \varphi; k) = k^{-1} u_d(x) [F_0(t, \eta) + \operatorname{tg} \delta_0^{c, s}(k) G_0(t, \eta)] + \\ + [A^{br}(\varphi; k) + O(r^{-1})] r^{-1/2} \exp(-\tau(k)r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (177)$$

Неэквивалентность заключается в том, что асимптотика (177), в отличие от (176), содержит все без исключения слагаемые разложений функций Кулона в бесконечные ряды [1] по обратным целым степеням аргумента  $ku$ . Теорема существования и единственности решения получившейся задачи (172)—(175), (177) до сих пор не доказана. Однако *постулированное* асимптотическое условие (177) позволило авторам работ [152,153] перейти к пределу нулевой энергии ( $k \rightarrow 0$ ) и получить в этом пределе граничное условие

$$U(r, \varphi; 0) \sim f_{00}(\xi) - a_0^{c, s} g_{00}(\xi), \quad \xi \equiv 2\sqrt{y/R_0}(\pi/2) \quad (178)$$

с конечным коэффициентом  $a_0^{c, s}$ , отождествленным ими с кватертной кулон-ядерной длиной  $pd$ -рассеяния ( ${}^4a_{pd}$ ) и первыми членами  $f_{00}$  и  $g_{00}$  рядов (84). Полученное таким образом уравнение (172) с  $k = 0$  и граничными условиями (175) и (178) позволяет найти эту длину непосредственно, т.е. минуя вычисление фазы  $\delta_0^{c, s}(k)$  путем решения энергозависимой задачи (172)—(175), (177) для последовательности сходящихся к нулю, но отличных от него, значений  $k$  и последующего нахождения  $a_0^{c, s}$  экстраполяцией в точку  $k = 0$  функции эффективного радиуса (21).

Отметим, что описанный переход от задачи (172)—(175), (177) с  $k > 0$  к задаче (172)—(175), (178) с  $k = 0$  осуществляется в два этапа, требующих принять еще одно предположение. Сначала уравнение (172) и граничные условия (175), (177) делятся на кулоновский барьерный множитель  $C_0(\eta)$ .

Далее полагается  $k \rightarrow 0$ , а функции  $\operatorname{tg} \delta_0^{c, s}(k)$  и  $F_0, G_0$  заменяются в (177) их разложениями (21) и (84). Если предположить, что при  $k \rightarrow 0$  амплитуда виртуального развала дейтрона  $A^{br}(\varphi; k)$  убывает быстрее, чем  $C_0(\eta)$ , то получится соотношение (178). Обоснованию этого предположения, как и построению низкоэнергетических разложений корректно поставленной задачи (172)—(176), мешают два обстоятельства. Во-первых, отсутствие полных асимптотических разложений фаддеевских компонент при фиксированном  $k > 0$  и  $r \rightarrow \infty$ . Во-вторых, отсутствие каких-либо асимптотических разложений этих компонент при  $kr \rightarrow \infty$ . Вывод асимптотик второго типа — актуальная задача проблемы трех тел. Полное решение этой задачи позволило бы задать энергонезависимые граничные условия при  $r \rightarrow \infty$  для каждого уравнения, полученного подстановкой

$$U(r, \varphi; k) = N(k) \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} U_n(r, \varphi) \quad (179)$$

в уравнение (172) и последующим отделением  $k$ . Сформулированную таким образом энергонезависимую и рекуррентную по индексу  $n$  задачу для функций  $U_n(r)$  с  $n = 0, 1, \dots, M < \infty$  можно было бы решить численно, а затем найти неизвестный нормировочный множитель  $N(k)$  и фазу  $\delta_0^{c, s}(k)$ , «сшивая» конечную ( $M < \infty$ ) подсумму ряда (179) в некоторой достаточно удаленной точке  $r = b < \infty$  с построенным асимптотическим разложением функции  $U$  при  $kr \rightarrow \infty$ .

Высказанные замечания о неполноте теории рассеяния для системы трех частиц следует иметь в виду при сравнении результатов работ, посвященных определению параметров  $Nd$ -рассеяния и обсуждаемых ниже.

## 5. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ $Nd$ -РАССЕЯНИЕ

Рассеяние тепловых нейтронов дейтронами хорошо изучено экспериментально [154—158]. Результаты многочисленных теоретических исследований удовлетворительно согласуются с экспериментальными и неоднократно обсуждались в обзорных статьях [153, 159—162] и докладах [163, 164]. Поэтому обсуждение современных представлений о  $nd$ -рассеянии в пределе нулевой энергии  $nd$ -столкновения представляется разумным ограничить упоминанием некоторых недавних работ, а большее внимание уделить исследованиям корреляционных зависимостей в  $nnp$ -системе. Это поможет не только пояснить, почему построение таких зависимостей является перспективным методом определения параметров низкоэнергетических экстраполяционных формул для  $Nd$ -рассеяния, но и лучше понять до сих пор нерешенную проблему определения  $pd$ -длин.

Несмотря на определенные успехи, достигнутые в теоретическом описании динамики  $3N$ -систем, всегда остается актуальным вопрос о том, в какой степени полученные  $3N$ -данные согласуются между собой в рамках существующих представлений об  $NN$ -силах. Традиционный способ решения этой задачи состоит в том, что для различных вариантов  $NN$ -потенциалов, параметры которых фиксируются по определенным низкоэнергетическим данным о двухнуклонном рассеянии, производится расчет  $3N$ -параметров. Для разных  $NN$ -потенциалов, как правило, получается значительный разброс вычисленных значений. Такой способ «проб и ошибок» требует достаточно трудоемких вычислений, но не позволяет прояснить общую ситуацию, т.е. систематизировать ранее известные результаты и достоверно предсказать

итоги нового расчета. Однако результаты ранних *np*-расчетов, выполненных различными способами, но взятых вместе, позволили Филлипсу [159] установить в 1968 г. наличие линейной корреляционной зависимости дублетной *nd*-длины  $^2a_{nd}$  от энергии связи трития  $B(^3\text{H})$ . С тех пор эта кривая называется *nd*-линией Филлипса, а исследование корреляционных зависимостей двух характеристик системы трех частиц принято [160] в теории нескольких частиц как способ, позволяющий предсказать значение одной неизвестной характеристики по известному значению другой.

Для построения низкоэнергетических  $3N$ -разложений особый интерес представляет выяснение причин корреляционных зависимостей трудно вычисляемых параметров таких разложений от сравнительно просто определяемых параметров  $2N$ -рассеяния. Знание такой зависимости позволило бы не только систематизировать известные расчеты, но и предсказать с хорошей точностью результаты новых расчетов  $3N$ -параметров по заданным значениям  $2N$ -параметров. Почему и как длина  $^4a_{nd}$  и эффективный радиус  $^4r_{nd}$  квартетного *nd*-рассеяния зависят от длины  $^3a_{np}$  и эффективного радиуса  $^3r_{np}$  триплетного *np*-рассеяния, было выяснено в работе [165]. Ее авторы нашли функциональные зависимости

$$\begin{aligned} ^4a_{nd}(\tau)/^3a_{np} &\approx 1,179066 - 0,03595\tau - 0,007448\tau^2, \\ ^4r_{nd}(\tau)/^3a_{np} &\approx -0,0383 + 1,0588\tau, \quad \tau \equiv ^3r_{np}/^3a_{np} \end{aligned} \quad (180)$$

*nd*-параметров от отношения  $\tau$  и получили соотношения

$$\begin{aligned} ^4a_{nd} &\approx [6,327 + 1,57(^3a_{np} - 5,414) - 0,32(^3r_{np} - 1,705)] \text{ фм}, \\ ^4r_{nd} &\approx [1,736 + 0,92(^3a_{np} - 5,414) + 0,44(^3r_{np} - 1,705)] \text{ фм}, \end{aligned} \quad (181)$$

связывающие эти параметры с отклонениями *np*-параметров от их усредненных экспериментальных значений [166]  $^3a_{np}^{\text{exp}} = (5,414 \pm 0,005)$  фм и  $^3r_{np}^{\text{exp}} = (1,750 \pm 0,005)$  фм. Приведем наиболее интересные качественные результаты обсуждаемой работы [165]. Согласно (180)  $^4a_{nd}(\tau)$  — убывающая функция отношения  $\tau$ , достигающая своего максимального значения ( $\approx 6,383$  фм) в пределе  $^3r_{np} \rightarrow 0$ . Это значение является оценкой сверху и несущественно отличается от значения 6,316 фм, получаемого при подстановке в (180) усредненных экспериментальных данных  $^3a_{np} = 5,414$  фм и  $^3r_{np} = 1,705$  фм. Столь несущественное отличие означает, что длина  $^4a_{nd}$

является в высшей степени модельно независимой величиной. В отличие от нее эффективный радиус  ${}^4r_{nd}(\tau)$  существенно зависит от выбранной модели  $NN$ -сил: если  ${}^3r_{np} = 0$ , то  ${}^4r_{nd} \approx -0,207$  фм; при всех  ${}^3r_{np} \neq 0$  имеет место оценка  ${}^4r_{nd}(\tau) \approx {}^3r_{np}$ . Корреляционные зависимости (180) и (181) систематизируют все многочисленные расчеты длины  ${}^4a_{nd}$ , упомянутые в обзоре [160], и позволяют по известным двухчастичным данным предсказать как результаты трехчастичных расчетов, так и результаты будущих экспериментов. Например, из (181) следует [165], что предполагаемое экспериментальное значение параметра  ${}^4r_{nd}$  должно принадлежать интервалу  $1,73 \div 1,74$  фм.

Этому прогнозу противоречит значение  ${}^4r_{nd} = 1,91$  фм, вычисленное Яковлевым и Филихиным [167], по методу сильной связи каналов для задачи (172)—(176) с потенциалом  $V^s$  версии МТИ-III [168]. Тем не менее значение  ${}^4a_{nd} = 6,44$  фм, полученное теми же авторами, очень близко к  ${}^4a_{nd} = 6,4$  фм [113,169] и  ${}^4a_{nd} = 6,43$  фм [170], вычисленным ранее для таких же  $NN$ -потенциалов.

Результаты недавних трехчастичных расчетов [171,172] длин  ${}^2a_{nd}$ ,  ${}^4a_{nd}$  и  $B({}^3\text{H})$  хорошо согласуются с их экспериментальными значениями  ${}^2a_{nd}^{\text{exp}} = (0,65 \pm 0,04)$  фм,  ${}^4a_{nd}^{\text{exp}} = (6,35 \pm 0,02)$  фм [154] и  $B({}^3\text{H}) = (8,481855 \pm 0,000013)$  МэВ [89]. Учет трехчастичных сил при описании  $nd$ -динамики [171,172] не изменяет прежнюю [160], рассчитанную с двухчастичными реалистическими  $NN$ -взаимодействиями, линейную корреляционную зависимость между  ${}^2a_{nd}$  и  $B({}^3\text{H})$ . К настоящему времени считается хорошо и неоднократно проверенным фактом, что  $nd$ -линия Филлипса проходит через многие точки, вычисленные различными способами, и более того — через точку, отвечающую экспериментальным значениям  ${}^2a_{nd}$  и  $B({}^3\text{H})$ .

Так как данные о зеркальных ядерных системах содержат ценную информацию о зарядовой симметрии  $NN$ -сил, то особо интересным представляется параллельное исследование зеркального к  $nd$ -рассеянию процесса упругого  $pd$ -столкновения в рамках одного и того же подхода. Такой зеркальный процесс изучен в гораздо меньшей степени и экспериментально, и теоретически. Физическая причина тому — отталкивающее кулоновское взаимодействие, подавляющее вероятность сближения протона с дейтроном тем сильнее, чем меньше энергия  $pd$ -столкновения  $E$ . Из-за этого прямое



измерение  $pd$ -длин при  $E = 0$  не представляется возможным, а измерения сечения  $pd$ -рассеяния при  $E_{\text{lab}} < 10$  МэВ настолько сложны, что к настоящему времени опубликованы лишь три набора экспериментальных значений дублетной и триплетной длин:

$$\begin{aligned} {}^2a_{pd}^{\text{exp}} &= (1,3 \pm 0,2) \text{ фм}, & {}^4a_{pd}^{\text{exp}} &= (11,4_{-1,2}^{+1,8}) \text{ фм} [173]; \\ {}^2a_{pd}^{\text{exp}} &= (2,73 \pm 0,10) \text{ фм}, & {}^4a_{pd}^{\text{exp}} &= (11,88_{-0,1}^{+0,4}) \text{ фм} [174]; \\ {}^2a_{pd}^{\text{exp}} &= (4,0 \pm 0,66) \text{ фм}, & {}^4a_{pd}^{\text{exp}} &= (11,11 \pm 0,24) \text{ фм} [175]. \end{aligned} \quad (182)$$

Первый [173] и второй [174] получены путем экстраполяции данных, измеренных при энергиях протона свыше 1 МэВ, а третий [175] — при энергиях свыше 0,4 МэВ. Согласно (182) имеется значительное расхождение между извлеченными в [173—175] экспериментальными значениями дублетной длины и гораздо меньшее расхождение между соответствующими значениями квартетной длины. Возможная причина такого расхождения — использование традиционного низкоэнергетического разложения (23) для экстраполяции данных, измеренных при больших энергиях, к нулевой энергии.

Какие физические эффекты нужно учесть для вывода правильных экстраполяционных  $pd$ -формул? Ответ на этот вопрос начнем с обсуждения объективных причин, затрудняющих теоретический анализ  $pd$ -рассеяния, и сопоставления известных подходов к вычислению  $pd$ -длин с целью выбора их наиболее правдоподобных значений.

Основная причина, существенно усложняющая численное решение трехчастичной  $pd$ -задачи и теоретический вывод столь необходимых для правильной обработки экспериментальных данных экстраполяционных формул, порождается наличием кулоновского дальнего действия. Из-за обусловленных им сингулярностей матриц (37), (38) парной  $pp$ -подсистемы ядра оригинальных уравнений Фаддеева [176] для  $ppp$ -системы не фредгольмовы, а сами уравнения по этой причине имеют множество решений. В 1970 г. Веселова [177] из ядер интегральных уравнений Фаддеева выделила явно сингулярные вклады кулоновского происхождения. На основе ее ренормализационной процедуры Альт, Зандхас и Цигельманн [178] в 1978 г. получили модифицированные уравнения, ядра которых компактны лишь при  $p - d$  энергии  $E$ , не превышающей ( $E \leq B(d)$ ) порог развала на три частицы. Иной подход к модификации уравнений Фаддеева, основанный на включении всех кулоновских взаимодействий в невозмущенный трехчастичный гамильтониан, предложен Ноблом [179] в 1967 г. Следуя его схеме, в 1975 г. Харченко и Стороженко [36] вывели уравнения Фаддеева — Нобла для задачи  $pd$ -рассеяния при  $E \leq B(d)$ .

Следует подчеркнуть, что интегральные  $pd$ -уравнения, полученные в [36,178], настолько громоздки, что их численное решение в случае *несепара-*

*рабельных* ядерных взаимодействий требует целой серии дополнительных приближений и поэтому представляется малонадежным способом, не позволяющим в должной мере проконтролировать неопределенности, порожденные такими приближениями. Дифференциальные уравнения Фаддеева [10] для системы трех заряженных частиц достаточно просты, в отличие от физических граничных условий [114], дополняющих эти уравнения до однозначно разрешимой краевой задачи.

По указанным выше причинам трехчастичных расчетов *pd*-длин не так много. Для простейших  $3N$ -моделей с сепарабельными ядерными потенциалами *pd*-длины вычислялись в [180—184]. В [181,182] значения этих длин определялись путем экстраполяции результатов вычислений, соответственно, при  $E > 400$  кэВ и  $E > 200$  кэВ. Чтобы избежать решения дополнительной экстраполяционной задачи, авторы работы [183] проинтегрировали *pd*-уравнения [36] при  $E = 0$  и получили значения *pd*-длин, существенно отличающиеся от вычисленных в [182]. Как отмечалось в [184], объяснить причину несогласования не представляется возможным из-за того, что в [182] и [183] применялись разные методы вычисления длин и различные дополнительные приближения. В отличие от *nd*-линии Филлипса, установленные в [183] зависимости между зеркальными длинами (корреляции  ${}^2a_{nd} - a_{pd}^2$  и  ${}^4a_{nd} - {}^4a_{pd}$ ) связывают характеристики  $3N$ -системы при одной и той же, а именно нулевой, энергии *Nd*-столкновения. Поэтому такие корреляции позволяют надежно предсказать реальные значения *pd*-длин.

Анализ *одной* корреляционной зависимости может, вообще говоря, привести к ошибочной оценке достоверности результатов трехчастичных вычислений характеристик  $3N$ -системы. Правильную оценку такой достоверности можно получить лишь с помощью тщательного анализа *совокупности* различных корреляционных зависимостей между характеристиками *nd*-системы и зеркальной к ней *pd*-системе. В качестве яркого примера, поясняющего это предостережение, сравним поведение трех кривых, построенных на рис. 1, 2 и 4а, 4б из работы [183] по результатам, полученным в этой и в двух более ранних работах [152,182]. Согласно рис.1 три *pd*-линии Филлипса, отвечающие результатам [152], [182,183] и описывающие зависимость  ${}^2a_{pd}$  от  $B(^3\text{He})$ , смещены друг относительно друга, но не пересекаются. Поэтому, исходя лишь из этой корреляционной зависимости, трудно судить о том, результаты какой из трех работ наиболее достоверны. Сравнение трех кривых, описывающих корреляционные зависимости  ${}^2a_{pd}$  от  ${}^2a_{nd}$  и изображенных на рис.2 [183], лишь усиливает это сомнение: эти три кривые не пересекаются, и более того, кривая из работы [152] проходит

довольно близко от кривой из [182]. Всякие сомнения автора настоящего обзора о том, достоверны или нет результаты работы [182], развеивают рис.4а и 4б: изображенная на них кривая корреляционной зависимости  $^4a_{pd}$  от  $^4a_{nd}$ , вычисленной в [182], перпендикулярна кривой, построенной по данным из [152,183]. Возможную причину этого яркого качественного несоответствия можно было бы попытаться мотивировать сложностью трехчастичных расчетов, если бы не было простой аналитической формулы [39]:

$$1/{}^4a_{pd} = (1 - \tau)/{}^4a_{nd} + (\ln \tau + 2\gamma - 1/2)/R.$$

Она является  $Nd$ -аналогом  $Np$ -формулы (25) и описывает зависимость кулон-ядерной длины  $^4a_{pd}$  от длины  $^4a_{nd}$  и комбинации  $\tau \equiv \xi r_d/R$  параметра  $\xi$  сшивки ( $1 < \xi < 3$ ) фрагментов модельной волновой функции квартетного  $nd$ -рассеяния, размера дейтрона  $r_d$  и боровского  $p-d$  радиуса  $R$ .

Первые расчеты  $pd$ -длин [152], [185,186], выполненные в рамках интегродифференциальных уравнений Фаддеева с одним и тем же локальным  $S$ -волновым  $NN$ -потенциалом  $V^s$  Малфли — Тьона [168], но разными способами, оказались не согласующимися между собой:

$${}^2a_{pd} = 0,15 \text{ фм}, \quad {}^4a_{pd} = 13,8 \text{ фм} \quad [152,185], \quad (183)$$

$${}^2a_{pd} = 1,03 \text{ фм}, \quad {}^4a_{pd} = 11,96 \text{ фм} \quad [186]. \quad (184)$$

Длины (183) вычислены непосредственно, т.е. решением  $pd$ -уравнений при  $E = 0$  на основе аппроксимации искомых фаддеевских компонент  $pd$ -функции бикубическими сплайнами [3]. Длины (184) получены экстраполяцией в точку  $E = 0$  кулон-ядерной функции эффективного радиуса (21), в которую вместо  $\delta_0^{c,s}(k)$  подставлялась  $pd$ -фаза, вычисленная путем решения  $pd$ -уравнений конечноразностным методом [3] при энергиях  $E > 200$  кэВ. Качественное объяснение [44] различия в длинах (183) и (184) основывалось на предположении о существовании полюса  $pd$ -амплитуды при килоэлектронвольтовой энергии. При наличии такого полюса в точке  $E = iE_0$  разложение (23) для функции (21) с  $l = 0$  следует заменить формулой

$$K^{c,s}(E) \sim [-1/a^{c,s}(E_0) + k^2 r_{00}^{c,s}(E_0)/2]/[1 + (E/E_0)^2], \quad k \rightarrow 0. \quad (185)$$

При  $E \gg E_0$  асимптотики (23) и (185) близки друг к другу, а при  $E \ll E_0$  они имеют различный наклон к оси энергий. Поэтому даже при одной и той же дублетной  $pd$ -фазе  $\delta_0^{c,s}(k)$  величины дублетных  $pd$ -длин  $a_0^{c,s}$  и  $a_0^{c,s}(E_0)$ , вычисленные в [185] по формуле (185), а в [186] — по формуле (23), должны отличаться друг от друга. Последующее тщательное исследование [153]

подтвердило существование полюса и показало, что длину  ${}^2a_{pd}$  следует определять с помощью экстраполяции к нулевой энергии асимптотики (185). Таким образом, в [153] были подтверждены значения длин (183), вычисленные ранее в [152], и неравенство  ${}^2a_{pd} < {}^2a_{nd}$ . Приведенный пример, показывающий, насколько важно знание правильной экстраполяционной формулы, станет еще более убедительным, если напомнить о существенной разнице между величинами  $r_{00}^{c,s} = 11000$  фм и  $r_{00}^{c,s}(E_0) = -450$  фм, вычисленными в [167] по соответствующим формулам (21) и (185) при  $E_0 = 25$  кэВ.

Результаты первых расчетов [162,171] длин  $pd$ -рассеяния, выполненных с различными реалистическими двухчастичными потенциалами, а также с учетом и без учета  $3N$ -сил, показали, что  $3N$ -силы не изменяют кривой корреляционной зависимости  ${}^2a_{pd}$  от  $B(^3\text{He})$ , а величине  $B(^3\text{He}) = 7,68$  МэВ, близкой к экспериментальной  $B(^3\text{He}) = (7,718109 \pm 0,000010)$  МэВ [89], отвечает отрицательное значение  ${}^2a_{pd} \approx -0,1$  фм, не согласующееся с имеющимися экспериментальными данными (182). Последний вывод был подтвержден тщательным исследованием [184] корреляционной зависимости  ${}^2a_{pd}$  от  ${}^2a_{nd}$ , выполненным на основе прямого решения модифицированных интегральных уравнений Фаддеева с сепарабельными  $NN$ -потенциалами и нулевой энергией  $Nd$ -столкновения. Полученная корреляционная кривая с хорошей точностью проходит через точки, отвечающие значениям  $Nd$ -длин, вычисленных ранее в [152,162,171], но расположена значительно ниже точек, отвечающих экспериментальным значениям (182). Рассчитанная зависимость  ${}^2a_{pd}$  от  ${}^2a_{nd}$  оказалась слабо чувствительной к выбору модели  $NN$ -сил, что дало авторам обсуждаемой работы [184] веские основания для следующего вывода: согласно корреляционной зависимости экспериментальному значению  ${}^2a_{nd}^{\text{exp}} = 0,65$  фм соответствует значение  ${}^2a_{pd} = -0,1$  фм. Несмотря на этот правдоподобный и достаточно убедительный вывод, окончательный ответ на вопрос о величине  $pd$ -длин требует их переопределения и последующего преодоления многих сложностей. Они порождаются поляризационным  $pd$ -взаимодействием [187], имеющим асимптотику (12). Формализм интегральных  $pd$ -уравнений в импульсном пространстве, развитый в [36,178], был модифицирован в [188] с целью выделения индуцированных поляризационных взаимодействий. Вычисления по этому методу до сих пор не выполнены. К настоящему времени нет ни одного трехчастичного расчета модифицированных ( ${}^2a_{pd}^{cp,s}$  и  ${}^4a_{pd}^{cp,s}$ ) длин  $pd$ -рассеяния, последовательно учитывающего поляризационные эффекты. Есть две основные причины отсутствия такого расчета — практическая и теоретическая.

При прямом решении стандартных уравнений Шредингера или Фаддеева с дальнедействующими потенциалами и стремящимся к нулю параметром (энергией столкновения) возникают непреодолимые вычислительные сложности [20], [147,148]. Как известно [20], точность решения двухчастичной задачи рассеяния суперпозицией  $V^c + V^p + V^s$ ,  $V^c > 0$ , позволяющая исследовать влияние поляризационного взаимодействия на низкоэнергетическую зависимость  $S$ -фаз  $\delta_0^{c,ps}(k)$  и  $\delta_0^{cp,s}(k)$ , сходится к нулю при  $k \rightarrow 0$  как  $O(\alpha k^5 R^2)$ . Следовательно, даже при решении модельной задачи (170)—(176) точность вычисления  $S$ -волновой фаддеевской компоненты  $U$ , описывающей  $pd$ -конфигурацию в  $pd$ -рассеянии с энергией столкновения  $E \approx 10$  кэВ, должна быть равна по порядку величины  $10^{-12}$ . Столь высокой точности решения трехчастичных уравнений, описывающих пороговое  $pd$ -рассеяние, невозможно достичь даже на современных суперкомпьютерах. По оценкам Корнелиуса и др. [148], существующие компьютеры позволяют решить фаддеевские  $3N$ -задачи с реалистическими  $NN$ -силами [53,54] лишь с точностью около 0,01.

При решении фаддеевской задачи на слабосвязанное состояние трех частиц с кулоновскими парными потенциалами прецизионной точности можно достичь, применив известный способ [147] включения информации о медленно убывающих асимптотиках фаддеевских компонент в области больших значений гиперрадиуса. Этот способ состоит в замене

$$r' \equiv 1 - \exp(-\tau r), \quad \tau = \text{const} > 0, \quad (186)$$

отображающей полуось  $\mathcal{R}^+$  значений гиперрадиуса  $r$  на единичный отрезок изменения новой гиперрадиальной координаты  $r'$ , и последующем использовании для фаддеевских компонент  $\Psi_i$  анзаца

$$\Psi_i(r, \Omega; E) = \exp(-\sqrt{|E|} r') \Psi_i'(r', \Omega; E),$$

в котором первый множитель — эталонная при больших  $r$  функция, описывающая явно асимптотики этих компонент при  $r \rightarrow \infty$ . Расширение такого способа на задачу рассеяния в системе трех частиц, кроме масштабирования (186) гиперрадиуса, требует решения очень сложной задачи построения для каждой из трех фаддеевских компонент  $\Psi_i$  своей пары эталонных функций.

Эти функции должны *одновременно* описывать в двухчастичной асимптотической области ( $x_i < \infty$ ,  $y_i \rightarrow \infty$ ) волны, сходящиеся и расходящиеся по якобиевской переменной  $y_i$ , а в трехчастичной асимптотической области ( $x \sim y$ ;  $x, y \rightarrow \infty$ ) воспроизводить асимптотику расходящейся сферической волны по переменной  $r$ . Такая задача теории рассеяния для системы трех частиц еще не решена. Возможный подход к ее решению — объединение метода фазовых функций и интегродифференциальных уравнений Фаддеева. Перспективность объединения [189,190] метода фазовых функций и

интегральных уравнений Фаддеева убедительно продемонстрирована исследованием зависимостей длин  $nd$ -рассеяния [189] и низкоэнергетических свойств трех бозонов в резонансной области [190] от радиуса обрезания одночленного сепарабельного  $NN$ -потенциала.

Как было показано в пп. 4.1 и 4.2, метод построения трехчастичных низкоэнергетических разложений, сводящий шредингеровскую или фаддеевскую задачу к рекуррентной цепочке удобных для численного решения и энергонезависимых уравнений, находится в зачаточном состоянии.

Единственным доступным в настоящее время способом исследования поляризационных эффектов в  $pd$ -рассеянии является низкоэнергетический анализ эффективно-двухчастичной  $pd$ -задачи (68)—(70) с суперпозицией  $V = V^{cps}$  эффективных кулоновского, ядерного (1) и поляризационного (12)  $pd$ -взаимодействий. Результаты исследований, выполненных в этом приближении для  $S$ -волнового  $pd$ -столкновения, подробно обсуждались в [20]. В процессе обсуждения возник физически интересный вопрос: может ли взаимное воздействие ядерного и поляризационного потенциалов, порождающее минимумы [191] в  $S$ -волновых парциальных кулон-поляризационно-ядерных ( $a = ps$ ) дублетном и квартетном сечениях  $pd$ -рассеяния, обусловить минимумы ( $pd$ -аналоги эффекта Рамзауера [192]) соответствующих полных сечений такого рассеяния? Ответом на этот вопрос завершим настоящий обзор.

Начнем со случая  $a = p$ , когда ядерное  $pd$ -взаимодействие не учитывается, и в (68)  $V \equiv V^p$ , а в (70)  $\delta_l^c(k) \equiv \delta_l^{c,p}(k)$ . Согласно (60) и (61) фазы  $\delta_l^{c,p}(k)$  с большими  $l$  убывают при  $q \equiv kR \rightarrow 0$  гораздо медленнее фаз (62) с малыми  $l$ :

$$\operatorname{tg} \delta_l^{c,p}(q) \sim -\pi V_0^p q^2 / R^2 (4l^2 - 1) (2l + 3), \quad l \gg \eta. \quad (187)$$

Поэтому из (62) и (187) следует, что характер убывания старших слагаемых низкоэнергетических асимптотик парциальных амплитуд (32) с  $a = p$  непрерывно по  $q$  изменяется при переходе из области  $l \ll \eta$  в область  $l \gg \eta$ :

$$f_l^{c,p}(q) = O(q^4), \quad l \ll \eta; \quad f_l^{c,p}(q) = O(q), \quad l \gg \eta.$$

Из-за такого изменения дискретное по  $l$  представление (31) неудобно для вывода асимптотики полной амплитуды  $f^{c,p}$ .

Применив метод работы [193], Квицинский в [194] заменил сумму (31) интегралом по непрерывной переменной  $l$  и нашел асимптотику этого интеграла при  $q \rightarrow 0$  методом стационарной фазы [4]. Оказалось, что в таком пределе

$$f^{c,p}(\theta; q) \sim -2V_0^p R^{-1} q^3 \exp(2i\eta (\ln(\eta \operatorname{cosec}(\theta/2)) - 1)) b_4(\theta),$$

$$b_4(\theta) \equiv \sin \theta (1 + \cos \theta)^{-3} [(2 - \cos \theta) (\pi - \theta) - 3 \sin \theta], \quad (188)$$

а основной вклад в сумму (31) дают парциальные амплитуды (32) с моментами  $l$ , близкими к точке стационарной фазы  $l_0 \equiv \eta \operatorname{ctg}(\theta/2) - 1$ .

Подставив (188) в (34), получаем асимптотику

$$d\sigma^{c,P}(\theta; E)/d\theta \sim 8\pi(V_0^P R^{-1} q^3)^2 b_4^2(\theta) \sin \theta, \quad q \rightarrow 0 \quad (189)$$

вклада поляризационного потенциала в дифференциальное сечение  $pd$ -рассеяния суперпозицией  $V^{cP}$ . Согласно (189) при достаточно низких энергиях этот вклад зависит от угла  $\theta$  как  $O(\theta^3)$  при рассеянии вперед ( $\theta \rightarrow 0$ ) и как  $O(\pi - \theta)$  при рассеянии назад ( $\theta \rightarrow \pi$ ) и при любом фиксированном  $q$  достигает своего максимума в точке  $\theta \approx \pi/2$ .

Заменив в (35) вклад  $d\sigma^{c,P}/d\theta$  его асимптотикой (189), выводим соотношение

$$\sigma^{c,P}(E) \sim 8\pi(V_0^P R^{-1} q^3)^2 \int_0^\pi d\theta b_4^2(\theta) \sin \theta, \quad q \rightarrow 0, \quad (190)$$

означающее, что вклад поляризационного потенциала в полное сечение  $pd$ -столкновения убывает в пределе нулевой энергии как  $O(E^6)$ . Пусть теперь  $a = ps$  и ядерное  $pd$ -взаимодействие  $V^s$  включено наряду с поляризационным потенциалом (12), но только в состоянии с  $l = 0$ . Тогда

$$\delta_l^{c,s}(q) \sim -a_0^{c,s} q R^{-1} C_0^2(\eta) \hat{\delta}_{l0}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad q \rightarrow 0. \quad (191)$$

Учтя эти равенства, с помощью формул (31), (32) и (35) получаем удобное для численного анализа представление взаимного вклада ядерного и поляризационных взаимодействий в полное сечение  $pd$ -рассеяния суперпозицией  $V^{cPs}$ :

$$\sigma^{c,Ps}(E) = \sigma_0^{c,Ps}(E) + [\sigma^{c,P}(E) - \sigma_0^{c,P}(E)]. \quad (192)$$

Для вычисления этого вклада по формулам (32), (33), (190) и (191) использовались те же самые значения  $pd$ -длин, что и в [191], а именно  $a_0^{c,s} = 1,03$  фм для дублетного и  $a^{c,s} = 11,96$  фм для квартетного  $pd$ -рассеяния. Оказалось, что вклад разности  $[\sigma^{c,P}(E) - \sigma_0^{c,P}(E)]$  в сумму (192) является основным в дублетном случае при  $E < {}^2E_1 = 3,1$  кэВ:

$$[\sigma^{c,P}(E) - \sigma_0^{c,P}(E)]/\sigma_0^{c,Ps}(E) > 0,9, \quad (193)$$

а в квартетном — если  $E < {}^4E_1 = 2,0$  кэВ. Компонента  $\sigma_0^{c,Ps}$  сечения (192) обращается в нуль [20] в точке  ${}^2E_{\min} \approx 2,2$  кэВ в дублетном случае, а в квартетном — в точке  ${}^4E_{\min} \approx 1,2$  кэВ. Так как  ${}^nE_{\min} < {}^nE_1$ ,  $n = 2, 4$ , то в обоих случаях вклад  $\sigma^{c,Ps}(E)$  не может иметь заметного локального миниму-

ма в интервале энергий  $E < {}^n E_1$ . Согласно (193) при таких энергиях этот вклад обусловлен рассеянием поляризационным потенциалом в кулоновском поле в  $pd$ -состояниях с  $l > 0$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нерешенные задачи теории низкоэнергетических разложений в ядерной физике формулировались в каждом разделе настоящего обзора, поэтому его можно закончить двумя самыми главными выводами.

Как было показано, исследование низкоэнергетических столкновений в  $NN$ - и  $3N$ -системах продолжает оставаться актуальной проблемой ядерной физики в связи с проверкой возможности описания сложной системы на основе современных представлений о *полном* взаимодействии между нуклонами и решением обратной задачи — извлечением информации о ядерном взаимодействии путем анализа всех экспериментальных данных и теоретических результатов о  $NN$ - и  $3N$ -системах.

Исследования столкновений нейтронов и протонов с легчайшими ядрами при сверхнизких в ядерном масштабе энергиях играют важную роль в ядерной астрофизике и имеют прикладное значение в связи с осуществлением термоядерного синтеза. Это еще одна причина, по которой в обзоре особое внимание было уделено доказательству утверждения о том, что анализ таких столкновений должен базироваться на математически обоснованных низкоэнергетических разложениях, полученных из строгих динамических уравнений движения, позволяющих последовательно учесть кулоновское взаимодействие и наиболее существенные электромагнитные поправки к нему.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abramowitz M., Stegun I.A. — Handbook of Mathematical Functions. Washington: D.C., 1972.
2. Камке Э. — Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. М.: Наука, 1976.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. — Методы сплайн-функций. М: Наука, 1980.
4. Федорюк М.В. — Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
5. Teylor J.R. — Scattering Theory. New York: Wiley, 1972.
6. Burke P.G. — Potential Scattering in Atomic Physics. New York and London: Plenum Press, 1977.
7. De Alfaro V., Regge T. — Potential Scattering. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1965.



8. **Reed M., Simon B.** — Scattering Theory, (Methods of Modern Mathematical Physics III). New York: Academic, 1979.
9. **Ментковский Ю.Л.** — Частица в ядерно-кулоновском поле. М.: Энергоатомиздат, 1982.
10. **Merkuriev S.P., Faddeev L.D.** — Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems. Kluwer: Academic Publishers, 1993.
11. **Calogero F.** — Variable Phase Approach in Quantum Mechanics. New York: Academic, 1967.
12. **Бабиков В.В.** — Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
13. **Джибути Р.И., Крупенникова Н.Б.** — Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
14. **Джибути Р.И., Шитикова К.В.** — Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1993.
15. **Schiff L.I.** — Quantum mechanics, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1968.
16. **Brown G.E., Jackson A.D.** — The Nucleon-Nucleon Interaction. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1976.
17. **Вильдермут К., Тан Я.** — Единая теория ядра. Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
18. **Alexandrov Yu.A.** — Fundamental Properties of the Neutron. Oxford: Clarendon Press, 1992.
19. **Byrne J.** — Neutrons, Nuclei, and Matter: an Exploration of the Physics of Slow Neutrons. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1994.
20. **Пупышев В.В., Соловцова О.П.** — ЭЧАЯ, 1996, т.4, с.859.
21. **Неудачин В.Г., Сахарук А.А., Смирнов Ю.Ф.** — ЭЧАЯ, 1992, т.23, с.479.
22. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Int. J. Mod. Phys., 1992, v.A7, p.2713.
23. **Blatt J.M., Jackson J.D.** — Phys. Rev., 1949, v.76, p.18.
24. **O'Malley T.F., Spruch L., Rosenberg L.** — J. Math. Phys., 1961, v.2, p.491.
25. **O'Malley T.F., Rosenberg L., Spruch L.** — J. Math. Phys., 1962, v.125, p.1300.
26. **Levy B.R., Keller J.B.** — J. Math. Phys., 1963, v.4, p.54.
27. **Hinckelman O., Sprush L.** — Phys. Rev., 1971, v.2, p.642.
28. **Breit G., Condon E.U., Present R.A.** — Phys. Rev., 1936, v.50, p.825.
29. **Ландау Л.Д., Смородинский Я.А.** — ЖЭТФ, 1944, т.14, с.269.
30. **Bethe H.A.** — Phys. Rev., 1949, v.76, p.48.
31. **Jackson J.D., Blatt J.M.** — Rev. Mod. Phys., 1950, v.22, p.77.
32. **Van Haringen H., Kok L.P.** — Phys. Rev., 1982, v.A26, p.1218.
33. **Мур В.Д., Кудрявцев А.Е., Попов В.С.** — ЯФ, 1983, т.37, с.1417.
34. **Kok L.P.** — In: Lecture Notes in Physics v.273: Models and Methods in Few-Body Physics. Eds. Ferreira L.S. et al., Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.
35. **Навроцкий М.А.** — ЯФ, 1987, т.45, с.1311.
36. **Kharchenko V.F., Storozhenko S.A.** — Preprint ИТФ ИТР-75-53Е, Kiev, 1975.
37. **Van Haringen H., van Wageningen R.J.** — J. Math. Phys., 1982, v.B32, p.307.
38. **Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж.** — ЭЧАЯ, 1979, т.10, с.741.
39. **Киржниц Д.А., Пеньков Ф.М.** — ЖЭТФ, 1982, т.82, с.657.
40. **Бабиков В.В.** — ЯФ, 1965, т.1, с.793.
41. **Петрунькин В.А.** — ЭЧАЯ, 1981, т.12, с.692.
42. **Berger R.O., Spruch L.** — Phys. Rev., 1965, v.138, p.B1106.

43. **Berger R.O., Snodgrass H.B., Spruch L.** — *Phys. Rev.*, 1969, v.185, p.113.
44. **Kvitsinsky A.A., Merkuriev S.P.** — In: *Proc. of the IXth Europ. Conf. on Few-Body Problems in Physics*, Tbilisi, 1984, p.40.
45. **Квицинский А.А., Меркурьев С.П.** — *ЯФ*, 1985, т.41, с.647.
46. **Bencze Gy. et al.** — *Phys.Rev.*, 1987, v.C35, p.1188.
47. **Calogero F.** — *Nuovo Cimento*, 1963, v.27, p.261.
48. **Pupyshev V.V.** — *J. Math. Phys.*, 1995, v.A28, p.3305.
49. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — *Z. Phys.*, 1994, v.A348, p.227.
50. **Но У.К.** — *Phys. Rep.*, 1983, v.99, p.1.
51. **Rakityansky S.A., Sofianos S.A., Amos K.** — *Nuovo Cimento*, 1996, v.B111, p.363.
52. **Lambert E.** — *Helv. Phys. Acta*, 1969, v.42, p.667.
53. **Lacombe M. et al.** — *Phys. Rev.*, 1980, v.C20, p.861.
54. **Machleidt R. et al.** — *Phys. Reports*, 1987, v.149, p.1.
55. **Nagels M.M. et al.** — *Phys. Rev.*, 1987, v.D17, p.768.
56. **Wiringa R.B. et al.** — *Phys. Rev.*, 1987, v.C19, p.1207.
57. **Brauer K. et al.** — *Z. Phys.*, 1985, v.A320, p.609.
58. **Janssen J.** — In: *Proc. of Int. Conf. on Mesons and Nuclei at Intermediate Energies*. Eds. Khankhasaev M.Kh., Kurmanov Zh.B., Dubna: JINR, 1994, p.79.
59. **Heisenberg W.** — *Z. Phys.*, 1932, v.77, p.1.
60. **Okamoto K.** — *Phys. Lett.*, 1964, v.11, p.150.
61. **Nolen J.A. Jr., Schiffer J.P.** — *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 1969, v.19, p.471.
62. **Nolen J.A. Jr., Schiffer J.P.** — *Phys. Lett.*, 1969, v.B29, p.369.
63. **Shlomo S.** — *Rep. Prog. Phys.*, 1978, v.41, p.66.
64. **Negele J.W.** — *Nucl. Phys.*, 1971, v.A165, p.305.
65. **Henley E.M., Keliher T.E.** — *Nucl. Phys.*, 1972, v.A189, p.632.
66. **Langacker P., Sparrow D.A.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1979, v.43, p.1553.
67. **Langacker P., Sparrow D.A.** — *Phys. Rev.*, 1982, v.C25, p.1194.
68. **Coon S.A., Scardon M.D.** — *Phys. Rev.*, 1982, v.C25, p.562.
69. **Friar J.L., Gibson B.F.** — *Phys. Rev.*, 1978, v.C17, p.1456.
70. **Coon S.A.** — In: *Proc. of Xth Int. IUPAP Conf. on Few-Body Problems in Physics*. Ed. Zeitnitz B., North-Holland, Amsterdam, 1984, v.II, p.293.
71. **Stapp H.P., Ypsilantis T.J., Metropolis M.** — *Phys. Rev.*, 1957, v.105, p.302.
72. **Knutson L.D., Chiang D.** — *Phys. Rev.*, 1978, v.C18, p.1958.
73. **Moravcsik M.J., Pauschenwein J., Goldstein G.R.** — *J. Phys. (Paris)*, 1989, v.50, p.1167.
74. **Stoks V.G.J., de Swart J.J.** — *Nucl. Phys.*, 1990, v.A514, p.309.
75. **Stoks V.G.J., de Swart J.J.** — *Phys. Rev.*, 1990, v.C42, p.1235.
76. **Pupyshev V.V., Solovtsova O.P.** — Preprint JINR E4-90-447, Dubna, 1990.
77. **Покотилловский Ю.Н., Тахтамышев Г.Г.** — *ЯФ*, 1993, т.56, с.184.
78. **Kühn B.** — *Sov. J. Nucl. Part. Sci.*, 1976, v.6, p.139.
79. **Henley E.M., Wilkinson D.H.** — In: *Few Particle Problems in the Nuclear Interaction*. Eds. Slaus I. et al., North-Holland, Amsterdam, 1972, p.242.
80. **De Téramond G.F., Gabioud B.** — *Phys. Rev.*, 1987, v.C36, p.691.
81. **Von Witsch W. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1979, v.A329, p.141.
82. **Gabioud B. et al.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1979, v.42, p.1508.
83. **Gabioud B. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1984, v.A420, p.496.

84. Slaus I., Marušić A. — Nucl. Phys., 1992, v.A543, p.231.
85. Slaus I. et al. — Phys. Reports., 1989, v.173, p.257.
86. Miller G. et al. — Phys. Reports., 1990, v.194, p.1.
87. Slaus I. et al. — Nucl. Instr. and Methods, 1991, v.B56/57, p.489.
88. Brandenburg R.A. et al. — Phys. Rev., 1988, v.C37, p.781.
89. Tilley D.R., Weller H.R., Hasan H.H. — Nucl. Phys., 1987, v.A474, p.1.
90. Gebhardt K. et al. — Nucl. Phys., 1993, v.A561, p.232.
91. Strate J. et al. — Nucl. Phys., 1989, v.A501, p.51.
92. Alt E.O., Grassberger P., Sandhas W. — Nucl. Phys., 1967, v.B2, p.157.
93. Ahmidoux A. et al. — In: Proc. of Int. Conf. on Mesons and Nuclei at Intermediate Energies. Eds. Khankhasaev M.Kh., Kurmanov Zh.B., Dubna: JINR, 1994, p.91.
94. Tornow W. et al. — Phys. Lett., 1991, v.B257, p.861.
95. Witala H., Glöckle W. — Nucl. Phys., 1991, v.A582, p.48.
96. Schwinger J. — Phys. Rev., 1950, v.78, p.135.
97. Foldy L.L., Eriksen E. — Phys. Rev., 1955, v.98, p.775.
98. Durand L. III. — Phys. Rev., 1957, v.108, p.1597.
99. Heller L. — Phys. Rev., 1960, v.120, p.627.
100. Schwinger J. — Phys. Rev., 1949, v.73, p.407.
101. Breit G. — Phys. Rev., 1955, v.99, p.1581.
102. Ebel M.E., Hull M.H. Jr. — Phys. Rev., 1955, v.99, p.1596.
103. Garren A. — Phys. Rev., 1956, v.101, p.419.
104. Hutton J.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1975, v.35, p.429.
105. Knutson L.D., Chiang D. — Phys. Rev., 1978, v.C18, p.1958.
106. Barker M.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1982, v.48, p.918.
107. Barker M.D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1982, v.49, p.1056E.
108. Holslin D. et al. — Phys. Rev. Lett., 1988, v.61, p.1561.
109. Pupyshev V.V., Solovtsova O.P. — Phys. Lett., 1995, v.B354, p.1.
110. Пупышев В.В., Соловцова О.П. — ЯФ, 1996, т.59, с.1807.
111. Mutchier G.S., Simmons J.E. — Phys. Rev., 1971, v.C4, p.67.
112. Fabre de la Ripelle M. — Lecture Notes in Physics. Models and Methods in Few-Body Physics. Proceedings, Lisboa, Portugal, 1986, v.273, p.283. Eds. Ferreira, Fonseca A.C., Streit L., Berlin, Heidelberg New York, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
113. Квицинский А.А. и др. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.267.
114. Квицинский А.А., Кострыкин В.В., Меркурьев С.П. — ЭЧАЯ, 1990, т.21, с.1301.
115. Jibuti R.I., Sigua K.I. — Preprint Institute of Physics of the Georgian Academy of Sciences NP-31, Tbilisi, 1977.
116. Кезерашвили Р.Я. — ЯФ, 1983, т.38, с.491.
117. Джибути Р.И., Имнадзе П.М. — Препринт ИФ АН ГССР ЯФ-8, Тбилиси, 1985.
118. Джибути Р.И. — ЭЧАЯ, 1983, т.14, с.741.
119. Джибути Р.И., Шитикова К.В. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, с.311.
120. Pupyshev V.V., Rakityansky S.A. — In: Proc. of National Con. on Physics of Few-Body and Quark-Hadronic Systems. Eds. Boldyshev V., Kotlyar V., Shebeko A. Khar-kov: KFTI, 1992, p.388.

121. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phenomena in Nuclear Physics, Eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.61B.
122. **Pupyshev V.V., Rakityansky S.A.** — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phenomena in Nuclear Physics, Eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.62B.
123. **Fabre de la Ripelle M.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1982, v.147, p.281.
124. **Haftel M.I., Mandelzweig V.B.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1983, v.150, p.48.
125. **Pupyshev V.V.** — In: Proc. of the 12th Europ. Conf. on Few-Body Physics. Eds. Lendyel V.I., Haysak M.I., Uzhgorod, 1990, p.346.
126. **Palumbo F.** — Phys. Lett., 1977, v.B69, p.275.
127. **Джибути Р.И., Имнадзе П.М.** — Препринт ИФ АН ГССР ЯФ-7, Тбилиси, 1985.
128. **Fabre de la Ripelle M.** — Few-Body Systems, 1986, v.1, p.181.
129. **Pupyshev V.V.** — JINR Rapid. Com. No.2[22]-87, Dubna, 1987, p.45.
130. **Пупышев В.В.** — ТМФ, 1989, т.81, с.86.
131. **Kostrykin V.V., Kvitsinsky A.A., Merkuriev S.P.** — Few-Body Systems, 1989, v.6, p.97.
132. **Pupyshev V.V.** — Preprint JINR E5-87-902, Dubna, 1987.
133. **Pupyshev V.V.** — Few-Body Systems, 1990, v.8, p.105.
134. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1986, т.43, с.260.
135. **Pupyshev V.V.** — JINR Rapid Com. No.4[24]-87, Dubna, 1987, p.31.
136. **Pupyshev V.V.** — In: Contr. to XIIth Int. Conf. on Few-Body Problems in Physics. Ed. Jennings B.K., V.C. Canada, Vancouver, 1989, p.F11.
137. **Pupyshev V.V.** — Phys. Lett., 1989, v.A140, p.151.
138. **Pupyshev V.V.** — Preprint JINR E4-85-313, Dubna, 1985.
139. **Pupyshev V.V.** — Preprint JINR E4-95-152, Dubna, 1995.
140. **Пупышев В.В.** — ТМФ, 1996, т.107, с.501.
141. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1980, v.C22, p.284.
142. **Яковлев С.Л.** — ТМФ, 1995, т.102, с.323.
143. **Руднев В.А., Яковлев С.Л.** — ЯФ, 1995, т.58, с.1762.
144. **Payne G.L.** — Lecture Notes in Physics. Models and Methods in Few-Body Physics. Proceedings, Lisboa, Portugal, 1986, v.273, p.64. Eds. Ferreira L.S., Fonseca A.C., Streit L., Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer-Verlag, 1986.
145. **Пупышев В.В.** — ЯФ, 1986, т.43, с.1318.
146. **Пупышев В.В.** — Сообщение ОИЯИ Р4-86-85, Дубна, 1986.
147. **Bosveld G.D., Schellingerhout N.V.** — Report 231, Groningen: University of Groningen, 1989.
148. **Cornelius Th. et al.** — Phys. Rev., 1990, v.C41, p.2538.
149. **Vinitsky S.I. et al.** — Yad. Fiz., 1990, v.51, p.641.
150. **Bernabeu J. et al.** — In: Contr. to Int. Symposium on Meson Catalysed Fusion. Physics of Exotic Atoms and Molecules, Dubna, JINR, 1995, p.111.
151. **Merkuriev S.P., Gignoux G., Laverne A.** — Ann. Phys. (N.Y.), 1976, v.99, p.30.
152. **Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.** — Phys. Rev., 1983, v.C28, p.983.
153. **Chen C.R. et al.** — Phys. Rev., 1989, v.C39, p.1261.
154. **Dilg W., Koester L., Nistler W.** — Phys. Lett., 1971, v.B36, p.208.

155. Stoler P. et al. — Phys. Rev. Lett., 1972, v.29, p.1745.
156. Stoler P., Kaushal N.N., Green F. — Phys. Rev., 1973, v.C8, p.1532.
157. Journey E.T., Bendt P.J., Browne J.C. — Phys. Rev., 1982, v.C25, p.2810.
158. Konijnenberg M.W. et al. — Phys. Lett., 1988, v.B205, p.215.
159. Phillips A.C. — Nucl. Phys., 1968, v.A107, p.209.
160. Ситенко А.Г., Харченко В.Ф. — УФН, 1971, т.103, с.469.
161. Phillips A.C. — Rep. Prog. Phys., 1977, v.40, p.905.
162. Chen C.R. et al. — Phys. Rev., 1986, v.C33, p.401.
163. Kharchenko V.F. — In: Proc. of Int. Symp. on Few Particle Problems in Nuclear Physics, Dubna: JINR, 1980, p.9.
164. Friar J.L. — In: Proc. of Int. Conf. on Few-Body and Quark-Hadronic Systems, Dubna: JINR, 1987, p.70.
165. Гринюк Б.Е., Сименог И.В., Ситниченко А.И. — Препринт ИТФ-82-141Р, Киев, 1982.
166. Lomon E., Wilson R. — Phys. Rev., 1974, v.9, p.1329.
167. Яковлев С.Л., Филихин И.Н. — ЯФ, 1993, т.56, с.98.
168. Malfliet R.A., Tjon J.A. — Ann. Phys. (N.Y.), 1970, v.56, p.245.
169. Benayoun J.J., Gignoux C., Chauvin J. — Phys. Rev., 1981, v.C23, p.1854.
170. Friar J.L., Gibson V.F., Payne G.L. — Phys. Rev., 1989, v.C39, p.1264.
171. Friar J.L., Gibson V.F., Payne G.L. — Phys. Lett., 1990, v.B247, p.197.
172. Friar J.L. et al. — Phys. Lett., 1990, v.B251, p.11.
173. Van Oers W.T.H., Brockman K.W. — Nucl. Phys., 1967, v.A92, p.561.
174. Arvieux J. — Nucl. Phys., 1974, v.A221, p.253.
175. Huttel E. et al. — Nucl. Phys., 1983, v.A406, p.443.
176. Фаддеев Л.Д. — ЖЭТФ, 1960, т.39, с.1459.
177. Веселова А.М. — ТМФ, 1970, т.3, с.326.
178. Alt E.O., Sandhas W., Zeigelmann H. — Phys. Rev., 1978, v.C17, p.1981.
179. Noble J.V. — Phys. Rev., 1967, v.161, p.945.
180. Alt E.O. — In: Proc. of VIIIth Int. Conf. on Few-Body Problems in Nuclear and Particle Physics. Eds. Mitra A.N. et al. Amsterdam: North-Holland, 1976, p.76.
181. Zankel H., Mathelitsch L. — Phys. Lett., 1983, v.B132, p.27.
182. Berthold G.H., Zankel H. — Phys. Rev., 1986, v.C34, p.1203.
183. Kharchenko V.F., Navrotsky M.A., Shadchin S.A. — Nucl. Phys., 1990, v.A512, p.294.
184. Харченко В.Ф., Навроцкий М.А., Катеринчук П.А. — ЯФ, 1992, т.55, с.86.
185. Friar J.L., Gibson V.F., Payne G.L. — Phys. Lett., 1983, v.B124, p.287.
186. Квицинский А.А. — Письма в ЖЭТФ, 1982, т.36, с.375.
187. Kharchenko V.F., Shadchin S.A. — Few-Body Systems, 1989, v.6, p.45.
188. Shadchin S.A., Kharchenko V.F., Navrotsky M.A. — Preprint ITP-90-15E, Kiev, 1990.
189. Петров Н.М., Пушкаш А.М. — ЯФ, 1986, т.43, с.1403.
190. Петров Н.М., Пушкаш А.М. — ЯФ, 1989, т.47, с.205.
191. Пупышев В.В., Соловцова О.П. — Сообщение ОИЯИ Р4-86-346, Дубна, 1986.
192. Ramsauer C., Kollath R. — Ann. Phys. (N.Y.), 1929, v.3, p.54.
193. Квицинский А.А. — ТМФ, 1984, т.59, с.472.
194. Квицинский А.А. — ТМФ, 1985, т.65, с.226.

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЛЕГКИХ ЯДРАХ НА ОСНОВЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ КЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ

*С.Б.Дубовиченко, А.В.Джазаиров-Кахраманов*

Казахский государственный национальный университет, Аль-Фараби, 71,  
480121, Алма-Ата, Казахстан, E-mail: eldar@ag.alma-ata.su

Рассматриваются процессы фоторазвала и радиационного захвата в каналах  $N^2H$ ,  $N^3H$ ,  $N^3He$ ,  $^2H^2H$ ,  $^2H^3He$ ,  $^2H^4He$ ,  $^3He^3H$ ,  $^4He^3H$ ,  $^4He^3He$  на основе соответствующих потенциальных двухкластерных моделей. Вычисляются астрофизические  $S$ -факторы при малых энергиях. Показана возможность описания различных электромагнитных характеристик легких ядер, включая кулоновские формфакторы при импульсах до  $4 \text{ fm}^{-1}$ , на основе единых наборов межкластерных взаимодействий, которые содержат запрещенные состояния и согласованы с фазами упругого рассеяния кластеров при низких энергиях. Расчетные неупругие формфакторы при  $3\text{--}4 \text{ fm}^{-1}$  имеют второй максимум, хотя его величина меньше экспериментальной. В легчайших кластерных системах проводится классификация орбитальных состояний и выполняется разделение фаз рассеяния и межкластерных потенциалов по орбитальным схемам Юнга.

Photodisintegration and radiation capture process are considered in  $N^2H$ ,  $N^3H$ ,  $N^3He$ ,  $^2H^2H$ ,  $^2H^3He$ ,  $^2H^4He$ ,  $^3He^3H$ ,  $^4He^3H$ ,  $^4He^3He$  channels on the basis of corresponding two-cluster potential models. Astrophysical  $S$ -factors are calculated at low energies. It is possible to describe different electromagnetic characteristics of light nuclei, including Coulomb form-factors at momenta up to  $4 \text{ fm}^{-1}$ , using one set of intercluster interactions containing forbidden states and corresponding to phase shifts of cluster elastic scattering at low energies. The calculated inelastic form-factors have the second maximum (peak) at  $3\text{--}4 \text{ fm}^{-1}$  although it is lower than the experimental one. Orbital state classification is made for the lightest cluster systems as well as scattering phase shift and intercluster potential separation on the basis of Young's orbital schemes.

## ВВЕДЕНИЕ

Около двух десятков лет назад в работах [1,2] впервые было показано, что фазы упругого рассеяния легких кластерных систем могут быть описаны на основе глубоких, чисто притягивающих потенциалов вудс-саксоновского типа, которые содержат запрещенные связанные состояния (ЗС). Структура

ЗС определяется перестановочной симметрией волновых функций (ВФ) системы относительно нуклонных перестановок. Поведение фаз рассеяния при нулевой энергии для данного вида взаимодействий подчиняется обобщенной теореме Левинсона [2]:

$$\delta_L = \pi(N_L + M_L),$$

где  $N_L$  и  $M_L$  — число запрещенных и разрешенных связанных состояний. Фазы при больших энергиях стремятся к нулю, все время оставаясь положительными. Такой подход, по-видимому, можно рассматривать, как альтернативу концепции отталкивающего кора, который вводится для качественного учета принципа Паули, без выполнения полной антисимметризации ВФ. Радиальная ВФ разрешенных состояний (РС) потенциалов с ЗС осциллирует на малых расстояниях, а не вымирает, как это было при взаимодействии с кором.

В дальнейшем в [3] были получены гауссовские потенциалы с ЗС, параметры которых согласованы с фазами упругого рассеяния, и показано, что их использование в простых одноканальных  ${}^4\text{He}^3\text{H}$  и  ${}^4\text{He}^2\text{H}$  кластерных моделях позволяет вполне успешно описать некоторые характеристики основных состояний (ОС) ядер  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Li}$ , вероятность кластеризации которых в этих каналах сравнительно высока. Различные оценки дают для  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -кластеризации величину 0,6—0,8 и  $\sim 0,9$  для системы  ${}^4\text{He}^3\text{H}$  [4]. Определенный успех одноканальной модели, основанный на таких потенциалах, обусловлен не только большой степенью кластеризации указанных ядер, но и тем, что в каждом состоянии кластеров существует только одна разрешенная орбитальная схема Юнга [2,5], определяющая симметрию этого состояния. Тем самым достигается некоторое «единое» описание непрерывного и дискретного спектров, и потенциалы, полученные на основе экспериментальных фаз рассеяния, удается вполне успешно использовать для описания различных характеристик ОС ядер лития. В таких расчетах используется потенциальная кластерная модель, где считается, что ядро состоит из двух бесструктурных фрагментов, которым можно сопоставить свойства соответствующих частиц в свободном состоянии. Антисимметризация волновой функции системы не проводится, но межкластерные взаимодействия содержат ЗС [3].

Для более легких кластерных систем вида  $\text{N}^2\text{H}$ ,  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ ,  $\text{N}^3\text{H}$ ,  $\text{N}^3\text{He}$  и  ${}^2\text{H}^3\text{He}$  в состояниях рассеяния с минимальным спином уже возможно смешивание по орбитальным симметриям, и ситуация здесь оказывается более сложной. В состояниях с минимальным спином в непрерывном спектре разрешены две орбитальные симметрии с различными схемами Юнга, в то время как связанным ОС, по-видимому, соответствует только одна схема

[6—8]. Поэтому потенциалы, непосредственно полученные на основе экспериментальных фаз рассеяния, эффективно зависят от различных орбитальных схем и не могут в таком виде использоваться для описания характеристик ОС. Из таких взаимодействий необходимо выделять чистую компоненту, применимую уже при анализе характеристик связанных состояний (СС). Результаты тогда в основном будут зависеть от степени кластеризации ядра в рассматриваемых каналах.

В работах [6—8] было показано, что для легчайших кластерных систем экспериментальные смешанные фазы могут быть представлены в виде полусуммы чистых фаз с определенными схемами Юнга. Обычно считают, что в качестве одной из чистых фаз канала с минимальным спином можно использовать аналогичную чистую фазу другого спинового состояния или системы, чистой по изоспину. В таком случае по экспериментальным фазам легко найти чистую фазу максимальной симметрии канала с минимальным спином и по ней параметризовать чистые взаимодействия. В частности, в [6—8] получены такие  $N^2H$ ,  $N^3H$ ,  $N^3He$ ,  ${}^2H^2H$  и  ${}^2H^3He$  чистые гауссовские взаимодействия и показано [8], что удастся в общем правильно передать энергию связи ядер  ${}^3H$ ,  ${}^3He$  и  ${}^4He$  в кластерных каналах, асимптотическую константу, зарядовый радиус и упругий кулоновский формфактор при малых переданных импульсах.

Следует отметить, что смешивание по орбитальным схемам Юнга в состояниях с минимальным спином характерно не только для большинства легких кластерных систем, но реализуется и в более тяжелых системах вида  $N^6Li$ ,  $N^7Li$  и  ${}^2H^6Li$  [9].

С учетом полученных ранее взаимодействий были рассмотрены и сечения фотопроцессов в рамках тех же кластерных моделей, которые, несмотря на свою простоту, в ряде случаев позволяют получить хорошие результаты на основе потенциалов, параметры которых изначально фиксированы по экспериментальным фазам рассеяния и практически не меняются в процессе дальнейших вычислений [6,7,10].

## 1. МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ

Для расчетов сечений фотопроцессов в длинноволновом приближении использовалось известное выражение [11]:

$$\frac{d\sigma_c(N)}{d\Omega} = \frac{K\mu}{2\pi\hbar^2q} \frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \sum_{m_i, m_f, \lambda} |M_{J\lambda}(N)|^2, \quad (1)$$

где  $N = E$  или  $M$  и



$$M_{J\lambda}(N) = \sum_J i^J \sqrt{2\pi(2J+1)} \frac{K^J}{(2J+1)!!} \left[ \frac{J+1}{J} \right]^{1/2} \lambda \sum_m D_{m\lambda}^J \langle f | H_{Jm}(N) | i \rangle,$$

$$H_{Jm}(E) = Q_{Jm}(L) + Q_{Jm}(S), \quad H_{Jm}(M) = W_{Jm}(L) + W_{Jm}(S),$$

$$Q_{Jm}(L) = e \sum_i Z_i r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i), \quad Q_{Jm}(S) = \frac{e\hbar}{m_0 c} K \left[ \frac{J}{J+1} \right]^{1/2} \sum_i \mu_i \hat{S}_i r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i),$$

$$W_{Jm}(L) = i \frac{e\hbar}{m_0 c} \frac{1}{J+1} \sum_i \frac{Z_i}{M_i} \hat{L}_i \nabla_i (r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i)),$$

$$W_{Jm}(S) = i \frac{e\hbar}{m_0 c} \sum_i \mu_i \hat{S}_i \nabla_i (r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i)).$$

Здесь  $J$  — мультипольность,  $q$  — волновое число относительного движения кластеров,  $D_{m\lambda}^J$  — функция Вигнера,  $\mu$  — приведенная масса,  $M_i$ ,  $Z_i$ ,  $\hat{S}_i$  и  $\hat{L}_i$  — массы, заряды, спины и орбитальные моменты кластеров,  $\mu_i$  — магнитные моменты кластеров,  $K$  — волновое число фотона,  $m_0$  — масса нуклона. Знак оператора  $Q_{Jm}(S)$  выбран отрицательным, как приведено в работе [12]. Интегрируя по углам и суммируя это выражение по  $\lambda$ , для полного сечения захвата получаем [10]:

$$\sigma_c(J) = \frac{8\pi K^{2J+1}}{\hbar^2 q} \frac{\mu}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \frac{J+1}{J(2J+1)!!^2} \sum_{m, m_i, m_j} |M_{Jm}(N)|^2,$$

$$M_{Jm}(N) = i^J \langle f | H_{Jm}(N) | i \rangle, \tag{2}$$

где в кластерной модели электромагнитные операторы принимают вид

$$Q_{Jm}(L) = e\mu^J \left[ \frac{Z_1}{M_1^J} + (-1)^J \frac{Z_2}{M_2^J} \right] R^J Y_{Jm} = A_J R^J Y_{Jm},$$

$$Q_{Jm}(S) = -\frac{e\hbar}{m_0 c} K \left[ \frac{J}{J+1} \right]^{1/2} \left[ \mu_1 \hat{S}_1 \frac{M_2^J}{M^J} + (-1)^J \mu_2 \hat{S}_2 \frac{M_1^J}{M^J} \right] R^J Y_{Jm} =$$

$$= (B_{1J} \hat{S}_1 + B_{2J} \hat{S}_2) R^J Y_{Jm},$$

$$\begin{aligned}
 W_{J_m}(L) &= i \frac{e\hbar}{m_0c} \frac{\sqrt{J(2J+1)}}{J+1} \left[ \frac{Z_1}{M_1} \frac{M_2^J}{M^J} + (-1)^{J-1} \frac{Z_2}{M_2} \frac{M_1^J}{M^J} \right] R^{J-1} \hat{L} Y_{J_m}^{J-1} = \\
 &= C_J R^{J-1} \hat{L} Y_{J_m}^{J-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{J_m}(S) &= i \frac{e\hbar}{m_0c} \sqrt{J(2J+1)} \left[ \mu_1 \hat{S}_1 \frac{M_2^{J-1}}{M^{J-1}} + (-1)^{J-1} \mu_2 \hat{S}_2 \frac{M_1^{J-1}}{M^{J-1}} \right] R^{J-1} Y_{J_m}^{J-1} = \\
 &= (D_{1J} \hat{S}_1 + D_{2J} \hat{S}_2) R^{J-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $R$  — межкластерное расстояние и  $M$  — масса ядра. Используем в дальнейшем ВФ связанных состояний кластеров в обычной форме [3]:

$$|f\rangle = \Psi_f = \sum_{L_f J_f} R_{L_f J_f} \Phi_{J_f m_f}^{L_f S}, \quad R_{LJ} = \frac{U_{LJ}}{r}. \quad (3)$$

Функцию рассеяния запишем в виде [11]:

$$|i\rangle = \Psi_i = \frac{1}{q} \sum_{L_i J_i} i^{L_i} \sqrt{4\pi(2L_i+1)} (L_i 0 S m_i | J_i m_i) e^{i\delta_{L_i J_i}} R_{L_i J_i} \Phi_{J_i m_i}^{L_i S}. \quad (4)$$

Здесь  $R_{LJ}$  — радиальная ВФ, вычисленная из решения уравнения Шредингера с известными потенциалами. Используя эти ВФ, для полного сечения захвата окончательно получаем [10]:

$$\sigma_c(j) = \frac{8\pi K^{2J+1}}{\hbar^2 q^3} \frac{\mu}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \frac{J+1}{J[(2J+1)!!]^2} \sum_{\substack{L_i, L_f \\ J_i, J_f}} |T_j(M)|^2, \quad (5)$$

где

$$T_j(E) = A_j J_j P_j + (B_{1j} N_{1j} + B_{2j} N_{2j}) I_j,$$

$$T_j(M) = C_j J_{j-1} G_j + (D_{1j} N_{1j} + D_{2j} N_{2j}) I_{j-1},$$

$$\begin{aligned}
 P_j &= \sqrt{4\pi} \langle J_f L_f S || Y_j || J_i L_i S \rangle = (-1)^{J+S+L_i+L_f} (L_i 0 J 0 | L_f 0) \times \\
 &\times \sqrt{(2J_i+1)(2J_f+1)(2J+1)(2L_i+1)} \begin{Bmatrix} L_i S J_i \\ J_f J L_f \end{Bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$G_J = \sqrt{4\pi} \langle J_f L_f S \| \hat{L} Y_J^k \| J_i L_i S \rangle = (-1)^{S+L_i+J_i} \langle L_i 0 k 0 | L_f 0 \rangle (2L_i + 1) \times \\ \times \sqrt{L_i(2L_i + 1)(2k + 1)(2J_i + 1)(2J_f + 1)(2J + 1)} \begin{Bmatrix} L_i & 1 & L_i \\ k & L_f & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S & L_i & J_i \\ J & J_f & L_f \end{Bmatrix},$$

$$N_J = \sqrt{4\pi} \langle J_f L_f S \| \hat{S} Y_J^k \| J_i L_i S \rangle = (-1)^{k+1-J+L_i+L_f+2S-J_i-J_f} \langle L_i 0 k 0 | L_f 0 \rangle \times \\ \times \begin{Bmatrix} S & 1 & S \\ L_i & k & L_f \\ J_i & J & J_f \end{Bmatrix} \sqrt{S(S+1)(2S+1)(2k+1)(2L_i+1)(2J_i+1)(2J_f+1)},$$

$I_J$  — радиальные интегралы вида  $I_J = \langle L_f | R^J | L_i \rangle$ .

В приведенных выражениях аналитически вычисляются все величины, кроме радиальных интегралов, которые находятся численно из решения уравнения Шредингера по определенным волновым функциям СС и рассеяния. Асимптотика радиальной ВФ рассеяния представляется в виде

$$R_{LJ} \rightarrow F_L(qr) \cos(\delta_{LJ}) + G_L(qr) \sin(\delta_{LJ}), \quad (6)$$

где  $F_L$  и  $G_L$  — волновые кулоновские функции,  $\delta_{LJ}$  — фазы рассеяния.

Достаточно сложно численно получить ВФ СС на расстояниях порядка 20—30 фм. Поэтому численное решение для СС шивалось на 10—20 фм с асимптотикой функции Уиттекера:

$$R_{LJ} = \frac{\sqrt{2K_0}}{r} C_0 W_{L\eta}(2K_0 r), \quad W_{L\eta}(2K_0 r) = (2K_0 r)^\eta \exp(-K_0 r), \quad (7)$$

где  $\eta$  — кулоновский параметр и  $K_0$  — волновое число, определяемое энергией связи,  $C_0$  — асимптотическая константа.

Используя формулы (3), можно вычислять и некоторые статические электромагнитные характеристики ядер. В частности, для квадрупольного, магнитного, октупольного моментов и приведенных вероятностей радиационных переходов в двухкластерной модели для  ${}^7\text{Li}$  с  $J_0 = 3/2^-$  имеем

$$Q = -\frac{2}{5} Y I_2 = -\frac{2}{5} \frac{34}{49} I_2,$$

$$Y = (Z_1 M_2^2 + Z_2 M_1^2) / M^2, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = X + \mu_1 = \frac{17}{42} + \mu_1,$$

$$X = \frac{1}{M} \left( \frac{Z_1 M_2}{M_1} + \frac{Z_2 M_1}{M_2} \right), \quad \frac{\Omega}{\mu} = \frac{3}{5} \frac{M_2^2}{M^2} I_2 = \frac{48}{245} I_2, \quad (8)$$

$$B(M1) = \frac{1}{4\pi} (2\mu_1 - X)^2 I_0^2 = \frac{1}{4\pi} (3\mu_1 - \mu)^2 I_0^2, \quad B(E2) = \frac{1}{4\pi} Y^2 I_2^2.$$

Здесь первым кластером считается тритон или  $^3\text{He}$ , обладающие магнитным моментом, и  $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_0c}$  — ядерный магнетон.

Магнитный и зарядовый радиусы в кластерной модели определяются в виде [3,13]:

$$\begin{aligned} \mu R_m^2 &= \frac{4}{21} \langle r_t^2 \rangle + \frac{3}{14} \langle r_t^2 \rangle + \mu_t \langle r_{tm}^2 \rangle + \left( \frac{209}{3430} + \frac{432}{1225} \mu_t \right) I_2, \\ R_r^2 &= \frac{M_1}{M} \langle r_1^2 \rangle + \frac{M_2}{M} \langle r_2^2 \rangle + \frac{M_1 M_2}{M^2} I_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $M_i$  и  $M$  — массы кластеров и ядра,  $\langle r_i \rangle$  — радиусы кластеров, а интегралы  $I_2$  были определены выше (5).

Для расчетов кулоновских формфакторов использовались результаты работы [3], где показано, что формфактор представляется в виде

$$F_J^2 = \frac{1}{Z^2} V_J^2 B_J, \quad B_J = (2J_f + 1) (2J + 1) (2L_i + 1) (L_i 0 J_0 | L_f 0)^2 \left\{ \begin{matrix} L_i & S & J_i \\ J_f & J & L_f \end{matrix} \right\}^2, \quad (10)$$

где  $L_{i,f}$  и  $J_{i,f}$  — орбитальные и полные моменты начального  $i$  и конечного  $f$  состояний ядра,  $J$  — мультипольность формфактора,  $Z$  — заряд ядра и

$$V_J = Z_1 F_1 I_{2,J} + Z_2 F_2 I_{1,J}. \quad (11)$$

$Z_k, F_k$  — заряды и формфакторы  $k$ -го кластера,  $I_{k,J}$  — радиальные матричные элементы по функциям начального и конечного состояний от сферических функций Бесселя:

$$I_{k,J} = \langle L_f J_f | j_J(g_k r) | L_i J_i \rangle, \quad (12)$$

где  $k = 1, 2$  и  $g_k = (M_k/M)q$ , а  $q$  — переданный импульс,  $j_J(g_k r)$  — сферическая функция Бесселя.

При вычислении формфакторов волновые функции рассеяния при резонансных энергиях нормировались на асимптотику вида [14]:

$$U_L = \exp(-\delta_L) (F_L \cos(\delta_L) + G_L \sin(\delta_L)). \quad (13)$$

Вероятность  $E2$ -переходов и зарядовый радиус могут быть определены на основе кулоновских формфакторов [3]:

$$B(E2) = \frac{225Z^2}{4\pi} \lim_{q \rightarrow 0} \left( \frac{F_{C2}^2}{q^4} \right), \quad R_f^2 = 6 \lim_{q \rightarrow 0} \left( \frac{1 - F(q)}{q^2} \right). \quad (14)$$

Для нахождения волновых функций основных и резонансных состояний в двухкластерной системе использовались конечно-разностный (КРМ) и вариационный методы (ВМ) решения радиального уравнения Шредингера [3]:

$$U''_L + (k^2 - V(r))U_L = 0. \quad (15)$$

Волновые функции в матричных элементах (МЭ) (12) для основных и резонансных состояний могут быть представлены в виде разложения по гауссоидам вида [3,15]:

$$|LJ\rangle = R_L = r^L \sum_i C_i \exp(-\gamma_i r^2), \quad (16)$$

где  $\gamma_i$  и  $C_i$  — вариационные параметры, и коэффициенты разложения находятся вариационным методом для связанных состояний или аппроксимацией гауссоидами численных ВФ резонансных уровней [15]. В этом случае МЭ (12) вычисляются аналитически [3].

## 2. КЛАССИФИКАЦИЯ КЛАСТЕРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим для примера классификацию состояний в  $N^2H$ -системе в том виде, как она приводится в табл.1. Здесь спин системы может принимать значения  $1/2$  и  $3/2$ , а изоспин  $1/2$ . Спиновая и изоспиновая волновые функции характеризуются определенными схемами Юнга  $\{f\}_S$  и  $\{f\}_T$ , которые задают их симметрию относительно перестановок соответствующих координат нуклонов [5]. Так, спиновая симметрия характеризуется схемами  $\{3\}_S$  при  $S=3/2$  и  $\{21\}_S$  при  $S=1/2$ , а изоспиновая —  $\{21\}_T$ . Поскольку симметрия спин-изоспиновой ВФ определяется прямым внутренним произведением  $\{f\}_{ST} = \{f\}_S \otimes \{f\}_T$  [5], то в дублетном канале имеем  $\{f\}_{ST} = \{1^3\} + \{21\} + \{3\}$  [16]. В квартетном канале такое произведение дает только

Таблица 1. Классификация разрешенных и запрещенных состояний в легких кластерных системах.

$L$  — орбитальный момент для связанных состояний

Сис-тема	$T$	$S$	$\{f\}_S$	$\{f\}_T$	$\{f\}_{ST}$	$\{f\}_L$	$L$	$\{f\}_{PC}$	$\{f\}_{3C}$	
$N^2H$	1/2	1/2	{21}	{21}	{11}+{21}+{3}	{3}	0	{3}	—	
		3/2	{3}	{21}	{21}	{21}	{3}	0	—	{3}
			{3}	{21}	{21}	{21}	{21}	1	{21}	—
$n^3He$ $p^3H$	0	0	{22}	{22}	{4}+{22}+{1111}	{4}	0	{4}	—	
		1	{31}	{22}	{31}+{211}	{4}	0	—	{4}	
$p^3He$ $n^3H$ $p^3H$ $n^3He$	1	0	{22}	{31}	{31}+{211}	{4}	0	—	{4}	
		1	{31}	{31}	{4}+{31}+{21}+ +{211}	{31}	1	{31}	—	
			{31}	{31}	{4}	0	—	{4}	—	
			{31}	{31}	{31}	1	{31}	—		
$^2H^2H$	0	0	{22}	{22}	{4}+{22}+{1111}	{4}	0	{4}	—	
		1	{31}	{22}	{31}+{211}	{31}	1	—	{31}	
			{31}	{22}	{31}+{211}	{4}	0	—	{4}	
			{31}	{22}	{31}+{211}	{31}	1	{31}	—	
			{31}	{22}	{31}+{211}	{22}	0,2	—	{22}	
			{31}	{22}	{31}+{211}	{4}	0	—	{4}	
{31}	{22}	{31}+{211}	{31}	1	{31}	—				
$^2H^3He$ $^2H^3H$	1/2	1/2	{32}	{32}	{5}+{41}+{32}+ +{311}+{221}+ +{2111}	{5}	0	—	{5}	
		3/2	{41}	{32}	{41}+{32}+{311}+ +{221}	{41}	1	{41}	—	
			{41}	{32}	{41}+{32}+{311}+ +{221}	{32}	0,2	{32}	—	
$p^4He$ $n^4He$	1/2	1/2	{32}	{32}	{5}+{41}+{32}+ +{311}+{221}+ +{2111}	{5}	0	—	{5}	
		{32}	{32}	{5}+{41}+{32}+ +{311}+{221}+ +{2111}	{41}	1	{41}	—		
$^4He^2H$	0	1	{42}	{33}	{51}+{411}+{33}+ +{321}+{2211}	{6}	0	—	{6}	
		1	{42}	{33}	{51}+{411}+{33}+ +{321}+{2211}	{51}	1	—	{51}	
			{42}	{33}	{51}+{411}+{33}+ +{321}+{2211}	{42}	0,2	{42}	—	

Сис-тема	$T$	$S$	$\{f\}_S$	$\{f\}_T$	$\{f\}_{ST}$	$\{f\}_L$	$L$	$\{f\}_{PC}$	$\{f\}_{3C}$		
${}^3\text{He}{}^3\text{H}$	0	0	{33}	{33}	{42}+{222}+{6}+ {3111}	{6}	0	—	{6}		
						{51}	1	—	{51}		
						{42}	0,2	—	{42}		
		1	{42}	{33}	{51}+{411}+{33}+ +{321}+{2211}	{6}	0	—	{6}		
						{51}	1	—	{51}		
						{42}	0,2	{42}	—		
					{33}	1,3	—	{33}			
${}^3\text{H}{}^3\text{He}$ ${}^3\text{He}{}^3\text{He}$ ${}^3\text{He}{}^3\text{H}$	1	0	{33}	{42}	{51}+{411}+{33}+ +{321}+{2211}	{6}	0	—	{6}		
						{51}	1	—	{51}		
						{42}	0,2	{42}	—		
		1	{42}	{42}	{6}+2{42}+{51}+ +{411}+2{321}+ +{222}+{3111}	{6}	0	—	{6}		
						{51}	1	—	{51}		
						{42}	0,2	—	{42}		
					{33}	1,3	{33}	—			
${}^4\text{He}{}^3\text{H}$	1/2	1/2	{43}	{43}	{7}+{61}+{52}+ +{511}+{43}+ +{421}+{4111}+ +{322}+{3211}+ +{2221}+{331}	{7}	0	—	{7}		
						{61}	1	—	{61}		
						{52}	0,2	—	{52}		
						{43}	1,3	{43}	—		
$n{}^6\text{Li}$ $p{}^6\text{Li}$	1/2	1/2	{43}	{43}	{7}+{61}+{52}+ +{511}+{43}+ +{421}+{4111}+ +{322}+{3211}+ +{2221}+{331}	{7}	0	—	{7}		
						{61}	1	—	{61}		
						{52}	0,2	—	{52}		
						{43}	1,3	{43}	—		
						{421}	1,2	{421}	—		
		3/2	{52}	{43}	{61}+{52}+{511}+ +{43}+2{421}+ +{331}+{322}+ +{3211}	{7}	0	—	{7}		
						{61}	1	—	{61}		
						{52}	0,2	—	{52}		
						{43}	1,3	—	{43}		
						{421}	1,2	{421}	—		
${}^4\text{He}{}^4\text{He}$	0	0	{44}	{44}	{8}+{62}+{5111}+ +{44}+{422}+ +{3311}+{2222}	{8}	0	—	{8}		
						{71}	1	—	{71}		
						{62}	0,2	—	{62}		
						{53}	1,3	—	{53}		
						{44}	0,2,4	{44}	—		
$p{}^7\text{Li}$	0	1	{53}	{44}	{71}+{611}+{53}+ +{521}+{431}+	{8}	0	—	{8}		
						{71}	1	—	{71}		

Сис-тема	$T$	$S$	$\{f\}_S$	$\{f\}_T$	$\{f\}_{ST}$	$\{f\}_L$	$L$	$\{f\}_{PC}$	$\{f\}_{3C}$					
		2	{62}	{44}	$\{4211\} + \{332\} +$ $\{3221\}$	{53}	1,3	—	{53}					
						{44}	0,2,4	—	{44}					
						{431}	1,2,3	{431}	—					
					$\{62\} + \{521\} + \{44\} +$ $\{431\} + \{422\} +$ $\{3311\}$	{8}	0	—	{8}					
						{71}	1	—	{71}					
						{53}	1,3	—	{53}					
						{44}	0,2,4	—	{44}					
						{431}	1,2,3	—	{431}					
					$n^7\text{Li}$ $p^7\text{Li}$	1	1	{53}	{53}	$\{8\} + 2\{62\} + \{71\} +$ $\{611\} + \{53\} + \{44\} +$ $2\{521\} + \{5111\} +$ $\{44\} + \{332\} +$ $2\{431\} + 2\{422\} +$ $\{4211\} + \{3311\} +$ $\{3221\}$	{8}	0	—	{8}
											{71}	1	—	{71}
	{53}	1,3	—	{53}										
	{44}	0,2,4	—	{44}										
	{431}	1,2,3	{431}	—										
2	{62}	{53}	$\{71\} + \{62\} + \{611\} +$ $2\{53\} + 2\{521\} +$ $2\{431\} + \{422\} +$ $\{4211\} + \{332\}$	{8}			0			—	{8}			
				{71}			1			—	{71}			
				{53}			1,3			—	{53}			
				{44}			0,2,4			—	{44}			
				{431}			1,2,3			—	{431}			
$^2\text{H}^6\text{Li}$	0	0	{44}	{44}	$\{8\} + \{62\} + \{5111\} +$ $\{44\} + \{422\} +$ $\{3311\} + \{2222\}$	{8}	0	—	{8}					
						{71}	1	—	{71}					
						{62}	0,2	—	{62}					
						{53}	1,3	—	{53}					
						{521}	1,2	—	{521}					
						{44}	0,2,4	{44}	—					
						{431}	1,2,3	—	{431}					
						{422}	0,2	{422}	—					
					1	{53}	{44}	$\{71\} + \{611\} + \{53\} +$ $\{521\} + \{431\} +$ $\{4211\} + \{332\} +$ $\{3221\}$	{8}	0	—	{8}		
									{71}	1	—	{71}		
	{62}	0,2	—	{62}										
	{53}	1,3	—	{53}										
	{521}	1,2	—	{521}										
	{44}	0,2,4	—	{44}										
	{431}	1,2,3	{431}	—										
	{422}	0,2	—	{422}										



Сис-тема	$T$	$S$	$\{f\}_S$	$\{f\}_T$	$\{f\}_{ST}$	$\{f\}_L$	$L$	$\{f\}_{PC}$	$\{f\}_{3C}$
		2	{62}	{44}	{62}+{521}+{44}+	{8}	0	—	{8}
					+{431}+{422}+	{71}	1	—	{71}
					+{3311}	{62}	0,2	—	{62}
						{53}	1,3	—	{53}
						{521}	1,2	—	{521}
						{44}	0,2,4	—	{44}
						{431}	1,2,3	—	{431}
						{422}	0,2	{422}	—

одну схему  $\{21\}_{ST}$ . Симметрия полной ВФ с учетом ее орбитальной компоненты определяется аналогично  $\{f\} = \{f\}_L \otimes \{f\}_{ST}$ . Полная ВФ системы при антисимметризации не обращается тождественно в нуль только тогда, когда содержит антисимметричную компоненту  $\{1^N\}$ , что реализуется при перемножении сопряженных  $\{f\}_L$  и  $\{f\}_{ST}$ . Поэтому схемы  $\{f\}_L$ , сопряженные  $\{f\}_{ST}$ , считаются разрешенными в данном канале. Возможные орбитальные схемы Юнга в системе  $N = n_1 + n_2$  частиц можно определить по теореме Литлвуда [5] как прямое внешнее произведение орбитальных схем каждой из подсистем, что в данном случае дает  $\{f\}_L = \{2\} \times \{1\} = \{21\}_L + \{3\}_L$ . Здесь схема  $\{2\}$  соответствует дейтрону с  $LS = 01$ . Отсюда видно, что в квартетном канале разрешена только орбитальная ВФ с симметрией  $\{21\}_L$ , а функция с  $\{3\}_L$  оказывается запрещенной, так как произведение  $\{21\}_{ST} \otimes \{3\}_L$  не приводит к антисимметричной компоненте ВФ. В то же время в дублетном канале имеем  $\{3\}_{ST} \otimes \{1^3\}_L = \{1^3\}$  и  $\{21\}_{ST} \otimes \{21\}_L \sim \{1^3\}$ , и в обоих случаях получаем антисимметричную схему. Тем самым в дублетном канале оказываются разрешенными обе возможные орбитальные схемы Юнга  $\{21\}_L$  и  $\{3\}_L$  [6,7].

Именно этот результат приводит к понятию смешивания по орбитальным схемам в состояниях с определенными  $ST = 1/21/2$  при любых  $L$ . Поэтому дублетный потенциал взаимодействия в  $S$ -волне, полученный из экспериментальных фаз рассеяния, эффективно зависит от обеих орбитальных схем, в то время как основное состояние соответствует чистой симметрии  $\{3\}_L$ . Значит, в  $N^2N$ -системе эти потенциалы различны, и из взаимодействий рассеяния  $V^{\{3\} + \{21\}}$  надо выделять компоненту  $V^{\{3\}}$ , в принципе применимую для расчетов характеристик ОС [6—8]. В частности, при рас-

чете фотопроцессов для описания связанных состояний можно применять чистый по схемам Юнга потенциал, а для состояний рассеяния, например, для конечных состояний фоторазвала, — потенциал, непосредственно получаемый из экспериментальных фаз.

Как уже говорилось, экспериментальные фазы дублетного канала могут быть представлены в виде полусуммы чистых фаз со схемами  $\{21\}_L$  и  $\{3\}_L$ . Если допустить, что в качестве дублетных фаз с  $\{21\}_L$  могут быть использованы квартетные фазы, чистые по орбитальным схемам  $\{21\}_L$ , то легко найти и чистые дублетные фазы с  $\{3\}_L$  и по ним параметризовать чистые взаимодействия.

Полная классификация разрешенных и запрещенных состояний для легких кластерных систем приведена в табл.1 [9].

### 3. МЕЖКЛАСТЕРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Для расчетов ВФ рассеяния и СС использовались центральные гауссовские потенциалы [10]:

$$V(r) = -V_0 \exp(-\alpha r^2) + V_c(r), \quad V_c(r) = \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2}{r}, & r > R_c \\ Z_1 Z_2 \left( 3 - \frac{r^2}{R_c^2} \right) / 2R_c, & r < R_c. \end{cases} \quad (17)$$

В некоторых случаях к ним добавлялось периферическое отталкивание  $V_1 \exp(-\beta r)$ , необходимое для правильного описания отрицательных значений  $D$ - или  $F$ -фаз при малых энергиях, если  $S$ - или  $P$ -фазы положительны. Потенциалы восстанавливались по фазам рассеяния кластеров так, чтобы одну парциальную волну описывала одна гауссоида с определенными параметрами в максимально широкой области энергий.

Вначале рассмотрим потенциалы межкластерного взаимодействия и характеристики кластерных ядер для чистых систем  $p^3\text{He}$ ,  $n^3\text{H}$ ,  $^4\text{He}^3\text{H}$ ,  $^4\text{He}^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}^2\text{H}$ ,  $^3\text{He}^3\text{H}$ , а затем перейдем к потенциалам, смешанным по схемам Юнга.

**3.1. Кластерные системы  $^4\text{He}^2\text{H}$ ,  $^3\text{He}^3\text{H}$  и  $^4\text{He}^3\text{H}$ .** Как видно из табл.1, орбитальные состояния в системах  $^4\text{He}^2\text{H}$ ,  $^4\text{He}^3\text{H}$ ,  $^4\text{He}^3\text{He}$  и  $^3\text{He}^3\text{H}$  для ядер  $^6\text{Li}$  и  $^7\text{Li}$ ,  $^7\text{Be}$  — чистые по схемам Юнга. Поэтому потенциалы, полученные на основе фаз рассеяния, можно использовать для рассмотрения ха-

Таблица 2. Параметры потенциалов  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ -,  ${}^4\text{He}^3\text{He}$ -,  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ - и  ${}^3\text{He}^3\text{H}$ -рассеяния. Для  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ - и  ${}^4\text{He}^3\text{He}$ -системы  $\alpha = 0,15747 \text{ фм}^{-2}$  и  $R_c = 3,095 \text{ фм}$ , для  ${}^4\text{He}^2\text{H}$  и  ${}^3\text{He}^3\text{H}$   $R_c = 0$

${}^7\text{Li}({}^7\text{Be})$		${}^6\text{Li}({}^4\text{He}^2\text{H})$			${}^6\text{Li}({}^3\text{He}^3\text{H})$			
$L_J$	$V_{0r}$ МэВ	$L_J$	$V_{0r}$ МэВ	$\alpha$ , $\text{фм}^{-2}$	$S = 1$		$S = 0$	
					$V_{0r}$ МэВ	$\alpha$ , $\text{фм}^{-2}$	$V_{0r}$ МэВ	$\alpha$ , $\text{фм}^{-2}$
$S$	67,5	$S$	76,12	0,2	90	0,18	85,0	0,18
$P_{1/2}$	81,92	$P_0$	68,0	0,22	52,5	0,2		
$P_{3/2}$	83,83	$P_1$	79,0	0,22	65,0	0,2	74,0	0,2
$D_{3/2}$	66,0	$P_2$	85,0	0,22	80,0	0,2		
$D_{5/2}$	69,0	$D_1$	63,0	0,19	72,0	0,18		
$F_{5/2}$	75,9	$D_2$	69,0	0,19	85,0	0,18	85,0	0,18
$F_{7/2}$	84,8	$D_3$	80,88	0,19	90,0	0,18		

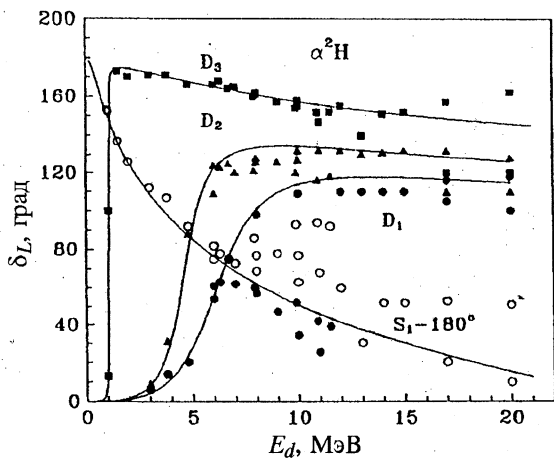


Рис.1. Фазы упругого  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -рассеяния, кривые — расчеты для потенциалов с параметрами из табл.2. Здесь и далее пояснения экспериментальных и МРГ-точек даны в тексте

рактических СС. Результаты будут зависеть только от степени кластеризации ядер в кластерных каналах. А поскольку вероятность кластеризации этих ядер сравнительно высока, то и результаты расчетов должны в целом передавать экспериментальные данные. Параметры взаимодействий для чистых состояний в  ${}^6\text{Li}$  и  ${}^7\text{Li}$ , полученные в работах [3,10], приведены в табл.2. Взаимодействия в  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ - и  ${}^4\text{He}^3\text{He}$ -системах отличаются только кулоновским членом.

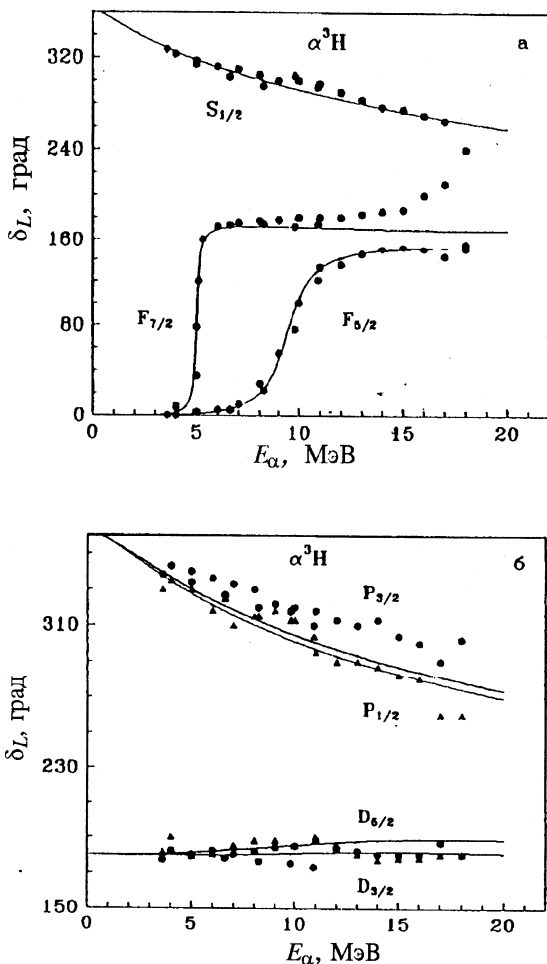


Рис.2. Фазы упругого  $^4\text{He}^3\text{He}$ -рассеяния, кривые — расчеты для потенциалов с параметрами из табл.2

Для  $^3\text{He}^3\text{He}$ -системы из-за отсутствия экспериментальных данных потенциалы строились исключительно по вычислениям фаз методом резонирующих групп (МРГ) [17]. Параметры этих взаимодействий совпадают с  $^3\text{He}^3\text{He}$  при  $S = 0$ , однако здесь четные  $L$  соответствуют только  $S = 0$ , а нечетные  $S = 1$ .

Качество описания фаз показано на рис.1—4 вместе с экспериментальными данными [18] для  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ , [19,20] —  ${}^4\text{He}^3\text{H}$  и [21] —  ${}^3\text{He}^3\text{H}$ . На рис.3—4 крестиками показаны расчеты  ${}^3\text{He}^3\text{H}$ -фаз, полученные в методе резонирующих групп [22]. Приведенные в табл.2 триплетные  ${}^3\text{He}^3\text{H}$ -потенциалы, фазы которых показаны на рис.3,а непрерывными линиями, неверно передают энергию СС  ${}^6\text{Li}$ . Для получения правильной величины — 15,8 МэВ для ОС необходимо увеличить глубину взаимодействия до 105 МэВ. Для описания энергии  $D_3$ -уровня требуется потенциал с глубиной 107,5 МэВ. Фазы этих потенциалов показаны на рис.3,а штриховыми линиями.

Потенциал  ${}^4\text{He}^2\text{H}$  в  $D_3$ -волне позволяет получить фазы  $90^\circ$  при энергии 0,71 МэВ в хорошем согласии с данными [23], где приведено значение 0,711 МэВ. Упругие сечения для  ${}^3\text{He}^3\text{H}$ -рассеяния при энергиях 5,79, 19,91 МэВ в целом согласуются с экспериментальными данными работ [21,24].

Полученные по фазам рассеяния межкластерные взаимодействия использовались для вычисления различных характеристик ОС ядер, причем кластерам сопоставлялись определенные свойства соответствующих ядер в свободном состоянии. В частности, для нахождения зарядового радиуса ядер использовались следующие радиусы кластеров:  ${}^2\text{H}$  — 1,9660(68) фм,  ${}^3\text{H}$  — 1,68(3) фм,  ${}^3\text{He}$  — 1,844(45) фм,  ${}^4\text{He}$  — 1,673(1) фм, приведенные в работах [25]. Магнитный радиус  ${}^3\text{H}$  принимался равным 1,72(6) фм [25]. Для радиуса протона использовалось значение 0,805(11) фм.

Результаты расчетов зарядовых радиусов, энергии связи в кластерных каналах, магнитных, квадрупольных и октупольных моментов, вероятностей переходов  $1/2^- \rightarrow 3/2^-$  в  ${}^7\text{Li}$  и перехода  $1^+ \rightarrow 3^+$  в  ${}^6\text{Li}$ , асимптотических констант приведены в табл.3 вместе с экспериментальными данными из работ [26—29], МРГ-расчетами [12,30] и расчетами в кластерной модели [13,31]. На рис.5 представлены импульсные распределения кластеров для  ${}^6\text{Li}$  в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -,  ${}^3\text{He}^3\text{H}$ -моделях и эксперимент [32].

В формуле (11) для  $V_L$  присутствуют не только МЭ, но и формфакторы кластеров, в качестве которых использовались формфакторы соответствующих ядер в свободном состоянии. Параметризации этих формфакторов имеются в работах [3,26]. Так, для  ${}^4\text{He}$  можно использовать выражение вида

$$F = (1 - (aq^2)^n) \exp(-bq^2), \quad (18)$$

где  $a = 0,09986$ ,  $b = 0,46376$ ,  $n = 6$ . Для  ${}^3\text{H}$  и  ${}^3\text{He}$  также можно пользоваться (18), но с параметрами, где  $a = 0,0785$ ,  $b = 0,4075$ ,  $n = 5,46$  и  $a = 0,0872$ ,  $b = 0,481$ ,  $n = 7,9$  соответственно. Параметризация формфактора дейтрона

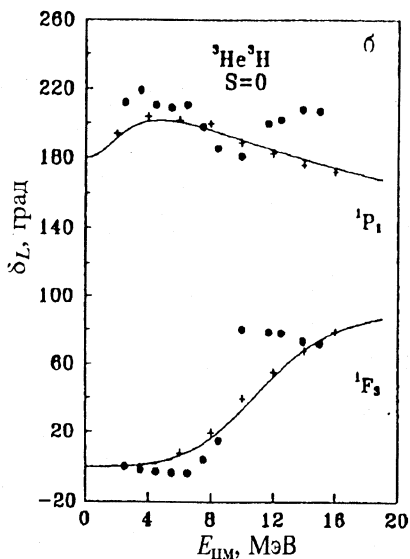
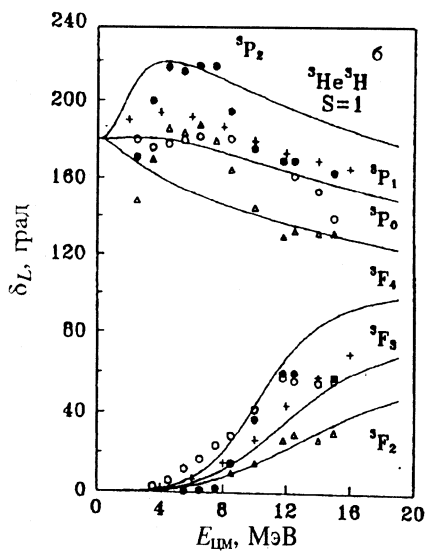
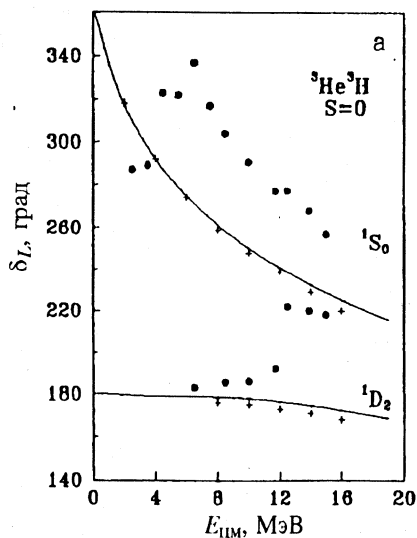
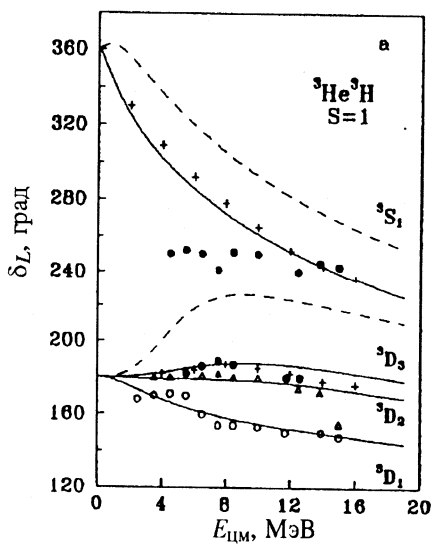


Рис.3

Рис.4

Фазы упругого  ${}^3\text{He}{}^3\text{H}$ -рассеяния, кривые — расчеты для потенциалов с параметрами из табл.2

Таблица 3. Результаты расчета электромагнитных характеристик для ядер  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Be}$  и  ${}^6\text{Li}$ 

${}^7\text{Li}$				
Характеристики	Расчет	Эксперимент [26—29]	МРГ [12,30]	Расчет [13,31]
$Q$ , мб	- 38,2	- 36,6(3); 40,6(3)	- 34,2 + 41,9	- 37,4
$\mu$ , $\mu_0$	3,383	3,2564	2,79 + 3,16	3,384
$\Omega/\mu$ , фм <sup>2</sup>	2,70	2,4(5); 2,9(1)	3,2 + 3,6	2,48
$B(M1)$ , $\mu_0^2$	2,45	2,48(12)	1,96 + 2,17	2,45
$B(E2)$ , $e^2 \cdot \text{фм}^4$	7,3	7,42(14) + 8,3(6)	5,4 + 11,3	7,0
$E_0$ , МэВ	- 2,47	- 2,467		
$E_1$ , МэВ	- 1,99	- 1,989		
$R_f$ , фм	2,40	2,39(3)		
$R_m$ , фм	2,77	2,70(15); 2,98(5)		
$C_0$	3,9	—		
${}^7\text{Be}$				
Характеристики	Расчет	Эксперимент [26—29]	МРГ [12,30]	Расчет [13,31]
$Q$ , мб	- 59,3		- 58,4	
$\mu$ , $\mu_0$	- 1,532		- 1,27	- 1,533
$\Omega/\mu$ , фм <sup>2</sup>	2,85		4,71	
$B(M1)$ , $\mu_0^2$	1,87	1,87(25)	1,58	1,87
$B(E2)$ , $e^2 \cdot \text{фм}^4$	17,5		17,0	
$E_0$ , МэВ	- 1,60	- 1,586		
$E_1$ , МэВ	- 1,14	- 1,157		
${}^6\text{Li}$				
Характеристики	Расчет		Эксперимент [26—29]	
$E$ , МэВ	- 1,472		- 1,4735	
$R_f$ , фм	2,56		2,54(5)	
$C_0$	3,22(2)		2,9 + 3,6	
$B(E2)$ , $e^2 \cdot \text{фм}^4$	25,1		25,6	

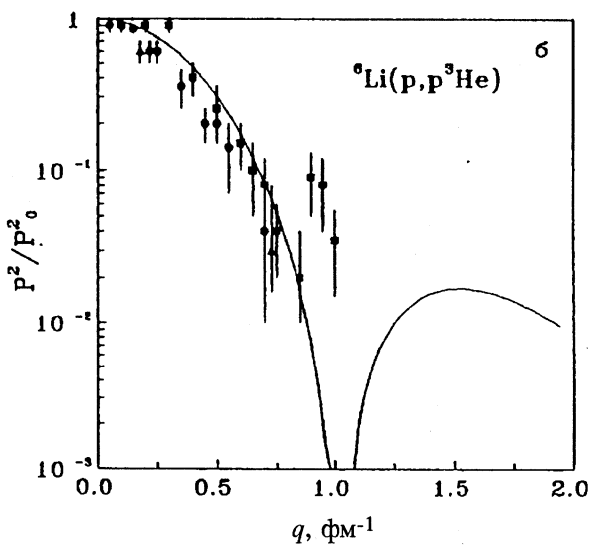
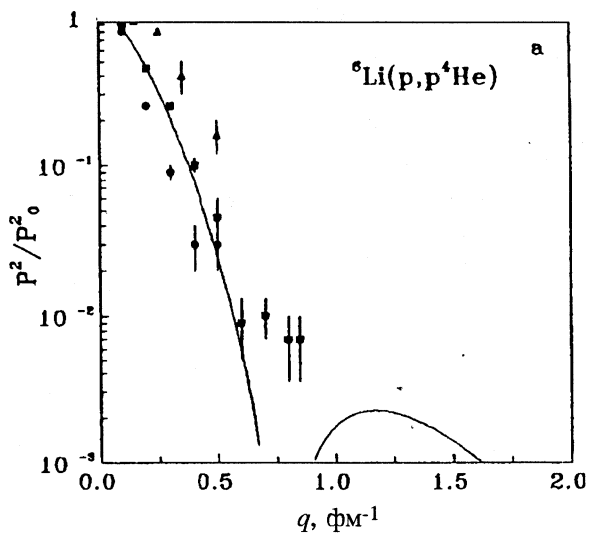


Рис.5. Импульсные распределения  ${}^4\text{He}^2\text{H}$  и  ${}^3\text{He}^3\text{H}$  в ядре  ${}^6\text{Li}$ , кривые — расчеты для потенциалов с параметрами из табл.2



$$F = \exp(-aq^2) + bq^2 \exp(-cq^2) \quad (19)$$

с параметрами  $a = 0,49029$ ,  $b = 0,01615$ ,  $c = 0,16075$ . Эти выражения позволяют правильно передать поведение формфакторов при импульсах до  $20 \text{ фм}^{-2}$ , что вполне достаточно, так как формфакторы рассматриваемых ядер измерены только в области до  $3,5 + 4,5 \text{ фм}^{-1}$ . Для формфактора протона использована обычная гауссовская параметризация с  $a = 0,0864 \text{ фм}^2$  [33].

Кулоновские формфакторы ядер лития исследовались во многих работах, в том числе методом резонирующих групп [34—36], на основе различных феноменологических подходов [37,14,38], в кластерной модели [39]. В МРГ-вычислениях упругих и неупругих формфакторов  ${}^7\text{Li}$  удается получить хорошее описание экспериментальных данных при малых переданных импульсах порядка  $7—8 \text{ фм}^{-2}$  [35]. Однако при  $3—4 \text{ фм}^{-1}$  в эксперименте [40] наблюдается второй максимум, который в МРГ-расчетах отсутствует [34,35]. В случае ядра  ${}^6\text{Li}$  существующие МРГ-результаты, с учетом искажений или полной антисимметризации, в общем передают форму второго максимума упругого формфактора [36]. В работах [37,14,38] использовали феноменологические волновые функции ядра  ${}^6\text{Li}$  и получили хорошее описание упругого и неупругого  $3^+$  формфакторов при малых импульсах. Второй максимум упругого кулоновского формфактора  ${}^6\text{Li}$  удается передать и в рамках трехтельной модели ядра [41], где применялись потенциалы с ЗС.

В работе [3] вычисления формфакторов выполнялись в двухкластерной модели на основе формул (10)—(12), (18), (19). Результаты расчета упругого формфактора  ${}^6\text{Li}$  [3] показаны на рис.6,а непрерывной линией вместе с экспериментальными данными [40]. Штриховой линией показаны данные работ [35], полученные на основе МРГ-вычислений, штрихпунктиром — результаты трехтельных расчетов [41]. Видно, что расчетная кривая в области  $3—4 \text{ фм}^{-1}$  идет несколько ниже экспериментальных данных, практически совпадая с трехтельными расчетами, и при средних импульсах не имеет явного минимума. Последнее обусловлено плавным характером формфактора дейтрона, не имеющего минимума в этой области переданных импульсов. В наших расчетах никакой деформации дейтрона не проводилось, что, впрочем, оправданно только при 100% кластеризации ядра в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -канал. А так как вероятность кластеризации, по-видимому, не превышает 60—80%, используемая модель без учета искажений является определенным приближением к реально существующей ситуации. Конечно, и в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -модели можно ввести деформации или искажения дейтронного кластера. Однако при этом появляется подгоночный параметр, характеризующий степень сжатия дейтрона. В то же время на основе расчетов без деформации кластеров можно судить о вероятности дейтронной кластеризации в

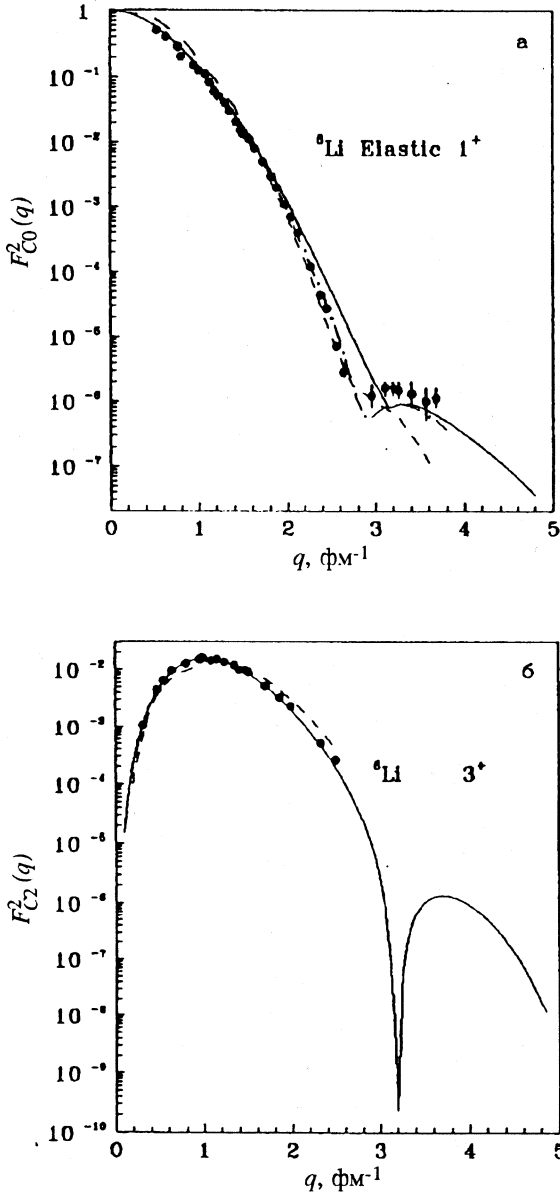


Рис.6. Упругий и неупругий с переходом на  $3^+$ -уровень кулоновские формфакторы ядра  ${}^6\text{Li}$ , кривые — расчеты в разных моделях (объяснение в тексте)

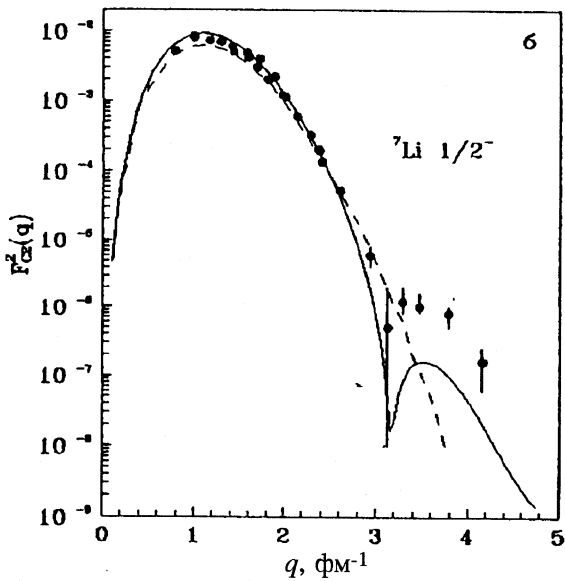
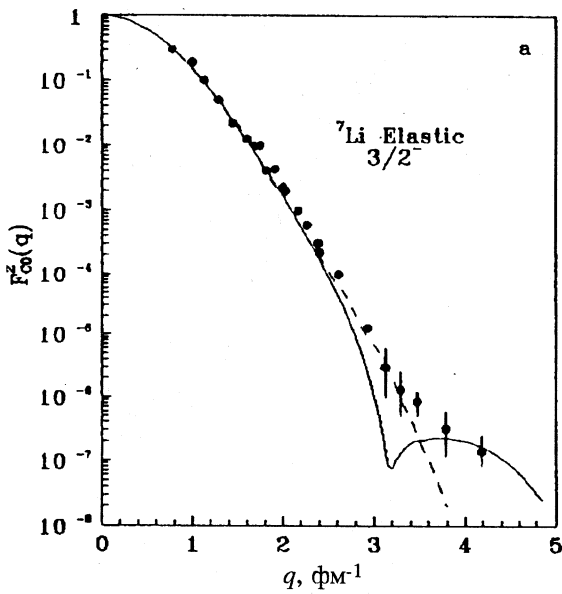


Рис.7а,б. Упругий и неупругие для уровней  $1/2^-$  и  $7/2^-$  кулоновские формфакторы ядра  ${}^7\text{Li}$ ; непрерывные кривые — расчеты в кластерной модели с потенциалами из табл.2, штриховые — МРГ-расчеты [35]

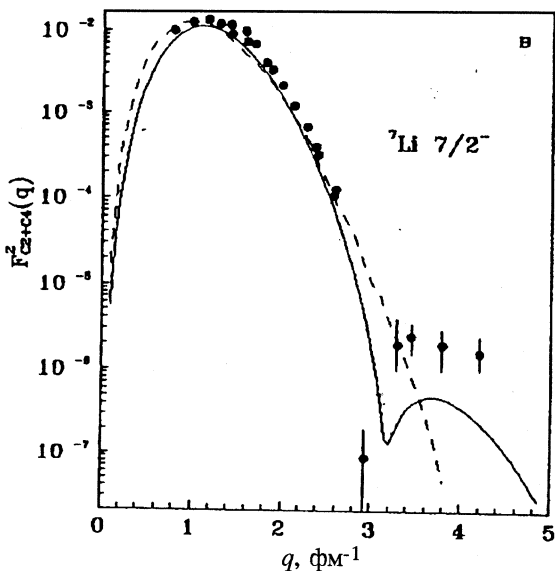


Рис.7в

ядре. При 100% кластеризации все результаты, полученные на основе простой двухкластерной модели, должны, по-видимому, хорошо согласовываться с экспериментом. А отклонение расчетных характеристик от экспериментальных данных будет свидетельствовать о меньшей степени кластеризации, когда кластеру уже нельзя полностью сопоставлять характеристики соответствующего ядра в свободном состоянии. Отклонение упругого формфактора от эксперимента, в первую очередь при средних импульсах, как раз указывает на приближенность модели, не учитывающей деформации. Меньшая величина формфактора при  $3-4 \text{ фм}^{-1}$  обусловлена отсутствием  $D$ -волны в ВФ ядра, ввести которую можно, только учитывая тензорную компоненту в потенциале взаимодействия.

На рис.6,б непрерывной линией показан неупругий формфактор с переходом на уровень  $3^+$  в сравнении с результатами работ [41] для трехтельных ВФ. Видно, что расчет практически совпадает с экспериментом [14,38] и имеет второй максимум. Надо отметить, что, в отличие от вычислений упругого формфактора, неупругий формфактор оказывается очень чувствительным к глубине и форме потенциала. Так, изменение глубины на  $0,03-0,05 \text{ МэВ}$  практически не сказывается на поведении  $3^+$ -фазы рассеяния, но приводит к изменению формфактора в  $2-3$  раза. Для правильного

описания этого формфактора пришлось несколько изменить потенциал  $D_3$ -волны и принять 80,93 МэВ, что отличается от результатов, приведенных в табл.2, на 50 кэВ.

На рис.7,*а* непрерывной линией показан вычисленный упругий кулоновский формфактор ядра  ${}^7\text{Li}$ , который имеет явный минимум при  $3,2 \text{ фм}^{-1}$  и подъем в области более высоких импульсов, практически лежащий в полосе экспериментальных ошибок [40]. Пунктиром здесь приведены МРГ-вычисления [35], где расчетная кривая плавно спадает. На рис.7,*б* и 7,*в* даны неупругие кулоновские формфакторы с переходом на уровни  $1/2^-$  и  $7/2^-$ . Пунктир — результаты работ [35]. Формфактор уровня  $1/2^-$  описывается до второго максимума, где его величина заметно меньше эксперимента. Аналогичные результаты получены и для формфактора  $7/2^-$ . И здесь имеется второй максимум, полностью отсутствующий в МРГ-вычислениях [34,35]. Отметим, что для расчетов использовались потенциалы из табл.2 без каких-либо изменений параметров.

**3.2. Кластерные системы  $p^3\text{He}$  и  $n^3\text{H}$ .** Кластерные системы  $p^3\text{He}$  и  $n^3\text{H}$ , чистые по изоспину с  $T=1$ , имеют только одну разрешенную орбитальную схему {31} с запрещенной в  $S$ -волне конфигурацией {4} в триплетном и синглетном состояниях.

**Таблица 4. Потенциалы взаимодействия чистых кластерных  $p^3\text{He}$ - и  $n^3\text{H}$ -систем и энергии связанных состояний  $E_{CC}$ . Для кулоновского потенциала  $R_c=0$ . В скобках дана энергия для  $n^3\text{H}$ -системы**

$L_J$	$V_0$ , МэВ	$\alpha$ , фм $^{-2}$	$V_1$ , МэВ	$\beta$ , фм $^{-1}$	$E_{CC}$ , МэВ
$S=0$					
Чет.	110	0,37	45	0,67	- 9,0(- 11,4)
Нечет.	14,0	0,1			
$S=1$					
Чет.	43	0,26			- 3,6(5,3)
$P_0$	10	0,1			
$P_1$	15	0,1			
$P_2$	20	0,1			

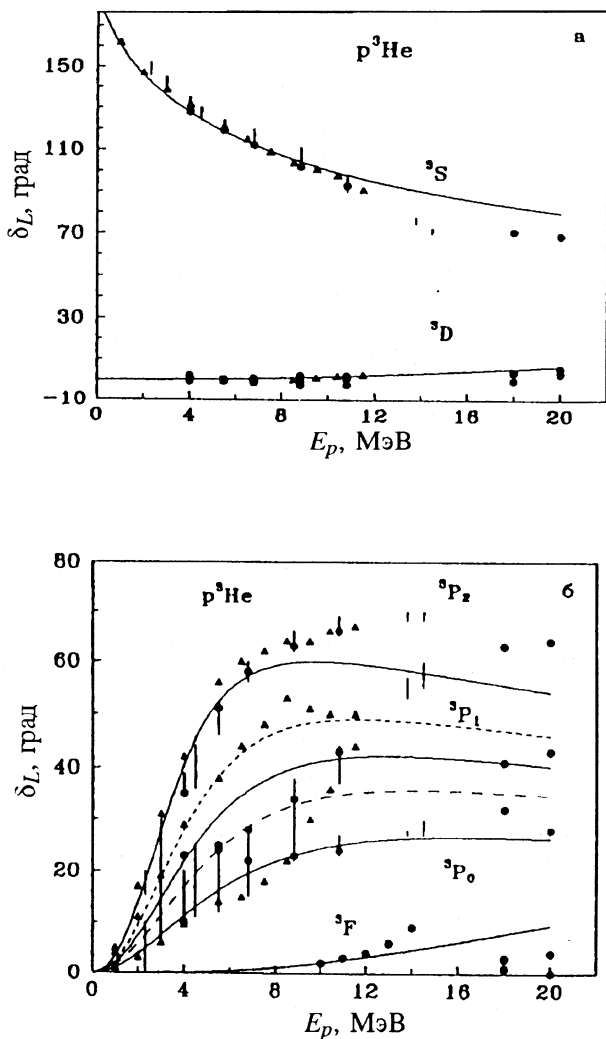


Рис.8. Фазы упругого  $p^3\text{He}$ -рассеяния, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов

Фазовый анализ при энергиях до 1 МэВ, выполненный в работах [42], приводит к определенной неоднозначности фаз. Получены два набора решений, которые заметно отличаются друг от друга. В области энергий

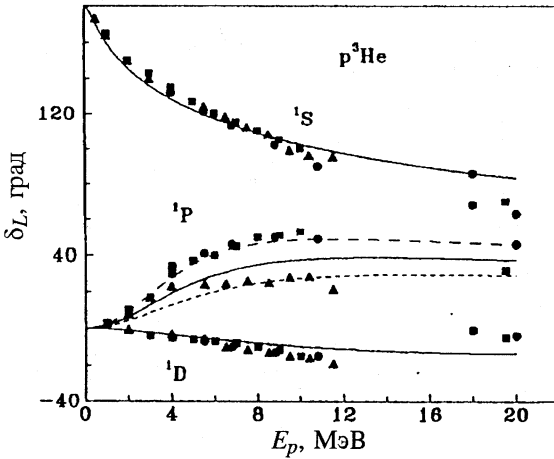


Рис.9. Фазы упругого  $p^3\text{He}$ -рассеяния, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов

2 + 14 МэВ имеются две группы работ [43] и [44], где для синглетных и триплетных  $P$ -фаз с  $J = 1$  также получены два варианта результатов. В [43] синглетная  $P_1$ -фаза при энергиях 6 + 12 МэВ идет на уровне  $40^\circ$ — $50^\circ$ , а  $P_1$  для  $S = 1$  в области  $20^\circ$ — $30^\circ$ . В работе [44] синглетная фаза идет ниже:  $20^\circ$ — $30^\circ$ , а триплетная выше:  $40^\circ$ — $50^\circ$ . В работе [45] рассмотрены оба варианта как решения А и С. Область энергий выше 18 МэВ исследована в работах [46]. В табл.4 приведены параметры  $p^3\text{He}$ -взаимодействий [8] вместе с энергиями ЗС при  $L = 0$ . В четных волнах они совпадают с приведенными в работах [6,7].

На рис.8 и 9 непрерывными линиями показаны расчетные фазы этих потенциалов и экспериментальные данные работ [42,43,45] — точки, квадратики и вертикальные линии и [44] — треугольники. Вычисленные с этими потенциалами сечения упругого  $p^3\text{He}$ -рассеяния при энергиях 6,82 и 10,77 МэВ хорошо согласуются с экспериментальными данными [42—45]. На рис.10 представлены фазы  $p^3\text{He}$ -рассеяния и данные работы [47]. Крестиками показаны результаты МРГ-вычислений из работ [48].

Поскольку имеется несколько различных вариантов фазовых анализов для синглетной  $P$ -волны, параметры потенциала, приведенные в табл.4, подбирались так, чтобы получить определенный компромисс между раз-

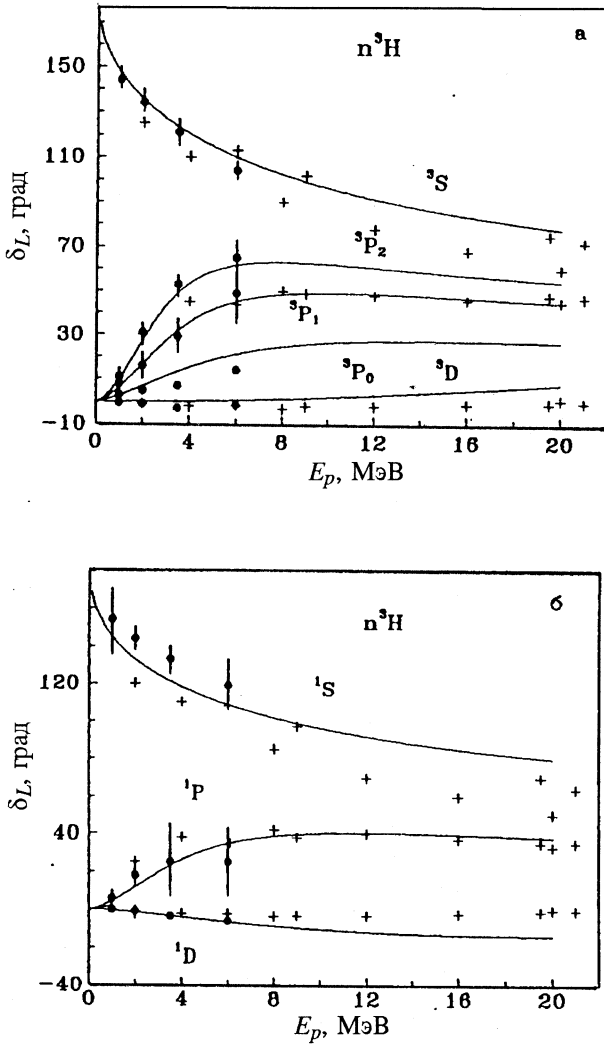


Рис.10. Фазы упругого  $n^3\text{H}$ -рассеяния, непрерывные кривые — результаты расчетов для потенциалов из табл.4

ными фазовыми анализами. Для описания данных [44], показанных треугольниками, нужен потенциал глубиной около 11 МэВ (точечная линия на рис.9), а фазы из работ [43] воспроизводятся более глубоким взаимо-



действием с  $V_0 = 17$  МэВ (штриховая линия). Для описания триплетной  $P$ -волны [44] глубина потенциала должна быть 17 МэВ (точечная линия на рис.8,б), а для данных работ [43] — 13 МэВ (штриховая линия). Энергия ЗС со схемой Юнга {4} приведены в табл.4, а разрешенные состояния с симметрией {31} в  $P$ -волнах оказываются не связанными.

**3.3. Кластерная система  $N^2H$ .** Как видно из табл.1, в квартетном канале  $N^2H$ -системы возможна только одна орбитальная схема {21}, а симметрия {3} запрещена. В то же время дублетный канал совместим сразу с двумя схемами {21} и {3}, и потенциалы, получаемые на основе фаз рассеяния, эффективно зависят от этих схем Юнга.

Экспериментальные данные по фазовому анализу в  $p^2H$ -системе имеются в достаточно широкой энергетической области, и результаты разных работ в целом согласуются между собой [49]. С учетом этих данных были получены потенциалы взаимодействия, параметры которых приведены в табл.5.

**Таблица 5. Потенциалы взаимодействия  $p^2H$ - и  $^2H^3He$ -кластерных систем, смешанные по схемам Юнга в дублетных каналах.**

Для всех случаев  $R_c = 0$ .  $E_{CC}$  — энергия связанных состояний.

В скобках приведены значения энергии для  $n^2H$ - и  $^2H^3H$ -систем

Система	$L_J$	$V_0$ , МэВ	$\alpha$ , фм <sup>-2</sup>	$V_1$ , МэВ	$\beta$ , фм <sup>-1</sup>	$E_{CC}$ , МэВ
$p^2H$	$S = 1/2$					
	Чет.	35,0	0,1			- 9,3(- 10,1)
		55,0	0,2			- 11,4(- 12,3)
	Нечет.	- 0,4	0,01			
		10,0	0,16	0,6	0,1	
	$S = 3/2$					
Чет.	41,9	0,13	13,7	0,36	- 4,2(- 4,9)	
Нечет.	7	0,05				
$^2H^3He$	$S = 1/2$					
	Чет.	45,5	0,15			- 15,9(- 17,0)
	Нечет.	44	0,1			- 7,5(- 8,1)
	$S = 3/2$					
	Чет.	34,5	0,1			- 12,9(- 13,8)
	Нечет.	29	0,1			- 1,3(- 1,8)

На рис.11 показаны вычисленные и экспериментальные [49] упругие  $p^2\text{H}$ -фазы при малых энергиях. Непрерывной линией на рис.11,*а* показаны результаты расчетов фаз для четных волн со вторым набором параметров для дублетных потенциалов из табл.5. Фазы первого набора параметров изображены штриховой линией и приводят к несколько завышенной  $D$ -фазе. Для  $P$ -волны непрерывной линией показаны результаты для второго набора, точечной линией — для первого. На рис.11,*б* непрерывными линиями показаны результаты для потенциалов из табл.5, а штриховыми — фазы взаимодействия из работ [6] с параметрами:  $V_0 = 57$  МэВ,  $\alpha = 0,37$  фм $^{-2}$ ,  $V_1 = 7,2$  МэВ,  $\beta = 0,36$  фм $^{-1}$  для четных волн и  $V_0 = 8,8$  МэВ,  $\alpha = 0,06$  фм $^{-2}$  для нечетных. Видно, что такие потенциалы вполне способны передать энергетическое поведение экспериментальных фаз, а вычисленные сечения упругого  $p^2\text{H}$ -рассеяния при 2,5 и 10 МэВ согласуются с данными [49,50].

В табл.5 приведены энергии СС для обоих спиновых состояний. В квартетном канале при  $L = 0$  имеется ЗС со схемой {3}, а РС с {21} для  $L = 1$  находится в непрерывном спектре так же, как в случае  $p^3\text{He}$ -системы. Смешанный  $S$ -потенциал дублетного канала приводит к СС с энергией, отличной от энергии связи ядра  $^2\text{He}$ .

Как говорилось выше, экспериментальные смешанные дублетные фазы могут быть представлены в виде полусуммы чистых фаз:

$$\delta_L^{(f_1) + (f_2)} = \frac{1}{2} \delta_L^{(f_1)} + \frac{1}{2} \delta_L^{(f_2)}. \quad (20)$$

В данном случае  $\{f_1\} = \{3\}$  и  $\{f_2\} = \{21\}$ . Если допустить, что в качестве дублетных фаз с {21} могут быть использованы квартетные фазы той же симметрии {21}, то легко определить чистые дублетные фазы с {3}. На рис.11,*в* вертикальными линиями, которые показывают полосу ошибок, показаны полученные таким образом чистые  $p^2\text{H}$ -фазы. Параметры взаимодействий даны в табл.6 вместе с энергиями СС, а расчетные фазы показаны на рис.11,*г*. В четных волнах фазы потенциала с первым набором параметров показаны непрерывной линией. Штриховой линией изображены результаты для второго набора параметров, которые практически не отличаются от приведенных в [6]. Фазы чисто отталкивающего  $P$ -взаимодействия показаны точечной кривой, а непрерывной линией — фазы потенциала с периферическим отталкиванием из [6] с параметрами:  $V_0 = 13,8$  МэВ,  $\alpha = 0,16$  фм $^{-2}$ ,  $V_1 = 1,6$  МэВ,  $\beta = 0,09$  фм $^{-1}$ .

Из рисунка видно, что вполне удается передать поведение чистой  $p^2\text{H}$ -фазы с  $L = 1$ , в то время как  $S$ -фаза имеет характер, близкий к резонансно-

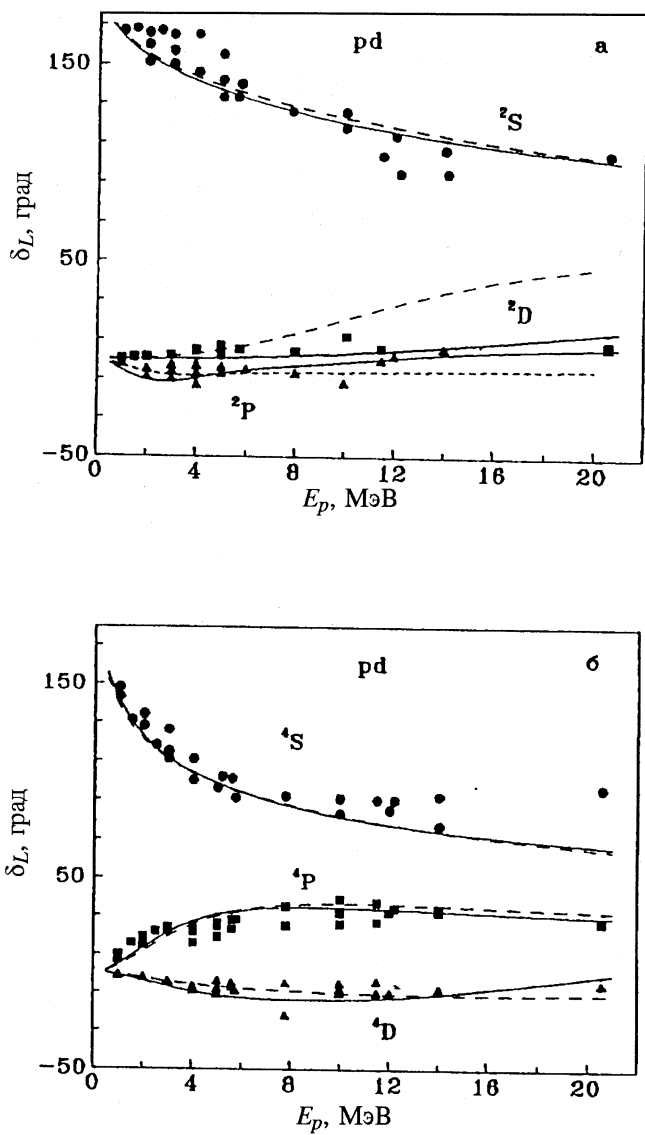


Рис.11 а,б. Фазы упругого  $p^2H$ -рассеяния, кривые — результаты расчетов для потенциалов с параметрами из табл.5

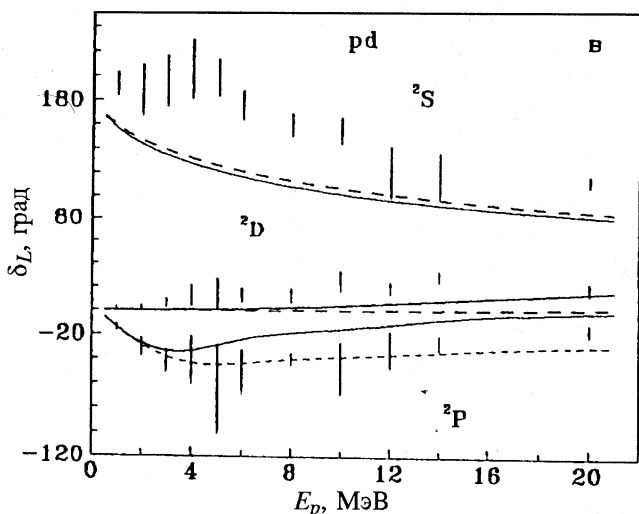


Рис.11 в. Вертикальные линии — полоса ошибок для чистых фаз со схемой {3}, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов

Таблица 6. Чистые по схемам Юнга потенциалы  $p^2\text{H}$ - и  ${}^3\text{He}^2\text{H}$ -взаимодействия в дублетных каналах. Для всех случаев  $R_c = 0$ .

В скобках дана энергия для  $n^2\text{H}$ - и  ${}^2\text{H}^3\text{H}$ -систем

Система	$L_J$	$V_0$ , МэВ	$\alpha$ , фм <sup>-2</sup>	$V_1$ , МэВ	$\beta$ , фм <sup>-1</sup>	$E_{CC}$ , МэВ
$p^2\text{H}$	Чет.	34,75	0,15			- 5,49(- 6,25)
		54,3	0,3			- 5,49(- 6,40)
	Нечет.	-2,4	0,01			
${}^2\text{H}^3\text{He}$	Чет.	40,0	0,15	8,0	0,2	- 7,1(- 8,0)
	$P_{3/2}$	75,5	0,15			- 16,4(- 17,2)
	$P_{1/2}$	60,2	0,15			- 8,9(- 9,6)

му, и не удается найти взаимодействие, способное описать ее форму одновременно с характеристиками СС. Приведенные взаимодействия для ОС правильно описывают энергию связи ядер  ${}^3\text{He}$  и  ${}^3\text{H}$ . Экспериментальные значения энергий равны -5,493 МэВ и -6,257 МэВ соответственно.

Оба чистых  $S$ -потенциала  $p^2\text{H}$ -взаимодействия приводят примерно к одинаковым фазам рассеяния, но только второй из них без всяких деформаций дейтронного кластера приводит к относительно правильному кулоновскому упругому формфактору при малых импульсах. Зарядовый радиус  ${}^3\text{He}$ , в случае этого взаимодействия,  $R_f = 1,89$  фм и  $R_r = 2,08$  фм, что немного больше экспериментального значения, а асимптотическая константа равна  $1,8(1)$ , при экспериментальных значениях, находящихся в интервале  $1,8 \div 2,3$  [27]. В случае  $n^2\text{H}$ -системы второй потенциал несколько занижает энергию связи, но если уменьшить глубину до  $53,9$  МэВ, то энергия оказывается равной  $-6,25$  МэВ, а радиусы  $R_f = 1,89$  фм и  $R_r = 2,01$  фм.

Для первого варианта потенциала при описании радиуса и формфактора необходимо вводить деформации дейтрона, т.е. предполагать, что дейтронному кластеру внутри ядра  ${}^3\text{He}$  или  ${}^3\text{H}$  нельзя сопоставлять свойства свободного дейтрона. С точки зрения размеров дейтрона и ядер  ${}^3\text{He}$  и  ${}^3\text{H}$  это вполне обоснованно, так как радиус дейтрона заметно больше радиусов этих ядер. Поэтому для получения правильных радиусов и формфакторов рассматриваемых ядер необходимо сжать дейтронный кластер примерно на  $30-40\%$  [8]. Асимптотическая константа для этого потенциала в обоих каналах равна  $2,3(1)$ . Без учета деформаций радиусы равны:  $R_f = 2,05$  фм и

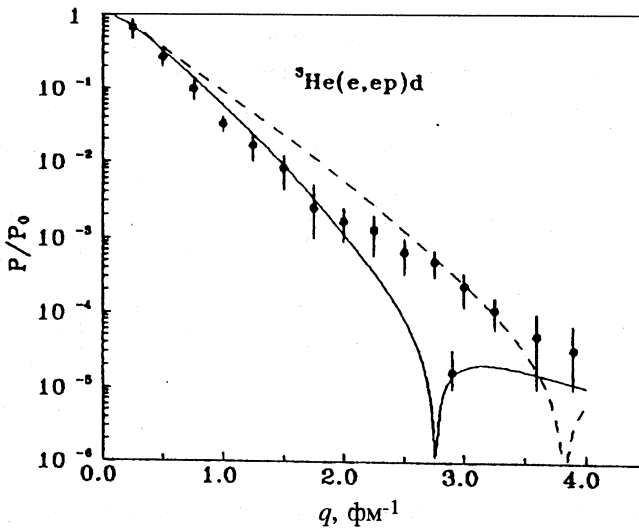


Рис.12. Импульсные распределения  $p^2\text{H}$ -кластеров в ядре  ${}^3\text{He}$ , кривые — расчеты для потенциалов ОС из табл.6

$R_r = 2,20$  фм в  $p^2$ Н и  $R_f = 1,95$  фм и  $R_r = 2,12$  фм в  $n^2$ Н. На рис.12 непрерывной линией показаны импульсные распределения кластеров в ядре  ${}^3\text{He}$ , полученные с первым набором параметров потенциала ОС. Штриховой линией показаны результаты для второго потенциала. Экспериментальные данные взяты из работы [51].

**3.4. Кластерная система  ${}^2\text{H}^3\text{He}$ .** Перейдем теперь к рассмотрению  ${}^2\text{H}^3\text{He}$ -системы. В дублетном канале фазы также зависят от двух орбитальных схем {41} и {32}, что видно из табл.1. В квартетном канале разрешена только схема {32} и состояния чистые.

Экспериментальные данные по фазам рассеяния имеются только в узкой области энергий  $0 + 5$  МэВ [52]. Поэтому для получения потенциала приходится использовать МРГ-вычисления фаз, выполненные в работах [53]. Результаты расчета фаз с потенциалами из табл.5 показаны на рис.13 непрерывными линиями. Здесь точки и квадраты — экспериментальные  $P$ - и  $S$ -фазы из [52], крестики и кружки — варианты МРГ-вычислений из [53]. На рис.13,а штриховой линией показаны  $D$ -фазы потенциала [6] с параметрами  $V_0 = 50$  МэВ и  $\alpha = 0,15$  фм $^{-2}$ , приводящие к более правильному описанию МРГ  $D$ -фаз при примерно таких же результатах для  $S$ -фаз. В табл.5 приведены энергии ЗС для квартетных потенциалов со схемой {5} при  $L = 0$  и со схемой {41} при  $L = 1$ , а РС с {32} оказывается несвязанным.

Из рис.13,б видно, что МРГ и экспериментальная дублетная  $S$ -фаза существенно различаются между собой. Параметры взаимодействия, приведенные в табл.5, получены на основе экспериментальных данных, а его  $S$ -фаза показана точечной линией. Для описания МРГ  $S$ -фаз необходим потенциал с параметрами  $V_0 = 25$  МэВ и  $\alpha = 0,15$  фм $^{-2}$ ,  $S$ - и  $D$ -фазы которого показаны непрерывными линиями. Дублетный  $P$ -потенциал получен на основе МРГ-вычислений и в целом согласуется с экспериментом. Сечения упругого рассеяния при энергиях 4,19 и 10 МэВ, вычисленные с этими взаимодействиями, согласуются с экспериментальными данными из [20,54]. Из табл.5 видно, что разрешенное в дублетном канале  $P$ -состояние имеет энергию, не согласующуюся со средней энергией СС  $P$ -уровней, так как потенциал зависит от двух орбитальных схем.

На основе (20) получены чистые фазы рассеяния в дублетном канале, которые показаны на рис.14 вертикальными линиями. Параметры чистых потенциалов даны в табл.6, а на рисунке непрерывными линиями обозначены результаты расчетов фаз с этими потенциалами для  $S$ -,  $D$ - и  $P_{3/2}$ -волн. Штриховыми линиями показаны фазы потенциалов из [6] с параметрами:

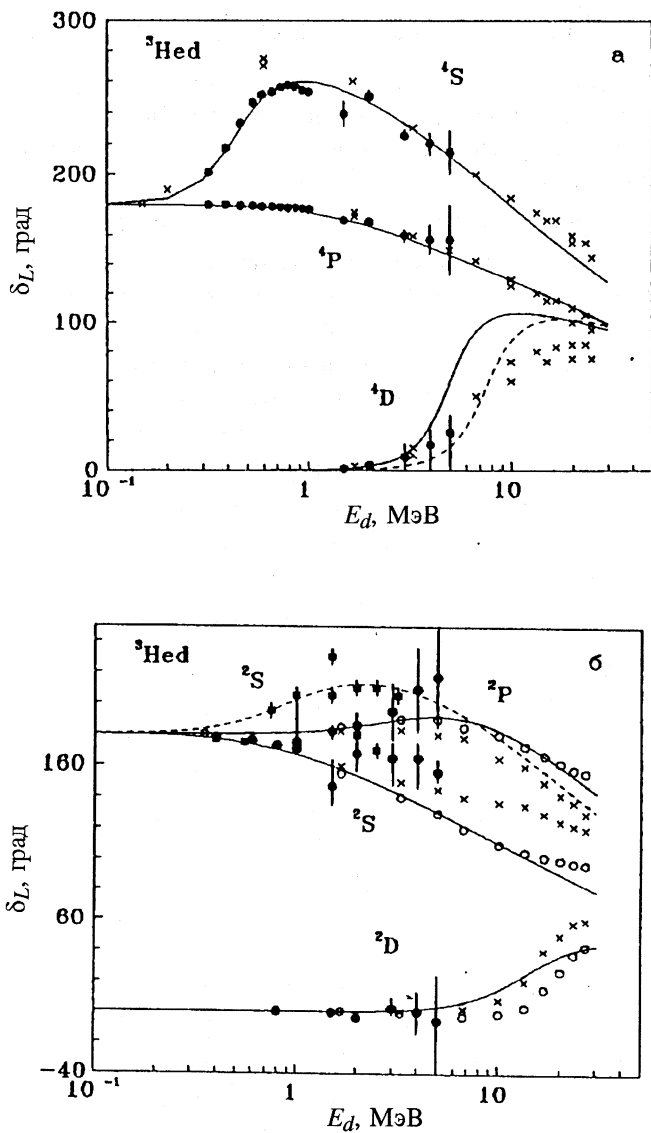


Рис.13. Фазы упругого  ${}^2\text{He}^3$ -рассеяния, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов

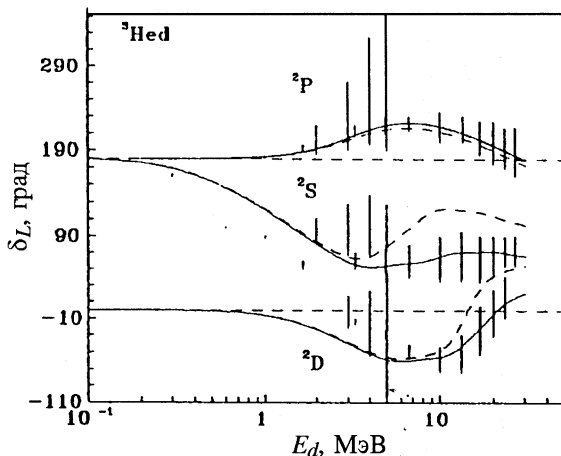


Рис.14. Вертикальные линии — полоса ошибок для чистых  ${}^2\text{H}^3\text{He}$ -фаз со схемой {41}, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов

$V_0 = 57$  МэВ,  $\alpha = 0,16$  фм $^{-2}$ ,  $V_1 = 8,4$  МэВ,  $\beta = 0,21$  фм $^{-1}$  для четных волн и  $V_0 = 69$  МэВ и  $\alpha = 0,14$  фм $^{-2}$  для нечетных. Чистые с {41} потенциалы дают правильное значение энергии  $P$ -уровней ядра  ${}^5\text{Li}$ , а в  $S$ -состоянии имеется ЗС со схемой {5}.

**3.5. Кластерная система  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ .** При рассеянии в  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -системе в канале с  $S = 2$  разрешена орбитальная схема {22}, в триплетном канале схема {31}. Синглетный канал совместим с двумя симметриями {4} и {22}, как видно из табл.1. Экспериментальные данные по фазам рассеяния в  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -системе известны только в области  $8 + 12$  МэВ [55]. Поэтому приходится использовать результаты МРГ-расчетов фаз [56]. На рис.15 и 16,а крестиками показаны МРГ-фазы, кружками — результаты фазового анализа. Из рис.15,а видно большое различие между разными МРГ-вычислениями в  $S$ -волне синглетного канала. Внизу результаты получены на основе многоканального варианта МРГ, вверху — одноканальные расчеты. Триплетные  $P$ -фазы также заметно отличаются в этих вариантах МРГ-расчетов и лежат несколько ниже экспериментальных данных. В то же время все  $D$ - и  $S$ -фазы при  $S = 2$  не сильно отличаются между собой и в целом согласуются с фазовым анализом.



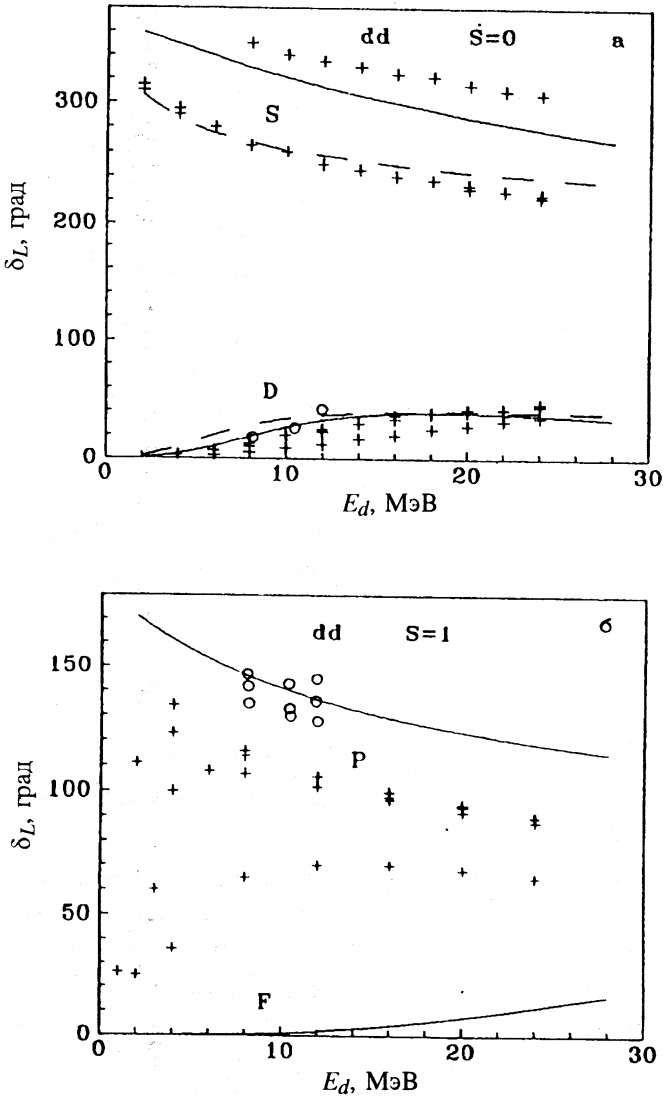


Рис.15. Фазы упругого  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -рассеяния, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов

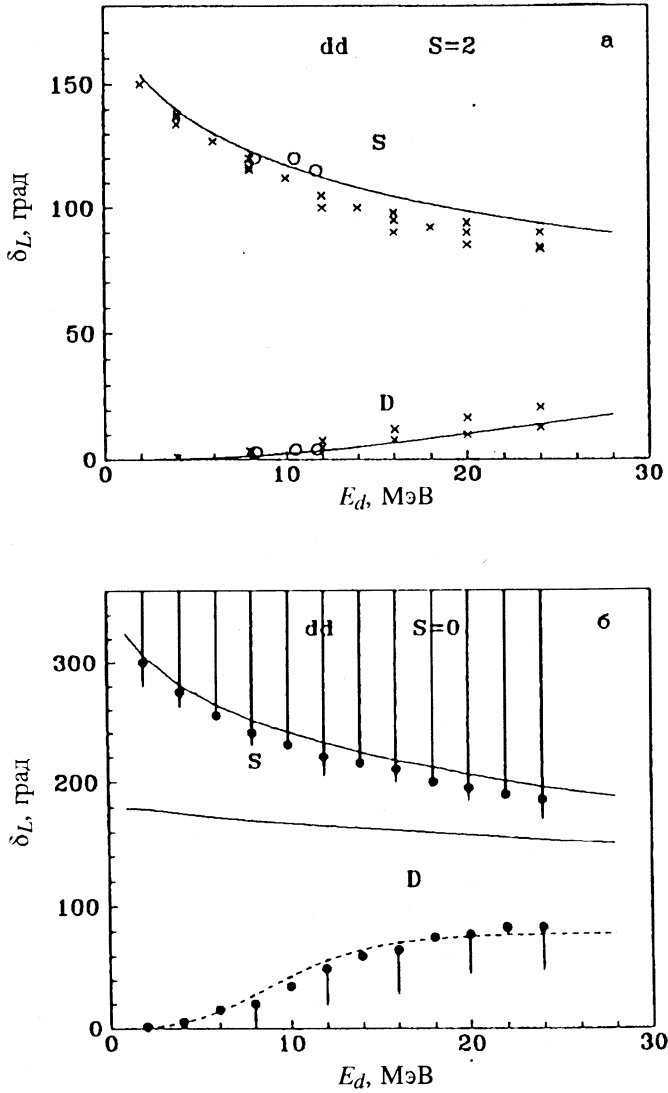


Рис.16. а) Фазы упругого  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -рассеяния, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов; б) вертикальные линии — полоса ошибок для чистых фаз со схемой {4}, кривые — результаты расчетов для потенциалов из табл.7

Таблица 7. Смешанные в синглетном канале и чистые с  $\{4\}$  потенциалы взаимодействия  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -системы. Для всех случаев  $R_c = 0$

$S, L_J$	$V_0$ , МэВ	$\alpha$ , фм $^{-2}$	$E_{CC}$ , МэВ
$S = 0$	9,0	0,05	- 1,5
	108,0	0,125	- 17,1; 61,5
$S = 1$	51	0,16	- 2,0
$S = 2$	40	0,24	- 6,9
${}^1_S \{4\}$	47,15	0,073	- 23,85; - 3,73
${}^1_D \{4\}$	35,0	0,11	

Триплетный потенциал  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -системы строился по экспериментальным данным [55], взаимодействия с  $L = 0$  и  $2$  — по эксперименту и МРГ-вычислениям. Результаты расчета фаз показаны на рисунках непрерывными линиями. Параметры потенциалов даны в табл.7. В синглетном канале получено два варианта взаимодействий, первый из которых содержит одно связанное состояние и описывает многоканальные результаты, как показано на рис.15,а штриховой линией. Второй, правильно воспроизводя  $D$ -фазу, приводит к определенному компромиссу между различными МРГ-вычислениями.

Поскольку при  $S = 0$  разрешены две схемы, совместимые с  $L = 0$ , а  $\{22\}$  допускает и  $L = 2$ , то второй вариант синглетного взаимодействия кажется более реальным, поскольку имеет два глубоких связанных уровня в  $S$ - и одно в  $D$ -состояниях. Последнее находится при энергии  $- 13,3$  МэВ. Триплетный потенциал имеет РС, согласующееся с уровнем  $2^-$  при 22,1 МэВ. Потенциал при  $S = 2$  содержит ЗС со схемой  $\{4\}$ .

Чистые фазы рассеяния синглетного канала получены на основе (20) для  $\{f_1\} = \{4\}$  и  $\{f_2\} = \{22\}$ . При использовании только результатов многоканального МРГ чистые фазы получаются вполне определенно, они показаны на рис.16,б точками. При использовании обоих МРГ-результатов для чистых фаз получается полоса значений, приведенная на рисунке вертикальными линиями. Параметры чистых потенциалов даны в табл.7. Приведенный  $S$ -потенциал правильно воспроизводит положения СС спектра при энергиях  $- 28,848$  МэВ и  $- 3,748$  МэВ относительно порога кластерного канала. По энергиям этих уровней параметры взаимодействия фиксируются

вполне однозначно. Однако этот потенциал, хотя и позволяет описать  $S$ -фазу, приводит к  $D$ -фазе, начинающейся со  $180^\circ$ , и содержит ненаблюдаемое состояние в спектре  $CC$  при  $-1,5$  МэВ. Эти результаты показаны на рис.16,б непрерывными линиями. Поэтому для  $D$ -волны приходится использовать потенциал с другими параметрами, не приводящий к  $CC$ , но описывающий фазу, как показано на рис.16,б точечной линией. Чистый  $S$ -потенциал в  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -системе приводит к правильному значению радиуса  $1,64$  фм только при деформации дейтрона примерно в  $40\%$ , так же, как для  $p^2\text{H}$ -канала ядра  ${}^3\text{He}$ . Асимптотическая константа оказывается равной  $13,7(1,3)$ , что заметно больше данных [27], где приводятся значения в интервале  $6 \div 9$ .

**3.6. Кластерные системы  $p^3\text{H}$  и  $n^3\text{He}$ .** Системы  $p^3\text{H}$  и  $n^3\text{He}$  оказываются смешанными по изоспину, так как при  $T_3=0$  возможны значения  $T=0,1$ . Здесь триплетные и синглетные фазы, а значит, и потенциалы эффективно зависят от двух значений изоспина. Следствием смешивания по изоспину является смешивание по схемам Юнга. В частности, в синглетном состоянии разрешены две орбитальные схемы {31} и {4}, как видно из табл.1. Поэтому для получения чистых фаз с  $T=0$ , согласно (20), используются фазы чистой по изоспину  $p^3\text{He}$ -системы с  $T=1$ . В триплетном состоянии возможна только схема {31}, но оно также смешано по изоспину [7,8].

Имеется сравнительно много экспериментальных данных по  $p^3\text{H}$ -фазам рассеяния [57,58], причем в работах [58] приведены два набора фаз, позволяющих воспроизвести сечения рассеяния. Первый из них в целом согласуется с данными работ [57]. На рис.17 и 18,а показаны экспериментальные, смешанные по изоспину и вычисленные фазы  $p^3\text{H}$  упругого рассеяния. Параметры потенциалов даны в табл.8. Поскольку потенциалы смешанные, энергия синглетного  $S$ -взаимодействия не соответствует экспериментальной энергии связи ядра  ${}^4\text{He}$ . В триплетном  $S$ -состоянии имеется ЗС со схемой {4}. Разрешенные в обоих каналах состояния с {31} имеют один квант, и  $P$ -потенциалы не содержат  $CC$ .

Определив на основе (20) чистые фазы с {4}, показанные точками на рис.18,б, можно найти чистые потенциалы взаимодействия с параметрами, приведенными в табл.9, где даны также энергии связанных состояний. Результаты вычислений чистых фаз для этих потенциалов при  $S=0$  показаны на рис.18,б непрерывными кривыми, а вычисленные характеристики ядра  ${}^4\text{He}$  в  $p^3\text{H}$ - и  $n^3\text{He}$ -моделях даны в табл.10 [8] вместе с экспериментальными данными из работ [25,27].

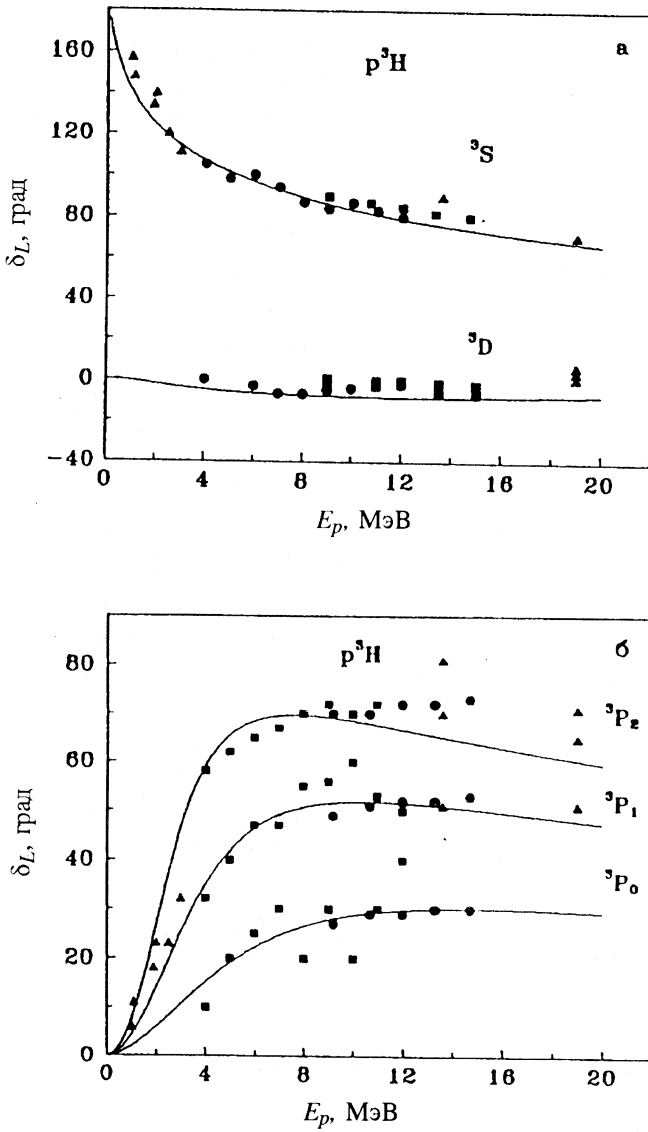


Рис.17. Фазы упругого  $p^3\text{H}$ -рассеяния, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов из табл.8

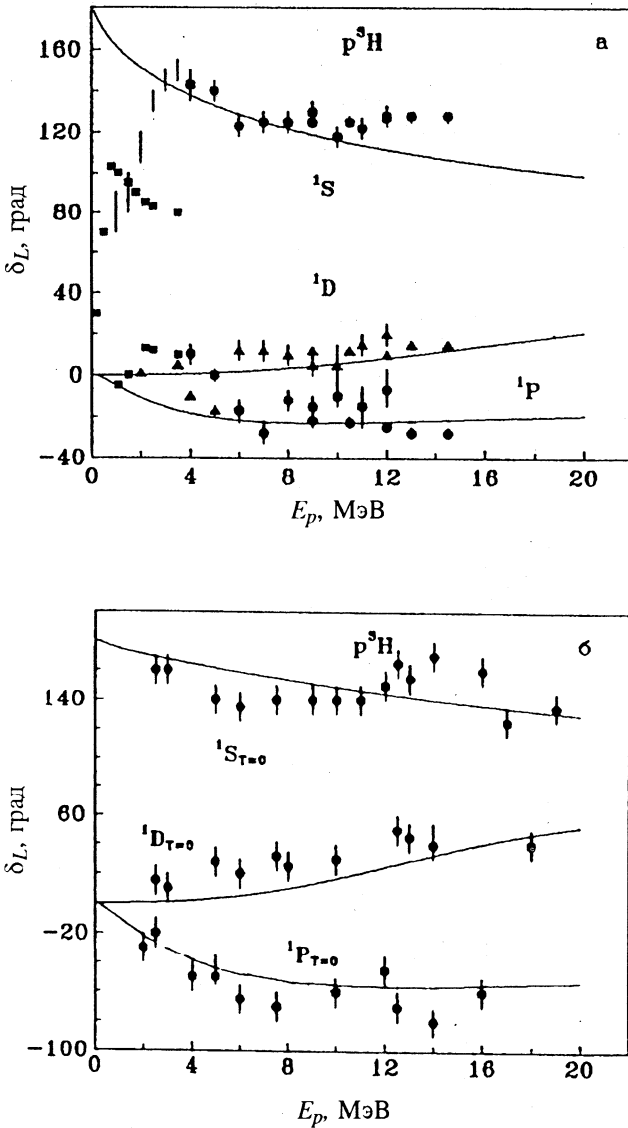


Рис.18. а) Фазы упругого  $p^3\text{H}$ -рассеяния, кривые — результаты расчетов для различных потенциалов; б) точки — чистые фазы со схемой {4}, кривые — результаты расчетов чистых фаз для потенциалов с параметрами из табл.8

**Таблица 8. Потенциалы взаимодействия в  $p^3\text{H}$ -системе, смешанные по схемам Юнга. Для всех случаев  $R_c = 0$ .**

**В скобках даны энергии для  $n^3\text{He}$ -системы**

$L_J$	$V_0$ , МэВ	$\alpha$ , фм <sup>-2</sup>	$V_1$ , МэВ	$\beta$ , фм <sup>-1</sup>	$E_{CC}$ , МэВ
$S = 0$					
Чет.	50	0,2			- 10,4(- 11,4)
Нечет.	- 3	0,03			
$S = 1$					
Чет.	55	0,39	6,0	0,39	- 1,2(- 2,0)
$P_0$	11	0,1			
$P_1$	17,5	0,1			
$P_2$	22	0,1			

**Таблица 9. Чистые по схемам Юнга потенциалы взаимодействия  $p^3\text{H}$ -кластерной системы. Для всех случаев  $R_c = 0$ .**

**В скобках дана энергия для  $n^3\text{He}$ -системы**

$L_J$	$V_0$ , МэВ	$\alpha$ , фм <sup>-2</sup>	$V_1$ , МэВ	$\beta$ , фм <sup>-1</sup>	$E_{CC}$ , МэВ
$S = 0$					
Чет.	63,1	0,17			- 19,82
Нечет.	- 8	0,03			
$S = 1$					
Чет.	70	0,39	15	0,39	- 1,4(- 2,4)
$P_0$	11	0,1			
$P_1$	19	0,1			
$P_2$	24	0,1			

**Таблица 10. Характеристики основного состояния  $^4\text{He}$  в  $n^3\text{He}$ - и  $p^3\text{H}$ -кластерных моделях**

Канал	$E$ , МэВ	$C_0$	$R_r$	$R_f$
$p^3\text{H}$ -расчет	- 19,822	4,5(1)	1,761	1,693
Эксперимент	- 19,815	5,2(1); 4,2(2)		1,673(1)
$n^3\text{He}$ -расчет	- 20,861	4,4(1)	1,838	1,699
Эксперимент	- 20,578	5,1(4)		1,673(1)

#### 4. ФОТОПРОЦЕССЫ НА ЛЕГКИХ ЯДРАХ

**4.1. Фотопроцессы на ядрах  ${}^6\text{Li}$  и  ${}^7\text{Li}$ .** Ранее расчеты полных сечений фотопроцессов выполнялись в феноменологической потенциальной модели [59], аналогичной используемой здесь, и в методе резонирующих групп (МРГ) [30,60,61] для  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -,  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ - и  ${}^4\text{He}^3\text{He}$ -систем. Для взаимодействий с ЗС были проведены расчеты полных сечений в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -канале ядра  ${}^6\text{Li}$  на основе трехтельных волновых функций ОС [62]. В двухкластерной модели с ЗС на основе гауссовских потенциалов, согласованных с фазами упругого рассеяния, расчеты полных сечений были выполнены в [10].

Переходя к рассмотрению сечений фотопроцессов, заметим, что спиновый электрический оператор  $Q_{Jm}(S)$  в (2) дает сравнительно малый вклад в общее сечение процесса. Это позволяет рассматривать только первый оператор  $EJ$ -переходов. Однако, например, для  $E1$ -процессов в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -системе спиновое слагаемое может давать заметный вклад из-за малости сечения, обусловленного орбитальным оператором, потому что в ядрах с  $N=Z$  переходы типа  $E1$  с  $\Delta T=0$  сильно подавлены. В кластерной модели этот факт отражается в множителе  $(Z_1/M_1 - Z_2/M_2)^2$ , который равен нулю при этих условиях. Переход  $E1$ , обусловленный орбитальным оператором, в таких ядрах может появиться только благодаря неточности условия  $M=2Z$ , так как, например, в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -системе ядра  ${}^6\text{Li}$  массы дейтрона и  ${}^4\text{He}$  не являются целыми числами и равны  $M_d = 2,0135537$  и  $M_\alpha = 4,0015061$ .

При расчете сечений в  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ - и  ${}^4\text{He}^3\text{He}$ -системах рассматривались  $E1$ -,  $E2$ - и  $M1$ -переходы и вклад спиновой части электрического оператора. Рассмотрим, например,  $E1$ -переход, когда захват может происходить как на основное связанное состояние с  $J=3/2^-$  и энергиями  $-2,47$  МэВ в  ${}^7\text{Li}$  и  $-1,59$  МэВ в  ${}^7\text{Be}$ , так и на первое возбужденное с  $J=1/2^-$  и энергиями  $-1,99$  и  $-1,16$  МэВ соответственно. Захват на основное состояние ядра происходит из состояний рассеяния  $S$ ,  $D_{3/2}$  и  $D_{5/2}$  на первое возбужденное из  $S$  и  $D_{3/2}$ . Параметры потенциалов, используемых при расчетах, даны в табл.2.

Результаты расчета сечений  $EJ$ - и  $M1$ -захвата  ${}^4\text{He}^3\text{H}$  и  ${}^4\text{He}^3\text{He}$  приведены на рис.19. Показаны также экспериментальные [63,64] и расчетные данные для  $E1$  из [63] (точечная кривая сверху на рис.19,а). Штрихпунктиром на рис.19,б показаны МРГ-вычисления для  $E1$ -перехода [12,30,60,61]. Из рис.19 видно, что сечения  $E2$ - и  $M1$ -процессов на полтора—три порядка меньше, чем  $E1$ , и не дают существенного вклада в полные сечения. Пик в



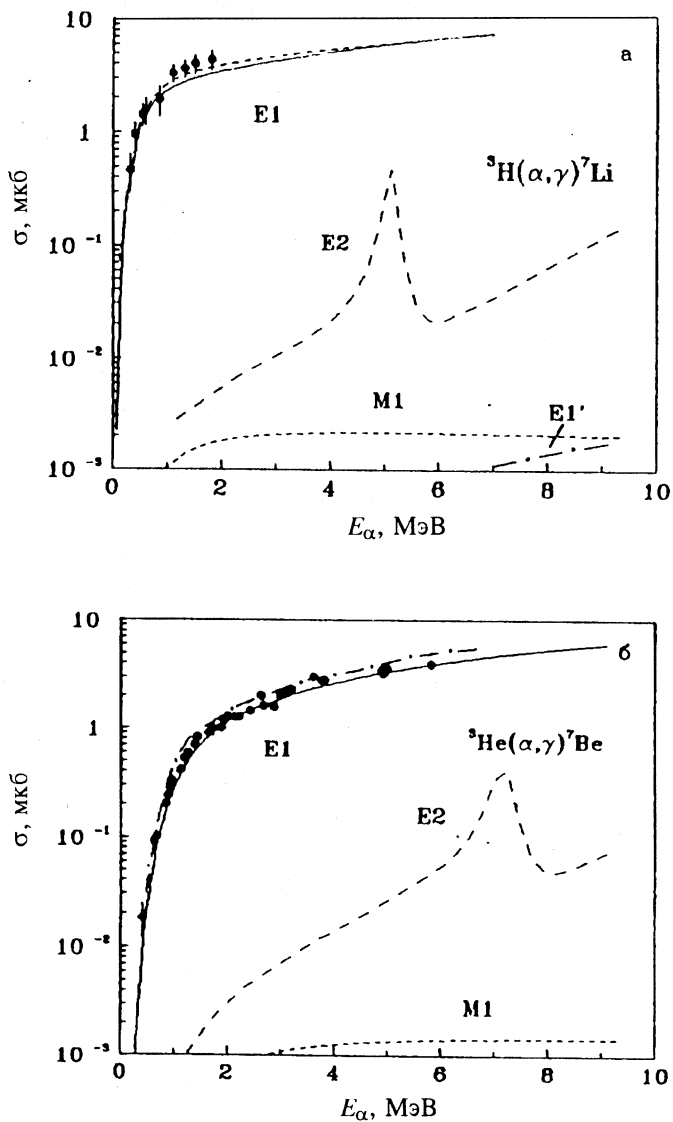


Рис.19. Полные сечения процессов радиационного захвата в  ${}^4\text{He}{}^3\text{H}$ - и  ${}^4\text{He}{}^3\text{He}$ -системах с образованием ядер  ${}^7\text{Li}$  и  ${}^7\text{Be}$  в основном и первом возбужденном состояниях, кривые — результаты расчетов сечения для различных переходов (объяснение в тексте)

$E2$ -сечении  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ -захвата соответствует резонансу в  $F_{7/2}$ -фазе при энергии 2,16 МэВ в с.ц.м. Аналогичный пик наблюдается и в сечении  ${}^4\text{He}^3\text{He}$ -захвата при энергии 7,0 МэВ, что отвечает резонансу при 2,98 МэВ (с.ц.м.) относительно кластерных порогов. Вычисленные  $M1$ -сечения хорошо согласуются с МРГ-результатами [61]. На рис.19,а штрихпунктиром с обозначением  $E1'$  приведено сечение, обусловленное спиновым членом  $Q_{Jm}(S)$  электрического  $E1$ -оператора, которое в  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ -системе заметно меньше орбитального слагаемого  $Q_{Jm}(L)$ , и его вкладом в полное  $E1$ -сечение действительно можно пренебречь. Во всех расчетах для магнитных моментов кластеров использовались величины:  $\mu_l = 2,9786 \mu_0$  и  $\mu_{\text{He}} = -2,1274 \mu_0$ .

При  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ -захвате был вычислен и  $S$ -фактор, который при 20 кэВ оказался равен 0,087 кэВ·б в сравнении с известной величиной 0,064(16) кэВ·б, приведенной в [63,64]. Отметим, что существуют и другие экспериментальные данные 0,134(20) [65]. При захвате  ${}^4\text{He}^3\text{He}$   $S$ -фактор при 40 кэВ равен 0,47 кэВ·б, что неплохо согласуется с данными [63,66], лежащими в пределах  $0,47 \div 0,63$  кэВ·б. В МРГ-расчетах обычно получают величину от 0,5 до 0,6 кэВ·б [12,60]. В потенциальном подходе [13,31,67] вычисления дают 0,47(2) кэВ·б, а в [59] 0,56 кэВ·б. Отметим, что существуют два набора экспериментальных данных по  $S$ -факторам для этой системы [63]. Один из них приводит к величине  $S(0) = 0,3(3)$  кэВ·б, другой к  $S(0) = 0,61(7)$  кэВ·б. Среднее между ними 0,45 кэВ·б хорошо согласуется с полученной величиной. На рис.20 приведены астрофизические  $S$ -факторы для  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ - и  ${}^4\text{He}^3\text{He}$ -захвата в области энергий до 3 МэВ, полученные на основе  $E1$ -сечений, и сравнение с МРГ-вычислениями [12,30,60] (штриховые кривые). Эксперимент приведен в [63,64].

Величина  $P_J$  для  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -системы в случае  $E2$ -переходов может быть представлена в виде

$$P_J^2 = 2J_i + 1, \quad (21)$$

если захват происходит на ОС из состояний рассеяния с  $L = 2$  и  $J_i = 1, 2, 3$ .

Параметры потенциалов, используемых при расчетах, приведены в табл.2.

В сечении  $E2$ -захвата, показанном на рис.21 непрерывной линией, вместе с экспериментальными данными, приведенными в работах [68], кроме пика при 0,71 МэВ, наблюдается и второй максимум при энергии около 2,5—3 МэВ, который соответствует резонансу в  $D_2$ -волне с энергией 2,84 МэВ. Точечной линией внизу показаны сечения  $M2$ -захвата из  $P_1$ - и  $P_2$ -состояний рассеяния на ОС. Точечная линия сверху показывает результаты расчетов  $E2$ -сечений, выполненных в работе [59].

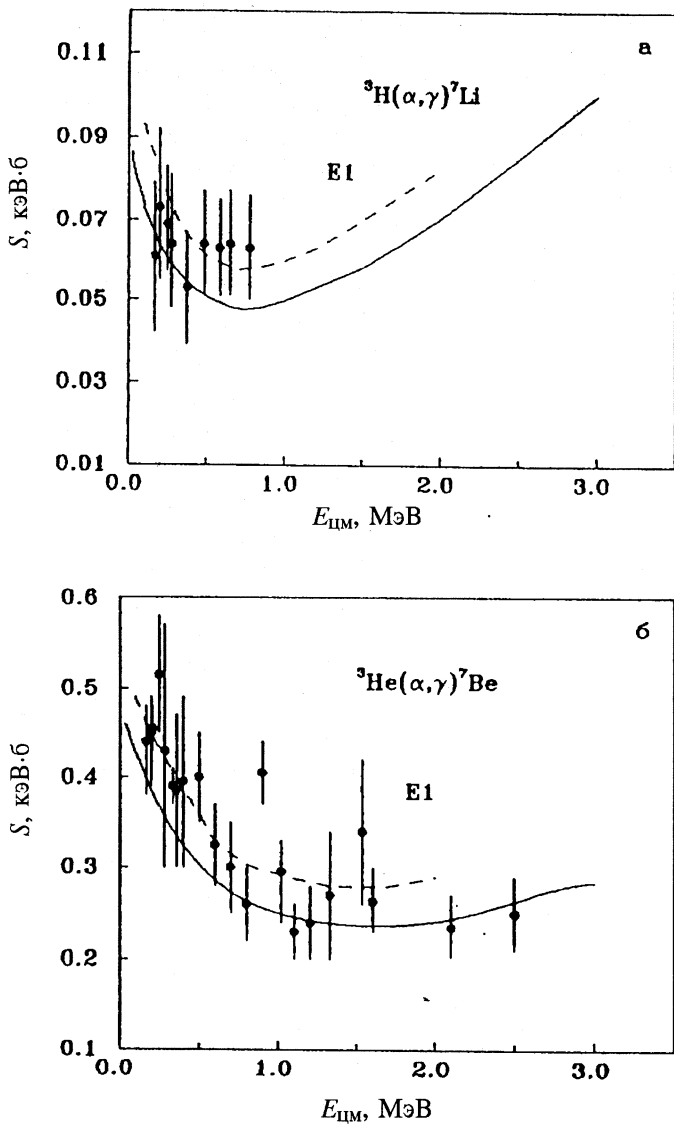


Рис.20. Астрофизические  $S$ -факторы при малых энергиях для  ${}^4\text{He}{}^3\text{H}$ - и  ${}^4\text{He}{}^3\text{He}$ -захвата. Непрерывные кривые — расчеты для потенциалов из табл.2, штриховые линии — МРГ-расчеты [60,61]

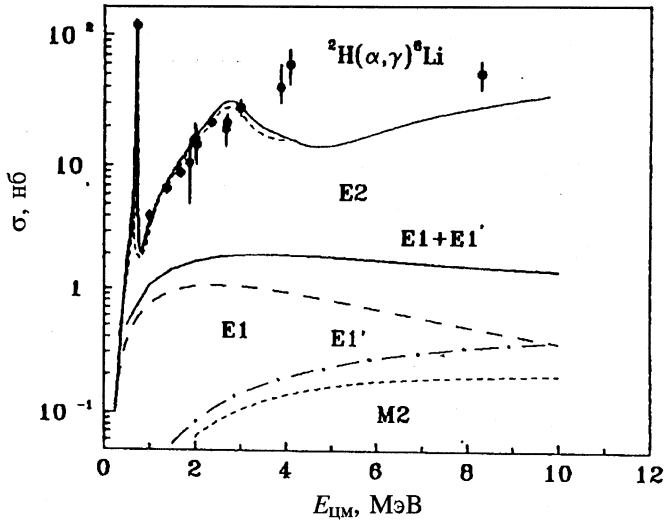


Рис.21. Полные сечения процесса радиационного захвата в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -системе с образованием ядра  ${}^6\text{Li}$  в основном состоянии, кривые — расчеты сечения для различных процессов (объяснение в тексте)

Нами были выполнены и расчеты  $E1$ -захвата на ОС из континуума с  $J_i = 0, 1, 2$  и  $L = 1$  для орбитального ( $E1$ ) и спинового ( $E1'$ ) членов в отдельности и их общего сечения с учетом интерференции (см. рис.21, непрерывная линия внизу). Это сечение заметно меньше, чем  $E2$ , и практически не вносит вклада в полные сечения при энергии больше 0,5 МэВ. На рис.22,а непрерывной линией показаны сечения фоторазвала ядра  ${}^6\text{Li}$  в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ -канал вместе с экспериментом [68,69] и расчетами (штриховая линия), приведенными в [62] на основе трехтельных волновых функций ОС. На рис.22,б даны  $S$ -факторы, полученные из  $E1$ - и  $E2$ -сечений. Здесь хорошо видно, что в области низких энергий преобладающим оказывается сечение  $E1$ -процесса. Линейная экстраполяция  $S$ -факторов к нулю дает  $S(E2) = 3 \cdot 10^{-6}$  кэВ·б и  $S(E1) = 1,2 \cdot 10^{-6}$  кэВ·б, так что общий  $S$ -фактор равен  $1,5 \cdot 10^{-6}$  кэВ·б. Этот результат хорошо согласуется с вычислениями, выполненными в работе [70].

В случае  $E1$ -захвата  ${}^3\text{He}^3\text{H}$  на ОС  ${}^6\text{Li}$  величина  $P_j$  представляется в виде (21) для начальных состояний с  $J_i = 0, 1, 2$  и  $L = 11$ . В  ${}^3\text{He}^3\text{H}$ -модели можно

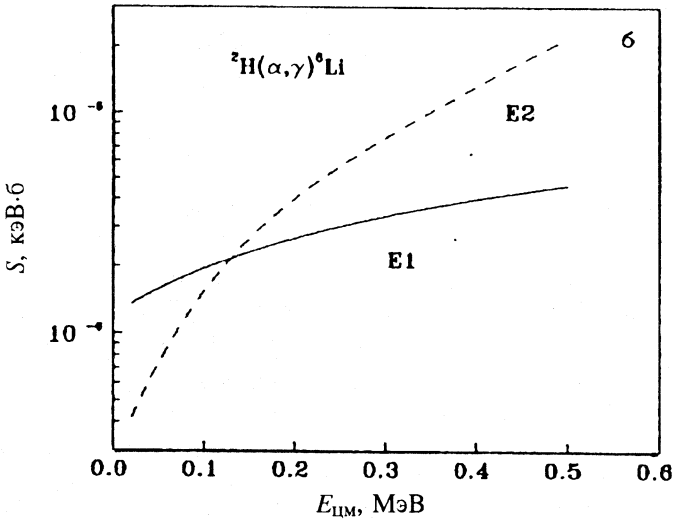
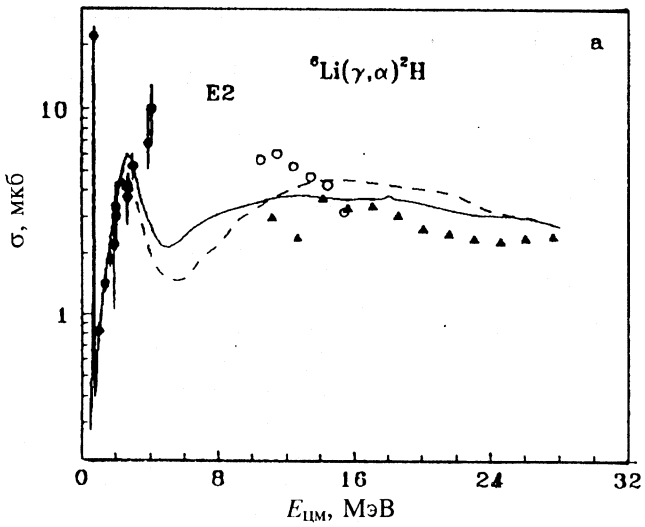


Рис.22. а) Полные сечения процесса фоторазвала ядра  ${}^6\text{Li}$  в  ${}^4\text{He}{}^2\text{H}$ -канал. Непрерывная линия — расчетные E2-сечения для потенциалов из табл.2, штриховая линия — расчетные сечения из [62] с трехтельными ВФ ОС. б) Астрофизические S-факторы для E1- и E2-процессов

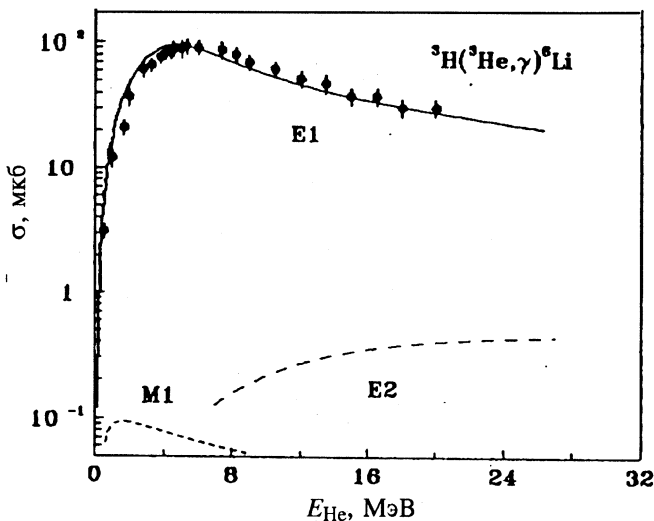


Рис.23. Полные сечения процесса радиационного захвата в  ${}^3\text{He}{}^3\text{H}$ -канале с образованием ядра  ${}^6\text{Li}$  в основном состоянии. Непрерывная линия — расчетные  $E1$ -сечения для потенциалов из табл.2, точечная линия — сечения  $M1$ -процесса, штриховая линия —  $E2$ -сечения

рассмотреть и  $E1$ -переход на  $3^+$  резонансное состояние. Параметры  ${}^3\text{He}{}^3\text{H}$ -потенциалов с учетом спин-орбитального расщепления даны в табл.2. Результаты расчетов полного сечения захвата с  $S$ -потенциалом, правильно передающим энергию связи ядра в этом канале, показаны на рис.23 непрерывной линией. Экспериментальные данные взяты из работы [71]. Видно, что использование такого потенциала в  $P$ -взаимодействии, передающего энергетический ход фаз рассеяния, позволяет описать эти экспериментальные данные. Отметим, что существуют и другие измерения сечений [72,73], заметно отличающиеся от приведенных на рисунке.

В случае  $M1$ -переходов на ОС рассматривался процесс, когда происходит изменение спинового состояния с синглетного на триплетное. В операторе перехода остается только спиновый член  $W_{Jm}(S)$ . Для  $E2$ -переходов на ОС из состояний с  $L=2$  и  $J_i=1,2,3 P_j$  находится из (21). Результаты этих расчетов показаны на рис.23 точечной и штриховой кривыми. На рис.24,а приведен  $S$ -фактор для  ${}^3\text{He}{}^3\text{H}$ -захвата при малых энергиях. Линейной экстраполяцией для  $S$ -фактора при нулевой энергии в  $E1$ -процессе получено

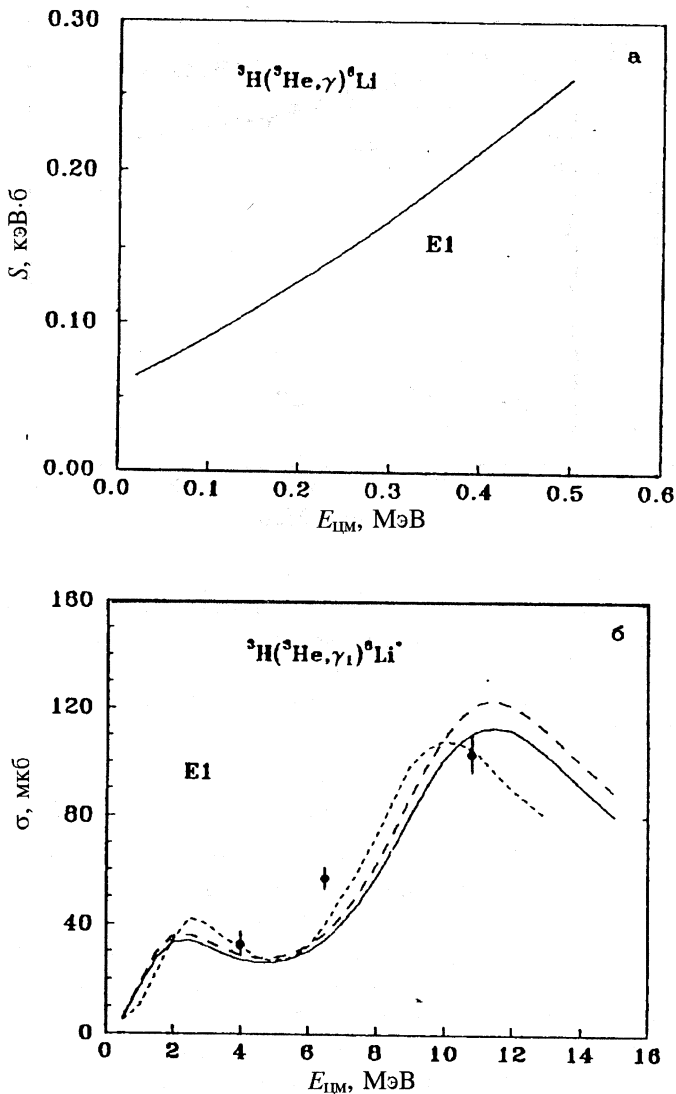


Рис.24. а) Астрофизический  $S$ -фактор для  ${}^3\text{He}{}^3\text{H}$ -захвата, б) полные сечения процесса радиационного захвата в  ${}^3\text{He}{}^3\text{H}$ -канале с образованием ядра  ${}^6\text{Li}$  в резонансном  $3^+$ -состоянии. Точечная линия — результаты расчетов  $E1$ -захвата на уровень  $3^+$ , полученные в работе [74]. Непрерывная и штриховая линии — сечения, вычисленные для потенциалов из табл.2

значение 0,06 кэВ·б. На рис.24,б показаны результаты расчета сечений захвата на уровень  $3^+$  для потенциалов из табл.2 вместе с данными и расчетами (точечная кривая), полученными в работе [74]. Здесь в качестве  $D_3$ -потенциала использовались взаимодействия с глубиной 105 МэВ (непрерывная линия) и 107,5 МэВ (штриховая линия) и  $\alpha = 0,18 \text{ фм}^{-2}$  в обоих случаях.

**4.2. Фотопроцессы для ядер  $^3\text{He}$ ,  $^3\text{H}$  и  $^5\text{Li}$ .** Расчеты дифференциальных сечений фотопроцессов в  $N^2\text{H}$ -,  $N^3\text{H}$ - и  $^2\text{H}^3\text{He}$ -системах для потенциалов с ЗС и разделением по орбитальным схемам ранее вполне успешно выполнены в [6]. Полные сечения для таких систем в кластерных моделях с ЗС и разделением по схемам Юнга рассматривались нами в [75].

При расчете полных сечений учитывались  $E1$ - и  $E2$ -переходы, обусловленные орбитальной частью электрического оператора  $Q_{jm}(L)$ . Магнитные сечения и сечения, зависящие от спиновой части электрического оператора, оказались сравнительно малыми.  $E1$ -переходы в  $N^2\text{H}$ -системе возможны между основным чистым  $^2S$ -состоянием и  $^2P$ -состоянием рассеяния. Величина  $P_f^2$  в (5) для фоторазвала может быть представлена в виде (21), если заменить  $J_i$  на  $J_f$ , где  $J_f$  — момент конечного состояния, который может принимать значения  $1/2^-$  и  $3/2^-$ . В случае  $E2$ -процессов переходы возможны между чистым ОС и дублетной  $D$ -волной рассеяния. И в этом случае  $P_f^2$  представляется в виде (21) с  $J_f = 3/2^+$  и  $5/2^+$ . Сечения фотопроцессов пропорциональны множителю  $(Z_1/M_1^J + (-1)^J Z_2/M_2^J)^2$ , который имеет одинаковую величину в  $n^2\text{H}$ - и  $p^2\text{H}$ -системах в случае  $E1$ -переходов и отличается на порядок для  $E2$ . Поэтому сечение  $E2$ -процесса оказывается заметным только в  $p^2\text{H}$ -системе, что, впрочем, не объясняет разницу в величине экспериментальных сечений для  $p^2\text{H}$ - и  $n^2\text{H}$ -фоторазвала.

На рис.25 непрерывными линиями показаны результаты расчетов полных сечений процессов фоторазвала ядер  $^3\text{H}$  и  $^3\text{He}$  в  $n^2\text{H}$ - и  $p^2\text{H}$ -каналы с первым вариантом потенциала ОС и  $P$ -взаимодействием с периферическим отталкиванием (см. табл.5,6). Эксперимент описан в работах [76,77]. Штриховой линией показаны результаты, полученные с тем же потенциалом ОС, но с чисто отталкивающим вариантом взаимодействия в  $P$ -волне. Использование второго варианта потенциала ОС при любом  $P$ -взаимодействии приводит к сечениям фоторазвала, которые в максимуме достигают только 600 мб, как показано на рис.25 точечными линиями. Штриховой линией внизу на рис.25,б обозначено сечение  $E2$ -процесса. На рис.26 показан астрофизический  $S$ -фактор, обусловленный  $E1$ -переходом. Эксперимент получен



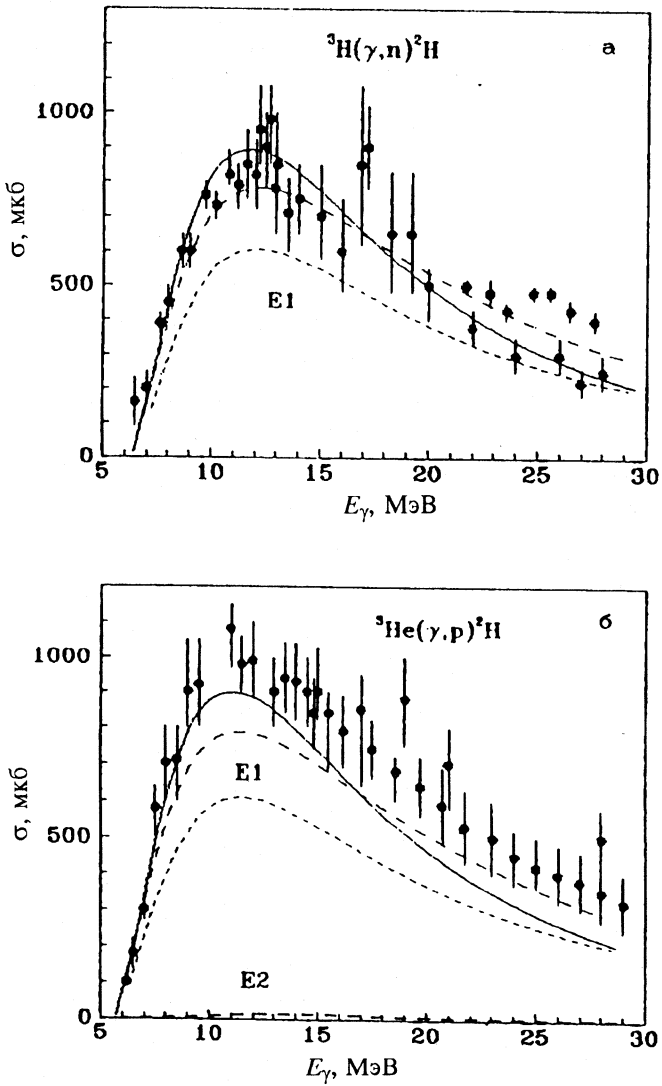


Рис.25. Полные сечения фоторазвала ядер  ${}^3\text{H}$  в  $n^2\text{H}$ -канал и  ${}^3\text{He}$  в  $p^2\text{H}$ -канал. Кривые — расчеты для потенциалов из табл.5,6

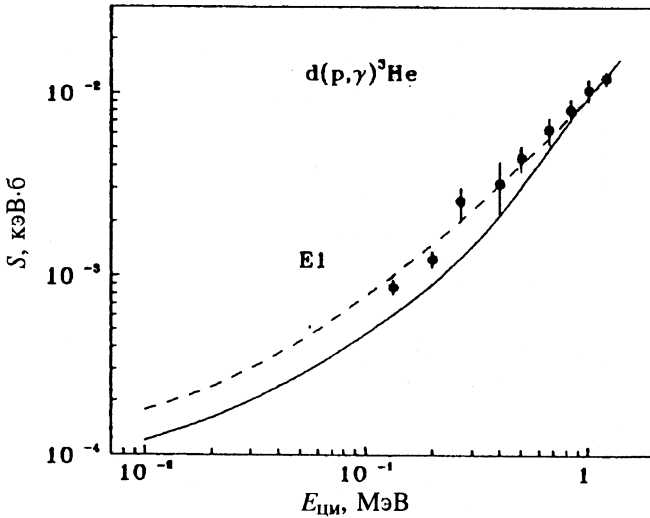


Рис.26. Астрофизический  $S$ -фактор для  $p^2\text{H}$ -захвата. Кривые — результаты расчетов для различных потенциалов

пересчетом данных работы [78]. Обозначения кривых такие же, как для фоторазвала. Линейная экстраполяция  $S(E1)$ -фактора к нулевой энергии дает для непрерывной линии величину  $1,0(2) \cdot 10^{-4}$  кэВ·б, для штриховой  $1,6(2) \cdot 10^{-4}$  кэВ·б.

Существует достаточно много расчетов сечений этих процессов на основе различных модельных подходов. В частности, в некоторых вариантах метода гиперсферических функций удается хорошо передать полные сечения при невысоких энергиях [77]. Однако в таких подходах обычно не рассматривалась супермультиплетная симметрия ВФ с разделением по схемам Юнга, позволяющая анализировать структуру межкластерных взаимодействий, определять наличие и положение разрешенных и запрещенных состояний, как это было сделано выше.

Величина  $P_J^2$  для  $E1$ -захвата в  ${}^2\text{H}^3\text{He}$ -системе может быть представлена в виде (21) с  $J_f = 1/2^-, 3/2^-$ , если захват происходит из  $S$ -волны в  ${}^2P^{(4)}$ -состояния конечного ядра, которые нестабильны. Энергия  $P_{1/2}^{(4)}$ -уровня около 9 МэВ с шириной порядка 5 МэВ [23]. При захвате из  ${}^2D$ -волны величина  $P_J^2$  в два раза больше, чем при  $S$ -захвате, если не учитывается спин-орбитальное расщепление.

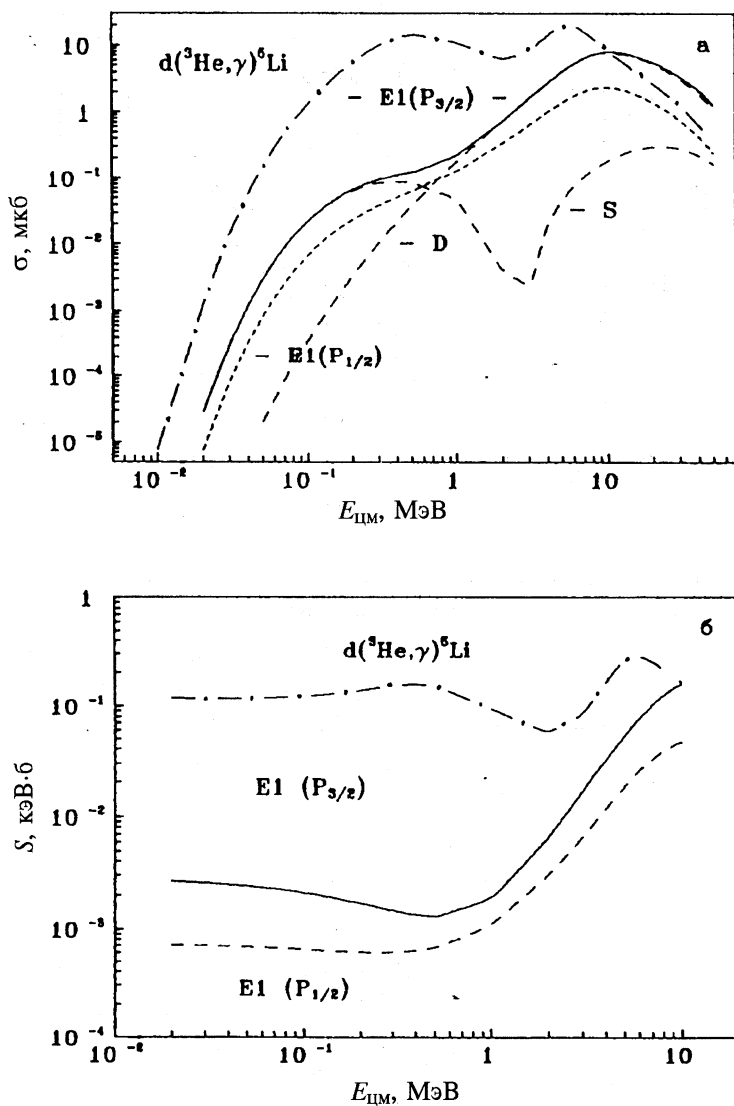


Рис.27. а) Полные сечения  $^3\text{He}^2\text{H}$ -захвата для ядра  $^5\text{Li}$ ; б) астрофизический  $S$ -фактор для  $^3\text{He}^2\text{H}$ -захвата. Кривые — результаты расчетов для различных потенциалов

На рис.27,*а* представлены результаты расчетов сечения  $E1$ -радиационного захвата в  ${}^2\text{H}^3\text{He}$ -системе в области энергий  $10 \text{ кэВ} + 40 \text{ МэВ}$ . Штрихпунктирная линия показывает полное суммарное сечение  $E1$ -переходов из  $S$ - и  $D$ -волн рассеяния на уровень  $P_{3/2}$ , когда в качестве потенциала рассеяния используется взаимодействие из табл.5 для четных волн. Его  $S$ -фаза показана на рис.13,*б* точечной линией и описывает экспериментальные данные. Непрерывной линией дано  $E1$ -сечение для  $S$ - и  $D$ -потенциалов рассеяния с параметрами  $V_0 = 25 \text{ МэВ}$  и  $\alpha = 0,15 \text{ фм}^{-2}$ , приводящими к описанию методом резонирующих групп  $S$ -фазы, как показано на рис.13,*б* непрерывной линией. Штриховыми линиями показаны вклады из  $S$ - и  $D$ -волн для перехода на уровень  $P_{3/2}$ . Точечная линия — полное сечение перехода на уровень  $P_{1/2}$ . Два пика, наблюдаемых в сечениях захвата на оба  ${}^2P$ -уровня, обусловлены резонансами в  ${}^2S$ - и  ${}^2D$ -волнах соответственно.

На рис.27,*б* приведены астрофизические  $S$ -факторы для переходов на уровни  $P_{3/2}$  (непрерывная линия) и  $P_{1/2}$  (штриховая линия), обусловленные  $E1$ -процессом. Линейная экстраполяция  $S$ -факторов к нулевой энергии дает  $S(3/2) = 3(1) \cdot 10^{-3} \text{ кэВ} \cdot \text{б}$  и  $S(1/2) = 7(1) \cdot 10^{-4} \text{ кэВ} \cdot \text{б}$ . Для потенциала рассеяния, описывающего экспериментальную  $S$ -фазу,  $S$ -фактор показан штрихпунктиром и при нулевой энергии равен  $1,3(2) \cdot 10^{-1} \text{ кэВ} \cdot \text{б}$ .

**4.3. Фотопроцессы в кластерном  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -канале ядра  ${}^4\text{He}$ .** Процессы фоторазвала ядра  ${}^4\text{He}$  рассматривались во многих работах [79], однако там не использовались потенциалы с ЗС. Такие взаимодействия применялись в [6] для расчетов дифференциальных сечений, а полные сечения рассматривались нами в [80].

Поскольку в  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -системе основной вклад дает  $E2$ -переход, который возможен между чистым основным  $S$ -состоянием и синглетной  $D$ -волной рассеяния, то можно уточнить эти два взаимодействия. В качестве чистого  $S$ -потенциала будем использовать набор параметров, приведенный в табл.7, который позволяет точно воспроизвести энергии СС. Для синглетного потенциала рассмотрим два варианта синглетных взаимодействий из табл.7, первое из которых описывает  $S$ - и  $D$ -фазы рассеяния, как показано на рис.15,*а*, и не содержит СС в  $D$ -волне, а второе —  $D$ -фазу, имеет ЗС и позволяет получить некий компромисс между разными МРГ  $S$ -фазами (см. рис.15,*а*, непрерывная линия).

При расчете полных сечений рассматривался только  $E2$ -переход, обусловленный орбитальной частью электрического оператора  $Q_{Jm}(L)$ . Магнитные сечения и сечения, зависящие от спиновой части электрического

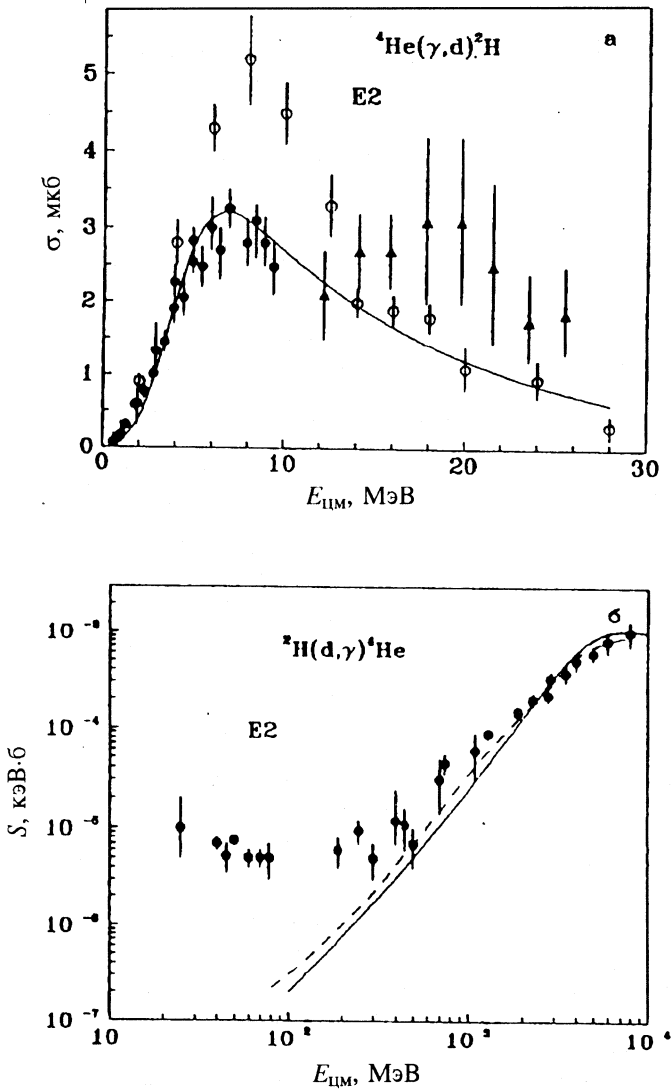


Рис.28. а) Полные сечения фоторазвала ядра  ${}^4\text{He}$  в  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -канал. Кривая — расчеты для глубокого  $D$ -потенциала из табл.7; б) астрофизический  $S$ -фактор для  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -захвата. Непрерывная кривая — результаты расчетов для потенциалов из табл.7. Штриховая кривая — результаты расчетов из [79]

оператора, оказались сравнительно малыми, а  $E1$ -процессы вообще запрещены из-за наличия кластерного множителя, равного нулю в  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -системе.

На рис.28,*a* непрерывной линией показаны результаты расчетов полных сечений фоторазвала ядра  ${}^4\text{He}$  в  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -канал для глубокого синглетного потенциала, содержащего  $CC$  в  $D$ -волне. Эксперимент, полученный из перерасчета сечений захвата до 10 МэВ и из сечений электроразвала при более высоких энергиях, приводится в работах [81,82] соответственно (см. рис.28,*a*, точки и треугольники). Кружками показаны результаты измерений, выполненных в [83]. Видно, что только в серии работ [81] приводятся хорошо согласующиеся между собой данные, которые совпадают и с результатами [83] при низких энергиях. При более высоких энергиях различные измерения оказываются противоречивыми. Так, в [82] появляются указания на присутствие второго максимума при 20 МэВ. В то же время в [83] при энергиях более 10 МэВ наблюдается явный спад сечения.

Расчетные сечения с мелким синглетным  $D$ -взаимодействием оказываются на порядок больше экспериментальных результатов. Любые другие наборы параметров, позволяющие описать  $D$ -фазу и не приводящие к  $CC$  в  $D$ -волне, дают завышенные относительно эксперимента расчетные сечения. И если исходить из требования описания сечений фоторазвала, то приходится отдать предпочтение глубоким синглетным взаимодействиям, имеющим  $CC$  в  $D$ -волне. Заметим, что если для чистого потенциала  $OC$  использовать взаимодействие с другими параметрами [82], которые не точно передают энергии двух связанных уровней, то сечение процесса фоторазвала, сохраняя максимум при тех же энергиях, уменьшается в несколько раз.

На рис.28,*b* показан вычисленный  $S$ -фактор  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -захвата при энергиях от 100 кэВ до 10 МэВ (непрерывная линия) в сравнении с экспериментальными данными [81] и одним из вариантов расчетов, выполненных в [79] (штриховая линия). Видно, что расчетный  $S$ -фактор описывает экспериментальные данные при энергиях до 1—2 МэВ и имеет примерно такую же форму, как в [79]. При более низких энергиях сечение  $E2$ -переходов типа  ${}^2S \rightarrow {}^2D$  оказывается слишком малым, чтобы объяснить экспериментальные данные. При энергиях ниже 1 МэВ основной вклад дают сечения  $E2$ -процесса с переходом из квинтетной  $S$ -волны в  $D$ -компоненту ВФ основного состояния [79], которая в используемой здесь модели отсутствует.

**4.4. Фотопроцессы в кластерных  $p^3\text{H}$ - и  $n^3\text{He}$ -каналах ядра  ${}^4\text{He}$ .** Ранее расчеты дифференциальных сечений для  $p^3\text{H}$ -системы для потенциалов с  $ZC$  и разделением по схемам Юнга выполнены в работе [6]. Полные сечения для таких же взаимодействий рассчитаны нами в [84].

При  $E1$ -процессах возможны переходы между основным чистым с  $T=0$  состоянием и синглетной  $P$ -волной рассеяния. Если считать, что основной вклад в сечения дают процессы с изменением изоспина  $\Delta T=1$

[85], то необходимо использовать  $P$ -потенциал из чистого по изоспину с  $T = 1$  синглетного состояния  $p^3\text{He}$ -системы. В случае переходов с  $\Delta T = 0$  используется потенциал чистой синглетной  $P$ -фазы с  $T = 0$  для системы  $p^3\text{H}$ . В работе [84] для ОС с  $T = 0$  приводятся три варианта взаимодействия, однако здесь используем только одно из них, параметры которого приведены в табл.9. Параметры  $P$ -взаимодействия  $p^3\text{He}$  приведены в табл.4, а фазы рассеяния показаны на рис.8,9.

На рис.29,*а* штриховой линией показаны результаты расчета полных сечений фоторазвала  $^4\text{He}$  в  $p^3\text{H}$ -канал при переходах с  $\Delta T = 1$ . Эксперимент взят из работ [86,87] — кружки, [88] — треугольники и [89] — точки. Видно, что разброс различных экспериментальных данных достигает 20—30%, причем более поздние измерения [88,89] лежат заметно ниже результатов, полученных ранее в [86,87]. Поскольку  $P$ -потенциал выбирался как некий компромисс между различными фазовыми анализами, его величина определена неоднозначно. Поэтому можно несколько увеличить его глубину и принять  $V_0 = 15$  МэВ и  $\alpha = 0,1$  фм<sup>-2</sup>. Тогда в максимуме сечение увеличивается примерно на 0,1 мб и несколько лучше согласуется с экспериментальными данными [88,89], как показано на рис.29,*а* непрерывной линией. Фазы этого  $P$ -потенциала практически не отличаются от показанных на рис.9,*а* непрерывной линией.

Для рассмотрения переходов с  $\Delta T = 0$  необходимо использовать отталкивающий  $P$ -волновой потенциал из  $p^3\text{H}$ -системы, приведенный в табл.9. В этом случае вообще не удастся правильно передать даже форму экспериментальных сечений, как показано на рис.29,*а* штрихпунктирной линией.

На рис.29,*б* штриховой линией показаны результаты расчетов для реакции  $^4\text{He}(\gamma, n)^3\text{He}$  с  $\Delta T = 1$  для  $P$ -взаимодействия из табл.4 вместе с экспериментальными данными работ [89] — точки, [90] — треугольники и [91] — кружки. И здесь более ранние измерения сечений [92] лежат заметно выше последних данных [89,90]. Если несколько уменьшить глубину в  $P$ -волне до 11 МэВ при той же геометрии, то удастся описать данные работ [89,90]. Это сечение показано на рис.29,*б* непрерывной линией. Фазы такого  $P$ -потенциала приведены на рис.9,*а* точечной линией и согласуются с данными фазового анализа из работы [44].

Существующие расчеты сечений этих фотореакций в различных моделях и подходах (см., например, [86—91]) в общем приводят к согласию с имеющимися экспериментальными данными. Однако экспериментальные неоднозначности столь велики, что трудно отдать предпочтение тем или иным результатам. В данном случае неоднозначность фазовых анализов позволяет несколько менять параметры потенциалов и получать результаты, согласующиеся с теми или иными экспериментальными данными по фоторазвалу.

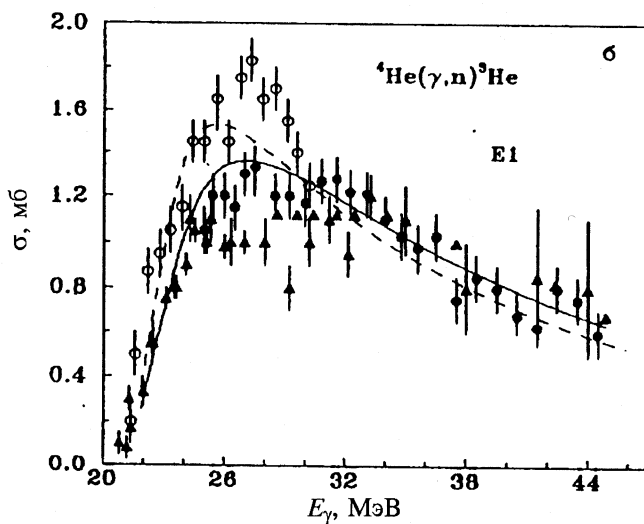
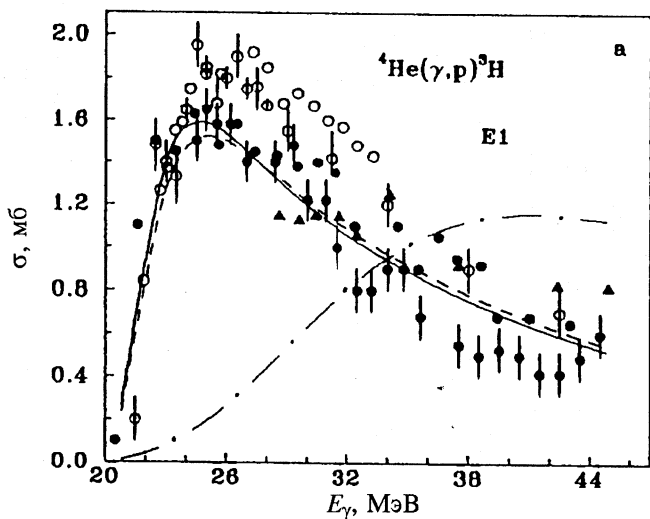


Рис.29. Полные сечения фоторазвала ядра  ${}^4\text{He}$  в  $p^3\text{H}$ - и  $n^3\text{He}$ -каналах. Кривые — результаты расчетов для различных потенциалов



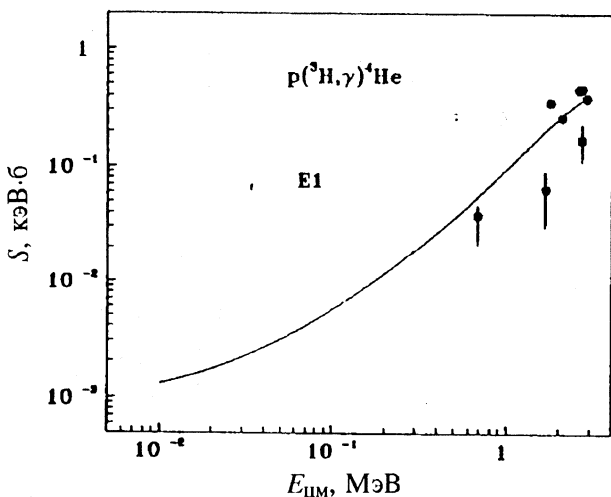


Рис.30. Астрофизический  $S$ -фактор для  $p^3\text{H}$ -захвата. Непрерывная кривая — расчеты для потенциалов из табл.4,8,9

На рис.30 приведен астрофизический  $S$ -фактор при малых энергиях, полученный с  $P$ -волновым взаимодействием при глубине 15 МэВ, которое приводит к описанию процесса фоторазвала. Экспериментальные данные взяты из работ [86—89]. Видно, что, несмотря на большие экспериментальные ошибки, в целом удается передать измеренные сечения [86—89] и при низких энергиях  $0,7 \pm 3$  МэВ. Линейная экстраполяция  $S$ -фактора к нулевой энергии дает значение  $\sim 1,3(6) \cdot 10^{-3}$  кэВ·б.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе приведенных результатов можно считать, что расчеты упругих и неупругих кулоновских формфакторов ядер лития в двухкластерных моделях для потенциалов с запрещенными состояниями позволяют получить неплохое описание экспериментальных результатов даже при сравнительно больших переданных импульсах. Во всех случаях, в отличие от МРГ-вычислений [34—36], в расчетах присутствует второй максимум формфактора, величина которого несколько занижена относительно экспериментальных данных. Удастся воспроизвести вероятности электромагнитных  $E2$ - и  $M1$ -переходов, магнитный, квадрупольный и октупольный моменты,

магнитный и зарядовый радиусы. Параметры потенциалов предварительно фиксированы по упругим фазам рассеяния кластеров и при вычислении формфакторов несколько изменены только для  $D_3$ -волны в  ${}^6\text{Li}$ , что позволило хорошо передать поведение первого максимума формфактора.

Кластерная потенциальная модель для взаимодействий с ЗС позволяет правильно описать не только статические электромагнитные характеристики ядер лития, но и полные сечения фотопроцессов во всей рассмотренной области энергий. Описываются и  $S$ -факторы при астрофизических энергиях. Поэтому можно считать, что большая вероятность кластеризации ядер лития в  ${}^4\text{He}^2\text{H}$ - и  ${}^4\text{He}^3\text{H}$ -каналы позволяет вполне успешно применять простую одноканальную кластерную модель. Одни и те же наборы потенциалов дают возможность описывать различные ядерные характеристики. Для получения согласия с экспериментом не требуется вводить какие-либо искажения характеристик кластеров. Предположение о том, что данным кластерам в ядре можно в целом сопоставлять свойства соответствующих свободных частиц, вполне оправдывается, что согласуется и с МРГ-результатами [36,92], где искажения приводят только к незначительным изменениям характеристик ядер  ${}^6\text{Li}$  и  ${}^7\text{Li}$ . Определенное исключение составляет только сечение  ${}^3\text{He}^3\text{H}$ -захвата, где имеются некоторые экспериментальные неоднозначности в сечениях и не удается согласовать фазы рассеяния с энергией ОС.

Применение одноканальной потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями и разделением по схемам Юнга позволяет в целом воспроизвести имеющиеся экспериментальные данные по полным сечениям фоторазвала и радиационного захвата в  $\text{N}^2\text{H}$ -системе при небольших энергиях на основе потенциала, в целом согласованного с чистыми фазами, фазами рассеяния и характеристиками СС, получить вполне конкретные результаты для системы  ${}^2\text{H}^3\text{He}$ .

Потенциальная кластерная модель в общем позволяет передать форму сечений фоторазвала  ${}^4\text{He}$  при использовании  $E1$ -переходов с  $\Delta T = 1$  для рассмотренных реакций в  $p^3\text{H}$ - и  $p^3\text{He}$ -каналах. Величина расчетных сечений находится в пределах неоднозначностей различных экспериментальных результатов. Варьируя глубину  $P$ -взаимодействия в пределах 10—20%, можно несколько улучшить согласие расчетов с теми или иными экспериментальными данными по фотосечениям. Фазы измененных таким образом  $P$ -потенциалов находятся в интервале экспериментальных неоднозначностей различных фазовых анализов. Потенциал ОС согласован с характеристиками СС и чистыми фазами.

Используемая кластерная модель с расщеплением по схемам Юнга позволяет описать определенные экспериментальные данные по полным сечениям фоторазвала и радиационного захвата в  ${}^2\text{H}^2\text{H}$ -канале при небольших энергиях. Астрофизический  $S$ -фактор вполне согласуется с результатами других расчетов при не очень малых энергиях. Оказывается возможным избавиться от неоднозначностей при выборе  $S$ -потенциала ОС ядра и согласовать его параметры с чистыми фазами. Уточняется также форма и структура синглетного  $D$ -взаимодействия, позволяющего одновременно воспроизвести фазы рассеяния и сечения фотопроцессов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Neudatchin V.G. et al. — Lett. Nuovo Cim., 1972, v.5, p.234; Phys. Lett., 1971, v.34B, p.581.
2. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. — Современные вопросы оптики и атомной физики. Киев: Изд-во Киевского гос.университета, 1974, с.224; ЭЧАЯ, 1979, т.10, с.1236.
3. Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В. — ЯФ, 1993, т.56, № 2, с.87; ЯФ, 1994, т.57, № 5, с.784.
4. Lehman D.R. et al. — Phys. Lett., 1975, v.B59, p.327; Phys. Rev., 1982, v.C25, p.2743; Phys. Rev., 1982, v.C25, p.3146.
5. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. — Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М.: Наука, 1969.
6. Neudatchin V.G. et al. — Phys. Rev., 1992, v.C45, p.1512; ЭЧАЯ, 1993, т.23, с.480.
7. Неудачин В.Г. и др. — ЯФ, 1990, т.52, с.738; с.402;  
Искра В. и др. — УФЖ, 1988, т.32, с.1141; ЯФ, 1988, т.48, с.1674;  
Дубовиченко С.Б. и др. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1990, т.54, с.911.
8. Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В. — ЯФ, 1990, т.51, № 6, с.1541; ЯФ, 1993, т.56, № 4, с.45.
9. Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В. — ЯФ, 1992, т.55, № 11, с.2918;  
Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В., Сахарчук А.А. — ЯФ, 1993, т.56, № 8, с.90;  
Дубовиченко С.Б. — ЯФ, 1997, т.60, № 1, с.254.
10. Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В. — ЯФ, 1995, т.58, № 4, с.635; ЯФ, 1995, т.58, № 5, с.852.
11. Tombrello T. et al. — Phys. Rev., 1963, v.131, p.2578.
12. Mertelmeir T. et al. — Nucl. Phys., 1986, v.A459, p.387.
13. Buck V. et al. — J. Phys. G., 1985, v.11, p.L11.
14. Bergstrom J.C. — Nucl. Phys., 1980, v.A341, p.13.
15. Kukulin V.I. et al. — Nucl. Phys., 1984, v.A417, p.128; 1986, v.A453, p.365; 1990, v.A517, p.221.
16. Itzykson E. — Rev. Mod. Phys., 1966, v.38, p.95.
17. Baye D. et al. — J. Phys. G., 1981, v.7, p.1073;  
Tompson D. et al. — Phys. Rev., 1967, v.159, p.806.

18. **Schmelzbach P. et al.** — Nucl. Phys., 1972, v.A184, p.193;  
**McIntair L. et al.** — Nucl. Phys., 1967, v.A91, p.382;  
**Bruno M. et al.** — Nuovo Cim., 1982, v.A68, p.35;  
**Jenny B. et al.** — Nucl. Phys., 1983, v.A397, p.61;  
**Darriulat P. et al.** — Nucl. Phys., 1967, v.A94, p.653;  
**Keller L. et al.** — Nucl. Phys., 1970, v.A156, p.465;  
**Барит И.Я. и др.** — Препринт ИЯИ, М., 1987, № П-0513.
19. **Bernard A. et al.** — Nucl. Phys., 1964, v.50, p.629;  
**Spiger R. et al.** — Phys. Rev., 1967, v.163, p.964.
20. **Ivanovich M. et al.** — Nucl. Phys., 1968, v.A110, p.441.
21. **Vlastou J. et al.** — Nucl. Phys., 1977, v.292, p.29;  
**Batten R. et al.** — Nucl. Phys., 1970, v.A151, p.56.
22. **Tompson D. et al.** — Nucl. Phys., 1968, v.A106, p.591.
23. **Ajzenberg-Selove F.** — Nucl. Phys., 1979, v.A320, p.1;  
**Fiarman S. et al.** — Nucl. Phys., 1973, v.A206, p.1.
24. **Bacher A. et al.** — Nucl. Phys., 1968, v.A119, p.481.
25. **Beck D. et al.** — Phys. Rev., 1984, v.C30, p.1403;  
**Simon G. et al.** — Nucl. Phys., 1981, v.A365, p.285;  
**Klasfeld S. et al.** — Nucl. Phys., 1986, v.A456, p.373;  
**Borie B. et al.** — Nucl. Phys., 1977, v.A275, p.246; Phys. Rev., 1978, v.A18, p.324;  
**Dunn P. et al.** — Phys. Rev., 1983, v.C27, p.71;  
**Sick I. et al.** — Phys. Lett., 1982, v.B116, p.212.
26. **Van Niftric G. et al.** — Nucl. Phys., 1971, v.A174, p.173;  
**Hausser O. et al.** — Nucl. Phys., 1973, v.A212, p.613;  
**Green S. et al.** — Phys. Rev., 1971, v.A4, p.251;  
**Sundholm D. et al.** — Chem. Phys. Lett., 1984, v.112, p.1;  
**Vermeer W. et al.** — Austr. J. Phys., 1984, v.37, p.273; Phys. Lett., 1984, v.B138, p.365;  
**Weller A. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1985, v.55, p.480;  
**Bamberger A. et al.** — Nucl. Phys., 1972, v.194, p.193;  
**De Vries H. et al.** — Atom Data and Nucl. Data Tables., 1987, v.36, p.495.
27. **Platner D.** — Europ. Few Body Probl. Nucl. Part. Phys. Sesimbra., 1980, p.31;  
**Bornard M. et al.** — Nucl. Phys., 1978, v.A294, p.492;  
**Lim T.** — Phys. Rev., 1976, v.C14, p.1243.
28. **Вильдермут К., Тан Я.** — Единая теория ядра. М.: Мир, 1980.
29. **Ланько Э.В. и др.** — Вероятности электромагнитных переходов атомных ядер. Л.: Наука, 1972.
30. **Rao K. et al.** — Phys. Scr., 1981, v.24, p.925;  
**Liu Q. et al.** — Z. Phys., 1981, v.303, p.253;  
**Bouten M. et al.** — J. Phys. G., 1982, v.8, p.1641.
31. **Buck B. et al.** — J. Phys. G., 1988, v.14, p.L211.
32. **Roos P. et al.** — Nucl. Phys., 1976, v.A257, p.317;  
**Watson J. et al.** — Nucl. Phys., 1971, v.A172, p.513;  
**Alder J. et al.** — Phys. Rev., 1972, v.C6, p.1.
33. **Janssens T. et al.** — Phys. Rev., 1966, v.142, p.922.

34. **Kruppa A. et al.** — Phys. Lett., 1986, v.B179, p.317; Phys. Rev., 1987, v.C36, p.327;  
**Sharma V. et al.** — J. Phys. G., 1984, v.10, p.1703;  
**Kajino T. et al.** — Nucl. Phys., 1984, v.A413, p.323; v.A414, p.185;  
**Kaneko T. et al.** — Phys. Rev., 1986, v.C43, p.771.
35. **Unkelbach M., Hofman H.** — Phys. Lett., 1991, v.B261, p.211; Few Body Systems, 1991, v.11, p.143.
36. **Kanada H. et al.** — Nucl. Phys., 1982, v.A389, p.285; Progr. Theor. Phys., 1984, v.72, p.369.
37. **И-Тонг Чеон** — Phys. Lett., 1969, v.B30, p.81; 1971, v.B35, p.276; Phys. Rev., 1971, v.C3, p.1023.
38. **Bergstrom J.** — Nucl. Phys., 1976, v.A262, p.196; 1979, v.A327, p.458; Phys. Rev., 1982, v.C25, p.1156.
39. **Walliser H., Fliesbach T.** — Phys. Rev., 1985, v.C31, p.2242.
40. **Lichtenstadt J. et al.** — Phys. Lett., 1989, v.B219, p.394; 1990, v.B244, p.173;  
**McCarthy J. et al.** — Phys. Rev., 1977, v.C15, p.1396;  
**Arnold R.G. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1978, v.40, p.1429.
41. **Кукулин В.И. и др.** — Препр. ИЯИ АН СССР П-0685, 1990; Изв. АН СССР, сер. физ., 1989, т.53, с.121; Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат., 1988, № 2, с.44;  
**Kukulin V.I. et al.** — J. Phys. G., 1989, v.58, p.777;  
**Eramzhyan R.A. et al.** — Phys. Lett., 1989, v.B228, p.1.
42. **Berg H. et al.** — Nucl. Phys., 1980, v.A334, p.21;  
**Kavanagh R. et al.** — Phys. Rev., 1966, v.143, p.143.
43. **McSherry D. et al.** — Phys. Rev., 1970, v.1C, p.888;  
**Szalko G. et al.** — Nucl. Phys., 1978, v.A303, p.57;  
**Morrow L. et al.** — Nucl. Phys., 1969, v.A126, p.225.
44. **Tombrello T. et al.** — Phys. Rev., 1965, v.138, p.40B.
45. **Drigo L. et al.** — Nuovo Cim., 1967, v.LIB, p.419.
46. **Morales J. et al.** — Phys. Rev., 1975, v.11C, p.1905;  
**Mudroch B. et al.** — Phys. Rev., 1984, v.C29, p.2001.
47. **Tombrello T. et al.** — Phys. Rev., 1966, v.143, p.772.
48. **Shen P. et al.** — Phys. Rev., 1986, v.C33, p.1214;  
**LeMere M. et al.** — Phys. Rev., 1975, v.C12, p.1140.
49. **Schmelzbach P. et al.** — Nucl. Phys., 1972, v.A197, p.237;  
**Arviex J.** — Nucl. Phys., 1967, v.A102, p.513;  
**Van Oers W.** — Nucl. Phys., 1967, v.A92, p.561;  
**Chauvin J. et al.** — Nucl. Phys., 1975, v.A247, p.347;  
**Sloan J.** — Nucl. Phys., 1971, v.A168, p.211;  
**Huttel E. et al.** — Nucl. Phys., 1983, v.A406, p.443.
50. **Kocher D. et al.** — Nucl. Phys., 1969, v.A132, p.455.
51. **Sick I. et al.** — Phys. Rev. Lett., 1980, v.45, p.871;  
**Atti C. et al.** — Lect. Not. Phys., 1981, v.137, p.115.
52. **Jenny B.** — Nucl. Phys., 1980, v.A337, p.77.
53. **Kanada H. et al.** — Nucl. Phys., 1986, v.A457, p.93; Nucl. Phys., 1989, v.A504, p.529;  
**Shen P. et al.** — Phys. Rev., 1985, v.C31, p.2001.

54. **Brolley J. et al.** — *Phys. Rev.*, 1960, v.117, p.1307;  
**King T. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1972, v.A183, p.657.
55. **Lien P.** — *Nucl. Phys.*, 1972, v.A178, p.375.
56. **Kanada H. et al.** — *Phys. Rev.*, 1986, v.C34, p.22.
57. **Frank R. et al.** — *Phys. Rev.*, 1953, v.99, p.1406;  
**Darves-Blane R.** — *Nucl. Phys.*, 1972, v.A191, p.353;  
**Detch J. et al.** — *Phys. Rev.*, 1971, v.C4, p.52;  
**Werntz C. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1968, v.A121, p.38;  
**Meyerhof W. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1965, v.74, p.533;  
**Бариг И.Я., Сергеев В.А.** — *ЯФ*, 1971, т.13, с.1230.
58. **Hardekopf R. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1972, v.A191, p.481;  
**Kankovsky R. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1976, v.A263, p.29.
59. **Langanke K.** — *Nucl. Phys.*, 1986, v.A457, p.351.
60. **Liu Q. et al.** — *Phys. Rev.*, 1981, v.C23, p.645;  
**Walliser L. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1984, v.A419, p.133; *Phys. Rev.*, 1983, v.C28, p.57.
61. **Kajino T.** — *Nucl. Phys.*, 1986, v.A460, p.559.
62. **Burkova N. et al.** — *Phys. Lett.*, 1990, v.B248, p.15;  
**Денисов В.П., Чубуков И.Я.** — *ЯФ*, 1982, т.35, № 1, с.11.
63. **Parker P. et al.** — *Phys. Rev.*, 1963, v.131, p.2582;  
**Nagatani K. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1969, v.A128, p.325;  
**Osborn J. et al.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1982, v.42, p.1664; *Nucl. Phys.*, 1984, v.A419, p.115;  
**Robertson R. et al.** — *Phys. Rev.*, 1983, v.C27, p.11;  
**Krawinkel H. et al.** — *Z. Phys.*, 1982, v.304, p.307.
64. **Griffiths G. et al.** — *Can J. Phys.*, 1961, v.39, p.1397.
65. **Fowler W. et al.** — *Ann. Rev. Astr. Astrophys.*, 1975, v.13, p.69.
66. **Alexander T. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1984, v.A427, p.526.
67. **Buck B. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1976, v.A275, p.246; *Int. 4th Conf. on Clust. Aspects of Nucl. Struct. and Nucl. React. Chester*, 1984.
68. **Robertson R. et al.** — *Phys. Lett.*, 1981, v.47, p.1867.
69. **Taneichi H. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1986, v.A448, p.315;  
**Scopik D. et al.** — *Phys. Rev.*, 1976, v.C14, p.789.
70. **Жусупов М.А. и др.** — *Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат.*, 1991, т.2, с.30.
71. **Young A. et al.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1970, v.25, p.1764;  
**Blatt S. et al.** — *Phys. Rev.*, 1968, v.176, p.1147.
72. **Nusslin F. et al.** — *Z. Naturf.*, 1966, v.A21, p.1195.
73. **Murakami A. et al.** — *Nuovo Cim.*, 1968, v.B60, p.604; *J. Phys. Soc. Jap.*, 1970, v.28, p.191;  
**Bazhanov E. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1965, v.65, p.191;  
**Scherman N. et al.** — *Phys. Rev.*, 1968, v.169, p.771; *Phys. Rev. Lett.*, 1966, v.17, p.31.
74. **Mondragon A. et al.** — *Phys. Rev.*, 1990, v.C41, p.1975.
75. **Дубовиченко С.Б.** — *ЯФ*, 1995, т.58, № 7, с.1253.
76. **Fetisov V.N. et al.** — *Nucl. Phys.*, 1965, v.71, p.305;  
**Stewart J.R. et al.** — *Phys. Rev.*, 1965, v.138, p.B372;

- Kundu S.K. et al.** — Nucl. Phys., 1971, v.A171, p.384;  
**Berman B.L. et al.** — Phys. Rev., 1964, v.133, p.B117.
77. **Faul D.D. et al.** — Phys. Rev., 1981, v.C24, p.849;  
**Scopik D.M. et al.** — Phys. Rev., 1981, v.C24, p.1791.
78. **Griffiths G.M. et al.** — Can. J. Phys., 1962, v.40, p.402.
79. **Weller H., Lehman D.** — Ann. Rev. Nucl. Part., 1988, v.38, p.563;  
**Bluge G. et al.** — Phys. Rev., 1987, v.C36, p.21;  
**Assenbaum H., Langanke K.** — Phys. Rev., 1987, v.C36, p.17;  
**Wachter V. et al.** — Phys. Lett., 1988, v.B200, p.246.
80. **Дубовиченко С.Б.** — ЯФ, 1995, т.58, №11, с.1973.
81. **Zurmuhle R. et al.** — Phys. Rev., 1963, v.C132, p.751;  
**Meyerhof W. et al.** — Nucl. Phys., 1969, v.A131, p.489;  
**Wilkinson F., Cecil F.** — Phys. Rev., 1985, v.C31, p.2036.
82. **Skopik D., Dodge W.** — Phys. Rev., 1972, v.C6, p.43.
83. **Аркатов Ю.М. и др.** — УФЖ, 1978, т.23, с.918.
84. **Дубовиченко С.Б.** — ЯФ, 1995, т.58, № 8, с.1377.
85. **Gibson B.** — Nucl. Phys., 1981, v.A353, p.85.
86. **Meyerhof W. et al.** — Nucl. Phys., 1970, v.A148, p.211;  
**Arkatov Yu. et al.** — Sov. J. Nucl. Phys., 1970, v.10, p.639; 1971, v.12, p.123; 1976, v.21, p.475.
87. **Gemmel D. et al.** — Nucl. Phys., 1962, v.A33, p.102;  
**Gorbunov A.** — Phys. Lett., 1968, v.B27, p.436
88. **Bernabei R. et al.** — Phys. Rev., 1988, v.C38, p.1990.
89. **Balestra F. et al.** — Nuovo Cim., 1977, A38, p.145.
90. **Calarco J. et al.** — Phys. Rev., 1983, v.C27, p.1866;  
**Berman B. et al.** — Phys. Rev., 1980, v.C22, p.2273.
91. **Irish J. et al.** — Can. J. Phys., 1975, v.53, p.802.
92. **Susila S. et al.** — Acta Phys. Pol., 1981, v.B12, p.799;  
**Mihailovic M. et al.** — Nucl. Phys., 1981, v.A363, p.377;  
**Krivec R. et al.** — J. Phys., 1982, v.G8, p.821;  
**Kanada H. et al.** — Nucl. Phys., 1982, v.A380, p.87.

## РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.173

**Экспериментальные методы исследования спонтанного и низкоэнергетического деления ядер.** Тер-Акопьян Г.М., Оганесян Ю.Ц., Даниэль В.А., Попеко Г.С., Гамильтон Дж., Кормицки Я., Рамайа А., Климан Я., Расмуссен Дж. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.6, с.1357.

Обзор посвящен рассмотрению экспериментальных физических методов исследования спонтанного и низкоэнергетического деления ядер. Изложены различные методы определения характеристик ядерного деления: массы, заряда, кинетической энергии, энергии возбуждения и углового момента осколков деления. Обсуждаются возможности этих методов, даются характеристики используемой экспериментальной техники. Приведены примеры точности определения характеристик деления, которая достигнута в современных экспериментах.

Детально описан новый подход к исследованию деления, основанный на спектроскопии множественных мгновенных  $\gamma$ -квантов деления. Представлены некоторые новые данные для спонтанного деления  $^{252}\text{Cf}$ , полученные при таком подходе. Показаны возможности нового метода для исследования ядерного деления.

Табл.1. Ил.7. Библиогр.: 108.

УДК 539.142 + 539.143.43

**Магнитные дипольные возбуждения в деформированных ядрах.** Ло Юдиче Н.

Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.6, с.1389.

Представлен обзор ряда моделей, применяемых для изучения свойств низколежащих магнитных дипольных возбуждений, называемых «ножничной» модой. Указанные возбуждения обнаружены в большинстве деформированных ядер. Вначале внимание концентрируется на геометрической двухроторной модели (ДРМ), предсказания которой послужили основанием для поиска данной моды. Подчеркнуто соответствие этих предсказаний наиболее важным коллективным свойствам моды. Далее дается обзор более сложных подходов, выполненных в рамках различных бозонных моделей. Доказана их строгая связь с ДРМ. Показано также, что подобная связь существует между ДРМ и приближением случайных фаз (ПСФ). Вслед за феноменологическими и схематическими моделями, предназначенными для описания коллективных свойств  $M1$ -переходов, проанализированы микроскопические подходы, лишь в рамках которых возможно объяснение как общих глобальных свойств моды, так и распределения ее  $M1$ -силы. Обсуждены также оболочечные подходы, широко применяемые для легких и средних ядер. Детальный анализ проведен для ПСФ — наиболее глубоко разработанной схемы, особенно для тяжелых ядер. Кратко обрисовано развитие теории рассматриваемого явления от первоначально неполных и слишком приближенных подходов, дающих порой противоречивые результаты, к современным усовершенствованным разработкам, приводящим к согласованным выводам. В заключение продемонстрированы возможности квазичастично-фононной модели ядра (КФМЯ) для улучшения ПСФ-описания  $M1$ -спектра путем включения связи с двухфононными состояниями и обсуждены связанные с этим результаты исследований. Обзор завершается сравнением  $M1$ -спектров, измеренных недавно в деформированных  $A$ -нечетных ядрах, с рассчитанными в КФМЯ.

Ил.6. Библиогр.: 205.



УДК 539.17

**Низкоэнергетические разложения в ядерной физике.** Путьшев В.В. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.6, с.1457.

Результаты недавних экспериментальных и теоретических исследований низкоэнергетических нуклон-нуклонных и нуклон-дейтронных столкновений обсуждаются и сравниваются с давно известными. Особое внимание уделено двум проблемам: проблеме экстрополяции фаз, амплитуд и сечений таких столкновений в экспериментально недоступную область энергий и проблеме разделения вкладов от ядерного и электромагнитного взаимодействий в параметры низкоэнергетического упругого рассеяния. Анализируются различные классические и недавно предложенные подходы к решению этих проблем. Развивается метод построения низкоэнергетических разложений, позволяющий извлечь информацию о ядерном взаимодействии в пределе нулевой энергии из измеренных фаз рассеяния в системах из двух и трех нуклонов или ядер и исследовать роль электромагнитных поправок к кулоновскому взаимодействию в таком рассеянии. Показано, что наличие у нуклона магнитного момента обуславливает линейную зависимость  ${}^3P_J$ -фаз нуклон-нуклонного рассеяния от стремящегося к нулю относительного импульса. В таком же пределе исследована энергетическая зависимость вклада поляризационного взаимодействия в полное сечение протон-дейтронного рассеяния.

Библиогр.: 194.

УДК 539.14-17

**Электромагнитные эффекты в легких ядрах на основе потенциальной кластерной модели.** Дубовиченко С.Б., Джазирова-Кахраманов А.В. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1997, том 28, вып.6, с.1529.

В обзоре рассматриваются процессы фоторазвала и радиационного захвата в  $N^2H$ ,  $N^3H$ ,  $N^3He$ ,  ${}^2H^2H$ ,  ${}^2H^4He$ ,  ${}^3He^3H$ ,  ${}^4He^3H$ ,  ${}^4He^3He$  каналах на основе соответствующих потенциальных двухкластерных моделей. Вычисляются астрофизические  $S$ -факторы при малых энергиях. Показана возможность описания различных электромагнитных характеристик легких ядер, включая кулоновские формфакторы при переданных импульсах до  $4-4,5 \text{ фм}^{-1}$ , зарядовые и магнитные радиусы, квадрупольные и магнитные моменты, вероятности электромагнитных переходов, энергии связи в кластерных каналах, спектры уровней, импульсные распределения кластеров в ядрах на основе единых наборов параметров межкластерных взаимодействий для каждой кластерной системы. Такие потенциалы содержат запрещенные связанные состояния и изначально согласованы с фазами упругого рассеяния кластеров при низких энергиях. Расчетные неупругие кулоновские формфакторы при переданных импульсах  $3-4 \text{ фм}^{-1}$  имеют второй максимум, однако его величина меньше экспериментальной. В легких кластерных системах проводится классификация орбитальных состояний и выполняется разделение фаз упругого рассеяния и соответствующих межкластерных потенциалов по орбитальным схемам Юнга. Чистые по орбитальным состояниям потенциалы используются для расчетов характеристик связанных состояний легчайших ядер.

Табл.10. Ил. 30. Библиогр.: 92.

## ТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ, т.28, 1997

### ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

- Бондарев В.К.** Кумулятивное рождение частиц на пучках протонов и ядер (аспекты детального исследования). 1, 13 (5)
- Вонсовский С.В., Свирский М.С.** Дрожащее движение и неопределенность скорости и ускорения в теории Дирака. 1, 162 (66)
- Гроше Х., Погосян Г.С., Сисакян А.Н.** Метод континуального интегрирования для задач с суперинтегрируемыми потенциалами. 5, 1229 (486)
- Даньшин С.Н., Зацепин Г.Т., Копылов А.В., Петухов В.В., Янович Е.А.** Проблема солнечных нейтрино и радиохимический литиевый детектор 1, 5 (1)
- Демицу И.**, см. Нишижима К. и др.
- Дмитриевский В.П.** Электроядерный метод получения энергии. 3, 815 (322)
- Жуков В.А., Мамедов Т.Н., Никольский Б.А., Пономарев А.Н., Фирсов В.Г.**  $\mu SR$ -исследования на фазотроне Лаборатории ядерных проблем. 3, 753 (295)
- Зацепин Г.Т.**, см. Даньшин С.Н. и др.
- Исаев А.П.**  $R$ -матричный подход к дифференциальному исчислению на квантовых группах. 3, 685 (267)
- Копылов А.В.**, см. Даньшин С.Н. и др.
- Красников Н.В., Матвеев В.А.** Физика на ЛНС. 5, 1125 (441)
- Либанов М.В., Рубаков В.А., Троицкий С.В.** Многочастичные процессы и квазиклассика в бозонных теориях поля. 3, 551 (217)
- Мамедов Т.Н.**, см. Жуков В.А. и др.
- Матвеев В.А.**, см. Красников Н.В. и др.
- Мурадян Р.М.** Закон Редже и вращение небесных тел. 5, 1190 (471)
- Никольский Б.А.**, см. Жуков В.А. и др.
- Никитюк Н.М.** Прецизионные микроволновые детекторы. 1, 191 (77)
- Нишижима К., Демицу И.** Нормировка БРС-зарядов. 5, 1221 (483)
- Петухов В.В.**, см. Даньшин С.Н. и др.
- Погосян Г.С.**, см. Гроше Х. и др.
- Пономарев А.Н.**, см. Жуков В.А. и др.
- Рубаков В.А.**, см. Либанов М.В. и др.
- Свирский М.С.**, см. Вонсовский С.В. и др.
- Сисакян А.Н.**, см. Гроше Х. и др.
- Смирнов В.А.** Средства организации систем сбора данных для проведения экспериментов в области физики высоких энергий. 5, 1295 (520)
- Троицкий С.В.**, см. Либанов М.В. и др.
- Фирсов В.Г.**, см. Жуков В.А. и др.
- Шефтель М.Б.** Группы Ли и дифференциальные уравнения: симметрии, законы сохранения и точные решения математических моделей в физике. 3, 615 (241)
- Юкалов В.И., Юкалова Е.П.** Термодинамика сильных взаимодействий. 1, 89 (37)
- Юкалова Е.П.**, см. Юкалов В.И. и др.
- Янович Е.А.**, см. Даньшин С.Н. и др.

### ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

- Багров В.Г., Самсонов Б.Ф.** Преобразование Дарбу уравнения Шредингера. 4, 951 (374)
- Гамильтон Дж.**, см. Тер-Акопьян Г.М. и др.
- Даниэль А.В.**, см. Тер-Акопьян Г.М. и др.
- Динев Д.Х.** Инжекция тяжелых ионов в синхротроны и накопительные кольца. 2, 449 (180)

- Динев Д. Коррекция замкнутой орбиты в синхротронах. 4, 1013 (398)
- Джазаиров-Кахраманов А.В. см., Дубовиченко С.Б. и др.
- Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В. Электромагнитные эффекты в легких ядрах на основе потенциальной кластерной модели. 6, 1529
- Кадменский С.Г. Теория ферми-жидкости с учетом эффектов фрагментации и запаздывания. 2, 391 (159)
- Климан Я., см. Тер-Акопьян Г.М. и др.
- Кормицки Я., см. Тер-Акопьян Г.М. и др.
- Камерджиев С.П., Тертычный Г.Я., Целяев В.И. Метод хронологического расщепления диаграмм: модель и ее применение к описанию гигантских резонансов в магических ядрах. 2, 333 (134)
- Князьков О.М., Кухтина И.Н., Фаянс С.А. Квазиупругое рассеяние легких экзотических ядер. 4, 1061 (418)
- Кухтина И.Н., см. Князьков О.М. и др.
- Ло Юдиче Н. Магнитные дипольные возбуждения в деформированных ядрах. 6, 1389
- Лукьянов А.А., Янева Н. Многоуровневая параметризация нейтронных резонансных сечений. 4, 847 (331)
- Майлинг Л., Фетисов В.Н., Эрамжян Р.А. Распадные свойства гиперядер  $1p$ -оболочки. 2, 253 (101)
- Мешков И.Н. Экспериментальные исследования физики антиводорода и позитрония — проблемы и возможности. 2, 495 (198)
- Михайлов И.Н., см. Усманов П.Н. и др.
- Оганесян Ю.Ц., см. Тер-Акопьян Г.М. и др.
- Попеко Г.С., см. Тер-Акопьян Г.М. и др.
- Пушпшев В.В. Низкоэнергетические разложения в ядерной физике. 6, 1457
- Рамайа А., см. Тер-Акопьян Г.М. и др.
- Расмуссен Дж., см. Тер-Акопьян Г.М. и др.
- Самсонов Б.Ф., см. Багров В.Г. и др.
- Тер-Акопьян Г.М., Оганесян Ю.Ц., Даниэль А.В., Попеко Г.С., Гамильтон Дж., Кормицки Я., Рамайа А., Климан Я., Расмуссен Дж. Экспериментальные методы исследования спонтанного и низкоэнергетического деления ядер. 6, 1357
- Тертычный Г.Я., см. Камерджиев С.П. и др.
- Усманов П.Н., Михайлов И.Н. Эффекты неадиабатичности коллективного движения на четно-четных деформированных ядрах. 4, 887 (348)
- Фаянс С.А., см. Князьков О.М. и др.
- Фетисов В.Н., см. Майлинг Л. и др.
- Целяев В.И., см. Камерджиев С.П. и др.
- Эрамжян Р.А., см. Майлинг Л. и др.
- Янева Н., см. Лукьянов А.А. и др.

## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ, Т.28, 1997

### Б

- Багров В.Г. 4, 951 (374)
- Бондарев В.К. 1, 13 (5)

### В

- Вонсовский С.В. 1, 162 (66)

### Г

- Гамильтон Дж. 6, 1357
- Гроше Х. 5, 1229 (486)

### Д

- Даниэль А.В. 6, 1357
- Даньшин С.Н. 1, 5 (1)
- Демицу И. 5, 1221 (483)

- Джазаиров-Кахраманов А.В. 6, 1529
- Динев Д.Х. 2, 449 (180)
- Динев Д. 4, 1013 (398)
- Дмитриевский В.П. 3, 815 (322)
- Дубовиченко С.Б. 6, 1529

### Ж

- Жуков В.А. 3, 753 (295)

### З

- Зацепин Г.Т. 1, 5 (1)

### И

- Исаев А.П. 3, 685 (267)

**К**

Кадменский С.Г. 2, 391 (159)  
 Камерджиев С.П. 2, 333 (333)  
 Климан Я. 6, 1357  
 Князьков О.М. 4, 1061 (418)  
 Копылов А.В. 1, 5 (1)  
 Кормицки Я. 6, 1357 (000)  
 Красников Н.В. 5, 1125 (441)  
 Кухтина И.Н. 4, 1061 (418)

**Л**

Либанов М.В. 3, 551 (217)  
 Ло Юдиче Н. 6, 1389  
 Лукьянов А.А. 4, 847 (331)

**М**

Майлинг Л. 2, 253 (101)  
 Мамедов Т.Н. 3, 753 (295)  
 Матвеев В.А. 5, 1125 (441)  
 Мешков И.Н. 2, 495 (198)  
 Михайлов И.Н. 4, 887 (348)  
 Мурадян Р.М. 5, 1190 (471)

**Н**

Никитюк Н.М. 1, 191 (77)  
 Никольский Б.А. 3, 753 (295)  
 Нишижима К. 5, 1221 (483)

**О**

Оганесян Ю.Ц. 6, 1357

**П**

Петухов В.В. 1, 5 (1)  
 Погосян Г.С. 5, 1229 (486)  
 Пономарев А.Н. 3, 753 (295)  
 Попеко Г.С. 6, 1357  
 Пупышев В.В. 6, 1457

**Р**

Рамайа А. 6, 1357  
 Расмуссен Дж. 6, 1357  
 Рубаков В.А. 3, 521 (217)

**С**

Свирский М.С. 1, 162 (66)  
 Сисакян А.Н. 5, 1229 (486)  
 Смирнов В.А. 5, 1295 (520)  
 Самсонов Б.Ф. 4, 951 (374)

**Т**

Тер-Акопьян Г.М. 6, 1357  
 Тертычный Г.Я. 2, 333 (134)  
 Троицкий С.В. 3, 551 (217)

**У**

Усманов П.Н. 4, 887 (348)

**Ф**

Фаянс С.А. 4, 1061 (418)  
 Фетисов В.Н. 2, 253 (101)  
 Фирсов В.Г. 3, 753 (296)

**Ц**

Целяев В.И. 2, 333 (134)

**Ш**

Шефтель М.Б. 3, 615 (615)

**Э**

Эрамжян Р.А. 2, 253 (101)

**Ю**

Юкалов В.И. 1, 89 (37)  
 Юкалова Е.П. 1, 89 (37)

**Я**

Янева Н. 4, 847 (331)  
 Янович Е.А. 1, 5 (1)

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Тер-Акопьян Г.М., Оганесян Ю.Ц., Даниэль В.А., Попеко Г.С., Гамильтон Дж., Кормицки Я., Рамайа А., Климан Я., Расмуссен Дж.</i> <b>Экспериментальные методы исследования спонтанного и низкоэнергетического деления ядер</b> .....	1357
<i>Ло Юдиче Н.</i> <b>Магнитные дипольные возбуждения в деформированных ядрах</b> .....	1389
<i>Пупышев В.В.</i> <b>Низкоэнергетические разложения в ядерной физике</b> .....	1457
<i>Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В.</i> <b>Электромагнитные эффекты в легких ядрах на основе потенциальной кластерной модели</b> .....	1529
<b>Тематический указатель</b> .....	1597
<b>Авторский указатель</b> .....	1598

## CONTENTS

<i>Ter-Akopian G.M., Oganessian Yu.Ts., Daniel V.A., Popeko G.S., Hamilton J., Kormicki J., Ramayya A., Kliman J., Rasmussen J.</i> <b>Experimental Methods for the Study of Spontaneous and Low-Energy Nuclear Fission</b> .....	1357
<i>Lo Iudice N.</i> <b>Magnetic Dipole Excitations in Deformed Nuclei</b> .....	1389
<i>Pupyshev V.V.</i> <b>Low-Energy Expansions in Nuclear Physics</b> .....	1457
<i>Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V.</i> <b>Electromagnetic Effects on Light Nuclei on the Basis of Potential Cluster Model</b> .....	1529
<b>Subject indexes</b> .....	1597
<b>Author's indexes</b> .....	1598

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения  $\substack{\circ \\ \cup}$ , верхние — знаком повышения  $\supset$ ; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя  $\exp$ , дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху ( $\underline{\underline{S}}$  и  $\underline{\underline{s}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  и  $\underline{\underline{c}}$ ). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком  $\underline{\underline{\quad}}$  снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например:  $\zeta$  — «дзета»,  $\xi$  — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. Лезнов А.Н., Савельев М.В. — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. Годен М. — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. Turbiner A.V. — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. Ушверидзе А.Г. — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. Endo I., Kasai S., Harada M. et al. — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректура с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**  
Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**  
Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 3.07.97. Подписано в печать 22.10.97. Формат 60×90/16.  
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 15,6. Уч.-изд.л. 18,8.  
Тираж 500. Заказ 50252. Цена 4500 р.

---

141980 Дубна Московской области  
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

---

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра  
1997. Том 28. Вып.6. 1353—1602.