

JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH

PHYSICS
OF ELEMENTARY
PARTICLES
AND ATOMIC
NUCLEI

PARTICLES & NUCLEI

SCIENTIFIC REVIEW JOURNAL

Founded in December 1970

VOL.29

PART 1

Six issues per year

DUBNA 1998

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИКА
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ
И АТОМНОГО
ЯДРА

ЭЧАЯ

НАУЧНЫЙ ОБЗОРНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в декабре 1970 года

ТОМ 29

ВЫПУСК 1

Выходит 6 раз в год

ДУБНА 1998

Главный редактор

А.М.БАЛДИН

Редакционная коллегия:

В.Л.АКСЕНОВ
(зам. главного редактора),
П.Н.БОГОЛЮБОВ,
С.К.БРЕШИН,
В.В.БУРОВ,
В.В.ВОЛКОВ,
Ц.Д.ВЫЛОВ,
Ю.П.ГАНГРСКИЙ,
В.П.ДЖЕЛЕПОВ,
П.И.ЗРУБИН,
И.С.ЗЛАТЕВ,
П.С.ИСАЕВ
(ответственный секретарь),
В.Г.КАДЫШЕВСКИЙ
(зам. главного редактора),
К.КАУН,
Д.КИШ,
Н.Я.КРОО,
О.Н.КРОХИН,
Р.М.ЛЕБЕДЕВ,
И.Н.МИХАЙЛОВ,
НГУЕН ВАН ХЬЕУ
(зам. главного редактора),
Ю.Ц.ОГАНЕСЯН,
Ю.П.ПОПОВ,
А.Н.СИСАКЯН,
В.Г.СОЛОВЬЕВ
(зам. главного редактора),
А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ,
А.А.ТЯПКИН,
А.И.ХРЫНКЕВИЧ,
Ч.К.ШИМАНЕ

Редактор **Е.К.Аксенова**, тел. (09621) 65-165
Э.В.Ивашкевич

©ОИЯИ, «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1998

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ПРИНЦИП МАХА

А.А.Логунов

Институт физики высоких энергий, Протвино

В обзоре рассматриваются принципы построения релятивистской теории гравитации (РТГ). Настоящее изложение основ РТГ отражает происшедшее за последние десять лет дальнейшее развитие этой теории. Так, например, учитывается необходимость введения массы гравитона и уточняются формулировки основных положений теории, включая и философскую сторону обоснования выбора для описания физических явлений определенной геометрии пространства-времени как продиктованного универсальными свойствами движения материи и фундаментальными законами сохранения.

Показано, что данная теория приводит к единственному образом определенным лагранжевой плотности и уравнениям гравитационного поля. Обсуждаются некоторые физические следствия данной теории.

Basic principles of the Relativistic Theory of Gravitation (RTG) are presented. The progress in this field during last ten years is taken into account. Non zero mass of the graviton and the choice of a certain space-time geometry to describe physics phenomena are motivated by universal properties of the matter movement and fundamental conservation laws.

It is shown that this theory leads to uniquely defined Lagrangian density and equations of the gravitational field. Some physical consequences of the theory are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Поскольку релятивистская теория гравитации (РТГ) строится на основе специальной теории относительности (СТО), мы остановимся на последней более подробно, при этом рассмотрим как подход Анри Пуанкаре, так и подход Альберта Эйнштейна. Такой анализ позволит глубже понять различие этих подходов и даст возможность сформулировать суть теории относительности.

А.Пуанкаре, анализируя преобразования Лоренца, показал, что эти преобразования вместе со всеми пространственными вращениями образуют **группу**, которая не изменяет уравнений электродинамики. Ричард Фейнман об этом писал так: *“Именно Пуанкаре предложил исследовать, что можно делать с уравнениями, не меняя при этом их вида. Именно ему принадлежит идея обратить внимание на свойства симметрии физических законов”*. А.Пуанкаре не ограничился только электродинамикой; он открыл уравнения релятивистской механики и распространил преобразования Лоренца на все

силы природы. Открытие группы, которую А.Пуанкаре назвал группой Лоренца, позволило А.Пуанкаре ввести четырехмерное пространство-время с **инвариантом**, названным впоследствии интервалом

$$d\sigma^2 = (dX^0)^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2 . \quad (\alpha)$$

Именно отсюда совершенно очевидно, что время и пространственная длина **относительны**.

Позднее дальнейшее развитие в этом же направлении сделал Герман Минковский, введя понятия времениподобных и пространственноподобных интервалов. Точно следуя А.Пуанкаре и Г.Минковскому, суть теории относительности можно сформулировать так: **все физические явления протекают в пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова и определяется интервалом (α)** . При этом важно подчеркнуть, что **геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи, которые и делают ее универсальной**. В четырехмерном пространстве (пространство Минковского) можно взять достаточно произвольную систему координат

$$X^\nu = f^\nu(x^\mu) ,$$

осуществляющую взаимно однозначное соответствие с якобианом, отличным от нуля. Находя дифференциалы

$$dX^\nu = \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

и подставляя эти выражения в (α) , найдем

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu , \quad (\beta)$$

где

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \epsilon_\sigma \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\nu} , \quad \epsilon_\sigma = (1, -1, -1, -1) .$$

Совершенно очевидно, что переход к произвольной координатной системе, который был совершен, не вывел нас за рамки псевдоевклидовой геометрии. Но отсюда следует, что в СТО можно пользоваться и неинерциальными системами координат. Силы инерции, возникающие при переходе к ускоренной системе координат, выражаются символами Кристоффеля пространства Минковского. Представление СТО, восходящее к работам А.Пуанкаре и Г.Минковского, явилось более общим и оказалось чрезвычайно необходимым для построения РТГ, так как оно позволило ввести метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}(x)$ пространства Минковского в произвольных координатах и тем самым дало возможность ввести ковариантным образом гравитационное поле, отделив силы инерции от гравитации. А.Эйнштейн к теории относительности

шел на основе анализа одновременности и понятия синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, опираясь на принцип постоянства скорости света. *“Каждый луч света движется в “покоящейся” системе координат с определенной скоростью V , независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом”*. Но данное положение нельзя рассматривать как принцип, поскольку оно предполагает определенный выбор координат, а ведь физический принцип не должен зависеть от способа выбора координатной системы. При подходе А.Эйнштейна невозможно прийти к неинерциальным системам координат, так как в них нельзя пользоваться синхронизацией часов, да и скорость света нельзя считать постоянной.

В ускоренной системе координат собственное время $d\tau$ согласно

$$d\sigma^2 = d\tau^2 - s_{ik}dx^i dx^k, \quad d\tau = \frac{\gamma_{0\alpha}dx^\alpha}{\sqrt{\gamma_{00}}}, \quad s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}$$

не является полным дифференциалом, а поэтому синхронизация часов, находящихся в разных точках пространства, зависит от пути синхронизации. Это означает, что такое понятие для ускоренных систем координат неприменимо. Следует подчеркнуть, что координаты в выражении (β) сами по себе не имеют метрического смысла. Физически измеряемые величины необходимо строить с помощью координат и метрических коэффициентов $\gamma_{\mu\nu}$. Но все это в СТО долгое время не было понято, поскольку обычно следовали подходу А.Эйнштейна, а не подходу А.Пуанкаре и Г.Минковского. Таким образом, исходные положения А.Эйнштейна имели сугубо ограниченный частный характер, хотя, может быть, они и создали иллюзию простоты. Именно поэтому А.Эйнштейн даже в 1913 году писал: *“В обычной теории относительности допускаются только линейные ортогональные преобразования”*. Или немного позднее в этом же году он писал: *“В первоначальной теории относительности независимость физических уравнений от специального выбора системы отсчета основывается на постулировании фундаментального инварианта $ds^2 = \sum dx_i^2$, а теперь речь идет о том, чтобы построить теорию (имеется в виду общая теория относительности. — А.Л.), в которой роль фундаментального инварианта играет линейный элемент общего вида*

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}dx^i dx^k.$$

Аналогичное А.Эйнштейн писал и в 1930 году: *“В специальной теории относительности разрешаются только такие изменения координат (преобразования), что и в новых координатах величина ds^2 (фундаментальный инвариант) имеет вид суммы квадратов дифференциалов новых координат. Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца”*.

Отсюда видно, что подход А.Эйнштейна не привел его к представлению о псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Из сравнения подходов А.Пуанкаре и А.Эйнштейна к построению СТО становится очевидно, что подход А.Пуанкаре более глубокий и общий, поскольку именно он определил псевдоевклидову структуру пространства-времени. Подход А.Эйнштейна существенно сужал рамки СТО, но так как обычно в литературе изложение ее следовало А.Эйнштейну, то в течение весьма долгого времени считалось, что СТО справедлива только в инерциальных системах координат. При этом пространство Минковского рассматривалось как некоторая полезная геометрическая интерпретация или как математическая формулировка основ СТО в подходе Эйнштейна. Перейдем теперь к гравитации. А.Пуанкаре в 1905 г. писал, *“что силы любого происхождения, и в частности силы тяготения, ведут себя при поступательном движении (или, если угодно, при преобразованиях Лоренца) совершенно так же, как электромагнитные силы”*. Именно по этому пути мы и будем следовать.

А.Эйнштейн, обратив внимание на равенство инертной и гравитационной масс, пришел к убеждению, что силы инерции и гравитации родственны, поскольку их действие не зависит от массы тела. В 1913 году он пришел к выводу, что если в выражении (α) *“мы введем новые координаты x_1, x_2, x_3, x_4 , при помощи произвольной подстановки, то относительно новой координатной системы движение точки будет происходить согласно уравнению*

$$\delta \left\{ \int ds \right\} = 0 ,$$

причем

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu ;$$

и далее он отмечал: *“В новой координатной системе движение материальной точки определяется величинами $g_{\mu\nu}$, которые в соответствии с предыдущими параграфами следует понимать как составляющие гравитационного поля, как только мы захотим рассматривать эту новую систему ”покоящейся”*. Такое отождествление метрического поля, полученного из (α) с помощью координатных преобразований, с гравитационным полем не имеет никаких физических оснований, поскольку преобразования координат не выводят за рамки псевдоевклидовой геометрии. С нашей точки зрения, недопустимо считать такое метрическое поле гравитационным полем, поскольку это противоречит самой сущности понятия поля как физической реальности. Поэтому нельзя согласиться со следующими рассуждениями А.Эйнштейна: *“По отношению к системе K' гравитационное поле ”существует”, в том же самом смысле, как и всякая другая физическая величина, которая может быть определена в некоторой системе координат, несмотря на то, что её не существует в системе K . Здесь нет ничего странного, и это легко доказать*

следующим примером, заимствованным из классической механики. Никто не сомневается в "реальности" кинетической энергии, так как иначе пришлось бы отрицать энергию вообще. Однако ясно, что кинетическая энергия тел зависит от состояния движения координатной системы: подходящим выбором последней можно, очевидно, сделать так, что в некоторый определенный момент кинетическая энергия поступательного движения одного тела примет наперед заданное положительное или нулевое значение. В специальном случае, при одинаково направленных и равных по величине скоростях всех масс, можно подходящим выбором координатной системы сделать общую кинетическую энергию равной нулю. Аналогия, на мой взгляд, полная".

А.Эйнштейн, как мы видим, отказался от концепции классического поля типа Фарадея — Максвелла, обладающего плотностью энергии-импульса, в применении к гравитационному полю. Этот путь и привел его к построению ОТО, к нелокализруемости гравитационной энергии, к введению псевдотензора гравитационного поля. Если рассматривать гравитационное поле как физическое поле, то оно, как и все физические поля, характеризуется тензором энергии-импульса $t^{\mu\nu}$. Если в какой-либо системе координат, например K' , гравитационное поле существует, то это означает, что некоторые компоненты (или все) тензора $t^{\mu\nu}$ отличны от нуля. Путем преобразования координат тензор $t^{\mu\nu}$ нельзя обратить в нуль, т.е. если гравитационное поле существует, то это — физическая реальность, и ее нельзя уничтожить выбором системы координат. Сравнить такое гравитационное поле с кинетической энергией неправомерно, поскольку последняя не характеризуется ковариантной величиной. Следует отметить, что такое сравнение недопустимо и в ОТО, поскольку гравитационное поле в этой теории характеризуется тензором кривизны Римана. Если он отличен от нуля, то гравитационное поле существует, и его нельзя уничтожить выбором системы координат.

Ускоренные системы координат сыграли в творчестве А.Эйнштейна важную эвристическую роль, хотя они и не имеют никакого отношения к сути ОТО. Отождествив ускоренные системы координат, в силу равенства инертной и гравитационной масс, с гравитационным полем, А.Эйнштейн пришел к метрическому тензору пространства-времени как основной характеристике гравитационного поля. Но метрический тензор отражает как собственные свойства геометрии, так и выбор координатной системы. На этом пути появляется возможность объяснить силу гравитации кинематически, сведя ее к силе инерции. Но при этом приходится отказаться от гравитационного поля как физического поля. "Гравитационные поля (как писал А.Эйнштейн в 1918 г.) можно задавать, не вводя напряжений и плотности энергии". Но это очень большая потеря, и с ней нельзя согласиться. Однако, как мы увидим далее, при построении РТГ, этой потери можно избежать.

Удивительно, но А.Эйнштейн даже в 1933 году писал: "В специальной теории относительности — как показал Г.Минковский — эта метрика была

квазиевклидовой, т.е. квадрат "длины" ds линейного элемента представлял собой определенную квадратичную функцию дифференциалов координат. Если же вводятся другие координаты с помощью нелинейного преобразования, то ds^2 остается однородной функцией дифференциалов координат, но коэффициенты этой функции ($g_{\mu\nu}$) будут уже не постоянными, а некоторыми функциями координат. Математически это означает, что физическое (четырёхмерное) пространство обладает римановой метрикой". Это, конечно, неправильно, ибо преобразованиями координат невозможно превратить псевдоевклидову метрику в риманову. Но главное здесь не в этом, а в том, что именно таким путем, благодаря глубокой интуиции, А.Эйнштейн пришел к необходимости введения риманова пространства, связав его с гравитацией.

Единство римановой метрики и гравитации является основным принципом общей теории относительности. В.А.Фок об этом принципе писал: "*Он и составляет сущность теории тяготения Эйнштейна*". Введение риманова пространства позволило использовать скалярную кривизну R как лагранжеву функцию и с помощью принципа наименьшего действия получить уравнения Гильберта — Эйнштейна. Так завершилось построение общей теории относительности Эйнштейна. При этом, как особенно подчеркивал Дж.Синг: "*В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно, оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя*".

Однако в ОТО возникли трудности с законами сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Д.Гильберт по этому поводу писал: "*... я утверждаю, что для общей теории относительности, т.е. в случае общей инвариантности гамильтоновой функции, уравнений энергии, которые ... соответствуют уравнениям энергии в ортогонально-инвариантных теориях, вообще не существует, я даже мог бы отметить это обстоятельство как характерную черту общей теории относительности*". Все это объясняется тем, что в римановом пространстве отсутствует десятипараметрическая группа движения пространства-времени, а поэтому в принципе нельзя ввести законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, подобные тем, какие имеют место в любой другой физической теории.

Другой особенностью ОТО, по сравнению с известными теориями, является наличие в лагранжевой функции R вторых производных. Около пятидесяти лет назад Натан Розен показал, что если наряду с римановой метрикой $g_{\mu\nu}$ ввести метрику $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, то можно построить скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля, которая будет содержать производные не выше первого порядка. Он, в частности, построил такую плотность лагранжиана, которая приводит к уравнениям Гильберта — Эйнштейна. Так возник двуметрический формализм.

Однако такой подход сразу усложнил проблему построения теории гравитации, поскольку, используя тензоры $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$, можно написать большое число скалярных плотностей, и совершенно не ясно, какую скалярную плотность необходимо выбрать в качестве плотности лагранжиана для построения теории гравитации. Хотя математический аппарат ОТО позволяет ввести вместо обычных производных ковариантные производные пространства Минковского, но поскольку метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не входит в уравнения Гильберта — Эйнштейна, ее использование в ОТО лишено какого-либо физического смысла, так как решения для метрики $g_{\mu\nu}$ не зависят от выбора $\gamma_{\mu\nu}$.

Следует отметить, что замена обычных производных на ковариантные производные в пространстве Минковского оставляет уравнения Гильберта — Эйнштейна неизменными. Это объясняется тем, что если в тензоре кривизны Римана заменить обычные производные ковариантными в пространстве Минковского, то он не изменится. Такая замена в тензоре Римана есть не что иное, как тождественное преобразование. Именно поэтому в рамках ОТО такую свободу записи тензора Римана нельзя использовать, поскольку метрический тензор пространства Минковского не входит в уравнения Гильберта — Эйнштейна. При построении РТГ эта свобода записи тензора Римана оказывается чрезвычайно необходимой. Но при этом метрика пространства Минковского входит в уравнения гравитационного поля, а само поле рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского.

В ОТО мы имеем дело только с метрикой риманова пространства как основной характеристикой гравитации, в которой находят отражение как собственные свойства геометрии, так и выбор системы координат. При выключении гравитационного взаимодействия, т.е. когда тензор кривизны Римана равен нулю, мы приходим к пространству Минковского. Именно из-за этого в ОТО возникает проблема с выполнимостью принципа соответствия, так как нельзя определить, в какой системе координат мы оказались при выключении гравитационного поля.

Релятивистская теория гравитации [1], которая излагается в данной работе с некоторыми дополнениями и уточнениями, строится как полевая теория гравитационного поля в рамках специальной теории относительности. Исходным положением служит гипотеза о том, что источником гравитации является универсальная характеристика материи — тензор энергии-импульса. Гравитационное поле рассматривается как физическое поле со спинами 2 и 0, из-за действия которого и возникает эффективное риманово пространство. Это позволяет найти калибровочную группу и однозначно построить плотность лагранжиана гравитационного поля. Система уравнений данной теории форминвариантна относительно группы Лоренца. В работе дается дальнейшее развитие идей А.Пуанкаре, Г.Минковского, А.Эйнштейна, Д.Гильберта, Н.Розена, В.А.Фока в области теории относительности и гравитации.

1. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Анри Пуанкаре еще в начале века в книге “Наука и гипотеза” писал, что, хотя “... опыт играет необходимую роль в происхождении геометрии, но было бы ошибкой заключить, что геометрия — хотя бы отчасти — является экспериментальной наукой. Если бы она была экспериментальной наукой, она имела бы только временное, приближенное — и весьма грубо приближенное — значение”. И далее: “Предмет геометрии составляет изучение лишь частной “группы” перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме, по крайней мере в виде возможности... Опыт направляет нас при этом выборе, но не делает его для нас обязательным; он показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильна, а то, какая наиболее удобна... Опыты, которые привели нас к принятию основных соглашений геометрии в качестве наиболее удобных, относятся к вещам, которые не имеют ничего общего с объектами изучения геометрии, они относятся к свойствам твердых тел, к прямолинейному распространению света. Это — опыты механические и оптические; их отнюдь нельзя рассматривать как опыты геометрические”. И далее А.Пуанкаре подчеркивает: “Принципы — это соглашения и скрытые определения. Тем не менее они извлечены из экспериментальных законов; эти последние были, так сказать, возведены в ранг принципов, которым наш ум приписывает абсолютное значение”.

Несколько позднее в книге “Последние мысли” в главе II “Пространство и время” А.Пуанкаре писал: “Принцип физической относительности может служить нам для определения пространства. Он дает нам, так сказать, новый измерительный инструмент. Объяснюсь. Как может твердое тело служить нам для измерения или, правильнее, для построения пространства? Дело обстоит здесь следующим образом: перенося твердое тело из одного места в другое, мы замечаем, таким образом, что его можно приложить сперва к одной фигуре, потом к другой, и мы соглашаемся считать эти фигуры равными. Из этого соглашения родилась геометрия. Геометрия есть не что иное, как учение о взаимных соотношениях этих преобразований или, выражаясь математическим языком, учение о строении группы, образованной этими преобразованиями, т.е. группы движений твердых тел.

Возьмем теперь другую группу, группу преобразований, не изменяющих наших дифференциальных уравнений. Мы получаем новый способ определения равенства двух фигур. Мы уже не скажем более: две фигуры равны, когда одно и то же твердое тело может быть приложено и к одной, и к другой. Мы скажем: две фигуры равны, когда одна и та же механическая система, удаленная от соседних систем настолько, что ее можно рассматривать как изолированную, будучи помещена сперва таким образом, что ее материальные точки воспроизводят первую фигуру, а затем таким образом, что они воспроизводят другую фигуру, ведет себя во втором случае так же, как и

в первом. Отличаются ли друг от друга существенным образом оба эти взгляда? Нет.

Твердое тело — это такая же механическая система, как и всякая другая. Вся разница между нашими прежним и новым определениями пространства заключается в том, что последнее шире, позволяя заменить твердое тело любой другой механической системой. Более того, наше новое условное соглашение определяет не только пространство, но и время. Оно объясняет нам, что такое два одновременных момента, что такое два равных промежутка времени или же что такое промежуток времени, вдвое больший другого промежутка”. Именно таким путем, открыв группу преобразований, не изменяющих уравнений Максвелла — Лоренца, А.Пуанкаре ввел представление о четырехмерном пространстве-времени с псевдоевклидовой геометрией. Это представление о геометрии позднее развил Г.Минковский.

Если следовать взглядам А.Пуанкаре, то естественно положить в основу любой физической теории псевдоевклидову геометрию пространства-времени как самую простейшую. Как мы увидим далее, этот вывод правилен, но он будет нами усилен дополнительными аргументами.

Спустя много лет, в 1921 году, к обсуждению проблемы о соотношении геометрии и физики обратился и А.Эйнштейн, который в статье “Геометрия и опыт” писал: “Ясно, что из системы понятий аксиоматической геометрии нельзя получить никаких суждений о таких реально существующих предметах, которые мы называем практически твердыми телами. Чтобы такого рода суждения были возможны, мы должны лишить геометрию ее формально-логического характера, сопоставив пустой схеме понятий аксиоматической геометрии реальные объекты нашего опыта. Для этой цели достаточно прибавить только такое утверждение: твердые тела ведут себя в смысле различных возможностей взаимного расположения, как тела евклидовой геометрии трех измерений; таким образом, теоремы евклидовой геометрии содержат в себе утверждения, определяющие поведение практически твердых тел. Дополняемая таким утверждением геометрия становится, очевидно, естественной наукой; мы можем рассматривать ее фактически как самую древнюю ветвь физики. Ее утверждения покоятся существенным образом на выводах из опыта, а не только на логических заключениях. Будем в дальнейшем называть дополненную таким образом геометрию “практической геометрией” в отличие от “чисто аксиоматической геометрии”. Вопрос о том, является ли практическая геометрия евклидовой или нет, приобретает совершенно ясный смысл; ответ на него может дать только опыт.

Всякие измерения длины в физике точно так же, как и геодезические или астрономические измерения, в этом смысле составляют предмет практической геометрии, если при этом исходить из того опытного закона, что свет распространяется по прямой линии, и именно по прямой в смысле практической геометрии. ...Если же отвлечься от связи между телом аксио-

матической евклидовой геометрии и реальным практически твердым телом, то мы легко приходим к точке зрения, которой придерживался такой оригинальный и глубокий мыслитель, как Анри Пуанкаре: евклидова геометрия отличается от всевозможных мыслимых аксиоматических геометрий своей простотой. А так как аксиоматическая геометрия сама по себе никаких высказываний о реальной действительности не содержит и может это сделать лишь совместно с физическими законами, то представлялось бы возможным и разумным придерживаться евклидовой геометрии, какими бы свойствами не обладала действительность. Если же будет обнаружено противоречие между теорией и опытом, то легче согласиться с изменением физических законов, чем с изменением аксиоматической евклидовой геометрии”. И далее: “Мы чувствуем себя вынужденными перейти к следующему, более общему представлению, характерному для точки зрения Пуанкаре. О поведении реальных вещей геометрия (Γ) ничего не говорит, это поведение описывает только геометрия вместе с совокупностью физических законов (Φ). Выражаясь символически, мы можем сказать, что только сумма $(\Gamma) + (\Phi)$ является предметом проверки на опыте. Таким образом, можно произвольно выбрать как (Γ), так и отдельные части (Φ): все эти законы представляют собой соглашения. Во избежание противоречий необходимо оставшиеся части (Φ) выбрать так, чтобы (Γ) и полная (Φ) вместе оправдывались на опыте. При таком воззрении аксиоматическая геометрия, с точки зрения теории познания, равноценна возведенной в ранг соглашения части законов природы. По моему мнению, такое воззрение Пуанкаре с принципиальной точки зрения совершенно правильно”.

Хотя А.Эйнштейн в принципе и согласился с А.Пуанкаре, тем не менее свою точку зрения он сформулировал следующим образом: “Однако, по моему убеждению, при современном состоянии теоретической физики этими понятиями (имеются в виду понятия: часы и твердое тело. — А.Л.) следует пользоваться как независимыми, поскольку мы пока еще далеки от такого понимания теоретических оснований атомистики, которое позволило бы построить теоретически понятия твердых тел и часов из более элементарных”; и далее А.Эйнштейн подчеркнул: “Вопрос о том, имеет этот континуум евклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности...”.

Такому пониманию геометрии я придаю особое значение, поскольку без него я не смог бы установить теорию относительности. Именно, без нее было бы невозможно следующее соображение: в системе отсчета, которая вращается относительно некоторой инерциальной системы, законы расположения твердых тел не соответствуют правилам евклидовой геометрии вследствие лоренцева сокращения; таким образом, допуская равноправное существование неинерциальных систем, мы должны отказаться от евклидо-

вой геометрии. Без такой интерпретации был бы невозможен и решительный шаг к общековариантным уравнениям". А.Эйнштейн пришел, таким образом, к римановой геометрии пространства-времени, которую он и положил в основу общей теории относительности (ОТО). Однако в римановом пространстве отсутствуют понятия однородности и изотропности пространства, а следовательно, в теории, которая строится на основе римановой геометрии, отсутствуют и обычные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

Из предыдущего мы видим, что, следуя мысли А.Пуанкаре, можно прийти к псевдоевклидовой геометрии пространства-времени, тогда как А.Эйнштейн позднее, осуществляя построение ОТО, пришел к римановой структуре пространства-времени, оставив, таким образом, за бортом обычные законы сохранения. В основу выбора геометрии А.Пуанкаре и А.Эйнштейн брали опытные факты, но с той существенной разницей, что А.Пуанкаре, понимая важность опытных фактов, все же допускал возможность выбора, тогда как А.Эйнштейн считал, что вопрос о геометрии есть вопрос физический, и на него должен дать ответ опыт. В принципе это правильно. Но при этом сразу возникает вопрос: какой опыт? Опытных фактов может быть достаточно много. Так, например, изучая движение света и пробных тел, можно, в принципе, однозначно установить геометрию пространства-времени. Необходимо ли ее и положить в основу физической теории? На первый взгляд, на этот вопрос можно ответить утвердительно. И, казалось бы, вопрос исчерпан. Однако ситуация гораздо сложнее. Все виды материи подчиняются законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Именно эти законы, возникшие путем обобщения многочисленных опытных данных, характеризуют общие динамические свойства всех форм материи, вводя универсальные характеристики, которые позволяют количественно описать превращение одних форм материи в другие. Ведь все это тоже опытные факты, ставшие фундаментальными физическими принципами. Как быть с ними? Сохранение этих принципов однозначно определяет структуру геометрии, которая, оказывается, должна быть только псевдоевклидовой. Именно в этом случае будут иметь место в теории как закон сохранения энергии-импульса, так и закон сохранения момента количества движения для вещества и гравитационного поля вместе взятых. **Пространство Минковского отражает динамические свойства, общие для всех форм материи, и поэтому оно универсально.** Но это означает, что все то, что относят обычно к кинематике теории относительности, на самом деле есть не что иное как отражение общих динамических свойств материи.

Таким образом, не всякий опыт может быть взят в качестве исходного физического положения при определении структуры пространства. Так, если бы структуру пространства строили на опытных фактах о движении пробных тел и света, то пришли бы, например, к риманову пространству, но это означало

бы, что мы потеряли фундаментальные принципы теории — законы сохранения. Выбор псевдоевклидовой структуры геометрии сохраняет основные физические принципы теории — законы сохранения, однако для объяснения движения пробных тел и света необходимо будет ввести новые физические положения. На этом мы подробно остановимся в следующем разделе. Если следовать мысли А.Пуанкаре, то выбор псевдоевклидовой геометрии можно рассматривать как соглашение, но отнюдь не произвольное, поскольку оно точно отражает экспериментальные законы, возведенные в ранг принципов.

В основу развиваемой релятивистской теории гравитации (РТГ) [1] мы положили псевдоевклидову геометрию пространства-времени как фундаментальное пространство Минковского для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Это положение необходимо и достаточно, чтобы имели место интегралы движения — законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения вещества и гравитационного поля вместе взятых. Пространство Минковского нельзя считать априорно существующим, поскольку оно отражает свойство материи, следовательно, оно неотделимо от нее. Хотя формально, именно в силу независимости структуры пространства от вида материи, оно иногда рассматривается абстрактно в отрыве от материи. В галилеевых координатах инерциальной системы пространства Минковского интервал, характеризующий структуру геометрии и являющийся инвариантом по построению, имеет вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 .$$

Здесь dx^ν — дифференциалы координат.

Хотя независимость интервала $d\sigma$, как геометрической характеристики пространства-времени, от выбора системы координат задана по построению, тем не менее до сих пор даже в современных курсах по теоретической физике (см., например, [2]) можно увидеть “доказательство”, что интервал одинаков во всех инерциальных системах координат, хотя он является инвариантом и не зависит от выбора системы координат. Даже такой крупный физик, как Л.И.Мандельштам, в книге [3] писал: *“Как идут ускоренно движущиеся часы и почему их ход меняется, на это специальная теория относительности ответить не может, ибо она вообще не занимается вопросом об ускоренно движущихся системах отсчета”*.

Все эти заблуждения [4] можно объяснить тем, что пространство Минковского многими рассматривалось не как открытие геометрии пространства-времени, а как якобы формальная геометрическая интерпретация СТО в подходе А.Эйнштейна. На передний план были выдвинуты такие ограниченные понятия, как постоянство скорости света, синхронизация часов, независимость скорости света от движения источника. Все это существенно сузило рамки СТО и задержало понимание ее сути. **А ведь суть ее и состоит только**

в том, что геометрия пространства-времени, в которой протекают все физические процессы, есть псевдоевклидова геометрия.

В произвольной системе координат интервал принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu ,$$

$\gamma_{\mu\nu}(x)$ — метрический тензор пространства Минковского. Заметим, что в неинерциальной системе координат в принципе нельзя говорить о синхронизации часов и постоянстве скорости света [5]. Свободное движение пробного тела в произвольной системе координат происходит по геодезической линии пространства Минковского:

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = \frac{dU^\nu}{d\sigma} + \gamma_{\alpha\beta}^\nu U^\alpha U^\beta = 0 ,$$

где $U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}$, $\gamma_{\alpha\beta}^\nu(x)$ — символы Кристоффеля, определяемые выражением

$$\gamma_{\alpha\beta}^\nu(x) = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\sigma}(\partial_\alpha\gamma_{\beta\sigma} + \partial_\beta\gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma\gamma_{\alpha\beta}) .$$

В основу теории гравитации мы положили псевдоевклидову геометрию, но это отнюдь не означает, что и эффективное пространство в присутствии гравитационного поля также будет псевдоевклидовым. Под действием гравитационного поля эффективное пространство будет уже другим. Этот вопрос мы подробно рассмотрим в следующем разделе. Метрика пространства Минковского позволяет ввести понятия эталонной длины и промежутка времени при отсутствии гравитационного поля.

2. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА МАТЕРИИ КАК ИСТОЧНИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Благодаря наличию в пространстве Минковского десятипараметрической группы движения Пуанкаре, для любой замкнутой физической системы существуют десять интегралов движения, то есть имеют место законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Любое физическое поле в пространстве Минковского характеризуется плотностью тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, являющейся общей универсальной характеристикой для всех форм материи, которая удовлетворяет закону сохранения, как локальному, так и интегральному. В произвольной системе координат локальный закон сохранения записывается в форме

$$D_\mu t^{\mu\nu} = \partial_\mu t^{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\beta}^\nu t^{\alpha\beta} = 0 .$$

Здесь $t^{\mu\nu}$ — суммарная сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса всех полей материи; D_μ — ковариантная производная в пространстве Минковского.

Мы здесь и в дальнейшем всегда будем иметь дело с плотностями скалярных и тензорных величин, определяемых по правилу

$$\tilde{\phi} = \sqrt{-\gamma}\phi, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu}, \quad \gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}).$$

Введение плотностей обусловлено тем, что в произвольных координатах инвариантный элемент объема в пространстве Минковского определяется выражением

$$\sqrt{-\gamma}d^4x,$$

а инвариантный элемент объема в римановом пространстве

$$\sqrt{-g}d^4x, \quad g = \det(g_{\mu\nu}).$$

Поэтому принцип наименьшего действия выражается формулой

$$\delta S = \delta \int L d^4x = 0,$$

где L — скалярная плотность лагранжиана материи.

При получении уравнений Эйлера с помощью принципа наименьшего действия мы будем автоматически иметь дело с вариацией именно плотности лагранжиана. Плотность тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, согласно Д.Гильберту, выражается через скалярную плотность лагранжиана L следующим образом:

$$t^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}, \quad (1)$$

где

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right), \quad \gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}.$$

В силу универсальности гравитации естественно выдвинуть гипотезу, что сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса всех полей материи $t^{\mu\nu}$ является источником гравитационного поля. Далее мы воспользуемся аналогией с электродинамикой, в которой источником электромагнитного поля является сохраняющаяся плотность заряженного векторного тока j^ν , а само поле имеет векторную природу и описывается плотностью векторного потенциала $\tilde{A}^\nu$:

$$\tilde{A}^\nu = (\tilde{\phi}, \tilde{A}_i).$$

Уравнения электродинамики Максвелла в отсутствие гравитации в произвольных координатах имеют вид

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{A}^\nu + \mu^2 \tilde{A}^\nu = 4\pi j^\nu,$$

$$D_\nu \tilde{A}^\nu = 0 .$$

Мы здесь для общности ввели массу фотона μ .

Поскольку источником гравитационного поля мы объявили сохраняющуюся плотность тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, то естественно считать гравитационное поле тензорным и описывать его плотностью симметрического тензора $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} \phi^{\mu\nu} ,$$

и в полной аналогии с электродинамикой Максвелла уравнения гравитационного поля можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \lambda t^{\mu\nu} , \quad (2)$$

$$D_\mu \tilde{\phi}^{\mu\nu} = 0 . \quad (3)$$

Здесь λ — некоторая постоянная, которая, исходя из принципа соответствия с законом тяготения Ньютона, должна быть равна 16π . Уравнение (3) исключает спины 1 и $0'$, оставляя поляризационные свойства поля, соответствующие только спинам 2 и 0.

Плотность тензора энергии-импульса материи $t^{\mu\nu}$ состоит из плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля $t_g^{\mu\nu}$ и плотности тензора энергии-импульса вещества $t_M^{\mu\nu}$. Под веществом мы имеем в виду все поля материи, за исключением гравитационного поля,

$$t^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu} + t_M^{\mu\nu} .$$

Взаимодействие гравитационного поля и вещества учитывается в плотности тензора энергии-импульса вещества $t_M^{\mu\nu}$.

А.Эйнштейн еще в 1913 году в работе [6] писал, “...что тензор гравитационного поля $\vartheta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям”. Именно эту идею А.Эйнштейна мы и положили в основу построения релятивистской теории гравитации (РТГ). При построении общей теории относительности (ОТО) А.Эйнштейну не удалось ее реализовать, поскольку вместо тензора энергии-импульса гравитационного поля в ОТО возник псевдотензор гравитационного поля. Все это произошло из-за того, что А.Эйнштейн не рассматривал гравитационное поле как физическое поле (типа Фарадея — Максвелла) в пространстве Минковского. Именно поэтому в уравнениях ОТО не содержится метрика пространства Минковского. Из уравнений (2) следует, что они будут нелинейными и для собственно гравитационного поля, поскольку плотность тензора $t_g^{\mu\nu}$ является источником

гравитационного поля. Уравнения (2) и (3), которые мы формально по аналогии с электродинамикой объявили уравнениями гравитации, нам необходимо получить из принципа наименьшего действия, ибо только в этом случае мы будем иметь явное выражение для плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля и полей вещества. Но для этого необходимо построить плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля. При этом чрезвычайно важно это построение осуществить, исходя из общих положений. Только в этом случае можно говорить о теории гравитации. Исходную скалярную плотность лагранжиана материи можно записать в виде

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}) + L_M(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \phi_A) ,$$

здесь L_g — плотность лагранжиана гравитационного поля; L_M — плотность лагранжиана полей вещества; ϕ_A — поля вещества.

Уравнения для гравитационного поля и полей вещества, согласно принципу наименьшего действия, имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{\phi}^{\mu\nu}} = 0 , \quad (4)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} = 0 . \quad (5)$$

Уравнения (4) отличаются от уравнений (2) прежде всего тем, что в них вариационная производная от плотности лагранжиана берется по полю $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$, тогда как в уравнения (2), согласно определению (1), входит вариационная производная от плотности лагранжиана по метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Для того чтобы при любой форме материи уравнения (4) сводились к уравнениям (2), необходимо предположить, что тензорная плотность $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ всегда входит в плотность лагранжиана совместно с тензорной плотностью $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ через некоторую единую плотность $\tilde{g}^{\mu\nu}$ в форме

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}. \quad (6)$$

С учетом этого условия плотность лагранжиана L принимает вид

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) .$$

Следует подчеркнуть, что условие (6) позволяет вариационную производную по $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ заменить вариационной производной по $\tilde{g}^{\mu\nu}$, а вариационную производную по $\gamma_{\mu\nu}$ выразить через вариационную производную по $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и через вариационную производную по $\gamma_{\mu\nu}$, явно входящую в плотность лагранжиана L . Действительно,

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{\phi}^{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0 , \quad (7)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}. \quad (8)$$

Вывод последней формулы подробно изложен в приложении (А.17). Звездочкой в формуле (8) обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Согласно (1), формулу (8) можно записать в форме

$$t^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - 2 \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}.$$

Учитывая в данном выражении уравнение (7), получим

$$t^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}. \quad (9)$$

Сравнивая уравнение (9) с уравнением (2), получим условие

$$-2 \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} [\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu}], \quad (10)$$

которое в случае его выполнения обеспечивает возможность получения уравнений гравитационного поля (2) и (3) непосредственно из принципа наименьшего действия. Поскольку в правую часть (10) не входят поля вещества, то это означает, что вариация плотности лагранжиана вещества L_M по явно входящей метрике $\gamma_{\mu\nu}$ должна быть равна нулю. Чтобы не возникало каких-либо дополнительных ограничений на движение вещества, определяемое уравнениями (5), отсюда непосредственно следует, что тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не входит явно в выражение для плотности лагранжиана вещества L_M . Условие (10) тогда принимает вид

$$-2 \frac{\delta^* L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} [\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu}]. \quad (11)$$

Таким образом, все сводится к тому, чтобы найти плотность лагранжиана собственно гравитационного поля L_g , которая удовлетворяла бы условию (11).

В то же время из предыдущих рассуждений мы приходим к важному выводу, что плотность лагранжиана материи L имеет вид

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A). \quad (12)$$

Таким образом, из требования, чтобы плотность тензора энергии-импульса материи являлась источником гравитационного поля, естественно следует, что движение вещества должно происходить в эффективном римановом пространстве. Именно это обстоятельство даст нам возможность в разделе 3 сформулировать калибровочную группу, а затем построить плотность лагранжиана (55), удовлетворяющую, согласно (Б.20), условию (11).

Возникает интересная картина: движение вещества в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ под действием гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$ тождественно движению вещества в эффективном римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$, определяемой из выражения (6). Такое взаимодействие гравитационного поля с веществом мы назвали принципом геометризаци. Принцип геометризации явился следствием исходного предположения о том, что источником гравитационного поля является универсальная характеристика материи — плотность тензора энергии-импульса. Такая структура плотности лагранжиана вещества свидетельствует о том, что реализуется уникальная возможность, когда гравитационное поле подключается в плотности лагранжиана вещества непосредственно к плотности тензора $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$. Эффективное риманово пространство имеет в буквальном смысле слова полевое происхождение, обязанное присутствию гравитационного поля. Поясним это фундаментальное свойство гравитационных сил на примере сравнения их с электромагнитными силами. Как известно, движение заряженной частицы в пространстве Минковского для случая однородного магнитного поля, благодаря силе Лоренца, происходит по окружности в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля. Однако это движение далеко не одинаково даже для заряженных частиц, если отношение заряда к массе у них различно. Кроме того, существуют нейтральные частицы, а их траектории в магнитном поле вообще прямолинейны. Поэтому, в силу неуниверсальности электромагнитных сил, их действие нельзя свести к геометрии пространства-времени.

Другое дело гравитация. Она универсальна, движения любых пробных тел происходят по траекториям, одинаковым при тождественных начальных условиях. В этом случае в силу гипотезы о плотности тензора энергии-импульса материи как источнике гравитационного поля удастся описать эти траектории геодезическими линиями в эффективном римановом пространстве-времени, возникшем благодаря присутствию гравитационного поля в пространстве Минковского. В тех областях пространства, где имеется сколь угодно слабое гравитационное поле, мы имеем метрические свойства пространства, с большой точностью приближающиеся к непосредственно наблюдаемым свойствам псевдоевклидова пространства. Когда же гравитационные поля являются сильными, метрические свойства эффективного пространства становятся римановыми. Но и в этом случае псевдоевклидова геометрия не исчезает бесследно — она наблюдаема и проявляется в том, что движение тел в эффективном римановом пространстве не является свободным по инерции, а происходит с ускорением по отношению к псевдоевклидову пространству в галилеевых координатах. Именно поэтому ускорение в РТГ, в отличие от ОТО, имеет абсолютный смысл. Следовательно, "лифт Эйнштейна" не может быть инерциальной системой координат. Это проявится в том, что заряд, покоящийся в "лифте Эйнштейна", будет излучать электромагнитные волны. Это фи-

зическое явление также должно свидетельствовать о наличии пространства Минковского.

В уравнение движения вещества не входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Пространство Минковского будет сказываться на движении вещества только через метрический тензор $g_{\mu\nu}$ риманова пространства, определяемый, как мы увидим далее, из уравнений гравитации, в которые входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Поскольку эффективная риманова метрика возникает на основе физического поля, которое задается в пространстве Минковского, то уже отсюда следует, что эффективное риманово пространство имеет простую топологию и задается в одной карте. Если, например, вещество сосредоточено в области островного типа, то в галилеевых координатах инерциальной системы гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ не может убывать медленнее, чем $1/r$, но это обстоятельство накладывает сильное ограничение на асимптотическое поведение метрики $g_{\mu\nu}$ эффективной римановой геометрии:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0\left(\frac{1}{r}\right), \text{ здесь } \eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1). \quad (13)$$

Если же исходить просто из римановой метрики, не предполагая, что она возникла из-за действия физического поля, то такие ограничения не возникают, поскольку асимптотика метрики $g_{\mu\nu}$ зависит даже от выбора трехмерных пространственных координат. Тогда как физические величины от выбора трехмерных пространственных координат в принципе не могут зависеть. В РТГ не возникает каких-либо ограничений на выбор системы координат. Координатная система может быть любой, лишь бы она осуществляла взаимнооднозначное соответствие для всех точек инерциальной системы координат пространства Минковского и обеспечивала выполнение неравенств

$$\gamma_{00} > 0, dl^2 = s_{ik} dx^i dx^k > 0; i, k = 1, 2, 3,$$

где

$$s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{oi}\gamma_{ok}}{\gamma_{oo}},$$

необходимых для введения понятий времени и пространственной длины. В нашей теории гравитации геометрические характеристики риманова пространства возникают как полевые величины в пространстве Минковского, а поэтому их трансформационные свойства становятся тензорными, даже если ранее они таковыми не были. Так, например, символы Кристоффеля, заданные как полевые величины в галилеевых координатах пространства Минковского, уже являются тензорами третьего ранга. Аналогично обычные производные в декартовых координатах пространства Минковского от тензорных величин также являются тензорами.

Может возникнуть вопрос: почему бы и в ОТО не ввести разделение метрики в форме (6), введя понятие гравитационного поля в пространстве Минковского? В уравнения Гильберта — Эйнштейна входит только величина $g_{\mu\nu}$, а следовательно, нельзя однозначно сказать, с помощью какой метрики $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского мы должны определить согласно (6) гравитационное поле. Но трудность не только в этом, а и в том, что решения уравнений Гильберта — Эйнштейна в общем случае задаются не в одной карте, а в атласе карт. Такие решения для $g_{\mu\nu}$ описывают риманово пространство со сложной топологией, тогда как римановы пространства, получаемые с помощью представления гравитационного поля в пространстве Минковского, задаются в одной карте и имеют простую топологию. Именно по этим причинам полевые представления не совместимы с ОТО, поскольку они весьма жесткие. Но это означает, что никакой полевой формулировки ОТО в пространстве Минковского в принципе не может быть, как бы и кому бы этого не захотелось. Аппарат римановой геометрии предрасположен к возможности введения ковариантных производных в пространстве Минковского, чем мы и воспользовались при построении РТГ. Но чтобы это осуществить, потребовалось ввести метрику пространства Минковского в гравитационные уравнения и тем самым удалось осуществить функциональную связь метрики риманова пространства $g_{\mu\nu}$ с метрикой пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$. Но на этом мы подробно остановимся в последующих разделах.

3. КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Поскольку плотность лагранжиана вещества имеет вид

$$L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A), \quad (14)$$

то легко найти калибровочную группу преобразований, при которых плотность лагранжиана вещества меняется только на дивергенцию. Для этой цели воспользуемся инвариантностью действия

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) d^4x \quad (15)$$

при произвольном бесконечно малом изменении координат

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x), \quad (16)$$

где ξ^α — бесконечно малый четырехвектор смещения.

При этих координатных преобразованиях полевые функции $\tilde{g}^{\mu\nu}$, ϕ_A изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'^{\mu\nu}(x') &= \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \xi^\alpha(x) D_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}(x), \\ \phi'_A(x') &= \phi_A(x) + \delta_\xi \phi_A(x) + \xi^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x), \end{aligned} \quad (17)$$

где выражения

$$\begin{aligned}\delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_\xi \phi_A(x) &= -\xi^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x) + F_{A;\beta}^{B;\alpha} \phi_B(x) D_\alpha \xi^\beta(x)\end{aligned}\quad (18)$$

являются вариациями Ли.

Операторы δ_ξ удовлетворяют условиям алгебры Ли, т.е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}](\cdot) = \delta_{\xi_3}(\cdot) \quad (19)$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\xi_1}, [\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_3}]] + [\delta_{\xi_3}, [\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]] + [\delta_{\xi_2}, [\delta_{\xi_3}, \delta_{\xi_1}]] = 0,$$

где

$$\xi_3^\nu = \xi_1^\mu D_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu D_\mu \xi_1^\nu = \xi_1^\mu \partial_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu \partial_\mu \xi_1^\nu. \quad (20)$$

Для того чтобы имело место (19), необходимо выполнение следующих условий:

$$F_{A;\nu}^{B;\mu} F_{B;\beta}^{C;\alpha} - F_{A;\beta}^{B;\alpha} F_{B;\nu}^{C;\mu} = f_{\nu\beta;\sigma}^{\mu\alpha;\tau} F_{A;\tau}^{C;\sigma}, \quad (21)$$

где структурные постоянные f равны

$$f_{\nu\beta;\sigma}^{\mu\alpha;\tau} = \delta_\beta^\mu \delta_\sigma^\alpha \delta_\nu^\tau - \delta_\nu^\alpha \delta_\sigma^\mu \delta_\beta^\tau. \quad (22)$$

Легко убедиться, что они удовлетворяют тождеству Якоби

$$f_{\beta\mu;\tau}^{\alpha\nu;\sigma} f_{\sigma\varepsilon;\delta}^{\tau\rho;\omega} + f_{\mu\varepsilon;\tau}^{\nu\rho;\sigma} f_{\sigma\beta;\delta}^{\tau\alpha;\omega} + f_{\varepsilon\beta;\tau}^{\rho\alpha;\sigma} f_{\sigma\mu;\delta}^{\tau\nu;\omega} = 0 \quad (23)$$

и обладают свойством антисимметрии

$$f_{\beta\mu;\sigma}^{\alpha\nu;\rho} = -f_{\mu\beta;\sigma}^{\nu\alpha;\rho}.$$

При координатном преобразовании (16) вариация действия равна нулю:

$$\delta_c S = \int_{\Omega'} L'_M(x') d^4 x' - \int_{\Omega} L_M(x) d^4 x = 0. \quad (24)$$

Первый интеграл в (24) можно записать в виде

$$\int_{\Omega'} L'_M(x') d^4 x' = \int_{\Omega} J L'_M(x') d^4 x,$$

где

$$J = \det \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \right).$$

В первом порядке по ξ^α детерминант J равен

$$J = 1 + \partial_\alpha \xi^\alpha(x). \quad (25)$$

Учитывая разложение

$$L'_M(x') = L'_M(x) + \xi^\alpha(x) \frac{\partial L_M}{\partial x^\alpha},$$

а также (25), выражение для вариации можно представить в форме

$$\delta_c S_M = \int_{\Omega} [\delta L_M(x) + \partial_\alpha (\xi^\alpha L_M(x))] d^4 x = 0.$$

В силу произвольности объема интегрирования Ω имеем тождество

$$\delta L_M(x) = -\partial_\alpha (\xi^\alpha(x) L_M(x)), \quad (26)$$

где вариация Ли δL_M равна

$$\begin{aligned} \delta L_M(x) &= \frac{\partial L_M}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L_M}{\partial (\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})} \delta (\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}) + \\ &+ \frac{\partial L_M}{\partial \phi_A} \delta \phi_A + \frac{\partial L_M}{\partial (\partial_\alpha \phi_A)} \delta (\partial_\alpha \phi_A). \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда, в частности, следует, что если скалярная плотность зависит только от $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и ее производных, то при преобразовании (18) она также изменится только на дивергенцию

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = -\partial_\alpha (\xi^\alpha(x) L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x))), \quad (26a)$$

где вариация Ли δL равна

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = \frac{\partial L}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})} \delta (\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \tilde{g}^{\mu\nu})} \delta (\partial_\alpha \partial_\beta \tilde{g}^{\mu\nu}). \quad (27a)$$

Вариации Ли (18) были установлены в контексте координатных преобразований (16). Однако можно встать и на другую точку зрения, согласно которой преобразования (18) можно рассматривать как калибровочные преобразования. В этом случае произвольный бесконечно малый четырехвектор $\xi^\alpha(x)$ будет уже калибровочным вектором, а не вектором смещения координат. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть отличие калибровочной группы от группы координатных преобразований, для группового параметра мы будем использовать обозначение $\varepsilon^\alpha(x)$, а преобразование полевых функций

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta \tilde{g}^{\mu\nu}(x),$$

$$\phi_A(x) \rightarrow \phi_A(x) + \delta\phi_A(x) \quad (28)$$

с приращениями

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_\varepsilon \phi_A(x) &= -\varepsilon^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x) + F_{A;\beta}^{B;\alpha} \phi_B(x) D_\alpha \varepsilon^\beta(x) \end{aligned} \quad (29)$$

будем называть **калибровочными преобразованиями**.

В полном соответствии с формулами (19) и (20) операторы удовлетворяют той же алгебре Ли, т.е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}](\cdot) = \delta_{\varepsilon_3}(\cdot) \quad (30)$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\varepsilon_1}, [\delta_{\varepsilon_2}, \delta_{\varepsilon_3}]] + [\delta_{\varepsilon_3}, [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]] + [\delta_{\varepsilon_2}, [\delta_{\varepsilon_3}, \delta_{\varepsilon_1}]] = 0. \quad (31)$$

Здесь аналогично предыдущему имеем

$$\varepsilon_3^\nu = \varepsilon_1^\mu D_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu D_\mu \varepsilon_1^\nu = \varepsilon_1^\mu \partial_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu \partial_\mu \varepsilon_1^\nu.$$

Калибровочная группа возникла из геометризованной структуры скалярной плотности лагранжиана вещества $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A)$, которая в силу тождества (26) изменяется только на дивергенцию при калибровочных преобразованиях (29). Таким образом, принцип геометризации, который определил универсальный характер взаимодействия вещества и гравитационного поля, дал нам возможность сформулировать некоммутативную бесконечномерную калибровочную группу (29).

Существенная разница между калибровочными и координатными преобразованиями проявится в решающем месте в теории при построении скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля. Разница возникает из-за того, что при калибровочном преобразовании метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, в силу (6) имеем

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x).$$

На основании (19) следует преобразование для поля

$$\delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\phi}^{\mu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\nu(x) + \tilde{\phi}^{\nu\alpha} D_\alpha \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha \tilde{\phi}^{\mu\nu}),$$

но оно существенно отличается от его преобразования при смещении координат:

$$\delta_\xi \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\phi}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{\phi}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha \tilde{\phi}^{\mu\nu}).$$

При калибровочных преобразованиях (29) уравнения движения для вещества не изменяются, поскольку при любых таких преобразованиях плотность лагранжиана вещества изменяется только на дивергенцию.

4. ПЛОТНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Как известно, используя только тензор $g_{\mu\nu}$, невозможно построить скалярную плотность лагранжиана собственно гравитационного поля относительно произвольных координатных преобразований в виде квадратичной формы производных не выше первого порядка. Поэтому в такую плотность лагранжиана будет обязательно входить наряду с метрикой $g_{\mu\nu}$ также и метрика $\gamma_{\mu\nu}$. Но, так как при калибровочном преобразовании (29) метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, чтобы при этом преобразовании плотность лагранжиана собственно гравитационного поля изменялась только на дивергенцию, должны возникнуть сильные ограничения на ее структуру. Именно здесь и возникает принципиальная разница между калибровочным и координатным преобразованиями.

В то время как координатные преобразования не накладывают почти никаких ограничений на структуру скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля, калибровочные преобразования позволяют нам найти плотность лагранжиана. Прямой общий метод построения лагранжиана приведен в монографии [1].

Здесь мы выберем более простой метод построения лагранжиана. На основании (26a) заключаем, что простейшие скалярные плотности $\sqrt{-g}$ и $\tilde{R} = \sqrt{-g}R$, где R — скалярная кривизна эффективного риманова пространства, при калибровочном преобразовании (29) изменяются следующим образом:

$$\sqrt{-g} \rightarrow \sqrt{-g} - D_\nu(\varepsilon^\nu \sqrt{-g}), \quad (32)$$

$$\tilde{R} \rightarrow \tilde{R} - D_\nu(\varepsilon^\nu \tilde{R}). \quad (33)$$

Скалярная плотность $\tilde{R}$ выражается через символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (34)$$

таким образом:

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma) - \partial_\nu (\tilde{g}^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \tilde{g}^{\mu\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^\nu). \quad (35)$$

Поскольку символы Кристоффеля не являются тензорными величинами, каждое слагаемое в (35) не является скалярной плотностью. Однако, если ввести тензорные величины

$$G_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (36)$$

то скалярную плотность можно тождественно записать в виде

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu} (G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) - D_\nu (\tilde{g}^{\mu\nu} G_{\mu\sigma}^\sigma - \tilde{g}^{\mu\sigma} G_{\mu\sigma}^\nu). \quad (37)$$

Заметим, что в (37) каждая группа членов в отдельности ведет себя при произвольных координатных преобразованиях как скалярная плотность. Мы видим, что аппарат римановой геометрии предрасположен к введению вместо обычных производных — ковариантных в пространстве Минковского, однако метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$, с помощью которого определяются ковариантные производные, при этом никак не фиксируется.

Учитывая (32) и (33), выражение

$$\lambda_1(\tilde{R} + D_\nu Q^\nu) + \lambda_2\sqrt{-g} \quad (38)$$

при произвольных калибровочных преобразованиях изменяется только на дивергенцию. Выбирая векторную плотность равной

$$Q^\nu = \tilde{g}^{\mu\nu} G_{\mu\sigma}^\sigma - \tilde{g}^{\mu\sigma} G_{\mu\sigma}^\nu,$$

мы исключаем из предыдущего выражения члены с производными выше первого порядка и получаем следующую плотность лагранжиана:

$$-\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu} (G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) + \lambda_2 \sqrt{-g}. \quad (39)$$

Таким образом, мы видим, что требование, чтобы плотность лагранжиана собственно гравитационного поля при калибровочном преобразовании (29) изменялась только на дивергенцию, однозначно определяет структуру плотности лагранжиана (39). Но если ограничиться только этой плотностью, тогда уравнения гравитационного поля будут калибровочно-инвариантными, а метрика пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$ не войдет в систему уравнений, определяемых плотностью лагранжиана (39). Поскольку в таком подходе исчезает метрика пространства Минковского, то и исключается возможность представления гравитационного поля как физического поля типа Фарадея — Максвелла в пространстве Минковского.

При плотности лагранжиана (39) введение метрики $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью уравнений (3) не спасает положение, поскольку физические величины — интервал и тензор кривизны риманова пространства, а также тензор $t_g^{\mu\nu}$ гравитационного поля — будут зависеть от выбора калибровки, что физически недопустимо. Так, например,

$$\delta_\epsilon R_{\mu\nu} = -R_{\mu\sigma} D_\nu \epsilon^\sigma - R_{\nu\sigma} D_\mu \epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu},$$

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon R_{\mu\nu\alpha\beta} &= -R_{\sigma\nu\alpha\beta} D_\mu \epsilon^\sigma - R_{\mu\sigma\alpha\beta} D_\nu \epsilon^\sigma - \\ &- R_{\mu\nu\sigma\beta} D_\alpha \epsilon^\sigma - R_{\mu\nu\alpha\sigma} D_\beta \epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Для того чтобы сохранить представления о поле в пространстве Минковского и исключить такую неоднозначность, необходимо добавить в плотность лагранжиана гравитационного поля член, нарушающий калибровочную группу.

На первый взгляд, может показаться, что здесь возникает большой произвол в выборе плотности лагранжиана гравитационного поля, так как нарушить группу можно весьма различными способами. Однако оказывается, что это не так, поскольку наше физическое требование на поляризационные свойства гравитационного поля как поля со спинами 2 и 0, накладываемое уравнениями (3), приводит к тому, что член, нарушающий группу (29), должен быть выбран таким образом, чтобы уравнения (3) являлись следствиями системы уравнений гравитационного поля и полей вещества, ибо только в этом случае у нас не возникает переопределенная система дифференциальных уравнений. Для этой цели в скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля введем член вида

$$\gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu}, \quad (40)$$

который при наличии условий (3) и при преобразованиях (29) изменяется также на дивергенцию, но только на классе векторов, удовлетворяющих условию

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \varepsilon^\sigma(x) = 0. \quad (41)$$

Почти аналогичная ситуация имеет место в электродинамике с массой покоя фотона, отличной от нуля. С учетом (38)–(40) общая скалярная плотность лагранжиана имеет вид

$$L_g = -\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu} (G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) + \lambda_2 \sqrt{-g} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4 \sqrt{-\gamma}. \quad (42)$$

Последний постоянный член в (42) мы ввели, чтобы с его помощью обратить в нуль плотность лагранжиана при отсутствии гравитационного поля. Сужение класса калибровочных векторов из-за введения члена (40) автоматически приводит к тому, что уравнения (3) будут следствиями уравнений гравитационного поля. В этом мы непосредственно убедимся ниже.

Согласно принципу наименьшего действия уравнения для собственного гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda_2 g_{\mu\nu} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad (43)$$

здесь

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{\partial L_g}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\sigma \tilde{g}^{\mu\nu})} \right),$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи запишем в форме

$$R_{\mu\nu} = D_\lambda G_{\mu\nu}^\lambda - D_\mu G_{\nu\lambda}^\lambda + G_{\mu\nu}^\sigma G_{\sigma\lambda}^\lambda - G_{\mu\lambda}^\sigma G_{\nu\sigma}^\lambda. \quad (44)$$

Поскольку в случае отсутствия гравитационного поля уравнения (43) должны тождественно выполняться, отсюда следует

$$\lambda_2 = -2 \lambda_3. \quad (45)$$

Найдем теперь плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского

$$t_g^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = 2\sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}) \frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} + \lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \quad (46)$$

где

$$J^{\mu\nu} = D_\alpha D_\beta (\gamma^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu} \tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta} \tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta}) \quad (47)$$

(см. приложение (Б.19)). Если в выражении (46) учесть динамические уравнения (43), то мы получим уравнения для собственно гравитационного поля в форме

$$\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3 \tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4 \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu}. \quad (48)$$

Для того чтобы это уравнение в случае отсутствия гравитационного поля удовлетворялось тождественно, необходимо положить

$$\lambda_4 = -2\lambda_3. \quad (49)$$

Поскольку для собственно гравитационного поля всегда имеет место равенство

$$D_\mu t_g^{\mu\nu} = 0, \quad (50)$$

из уравнения (48) следует

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (51)$$

Таким образом, уравнения (3), определяющие поляризационные состояния поля, непосредственно следуют из уравнений (48). С учетом уравнений (51) полевые уравнения (48) можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}. \quad (52)$$

В галилеевых координатах это уравнение имеет простой вид

$$\square \tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}. \quad (53)$$

Числовому фактору $-\frac{\lambda_4}{\lambda_1} = m^2$ естественно придать смысл квадрата массы гравитона, а значение $-1/\lambda_1$, согласно принципу соответствия, необходимо взять равным 16π . Таким образом, все неизвестные постоянные, входящие в плотность лагранжиана, определены:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{16\pi}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -2\lambda_3 = \frac{m^2}{16\pi}. \quad (54)$$

Построенная скалярная плотность лагранжиана собственно гравитационного поля будет иметь вид

$$L_g = \frac{1}{16\pi} \tilde{g}^{\mu\nu} (G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) - \frac{m^2}{16\pi} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma} \right). \quad (55)$$

Соответствующие ей динамические уравнения для собственно гравитационного поля могут быть записаны в форме

$$J^{\mu\nu} - m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -16\pi t_g^{\mu\nu}, \quad (56)$$

или

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} (g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \gamma_{\alpha\beta}) = 0. \quad (57)$$

Эти уравнения существенно ограничивают класс калибровочных преобразований, оставляя лишь тривиальные, удовлетворяющие условиям Киллинга в пространстве Минковского. Такие преобразования являются следствием лоренцевой инвариантности и имеют место в любой теории.

Построенная выше плотность лагранжиана приводит к уравнениям (57), из которых следует, что уравнения (51) являются их следствиями, а поэтому вне вещества мы будем иметь десять уравнений для десяти неизвестных полевых функций. С помощью уравнений (51) неизвестные полевые функции $\phi^{\sigma\alpha}$ легко выражаются через полевые функции ϕ^{ik} , где значки i и k пробегает значения 1, 2, 3. Таким образом, в плотности лагранжиана собственно гравитационного поля структура массового члена, нарушающего калибровочную группу, однозначно определяется поляризационными свойствами гравитационного поля.

5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА

Полная плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля равна

$$L = L_g + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A), \quad (58)$$

где L_g определяется выражением (55).

На основании (58) с помощью принципа наименьшего действия получим полную систему уравнений для вещества и гравитационного поля:

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \quad (59)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} = 0. \quad (60)$$

Поскольку при произвольном бесконечно малом изменении координат вариация действия $\delta_c S_M$ равна нулю,

$$\delta_c S_M = \delta_c \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) d^4x = 0,$$

отсюда можно получить тождество (см. приложение В, ф-ла (16)) в форме

$$g_{\mu\nu} \nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = -D_\nu \left(\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} F_{A;\mu}^{B;\nu} \phi_B(x) \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} D_\mu \phi_A(x). \quad (61)$$

Здесь $T^{\lambda\nu} = -2 \frac{\delta L_M}{\delta g_{\lambda\nu}}$ — плотность тензора вещества в римановом пространстве; ∇_λ — ковариантная производная в этом пространстве с метрикой $g_{\lambda\nu}$. Из тождества (61) следует, что если выполняются уравнения движения вещества (60), то имеет место уравнение

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \quad (62)$$

В том случае, если число уравнений (60) для вещества равно четырем, вместо них можно использовать эквивалентные им уравнения (62). Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими уравнениями для вещества, всегда будем пользоваться уравнениями для вещества в форме (62). Таким образом, полная система уравнений для вещества и гравитационного поля будет иметь вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \quad (63)$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \quad (64)$$

Вещество будет описываться скоростью $\vec{v}$, плотностью вещества ρ и давлением p . Гравитационное поле определяется десятью компонентами тензора $\phi^{\mu\nu}$.

Итак, мы имеем 15 неизвестных. Для их определения необходимо к 14 уравнениям (63)–(64) добавить уравнение состояния вещества. Если принять во внимание соотношения

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{32\pi} (g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}), \quad (65)$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (66)$$

то систему уравнений (63) и (64) можно представить в форме

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + \frac{m^2}{2} [g^{\mu\nu} + (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \gamma_{\alpha\beta}] = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} T^{\mu\nu}, \quad (67)$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \quad (68)$$

В силу тождества Бьянки

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) = 0$$

из уравнений (67) имеем

$$m^2 \sqrt{-g} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = 16 \pi \nabla_\mu T^{\mu\nu}. \quad (69)$$

Учитывая выражение

$$\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = -G_{\mu\alpha}^\sigma \gamma_{\sigma\beta} - G_{\mu\beta}^\sigma \gamma_{\sigma\alpha}, \quad (70)$$

где $G_{\mu\alpha}^\sigma$ определено формулой (36), найдем

$$(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} (D_\sigma g^{\sigma\lambda} + G_{\alpha\beta}^\beta g^{\alpha\lambda}), \quad (71)$$

но так как

$$\sqrt{-g} (D_\sigma g^{\sigma\lambda} + G_{\alpha\beta}^\beta g^{\alpha\lambda}) = D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma}, \quad (72)$$

выражение (71) принимает вид

$$\sqrt{-g} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma}. \quad (73)$$

Используя (73), выражение (69) может быть представлено в форме

$$m^2 \gamma_{\mu\lambda} g^{\mu\nu} D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 16 \pi \nabla_\mu T^{\mu\nu}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$m^2 D_\sigma \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 16 \pi \gamma^{\lambda\nu} \nabla_\mu T_\nu^\mu. \quad (74)$$

С помощью этого соотношения уравнение (68) можно заменить уравнением

$$D_\sigma \tilde{g}^{\nu\sigma} = 0. \quad (75)$$

Поэтому система уравнений (67) и (68) сводится к системе гравитационных уравнений в виде

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) + \frac{m^2}{2} [g^{\mu\nu} + (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) \gamma_{\alpha\beta}] = \frac{8 \pi}{\sqrt{-g}} T^{\mu\nu}, \quad (76)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (77)$$

Эти уравнения форминвариантны относительно преобразований Лоренца, т.е. в любой инерциальной (галилеевой) системе координат явления описываются одинаковыми уравнениями.

Конкретная инерциальная галилеева система координат выделяется самой постановкой физической задачи (начальными и граничными условиями). Описание данной поставленной физической задачи в разных инерциальных (галилеевых) системах координат, конечно, различно, но это не противоречит принципу относительности. Если ввести тензор

$$N^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}[g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}], \quad N = N^{\mu\nu}g_{\mu\nu},$$

то систему уравнений (76) и (77) можно записать в форме

$$N^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}N = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}T^{\mu\nu}, \quad (76a)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (77a)$$

Она может быть представлена также в виде

$$N^{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T), \quad (78)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \quad (79)$$

или

$$N_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T), \quad (78a)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (79a)$$

Необходимо особо подчеркнуть, что как в систему (78), так и в систему уравнений (79) входит метрический тензор пространства Минковского.

Преобразования координат, которые оставляют метрику пространства Минковского форминвариантной, связывают физически эквивалентные системы отсчета. Простейшими из них будут инерциальные системы. Поэтому возможные калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям Киллинга

$$D_\mu \varepsilon_\nu + D_\nu \varepsilon_\mu = 0,$$

не выводят нас из класса физически эквивалентных систем отсчета.

Если мысленно допустить возможность экспериментального измерения характеристик риманова пространства и движения вещества со сколь угодно большой точностью, то на основании уравнений (78a) и (79a) мы можем

определить метрику пространства Минковского и найти галилеевы (инерциальные) системы координат. Таким образом, пространство Минковского является, в принципе, наблюдаемым.

Существование пространства Минковского находит отражение в законах сохранения, а поэтому проверка их в физических явлениях является в то же время проверкой структуры пространства-времени.

Следует особо отметить, что как в систему уравнений (76), так и в систему уравнений (77) входит метрический тензор пространства Минковского. Как известно, в ОТО присутствие космологического члена в уравнениях не является обязательным, и этот вопрос обсуждается до сих пор. В РТГ наличие космологического члена в уравнениях гравитации обязательно. Однако космологический член возникает в уравнениях (76) в комбинации с членом, связанным с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, причем с той же постоянной, равной половине квадрата массы гравитона. Наличие члена в уравнениях (76), связанного с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$, существенно изменяет характер коллапса и развития Вселенной. Согласно уравнениям (76), при отсутствии вещества и гравитационного поля метрика пространства становится метрикой Минковского, причем она точно совпадает с выбранной ранее при постановке физической задачи. Если бы в уравнениях гравитационного поля метрика пространства Минковского отсутствовала, то совершенно не было бы ясно, в какой системе координат пространства Минковского мы оказались при отсутствии вещества и гравитационного поля.

Введение массы гравитона имеет принципиальное значение для данной теории, поскольку только с ее введением удастся построить теорию гравитации в пространстве Минковского. Масса гравитона нарушает калибровочную группу или, другими словами, она снимает вырождение. Поэтому нельзя исключить возможность устремления массы гравитона к нулю в окончательных результатах при изучении гравитационных эффектов. Однако теория с массой гравитона и теория с нарушенной калибровочной группой [7] (с последующим устремлением массы гравитона к нулю) — это в принципе разные теории. Так, например, если в первой имеет место однородная и изотропная Вселенная, то во второй такой Вселенной не может быть.

Остановимся теперь на принципе соответствия. Любая физическая теория должна удовлетворять принципу соответствия. Гравитационные взаимодействия изменяют уравнения движения вещества. Требование принципа соответствия сводится к тому, чтобы эти уравнения движения при выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении в нуль тензора кривизны Римана, становились обычными уравнениями движения СТО в выбранной системе координат.

При постановке физической задачи в РТГ мы выбираем некоторую систему координат с метрическим тензором пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$. В РТГ уравнение движения вещества в эффективном римановом пространстве

с метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, определяемым из уравнений гравитационного поля (76) и (77), имеет вид

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (\sigma)$$

В качестве примера возьмем пылевидную материю с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, равным

$$T^{\mu\nu}(x) = \rho U^\mu U^\nu, \quad U^\nu = \frac{dx^\nu}{ds},$$

ds — интервал в римановом пространстве.

На основании уравнений (σ) , используя выражение для $T^{\mu\nu}$, найдем уравнение для геодезической линии в римановом пространстве

$$\frac{dU^\nu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu(x) U^\alpha U^\beta = 0.$$

При выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, из уравнений гравитационного поля (76) и (77) следует, что риманова метрика $g_{\mu\nu}(x)$ переходит в ранее выбранную метрику пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$. При этом уравнение движения вещества (σ) принимает вид

$$D_\mu t^{\mu\nu}(x) = 0. \quad (\lambda)$$

Здесь тензор энергии-импульса $t^{\mu\nu}(x)$ равен

$$t^{\mu\nu}(x) = \rho u^\mu u^\nu, \quad u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma},$$

$d\sigma$ — интервал в пространстве Минковского.

На основании (λ) , используя выражение для $t^{\mu\nu}$, найдем уравнения для геодезической линии в пространстве Минковского

$$\frac{du^\nu}{d\sigma} + \gamma_{\alpha\beta}^\nu u^\alpha u^\beta = 0,$$

т.е. мы пришли к обычным уравнениям для свободного движения частиц в СТО в выбранной ранее координации с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$. Таким образом, уравнение движения вещества в гравитационном поле в выбранной координации автоматически переходит при выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, в уравнение движения вещества в пространстве Минковского в той же координации с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$, т.е. принцип соответствия выполняется. Это утверждение в РТГ имеет общий характер, поскольку при

обращении тензора Римана в нуль плотность лагранжиана вещества в гравитационном поле $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)$ переходит в обычную плотность лагранжиана $L_M(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \Phi_A)$ СТО в выбранной координатной системе.

В ОТО уравнение движения вещества также имеет вид (σ). Но поскольку в уравнения Гильберта — Эйнштейна не входит метрический тензор пространства Минковского, то при выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, нельзя сказать, в какой системе координат (инерциальной или ускоренной) пространства Минковского мы находимся, а поэтому невозможно определить, какое уравнение движения вещества в пространстве Минковского мы получим при выключении гравитационного взаимодействия. Именно поэтому в ОТО принцип соответствия невозможно соблюсти, оставаясь в рамках этой теории.

В заключение отметим, что в РТГ возрождаются все те понятия (инерциальная система координат, закон инерции, ускорение по отношению к пространству, законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения), которые имеют место в классической механике Ньютона и в специальной теории относительности, от которых А.Эйнштейну пришлось отказаться при построении ОТО. Силы инерции и гравитации даже локально нельзя отождествлять, поскольку они совершенно разной природы. Если первые можно устранить выбором системы координат, то силы гравитации никаким выбором системы координат устранить нельзя.

6. Принцип причинности в РТГ

РТГ построена в рамках СТО подобно теориям других физических полей. Согласно СТО, любое движение какого-либо точечного пробного тела всегда происходит внутри светового конуса причинности пространства Минковского. Следовательно, неинерциальные системы отсчета, реализуемые пробными телами, также должны находиться внутри конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Этим самым определяется весь класс возможных неинерциальных систем отсчета. Локальное равенство трехмерной силы инерции и гравитации при действии на материальную точку будет иметь место, если световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности пространства Минковского. Именно только в этом случае трехмерную силу гравитационного поля, действующую на пробное тело, можно локально скомпенсировать, перейдя в допустимую неинерциальную систему отсчета, связанную с этим телом.

Если бы световой конус эффективного риманова пространства выходил за пределы светового конуса причинности пространства Минковского, то это означало бы, что для такого “гравитационного поля” не существует допустимой неинерциальной системы отсчета, в которой это “силовое поле” при

действию на материальную точку можно было бы скомпенсировать. Иными словами, локальная компенсация 3-силы гравитации силой инерции возможна лишь тогда, когда гравитационное поле как физическое поле, воздействуя на частицы, не выводит их мировые линии за пределы конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Данное условие следует рассматривать как принцип причинности, позволяющий отбирать решения системы (76) и (77), которые имеют физический смысл и соответствуют гравитационным полям.

Принцип причинности не выполняется автоматически. Это связано с тем, что гравитационное взаимодействие входит в коэффициенты при вторых производных в уравнениях поля, т.е. изменяет исходную геометрию пространства-времени. Эта особенность присуща только гравитационному полю. Взаимодействие всех других известных физических полей обычно не затрагивает вторых производных уравнений поля, и поэтому не изменяет исходную псевдоевклидову геометрию пространства-времени.

Дадим теперь аналитическую формулировку принципа причинности в РТГ. Поскольку в РТГ движение вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени эквивалентно движению вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве-времени, то для причинно-связанных событий (мировых линий частиц и света), с одной стороны, мы должны иметь условие

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0, \quad (80)$$

а с другой — для таких событий должно обязательно выполняться неравенство

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0. \quad (81)$$

Для выбранной системы отсчета, реализуемой физическими телами, имеет место условие

$$\gamma_{oo} > 0. \quad (82)$$

В выражении (81) мы выделим времени- и пространственноподобные части

$$d\sigma^2 = \left(\sqrt{\gamma_{oo}} dt + \frac{\gamma_{oi} dx^i}{\sqrt{\gamma_{oo}}} \right)^2 - s_{ik} dx^i dx^k, \quad (83)$$

здесь латинские индексы i, k пробегает значения 1, 2, 3;

$$s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{oi}\gamma_{ok}}{\gamma_{oo}}, \quad (84)$$

s_{ik} является метрическим тензором трехмерного пространства в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Квадрат пространственного расстояния определяется выражением

$$dl^2 = s_{ik} dx^i dx^k. \quad (85)$$

Представим скорость $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ в виде $v^i = v e^i$, где v — величина скорости, e^i — произвольный единичный вектор в трехмерном пространстве

$$s_{ik} e^i e^k = 1. \quad (86)$$

При отсутствии гравитационного поля скорость света в выбранной системе координат легко определяется из выражения (83), если положить его равным нулю:

$$\left(\sqrt{\gamma_{oo}} dt + \frac{\gamma_{oi} dx^i}{\sqrt{\gamma_{oo}}} \right)^2 = s_{ik} dx^i dx^k.$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{\gamma_{oo}} / \left(1 - \frac{\gamma_{oi} e^i}{\sqrt{\gamma_{oo}}} \right). \quad (87)$$

Таким образом, произвольный четырехмерный изотропный вектор в пространстве Минковского u^ν равен

$$u^\nu = (1, v e^i). \quad (88)$$

Для одновременного выполнения условий (80) и (81) необходимо и достаточно, чтобы для любого изотропного вектора

$$\gamma_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0 \quad (89)$$

выполнялось условие причинности

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \leq 0, \quad (90)$$

которое и означает, что световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Условия причинности можно записать в следующей форме:

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0, \quad (89a)$$

$$\gamma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0. \quad (90a)$$

В ОТО физический смысл имеют такие решения уравнений Гильберта–Эйнштейна, которые удовлетворяют в каждой точке пространства-времени неравенству

$$g < 0,$$

а также требованию, называемому условием энергодоминантности, которое формулируется следующим образом. Для любого времениподобного вектора K_ν должно выполняться неравенство

$$T^{\mu\nu} K_\mu K_\nu \geq 0,$$

а величина $T^{\mu\nu} K_\nu$ для данного вектора K_ν должна образовывать непространственноподобный вектор.

В нашей теории физический смысл имеют такие решения уравнений (78a) и (79a), которые наряду с этими требованиями должны также удовлетворять условию причинности (89a) и (90a). Последнее на основании уравнения (78a) можно записать в следующей форме:

$$R_{\mu\nu} K^\mu K^\nu \leq \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) K^\mu K^\nu + \frac{m^2}{2} g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu. \quad (91)$$

Если плотность тензора энергии-импульса вещества взять в форме

$$T_{\mu\nu} = \sqrt{-g}[(\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}],$$

то на основании (78a) можно установить между интервалами пространства Минковского $d\sigma$ и интервалом эффективного риманова пространства ds следующую связь:

$$\frac{m^2}{2} d\sigma^2 = ds^2 [4\pi(\rho + 3p) + \frac{m^2}{2} - R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu],$$

где $U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$.

В силу принципа причинности имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu} U^\mu U^\nu < 4\pi(\rho + 3p) + \frac{m^2}{2},$$

которое является частным случаем неравенства (91) или

$$\sqrt{-g} R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \leq 8\pi T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \quad (91a)$$

А. Эйнштейн в 1918 году дал принципу эквивалентности следующую формулировку: *“Инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный «фундаментальный тензор» $g_{\mu\nu}$ определяет метрические свойства пространства, движения тел по инерции в нем, а также и действие гравитации”*. Отождествление в ОТО гравитационного поля с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ риманова пространства позволяет с помощью выбора системы координат сделать равными нулю все компоненты символа Кристоффеля во всех точках произвольной линии. Но при этом и в ОТО гравитационное поле выбором системы координат не исключается, поскольку движение двух близких материальных точек не будет свободным из-за наличия тензора кривизны, который в силу тензорных свойств никогда нельзя обратить в нуль путем выбора системы координат.

В РТГ гравитационное поле является физическим полем в духе Фарадея — Максвелла, поэтому сила гравитации описывается четырехвектором, а следовательно, путем выбора системы координат, только при выполнении условий (89) и (90) можно силами инерции уравновесить трехмерную часть силы гравитации. Движение же материальной точки в гравитационном поле, независимо от системы координат, никогда не может быть свободным. Последнее особенно очевидно, если уравнение геодезической записать в форме [8]:

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = -G_{\alpha\beta}^\rho U^\alpha U^\beta (\delta_\rho^\nu - U^\nu U_\rho).$$

Здесь

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}.$$

Свободное движение в пространстве Минковского описывается уравнением

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = \frac{dU^\nu}{d\sigma} + \gamma_{\mu\lambda}^\nu U^\mu U^\lambda = 0,$$

где $\gamma_{\mu\lambda}^\nu$ — символы Кристоффеля пространства Минковского.

Мы видим, что движение по геодезической риманова пространства есть движение пробного тела под действием силы

$$F^\nu = -G_{\alpha\beta}^\rho U^\alpha U^\beta (\delta_\rho^\nu - U^\nu U_\rho),$$

причем эта сила есть четырехвектор. Если бы пробное тело было заряженным, то оно излучало бы электромагнитные волны, поскольку оно движется с ускорением. Ситуация здесь точно такая же, какая имеет место и для других известных физических сил.

В СТО между силами инерции и физическими силами (электромагнитными, ядерными и т.д.) имеется принципиальная разница. Силы инерции всегда могут быть обращены в нуль простым выбором системы отсчета, тогда как физические силы никаким выбором системы отсчета в принципе нельзя обратить в нуль, поскольку они имеют векторную природу в пространстве Минковского. Поскольку в РТГ все силы, в том числе и гравитационные, имеют векторную природу, то это означает, что они не могут быть обращены в нуль выбором системы координат. Выбором системы координат можно только скомпенсировать трехмерную силу любой природы, в том числе и гравитационную, силой инерции. В ОТО, как отмечал Дж.Л.Синг [9], “*понятие силы гравитации отсутствует, так как гравитационные свойства органически входят в структуру пространства-времени и проявляются в кривизне пространства-времени, т.е. в том, что тензор Римана R_{ijkl} отличен от нуля*”. Именно в этой связи Дж.Л.Синг писал: “Согласно знаменитой легенде,

Ньютон был вдохновлен на создание своей теории гравитации, наблюдая однажды за падением яблока с ветки дерева, и изучающие ньютонову физику даже теперь стали бы утверждать, что ускорение (980 см/сек^2) падающего яблока обусловлено гравитационным полем. Согласно теории относительности (речь идет об ОТО. — А.Л.), эта точка зрения совершенно ошибочна. Мы предпримем тщательное изучение этой проблемы и убедимся, что в явлении свободного падения гравитационное поле (т.е. тензор Римана) играет, в действительности, чрезвычайно малую роль, а ускорение 980 см/сек^2 обусловлено фактически кривизной мировой линии ветки дерева”.

Согласно РТГ, гравитационное поле является физическим полем, а поэтому, в отличие от ОТО, она полностью сохраняет понятие силы гравитации. Благодаря силе гравитации и происходит свободное падение тела, т.е. происходит все так, как это имеет место в ньютоновой физике. Более того, все гравитационные эффекты в Солнечной системе (смещение перигелия Меркурия, отклонение света Солнцем, временное запаздывание радиосигнала, прецессия гироскопа) вызваны именно действием силы гравитации, а не тензора кривизны пространства-времени, который в Солнечной системе достаточно мал.

В локальной тождественности инерции и гравитации Эйнштейн увидел главную причину равенства инертной и гравитационной масс. Однако, по нашему мнению, как это видно из уравнений (2), причина этого равенства заключается в том, что источником гравитационного поля является сохраняющаяся суммарная плотность тензора вещества и гравитационного поля. Именно поэтому равенство инертной и гравитационной масс не требует локального отождествления сил гравитации и инерции.

7. ПРИНЦИП МАХА

Ньютон при формулировке законов механики ввел понятие абсолютного пространства, которое остается всегда одинаковым и неподвижным. Именно по отношению к этому пространству он и определял ускорение тела. Это ускорение имело абсолютный характер. Введение такой абстракции, как абсолютное пространство, оказалось чрезвычайно плодотворным. Отсюда, в частности, возникли понятия инерциальных систем отсчета во всем пространстве, принцип относительности для механических процессов и сложилось представление о физически выделенных состояниях движения. Эйнштейн по этому поводу в 1923 г. писал следующее: “Системы координат, находящиеся в таких состояниях движения, отличаются тем, что сформулированные в этих координатах законы природы принимают наиболее простой вид”. И далее: “...согласно классической механике существует относительность скорости, но не относительность ускорения”. Так утвердилось в теории представление

об инерциальных системах отсчета, в которых материальные точки, не подвергающиеся действию сил, не испытывают ускорения и находятся в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения. Однако абсолютное пространство Ньютона или инерциальные системы отсчета введены, фактически, априорно в отрыве от характера распределения материи во Вселенной.

Мах проявил достаточную смелость, подвергнув серьезной критике основные положения механики Ньютона. Как он сам позднее писал, ему с большим трудом удалось опубликовать свои идеи. Хотя Мах и не построил физическую теорию, свободную от указанных им недостатков, он оказал огромное влияние на развитие физической теории. Он привлек внимание ученых к анализу основных физических понятий.

Приведем ряд высказываний Маха [10], которые получили в литературе название принципа Маха: *“Никто не может ничего сказать об абсолютном пространстве и абсолютном движении, это нечто лишь мыслимое, на опыте не обнаружимое”*. И далее: *“Вместо того, чтобы относить движущееся тело к пространству (к какой-нибудь координатной системе), будем рассматривать непосредственно его отношение к т е л а м мира, посредством которых только и можно о п р е д е л и т ь систему координат. ...Даже в простейшем случае, когда мы будто бы рассматриваем взаимодействие только д в у х масс, н е в о з м о ж н о отвлечься от остального мира... . Если тело вращается относительно неба неподвижных звезд, то возникают центробежные силы, а если оно вращается относительно д р у г о г о тела, а не относительно неба неподвижных звезд, то центробежных сил нет. Я ничего не имею против, чтобы первое вращение назвать а б с о л ю т н ы м, если только не забывать, что это не означает ничего другого, кроме вращения о т н о с и т е л ь н о неба неподвижных звезд”*.

Поэтому Мах писал: *“...нет необходимости связывать закон инерции с каким-то особым абсолютным пространством. Самый естественный подход настоящего естествоиспытателя таков: сначала рассматривать закон инерции как достаточно приближенный, соотнести его пространственно с неподвижным звездным небом, ... и затем следует ожидать поправок или развития наших знаний на основе дальнейшего опыта. Недавно Ланге опубликовал критическую статью, в которой он излагает, как можно было бы, согласно его принципам, ввести н о в у ю систему координат, если бы обычное грубое отнесение к неподвижному звездному небу оказалось больше непригодным вследствие более точных астрономических наблюдений. Между мной и Ланге нет различия во мнениях относительно т е о р е т и ч е с к о й формальной ценности заключений Ланге, а именно, что в настоящее время неподвижное звездное небо является единственной п р а к т и ч е с к и пригодной системой отсчета, а также относительно метода определения новой системы отсчета посредством постепенных поправок”*. Далее Мах

приводит высказывания С.Неймана: *“Так как все движения должны быть отнесены к системе альфа (системе инерции), она, очевидно, представляет некую косвенную связь между всеми процессами, происходящими во Вселенной, и, следовательно, содержит в себе, можно сказать, столь же загадочный, сколь и сложный универсальный закон”*. Мах по этому поводу замечает: *“Я думаю, что с этим согласится всякий”*.

Из высказываний Маха очевидно, что, поскольку речь идет о законе инерции, согласно которому по Ньютону *“...всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения...”*, то, естественно, встает вопрос об инерциальных системах отсчета и об их связи с распределением материи. Мах и его современники вполне ясно понимали, что такая связь должна иметь место в природе. Именно такой смысл далее и будет вкладываться в понятие “принцип Маха”.

Мах писал: *“Хотя я и думаю, что астрономические наблюдения делают необходимыми сначала лишь очень незначительные поправки, я все же допускаю, что закон инерции в той простой форме, которую ему придал Ньютон, имеет для нас, людей, лишь ограниченное и преходящее значение”*. Как мы увидим далее, в этом Мах не оказался прав. Мах не дал математического оформления своей идеи, а поэтому весьма часто разные авторы вкладывают в принцип Маха свой смысл. Мы здесь пытаемся сохранить тот смысл, который вкладывал в него сам Мах.

Пуанкаре, а затем Эйнштейн обобщили принцип относительности на все физические явления. В формулировке Пуанкаре [11] он звучит так: *“...принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет”*. Применение этого принципа к электромагнитным явлениям привело Пуанкаре, а затем и Минковского к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени и тем самым еще в большей степени укрепило гипотезу о существовании инерциальных систем отсчета во всем пространстве. Такие системы отсчета являются физически выделенными, а поэтому ускорение относительно них имеет абсолютный смысл.

В общей теории относительности (ОТО) отсутствуют инерциальные системы отсчета во всем пространстве. Эйнштейн об этом в 1929 г. писал: *“Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т.е. не только скорость, но и ускорение не имеет абсолютного смысла”*.

Принцип Маха в его формулировке в ОТО оказался невостребованным. Следует, однако, отметить, что представления об инерциальных системах отсчета во всем пространстве имеют достаточно весомую экспериментальную

основу, поскольку, например, переходя от системы координат, связанной с Землей, к системе координат, связанной с Солнцем, а затем к Метагалактике, мы все с большей точностью приближаемся к инерциальной системе отсчета. Поэтому нет никаких серьезных оснований для отказа от такого важного понятия, как инерциальная система отсчета. С другой стороны, наличие фундаментальных законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения также с необходимостью приводит к существованию инерциальных систем отсчета во всем пространстве. Псевдоевклидова геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи и в то же время вводит инерциальные системы отсчета. Хотя псевдоевклидова геометрия пространства-времени возникла при изучении материи, а поэтому и неотделима от нее, тем не менее можно формально говорить о пространстве Минковского в отсутствие материи. Однако, так же, как и ранее в механике Ньютона, в специальной теории относительности нет ответа на вопрос, как инерциальные системы отсчета связаны с распределением материи во Вселенной.

Открытие псевдоевклидовой геометрии пространства и времени позволило с единой точки зрения рассмотреть не только инерциальные, но и ускоренные системы отсчета. Большая разница проявилась между силами инерции и силами, вызванными физическими полями. Она состоит в том, что силы инерции всегда можно сделать равными нулю, путем выбора соответствующей системы отсчета, тогда как силы, вызванные физическими полями, в принципе нельзя обратить в нуль выбором системы отсчета, так как они имеют векторную природу в четырехмерном пространстве-времени. Поскольку в РТГ гравитационное поле является физическим полем в духе поля Фарадея — Максвелла, силы, вызванные таким полем, не могут быть обращены в нуль выбором системы отсчета.

Другая ситуация имеет место в общей теории относительности. Гравитационные силы в ней не имеют векторной природы в четырехмерном пространстве и времени, а поэтому они могут быть локально обращены в нуль выбором системы отсчета. Основные уравнения РТГ (76) и (77) благодаря наличию массы покоя гравитационного поля содержат, наряду с римановой метрикой, также метрический тензор пространства Минковского, но это означает, что в принципе метрику этого пространства можно выразить через геометрические характеристики эффективного риманова пространства, а также через величины, характеризующие распределение вещества во Вселенной. Это легко осуществить, перейдя в уравнениях (76) от контравариантных величин к ковариантным. Таким путем мы получим

$$\frac{m^2}{2} \gamma_{\mu\nu}(x) = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) - R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} g_{\mu\nu}. \quad (92)$$

Отсюда мы видим, что в правой части уравнений содержатся только геоме-

трические характеристики эффективного риманова пространства и величины, определяющие распределение вещества в этом пространстве.

Экспериментально изучая движения частиц, света в римановом пространстве, в принципе можно найти метрический тензор пространства Минковского, а следовательно, и построить инерциальную систему отсчета. Таким образом, РТГ, построенная в рамках специальной теории относительности, позволяет дать математическую формулировку принципа Маха. Мы видим, что специальный принцип относительности имеет всеобщее значение независимо от вида материи.

Для гравитационного поля его требования выражаются в условии форминвариантности уравнений (76) и (77) относительно группы Лоренца. Лоренц-форминвариантность физических уравнений остается важнейшим физическим принципом при построении теории, поскольку именно этот принцип дает возможность ввести универсальные характеристики для всех форм материи.

А. Эйнштейн в работе 1950 г. писал: *“...не следует ли в конце концов попытаться сохранить понятие инерциальной системы, оставив все попытки объяснить фундаментальную черту гравитационных явлений, которая проявляется в системе Ньютона как эквивалентность инертной и тяготеющей масс?”* В РТГ сохранено понятие инерциальной системы и в то же время показано, что эквивалентность инертной и тяготеющей масс есть прямое следствие гипотезы, что сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса материи является источником гравитационного поля. Таким образом, равенство инертной и тяготеющей масс ни в коей мере не противоречит существованию инерциальной системы координат. Более того, эти положения органически дополняют друг друга и лежат в основе РТГ.

В противоположность нашему выводу А.Эйнштейн на поставленный им вопрос ответил следующим образом: *“Тот, кто верит в постижимость природы, должен дать ответ — нет”*. Наличие инерциальных систем координат позволяет устранить парадокс Маха, ибо только в этом случае можно говорить об ускорении относительно пространства. В.А.Фок по этому поводу писал: *“Что касается парадокса Маха, то он основан, как известно, на рассмотрении вращающегося жидкого тела, имеющего форму эллипсоида, и невращающегося, имеющего форму шара. Парадокс возникает здесь только в том случае, если считать лишенным смысла понятие “вращение по отношению к пространству”; тогда действительно оба тела (вращающееся и невращающееся) представляются равноправными, и становится непонятным, почему одно из них шаровидно, а другое — нет. Но парадокс исчезает, коль скоро мы признаем законность понятия “ускорения по отношению к пространству”*.

Идеи Маха оказали глубокое влияние на взгляды Эйнштейна на гравитацию при построении общей теории относительности. В одной из работ Эйн-

штейн пишет: *“Принцип Маха: G-поле полностью определено массами тел”*. Но оказывается, что в ОТО и это положение не выполняется, поскольку имеются решения и в отсутствие материи. Попытка устранения этого обстоятельства путем введения λ -члена не дала желаемого результата. Оказалось, что и уравнения с λ -членом в отсутствие материи также имеют решения, отличные от нуля. Мы видим, что Эйнштейн вложил в понятие “принцип Маха” совсем другой смысл. Но и в таком понимании принцип Маха не нашел своего места в ОТО.

Имеет ли место принцип Маха в формулировке Эйнштейна в РТГ? В отличие от ОТО в этой теории в силу принципа причинности имеются пространственноподобные поверхности во всем пространстве (глобальные поверхности Коши). И если на одной из таких поверхностей вещество отсутствует, то на основании требования энергодоминантности, налагаемого на тензор вещества, оно будет отсутствовать всегда [12]. Поскольку вещество в природе существует, то отсюда следует, что система однородных во всем пространстве гравитационных уравнений не имеет решений, реализуемых в природе. Иначе говоря, все решения этой системы не имеют физического смысла при данном развитии Вселенной. Такое отбрасывание решений системы однородных гравитационных уравнений стало возможным не только в силу уравнений, но прежде всего благодаря характеру реальной Вселенной.

В принципе уравнения теории не отвергают вселенные, построенные из гравитационного поля, без вещества. Они отвергнуты самим развитием материи. Почему наша Вселенная оказалась с веществом — теория пока не дает ответа. Физический смысл имеют решения только системы неоднородных гравитационных уравнений, когда в какой-либо части пространства или во всем пространстве имеется вещество. Это означает, что гравитационное поле и эффективное риманово пространство в реальной Вселенной не могли возникнуть без порождающего их вещества. Мы видим, что и в формулировке Эйнштейна принцип Маха реализуется в релятивистской теории гравитации.

Имеется, однако, существенное различие в понимании G-поля в нашей теории и в ОТО. Под G-полем Эйнштейн понимал риманову метрику, тогда как в нашем представлении гравитационное поле есть физическое поле. Такое поле входит в риманову метрику наряду с плоской метрикой, а поэтому при отсутствии вещества и гравитационного поля метрика не исчезает, а остается метрикой пространства Минковского.

В литературе имеются и другие формулировки принципа Маха, отличные по смыслу от идей Маха и Эйнштейна, но поскольку они, по нашему мнению, не сформулированы достаточно определенно, мы их не рассматривали. Так как гравитационные силы в РТГ обязаны физическому полю типа Фарадея — Максвелла, то ни о какой единой сущности сил инерции и гравитации, в принципе, не может быть и речи.

Иногда суть принципа Маха видят в том, что, якобы, согласно ему силы

инерции определяются взаимодействием с материей Вселенной. С полевой точки зрения такой принцип не может иметь место в природе. Дело здесь в том, что, хотя инерциальные системы отсчета, как мы видели выше, связаны с распределением материи во Вселенной, силы инерции не являются результатом взаимодействия с материей Вселенной, поскольку всякое воздействие материи возможно только через физические поля, но это означает, что силы, вызванные этими полями, в силу их векторной природы нельзя обратить в нуль выбором системы отсчета. Таким образом, силы инерции непосредственно определяются не физическими полями, а строго определенной структурой геометрии и выбором системы отсчета.

Псевдоевклидова геометрия пространства-времени, отражая динамические свойства, общие для всех форм материи, с одной стороны, подтвердила гипотезу о существовании инерциальных систем отсчета, а с другой — показала, что силы инерции, возникающие при соответствующем выборе системы отсчета, выражаются через символы Кристоффеля пространства Минковского. Поэтому они не зависят от природы тела. Все это стало ясно, когда было показано, что специальная теория относительности применима не только в инерциальных системах отсчета, но и в неинерциальных (ускоренных).

Это позволило в работе [5] дать принципу относительности более общую формулировку: *“Какую бы физическую систему отсчета мы ни выбрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета, так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся”*. Математически это выражается так: пусть в некоторой системе координат пространства Минковского интервал равен

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu,$$

тогда существует другая система координат x' :

$$x'^\nu = f^\nu(x),$$

в которой интервал принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu,$$

где метрические коэффициенты $\gamma_{\mu\nu}$ имеют тот же функциональный вид, что и в исходной системе координат.

В этом случае говорят, что метрика форминвариантна относительно таких преобразований, а все физические уравнения также форминвариантны,

т.е. имеют одинаковый вид как в штрихованной, так и в нештрихованной системе координат. Преобразования координат, оставляющие метрику форминвариантной, образуют группу. В случае галилеевых координат в инерциальной системе это обычные преобразования Лоренца.

В РТГ между силами инерции и гравитации имеется существенное различие в том, что по мере удаления от тел гравитационное поле становится достаточно слабым, тогда как силы инерции в зависимости от выбора системы отсчета могут быть сколь угодно большими. И только в инерциальной системе отсчета они равны нулю. Поэтому неправильно считать, что силы инерции нельзя отделить от сил гравитации. В повседневной жизни их различие почти очевидно.

Построение РТГ позволило установить связь инерциальной системы отсчета с распределением материи во Вселенной и тем самым глубже понять природу сил инерции и их различие с материальными силами. В нашей теории силам инерции отведена такая же роль, какую они играют в любых других полевых теориях.

8. ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Для изучения гравитационных эффектов в Солнечной системе вполне достаточно постньютоновского приближения. В данном разделе мы построим это приближение. Наше построение в техническом плане использует многое, ранее полученное В.А.Фоком [13].

Основные уравнения теории запишем в форме (см. Приложение В)

$$\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} + m^2 \sqrt{-\gamma} \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} = -16\pi g (T_M^{\epsilon\lambda} + \tau_g^{\epsilon\lambda}) \quad (93)$$

$$D_\lambda \tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} = 0. \quad (94)$$

где $T_M^{\epsilon\lambda}$ — тензор энергии-импульса вещества и $\tau_g^{\epsilon\lambda}$ — тензор энергии-импульса гравитационного поля.

Выражение для тензора энергии-импульса гравитационного поля может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} -16\pi\tau_g^{\epsilon\lambda} = & \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta})(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu})D_\alpha\tilde{\Phi}^{\tau\sigma} \cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu} + \\ & + \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau} \cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma} - \tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma} \cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau} - \\ & - \tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\beta\sigma} \cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau} + \\ & + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\sigma\beta} \cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau} + D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\beta} \cdot D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\alpha} - \tilde{\Phi}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} \\ & - m^2(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\epsilon\lambda} - \sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} + \tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (95)$$

Это выражение записано в произвольной координатной системе в пространстве Минковского. В дальнейшем все вычисления будут проводиться в галилеевых координатах инерциальной системы.

$$\gamma_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) . \quad (96)$$

При построении ряда теории возмущений в качестве малого параметра естественно использовать величину, равную

$$v \sim \epsilon, \quad U \sim \epsilon^2, \quad \Pi \sim \epsilon^2, \quad p \sim \epsilon^2 . \quad (97)$$

Здесь U — ньютонов потенциал гравитационного поля;

Π — удельная внутренняя энергия тела;

p — удельное давление.

Для Солнечной системы параметр ϵ^2 имеет порядок

$$\epsilon^2 \sim 10^{-6} . \quad (98)$$

Будем исходить из разложений компонент плотности тензора:

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \overset{(2)}{\tilde{\Phi}^{00}} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}^{00}} + \dots \quad (99)$$

$$\tilde{g}^{0i} = \overset{(3)}{\tilde{\Phi}^{0i}} + \overset{(5)}{\tilde{\Phi}^{0i}} + \dots \quad (100)$$

$$\tilde{g}^{ik} = \tilde{\gamma}^{ik} + \overset{(2)}{\tilde{\Phi}^{ik}} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}^{ik}} + \dots \quad (101)$$

В качестве модели вещества возьмем идеальную жидкость, тензор энергии-импульса которой имеет вид

$$T^{\epsilon\lambda} = [p + \rho(1 + \Pi)]u^\epsilon u^\lambda - pg^{\epsilon\lambda}, \quad (102)$$

где ρ — инвариантная плотность идеальной жидкости, p — удельное изотропное давление, u^λ — четырехвектор скорости.

Напишем теперь разложение по малому параметру ϵ для тензора энергии-импульса вещества:

$$T_M^{00} = \overset{(0)}{T}^{00} + \overset{(2)}{T}^{00} + \dots \quad (103)$$

$$T_M^{0i} = \overset{(1)}{T}^{0i} + \overset{(3)}{T}^{0i} + \dots \quad (104)$$

$$T_M^{ik} = \overset{(2)}{T}^{ik} + \overset{(4)}{T}^{ik} + \dots . \quad (105)$$

В ньютоновом приближении, т.е. когда пренебрегаем силами гравитации, для четырехвектора скорости имеем

$$u^0 = 1 + 0(\epsilon^2), \quad u^i = v^i(1 + 0(\epsilon^2)). \quad (106)$$

Используя эти выражения в (102), найдем

$$T^{(0)00} = \rho, \quad T^{(1)0i} = \rho v^i, \quad T^{(0)ik} = 0. \quad (107)$$

В этом приближении имеем

$$\partial_0 \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0. \quad (108)$$

Отсюда видно, что в ньютоновом приближении полная инертная масса тела является сохраняющейся величиной:

$$M = \int \rho d^3x. \quad (109)$$

В ньютоновом приближении на основании уравнений (93) имеем

$$\Delta \tilde{\Phi}^{(2)00} = -16\pi\rho, \quad (110)$$

$$\Delta \tilde{\Phi}^{(3)0i} = -16\pi\rho v^i, \quad (111)$$

$$\Delta \tilde{\Phi}^{(2)ik} = 0. \quad (112)$$

Масса гравитона, ввиду малости, в инерциальной системе координат для эффектов Солнечной системы не играет роли, а поэтому мы при получении уравнений (110)—(112) ее не учитывали. Следует отметить, что в общем случае неинерциальной системы отсчета или для сильных гравитационных полей член с массой гравитона m опускать уже нельзя. Так, например, даже для статического тела в области, близкой к сфере Шварцшильда, влияние массы гравитона весьма велико, поэтому пренебрегать ею уже невозможно.

Решение уравнений (110)—(112) имеет вид

$$\tilde{\Phi}^{(2)00} = 4U, \quad U = \int \frac{\rho}{|x - x'|} d^3x', \quad (113)$$

$$\tilde{\Phi}^{(3)0i} = -4V^i, \quad V^i = - \int \frac{\rho v^i}{|x - x'|} d^3x', \quad (114)$$

$$\stackrel{(2)}{\tilde{\Phi}}^{ik} = 0 . \quad (115)$$

На основании уравнений (94) имеем

$$\partial_0 \stackrel{(2)}{\tilde{\Phi}}^{00} + \partial_i \stackrel{(3)}{\tilde{\Phi}}^{0i} = 0 . \quad (116)$$

Подставляя в это уравнение (113) и (114), найдем

$$\partial_0 U - \partial_i V^i = 0 . \quad (117)$$

Отсюда очевидно, что при дифференцировании потенциала U по времени порядок малости по ϵ увеличивается. Это обстоятельство в дальнейшем нами будет использоваться при вычислениях тензора энергии-импульса гравитационного поля $\tau_g^{\epsilon\lambda}$. Заметим, что уравнение (117) тождественно выполняется в силу уравнений (108).

На основании (114) и (115) следует, что из всех компонент плотности тензора $\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}$ во втором приближении остается только одна компонента $\stackrel{(2)}{\tilde{\Phi}}^{00}$, определяемая выражением (113). Именно это обстоятельство существенно упрощает метод нахождения постньютоновского приближения, когда мы на каждом этапе построения пользуемся плотностями тензорных величин.

Используя (113)—(115) с точностью до второго порядка включительно, получаем

$$\sqrt{-g}g^{00} = 1 + 4U, \quad \sqrt{-g}g^{11} = \sqrt{-g}g^{22} = \sqrt{-g}g^{33} = -1 . \quad (118)$$

Отсюда имеем

$$-g = 1 + 4U , \quad (118a)$$

следовательно,

$$g_{00} = 1 - 2U, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -(1 + 2U) . \quad (119)$$

Мы видим из (118), что в ньютоновом приближении, когда можно ограничиться только одной компонентой плотности тензора вещества T^{00} , как этого и следовало ожидать, гравитационное поле описывается только одной компонентой $\tilde{\Phi}^{00}$, тогда как метрический тензор $g_{\mu\nu}$ имеет и в этом приближении, согласно (119), несколько компонент. Работа с компонентами поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$, а не с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, в значительной степени упрощает весь вычислительный процесс построения постньютоновского приближения. Именно поэтому введение плотности тензора гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ имеет не только общетеоретическое, но и практическое значение. Итак, метрический тензор эффективного риманова пространства равен

$$g_{00} = 1 - 2U, \quad g_{0i} = 4\gamma_{ik}V^k, \quad g_{ik} = \gamma_{ik}(1 + 2U) . \quad (120)$$

Из выражения (113) для U следует, что инертная масса (109) равна активной гравитационной массе. В РТГ, как мы видели, это равенство возникло из-за того, что источником гравитационного поля является тензор энергии-импульса.

Перейдем теперь к построению следующего приближения для компоненты метрического тензора g_{00} . С этой целью найдем вклад от тензора энергии-импульса гравитационного поля. Поскольку в выражении (95) под знаком производной необходимо учитывать только $\tilde{\Phi}^{(2)00}$, то первый член (95) даст вклад, равный

$$2(\text{grad } U)^2, \quad (121)$$

а второй

$$-16(\text{grad } U)^2. \quad (122)$$

Вклад от всех остальных членов в этом приближении будет равен нулю. Отброшены также члены с производными по времени от потенциала U , поскольку в силу (117) они также более высокого порядка малости по ϵ . На основании (121) и (122) имеем

$$-16\pi g\tau_g^{00} = -14(\text{grad } U)^2. \quad (123)$$

С учетом (123) уравнение (93) в этом приближении для компоненты $\tilde{\Phi}^{00}$ принимает вид

$$\Delta \tilde{\Phi}^{00} = 16\pi g T^{00} + 14(\text{grad } U)^2 + 4\partial_0^2 U. \quad (124)$$

Поскольку на основании (120) во втором порядке по ϵ интервал равен

$$ds = dt(1 - U + \frac{1}{2}v_i v^i), \quad (125)$$

отсюда получим

$$u^0 = \frac{dt}{ds} = 1 + U - \frac{1}{2}v_i v^i. \quad (126)$$

Подставляя это выражение в (102), найдем

$$T^{(2)00} = \rho[2U + \Pi - v_i v^i]. \quad (127)$$

На основании (118a) и (127) из уравнений (124) получим

$$\Delta \tilde{\Phi}^{(4)00} = -96\pi\rho U + 16\pi\rho v_i v^i + 14(\text{grad } U)^2 - 16\pi\rho\Pi + 4\partial_0^2 U. \quad (128)$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$(\text{grad } U)^2 = \frac{1}{2}\Delta U^2 - U\Delta U. \quad (129)$$

Но поскольку

$$\Delta U = -4\pi\rho, \quad (130)$$

то уравнение (128), после использования (129) и (130), принимает вид

$$\Delta(\tilde{\Phi}^{(4)00} - 7U^2) = 16\pi\rho v_i v^i - 40\pi\rho U - 16\pi\rho\Pi + 4\partial_0^2 U. \quad (131)$$

Отсюда имеем

$$\tilde{\Phi}^{(4)00} = 7U^2 + 4\Phi_1 + 10\Phi_2 + 4\Phi_3 - \frac{1}{\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|} d^3x', \quad (132)$$

где

$$\Phi_1 = - \int \frac{\rho v_i v^i}{|x-x'|} d^3x', \quad \Phi_2 = \int \frac{\rho U}{|x-x'|} d^3x', \quad \Phi_3 = \int \frac{\rho\Pi}{|x-x'|} d^3x'. \quad (133)$$

Итак, в постньютоновом приближении находим

$$\tilde{g}^{00} = 1 + 4U + 7U^2 + 4\Phi_1 + 10\Phi_2 + 4\Phi_3 - \frac{1}{\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|} d^3x'. \quad (134)$$

Нам необходимо теперь найти величину детерминанта g в постньютоновом приближении. Для этой цели представим $\tilde{g}^{ik}$ в форме

$$\tilde{g}^{ik} = \tilde{\gamma}^{ik} + \tilde{\Phi}^{(4)ik}. \quad (135)$$

Следует особо подчеркнуть, что вычисление детерминанта g наиболее просто осуществить, если воспользоваться для этой цели плотностью тензора $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и учесть, что

$$g = \det(\tilde{g}^{\mu\nu}) = \det(g_{\mu\nu}). \quad (136)$$

На основании (134) и (135) найдем

$$\sqrt{-g} = 1 + 2U + \frac{3}{2}U^2 + 2\Phi_1 + 5\Phi_2 + 2\Phi_3 - \frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|} d^3x'. \quad (137)$$

Здесь

$$\Phi = \tilde{\Phi}^{(4)11} + \tilde{\Phi}^{(4)22} + \tilde{\Phi}^{(4)33}. \quad (138)$$

Так как в рассматриваемом приближении $g_{00}g^{00} = 1$, то из выражений (134) и (137) получим

$$g_{00} = 1 - 2U + \frac{5}{2}U^2 - 2\Phi_1 - 5\Phi_2 - 2\Phi_3 - \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x-x'|} d^3x'. \quad (139)$$

Для определения g_{00} нам необходимо вычислить величину Φ . Поскольку Φ получена суммированием, то можно воспользоваться уравнением (93) и путем суммирования непосредственно получить уравнения для функции Φ .

Из выражения (95) путем суммирования получим из первого члена следующее выражение:

$$-16\pi g \tau_g^{ii} = -2(\text{grad } U)^2. \quad (140)$$

Все остальные члены, входящие в выражение (95), в данном приближении не дают вклада. С помощью выражения (102) для тензора энергии-импульса вещества найдем

$$-16\pi g \overset{(2)}{T}^{ii} = -16\pi \rho v_i v^i + 48\pi p. \quad (141)$$

Учитывая (140) и (141), уравнение для Φ запишем в форме

$$\Delta \Phi = 16\pi \rho v_i v^i - 48\pi p + 2(\text{grad } U)^2. \quad (142)$$

Воспользовавшись тождеством (129) и уравнением (130), получим

$$\Delta(\Phi - U^2) = 16\pi \rho v_i v^i + 8\pi \rho U - 48\pi p. \quad (143)$$

Отсюда находим

$$\Phi = U^2 + 4\Phi_1 - 2\Phi_2 + 12\Phi_4, \quad \Phi_4 = \int \frac{p}{|x - x'|} d^3 x'. \quad (144)$$

Подставляя выражение (144) в (139), имеем

$$g_{00} = 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 + \frac{1}{2\pi} \partial_0^2 \int \frac{U}{|x - x'|} d^3 x'. \quad (145)$$

Используя тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{U}{|x - x'|} d^3 x' = - \int \rho |x - x'| d^3 x',$$

выражение (145) запишем в форме

$$g_{00} = 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4 - \partial_0^2 \int \rho |x - x'| d^3 x'. \quad (146)$$

Если совершить преобразование

$$x'^0 = x^0 + \eta^0(x), \quad x'^i = x^i, \quad (147)$$

то метрические коэффициенты изменятся следующим образом:

$$g'_{00} = g_{00} - 2\partial_0 \eta^0, \quad g'_{0i} = g_{0i} - \partial_i \eta^0, \quad g'_{ik} = g_{ik}. \quad (148)$$

Следует отметить, что преобразование (147) не выводит нас из инерциальной системы отсчета, поскольку такое преобразование есть не что иное, как другой выбор часов. Все физически измеряемые величины не зависят от этого выбора.

Принимая функцию η^0 равной

$$\eta^0 = -\frac{1}{2}\partial_0 \int \rho |x - x'| d^3 x' \quad (149)$$

и учитывая тождество

$$\partial_i \eta^0 = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} V^k - N_i), \quad N_i = \int \frac{\rho v^k (x_k - x'_k)(x_i - x'_i)}{|x - x'|^3} d^3 x', \quad (150)$$

после подстановки в (148) выражений (120) для g_{0i} и g_{ik} , а также выражения (146) для g_{00} с учетом (149) и (150) найдем метрические коэффициенты эффективного риманова пространства в так называемой “канонической форме”:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4, \\ g_{0i} &= \frac{7}{2}\gamma_{ik} V^k + \frac{1}{2}N_i, \\ g_{ik} &= \gamma_{ik}(1 + 2U). \end{aligned} \quad (151)$$

На основании выражений (151) постньютоновские параметры Нордтведта — Уилла в РТГ равны следующим значениям:

$$\gamma = 1, \beta = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_W = 0.$$

Метрические коэффициенты (151) вычислены нами в РТГ в инерциальной системе отсчета. Приведем теперь выражения для компонент тензора энергии-импульса вещества, по сравнению с (107), в следующем приближении. Учитывая выражение (126) для u^0 , а также

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = v^i(1 + U - \frac{1}{2}v_k v^k), \quad (152)$$

из формулы (102) находим

$$T^{(3)0i} = \rho v^i(2U + \Pi - v_k v^k) + p v^i, \quad (153)$$

$$T^{(2)ik} = \rho v^i v^k - p \gamma^{ik}. \quad (154)$$

Компонента $T^{(2)00}$ определяется выражением (127). На основании выражений (151), используя уравнения геодезической линии, можно рассчитать все эффекты в Солнечной системе.

В заключение остановимся несколько подробнее на сравнении РТГ и ОТО при анализе эффектов в слабом гравитационном поле. Система уравнений (93) и (94) вместе с уравнением состояния определяет все физические величины той или иной гравитационной задачи. Все проведенные выше расчеты постньютоновского приближения сделаны в инерциальной системе координат. В ОТО в принципе не существует инерциальной системы. А.Эйнштейн по этому поводу писал: *“Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т.е. не только скорость, но и ускорение не имеют абсолютного смысла”*. Но если отсутствует инерциальная система координат, то к какой системе отсчета следует относить вычисления, проведенные в ОТО?

В.А.Фок при расчете гравитационных эффектов пользовался гармоническими условиями в декартовых координатах. Он называл их координатными условиями. Так, в работе 1939 года [13] он писал: *“При решении уравнений Эйнштейна мы пользовались координатной системой, которую мы называли гармонической, но которая заслуживает названия инерциальной”*. Далее в этой же статье он отмечал: *“Нам кажется, что возможность введения в общей теории относительности однозначным образом определенной инерциальной координатной системы заслуживает быть отмеченной”*. И, наконец, в работе [14] он писал: *“Принцип относительности, выражаемый преобразованиями Лоренца, возможен и в неоднородном пространстве, общий же принцип относительности невозможен”*.

Все эти высказывания В.А.Фока были продиктованы стремлением внести ясность в физическую суть ОТО, освободив ее от не имеющей физического смысла общей относительности. Однако при этом В.А.Фок фактически вышел за пределы ОТО. Именно благодаря такому выходу он и пришел к поразительному утверждению о справедливости принципа относительности в неоднородном пространстве. Но чтобы это осуществить, необходимо ввести представления о гравитационном поле в пространстве Минковского. Где же В.А.Фок совершил выход из ОТО? При использовании гармонических условий он ввел декартовы координаты:

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (155)$$

где x^μ — декартовы координаты.

В декартовых координатах $\gamma(x) = \det \gamma_{\mu\nu} = -1$.

Поэтому согласно тензорному закону преобразований имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \cdot \frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)}{\sqrt{-\gamma(y)}}. \quad (156)$$

Запишем уравнение (155) в форме

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial y^\tau} . \quad (157)$$

Для дальнейших вычислений приведем формулы

$$\frac{\partial}{\partial y^\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \gamma_{\tau\lambda}^\lambda, \quad \gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \cdot \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma} . \quad (158)$$

После подстановки (156) в (157) с учетом (158) получим

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial y^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = 0 . \quad (159)$$

Множитель второго члена запишем в форме

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\tau} \cdot \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \cdot \gamma_{\alpha\beta}^\sigma .$$

Подставляя это выражение в предыдущее, найдем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}}{\partial y^\alpha} + \gamma_{\alpha\beta}^\sigma \tilde{g}^{\alpha\beta} \right) = 0 ,$$

т.е. имеем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} D_\mu \tilde{g}^{\mu\sigma} = 0 . \quad (160)$$

Итак, мы установили, что плотность тензора $\tilde{g}^{\mu\sigma}(y)$ в произвольных координатах автоматически удовлетворяет общековариантному уравнению

$$D_\lambda \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0 ,$$

если исходное условие гармоничности (155) записано в декартовых координатах. Но это означает, что условие гармоничности является не координатным условием, а полевым уравнением в пространстве Минковского. Таким образом, использование гармонического условия в декартовых координатах не является невинной операцией, а предполагает выход за рамки ОТО путем введения пространства Минковского.

Пытался ли В.А.Фок рассматривать гравитационное поле в пространстве Минковского? Нет, он был далек от этой мысли и писал об этом [13]: “Мы упоминаем здесь о ней только в связи с наблюдаемым иногда стремлением (которого отнюдь не разделяем) уложить теорию тяготения в рамки евклидова пространства”. Как мы видели, использование гармонических условий

в декартовых координатах выводит нас за рамки ОТО. Но это означает, что система уравнений гравитации, которую изучал В.А.Фок, отличается от системы уравнений ОТО, т.е. теория гравитации В.А.Фока, основанная на гармонических условиях в декартовых координатах, и ОТО Эйнштейна — это различные теории. Подход В.А.Фока оказался ближе к представлениям РТГ. Все то, что В.А.Фок стремился внести в теорию гравитации (инерциальные системы, ускорение относительно пространства) полностью содержится в РТГ, но в последней это достигается путем рассмотрения гравитационного поля, как и всех других физических полей в пространстве Минковского. При этом все геометрические характеристики риманова пространства уже являются полевыми величинами в пространстве Минковского.

При анализе гравитационных эффектов в Солнечной системе В.А.Фок фактически пользовался пространством Минковского, поскольку все вычисленные гравитационные эффекты он относил к инерциальной системе координат. Именно это обстоятельство и позволило ему получить правильные выражения для эффектов. Так, например, он писал [14]: *“Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3 ? Нам представляется единственно правильным второе определение. Фактически мы им и пользовались, когда говорили о том, что луч света вблизи Солнца имеет форму гиперболы”,* и далее по поводу *“соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема, то оно не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе, хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений”*.

При вычислении в ОТО эффектов гравитации (например: отклонение луча света, временное запаздывание радиосигнала) необходимо сравнивать движение света и радиосигнала по геодезической линии риманова пространства с их движением в отсутствие гравитационного поля. Именно так и должен определяться гравитационный эффект. Но так как в ОТО нельзя сказать, в какой системе координат (инерциальной или неинерциальной) мы оказались при выключении гравитационного поля, то такое сравнение в принципе неоднозначно [15]. В.А.Фок эту трудность преодолел с помощью гармонических условий в декартовых координатах. Но именно это и вывело его за пределы ОТО.

В РТГ гравитационные эффекты определяются однозначно, поскольку согласно уравнениям (93) и (94), записанным в галилеевых координатах инерциальной системы, движение света или пробного тела при выключении гравитационного поля действительно происходит по прямой линии, являющейся геодезической в пространстве Минковского. Совершенно очевидно, что в неинерциальной системе координат геодезическая линия в пространстве Минковского уже не будет прямой линией. Но это означает, что в РТГ в не-

инерциальной системе координат для нахождения гравитационного эффекта движение в эффективном римановом пространстве необходимо сравнивать именно с этим движением.

При вычислении эффектов гравитации в Солнечной системе, когда влиянием массы гравитона можно пренебречь, система уравнений (93) и (94) РТГ в галилеевых координатах совпадает с системой уравнений, которую решал В.А.Фок. Поэтому постньютоновское приближение (151) в РТГ совпадает с аналогичным приближением в теории гравитации В.А.Фока. Как мы уже отмечали ранее, гармонические условия в декартовых координатах, которые с успехом использовал В.А.Фок, вывели его за рамки ОТО Эйнштейна. Это обстоятельство в свое время отмечал Л.Инфельд, который в 1957 году писал: *“Тем самым для Фока выбор гармонического координатного условия становится некоторым фундаментальным законом природы, изменяющим сам характер эйнштейновской общей теории относительности и превращающим ее в теорию гравитационного поля, справедливую только в инерциальных системах координат”*. Однако в ОТО и без использования гармонических условий в декартовых координатах, тем не менее, также получают аналогичные выражения для постньютоновского приближения. В чем же дело? Причина состоит в том, что опять вводится пространство Минковского в галилеевых координатах и фактически гравитационное поле рассматривается как физическое поле в этом пространстве.

В качестве нулевого приближения для римановой метрики берется метрика пространства Минковского в галилеевых координатах. К ней добавляются различные потенциалы с произвольными постньютоновскими параметрами, каждый из которых убывает как $O(\frac{1}{r})$. Именно в этом пункте гравитация рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского, поведение которого описывается введенными гравитационными потенциалами. Такое требование к характеру поведения метрики риманова пространства не следует из ОТО, поскольку в общем случае асимптотика метрики весьма произвольна и даже зависит от выбора трехмерных пространственных координат.

Подставляя риманову метрику $g_{\mu\nu}$ в таком виде в уравнения Гильберта — Эйнштейна, мы можем определить значение постньютоновских параметров и опять приходим к тому же постньютоновскому приближению. При этом следует отметить, что сами уравнения Гильберта — Эйнштейна не определяют постньютоновское приближение как единственное решение этих уравнений.

Причина неоднозначности решения в ОТО связана с форминвариантностью уравнений Гильберта — Эйнштейна относительно координатных преобразований; это приводит к тому, что в одной и той же координатной метрике риманова пространства $g_{\mu\nu}$ существует неограниченное число решений. Об этом множестве решений А.Эйнштейн в 1914 году писал так: *“Мы рассмотрим некоторую конечную часть Σ пространства, в которой не происходят какие-либо материальные процессы. Тогда физические события в*

области Σ полностью определяются, если по отношению к используемой для описания координатной системе K заданы величины $g_{\mu\nu}$, как функции координат x_ν . Совокупность этих функций будем символически обозначать через $G(x)$.

Введем новую систему координат K' , совпадающую с системой K вне области Σ , но отличную от K внутри Σ , такую, что относительно этой системы K' величины $g'_{\mu\nu}$, как и $g_{\mu\nu}$ (вместе с их производными), всюду непрерывны. Совокупность $g'_{\mu\nu}$ обозначим символически через $G'(x')$. Величины $G'(x')$ и $G(x)$ описывают само гравитационное поле. Выразим входящие в $g'_{\mu\nu}$ координаты x'_ν через координаты x_ν , т.е. образуем $G'(x)$, тогда $G'(x)$ равным образом будет описывать гравитационное поле относительно системы K , которое, однако, не совпадает с имеющимся (или специально заданным) гравитационным полем.

Предположим теперь, что дифференциальные уравнения гравитационного поля общековариантны; тогда их решением будут $G'(x')$ (в системе K'), если в системе K решение суть $G(x)$. Тогда эти уравнения удовлетворяются в системе K также и функциями $G'(x)$. Таким образом, относительно системы K существуют отличные друг от друга решения $G(x)$ и $G'(x)$, несмотря на то, что на границе области оба решения совпадают, т.е. для общековариантных дифференциальных уравнений гравитационного поля последовательность событий может быть неоднозначной. Если мы потребуем, чтобы развитие событий в гравитационном поле полностью определялось устанавливаемыми законами, то необходимо ограничить выбор координатных систем таким образом, чтобы было невозможно ввести новую систему координат K' описанного выше вида без того, чтобы не нарушить введенного ограничения. Продолжение координатной системы внутри некоторой области Σ не может быть произвольным".

Для того чтобы понять вывод, который А.Эйнштейн сделал в конце приведенного выше текста, мы обратимся к электродинамике. Пусть в некоторой инерциальной системе (галилеевы координаты) решение уравнений имеет вид $F_{\mu\nu}(x)$ при токе $j^\mu(x)$. Если мы перейдем к произвольной системе координат, то в силу общей ковариантности решение $F'_{\mu\nu}(x')$ уравнений Максвелла в новых координатах будет соответствовать току $j'^\mu(x')$. Заметим, что $F'_{\mu\nu}(x)$ не будет удовлетворять уравнению Максвелла в старых координатах при токе $j'^\mu(x)$, поскольку уравнения Максвелла неформинвариантны при произвольных координатных преобразованиях. Уравнения Максвелла форминвариантны относительно лоренцевых преобразований, а поэтому в новых лоренцевых координатах x' решение $F'_{\mu\nu}(x')$ соответствует току $j'^\mu(x')$, а следовательно, в старых координатах решение $F'_{\mu\nu}(x)$ соответствует току $j'^\mu(x)$. Мы видим, что в электродинамике поле $F'_{\mu\nu}(x)$ является решением уравнения Максвелла в старых координатах x , но не при токе $j^\mu(x)$, а при

токе $j'^{\mu}(x)$. В ОТО в силу форминвариантности уравнений Гильберта — Эйнштейна относительно произвольных координатных преобразований $G(x)$ и $G'(x)$ являются решениями при одном и том же тензоре вещества $T_{\mu\nu}(x)$. Делая свой вывод, А.Эйнштейн, по-видимому, интуитивно представлял гравитацию как поле в пространстве Минковского. Однако, поскольку он сохранил только риманово пространство, эта мысль не получила развития в его работах.

В ОТО гравитационное поле есть тензор Римана. Геометрия риманова пространства описывается решением уравнений Гильберта — Эйнштейна в произвольных координатах. При выключении гравитационного поля тензор Римана обращается в нуль, а геометрия пространства-времени становится псевдоевклидовой, однако в какой системе координат (инерциальной или ускоренной) мы при этом оказались, сказать нельзя. Но как же тогда выполнить принцип соответствия? В РТГ гравитационные уравнения (76) и (77) общековариантны, но неформинвариантны относительно произвольных преобразований. Они форминвариантны относительно лоренцевых преобразований. Но это означает, что если в лоренцевых координатах имеет место решение $G(x)$ при тензоре вещества $T_{\mu\nu}(x)$, то в новых лоренцевых координатах x' имеет место решение $G'(x')$ при тензоре вещества $T'_{\mu\nu}(x')$, а следовательно, в координатах x решение $G'(x)$ возможно только при тензоре вещества $T'_{\mu\nu}(x)$.

Таким образом, в РТГ реализуется все то, о чем писал А.Эйнштейн, но при этом не требуется отказываться от общей ковариантности теории. Но получено все это, исходя из представления гравитационного поля как физического поля со спинами 2 и 0 в пространстве Минковского. Риманово пространство возникает как эффективное пространство, обязанное наличию гравитационного поля. В РТГ устанавливается взаимно однозначное соответствие между римановой метрикой и метрикой Минковского, что и позволяет при вычислении гравитационного эффекта сравнить движение под действием гравитационного поля с движением при его отсутствии. При выключении гравитационного поля в РТГ обращается в нуль тензор Римана и одновременно совершается переход от римановой метрики к метрике Минковского, ранее выбранной при постановке физической задачи. Это и обеспечивает в РТГ выполнимость принципа соответствия.

Для вычисления гравитационного эффекта необходимо сравнить движение в римановом пространстве с движением при отсутствии гравитационного поля. Именно так определяется гравитационный эффект. Если соотносить совокупность решений для $g_{\mu\nu}$ к какой-то одной инерциальной системе координат, то совершенно очевидно, что мы получим множество различных значений для гравитационного эффекта. Какое из них выбрать? Поскольку в уравнениях Гильберта — Эйнштейна отсутствует метрика пространства Минковского, то невозможно соблюсти принцип соответствия, поскольку нельзя определить, в какой системе координат мы находимся (инерциальной или

неинерциальной) при выключении гравитационного поля. Таким образом, в ОТО нельзя однозначно найти постньютоновское приближение, а следовательно, нельзя и описать известные гравитационные эффекты в Солнечной системе. В ОТО это достигается только путем дополнительных предположений, выходящих за пределы этой теории.

В качестве иллюстрации неоднозначности предсказаний ОТО рассмотрим задачу об определении времени запаздывания радиосигнала из-за действия Солнца, при распространении его от Земли до Меркурия и обратно. Для сферически-симметричного статического тела в одной и той же координатной системе уравнения Гильберта — Эйнштейна имеют множество решений, и среди них шварцшильдовское

$$ds_1^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (161)$$

и гармоническое

$$ds_2^2 = \frac{r-M}{r+M} dt^2 - \frac{r+M}{r-M} dr^2 - (r+M)^2 d\Omega^2. \quad (162)$$

Пусть r_e и r_p — расстояния от точек испускания и отражения радиосигнала до центра источника гравитационного поля (Солнце); R — расстояние между точками e и p . Для определения гравитационного эффекта необходимо сравнить движение в римановом пространстве с движением по прямой линии в инерциальной системе. Таким путем мы получим время запаздывания радиосигнала для решения Шварцшильда

$$\Delta t_1 = 2GM \ln \frac{r_e + r_p + R}{r_e + r_p - R} - 2GM \quad (163)$$

и для гармонического решения

$$\Delta t_2 = 2GM \ln \frac{r_e + r_p + R}{r_e + r_p - R}. \quad (164)$$

Они отличаются на величину $2GM$, равную для Солнца десяти микросекундам. Какое из выражений (163) и (164) необходимо взять, чтобы найти время запаздывания радиосигнала, идущего от Земли до Меркурия и обратно? На этот вопрос ОТО в принципе не дает ответа, поскольку в уравнениях Гильберта — Эйнштейна не входит метрика пространства Минковского. В ОТО гравитационное поле характеризуется не одним метрическим тензором, а классом эквивалентных диффеоморфных метрик $G(x), G'(x), \dots$, получаемых с помощью преобразования координат. С этой точки зрения в пространстве Минковского метрики, получаемые путем преобразования координат из выражения (α) (см. введение) также образуют класс эквивалентности, однако

физически они различны, поскольку одни соответствуют инерциальным системам координат, другие — ускоренным. В ОТО нельзя определить, к какой метрике пространства Минковского необходимо отнести риманову метрику из класса эквивалентности, чтобы определить гравитационный эффект. Таким образом, не удастся соблюсти очевидный принцип — принцип соответствия.

Согласно РТГ, время запаздывания радиосигнала определяется однозначно и приводит к выражению (164), если в инерциальной системе используются галилеевы координаты. В РТГ можно было бы взять и решение Шварцшильда, однако в этом случае, согласно уравнениям (76) и (77) РТГ, метрика пространства Минковского была бы другой, она несколько изменится. Благодаря такому изменению метрики пространства Минковского и решение Шварцшильда (161) приведет к тому, что эффект запаздывания радиосигнала из-за действия Солнца будет определяться выражением (164), т.е. останется прежним.

В заключение данного раздела отметим, что постньютоновское приближение (151) удовлетворяет принципу причинности (90).

9. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЫВОODY РТГ

Из результатов, полученных в предыдущем разделе, следует, что РТГ объясняет все известные гравитационные эксперименты в Солнечной системе. Заметим, что все эффекты в Солнечной системе вычисляются в инерциальной системе координат, к которой и отнесены все наблюдательные данные. В силу того, что источником гравитационного поля является сохраняющаяся суммарная плотность тензора вещества и гравитационного поля, инертная масса статического тела точно равна его активной гравитационной массе. Это равенство не предполагает даже локальной тождественности сил инерции и гравитации.

Важный физический вывод можно сделать и относительно развития однородной и изотропной Вселенной. На основании уравнений (76) и (77) для однородной и изотропной Вселенной можно получить следующие уравнения:

$$\left(\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho(\tau) - \frac{1}{6}m^2 \left(1 - \frac{3}{2a^4 R^2} + \frac{1}{2R^6}\right), \quad (165)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 R}{d\tau^2} = -\frac{4\pi}{3}\rho(\tau) - 4\pi p(\tau) - \frac{1}{6}m^2 \left(1 - \frac{1}{R^6}\right). \quad (166)$$

Интервал эффективного риманова пространства имеет вид

$$ds^2 = d\tau^2 - a^4 R^2(\tau)(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (167)$$

здесь a — постоянная интегрирования уравнений (77). В силу условия причинности (90) имеем

$$R(\tau) \leq a . \quad (168)$$

Постоянная $a > 1$. Легко установить следующее неравенство:

$$\left(1 - \frac{3}{2a^4 R^2} + \frac{1}{2R^6}\right) > \frac{1}{R^6} (R^2 - 1)^2 \left(R^2 + \frac{1}{2}\right) . \quad (169)$$

Учитывая (169), на основании уравнения (165) можно установить, что развитие однородной и изотропной Вселенной идет циклически от некоторого минимального значения $R_{\min}$, отличного от нуля, до некоторого максимального значения $R_{\max}$ и т.д. Для выполнения условия причинности (168) естественно выбрать

$$a = R_{\max} . \quad (170)$$

Введем функцию, равную

$$H(\tau) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{d\tau} . \quad (171)$$

Тогда для современного момента времени τ_p , восстанавливая явно зависимость от постоянной тяготения Ньютона G и скорости света c , на основании уравнений (165) получим

$$\rho(\tau_p) = \rho_c + \rho_g , \quad (172)$$

где критическая плотность ρ_c определяется постоянной Хаббла $H(\tau_p)$ и равна

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} , \quad (173)$$

а плотность ρ_g , определяемая массой гравитона, равна

$$\rho_g = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^2 . \quad (174)$$

Однородная и изотропная Вселенная бесконечна, её трехмерная геометрия евклидова, и она развивается циклически от некоторой максимальной плотности $\rho_{\max}$ до минимальной $\rho_{\min}$, равной

$$\rho_{\min} = \rho_g , \quad (175)$$

и так далее.

Космологическая постоянная Λ выражается через массу гравитона:

$$\Lambda = \frac{m^2}{2} . \quad (176)$$

Из формул (172) и (174) очевидно, что, если, например, масса гравитона меньше или равна 10^{-66}Г , что соответствует космологической постоянной $\Lambda \leq 4,5 \cdot 10^{-58}\text{см}^{-2}$, то плотность вещества во Вселенной в настоящее время должна быть близка к критической плотности ρ_c . В том случае, если масса гравитона равна 10^{-65}Г , что соответствует космологической постоянной $\Lambda = 4,5 \cdot 10^{-56}\text{см}^{-2}$, то плотность ρ_g дает значительный вклад в плотность вещества во Вселенной ρ , равный

$$\rho_g \simeq 2,8 \cdot 10^{-29}\text{Г/см}^3. \quad (177)$$

В любом случае имеет место неравенство

$$\rho \geq \rho_c. \quad (178)$$

Так как наблюдаемая плотность вещества во Вселенной значительно меньше критической плотности ρ_c , то РТГ предсказывает существование во Вселенной большой “скрытой” массы вещества. Согласно РТГ, параметр замедления равен

$$q(\tau_p) = \frac{1}{2} \left[1 + 3 \frac{\rho_g}{\rho} \right].$$

Отсюда видно, что ρ_g , а следовательно, и массу гравитона m можно выразить через измеряемые величины — параметр замедления q и постоянную Хаббла H . Следует заметить, что если параметр замедления окажется больше, чем $1/2$, то масса гравитона, согласно теории, будет отлична от нуля. При этом Вселенная не будет замкнутой, как это имело бы место в ОТО, а будет “плоской”.

Следует особо отметить, что, в отличие от ОТО в рассмотренной выше модели Вселенной Фридмана отсутствуют известные проблемы: сингулярности, причинности, евклидовости, плоскостности и энтропии. Вид Вселенной Фридмана не зависит от отношения современной плотности вещества к критической плотности, определяемой постоянной Хаббла.

Для изотропных или времениподобных векторов U^ν

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0,$$

и для метрики однородной и изотропной Вселенной из уравнений (92) найдем

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu < 0, \text{ при } R = R_{\min}$$

и

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu > 0, \text{ при } R = R_{\max}.$$

Отсюда видно, что условия теорем Пенроуза и Хокинга, относящихся к проблеме сингулярности, в нашей теории не выполняются.

Таким образом, в отличие от ОТО, однородная и изотропная Вселенная в РТГ может быть только “плоской”, и она не имеет сингулярности. Другим важным следствием РТГ является существенное изменение характера коллапса. Оказывается, что при коллапсе сферически-симметричного тела произвольной большой массы процесс сжатия в области, близкой к сфере Шварцшильда, останавливается и сменяется последующим расширением. Такой процесс остановки сжатия происходит из-за наличия в уравнениях (76) массового члена с метрическим тензором пространства Минковского. Именно этот член останавливает также процесс сжатия и в однородной изотропной Вселенной. Таким образом, согласно РТГ существование в природе “черных дыр” (объектов, не имеющих материальных границ и “отрезанных” от внешнего мира) полностью исключается. В работе [16] показано, что для сферически-симметричного статического тела метрические коэффициенты риманова пространства имеют в области, близкой к сфере Шварцшильда, следующий вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= U(Z)dt^2 - V(Z)dZ^2 - Z^2d\Omega^2, \\ V(Z) &= \frac{Z}{Z - Z_g}, \quad U(Z) = (1 + 2mM)\frac{Z - Z_g}{Z} + qm^2M^2, \quad q > 0. \end{aligned} \quad (179)$$

Особенность в функции V возникла в точке Z_g , равной

$$Z_g = 2M + \nu m^2 M^3 \ln \frac{1}{mM}, \quad \nu > 0. \quad (180)$$

Сфера радиуса Z_g является сингулярной, причем эту особенность нельзя устранить выбором системы координат. Из выражений (179) и (180) видно, что в области, близкой к сфере Шварцшильда, влияние массы гравитона m велико, она принципиально изменяет характер решения в этой области, а поэтому пренебрегать ею уже нельзя. Если перейдем в синхронную систему свободно падающих пробных частиц, имеющих на бесконечности нулевую скорость, с помощью преобразований

$$\begin{aligned} \tau &= t + \int dZ \left[\frac{V(1 - U)}{U} \right]^{1/2}, \\ R &= t + \int dZ \left[\frac{V}{U(1 - U)} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

то получим следующее выражение для интервала:

$$ds^2 = d\tau^2 - (1 - U)dR^2 - Z^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2).$$

Радиальная скорость частицы, падающей вдоль радиуса, равна

$$\frac{dZ}{d\tau} = -\sqrt{\frac{1 - U}{UV}}.$$

На основании (179) в области, близкой к сфере Шварцшильда, имеем

$$\frac{dZ}{d\tau} = -\frac{1}{\sqrt{q}mM} \sqrt{\frac{Z - Z_g}{Z}}.$$

Отсюда очевидно, что точка $Z = Z_g$ является точкой поворота для радиального движения частиц. Таким образом, наличие массы гравитона m , независимо от ее значения, приводит к явлению отталкивания частиц вещества [17] от сферы, близкой к сфере Шварцшильда. Поскольку решение внутри тела необходимо сшить с внешним решением, то сфера с радиусом $Z = Z_g$ не может находиться вне вещества.

На больших расстояниях r от тела метрические коэффициенты имеют вид

$$U(r) = 1 - \frac{2M}{r}e^{-mr}, \quad V(r) = 1 + \frac{2M}{r}e^{-mr}, \quad Z(r) = r \left(1 + \frac{M}{r}e^{-mr} \right).$$

Остановимся на проблеме излучения слабых гравитационных волн при наличии массы гравитона. Давно хорошо известно, что в линейной тензорной теории введение массы гравитона всегда сопровождается “духами”. Однако в работе [18] показано, что интенсивность гравитационного излучения массивных гравитонов в нелинейной теории является положительно определенной величиной, равной

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_{\min}}^{\infty} d\omega \omega^2 q \{ |T_2^1|^2 + \frac{1}{4} |T_1^1 - T_2^2|^2 + \frac{m^2}{\omega^2} (|T_3^1|^2 + |T_3^2|^2) + \frac{3m^4}{4\omega^4} |T_3^3|^2 \}, \quad (181)$$

здесь $q = \left(1 - \frac{m^2}{\omega^2} \right)^{1/2}$.

В РТГ, так же, как и в ОТО, вне вещества плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в римановом пространстве равна нулю:

$$T_g^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_g}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (182)$$

Но это означает, что поток энергии гравитационного поля в теории гравитации не определяется компонентами плотности тензора T_g^{0i} , вычисленными на решениях уравнений (182), поскольку они равны нулю. Задача определения потока энергии в теории гравитации, в отличие от других теорий, требует иного подхода. Автор работы [18] ищет решение в форме

$$\tilde{\Phi}^{\mu\nu} = \chi^{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu}, \quad (183)$$

где величины $\chi^{\mu\nu}$ и $\psi^{\mu\nu}$ одного порядка малости, причем $\psi^{\mu\nu}$ описывает расходящиеся волны, а $\chi^{\mu\nu}$ характеризует фон. Перенос энергии осуществляется только расходящимися волнами. Автор работы [18] показывает, что фактически поток гравитационной энергии определяется величиной $T_g^{0i}(\psi)$, вычисленной не на самих решениях уравнений (182), а только на той части решений, которая описывает расходящиеся волны $\psi^{\mu\nu}$. При этом он учитывает, что гравитоны распространяются не в пространстве Минковского, как это всегда имеет место в линейной теории, а в эффективном римановом пространстве. Поэтому в линейном приближении выполняется равенство

$$\gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \cdot \frac{dx^\nu}{ds} - 1 = \frac{d\sigma^2 - ds^2}{ds^2} \simeq -\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \Phi^{\mu\nu} + \Phi^{\mu\nu} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \cdot \frac{dx^\beta}{d\sigma} \gamma_{\mu\alpha} \gamma_{\nu\beta} .$$

Именно последовательный учет этого обстоятельства в процессе нахождения интенсивности и приводит автора [18] к положительно определенному потоку энергии, определяемому формулой (181). Результат работы [18] имеет принципиальное значение, поскольку он изменяет сложившиеся представления, а поэтому с необходимостью требует дальнейшего анализа.

Следует отметить, что система гравитационных уравнений (76) и (77) является гиперболической, причем принцип причинности и обеспечивает существование во всем пространстве пространственноподобной поверхности, которую каждая непространственноподобная кривая в римановом пространстве пересекает только один раз, т.е., иначе говоря, существует глобальная поверхность Коши, на которой и задаются для той или иной задачи начальные физические условия. Пенроузом и Хокингом [12] при определенных общих условиях доказаны теоремы о существовании сингулярности в ОТО. На основании уравнений (78a) вне вещества для изотропных векторов риманова пространства, в силу условий причинности (91a), имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \leq 0 . \quad (184)$$

В силу неравенства (184) условия вышеупомянутых теорем в РТГ не выполняются, а следовательно, и применять их нельзя.

В РТГ пространственноподобные события в отсутствие гравитационного поля никогда не могут стать под действием гравитационного поля времениподобными. На основании принципа причинности эффективное риманово пространство в РТГ будет обладать изотропной и времениподобной геодезической полнотой. Согласно РТГ, инерциальная система координат определяется по распределению вещества и гравитационного поля во Вселенной (принцип Маха).

В ОТО поля инерции и гравитации неразделимы. А.Эйнштейн об этом писал: “...не существует никакого реального разделения на инерцию и гравитацию, поскольку ответ на вопрос о том, находится ли тело в определен-

ный момент исключительно под действием инерции или под комбинированным воздействием инерции и гравитации, зависит от системы координат, т.е. от способа рассмотрения". Поля инерции удовлетворяют уравнениям Гильберта — Эйнштейна. В РТГ гравитационное поле и поля инерции, определяемые метрическим тензором пространства Минковского, разделены, они не имеют ничего общего. Они разной природы. Поля инерции не являются решениями уравнений (76) и (77) РТГ. В РТГ поля инерции задаются метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$, а гравитационное поле $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ определяется из уравнений гравитации (76) и (77).

На основании РТГ можно сделать следующий общий вывод.

Универсальные интегральные законы сохранения энергии-импульса и универсальные свойства материи, такие (например) как гравитационные взаимодействия, находят отражение в метрических свойствах пространства-времени. Если первые находят воплощение в псевдоевклидовой геометрии пространства-времени, то вторые находят отражение в эффективной римановой геометрии пространства-времени, возникшей из-за присутствия гравитационного поля в пространстве Минковского. В структуру эффективной геометрии можно отнести все, что имеет общий характер для всей материи. Но при этом пространство Минковского обязательно присутствует, что и приводит к интегральным законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения, а также обеспечивает соблюдение принципа соответствия при включении гравитационного поля.

Автор выражает благодарность А.М.Балдину, А.А.Власову, С.С.Герштейну, В.И.Денисову, Ю.М.Лоскутову, М.А.Мествиришвили, В.А.Петрову, Н.Е.Тюрину, А.А.Тяпкину, О.А.Хрусталеву за ценные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Установим соотношение

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}, \quad (A.1)$$

здесь

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right), \quad (A.2)$$

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \right), \quad (A.3)$$

звездочкой в верхней формуле обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. После дифференци-

рования получим

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^* L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\partial^* L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}. \quad (\text{A.5})$$

Подставим эти выражения в формулу (A.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right) &= \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \\ &- \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right) = \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \\ &- \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \right) \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right). \quad (\text{A.7})$$

Для этой цели запишем производную $g_{\alpha\beta,\sigma}$ в форме

$$g_{\alpha\beta,\sigma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega}, \quad (\text{A.8})$$

отсюда легко найти

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \cdot \delta_\sigma^\rho. \quad (\text{A.9})$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$\partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega}. \quad (\text{A.10})$$

С другой стороны, дифференцируя (A.8) по $\gamma_{\mu\nu}$, имеем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega}. \quad (\text{A.11})$$

Сравнивая (A.10) и (A.11), найдем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Учитывая это соотношение, в (A.6) получим

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \right) \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}. \quad (\text{A.13})$$

Подставляя (A.9) в (A.13), найдем

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \left[\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \right) \right] \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}, \quad (\text{A.14})$$

то есть

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}. \quad (\text{A.15})$$

Аналогично вычисляется

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\lambda\rho}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial g_{\alpha\beta}}. \quad (\text{A.16})$$

Используя (A.16), выражение (A.15) можно записать в виде

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^* L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\lambda\rho}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}. \quad (\text{A.17})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Плотность лагранжиана собственно гравитационного поля имеет вид

$$L_g = L_{g0} + L_{gm}, \quad (\text{B.1})$$

$$L_{g0} = -\frac{1}{16\pi} \tilde{g}^{\alpha\beta} (G_{\lambda\alpha}^\tau G_{\tau\beta}^\lambda - G_{\alpha\beta}^\tau G_{\tau\lambda}^\lambda), \quad (\text{B.2})$$

$$L_{gm} = -\frac{m^2}{16\pi} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \tilde{g}^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma} \right). \quad (\text{B.3})$$

Тензор третьего ранга $G_{\alpha\beta}^\tau$ равен

$$G_{\alpha\beta}^\tau = \frac{1}{2} g^{\tau\lambda} (D_\alpha g_{\beta\lambda} + D_\beta g_{\alpha\lambda} - D_\lambda g_{\alpha\beta}), \quad (\text{B.4})$$

он выражается через символы Кристоффеля риманова пространства и пространства Минковского:

$$G_{\alpha\beta}^\tau = \Gamma_{\alpha\beta}^\tau - \gamma_{\alpha\beta}^\tau. \quad (\text{B.5})$$

Вычислим вариационную производную от L_g по явно входящей метрике пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\frac{\delta^* L_{g0}}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} \right). \quad (\text{Б.6})$$

Для этой цели проведем некоторые подготовительные вычисления:

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta}^\nu + \gamma^{\lambda\nu} \gamma_{\alpha\beta}^\mu), \quad (\text{Б.7})$$

$$\frac{\partial G_{\alpha\lambda}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{\partial \gamma_{\alpha\lambda}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda\mu} \gamma_{\lambda\alpha}^\nu + \gamma^{\lambda\nu} \gamma_{\lambda\alpha}^\mu),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\alpha\beta}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} &= -\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \\ &= -\frac{1}{4}[\gamma^{\lambda\mu}(\delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\nu) + \gamma^{\lambda\nu}(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\sigma + \delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\mu) - \gamma^{\lambda\sigma}(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu)], \\ \frac{\partial G_{\alpha\lambda}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} &= -\frac{\partial \gamma_{\alpha\lambda}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu} \delta_\alpha^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi} \tilde{g}^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial G_{\alpha\lambda}^\tau}{\partial \gamma_{\mu\nu}} G_{\tau\beta}^\lambda + G_{\lambda\alpha}^\tau \frac{\partial G_{\tau\beta}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \frac{\partial G_{\alpha\beta}^\tau}{\partial \gamma_{\mu\nu}} G_{\tau\lambda}^\lambda - G_{\alpha\beta}^\tau \frac{\partial G_{\tau\lambda}^\lambda}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \right].$$

Используя в этом выражении формулы (Б.7), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} &= -\frac{1}{16\pi} \tilde{g}^{\alpha\beta} \left\{ G_{\lambda\alpha}^\tau \gamma^{\lambda\mu} \gamma_{\tau\beta}^\nu + G_{\lambda\alpha}^\tau \gamma^{\lambda\nu} \gamma_{\tau\beta}^\mu - \frac{1}{2} G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma^{\tau\mu} \gamma_{\alpha\beta}^\nu - \frac{1}{2} G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma^{\tau\nu} \gamma_{\alpha\beta}^\mu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} G_{\alpha\beta}^\tau \gamma^{\lambda\mu} \gamma_{\tau\lambda}^\nu - \frac{1}{2} G_{\alpha\beta}^\tau \gamma^{\lambda\nu} \gamma_{\tau\lambda}^\mu \right\} = \frac{1}{32\pi} B^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

С помощью производных (Б.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} &= \frac{1}{32\pi} A^{\sigma\mu\nu}, \quad A^{\sigma\mu\nu} = \gamma^{\tau\mu} (G_{\tau\beta}^\sigma \tilde{g}^{\nu\beta} + G_{\tau\beta}^\nu \tilde{g}^{\sigma\beta} - G_{\tau\lambda}^\lambda \tilde{g}^{\sigma\nu}) + \\ &+ \gamma^{\tau\nu} (G_{\tau\beta}^\sigma \tilde{g}^{\mu\beta} + G_{\tau\beta}^\mu \tilde{g}^{\sigma\beta} - G_{\tau\lambda}^\lambda \tilde{g}^{\sigma\mu}) + \gamma^{\tau\sigma} (G_{\tau\lambda}^\lambda \tilde{g}^{\mu\nu} - G_{\tau\beta}^\mu \tilde{g}^{\nu\beta} - G_{\tau\beta}^\nu \tilde{g}^{\mu\beta}) - \\ &\quad - \gamma^{\mu\nu} G_{\alpha\beta}^\sigma \tilde{g}^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

плотность тензора $A^{\sigma\mu\nu}$ симметрична по индексам μ и ν . Обычная производная от плотности тензора может быть представлена в форме

$$\partial_\sigma A^{\sigma\mu\nu} = D_\sigma A^{\sigma\mu\nu} - \gamma_{\sigma\rho}^\mu A^{\sigma\rho\nu} - \gamma_{\sigma\rho}^\nu A^{\sigma\mu\rho}.$$

Подставляя в (Б.6) выражения (Б.9) и (Б.10), найдем

$$\frac{\delta^* L_{g0}}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi} B^{\mu\nu} - \frac{1}{32\pi} D_\sigma A^{\sigma\mu\nu} + \frac{1}{32\pi} \gamma_{\sigma\rho}^\mu A^{\sigma\rho\nu} + \frac{1}{32\pi} \gamma_{\sigma\rho}^\nu A^{\sigma\mu\rho}. \quad (\text{Б.11})$$

Запишем плотность тензора $A^{\sigma\rho\nu}$ в форме

$$\begin{aligned} A^{\sigma\rho\nu} = & (G_{\tau\beta}^\sigma \gamma^{\tau\rho} \tilde{g}^{\nu\beta} - G_{\tau\beta}^\rho \gamma^{\tau\sigma} \tilde{g}^{\nu\beta}) + (G_{\tau\beta}^\nu \gamma^{\tau\rho} \tilde{g}^{\sigma\beta} - G_{\tau\beta}^\sigma \gamma^{\tau\sigma} \tilde{g}^{\rho\beta}) - \\ & - (G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma^{\tau\rho} \tilde{g}^{\sigma\nu} - G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma^{\tau\sigma} \tilde{g}^{\rho\nu}) + G_{\tau\beta}^\sigma \gamma^{\tau\nu} \tilde{g}^{\rho\beta} + G_{\tau\beta}^\rho \gamma^{\tau\nu} \tilde{g}^{\sigma\beta} - \\ & - G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma^{\tau\nu} \tilde{g}^{\sigma\rho} - G_{\alpha\beta}^\sigma \gamma^{\rho\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

в скобках образованы антисимметричные члены по индексам σ и ρ . Такая запись облегчает нахождение выражения для величины $\gamma_{\sigma\rho}^\mu A^{\sigma\rho\nu}$, поскольку при этом автоматически исчезают члены, антисимметричные по индексам σ и ρ :

$$\gamma_{\sigma\rho}^\mu A^{\sigma\rho\nu} = 2G_{\tau\beta}^\sigma \gamma_{\sigma\rho}^\mu \gamma^{\tau\nu} \tilde{g}^{\rho\beta} - G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma_{\sigma\rho}^\mu \gamma^{\tau\nu} \tilde{g}^{\sigma\rho} - G_{\alpha\beta}^\sigma \gamma_{\sigma\rho}^\mu \gamma^{\nu\rho} \tilde{g}^{\alpha\beta}, \quad (\text{Б.12})$$

аналогично представляем $A^{\sigma\mu\rho}$ в виде

$$\begin{aligned} A^{\sigma\mu\rho} = & (G_{\tau\beta}^\sigma \gamma^{\tau\rho} \tilde{g}^{\mu\beta} - G_{\tau\beta}^\rho \gamma^{\tau\sigma} \tilde{g}^{\mu\beta}) + (G_{\tau\beta}^\mu \gamma^{\tau\rho} \tilde{g}^{\sigma\beta} - G_{\tau\beta}^\sigma \gamma^{\tau\sigma} \tilde{g}^{\rho\beta}) + \\ & + (G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma^{\tau\sigma} \tilde{g}^{\mu\rho} - G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma^{\tau\rho} \tilde{g}^{\sigma\mu}) + G_{\tau\beta}^\sigma \gamma^{\tau\mu} \tilde{g}^{\rho\beta} + G_{\tau\beta}^\rho \gamma^{\tau\mu} \tilde{g}^{\sigma\beta} - \\ & - G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma^{\tau\mu} \tilde{g}^{\sigma\rho} - G_{\alpha\beta}^\sigma \gamma^{\mu\rho} \tilde{g}^{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

где в скобках опять образованы антисимметричные члены по индексам σ и ρ . Отсюда получаем

$$\gamma_{\sigma\rho}^\nu A^{\sigma\mu\rho} = 2G_{\tau\beta}^\sigma \gamma_{\sigma\rho}^\nu \gamma^{\tau\mu} \tilde{g}^{\rho\beta} - G_{\tau\lambda}^\lambda \gamma_{\sigma\rho}^\nu \gamma^{\tau\mu} \tilde{g}^{\sigma\rho} - G_{\alpha\beta}^\sigma \gamma_{\sigma\rho}^\nu \gamma^{\mu\rho} \tilde{g}^{\alpha\beta}. \quad (\text{Б.13})$$

Суммируя (Б.12) и (Б.13), легко убедиться в следующем равенстве:

$$\gamma_{\sigma\rho}^\mu A^{\sigma\rho\nu} + \gamma_{\sigma\rho}^\nu A^{\sigma\mu\rho} = -B^{\mu\nu}. \quad (\text{Б.14})$$

С учетом этого равенства выражение (Б.11) запишется в форме

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{32\pi} D_\sigma A^{\sigma\mu\nu}. \quad (\text{Б.15})$$

Учитывая равенства

$$G_{\tau\lambda}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}D_\tau g_{\lambda\rho}, \quad D_\tau\sqrt{-g} = \sqrt{-g}G_{\tau\lambda}^\lambda,$$

найдем

$$\begin{aligned} G_{\tau\beta}^\sigma \tilde{g}^{\nu\beta} + G_{\tau\beta}^\nu \tilde{g}^{\sigma\beta} - G_{\tau\lambda}^\lambda \tilde{g}^{\sigma\nu} &= -D_\tau \tilde{g}^{\nu\sigma}, \\ G_{\tau\beta}^\sigma \tilde{g}^{\mu\beta} + G_{\tau\beta}^\mu \tilde{g}^{\sigma\beta} - G_{\tau\lambda}^\lambda \tilde{g}^{\sigma\mu} &= -D_\tau \tilde{g}^{\mu\sigma}, \\ G_{\tau\beta}^\nu \tilde{g}^{\mu\beta} + G_{\tau\beta}^\mu \tilde{g}^{\nu\beta} - G_{\tau\lambda}^\lambda \tilde{g}^{\mu\nu} &= -D_\tau \tilde{g}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

Подставляя эти выражения в (Б.10), получаем

$$A^{\sigma\mu\nu} = \gamma^{\tau\sigma} D_\tau \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu} D_\tau \tilde{g}^{\tau\sigma} - \gamma^{\tau\mu} D_\tau \tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\tau\nu} D_\tau \tilde{g}^{\mu\sigma}.$$

Используя это выражение в (Б.15), найдем

$$\frac{\delta^* L_{g0}}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi} J^{\mu\nu}, \quad (\text{Б.17})$$

где $J^{\mu\nu} = -D_\sigma D_\tau (\gamma^{\tau\sigma} \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu} \tilde{g}^{\tau\sigma} - \gamma^{\tau\mu} \tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\tau\nu} \tilde{g}^{\mu\sigma})$.

На основании (Б.3) имеем

$$\frac{\delta^* L_{gm}}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{m^2}{32\pi} (\tilde{g}^{\mu\nu} - \tilde{\gamma}^{\mu\nu}) = -\frac{m^2}{32\pi} \tilde{\Phi}^{\mu\nu}. \quad (\text{Б.18})$$

Таким образом, учитывая (Б.1) и используя (Б.17) и (Б.18), находим

$$\frac{\delta^* L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi} (J^{\mu\nu} - m^2 \tilde{\Phi}^{\mu\nu}), \quad (\text{Б.19})$$

а следовательно,

$$-2 \frac{\delta^* L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} (-J^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\Phi}^{\mu\nu}). \quad (\text{Б.20})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Для любой заданной плотности лагранжиана L , при бесконечно малом изменении координат, вариация действия

$$S = \int L d^4x$$

будет равна нулю. Вычислим вариацию действия от плотности лагранжиана L_M :

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A) d^4x$$

вещества и установим сильное тождество. При преобразовании координат

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \quad (B.1)$$

где $\xi^{\mu}(x)$ — бесконечно малый четырехвектор смещения, вариация действия равна

$$\delta_c S_M = \int d^4x \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} \delta_L \Phi_A + \text{div} \right) = 0, \quad (B.2)$$

в этом выражении div обозначает дивергенциальные члены, которые несущественны для наших целей.

Эйлерова вариация определена как обычно:

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \Phi)} + \partial_{\mu} \partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \Phi)}.$$

Вариации Ли $\delta_L \tilde{g}^{\mu\nu}$, $\delta_L \Phi_A$ при изменении координат легко вычисляются, если использовать закон преобразования величин $g^{\mu\nu}$, Φ_A :

$$\delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{g}^{\lambda\mu} D_{\lambda} \xi^{\nu} + \tilde{g}^{\lambda\nu} D_{\lambda} \xi^{\mu} - D_{\lambda} (\xi^{\lambda} \tilde{g}^{\mu\nu}), \quad (B.3)$$

$$\delta_L \Phi_A = -\xi^{\lambda} D_{\lambda} \Phi_A + F_{A;\sigma}^{B;\lambda} \Phi_B D_{\lambda} \xi^{\sigma},$$

D_{λ} — ковариантные производные в пространстве Минковского. Подставляя эти выражения в (B.2) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \delta S_M = \int d^4x \left\{ -\xi^{\lambda} \left[D_{\alpha} \left(2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \right) - D_{\lambda} \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \tilde{g}^{\alpha\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + D_{\sigma} \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F_{A;\lambda}^{B;\sigma} \Phi_B \right) + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_{\lambda} \Phi_A \right] + \text{div} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (B.4)$$

В силу произвольности вектора ξ^{λ} из этого равенства находим сильное тождество, справедливое независимо от выполнения уравнений движения для полей. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} D_{\alpha} \left(2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \right) - D_{\lambda} \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \tilde{g}^{\alpha\beta} = \\ = -D_{\sigma} \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F_{A;\lambda}^{B;\sigma} \Phi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_{\lambda} \Phi_A. \end{aligned} \quad (B.5)$$

Введем обозначения

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}, \quad T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu},$$

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}, \quad \tilde{T}^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} = \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad \tilde{T} = \tilde{T}^{\alpha\beta} \tilde{g}_{\alpha\beta}. \quad (B.6)$$

Учитывая эти обозначения, левую часть тождества (B.5) можно записать в виде

$$D_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} D_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta}.$$

Правая часть этого равенства легко приводится к форме

$$\partial_\alpha(\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\lambda\nu} \nabla_\alpha \left(\tilde{T}^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{T} \right). \quad (B.7)$$

Здесь ∇_α — ковариантная производная в римановом пространстве. Запишем теперь выражение под знаком производной через плотность тензора $T^{\alpha\nu}$. Для этой цели воспользуемся ф-лой (A.16):

$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad (B.8)$$

где

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} g^{\alpha\beta}. \quad (B.9)$$

Используя соотношения

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\sigma} = \delta_\sigma^\alpha,$$

найдем

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} (g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}). \quad (B.10)$$

По правилу дифференцирования определителей находим

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}, \quad (B.11)$$

откуда имеем

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}. \quad (B.12)$$

Подставляя выражения (B.10) и (B.12) в (B.9), получим

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} [g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}]. \quad (B.13)$$

Используя это соотношение в (B.8), находим

$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - \frac{1}{2} \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right). \quad (B.14)$$

Учитывая обозначения (B.6), это выражение можно записать в виде

$$\sqrt{-g}T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{T}. \quad (B.15)$$

На основании этого равенства сильное тождество (B.5) с учетом (B.7) принимает вид

$$g_{\lambda\nu}\nabla_\alpha T^{\alpha\nu} = -D_\sigma \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F_{A;\lambda}^{B;\sigma} \Phi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A,$$

или

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\lambda = -D_\sigma \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F_{A;\lambda}^{B;\sigma} \Phi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A. \quad (B.16)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Тензор кривизны второго ранга $R_{\mu\nu}$ можно записать в форме

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}[\tilde{g}^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\kappa\rho})D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\kappa\rho} - \\ & - \tilde{g}_{\nu\rho}D_\kappa D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho} - \tilde{g}_{\mu\kappa}D_\nu D_\rho \tilde{g}^{\kappa\rho}] + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\omega}\tilde{g}_{\rho\tau}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\omega\tau} + \\ & + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\omega}\tilde{g}_{\rho\tau}D_\nu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\omega\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\omega}\tilde{g}_{\nu\rho}D_\tau \tilde{g}^{\omega\kappa}D_\kappa \tilde{g}^{\rho\tau} - \\ & - \frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu \tilde{g}^{\omega\tau} - \\ & - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\rho\tau}(\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\nu\omega} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\kappa\omega})D_\alpha \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta \tilde{g}^{\omega\tau}. \end{aligned} \quad (Г.1)$$

Поднимая индексы путем умножения на $g^{\epsilon\mu}g^{\lambda\nu}$ и учитывая уравнение

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \quad (Г.2)$$

получим

$$\begin{aligned} -gR^{\epsilon\lambda} = & \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{4}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\kappa\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\kappa\rho} + \\ & + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\epsilon\mu}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\beta}D_\kappa \tilde{g}^{\lambda\tau} + \\ & + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\lambda\nu}D_\nu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\epsilon\tau} - \frac{1}{2}D_\tau \tilde{g}^{\epsilon\kappa}D_\kappa \tilde{g}^{\lambda\tau} - \\ & - \frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})\tilde{g}^{\epsilon\mu}\tilde{g}^{\lambda\nu}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu \tilde{g}^{\omega\tau} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\rho}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\tau}+\frac{1}{4}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\kappa\omega}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta\tilde{g}^{\omega\tau}. \quad (\Gamma.3)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} -gR = & \frac{1}{2}g_{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda} - g_{\kappa\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\kappa\rho} + \frac{1}{2}g_{\rho\tau}D_\mu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa\tilde{g}^{\mu\tau} + \\ & + \frac{1}{2}g_{\rho\tau}D_\epsilon\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa\tilde{g}^{\epsilon\tau} - \frac{1}{2}g_{\epsilon\lambda}D_\tau\tilde{g}^{\epsilon\kappa}D_\kappa\tilde{g}^{\lambda\tau} - \\ & - \frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})\sqrt{-g}\tilde{g}^{\mu\nu}D_\mu\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu\tilde{g}^{\omega\tau} - \\ & - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\alpha\beta}g_{\epsilon\lambda}D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\tau} + \tilde{g}_{\rho\tau}g_{\kappa\omega}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta\tilde{g}^{\omega\tau}. \end{aligned} \quad (\Gamma.4)$$

С помощью выражений (Г.3) и (Г.4) найдем

$$\begin{aligned} -g(R^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{2}g^{\epsilon\lambda}R) = & -\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\kappa} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\kappa}\tilde{g}_{\tau\sigma})\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\sigma\tau}D_\beta\tilde{g}^{\nu\kappa} - \\ & - \frac{1}{4}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\kappa} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\kappa}\tilde{g}_{\tau\sigma})D_\alpha\tilde{g}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\nu\kappa} + \\ & + \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\sigma\tau}D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\sigma} - \tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau} - \\ & - \tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\tau} + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau} + \\ & + D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\alpha} - \tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\}. \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

Следует особо подчеркнуть, что при нахождении выражения (Г.5) мы использовали уравнение (Г.2). Подставляя (Г.5) в уравнение (76) и записывая полученное уравнение в форме (93), найдем выражения для величины $-16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda}$:

$$\begin{aligned} -16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda} = & \frac{1}{2}(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta})(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu})D_\alpha\tilde{\Phi}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu} + \\ & + \tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma} - \tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau} - \tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau} + \\ & + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\sigma\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau} + D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\alpha} - \tilde{\Phi}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} - \\ & - m^2(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\epsilon\lambda} - \sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda} + \tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов А.А., Логунов А.А., Мествиришвили М.А. — ТМФ, 1984, т.61, No.3, с. 323-326.
Логунов А.А., Мествиришвили М.А. ТМФ, 1984, т.61, No.3, с. 327-345.
Logunov A.A., Mestvirishvili M.A. — The Relativistic Theory of Gravitation. М.: Mir, 1989;
Логунов А.А., Мествиришвили М.А. — Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989;
Логунов А.А. — ТМФ, 1994, т.101, No.1, с. 3-27.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Теория поля. М.: Наука, 1973.
3. Мандельштам Л.И. — Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.
4. Эйнштейн А. — Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965, т.1, с.22.
Паули В. — Теория относительности. М.: Гостехиздат, 1947.
Мёллер К. — Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975.
Bohm D. — The Special Theory of Relativity. W.Y.Benjamin, inc., 1965.
5. Логунов А.А. — Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.
6. Эйнштейн А. — Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965, т.1, с.21.
7. Логунов А.А., Лоскутов Ю.М. — ДАН, 1989, т.305, No.4, с.848-851.
8. Rozen N. — Phys.Rev. 1940, v. 57, p.147.
9. Синг Дж. — Общая теория относительности. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
10. Мах Э. — Механика. Историко-критический очерк ее развития. (Глава 2. Развитие принципов динамики). В сб.: А.Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979.
11. Poincare H. — Bulletin des Sciences Mathematiques, 1904, v.28, ser.2., p.302-328.
12. Hawking S.W., Penrose R. — The singularities of gravitational collapse and cosmology. Phys.Rev. London, 1970, A314, p. 529.
Хокинг С., Эллис Дж. — Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
13. Фок В.А. — ЖЭТФ, 1939, т.9, No.4, с.375.
14. Фок В.А. — Теория пространства, времени и тяготения. М.:Гостехиздат, 1961.
15. Логунов А.А., Лоскутов Ю.М. — ТМФ, 1988, т.76, No.2, с.163-168.
16. Лоскутов Ю.М. — ТМФ, 1990, т.82, No.2, с.304-312.
17. Власов А.А., Логунов А.А. — ТМФ, 1989, т.78, No.3, с.323-329.
18. Лоскутов Ю.М. — Вестник Московского университета, 1991, сер.физ.астрон., т.32, No.4, с.49.
Loskutov Yu.M. — Proc. of the VI-th Marcel Grossman meeting on Gen.Rel.Part B. Kyoto, Japan, 1991, p. 1658-1660.

БОЗОНИЗОВАННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ В ВЫСШИХ ПОРЯДКАХ КИРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

А.А.Бельков, А.В.Ланев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Подробно рассмотрено получение эффективных мезонных лагранжианов в высших порядках кирального разложения из бозонизации четырехкваркового взаимодействия расширенной модели Намбу–Иона–Лазинио (НИЛ), трактуемой как локальное приближение низкоэнергетической КХД. Приведены и систематизированы результаты вычислений коэффициентов разложения ядра теплопроводности для кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ до седьмого порядка включительно. Полученные результаты используются для фиксации структурных коэффициентов эффективных киральных лагранжианов в p^4 - и p^6 -порядках импульсного разложения. Обсуждаются различные аспекты применения бозонизованных лагранжианов к описанию низкоэнергетических мезонных процессов: редукция векторных, аксиально-векторных и скалярных резонансов, регуляризация диаграмм с мезонными петлями, зависимость феноменологических структурных коэффициентов от схемы перенормировки и параметров регуляризации. Рассматриваются также вопросы, связанные с физическим обоснованием модели НИЛ как низкоэнергетического предела КХД. В этом контексте обсуждаются нелокальные поправки к структурным коэффициентам бозонизованных лагранжианов.

We consider deriving the effective meson higher-order lagrangians from bosonization of four-quark interaction within extended Nambu–Jona–Lasinio (NJL) model which can be treated as a local approximation of low-energy QCD. The results of calculating the heat-kernel coefficients for quark determinant of the bosonized NJL model are presented systematically up to and including $O(p^7)$. The obtained results are used to fix the structure coefficients of the effective chiral lagrangians at $O(p^4)$ and $O(p^6)$. We discuss various aspects to apply the bosonized lagrangians and to describe low-energy meson processes: reduction of vector, axial-vector and scalar resonances, regularization of meson loop diagrams, dependence of the phenomenological structure coefficients on the renormalization scheme and regularization scale. The nonlocal corrections to the structure coefficients of the bosonized lagrangians are treated also in the context of physical justification of the NJL model as a low-energy limit of QCD.

ВВЕДЕНИЕ

Возросший в последние годы интерес к киральным лагранжианам и вычислению мезонных амплитуд в высших порядках импульсного разложения связан с существенным прогрессом в развитии эффективных подходов к описанию адронных процессов при низких и промежуточных энергиях с учетом динамики кварков и глюонов на больших расстояниях. Создание реалистической теории мезонов и барионов в качестве низкоэнергетического предела

КХД является одной из фундаментальных проблем физики элементарных частиц. Необходимость в эффективных подходах возникает из-за того, что пертурбативная КХД становится неприменимой на больших расстояниях, в то время как нарушенная киральная симметрия остается основным динамическим принципом, определяющим сильные взаимодействия при низких энергиях.

До сих пор пока что никому не удалось вывести киральную динамику адронов из КХД в строгом математическом смысле. Тем не менее применение функциональных методов к приближенным формам КХД (см. работы [1]–[13] и ссылки в них) и КХД-мотивированным кварковым моделям [14]–[24], возникшим как различные расширения хорошо известной модели Намбу — Йона-Лазинио (НИЛ) [25], дало возможность существенно продвинуться в понимании связи между нарушенной киральной симметрией сильных взаимодействий адронов и динамикой кварков и глюонов на больших расстояниях. Несмотря на известные недостатки (неперенормируемость и отсутствие конфайнмента), модель НИЛ приводит к описанию в терминах непертурбативной КХД (массы токовых и составляющих кварков, кварковый конденсат, число цветов кварков) тех свойств мезонов и барионов, которые определяются киральной симметрией и ее нарушением [26]–[31]. Бозонизация модели НИЛ позволяет также вывести из эффективного четырехкваркового взаимодействия мезонные лагранжианы с высшими производными [32]–[38] и тем самым зафиксировать теоретически соответствующие структурные константы, которые в стандартной киральной теории возмущений [39] рассматриваются как феноменологические параметры.

Несмотря на то, что модель НИЛ приводит к правильному описанию низкоэнергетической феноменологии мезонов и барионов, не следует забывать о ее неполноте, прежде всего с точки зрения отсутствия в ней конфайнмента кварков. Проблема неперенормируемости решается в современной модели НИЛ с помощью введения соответствующего ультрафиолетового обрезания. Такая процедура выглядит разумной с физической точки зрения, так как с самого начала можно ожидать, что исключение из рассмотрения больших переданных импульсов не должно сильно повлиять на низкоэнергетические свойства связанных состояний кварков из-за быстрого убывания пропагатора глюона в области асимптотической свободы. Как локальное низкоэнергетическое приближение, модель НИЛ физически соответствует предположению, что свойства низколежащих связанных состояний кварков (адронов) в основном определяются областью передач импульса, промежуточной между областями асимптотической свободы и конфайнмента кварков, где переданный импульс много меньше эффективной массы непертурбативного глюона. Однако такое доминирование промежуточной области не вполне очевидно из-за полюсного поведения пропагатора непертурбативного глюона в области нулевых передач импульса. Поэтому исключение из рассмотрения в модели НИЛ

области конфайнмента не является, на первый взгляд, таким же естественным физическим приближением, как введение ультрафиолетового обрезания. Этот вопрос требует специального изучения, проведенного, в частности, в работе [23].

В настоящем обзоре мы подробно рассматриваем получение эффективных мезонных лагранжианов из бозонизации расширенной модели НИЛ, которую можно трактовать как локальное приближение в низкоэнергетическом пределе КХД. Мотивации модели НИЛ посвящен первый раздел обзора. Расширенная модель НИЛ не только включает в себя симметрии, соответствующие симметриям КХД, и явное нарушение киральной симметрии массами токовых кварков, но также воспроизводит спонтанное нарушение киральной симметрии, которое связано с появлением ненулевого кваркового конденсата и переходом токовых кварков в составляющие. В бозонизационном подходе псевдоскалярные, скалярные, векторные и аксиально-векторные мезоны вводятся как коллективные поля, соответствующие связанным состояниям кварков и антикварков, а взаимодействие между этими полями описывается кварковым детерминантом, возникающим при интегрировании по кваркам в производящем функционале.

В разделах 2, 3 и 4 мы обсуждаем технические детали вычисления кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ с помощью разложения так называемого “ядра теплопроводности” по степеням “собственного времени” в соответствующей регуляризации. Приведены результаты по вычислению коэффициентов разложения ядра теплопроводности до седьмого порядка включительно. Проведено сравнение с аналогичными вычислениями других групп. Полученные результаты используются в разделе 5 для фиксации констант связи эффективных киральных лагранжианов, включая члены p^6 -порядка импульсного разложения. Особое внимание в этом разделе уделено эквивалентным преобразованиям и уравнениям движения, которые используются для устранения членов с двойными производными и приведения эффективных лагранжианов к минимальному виду.

Особое место в обзоре отведено исследованию влияния мезонных резонансов на описание псевдоскалярного сектора. В разделе 6 рассмотрен эффективный псевдоскалярный лагранжиан, получаемый при интегрировании (редукции) векторных, аксиально-векторных и скалярных степеней свободы в производящем функционале бозонизованной модели НИЛ. Редукция тяжелых резонансов, эквивалентная учету резонансных обменов, проводится с помощью статических уравнений движения, возникающих из производящего функционала после специального кирального преобразования мезонных полей. Обсуждаются поправки высшего порядка к статическим уравнениям движения и модификация структурных коэффициентов эффективных киральных лагранжианов после редукции резонансов. Феноменологическим аспектам посвящен раздел 7, где мы рассматриваем описание низкоэнергетических ме-

зонных процессов в p^4 - и p^6 -порядках киральной теории с бозонизованными лагранжианами.

В первом разделе обзора показано, что модель НИЛ возникает как локальный низкоэнергетический предел КХД в результате некоторой последовательности достаточно грубых приближений и дополнительных предположений. В этом смысле предсказательная сила модели НИЛ, демонстрируемая в разделе 7 на примерах описания взаимодействий псевдоскалярных мезонов, в каком-то смысле даже превышает ожидания. Это объясняется тем, что динамика мезонных процессов при низких энергиях определяется в первую очередь нарушенной киральной симметрией, которая уже изначально была заложена в эффективном четырехкварковом лагранжиане модели НИЛ. В этом смысле отсутствие конфайнмента в этой модели не должно влиять на те свойства мезонов, которые являются следствием киральной симметрии или ее нарушения. В разделе 8 обсуждаются нелокальные поправки к предсказаниям модели НИЛ, трактуемые в бислокальном подходе как вклады, возникающие из полюсного поведения эффективного пропагатора непертурбативного глюона в области конфайнмента кварков. Разработанный в работах [11] и [23] подход позволяет получить полуфеноменологические оценки нелокальных поправок к структурным коэффициентам бозонизованных киральных лагранжианов. Показана малость этих поправок в p^4 -порядке импульсного разложения кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ, что является еще одним аргументом в пользу этой модели как реалистического приближения для взаимодействия кварков при низких энергиях.

В заключении мы обсуждаем возможные направления и перспективы дальнейшего развития эффективных кварковых моделей типа модели НИЛ. Мы также касаемся некоторых вопросов и проблем, не нашедших более детального освещения в настоящем обзоре.

1. КХД-МОТИВАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ

Квантовая хромодинамика является общепринятой теорией сильных взаимодействий в терминах кварков и глюонов, получившей хорошее экспериментальное подтверждение в пертурбативном режиме при высоких энергиях ($E \gg 1$ ГэВ). Так как кварки и глюоны не могут наблюдаться как свободные частицы, то предполагается, что они связаны в бесцветные адроны. Существует много различных феноменологических подходов и эффективных моделей для описания адронов и их взаимодействий при низких и промежуточных энергиях ($E < 1$ ГэВ). Однако до сих пор не удается вывести мезонную теорию математически строгим образом из КХД с учетом конфайнмента кварков и глюонов. Возникающие при этом трудности, в частности, обусловлены неизвестным поведением КХД-функций Грина при низких энергиях. Тем не менее

в этой области достигнут значительный прогресс, связанный с эффективными бислокальными подходами, которые в локальном пределе приводят к модели НИЛ, бозонизация которой позволяет получить эффективные киральные лагранжианы, описывающие сильные взаимодействия мезонов. В этом разделе мы конспективно рассмотрим бислокальный подход и физические приближения, при которых в рамках этого формализма происходит переход от КХД к эффективным кварковым моделям.

Сильные взаимодействия описываются в метрике Минковского действием КХД с цветной группой $SU(N_c)$:

$$S[\bar{q}, q, A] = \int d^4x \left[\bar{q}(i\hat{D} - m_0)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right], \quad (1.1)$$

отвечающим взаимодействию $n \times N_c$ цветных токовых кварков q с $(N_c^2 - 1)$ глюонными полями A_μ^a (n — число ароматов). В выражении (1.1) подразумевается неявно суммирование по цветовым индексам, а также предполагается суммирование по повторяющимся дираковским и ароматическим индексам; генераторы $U(n)$ -группы ароматов λ^a нормированы соотношениями

$$\text{tr } \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}, \quad a, b = 0, \dots, n^2 - 1; \quad \lambda_0 = \sqrt{2/n} \mathbf{1};$$

$m_0 = \text{diag}(m_0^1, \dots, m_0^n)$ — массовая матрица голых (токовых) кварков, явно нарушающая киральную и диагональную $U(n)$ -симметрии. Ковариантная производная определена как

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda_c^a}{2} A_\mu^a,$$

где λ_c^a — генераторы цветной группы, а тензор напряженности глюонного поля имеет вид

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

где g — константа связи КХД и f_{abc} — структурные константы группы $SU(3)$. Использовано также обозначение $\hat{D}$ для свертки $\gamma_\mu D^\mu$.

Производящий функционал КХД в отсутствие глюонных источников имеет вид

$$Z[\xi, \bar{\xi}] = \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}A \exp \left(iS[\bar{q}, q, A] + i \int d^4x (\bar{q}\xi + \bar{\xi}q) \right), \quad (1.2)$$

где $\xi, \bar{\xi}$ — внешние источники кварковых полей. Интеграл (1.2) является антипериодическим по кварковым и “духовым” полям, но периодическим по глюонным полям. Поля “духов” Фаддеева — Попова и члены, фиксирующие калибровку, включены в глюонную меру.

Введем в функциональный интеграл по глюонным полям член с внешними источниками, роль которых играют синглетные по аромату локальные токи

$$j_\mu^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu \frac{\lambda_c^a}{2} q(x),$$

связанные с глюонными полями A_μ^a . Тогда производящий функционал КХД тождественно переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\xi, \bar{\xi}] = & \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left[i \int d^4x \bar{q} \left(i\hat{\partial} - m_0 + g \frac{\lambda_c^a}{2} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta j_\mu^a} \right) q + \right. \\ & \left. + i \int d^4x (\bar{q}\xi + \bar{\xi}q) \right] \times \\ & \times \int \mathcal{D}A \exp \left(- \frac{i}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + i \int d^4x j_\mu^a A^{a\mu} \right) \Big|_{j=0}, \end{aligned}$$

и после интегрирования по глюонным полям мы получим [1, 2, 10]:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left[i \int d^4x \bar{q}(x)(i\hat{\partial} - m_0)q(x) \right] \exp(iW[j]), \quad (1.3)$$

где отброшены нормировочные факторы и внешние кварковые источники. Глюонный производящий функционал $W[j]$ в соотношении (1.3) можно представить в виде разложения (рис.1,a):

$$W[j] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y j_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j_\nu^b(y) + O(j^3). \quad (1.4)$$

Здесь

$$D_{\mu\nu}^{a,b}(x-y) = \int_{\text{connected}} \mathcal{D}A A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \exp \left(- \frac{i}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right)$$

— точный глюонный пропагатор, включающий все глюонные самодействия и взаимодействия глюонов с “духовыми” полями (рис.1,b), при этом кварковые петли исключаются из рассмотрения;

$$O(j^3) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n D_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n j_{\mu_i}^{a_i}(x_i)$$

— вклад глюонных вершин порядка более трех. Введенные таким образом n -точечные функции Грина $D_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}$ содержат полную информацию о глюонной динамике.

Ограничиваясь в разложении $W[j]$ (1.4) одноглюонным обменом (первая диаграмма рис.1,a) и отбрасывая глюонные вершины более высокого порядка,

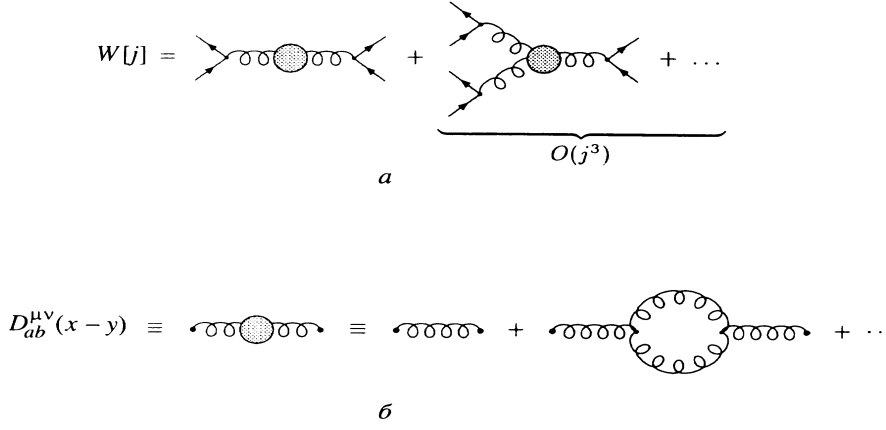


Рис. 1. Графическое представление разложения а) глюонного производящего функционала $W[j]$, б) полного глюонного пропагатора $D_{ab}^{\mu\nu}(x-y)$

получим выражение для производящего функционала, соответствующего эффективному низкоэнергетическому приближению КХД в виде

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ i \left[\int d^4x \bar{q}(x) (i\hat{\partial} - m_0) q(x) \right] + i\mathcal{S}_{\text{int}} \right\}.$$

Здесь

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -i \frac{g^2}{2} \iint d^4x d^4y j^{a\mu}(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) j^{b\nu}(y) \quad (1.5)$$

— эффективное действие, соответствующее взаимодействию кварков через обмен непертурбативным глюоном;

$$g^2 D_{\mu\nu}^{ab}(x) = \delta^{ab} g_{\mu\nu} D(x) = \delta^{ab} g_{\mu\nu} 4\pi \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(q^2)}{q^2} e^{iqx}$$

— непертурбативный глюонный пропагатор, взятый в фейнмановской калибровке. В такой форме представления пропагатора предполагается, что все свойства взаимодействия кварков через глюонный обмен определяются свойствами бегущей константы связи $\alpha(q^2)$. Точный вид непертурбативного глюонного пропагатора определяется неизвестной глюонной динамикой на больших расстояниях.

После преобразования Фирца эффективное действие (1.5) приводится к виду

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \frac{i}{2} \iint d^4x d^4y D(x-y) \bar{q}(x) \frac{\mathcal{M}^\theta}{2} q(y) \bar{q}(y) \frac{\mathcal{M}^\theta}{2} q(x), \quad (1.6)$$

где $\mathcal{M}^\theta$ — тензорное произведение дираковских, ароматических и цветовых матриц вида

$$\left\{ \mathbf{1}, i\gamma_5, i\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma^\mu, i\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_5\gamma^\mu \right\}^D \left\{ \frac{1}{2}\lambda^a \right\}^F \left\{ \frac{4}{3}\mathbf{1} \right\}^C. \quad (1.7)$$

Здесь мы рассматриваем $SU(3)$ -группу ароматов и ограничиваемся вкладами только цветовых синглетов $\bar{q}q$.

Поскольку точное поведение функций Грина $D(x)$ на больших расстояниях неизвестно, для нее должен быть использован какой-либо модельный анзац. Так, благодаря конденсации при низких энергиях [45] непертурбативный глюон приобретает ненулевую массу, которая связана с глюонным конденсатом соотношением [21]:

$$m_G^2 = \frac{15}{32} \left[16\pi^2 \left\langle \frac{g^2}{4\pi^2} (G_{\mu\nu}^a)^2 \right\rangle \right]^{1/2}.$$

Используя значение глюонного конденсата

$$\left\langle \frac{g^2}{4\pi^2} (G_{\mu\nu}^a)^2 \right\rangle = (410 \pm 80 \text{ МэВ})^2,$$

извлеченное из процессов $e^+e^- \rightarrow$ [46], для массы непертурбативного глюона мы получим оценку $m_G^2 = (806 \pm 275 \text{ МэВ})^2$. В области передач $0 \ll q^2 \ll m_G^2$, “промежуточной” между областями конфайнмента и асимптотической свободы кварков, пропагатор глюона в импульсном представлении можно аппроксимировать константой

$$D(q) = \frac{1}{q^2 - m_G^2} \approx -\frac{1}{m_G^2},$$

которой в координатном представлении будет соответствовать локальный анзац $D(x) \sim \delta^{(4)}(x)$. В этом случае эффективное действие (1.6) будет приводить к эффективному четырехкварковому взаимодействию, описываемому лагранжианом модели НИЛ [25]:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = 2G_1 \left[\left(\bar{q} \frac{\lambda^a}{2} q \right)^2 + \left(\bar{q} i\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q \right)^2 \right] - 2G_2 \left[\left(\bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q \right)^2 + \left(\bar{q} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q \right)^2 \right], \quad (1.8)$$

причем универсальные константы связи G_1 и G_2 в этом случае будут связаны соотношением $G_1 = 2G_2$.

В таком приближении не учитывается свойство конфайнмента кварков, связанное с особым полюсным поведением пропагатора глюона в импульсном

представлении вблизи нулевых передач (область конфайнмента). Не учитывается также быстро убывающее поведение пропагатора глюона $D(q)$ в области асимптотической свободы кварков. Тем не менее бозонизация модели НИЛ приводит к эффективным киральным лагранжианам, обеспечивающим хорошее описание низкоэнергетических мезонных процессов как в лидирующем, так и в высших порядках киральной теории.

2. БОЗОНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ

Модель НИЛ, бозонизация которой будет рассмотрена в этом разделе, включает в себя не только все необходимые ароматические симметрии, определяющие динамику кварков в низкоэнергетической КХД, но также обеспечивает простую схему спонтанного нарушения киральной симметрии, возникающего из ее нарушения в явном виде массовыми кварковыми членами. В этой схеме токовые кварки переходят в конституэнтные благодаря появлению ненулевого кваркового конденсата, при этом легкие составные псевдоскалярные бозоны Намбу — Голдстоуна возникают вместе с более тяжелыми динамическими векторными и аксиально-векторными мезонами с правильными относительными весами, возникающими из перенормировки.

В основе обсуждаемого подхода лежит эффективный четырехкварковый лагранжиан сильных взаимодействий расширенной модели НИЛ, инвариантной относительно глобальной цветовой симметрии $SU(N_c)$ и $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ -симметрии ароматов:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q}(i\hat{\partial} - m_0)q + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (2.1)$$

где взаимодействующая часть лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{int}}$ задана выражением (1.8). Можно заметить, что групповые структуры КХД

$$SU(3)_c^{\text{local}} \otimes SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \otimes U(1) \otimes S$$

и модели НИЛ

$$SU(3)_c^{\text{global}} \otimes SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \otimes U(1) \otimes S$$

очень похожи (здесь S представляет набор дискретных симметрий, таких как C -, P - и T -сопряжения).

Используя стандартный подход к бозонизации кварковых взаимодействий, основанный на технике функционального интегрирования, можно получить из лагранжиана модели НИЛ (2.1) эффективное мезонное действие. Прежде всего введем обычным образом [1, 2, 10] коллективные мезонные поля, соответствующие скалярным (S), псевдоскалярным (P), векторным (V) и

аксиально-векторным (A) мезонам, ассоциированным с кварковыми билинейными комбинациями

$$\begin{aligned} S^a &= -4G_1 \bar{q} \frac{\lambda^a}{2} q, & P^a &= -4G_1 \bar{q} i \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q, \\ V_\mu^a &= i4G_2 \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q, & A_\mu^a &= i4G_2 \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q. \end{aligned} \quad (2.2)$$

После подстановки этих выражений в (2.1) лагранжиан модели НИЛ можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathcal{L}_{NJL} = -\frac{1}{4G_1} \text{tr} (\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4G_2} \text{tr} (V_\mu^2 + A_\mu^2) + \bar{q} i \hat{\mathbf{D}} q, \quad (2.3)$$

где след tr берется по индексам ароматов, а $\hat{\mathbf{D}}$ — дираковский оператор в присутствии коллективных мезонных полей:

$$\begin{aligned} i \hat{\mathbf{D}} &= i(\hat{\partial} + \hat{V} + \hat{A} \gamma^5) - P_R (\Phi + m_0) - P_L (\Phi^\dagger + m_0) = \\ &= [i(\hat{\partial} + \hat{A}^R) - (\Phi + m_0)] P_R + [i(\hat{\partial} + \hat{A}^L) - (\Phi^\dagger + m_0)] P_L. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\Phi = S + iP$, $\hat{V} = V_\mu \gamma^\mu$, $\hat{A} = A_\mu \gamma^\mu$; $P_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ — киральные правые/левые проекторные операторы; $\hat{A}^{R/L} = \hat{V} \pm \hat{A}$ — правые/левые комбинации полей и

$$S = S^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad P = P^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad V_\mu = -i V_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad A_\mu = -i A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}.$$

Рассмотрим производящий функционал функции Грина, соответствующий лагранжиану (2.3). Поскольку он билинеен по кварковым полям, по ним можно выполнить интегрирование, после чего производящий функционал примет вид (для простоты кварковые источники опущены):

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{D}V \mathcal{D}A \exp [i\mathcal{S}(\Phi, \Phi^\dagger, V, A)], \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{S}(\Phi, \Phi^\dagger, V, A) = \int d^4x \left[-\frac{1}{4G_1} \text{tr} (\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4G_2} \text{tr} (V_\mu^2 + A_\mu^2) \right] - i \text{Tr}' [\ln (i \hat{\mathbf{D}})] \quad (2.6)$$

— эффективное действие для скалярных, псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов. След Tr' берется по пространству-времени, цвету, аромату и дираковским индексам:

$$\text{Tr}' = \int d^4x \text{Tr}, \quad \text{Tr} = \text{tr}_\gamma \cdot \text{tr}_C \cdot \text{tr}.$$

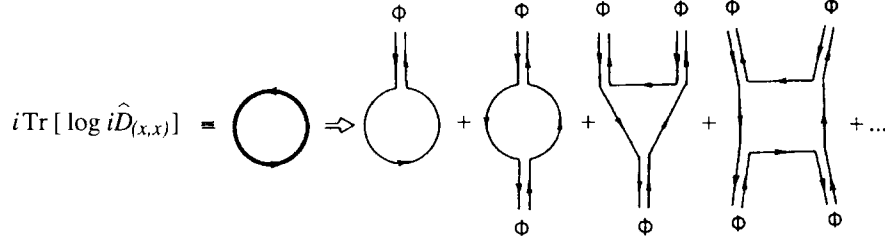


Рис. 2. Графическое представление разложения кваркового детерминанта по кварковым полям со внешними коллективными полями

Первый член в выражении (2.6), квадратичный по мезонным полям, возникает в результате линеаризации четырехкваркового взаимодействия; второй член есть кварковый детерминант, описывающий взаимодействие мезонов.

Кварковый детерминант может быть вычислен либо с помощью разложения по кварковым петлям с внешними коллективными мезонными полями [14]– [16] (см. рис.2), либо методом коэффициентов ядра теплопроводности в регуляризации собственного времени [47, 48]. Заметим, что модуль кваркового детерминанта дает вклад в неаномальную часть эффективного лагранжиана, в то время как его комплексная фаза определяет аномальное эффективное действие Весса — Зумино [59], связанное с киральными аномалиями.

Нелинейной параметризации киральной симметрии отвечает следующее представление поля Φ :

$$\Phi = \Omega \Sigma \Omega. \quad (2.7)$$

Матрица скалярных полей $\Sigma(x)$ принадлежит диагональной группе ароматов, в то время как матрица $\Omega(x)$ представляет псевдоскалярные степени свободы φ , остающиеся в пространстве $U(n)_L \times U(n)_R / U_V(n)$. Матрицу $\Omega(x)$ можно параметризовать унитарной матрицей

$$\Omega(x) = \exp \left(\frac{i}{\sqrt{2}F_0} \varphi(x) \right), \quad \varphi(x) = \varphi^a(x) \frac{\lambda^a}{2},$$

где F_0 — затравочное значение константы распада $\pi \rightarrow \mu\nu$. При киральных поворотах

$$q \rightarrow \tilde{q} = (P_L \xi_L + P_R \xi_R) q$$

поля Φ и $A_\mu^{R/L}$ преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \tilde{\Phi} = \xi_L \Phi \xi_R^\dagger, \\ A_\mu^R &\rightarrow \tilde{A}_\mu^R = \xi_R (\partial_\mu + A_\mu^R) \xi_R^\dagger, \quad A_\mu^L \rightarrow \tilde{A}_\mu^L = \xi_L (\partial_\mu + A_\mu^L) \xi_L^\dagger. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Электромагнитное взаимодействие мезонов с фотонным полем $\mathcal{A}_\mu$ вводится с помощью подстановки

$$V_\mu \rightarrow V_\mu + ieQ\mathcal{A}_\mu,$$

где Q — матрица электрических зарядов кварков.

Интеграл (2.5), зависящий теперь от $\Omega(x)$ и $\Sigma(x)$, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int \mathcal{D}\mu(\Omega\Sigma) \mathcal{D}V \mathcal{D}A \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4G_1} \text{tr} \Sigma^2 - \frac{1}{4G_2} \text{tr} (V_\mu^2 + A_\mu^2) \right] \right\} \times \\ & \times \det(i\hat{\mathbf{D}}(\Omega, \Sigma, V, A)), \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}\mu(\Omega\Sigma)$ является интегральной мерой для преобразованных полей (2.7).

В простейшем случае, когда $\Omega = 1$ и $A_\mu^{R/L} = 0$, уравнение среднего поля для Σ -поля сводится к уравнению Швингера — Дайсона вида

$$\Sigma_0 = i2G_1 N_c \text{tr}_\gamma \frac{1}{i\hat{\mathbf{D}}^{\Omega=1}}. \quad (2.9)$$

В приближении исчезающих масс токовых кварков это уравнение всегда имеет тривиальное решение $\Sigma_0 = 0$, отвечающее кирально-симметричной фазе. Однако при значении G_1 , превышающем некоторую критическую величину, решение $\Sigma_0 = 0$ становится нестабильным, и возникает новый вакуум с ненулевым Σ_0 , который соответствует фазе спонтанного нарушения киральной симметрии (фаза Намбу — Голдстоуна).

Предполагая, что решение Σ_0 имеет диагональный вид

$$\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_1^0, \sigma_2^0, \dots, \sigma_n^0),$$

получим из (2.9) “уравнение щели”

$$\sigma_i^0 = -i \frac{8G_1 N_c}{(2\pi)^4} \int^\Lambda d^4k \frac{\sigma_i^0 + m_i^0}{k^2 - (\sigma_i^0 + m_i^0)^2} \equiv -2G_1 \langle \bar{q}_i q_i \rangle, \quad (2.10)$$

где $\langle \bar{q}q \rangle$ — кварковый конденсат и Λ — параметр обрезания. Используя (2.10) и предполагая приближенную ароматическую симметрию кваркового конденсата, получим:

$$\sigma_i^0 = -2G_1 \langle \bar{q}_i q_i \rangle \equiv \mu.$$

В дальнейшем мы везде (за исключением раздела 6) будем пренебрегать квантовыми флуктуациями скалярного поля Σ вокруг его вакуумного ожидания μ (т.е. полагать $\Sigma \sim \Sigma_0 \sim \mu \mathbf{1}$, где μ — значение массы составляющего кварка, усредненное по аромату).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАРКОВОГО ДЕТЕРМИНАНТА МЕТОДОМ ЯДРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрение метода ядра теплопроводности мы начнем с вычисления неаномальной части эффективного действия, соответствующей модулю кваркового детерминанта, который в регуляризации собственного времени τ определяется в виде интеграла

$$\ln |\det i\hat{\mathbf{D}}| = -\frac{1}{2} \text{Tr}' \ln(\hat{\mathbf{D}}^\dagger \hat{\mathbf{D}}) = -\frac{1}{2} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} \text{Tr}' K(\tau), \quad (3.1)$$

где $K(\tau) = e^{-\mathbf{A}\tau}$ — так называемое “ядро теплопроводности” для оператора $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{D}}^\dagger \hat{\mathbf{D}}$ [53], и Λ — внутренний параметр регуляризации, совпадающий с параметром обрезания в формуле (2.10). Полное ядро теплопроводности удовлетворяет “уравнению теплопроводности”

$$\frac{\partial}{\partial \tau} K(\tau) + \mathbf{A}K(\tau) = 0$$

с граничным условием $K(\tau = 0) = 1$.

В рассматриваемом случае модели НИЛ оператор $\mathbf{A}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{A} = d_\mu d^\mu + a(x) + \mu^2,$$

где

$$d_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu = V_\mu + A_\mu \gamma^5, \quad a(x) = i\widehat{\nabla}H + H^\dagger H + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Gamma_{\mu\nu} - \mu^2.$$

Здесь мы используем следующие обозначения:

$$H = P_R \Phi + P_L \Phi^\dagger = S + i\gamma_5 P,$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = [d_\mu, d_\nu] = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = F_{\mu\nu}^V + \gamma^5 F_{\mu\nu}^A,$$

где $F_{\mu\nu}^{V,A}$ — тензоры напряженности поля;

$$F_{\mu\nu}^V = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + [V_\mu, V_\nu] + [A_\mu, A_\nu],$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [V_\mu, A_\nu] + [A_\mu, V_\nu],$$

и

$$\nabla_\mu H = \partial_\mu H + [V_\mu, H] - \gamma^5 \{A_\mu, H\}$$

— ковариантная производная.

Асимптотическое поведение оператора $\mathbf{A}$ на малых расстояниях определяется его “свободной” частью

$$\mathbf{A}_0 = \square + \mu^2,$$

которой соответствует непертурбативная часть ядра теплопроводности K_0 . Последняя может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \langle x | K_0(\tau) | y \rangle &= \langle x | \exp(-(\square + \mu^2)\tau) | y \rangle = \\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^2} e^{-\mu^2\tau + (x-y)^2/(4\tau)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

как решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\tau} K_0 + \mathbf{A}_0 K_0 = 0, \quad K(\tau=0) = 1.$$

С помощью подстановки $K = K_0 H$ можно выделить из ядра теплопроводности его взаимодействующую часть, которая удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{\tau} z_\mu d^\mu + d^\mu d_\mu + a \right) H(x, y; \tau) &= 0, \\ H(x, y; \tau=0) &= 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $z_\mu = x_\mu - y_\mu$, и дифференциальный оператор d_μ действует только на x . Взаимодействующую часть ядра теплопроводности можно разложить по степеням “собственного времени” τ :

$$H(x, y; \tau) = \sum_k h_k(x, y) \cdot \tau^k.$$

Возникающие при этом коэффициенты разложения Сили — ДеВитта $h_k(x, y)$ удовлетворяют рекурсивному соотношению

$$(n + z_\mu d^\mu) h_{n+1}(x, y) = -(a + d^\mu d_\mu) h_n(x, y) \quad (3.4)$$

с граничным условием

$$z_\mu d^\mu h_0 = 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, ядро теплопроводности для модуля кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ можно представить в виде разложения

$$\langle x | K(\tau) | y \rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^2} e^{-\mu^2\tau + (x-y)^2/(4\tau)} \sum_k h_k(x, y) \cdot \tau^k. \quad (3.6)$$

После интегрирования по τ в (3.1) получим

$$\ln |\det i\hat{\mathbf{D}}| = -\frac{1}{2} \frac{\mu^4}{(4\pi)^2} \sum_k \frac{\Gamma(k-2, \mu^2/\Lambda^2)}{\mu^{2k}} \text{Tr } h_k, \quad (3.7)$$

где $\Gamma(n, x) = \int_x^\infty dt e^{-t} t^{n-1}$ — неполная гамма-функция.

Используя определение функции $\Gamma(\alpha, x)$ при целочисленных значениях $\alpha = -n$ и $\alpha = 0$, можно выделить из кваркового детерминанта (3.7) расходящиеся и конечную части

$$\frac{1}{2} \ln (\det \hat{\mathbf{D}}^\dagger \hat{\mathbf{D}}) = B_{\text{pol}} + B_{\text{log}} + B_{\text{fin}}.$$

Здесь

$$B_{\text{pol}} = \frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{(4\pi)^2} \left[-\frac{\mu^4}{2x^2} \text{Tr}' h_0 + \frac{1}{x} \left(\frac{\mu^4}{2} \text{Tr}' h_0 - \mu^2 \text{Tr}' h_1 \right) \right]$$

имеет полюс при $x = 0$ ($x = \mu^2/\Lambda^2$);

$$B_{\text{log}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma(0, x) \left[\frac{1}{2} \mu^4 \text{Tr}' h_0 - \mu^2 \text{Tr}' h_1 + \text{Tr}' h_2 \right]$$

расходится логарифмически, так как

$$\Gamma(0, x) = -(C + \ln x) + O(x),$$

где $C = 0,577$ — константа Эйлера. Конечная часть модуля кваркового детерминанта имеет вид

$$B_{\text{fin}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{k=3}^{\infty} \mu^{4-2k} \Gamma(k-2, x) \text{Tr}' h_k.$$

Следует отметить, что коэффициенты при расходящихся вкладах $\Gamma(-1, \mu^2/\Lambda^2)$ и $\Gamma(0, \mu^2/\Lambda^2)$ отвечают квадратично и логарифмически расходящимся однопетлевым интегралам I_1 и I_2 , регуляризованным в работах [16] с помощью импульсного обрезания $\bar{\Lambda} = O(1)$. В отличие от стандартной регуляризации обрезанием, используемой в теории элементарных частиц, шкала обрезания рассматривается здесь как физический параметр, характеризующий радиус $\bar{q}q$ -сил и границу области спонтанного нарушения киральной симметрии.

В дальнейшем мы ограничимся детальным рассмотрением только неаномальной части эффективного действия, связанной с модулем кваркового детерминанта. Аномальную часть эффективного действия, которая определяется комплексной фазой кваркового детерминанта, можно представить в виде

$$\Gamma^- = \Gamma_{WZ} + \Gamma_{(\text{h.o.})}^-. \quad (3.8)$$

Здесь Γ_{WZ} — низшие аномальные вклады, соответствующие p^4 -порядку по импульсу:

$$\begin{aligned} \Gamma_{WZ} = & \frac{iN_c}{240\pi^2} \int_{B_5} d^5x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \text{tr} (\tilde{L}_\mu \tilde{L}_\nu \tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\beta \tilde{L}_\gamma) - \\ & - \frac{iN_c}{48\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} (Z_{\mu\nu\alpha\beta}(U, A_L, A_R) - Z_{\mu\nu\alpha\beta}(1, A_L, A_R)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

В первом топологическом члене выражения (3.9) псевдоскалярные киральные поля $\tilde{L}_\mu = \partial_\mu U \cdot U^\dagger$, $U = \Omega^2$ определяются на диске B_5 в 5-мерной области интегрирования, границей которого служит 4-мерное евклидово пространство-время [60]. Этот член дает аномальные вклады вида

$$\begin{aligned} & \frac{iN_c}{240\pi^2} \int_{B_5} d^5x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \text{tr} (\tilde{L}_\mu \tilde{L}_\nu \tilde{L}_\alpha \tilde{L}_\beta \tilde{L}_\gamma) = \\ & = -\frac{iN_c}{30\sqrt{2}\pi^2 F_0^5} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} (\varphi \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi) + O(\varphi^7). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Второй член выражения (3.9) описывает аномальные взаимодействия псевдоскалярных степеней свободы с векторными и аксиально-векторными калибровочными полями. Явное выражение для $Z_{\mu\nu\alpha\beta}$ удобно представить в виде [61]:

$$\begin{aligned} & Z_{\mu\nu\alpha\beta}(U, A_L, A_R) = \\ & = A_{L\mu}^U (A_{R\nu} \partial_\alpha A_{R\beta} + \partial_\nu A_{R\alpha} A_{R\beta} + A_{R\nu} A_{R\alpha} A_{R\beta} - R_\nu R_\alpha A_{R\beta}) + \\ & + U^\dagger A_{L\mu} U (A_{R\nu} R_\alpha A_{R\beta} - R_\nu \partial_\alpha A_{R\beta}) + \frac{1}{2} A_{L\mu} L_\nu A_{L\alpha} L_\beta - \\ & - (A_L \leftrightarrow A_R) + \frac{1}{2} (A_{L\mu} U A_{R\nu}^\dagger) (A_{L\alpha} U A_{R\beta} U^\dagger), \end{aligned}$$

где

$$A_{L\mu}^U = U^\dagger A_{L\mu} U + R_\mu, \quad A_{R\mu}^U = U A_{R\mu} U^\dagger - L_\mu.$$

Дополнительные к Γ_{WZ} вклады высшего порядка по импульсам $\Gamma_{(h.o.)}^-$ в полном аномальном действии (3.8) могут быть получены в подходе [62] с использованием тех же самых коэффициентов теплопроводности h_n , которые возникают при вычислении модуля кваркового детерминанта:

$$\Gamma_{(h.o.)}^- = -i \int d^4x \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(n-2)!}{16\pi^2 r} \left[\frac{1}{\mu^{2n-2}} \text{tr} ((P_R \Phi^\dagger + P_L \Phi) \hat{\mathbf{D}} h_n) \right]_{r\varepsilon}. \quad (3.11)$$

Индексы ε и r , приписанные в (3.11) к квадратной скобке, означают, что при вычислениях в ней удерживаются только члены с нечетным числом тензоров Леви — Чивиты и члены порядка μ^{-r} .

4. ПОЛУЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рекурсивный алгоритм вычисления коэффициентов теплопроводности основан на соотношении (3.4), связывающем $h_n(x, y)$ и $h_{n-1}(x, y)$. Граничное условие (3.5) для $h_0(x, y)$ возникает из (3.4) при $n = 0$ и $h_{-1}(x, y) = 0$. Задача заключается в нахождении предела совпадения $h_n \equiv h_n(x, y)|_{z=0}$, причем мы не можем просто положить $z = 0$ в (3.4), поскольку при действии дифференциального оператора d_α на это соотношение появляется не исчезающий вклад $d_\alpha(z_\mu d^\mu h_n)|_{z=0} = g_{\alpha\mu} d^\mu h_n|_{z=0} = d_\alpha h_n|_{z=0}$.

Легко увидеть, что использование рекурсивного соотношения (3.4) для вычисления коэффициента h_n приводит к появлению членов вида $d_\alpha d_\beta \dots h_n(x, y)|_{z=0}$. Чтобы получить рекурсивное соотношение для таких членов, необходимо подействовать произведением m дифференциальных операторов $d_\alpha d_\beta \dots d_\omega$ на соотношение (3.4) и перейти к пределу $z = 0$:

$$\begin{aligned} & \underbrace{d_\alpha d_\beta \dots d_\omega}_{m} h_n(x, y)|_{z=0} = \\ & = -\frac{1}{n+m} \left\{ d_\alpha d_\beta \dots d_\omega (a + d_\mu d^\mu) h_{n-1}(x, y) + P_{\alpha\beta\dots\omega} h_n(x, y) \right\} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $(n+m) > 0$ и

$$P_{\alpha\beta\dots\omega} = \underbrace{d_\alpha d_\beta \dots d_\omega}_{m} \cdot z_\mu d^\mu \Big|_{z=0} - m d_\alpha d_\beta \dots d_\omega.$$

Таким образом, мы получим для $P_{\alpha\beta\dots\omega}$ рекурсивное соотношение

$$P_{\alpha\beta\dots\omega} = d_\alpha P_{\beta\dots\omega} + R_{\beta\dots\omega;\alpha} \quad (4.2)$$

с граничным условием $P = 0$, где $R_{\beta\dots\omega;\alpha} = [d_\beta \dots d_\omega, d_\alpha]$. Переставляя дифференциальный оператор d_α шаг за шагом через последовательность других дифференциальных операторов $d_\beta, \dots, d_\omega$, можно переместить его влево. В этом случае произойдет взаимное сокращение двух произведений m дифференциальных операторов и останутся только члены с $(m-2)$ дифференциалами. Окончательно мы получим рекурсивное соотношение

$$R_{\beta\gamma\dots\omega;\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha} \cdot d_\gamma \dots d_\omega + d_\beta \cdot R_{\gamma\dots\omega;\alpha} \quad (4.3)$$

с граничным условием $R_{;\alpha} = 0$. Таким образом, для вычисления $h_n(x, y)|_{z=0}$ нужно использовать соотношение (4.1), начиная с $m = 0$. После каждой итерации необходимо переставлять все дифференциальные операторы, возникающие из $d_\mu d^\mu$ или $P_{\alpha\beta\dots\omega}$ вправо к $h_k(x, y)$. При таких перестановках возникнут коммутаторы вида

$$S_\mu = [d_\mu, a], \quad S_{\mu\nu} = [d_\mu, S_\nu], \quad S_{\alpha\mu\nu} = [d_\alpha, S_{\mu\nu}], \quad \dots$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = [d_\mu, d_\nu], \quad K_{\alpha\mu\nu} = [d_\alpha, \Gamma_{\mu\nu}], \quad K_{\beta\alpha\mu\nu} = [d_\beta, K_{\alpha\mu\nu}], \quad \dots \quad (4.4)$$

Индексы n и m изменяются при таких итерациях следующим образом: либо $n \rightarrow n - 1$, либо $m \rightarrow m - 2$, или $n \rightarrow n - 1; m \rightarrow m + 2$. Легко показать, что после $2n$ итераций останется только $h_0(x, y)$ без дифференциальных операторов, и требуемый результат получается в конце подстановки предела $z = 0$ с учетом $h_0(x, y)|_{z=0} = 1$.

Весьма громоздкие вычисления коэффициентов Сили — ДеВитта в соответствии с описанным рекурсивным методом можно алгоритмизировать для систем аналитических вычислений типа FORM или REDUCE после их соответствующего расширения [49]. Выражения для коэффициентов теплопроводности содержат большое количество членов, связанных между собой следующими эквивалентными преобразованиями: циклическими перестановками под знаком следа Tr , коммутационными соотношениями (4.4), переобозначениями немых индексов и тождествами Якоби для тензоров $K_{\alpha\mu\nu}$. Поэтому полученные выражения необходимо привести к некоторому минимальному базису линейно независимых членов. Проблема приведения окончательных выражений к минимальному базису и возникающие при этом неоднозначности детально рассмотрены в работе [50]. Там же проведено сравнение полученных нами коэффициентов теплопроводности с результатами других работ.

В выбранном нами минимальном базисе коэффициенты теплопроводности $h_1, \dots, h_5$ имеют вид *

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1 &= -a, \\ \text{Tr } h_2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ a^2 + \frac{1}{6} \Gamma_{\mu\nu}^2 \right\}, \\ \text{Tr } h_3 &= \frac{1}{6} \text{Tr} \left\{ -a^3 + \frac{1}{2} S_\mu^2 - \frac{1}{2} a \Gamma_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{10} K_{\nu\nu\mu}^2 - \frac{1}{15} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} \right\}, \end{aligned}$$

*Здесь и далее везде в этом разделе, там, где не использованы явно верхние и нижние индексы, подразумевается ковариантное суммирование по повторяющимся греческим индексам со стандартной метрикой $(1, -1, -1, -1)$.

$$\begin{aligned}
\text{Tr } h_4 &= \frac{1}{24} \text{Tr} \left\{ a^4 + a^2 S_{\mu\mu} + \frac{4}{5} a^2 \Gamma_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{5} (a \Gamma_{\mu\nu})^2 - \frac{2}{5} a S_\mu K_{\nu\nu\mu} + \frac{1}{5} S_{\mu\mu}^2 + \right. \\
&\quad + \frac{4}{15} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\rho} \Gamma_{\rho\mu} - \frac{2}{5} a K_{\nu\nu\mu}^2 + \frac{2}{15} S_{\alpha\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^2 - \frac{8}{15} S_{\beta\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} + \\
&\quad + \frac{17}{210} \Gamma_{\mu\nu}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{35} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\rho} \Gamma_{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\rho} + \frac{1}{105} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\rho} \Gamma_{\rho\sigma} \Gamma_{\sigma\mu} + \\
&\quad + \frac{1}{420} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\sigma} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\rho\sigma} + \frac{16}{105} K_{\mu\alpha\alpha\nu} \Gamma_{\nu\rho} \Gamma_{\rho\mu} + K_{\alpha\alpha\mu} K_{\beta\beta\nu} + \Gamma_{\mu\nu} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{35} K_{\mu\alpha\alpha\nu}^2 \right\}, \\
\text{Tr } h_5 &= \frac{1}{240} \text{Tr} \left\{ -a^5 - 2a^3 S_{\mu\mu} - a^2 S_\mu^2 - a^3 \Gamma_{\mu\nu}^2 - \frac{2}{3} a^2 \Gamma_{\mu\nu} a \Gamma_{\mu\nu} + \right. \\
&\quad + \frac{2}{3} a^2 S_\mu K_{\nu\nu\mu} - \frac{2}{3} S_\mu S_\nu a \Gamma_{\mu\nu} - a S_{\mu\mu} S_{\nu\nu} - \frac{2}{3} S_{\mu\mu} S_\nu^2 - \\
&\quad - \frac{2}{7} a^2 \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} - \frac{8}{21} a \Gamma_{\mu\nu} a \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} + \\
&\quad + \frac{4}{7} a^2 K_{\mu\mu\nu} K_{\alpha\alpha\nu} + \frac{3}{7} a K_{\mu\mu\nu} a K_{\alpha\alpha\nu} - \\
&\quad - \frac{8}{7} a S_{\mu\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^2 + \frac{4}{7} a S_\mu K_{\nu\nu\alpha} \Gamma_{\mu\alpha} + \\
&\quad + \frac{8}{7} a S_\mu \Gamma_{\mu\nu} K_{\alpha\alpha\nu} - \frac{4}{21} a \Gamma_{\mu\nu} S_{\alpha\alpha} \Gamma_{\mu\nu} - \\
&\quad - \frac{11}{21} S_\mu^2 \Gamma_{\nu\alpha}^2 + \frac{20}{21} S_\mu K_{\nu\nu\alpha} a \Gamma_{\mu\alpha} + \\
&\quad + \frac{2}{21} S_\mu S_\nu \Gamma_{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\nu} - \frac{10}{21} S_\mu S_\nu \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\mu} + \frac{2}{7} S_\mu \Gamma_{\mu\nu} S_\alpha \Gamma_{\alpha\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{42} S_\mu \Gamma_{\nu\alpha} S_\mu \Gamma_{\nu\alpha} + \frac{8}{21} S_{\mu\mu} S_\nu K_{\alpha\alpha\nu} - \frac{4}{21} S_\mu S_\nu K_{\mu\alpha\alpha\nu} + \\
&\quad + \frac{1}{14} S_{\mu\nu\nu} S_{\mu\alpha\alpha} - \frac{17}{84} a \Gamma_{\mu\nu}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^2 - \frac{1}{21} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\mu\beta} \Gamma_{\beta\alpha} - \\
&\quad - \frac{1}{21} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\mu} - \frac{5}{84} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^2 \Gamma_{\mu\nu} - \frac{13}{84} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta} - \\
&\quad - \frac{5}{21} a \Gamma_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu} - \frac{2}{21} a K_{\mu\mu\nu} \Gamma_{\nu\alpha} K_{\beta\beta\alpha} - \frac{2}{7} a \Gamma_{\mu\nu} K_{\mu\alpha\beta} K_{\nu\alpha\beta} - \\
&\quad - \frac{4}{21} a \Gamma_{\mu\nu} K_{\nu\alpha\alpha\beta} \Gamma_{\beta\mu} - \frac{2}{21} a \Gamma_{\mu\nu} K_{\alpha\alpha\mu} K_{\beta\beta\nu} - \frac{4}{21} S_{\mu\mu} \Gamma_{\nu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\nu} - \\
&\quad - \frac{4}{21} S_{\mu\nu} \Gamma_{\mu\alpha} \Gamma_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\beta} + \frac{2}{7} S_\mu K_{\nu\nu\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^2 - \frac{2}{7} S_\mu K_{\nu\nu\alpha} \Gamma_{\mu\beta} \Gamma_{\beta\alpha} + \\
&\quad \left. + \frac{2}{21} S_\mu \Gamma_{\mu\nu} K_{\alpha\alpha\beta} \Gamma_{\beta\nu} - \frac{1}{7} a K_{\mu\nu\nu\alpha} K_{\mu\beta\beta\alpha} + \frac{2}{21} a K_{\mu\nu\nu\alpha} K_{\alpha\beta\beta\mu} - \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{28}S_{\mu\nu\nu}\Gamma_{\alpha\beta}^2 - \frac{1}{42}S_{\mu\mu}K_{\nu\nu\alpha}K_{\beta\beta\alpha} - \frac{2}{7}S_{\mu\mu}K_{\nu\alpha\alpha\beta}\Gamma_{\nu\beta} + \\
 & + \frac{1}{7}S_{\mu}K_{\nu\nu\alpha\alpha\beta}\Gamma_{\mu\beta} - \frac{47}{126}\Gamma_{\mu\nu}^2\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha} - \\
 & - \frac{11}{189}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\mu\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} + \frac{1}{63}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\mu\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha} + \\
 & + \frac{37}{945}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\mu} + \frac{1}{126}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\alpha\mu}\Gamma_{\beta\gamma} + \\
 & + \frac{1}{945}\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\gamma\mu}\Gamma_{\nu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma} - \frac{8}{189}K_{\mu\mu\nu}K_{\nu\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha} - \\
 & - \frac{10}{189}K_{\mu\mu\nu}K_{\alpha\alpha\nu}\Gamma_{\beta\gamma}^2 + \frac{2}{21}K_{\mu\mu\nu}K_{\alpha\alpha\beta}\Gamma_{\nu\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} + \\
 & + \frac{4}{63}K_{\mu\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha}K_{\beta\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha} + \frac{5}{378}K_{\mu\mu\nu}\Gamma_{\alpha\beta}K_{\gamma\gamma\nu}\Gamma_{\alpha\beta} - \\
 & - \frac{61}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^2 + \frac{22}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\mu\beta}\Gamma_{\gamma\alpha}\Gamma_{\beta\gamma} - \\
 & - \frac{16}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\mu} - \frac{10}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}\Gamma_{\gamma\mu}\Gamma_{\beta\gamma} - \\
 & - \frac{2}{189}K_{\mu\nu\nu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\mu\alpha}\Gamma_{\beta\gamma} - \frac{4}{63}K_{\mu\nu\alpha}^2\Gamma_{\beta\gamma}^2 - \\
 & - \frac{4}{189}K_{\mu\nu\alpha}K_{\mu\alpha\beta}\Gamma_{\nu\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} - \frac{4}{189}K_{\mu\nu\alpha}K_{\mu\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}\Gamma_{\gamma\nu} - \\
 & - \frac{2}{63}K_{\mu\nu\alpha}K_{\beta\nu\alpha}\Gamma_{\mu\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} + \frac{2}{63}K_{\mu\nu\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}K_{\mu\beta\gamma}\Gamma_{\beta\gamma} + \\
 & + \frac{2}{189}K_{\mu\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}K_{\mu\nu\gamma}\Gamma_{\gamma\beta} - \frac{1}{42}K_{\mu\mu\nu\alpha}K_{\alpha\beta\gamma}\Gamma_{\beta\gamma} + \\
 & + \frac{1}{63}K_{\mu\nu\nu\alpha}K_{\mu\beta\beta\gamma}\Gamma_{\alpha\gamma} + \frac{4}{63}K_{\mu\nu\nu\alpha}K_{\alpha\beta\beta\gamma}\Gamma_{\mu\gamma} - \\
 & - \frac{5}{63}K_{\mu\nu\nu\alpha}K_{\beta\beta\mu}K_{\gamma\gamma\alpha} + \frac{1}{126}K_{\mu\mu\nu\nu\alpha}K_{\beta\beta\gamma\gamma\alpha} \Big\} + \text{h.c.}
 \end{aligned}$$

Здесь операция эрмитова сопряжения (h.c.) определена как

$$\begin{aligned}
 a^\dagger &= a, \quad (S_{\mu\dots})^\dagger = S_{\mu\dots}, \\
 (\Gamma_{\mu\nu})^\dagger &= -\Gamma_{\mu\nu}, \quad (K_{\alpha\mu\nu\dots})^\dagger = -K_{\alpha\mu\nu\dots}.
 \end{aligned}$$

Наши выражения для коэффициентов теплопроводности $h_{4,5}$ оказываются эквивалентными результатам работ [51,52], использующих минимальные базисы, отличные от используемого нами. В то же время в $\text{Tr } h_4$ мы обнаружили некоторые расхождения между результатом наших вычислений [50] и работой [53] в той части, которая содержит члены с 6 и 8 индексами:

$$(2\text{Tr } h_4) [50] - (24\text{Tr } h_4) [53] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{8}{15}ad_\mu^2d_\nu d_\alpha^2d_\nu + \frac{8}{15}ad_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\nu d_\alpha - \frac{8}{15}ad_\mu d_\nu^2d_\mu d_\alpha^2 + \\
&+ \frac{8}{15}ad_\mu d_\nu d_\mu d_\nu d_\alpha^2 + \frac{16}{15}ad_\mu d_\nu d_\alpha^2d_\nu d_\mu - \frac{16}{15}ad_\mu d_\nu d_\alpha d_\nu d_\alpha d_\mu - \\
&- \frac{16}{105}d_\mu^2d_\nu^2d_\alpha^2d_\beta^2 - \frac{16}{105}d_\mu^2d_\nu^2d_\alpha d_\beta^2d_\alpha + \frac{64}{105}d_\mu^2d_\nu^2d_\alpha d_\beta d_\alpha d_\beta + \\
&+ \frac{32}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\nu d_\beta^2d_\alpha - \frac{64}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\nu d_\beta d_\alpha d_\beta + \frac{16}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta^2d_\nu d_\alpha + \\
&+ \frac{32}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta d_\nu d_\alpha d_\beta - \frac{16}{35}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta d_\nu d_\beta d_\alpha - \frac{16}{35}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta d_\alpha d_\nu d_\beta + \\
&+ \frac{16}{105}d_\mu^2d_\nu d_\alpha d_\beta d_\alpha d_\beta d_\nu - \frac{32}{105}d_\mu d_\nu d_\mu d_\nu d_\alpha d_\beta d_\alpha d_\beta + \\
&+ \frac{64}{105}d_\mu d_\nu d_\mu d_\alpha d_\nu d_\beta d_\alpha d_\beta - \frac{32}{105}d_\mu d_\nu d_\mu d_\alpha d_\beta d_\nu d_\alpha d_\beta + \\
&+ \frac{32}{105}d_\mu d_\nu d_\mu d_\alpha d_\beta d_\nu d_\beta d_\alpha .
\end{aligned}$$

Эти отклонения возникают из членов соответствующего выражения работы [53]:

$$\left(+\frac{2}{5}S^\alpha{}_\alpha\Gamma_{\mu\nu}^2+\frac{4}{105}\{\Gamma_{\alpha\beta}\mid K^\rho{}_{\rho\mu}\mid K^{\mu\alpha\beta}\}\right),$$

где $\{A\mid B\mid C\}\equiv ABC+CBA$. Соответствующая часть нашего выражения представлена членами

$$\left(+\frac{2}{15}S^\alpha{}_\alpha\Gamma_{\mu\nu}^2+\frac{16}{105}K^{\mu\alpha}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu\rho}{}_\rho\Gamma_{\rho\mu}\right).$$

Для проверки наших результатов мы также убедились в том, что получаемые нами коэффициенты удовлетворяют соотношению [53]:

$$\partial(\text{Tr } h_n)/\partial a = -h_{n-1}.$$

Мы также приводим “минимальные” части коэффициентов h_5, h_6 и h_7 , соответствующие неисчезающим при $V_\mu = A_\mu = 0$ членам:

$$\begin{aligned}
\text{Tr } h_5^{\min} &= \frac{1}{120}\text{Tr}\left\{-a^5+3a^2S_\mu^2+2aS_\mu aS_\mu-aS_{\mu\nu}^2-\frac{5}{3}S_\mu S_\nu S_{\mu\nu}+\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{14}S_{\mu\nu\alpha}^2\right\}, \\
\text{Tr } h_6^{\min} &= \frac{1}{720}\text{Tr}\left\{a^6-4a^3S_\mu^2-6a^2S_\mu aS_\mu+\frac{12}{7}a^2S_{\mu\nu}^2+\frac{9}{7}aS_{\mu\nu}aS_{\mu\nu}+\right. \\
&\quad \left.+\frac{26}{7}aS_{\mu\nu}S_\mu S_\nu+\frac{18}{7}aS_\mu S_{\mu\nu}S_\nu+\frac{26}{7}aS_\mu S_\nu S_{\mu\nu}+\frac{9}{7}S_\mu^2S_\nu^2+\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{17}{14} S_\mu S_\nu S_\mu S_\nu - \frac{3}{7} a S_{\mu\nu}^2 - \frac{11}{21} S_{\mu\nu} S_{\nu\alpha} S_{\mu\alpha} - S_\mu S_{\mu\nu\alpha} S_{\nu\alpha} - \\
 & - S_\mu S_{\nu\alpha} S_{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{42} S_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \Big\}, \\
 \text{Tr } h_7^{\min} = & \frac{1}{5040} \text{Tr} \Big\{ -a^7 + 5a^4 S_\mu^2 + 8a^3 S_\mu a S_\mu + \frac{9}{2} a^2 S_\mu a^2 S_\mu - \\
 & - \frac{5}{2} a^3 S_{\mu\nu}^2 - \frac{9}{2} a^2 S_{\mu\nu} a S_{\mu\nu} - 6a^2 S_{\mu\nu} S_\mu S_\nu - \frac{7}{2} a^2 S_\mu S_{\mu\nu} S_\nu - \\
 & - 6a^2 S_\mu S_\nu S_{\mu\nu} - \frac{7}{2} a S_\mu^2 S_\nu^2 - \frac{11}{2} a S_\mu a S_{\mu\nu} S_\nu - \frac{11}{2} a S_\mu a S_\nu S_{\mu\nu} - \\
 & - \frac{17}{2} a S_\mu S_\nu a S_{\mu\nu} - \frac{17}{2} a S_\mu S_\nu S_\mu S_\nu + \\
 & + \frac{5}{6} a^2 S_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{3} a S_{\mu\nu\alpha} a S_{\mu\nu\alpha} + \\
 & + \frac{17}{6} a S_{\mu\nu\alpha} S_\mu S_{\nu\alpha} + \frac{5}{2} a S_{\mu\nu\alpha} S_{\nu\alpha} S_\mu + \frac{5}{3} a S_{\mu\nu} S_{\mu\nu\alpha} S_\alpha + \\
 & + \frac{11}{3} a S_{\mu\nu} S_{\nu\alpha} S_{\mu\alpha} + \frac{17}{6} a S_{\mu\nu} S_\alpha S_{\mu\nu\alpha} + \frac{5}{3} a S_\mu S_{\mu\nu\alpha} S_{\nu\alpha} + \\
 & + \frac{5}{2} a S_\mu S_{\nu\alpha} S_{\mu\nu\alpha} + \frac{5}{3} S_\mu^2 S_{\nu\alpha}^2 + \\
 & + \frac{11}{6} S_\mu S_{\nu\alpha} S_\mu S_{\nu\alpha} + \frac{35}{18} S_\mu S_{\nu\alpha} S_\alpha S_{\mu\nu} + \\
 & + \frac{97}{18} S_\mu S_\nu S_{\mu\alpha} S_{\nu\alpha} + \frac{43}{18} S_\mu S_\nu S_{\nu\alpha} S_{\mu\alpha} + \frac{35}{9} S_\mu S_\nu S_\alpha S_{\mu\nu\alpha} - \\
 & - \frac{1}{6} a S_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{16}{15} S_{\mu\nu} S_{\mu\alpha\beta} S_{\nu\alpha\beta} - \frac{7}{10} S_{\mu\nu} S_{\alpha\beta} S_{\mu\nu\alpha\beta} - \\
 & - \frac{1}{2} S_\mu S_{\mu\nu\alpha\beta} S_{\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2} S_\mu S_{\nu\alpha\beta} S_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{132} S_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}^2 \Big\}.
 \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов теплопроводности, до $\text{Tr } h_6^{\min}$ включительно, были также приведены в работе [56], кроме того, в работах [57] можно найти выражение для $\text{Tr } h_8^{\min}$. Наши вычисления минимальных членов коэффициентов теплопроводности высших порядков согласуются с результатами других групп.

Особый интерес к вычислению коэффициентов ядра уравнения теплопроводности придает то обстоятельство, что использование этого метода для получения эффективного лагранжиана из микроскопической теории является альтернативой прямому вычислению фейнмановских диаграмм. При этом УФ-расходимостям фейнмановских диаграмм будет соответствовать расходимость интегралов по собственному времени на нижнем пределе. Преимуществом данного метода является то, что эффективный лагранжиан можно получить

в наиболее общем виде как разложение обобщенных локальных операторов, которые будут иметь различный вид в различных моделях.

Так, например, полученные выше выражения для коэффициентов h_i описывают эффективный лагранжиан рассеяния света на свете в квантовой электродинамике как для частиц со спином $1/2$, так и для бесспиновых частиц. В первом случае мы имеем $\Gamma_\mu = ieQ\mathcal{A}_\mu$, $a = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Gamma_{\mu\nu}$ и

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2\mu^4} \text{Tr } h_4 = -\frac{\alpha^2}{180\mu^4} \left[5(\mathcal{F}_{\mu\nu}^2)^2 - 14(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\nu\alpha})^2 \right], \quad (4.5)$$

где $\alpha = e^2/(4\pi)$ и $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu$ — тензор напряженности электромагнитного поля. Выражение (4.5) совпадает с известным результатом Эйлера — Гейзенберга [54] в КЭД. В случае бесспиновых частиц имеем $\Gamma_\mu = ieQ\mathcal{A}_\mu$, $a = 0$ и

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2\mu^4} \text{Tr } h_4 = -\frac{\alpha^2}{1440\mu^4} \left[5(\mathcal{F}_{\mu\nu}^2)^2 + (\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\nu\alpha})^2 \right].$$

Последнее выражение также совпадает с известным результатом скалярной электродинамики [55]. В этих простых примерах использовались лишь несколько членов из выражения для коэффициента h_4 , которые в случае абелевой симметрии $U(1)$ (все операторы коммутируют) записываются как

$$\text{Tr } h_4 \rightarrow \frac{1}{24} \text{Tr} \left[a^4 + a^2\Gamma_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{12}\Gamma_{\mu\nu}^2\Gamma_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{15}(\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_{\mu\alpha})^2 \right].$$

Для получения бозонизованного лагранжиана в модели НИЛ требуются более полные выражения, которые используются и для других задач, например, для описания свойств электрослабого сфалерона [56], а также для задач квантовой гравитации [48] и в физике высоких температур. Подробную библиографию статей, посвященных различным физическим применениям коэффициентов теплопроводности, можно найти в работах [53, 58]. Поэтому полученные нами результаты и используемые для этого программы аналитических вычислений представляют гораздо более общий интерес, чем только бозонизация модели НИЛ.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕЗОННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ

Эффективные мезонные лагранжианы в терминах коллективных полей возникают из кваркового детерминанта после вычисления следа по дираковским матрицам в $\text{Tr } h_i(x)$. Здесь мы ограничимся только членами в выражениях для $h_1, \dots, h_4$, дающими вклад в импульсное разложение кваркового

детерминанта, включая p^6 -порядок (члены, дающие $O(p^8)$ -вклады, опущены):

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 1, \\
 h_1 &= -a, \\
 \text{Tr } h_2 &= \text{Tr} \left\{ \frac{1}{12} (\Gamma_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} a^2 \right\}, \\
 \text{Tr } h_3 &= -\frac{1}{12} \text{Tr} \left\{ 2a^3 - S_\mu S^\mu + a (\Gamma_{\mu\nu})^2 - \frac{2}{45} (\Gamma_{\alpha\beta\gamma})^2 - \frac{1}{9} (\Gamma^\alpha_{\alpha\beta})^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{45} \Gamma_{\mu\nu} \Gamma^{\nu\alpha} \Gamma_\alpha{}^\mu \right\}, \\
 \text{Tr } h_4 &= \text{Tr} \left\{ \frac{1}{24} a^4 + \frac{1}{12} (a^2 S^\mu{}_\mu + a S_\mu S^\mu) + \frac{1}{720} (7(S^\mu{}_\mu)^2 - (S_{\mu\nu})^2) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{30} a^2 (\Gamma_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{120} (a \Gamma_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{144} a [\Gamma^\mu{}_{\mu\nu}, S^\nu] + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{40} a \left(\Gamma_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{11}{9} S_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \right) \right\}, \\
 \text{Tr } h_5^{\min} &= -\text{Tr} \left\{ \frac{1}{120} a^2 (a^3 - 3 S_\mu S^\mu) - \frac{1}{60} (a S_\mu)^2 \right\}, \\
 \text{Tr } h_6^{\min} &= \frac{1}{720} \text{Tr } a^6.
 \end{aligned}$$

“Расходящаяся” часть эффективного мезонного лагранжиана определяется коэффициентами h_0 , h_1 и h_2 разложения (3.7):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{div}} &= \frac{N_c}{16\pi^2} \text{tr} \left\{ \Gamma \left(0, \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \left[D^\mu (\Phi + m_0) \overline{D}_\mu (\Phi + m_0)^\dagger - \mathcal{M}^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} \left((F_{\mu\nu}^L)^2 + (F_{\mu\nu}^R)^2 \right) \right] + 2 \left[\Lambda^2 e^{-\mu^2/\Lambda^2} - \mu^2 \Gamma \left(0, \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \right] \mathcal{M} \right\},
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\mathcal{M} = (\Phi + m_0)(\Phi + m_0)^\dagger - \mu^2$, $F_{\mu\nu}^{R/L} = F_{\mu\nu}^V \pm F_{\mu\nu}^A$. Ковариантные производные D_μ и $\overline{D}_\mu$ определены следующим образом:

$$D_\mu * = \partial_\mu * + (A_\mu^L * - * A_\mu^R), \quad \overline{D}_\mu * = \partial_\mu * + (A_\mu^R * - * A_\mu^L).$$

Полагая $\Sigma \approx \mu$ и поэтому $\Phi = \mu \Omega^2 \equiv \mu U$, можно представить p^2 -часть мезонного лагранжиана (5.1) в виде

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{F_0^2}{4} \text{tr} (L_\mu L^\mu) + \frac{F_0^2}{4} \text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger), \tag{5.2}$$

где $L_\mu = D_\mu U U^\dagger$. Затравочная константа F_0 и мезонная массовая матрица $\chi = \text{diag}(\chi_u^2, \chi_d^2, \dots, \chi_n^2)$ заданы соотношениями

$$F_0^2 = y N_c \mu^2 / (4\pi^2), \quad \chi_i^2 = m_0^i \mu / (G_1 F_0^2) = -2m_0^i \langle \bar{q}q \rangle F_0^{-2}, \quad (5.3)$$

где $y = \Gamma(0, \mu^2/\Lambda^2)$.

Эффективный лагранжиан в p^4 -порядке кирального разложения возникает из логарифмически расходящейся части кваркового детерминанта и из коэффициентов h_3 и h_4 , дающих вклад в конечную часть. Применяя свойства ковариантных производных

$$\begin{aligned} D_\mu(O_1 O_2) &= (D_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}'_\mu O_2) = (D'_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}_\mu O_2), \\ \overline{D}_\mu(O_1 O_2) &= (\overline{D}_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}'_\mu O_2) = (\overline{D}'_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}_\mu O_2), \\ D'_\mu(O_1 O_2) &= (D'_\mu O_1) O_2 + O_1 (D'_\mu O_2) = (D_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}_\mu O_2), \\ \overline{D}'_\mu(O_1 O_2) &= (\overline{D}'_\mu O_1) O_2 + O_1 (\overline{D}'_\mu O_2) = (\overline{D}_\mu O_1) O_2 + O_1 (D_\mu O_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]O &= F_{\mu\nu}^L O - O F_{\mu\nu}^R, & [\overline{D}_\mu, \overline{D}_\nu]O &= F_{\mu\nu}^R O - O F_{\mu\nu}^L, \\ [D'_\mu, D'_\nu]O &= [F_{\mu\nu}^L, O], & [\overline{D}'_\mu, \overline{D}'_\nu]O &= [F_{\mu\nu}^R, O], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$D'_\mu * = \partial_\mu * + [A_\mu^L, *], \quad \overline{D}'_\mu * = \partial_\mu * + [A_\mu^R, *],$$

можно представить соответствующую конечную часть эффективного лагранжиана в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fin}}^{(p^4)} &= \frac{N_c}{32\pi^2 \mu^4} \text{tr} \left\{ \frac{1}{3} \left[\mu^2 D^2 \Phi \overline{D}^2 \Phi^\dagger - (D^\mu \Phi \overline{D}_\mu \Phi^\dagger)^2 \right] + \frac{1}{6} (D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger)^2 - \right. \\ &\quad - \mu^2 \left[\mathcal{M} D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \overline{\mathcal{M}} \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\mu \Phi \right] + \\ &\quad + \frac{2}{3} \mu^2 \left[D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger F_{\mu\nu}^L + \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi F_{\mu\nu}^R \right] + \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \mu^2 F_{\mu\nu}^R \Phi^\dagger F^{L\mu\nu} \Phi - \frac{1}{6} \mu^4 \left[(F_{\mu\nu}^L)^2 + (F_{\mu\nu}^R)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\overline{\mathcal{M}} = (\Phi + m_0)^\dagger (\Phi + m_0) - \mu^2$. Мы будем использовать приближение $\Gamma(k, \mu^2/\Lambda^2) \approx \Gamma(k)$, которое хорошо выполняется при $k \geq 1$ и $\mu^2/\Lambda^2 \ll 1$.

Объединяя лагранжиан (5.5) с p^4 -вкладами, возникающими из расходящейся части (5.1), получим эффективный p^4 -лагранжиан, который в самом общем случае можно представить в виде

$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_4^{G\&L}(L'_i, H'_i) + \lambda_1 \text{tr} \left(D^2 U \overline{D}^2 U^\dagger \right) + \lambda_2 \text{tr} \left(D^2 U \chi^\dagger + \chi \overline{D}^2 U^\dagger \right), \quad (5.6)$$

где $\mathcal{L}_4^{G\&L}(L_i, H_i)$ — часть p^4 -лагранжиана, содержащая минимальную комбинацию линейно независимых членов, соответствующих структурным коэффициентам L_i ($i=1, \dots, 10$) и $H_{1,2}$ Гассера и Лейтвилера [39] *:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{G\&L}(L_i, H_i) = & \left(L_1 - \frac{1}{2} L_2 \right) (\text{tr } L_\mu L^\mu)^2 + \\ & + L_2 \text{tr} \left(\frac{1}{2} [L_\mu, L_\nu]^2 + 3(L_\mu L^\mu)^2 \right) + \\ & + L_3 \text{tr} ((L_\mu L^\mu)^2) - L_4 \text{tr} (L_\mu L^\mu) \text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) - \\ & - L_5 \text{tr} [L_\mu L^\mu (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] + L_6 \left(\text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \right)^2 + \\ & + L_7 \left(\text{tr} (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \right)^2 + L_8 \text{tr} (\chi U^\dagger \chi U^\dagger + U \chi^\dagger U \chi^\dagger) - \\ & - L_9 \text{tr} (F_{\mu\nu}^R R^\mu R^\nu + F_{\mu\nu}^L L^\mu L^\nu) - \\ & - L_{10} \text{tr} (U^\dagger F_{\mu\nu}^R U F^{L\mu\nu}) - \\ & - H_1 \text{tr} ((F_{\mu\nu}^R)^2 + (F_{\mu\nu}^L)^2) + H_2 \text{tr} (\chi \chi^\dagger). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Лагранжиан (5.6) содержит два лишних члена со структурными коэффициентами $\lambda_{1,2}$, отсутствующих в стандартном представлении p^4 -лагранжиана Гассера — Лейтвилера (5.7).

Согласно теореме эквивалентности, нелинейный эффективный лагранжиан определен с точностью до преобразований псевдоскалярных полей, не меняющих его кинетическую часть [64, 65]. Такие преобразования полей влияют только на многочастичные пропагаторы с внешними линиями вне массовой поверхности, в то время как S -матрицы на массовой поверхности остаются идентичными. Это свойство эквивалентности используется для устранения лишних, например, так называемых “тахсионных” членов с двойными производными, которые возникают при бозонизации эффективных кварковых моделей. В работах [39] с этой целью использованы уравнения движения. Следует отметить, что в p^4 -порядке использование преобразования полей приводит в точности к тому же результату, что и наивное применение уравнений движений, возникающих из p^2 -части эффективного лагранжиана. Однако можно показать, что в следующих порядках импульсного разложения $O(p^6)$ преобразования полей приводят к появлению вкладов, которые могут быть потеряны при использовании только уравнений движений (см. [37, 63]).

Применяя последовательное ковариантное дифференцирование к усло-

* Следует отметить разницу в наших определениях тензоров $F^{L,R}$: $F^{L,R} = -iF_{G\&L}^{R,L}$.

вию унитарности $UU^\dagger = 1$, получим соотношения

$$\begin{aligned} D^2 U U^\dagger &= \frac{1}{2} (D^2 U U^\dagger - U \bar{D}^2 U^\dagger) - D^\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger, \\ U \bar{D}^2 U^\dagger &= -\frac{1}{2} (D^2 U U^\dagger - U \bar{D}^2 U^\dagger) - D^\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Используя (5.8) и $\text{tr} (D^2 U U^\dagger - U \bar{D}^2 U^\dagger) = 0$, последние два члена в (5.6) можно привести к виду, наиболее удобному для применения преобразований полей:

$$\begin{aligned} \text{tr} (D^2 U \bar{D}^2 U^\dagger) &= \text{tr} (D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger D_\nu U \bar{D}^\nu U^\dagger) + \frac{1}{12} (\text{tr} (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger))^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \text{tr} (U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) + \frac{1}{2} \text{tr} (\chi \chi^\dagger) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \text{tr} ((D^2 U U^\dagger - U \bar{D}^2 U^\dagger) \mathcal{O}_{EOM}^{(2)}) - \frac{1}{4} \text{tr} ((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \mathcal{O}_{EOM}^{(2)}), \\ \text{tr} (D^2 U \chi^\dagger + \chi \bar{D}^2 U^\dagger) &= -\text{tr} (D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)) \\ &\quad + \frac{1}{6} (\text{tr} (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger))^2 - \frac{1}{2} \text{tr} (U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) + \text{tr} (\chi \chi^\dagger) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} ((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \mathcal{O}_{EOM}^{(2)}), \end{aligned}$$

где оператор $\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}$ имеет функциональный вид уравнения движений, возникающего из p^2 -лагранжиана (5.2):

$$\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}(U) = D^2 U U^\dagger - U \bar{D}^2 U^\dagger - \chi U^\dagger + U \chi^\dagger + \frac{1}{3} \text{tr} (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger). \quad (5.9)$$

Тогда, выражение (5.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= \mathcal{L}_4^{G\&L}(L_i, H_i) + \\ &\quad + c_1 \text{tr} ((D^2 U U^\dagger - U \bar{D}^2 U^\dagger) \mathcal{O}_{EOM}^{(2)}) + c_2 \text{tr} ((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \mathcal{O}_{EOM}^{(2)}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Штрихованные и нештрихованные структурные коэффициенты в (5.6) и (5.10) связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} L_1 &= L'_1, \quad L_2 = L'_2, \quad L_3 = L'_3 + \lambda_1, \quad L_4 = L'_4, \quad L_5 = L'_5 - \lambda_2, \\ L_6 &= L'_6, \quad L_7 = L'_7 + \frac{\lambda_1}{12} + \frac{\lambda_2}{6}, \quad L_8 = L'_8 - \frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{2}, \quad L_9 = L'_9, \\ L_{10} &= L'_{10}, \quad H_1 = H'_1, \quad H_2 = H'_2 + \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2, \\ c_1 &= -\frac{\lambda_1}{4}, \quad c_2 = -\frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{2}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае бозонизации модели НИЛ коэффициенты $\lambda_{1,2}$ определяются соотношениями $\lambda_1 = \frac{1}{6} \frac{N_c}{16\pi^2}$ и $\lambda_2 = -\frac{N_c}{16\pi^2} xy$.

Используя метод преобразования полей, можно избавиться от двух последних членов в лагранжиане (5.10). Для этого рассмотрим преобразование

$$U(x) = \exp(iS_2(V))V(x),$$

где $S_2(V)$ представляет собой самый общий вид генератора в p^2 -порядке импульсного разложения:

$$S_2(V) = i\alpha_1(D^2VV^\dagger - V\bar{D}^2V^\dagger) + i\alpha_2\left(\chi V^\dagger - V\chi^\dagger - \frac{1}{3}\text{tr}(\chi V^\dagger - V\chi^\dagger)\right)$$

с произвольными реальными параметрами α_1 и α_2 . Рассмотрим изменение функционального вида лагранжиана $\mathcal{L}_2$ (5.2) при преобразованиях полей *. Подставляя $U = \exp(iS)V$ в $\mathcal{L}_2(U)$ и отбрасывая полные производные, получим

$$\mathcal{L}_2(U) = \mathcal{L}_2(V) + \delta^{(1)}\mathcal{L}_2(V, S) + \delta^{(2)}\mathcal{L}_2(V, S) + \dots, \quad (5.11)$$

где верхние индексы в скобках обозначают степени S (или $D_\mu S, \dots$), и соответствующие вклады можно выразить в виде

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\mathcal{L}_2(V, S) &= \frac{F_0^2}{4}\text{tr}\left(iS\mathcal{O}_{EOM}^{(2)}(V)\right) = O(p^4), \\ \delta^{(2)}\mathcal{L}_2(V, S) &= \frac{F_0^2}{4}\text{tr}\left(S(D_\mu VV^\dagger D'^\mu S - D'^\mu S D_\mu VV^\dagger - D'^2 S) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\chi V^\dagger + V\chi^\dagger)S^2\right) = O(p^6), \\ \delta^{(3)}\mathcal{L}_2(V, S) &= O(p^2) \times O(S^3) = O(p^8). \end{aligned}$$

Последний член представляет интерес только при учете вкладов $O(p^8)$, поэтому здесь не приведен его явный вид.

В дальнейшем мы не будем предполагать равенства нулю выражения (5.9), несмотря на то, что оно имеет функциональный вид уравнений движений, возникающих из $\mathcal{L}_2$. В случае, если

$$\alpha_1 = \frac{4c_1}{F_0^2} = -\frac{\lambda_1}{F_0^2}, \quad \alpha_2 = \frac{4c_2}{F_0^2} = -\frac{\lambda_1}{F_0^2} - \frac{2\lambda_2}{F_0^2},$$

*После преобразований полей лагранжианы $\mathcal{L}_n(U)$ содержат также производные полей V порядка выше, чем p^{2n} .

член $\delta^{(1)}\mathcal{L}_2(V, S_2)$ в точности сокращает последние два члена в (5.10) ($U \rightarrow V$ в p^4 -порядке), и эффективный p^4 -лагранжиан приводится к минимальному виду (5.7) со структурными константами $L_i = N_c/(16\pi^2) \cdot l_i$ и $H_i = N_c/(16\pi^2) \cdot h_i$, определяемыми соотношениями

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{24}, \quad l_2 = \frac{1}{12}, \quad l_3 = -\frac{1}{6}, \quad l_4 = 0, \quad l_5 = x(y-1), \quad l_6 = 0, \\ l_7 &= -\frac{1}{6}\left(xy - \frac{1}{12}\right), \quad l_8 = \left(\frac{1}{2}x - x^2\right)y - \frac{1}{24}, \quad l_9 = \frac{1}{3}, \quad l_{10} = -\frac{1}{6}, \\ h_1 &= -\frac{1}{6}\left(y - \frac{1}{2}\right), \\ h_2 &= -(x + 2x^2)y + \frac{1}{12} - 2x^2y\left(1 - \frac{\Lambda^2}{\mu^2}e^{-\mu^2/\Lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где

$$x = -\mu F_0^2/(2 \langle \bar{q}q \rangle), \quad y = 4\pi^2 F_0^2/(N_c \mu^2). \quad (5.13)$$

Структурные коэффициенты (5.12) согласуются с результатами, полученными в работе [20].

Рассмотрим теперь эффективный лагранжиан, полученный из бозонизации модели НИЛ в p^6 -порядке. Прежде всего, вклад в этот лагранжиан дают дополнительные члены, возникающие из $\mathcal{L}_{\text{fin}}^{(p^4)}$ (5.5) после подстановки $\Phi \rightarrow \Phi + m_0^*$, а также конечная часть эффективного действия $\mathcal{L}_{\text{fin}}^{(p^4)}$, соответствующая коэффициентам теплопроводности h_3, h_4, h_5 и h_6 (см. выражение (A.1) в Приложении). Вклады p^6 -порядка возникают также из $\delta^{(2)}\mathcal{L}_2(V, S_2)$ (5.12). Для явного представления этих вкладов удобно ввести операторы

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{tr} \left((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \{ D_\mu U U^\dagger, (D^\mu \chi U^\dagger + U D^\mu \chi^\dagger) \} \right), \\ A_2 &= \text{tr} \left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right) \text{tr} \left(D_\mu U U^\dagger (D^\mu \chi U^\dagger + U D^\mu \chi^\dagger) \right), \\ A_3 &= \text{tr} \left((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) D_\mu U U^\dagger (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) D^\mu U U^\dagger \right), \\ A_4 &= \text{tr} \left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right) \text{tr} \left(D_\mu U D^\mu U^\dagger (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \right), \\ A_5 &= \text{tr} \left((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) (D^2 \chi U^\dagger - U D^2 \chi^\dagger) \right), \\ A_6 &= \text{tr} \left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right) \text{tr} \left(D^2 \chi U^\dagger - U D^2 \chi^\dagger \right), \end{aligned}$$

в терминах которых изменения второго порядка в S_2 запишутся в виде

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \frac{F_0^2}{4} \left(-A_1 + \frac{2}{3}A_2 + A_3 + \frac{1}{3}A_4 + A_5 - \frac{1}{3}A_6 \right). \quad (5.14)$$

* Напомним, что в определение дираковского оператора (2.4) входит комбинация $\Phi + m_0$, причем m_0 является величиной p^2 -порядка.

При получении выражения (5.14) применялись отбрасывание полных производных и преобразования полей с генераторами p^4 -порядка. (Здесь мы опять использовали символ U для записи окончательных выражений после преобразований полей. Матрица U теперь содержит уже не исходные, а преобразованные интерполирующие поля.)

Другим источником p^6 -вкладов в бозонизованный лагранжиан является модификация $\mathcal{L}_4$ при преобразованиях полей, которую можно представить в виде

$$\mathcal{L}_4(U) = \mathcal{L}_4(V) + \delta^{(1)}\mathcal{L}_4(V, S) + O(p^8), \quad (5.15)$$

где

$$\delta^{(1)}\mathcal{L}_4(V, S) = \frac{F_0^2}{4} \text{tr} \left(iS \mathcal{O}_{EOM}^{(4)}(V) \right) = O(p^6).$$

Из лагранжиана (5.6) можно получить p^4 -вклад в оператор уравнения движения $\mathcal{O}_{EOM}^{(4)}(U)$:

$$\mathcal{O}_{EOM}^{(4)}(U) = \frac{4}{F_0} \left(E_4 - \frac{1}{3} \text{tr}(E_4) \right),$$

где

$$\begin{aligned} E_4 = & (2L'_1 - L'_2) \text{tr} (D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger) \cdot (-U \bar{D}^2 U^\dagger + D^2 U U^\dagger) + \\ & + 2L'_2 \left[-U \bar{D}_\mu (\bar{D}_\nu U^\dagger D^\mu U \bar{D}^\nu U^\dagger) + D_\mu (D_\nu U \bar{D}^\mu U^\dagger D^\nu U) U^\dagger \right] + \\ & + 2(2L'_2 + L'_3) \left[-U \bar{D}_\mu (\bar{D}^\mu U^\dagger D_\nu U \bar{D}^\nu U^\dagger) + \right. \\ & \quad \left. + D_\mu (D_\nu U \bar{D}^\nu U^\dagger D^\mu U) U^\dagger \right] + \\ & + L'_4 \left[\text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \cdot (D^2 U U^\dagger - U \bar{D}^2 U^\dagger) + \right. \\ & \quad \left. + \text{tr} (D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger) \cdot (U \chi^\dagger - \chi U^\dagger) \right] + \\ & + L'_5 \left[-U \bar{D}_\mu (\bar{D}^\mu U^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)) + D_\mu ((\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) D^\mu U) U^\dagger + \right. \\ & \quad \left. + U \chi^\dagger D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger - D_\mu U \bar{D}^\mu U^\dagger \chi U^\dagger \right] + \\ & + 2L'_6 \text{tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \cdot (U \chi^\dagger - \chi U^\dagger) - \\ & - 2L'_7 \text{tr} (\chi U^\dagger - \chi^\dagger) \cdot (U \chi^\dagger + \chi U^\dagger) + \\ & + L'_8 \left[(U \chi^\dagger)^2 - (\chi U^\dagger)^2 \right] + \\ & + L'_9 \left[-U \bar{D}^\nu (F_{\mu\nu}^R \bar{D}^\mu U^\dagger) + D^\mu (D^\nu U F_{\mu\nu}^R) U^\dagger - \right. \\ & \quad \left. - U \bar{D}^\mu (\bar{D}^\nu U^\dagger F_{\mu\nu}^L) + D^\nu (F_{\mu\nu}^L D^\mu U) U^\dagger \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - L'_{10} \left[U F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\nu} - F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu} U^\dagger \right] + \\
& + \lambda'_1 \left[U \overline{D}^2 \overline{D}^2 U^\dagger - D^2 D^2 U U^\dagger \right] + \lambda'_2 \left[U \overline{D}^2 \chi^\dagger - D^2 \chi U^\dagger \right]. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

В конечном итоге эффективный p^6 -лагранжиан можно привести к минимальному числу линейно независимых структур с ненулевыми коэффициентами Q_i *:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_6 = & \text{tr} \left\{ Q_1 (L_\mu L_\nu L^\nu)^2 + \right. \\
& + Q_2 (L_\mu L^\mu)^3 + \\
& + Q_3 L_\alpha L^\alpha (L_\mu L_\nu)^2 + \\
& + Q_4 (L_\mu L_\nu L_\alpha)^2 + \\
& + Q_5 (L_\mu L_\nu L^\mu)^2 + \\
& + Q_6 \left(L_\mu L^\mu D_\alpha D_\nu U \overline{D}^\alpha \overline{D}^\nu U^\dagger + R_\mu R^\mu \overline{D}_\alpha \overline{D}_\nu U^\dagger D^\alpha D^\nu U \right) + \\
& + Q_7 \left(L_\mu L_\nu D_\alpha D^\nu U \overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu U^\dagger + R_\mu R_\nu \overline{D}_\alpha \overline{D}^\nu U^\dagger D^\alpha D^\mu U \right) + \\
& + Q_8 \left(L_\mu L_\nu D_\alpha D^\mu U \overline{D}^\alpha \overline{D}^\nu U^\dagger + R_\mu R_\nu \overline{D}_\alpha \overline{D}^\mu U^\dagger D^\alpha D^\nu U \right) + \\
& + Q_9 L_\mu L_\nu L^\nu L^\mu (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) + \\
& + Q_{10} (L_\mu L_\nu)^2 (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) + \\
& + Q_{11} (L_\mu L^\mu)^2 (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) + \\
& + Q_{12} \left(\chi R^\mu U^\dagger (D_\mu D_\nu U + D_\nu D_\mu U) U^\dagger L^\nu + \right. \\
& \quad \left. + \chi^\dagger L^\mu U (\overline{D}_\mu \overline{D}_\nu U^\dagger + \overline{D}_\nu \overline{D}_\mu U^\dagger) U R^\nu \right) + \\
& + Q_{13} \left[\chi (\overline{D}_\mu \overline{D}_\nu U^\dagger L^\mu L^\nu + R^\nu R^\mu U \overline{D}_\mu \overline{D}_\nu U^\dagger) + \right. \\
& \quad \left. + \chi^\dagger (D_\mu D_\nu U R^\mu R^\nu + L^\nu L^\mu D_\mu D_\nu U) \right] + \\
& + Q_{14} \left[\chi \left(U^\dagger D_\mu D_\nu U \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu U^\dagger + \overline{D}_\mu \overline{D}_\nu U^\dagger D^\mu D^\nu U U^\dagger \right) + \right. \\
& \quad \left. + \chi^\dagger \left(U \overline{D}_\mu \overline{D}_\nu U^\dagger D^\mu D^\nu U + D_\mu D_\nu U \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu U^\dagger U \right) \right] +
\end{aligned}$$

*В более общем рассмотрении [66] неаномальная часть эффективного p^6 -лагранжиана включает в себя гораздо большее число линейно независимых членов. Однако в рассматриваемом нами конкретном случае бозонизации модели НИЛ ненулевыми оказываются только 65 структурных коэффициентов.

$$\begin{aligned}
 & +Q_{15}\chi^\dagger L_\mu \chi R^\mu + \\
 & +Q_{16}\left(\chi^\dagger \chi R_\mu R^\mu + \chi \chi^\dagger L_\mu L^\mu\right) + \\
 & +Q_{17}\left(U \chi^\dagger U \chi^\dagger L_\mu L^\mu + U^\dagger \chi U^\dagger \chi R_\mu R^\mu\right) + \\
 & +Q_{18}\left[(\chi U^\dagger L_\mu)^2 + (\chi^\dagger U R_\mu)^2\right] + \\
 & +Q_{19}\left[(\chi U^\dagger)^3 + (\chi^\dagger U)^3\right] + \\
 & +Q_{20}\left(U^\dagger \chi \chi^\dagger \chi + U \chi^\dagger \chi \chi^\dagger\right) + \\
 & +Q_{21}\left(F_{\mu\nu}^L\{L_\alpha L^\alpha, L^\mu L^\nu\} + F_{\mu\nu}^R\{R_\alpha R^\alpha, R^\mu R^\nu\}\right) + \\
 & +Q_{22}\left[F_{\mu\nu}^L(L^\mu L_\alpha L^\nu L^\alpha + L_\alpha L^\mu L^\alpha L^\nu) + \right. \\
 & \quad \left.+ F_{\mu\nu}^R(R^\mu R_\alpha R^\nu R^\alpha + R_\alpha R^\mu R^\alpha R^\nu)\right] + \\
 & +Q_{23}\left(F_{\mu\nu}^L L_\alpha L^\mu L^\nu L^\alpha + F_{\mu\nu}^R R_\alpha R^\mu R^\nu R^\alpha\right) + \\
 & +Q_{24}\left(F_{\mu\nu}^L L^\mu L_\alpha L^\alpha L^\nu + F_{\mu\nu}^R R^\mu R_\alpha R^\alpha R^\nu\right) + \\
 & +Q_{25}\left(F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} L_\mu L^\nu L^\mu - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} R_\mu R^\nu R^\mu\right) + \\
 & +Q_{26}\left(F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu}\{L^\nu, L_\mu L^\mu\} - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu}\{R^\nu, R_\mu R^\mu\}\right) + \\
 & +Q_{27}\left[F_{\mu\nu}^L\left(D^\mu D^\alpha U U^\dagger L_\alpha L^\nu - L^\nu L_\alpha U \overline{D}^\mu \overline{D}^\alpha U^\dagger\right) + \right. \\
 & \quad \left.+ F_{\mu\nu}^R\left(\overline{D}^\mu \overline{D}^\alpha U^\dagger U R_\alpha R^\nu - R^\nu R_\alpha U^\dagger D^\mu D^\alpha U\right)\right] + \\
 & +Q_{28}\left[F_{\mu\nu}^L\left(L^\nu D^\mu D^\alpha U U^\dagger L_\alpha - L_\alpha U \overline{D}^\mu \overline{D}^\alpha U^\dagger L^\nu\right) + \right. \\
 & \quad \left.+ F_{\mu\nu}^R\left(R^\nu \overline{D}^\mu \overline{D}^\alpha U^\dagger U R_\alpha - R_\alpha U^\dagger D^\mu D^\alpha U R^\nu\right)\right] + \\
 & +Q_{29}\left[(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)\{F_{\mu\nu}^L, L^\mu L^\nu\} + (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi)\{F_{\mu\nu}^R, R^\mu R^\nu\}\right] + \\
 & +Q_{30}\left((\chi U^\dagger - U \chi^\dagger)[F_{\mu\nu}^L, L^\mu L^\nu] + (\chi^\dagger U - U^\dagger \chi)[F_{\mu\nu}^R, R^\mu R^\nu]\right) + \\
 & +Q_{31}\left[F_{\mu\nu}^L L^\mu (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) L^\nu + F_{\mu\nu}^R R^\mu (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) R^\nu\right] + \\
 & +Q_{32}\left[\chi\left(\overline{D}^\mu \overline{D}^\nu U^\dagger F_{\mu\nu}^L - F_{\mu\nu}^R \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu U^\dagger\right) + \right. \\
 & \quad \left.+ \chi^\dagger\left(D^\mu D^\nu U F_{\mu\nu}^R - F_{\mu\nu}^L D^\mu D^\nu U\right)\right] + \\
 & +Q_{33}\left[\chi\left(U^\dagger F_{\mu\nu}^L D^\mu D^\nu U U^\dagger - U^\dagger D^\mu D^\nu U F_{\mu\nu}^R U^\dagger\right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\chi^\dagger \left(U F_{\mu\nu}^R \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U - U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger F_{\mu\nu}^L U \right) \Big] + \\
& +Q_{34} \left[\chi \left(U^\dagger F_{\mu\nu}^L U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger - \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu U^\dagger U F_{\mu\nu}^R U^\dagger \right) + \right. \\
& \quad \left. +\chi^\dagger \left(U F_{\mu\nu}^R U^\dagger D^\mu D^\nu U - D^\mu D^\nu U U^\dagger F_{\mu\nu}^L U \right) \right] + \\
& +Q_{35} \left[\chi \left(U^\dagger D^\mu D^\nu U U^\dagger F_{\mu\nu}^L - F_{\mu\nu}^R U^\dagger D^\mu D^\nu U U^\dagger \right) + \right. \\
& \quad \left. +\chi^\dagger \left(U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U F_{\mu\nu}^R - F_{\mu\nu}^L U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U \right) \right] + \\
& +Q_{36} \left[F^{L\alpha}{}_{\alpha\mu} (L^\mu U \chi^\dagger + \chi U^\dagger L^\mu) - F^{R\alpha}{}_{\alpha\mu} (R^\mu U^\dagger \chi + \chi^\dagger U R^\mu) \right] + \\
& +Q_{37} \left[F^{L\alpha}{}_{\alpha\mu} (L^\mu \chi U^\dagger + U \chi^\dagger L^\mu) - F^{R\alpha}{}_{\alpha\mu} (R^\mu \chi^\dagger U + U^\dagger \chi R^\mu) \right] + \\
& +Q_{38} \left[F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} \left(D^\mu D^\nu U U^\dagger L_\mu + L_\mu U \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger \right) - \right. \\
& \quad \left. - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} \left(\bar{D}^\mu \bar{D}^\nu U^\dagger U R_\mu + R_\mu U^\dagger D^\mu D^\nu U \right) \right] + \\
& +Q_{39} F_{\mu\nu}^L D_\alpha U F^{R\mu\nu} \bar{D}^\alpha U^\dagger + \\
& +Q_{40} F_{\alpha\mu}^L D_\nu U F^{R\alpha\nu} \bar{D}^\mu U^\dagger + \\
& +Q_{41} F_{\alpha\mu}^L D^\mu U F^{R\alpha\nu} \bar{D}_\nu U^\dagger + \\
& +Q_{42} \left[(F_{\mu\nu}^L)^2 L_\alpha L^\alpha + (F_{\mu\nu}^R)^2 R_\alpha R^\alpha \right] + \\
& +Q_{43} \left(L_\alpha L^\alpha U F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\nu} + R_\alpha R^\alpha U^\dagger F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu} \right) + \\
& +Q_{44} \left(F_{\mu\alpha}^L F^{L\alpha\nu} L^\mu L_\nu + F_{\mu\alpha}^R F^{R\alpha\nu} R^\mu R_\nu \right) + \\
& +Q_{45} \left(F_{\mu\alpha}^L F^{L\alpha\nu} L_\nu L^\mu + F_{\mu\alpha}^R F^{R\alpha\nu} R_\nu R^\mu \right) + \\
& +Q_{46} \left[F_{\mu\nu}^L (D^\mu D_\alpha U + D_\alpha D^\mu U) F^{R\nu\alpha} U^\dagger + \right. \\
& \quad \left. + F_{\mu\nu}^R (\bar{D}^\mu \bar{D}_\alpha U^\dagger + \bar{D}_\alpha \bar{D}^\mu U^\dagger) F^{L\nu\alpha} U \right] + \\
& +Q_{47} \left[F_{\mu\nu}^L F^{L\nu\alpha} (U \bar{D}^\mu \bar{D}_\alpha U^\dagger + D_\alpha D^\mu U U^\dagger) + \right. \\
& \quad \left. + F_{\mu\nu}^R F^{R\nu\alpha} (U^\dagger D^\mu D_\alpha U + \bar{D}_\alpha \bar{D}^\mu U^\dagger U) \right] + \\
& +Q_{48} \left(F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} [L_\mu, U F^{R\mu\nu} U^\dagger] - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} [R_\mu, U^\dagger F^{L\mu\nu} U] \right) + \\
& +Q_{49} \left(F^{L\alpha}{}_{\alpha\nu} [L_\mu, F^{L\mu\nu}] - F^{R\alpha}{}_{\alpha\nu} [R_\mu, F^{R\mu\nu}] \right) + \\
& +Q_{50} F^{L\mu}{}_{\mu\alpha} U F^{R\nu\alpha} U^\dagger + \\
& +Q_{51} \left[(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) (F_{\mu\nu}^L)^2 + (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) (F_{\mu\nu}^R)^2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +Q_{52}\left(\chi U^\dagger F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu} U^\dagger + \chi^\dagger U F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\nu} U\right) + \\
 & +Q_{53}\left(\chi F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\nu} + \chi^\dagger F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\nu}\right) + \\
 & +Q_{54}\left[\left(F_{\mu\nu\alpha}^L\right)^2 + \left(F_{\mu\nu\alpha}^R\right)^2\right] \\
 & +Q_{55}\left[\left(F^{L\mu}{}_{\mu\alpha}\right)^2 + \left(F^{R\mu}{}_{\mu\alpha}\right)^2\right] + \\
 & +Q_{56}\left(F_{\mu\nu}^L U F^{R\mu\alpha} U^\dagger F_{\alpha}^{L\nu} + F_{\mu\nu}^R U^\dagger F^{L\mu\alpha} U F_{\alpha}^{R\nu}\right) + \\
 & +Q_{57}\left(F_{\mu\nu}^L F^{L\mu\alpha} F^{L\nu}{}_{\alpha} + F_{\mu\nu}^R F^{R\mu\alpha} F^{R\nu}{}_{\alpha}\right)\Big\} + \\
 & + \operatorname{tr}\left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger\right) \operatorname{tr}\left\{Q_{58}\left\{L_{\mu}, L_{\nu}\right\}\left(U \overline{D}_{\mu} \overline{D}_{\nu} U^\dagger - D_{\mu} D_{\nu} U U^\dagger\right) + \right. \\
 & +Q_{59} L_{\mu} L^{\mu}\left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger\right) + \\
 & +Q_{60}\left[\left(\chi U^\dagger\right)^2 - \left(\chi^\dagger U\right)^2\right] + \\
 & \left.+Q_{61}\left(F_{\mu\nu}^L L^{\mu} L^{\nu} - F_{\mu\nu}^R R^{\mu} R^{\nu}\right)\right\} + \\
 & + \operatorname{tr}\left(\chi \overline{D}_{\mu} U^\dagger - D_{\mu} U \chi^\dagger\right) \operatorname{tr}\left[Q_{62} L_{\nu} L^{\mu} L^{\nu} + Q_{63}\left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\right) L^{\mu} + \right. \\
 & \left.+Q_{64}\left(F_{\nu}^{L\nu\mu} - F_{\nu}^{R\nu\mu}\right)\right] + \\
 & + \left[\operatorname{tr}\left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger\right)\right]^2 Q_{65} \operatorname{tr}\left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\right). \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

Здесь $Q_i = N_c / (32\pi^2 \mu^2) \cdot q_i$, и

$$\begin{aligned}
 q_1 &= -\frac{3}{10}, \quad q_2 = -\frac{7}{30}, \quad q_3 = \frac{1}{3}, \quad q_4 = \frac{1}{30}, \\
 q_5 &= -\frac{1}{10}, \quad q_6 = \frac{1}{15}, \quad q_7 = \frac{1}{30}, \quad q_8 = -\frac{1}{30}, \\
 q_9 &= \frac{1}{6}(1 - 2x + 2c), \quad q_{10} = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} + x - c\right), \\
 q_{11} &= \frac{3}{20} - \frac{2}{3}c, \quad q_{12} = \frac{1}{60}, \quad q_{13} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{20} - x + c\right), \quad q_{14} = \frac{x}{6}, \\
 q_{15} &= \frac{2}{3}x(1 - x) - \left(\frac{1}{3} - 2x\right)c,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{16} &= -\frac{1}{120} + \frac{4}{3}x^2 + \frac{x}{6}(1-4x) - 2\left(x - \frac{1}{6}\right)c, \\
q_{17} &= \frac{1}{120} + \frac{x}{6}(1-4x) - \left(x + \frac{1}{6}\right)c, \quad q_{18} = \frac{4}{3}x^2 + \left(\frac{1}{6} - x\right)c, \\
q_{19} &= -\frac{1}{240} - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x(1+2xy)c, \\
q_{20} &= \frac{1}{240} + x^2 + 2x^3 - 4yx^3 - x(1+2xy)c, \\
q_{21} &= -\frac{1}{3}, \quad q_{22} = \frac{3}{10}, \\
q_{23} &= -\frac{1}{6}, \quad q_{24} = -\frac{1}{2}, \quad q_{25} = \frac{2}{15}, \quad q_{26} = -\frac{11}{30}, \quad q_{27} = -\frac{1}{15}, \\
q_{28} &= -\frac{1}{15}, \quad q_{29} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{5} - x\right), \quad q_{30} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10} - 2x + 2c\right), \\
q_{31} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{15} - x\right), \quad q_{32} = -\frac{x}{2} + \frac{c}{3}, \quad q_{33} = -\frac{x}{6} + \frac{c}{3}, \\
q_{34} &= \frac{x}{6}, \quad q_{35} = -\frac{x}{6}, \quad q_{36} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - x + c\right), \\
q_{37} &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10} - x + c\right), \quad q_{38} = \frac{1}{15}, \quad q_{39} = -\frac{1}{180}, \quad q_{40} = -\frac{1}{5}, \\
q_{41} &= -\frac{1}{5}, \quad q_{42} = -\frac{1}{360}, \quad q_{43} = \frac{1}{6}, \quad q_{44} = \frac{1}{3}, \quad q_{45} = \frac{1}{5}, \\
q_{46} &= \frac{1}{6}, \quad q_{47} = -\frac{1}{6}, \quad q_{48} = -\frac{1}{6}, \quad q_{49} = -\frac{1}{30}, \quad q_{50} = \frac{1}{15}, \\
q_{51} &= -\frac{x}{3}, \quad q_{52} = -\frac{1}{6}(1+x-c), \quad q_{53} = \frac{1}{6}(1+x-c), \\
q_{54} &= \frac{41}{540}, \quad q_{55} = -\frac{7}{135}, \quad q_{56} = -\frac{1}{6}, \quad q_{57} = \frac{1}{2}, \quad q_{58} = \frac{1}{180}, \\
q_{59} &= -\frac{1}{30}\left[\frac{1}{4} + 5c\left(\frac{1}{3} + 2x(1+y)\right)\right], \\
q_{60} &= -\frac{1}{180}\left[1 + 30cx(1+y+4xy)\right], \quad q_{61} = \frac{1}{45}, \quad q_{62} = \frac{1}{45}, \\
q_{63} &= \frac{1}{9}, \quad q_{64} = \frac{1}{90}, \quad q_{65} = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{90} - 17cxy\right). \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Члены с фактором $c = \left(1 - \frac{1}{6y}\right)$ возникают из p^4 -части уравнения движений (5.16); $F_{\alpha\mu\nu}^R = \overline{D}'_{\alpha} F_{\mu\nu}^R$ и $F_{\alpha\mu\nu}^L = D'_{\alpha} F_{\mu\nu}^L$.

Для получения выражения (5.17) мы использовали эквивалентные преобразования, вытекающие из свойств ковариантных производных (5.4) и урав-

нений движения, а также из дифференцирования условия унитарности $UU^\dagger = 1$:

$$\begin{aligned} D_\mu U U^\dagger &= -U \overline{D}_\mu U^\dagger, & U^\dagger D_\mu U &= -\overline{D}_\mu U^\dagger U, \\ D_\mu D_\nu U U^\dagger + U \overline{D}_\mu \overline{D}_\nu U^\dagger &= - (D_\mu U \overline{D}_\nu U^\dagger + D_\nu U \overline{D}_\mu U^\dagger), \\ U^\dagger D_\mu D_\nu U + \overline{D}_\mu \overline{D}_\nu U^\dagger U &= - (\overline{D}_\mu U^\dagger D_\nu U + \overline{D}_\nu U^\dagger D_\mu U). \end{aligned}$$

6. РЕДУКЦИЯ ВЕКТОРНЫХ, АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНЫХ И СКАЛЯРНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В модели НИЛ, рассматриваемой в настоящей работе, легкие составные псевдоскалярные голдстоуновские бозоны выступают киральными партнерами более тяжелых динамических векторных, аксиально-векторных и скалярных мезонов (резонансов). Независимо от метода включения мезонных резонансов в эффективный киральный лагранжиан, учет резонансных обменов существенно модифицирует константы связи низкоэнергетических взаимодействий в псевдоскалярном секторе. В частности, в работах [67, 68] было показано, что структурные константы L_i псевдоскалярного p^4 -лагранжиана Гассера — Лейтвилера в основном насыщаются вкладами обменов мезонными резонансами между вершинами, описываемыми лагранжианом p^2 -порядка. Поэтому если при вычислении p^4 -амплитуд взаимодействий в псевдоскалярном секторе одновременно учитываются вершины p^4 -лагранжиана (5.7) и диаграммы с резонансными обменами между вершинами p^2 -лагранжиана (5.2), то это может приводить к двойному счету, обсуждавшемуся в работе [67].

Чтобы избежать двойного счета, нужно проинтегрировать в производящем функционале (2.5) по векторным, аксиально-векторным и скалярным полям. При такой редукции резонансных степеней свободы получается эффективный псевдоскалярный лагранжиан, структурные константы которого модифицированы вкладами резонансных обменов [69].

Чтобы проинтегрировать по векторным, аксиально-векторным и скалярным полям в неаномальной части эффективного мезонного действия, мы будем использовать инвариантность модуля кваркового детерминанта относительно локальных $U_L(n) \times U_R(n)$ -преобразований (2.8) *. С помощью специально выбранного кирального поворота, соответствующего “единичной” калибровке, $\xi_L^\dagger = \xi_R = \Omega$, мы можем полностью исключить псевдоскалярные степени свободы из повернутого дираковского оператора. Кроме того, до применения такого поворота удобно также дополнительно произвести сдвиг

* Квадратичная по полям Φ , V_μ , A_μ гауссовская часть эффективного действия (2.6), а также киральные аномалии неинвариантны относительно киральных поворотов (2.8).

$\Phi \rightarrow \Phi - m_0$, который приведет к появлению псевдоскалярного массового члена из гауссовской части эффективного действия (2.6) *.

После указанных преобразований повернутый дираковский оператор примет вид

$$i\hat{\mathbf{D}} \rightarrow i\hat{\tilde{\mathbf{D}}} = (P_L\Omega + P_R\Omega^\dagger)i\hat{\mathbf{D}}(P_L\Omega + P_R\Omega^\dagger) = i(\hat{\partial} + \hat{V} + \hat{A}\gamma_5) - \Sigma, \quad (6.1)$$

и псевдоскалярные степени свободы сохранятся только в квадратичной по полям гауссовской части эффективного действия, которая в терминах повернутых полей $\tilde{V}_\mu, \tilde{A}_\mu$ (2.8) записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_0 = & -\frac{1}{4G_1}\text{tr} \left[(\mu + m_0 + \sigma)^2 - (\mu + m_0 + \sigma)(\xi_R m_0 \xi_L^\dagger + \xi_L m_0 \xi_R^\dagger) - m_0^2 \right] \\ & - \left(\frac{m_V^0}{g_V^0} \right)^2 \text{tr} [(\tilde{V}_\mu - v_\mu)^2 + (\tilde{A}_\mu - a_\mu)^2]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь скалярная степень свободы $\sigma(x)$ возникает как квантовая флуктуация поля $\Sigma(x)$ вокруг его вакуумного ожидания μ : $\Sigma(x) = \mu + \sigma(x)$; $(m_V^0/g_V^0)^2 = 1/(4G_2)$, где m_V^0 и g_V^0 — затравочные значения массы и константы связи векторного калибровочного поля;

$$v_\mu = \frac{1}{2}(\Omega\partial_\mu\Omega^\dagger + \Omega^\dagger\partial_\mu\Omega), \quad a_\mu = \frac{1}{2}(\Omega\partial_\mu\Omega^\dagger - \Omega^\dagger\partial_\mu\Omega).$$

Расходящаяся часть кваркового детерминанта для повернутого дираковского оператора примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{div}} = & \frac{N_c}{16\pi^2} y \text{tr} \left\{ \left(\partial_\mu \sigma + [\tilde{V}_\mu, m_0 + \sigma] \right)^2 - \left(2\mu\tilde{A}_\mu + \{\tilde{A}_\mu, m_0 + \sigma\} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{6} \left[(\tilde{F}_{\mu\nu}^R)^2 + (\tilde{F}_{\mu\nu}^L)^2 \right] - \left. \left((\mu + m_0 + \sigma)^2 - \mu^2 \right)^2 \right\} + \\ & + \frac{N_c}{16\pi^2} 2 \left(\Lambda^2 e^{-\mu^2/\Lambda^2} - \mu^2 y \right) \text{tr} [(\mu + m_0 + \sigma)^2 - \mu^2]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Если пренебречь квантовыми флуктуациями поля Σ вокруг его вакуумного ожидания, соответствующие p^4 -члены конечной части кваркового детерминанта примут вид

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{fin}}^{(4)}(\Sigma = \mu) = \frac{N_c}{32\pi^2} \text{tr} \left\{ [\tilde{V}_\mu, \tilde{A}^\mu]^2 + \frac{8}{3}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu)^2 - \frac{8}{3}\tilde{A}^\mu \tilde{A}^\nu (\tilde{F}_{\mu\nu}^L + \tilde{F}_{\mu\nu}^R) + \right.$$

* Псевдоскалярный массовый член в эффективном лагранжиане (5.2) возникает из расходящейся части кваркового детерминанта.

$$+\frac{1}{3}\tilde{F}_{\mu\nu}^R\tilde{F}^{L\mu\nu}-\frac{1}{6}\left[(\tilde{F}_{\mu\nu}^L)^2+(\tilde{F}_{\mu\nu}^R)^2\right]\Big\}. \quad (6.4)$$

Так как массы векторных, аксиально-векторных и скалярных мезонов намного больше по сравнению с массой пиона, интегрирование по скалярному полю σ и повернутым полям $\tilde{V}_\mu$ и $\tilde{A}_\mu$ в производящем функционале модели НИЛ можно произвести с помощью уравнений движений, возникающих в статическом пределе [70] из массовых членов лагранжианов (6.2) и (6.3). В таком приближении как кинетические члены $(\tilde{F}_{\mu\nu}^{R/L})^2$ для повернутых полей $\tilde{V}_\mu$ и $\tilde{A}_\mu$, так и члены с производными высшего порядка рассматриваются как возмущения.

Кинетические члены $(\tilde{F}_{\mu\nu}^{R/L})^2$, возникающие из суммы лагранжианов (6.3) и (6.4), приводятся к стандартному виду после перенормировки повернутых нефизических векторного и аксиально-векторного полей:

$$\tilde{V}_\mu = \frac{g_V^0}{(1+\tilde{\gamma})^{1/2}}\tilde{V}_\mu^{(ph)}, \quad \tilde{A}_\mu = \frac{g_V^0}{(1-\tilde{\gamma})^{1/2}}\tilde{A}_\mu^{(ph)}.$$

Здесь

$$g_V^0 = \left[\frac{N_c}{48\pi^2}(2y-1)\right]^{-1/2}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{N_c(g_V^0)^2}{48\pi^2},$$

а $\tilde{V}_\mu^{(ph)}, \tilde{A}_\mu^{(ph)}$ — физические поля векторного и аксиально-векторного мезонов с массами

$$m_\rho^2 = \frac{(m_V^0)^2}{1+\tilde{\gamma}}, \quad m_{A_1}^2 = Z_A^{-2}\frac{(m_V^0)^2}{1-\tilde{\gamma}},$$

где

$$Z_A^2 = \left(\frac{m_V^0}{g_V^0}\right)^2 \frac{4\pi^2}{N_c\mu^2 y} \left[1 + \left(\frac{m_V^0}{g_V^0}\right)^2 \frac{4\pi^2}{N_c\mu^2 y}\right]^{-1} \quad (6.5)$$

— фактор, учитывающий πA_1 -смешивание.

Статические уравнения движения возникают из вариаций массовых членов лагранжианов (6.2) и (6.3) по повернутым полям $\tilde{V}_\mu, \tilde{A}_\mu$ и скалярному полю σ . В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\mu &= v_\mu, \quad \tilde{A}_\mu = Z_A^2 a_\mu, \\ \sigma &= \frac{Z_A^2}{8x}(\xi_R m_0 \xi_L^\dagger + \xi_L m_0 \xi_R^\dagger) - m_0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Для включения электромагнитного взаимодействия с фотонным полем $\mathcal{A}_\mu$ нужно просто использовать замену

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\mu &\rightarrow \tilde{V}_\mu + ie\mathcal{A}_\mu \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger + \xi_L Q \xi_L^\dagger), \\ \tilde{A}_\mu &\rightarrow \tilde{A}_\mu + ie\mathcal{A}_\mu \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger - \xi_L Q \xi_L^\dagger). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Чтобы получить редуцированный псевдоскалярный лагранжиан с учетом электромагнитного взаимодействия, необходимо сначала произвести в кварковом детерминанте с повернутым дираковским оператором замену (6.7), а затем, используя статические уравнения движения, восстановить псевдоскалярные степени свободы. В случае редукции векторных и аксиально-векторных резонансов удобно объединить оба шага в подстановках

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu &= v_\mu^{(\gamma)} + ie\mathcal{A}_\mu \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger + \xi_L Q \xi_L^\dagger), \\ \tilde{A}_\mu &= Z_A^2 \left[a_\mu^{(\gamma)} + ie\mathcal{A}_\mu \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger - \xi_L Q \xi_L^\dagger) \right],\end{aligned}$$

или

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^V = (Z_A^4 - 1)[a_\mu^{(\gamma)}, a_\nu^{(\gamma)}] + ie\mathcal{F}_{\mu\nu} \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger + \xi_L Q \xi_L^\dagger), \quad (6.8)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^A = Z_A^2 ie\mathcal{F}_{\mu\nu} \frac{1}{2}(\xi_R Q \xi_R^\dagger - \xi_L Q \xi_L^\dagger). \quad (6.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}v_\mu^{(\gamma)} &= \frac{1}{2}(\Omega \partial_\mu^{(\gamma)} \Omega^\dagger + \Omega^\dagger \partial_\mu^{(\gamma)} \Omega), \\ a_\mu^{(\gamma)} &= \frac{1}{2}(\Omega \partial_\mu^{(\gamma)} \Omega^\dagger - \Omega^\dagger \partial_\mu^{(\gamma)} \Omega) = -\frac{1}{2}\xi_R^\dagger L_\mu^{(\gamma)} \xi_R,\end{aligned}$$

$\partial_\mu^{(\gamma)} * = \partial_\mu * + ie_0 \mathcal{A}_\mu [Q, *]$ — удлиненная производная, учитывающая излучение тормозного фотона, в то время как тензор напряженности электромагнитного поля $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ соответствует структурному фотону, и $L_\mu^{(\gamma)} = (\partial_\mu^{(\gamma)} U) U^\dagger$.

Используя уравнения движений, из членов эффективных лагранжианов (6.2) и (6.3), квадратичных по векторным и аксиально-векторным полям, можно получить кинетический и массовый члены p^2 -лагранжиана в стандартном виде (5.2). При этом определения (5.3) для константы F_0 и мезонной матрицы χ изменяются после редукции следующим образом *:

$$\begin{aligned}F_0^2 = \frac{N_c \mu^2 y}{4\pi^2} &\longrightarrow F_0^2 = Z_A^2 \frac{N_c \mu^2 y}{4\pi^2}, \\ \chi = -2m_0 \mu \left(1 - \frac{\Lambda^2}{y\mu^2} e^{-\mu^2/\Lambda^2} \right) &\longrightarrow \chi = \frac{m_0 \mu}{G_1 F_0^2}.\end{aligned} \quad (6.10)$$

*Используя уравнение шели, можно показать, что оба выражения для χ в соотношениях (6.10) эквивалентны при $\mu^2/\Lambda^2 \ll 1$.

Редукция резонансных степеней свободы приводит также к модификации общей структуры эффективных лагранжианов высших порядков и к перепределению соответствующих структурных коэффициентов. Например, редуцированный лагранжиан, описывающий сильное и электромагнитное взаимодействия в псевдоскалярном секторе в p^4 -порядке, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{\text{red}} = & \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} L_2^{\text{red}} [L_\mu^{(\gamma)}, L_\nu^{(\gamma)}]^2 + (3L_2^{\text{red}} + L_3^{\text{red}}) (L_\mu^{(\gamma)} L^{(\gamma)\mu})^2 - \right. \\ & - L_5^{\text{red}} L_\mu^{(\gamma)} L^{(\gamma)\mu} (U\chi^\dagger + \chi U^\dagger) + L_8^{\text{red}} (\chi^\dagger U \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) - \\ & - L_9^{\text{red}} (ie\mathcal{F}_{\mu\nu}) Q (L^{(\gamma)\mu} L^{(\gamma)\nu} + R^{(\gamma)\mu} R^{(\gamma)\nu}) - \\ & \left. - L_{10}^{\text{red}} (ie\mathcal{F}_{\mu\nu})^2 Q U Q U^\dagger + H_2^{\text{red}} \chi \chi^\dagger \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $L_i^{\text{red}} = \frac{N_c}{16\pi^2} l_i^{\text{red}}$ и $H_i^{\text{red}} = \frac{N_c}{16\pi^2} h_i^{\text{red}}$ — редуцированные структурные коэффициенты, аналогичные коэффициентам стандартного представления Гаспера — Лейтвилера (5.7):

$$\begin{aligned} l_2^{\text{red}} &= \frac{1}{12} \left[Z_A^8 + 2(Z_A^4 - 1) \left(\frac{1}{4} y (Z_A^4 - 1) - Z_A^4 \right) \right], \\ l_3^{\text{red}} &= -\frac{1}{6} \left[Z_A^8 + 3(Z_A^4 - 1) \left(\frac{1}{4} y (Z_A^4 - 1) - Z_A^4 \right) \right], \\ l_5^{\text{red}} &= (y - 1) \frac{1}{4} Z_A^6, \quad l_8^{\text{red}} = \frac{y}{16} Z_A^4, \\ l_9^{\text{red}} &= \frac{1}{3} \left(Z_A^4 - \frac{1}{2} y (Z_A^4 - 1) \right), \quad l_{10}^{\text{red}} = -\frac{1}{6} \left(Z_A^4 - y (Z_A^4 - 1) \right), \\ h_2^{\text{red}} &= y Z_A^2 \left(\frac{Z_A^2}{2} - x \right). \end{aligned}$$

В таком приближении редукция скалярного резонанса дает вклад только в коэффициенты l_5 и l_8 , в то время как все остальные структурные коэффициенты насыщаются обменами векторных и аксиально-векторных резонансов.

За исключением коэффициентов l_3^{red} и l_8^{red} , наши результаты в статическом приближении для уравнений движений согласуются с результатами работы [36], использующей другой подход к учету вкладов резонансных степеней свободы. Указанное расхождение обусловлено, в частности, использованием в подходе [36] операторов с производными. В нашем подходе таким операторам соответствуют поправки высшего порядка к статическим уравнениям движения (6.6), возникающие в том случае, когда в модуле повернутого кваркового детерминанта удерживаются также члены, линейные по скалярному полю σ и содержащие связи с векторными, аксиально-векторными по-

лями и тензорами напряженности. Такие члены возникают как из расходящейся, так и из конечной частей кваркового детерминанта:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_{\text{div}} &\rightarrow -\frac{N_c}{32\pi^2} y \operatorname{tr} (16\mu^2 \tilde{\sigma} \tilde{A}_\mu^2), \\
\tilde{\mathcal{L}}_{\text{fin}}^{(4)} &\rightarrow \frac{N_c}{32\pi^2} \operatorname{tr} \left[16\mu^2 \tilde{\sigma} \tilde{A}_\mu^2 - \frac{4}{3\mu} (\tilde{F}_{\mu\nu}^L + \tilde{F}_{\mu\nu}^R) (\tilde{A}^\mu \{ \tilde{A}^\nu, \tilde{\sigma} \} + \{ \tilde{A}^\mu, \tilde{\sigma} \} \tilde{A}^\nu) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3\mu} \tilde{\sigma} (\tilde{F}_{\mu\nu}^R \tilde{F}^{L\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}^L \tilde{F}^{R\mu\nu}) \right], \\
\tilde{\mathcal{L}}_{\text{fin}}^{(6)} &\rightarrow -\frac{N_c}{32\pi^2} \frac{1}{\mu} \operatorname{tr} \left[\tilde{\sigma} \left((\tilde{F}_{\mu\nu}^L)^2 + (\tilde{F}_{\mu\nu}^R)^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma + m_0$. После вариации по полям $\tilde{V}_\mu$, $\tilde{A}_\mu$ и σ получим соотношения

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_\mu &= v_\mu, \\
\tilde{A}_\mu &= Z_A^2 a_\mu + \frac{2(1 - Z_A^2)}{\mu} \frac{1 - y}{y} \tilde{\sigma} \tilde{A}_\mu, \\
\sigma &= \frac{Z_A^2}{8x} (\xi_R m_0 \xi_L^\dagger + \xi_L m_0 \xi_R^\dagger) - m_0 - \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \frac{y - 1}{y} \tilde{A}_\mu^2 - \frac{1}{12y\mu^3} \left((\tilde{F}_{\mu\nu}^V)^2 + 2(\tilde{F}_{\mu\nu}^A)^2 \right). \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Подставляя в левые части соотношений (6.11) в качестве первых итераций выражения (6.6), мы получим новые уравнения движений, учитывающие поправки высшего порядка к статическому приближению. При этом уравнение движений для векторного поля не изменится. Применение новых уравнений движений приводит к появлению дополнительного вклада к структурному коэффициенту l_3^{red} :

$$l_3^{\text{red (h.o.)}} = \frac{1}{4} \frac{(y - 1)^2}{y} Z_A^8, \quad (6.12)$$

с учетом которого наш результат приходит в согласие с работой [36].

Аналогичным образом, используя уравнения движения (6.11) и подстановки (6.7), можно получить редуцированный эффективный лагранжиан, описывающий сильные и электромагнитные взаимодействия в p^6 -порядке импульсного разложения. Из-за громоздкости мы не приводим здесь полные выражения для редуцированного p^6 -лагранжиана и структурных коэффициентов.

7. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕЗОННЫХ ПРОЦЕССОВ В p^4 - И p^6 -ПОРЯДКАХ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим феноменологию мезонных процессов при низких энергиях с точки зрения проверки бозонизованных киральных лагранжианов в p^4 -порядке импульсного разложения. Этот вопрос детально исследован в литературе (см., например, [33, 36, 38, 40, 69] и ссылки в них на другие работы). Амплитуды мезонных процессов в p^4 -порядке включают в себя вклады как борновских диаграмм, описываемых лагранжианами (5.2) и (5.7), так и однопетлевых диаграмм с вершинами p^2 -порядка (5.2). Возникающие из мезонных петель УФ-расходимости могут быть зафиксированы в киральной теории возмущений [39, 41] с помощью соответствующего лагранжиана контрчленов, либо в рамках квантовой теории поля с мезонными петлями [42] с помощью суперпропагаторной регуляризации [43].

В стандартной киральной теории возмущений [39, 41] (см. также обзоры [40]) используется то обстоятельство, что в размерной регуляризации расходящаяся часть однопетлевого функционала имеет точно такой же вид, как и лагранжиан (5.7), если в нем произвести замену структурных коэффициентов:

$$L_i \rightarrow -\Lambda(\tilde{\mu}) \Gamma_i, \quad H_i \rightarrow -\Lambda(\tilde{\mu}) \tilde{\Gamma}_i,$$

$$\Lambda(\tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\mu}^{d-4}}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} [\ln 4\pi + 1 + \Gamma'(1)] \right\}.$$

Здесь $\Gamma_i, \tilde{\Gamma}_i$ — численные константы, вычисленные в [39]:

$$\Gamma_1 = \frac{3}{32}, \quad \Gamma_2 = \frac{3}{16}, \quad \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_4 = \frac{1}{8}, \quad \Gamma_5 = \frac{3}{8}, \quad \Gamma_6 = \frac{11}{144},$$

$$\Gamma_7 = 0, \quad \Gamma_8 = \frac{5}{48}, \quad \Gamma_9 = \frac{1}{4}, \quad \Gamma_{10} = -\frac{1}{4}, \quad \tilde{\Gamma}_1 = -\frac{1}{8}, \quad \tilde{\Gamma}_2 = \frac{5}{24},$$

а $\tilde{\mu}$ — произвольная шкала перенормировки, имеющая размерность массы. Устранение УФ-расходимостей в однопетлевом функционале производится с помощью перенормировок структурных коэффициентов лагранжиана контрчленов вида (5.7). При этом перенормированные коэффициенты $L_i^r(\tilde{\mu})$ и $H_i^r(\tilde{\mu})$ вводятся таким образом, чтобы в однопетлевом функционале сокращались все расходящиеся части:

$$L_i = L_i^r(\tilde{\mu}) + \Gamma_i \Lambda(\tilde{\mu}), \quad H_i = H_i^r(\tilde{\mu}) + \tilde{\Gamma}_i \Lambda(\tilde{\mu}).$$

При такой процедуре в амплитуде любого мезонного процесса происходит взаимное сокращение зависимостей от $\tilde{\mu}$ во вкладах петель и контрчленов.

Однако сами перенормированные коэффициенты $L_i^r(\tilde{\mu})$ и $H_i^r(\tilde{\mu})$, являющиеся измеряемыми параметрами, зависят от выбора схемы перенормировки и шкалы $\tilde{\mu}$. Последняя зависимость может быть представлена в виде

$$L_i^r(\tilde{\mu}_2) = L_i^r(\tilde{\mu}_1) + \frac{\Gamma_i}{(4\pi)^2} \ln \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_2}, \quad H_i^r(\tilde{\mu}_2) = H_i^r(\tilde{\mu}_1) + \frac{\tilde{\Gamma}_i}{(4\pi)^2} \ln \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\mu}_2}. \quad (7.1)$$

Отсюда видно, что Γ_i и $\tilde{\Gamma}_i$ являются также коэффициентами так называемых киральных логарифмов $\sim \ln(p^2/\tilde{\mu}^2)$ в однопетлевом функционале. Явная зависимость измеряемых перенормированных коэффициентов от произвольного параметра $\tilde{\mu}$ создает определенные трудности при феноменологической проверке бозонизованных лагранжианов, поскольку совершенно не ясно, при каких $\tilde{\mu}$ следует сравнивать извлеченные из экспериментальных данных значения $L_i^r(\tilde{\mu})$ и $H_i^r(\tilde{\mu})$ с теоретическими предсказаниями, полученными из бозонизации модели НИЛ.

Указанный произвол в выборе шкалы $\tilde{\mu}$ можно устранить, используя результаты суперпропагаторной регуляризации [43], которая была разработана специально для вычисления мезонных петель в квантовой теории поля с нелинейными эффективными лагранжианами [42]. Суперпропагаторный подход приводит к тем же результатам, что и размерная регуляризация, используемая в стандартной киральной теории возмущений [39, 41]. Принципиальным отличием является то, что параметр $\tilde{\mu}$ при этом уже не является произвольным, а фиксируется естественной шкалой кирального разложения, а именно $\tilde{\mu}_{SP} = 4\pi F_0$. Для сравнения обоих подходов УФ-расходимости должны быть заменены на конечные члены в соответствии с подстановкой

$$\begin{aligned} (C - 1/\varepsilon) \longrightarrow C_{SP} &= 2C + 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dz} (\ln \Gamma^{-2}(2z + 2)) \right] \Big|_{z=0} + \beta\pi = \\ &= -1 + 4C + \beta\pi, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = (4 - D)/2$, а β — произвольная константа, возникающая из интегрального представления Зоммерфельда — Ватсона для суперпропагатора. Используя дополнительные теоретические аргументы, в том числе принцип минимальной сингулярности, можно показать, что ожидаемые значения C_{SP} должны лежать в пределах значений $C_{SP} \approx 1 \div 4$.

Разумные оценки для параметра C_{SP} можно получить, например, из расщепления констант распадов $K, \pi \rightarrow \mu\nu$, используя для них выражения

$$\begin{aligned} (F_\pi - F_0)F_0 &= 2L_5(\chi_u^2 + \chi_d^2) - \frac{1}{16\pi^2} \frac{2}{3} \left(m_\pi^2(\tilde{C}_K - 1) + 2m_\pi^2(\tilde{C}_\pi - 1) \right), \\ (F_K - F_0)F_0 &= 2L_5(\chi_u^2 + \chi_s^2) - \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2} \left(2m_K^2(\tilde{C}_K - 1) + m_\pi^2(\tilde{C}_\pi - 1) \right), \end{aligned} \quad (7.2)$$

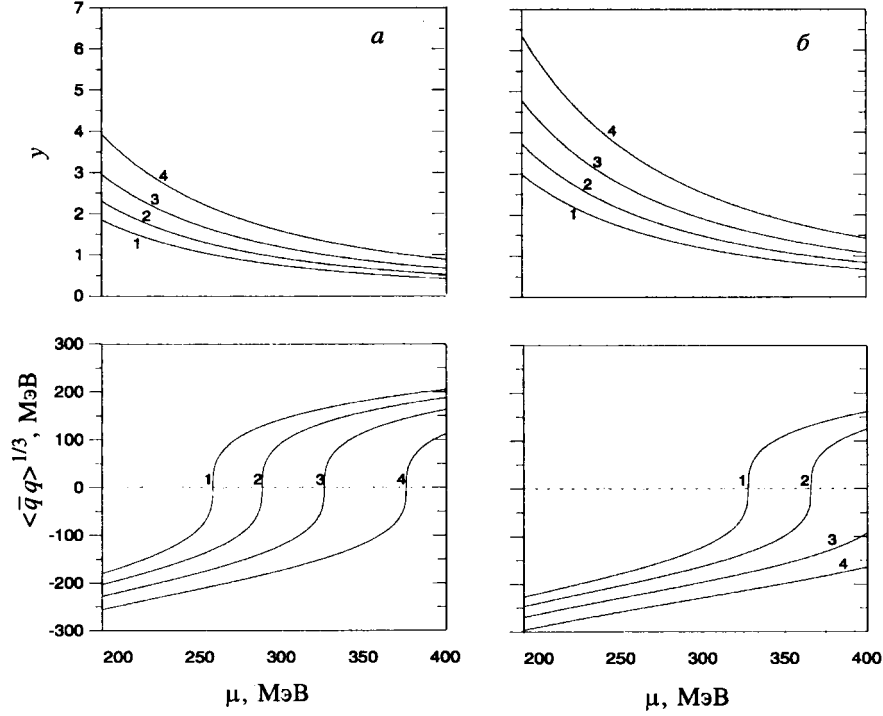


Рис. 3. Зависимость величин y и $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$ от конstituэнтной массы кварка μ : а) без редукции резонансов, б) после редукции резонансов

где $\tilde{C}_{\pi,K} = C_{SP} + \ln(\pi m_{\pi,K}^2/\mu^2)$. Первые члены в правой части выражений (7.2), пропорциональные L_5 , соответствуют борновским вкладам*, в то время как все остальные возникают из однопетлевых диаграмм тадпольного типа. Из расщепления констант распадов F_π и F_K фиксируются также параметры x и y , связанные с кварковым конденсатом $\langle \bar{q}q \rangle$ и усредненной конstituэнтной массой кварков μ соотношениями (5.13).

На рис.3 показаны зависимости от конstituэнтной массы кварка μ для величин y и $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$, получаемых как решения уравнений (7.2) при фиксированных значениях параметра C_{SP} и экспериментальных значениях констант $F_\pi = 93$ МэВ и $F_K = 113$ МэВ. Важность учета редукции резонансных степеней свободы при описании псевдоскалярного сектора наглядно проявляется уже на этом простейшем примере. Заметное различие в поведении кривых для

*Для простоты мы отбросили члены с коэффициентом L_4 , который равен нулю в модели НИЛ.

$\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$ на рис.3,а (без редукции резонансов) и рис.3,б (после редукции резонансов) связана с появлением дополнительного фактора Z_A^2 в определении (6.10) для константы F_0 . Для численных оценок мы используем феноменологическое значение параметра

$$Z_A^2 = \frac{m_\rho^2}{m_{A_1}^2} \frac{1 + \tilde{\gamma}}{1 - \tilde{\gamma}} \approx 0,62,$$

которое соответствует $m_\rho = 770$ МэВ, $m_{A_1} = 1260$ МэВ и $g_V = g_{\rho\pi\pi} = 6,3$. Следует подчеркнуть, что без редукции резонансов (рис.3,а) ни при каких значениях C_{SP} не удастся получить решения для y и $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$, соответствующие общепринятым коридорам значений параметров F_0 , μ и m_0 . Такая фиксация становится возможной только после редукции резонансов (рис.3,б). При $\mu = 265$ МэВ ей соответствуют значения параметров $y = 2, 4$, $x = 0, 10$, $F_0 = 90$ МэВ, $\langle \bar{q}q \rangle^{1/3} = -220$ МэВ и $C_{SP} \approx 3$, которые мы и будем использовать при численных оценках структурных констант бозонизованных лагранжианов.

Таблица. Сравнение теоретических и феноменологических значений структурных констант $L_i \times 10^3$.*

i	Бозонизация модели НИЛ		Феноменология			
	Без редукции резонансов	После редукции резонансов	$L_i^r(m_\rho) \times 10^3$ [44]			$L_i \times 10^3$ [33]
1	0.79	0.85	0.4	$\pm$	0.3	0.8 $\pm$ 0.2
2	1.58	1.70	1.35	$\pm$	0.3	1.6 $\pm$ 0.3
3	-3.17	-4.30	-3.5	$\pm$	1.1	-3.5 $\pm$ 0.6
4	0	0	-0.3	$\pm$	0.5	
5	2.66	1.58	1.4	$\pm$	0.5	1.6 $\pm$ 0.3
6	0	0	-0.2	$\pm$	0.3	
7	0.50	0	-0.4	$\pm$	0.2	
8	1.03	1.10	0.9	$\pm$	0.3	
9	6.34	7.12	6.9	$\pm$	0.7	6.5 $\pm$ 0.5
10	-3.17	-5.90	-5.5	$\pm$	0.7	-3.1 $\pm$ 0.7

Коэффициенты H_1 и H_2 не могут быть зафиксированы феноменологически.

В таблице теоретические предсказания бозонизованной модели НИЛ для констант L_i сравниваются с феноменологическими значениями, полученными в [44] в рамках стандартной киральной теории возмущений, а также в квантовой теории поля с суперпропагаторной регуляризацией [33, 69]. Наиболее полный анализ низкоэнергетических мезонных процессов, проведенный

в работе [44], включает в себя описание спектра масс псевдоскалярных мезонов, расщепления констант F_π и F_K , распадов $\pi \rightarrow e\nu\gamma$ и K_{e4} , а также правило Цвейга. Значения измеряемых перенормированных коэффициентов $L_i(\tilde{\mu})$ фиксировались при $\tilde{\mu} = m_\rho$. В работах [33, 69], использующих суперпропагаторную регуляризацию, анализировались данные по $\pi\pi$ -рассеянию, электромагнитному радиусу и поляризуемости заряженного пиона, а также по распадам $\eta' \rightarrow \eta 2\pi$ и $\pi \rightarrow e\pi\gamma$. Из таблицы видно, что теоретические предсказания для коэффициентов L_i в целом хорошо согласуются с их феноменологическими значениями. Некоторая неоднозначность в фиксации коэффициента L_{10} связана с тем, что в работе [44] для этого использованы данные по формфакторам распада $\pi \rightarrow e\nu\gamma$, в то время как в нашем анализе [69] — данные по процессу $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$. По-видимому, эти данные сами нуждаются в серьезном уточнении, что прежде всего относится к поляризуемости заряженного пиона.

Феноменологическая проверка бозонизованного p^6 -лагранжиана затруднена как большим количеством входящих в него членов, так и тем обстоятельством, что в подавляющем большинстве случаев в амплитудах мезонных процессов доминируют p^2 - и p^4 -вклады. По сравнению с ними p^6 -поправки оказываются настолько малыми, что их выделение из экспериментальных данных становится практически невозможным. Исключением являются переходы $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$, которые оказываются очень чувствительными к p^6 -вкладам благодаря уникальным свойствам их амплитуд. Прежде всего, в обоих случаях ненулевые амплитуды возникают начиная с p^4 -порядка из однопетлевых диаграмм, причем в этом порядке отсутствуют как УФ-расходимости, так и борновские вклады. Ненулевые борновские амплитуды появляются начиная с p^6 -порядка. Кроме того, в распаде $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ пионные петли сильно подавлены приближенным сохранением G -четности, а каонные петли — большой массой в пропагаторе каона.

Амплитуды перехода $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ в p^6 -порядке с учетом двухпетлевых мезонных диаграмм были вычислены впервые в работе [75] в рамках стандартной киральной теории возмущений, причем структурные коэффициенты лагранжиана контрчленов в этом порядке фиксировались из модели резонансных обменов. В работе [76] оба перехода $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ рассматривались с учетом борновских вкладов бозонизованного лагранжиана модели НИЛ, причем УФ-расходимости, возникающие из одно- и двухпетлевых диаграмм в p^6 -порядке, фиксировались с помощью суперпропагаторной регуляризации. Роль редукции мезонных резонансов в p^6 -порядке рассматривалась в контексте проблемы описания процессов $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ как в работе [76], так и в работе [77].

Как показывают наши расчеты [76], редукция резонансов в p^4 - и p^6 -порядках существенно улучшает описание экспериментальных данных [78] по полным сечениям процесса $\gamma\gamma \rightarrow \pi^0\pi^0$ от порога до ρ -резонанса. Для

ширины распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ после редукции мезонных резонансов в бозонизованной модели НИЛ мы получили величину 0,11 эВ, которая не согласуется с экспериментальным значением $(0,84 \pm 0,18)$ эВ. Не имея возможности более детально обсуждать здесь эту проблему, отметим только, что количественного описания распада $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ в p^6 -порядке киральной теории не удастся достичь даже после включения в работе [79] дополнительного вклада, возникающего из резонансного обмена с аномальной вершиной $V\pi\gamma^*$.

8. МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ЭФФЕКТАМИ

В разд.1 была рассмотрена приближенная форма КХД, приводящая в локальном пределе к модели НИЛ. В основе модели НИЛ лежит предположение, что доминирующую роль в динамике мезонов при бозонизации кварков играет промежуточная область передач $0 \ll q^2 \ll m_G^2$, где пропагатор непертурбативного глюона можно аппроксимировать константой в импульсном пространстве, и, соответственно, δ -функцией в координатном пространстве. В таком подходе не учитывается вклад областей конфайнмента и асимптотической свободы кварков в эффективное кварковое действие (1.6). В области асимптотической свободы (т.е. при $q^2 \gg m_G^2$) пропагатор глюона убывает достаточно быстро с увеличением импульса (уменьшением расстояния). Поэтому исключение этой области из рассмотрения не должно приводить к серьезным искажениям непертурбативной динамики бозонизованных кварков (мезонов). В рассматриваемой нами расширенной модели НИЛ область асимптотической свободы исключается с помощью введения обрезания сверху по импульсам, которому соответствует параметр Λ , возникающий при вычислении кваркового детерминанта. В такой трактовке нелокальные эффекты возникают как вклады области конфайнмента.

Описание широкого круга низкоэнергетических мезонных процессов в рамках бозонизованной модели НИЛ можно рассматривать как в качестве косвенного феноменологического подтверждения реалистичности этой модели, так и как указание на то, что киральная динамика адронов оказывается нечувствительной к конфайнменту кварков. Однако, поскольку непертурбативный глюонный пропагатор имеет полюс при нулевых передачах импульса, отбрасывание вклада области конфайнмента в эффективное интегральное действие (1.6) не кажется, на первый взгляд, таким же естественным фи-

*В нашем подходе аналогичные вклады не возникают даже при учете поправок высшего порядка к статическим уравнениям движения из-за сокращения соответствующих аномальных вкладов после кирального поворота в единичной калибровке. Точное совпадение вкладов аномальных и неаномальных векторных обменов, отмеченное в работе [79], по-нашему мнению, является указанием на возможность двойного счета.

зическим приближением, как исключение области асимптотической свободы кварков с помощью импульсного обрезания. Учет области конфайнмента приводит к появлению нелокальных вкладов в эффективное действие (1.6). Поэтому, чтобы понять физические причины нечувствительности киральной динамики адронов к конфайнменту кварков, достаточно оценить нелокальные поправки к бозонизованному эффективному мезонному лагранжиану модели НИЛ, как это было сделано в работе [23], в рамках полуфеноменологического билокального подхода.

Начнем с эффективного действия (1.6), которое после введения скалярных (S), псевдоскалярных (P), векторных (V) и аксиально-векторных (A) билокальных коллективных мезонных полей [1, 2, 10] можно переписать в билинейном по кварковым полям виде

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \iint d^4x d^4y \left\{ -\frac{9}{8D(x-y)} \text{tr} \left[(\tilde{S}(x, y))^2 + (\tilde{P}(x, y))^2 + 2 \left((\tilde{V}_\mu(x, y))^2 + (\tilde{A}_\mu(x, y))^2 \right) \right] + \bar{q}(x) \tilde{\eta}(x, y) q(y) \right\}. \quad (8.1)$$

Здесь

$$\tilde{\eta}(x, y) = -\tilde{S}(x, y) - i\gamma^5 \tilde{P}(x, y) + i\gamma^\mu \tilde{V}_\mu(x, y) + i\gamma^\mu \gamma^5 \tilde{A}_\mu(x, y), \quad (8.2)$$

где

$$\tilde{S} = \tilde{S}^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad \tilde{P} = \tilde{P}^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad \tilde{V}_\mu = -i\tilde{V}_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad \tilde{A}_\mu = -i\tilde{A}_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \quad (8.3)$$

— коллективные поля, ассоциированные со следующими билинейными комбинациями кварков:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^a(x, y) &= -\frac{8}{9} D(x-y) \bar{q}(y) \frac{\lambda^a}{2} q(x), \\ \tilde{P}^a(x, y) &= -\frac{8}{9} D(x-y) \bar{q}(y) i\gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q(x), \\ \tilde{V}_\mu^a(x, y) &= -\frac{4}{9} D(x-y) \bar{q}(y) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x), \\ \tilde{A}_\mu^a(x, y) &= -\frac{4}{9} D(x-y) \bar{q}(y) \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\lambda^a}{2} q(x). \end{aligned}$$

В соответствии с работой [11], в предположении сильной локализации билокальных полей, рассмотрим анзац

$$\tilde{\eta}(x, y) \rightarrow \tilde{\eta}(z, t) = \eta(z) f(t) + \eta_\mu(z) t^\mu g(t) + \dots, \quad (8.4)$$

где $z = (x + y)/2$, $t = (y - x)/2$ — абсолютная и относительная координаты соответственно. Функция

$$\eta(z) = -S(z) - i\gamma^5 P(z) + i\gamma^\mu V_\mu(z) + i\gamma^\mu \gamma^5 A_\mu(z) \quad (8.5)$$

является комбинацией локальных коллективных полей составных операторов $\bar{q}(z)q(z)$, $\bar{q}(z)i\gamma^5 q(z)$, $\bar{q}(z)\gamma_\mu q(z)$ и $\bar{q}(z)\gamma_\mu \gamma^5 q(z)$, аналогичных определениям (2.2) и соответствующих низколежащим мезонным состояниям 0^{++} , 0^{-+} , 1^{--} , 1^{++} . Член следующего порядка в (8.4), пропорциональный η_μ , можно идентифицировать в духе работы [11] с возбуждениями 1^{--} , 1^{+-} , 2^{++} , 2^{--} . Предполагается, что билкальные поля $\tilde{\eta}(x, y)$ сильно локализованы на масштабе эффективного размера коллективного мезона $h \equiv 1/\tilde{\Lambda}$ за счет быстрого убывания функций $f(t)$ и $g(t)$ при $|t^2| \gg h^2$.

Разлагая $q(y)$ и $\bar{q}(x)$ в ряды Тейлора в окрестности абсолютной координаты z :

$$q(y) = q(z) + t^\mu \partial_\mu q(z) + O(t^2), \quad \bar{q}(x) = \bar{q}(z) - t^\mu \partial_\mu \bar{q}(z) + O(t^2)$$

и используя (8.4), получим

$$\begin{aligned} \iint d^4x d^4y \bar{q}(x) \tilde{\eta}(x, y) q(y) &= 2 \int d^4z \bar{q}(z) \eta(z) q(z) \int d^4t f(t) + \\ &+ 2 \int d^4z \partial^\mu \bar{q}(z) \eta(z) \partial_\mu q(z) \int d^4t t^2 f(t) + \\ &+ (\text{excitation terms}). \end{aligned}$$

Для первого поколения мезонов, соответствующих мультиплетам $(0^{++}, 0^{-+}, 1^{--}, 1^{++})$, производящий функционал перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^\dagger \mathcal{D}V \mathcal{D}A \exp \left\{ \int d^4z \left[-\frac{1}{4G_1} \text{tr} [\Phi(z)^\dagger \Phi(z)] - \right. \right. \\ &\quad - \frac{1}{4G_2} \text{tr} (V_\mu^2(z) + A_\mu^2(z)) + \bar{q}(z) i \hat{\mathbf{D}} q(z) - \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \partial^\mu \bar{q}(z) \eta(z) \partial_\mu q(z) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где $\hat{\mathbf{D}}$ — дираковский оператор, совпадающий с выражением (2.4) расширенной модели НИЛ. В выражении (8.6) мы ввели обозначение $\tilde{\Lambda}^2 = h^{-1}$, а параметр α определен как интеграл

$$\frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} = \frac{1}{2} \int d^4t t^2 f(t), \quad (8.7)$$

где $f(t)$ нормирована следующим образом: $2 \int d^4t f(t) = 1$.

Константы связи G_1 и G_2 определены как

$$\frac{1}{G_1} = \frac{1}{2G_2} = \frac{9}{8} \int d^4t \frac{f^2(t)}{D(2t)}. \quad (8.8)$$

Заметим, что в таком приближении отношение G_2 к G_1 равно $1/2$, в то время как феноменология предсказывает $G_2/G_1 \sim 4$. В принципе проблему можно решить с помощью введения в (8.4) и (8.5) различающихся функций $f_\sigma(t)$ ($\sigma = 0, 1, \dots$), которые отвечают различной локализации мезонных состояний со спинами $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$. Однако, чтобы не усложнять наше рассмотрение нелокальных поправок, мы будем пренебрегать такой зависимостью от спина.

Первые три члена в (8.6) совпадают с выражением для лагранжиана (2.3), возникающего после линеаризации расширенной модели НИЛ. После интегрирования по частям и отбрасывания поверхностных членов последний член в (8.6) можно переписать в виде

$$\int d^4z \partial^\mu \bar{q}(z) \eta(z) \partial_\mu q(z) = - \int d^4z \bar{q}(z) [\partial^\mu \eta(z) \partial_\mu + \eta(z) \partial^2] q(z). \quad (8.9)$$

Конечно, нам не известен точный вид функции $f(t)$, чтобы оценить в выражении (8.6) параметр α . Однако для получения разумных оценок можно использовать приближение фиксированного расстояния [23], соответствующее случаю, когда составляющие кварки в мезоне жестко локализованы на шкале h .

Такую жесткую локализацию можно учесть, введя в подынтегральное выражение для действия $\mathcal{S}_{\text{int}}$ (1.5) дельта-функцию $\delta((x - y)^2 - h^2)$. Тогда действие (1.5) примет вид

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -i \frac{\kappa^2}{2} \iint d^4x d^4y j_\mu^a(x) j^{a\mu}(y) D(x - y) \delta((x - y)^2 - h^2), \quad (8.10)$$

где константа κ введена для получения правильной размерности ($[\kappa] = m^{-1}$). После сдвига аргумента y с помощью лоренц-инвариантного оператора

$$q(y) = \exp\left((y - x)_\mu \partial^\mu\right) q(x)$$

эффективное действие (8.10) перепишется в виде

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -i \frac{\kappa^2 D(h)}{2} \int d^4x j_\mu^a(x) K(h, x) j^{a\mu}(x), \quad (8.11)$$

где

$$K(h, x) = \int d^4y \exp((y - x)_\mu \partial^\mu) \delta((x - y)^2 - h^2). \quad (8.12)$$

Проинтегрировав по полярным координатам и разложив выражение (8.12) в ряд

$$K(h, x) = \pi^2 h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+2)} h^{2n} \square^n = \pi^2 h^2 \left[1 + \frac{1}{8} \frac{\square}{\Lambda^2} + O\left(\frac{\square^2}{\Lambda^4}\right) \right], \quad (8.13)$$

мы можем переписать действие (8.11) следующим образом:

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = -i \frac{9G}{16} \int d^4x \left[j_{\mu}^a(x) j^{a\mu}(x) + \frac{1}{8\Lambda^2} j_{\mu}^a(x) (\square j^{a\mu}(x)) \right] + O\left(\frac{\square^2}{\Lambda^4}\right), \quad (8.14)$$

где $G = \frac{8}{9} \pi^2 \kappa^2 h^2 D(h)$.

После преобразования Фирца действие (8.14) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{int}} = & i \frac{9G}{16} \int d^4x \left(\bar{q}(x) \frac{\mathcal{M}^{\theta}}{2} q(x) \bar{q}(x) \frac{\mathcal{M}^{\theta}}{2} q(x) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8\Lambda^2} \bar{q}(x) \frac{\mathcal{M}^{\theta}}{2} \square [q(x) \bar{q}(x)] \frac{\mathcal{M}^{\theta}}{2} q(x) \right), \end{aligned} \quad (8.15)$$

где $\mathcal{M}^{\theta}$ — тензорное произведение вида (1.7). Первый член в (8.15) приводит к эффективному четырехкварковому взаимодействию модели НИЛ, в то время как второй член, пропорциональный $1/\Lambda^2$, учитывает эффекты конечного размера коллективных мезонов. Второй член в (8.15) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{S}_{\text{int}}^{(2)} = \frac{i}{16\Lambda^2} \int d^4x \bar{q}(x) [\partial^{\mu} \eta(x) \partial_{\mu} + \eta(x) \partial^2] q(x) + (\text{excitation terms}), \quad (8.16)$$

где $\eta(x)$ — комбинация локальных коллективных полей (8.5), которые теперь определены соотношениями (2.2) при $G_1 = 2G_2 = G/4$. Сравнивая выражения (8.9) и (8.16), получим $\alpha = 1/16$, что соответствует наивному приближению фиксированного расстояния в биллокальной модели.

Если рассматривать мезон как связанную $\bar{q}q$ -систему в эффективном глюонном потенциале, по аналогии с атомом водорода в квантовой механике, то соответствующее нерелятивистское уравнение Шредингера запишется в виде [71] ($\hbar = c = 1$):

$$-\frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + [V(\mathbf{r}) - E] \Psi(\mathbf{r}) = 0.$$

Здесь Ψ — волновая функция внутреннего движения; m — приведенная масса составляющих кварков в двухчастичной системе, $m = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2)$; $\mathbf{r}$ — относительная координата; $V(\mathbf{r})$ — потенциал взаимодействия, и E —

собственное значение гамильтониана. Для сферического потенциала волновая функция Ψ обычно представляется в виде произведения радиальной функции $R(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$, и сферических гармоник $Y_{lm}(\Theta, \phi)$: $\Psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_{lm}(\Theta, \phi)$. Уравнение Шредингера для радиальной функции имеет вид

$$-u''(r) = 2m \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2mr^2} \right] u(r), \quad u(r) = rR(r) \quad (8.17)$$

с граничным условием $u(0) = 0$.

Результаты расчетов в рамках КХД на решетках [72] показывают, что на больших расстояниях эффективное кварк-антикварковое взаимодействие можно аппроксимировать (пренебрегая кулоновскими и другими поправками) линейно растущим потенциалом *:

$$V(r) = \sigma \cdot r, \quad (8.18)$$

где $\sigma \approx 0,27 \text{ ГэВ}^2$ при $m_u = m_d = \mu = 0,336 \text{ ГэВ}$ [73]. В этом случае характеристическое расстояние между составляющими кварком и антикварком $\langle r \rangle$ можно легко оценить с помощью теоремы вириала:

$$\langle r \rangle \equiv h = \frac{2E_1}{3\sigma} \approx 0,68 \text{ фм.}$$

Здесь $E_1 = 2,238(\sigma^2/2\mu)^{1/3}$ — энергия основного состояния. В дальнейшем мы будем рассматривать только основные состояния ($l = 0$), то есть будем отбрасывать возбужденные состояния, такие как π^* , K^* и т.д. После масштабирования уравнения (8.17) с помощью введения $\rho = r/h_0$ и $w(\rho) = u(r)$ получим $w''(\rho) + (\varepsilon - 2\rho)w(\rho) = 0$, где $\varepsilon = 2m(2m\sigma)^{-2/3}E$. Для больших ρ решения ведут себя как функции Эйри $w(\rho) \sim Ai(\rho)$, убывая экспоненциально к нулю. Радиальная волновая функция $R(r)$, определяемая уравнением (8.17), убывает еще быстрее. Поэтому можно ожидать малых среднеквадратичных отклонений Δr для расстояния между составляющими кварками.

Альтернативная оценка эффективного расстояния может быть получена с помощью моделирования в КХД на решетках [74]. В этом случае расстояние корреляций, которое является мерой области действия цветных сил, оказывается существенно меньше: $h \sim 0,22 \text{ фм}$. Для численных оценок мы будем использовать величину $h = 0,68 \text{ фм}$, получаемую из теоремы вириала. Эта величина будет давать нам ограничения сверху для оценок нелокальных эффектов.

*Мы пренебрегаем здесь эффектами экранировки виртуальными $\bar{q}q$ -парами на очень больших расстояниях.

Используя значения величин $\tilde{\Lambda} = 0,28 \text{ ГэВ}$ и $\mu = 0,336 \text{ ГэВ}$, получим

$$\frac{\alpha\mu^2}{\tilde{\Lambda}^2} \approx 0,09. \quad (8.19)$$

Эту величину мы будем рассматривать как малый параметр разложения при численных оценках нелокальных эффектов.

После интегрирования по полям кварков полное действие, возникающее из производящего функционала (8.6), запишется в виде, аналогичном (2.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Phi, \Phi^\dagger, V, A) = & \int d^4z \left[-\frac{1}{4G_1} \text{tr}(\Phi^\dagger \Phi) - \frac{1}{4G_2} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) \right] - \\ & -i \text{Tr}'[\ln(i\tilde{\mathbf{D}})]. \end{aligned}$$

Здесь второй член представляет собой кварковый детерминант дираковского оператора $i\tilde{\mathbf{D}}$, модифицированного нелокальными вкладами. Выражение для него можно получить из (2.4) с помощью замены

$$\begin{aligned} A_\mu^{R/L} &\rightarrow A_\mu^{R/L} \left(1 + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \partial^2 \right) + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} (\partial_\nu A_\mu^{R/L}) \partial^\nu, \\ \Phi &\rightarrow \Phi \left(1 + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \partial^2 \right) + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} (\partial_\nu \Phi) \partial^\nu. \end{aligned}$$

Метод ядра теплопроводности можно использовать и при вычислении модуля кваркового детерминанта для дираковского оператора $\tilde{\mathbf{D}}$, модифицированного нелокальными вкладами. В этом случае оператор $\hat{\mathbf{D}}^\dagger \hat{\mathbf{D}}$ примет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}^\dagger \hat{\mathbf{D}} = & \beta \partial^2 + \mu^2 + 2\Gamma_\mu \partial^\mu + \Gamma_\mu^2 + a(x) + \\ & + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \left[b(x) + Q_\alpha(x) \partial^\alpha + c(x) \partial^2 + 2(\Gamma_\mu \partial^2 + \partial_\alpha \Gamma_\mu \partial^\alpha) \partial^\mu \right] + O\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\Lambda}^4}\right), \end{aligned}$$

где $\beta = 1 + 2\alpha\mu^2/\tilde{\Lambda}^2$. Комбинации $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $Q_\alpha(x)$ не содержат дифференциальных операторов, действующих на кварковые поля:

$$\begin{aligned} a(x) &= i\gamma^\mu (P_R D_\mu \Phi + P_L \overline{D}_\mu \Phi^\dagger) + P_R \mathcal{M} + P_L \overline{\mathcal{M}} + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Gamma_{\mu\nu}, \\ b(x) &= i\gamma^\mu \left[P_R (A_\mu^L \partial^2 \Phi + \partial_\alpha A_\mu^L \partial^\alpha \Phi - \Phi \partial^2 A_\mu^R - \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha A_\mu^R) + \right. \\ &\quad \left. + P_L (A_\mu^R \partial^2 \Phi^\dagger + \partial_\alpha A_\mu^R \partial^\alpha \Phi^\dagger - \Phi^\dagger \partial^2 A_\mu^L - \partial_\alpha \Phi^\dagger \partial^\alpha A_\mu^L) \right] + \\ &\quad + P_R (\Phi^\dagger \partial^2 \Phi + \partial_\alpha \Phi^\dagger \partial^\alpha \Phi) + P_L (\Phi \partial^2 \Phi^\dagger + \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi^\dagger) + \Gamma_\mu \partial^2 \Gamma^\mu + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\partial_\alpha \Gamma_\mu)^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \left([\partial_\alpha \Gamma_\mu, \partial^\alpha \Gamma_\nu] + \Gamma_\mu \partial^2 \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \partial^2 \Gamma_\mu \right), \\
 c(x) = & a(x) + i\gamma^\mu \left[P_R(A_\mu^L \Phi - \Phi A_\mu^R) + P_L(A_\mu^R \Phi^\dagger - \Phi^\dagger A_\mu^L) \right] + \\
 & + P_R \mathcal{M} + P_L \overline{\mathcal{M}} + 2\Gamma_\mu^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu], \\
 Q_\alpha(x) = & 3\Gamma_\mu \partial_\alpha \Gamma^\mu + \partial_\alpha \Gamma_\mu \Gamma^\mu + \partial_\alpha a(x) + \\
 & + 2i\gamma^\mu \left[P_R(A_\mu^L \partial_\alpha \Phi - \Phi \partial_\alpha A_\mu^R) + P_L(A_\mu^R \partial_\alpha \Phi^\dagger - \Phi^\dagger \partial_\alpha A_\mu^L) \right] + \\
 & + 2(P_R \Phi^\dagger \partial_\alpha \Phi + P_L \Phi \partial_\alpha \Phi^\dagger) + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] (\Gamma_\mu \partial_\alpha \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \partial_\alpha \Gamma_\mu).
 \end{aligned}$$

Модифицированные рекурсивные уравнения для коэффициентов теплопроводности $h_k(x) = h_k(x, y = x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 & 2\frac{\alpha}{\Lambda^2} \Gamma_\mu t^\mu t^2 h_{n+3}(x, y) + \\
 & + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left[t^2 (2\Gamma_\mu^2 + c(x)) + \right. \\
 & + 2\Gamma_\mu (3t^\mu + 2t^\mu t_\alpha \partial^\alpha + t^2 \partial^\mu) + 2\partial_\alpha \Gamma_\mu t^\mu t^\alpha \left. \right] h_{n+2}(x, y) + \\
 & + \left[n + 1 + 2t_\mu d^\mu + \frac{\alpha}{2\Lambda^2} \left(+ 4c(x)(1 + t_\alpha \partial^\alpha) - 8\mu^2 t_\alpha d^\alpha + 2Q_\alpha(x) t^\alpha + \right. \right. \\
 & + 2\partial_\alpha \Gamma_\mu (t^\mu \partial^\alpha + t^\alpha \partial^\mu) + 4\Gamma_\mu (2\partial^\mu + 2t_\alpha \partial^\alpha \partial^\mu + t^\mu \partial^2) \left. \left. \right) \right] h_{n+1}(x, y) + \\
 & + \left[a(x) + d_\mu d^\mu + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left(b(x) + Q_\alpha(x) \partial^\alpha + 2(\Gamma_\mu \partial^2 + \partial_\alpha \Gamma_\mu \partial^\alpha) \partial^\mu + \right. \right. \\
 & + c(x) \partial^2 \left. \left. \right) \right] h_n(x, y) = 0,
 \end{aligned}$$

где оператор дифференцирования ∂_μ действует только на x . В случае $V_\mu = A_\mu = 0$ рекурсивные соотношения для коэффициентов теплопроводности сводятся к уравнению

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha}{\Lambda^2} t^2 \tilde{c}(x) h_{n+2}(x, y) + \\
 & + \left\{ n + 1 + 2t_\mu \partial^\mu + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left[2(\tilde{a}(x) + \tilde{c}(x))(1 + t_\mu \partial^\mu) - 4\mu^2 t_\mu \partial^\mu + \right. \right. \\
 & + t_\mu (\partial^\mu \tilde{a}(x) + 2\tilde{Q}^\mu(x)) \left. \left. \right] \right\} h_{n+1}(x, y) + \\
 & + \left\{ \tilde{a}(x) + \partial^2 + \frac{\alpha}{\Lambda^2} \left[\tilde{b}(x) + (\partial_\mu \tilde{a}(x) + 2\tilde{Q}_\mu(x)) \partial^\mu + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + (\tilde{a}(x) + \tilde{c}(x)) \partial^2 \right) \Big] \Big\} h_n(x, y) = 0, \quad (8.20)$$

где

$$\tilde{a}(x) = i\gamma^\mu (P_R \partial_\mu \Phi + P_L \partial_\mu \Phi^\dagger) + P_R \mathcal{M} + P_L \overline{\mathcal{M}},$$

$$\tilde{b}(x) = P_R (\Phi^\dagger \partial^2 \Phi + \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi) + P_L (\Phi \partial^2 \Phi^\dagger + \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger),$$

$$\tilde{c}(x) = P_R \mathcal{M} + P_L \overline{\mathcal{M}}, \quad \tilde{Q}_\mu(x) = P_R \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + P_L \Phi \partial_\mu \Phi^\dagger.$$

Из (8.20) можно получить выражения для коэффициентов теплопроводности $h_0, \dots, h_3$, модифицированные нелокальными вкладами:

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1, \\ \text{tr}' [h_1(x)] &= -\text{tr}' \left[\tilde{a} + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \left(\tilde{b} - \tilde{a}(\tilde{a} + \tilde{c}) \right) \right] + O\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\Lambda}^4}\right), \\ \text{tr}' [h_2(x)] &= \text{tr}' \left[\frac{1}{2} \tilde{a}^2 + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \left(\tilde{a} \tilde{b} - \frac{2}{3} \tilde{a}^2 (\tilde{a} + \tilde{c}) + \frac{5}{12} (\partial_\mu \tilde{a})^2 - \frac{1}{12} \partial_\mu \tilde{a} \partial^\mu \tilde{c} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{a} \partial^\mu \tilde{Q}_\mu \right) \right] + O\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\Lambda}^4}\right), \\ \text{tr}' [h_3(x)] &= -\text{tr}' \left\{ \frac{1}{6} \tilde{a}^3 - \frac{1}{12} (\partial_\mu \tilde{a})^2 + \frac{\alpha}{\tilde{\Lambda}^2} \left[\frac{1}{2} \tilde{a}^2 \tilde{b} - \frac{1}{4} \tilde{a}^3 (\tilde{a} + \tilde{c}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{a}^2 \left(\frac{3}{10} \partial^2 \tilde{a} + \frac{1}{2} \partial^\mu \tilde{Q}_\mu + \frac{2}{3} \partial^2 \tilde{c} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{a} \left(\frac{5}{6} (\partial_\mu \tilde{a})^2 + \frac{1}{15} \partial^2 \tilde{a} \tilde{c} + \frac{2}{5} \partial_\mu \tilde{a} \partial^\mu \tilde{c} + \frac{11}{30} \partial_\mu \tilde{c} \partial^\mu \tilde{a} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{20} (\partial^2 \partial^2 \tilde{c} + \tilde{c} \partial^2 \tilde{a}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} (\partial^2 \partial^\mu \tilde{Q}_\mu - \tilde{Q}_\mu \partial^\mu \tilde{a} + \partial^\mu \tilde{a} \tilde{Q}_\mu - \partial^2 \tilde{b}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{15} \left(\partial^2 \tilde{c} \partial^2 \tilde{a} - \tilde{c} (\partial_\mu \tilde{a})^2 - (\partial^2 \tilde{a})^2 \right) - \frac{1}{18} \mu^2 (\partial_\mu \tilde{a})^2 \right\} + \\ &\quad + O\left(\frac{\alpha^2}{\tilde{\Lambda}^4}\right). \end{aligned}$$

Выражений для h_1 , h_2 и h_3 достаточно, чтобы вычислить нелокальные поправки к эффективному бозонизованному лагранжиану, включающему p^4 -члены (нелокальные поправки к коэффициенту h_4 дают вклад, начиная с p^6 -членов).

Вычисления кваркового детерминанта с учетом нелокальных эффектов [23] приводят к модифицированному выражению для константы F_0 :

$$F_0^2 = \frac{N_c \mu^2}{4\pi^2} \left[y - \frac{4\pi^2 \langle \bar{q}q \rangle}{\mu^3 N_c} \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right], \quad (8.21)$$

где первый член отвечает локальному пределу, в то время как второй соответствует нелокальной поправке. Для мезонной массовой матрицы $\chi = \text{diag}(\chi_u^2, \chi_d^2, \dots, \chi_n^2)$ получим

$$\chi_i^2 = \frac{N_c \mu m_i^0}{2\pi^2 F_0^2} \left(\Lambda^2 e^{-\mu^2/\Lambda^2} - \mu^2 y \right) = -\frac{2m_i^0 \langle \bar{q}q \rangle}{F_0^2}. \quad (8.22)$$

Кроме того, структурные коэффициенты L_i минимальной части эффективного p^4 -лагранжиана Гассера — Лейтвилера определены соотношениями $L_1 - L_2/2 = L_4 = 0$ и

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{N_c}{16\pi^2} \frac{1}{12} \left(1 + 2 \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right), \\ L_3 &= -\frac{N_c}{16\pi^2} \frac{1}{6} \left(1 + 5(1-y) \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right), \\ L_5 &= \frac{N_c}{16\pi^2} x \left[y - 1 - \frac{28}{3} \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Аналогичным способом можно оценить нелокальные поправки к неминимальной части эффективного мезонного p^4 -лагранжиана. Здесь мы ограничимся только модифицированными выражениями для структурных коэффициентов L_9 и L_{10} :

$$\begin{aligned} L_9 &= \frac{N_c}{16\pi^2} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{21y - 26}{6} \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right), \\ L_{10} &= -\frac{N_c}{16\pi^2} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{15y - 10}{3} \frac{\alpha \mu^2}{\Lambda^2} \right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Следует особо подчеркнуть, что нелокальные поправки не влияют на массовую матрицу мезонов. Нелокальные поправки к структурным коэффициентам L_2 , L_3 , L_9 и L_{10} (см. формулы (8.23) и (8.24)) не превышают 15–20% по сравнению с локальным пределом. Наиболее чувствительным к нелокальным поправкам оказывается коэффициент L_5 , в результате чего нелокальные эффекты должны сильно влиять на описание расщепления констант распадов F_π и F_K . Следует подчеркнуть, что полученные оценки, использующие значение $h = 0,68$ фм из уравнения Шредингера для линейно растущего

потенциала, дают для нелокальных поправок существенно завышенные ограничения сверху. Если использовать величину $h \sim 0,22$ фм из моделирований КХД на решетках [74], то в этом случае нелокальные поправки не будут превышать 5%. Этот результат позволяет понять, почему, несмотря на всю неполноту, бозонизация модели НИЛ приводит к правильному описанию низкоэнергетических мезонных процессов в терминах эффективных киральных лагранжианов. Малость полученных нелокальных поправок показывает, что модель НИЛ, как локальная модель эффективных четырехкварковых взаимодействий, действительно является разумным физическим приближением, описывающим киральную динамику кварков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

КХД-мотивированные биллокальные модели эффективных кварковых взаимодействий и возникающие из них в локальном пределе различные модификации расширенной модели НИЛ являются плодотворными подходами к изучению внутренней кварковой структуры адронов. В настоящем обзоре мы ограничились подробным обсуждением лишь тех аспектов бозонизации модели НИЛ, которые связаны с получением киральных мезонных лагранжианов в высших порядках импульсного разложения. Многие другие выходящие за рамки нашего рассмотрения вопросы, в том числе уравнения Бете — Солпитера для связанных $\bar{q}q$ -состояний, дикварки и солитонная модель барионов, детально разбираются в обзорах [12, 27, 30, 31] и других цитируемых нами работах.

В обычной модели НИЛ для регуляризации УФ-расходимостей в кварковых петлях с внешними мезонными полями, возникающих при вычислении кваркового детерминанта, вводится обрезание сверху по импульсам. Кроме того, в таком подходе не учитывается импульсная зависимость в кварк-мезонных вершинах (нелокальность), более детально отражающая составную структуру адронов, а также отсутствует конфайнмент кварков. Тем не менее бозонизация модели НИЛ приводит к правильной феноменологии низкоэнергетических мезонных процессов не только в древесном p^2 -приближении, воспроизводящем результаты алгебры токов, но и в высших порядках теории возмущений с учетом унитарных поправок, обусловленных мезонными петлями. Именно это обстоятельство является главным аргументом в пользу модели НИЛ как локального низкоэнергетического приближения КХД.

При обсуждении феноменологического статуса бозонизованных лагранжианов мы ограничились рассмотрением сектора псевдоскалярных мезонов. Было показано, что векторные, аксиально-векторные и скалярные мезоны могут быть исключены из явного рассмотрения с помощью интегрирования по соответствующим резонансным степеням свободы в производящем функционале бозонизованной модели НИЛ. Модификация структурных коэффици-

ентов эффективных лагранжианов после редукции резонансов приводит, как правило, к значительному улучшению описания экспериментальных данных по низкоэнергетическим мезонным процессам как в p^4 -, так и в p^6 -порядках киральной теории возмущений с бозонизованными лагранжианами. Тем не менее следует отметить, что описание процессов с векторными и аксиально-векторными мезонами на массовой поверхности, по-видимому, находится на границе применимости импульсного разложения в киральной теории.

Заметим, что трудности, обусловленные ограниченностью применимости импульсного разложения, возникают уже при описании распадов η - и η' -мезонов. В этом случае необходим также учет нарушения $U(1)$ -симметрии, например, с помощью введения дополнительного шестикваркового взаимодействия, индуцированного инстантонами и связанного с детерминантом t' Хоофта [80]. В рамках такого расширения модели НИЛ из решения уравнений Бете — Солпитера для связанных $\bar{q}q$ -состояний в работах [81] были получены спектры масс псевдоскалярных, скалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов. В подходе же эффективных киральных лагранжианов для формализации решения $U(1)$ -проблемы более удобным представляется подход [82], основанный на учете глюонной аномалии [83] с помощью введения в киральный лагранжиан глюонных полей в виде плотности топологического заряда.

Следует особо подчеркнуть хорошо известный факт, что стандартная модель НИЛ не в состоянии правильно описать динамику низколежащих мезонных резонансов на массовой поверхности [84]. В этой модели, например, векторные мезоны могут существовать на массовой поверхности, если только масса составляющего кварка превышает 385 МэВ, но даже и в этом случае существует большой нефизический $\bar{q}q$ -континуум в спектральных функциях. Для меньших значений массы составляющего кварка векторные мезоны не могут существовать даже как резонансы в $\bar{q}q$ -континууме [85]. К аналогичному выводу пришли также авторы работы [86], в которой рассматривались свойства векторных и аксиально-векторных мезонов при конечной температуре и плотности в модели НИЛ. Было показано, что при стандартном выборе параметров модель предсказывает большую ширину распада $\rho \rightarrow q\bar{q}$, по порядку величины совпадающую с массой ρ -мезона. В результате ρ -мезон оказывается крайне нестабильным. Указанные обстоятельства, связанные с отсутствием конфайнмента в модели НИЛ, являются серьезной трудностью данной модели, поскольку они практически исключают возможность интерпретации коллективных мезонных возбуждений в векторном и аксиально-векторном секторе как реальных векторных и аксиально-векторных мезонов. Для решения этой проблемы необходим выход за рамки стандартной модели НИЛ, учитывающий свойства конфайнмента кварков.

Используя биллокальный подход, можно получить различные расширения модели НИЛ, включающие как нелокальность, так и моделирование конфайн-

мента. Так, в работе [21] рассматривалось моделирование свойств конфайнмента кварков в рамках модифицированной модели НИЛ, которая возникает из бислокального действия (1.6) при использовании специального анзаца для непертурбативного глюонного пропагатора. В импульсном представлении указанный анзац содержит сумму двух членов: константа, соответствующая обычному локальному взаимодействию модели НИЛ, и δ -функция, эффективно учитывающая $1/q^4$ -поведение глюонного пропагатора в области конфайнмента. Введение δ -функции модифицирует уравнение Швингера — Дайсона и приводит к такому поведению бегущей массы составляющего кварка $m(q^2)$, которое обеспечивает отсутствие полюсов в его пропагаторе.

Более глубокое понимание роли конфайнмента в рамках бозонизации КХД дает расширенная трактовка модели НИЛ, развитая в подходе [22]. При рассмотрении кварковых петель с внешними мезонными полями в этих работах предполагалась локальность кварк-мезонных вершин, в то время как кварковые пропагаторы описывались внутренними аналитическими функциями, обеспечивающими не только конфайнмент кварков, но и УФ-сходимость кварковых петель. В работе [87] была предложена также формулировка модели НИЛ с сепарабельным взаимодействием, которое учитывает нелокальность с помощью соответствующих формфакторов в четырехкварковых вершинах.

В последнем разделе обзора мы рассмотрели в полуфеноменологическом подходе нелокальные эффекты, связанные с вкладом области конфайнмента в бислокальное действие. Было показано, что нелокальные поправки к структурным коэффициентам бозонизованного p^4 -лагранжиана модели НИЛ достаточно малы *. Этот результат подтверждает, что динамика взаимодействий псевдоскалярных мезонов при низких энергиях оказывается нечувствительной к конфайнменту кварков и определяется киральной симметрией и ее нарушением. Поэтому можно ожидать, что включение моделирования конфайнмента в какой-либо конкретной расширенной версии модели НИЛ с целью устранения трудностей, связанных с описанием динамики векторных и аксиально-векторных мезонов на массовой поверхности, не должно серьезно сказаться на описании псевдоскалярного сектора.

Функциональные методы, используемые при бозонизации сильных взаимодействий в модели НИЛ, можно также применить для бозонизации эффективных четырехкварковых нелептонных слабых взаимодействий с изменением странности $|\Delta S| = 1$. Для этого используется введенный в работе [88] производящий функционал функций Грина для кварковых токов и их плотно-

* Следует отметить, что в ряде случаев вклады в амплитуды мезонных процессов от нелокальных поправок к структурным коэффициентам p^4 -лагранжиана могут оказаться сравнимыми с вкладами p^6 -лагранжиана.

стей, произведения которых входят в слабый четырехкварковый лагранжиан. В таком подходе мезонные $(V - A)$ - и $(S - P)$ -токи возникают в результате вариации кваркового детерминанта модели НИЛ по дополнительным внешним источникам, ассоциированным с соответствующими кварковыми токами и их плотностями. Дополнительные внешние источники появляются в кварковом детерминанте в результате переопределения дираковского оператора. В результате члены кваркового детерминанта, дающие вклад в бозонизованный сильный лагранжиан порядка p^{2n} импульсного разложения, генерируют $(V - A)$ и $(S - P)$ мезонные токи, соответственно, порядка p^{2n-1} и p^{2n-2} .

Как было показано, в частности, в работе [88], оценки прямого CP -нарушения в распадах $K \rightarrow 2\pi$ и $K \rightarrow 3\pi$, возникающего как разностный эффект из интерференций различных изотопических амплитуд, оказываются очень чувствительными к высшим поправкам киральной теории возмущений. Это относится также к фазам взаимодействий пионов в конечных состояниях распадов $K \rightarrow 2\pi$, $K \rightarrow 3\pi$ и квадратичным параметрам наклона далитц-плотов распадов $K \rightarrow 3\pi$. Более точное измерение параметров наклонов распадов $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^0$ проводится в настоящее время в двух экспериментах на ускорителе У-70 в Протвино [89]. Точные измерения параметров наклонов необходимы для проведения нового анализа нелептонных K -распадов в киральной теории с целью фиксации модельных зависимостей в вычислениях мезонных матричных элементов, феноменологического определения вильсоновских коэффициентов и уменьшения модельных неопределенностей в предсказаниях наблюдаемых эффектов прямого CP -нарушения. В настоящее время мы проводим более полные, по сравнению с работой [88], вычисления амплитуд распадов $K \rightarrow 2\pi$, $K \rightarrow 3\pi$ в p^6 -порядке киральной теории с учетом $(V - A)$ и $(S - P)$ мезонных токов, которые генерируются бозонизованными лагранжианами высшего порядка, обсуждавшимися в обзоре.

ПРИЛОЖЕНИЕ. P^6 -ВКЛАДЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Здесь представлены исходные выражения (до применения эквивалентных преобразований, вытекающих из свойств ковариантных производных (5.4) и уравнений движения) для p^6 -вкладов конечной части бозонизованного лагранжиана, которая возникает из коэффициентов теплопроводности h_3 , h_4 , h_5 и h_6 после вычисления следа по дираковским матрицам:

$$\mathcal{L}_{\text{fin}}^{(p^6)} = -\frac{N_c}{32\pi^2 \mu^6} \text{tr} \left(\mu^4 H_3^{p^6} + \mu^2 H_4^{p^6} + 2 H_5^{p^6} + \frac{6}{\mu^2} H_6^{p^6} \right). \quad (\text{A.1})$$

Соответствующие вклады определены выражениями

$$\begin{aligned}
H_3^{p^6} = & -\frac{1}{3}(\mathcal{M}^3 + \overline{\mathcal{M}}^3) + \frac{1}{6}[(D'_\mu \mathcal{M})^2 + (\overline{D}'_\mu \overline{\mathcal{M}})^2] + \\
& + \frac{1}{3}[\mathcal{M}(F_{\mu\nu}^L)^2 + \overline{\mathcal{M}}(F_{\mu\nu}^R)^2] - \\
& - \frac{1}{3}(F_{\mu\nu}^L F^{L\mu\alpha} F^{L\nu}{}_\alpha + F_{\mu\nu}^R F^{R\mu\alpha} F^{R\nu}{}_\alpha) - \\
& - \frac{1}{54}[(F^{L\mu}{}_{\mu\nu})^2 + (F^{R\mu}{}_{\mu\nu})^2] - \frac{41}{540}[(F_{\mu\nu\alpha}^L)^2 + (F_{\mu\nu\alpha}^R)^2], \\
\\
H_4^{p^6} = & -\frac{1}{6}\left[D'^2 \mathcal{M} D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \overline{D}'_\mu \overline{\mathcal{M}} (\overline{D}^\nu \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi + \overline{D}_\nu \Phi^\dagger D^\mu D^\nu \Phi) + \right. \\
& + \overline{D}'^2 \overline{\mathcal{M}} \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi + D'_\mu \mathcal{M} (D^\nu D^\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger + D_\nu \Phi \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \Phi^\dagger) \left. \right] - \\
& - \frac{1}{6}\left[\mathcal{M} (D_\mu D_\nu \Phi \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + D_\mu \Phi \overline{D}^2 \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + D^2 D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger) + \right. \\
& + \overline{\mathcal{M}} (\overline{D}_\mu \overline{D}_\nu \Phi^\dagger D^\mu D^\nu \Phi + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^2 D^\mu \Phi + \overline{D}^2 \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi) \left. \right] - \\
& - \frac{1}{3}(\mathcal{M} D_\mu \Phi \overline{\mathcal{M}} \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \mathcal{M}^2 D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \overline{\mathcal{M}}^2 \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi) - \\
& - \frac{7}{180} D^2 D_\mu \Phi \overline{D}^2 \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + \frac{1}{180} D_\mu D_\nu D_\alpha \Phi \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger + \\
& + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} D_\mu \Phi F_{\nu\alpha}^R \overline{D}^\mu \Phi^\dagger F^{L\nu\alpha} - D_\mu \Phi F_{\nu\alpha}^R \overline{D}^\nu \Phi^\dagger F^{L\mu\alpha} + \right. \\
& + D^\mu \Phi F_{\mu\nu}^R \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger F^{L\nu\alpha} \left. \right) + \\
& + \frac{1}{10} \left[D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger (F_{\nu\alpha}^L)^2 + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi (F_{\nu\alpha}^R)^2 \right] - \\
& - \frac{1}{3} \left[D_\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger [F^{L\mu\alpha}, F_{\nu\alpha}^L] + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi [F^{R\mu\alpha}, F_{\nu\alpha}^R] \right] + \\
& + \frac{1}{6} (D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger F^{L\alpha}{}_{\alpha\mu\nu} + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi F^{R\alpha}{}_{\alpha\mu\nu}) + \\
& + \frac{1}{6} \left[(D^\alpha D^\mu \Phi \overline{D}_\alpha \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + D^2 D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + D^\mu \Phi \overline{D}^2 \overline{D}^\nu \Phi^\dagger) F_{\mu\nu}^L + \right. \\
& + (\overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\alpha D^\nu \Phi + \overline{D}^2 \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi + \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^2 D^\nu \Phi) F_{\mu\nu}^R \left. \right] + \\
& + \frac{1}{180} \left[(D^\mu D^\nu D^\alpha \Phi \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger - D_\alpha \Phi \overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger) F_{\mu\nu}^L + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\overline{D}^\mu \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger D_\alpha \Phi - \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\mu D^\nu D^\alpha \Phi \right) F_{\mu\nu}^R \Big] + \\
 & + \frac{1}{6} \left[\left(D^\nu D^\alpha \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger - D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger \right) F_{\nu\alpha\mu}^L + \right. \\
 & + \left(\overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger D^\mu \Phi - \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu D^\alpha \Phi \right) F_{\nu\alpha\mu}^R \Big] - \\
 & - \frac{1}{72} \left[\left(D^\alpha D^\mu \Phi \overline{D}_\mu \Phi^\dagger - D_\mu \Phi \overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu \Phi^\dagger \right) F^{L^\nu}{}_{\nu\alpha} + \right. \\
 & + \left(\overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\mu \Phi - \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\alpha D^\mu \Phi \right) F^{R^\nu}{}_{\nu\alpha} \Big] + \\
 & + \frac{1}{3} \left[\left(\mathcal{M} D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger \mathcal{M} + D^\mu \Phi \overline{\mathcal{M}} \overline{D}^\nu \Phi^\dagger \right) F_{\mu\nu}^L + \right. \\
 & + \left(\overline{\mathcal{M}} \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi + \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi \overline{\mathcal{M}} + \overline{D}^\mu \Phi^\dagger \mathcal{M} D^\nu \Phi \right) F_{\mu\nu}^R \Big],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_5^{p_6} = & \frac{1}{20} \left[\left(D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger - D_\nu \Phi \overline{D}_\mu \Phi^\dagger \right) D^\alpha D^\mu \Phi \overline{D}_\alpha \overline{D}^\nu \Phi^\dagger + \right. \\
 & + \left(\overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi - \overline{D}_\nu \Phi^\dagger D_\mu \Phi \right) \overline{D}^\alpha \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\alpha D^\nu \Phi - \\
 & - D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D_\nu D_\alpha \Phi \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger - \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi \overline{D}_\nu \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\nu D^\alpha \Phi \Big] + \\
 & + \frac{1}{30} \left[\left(D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger - D_\alpha \Phi \overline{D}_\nu \overline{D}_\mu \Phi^\dagger \right) D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger + \right. \\
 & + \left(\overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu D_\alpha \Phi - \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger D_\nu D_\mu \Phi \right) \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu D^\alpha \Phi - \\
 & - D_\mu \Phi \overline{D}^\nu \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\alpha \Phi \overline{D}_\nu \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger - \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\nu D^\mu \Phi \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger D_\nu D_\alpha \Phi \Big] - \\
 & - \frac{1}{12} \left[\mathcal{M} \left((D_\mu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger)^2 - (D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger)^2 + D_\mu \Phi \overline{D}_\nu \Phi^\dagger D^\nu \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger \right) + \right. \\
 & + \overline{\mathcal{M}} \left((\overline{D}_\mu \Phi^\dagger D^\mu \Phi)^2 - (\overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi)^2 + \overline{D}_\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger D^\mu \Phi \right) \Big] + \\
 & + \frac{1}{12} \left[\left(\{ D_\alpha \Phi \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger, D^\mu \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger \} + \right. \right. \\
 & + D_\alpha \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger + D^\mu \Phi \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger (D^\alpha \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger - D^\nu \Phi \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger) + \\
 & + D_\alpha \Phi \overline{D}^\mu \Phi^\dagger (D^\nu \Phi \overline{D}^\alpha \Phi^\dagger - D^\alpha \Phi \overline{D}^\nu \Phi^\dagger) \Big) F_{\mu\nu}^L + \\
 & + \left(\{ \overline{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\alpha \Phi, \overline{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi \} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \bar{D}^\mu \Phi^\dagger D_\alpha \Phi (\bar{D}^\alpha \Phi^\dagger D^\nu \Phi - \bar{D}^\nu \Phi^\dagger D^\alpha \Phi) + \\ + \bar{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\mu \Phi (\bar{D}^\nu \Phi^\dagger D^\alpha \Phi - \bar{D}^\alpha \Phi^\dagger D^\nu \Phi) \Big] F_{\mu\nu}^R,$$

$$H_6^p = -\frac{1}{90} (D_\mu \Phi \bar{D}^\mu \Phi^\dagger)^3 + \frac{1}{30} D_\mu \Phi \bar{D}^\mu \Phi^\dagger (D_\alpha \Phi \bar{D}_\nu \Phi^\dagger)^2 - \\ - \frac{1}{60} D_\mu \Phi \bar{D}^\mu \Phi^\dagger D_\nu \Phi \bar{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\alpha \Phi \bar{D}^\nu \Phi^\dagger + \\ + \frac{1}{180} D_\mu \Phi \bar{D}_\nu \Phi^\dagger D_\alpha \Phi \bar{D}^\mu \Phi^\dagger D^\nu \Phi \bar{D}_\alpha \Phi^\dagger - \\ - \frac{1}{60} D_\mu \Phi \bar{D}_\nu \Phi^\dagger D^\mu \Phi \bar{D}_\alpha \Phi^\dagger D^\nu \Phi \bar{D}^\alpha \Phi^\dagger.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kleinert H. — Phys. Lett., 1976, v.62B, p.77; in: Understanding the Fundamental Constituents of Matter, ed. A.Zichichi, N.Y.: Plenum Publishing Corporation, 1978.
2. Первушин В.Н., Эберт Д. — ТМФ, 1978, т.36, с.313.
Первушин В.Н., Райнхардт Х., Эберт Д. — ЭЧАЯ, 1979, т.10, с.444.
3. Дьяконов Д.И., Эйдез М.И. — Письма в ЖЭТФ, 1983, т.38, с.358.
Diakonov D., Petrov V. — Nucl. Phys., 1984, v.B245, p.259; Nucl. Phys., 1986, v.B272, p.457.
4. Карчев Н., Славнов А. — ТМФ, 1985, т.65, с.192.
5. Andrianov A., Novozhilov Yu. — Phys. Lett., 1985, v.B153, p.422;
Андрьянов А.А., Новожилов Ю.В. — ТМФ, 1986, т.69, с.78.
Andrianov A.A. — Phys. Lett., 1985, v.B157, p.425.
Andrianov A.A., Andrianov V.A., Novozhilov V.Yu., Novozhilov Yu.V. — Lett. Math. Phys., 1986, v.11, p.217.
6. Некрасов М.И., Рочев В.Е. — ТМФ, 1988, т.74, с.171;
Некрасов М.И., Рочев В.Е. — Препринт ИФВЭ 86-186, Серпухов, 1986; Препринт ИФВЭ 87-162, Серпухов, 1987.
7. Balog J. — Phys. Lett., 1984, v.149B, p.197.
8. Simic P. — Phys. Rev. Lett., 1985, v.55, p.40; Phys. Rev., 1986, v.D34, p.1903.
9. McKay D., Munczek H. — Phys. Rev., 1985, v.D32, p.266;
McKay D., Munczek H., Young B. — Phys. Rev., 1988, v.D37, p.194.
10. Cahill R.T., Roberts C.D. — Phys. Rev., 1985, v.D32, p.2419;
Cahill R.T., Praschifka J., Roberts C.D. — Phys. Rev., 1987, v.D36, p.209; Ann. Phys., 1988, v.188, p.20.
11. Ball R. — In: Proc. of the Workshop on Skyrmions and Anomalies, Mogilany, Poland, 1987.
12. Cahill R.T. — Aust. J. Phys., 1989, vol.42, p.171; in Proc. of Workshop on Diquarks, Turin, ed M. Anselmino and E. Predazzi (World Scientific, Singapore, 1989), p.201; Nucl. Phys., 1992, v.A543, p.63. Contribution to the Joint Japan-Australia Workshop on Quarks, Hadrons and Nuclei, Adelaide 1995, hep-ph/9601319.
13. Diakonov D. — Lectures at the Enrico Fermi School in Physics, Varenna, 1995, hep-ph/9602375.

14. **Kikkawa K.** — *Progr. Theor. Phys.*, 1976, v.56, p.947.
15. **Eguchi T.** — *Phys. Rev.*, 1976, v.D14, p.2755.
16. **Волков М.К., Эберт Д.** — *ЯФ*, 1982, т.36, с.1265;
Volkov M.K., Ebert D. — *Z.Phys.*, 1983, v.C16, p.205;
Volkov M.K. — *Ann. Phys.*, 1984, v.157, p.282.
17. **Dhar A., Wadia S.R.** — *Phys. Rev. Lett.*, 1984, v.52, p.959;
Dhar A., Shankar R., Wadia S.R. — *Phys. Rev.*, 1985, v.D31, p.3276.
18. **Bernard V., Jaffe R.L., Meißner Ulf-G.** — *Nucl. Phys.*, 1988, v.B308, p.753;
Bernard V., Meißner Ulf-G., Blin A.H., Hiller B. — *Phys. Lett.*, 1991, v.B253, p.443.
19. **Андрианов А.А., Андрианов В.А.** *ТМФ*, 1992, т.93, с.67.
20. **Espriu D., de Rafael E., Taron J.** *Nucl. Phys.*, 1990, v.B345, p.22; [Erratum: 1991, v.B355, p.278].
21. **Bel'kov A.A., Ebert D., Emelyanenko A.V.** — *Nucl. Phys.*, 1993, v.A552, p.523.
22. **Efimov G.V., Ivanov M.A.** — *The Quark Confinement Model of Hadrons*, IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1993;
Ivanov M.A., Mizutani T. *Phys. Rev.*, 1992, v.D45, p.1580.
Efimov G.V., Nedelko S.N. — *Phys. Rev.*, 1995, v.D51, p.174.
23. **Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A., Scherer S.** — Preprint TRIUMF TRI-PP-94-19, Vancouver, 1994; hep-ph/9404309; in *Proc. of the Int. Conf. on Mesons and Nuclei at Intermediate Energies (1994)*, ed. M.Kh.Khankhasayev, Zh.B.Kurmanov. World Scientific, Singapore, 1995.
24. **Nikolov E.N., Broniowski W., Christov Chr.V.** — Preprint RUB-TPII-13/95, hep-ph/9602274;
Broniowski W., Ripka G., Nikolov E.N., Goeke K. Preprint RUB-TPII-19/95, hep-ph/9509363.
25. **Nambu Y., Jona-Lasinio G.** — *Phys. Rev.*, 1961, v.122, p.345; v.124, p.246.
26. **Волков М.К.** — *ЭЧАЯ*, 1986, т.17, с.433; 1993, т.24, с.89;
Ebert D., Ivanov A.N., Volkov M.K. — *Fortschr. Phys.*, 1989, v.37, p.7;
Ebert D., Reinhardt H., Volkov M.K. — *Progr. Part. Nucl. Phys.*, 1994, v.33, p.1.
27. **Vogl U., Weise W.** *Progr. Part. Nucl. Phys.*, 1991, v.27, p.195.
28. **Klevansky S.P.** — *Rev. Mod. Phys.* 1992, v.64, p.649.
29. **Hatsuda T., Kunihiro T.** — *Phys. Rep.*, 1994, v.247, p.221.
30. **Alkofer R., Reinhardt H.** — *Chiral Quark Dynamics*, LNF, v.m33, Springer, 1995;
Alkofer R., Reinhardt H., Weigel H. — *Phys. Rep.*, 1996, v.265, p.139.
31. **Christov Chr.V., Blotz A., Kim H-C. et al.** — *Progr. Part. Nucl. Phys.*, 1996, v.37, p.91.
32. **Ebert D., Reinhardt H.** — *Nucl. Phys.*, 1986, v.B271, p.188.
33. **Bel'kov A.A., Ebert D., Pervushin V.N.** — *Phys. Lett.*, 1987, v.193B, p.315;
Бельков А.А., Ланёв А.В., Эберт Д. — *ЯФ*, 1989, т.50, с.1093.
Бельков А.А., Первушин В.Н., Эберт Д. — *ЭЧАЯ*, 1991, т.22, с.5.
34. **Hansson T.H., Prakash M., Zahed I.** — *Nucl. Phys.*, 1990, v.B335, p.67.
35. **Schuren C., Ruiz Arriola E., Goeke K.** — *Nucl. Phys.*, 1992, v.A547, p.612.
36. **Bijnens J., Bruno C., de Rafael E.** — *Nucl. Phys.*, 1993, v.B390, p.501.
37. **Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A., Scherer S.** — *Acta Phys. Slovaca*, 1995, v.45, p.121; hep-ph/9408368.
38. **Bijnens J.** — *Phys. Rep.*, 1996, v.265, p.369. hep-ph/9502335.

39. **Gasser J., Leutwyler H.** — Ann. Phys., 1984, v.158, p.142; Nucl. Phys., 1985, v.B250, p.65, p.517, p.539.
40. **Ecker G.** — Progr. Part. Nucl. Phys., 1995, v.35, p.1.
Pich A. — Rep. Prog. Phys., 1995, v.58, p.563.
41. **Weinberg S.** — Physica, 1979, v.a96, p.327.
42. **Волков М.К., Первушин В.Н.** — Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов, М.: Атомиздат, 1978.
43. **Volkov M.K.** — Ann. Phys., 1968, v.49, p.202; Fortschr. Phys., 1974, v.28, p.499.
44. **Bijnens J., Ecker G., Gasser J.** — Chiral perturbation theory. In: The Second DAΦNE Physics Handbook, eds. L.Maini, G.Pancheri, N.Paver, INFN, Frascati, 1995.
45. **Celenza L.S., Shakin C.M.** — Phys. Rev., 1986, v.D34, p.1591; 1987, v.D35, p.2843.
46. **Berlmann R.A. et al.** — Z. Phys., 1988, v.C39, p.231.
47. **Schwinger J.** — Phys. Rev., 1951, v.82, p.664.
48. **DeWitt B.S.** — Dynamical theory of groups and fields, N.Y.: Gordon and Breach, 1965 (Перевод: Девитт Б.С. — Динамическая теория групп и полей, М.: Наука, 1987).
49. **Bel'kov A.A., Ebert D., Lanyov A.V., Schaale A.** — Int. J. Mod. Phys., 1993, v.C4, p.775.
50. **Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A.** — Comp. Phys. Commun., 1996, v.95, p.123.
51. **Van de Ven A.E.M.** — Nucl. Phys., 1985, v.B250, p.593.
52. **Аврамиди И.Г.** — ТМФ, 1989, т.79, с.219. **Avramidi I.G.** — Nucl. Phys., 1991, v.B355, p.712.
53. **Ball R.D.** — Phys. Rep., 1989, v.182, p.1.
54. **Euler E.** — Ann. Phys. (Leipzig), 1936, v.26, p.398;
Euler E., Heisenberg W. — Z. Phys., 1936, v.98, p.714.
55. **Schwinger J.** — Particles, Sources and Fields, v. II, London: Addison-Wesley, 1973 (Перевод: Швингер Ю. — Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1976, т.2).
56. **Carson L.** — Phys. Rev., 1990, v.D42, p.2853.
57. **Fliegner D., Schmidt M.G., Schubert C.** — Z. Phys., 1994, v.C64, p.111;
Fliegner D. et al. — Preprint DESY 94-221, HD-THEP-94-26, Heidelberg, 1994; hep-ph/9411177.
58. **Vilkovisky G.A.** — Preprint CERN-TH-6392-92, Geneva, February 1992;
Gusynin V.P., Korniyak V.V. — J. Symb. Comp., 1994, v.17, p.283.
Schimming R. — In Analysis, Geometry and Groups: A Riemann Legacy Volume, ed. H.M.Srivastava, Th.M.Rassias, Hadronic Press, Palm Harbor, Florida, USA, 1993, p.627.
59. **Wess J., Zumino B.** — Phys. Lett., 1971, v.37B, p.95.
60. **Witten E.** — Nucl. Phys., 1983, v.B223, p.422, p.433.
61. **Petersen J.L.** — Acta Phys. Pol., 1985, v.B16, p.271.
62. **Bijnens J., Bramon A., Cornet F.** — Z. Phys., 1990, v.C46, p.599.
Bijnens J. — Nucl. Phys., 1991, v.B367, p.709; Int. J. Mod. Phys. 1993, v.A8, p.3045.
63. **Scherer S., Fearing H.W.** — Phys. Rev., 1995, v.D52, p.6445.
64. **Coleman S., Wess J., Zumino B.** — Phys. Rev., 1969, v. 177, p.2239.
65. **Leutwyler H.** — In: Recent Aspects of Quantum Fields, ed. H.Mitter, M.Gausterer, Lecture Notes in Physics 396 (1991) 1, (Springer, Berlin); in: Perspectives of the Standard Model, ed. R.K.Ellis, C.T.Hill, J.D.Lykken, (Wold Scientific, Singapore, 1992).

66. Fearing H.W., Scherer S. — Phys. Rev., 1996, v.D53, 315.
67. Ecker G., Gasser J., Pich A., de Rafael E. — Nucl. Phys., 1989, v.B321, p.311.
68. Donoghue J.F., Ramirez C., Valencia G. — Phys. Rev., 1989, v.D39, p.1947.
69. Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Schaale A. — Acta Phys. Slovaca, 1995, v.45, p.135; hep-ph/9408368.
70. Reinhardt H., Dang B.V. — Nucl. Phys., 1989, v.A500, p.563.
71. Quigg C., Rosner J.L. — Phys. Rep., 1979, v.56, p.167.
72. Laermann E. et al. — Nucl. Phys. (Proc. Suppl.), 1991, v.B26, p.268.
73. Lucha W. et al. — Phys. Rep., 1991, v.200, p.127.
74. Di Giacomo A., Panagopoulos H. — Phys. Lett., 1992, v.B285, p.133.
75. Bellucci S., Gasser J., Sainio M.E. — Nucl. Phys., 1994, v.B423, p.80; *ibid*, 1994, v.B431, p.413 (Erratum).
76. Bel'kov A.A., Lanyov A.V., Scherer S. — J. Phys., 1996, v.G22, p.1383.
77. Bellucci S., Bruno C. — Nucl. Phys., 1995, v.B452, p.626.
78. Crystal Ball Collaboration (Marsiske H. et al.) — Phys. Rev., 1990, v.D41, p.3324.
79. Bijns J., Fayyazuddin A., Prades J. — Preprint FTUV-95-70, hep-ph/9512374.
80. t'Hooft G. — Phys. Rev., 1976, v.D14, p.3432.
81. Reinhardt H., Alkofer R. — Phys. Lett., 1988, v.B207, p.482;
Takizawa M., Tsushima K., Kohyama Y., Kubodera K. — Prog. Theor. Phys., 1989, v.82, p.481; Nucl. Phys., 1990, v.A507, p.611.
82. Di Vecchia P., Veneziano G. — Nucl. Phys., 1980, v.B171, p.253;
Di Vecchia P., Nicodemi F., Pettorino R., Veneziano G. — Nucl. Phys., 1981, v.B181, p.318.
83. Rosenzweig C., Schechter J., Trakern C.G. — Phys. Rev., 1980, v.D21, p.3388.
84. Klimt S., Lutz M., Vogl U., Weise W. — Nucl. Phys., 1990, v.A516, p.429, p.469;
Jaminon M., Mendez-Galain R., Ripka G., Stassart P. — Nucl. Phys., 1992, v.A537, p.418;
Schüren C., Döring, Ruiz Arriola E., Goeke K. — Nucl. Phys., 1993, v.A565, p.687.
85. Takizawa M., Kubodera K., Myhrer F. — Phys. Lett., 1991, v.B261, p.221.
86. Гуламов Т.И., Титов А.И. — ЯФ, 1995, т.58, с.337.
87. Anikin I., Ivanov M., Kulimanova N., Lyubovitskii V. — Z. Phys., 1995, v.C65, p.681.
88. Бельков А.А., Бом Г., Ланев А.В., Шаале А. — ЭЧАЯ, 1995, т.26, с.562.
89. Rusakov N.L. ("Hyperon" Collaboration) — In: Proc. of the 28th Int. Conf. on High Energy Phys., ed. Z.A.Ajduk and A.K.Wroblewski, World Scientific, 1997, p.1200;
Bel'kov A.A. et al. (Collaboration TNF) — Preprint PHE 90-07, Berlin, 1990; DESY Internal Report, Zeuthen, 1992;
Bohm G. (Collaboration TNF) — In: Proc. of the 28th Int. Conf. on High Energy Phys., ed. Z.Ajduk and A.K.Wroblewski, World Scientific, 1997, p.1204.

ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ

Т.С.Белозерова

Пермский государственный университет, Пермь

В.К.Хеннер

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Пермский государственный университет, Пермь

Дан обзор существующих методов построения явно резонансной унитарной S -матрицы, с помощью которых можно описывать группы резонансов r_i с одинаковыми квантовыми числами при их перекрывании, когда $|E_{r_i} - E_{r_j}| \sim \Gamma_{r_i} + \Gamma_{r_j}$. Детально исследована связь между этими методами. Описание возбужденных состояний с помощью формул Брейта — Вигнера наиболее часто используется во многих задачах физики резонансов и ядерной физики, центральное место в обзоре занимает обсуждение задачи построения унитарной T -инвариантной многоканальной многорезонансной S -матрицы брейт-вигнеровского типа. В качестве актуального приложения рассматриваемых методов изучен спектр возбуждений векторных ρ - и ω -мезонов. Обсуждается возможность их интерпретации как кварк-антикварковых возбужденных состояний.

We review the existing methods of the construction of the directly resonant, unitary S matrix which give the possibility to describe the group of the resonances r_i with the same quantum numbers when $|E_{r_i} - E_{r_j}| \sim \Gamma_{r_i} + \Gamma_{r_j}$. The relations between these methods are investigated thoroughly. The descriptions of the resonances with the Breit-Wigner formulas are mostly often used in many problems of the physics of the resonances and the nuclear physics, and the central place of our review takes the discussion of the construction the unitarity, T -invariant, multichannel and multiresonant S -matrix of the Breit-Wigner kind. As the actual application of the described methods the spectrum of the excited ρ and ω mesons is studied. The discussion of the possibility to interpret them as the quark-antiquark excited states is considered.

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Проблема перекрывающихся резонансов имеет долгую историю, как в ядерной физике, так и в физике элементарных частиц. При этом, особенно в случае нескольких связанных каналов рассеяния, условие унитарности

играет ключевую роль, так как корректное определение параметров резонансов возможно только при использовании унитарной матрицы рассеяния S .

Наиболее часто используемый способ записи парциальных амплитуд, в котором массы и ширины резонансов входят явным образом, — это формулы Брейта — Вигнера (БВ) [1] и их различные модификации. Именно такие простые и ясно интерпретируемые формулы используются в большинстве случаев при описании экспериментальных данных, а входящие в них величины E_r , Γ_r и парциальные ширины резонансов фигурируют в таблицах Particle Data Group. Феноменологический характер этих формул является, в какой-то мере, их положительной чертой, поскольку обуславливает их независимость от динамических моделей. С другой стороны, сопоставление с формулами типа БВ необходимо и в теоретических подходах, в рамках которых находятся спектр и свойства резонансов, например, потенциальных кварковых моделей.

Формулы БВ в случае одного резонанса и одного или нескольких каналов рассеяния исходно удовлетворяют условию унитарности. Дополнительная проблема возникает при построении явно унитарной S -матрицы в случае нескольких перекрывающихся резонансов с одинаковыми квантовыми числами, таких, что $|E_{r_i} - E_{r_j}| \sim \Gamma_{r_i} + \Gamma_{r_j}$. Очевидно, что в этом случае интерференция между резонансами является центральной частью анализа и ключом к интерпретации полученных результатов. Для учета этой интерференции обычно перед БВ-членами вводятся различные фазовые множители, рассматриваемые как свободные параметры. Однако и при введении фазовых множителей, и без них явным и неконтролируемым образом нарушается условие унитарности, которое является исходным мотивом при записи амплитуд в БВ-форме.

Первые теории, дающие унитарную S -матрицу БВ-типа и исходящие из определенных модельных представлений о структуре ядра, были созданы в работах [2,3]. Однако, несмотря на простоту постановки задачи, до недавнего времени отсутствовала явная и простая схема построения унитарной и T -инвариантной S -матрицы требуемого вида в случае более двух перекрывающихся резонансов при многоканальном рассеянии.

Чтобы сделать суть проблемы совершенно ясной, проиллюстрируем на простом примере одноканального рассеяния некорректность обычно используемого простейшего выражения для амплитуды рассеяния в виде суммы БВ-слагаемых в случае перекрывающихся резонансов.

Формула Брейта — Вигнера для амплитуды резонансного рассеяния на изолированном уровне с определенными квантовыми числами при пренебрежении фоном имеет вид

$$f = \frac{\Gamma_1/2}{E - E_1 + i\Gamma_1/2}. \quad (1.1)$$

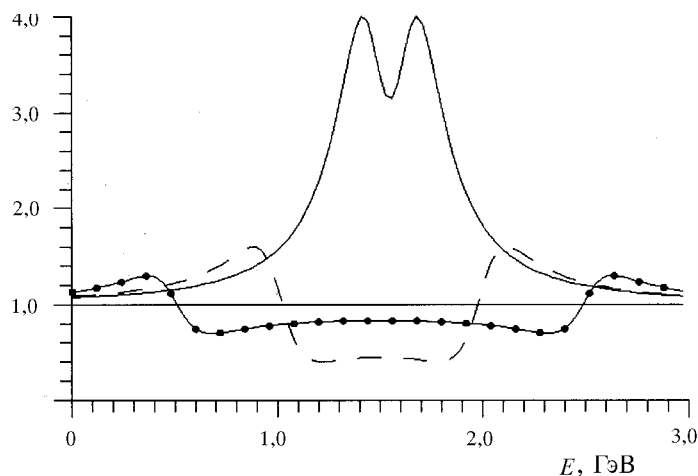


Рис.1. График $|S(E)|^2$, построенный для амплитуды (1.3): сплошная линия — $E_1 = 1,45$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,65$, $\Gamma_2 = 0,3$; штриховая линия — $E_1 = 1,00$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 2,00$, $\Gamma_2 = 0,3$; линия с точками — $E_1 = 0,50$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 2,5$, $\Gamma_2 = 0,3$

При этом условие унитарности для парциальной амплитуды

$$\text{Im} f = -|f|^2 \quad (1.2)$$

выполняется тождественно (именно это вместе с «резонансной» структурой формулы (1.1) и является основой для записи парциальных амплитуд рассеяния в виде формул БВ).

Использование в качестве амплитуды выражения

$$f = \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n/2}{E - E_n + i\Gamma_n/2} \quad (1.3)$$

немедленно приводит к большому нарушению фундаментального равенства (1.2). Возьмем для иллюстрации конкретный пример с двумя резонансными состояниями. На рис.1 приведен график $|S(E)|^2$ ($S = I - 2if$), из которого видно, что $|S(E)|^2$ очень существенно отклоняется от унитарного значения 1 даже при сравнительно слабом перекрывании резонансов. Параметры резонансов (например, в ГэВ) приведены в подписи к рисунку.

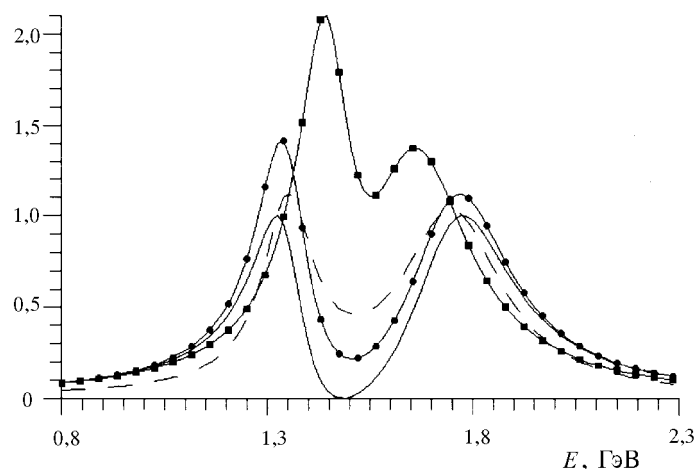


Рис.2. График $|f(E)|^2$ для $E_1 = 1,3$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,7$, $\Gamma_2 = 0,3$: сплошная линия — точная БВ-формула (2.2); штриховая линия — формула (1.3); линия с точками — формула (1.4). Линия с $\blacksquare$ — график $|f(E)|^2$ для $E_1 = 1,4$, $\Gamma_1 = 0,15$, $E_2 = 1,6$, $\Gamma_2 = 0,3$, построенный по формуле (1.3)

Из рис.2 видно, что отклонение квадрата амплитуды $|f|^2$, вычисленной по формуле (1.3), от значений, вычисленных по формуле (2.2), сохраняющей унитарность (см. ниже), достигает 30% даже при сравнительно слабом перекрывании резонансов ($E_1 = 1,2$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,7$, $\Gamma_2 = 0,3$). При существенном перекрывании резонансов, как, например, в случае семейства векторных ρ' -мезонов ($E_{\rho'_1} \approx 1,45$, $\Gamma_{\rho'_1} \approx 0,35$, $E_{\rho'_2} \approx 1,65$, $\Gamma_{\rho'_2} \approx 0,35$; все величины приведены в ГэВ), отклонение достигает 100%.

Заметим, что иногда (в том числе в учебной литературе) предлагается вычислять квадрат амплитуды $|f|^2$ как сумму квадратов амплитуд отдельных резонансов, то есть

$$|f|^2 \approx \sum_{n=1}^N \left| \frac{\Gamma_n/2}{E - E_n + i\Gamma_n/2} \right|^2, \quad (1.4)$$

и в качестве аргумента приводится соображение, что интерференционные члены в этом случае некорректно учитывать как превышающие точность исходного выражения (1.3). Из рис.2 видно, что этот способ расчета неприемлем даже при хорошо разнесенных резонансах.

Существуют различные методы, позволяющие описывать перекрывающиеся состояния. Мы обсудим те из них, которые дают реальные конструктивные способы описания резонансов, позволяющие, например, обрабатывать экспериментальные данные. Во всех этих подходах параметры резонансов фигурируют явным образом. Мы рассмотрим как возможность сопоставления результатов этих методов друг с другом, так и их возможную интерпретацию в духе формул типа БВ, что является нетривиальной задачей.

Ведущими соображениями при анализе перекрывающихся резонансов являются унитарность и T -инвариантность матрицы рассеяния S , а также интерпретируемость параметров формул.

Наиболее строгий подход состоит в трактовке резонансов как полюсов парциальных амплитуд рассеяния на многосвязной римановой поверхности. Однако, в случае нескольких резонансов и большого числа каналов рассеяния, количество полюсов очень велико, и такой подход становится громоздким и малоприменимым. В случае многоканального рассеяния наиболее популярны N/D -матричный метод [4], который основывается на аналитических свойствах амплитуд рассеяния, и K -матричный метод [5]. В этих методах не возникают дополнительные сложности при описании близко расположенных, перекрывающихся резонансов, поскольку здесь унитарность сохраняется по построению. Мы рассмотрим K -матричный подход, но не будем обсуждать описание резонансов в N/D -методе по причине его меньшей популярности при анализе экспериментальных данных и необходимости учета динамических сингулярностей.

Достаточно простые задачи, например, два резонанса и один или несколько каналов рассеяния, которые мы обсуждаем для различных методов, позволят сделать выводы наглядными, а также помогут критически взглянуть на существующие подходы.

Кратко о структуре работы. Во втором разделе в пп.2.1—2.5 рассмотрены и сопоставлены существовавшие до недавнего времени методы, разработанные для описания перекрывающихся резонансов. В третьем разделе в п.3.1 приведен общий метод построения унитарной многоканальной многорезонансной S -матрицы БВ-типа. В п.3.2 описано включение фона в эту схему, в п.3.3 определены величины, играющие роль брэнчингов в случае перекрывающихся резонансов. С технической точки зрения построение такой S -матрицы нетривиально, и в п.3.4 приводится последовательная процедура ее получения для случаев двух и трех перекрывающихся резонансов и произвольного числа каналов. В четвертом разделе в качестве актуального примера приводится описание возбуждений векторных ρ - и ω -резонансов. Проблема установления спектра, свойств и кваркового состава этих ρ' - и ω' -состояний широко обсуждается в настоящее время, но все существующие описания экспериментальных данных опираются на формулы типа (1.3) и

существенно нарушают условие унитарности. В заключении кратко сформулированы основные проблемы, возникающие при использовании различных методов описания состояний, имеющих общие каналы распадов.

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОПИСЫВАТЬ ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ

2.1. Перекрывающиеся резонансы в БВ-подходе в случае одного канала. Для случая одного канала, когда имеет место чисто упругое рассеяние, И.С.Шапиро [6] (см. также [7]) использовал запись резонансной S -матрицы в виде произведения унитарных сомножителей, соответствующих отдельным резонансам, и экспоненциального множителя, связанного с нерезонансным фоном. Эта формула пригодна для любого числа уровней N , которые могут быть и перекрывающимися:

$$S(E) = e^{2i\delta_B} \prod_{n=1}^N \left(1 - i \frac{\Gamma_n}{E - E_n + i\Gamma_n/2} \right). \quad (2.1)$$

Здесь δ_B — фоновая фаза, то есть фаза потенциального рассеяния вдали от резонансов: $\lim_{E \rightarrow \infty} S(E) = e^{2i\delta_B}$.

Требования унитарности $S(E)S(E)^+ = I$ и T -инвариантности матрицы рассеяния S соблюдаются очевидным образом.

Амплитуду рассеяния $f = (1 - S)/2i$ можно записать в виде (для простоты выпишем только резонансную часть амплитуды):

$$f^{(R)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n}{E - E_n + i\Gamma_n/2}, \quad (2.2)$$

где γ_n — парциальная ширина n -го резонанса.

В работе [6] получена простая формула для коэффициентов γ_1, γ_2 для случая одного канала и двух резонансов:

$$\gamma_1 = \Gamma_1 \frac{E_1 - E_2 - i(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2}{E_1 - E_2 + i(\Gamma_2 - \Gamma_1)/2}, \quad \gamma_2 = \Gamma_2 \frac{E_2 - E_1 - i(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2}{E_2 - E_1 + i(\Gamma_1 - \Gamma_2)/2}. \quad (2.3)$$

Отсюда получаются полезные соотношения

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} e^{2i\varphi}, \quad \varphi = -\arctan \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{E_1 - E_2}$$

и

$$\frac{|\gamma_1|}{\Gamma_1} = \frac{|\gamma_2|}{\Gamma_2} = \left[\frac{(E_2 - E_1)^2 + i(\Gamma_2 + \Gamma_1)^2/4}{(E_2 - E_1)^2 + i(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} \right]^{1/2},$$

то есть модули вычетов γ_n не равны ширинам уровней.

Справедливо также правило сумм:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Формулы (2.2), (2.3) для случая двух резонансов и одного канала имеют ясную и легко интерпретируемую БВ-структуру, и мы используем их для сравнения с результатами других наиболее часто используемых методов. Ниже, в качестве простого примера, мы будем рассматривать с помощью разных методов задачу о системе двух резонансов, взаимодействующих с одним внешним каналом. Решение этой задачи позволит исследовать возможность интерпретации данных методов в духе формул БВ.

Из структуры формул (2.3) видно, что при достаточной разнесенности резонансов, когда $|E_1 - E_2| \gg \Gamma_1 + \Gamma_2$, комплексные константы γ_n переходят в обычные ширины Γ_n . То есть, как и следовало ожидать, простая сумма БВ-слагаемых (формула (1.3)) не противоречит условию унитарности, если резонансы очень далеко разнесены. Однако в случае даже очень слабо «перекрывающихся» резонансов (см. примеры из предыдущего раздела) коэффициенты γ_1 и γ_2 становятся комплексными и существенно отличаются от значений Γ_1 и Γ_2 , то есть матрица рассеяния S , построенная на основе формулы (1.3), будет существенно неунитарной.

2.2. К-матричный метод в случае перекрывающихся резонансов. Широко известным и часто используемым методом описания резонансных реакций является К-матричный метод.

К-матрица для случая N резонансов и M каналов имеет вид

$$K(E) = \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}, \quad (2.4)$$

где ε_r — действительные полюсы К-матрицы, $\gamma_r = \{\gamma_{ri}\}_{i=1}^M$ — действительные векторы.

Матрица рассеяния S в области, достаточно удаленной от порогов, запишется с помощью K -матрицы следующим образом:

$$S(E) = \frac{I - iK(E)}{I + iK(E)} \equiv \frac{I - i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}}{I + i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}}. \quad (2.5)$$

S -матрица (2.5) унитарна и T -инвариантна, и с этой точки зрения использование метода K -матрицы корректно, независимо от того, как близко расположены резонансы с одинаковыми квантовыми числами.

Рассмотрение простой системы из двух резонансов и одного канала сразу позволяет увидеть, что параметры ε_r и векторы γ_r отличаются от масс E_r , ширин Γ_r и векторов парциальных ширин резонансов, входящих в формулы БВ-вида. Например, в полюсах $E = \varepsilon_r$ матрица рассеяния S принимает значение $S(\varepsilon_r) = -1$, однако, как следует из формул (2.2), (2.3), в точках резонансов E_r значения матрицы S равны, соответственно,

$$S(E_1) = -1 + i \frac{\Gamma_2}{E_1 - E_2 + i\Gamma_2/2}, \quad S(E_2) = -1 + i \frac{\Gamma_1}{E_2 - E_1 + i\Gamma_1/2}.$$

Выразим энергии E_r и ширины Γ_r резонансов через значения полюсов ε_r и векторы γ_r . В случае двух резонансов и одного канала $\gamma_1 = \gamma_{11}$, $\gamma_2 = \gamma_{21}$,

$$K_{11} = \frac{\gamma_{11}^2}{E - \varepsilon_1} + \frac{\gamma_{21}^2}{E - \varepsilon_2},$$

$$S_{11} = 1 - 2i \frac{E(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) - \gamma_{11}^2 \varepsilon_2 - \gamma_{21}^2 \varepsilon_1}{E^2 - E[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - i(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - i(\gamma_{11}^2 \varepsilon_2 + \gamma_{21}^2 \varepsilon_1)}.$$

Если μ_1 и μ_2 — комплексные корни уравнения

$$E^2 - E[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - i(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)] + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - i(\gamma_{11}^2 \varepsilon_2 + \gamma_{21}^2 \varepsilon_1) = 0, \quad (2.6)$$

то амплитуду f_{11} можно представить как сумму БВ-слагаемых:

$$f_{11} = \frac{A_1}{E - \mu_1} + \frac{A_2}{E - \mu_2},$$

где

$$A_1 = \frac{\mu_1(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) - \gamma_{11}^2 \varepsilon_2 - \gamma_{21}^2 \varepsilon_1}{\mu_1 - \mu_2},$$

$$A_2 = \frac{\mu_2(\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) - \gamma_{11}^2 \varepsilon_2 - \gamma_{21}^2 \varepsilon_1}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Если параметры ε_1 , ε_2 , γ_{11} , γ_{21} найдены, например, в результате фитирования экспериментальных данных, то для нахождения значений энергий и ширин резонансов, входящих в формулы БВ, нужно найти корни μ_1 и μ_2 уравнения (2.6). Тогда действительные части этих корней можно интерпретировать как энергии резонансов E_1 и E_2 , а мнимые части ($-2\mu_1^y$ и $-2\mu_2^y$) — как ширины резонансов Γ_1 и Γ_2 соответственно:

$$E_1 = \mu_1^x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2 + W},$$

$$E_2 = \mu_2^x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2 + W},$$

$$\Gamma_1 = -2\mu_1^y = (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) + \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\gamma_{11}^2 - \gamma_{21}^2)}{\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2 + W}},$$

$$\Gamma_2 = -2\mu_2^y = (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2) - \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\gamma_{11}^2 - \gamma_{21}^2)}{\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2 + W}},$$

где

$$W = \sqrt{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)^2]^2 - 16(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \gamma_{11}^2 \gamma_{21}^2}.$$

Из структуры этих формул видно, что $E_i \rightarrow \varepsilon_i$, $\Gamma_i \rightarrow \gamma_{i1}^2$, только если $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \gg (\gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2)$. Однако в общем случае значения ε_1 , ε_2 и γ_{11}^2 , γ_{21}^2 уже нельзя интерпретировать как значения энергий E_1 , E_2 и ширин Γ_1 , Γ_2 .

Некорректность такой интерпретации иллюстрирует рис.3. Сплошной линией изображен график квадрата амплитуды $|f|^2$, вычисленной по точ-

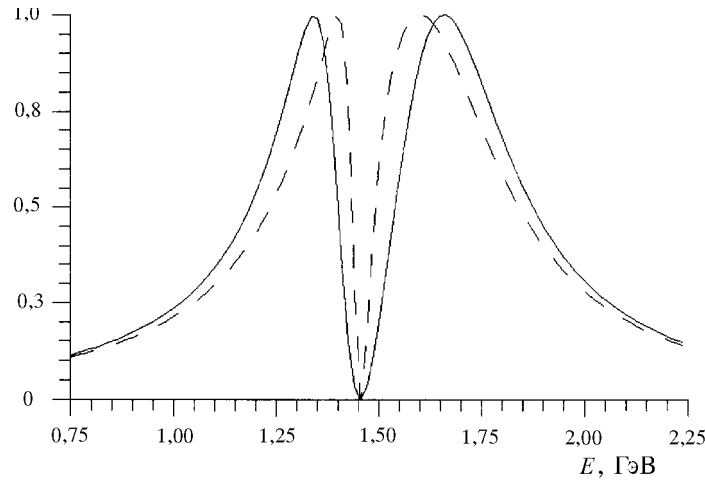


Рис.3. Сплошная линия — график $|f(E)|^2$ для $E_1 = 1,4$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,6$, $\Gamma_2 = 0,3$, построенный в БВ-методе по формуле (2.2); штриховая линия — график $|f(E)|^2$ для $\varepsilon_1 = 1,4$, $\gamma_1^2 = 0,3$, $\varepsilon_2 = 1,6$, $\gamma_2^2 = 0,3$ в K -матричном методе

ным формулам (2.2)—(2.3), штриховой — график квадрата амплитуды $|f|^2$, вычисленной с помощью K -матрицы со значениями параметров $\varepsilon_1 = E_1$, $\varepsilon_2 = E_2$, $\gamma_1^2 = \Gamma_1$, $\gamma_2^2 = \Gamma_2$.

Рассмотрим теперь систему из двух резонансов и M каналов и выразим энергии E_1 , E_2 и ширины Γ_1 , Γ_2 резонансов через полюсы ε_1 , ε_2 и действительные векторы γ_1 , γ_2 K -матрицы.

Запишем матрицу рассеяния S в виде суммы БВ-слагаемых:

$$S(E) = \frac{I - i \frac{\gamma_1 \gamma_1^T}{E - \varepsilon_1} - i \frac{\gamma_2 \gamma_2^T}{E - \varepsilon_2}}{I + i \frac{\gamma_1 \gamma_1^T}{E - \varepsilon_1} + i \frac{\gamma_2 \gamma_2^T}{E - \varepsilon_2}} = I - i \frac{C^{(1)}}{E - \mu_1} - i \frac{C^{(2)}}{E - \mu_2}, \quad (2.7)$$

где μ_1 и μ_2 — искомые комплексные энергии, а $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ — матрицы комплексных коэффициентов. Домножив обе части равенства (2.7) на зна-

менатель $(I + iK)$, а затем на произведение $(E - \varepsilon_1)(E - \varepsilon_2)(E - \mu_1)(E - \mu_2)$, получим

$$\begin{aligned} & -iC^{(1)}(E - \varepsilon_1)(E - \varepsilon_2)(E - \mu_2) - iC^{(2)}(E - \varepsilon_1)(E - \varepsilon_2)(E - \mu_1) + \\ & + 2\gamma_1\gamma_1^T(E - \varepsilon_2)(E - \mu_1)(E - \mu_2) + 2\gamma_2\gamma_2^T(E - \varepsilon_1)(E - \mu_1)(E - \mu_2) + \\ & + [\gamma_1\gamma_1^T(E - \varepsilon_2) + \gamma_2\gamma_2^T(E - \varepsilon_1)][C^{(1)}(E - \mu_2) + C^{(2)}(E - \mu_1)] = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для того чтобы равенство (2.8) выполнялось тождественно по E , необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю коэффициенты при всех степенях E^k ($k = 0, \dots, 3$). Это приводит к системе матричных уравнений, из которых получаются выражения для матриц комплексных коэффициентов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$:

$$\begin{aligned} C^{(1)} = & \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} [(\mu_2 - \varepsilon_1 + iV_1)\gamma_1\gamma_1^T + \\ & + (\mu_2 - \varepsilon_2 + iV_2)\gamma_2\gamma_2^T + iV_{12}(\gamma_1\gamma_2^T + \gamma_2\gamma_1^T)], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} C^{(2)} = & \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} [-(\mu_1 - \varepsilon_1 + iV_1)\gamma_1\gamma_1^T - \\ & - (\mu_1 - \varepsilon_2 + iV_2)\gamma_2\gamma_2^T - iV_{12}(\gamma_1\gamma_2^T + \gamma_2\gamma_1^T)], \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 = \gamma_1^T\gamma_1 = \sum_{i=1}^M \gamma_{1i}^2, \quad V_2 = \gamma_2^T\gamma_2 = \sum_{i=1}^M \gamma_{2i}^2, \\ V_{12} = \gamma_1^T\gamma_2 = \gamma_2^T\gamma_1 = \sum_{i=1}^M \gamma_{1i}\gamma_{2i}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

После достаточно громоздких преобразований получим выражения для значений μ_1 и μ_2 :

$$\mu_1 = \frac{b - (u + i\nu)}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b + (u + i\nu)}{2},$$

где

$$b = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - i(V_1 + V_2),$$

$$u = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}, \quad v = \frac{y}{\sqrt{2(x + \sqrt{x^2 + y^2})}},$$

$$x = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2,$$

$$y = -2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(V_2 - V_1).$$

Затем нужно вычислить корни μ_1 и μ_2 матричного уравнения (2.8), действительные и мнимые части этих корней дают, соответственно, энергии и ширины резонансов:

$$E_1 = \mu_1^x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2 + W},$$

$$E_2 = \mu_2^x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2 + W},$$

$$\Gamma_1 = -2\mu_1^y = (V_1 + V_2) - \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(V_2 - V_1)}{\sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2 + W}},$$

$$\Gamma_2 = -2\mu_2^y = (V_1 + V_2) + \frac{\sqrt{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(V_2 - V_1)}{\sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 - (V_2 - V_1)^2 - 4V_{12}^2 + W}},$$

где

$$W = \sqrt{[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + (V_2 - V_1)^2]^2 + 8V_{12}^2[V_1^2 + V_2^2 + 2(V_{12}^2 - V_1V_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2]}.$$

Из приведенных формул видно, что параметры, используемые в методе K -матрицы, полюсы ε_r и векторы γ_r , можно интерпретировать как энергии E_r и векторы парциальных ширин только в двух случаях:

$$1) \text{ при очень большой разнесенности резонансов, когда } |E_2 - E_1| \gg$$

$$\gg \sum_{i=1}^M (\gamma_{1i}^2 + \gamma_{2i}^2);$$

2) при ортогональности векторов γ_1 и γ_2 $V_{12} = \sum_{i=1}^M \gamma_{1i} \gamma_{2i} = 0$, что в мето-

де K -матрицы в каком-то смысле отвечает отсутствию связи между уровнями.

В этих случаях

$$\mu_1 = \varepsilon_1 - iV_1, \quad C^{(1)} = 2\gamma_1 \gamma_1^T,$$

$$\mu_2 = \varepsilon_2 - iV_2, \quad C^{(2)} = 2\gamma_2 \gamma_2^T,$$

то есть

$$E_r = \varepsilon_r, \quad \Gamma_r = 2 \sum_{i=1}^M \gamma_{ri}^2,$$

и матрица рассеяния принимает вид

$$S(E) = I - 2i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - E_r + i\Gamma_r/2}.$$

В случае нескольких резонансов ($N \geq 3$) приведение S -матрицы, полученной с помощью K -матричного метода, к сумме слагаемых типа БВ становится задачей чрезвычайно сложной (в частности, в случае N резонансов для определения физических значений энергий и ширин резонансов, т.е. полюсов S -матрицы, требуется решение комплексного матричного уравнения $(2N-1)$ -го порядка). Кроме того, при большом числе каналов K -матричный метод становится весьма громоздким и трудоемким для фитирования, поскольку для каждой экспериментальной точки и для каждого набора параметров требует обращения комплексной матрицы M -го порядка.

2.3. Представление амплитуд резонансных реакций с помощью неэрмитова гамильтониана H . Другой подход к описанию резонансных реакций при наличии перекрывающихся уровней был предложен в работе И.Ю.Кобзарева, Н.Н. Николаева, Л.Б.Окуня [8].

Рассмотрим систему N нестабильных перемешивающихся уровней, взаимодействующих с M внешними каналами. Каждому уровню r сопоставляется вектор Ψ_r в N -мерном линейном пространстве и комплексное значение энергии $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$. Поведение такой системы полностью задано, если известна гамильтоновская матрица H_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$). Временную эво-

люцию вектора состояния можно описать с помощью уравнения Шредингера с эффективным неэрмитовым гамильтонианом H :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t) = H\Psi(t).$$

Векторы квазистационарных состояний являются собственными векторами матрицы H с комплексными собственными значениями

$$H\Psi_r = (E_r - i\Gamma_r/2) \Psi_r.$$

Произвольное состояние многоуровневой системы выражается через суперпозицию состояний Ψ_r :

$$\Psi(t) = \sum_{r=1}^N b_r \Psi_r \exp[-iE_r t/\hbar + \Gamma_r t/2],$$

где b_r — коэффициенты разложения начального состояния $\Psi(0)$ по квазистационарным состояниям.

Матрицу H можно записать в виде

$$H = H^{(0)} - \frac{i}{2} \Gamma, \quad \text{где} \quad H^{(0)} = \frac{1}{2} (H + H^+), \quad \Gamma = i(H - H^+),$$

а $H^{(0)}$ и Γ — эрмитовы матрицы со следами

$$\text{Tr } H^{(0)} = \sum_{r=1}^N E_r, \quad \text{Tr } \Gamma = \sum_{r=1}^N \Gamma_r.$$

В этом случае унитарная резонансная S -матрица имеет вид $S = I - if$, где

$$f = A(E - H)^{-1} A^+$$

или

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N \sum_{g=1}^N A_{ir} (E - H)^{-1}_{rg} A_{jg}. \quad (2.12)$$

Здесь A_{ir} — амплитуда распада уровня r в канал i , A_{jg} — амплитуда образования уровня g в канале j .

Из условия унитарности матрицы S следует

$$i(f - f^+) = ff^+ \quad \text{или} \quad i(f - f^+)_{ij} = \sum_{r=1}^N f_{ir} f_{jr}^*. \quad (2.13)$$

Подставляя (2.12) в условие унитарности (2.13), получаем

$$i(f - f^+) = iA \left[\frac{1}{E - H} - \frac{1}{E - H^+} \right] A^+ = iA \frac{1}{E - H} (H - H^+) \frac{1}{E - H^+} A^+.$$

С другой стороны,

$$ff^+ = A \frac{1}{E - H} A^+ A \frac{1}{E - H^+} A^+$$

и видно, что условие унитарности (2.13) выполняется, если

$$A^+ A = i(H - H^+) = \Gamma.$$

Очевидно, что для выполнения условия T -инвариантности необходимо, чтобы матрица H была симметричной, а амплитуды A_{ri} действительными, то есть

$$H = H^T, \quad A^+ = A^T.$$

Тогда

$$S = I - iA(E - H)^{-1}A^T,$$

и условие унитарности принимает вид

$$AA^T = \Gamma \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^M A_{ri} A_{gi} = \Gamma_{rg}, \quad (r, g = 1, \dots, N). \quad (2.14)$$

Из соотношения (2.14) следует, что амплитуды A_{ri} зависят только от Γ_{rg} и не зависят от $H_{rg}^{(0)}$. Очевидно также, что распадная матрица Γ должна быть неотрицательной как матрица скалярных произведений действительных (M -компонентных) векторов $\mathbf{A}_r$. Таким образом, MN элементов действительной матрицы A и $N(N+1)$ элементов матриц $H^{(0)}$ и Γ связаны $N(N+1)/2$ соотношениями (2.14), то есть данная модель содержит $MN + N(N+1)/2$ свободных параметров.

Для одного изолированного уровня матрица H имеет только один элемент $H_{11} = E_1 - i\Gamma_1/2$ — комплексное значение энергии, соответствующее нестабильному уровню. Амплитуда резонансной реакции в этом случае описывается с помощью обычной формулы Брейта — Вигнера

$$f_{ij} = \frac{A_{1i} A_{1j}}{E - E_1 + i\Gamma_1/2}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, M).$$

В случае нескольких уровней ($N > 1$), не имеющих связи друг с другом, матрица H диагональна, и амплитуды резонансных реакций описываются с помощью суммы выражений БВ

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N \frac{A_{ri} A_{rj}}{E - E_r + i\Gamma_r/2} \quad (i, j = 1, 2, \dots, M).$$

Заметим, что гамильтониан H не может быть диагональным в случае нескольких уровней ($N > 1$) и одного канала ($M = 1$), так как в этом случае векторы амплитуд A_r содержат только по одному элементу A_{r1} , и в соответствии с условием унитарности должно выполняться равенство $A_{r1} A_{g1} = \Gamma_{rg} = 0$ ($r \neq g$), что невозможно при $A_{r1} \neq 0$ и $A_{g1} \neq 0$.

Если имеется несколько перемешивающихся уровней, то выражение для амплитуды f_{ij} существенно отличается от суммы БВ-слагаемых. Рассмотрим, для примера, систему из двух уровней и M каналов. В этом случае

$$H = H^{(0)} - \frac{i}{2} \Gamma = \begin{pmatrix} H_{11} - i\Gamma_{11}/2 & \alpha^x - i\alpha^y/2 \\ \alpha^x - i\alpha^y/2 & H_{22} - i\Gamma_{22}/2 \end{pmatrix},$$

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} H_{11} & \alpha^x \\ \alpha^x & H_{22} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \alpha^y \\ \alpha^y & \Gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^2 \sum_{g=1}^2 A_{ri} (E - H)^{-1} A_{gj} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \{ A_{1i} A_{1j} (E - H_{22} + i\Gamma_{22}/2) + A_{2i} A_{2j} (E - H_{11} + i\Gamma_{11}/2) +$$

$$+ (A_{1i} A_{2j} + A_{2i} A_{1j}) (\alpha^x - i\alpha^y/2) \}, \quad (2.15)$$

где

$$\Delta = (E - H_{11} + i\Gamma_{11}/2)(E - H_{22} + i\Gamma_{22}/2) - (\alpha^x - i\alpha^y/2)^2.$$

Из условий унитарности следует, что

$$\begin{cases} |\mathbf{A}_1|^2 = \Gamma_{11} \\ |\mathbf{A}_2|^2 = \Gamma_{22} \\ (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha^y, \end{cases}$$

то есть длины действительных векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ равны, соответственно, диагональным элементам Γ_{11} и Γ_{22} матрицы Γ , а параметр α^y равен их скалярному произведению.

Величина α^x не имеет ясной физической интерпретации и является дополнительным свободным параметром. Очевидно, что в обсуждаемой модели величина $\alpha = \alpha^x - i\alpha^y/2$ отражает вклад интерференции (перекрывания резонансов) в резонансное рассеяние. В частности, если $\alpha^x = \alpha^y = 0$ (т.е. матрица H диагональна), то амплитуда f сводится к обычной сумме БВ:

$$f_{ij} = \frac{A_{1i}A_{1j}}{E - E_1 + i\Gamma_1/2} + \frac{A_{2i}A_{2j}}{E - E_2 + i\Gamma_2/2}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, M).$$

В этом случае векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ должны быть ортогональны (в M -мерном евклидовом пространстве), поскольку $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha^y = 0$. Но зависимость параметра α от разности $(E_2 - E_1)$ явным образом не определена.

В случае двух резонансов определитель Δ можно записать в виде

$$\Delta = (E - \mu_1)(E - \mu_2),$$

где μ_1 и μ_2 — комплексные собственные значения гамильтониана H . Хорошо видно, что в этом случае амплитуды f_{ij} можно представить как сумму БВ-членов:

$$f_{ij} = \frac{\gamma_1}{E - \mu_1} + \frac{\gamma_2}{E - \mu_2},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{c\mu_1 + d}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \gamma_2 = \frac{c\mu_2 + d}{\mu_2 - \mu_1},$$

$$\begin{aligned}
 c &= A_{1i} A_{1j} + A_{2i} A_{2j}, \\
 d &= -A_{1i} A_{1j} (H_{22} - i\Gamma_{22}/2) - A_{2i} A_{2j} (H_{11} - i\Gamma_{11}/2) + \\
 &\quad + (A_{1i} A_{2j} + A_{2i} A_{1j})(\alpha^x - i\alpha^y/2).
 \end{aligned}$$

Собственные значения μ_1 и μ_2 гамильтониана H выражаются через параметры задачи следующим образом:

$$\mu_1 = \frac{b^x - u}{2} + i \frac{b^y - v}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b^x + u}{2} + i \frac{b^y + v}{2},$$

где

$$\begin{aligned}
 b &= (H_{11} + H_{22}) - i(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})/2, \\
 u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})^2/4 + 4(\alpha^x)^2 - (\alpha^y)^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22} + W}, \\
 v &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x\alpha^y}{\sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})^2/4 + 4(\alpha^x)^2 - (\alpha^y)^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22} + W}}, \\
 W &= \{[(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2/4 + 4(\alpha^x)^2 - (\alpha^y)^2 + \Gamma_{11}\Gamma_{22}]^2 + \\
 &\quad + [(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x\alpha^y]^2\}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

В случае двух резонансов и одного канала мнимая часть параметра α определена однозначно: $\alpha^y = \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}$ и, следовательно, матрица H обязательно недиагональна. Коэффициенты γ_1 и γ_2 в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})\mu_1 - \Gamma_{11}H_{22} - \Gamma_{22}H_{11} + 2\alpha^x\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}{\mu_1 - \mu_2}, \\
 \gamma_2 &= \frac{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22})\mu_2 - \Gamma_{11}H_{22} - \Gamma_{22}H_{11} + 2\alpha^x\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}{\mu_2 - \mu_1}. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Формулы для μ_1 , μ_2 и γ_1 , γ_2 содержат свободные параметры H_{11} , H_{22} , Γ_{11} , Γ_{22} и α^x . Например, на рис.4 показана зависимость $|f_{11}|^2$ от величины

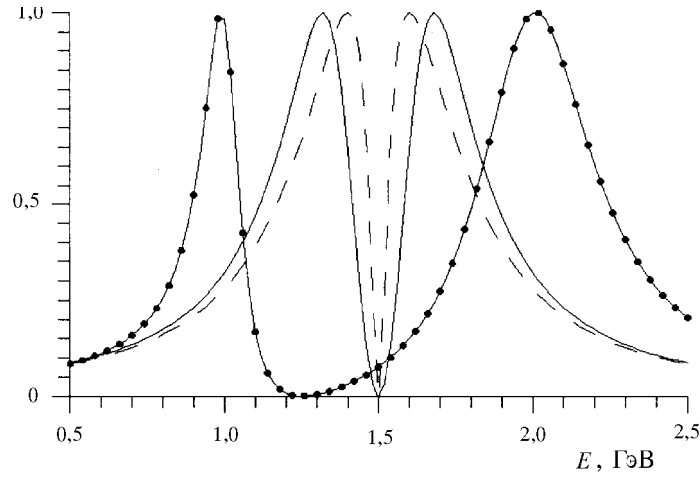


Рис.4. Сплошная линия — график $|f_{11}(E)|^2$ для $E_1 = 1,4$, $\Gamma_1 = 0,3$, $E_2 = 1,6$, $\Gamma_2 = 0,3$, построенный по формуле (2.2). График $|f_{11}(E)|^2$ для $H_{11} = 1,4$, $\Gamma_{11} = 0,3$, $H_{22} = 1,6$, $\Gamma_{22} = 0,3$, построенный по формуле (2.15): штриховая линия — $\alpha^x = 0$; линия с точками — $\alpha^x = 0,5$

параметра α^x при одних и тех же значениях H_{11} , H_{22} , Γ_{11} , Γ_{22} . Такая сильная зависимость от α^x положения максимума и ширины $|f_{11}|^2$, а следовательно, и соответствующего сечения рассеяния, очевидным образом показывает, что величины H_{11} , H_{22} и Γ_{11} , Γ_{22} нельзя интерпретировать как значения масс E_1 , E_2 и ширин Γ_1 , Γ_2 резонансов.

Для получения значений энергий и ширин резонансов нужно найти собственные значения μ_1 и μ_2 гамильтониана H , тогда

$$E_1 = \mu_1^x = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 / 4 + 4(\alpha^x)^2 + W},$$

$$E_2 = \mu_2^x = \frac{H_{11} + H_{22}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 / 4 + 4(\alpha^x)^2 + W},$$

$$\Gamma_1 = -2\mu_1^y = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{22}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}{\sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 + 4(\alpha^x)^2 + W}},$$

$$\Gamma_2 = -2\mu_2^y = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{22}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}{\sqrt{(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 + 4(\alpha^x)^2 + W}},$$

где

$$W = \{[(H_{11} - H_{22})^2 - (\Gamma_{11} + \Gamma_{22})^2 / 4 + 4(\alpha^x)^2]^2 + \\ + [(H_{11} - H_{22})(\Gamma_{22} - \Gamma_{11}) - 4\alpha^x \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}]^2\}^{1/2}.$$

Из этих формул видно, что если параметр α^x достаточно отличается от нуля, то физические значения энергий и ширин резонансов E_r , Γ_r очень отличаются от элементов гамильтониана H_{rr} , Γ_{rr} .

Таким образом, даже в самом простом случае двух резонансов и одного канала для нахождения (комплексных) энергий и векторов парциальных ширин необходимо найти собственные значения двумерной комплексной матрицы H и вычислить векторы парциальных ширин по формулам (2.16). Поэтому, несмотря на то, что полученная с помощью данного метода матрица рассеяния S унитарна и T -инвариантна, интерпретация матричных элементов гамильтониана и сравнение их с формулами типа БВ затруднительны. Кроме того, этот метод является очень трудоемким, поскольку требует обращения N -мерной комплексной матрицы для каждого значения E и каждого набора параметров.

2.4. Представление амплитуд резонансных реакций через скалярные произведения векторов состояний. Если использовать собственные векторы Ψ_r гамильтониана H , то условие унитарности (2.14) можно записать в виде

$$(\epsilon_r - \epsilon_g)(\Psi_r, \Psi_g) = \sum_{i=1}^M A_{ri} A_{gi}, \quad (2.17)$$

где A_{ri} есть амплитуда распада состояния Ψ_r в канал i , а $\epsilon_r = E_r - i\Gamma/2$.

Это соотношение было впервые написано Беллом и Штейнбергом [9] для случая $K^0 - \bar{K}^0$ -системы. Формула (2.17) непосредственно связывает неортогональность состояний Ψ_r и Ψ_g с наличием перекрывающихся кана-

лов распада. Согласно (2.17) степень неортогональности волновых функций для уровней r и g определяется скалярным произведением

$$(\Psi_r, \Psi_g) = \frac{\sum_{i=1}^M A_{ir} A_{ig}^*}{(\Gamma_r + \Gamma_g)/2 + i(E_r - E_g)}. \quad (2.18)$$

Здесь, как обычно, A_{ir} — амплитуды распада уровня r по каналам i , причем справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^M |A_{ir}|^2 = \Gamma_r. \quad (2.19)$$

Зависимость амплитуды резонансного рассеяния на перекрывающихся уровнях от величины (Ψ_r, Ψ_g) была изучена в работах В.Л.Любошица [7,10]. Эта зависимость имеет простую структуру, обусловленную резонансным характером амплитуды и условием унитарности.

Прежде всего, амплитуды резонансных процессов должны описываться суммой полюсных членов, соответствующих комплексным энергиям $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$. С другой стороны, в рамках БВ-схемы вычеты резонансных амплитуд факторизуются и пропорциональны парциальным амплитудам распада резонансного уровня. Это означает, что элементы S -матрицы имеют структуру

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N \frac{A_{ir} C_{jr}^*}{E - E_r + i\Gamma_r/2}, \quad (2.20)$$

где по своему смыслу коэффициенты C_{jr}^* представляют амплитуды образования нестабильных квазистационарных уровней. Простые вычисления показывают [7], что из условия унитарности $SS^+ = I$ автоматически следует система уравнений для амплитуд C_{jr} :

$$A_{ir} = \sum_{g=1}^N C_{ij} U_{gr} \quad (r = 1, \dots, M). \quad (2.21)$$

Здесь U_{gr} — элементы эрмитовой матрицы, составленной из скалярных произведений векторов квазистационарных состояний, которые определяются из (2.18).

Из соотношений (2.18) и (2.21) следует правило сумм

$$\sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^M A_{ir} C_{ir}^* = \sum_{r=1}^N \Gamma_r. \quad (2.22)$$

Легко получить также аналог формулы (2.18) для амплитуд C_{ri} :

$$U_{gr}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^M C_{ir} C_{ig}^*}{(\Gamma_r + \Gamma_g)/2 + i(E_r - E_g)}. \quad (2.23)$$

Учет постоянного фона, связанного с потенциальным рассеянием и прямыми реакциями, сводится к умножению чисто резонансной матрицы $S^{(R)}$ на унитарную фоновую матрицу B , при этом

$$S_{ij} = B_{ij} - i \sum_{r=1}^N \frac{A_{ir} \tilde{C}_{jr}^*}{E - E_r + i\Gamma_r/2},$$

где A_{ri} , как и прежде, амплитуды распада квазистационарных состояний, а амплитуды $\tilde{C}_{rj}$ определяются из соотношения

$$\tilde{C} = B^+ A U^{-1}.$$

Таким образом, должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^M A_{ir}^* B_{ij} = \sum_{g=1}^N \tilde{C}_{jg}^* U_{gr}.$$

Очевидно, что в силу унитарности матрицы B можно в соотношении (2.23) заменить C на $\tilde{C}$:

$$U_{gr}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^M \tilde{C}_{ir} \tilde{C}_{ig}^*}{(\Gamma_r + \Gamma_g)/2 + i(E_r - E_g)}. \quad (2.24)$$

В качестве примера рассмотрим чисто упругое одноканальное рассеяние при наличии двух резонансов. В этом случае $\mathbf{A}_1 = A_{11}$, $\mathbf{A}_2 = A_{12}$, и из уравнения (2.19) следует, что

$$|A_{11}|^2 = \Gamma_1, \quad |A_{12}|^2 = \Gamma_2.$$

Элементы матрицы неортогональностей U следующие:

$$U_{11} = \frac{A_{11}A_{11}^*}{\Gamma_1} = 1,$$

$$U_{22} = \frac{A_{12}A_{12}^*}{\Gamma_2} = 1,$$

$$U_{12} = U_{21}^* = \frac{A_{12}A_{11}^*}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2 + i(E_2 - E_1)}.$$

Тогда

$$\Delta = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} = 1 - |U_{12}|^2 = \frac{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_2 + \Gamma_1)^2/4},$$

и координаты векторов $\mathbf{C}_1 = C_{11}$ и $\mathbf{C}_2 = C_{12}$ определяются однозначно:

$$C_{11} = A_{11}U_{11}^{-1} + A_{12}U_{12}^{-1} = \frac{A_{11} - A_{12}U_{21}}{\Delta} =$$

$$= A_{11} \left[\frac{(E_1 - E_2)^2 - (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2)/4}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} + i \frac{\Gamma_2(E_1 - E_2)}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} \right],$$

$$C_{12} = A_{11}U_{12}^{-1} + A_{12}U_{22}^{-1} = \frac{A_{12} - A_{11}U_{12}}{\Delta} =$$

$$= A_{12} \left[\frac{(E_2 - E_1)^2 - (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)/4}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4} + i \frac{\Gamma_1(E_2 - E_1)}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4} \right].$$

Отсюда получаем

$$A_{11}C_{12}^* = \Gamma_1 \frac{(E_1 - E_2)^2 - (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2)/4}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} - i \frac{\Gamma_1\Gamma_2(E_1 - E_2)}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4},$$

$$A_{12}C_{11}^* = \Gamma_2 \frac{(E_2 - E_1)^2 - (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)/4}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4} - i \frac{\Gamma_1\Gamma_2(E_2 - E_1)}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4},$$

что эквивалентно выражениям (2.2), (2.3).

Рассмотренный метод дает удобную вычислительную схему для случая одного канала и произвольного числа резонансов, позволяя записывать амплитуду рассеяния в виде суммы БВ-членов.

Очевидно, однако, что построенная модель не является T -инвариантной. Условие симметрии S -матрицы ($S_{ij} = S_{ji}$) приводит к дополнительным соотношениям:

$$B_{ij} = B_{ji}, \quad C_{ir}^* = Q_r A_{ir}. \quad (2.25)$$

К сожалению, нет реального и последовательного способа обеспечить выполнение последнего условия. Использование проекционных операторов [11] делает метод формально T -инвариантным, но практически неприменимым для использования.

Некоторые дополнительные предположения, упрощающие метод до конкретной модели, ведут к автоматическому выполнению условия (2.25). Например, оно будет выполняться, если считать, что координаты A_{ir} действительны и не зависят от уровня r . S -матрица в этом модельном случае будет иметь вид

$$S_{ij}^{(R)} = \delta_{ij} - i A_i A_j \sum_{r=1}^N \frac{Q_r}{E - E_r + i\Gamma_r/2},$$

где

$$Q_r = \sum_{g=1}^N U_{gr}^{-1},$$

$$U_{gr} = \frac{1}{(\Gamma_r + \Gamma_g)/2 + i(E_r - E_g)}.$$

Пример использования этого метода для перекрывающихся ρ' -состояний приведен в работе [14].

2.5. Прямой метод нахождения БВ-многоканальных амплитуд в случае двух перекрывающихся состояний. Еще один подход к описанию резонансных реакций для многоуровневой системы был предложен в работе [12].

Запишем S -матрицу рассеяния для группы из N резонансов, расположенных в энергетической области, достаточно удаленной от порогов и других резонансов, в явно БВ-форме (для простоты без учета фона):

$$S_{ij}(E) = \delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N \frac{g_{ri} g_{rj}}{E - \epsilon_r}. \quad (2.26)$$

Здесь g_{ri} — комплексные парциальные ширины, $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$, а $\mathbf{g}_r$ — комплексные векторы парциальных ширин*. Векторы $\mathbf{g}_r$ не все независимы. Условия унитарности накладывают на значения g_{ri} $N(M+1)$ ограничений (при N резонансах и M открытых каналах).

В работе [12] эти ограничения и уравнения связи между векторами $\mathbf{g}_r$ удалось получить (т.е. и развить сам метод) только для случая двух резонансов следующим способом.

Сопоставим выражение (2.26) с K -матричной записью S -матрицы:

$$S(E) = I - i \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T}{E - \varepsilon_r} = \frac{I - i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}}{I + i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_r}}. \quad (2.27)$$

Домножив (2.27) на $\left(I + i \sum_{r=1}^N \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{E - \varepsilon_l} \right)$, а затем на $\prod_{k=1}^N (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k)$, получим

$$\begin{aligned} & -i \sum_{r=1}^N \left[\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T (E - \varepsilon_r) \prod_{k \neq r} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k) \right] + \\ & + \sum_{r=1}^N \sum_{l=1}^N \left[\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T \gamma_l \gamma_l^T (E - \varepsilon_l)(E - \varepsilon_r) \prod_{k \neq r, l} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k) \right] = \\ & = -2i \sum_{l=1}^N \left[\gamma_l \gamma_l^T (E - \varepsilon_l) \prod_{k \neq l} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k) \right]. \end{aligned}$$

Приравняв нулю коэффициент при степени $E^{(2N-1)}$, получаем матричное уравнение

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T = 2 \sum_{r=1}^N \gamma_r \gamma_r^T. \quad (2.28)$$

*Векторы $\mathbf{g}_r$ предполагаются не зависящими от энергии E . Однако если резонансы расположены вблизи порогов, то зависящие от энергии E кинематические множители могут быть разложены в ряд Тейлора, и описанные в данном и последующих разделах схемы могут быть воспроизведены с незначительными изменениями.

Домножая уравнение (2.28) справа последовательно на $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N$, убеждаемся, что векторы являются линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{\gamma}_r$ ($r = 1, \dots, N$):

$$\mathbf{g}_r = \sum_{i=1}^N a_{ri} \boldsymbol{\gamma}_i. \quad (2.29)$$

Подставив выражения (2.29) в (2.28), получим

$$\sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ri} \boldsymbol{\gamma}_i \sum_{j=1}^N a_{rj} \boldsymbol{\gamma}_j^T = 2 \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\gamma}_r \boldsymbol{\gamma}_r^T$$

или

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} \boldsymbol{\gamma}_i \boldsymbol{\gamma}_j^T = 0, \quad (2.30)$$

где A_{ij} — комплексные числа:

$$A_{ij} = \sum_{r=1}^N a_{ri} a_{rj} - 2\delta_{ij}.$$

При $N=2$ уравнение (2.30) сравнительно легко решается. Требуемые ограничения на векторы парциальных ширин имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= a\boldsymbol{\gamma}_1 + \sqrt{2-a^2} \boldsymbol{\gamma}_2, \\ \mathbf{g}_2 &= \pm \sqrt{2-a^2} \boldsymbol{\gamma}_1 - a\boldsymbol{\gamma}_2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Положив $\beta = \pm \operatorname{Im} \sqrt{2-a^2} / \operatorname{Re} a$, получим

$$\mathbf{g}_2 = \frac{i}{2\beta} [(1+\beta^2) \mathbf{g}_1 - (1-\beta^2) \mathbf{g}_1^*], \quad (2.32)$$

$$\frac{\mathbf{g}_1^+ \mathbf{g}_1}{\Gamma_1} = \frac{\mathbf{g}_2^+ \mathbf{g}_2}{\Gamma_2} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \geq 1, \quad (2.33)$$

$$(\mathbf{g}_1^+, \mathbf{g}_2) = \frac{2\beta}{1-\beta^2} (\epsilon_1^* - \epsilon_2). \quad (2.34)$$

Область определения параметра β :

$$0 \leq \frac{4\beta^2}{(1-\beta^2)^2} \leq \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*|^2} \leq 1. \quad (2.35)$$

Когда резонансы очень далеки друг от друга, параметр $\beta = 0$, и векторы $\mathbf{g}_r$ становятся действительными. Подчеркнем, что β не является дополнительным параметром задачи. При найденных векторах парциальных ширин $\mathbf{g}_r$ и энергиях $\varepsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$ параметр β определен однозначно и его фактическое значение неважно.

Для одного канала ($M=1$) в качестве свободных параметров можно взять значения E_1 , E_2 , Γ_1 и Γ_2 . Тогда значения β , g_{11}^x и g_{21}^x однозначно определяются из системы

$$\begin{aligned} (g_{11}^x)^2 &= \frac{\Gamma_1 - \beta^2 \Gamma_2}{(1 - \beta^2)^2}, \\ (g_{21}^x)^2 &= \frac{\Gamma_2 - \beta^2 \Gamma_1}{(1 - \beta^2)^2}, \\ g_{11}^x g_{21}^x &= \frac{2\beta}{(1 - \beta^2)^2} (E_1 - E_2). \end{aligned}$$

Подставляя значения g_{11}^x и g_{21}^x из первых двух уравнений системы в третье уравнение, получаем биквадратное уравнение

$$\beta^4 - 2a\beta^2 + 1 = 0,$$

где

$$a = \frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 4(E_1 - E_2)}{2\Gamma_1 \Gamma_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g_{11}^x &= \frac{\Gamma_1 - (a - \sqrt{a^2 - 1}) \Gamma_2}{(1 - a + \sqrt{a^2 - 1})^2}, \\ g_{21}^x &= \frac{\Gamma_2 - (a - \sqrt{a^2 - 1}) \Gamma_1}{(1 - a + \sqrt{a^2 - 1})^2}, \end{aligned}$$

$$g_{11}^y = -(a - \sqrt{a^2 - 1}) g_{21}^x,$$

$$g_{21}^y = (a - \sqrt{a^2 - 1}) g_{11}^x.$$

Отсюда получаем

$$g_{11}g_{11} = \Gamma_1 \frac{(E_1 - E_2)^2 - (\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2)/4}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4} - i \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 (E_1 - E_2)}{(E_1 - E_2)^2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)^2/4},$$

$$g_{21}g_{21} = \Gamma_1 \frac{(E_2 - E_1)^2 - (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)/4}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4} - i \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 (E_2 - E_1)}{(E_2 - E_1)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2/4},$$

что эквивалентно выражениям (2.2), (2.3).

Как отмечалось выше, в работе [12] уравнения связи для векторов парциальных ширин, следующие из условия унитарности S -матрицы, были получены в явном виде только для случая двух резонансов ($N=2$) и произвольного числа каналов M . При $N>2$ описанный выше способ, основанный на сопоставлении с K -матрицей, не дает возможности получить векторы $\mathbf{g}_r$, так как система уравнений $A_{ij}(a_{rk})=0$ слишком сложна и не позволяет исключить векторы γ_k из соотношений (2.29).

В развитие работы [12] в статье [13] были получены явные ограничения на векторы парциальных ширин.

Если записать условие унитарности для матрицы S в виде

$$S^+(E^*) S(E) = S(E) S^+(E^*) = I, \quad (2.36)$$

что является аналитическим продолжением условия унитарности на комплексную плоскость, то результаты могут быть представлены более компактно.

Условие унитарности (2.36) для матрицы $S(E)$, представленной в виде суммы БВ-членов (2.26), можно записать следующим образом:

$$S^+(E^*) S(E_r) = B^+ B + \sum_{n=1}^N \frac{S^+(\epsilon_n^*) \mathbf{g}_n \mathbf{g}_n^T}{E - \epsilon_n} + \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{g}_n^* (\mathbf{g}_n^*)^T S(\epsilon_n^*)}{E - \epsilon_n^*}. \quad (2.37)$$

Это выражение можно легко получить, если заметить, что функция $[S^+(E^*) S(E) - B^+ B]$ является мероморфной функцией от E и стремится к

нулю при $|E| \rightarrow \infty$. Следовательно, ее можно записать как сумму вкладов полюсов с указанными постоянными вычетами.

Условие каузальности требует, чтобы все энергии резонансов ϵ_n лежали в нижней полуплоскости, а полные ширины Γ_n были положительными ($\Gamma_n > 0$). Соответственно, $S^+(E^*)$ не может иметь полюсов для E в нижней полуплоскости. Поскольку матрица $S^+(E^*)S(E) = 1$ не имеет полюсов, вычеты истинных полюсов при $E = \epsilon_n$ и $E = \epsilon_n^*$ должны обращаться в нуль, что дает

$$S^+(\epsilon_n^*) \mathbf{g}_n \mathbf{g}_n^T = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.38)$$

Условие (2.38) должно удовлетворяться как матричное уравнение. Это условие можно записать в виде

$$S^+(\epsilon_n^*) \mathbf{g}_n = B^+ \mathbf{g}_n + i \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{g}_m (\mathbf{g}_m \mathbf{g}_n)}{\epsilon_n - \epsilon_m^*} = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.39)$$

или

$$B \mathbf{g}_n = i \sum_{m=1}^N \frac{(\mathbf{g}_n^+ \mathbf{g}_m)}{\epsilon_n^* - \epsilon_m} \mathbf{g}_m, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.40)$$

Если ввести обозначение

$$\alpha_{nm} = \frac{i(\mathbf{g}_m^+ \mathbf{g}_n)}{\epsilon_n^* - \epsilon_m} = \alpha_{mn}^*, \quad (2.41)$$

то условия унитарности примут вид

$$B^+ B = B B^+ = I,$$

$$B \mathbf{g}_n = \sum_{m=1}^N \alpha_{nm} \mathbf{g}_m. \quad (2.42)$$

Как показано в работе [13], матрица α , составленная из комплексных скалярных параметров α_{nm} , ($n, m = 1, \dots, N$), должна быть ортогональной и эрмитовой, т.е.

$$\alpha \alpha^T = \alpha^T \alpha = I, \quad \alpha^+ = \alpha. \quad (2.43)$$

Такую ортогональную эрмитову матрицу α легко построить для случая двух резонансов и M каналов. Для этого достаточно просто решить систему уравнений

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = 0,$$

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1,$$

$$\alpha_{22}^2 + \alpha_{21}^2 = 1.$$

Из эрмитовости матрицы α следует, что $\alpha_{21} = \alpha_{12}^*$, и, поскольку параметры α_{11} и α_{22} — положительные действительные числа, то, как видно из анализа системы, параметр α_{12} — чисто мнимый и $\alpha_{12} = i(\mathbf{g}_1^+ \mathbf{g}_2) / (\epsilon_1^* - \epsilon_2) = -\alpha_{21}^*$.

Требуемые ограничения на векторы парциальных ширин принимают вид:

$$B\mathbf{g}_1 = \sqrt{(1 + |\alpha_{12}|^2)} \mathbf{g}_1 + i|\alpha_{12}| \mathbf{g}_2,$$

$$B\mathbf{g}_2 = \sqrt{(1 + |\alpha_{12}|^2)} \mathbf{g}_2 - i|\alpha_{12}| \mathbf{g}_1.$$

Решение этих уравнений приводит к тем же выражениям для векторов парциальных ширин, что были получены в работе [12] и подробно рассмотрены в данном разделе.

Для случая трех резонансов в работе [13] приведен общий вид матрицы скалярных произведений α , зависящей от трех параметров: действительного угла θ и комплексного угла φ :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cosh \theta |\cos \varphi|^2 + |\sin \varphi|^2, & \cosh \theta \cos \varphi \sin^* \varphi - \sin \varphi \cos^* \varphi, & -i \sinh \theta \cos \varphi \\ \cosh \theta \sin \varphi \cos^* \varphi - \cos \varphi \sin^* \varphi, & \cosh \theta |\sin \varphi|^2 + |\cos \varphi|^2, & -i \sinh \theta \sin \varphi \\ i \sinh \theta \cos^* \varphi, & i \sinh \theta \sin^* \varphi, & \cosh \theta \end{pmatrix}.$$

Для получения векторов парциальных ширин необходимо еще решить достаточно громоздкую линейную систему N уравнений с $2N$ неизвестными вида (2.42) для того, чтобы выразить NM элементов этих векторов $\mathbf{g}_n$ через другие NM элементов и параметры матрицы α . После этого нужно выбрать $NM - N(N-1)/2$ элементов, объявленных свободными параметрами, так, чтобы скалярные произведения $(\mathbf{g}_n^+ \mathbf{g}_m)$ были равны α_{nm} .

К сожалению, изложенный в работе [13] метод не дает процедуры, которую можно было бы использовать при построения векторов парциальных

ширин для случая более чем трех резонансов ($N > 3$), так как не предложен регулярный способ получения комплексной эрмитовой ортогональной матрицы α , зависящей от $N(N-1)/2$ свободных параметров.

3. ПОСТРОЕНИЕ УНИТАРНОЙ S -МАТРИЦЫ БРЕЙТ-ВИГНЕРОВСКОГО ВИДА ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ

3.1. Метод и общие уравнения. В предыдущем разделе мы провели обзор и сравнение реально используемых методов построения явно унитарной резонансной S -матрицы, а также рассмотрели возможность интерпретации этих методов в духе формул типа БВ.

Ниже мы приводим последовательную процедуру построения унитарной многоканальной многорезонансной S -матрицы БВ-вида для общего случая N резонансов и M внешних каналов. Изложение следует, в основном, работам [15,16].

Запишем матрицу рассеяния S группы из N резонансов в виде

$$S(E) = B - i \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_r^T}{E - \epsilon_r}, \quad (3.1)$$

где B — матрица фона, соответствующая прямым нерезонансным реакциям, $\mathbf{A}_r$ — комплексные векторы парциальных ширин, $\epsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$ — полюсы, отвечающие резонансам.

Требуется определить, какие условия нужно наложить на векторы $\mathbf{A}_r$ и фон B , чтобы матрица S была унитарна и T -инвариантна, то есть $S^+(E) S(E) \equiv I$ и $S_{ij}(E) = S_{ji}(E)$ тождественно по E . Ясно, что матрица фона B должна удовлетворять таким же условиям.

Запишем условие унитарности с учетом представления (3.1):

$$S^+(E) S(E) = B^+ B + i \sum_{r=1}^N \left[B \frac{\mathbf{A}_r^+ (\mathbf{A}_r^+)^T}{E - \epsilon_r^*} - B^+ \frac{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_r^T}{E - \epsilon_r} \right] +$$

$$+ \sum_{r=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\mathbf{A}_r^+ (\mathbf{A}_r^+)^T \mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^T}{(E - \epsilon_r^*) (E - \epsilon_l)} \equiv I. \quad (3.2)$$

Для упрощения формул, включающих фон, воспользуемся удобными переменными работы [12]. Поскольку матрица B унитарна и симметрична, она может быть представлена в виде произведения $B = V e^{2i\beta} V^T$, где V — действительная ортогональная матрица собственных векторов матрицы B , а $e^{2i\beta}$ — диагональная матрица ее собственных значений, равных по модулю единице.

Положим $B = b b^T$, где $b = V e^{i\beta}$, и определим вектор $\mathbf{g}_r = b^+ \mathbf{A}_r$. Тогда $\mathbf{A}_r = b \mathbf{g}_r$, и матрица S может быть записана в виде $S = b \tilde{S} b^T$, где

$$\tilde{S}(E) = I - i \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T}{E - \epsilon_r}. \quad (3.3)$$

Очевидно, что матрица $S(E)$ унитарна тогда и только тогда, когда унитарна матрица $\tilde{S}(E)$. Поэтому требуемые ограничения на векторы парциальных ширин мы будем получать из условия унитарности $\tilde{S}^+(E) \tilde{S}(E) \equiv I$.

Введем обозначение для скалярного произведения

$$V_{lr} = \mathbf{g}_l^+ \mathbf{g}_r = \sum_{k=1}^M g_{lk}^* g_{rk}.$$

Условие унитарности для матрицы $\tilde{S}(E)$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \tilde{S}_{ik} \tilde{S}_{jk}^* &= \delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N \frac{g_{ri} g_{rj}}{E - \epsilon_r} + i \sum_{r=1}^N \frac{g_{ri}^* g_{rj}^*}{E - \epsilon_r^*} + \\ &+ \sum_{l=1}^N \sum_{r=1}^N V_{lr} \frac{g_{ri} g_{lj}^*}{(E - \epsilon_r)(E - \epsilon_l^*)} \equiv \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.4)$$

или

$$i \sum_{r=1}^N \left[-\frac{g_{ri} g_{rj}}{E - \epsilon_r} + \frac{g_{ri}^* g_{rj}^*}{E - \epsilon_r^*} \right] + \sum_{l=1}^N \sum_{r=1}^N V_{lr} \frac{g_{ri} g_{lj}^*}{(E - \epsilon_r)(E - \epsilon_l^*)} \equiv 0. \quad (3.5)$$

Домножив тождество (3.5) на произведение $\prod_{k=1}^N (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*)$, получим

$$\begin{aligned}
& i \sum_{r=1}^N [g_{ri}^* g_{rj}^* (E - \varepsilon_r) - g_{ri} g_{rj} (E - \varepsilon_r^*)] \prod_{k \neq r} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) + \\
& + \sum_{r=1}^N V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* \prod_{k \neq r} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* (E - \varepsilon_l) (E - \varepsilon_r^*) + \\
& + V_{rl} g_{li} g_{rj}^* (E - \varepsilon_l^*) (E - \varepsilon_r)] \prod_{k \neq l, r} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) = 0. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$B = \prod_{k=1}^N (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) = \prod_{k=1}^N (E^2 - a_k E + b_k), \quad (3.7)$$

$$B_r = \prod_{k \neq r} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) = \prod_{k \neq r} (E^2 - a_k E + b_k), \quad (3.8)$$

$$B_{rl} = \prod_{k \neq r, l} (E - \varepsilon_k) (E - \varepsilon_k^*) = \prod_{k \neq r, l} (E^2 - a_k E + b_k), \quad (3.9)$$

где $a_k = 2\varepsilon_k^x$, $b_k = (\varepsilon_k^x)^2 + (\varepsilon_k^y)^2$ (здесь $\varepsilon_r^x = E_r$, $\varepsilon_r^y = -\Gamma_r/2$). Справедливо соотношение

$$B_r = B_{rl}(E^2 - a_l + b_l) = B_{rl} E^2 - a_l B_{rl} E + b_l B_{rl}.$$

Обозначим через $B_r^{(k)}$ коэффициент полинома B_r при степени k . Очевидно, что

$$B_r^{(k)} = B_{rl}^{(k-2)} - a_l B_{rl}^{(k-1)} + b_l B_{rl}^{(k)}.$$

Полином (3.6) с учетом (3.7)—(3.9) можно записать в виде

$$2 \sum_{r=1}^N B_r \operatorname{Im} [g_{ri} g_{rj} (E - \varepsilon_r^*)] + \sum_{r=1}^N B_r V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N B_{rl} \{ V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* [E^2 - E(\epsilon_l + \epsilon_r^*) + \epsilon_l \epsilon_r^*] + \\
 & + V_{rl} g_{li} g_{rj}^* [E^2 - E(\epsilon_l^* + \epsilon_r) + \epsilon_l^* \epsilon_r] \} = 0. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Для того чтобы выполнялось условие унитарности (3.5), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при всех степенях переменной E полинома (3.10) были равны нулю. Коэффициент при степени E^k имеет вид

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{r=1}^N \{ B_r^{(k-1)} \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) + B_r^{(k)} [-\epsilon_r^x \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) + \epsilon_r^y \operatorname{Re} (g_{ri} g_{rj})] \} + \\
 & + \sum_{r=1}^N V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N \{ B_{rl}^{(k-2)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^*] - \\
 & - B_{rl}^{(k-1)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* (\epsilon_l + \epsilon_r^*) + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^* (\epsilon_l^* + \epsilon_r)] + \\
 & + B_{rl}^{(k)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* \epsilon_l \epsilon_r^* + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^* \epsilon_l^* \epsilon_r] \} = 0. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Приравняем нулю коэффициент при степени $E^{(2N-1)}$. С учетом того, что B_r есть полином степени $(2N-2)$, а B_{rl} — полином степени $(2N-4)$, получаем

$$\sum_{r=1}^N B_r^{(2N-2)} \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) = 0.$$

Старший коэффициент полинома B_r равен единице. Отсюда получаем

$$\sum_{r=1}^N \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{r=1}^N [g_{ri}^x g_{rj}^y + g_{ri}^y g_{rj}^x] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, M). \quad (3.12)$$

Здесь $\mathbf{g}_r^x$ и $\mathbf{g}_r^y$ — действительные векторы, представляющие, соответственно, действительную и мнимую части комплексного вектора $\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r^x + i\mathbf{g}_r^y$.

Будем строить векторы $\mathbf{g}_r$ так, чтобы их мнимые части $\mathbf{g}_r^y$ являлись линейными комбинациями действительных частей $\mathbf{g}_r^x$:

$$\mathbf{g}_r^y = u_{r1}\mathbf{g}_1^x + u_{r2}\mathbf{g}_2^x + \dots + u_{rN}\mathbf{g}_N^x, \quad (r = 1, \dots, N). \quad (3.13)$$

Подставив выражение (3.13) в условие (3.12), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^N \left[g_{ri}^x \sum_{k=1}^N u_{rk} g_{kj}^x + g_{rj}^x \sum_{k=1}^N u_{rk} g_{ki}^x \right] = \\ & = 2 \sum_{r=1}^N u_{rr} g_{ri}^x g_{rj}^x + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{k=r+1}^M (u_{rk} + u_{kr}) (g_{ri}^x g_{kj}^x + g_{ki}^x g_{rj}^x) = 0, \\ & (i, j = 1, \dots, M). \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы коэффициент при степени $E^{(2N-1)}$ тождественно равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы

$$u_{rr} = 0, \quad u_{rk} = -u_{kr}, \quad (3.14)$$

то есть матрица связи U — кососимметричная матрица. Равенство (3.13) определяет NM уравнений связи, которые зависят от $N(N-1)/2$ параметров — элементов u_{ij} матрицы U .

Приравняем нулю коэффициент при степени $(2N-2)$:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=1}^N \{ B_r^{(2N-3)} \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) - B_r^{(2N-2)} [\epsilon_r^x \operatorname{Im} (g_{ri} g_{rj}) - \epsilon_r^y \operatorname{Re} (g_{ri} g_{rj})] \} + \\ & + \sum_{r=1}^N B_r^{(2N-2)} V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N \{ B_{rl}^{(2N-4)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^*] - \\ & - B_{rl}^{(2N-3)} [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* (\epsilon_l + \epsilon_r^*) + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^* (\epsilon_l^* + \epsilon_r)] + \\ & + B_{rl}^{(2N-2)} [V_{rl} g_{ri} g_{lj}^* \epsilon_l^* \epsilon_r^* + V_{lr}^* g_{li} g_{rj}^* \epsilon_l^* \epsilon_r] \} = 0. \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$B_r^{(2N-3)} = -2 \sum_{k \neq r} \epsilon_k^x = -\sum_{k \neq r} a_k,$$

$$B_r^{(2N-2)} = B_{rl}^{(2N-4)} = 1, \quad B_{rl}^{(2N-2)} = B_{rl}^{(2N-3)} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{r=1}^N [-\sum_{k \neq r} a_k \operatorname{Im}(g_{ri} g_{rj}) + \epsilon_r^y \operatorname{Re}(g_{ri} g_{rj}) - \epsilon_r^x \operatorname{Im}(g_{ri} g_{rj})] + \\ & + \sum_{r=1}^N V_{rr} g_{ri} g_{rj}^* + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N [V_{lr} g_{ri} g_{lj}^* + V_{lr}^* g_{ri} g_{rj}^*] = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Запишем произведения $g_{ri} g_{rj}$, $g_{ri} g_{rj}^*$, $g_{ri} g_{lj}$ и $g_{li} g_{rj}^*$ с учетом представления (3.13):

$$\begin{aligned} g_{ri} g_{rj} &= (g_{ri}^x g_{rj}^x - g_{ri}^y g_{rj}^y) + i(g_{ri}^x g_{rj}^y + g_{ri}^y g_{rj}^x) = \\ &= [g_{ri}^x g_{rj}^x - \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^N u_{rk} u_{rv} g_{ri}^x g_{vj}^x] + i \sum_{k=1}^N u_{rk} [g_{ri}^x g_{kj}^x + g_{rj}^x g_{ki}^x], \\ g_{ri} g_{rj}^* &= (g_{ri}^x g_{rj}^x + g_{ri}^y g_{rj}^y) + i(-g_{ri}^x g_{rj}^y + g_{ri}^y g_{rj}^x) = \\ &= [g_{ri}^x g_{rj}^x + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^N u_{rk} u_{rv} g_{ki}^x g_{vj}^x] + i \sum_{k=1}^N u_{rk} [-g_{ri}^x g_{kj}^x + g_{rj}^x g_{ki}^x], \\ g_{ri} g_{lj} &= (g_{ri}^x g_{lj}^x + g_{ri}^y g_{lj}^y) + i(-g_{ri}^x g_{lj}^y + g_{ri}^y g_{lj}^x) = \\ &= [g_{ri}^x g_{lj}^x + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^N u_{rk} u_{lv} g_{ki}^x g_{vj}^x] + i \sum_{k=1}^N [-u_{lk} g_{ri}^x g_{kj}^x + u_{rk} g_{lj}^x g_{ki}^x], \\ g_{li} g_{rj}^* &= (g_{li}^x g_{rj}^x + g_{li}^y g_{rj}^y) + i(-g_{li}^x g_{rj}^y + g_{li}^y g_{rj}^x) = \\ &= [g_{li}^x g_{rj}^x + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^N u_{lk} u_{rv} g_{ki}^x g_{vj}^x] + i \sum_{k=1}^N [-u_{rk} g_{li}^x g_{kj}^x + u_{lk} g_{rj}^x g_{ki}^x]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для того чтобы коэффициент (3.15) при степени $E^{(2N-2)}$ был равен нулю, необходимо приравнять нулю коэффициенты при произведениях $g_{\mu i}^x g_{\nu j}^x$, ($\mu, \nu = 1, \dots, N$). Подставим (3.16) в уравнение (3.15) и приравняем нулю действительные и мнимые части этих коэффициентов (напомним, что $V_{lr} = V_{lr}^x + iV_{lr}^y = \mathbf{g}_l^+ \mathbf{g}_r$):

$$2\varepsilon_\mu^y - 2 \sum_{r \neq \mu} \varepsilon_\mu^y u_{r\mu}^2 + V_{\mu\mu} + \sum_{r \neq \mu} V_{rr} u_{r\mu}^2 + \\ + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N V_{lr}^x u_{r\mu} u_{l\mu} + 2 \sum_{r \neq \mu} V_{r\mu}^y u_{r\mu} = 0, \quad (3.17)$$

$$- 2 \sum_{r=1}^N \varepsilon_r^y u_{r\mu} u_{r\nu} + 2u_{\mu\nu}(\varepsilon_\mu^x - \varepsilon_\nu^x) + \sum_{r=1}^N V_{rr} u_{r\mu} u_{r\nu} + V_{\mu\nu}^x + \\ + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N V_{lr}^x [u_{r\mu} u_{l\nu} + u_{l\mu} u_{r\nu}] + \sum_{r \neq \mu, \nu}^N [V_{r\mu}^y u_{r\nu} + V_{r\nu}^y u_{r\mu}] = 0, \quad (3.18)$$

$$u_{\nu\mu}(V_{\mu\mu} + V_{\nu\nu}) + V_{\nu\mu}^y + \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{l=r+1}^N V_{lr}^y [u_{r\mu} u_{l\nu} - u_{l\mu} u_{r\nu}] + \\ + \sum_{r \neq \mu, \nu}^N [V_{r\nu}^x u_{r\mu} + V_{r\mu}^x u_{r\nu}] = 0. \quad (3.19)$$

Таким образом, приравняв нулю коэффициент при степени $E^{(2N-2)}$, получаем систему N^2 уравнений, линейных относительно скалярных произведений V_{rr} , V_{lr}^x и V_{lr}^y : уравнений (3.17), $N(N-1)/2$ уравнений (3.18) и $N(N-1)/2$ уравнений (3.19). Коэффициенты при $g_{\mu i}^x g_{\nu j}^x$ и $g_{\nu i}^x g_{\mu j}^x$ совпадают, поскольку μ и ν входят в уравнения (3.18) и (3.19) симметрично.

Решив систему, получаем значения скалярных произведений

$$V_{rr} = -\frac{2}{S} [S + 2Q_r] \varepsilon_r^y, \quad (3.20)$$

$$V_{lr}^x = -\frac{2}{S} [F_{lr}(\varepsilon_l^x - \varepsilon_r^x) + G_{lr}(\varepsilon_l^y + \varepsilon_r^y)], \quad (3.21)$$

$$V_{lr}^y = -\frac{2}{S} [G_{lr}(\epsilon_l^x - \epsilon_r^x) - F_{lr}(\epsilon_l^y + \epsilon_r^y)],$$

$$r = 1, \dots, N; \quad l = r + 1, \dots, N, \quad (3.22)$$

где

$$S = 1 + \sum_{p=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (-1)^p \sum_{i_1=1}^{N-2p+1} \sum_{i_2 > i_1}^{N-2p+2} \dots \sum_{i_{2p-1} > i_{2p-2}}^N \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \end{vmatrix},$$

$$Q_r = \sum_{p=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (-1)^{p+1} \sum_{i_1=1}^{N-2p+2} \sum_{i_2 > i_1}^{N-2p+3} \dots \sum_{i_{2p-1} > i_{2p-2}}^N \begin{vmatrix} r & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \\ r & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \end{vmatrix},$$

$$(i_1, \dots, i_{2p-1} \neq r),$$

$$F_{lr} = u_{lr} + \sum_{p=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} (-1)^p \sum_{i_1=1}^{N-2p+1} \sum_{i_2 > i_1}^{N-2p+2} \dots \sum_{i_{2p-1} > i_{2p-2}}^N \begin{vmatrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \\ r & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \end{vmatrix},$$

$$(i_1, \dots, i_{2p} \neq r, l),$$

$$G_{lr} = \sum_{p=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]-1} (-1)^{p+1} \sum_{i_1=1}^{N-2p+2} \sum_{i_2 > i_1}^{N-2p+3} \dots \sum_{i_{2p-1} > i_{2p-2}}^N \begin{vmatrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \\ r & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \end{vmatrix},$$

$$(i_1, \dots, i_{2p-1} \neq r, l).$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ r & i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{lr} & u_{li_1} & \dots & u_{li_k} \\ u_{i_1 r} & u_{i_1 i_1} & \dots & u_{i_1 i_k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ u_{i_k r} & u_{i_k i_1} & \dots & u_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

— минор, составленный из элементов матрицы U , стоящих на пересечении строк с номерами $l, i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $r, i_1, i_2, \dots, i_k$.

Система (3.13) и скалярные произведения (3.20)—(3.22) полностью определяют ограничения, накладываемые на искомые векторы парциальных ширин. Если векторы $\mathbf{g}_r$ ($r = 1, \dots, N$) удовлетворяют соотношениям (3.13) и (3.20)—(3.22), то коэффициенты при младших степенях полинома (3.10) будут тождественно равны нулю.

Области изменения элементов матрицы U , связывающей действительные и мнимые части векторов парциальных ширин, определяются условиями

$$0 \leq \frac{F_{lr}^2 + G_{lr}^2}{(S + 2Q_r)(S + 2Q_l)} \leq \frac{\Gamma_r \Gamma_l}{4(E_r - E_l)^2 + (\Gamma_r + \Gamma_l)^2} \leq 1. \quad (3.23)$$

Из этих неравенств видно, что если резонансы хорошо разнесены, то область определения для элементов матрицы U уменьшается до нуля. В пределе при $u_{rl} \rightarrow 0$ для всех r и l векторы $\mathbf{g}_r$ становятся действительными и взаимно ортогональными.

Длины векторов $\mathbf{g}_r$ превосходят полные ширины Γ_r на величину, исчезающую, если резонансы хорошо разнесены:

$$\frac{|\mathbf{g}_r|^2}{\Gamma_r} = \frac{V_{rr}}{\Gamma_r} = 1 + 2 \frac{Q_r}{S}.$$

Для построенных таким способом векторов $\mathbf{g}_r$ выполняется правило сумм

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{g}_r^T \mathbf{g}_r = \sum_{r=1}^N \Gamma_r. \quad (3.24)$$

Для дальнейшего удобно записать ограничения (3.20)—(3.22) в терминах действительных и мнимых частей векторов парциальных ширин $\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r^x + i\mathbf{g}_r^y$. Для определения скалярных произведений действительных векторов получаем систему:

$$(\mathbf{g}_r^x, \mathbf{g}_r^x) + (\mathbf{g}_r^y, \mathbf{g}_r^y) = V_{rr},$$

$$(\mathbf{g}_l^x, \mathbf{g}_r^x) + (\mathbf{g}_l^y, \mathbf{g}_r^y) = V_{lr}^x,$$

или, с учетом представления (3.13),

$$(\mathbf{g}_r^x, \mathbf{g}_r^x) + \sum_{i \neq r} \sum_{j \neq r} u_{ri} u_{rj} (\mathbf{g}_i^x, \mathbf{g}_j^x) = V_{rr},$$

$$(\mathbf{g}_l^x, \mathbf{g}_r^x) + \sum_{i \neq l} \sum_{j \neq r} u_{li} u_{rj} (\mathbf{g}_i^x, \mathbf{g}_j^x) = V_{lr}^x.$$

Решив систему, получаем

$$(\mathbf{g}_r^x, \mathbf{g}_r^x) = \frac{2}{S^2} \{ - (S + Q_r)^2 \epsilon_r^y + \sum_{i \neq r} [2F_{ri} G_{ri} \epsilon_i^x + (F_{ri}^2 - G_{ri}^2) \epsilon_i^y] \}, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_l^x, \mathbf{g}_r^x) = & \frac{2}{S^2} \{ F_{lr} [(S + Q_r) \epsilon_r^x - (S + Q_l) \epsilon_l^x] - G_{lr} [(S + Q_r) \epsilon_r^y + (S + Q_l) \epsilon_l^y] + \\ & + \sum_{i \neq l, r} [(F_{li} G_{ri} + F_{ri} G_{li}) \epsilon_i^x + (F_{li} F_{ri} - G_{li} G_{ri}) \epsilon_i^y] \}, \end{aligned}$$

$$r = 1, \dots, N; \quad l = r + 1, \dots, N. \quad (3.26)$$

При фитировании экспериментальных данных с целью определения параметров резонансов «рабочими» формулами являются соотношения (3.13) и (3.25)—(3.26), физическими параметрами служат массы и ширины резонансов, а также их векторы парциальных ширин (или брэнчинги распадов). Как мы видели, при перекрывании резонансов не все эти параметры независимы. Требования унитарности и T -инвариантности матрицы рассеяния S накладывают на них определенные ограничения. Несмотря на громоздкие формулы, определение параметров задачи является простой процедурой. Ниже, в п.3.4, мы рассмотрим, как пользоваться этой схемой.

В соотношения (3.13) входят $N(N-1)/2$ вспомогательных (внутренних) параметров задачи — элементы матрицы $U(|u_{rl}| \leq 1)$. В отличие от метода, описанного в п.2.3, где значения дополнительных параметров типа α явным образом содержатся в амплитудах f_{ij} , матричные элементы u_{ij} нужны лишь в процессе установления физических параметров и не входят в окончательные формулы для амплитуд. Действительные части векторов парциальных ширин $\mathbf{g}_r^x$ связаны $N(N+1)/2$ соотношениями (3.25)—(3.26), определяющими длины этих векторов и их взаимное расположение. Следовательно, из NM координат этих векторов свободными параметрами являются только $NM - N(N+1)/2$ координат. Всего задача содержит $N(M+1)$ свободных действительных параметров. При фитировании для каждого набора параметров следует проверять выполнение соотношения (3.23) и

неудачные шаги отбраковывать. Если число каналов M не меньше числа резонансов N , то построение системы векторов с заданным соотношением длин и углов не представляет затруднений. Если же $M < N$, задача усложняется необходимостью решать систему нелинейных алгебраических уравнений.

3.2. Учет фона. Определив векторы парциальных ширин $\mathbf{g}_r$ и записав их в виде $g_{rk} = e^{i\varphi_{rk}} |g_{rk}|$, получим матрицу рассеяния (3.3):

$$\tilde{S}_{ij} = \delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N e^{i(\varphi_{ri} + \varphi_{rj})} \frac{|g_{ri}| \cdot |g_{rj}|}{E - \varepsilon_r}.$$

Обе матрицы $\tilde{S}$ и $S = b\tilde{S}b^T$ унитарны по построению. Если фоновая матрица диагональна, то есть

$$B_{ij} = \delta_{ij} e^{2i\beta_i} \quad (i, j = 1, \dots, M),$$

то $A_{rk} = e^{i\beta_k} g_{rk}$ ($r = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, M$), и матрица рассеяния S может быть представлена в виде

$$S_{ij} = e^{i(\beta_i + \beta_j)} \left[\delta_{ij} - i \sum_{r=1}^N e^{i(\varphi_{ri} + \varphi_{rj})} \frac{|g_{ri}| \cdot |g_{rj}|}{E - \varepsilon_r} \right].$$

Фазовые сдвиги β_i в данном методе могут быть функциями энергии. В простейшем случае, когда фон можно считать упругим и не зависящим от энергии, мы имеем M действительных параметров β_i . При фитировании экспериментальных данных матрицу B можно построить, например, следующим образом. Выберем в качестве свободных параметров M действительных чисел $\beta_i \in [0, 2\pi)$ и $M(M-1)/2$ углов вращения $\psi_k \in [0, 2\pi)$. Тогда ортогональная матрица V может быть получена как произведение

$$V = R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_{M(M-1)/2},$$

где матрица $R_k = \{r_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^M$ отличается от единичной лишь элементами

$$r_{pp}^{(k)} = r_{qq}^{(k)} = \cos \psi_k, \quad r_{pq}^{(k)} = -r_{qp}^{(k)} = \sin \psi_k$$

$$(p = 1, \dots, M; q = p + 1, \dots, M).$$

Если фоновая матрица B недиагональна ($B = bb^T$, $b = V e^{i\beta}$), то появляется $M(M+1)/2$ дополнительных свободных параметров: M действительных переменных β_i и $M(M-1)/2$ элементов ортогональной матрицы V .

Очевидно, что фоновая матрица B зависит только от числа каналов и не зависит от числа резонансов.

3.3. Брэнчинги распадов в случае перекрывающихся резонансов. В случае N неперекрывающихся резонансов и M внешних каналов амплитуду рассеяния можно представить в виде

$$f = \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_r^T}{E - E_r + i\Gamma_r/2}.$$

Здесь $\mathbf{A}_r$ — действительные векторы парциальных ширин, причем из условия унитарности следует, что

$$\sum_{i=1}^M A_{ri}^2 = \Gamma_r.$$

Определив брэнчинг распада r -го резонанса в i -й канал как

$$B_{ri} = \frac{A_{ri}^2}{\Gamma_r}, \quad (3.27)$$

амплитуду рассеяния можно записать в виде

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N \frac{\Gamma_r \sqrt{B_{ri} B_{rj}}}{E - E_r + i\Gamma_r/2}. \quad (3.28)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^M B_{ri} = \frac{\sum_{i=1}^M A_{ri}^2}{\Gamma_r} = 1.$$

В случае перекрывающихся резонансов амплитуда рассеяния имеет вид

$$f = \sum_{r=1}^N \frac{\mathbf{g}_r \mathbf{g}_r^T}{E - E_r + i\Gamma_r/2},$$

с комплексными векторами парциальных ширин $\mathbf{g}_r$. По аналогии с (3.27) брэнчингом распада r -го резонанса в i -й канал будем называть величину

$$B_{ri} = \frac{|g_{ri}|^2}{|\mathbf{g}_r|^2} = \frac{|g_{ri}|^2}{\sum_{k=1}^M |g_{rk}|^2}. \quad (3.29)$$

Тогда $|g_{ri}| = |\mathbf{g}_r| \sqrt{B_{ri}}$ и

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N e^{i(\varphi_{ri} + \varphi_{rj})} \frac{|\mathbf{g}_r|^2 \sqrt{B_{ri} B_{rj}}}{E - E_r + i\Gamma_r/2}. \quad (3.30)$$

3.4. Построение векторов парциальных ширин. Несмотря на то, что формулы для скалярных произведений выглядят достаточно сложными, построение векторов парциальных ширин при $M \geq N$ выполняется с помощью достаточно простой и регулярной процедуры. В этом разделе мы подробно рассмотрим способы получения векторов парциальных ширин для случаев одного, двух и трех резонансов.

Поскольку фоновая матрица B зависит только от числа каналов и не зависит от числа резонансов, мы будем считать, для простоты, что $B = I$.

Один резонанс. В случае одного изолированного резонанса ($N = 1$) и M открытых каналов матрица рассеяния $S(E)$ представляется обычным выражением Брейта — Вигнера:

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i \frac{g_{1i} g_{1j}}{E - \epsilon_1} \quad (i, j = 1, \dots, M).$$

Параметрами данной модели являются значения E_1, Γ_1 ($\epsilon_1 = E_1 - i\Gamma_1/2$) и вектор $\mathbf{g}_1$. Требование унитарности матрицы S накладывает на эти параметры $(M + 1)$ ограничение.

$$g_{1i}^y \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, M),$$

$$(\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x) = -2\epsilon_1^y = \Gamma_1,$$

то есть $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1^x$ — действительный вектор длины Γ_1 .

Если в качестве свободных параметров выбрать массу резонанса E_1 , ширину Γ_1 и $(N - 1)$ координату вектора $\mathbf{g}_1$, например $g_{11}, \dots, g_{1, M-1}$, то последняя координата g_{1M} определится из уравнения

$$\Gamma_1 = \sum_{i=1}^M g_{1i}^2.$$

Два резонанса. В случае двух резонансов ($N = 2$) и M внешних каналов матрица рассеяния $S(E)$ задается выражением

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i \frac{g_{1i} g_{1j}}{E - \varepsilon_1} - i \frac{g_{2i} g_{2j}}{E - \varepsilon_2} \quad (i, j = 1, \dots, M).$$

Параметрами задачи являются значения $\varepsilon_1 = E_1 - i\Gamma_1/2$, $\varepsilon_2 = E_2 - i\Gamma_2/2$ и два вектора комплексных парциальных ширин $\mathbf{g}_1 = \{g_{1i}\}_{i=1}^M$ и $\mathbf{g}_2 = \{g_{2i}\}_{i=1}^M$. Требование унитарности матрицы S накладывает на них $2(M + 1)$ ограничение.

Матрица U , связывающая действительные и мнимые части векторов $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$, в случае двух резонансов будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\mathbf{g}_1^y = -\alpha \mathbf{g}_2^x, \quad \mathbf{g}_2^y = \alpha \mathbf{g}_1^x. \quad (3.31)$$

Подставляя параметр α в формулы (3.25), (3.26), получим выражения для длин векторов $\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_2^x$ и их скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x) &= \frac{\Gamma_1 - \alpha^2 \Gamma_2}{(1 - \alpha^2)^2}, \quad (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x) = \frac{\Gamma_2 - \alpha^2 \Gamma_1}{(1 - \alpha^2)^2}, \\ (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_1^x) &= \frac{2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} (E_1 - E_2), \end{aligned} \quad (3.32)$$

что совпадает с результатом, полученным в работе [12] другим способом.

Параметр α не вполне произволен, но ограничен условием

$$0 \leq \frac{4\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} \leq \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*|^2} \leq 1.$$

Три резонанса. В случае трех резонансов ($N = 3$) и M открытых каналов матрица рассеяния $S(E)$ задается выражением

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i \frac{g_{1i} g_{1j}}{E - \varepsilon_1} - i \frac{g_{2i} g_{2j}}{E - \varepsilon_2} - i \frac{g_{3i} g_{3j}}{E - \varepsilon_3}, \quad (i, j = 1, \dots, M). \quad (3.33)$$

Матрица U , связывающая действительные и мнимые части векторов $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{g}_3$, в случае трех резонансов будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^y &= -\alpha \mathbf{g}_2^x - \beta \mathbf{g}_3^x, & \mathbf{g}_2^y &= \alpha \mathbf{g}_1^x - \gamma \mathbf{g}_3^x, \\ \mathbf{g}_3^y &= \beta \mathbf{g}_1^x + \gamma \mathbf{g}_2^x. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Подставляя параметры α , β , γ в формулы (3.25), (3.26), получим необходимые для построения векторов $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{g}_3$ скалярные произведения

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x) &= \frac{2}{S^2} [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_3^x - \varepsilon_2^x) - \varepsilon_1^y(1 - \gamma^2)^2 + \varepsilon_2^y(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) + \varepsilon_3^y(\beta^2 - \alpha^2\gamma^2)], \\ (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x) &= \frac{2}{S^2} [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_1^x - \varepsilon_3^x) + \varepsilon_1^y(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) - \varepsilon_2^y(1 - \beta^2)^2 + \varepsilon_3^y(\gamma^2 - \alpha^2\beta^2)], \\ (\mathbf{g}_3^x, \mathbf{g}_3^x) &= \frac{2}{S^2} [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_2^x - \varepsilon_1^x) + \varepsilon_1^y(\beta^2 - \alpha^2\gamma^2) + \\ &+ \varepsilon_2^y(\gamma^2 - \alpha^2\beta^2) - \varepsilon_3^y(1 - \alpha^2)^2], \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_2^x) &= \frac{2}{S^2} \{ \alpha[\varepsilon_1^x(1 - \gamma^2) - \varepsilon_2^x(1 - \beta^2) - \varepsilon_3^x(\beta^2 - \gamma^2)] + \\ &+ \beta\gamma[-\varepsilon_1^y(1 - \gamma^2) - \varepsilon_2^y(1 - \beta^2) + \varepsilon_3^y(1 + \alpha^2)] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_3^x) &= \frac{2}{S^2} \{ \beta [\epsilon_1^x (1 - \gamma^2) - \epsilon_2^x (\alpha^2 - \gamma^2) - \epsilon_3^x (1 - \alpha^2)] + \\
 &\quad + \alpha \gamma [\epsilon_1^y (1 - \gamma^2) - \epsilon_2^y (1 + \beta^2) + \epsilon_3^y (1 - \alpha^2)] \}, \\
 (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_3^x) &= \frac{2}{S^2} \{ \gamma [-\epsilon_1^x (\alpha^2 - \beta^2) + \epsilon_2^x (1 - \beta^2) - \epsilon_3^x (1 - \alpha^2)] + \\
 &\quad + \alpha \beta [\epsilon_1^y (1 + \gamma^2) - \epsilon_2^y (1 - \beta^2) - \epsilon_3^y (1 - \alpha^2)] \}, \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

где $S = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$.

Параметры α, β, γ не вполне произвольны, но ограничены условиями, выполнение которых следует проверять на каждом шаге процедуры фитирования:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{4(\alpha^2 + \beta^2 \gamma^2)}{(1 + \alpha^2)^2 - (\beta^2 - \gamma^2)^2} \leq \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|\epsilon_1 - \epsilon_2^*|^2} \leq 1, \\
 0 &\leq \frac{4(\beta^2 + \alpha^2 \gamma^2)}{(1 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \gamma^2)^2} \leq \frac{\Gamma_1 \Gamma_3}{|\epsilon_1 - \epsilon_3^*|^2} \leq 1, \\
 0 &\leq \frac{4(\gamma^2 + \alpha^2 \beta^2)}{(1 + \gamma^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2} \leq \frac{\Gamma_2 \Gamma_3}{|\epsilon_2 - \epsilon_3^*|^2} \leq 1. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Формула (3.33) содержит $3(M + 1)$ комплексных параметров: энергии $\epsilon_r = E_r - i\Gamma_r/2$ и векторы парциальных ширин $\mathbf{g}_r = \{g_{ri}\}_{i=1}^M$, ($r = 1, 2, 3$). Условие унитарности вводит три дополнительных параметра α, β, γ и накладывает $3(M + 2)$ ограничения — уравнения (3.34) и (3.35), (3.36). Таким образом, остается $3(M + 1)$ действительных свободных параметров, которые можно выбирать различным образом.

Пусть $M = 1$ (один открытый канал). Число свободных параметров равно 6.

Если в качестве этих свободных параметров взять значения E_r, Γ_r , то параметры α, β, γ однозначно определяются из системы

$$\frac{4(\alpha^2 + \beta^2 \gamma^2)}{(1 + \alpha^2)^2 - (\beta^2 - \gamma^2)^2} = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|\epsilon_1 - \epsilon_2^*|^2},$$

$$\frac{4(\beta^2 + \alpha^2 \gamma^2)}{(1 + \beta^2)^2 - (\alpha^2 - \gamma^2)^2} = \frac{\Gamma_1 \Gamma_3}{|\epsilon_1 - \epsilon_3^*|^2},$$

$$\frac{4(\gamma^2 + \alpha^2 \beta^2)}{(1 + \gamma^2)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2} = \frac{\Gamma_2 \Gamma_3}{|\epsilon_2 - \epsilon_3^*|^2}.$$

Координаты $g_{11}^x, g_{21}^x, g_{31}^x$ определяются из соотношений

$$g_{11}^x = \sqrt{\Gamma_1 \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}},$$

$$g_{21}^x = \sqrt{\Gamma_2 \frac{1 + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}},$$

$$g_{31}^x = \sqrt{\Gamma_3 \frac{1 - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}}.$$

Координаты мнимых частей векторов $\mathbf{g}_i$ определяются из равенств (3.34).

Пусть $M = 2$ (два открытых канала). Число свободных параметров равно 9.

Если в качестве этих свободных параметров выбрать значения E_r, Γ_r и α, β, γ , то координаты векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ определяются однозначно из соотношений (3.35) и (3.36). Обозначим

$$\mathbf{g}_1^x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2^x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3^x = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда значения x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2$) определяются из системы

$$x_1^2 + x_2^2 = (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x), \quad y_1^2 + y_2^2 = (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x), \quad z_1^2 + z_2^2 = (\mathbf{g}_3^x, \mathbf{g}_3^x),$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_2^x), \quad x_1 z_1 + x_2 z_2 = (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_3^x), \quad y_1 z_1 + y_2 z_2 = (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_3^x).$$

Значения скалярных произведений $(\mathbf{g}_k^x, \mathbf{g}_l^x)$ выражаются через параметры E_r, Γ_r и α, β, γ (см. формулы (3.35), (3.36)). Естественно, параметры E_r, Γ_r и α, β, γ должны удовлетворять ограничениям (3.37).

Пусть имеется $M > 2$ внешних каналов.

Число свободных параметров равно $3(M + 1)$. Их можно выбирать различными способами. Например, в качестве свободных параметров можно взять значения E_r, Γ_r и α, β, γ . Тогда для определения $3M$ координат векторов $\mathbf{g}_r^x$ остается $3(M - 2)$ свободных параметра, которые можно задать как углы поворота: $(M - 3)$ углов поворота $\psi_1, \dots, \psi_{M-3}$ вектора $\mathbf{g}_3^x$ вокруг осей $\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_M$; $(M - 2)$ углов поворота $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{M-2}$ гиперплоскости векторов $\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_3^x$ вокруг осей $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_M$ и $(M - 1)$ угол поворота $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{M-1}$ всех векторов $\mathbf{g}_i^x$ вокруг осей координат.

Пусть для определенности $M = 4$. Координаты искомых векторов частичных ширин можно вычислять, например, следующим образом. Положим

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{(\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x)}, \\ d_1 &= \frac{(\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_2^x)}{c_1}, \quad d_2 = \sqrt{(\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x) - d_1^2}, \\ e_1 &= \frac{(\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_3^x)}{c_1}, \quad e_2 = \frac{(\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_3^x) - d_1 c_1}{d_2}, \quad e_3 = \sqrt{(\mathbf{g}_3^x, \mathbf{g}_3^x) - e_1^2 - e_2^2}. \end{aligned}$$

Вычислим векторы $\mathbf{q}_r$ (поворот векторов $\mathbf{p}_r$ вокруг плоскости $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$):

$$\mathbf{q}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi_1 & \sin \psi_1 \\ 0 & 0 & -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 \end{pmatrix} \mathbf{p}_r.$$

Вычислим векторы $\mathbf{s}_r$ (поворот векторов $\mathbf{q}_r$ вокруг плоскостей $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4)$):

$$\mathbf{s}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & \sin \delta_1 & 0 \\ 0 & -\sin \delta_1 & \cos \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & 0 & \sin \delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \delta_2 & 0 & \cos \delta_2 \end{pmatrix} \mathbf{q}_r.$$

Наконец, векторы $\mathbf{g}_r^x$ получаются как результат поворота векторов $\mathbf{s}_r$ вокруг плоскостей $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$\mathbf{g}_r^x = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & 0 & 0 & \sin \varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_3 & 0 & 0 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix} \mathbf{s}_r.$$

Таким образом, шесть параметров $\psi_1, \delta_1, \delta_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и соотношения (3.35), (3.36) полностью определяют координаты векторов $\mathbf{g}_r^x$. Координаты векторов $\mathbf{g}_r^y$ определяются с помощью соотношений (3.34).

Этот алгоритм непосредственно обобщается на случай большего числа резонансов. Задача с четырьмя резонансами возникает, например, при изучении семейства ρ' -мезонов, мы рассмотрим ее в следующем разделе.

4. ПРОБЛЕМЫ СПЕКТРА ВОЗБУЖДЕНИЙ ЛЕГКИХ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ И УНИТАРНОСТЬ S-МАТРИЦЫ ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ НЕУПРУГИХ РЕЗОНАНСОВ

4.1. Современная ситуация с ρ - и ω -мезонными возбужденными состояниями. В качестве важного и актуального примера использования обсуждаемых методов мы проанализируем спектр возбуждений ρ - и ω -мезонов. Более детальное описание можно найти в работах [17—20].

Понимание и интерпретация экспериментального спектра резонансов легких мезонов есть необходимое условие для поисков мезонов, не явля-

ющихся возбуждениями системы, состоящей из кварка и антикварка $q\bar{q}$. Кроме того, изучение спектра «обычных» $q\bar{q}$ радиальных и орбитальных возбуждений легких мезонов, состоящих из u -, d - и s -кварков, определение их масс, ширин и мод распадов само по себе является важной задачей.

Выделенная роль в физике частиц векторных мезонов с $J^{PC} = 1^{--}$ ($I^G = 0^-, 1^+$ — изоскалярных и изовекторных) делает задачу изучения спектра их возбуждений особенно важной. Давно известно, что простейшая модель векторной доминантности (ВДМ) плохо описывает данные выше 1 ГэВ по e^+e^- -аннигиляции, $\pi\pi$ -рассеянию и фоторождению. Так, полные сечения e^+e^- -аннигиляции в два или четыре пиона существенно выше получающихся в ВДМ, и в этих сечениях, и в упругой амплитуде p -волны $\pi\pi$ -рассеяния наблюдаются нерегулярности в области энергий от 1,2 до 2,0 ГэВ.

Существование $\rho'(1600)$ было твердо установлено много лет назад, но в течение долгого времени оставалась неопределенность в значениях его параметров. Позже было обнаружено, что энергетическая область около 1600 МэВ содержит по крайней мере два изовекторных $J^{PC} = 1^{--}$ резонанса. В работах [21—23] было показано, что существование двух резонансов с массами 1,46 и 1,70 ГэВ и ширинами, соответственно, 0,31 и 0,40 ГэВ позволяет получить хорошее описание экспериментальных данных по e^+e^- -аннигиляции и по фоторождению с 2π - и 4π -конечными состояниями. Схожий спектр был получен А.Б.Говорковым [24] при изучении процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^0\omega$, в котором были обнаружены широкие (ширины порядка 0,3 ГэВ) резонансы с массами 1,45, 1,86 и 1,99 ГэВ. Значения масс и ширин этих частиц позже уточнялось, но современная точка зрения состоит в том, что в районе бывшего $\rho'(1600)$ -возбуждения есть по меньшей мере два новых изовекторных $J^{PC} = 1^{--}$ широких состояния, существование которых можно считать достаточно твердо установленным, и они занесены в таблицы Particle Data Group [25]. То же самое можно сказать и об изоскалярных ω' -мезонах — $\omega'(1440)$ и $\omega'(1600)$.

Долгую и сложную историю имеет и другое возможное ρ -возбуждение с массой в области $1,1 \div 1,3$ ГэВ. Первые заключения о его существовании [26] основывались на существенном превышении сечения процесса $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$ относительно предсказаний ВДМ. Кроме того, это возбуждение было замечено в реакции $\gamma p \rightarrow p e^+e^-$ [24]. Наконец, анализ пионных и $\pi^0\omega$ электромагнитных формфакторов [28,29] в энергетической области до 1,4 ГэВ также приводил к необходимости учета состояния 1,25 ГэВ. Однако одновременно существовали и описания всех этих экспериментальных данных без $\rho'(1250)$ -мезона.

Сравнительно недавно группа LASS в SLAC провела амплитудный анализ [30,31] $\pi^+\pi^-$ -системы в процессе $K^-p \rightarrow \pi^+\pi^-\Lambda$. Этот анализ показывает значительный вклад p -волны, который был хорошо описан БВ-резонансом с массой $(1,266 \pm 0,014)$ ГэВ. В контексте $q\bar{q}$ -модели это состояние наиболее естественно интерпретируется как первое радиальное возбуждение ρ -мезона.

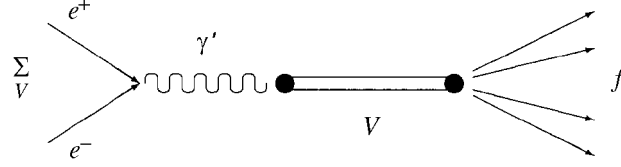
После опубликования этих результатов в работе [32] были вновь проанализированы данные по процессу $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ с учетом состояния группы LASS в дополнение к двум состояниям, установленным более ранними исследованиями [21—23]. Этот повторный анализ привел к слишком малой парциальной ширине возможного $\rho'(1266)$ для e^+e^- -канала, чтобы интерпретировать его как радиальное возбуждение ρ -мезона. В связи с этим встает вопрос, является ли $\rho'(1266)$ $q\bar{q}$ -состоянием.

Отметим, что все эти исследования проведены с использованием формул Брейта — Вигнера, т.е. амплитуды записывались как суммы БВ-слагаемых, соответствующих каждому резонансу.

Очевидно, что интерференция между обсуждаемыми широкими резонансами является основной проблемой анализа и интерпретации. Для учета этой интерференции обычно вводят фазовые множители для БВ-членов, которые либо полагаются равными плюс или минус единице [21—23,24], либо рассматриваются как свободные параметры [30,31]. Выбор этих фазовых множителей достаточно произволен и, например, как отмечается в [33], «загадочно и не имеет рационального объяснения», что при описании процесса $e^+e^- \rightarrow \pi\pi^+\pi^-$ следует применять правило знаков $++$ для ρ - и ρ'_1 -состояний, тогда как для всех других процессов, вовлеченных в анализ, надо использовать для этих состояний фазовые множители $+-$. Однако очень важно, что все такие подходы (как с фазовыми множителями, так и без них) в случае широких перекрывающихся резонансов нарушают унитарность матрицы рассеяния, которая является изначальным мотивом при использовании любых формул БВ-типа. Ниже мы приводим анализы семейств векторных ρ' - и ω' -мезонов, сохраняющие унитарность.

Все анализы, старые и новые, базируются на модели векторной доминантности, в которой e^+e^- -аннигиляция описывается прямым взаимодействием промежуточного γ -кванта с векторными мезонами с константами $V - \gamma$ связи f_V^{-1} ($V = \rho, \omega, \phi, \psi$) и дальнейшим распадом векторных мезонов в конечное состояние f . Эти процессы изображаются диаграммой на рис.5.

Приведем несколько формул, которые будут полезны для сопоставления результатов различных анализов. Полное сечение в случае только одного


 Рис.5. e^+e^- -аннигиляция в модели векторной доминантности

изолированного промежуточного V -резонанса, удаленного от порога реакции, задается выражением

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow f} = 4\pi\alpha \left(\frac{e}{f_V} \right)^2 \frac{m_V^2}{s} \frac{m_V \Gamma_V B_f^V}{(s - m_V^2)^2 + (m_V \Gamma_V)^2}, \quad (4.1)$$

где s — квадрат энергии в с.и., α — постоянная тонкой структуры, m_V — масса векторного мезона, Γ_V — его полная ширина, $B_f^V = \Gamma_f^V / \Gamma_V$ — брэнчинг распада в конечное состояние, Γ_f^V — соответствующая парциальная ширина.

Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow f} = \frac{12\pi}{s} \frac{m_V^2 \Gamma_V^2 B_i^V B_f^V}{(s - m_V^2)^2 + (m_V \Gamma_V)^2}, \quad (4.2)$$

где $B_i^V = \Gamma_{V \rightarrow e^+e^-} / \Gamma_V$. Сечение в пике (при $[m] = \text{ГэВ}$) имеет значение:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow f} = \frac{12\pi}{m_V^2} B_i^V B_f^V 3,89 \cdot 10^5 \text{ нб.}$$

Например, для $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\pi}$ при $B_1^p = 6,5 \text{ кэВ}/150 \text{ МэВ} \approx 4,33 \cdot 10^{-5}$, $B_{2\pi}^p \approx 0,99$ получаем в ρ -мезонном пике $\sigma_{e^+e^- \rightarrow 2\pi} \approx 1100 \text{ нб}$, что с учетом поправок, связанных с ρ - ω -смешиванием, близко к экспериментальному значению.

Экспериментальные данные для e^+e^- -аннигиляции, позволяющие обсуждать [33] существование семейства векторных ρ' -мезонов, состоят из набора полных сечений $e^+e^- \rightarrow 2\pi$, $2\pi^+2\pi^-$, $\pi^+\pi^-2\pi^0$, $\omega\pi^0$ и $\eta\pi^+\pi^-$. Многоканальное условие унитарности подключает к этому набору ρ -волну $\pi\pi$ -рассеяния.

Другие каналы распадов ρ' -мезонов, кроме входящих в начальные и конечные состояния этих реакций, практически отсутствуют, что означает малость брэнчингов распадов ρ' -состояний в другие каналы. Таким образом, ограничение каналами e^+e^- , 2π , $2\pi^+2\pi^-$, $\pi^+\pi^-2\pi^0$, $\omega\pi^0$ и $\eta\pi^+\pi^-$ является хорошим приближением. Аналогично формулируется задача о ω' -мезонах, основные каналы распадов которых — e^+e^- , $\rho\pi$ и $\omega\pi^+\pi^-$ (состояния, включающие странные частицы, практически отсутствуют [33]). В обеих задачах (о ρ' -мезонах и ω' -мезонах) значение индекса $i = 1$ в амплитудах f_{ij} отвечает начальному состоянию e^+e^- (или промежуточному γ -кванту). Значение $i = 2$ в задаче о ρ' -мезонах отвечает состоянию $\pi^+\pi^-$, индекс $j = 2, 3, 4, 5, 6$ отвечает, соответственно, конечным состояниям $\pi^+\pi^-$, $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$, $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$, $\pi^0\omega$ и $\eta\pi^+\pi^-$. Индекс r , нумерующий резонансы, соответствует ρ (с учетом ρ - ω -смешивания) и двум или трем ρ' -мезонам. В задаче об ω' -мезонах индекс $j = 2, 3$ отвечает конечным состояниям $\rho\pi$ и $\omega\pi^+\pi^-$ и индекс r отвечает ω - ϕ «хвосту» и двум или трем ω' -резонансам. Детали вычислений сечений аннигиляции с учетом пороговых факторов можно найти в работах [17,18,20].

4.2. Анализ на основе формул БВ-типа. Метод построения унитарной многоканальной и многорезонансной S -матрицы БВ-типа для общего случая M открытых каналов и N резонансов описан в предыдущем разделе. Матрица рассеяния задается выражением $S(E) = I - iF$, где F — матрица парциальных амплитуд рассеяния:

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^N \frac{m_r \Gamma_r g_{ri} g_{rj}}{s - m_r^2 + im_r \Gamma_r} = \sum_{r=1}^N e^{i(\varphi_{ri} + \varphi_{rj})} \frac{m_r \Gamma_r |g_{ri}| |g_{rj}|}{s - m_r^2 + im_r \Gamma_r}. \quad (4.3)$$

Для облегчения сопоставления приводимых ниже результатов с другими анализами мы используем переменную $s = E^2$, при этом векторы $\mathbf{g}_r$ безразмерны.

Очень кратко приведем результаты для ρ' -резонансов, необходимые для понимания физической ситуации при сопоставлении с ω' -состояниями. Для выяснения ситуации с $\rho'(1250)$ -мезоном в работе [17] проведен анализ перечисленных выше экспериментальных данных с учетом трех ρ' -резонансов. В табл.1 приведены результаты для их масс и ширин, в табл.2 приведены значения брэнчингов $B_{ri} = g_{ri} g_{ri}^* / |\mathbf{g}_r|^2$. В случае, когда резонансы хорошо разнесены, векторы парциальных ширин становятся действительными, и это равенство превращается в формулу $B_{ri} = \Gamma_{ri} / \Gamma_r$, поэтому величины

$B_{ri} \Gamma_r$ можно использовать как аналоги значений обычных парциальных ширин Γ_{ri} . (Например, $\Gamma_{\rho'_1 \rightarrow e^+e^-} = 10^{-5} \cdot 350 \text{ МэВ} = 3,5 \text{ кэВ}$.) Брэнчинги распада $\rho'(1250)$ (в наших обозначениях ρ'_3)-состояния в e^-e^+ и адронные каналы сравнимы с брэнчингами более высоких состояний, что снимает наиболее сильное возражение против возможности рассматривать $\rho'(1250)$ -мезон как $q\bar{q}$ -возбуждение. Заметим, однако, что фит с тремя ρ' лишь слегка лучше, чем фит с двумя ρ' -состояниями. Уместно отметить, что процедура унитаризации вносит большую жесткость в выражения для амплитуд: брэнчинги не произвольны, эмпирический подбор фазовых множителей невозможен и т.д. Все это делает одновременное описание шести процессов достаточно сложной задачей.

Перейдем к обсуждению ω' -состояний. Анализы, проведенные во многих работах (отметим, в частности, [24,34]), дают широкие состояния ω'_1 и ω'_2 с массами, близкими двум соответствующим ρ' -состояниям, и, возможно, состояние ω'_3 , соответствующее ρ'_3 . Значения χ^2 при сохраняющем унитарность описании [18] процессов $e^-e^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ и $e^-e^+ \rightarrow \omega\pi^+\pi^-$ в случаях двух и трех состояний ω' близки и равны приблизительно $1,6/\text{d.f.}$ Поэтому мы не можем сделать определенное заключение о существовании ρ'_3 - и ω'_3 -мезонов и только обсудим ниже возможность их соответствия $q\bar{q}$ -схеме. Для экономии места и для последующего сравнения с результатами других методов (см. ниже пп.4.3 и 4.4) мы обсуждаем анализ и приводим результаты, в основном, для случая двух ω' -состояний, детальные результаты для трех состояний приведены в работе [18].

Полезно коротко привести алгоритм метода в простом случае двух резонансов. Действительные и мнимые части комплексных векторов парциальных ширин $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ связаны соотношениями (3.31):

$$\mathbf{g}_1^y = -\alpha \mathbf{g}_2^x, \quad \mathbf{g}_2^y = \alpha \mathbf{g}_1^x.$$

Кроме того, длины векторов $\mathbf{g}_1^x$ и $\mathbf{g}_2^x$ и угол между ними заданы формулами (3.32):

$$V_{11}^x = (\mathbf{g}_1^x, \mathbf{g}_1^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2)^2} \left(1 - \alpha^2 \frac{m_2 \Gamma_2}{m_1 \Gamma_1} \right),$$

$$V_{22}^x = (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_2^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2)^2} \left(1 - \alpha^2 \frac{m_1 \Gamma_1}{m_2 \Gamma_2} \right),$$

$$V_{12}^x = (\mathbf{g}_2^x, \mathbf{g}_1^x) = \frac{2\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{\sqrt{m_1 m_2 \Gamma_1 \Gamma_2}}.$$

Таким образом, из параметров $m_1, m_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$, фигурирующих в формулах (4.3), остается 8 свободных действительных параметров, в качестве которых удобно выбрать значения масс m_1, m_2 , полных ширин Γ_1, Γ_2 , значение параметра α , две координаты вектора $\mathbf{g}_1^x$ (g_{11}^x и g_{13}^x) и одну координату вектора $\mathbf{g}_2^x$ (g_{21}^x).

Значения координат g_{12}^x, g_{22}^x и g_{23}^x определяются из системы

$$(g_{11}^x)^2 + (g_{12}^x)^2 + (g_{13}^x)^2 = V_{11}^x,$$

$$(g_{21}^x)^2 + (g_{22}^x)^2 + (g_{23}^x)^2 = V_{22}^x,$$

$$g_{11}^x g_{21}^x + g_{12}^x g_{22}^x + g_{13}^x g_{23}^x = V_{21}^x,$$

решение которой есть

$$\begin{aligned} g_{12}^x &= \sqrt{V_{11}^x - (g_{11}^x)^2 - (g_{13}^x)^2}, \\ g_{23}^x &= \frac{g_{13}^x(V_{11}^x - g_{11}^x g_{21}^x) \pm g_{12}^x W}{(g_{12}^x)^2 + (g_{13}^x)^2}, \\ g_{22}^x &= \frac{V_{11}^x - g_{11}^x g_{21}^x - g_{13}^x g_{23}^x}{g_{12}^x}, \end{aligned}$$

где

$$W = \sqrt{[V_{22}^x - (g_{21}^x)^2] [(g_{12}^x)^2 + (g_{13}^x)^2] - [V_{11}^x - g_{11}^x g_{21}^x]^2}.$$

В результате фитирования экспериментальных данных, приведенных на рис.6 и 7 ($\chi^2/\text{d.f.} = 1,60$ и примерно такое же значение χ^2 в двух других методах ниже), были получены следующие значения масс и полных ширин (в ГэВ):

$$m_{\omega'_1} = 1,450, \quad \Gamma_{\omega'_1} = 0,200,$$

$$m_{\omega'_2} = 1,616, \quad \Gamma_{\omega'_2} = 0,199.$$

Векторы парциальных ширин $\mathbf{g}_{\omega'_i}$ и брэнчинги распадов приведены в табл.3.

4.3. К-матричный анализ. Унитарная S -матрица имеет в этом анализе вид

$$S(s) = \frac{I - iK(s)}{I + iK(s)} \equiv \frac{I - i \sum_{r=1}^{N=2} \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{s - \varepsilon_r}}{I + i \sum_{r=1}^{N=2} \frac{\gamma_r \gamma_r^T}{s - \varepsilon_r}}. \quad (4.5)$$

Свободными параметрами метода в случае двух резонансов и трех открытых каналов являются действительные значения положений полюсов ε_1 и ε_2 , а также действительные трехкомпонентные векторы γ_1 и γ_2 .

Фитирование экспериментальных данных приводит к следующим значениям (ε_r и γ_r^2 в ГэВ²):

$$\varepsilon_1 = 1,364, \quad \varepsilon_2 = 1,620,$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0,0012 \\ 0,5664 \\ 0,4196 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0,0009 \\ 0,2920 \\ 0,4379 \end{pmatrix}.$$

Как обсуждалось выше, эти величины нельзя интерпретировать как массы и парциальные ширины резонансов. Предварительно K -матричные выражения амплитуд рассеяния следует представить в виде суммы БВ-слагаемых, то есть в виде

$$S(E) = I - i \frac{m_{\omega'_1} \Gamma_{\omega'_1} C^{(1)}}{s - m_{\omega'_1}^2 + im_{\omega'_1} \Gamma_{\omega'_1}} - i \frac{m_{\omega'_2} \Gamma_{\omega'_2} C^{(2)}}{s - m_{\omega'_2}^2 + im_{\omega'_2} \Gamma_{\omega'_2}},$$

и выразить затем массы $m_{\omega'_1}$, $m_{\omega'_2}$ и ширины $\Gamma_{\omega'_1}$, $\Gamma_{\omega'_2}$ резонансов через значения ε_1 , ε_2 и компоненты векторов γ_1 , γ_2 (см. формулы п.2.2).

Это приводит к значениям (все величины в ГэВ):

$$m_{\omega'_1} = 1,422, \quad \Gamma_{\omega'_1} = 0,407,$$

$$m_{\omega'_2} = 1,569, \quad \Gamma_{\omega'_2} = 0,125. \quad (4.6)$$

Полученные в результате факторизации коэффициентов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ при БВ-членах векторы парциальных ширин $\mathbf{g}_{\omega'_i}$ и брэнчинги распадов приведены в табл.4.

4.4. Анализ с помощью неэрмитова гамильтониана. Поведение системы двух нестабильных перемешивающихся уровней, имеющих общие каналы распадов, определяется в этом методе гамильтонианом

$$H = H^{(0)} - \frac{i}{2} \Gamma = \begin{pmatrix} H_{11} - i\Gamma_{11}/2 & \alpha^x - i\alpha^y/2 \\ \alpha^x - i\alpha^y/2 & H_{22} - i\Gamma_{22}/2 \end{pmatrix}.$$

Амплитуды рассеяния задаются выражением:

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^2 \sum_{g=1}^2 A_{ir} (E - H)_{rg}^{-1} A_{jg}.$$

При анализе ω' -состояний (два резонанса, три канала распада, матрица A состоит из двух трехкомпонентных столбцов — действительных векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$) в качестве свободных параметров выбирались значения элементов гамильтониана $H_{11}, H_{22}, \Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \alpha^x$, а также две координаты вектора $\mathbf{A}_1$ (A_{11}, A_{13}) и две координаты вектора $\mathbf{A}_2$ (A_{21}, A_{22}). Параметр α^y и координаты $\mathbf{A}_{12}$ и $\mathbf{A}_{23}$ определялись из условий унитарности:

$$\begin{cases} |\mathbf{A}_1|^2 = \Gamma_{11} \\ |\mathbf{A}_2|^2 = \Gamma_{22} \\ (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha^y. \end{cases}$$

Фитирование экспериментальных данных приводит к следующему гамильтониану и векторам $\mathbf{A}_r$ (H и A^2 в ГэВ):

$$H = \begin{pmatrix} 1,3730 - i 0,2620/2 & 0,00003 - i 0,1866/2 \\ 0,00003 - i 0,1866/2 & 1,6142 - i 0,1501/2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,0011 \\ 0,4005 \\ 0,3185 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,0008 \\ 0,2043 \\ 0,3292 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения μ_1 и μ_2 матрицы H , тогда их действительные части есть энергии (массы) резонансов $E_{\omega'_1}$ и $E_{\omega'_2}$, а мнимые части равны, с точностью до знака, полуширинам $\Gamma_{\omega'_1}/2$ и $\Gamma_{\omega'_2}/2$ (см. формулы в п.2.3).

Получаем (все величины в ГэВ):

$$\begin{aligned} m_{\omega'_1} &= 1,412, & \Gamma_{\omega'_1} &= 0,288, \\ m_{\omega'_2} &= 1,576, & \Gamma_{\omega'_2} &= 0,124. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Запишем теперь амплитуды рассеяния в виде суммы БВ-слагаемых:

$$f_{ij} = \frac{C_{ij}^{(1)}}{E - E_{\omega'_1} + i\Gamma_{\omega'_1}/2} + \frac{C_{ij}^{(2)}}{E - E_{\omega'_2} + i\Gamma_{\omega'_2}/2}. \quad (4.8)$$

Полученные в результате факторизации коэффициентов $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ векторы парциальных ширин (в другой нормировке, чем в предыдущих методах, так как в формулах (4.8) используется энергия E) $g_{\omega'_i}$ и брэнчинги распадов приведены в табл.5.

Таблица 1. Параметры ρ' -возбуждений для системы трех ρ' -мезонов (массы и ширины приведены в ГэВ)

Мезон	Масса	Ширина
ρ'_1	1,438	0,350
ρ'_2	1,657	0,346
ρ'_3	1,238	0,347

Таблица 2. Брэнчинги распадов (в процентах) для системы трех ρ' -мезонов

Канал	Состояние	ρ'_1	ρ'_2	ρ'_3
1	e^+e^-	0,00100	0,00077	0,0080
2	$\pi^+\pi^-$	5,204	10,193	1,227
3	$\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	47,777	7,209	60,796
4	$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	16,163	45,250	26,262
5	$\omega\pi^0$	18,818	13,554	6,829
6	$\eta\pi^+\pi^-$	12,037	23,793	4,885

Таблица 3. Векторы парциальных ширин $g_{\omega'_1}$ и $g_{\omega'_2}$ и брэнчинги распадов ω' -мезонов, полученные с помощью прямого метода нахождения БВ многоканальных амплитуд

Канал	Состояние	$ g_{\omega'_1 i} $	$\Phi_{\omega'_1 i}$	$B_{\omega'_1 i}(\%)$	$ g_{\omega'_2 i} $	$\Phi_{\omega'_2 i}$	$B_{\omega'_2 i}(\%)$
1	e^+e^-	0,0018	$29,91^\circ$	0,0002	0,0021	$-17,94^\circ$	0,0003
2	$\rho\pi$	0,9795	$15,89^\circ$	65,81	0,7057	$-33,20^\circ$	34,16
3	$\omega\pi\pi$	0,7060	$37,79^\circ$	34,19	0,9797	$-13,51^\circ$	65,84

Таблица 4. Векторы парциальных ширин $g_{\omega'_1}$ и $g_{\omega'_2}$ и брэнчинги распадов ω' -мезонов, полученные с помощью K -матричного метода

Канал	Состояние	$ g_{\omega'_1 i} $	$\Phi_{\omega'_1 i}$	$B_{\omega'_1 i}(\%)$	$ g_{\omega'_2 i} $	$\Phi_{\omega'_2 i}$	$B_{\omega'_2 i}(\%)$
1	e^+e^-	0,0023	$8,86^\circ$	0,0003	0,0013	$-50,51^\circ$	0,0003
2	$\rho\pi$	0,9861	$4,82^\circ$	57,307	0,4679	$-65,99^\circ$	38,171
3	$\omega\pi\pi$	0,8511	$14,05^\circ$	42,693	0,5955	$-37,09^\circ$	61,829

Таблица 5. Векторы парциальных ширин $g_{\omega'_1}$ и $g_{\omega'_2}$ и брэнчинги распадов ω' -мезонов, полученные с помощью неэрмитова гамильтониана

Канал	Состояние	$ g_{\omega'_1 i} $	$\Phi_{\omega'_1 i}$	$B_{\omega'_1 i}(\%)$	$ g_{\omega'_2 i} $	$\Phi_{\omega'_2 i}$	$B_{\omega'_2 i}(\%)$
1	e^+e^-	0,0014	$10,87^\circ$	0,0005	0,0008	$-40,35^\circ$	0,0004
2	$\rho\pi$	0,4726	$7,22^\circ$	55,789	0,2398	$-52,17^\circ$	33,417
3	$\omega\pi\pi$	0,4207	$16,55^\circ$	44,210	0,3385	$-28,77^\circ$	66,583

4.5. Обсуждение и интерпретация результатов анализов ρ' - и ω' -состояний. Сравнивая результаты описания ω' -мезонов с помощью трех методов, видим, что параметры, исходно фигурирующие в двух последних методах, существенно отличаются от физических масс и ширин резонансов, а эти величины могут достаточно сильно зависеть от выбранного метода. Отметим, однако, что выводы, сформулированные ниже, справедливы для результатов всех трех анализов.

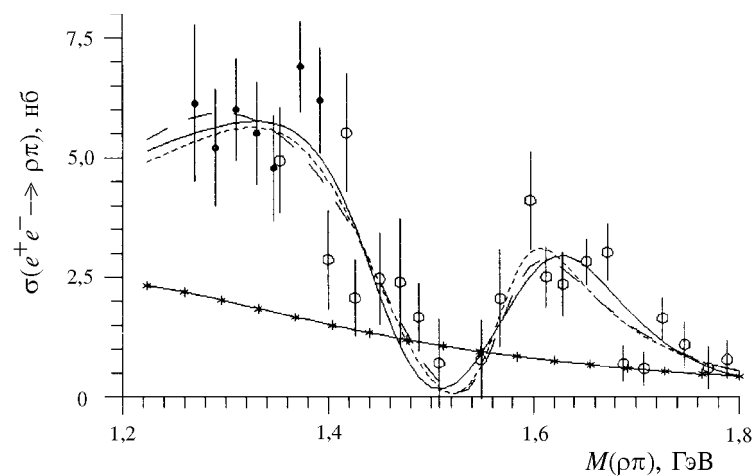


Рис.6. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \rho\pi$. Сплошная линия — прямой БВ-метод; штриховая линия — K -матричный метод; точечная линия — метод неэрмитова гамильтониана. Линия, помеченная (*), — вклад ω - и ϕ -мезонов. Экспериментальные данные взяты из работ [33] — ($\bullet$), [34] — ($\circ$)

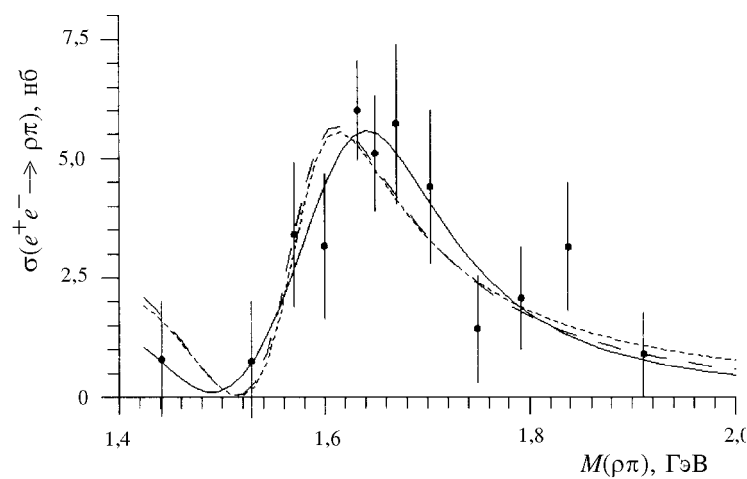


Рис.7. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \omega\pi\pi$. Сплошная линия — прямой БВ-метод; штриховая линия — K -матричный метод; точечная линия — метод неэрмитова гамильтониана. Экспериментальные данные [35] для реакции $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^+\pi^-$ умножены на коэффициент 1,5 для учета ненаблюдаемого состояния $\omega\pi^0\pi^0$

В кварковых моделях ожидаемые соотношения для парциальных ширин лептонных распадов ρ' - и ω' -состояний следующие: $\Gamma_{\rho'_i \rightarrow e^+e^-} : \Gamma_{\omega'_i \rightarrow e^+e^-} = 9 : 1$. Соответственно для адронных распадов ожидаемые соотношения: $\Gamma_{\rho'_i \rightarrow \omega\pi} : \Gamma_{\omega'_i \rightarrow \rho\pi} = 1 : 3$. Наши результаты находятся в очень хорошем согласии с этими предсказаниями. Важно, что мы не пытались хоть скольконибудь «удерживать» эти соотношения, и неожиданным для нас результатом была степень их выполнения. Большое отклонение от этих соотношений в анализе [33] было важным аргументом против включения всех ρ' - и ω' -состояний в $q\bar{q}$ -схему.

Однако вопрос об интерпретации результатов не так прост. Например, массы первых радиального S - и орбитального D -возбуждений $q\bar{q}$ -системы $m_{\rho'_S} = 1,45$ ГэВ и $m_{\rho'_D} = 1,66$ ГэВ, найденные в [35], близки к нашим $m_{\rho'_1}$ и $m_{\rho'_2}$. Существенно, однако, что оба ρ'_1 и ρ'_2 , как и ρ'_3 , имеют достаточно большие значения лептонных ширин, тогда как для D -состояний с учетом релятивистских поправок оценка этих ширин составляет доли кэВ. Расхождение не так уж и велико, и с учетом модельной зависимости кварковых схем наши вычисления, выполненные с помощью унитарной S -матрицы, показывают, что нет чрезвычайно весомых аргументов против интерпретации всех трех ρ' - и трех ω' -мезонов как $q\bar{q}$ -возбуждений. Однако отмеченное выше расхождение и довольно плотное расположение этих резонансов по массе, если считать их все радиальными возбуждениями, дает и основание считать [33], что некоторые из них «лишние» среди $q\bar{q}$ -состояний. Природа таких возможных состояний не вполне ясна, поскольку схемы смешивания $q\bar{q}$ -состояний с гибридными или четырехкварковыми состояниями очень модельно зависимы [36].

Дальнейший прогресс в этой области связан, прежде всего, с улучшением экспериментальных данных и их корректным анализом, необходимостью достаточно точного нахождения лептонных и адронных ширин ρ' - и ω' -резонансов и совершенствованием кварковых моделей, включающих смешивание состояний $q\bar{q}$ с более сложными состояниями.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Один из основных выводов состоит в том, что при описании резонансов, имеющих общие каналы распадов, необходимо использовать методы, сохраняющие унитарность матрицы рассеяния. Традиционно в анализах наиболее часто применяются формулы типа Брейта — Вигнера, но простое использование суммы обычных БВ-выражений для каждого перекрывающе-

гося резонанса может приводить к очень значительному нарушению условия унитарности. Это нарушение велико, даже если резонансы кажутся достаточно далеко разнесенными. Поэтому термин «перекрывающиеся» несколько условен, и при изучении таких резонансов всегда необходимо использование строгих и несколько более изощренных, чем для одиночных резонансов, методов.

Несколько ранее мы предложили, и в настоящем обзоре достаточно подробно описали, метод построения унитарной T -инвариантной S -матрицы БВ-вида для случая нескольких перекрывающихся резонансов при многоканальном рассеянии. В качестве примера необходимости использования унитарных имплицитных рассеяния в работе [17] был проведен анализ ρ' -состояний с использованием простой суммы БВ-членов. Значения масс и ширин резонансов близки к значениям, полученным при использовании унитаризационной процедуры, качество фита примерно такое же, однако матрица рассеяния S существенно неунитарна, и отклонение некоторых элементов $(SS^\dagger)_{ij}$ от 1 или 0 достигает 100%.

Мы продемонстрировали, что параметры резонансов, получаемые при описании физической ситуации с помощью разных методов, могут существенно отличаться друг от друга. Необходимо учитывать, что величины, обозначаемые одинаково в разных методах, являются на самом деле разными в случае нескольких резонансов. Так, параметры, фигурирующие в K -матричном методе в формуле (4.5), не являются массами и ширинами резонансов. Это не должно удивлять, так как этот метод изначально применялся для анализов типа эффективного радиуса [5], а формула (4.5) была записана затем лишь потому, что в случае одного резонанса она эквивалентна БВ-выражению для амплитуды.

Таким образом, необходимо знать формулы «пересчета» параметров от одного метода к другому. Такой переход от K -матричного метода и метода неэрмитова гамильтониана к унитаризированным БВ-амплитудам в принципе возможен, хотя и очень сложен. Например, в задаче о ρ и трех ρ' -мезонах для перевода K -матричного представления амплитуды рассеяния к виду суммы БВ-членов пришлось бы решать комплексное матричное уравнение 7-го порядка. Обратный переход еще более сложен и практически невозможен.

Кроме того, уже для случая трех каналов распадов K -матричный и гамильтонов методы очень громоздки при фитировании, поскольку, в частности, для каждой экспериментальной точки и для каждого набора параметров требуют обращения комплексных матриц. Это не только вопрос трудоемкости, но он приводит к появлению локальных минимумов, что очень опасно при фитировании. Так, при описании ω' -мезонов K -матричный и гамильтонов методы дали существенно другие значения полных ширин, чем

прямой БВ-метод, и даже заранее зная значения ширин резонансов, очень трудно найти соответствующие им значения параметров K -матричного и гамильтонова методов.

Для корректной интерпретации результатов анализа в любом случае необходимо сравнение с унитарными БВ-выражениями. Поэтому прямой метод нахождения БВ-амплитуд в случае нескольких многоканальных резонансов имеет существенные преимущества, поскольку не требует никаких дополнительных сложных преобразований.

Нам представляется, что предложенный прямой метод построения S -матрицы БВ-вида для многоканальных перекрывающихся резонансов может быть полезен для многих задач в физике частиц и ядерной физике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Breit G., Wigner E.P. — Phys.Rev., 1936, v.49, p.519.
2. Wigner E.P., Eisenbud L. — Phys.Rev., 1947, v.72, p.29.
3. Feshbach H. — Ann. Phys., 1958, v.5, p.537.
4. Bjorken D. — Phys. Rev. Lett., 1960, v.4, p.473.
5. Dalitz R.H. — Strange Particles and Strong Interactions. Oxford University Press, 1962; Dalitz R.H., Tuan S. — Ann.Phys., 1960, v.3, p.307.
6. Шапиро И.С. — Перекрывающиеся уровни и гигантские резонансы. В сб.: «Проблемы современной ядерной физики». М.: Наука, 1971, с.273—285.
7. Любошиц В.Л. — Сообщение ОИЯИ, Р2-5328, Дубна, 1970.
8. Кобзарев И.Ю., Николаев Н.Н., Окунь Л.Б. — ЯФ, 1969, т.10, с.864; Кобзарев И.Ю. — Материалы VII Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1972, ч.2, с.298—312.
9. Bell J.S., Steinberger J. — Proc. of the Intern. Conf. on Elementary Particles. Oxford, 1965.
10. Любошиц В.Л. — Материалы XIX Зимней школы ЛИЯФ, Л., 1984, ч.1, с.33—97.
11. Simonius M. — Nucl. Phys. A, 1974, v.218, p.53.
12. McVoy K.W. — Ann Phys., 1969, v.54, p.552.
13. Durand L. — Phys. Rev. D, 1976, v.14, p.14.
14. Henner V.K., Wolfson D.N. — Nuovo Cimento A, 1994, v.107, p.2511.
15. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — Сообщение ОИЯИ, Р4-95-115, Дубна, 1995.
16. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — ЯФ, 1997, т.60, вып.12, с.2180.
17. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — Сообщение ОИЯИ, Р4-95-116, Дубна, 1995.
18. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — Сообщение ОИЯИ, Р4-95-117, Дубна, 1995.
19. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — ЯФ, 1996, т.59, с.1915.
20. Хеннер В.К., Белозерова Т.С. — ЯФ, 1998, т.61, вып.1, с.128.
21. Donnachie A., Mirzae H. — Zeit. Phys. C, 1987, v.33, p.407.
22. Donnachie A., Clegg A.B. — Zeit. Phys. C, 1987, v.34, p.257.
23. Donnachie A., Clegg A.B. — Zeit. Phys. C, 1989, v.42, p.663.
24. Говорков А.Б. — ЯФ, 1988, т.48, с.237; ЯФ, 1991, т.55, с.1035.
25. Phys. Rev. D, 1994, v.50, part 1.
26. Conversi M. et al. — Phys. Lett. B, 1974, v.52, p.493.

27. **Bartalucci S. et al.** — Nuovo Cimento A, 1979, v.49, p.207.
28. **Хеннер В.К.** — ЯФ, 1983, т.37, с.1134.
29. **Budnev N.N., Budnev V.M., Serebryakov V.V.** — Phys. Lett. B, 1977, v.70, p.365.
30. **Aston D. et al.** — Preprint SLAC-PUB 5392, 1990; Preprint SLAC-PUB 5697, 1991; Preprint SLAC-PUB 5721, 1991.
31. **Dunwoodie W., Rensing P., Liang-Ping Chen.** — Preprint SLAC-PUB 5675, 1991.
32. **Donnachie A., Clegg A.B.** — Phys. Lett. B, 1991, v.269, p.450.
33. **Clegg A.B., Donnachie A.** — Preprint Univ. of Manchester, M/C-TH 93/21, 1993; Zeit. Phys. C, 1994, v.62, p.455.
34. **Donnachie A., Clegg A.B.** — Preprint CERN-TH 5210, 1988.
35. **Godfrey S., Isgur N.** — Phys. Rev. D, 1985, v.32, p.189.
36. **Donnachie A., Kalashnikova Yu.S.** — Preprint Univ. of Manchester, M/C-TH 93/02, 1993.
37. **Aulchenko V.M. et al.** — Preprint INP-86-106, Novosibirsk, 1986.
38. **Baldini-Ferrol R.** — Proc. Had. Phys. at Intermediate Energy. Elsevier, 1987.
39. **Cordier A. et al.** — Phys. Lett.B, 1981, v.106, p.155.

PROBLEM WITH THE OKUBO–ZWEIG–IZUKA RULE VIOLATION IN NUCLEON-ANTINUCLEON ANNIHILATION AT REST

D. Buzatu

University "Politehnica", Bucharest, Romania

F. M. Lev

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

A review of the problem whether the violation of the OZI rule in nucleon-antinucleon annihilation at rest can be explained in the framework of conventional mechanisms is given in detail. While the vector dominance model and the rescattering model qualitatively describe the OZI rule violation in the reactions $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$ and $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ for the annihilation from the S state of protonium atom, the latter model cannot explain the fact that the annihilation into $\phi\pi^0$ from the P state is not seen and the OZI rule in the reaction $\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0$ is not satisfied. We also discuss what information about the OZI rule violation can be extracted from the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$ and decays of the J/Ψ meson.

Проводится детальное обсуждение проблемы, может ли нарушение правила ОЦИ в нуклон-антинуклонной аннигиляции в покое быть объяснено в рамках обычных механизмов. В то время как модель векторной доминантности и модель перерасеяния качественно объясняют нарушение правила ОЦИ в реакциях $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$ и $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ для аннигиляции из S -состояния атома протония, модель перерасеяния не может объяснить то, что аннигиляция в $\phi\pi^0$ из P -состояния не наблюдалась и правило ОЦИ в реакции $\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0$ не выполняется. Обсуждается также, какая информация о нарушении правила ОЦИ может быть извлечена из реакции $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$ и распадов J/Ψ мезона.

1. INTRODUCTION

The Okubo–Zweig–Iizuka (OZI) rule [1] was proposed originally for the explanation of several unusual phenomena, in particular of the fact that the width of the decay $\phi \rightarrow 2\pi$ is much smaller than the width of the decay $\phi \rightarrow 2K$ although the phase space in the first case is much greater and the process $\phi \rightarrow 2\pi$ is not forbidden by any conservation law. As argued by Lipkin [2], a more relevant name of this rule is A–Z (Aleksander–Zweig).

In its present formulation the OZI rule says that processes described by disconnected quark diagrams (i.e., diagrams which can be connected by only gluon lines) are suppressed.

There exist many papers in which the decays of the J/Ψ and Υ mesons are considered in the framework of the three-gluon mechanism and the agreement between theory and experiment is rather impressive (see, e.g., Ref. [3]). The success of these calculations was treated by some physicists as the first proof of asymptotic freedom in QCD. On the other hand, attempts to substantiate the OZI rule in the framework of QCD encounter serious difficulties (see, e.g., Refs. [4–7] and references therein). In particular, the problem whether the OZI rule applies to baryons is not clear [8–12], but anyway the usual point of view is that any substantial violation of this rule in some process is a signal that some unusual physics plays an important role in this process.

The recent experimental data on the $\bar{p}p$ and $\bar{p}n$ annihilation at rest obtained by the ASTERIX, CRYSTAL BARREL and OBELIX groups [13–16] at LEAR, have shown that the branching ratios of the reactions $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$, $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$, and $\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-$ are much bigger than expected from naive OZI rule estimations. Indeed, let θ be the ϕ – ω mixing angle such that the ω and ϕ states are constructed from the u , d and s quarks as follows:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta)(u\bar{u} + d\bar{d}) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta)s\bar{s}, \\ \phi &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta)(u\bar{u} + d\bar{d}) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta)s\bar{s}\end{aligned}\quad (1)$$

Then if θ takes the values $(36 \div 39)^\circ$ (see, for example, Ref. [17]), the ϕ/ω production ratio takes the values

$$\left| \frac{(\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta)}{(\sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta)} \right|^2 = (0.2 \div 4.2) \cdot 10^{-3}$$

while in practice [13–16]

$$Br(\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma)/Br(\bar{p}p \rightarrow \omega\gamma) = 0.243 \pm 0.086, \quad (2)$$

$$Br(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)/Br(\bar{p}p \rightarrow \omega\pi^0) = 0.096 \pm 0.015, \quad (3)$$

$$Br(\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-)/Br(\bar{p}n \rightarrow \omega\pi^-) = 0.083 \pm 0.025. \quad (4)$$

The ratio of the corresponding phase volumes is 0.853 for the reaction (2) and 0.849 for the reactions (3) and (4). Therefore the discrepancy between theory and experiment is very large.

The extent of the violation of the OZI rule in other reactions of the nucleon-antinucleon annihilation is given, for example, in Ref. [18].

A rather simple explanation of the OZI rule violation in the reaction (2) has been proposed by Locher, Lu and Zou [19]; for completeness we describe this explanation in Sec.2. However the main purpose of the present paper is to

review the state of the art in explaining the data (3) and (4) in the framework of the so-called rescattering model considered by Locher, Lu and Zou [19], Locher and Lu [20] and Buzatu and Lev [21, 22]. The main question here is whether the explanation given in those references is reliable (and then there is no reason to think that something unusual happens in the reactions (3) and (4)) or this explanation is clearly insufficient (leaving the problem of the OZI rule violation open). The discussion of some aspects of this problem is given in Ref. [23].

In the present paper we do not consider explanations of the OZI rule violation in other models, for example, in models in which the OZI rule violation is the instanton effect [24], in the model of hidden strangeness [25, 26], in the Skyrme model [27] and others (a review of different explanations can be also found in Ref. [28]). All such models suggest from the beginning that the explanation of the OZI rule violation in the reactions (3) and (4) can be obtained only in the framework of unconventional mechanisms.

As follows from the isotopic invariance, the reactions $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ and $\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-$ can be easily related to each other (see, for example, Refs. [21, 29] and Sec.9).

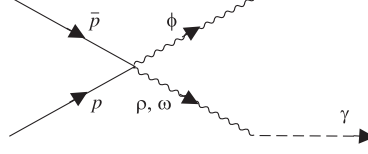
In Secs.3 and 4 we show that there exist many options in choosing the form of the amplitude in the rescattering model, in particular we mention two essentially different choices called Model A and Model B. Neither of these models have theoretical advantages in comparison with the other (or perhaps Model B is substantiated in greater extent), but, as shown in Sec.5, a fairly well agreement with the data can be obtained in Model A while, as shown in Sec.6, Model B gives the values much below the data.

However the success of Model A immediately poses the problem why the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ is not seen when the proton and the antiproton annihilate from the P state of the hydrogen like $\bar{p}p$ atom. This problem is considered in Sec.7.

As shown in Sec.8, the important process for understanding the OZI rule violation is $\bar{p}p \rightarrow f'_2\pi^0$ since the rescattering contribution to this process is negligible.

The conclusion about the OZI rule violation in the process (4) follows from the data of the OBELIX Collaboration [15, 16] on the reaction $\bar{p}d \rightarrow p\phi\pi^-$ when the proton can be considered as a spectator, i.e., its momentum $\mathbf{p}$ is such that $|\mathbf{p}| < 200 \text{ MeV}/c$. However the same extent of the OZI rule violation has been observed in the case when $|\mathbf{p}| \in (400, 800) \text{ MeV}/c$. Therefore the problem arises whether the reason of the OZI rule violation in this case is the same (i.e., the OZI rule violation in the reaction (4)), or some nuclear effects are important. This problem is considered in Sec.9.

In Sec.10 we consider the problem what can be learned about the rescattering contribution taking into account the existing data about some decays of the J/Ψ meson. Finally, as shown in Sec.11, an analog of Model A in the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$ is inconsistent since the corresponding amplitude does not sat-


 Fig. 1. Vector dominance model for the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$

isfy the unitarity relation. Therefore this reaction poses additional problems for understanding the OZI rule violation.

2. REACTION $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$ IN THE VECTOR DOMINANCE MODEL

We describe in this section the explanation of the OZI rule violation in the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$ proposed in Ref. [19]

Consider first the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\rho$. The amplitude of this reaction can be written in the form

$$A_{\bar{p}p \rightarrow \phi\rho} = F(k_1^2 = m_\rho^2, \dots) e_{\mu\nu\rho\sigma} e_1^{*\mu} e_2^{*\nu} k_1^\rho k_2^\sigma, \quad (5)$$

where $\mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$, $e_{\mu\nu\rho\sigma}$ is the absolutely antisymmetric tensor ($e_{0123} = -1$), e_1 and k_1 are the polarization vector and the four-momentum of the ρ meson, respectively, e_2 and k_2 are the corresponding quantities for the ϕ meson, a sum over repeated indices is assumed and m_ρ is the ρ meson mass. The function F in this expression depends on the polarizations of the proton and antiproton and on the masses of all particles in question but we assume that the proton, antiproton and ϕ meson are always on-shell, the proton and antiproton are at rest and only the dependence of F on k_1 is explicitly indicated.

In the framework of the vector dominance model the amplitude of the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$ is described by the diagrams shown in Fig.1. By analogy with Eq.(5), the amplitude of the reaction corresponding to the ρ meson in the intermediate state can be written in the form

$$A_{\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma} = F(k_1^2 = 0, \dots) c_{\rho\gamma} e_{\mu\nu\rho\sigma} e_3^{*\mu} e_2^{*\nu} k_3^\rho k_2^\sigma, \quad (6)$$

where e_3 and k_3 are the polarization vector and the four-momentum of the photon, respectively, and $c_{\rho\gamma}$ is a constant describing the strength of the $\rho \rightarrow \gamma$ transition.

Let us introduce the quantity

$$g(k_1^2) = \sum |F(k_1^2, \dots)|^2, \quad (7)$$

where $\sum$ implies that we take the average value over all initial polarizations and sum over final ones. Following Ref. [19] we also express $c_{\rho\gamma}$ in terms of the

universal constant f_ρ [30]: $c_{\rho\gamma} = em_\rho^2/f_\rho$. Then it follows from Eqs. (5-7) that the ratio of the branching ratios for the reactions $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$ and $\bar{p}p \rightarrow \phi\rho$ is given by

$$\frac{BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma)}{BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\rho)} = \left[\frac{g(0)}{g(m_\rho^2)} \right] \frac{e^2}{f_\rho^2} \left(\frac{k_{\gamma\phi}}{k_{\rho\phi}} \right)^3, \quad (8)$$

where $k_{\gamma\phi}$ is the c.m. frame momentum in the $\gamma\phi$ system and $k_{\rho\phi}$ is understood analogously.

The authors of Ref. [19] do not take into account the dependence of g on k_1^2 , so they assume that g is some constant. Then, taking into account that $e^2/4\pi = 1/137$, $f_\rho^2/4\pi = 2.5$ and $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\rho) = (3.4 \pm 1.0) \cdot 10^{-4}$ according to Ref. [14], the result of Ref. [19] is

$$BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma) = 1.27 \cdot 10^{-5} \quad (9)$$

in excellent agreement with the experimental result $1.0 \cdot 10^{-5}$ in Ref. [14]. The authors of Ref. [19] also discuss the contribution of the ω meson but this contribution is not very important.

It is interesting to note that in the model described above the unexpectedly large value of $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma)$ is a consequence of the purely kinematical factor $(k_{\gamma\phi}/k_{\rho\phi})^3$ which is equal to 13.1. Although the success of the simple model proposed in Ref. [19] is rather impressive, it is necessary to take into account that the additional assumption used in deriving the result is that the dependence of the function g on the off-shellness of the ρ meson is not important. It is clear that at the present stage of the theory of strong interactions we cannot verify whether this assumption is correct.

3. THE PROBLEM OF CALCULATING THE PROCESS $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ WITH K^*K INTERMEDIATE STATES

As it has been pointed out by several authors (see, e.g., Refs. [31–33]) a large amplitude of some OZI-forbidden transitions may be a consequence of the possibility that they can go via two-step processes in which each individual transition is OZI-allowed.

As an example, we first consider the contribution of K^*K intermediate states to the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$. There exist four diagrams shown in Fig.2 and, as easily follows from the isotopic invariance, the contributions of these diagrams

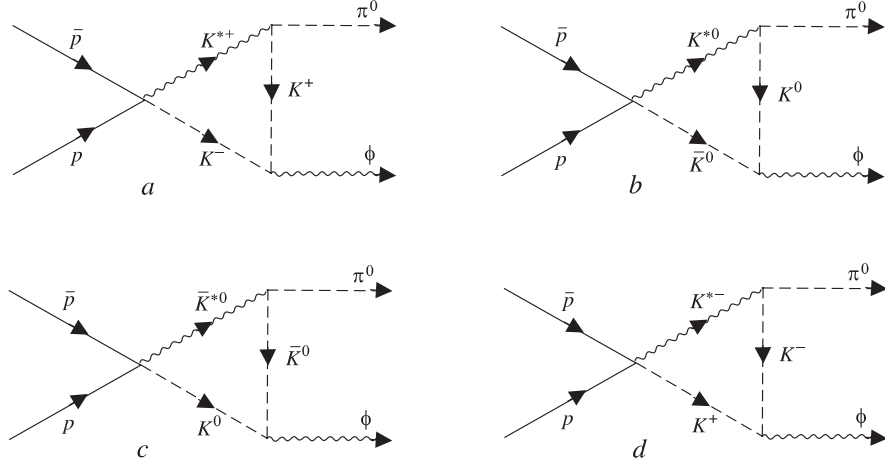


Fig. 2.

in the channel with the isospin $I = 1$ and spin $S = 1$ are equal to each other. To calculate these contributions we have to know the amplitudes of the reactions $\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-$, $K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+$ and $K^+K^- \rightarrow \phi$ entering into the diagram *a* of Fig.2. We use p_1 and p_2 to denote the four-momenta of the initial proton and antiproton, respectively, k_1 and k_2 to denote the four-momenta of the final π^0 and ϕ mesons, respectively, k'_1 , k'_2 , and k'_3 to denote the four-momenta of the K^{*+} , K^- , and K^+ mesons, respectively, and e and e' to denote the polarization vectors of the ϕ and K^{*+} mesons, respectively. The initial proton is described by the Dirac spinor $u(p_1)$ and the initial antiproton is described by the Dirac spinor with the negative energy $v(p_2)$. We also use m , m_π , m_K , m_* and m_ϕ to denote the proton mass and the masses of the corresponding mesons.

Consider the amplitude $\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-$. If all particles are on-shell, the only amplitude in the channel with $I = S = 1$, which survives when the momenta $\mathbf{p}_1$ and $\mathbf{p}_2$ are small, is

$$M_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} = f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] e_{\mu\nu\rho\sigma} e'^{\ast\nu} k'_1{}^\rho k'_2{}^\sigma, \quad (10)$$

where $f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}$ is some constant and γ^μ is the Dirac γ matrix. The total cross section corresponding to the amplitude (10) can be calculated in a standard way and the result is

$$\sigma_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} = |f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)}|^2 \frac{(3m^2 + 2p^2)k'^3}{12\pi p}, \quad (11)$$

where $\mathbf{p}$ is the proton momentum in the c.m. frame of the $\bar{p}p$ system, $p = |\mathbf{p}|$ and k' is the magnitude of the c.m. frame momentum for the $K^{*+}K^-$ system.

By analogy with Eqs. (10) and (11), the amplitude of the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ has the form

$$M_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} = f_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] e_{\mu\nu\rho\sigma} e^{*\nu} k_1^\rho k_2^\sigma, \quad (12)$$

where $f_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0}$ is some constant, and the total cross section corresponding to the amplitude (12) has the form

$$\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} = |f_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0}|^2 \frac{(3m^2 + 2p^2)k^3}{12\pi p}, \quad (13)$$

where k is the magnitude of the c.m. frame momentum for the $\phi\pi^0$ system.

The amplitude of the reaction $K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+$ has the form

$$M_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} = f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} (k_1 - k'_3)_\mu e'^{\mu} \quad (14)$$

and a standard calculation shows that the width of the decay is equal to

$$\Gamma_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} = \frac{|f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}|^2 k_{\pi K}^3}{6\pi m_*^2}, \quad (15)$$

where $k_{\pi K}$ is the magnitude of c.m. frame momentum in the πK system. If Γ_* is the total width of K^{*+} , then it is easy to show that $\Gamma_* = 3\Gamma_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}$.

By analogy with Eqs. (14) and (15), the amplitude of the reaction $K^+ K^- \rightarrow \phi$ is given by

$$M_{K^+ K^- \rightarrow \phi} = f_{K^+ K^- \rightarrow \phi} (k'_{2\mu} - k'_{3\mu}) e^{\mu*}, \quad (16)$$

and the width of the decay $\phi \rightarrow K^+ K^-$ is equal to

$$\Gamma_{\phi \rightarrow K^+ K^-} = \frac{|f_{K^+ K^- \rightarrow \phi}|^2 k_{K\bar{K}}^3}{6\pi m_\phi^2}, \quad (17)$$

where $k_{K\bar{K}}$ is the magnitude of the c.m. frame momentum in the $K\bar{K}$ system. Since ϕ decays into $K\bar{K}$ in 87% cases it is easy to show that $2\Gamma_{\phi \rightarrow K^+ K^-} = 0.87\Gamma_\phi$, where Γ_ϕ is the total width of ϕ .

Taking into account Eqs. (10), (14), (16) and the fact that all the four diagrams in Fig.2 give equal contributions, we can write for the amplitude of the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$

$$\begin{aligned} M_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} &= 8i[\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] e_{\mu\nu\rho\sigma} e^{*\lambda} k_1^\nu \times \\ &\times \int f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+} K^-}^{(11)} f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+ K^- \rightarrow \phi} k_1'^\rho k_2'^\sigma (k_2'^\lambda - k_3'^\lambda) \times \\ &\times \frac{\delta^{(4)}(k_1' - k_1 - k_3') \delta^{(4)}(k_2 - k_2' - k_3')}{(2\pi)^4 [k_1'^2 - (m_* - i\Gamma_*/2)^2] (k_2'^2 - m_K^2 + i0)} \times \\ &\times \frac{d^4 k_1' d^4 k_2' d^4 k_3'}{k_3'^2 - m_K^2 + i0}. \end{aligned} \quad (18)$$

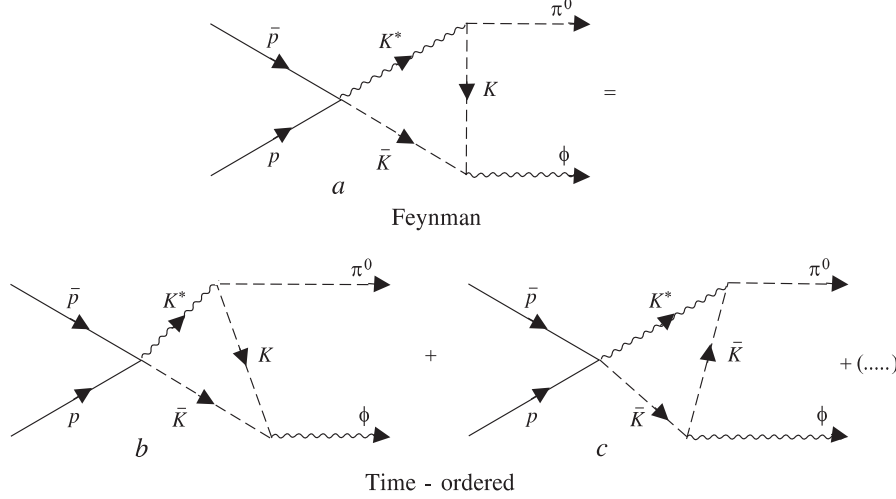


Fig. 3.

Let us note that the term with $k_1'^\nu k_1'^\beta$ in the propagator $\Pi^{\nu\beta} = (k_1'^\nu k_1'^\beta / m_*^2 - g_{\nu\beta})$ of the K^* meson ($g_{\nu\beta}$ is the metric tensor in Minkowski space) does not contribute to the amplitude (18) since $e_{\mu\nu\rho\sigma} k_1'^\nu k_1'^\rho = 0$ and for the same reason $k_1^\nu - k_3'^\nu$ can be replaced by $2k_1'^\nu$. We have also taken into account that the K^* meson is the Breit-Wigner resonance and therefore the propagator of the K^* meson depends on the complex mass $(m_* - i\Gamma_*/2)$.

In the general case the quantities $f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+} K^-}$, $f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}$ and $f_{K^+ K^- \rightarrow \phi}$ entering into Eq. (18) differ from the corresponding quantities in Eqs. (10), (14) and (16) since the K^{*+} , K^- and K^+ mesons are off-shell. One might assume that the dependence of these quantities on the off-shell form factors is not strong and neglect this dependence. However the integral in Eq. (18) strongly diverges in this case. Therefore we should either introduce the form factors "by hands" or try to estimate the amplitude (18) with the help of additional assumptions.

It is important to note that the covariant Feynman approach does not fully agree with our physical intuition that the process $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ can be described as $\bar{p}p \rightarrow (K^* \bar{K} + \bar{K}^* K) \rightarrow K \bar{K} \pi \rightarrow \phi\pi^0$. As a rule, one Feynman diagram contains the contribution of a few diagrams of the "old fashioned" time ordered perturbation theory. In particular, the three vertices in the Feynman diagram in Fig.2 are not necessarily time ordered as we assume. For example, the Feynman diagram in Fig.3 contains the contributions of the diagrams *a* and *b* of the time ordered perturbation theory. The diagram *a* indeed describes the process $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ as $\bar{p}p \rightarrow (K^* \bar{K} + \bar{K}^* K) \rightarrow K \bar{K} \pi^0 \rightarrow \phi\pi^0$ while the diagram *b* describes the nonphysical process $\bar{p}p \rightarrow K^* \bar{K} \rightarrow K^* \bar{K} \phi \rightarrow \phi\pi^0$ since the virtual $\bar{K}$ meson

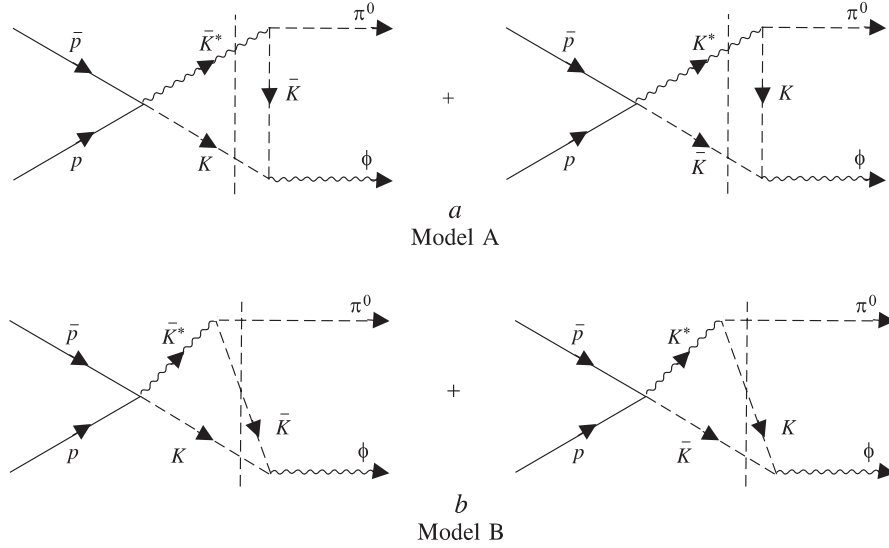


Fig. 4.

in this diagram decays into $\bar{K}$ and ϕ and then the interaction between K^* and $\bar{K}$ leads to the production of π^0 .

The difficulties with the interpretation of Feynman diagrams and with the divergence in Eq. (18) can be partly overcome if we assume that the main contribution to the integral in Eq. (18) is given by the residues in the poles of the propagators of some intermediate particles. According to our interpretation of the process $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ we choose two possibilities which we call Model A and Model B. In Model A we drop Γ_* in Eq. (18) and replace $[(k_1'^2 - m_*^2 + i0)(k_2'^2 - m_K^2 + i0)]^{-1}$ by $(-2i\pi)^2\theta(k_1'^0)\theta(k_2'^0)\delta(k_1'^2 - m_*^2)\delta(k_2'^2 - m_K^2)/2$. Analogously, in Model B we replace $[(k_2'^2 - m_K^2 + i0)(k_3'^2 - m_K^2 + i0)]^{-1}$ by $(-2i\pi)^2\theta(k_2'^0)\theta(k_3'^0)\delta(k_2'^2 - m_K^2)\delta(k_3'^2 - m_K^2)/2$. Schematically Model A can be described by Fig.4a, i.e., K^* and $\bar{K}$ in the diagram of Fig.4a are on-mass shell. Analogously, Model B can be described by Fig.4b, i.e., $\bar{K}$ and K in the diagram of Fig.4b are on-mass shell.

One might think that from the theoretical point of view Model B seems more substantiated than Model A. Indeed, as shown in Refs. [34,35], the on-shell approximation is connected with the unitarity relation for the S matrix but this relation must be formulated only in terms of stable particles. In particular, $K\bar{K}\pi^0$ is an admissible intermediate state while $K^*\bar{K}$ is not. In addition, the vertices $K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+$ and $K^+ K^- \rightarrow \phi$ entering into the amplitude $K^*\bar{K} \rightarrow \phi\pi^0$ in Model A are not necessarily time ordered and therefore this amplitude contains

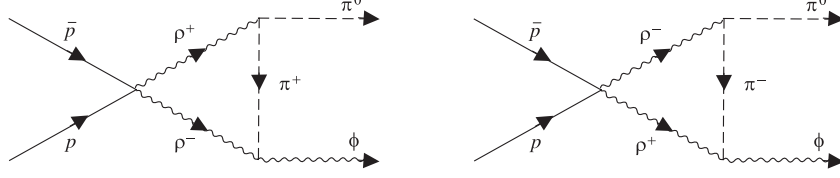


Fig. 5.

the contribution of not only the process $K^* \bar{K} \rightarrow K \bar{K} \pi^0 \rightarrow \phi \pi^0$ but also the contribution of the nonphysical process $K^* \bar{K} \rightarrow K^* \bar{K} \phi \rightarrow \phi \pi^0$. However, as shown in Refs. [20, 21], the numerical results in Model A are in qualitative agreement with the experimental data. For this reason we investigate below the consequences of both Model A and Model B.

4. THE PROBLEM OF CALCULATING THE PROCESS $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0$ WITH $\rho^+ \rho^-$ INTERMEDIATE STATES

As shown in Refs. [19, 20], the $\rho^+ \rho^-$ intermediate states may essentially contribute to the process $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0$. There exist two diagrams describing the process $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0$ via $\rho^+ \rho^-$: $\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^- \rightarrow \pi^+ \pi^0 \rho^- \rightarrow \phi \pi^0$ and $\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^- \rightarrow \rho^+ \pi^- \pi^0 \rightarrow \phi \pi^0$ (see Fig.5) and the contributions of these diagrams are equal to each other if $I = S = 1$. To find these contributions we need the expressions defining the amplitudes $\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-$, $\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ and $\rho^- \pi^+ \rightarrow \phi$.

When $I = S = 1$, a possible choice of the amplitude, which survives in the limit, when $\mathbf{p}_1$ and $\mathbf{p}_2$ are small, is

$$M_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-}^{(11)} = f_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-}^{(11)} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [e'_{1\mu} (P e'_{2*}) - e'_{2\mu} (P e'_{1*})], \quad (19)$$

where e'_i ($i = 1, 2$) are the polarization four-vectors of the ρ^+ and ρ^- mesons, respectively and $P = p_1 + p_2$. We take into account that the C parity of the $\rho^+ \rho^-$ system should be equal to -1.

There also exist two other amplitudes which satisfy all necessary conditions. One of them was used in Refs. [19, 20] and the corresponding result is small (see the discussion in Ref. [20]). The contribution of the other which is cubic in $\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2$ is expected to be small, too. Following Ref. [22] we describe here the calculations with the amplitude given by Eq. (19).

A standard calculation shows that the total cross section $\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-}^{(11)}$ has the form

$$\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-}^{(11)} = |f_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-}^{(11)}|^2 \frac{(3m^2 + 2p^2)(E_\rho^2 + m_\rho^2)k'^3}{6\pi p m_\rho^4}, \quad (20)$$

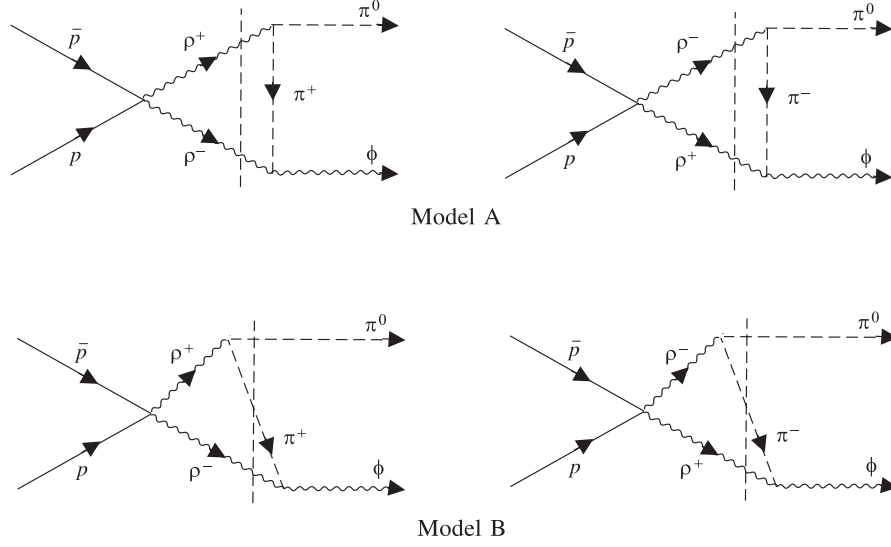


Fig. 6.

where now k' is the magnitude of the c.m. frame momentum in the $\rho^+\rho^-$ system, m_ρ is the mass of the ρ meson and $E_\rho = (m_\rho^2 + k'^2)^{1/2}$.

The amplitude $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ and the decay width of the ρ meson can be written by analogy with Eqs. (14) and (15):

$$M_{\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0} = f_{\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0} (k_1 - k'_3)_\mu e_1'^\mu, \quad \Gamma_{\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0} = \frac{|f_{\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0}|^2 k_{\pi\pi}^3}{6\pi m_\rho^2}, \quad (21)$$

where k_1 and k'_3 are the four-momenta of π^0 and π^+ , respectively and $k_{\pi\pi}$ is the magnitude of the c.m. frame momentum in the $\pi\pi$ system.

The amplitude $\pi^+\rho^- \rightarrow \phi$ has the form

$$M_{\pi^+\rho^- \rightarrow \phi} = f_{\pi^+\rho^- \rightarrow \phi} e_{\mu\nu\rho\sigma} e_2^{\mu*} e_2'^\nu k_2^\rho k_2'^\sigma, \quad (22)$$

where k_2' is the 4-momentum of ρ^- . A direct calculation shows that the decay width $\Gamma_{\phi \rightarrow \pi^+\rho^-}$ is equal to

$$\Gamma_{\phi \rightarrow \pi^+\rho^-} = \frac{|f_{\phi \rightarrow \pi^+\rho^-}|^2 k_{\pi\rho}^3}{12\pi}, \quad (23)$$

where $k_{\pi\rho}$ is the magnitude of the c.m. frame momentum in the $\pi\rho$ system. Since ϕ decays into $\pi\rho$ in 12% cases it is obvious that $\Gamma_{\phi \rightarrow \pi^+\rho^-} = 0.12\Gamma_\phi/3$.

As follows from Eqs. (19), (21) and (22), the amplitude $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ corresponding to the Feynman diagrams in Fig.5 can be written in the form

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} &= 2i[\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)]e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha*}k_2^\gamma P^\nu \cdot \\
 &\int f_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+\rho^-} f_{\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0} f_{\pi^+\rho^- \rightarrow \phi} k_2'^\delta (k_1 - k_3')^\rho \cdot \\
 &[(\frac{k_{1\mu}'k_{1\rho}'}{m_\rho^2} - g_{\mu\rho})\delta_\nu^\beta - (\frac{k_{1\nu}'k_{1\rho}'}{m_\rho^2} - g_{\nu\rho})\delta_\mu^\beta] \cdot \\
 &\frac{\delta^{(4)}(k_1' - k_1 - k_3')\delta^{(4)}(k_2 - k_2' - k_3')}{(2\pi)^4[k_1'^2 - (m_\rho - i\Gamma_\rho/2)^2][k_2'^2 - (m_\rho - i\Gamma_\rho/2)^2]} \cdot \\
 &\frac{d^4k_1' d^4k_2' d^4k_3'}{k_3'^2 - m_\pi^2 + i0}, \tag{24}
 \end{aligned}$$

where δ is the Cronecker symbol.

As in Eq. (18), the integral in Eq. (24) diverges if no form factors are introduced into the vertices $\bar{p}p \rightarrow \rho^+\rho^-$, $\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ and $\rho^-\pi^+ \rightarrow \phi$. By analogy with Sec.3 we use the on-shell approximation where the intermediate states are either $\rho^+\rho^-$ or $\rho\pi\pi$. We again call the corresponding models as Model A and Model B, respectively. These models correspond to the cuts of the Feynman diagrams as shown in Fig.6.

5. THE CONTRIBUTION OF K^*K AND $\rho^+\rho^-$ INTERMEDIATE STATES IN MODEL A

As follows from the prescription described in Sec.3, Eq. (18) in Model A reads

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} &= -8i[\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)]e_{\mu\nu\rho\sigma}e_\lambda^*k_1^\nu k_2^\rho f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} \times \\
 &\times \int f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+K^- \rightarrow \phi} k_2'^\sigma k_2'^\lambda \theta(k_1'^0) \theta(k_2'^0) \delta(k_1'^2 - m_*^2) \times \\
 &\times \frac{\delta(k_2'^2 - m_K^2) \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_1' - k_2') d^4k_1' d^4k_2'}{(2\pi)^2[(k_1' - k_1)^2 - m_K^2 + i0]}, \tag{25}
 \end{aligned}$$

where we have taken into account that $(k_{2\lambda}e^\lambda) = 0$. The quantity $f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)}$ in this expression is the same as in Eq. (10) since K^* and $\bar{K}$ are on-mass shell.

It is convenient to consider Eq. (25) in the c.m. frame of the $\bar{p}p$ system which, at the same time, is the c.m. frame of the $K^*\bar{K}$ and $\phi\pi^0$ systems. The vector P in this frame of reference has the components $P^0 = \sqrt{s}$, $\mathbf{P} = 0$. and

therefore Eq. (25) can be written in the form

$$M_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0} = \frac{-i}{4\pi^2 k} f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} [\bar{v}(p_2) \gamma^i u(p_1)] e_{ikl} k^k \times \\ \times \int d\phi' f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+K^- \rightarrow \phi} \frac{k'^l (E_{\bar{K}} e^{0*} + k'^m e^{m*})}{a - x}, \quad (26)$$

where $a = (2E_* E_\pi + m_K^2 - m_\pi^2 - m_\pi^2)/2kk'$, $E_\pi = (m_\pi^2 + k^2)^{1/2}$, $E_* = (m_*^2 + k'^2)^{1/2}$, $E_{\bar{K}} = (m_K^2 + k'^2)^{1/2}$, $k = |\mathbf{k}|$, $k' = |\mathbf{k}'|$, $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}' \equiv \mathbf{k}'_1$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/k'$, $x = \mathbf{n}\mathbf{n}'$, $d\phi'$ is the element of the solid angle corresponding to the unit vector $\mathbf{n}'$ and a sum over repeated indices $i, k, l, m = 1, 2, 3$ is assumed.

Let us consider the integrals

$$I^l = \int f(x, s) k'^l d\phi', \quad I^{lm} = \int f(x, s) k'^l k'^m d\phi', \quad (27)$$

where $f(x, s)$ is an arbitrary function of x and s . It is easy to show that

$$I^l = 2\pi \frac{k'}{k} k^l \int_{-1}^1 f(x, s) dx, \quad I^{lm} = \pi (k')^2 \int_{-1}^1 f(x, s) \times \\ \times [(1 - x^2) \delta^{lm} + (3x^2 - 1) \frac{k^l k^m}{k^2}] dx. \quad (28)$$

Then as follows from Eqs. (12), (26-28)

$$f_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0} = \frac{i(k')^2}{4\pi k \sqrt{s}} f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} \times \\ \times \int_{-1}^1 f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}(k_3'^2) f_{K^+K^- \rightarrow \phi}(k_3'^2) \frac{1 - x^2}{a - x} dx. \quad (29)$$

We explicitly note that $f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}$ and $f_{K^+K^- \rightarrow \phi}$ depend on the off-shell form factor for the K meson with the four-momentum k_3' . The importance of taking into account this form factor has been pointed out in Refs. [19, 20]. Following these references we write

$$f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}(k_3'^2) = f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} \frac{\Lambda - m_K^2}{\Lambda - k_3'^2} \times \\ \times f_{K^+K^- \rightarrow \phi}(k_3'^2) = f_{K^+K^- \rightarrow \phi} \frac{\Lambda - m_K^2}{\Lambda - k_3'^2}, \quad (30)$$

where now the quantities $f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}$ and $f_{K^+K^- \rightarrow \phi}$ are the same as in Eqs. (14) and (16). Then we get from Eq. (29) the final result

$$f_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0} = \frac{i(k')^2}{4\pi k \sqrt{s}} f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+K^- \rightarrow \phi} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{a-x} \left[\frac{\Lambda - m_K^2}{\Lambda + 2E_* E_\pi - m_*^2 - m_\pi^2 - 2kk'x} \right]^2 dx. \quad (31)$$

As follows from Eqs. (11), (13), (15), (17) and (31)

$$R \equiv \frac{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0}^{(11)}}{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow K^*+K^-}^{(11)}} = 0.87 \cdot \frac{3kk'\Gamma_*\Gamma_\phi m_*^2 m_\phi^2}{8s(k_{\pi K} k_{K\bar{K}})^3} \times \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{a-x} \left[\frac{\Lambda - m_K^2}{\Lambda + 2E_* E_\pi - m_*^2 - m_\pi^2 - 2kk'x} \right]^2 dx. \quad (32)$$

Since for the amplitudes $\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-$ and $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ we assume the structure defined by Eqs. (10) and (12), Eq. (32) can be valid only if the value of p is rather small. In Ref. [22] the dependence of R on the laboratory momentum p_{lab} in the range $(0 \div 0.4)$ GeV/c (what corresponds to the values of p in the range $(0 \div 0.2)$ GeV/c) has been calculated. Following Refs. [19,20], the values of 1.2 GeV², 2 GeV² and ∞ have been chosen for Λ (the last value means the absence of the off-shell form factors). The result of Ref. [22] is that R practically does not depend on p_{lab} in the range 0–0.4 GeV/c.

In Refs. [13,14] the branching ratio of the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ has been measured not for the annihilation in flight but for the annihilation at rest from the S state of the hydrogen-like $\bar{p}p$ atom. When $p \rightarrow 0$, only the contribution of the S wave survives in Eq. (32). Assuming that the $\bar{p}p$ system in the hydrogen-like atom is unpolarized and taking for the branching ratio $BR(\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-)^{(11)}$ its experimental value $5.85 \cdot 10^{-4}$ [36], the result for the branching ratio $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)$ is $2.9 \cdot 10^{-4}$, $0.99 \cdot 10^{-4}$ and $0.4 \cdot 10^{-4}$ for $\Lambda = \infty$, $\Lambda = 2$ GeV² and $\Lambda = 1.2$ GeV², respectively. According to Ref. [13], $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0) = (4.0 \pm 0.8) \cdot 10^{-4}$ and according to Ref. [14] $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0) = (5.8 \pm 0.4) \cdot 10^{-4}$. We conclude that if the off-shell form factor for the K meson does not strongly depend on k'_3 , then the contribution of K^*K intermediate states in Model A is in fairly well agreement with experimental data.

The calculation of the contribution of $\rho^+\rho^-$ intermediate states can be carried out by analogy with the above calculation. Using Eqs. (19), (21), (22), (27) and (28) we get

$$f_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} = \frac{\iota(k')^3}{8\pi m_\rho^2 \sqrt{s}} f_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+\rho^-}^{(11)} f_{\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0} f_{\pi^+\rho^- \rightarrow \phi} F(s), \quad (33)$$

where

$$F(s) = \int_{-1}^1 [(1-x^2)(E_\rho E_\pi - kk'x) + 2E_\rho (\frac{E_\rho kx}{k'} - E_\pi) -$$

$$\begin{aligned}
& -2xE_\phi(E_\rho x - E_\pi \frac{k'}{k}) \left[\frac{\Lambda - m_\pi^2}{\Lambda + 2E_\rho E_\pi - 2kk'x - m_\rho^2 - m_\pi^2} \right]^2 \times \\
& \times \frac{dx}{2E_\rho E_\pi - 2kk'x - m_\rho^2 - i0}.
\end{aligned} \tag{34}$$

In contrast with the K^*K case, now the kinematical conditions are such that all the three intermediate particles can be on-mass shell in contradiction with the Peierls theorem [37]. In turn, this theorem follows from the fundamental fact that the S matrix can be formulated only in terms of stable particles. However such a situation is only a formal difficulty which takes place because we drop Γ_ρ in the propagators of the ρ^+ and ρ^- mesons and treat these mesons as stable particles.

As follows from Eqs. (20), (21), (23) and (33)

$$R_1 = \frac{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0}}{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+\rho^-}^{(11)}} = 0.12 \frac{3}{4} \left(\frac{kk'}{k_{\pi\rho}k_{\pi\pi}} \right)^3 \frac{\Gamma_\rho \Gamma_\phi m_\rho^2}{s(s + 4m_\rho^2)} |F(s)|^2. \tag{35}$$

In Refs. [19,22] the result for R_1 as a function of p_{lab} has been calculated for the cases $\Lambda = 1.2 \text{ GeV}^2$, $\Lambda = 2 \text{ GeV}^2$ and $\Lambda = \infty$. The dependence of R_1 on p_{lab} also has turned out to be weak but it is not clear what is the upper bound for those p_{lab} for which the result is still valid. If $p_{lab} = 0$, then $R_1 = 1.13 \cdot 10^{-3}$, $R_1 = 3.2 \cdot 10^{-3}$ and $R_1 = 7.01 \cdot 10^{-3}$ for these three cases, respectively. The experimental value of $BR(\bar{p}p \rightarrow \rho^+\rho^-)^{(11)}$ at rest is unknown, but the theoretical model developed in Ref. [38] predicts the value of $23.6 \cdot 10^{-3}$. Then the contribution of $\rho^+\rho^-$ intermediate states to $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)$ at rest is $1.9 \cdot 10^{-4}$ if $\Lambda = \infty$. Therefore, as first noted in Ref. [19], Model A predicts a rather substantial contribution of $\rho^+\rho^-$ intermediate states to the branching ratio of the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$.

As argued by Lipkin, Geiger-Isgur and others (see, e.g., Refs. [5,7]), a possible reason of the OZI rule violation is the interference of amplitudes corresponding to different intermediate states. For example, Lipkin [5] argues that "the contribution from the K^+K^- and $K^{*+}K^{*-}$ intermediate states has the same phase and this is opposite to the phase of the contribution from the K^+K^{*-} and K^-K^{*+} states". This problem has been also discussed by Sapozhnikov [39] and Zou [40]. It has been also noted by Locher [41] that if in the diagrams in Fig.2 K^* mesons are replaced by K ones, then the corresponding contribution is equal to zero. Indeed, the $KK\pi$ coupling is equal to zero since three (0-) particles cannot couple (parity and angular momentum conservation). It is not also clear which diagrams describing $K^*\bar{K}^*$ intermediate states can compensate the diagrams in Fig.2. We will see in Sec.11 that these intermediate states are natural for the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$, but not $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$. On the other hand, it is

important to stress that in the theory of strong interactions any conclusion about the dominant role of some finite set of diagrams can be based only on intuition which often does not work. So any explanation of the OZI rule violation taking into account only a finite set of diagrams can be at best qualitative.

6. THE CONTRIBUTION OF $K\bar{K}\pi^0$ AND $\rho\pi\pi^0$ INTERMEDIATE STATES IN MODEL B

As follows from the prescription described in Sec.3, Eq. (18) in Model B reads

$$\begin{aligned} M_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0} &= 4i f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+K^- \rightarrow \phi} \times \\ &\times [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] e_{\mu\nu\rho\sigma} e_\lambda^* k_1^\nu \times \\ &\times \int \frac{k_3'^\rho k_2'^\sigma (k_2'^\lambda - k_3'^\lambda) \delta^{(4)}(k_2 - k_2' - k_3') d^3\mathbf{k}_2' d^3\mathbf{k}_3'}{16\pi^2 \omega_K(\mathbf{k}_2') \omega_K(\mathbf{k}_3') [(k_1 + k_3')^2 - (m_* - i\Gamma_*/2)^2]}, \end{aligned} \quad (36)$$

where $\omega_K(\mathbf{k}) = (m_K^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$, we take into account that the constants $f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}$ and $f_{K^+K^- \rightarrow \phi}$ are the same as in Eqs. (14) and (16), and no form factor is introduced into the vertex $\bar{p}p \rightarrow K^* \bar{K}$.

It is obvious that

$$e_{\mu\nu\rho\sigma} k_3'^\rho k_2'^\sigma = e_{\mu\nu\rho\sigma} (k_2'^\rho + k_3'^\rho) (k_2'^\sigma - k_3'^\sigma) / 2$$

and therefore Eq. (36) can be written in the form

$$\begin{aligned} M_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0} &= 2i f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+K^- \rightarrow \phi} \times \\ &\times [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] e_{\mu\nu\rho\sigma} e^{*\lambda} k_2^\rho k_1^\nu I_\lambda^\sigma, \end{aligned} \quad (37)$$

where $I^{\sigma\lambda}$ is the relativistic symmetrical tensor

$$I^{\sigma\lambda} = \int \frac{(k_2'^\sigma - k_3'^\sigma) (k_2'^\lambda - k_3'^\lambda) \delta^{(4)}(k_2 - k_2' - k_3') d^3\mathbf{k}_2' d^3\mathbf{k}_3'}{16\pi^2 \omega_K(\mathbf{k}_2') \omega_K(\mathbf{k}_3') [(k_1 + k_3')^2 - (m_* - i\Gamma_*/2)^2]}. \quad (38)$$

This tensor depends only on k_1 and k_2 and therefore the general form of $I_{\sigma\lambda}$ is

$$I_{\sigma\lambda} = c_1 g_{\sigma\lambda} + c_2 k_{1\sigma} k_{1\lambda} + c_3 k_{2\sigma} k_{2\lambda} + c_4 (k_{1\sigma} k_{2\lambda} + k_{2\sigma} k_{1\lambda}). \quad (39)$$

It is obvious that only $c_1 g_{\sigma\lambda}$ contributes to Eq. (37). The simplest way of calculating c_1 is to consider Eq. (38) in the reference frame, where the final ϕ

meson is at rest. The magnitude of the pion momentum in this reference frame is $q = (\sqrt{s}k)/m_\phi$ and, as follows from Eqs. (38) and (39):

$$\begin{aligned} & \frac{k_{K\bar{K}}}{4\pi^2 m_\phi} \int \{d\phi' k'^i k'^l / [m_\pi^2 + m_K^2 + m_\phi(m_\pi^2 + q^2)^{1/2} + \\ & + 2qk_{K\bar{K}}x - (m_* - i\Gamma_*/2)^2]\} = -c_1\delta_{il} + c_2q_iq_l, \end{aligned} \quad (40)$$

where $\mathbf{q}$ is the pion momentum, $\mathbf{k}'$ is the momentum of the $\bar{K}$ meson, $x = \mathbf{q}\mathbf{k}'/qk_{K\bar{K}}$ and we integrate over the solid angle corresponding to the unit vector $\mathbf{n} = \mathbf{k}'/k_{K\bar{K}}$. Then the quantity c_1 can be easily calculated by analogy with the calculation of the quantity c_1 in Sec.5 and, the final result for $f_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0}$ is:

$$\begin{aligned} f_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} &= -i f_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)} f_{K^{*+} \rightarrow K^+\pi^0} f_{K^+K^- \rightarrow \phi} \frac{(k_{K\bar{K}})^2}{4\pi\sqrt{s}k} \times \\ &\times [2b + (1 - b^2)\ln(\frac{b+1}{b-1})], \end{aligned} \quad (41)$$

where $b = [m_\pi^2 + m_K^2 + m_\phi(m_\pi^2 + q^2) - (m_* - i\Gamma/2)^2]/2qk_{K\bar{K}}$ and we have taken into account that:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)dx}{b-x} = 2b + (1-b^2)\ln(\frac{b+1}{b-1}). \quad (42)$$

By analogy with the derivation of Eq. (32) we now get:

$$\frac{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0}}{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)}} = 0.87 \frac{3kk_{K\bar{K}}\Gamma_*\Gamma_\phi m_*^2 m_\phi^2}{8s k_\pi^3 k'^3} |2b + (1-b^2)\ln(\frac{b+1}{b-1})|^2. \quad (43)$$

A simple numerical calculation shows that, if $s = 4m^2$, then $\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} \approx 10^{-4}$. $\sigma_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(11)}$. Therefore the contribution of $K\bar{K}\pi^0$ intermediate states in Model B is negligible.

Let us now consider the contribution of $(\rho^+\pi^- + \rho^-\pi^+)\pi^0$ intermediate states in Model B. In this model Eq. (24) reads:

$$\begin{aligned} & f_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} [v(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] e_{\mu\nu\rho\sigma} e^{\nu*} k_1^\rho k_2^\sigma = \\ &= -i f_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+\rho^-}^{(11)} f_{\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0} f_{\pi^+\rho^- \rightarrow \phi} [v(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] e_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{\alpha*} k_2^\gamma \times \\ &\times \int \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_2 - k'_2 - k'_3) d^3\mathbf{k}'_2 d^3\mathbf{k}'_3}{[2(2\pi)^3]^2 \omega_\rho(\mathbf{k}'_2) \omega_\pi(\mathbf{k}'_3) [(k_1 + k'_3)^2 - (m_\rho - i\Gamma_\rho/2)^2]} \times \\ &\times k_2'^\delta [(k_1 - k'_3)_\mu P_\beta - g_{\mu\beta}(P, k_1 - k'_3)], \end{aligned} \quad (44)$$

where $\omega_\rho(\mathbf{k}') = (m_\rho^2 + \mathbf{k}'^2)^{1/2}$, $\omega_\pi(\mathbf{k}') = m_\pi^2 + \mathbf{k}'^2)^{1/2}$.

It is obvious that

$$\begin{aligned} & \int \frac{(2\pi)^4 k_2'^\delta k_1'^\mu \delta^{(4)}(k_2 - k_2' - k_3') d^3\mathbf{k}_2' d^3\mathbf{k}_3'}{[2(2\pi)^3]^2 \omega_\rho(\mathbf{k}_2') \omega_\pi(\mathbf{k}_3') [(k_1 + k_3')^2 - (m_\rho - i\Gamma_\rho/2)^2]} = \\ & = c_1 g^{\mu\delta} + c_2 k_1^\mu k_1^\delta + c_3 k_2^\mu k_2^\delta + c_4 k_1^\mu k_2^\delta + c_5 k_2^\mu k_1^\delta, \end{aligned} \quad (45)$$

where the c_i ($i = 1, \dots, 5$) are some relativistically invariant quantities. As follows from Eq. (44), we have to calculate only c_1 , c_2 and c_5 . It is convenient to calculate these quantities in the reference frame, where the final ϕ meson is at rest, and use Eqs. (28). The final result is (compare with Eq. (35))

$$\frac{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0}}{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-}^{(11)}} = 0.12 \frac{3}{16} \frac{k k_{\pi\rho}}{k'^3 k_{\pi\pi}^3} \frac{\Gamma_\rho \Gamma_\phi m_\rho^6}{s(E_\rho^2 + m_\rho^2)} |F_1(s)|^2, \quad (46)$$

where, as in Eq. (35), k' is the magnitude of the c.m. frame momentum in the $\rho^+ \rho^-$ system and

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{2m_\pi^2 + 2\omega_\pi(k_{\pi\rho}) + 2q k_{\pi\rho} x - (m_\rho - i\Gamma_\rho/2)^2} \\ & \left\{ \frac{1}{2}(s - m_\phi^2) \left[x - \frac{k_{\pi\rho}}{2q} (1 - 3x^2) \right] - \frac{1}{2}(s + m_\phi^2) \right. \\ & \left. \left[\frac{\omega_\pi(k_{\pi\rho})x}{m_\phi} - \frac{\omega_\pi(q)k_{\pi\rho}}{2m_\phi q} (1 - 3x^2) \right] - k_{\pi\rho} q (1 - x^2) \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

A simple numerical calculation shows that if $s = 4m^2$, then Eq. (46) can be written as

$$\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0} = 3.13 \cdot 10^{-5} \sigma_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-}^{(11)}. \quad (48)$$

Therefore, if we again assume that $\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \rho^-}^{(11)} = 23.6 \cdot 10^{-3}$ [38], then the $(\rho^+ \pi^- + \rho^- \pi^+) \pi^0$ intermediate states in Model B do not play an important role.

7. THE RELATION BETWEEN THE BRANCHING RATIOS OF THE REACTIONS $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0$ AND $\bar{p}p \rightarrow K^* \bar{K}$ IN THE ANNIHILATION FROM THE P STATE OF THE HYDROGEN LIKE $\bar{p}p$ ATOM

In contrast with the annihilation $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0$ from the S state of the hydrogen like $\bar{p}p$ atom, the branching ratio of this annihilation from the P state is small and the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0$ from the P state was not observed as yet. The data on the annihilation $\bar{p}p \rightarrow K^* \bar{K}$ from the P state are also much more scarce than

for the annihilation from the S state, but experiments which are under way are expected to give a more detailed information on the $\bar{p}p$ annihilation from the P state. In view of the above discussion it is interesting to investigate what is the prediction of Model A for the ratio of the rates of the reactions $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ and $\bar{p}p \rightarrow K^*\bar{K}$ in the annihilation from the P state. More precisely, since the annihilation $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ from the P state can take place only in the channel with $I = 1$, $S = 0$, Model A makes it possible to give predictions on the quantity $Br(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)/Br(K^{*+}K^-)^{(10)}$. One might think that in Model A this quantity should be of the same order as in the case of the annihilation from the S state and hence the explanation of the OZI rule violation in the framework of the rescattering mechanism is inconsistent. We first describe the calculation in Ref. [42] which shows that there exists nevertheless a possibility that Model A explains both, the large value of the quantity $Br(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)/Br(K^{*+}K^-)$ in the annihilation from the S state and a small value of the same quantity in the annihilation from the P state. Then we discuss the criticism of this mechanism in Refs. [40, 43].

To describe the relativistically invariant amplitude for the annihilation $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ from the P state we have to construct the relativistic wave function describing the $\bar{p}p$ system not in the case when the antiproton and proton have definite momenta, but when they have the definite quantum numbers $L = 1$, $S = 0$. However since we need only the ratio of the quantities $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)$ and $Br(\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-)^{(10)}$, the following procedure can be used. We again describe the antiproton and proton by the Dirac spinors and write such relativistically invariant amplitudes $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ and $\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-$ which are of order $|\mathbf{p}|/m$, when $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$. Therefore, when $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$, the leading contribution to the corresponding cross sections is given by the P states and these cross sections are also of order $|\mathbf{p}|/m$. However the ratio $\sigma_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0}/\sigma_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(10)}$ when $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$ becomes just the ratio of the quantities $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)$ and $BR(\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-)$ in the annihilation from the P state of the hydrogen like $\bar{p}p$ atom if we assume that $\bar{p}$ and p in this state are unpolarized.

The general form of the amplitude $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ with the needed properties is

$$M_{\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0} = [\bar{v}(p_2)\gamma^5 u(p_1)][F'_1(p_1 - p_2, e^*) + \frac{F'_2}{m_\phi^2}(p_1 - p_2, k_1 - k_2)(k_1 - k_2, e^*)], \quad (49)$$

where F'_1 and F'_2 become constants when $|\mathbf{p}| \rightarrow 0$. In contrast with the annihilation from the S state the amplitude given by Eq. (49) is defined by two unknown constants since the final $\phi\pi^0$ system has the orbital angular momentum either $L = 0$ or $L = 2$.

It is convenient to consider the amplitude (49) in the c.m. frame. Then we

can write

$$M_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0} = [\bar{v}(p_2) \gamma^5 u(p_1)] [F_1(\mathbf{p}\mathbf{e}^*) + \frac{F_2}{m_\phi^2}(\mathbf{p}\mathbf{k})(\mathbf{k}\mathbf{e}^*)], \quad (50)$$

where F_1 and F_2 are the linear combinations of F'_1 and F'_2 . Analogously we can write

$$M_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+} K^-}^{(10)} = [\bar{v}(p_2) \gamma^5 u(p_1)] [f_1(\mathbf{p}\mathbf{e}^*) + \frac{f_2}{m_*^2}(\mathbf{p}\mathbf{k}')(\mathbf{k}'\mathbf{e}'^*)], \quad (51)$$

where f_1 and f_2 are another constants. As easily follows from Eqs. (50) and (51)

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{Br(\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0)_{L=1}}{Br(\bar{p}p \rightarrow K^{*+} K^-)_{L=1}^{(10)}} = \\ &= \{k[|F_1|^2(1 + \frac{k^2}{3m_\phi^2}) + \frac{k^2}{3m_\phi^2}(1 + \frac{k^2}{m_\phi^2}) \times \\ &\times (F_1 F_2^* + F_1^* F_2 + \frac{k^2}{m_\phi^2}|F_2|^2)]\} / \{k'[|f_1|^2(1 + \frac{k'^2}{3m_*^2}) + \\ &+ \frac{k'^2}{3m_*^2}(1 + \frac{k'^2}{m_*^2})(f_1 f_2^* + f_1^* f_2 + \frac{k'^2}{m_*^2}|f_2|^2)]\}. \end{aligned} \quad (52)$$

By analogy with the derivation in Sec.5 we obtain that in Model A

$$\begin{aligned} M_{\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0} &= \frac{-ik'\mathbf{p}}{2\pi^2\sqrt{s}} [\bar{v}(p_2) \gamma^5 u(p_1)] f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+ K^- \rightarrow \phi} \\ &\int \frac{d\omega'(k_{2\lambda} e^{\lambda*})}{(k'_1 - k_1)^2 - m_K^2} [f_1(\frac{\mathbf{k}'(k_1 k'_1)}{m_*^2} - \mathbf{k}) + \\ &+ \frac{f_2}{m_*^2} \mathbf{k}'(\frac{(k')^2(k_1 k'_1)}{m_*^2} - \mathbf{k}\mathbf{k}')]. \end{aligned} \quad (53)$$

Since the relation between the reactions $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0$ and $\bar{p}p \rightarrow K^{*+} K^-$ in the annihilation from the S state can be qualitatively explained assuming that the off-shell form factors in the vertices $K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+$ and $K^+ K^- \rightarrow \phi$ do not considerably diminish the amplitude $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^0$, we do not take into account the contribution of these form factors.

Using Eq. (28) we can derive the relation between the quantities F_i and f_i ($i = 1, 2$), and the final result is

$$F_i = \frac{ik'}{\pi\sqrt{s}} f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+ K^- \rightarrow \phi} \sum_{l=1}^2 A_{il} f_l, \quad (54)$$

where

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{k'}{4km_*^2} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)(E_*E_\pi - kk'x)dx}{a-x}, \\
A_{12} &= \frac{k'^2}{4km_*^2} \int_{-1}^1 \left[\frac{k'(E_*E_\pi - kk'x)}{m_*^2} - kx \right] \frac{(1-x^2)dx}{a-x}, \\
A_{21} &= \frac{m_\phi^2}{2kk'} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{(E_*E_\pi - kk'x)}{m_*^2} \left[-\frac{E_K k'x}{E_\phi k} + \frac{k'^2(3x^2-1)}{2k^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{E_K}{E_\phi} - \frac{k'x}{k} \right\} \frac{dx}{a-x}, \\
A_{22} &= \frac{m_\phi^2 k'}{2m_*^2 k^2} \int_{-1}^1 \left[\frac{k'(E_*E_\pi - kk'x)}{m_*^2} - kx \right] \times \\
&\quad \times \left[-\frac{E_K x}{E_\phi} + \frac{k'(3x^2-1)}{2k} \right] \frac{dx}{a-x}. \tag{55}
\end{aligned}$$

As follows from simple numerical calculations and Eqs. (15), (17), (52), (54) and (55)

$$R_2 = \frac{0.77 + 0.36yz + 0.044y^2}{1.16 + 0.46yz + 0.11y^2}, \tag{56}$$

where $y = |f_2/f_1|$ and z is the cosine of the relative phase of the quantities f_1 and f_2 . If $f_2 = 0$, then $R_2 = 0.66$ and if $f_1 = 0$, then $R_2 = 0.40$. However in the general case the quantity R_2 can take the values from $R_{min} = 0.02$ when $y = 4.2$, $z = -1$ to $R_{max} = 0.67$ when $y = 0.7$, $z = 1$. In addition, if we take into account a possible contribution of the off-shell form factors, we can conclude that the quantities $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)_{L=1}$ and $BR(\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-)_{L=1}^{(10)}$ are probably of the same order of magnitude. In this case the problem remains whether the results of the rescattering model for the P wave annihilation are compatible with the results for the S wave annihilation. At the same time one cannot fully exclude the possibility that the first quantity is much smaller than the second one.

As noted by Zou [40,43], the $L = 2$ decay is unlikely to be of similar strength to $L = 0$ decay due to strong centrifugal barrier effect for $L = 2$ $K^*\bar{K}$ decay. The experiment which can shed light on the situation is the measurement of the angular distribution in the K^*K system produced in the $\bar{p}p$ annihilation from the P state. If, for example, one of the states with $L = 0$ or $L = 2$ is dominant, then the destructive interference described above is not possible.

Anyway, the value of R of order 10^{-2} which can explain the difference between the situations in the S and P annihilations in the model considered above seems unlikely. However, as argued by Zou [40,43], the destructive interference is only a minor reason while there is another more solid and important reason, i.e., the small total decay width of $I = 1$ 1P_1 protonium.

As noted in Refs. [40,43], the fact important for understanding the problem under consideration is that for $\bar{p}p$ annihilation from P states $K^*\bar{K}$ can come from 1P_1 , 3P_1 and 3P_2 states with both isospin 0 and 1 while $\phi\pi$ can only come from 1P_1 state with isospin 1. According to various optical potential models for protonium annihilation [44,45], the total decay width for the $I = 1$ 1P_1 state is only about 1/8 of the summation of the total decay width for all possible P state to $K^*\bar{K}$. The $K^*\bar{K}$ decay width may be not directly proportional to the total decay width for different P states due to some dynamic selection rule. It is quite possible that $K^*\bar{K}$ from the $I = 1$ 1P_1 state is only a very small part of $K^*\bar{K}$ from all the P states. Only this small part can contribute to the rescattering mechanism to $\phi\pi$ final state. This is contrary to the case for $\bar{p}p$ annihilation from S states where the allowed partial wave ($I = 1$ 3S_1) for $\phi\pi$ is found to be dominant for $K^*\bar{K}$.

Are there another reasons (in addition to optical models) to think that the $K^*\bar{K}$ annihilation from the $I = 1$ 1P_1 state of protonium is indeed suppressed? As argued by Zou [40,43] these reasons are the following. First, the ASTERIX Collaboration found that the branching ratios for $\eta\rho$ and $\eta'\rho$ from P states are much smaller than from S states [46]. The $\eta\rho$ and $\eta'\rho$ from P states can only come from the $I = 1$ 1P_1 state. Second, a recent analysis by the OBELIX Collaboration [47] show that $\omega\pi$ is also not seen from $\bar{p}p$ annihilation from the $I = 1$ 1P_1 state. So the ratio of $\phi\pi/\omega\pi$ for P state annihilation may be in fact not suppressed.

As noted in Refs. [40,43], it is desirable to measure among all $K^*\bar{K}$ productions from P states how much percentage comes from the $I = 1$ 1P_1 state. Only after all conventional effects were found to be not enough to explain the data, might we claim any conclusive evidence for new physics, such as the strange quarks in the nucleon [25].

On the other hand, as noted in Ref. [48], although the observations in Ref. [43] are important but the problem is whether they are enough to explain the experimental situation according to which even the upper bound for the ratio of the $\phi\pi$ and $K^*\bar{K}$ channels in the annihilation from the P states is probably of order 10^{-2} . Indeed, according to Ref. [46] the branching ratios of the $\phi\pi$ and $K^{*+}K^-$ channels in the 3S_1 state are $(4.0 \pm 0.8) \cdot 10^{-4}$ and $(5.8 \pm 0.5) \cdot 10^{-4}$, respectively. According to the data in Ref. [47] the branching ratio of the $\phi\pi$ channel in the 3P_1 state is $\leq 3 \cdot 10^{-5}$, according to [49], this quantity is $\leq 1 \cdot 10^{-5}$ and the most recent analysis [50] gives the value $\leq 4.7 \cdot 10^{-5}$ (with 95% confidence level). At the same time the data of Refs. [49,50] shows that when going from liquid to gas targets the yield of $K^*\bar{K}\pi$ increases.

The data of Ref. [46] are that the branching ratios of the $\eta\rho$ channel are $(0.94 \pm 0.53) \cdot 10^{-3}$ in the P state and $(3.29 \pm 0.90) \cdot 10^{-3}$ in the S state. The ratio of these quantities is of about 0.3. The same data for the $\eta'\rho$ channel are $(\sim 0.3) \cdot 10^{-3}$ and $(1.81 \pm 0.44) \cdot 10^{-3}$, respectively, i.e., the ratio is of about

1/6. These values are consistent with the quantity 1/8 in optical models but such an extent of suppression of the annihilation of the 3P_1 protonium is one order of magnitude less than needed to explain the problem under consideration. In addition, the statistics in the data of the OBELIX Collaboration on the angular distribution in the $\omega\pi$ system given in [47] does not make it possible to clearly distinguish the annihilation from the S and P waves.

We conclude that at present stage of our understanding of the rescattering mechanism it is not possible to explain the fact that $\phi\pi$ is not seen in the annihilation of the 3P_1 protonium.

8. THE PROBLEM OF THE OZI RULE VIOLATION IN THE REACTION

$$\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0$$

In view of the above discussion it is important to know whether there exist reactions with the property that if the OZI rule in them is violated, then the rescattering model or other conventional mechanisms definitely cannot explain this violation. Following Ref. [51] we show in this section that $\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0$ is just the reaction with such a property.

The situation with the $f_2 - f_2'$ mixing is analogous to that with the $\omega - \phi$ mixing, but the mixing angle is not so close to the ideal one: according to Ref. [17], $\cos\theta = 0.78$. Therefore, as follows from the $f_2 - f_2'$ analog of Eq. (1), the ratio $BR(\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0)/BR(\bar{p}p \rightarrow f_2\pi^0)$ should be approximately equal to 0.01. The experimental data on the branching ratio for the annihilation $\bar{p}p \rightarrow f_2\pi^0$ at rest are $(3.4 \pm 0.5) \cdot 10^{-2}$, $(2.1 \pm 0.1) \cdot 10^{-1}$ and $(2.0 \pm 0.6) \cdot 10^{-2}$ in the cases of the 1S_0 , 3P_1 and 3P_2 states, respectively [52]. Therefore the quantity $BR(\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0)$ is expected to be of order 10^{-4} in the cases of the 1S_0 and 3P_2 states and of order 10^{-3} in the case of the 3P_1 state. This makes it necessary to estimate the role of the rescattering contribution in the reaction $\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0$.

The major decay mode of the f_2' meson is $K\bar{K}$ as well as for the ϕ meson. Therefore, in view of the above discussion it is reasonable to estimate the role of $(K^*\bar{K} + \bar{K}^*K)$ intermediate states in Model A. We shall consider only the S -wave annihilation, and we shall see that even the upper bound for the rescattering contribution is much less than the value expected from the OZI rule.

The only relativistically invariant amplitude of the process $\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-$ which survives when $p \rightarrow 0$ and $K^{*+}K^-$ system is in the state with $I = 1$, $S = 0$ is

$$M_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(10)} = f_{K^{*+}K^-}^{(10)} [\bar{v}(p_2)\gamma^5 u(p_1)](e'^*P), \quad (57)$$

where $f_{K^{*+}K^-}^{(10)}$ is some constant. Then the corresponding cross section is equal to

$$\sigma_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-}^{(10)} = \frac{|f_{K^{*+}K^-}^{(10)}|^2 s k'^3}{32\pi m_*^2 p}. \quad (58)$$

We also need the amplitude of the reaction $K^+K^- \rightarrow f'_2$. It has the form

$$M_{K^+K^- \rightarrow f'_2} = f_{K^+K^- \rightarrow f'_2} (k'_3 - k'_2)_\mu (k'_3 - k'_2)_\nu e^{*\mu\nu}, \quad (59)$$

where $e^{\mu\nu}$ is the polarization tensor of the final f'_2 meson. The corresponding decay width is equal to

$$\Gamma_{f'_2 \rightarrow K^+K^-} = \frac{4|f_{K^+K^- \rightarrow f'_2}|^2 k_{K\bar{K}}^5}{15\pi m_{f'_2}^2}, \quad (60)$$

where $k_{K\bar{K}}$ is now the magnitude of the momentum of the K^+ and K^- mesons in the reference frame, where the f'_2 meson is at rest. Since the decay of the f'_2 meson into $K\bar{K}$ occurs in 72% cases, then the total width of the f'_2 meson is equal to $\Gamma_{f'_2} = 2\Gamma_{K^+K^- \rightarrow f'_2}/0.72$.

As follows from Eqs. (14), (57) and (59), if the form factors are dropped, then the amplitude of the reaction $\bar{p}p \rightarrow f'_2\pi^0$ in Model A is equal to

$$M_{\bar{p}p \rightarrow f'_2\pi^0} = 16f_{K^*+K^-}^{(10)} f_{K^*+ \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+K^- \rightarrow f'_2} [\bar{v}(p_2)\gamma^5 u(p_1)] e^{*\mu\nu} I_{\mu\nu}, \quad (61)$$

where

$$I_{\mu\nu} = \int \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) d^3\mathbf{k}'_1 d^3\mathbf{k}'_2}{(2(2\pi)^3)^2 \omega_*(\mathbf{k}'_1) \omega_K(\mathbf{k}'_2) [(k'_1 - k_1)^2 - m_K^2 + i0]} \times \\ \times \left[\frac{(Pk'_1)(k_1 k'_1)}{m_*^2} - (Pk_1) \right] k'_{2\mu} k'_{2\nu}, \quad (62)$$

$\omega_*(\mathbf{k}') = (m_*^2 + \mathbf{k}'^2)^{1/2}$ and k_2 is the four-momentum of the final f'_2 meson.

The quantity $I_{\mu\nu}$ is the relativistic symmetrical tensor which depends only on k_1 and k_2 , and since $P = k_1 + k_2$ we can write

$$I_{\mu\nu} = c_1 P_\mu P_\nu + c_2 g_{\mu\nu} + c_3 (P_\mu k_{2\nu} + P_\nu k_{2\mu}) + c_4 k_{2\mu} k_{2\nu}, \quad (63)$$

where c_i ($i = 1, \dots, 4$) are some quantities which may depend only on s . Since $e^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = e^{\mu\nu} k_{2\mu} = e^{\mu\nu} k_{2\nu} = 0$, only the term with c_1 contributes to Eq. (61). Therefore it is sufficient to find only c_1 . For this purpose we note that the tensor

$$X_{\mu\nu} = \frac{(Pk_2)^2 k_{2\mu} k_{2\nu}}{m_{f'_2}^4} - \frac{(Pk_2)}{m_{f'_2}^2} (k_{2\mu} P_\nu + k_{2\nu} P_\mu) + P_\mu P_\nu - \\ - \frac{1}{3} \left(\frac{k_{2\mu} k_{2\nu}}{m_{f'_2}^2} - g_{\mu\nu} \right) \left[\frac{(Pk_2)^2}{m_{f'_2}^2} - P^2 \right] \quad (64)$$

has the property

$$X^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = X^{\mu\nu} k_{2\mu} = X^{\mu\nu} k_{2\nu} = 0. \quad (65)$$

Therefore, as follows from Eqs. (63) and (65),

$$c_1 = \frac{I_{\mu\nu} X^{\mu\nu}}{P_\mu P_\nu X^{\mu\nu}}, \quad (66)$$

and, as follows from Eq. (61),

$$\begin{aligned} M_{\bar{p}p \rightarrow f'_2 \pi^0} &= 4f_{K^{*+}K^-}^{(10)} f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+} f_{K^+ K^- \rightarrow f'_2} \times \\ &\times [\bar{v}(p_2) \gamma^5 u(p_1)] c_1 e^{\mu\nu*} P_\mu P_\nu. \end{aligned} \quad (67)$$

The explicit expression for c_1 can be easily obtained in the c.m. frame of the $\pi^0 f'_2$ system (by analogy with Sec.5). In this frame of reference

$$\frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2)}{[2(2\pi)^3]^2 \omega_*(\mathbf{k}'_1) \omega_K(\mathbf{k}'_2)} = \frac{k' do'}{16\pi^2 \sqrt{s}}, \quad (68)$$

where do' has the same sense as in Sec.5.

Taking into account Eqs. (15), (62), (64), and (65—67), the final result can be written in the form

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow f'_2 \pi^0}}{\sigma_{\bar{p}p \rightarrow K^{*+} K^-}^{(10)}} &= 0.72 \frac{45}{2} \frac{k k' \Gamma_{f'_2} \Gamma_*$$

A simple numerical calculation gives for $s = 4m^2$: $BR(\bar{p}p \rightarrow f'_2 \pi^0) = 2.66 \cdot 10^{-2} BR(\bar{p}p \rightarrow K^{*+} K^-)^{(10)}$. According to Ref. [36], $BR(\bar{p}p \rightarrow K^{*+} K^-) = (2.1 \pm 0.4) \cdot 10^{-4}$. Therefore even the upper bound of the quantity $BR(\bar{p}p \rightarrow f'_2 \pi^0)$ is of order 10^{-6} .

It is also possible to calculate the contribution of the $\rho\pi$ channel to the reaction $\bar{p}p \rightarrow f'_2 \pi^0$. The corresponding amplitude has the same spin structure as the amplitude describing the $(K^* \bar{K} + \bar{K}^* K)$ contribution. A simple numerical calculation gives $BR(\bar{p}p \rightarrow f'_2 \pi^0) = (4.08 \cdot 10^{-4}) \cdot BR(\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \pi^-)^{(10)}$. According to Ref. [52], $BR(\bar{p}p \rightarrow \rho^+ \pi^-)^{(10)} = (0.65 \pm 0.3) \cdot 10^{-2}$ and therefore the $\rho\pi$ contribution is also small.

We see that the upper bound for the rescattering contribution to the reaction $\bar{p}p \rightarrow f'_2 \pi^0$ from the S state is of order 10^{-6} and by analogy with the calculation in the preceding section we can expect that the upper bound for the rescattering contribution to the reaction $\bar{p}p \rightarrow f'_2 \pi^0$ from the P states is also of order 10^{-6} . Therefore the role of rescattering in this reaction is negligible, and any violation

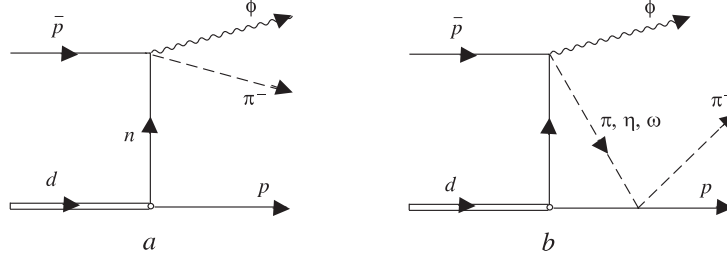


Fig. 7. a) Pole diagram for the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ and b) diagram describing the process $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ proceeding through the rescattering of π , η and ω mesons produced in the intermediate state

of the OZI rule in the reaction $\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0$ will be an evidence of some unusual phenomena.

According to the preliminary data of the OBELIX Collaboration reported in Ref. [39], the ratio of the branching ratios for the $f_2'\pi^0$ and $f_2\pi^0$ annihilations from the P state is in the range $(4 - 10) \cdot 10^{-2}$ and the most recent result for this ratio is $(13 \pm 2) \cdot 10^{-2}$ [50]. This is by one order of magnitude bigger than predicted by the OZI rule.

9. OZI RULE VIOLATION IN THE $\bar{p}d$ ANNIHILATION

As noted in Sec.1, the data on the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ are the source of the information about the process (4), but this reaction is of interest by its own. The matter is that if the reactions in which the OZI rule is strongly violated involve exotic states (such as hybrids and glueballs), then as argued by several authors (see, e.g., the review paper [53]), the masses of these states probably lie in the region 1.4–1.7 GeV/c, that is below the threshold of antiproton annihilation on a free nucleon. The above reaction makes it possible to study antiproton annihilation on a bound nucleon at $\sqrt{s} < 2m$.

If the process $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ is described by the pole diagram given in Fig.7a, then it is easy to show that for slow antiprotons the quantity $\sqrt{s}$ for the reaction $\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-$ is related to the energy E' of the spectator proton by the relation $s = 10m^2 - 6mE'$. In a recent experiment of the OBELIX group [16] the branching ratio of the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ was measured in the region of proton momenta 0.4–0.8 GeV/c. These values correspond to $\sqrt{s}$ in the range $1.37 \div 1.76$ GeV, i.e., in the range of prime interest for our study. We denote the branching ratio of the above reaction by B_2^ϕ , the branching ratio of the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ at proton momenta in the region $0 \div 0.2$ GeV/c by B_1^ϕ and the corresponding branching ratios for the reaction $\bar{p}d \rightarrow \omega\pi^-p$ by B_1^ω and B_2^ω .

Then, as follows from the data reported in Ref. [16],

$$\begin{aligned} B_1^\phi &= (6.62 \pm 0.49) \cdot 10^{-4}, & B_2^\phi &= (0.93 \pm 0.22) \cdot 10^{-4}, \\ B_1^\omega &= (4.97 \pm 0.89) \cdot 10^{-3}, & B_2^\omega &= (8.38 \pm 1.09) \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (70)$$

Hence we have

$$B_1^\phi/B_1^\omega = 0.13, \quad B_2^\phi/B_2^\omega = 0.11. \quad (71)$$

At the same time, as noted in Sec.1, the data on the $\phi\omega$ mixing angle [17] and the OZI rule give values of order 10^{-3} for these ratios. Thus, according to the data reported in Ref. [16], the violation of the OZI rule in the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^- p$ at proton momenta in the region $0.4 \div 0.8$ GeV/c is as strong as for the reactions (2—4).

Following Ref. [54] we investigate in this section whether the above effect is indeed a consequence of the OZI rule violation in the process $\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-$ or such a violation is imitated by some nuclear effects in the deuteron.

The amplitude of the reaction $\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-$ can be written as

$$A_{\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-} = f_{\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-} (\bar{u}\gamma^\mu v) e_{\mu\nu\rho\sigma} e^{\nu*} p_1^\rho p_2^\sigma, \quad (72)$$

where $f_{\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-}$ is some function of invariant variables, u is a Dirac spinor describing the initial neutron, v is a Dirac spinor corresponding to negative energy and describing the initial antiproton, e^ν is the polarization vector of the ϕ meson, p_1 is the four-momentum of the π^- meson and p_2 is the four-momentum of the ϕ meson.

At small momenta of the incident antiproton this is the only form of the amplitude that is consistent with the conditions that annihilation proceeds from the state of the $\bar{p}n$ system with the spin $S = 1$, and that the final $\phi\pi^-$ system be produced in the state with orbital angular momentum $l = 1$. It can easily be shown that these conditions follow from the conservation laws for ordinary parity and G parity.

Assuming that $f_{\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-}$ is constant and expressing the $d \rightarrow pn$ vertex in terms of the nonrelativistic deuteron wave function and Dirac spinors describing the antiproton and neutron in terms of ordinary spinors in the nonrelativistic approximation, we can easily evaluate the contribution of the pole diagram in Fig.7a to the branching ratio of the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^- p$. The result is written as

$$B_1^\phi = \frac{4m^2 r}{\pi^2 p_0} Br(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0) \int_0^{0.2} (\varphi_0^2(p') + \varphi_2^2(p')) \frac{pp'^2 dp'}{2E'\sqrt{s}}, \quad (73)$$

where p_1 is the momentum of the $\phi\pi^-$ system in its c.m. frame, p_0 is the same quantity at $\sqrt{s} = 2m$, p' is the final-proton momentum (so that $E' = \sqrt{m^2 + p'^2}$), $\varphi_0(p')$ and $\varphi_2(p')$ are the wave functions of the S and D deuteron states in momentum representation, and r is the ratio of the total cross sections $\sigma_{\bar{p}p}$ and

$\sigma_{\bar{p}d}$ near the threshold. We take into account the fact that owing to isotopic invariance, the amplitude of the reaction $\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-$ is greater than the amplitude of the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ by a factor of $\sqrt{2}$. The value of B_2^ϕ is determined by the same formula, but the integral with respect to p' is taken from 0.4 to 0.8 GeV/c; B_1^ω and B_2^ω are given by similar expressions.

According to the analysis performed in [29] $r = 0.552$. Then using the data from Ref. [14], choosing the Reid soft core model [55] for $\varphi_0(p')$ and $\varphi_2(p')$, and performing numerical integration, one obtains $B_1^\phi = 8.7 \cdot 10^{-4}$ and $B_1^\omega = 6.4 \cdot 10^{-3}$, which values are in agreement with the data from Ref. [16], while the values $B_2^\phi = 0.68 \cdot 10^{-5}$ and $B_2^\omega = 1.3 \cdot 10^{-4}$ obtained in a similar way are significantly smaller than the corresponding results presented in (70). The smallness of B_2^ϕ and B_2^ω seems natural because the deuteron wave function is small at $p' \in [0.4, 0.8]$ GeV/c. By analogy with the Glauber theory and the results obtained in [56], we can expect that the diagrams in Fig.7b with π, η and ω mesons in the intermediate state make an important contribution in this region.

In calculating the contribution of the diagram in Fig.7b, we will ignore spin effects and the dependence of elementary amplitudes on the Fermi motion of nucleons inside the deuteron. Calculating the amplitude M corresponding to the diagram in Fig.7b with the aid of the rules of the nonrelativistic diagram technique, we obtain

$$M = -\frac{A_1 A_2}{(2\pi)^3 \sqrt{m}} \int \frac{\varphi_0(\mathbf{q}) d^3 \mathbf{q}}{k_X^2 - \mu^2 + i\mu\Gamma - 2\mathbf{k}_X \mathbf{q}}, \quad (74)$$

where k_X is the four-momentum of the intermediate meson X , μ is its mass, Γ is its width, A_1 is the amplitude of the annihilation process $\bar{p}N \rightarrow \phi X$ (N is either the proton or the neutron, and A_2 is the amplitude of the process $XN \rightarrow \pi^- p$).

Let K be the total laboratory energy of the ϕ meson and $k = \sqrt{K^2 - m_\phi^2}$ be its momentum. We introduce the function

$$F(K, \mu, \Gamma_\mu) = -\frac{i}{8\pi k} \int_{q_1}^{\infty} \varphi_0(q) q dq + \int_0^{\infty} \frac{\varphi_0(q) q}{16\pi^2 k} \ln \left| \frac{(5m^2 - 4mK - \mu^2 + 2kq)^2 + \mu^2 \Gamma_\mu^2}{(5m^2 - 4mK - \mu^2 - 2kq)^2 + \mu^2 \Gamma_\mu^2} \right| dq, \quad (75)$$

where $q_1 = |5m^2 - 4mK - \mu^2|/2k$. We denote by p_1 the c.m. frame momentum in the ϕX system. The square of the invariant energy s for this system depends on E' , as above; therefore p_1 also is a function of E' . We denote by $E_\phi = \sqrt{m_\phi^2 + p_1^2}$ the ϕ meson energy in the c.m. frame of the ϕX system. It is clear that E_ϕ is also a function of E' . The process of the X meson collision with the nucleon is characterized by the invariant quantities $s_1 = s_1(K) = 9m^2 - 6mK + m_\phi^2$ and $t_1 = t_1(E') = 2m(m - E')$.

Taking into account that the widths of the π, η and ω mesons are small, it is possible to calculate the contribution of amplitude (74) to the branching ratio of the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ and the results are the following. For the case when the π^0 and π^- mesons are produced in the intermediate state we must take into account the interference of the corresponding diagrams. This is equivalent to extracting from the πN scattering amplitude only the part corresponding to the isospin $I = 1/2$. Indeed, since the deuteron and the ϕ mesons are isoscalar particles, the πN system in the intermediate state can only have isospin $1/2$. The contribution of the corresponding diagrams to the branching ratio of the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ is given by

$$\begin{aligned} Br(\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p) &= \frac{6r}{\pi p_0} Br(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0) \times \\ &\times \int \int F(K, m_\pi, \Gamma_\pi) [s_1^2 - 2s_1(m^2 + m_\pi^2) + (m^2 - m_\pi^2)^2] \times \\ &\times \left(\frac{d\sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p}(s_1, t_1)}{dt_1} + \frac{d\sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n}(s_1, t_1)}{dt_1} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \frac{d\sigma_{\pi^+p \rightarrow \pi^+p}(s_1, t_1)}{dt_1} \right) dK dE'. \end{aligned} \quad (76)$$

The contribution of the diagram with the η meson in the intermediate state has the form

$$\begin{aligned} Br(\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p) &= \frac{2r}{\pi p_0} Br(\bar{p}p \rightarrow \phi\eta) \times \\ &\times \int \int F(K, m_\eta, \Gamma_\eta) [s_1^2 - 2s_1(m^2 + m_\eta^2) + (m^2 - m_\eta^2)^2] \times \\ &\times \frac{d\sigma_{\pi^-p \rightarrow \eta n}(s_1, t_1)}{dt_1} dK dE'. \end{aligned} \quad (77)$$

The contribution of the diagram with the ω meson in the intermediate state is obviously given by Eq. (77), where η is replaced by ω .

In Eqs. (76) and (77) the integration with respect to K at given E' is made over the segment $K \in [K_1, K_2]$, where

$$K_1 = \frac{E_\phi(3m - E') - pp'}{\sqrt{s}}, \quad K_2 = \frac{E_\phi(3m - E') + pp'}{\sqrt{s}}. \quad (78)$$

Moreover, the condition

$$K \leq \frac{1}{6m} [9m^2 + m_\phi^2 - (m + m_X)^2] = K_0$$

is imposed because at $s_1 \leq (m + m_X)^2$ the cross section of the process $XN \rightarrow \pi^-p$ must be set equal to zero.

As there are no parametrizations of the differential cross sections for the processes $\pi N \rightarrow \pi N$, $\pi^- p \rightarrow \eta n$ and $\pi^- p \rightarrow \omega n$ as functions of two variables s_1 and t_1 in the region under consideration, it is reasonable to neglect the dependence of $d\sigma(s_1, t_1)/dt_1$ on t_1 replacing this differential cross section by the expression

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(s_1 t_1)}{dt_1} &= \frac{\sigma(s_1)}{s_1} \left\{ \left[1 - 2 \frac{(\mu^2 + m^2)}{s_1} + \frac{(m^2 - \mu^2)^2}{s_1^2} \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[1 - 2 \frac{(m_\pi^2 + m^2)}{s_1} + \frac{(m^2 - m_\pi^2)^2}{s_1^2} \right] \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (79)$$

Then calculations show that the contributions of rescattering to B_1^ϕ and B_1^ω are much smaller than the contribution of the pole diagram (see above). The contributions to B_2^ϕ of the diagrams with π, η , and ω mesons in the intermediate state are $4.37 \cdot 10^{-5}$, $1.18 \cdot 10^{-5}$, and $0.21 \cdot 10^{-5}$, respectively; the corresponding contributions to B_2^ω are equal to $1.32 \cdot 10^{-4}$, $0.29 \cdot 10^{-4}$, and $\leq 1 \cdot 10^{-6}$. The contribution of the ω meson is small because only a small part of the spectrum contributes to the integral analogous to (77), in view of the condition $K \leq K_0$. If one assumes that the diagrams with π, η , and ω mesons do not interfere, the final results (including the contribution of the pole diagram) are given by

$$B_2^\phi = 7.4 \cdot 10^{-5}, \quad B_2^\omega = 2.9 \cdot 10^{-4}, \quad (80)$$

which values are in qualitative agreement with the experimental data presented in Eq. (70).

For the reaction $\bar{p}d \rightarrow \omega \pi^- p$, both total branching ratios B_1^ω and B_2^ω and the proton spectrum in the momentum range $0.4 \div 0.8$ GeV/c were measured in Ref. [16]. Equations (76), (77) and (79) enable us to compare the contribution of the diagrams in Figs. 7a and 7b to the proton spectrum with the experimental data of Ref. [16]. Figure 8 taken from Ref. [54] shows the experimental data from Ref. [16] and the results of the calculations in Ref. [54] for the individual channels and for the total contribution, found under the assumption that the pole diagram and the diagrams with the π and η mesons do not interfere. Therefore the calculations in Ref. [54] are in qualitative agreement with the data from Ref. [16]. As noted in Ref. [54], the results obtained using the Reid soft core model do not differ significantly from the results of calculations made with the deuteron wave function in the Paris model [57]. In this reference the proton spectrum in the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi \pi^- p$ has been calculated too but here the experimental data are not yet available.

The qualitative agreement of the above results with the experimental data from Ref. [16] leads to the assumption that the large violation of the OZI rule observed in Ref. [16] is possibly associated not with exotic nuclear mechanisms in the deuteron but with the OZI rule violation in the reaction $\bar{p}n \rightarrow \phi \pi^-$

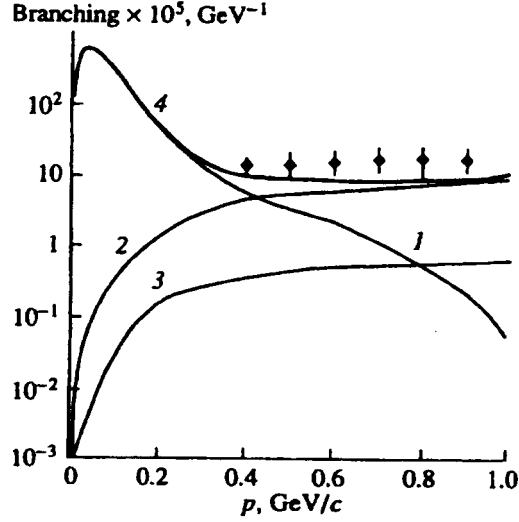


Fig. 8. Calculated relative differential (with respect to the final-proton momentum) branching ratio of the process $\bar{p}d \rightarrow \omega\pi^-p$. Contributions of the pole diagram (curve 1) and of the diagrams with π (curve 2) and η (curve 3) mesons in the intermediate state and their total contribution (curve 4) are shown separately (the contribution of the diagram with the ω meson in the intermediate state is negligible)

(confirmed in the same experiment in the cases when the proton is a spectator) and with the rescattering of an intermediate meson; the latter effect is described by the diagrams shown in Fig.7b. In order to calculate the contribution of these diagrams more reliably, it is necessary to take into account spin effects and the D-wave admixture in the deuteron wave function. However the main obstacle is that the momentum and spin dependence of the amplitude of the process $XN \rightarrow \pi^-p$ are unknown. Locher and Zou [58], who investigated the reaction $\bar{p}d \rightarrow 3\pi N$, calculated diagrams similar to those shown in Fig.7b under the assumption that the amplitude of the process $XN \rightarrow \pi^-p$ can be approximated by several Breit-Wigner amplitudes corresponding to different Δ isobars. Such an approximation is not applicable to our case because (see above) the XN system can only be in a state with isospin $I = 1/2$.

10. J/Ψ DECAYS AS A TEST OF THE OZI RULE VIOLATION IN NUCLEON-ANTINUCLEON ANNIHILATION

In this section we consider the problem whether the investigation of the J/Ψ decays into K^*K and $\phi\pi^0$ can shed light on the OZI rule violation in the reactions

(3) and (4). This problem has been raised in the recent paper [59].

As noted in Secs.3 and 5, one of the main uncertainties in the rescattering mechanism is that the parameter Λ characterizing the vertex $K^* \rightarrow K\pi$ is not known and as noted in Sec.5, formally the branching ratio of the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ can be explained assuming that the main contribution is given by the region of integration, where K^* is on-shell and $\Lambda = \infty$.

The rescattering contribution to the process $J/\Psi \rightarrow \phi\pi^0$ is described by the same four Feynman diagrams as in Fig.2, but the $\bar{p}p$ pair is replaced by J/Ψ . Therefore the structure of the vertices in these diagrams is known. In particular the amplitude of the process $J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^-$ has the form:

$$M(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^-) = f(K^{*+}K^-)E^\mu e_{\mu\nu\rho\sigma}e'^{\nu}k_1'^\rho k_2'^\sigma, \quad (81)$$

where $f(K^{*+}K^-)$ is some constant, E and e' are the polarization vectors of J/Ψ and K^{*+} , respectively. It is easy to show that the contribution of diagram a is equal to that of diagram d as a consequence of C invariance, and analogously the contribution of diagram b is equal to that of diagram c . The contribution of all the four diagrams depends on the quantity $f(K^{*+}K^-) - f(K^{*0}\bar{K}^0)$. If isotopic invariance is not violated, then $f(K^{*+}K^-) = f(K^{*0}\bar{K}^0)$ and the amplitude of the decay $J/\Psi \rightarrow \phi\pi^0$ is equal to zero. This is obvious from the fact that the isospin of J/Ψ is equal to zero while the isospin of the $\phi\pi^0$ system is equal to one (note that the decay $J/\Psi \rightarrow \omega\pi^0$ also is possible only if isotopic invariance is violated). We see that in the rescattering model the decay $J/\Psi \rightarrow \phi\pi^0$ can be a consequence of the isotopic symmetry breaking in the decays $J/\Psi \rightarrow K^*K$.

What is the measure of this breaking? If isotopic invariance is not broken, then the branching ratios $BR(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^-)$ and $BR(J/\Psi \rightarrow K^{*0}\bar{K}^0)$ should be the same while according to Ref. [60]

$$\begin{aligned} BR(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^- + c.c) &= (5.26 \pm 0.13 \pm 0.53) \cdot 10^{-3}, \\ BR(J/\Psi \rightarrow K^{*0}\bar{K}^0 + c.c) &= (4.33 \pm 0.12 \pm 0.45) \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \quad (82)$$

and according to Ref. [61]

$$\begin{aligned} BR(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^- + c.c) &= (4.5 \pm 0.7 \pm 0.8) \cdot 10^{-3}, \\ BR(J/\Psi \rightarrow K^{*0}\bar{K}^0 + c.c) &= (4.25 \pm 0.25 \pm 0.65) \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (83)$$

The values of the corresponding reduced branching ratios given in Ref. [60] are $(1.017 \pm 0.061) \cdot 10^{-3}$ and $(0.836 \pm 0.055) \cdot 10^{-3}$, respectively, while practically there is no difference between the c.m. frame momenta of the final particles in the $K^{*+}K^-$ and $K^{*0}\bar{K}^0$ systems (these momenta are equal to 1.3713 and 1.3734 GeV/c, respectively). Therefore although the data do not fully exclude a possibility that the isotopic symmetry breaking is negligible, they show that the

quantity

$$\epsilon = \frac{BR(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^-) - BR(K^{*0}\bar{K}^0)}{BR(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^-)} \quad (84)$$

is probably of order 10^{-1} while, since isotopic symmetry is broken by electromagnetic interactions, this quantity is expected to be of order 10^{-2} .

As noted in Sec.3, there is no unambiguous way of calculating the diagrams in Fig.2. If they are calculated in the same way as in Ref. [21], then the calculation analogous to that in Ref. [21] gives:

$$\begin{aligned} \frac{BR(J/\Psi \rightarrow \phi\pi^0)}{BR(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^-)} &= |\epsilon_1|^2 0.87 \frac{3kk'\Gamma_*\Gamma_\phi m_*^2 m_\phi^2}{128m_{J/\Psi}^2 (k_{\pi K} k_{K\bar{K}})^3} \times \\ &\times \left| \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)dx}{a-x} \right|^2 = 0.26 |\epsilon_1|^2, \end{aligned} \quad (85)$$

where $m_{J/\Psi}$ is the mass of the J/Ψ meson and $\epsilon_1 = [f(K^{*+}K^-) - f(K^{*0}\bar{K}^0)]/f(K^{*+}K^-)$.

Let us consider two extreme cases when ϵ_1 is real and ϵ_1 is imaginary. If ϵ_1 is real, then it is obvious that $|\epsilon_1| = |\epsilon|/2$ and therefore:

$$BR(J/\Psi \rightarrow \phi\pi^0) = 0.065 |\epsilon|^2 BR(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^-). \quad (86)$$

If ϵ_1 is imaginary, then it is obvious that $|\epsilon_1|^2 = |\epsilon|$ and therefore:

$$BR(J/\Psi \rightarrow \phi\pi^0) = 0.26 |\epsilon| BR(J/\Psi \rightarrow K^{*+}K^-). \quad (87)$$

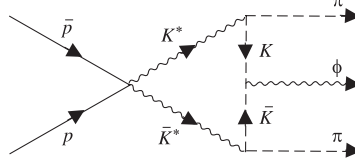
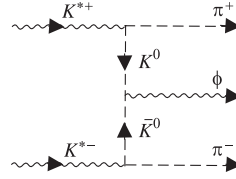
We see that if ϵ is of order 10^{-1} , then Eq. (86) is compatible with the upper limit of the quantity $BR(J/\Psi \rightarrow \phi\pi^0)$ which is equal to $6.8 \cdot 10^{-6}$ [60] while Eq. (87) is not compatible with this limit.

The general conclusion which follows from the above results is that the accuracy of the present data on the branching ratios of the decays of J/Ψ into $K^{*+}K^-$, $K^{*0}\bar{K}^0$ and $\phi\pi^0$ does not make it possible to confirm or disprove the rescattering model. This model will be disproved if the right-hand side of Eq. (86) is much bigger than the left-hand one.

11. PROBLEM WITH THE RESCATTERING CONTRIBUTION TO THE REACTION $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$

The OZI rule in the process $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$ is not strongly violated since, according to Refs. [13,62], the quantity

$$BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-)/BR(\bar{p}p \rightarrow \omega\pi^+\pi^-)$$


 Fig. 9. Diagrams describing the process $\bar{p}p \rightarrow K^* \bar{K}^* \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-$

 Fig. 10. Feynman diagram for the process $K^{*+} K^{*-} \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-$

is approximately equal to $7 \cdot 10^{-3}$ for the annihilation from the S state and $9 \cdot 10^{-3}$ for the annihilation from the P state.

Several mechanisms of the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-$ have been considered in Ref. [20] but the results are essentially model dependent. In view of the small ϕ/ω ratio in the process under consideration, the experimental value of $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-)$ may be simply a consequence of the small deviation of the $\phi-\omega$ mixing angle from the ideal one. Nevertheless, the process $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-$ is important for understanding the role of rescattering in the reaction (3). Indeed, a possible rescattering contribution to this process is given by the diagrams in Fig.9, where K^* can be either K^{*+} or K^{*0} and analogously for $\bar{K}^*$. These diagrams contain the same vertices as the diagrams in Fig.2. Therefore any choice of the vertices compatible with the data on the reaction (3) should be also compatible with the data on the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-$. In particular, the contribution of rescattering diagrams to $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-)$ should not exceed the experimental value.

In calculating the diagrams in Fig.9 we encounter the same difficulties as in calculating the diagrams in Fig.2. Since Model A has turned out to be successful for describing the reaction (3) for the annihilation from the S state, one might restrict himself to calculating only the on-shell contribution of the diagrams in Fig.9. Then K^* and $\bar{K}^*$ in the amplitude $K^* \bar{K}^* \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-$ (this amplitude is shown in Fig.10) are both on-shell. We will show in this section that such an amplitude is incompatible with unitarity and therefore such an analog of Model A cannot be used for the analysis of the process $\bar{p}p \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-$.

If $M_{K^{*+} K^{*-}}(s, 0)$ is the amplitude of the elastic $K^{*+} K^{*-}$ scattering at zero angle and $M_{K^{*+} K^{*-} \rightarrow n}$ is the amplitude of the $K^{*+} K^{*-}$ transition to some

channel n , then, according to the unitarity relation (see, e.g., Ref. [63]),

$$\text{Im } M_{K^{*+}K^{*-}}(s, 0) = \sum_n \int |M_{K^{*+}K^{*-} \rightarrow n}|^2 d\Gamma_n, \quad (88)$$

where $d\Gamma_n$ is the volume element of the channel n at given s and $\sum$ implies a sum over final polarizations. It is obvious that each term in the sum (88) should be finite.

We use $w_{K^{*+}K^{*-} \rightarrow \phi\pi^+\pi^-}$ to denote the contribution of the channel $\phi\pi^+\pi^-$ to the sum (88) averaged over the initial polarizations. Let K_1 and K_2 be the four-momenta of the initial K^{*+} and K^{*-} mesons, respectively, k_1 and k_2 be the four-momenta of the final π^+ and π^- mesons, respectively, and k_3 be the four-momentum of the final ϕ meson. Then as follows from Eqs. (14) and (16)

$$\begin{aligned} w_{K^{*+}K^{*-} \rightarrow \phi\pi^+\pi^-} &= \text{const} \int \frac{|f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}|^4}{|(K_1 - k_1)^2 - m_K^2 + i0|^2} \times \\ &\times \frac{|f_{K^+ K^- \rightarrow \phi}|^2}{|(K_2 - k_2)^2 - m_K^2 + i0|^2} \left[\frac{(K_1 k_1)^2}{m_*^2} - m_\pi^2 \right] \left[\frac{(K_2 k_2)^2}{m_*^2} - m_\pi^2 \right] \times \\ &\times \left[\frac{(k_3, K_1 - K_2 - k_1 + k_2)^2}{m_\phi^2} - (K_1 - K_2 - k_1 + k_2)^2 \right] d\Gamma, \end{aligned} \quad (89)$$

where the value of const is of no importance for us,

$$\begin{aligned} d\Gamma &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(K_1 + K_2 - k_1 - k_2 - k_3) \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{2(2\pi)^3 E_+} \times \\ &\times \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{2(2\pi)^3 E_-} \frac{d^3 \mathbf{k}_3}{2(2\pi)^3 E_\phi}, \end{aligned} \quad (90)$$

and $E_\pm$ are the energies of the corresponding π mesons.

For simplicity we now consider a model where the total energy of the $K^{*+}K^{*-}$ system is not $2m$, but $2m_*$, i.e., this system is at rest. Let us also neglect the quantity m_π . Then a standard calculation gives

$$\begin{aligned} w_{K^{*+}K^{*-} \rightarrow \phi\pi^+\pi^-} &= \text{const} \int \frac{|f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}|^4 |f_{K^+ K^- \rightarrow \phi}|^2}{|m_*^2 - m_K^2 - 2E_+ m_* + i0|^2} \times \\ &\times \frac{E_+^2 E_-^2 [4m_*(E_+ + E_-) - (4m_*^2 - m_\phi^2)]}{|m_*^2 - m_K^2 - 2E_- m_* + i0|^2} dE_+ dE_-. \end{aligned} \quad (91)$$

For us it is important that if $E_- < m_* - m_\phi/2 \approx 0.38$ GeV, then

$$E_+ \in \left[\frac{4m_*^2 - m_\phi^2}{4m_*} - E_-, m_* - \frac{m_\phi^2}{4(m_* - E_-)} \right]. \quad (92)$$

It is obvious from Eq. (91) that the integrand contains singularities at

$$E_{\pm} = \frac{m_*^2 - m_K^2}{2m_*} \approx 0.31 \text{ GeV}. \quad (93)$$

Therefore, as follows from Eq. (92), if E_- is given by Eq. (93), then $E_+ \in [0.29, 0.44] \text{ GeV}$. We conclude that the integral in Eq. (91) contains divergencies in the integration over both variables E_+ and E_- and therefore this integral is divergent.

The above model example is useful since all the calculations can be performed explicitly. However it is also clear that the integral in Eq. (89) is also divergent when the total energy of the $K^{*+}K^{*-}$ system is equal to $2m$ and the mass of the π meson is not neglected. The matter is that $d\Gamma$ is again proportional to dE_+dE_- and there exists the integration region where the denominators of both propagators are equal to zero. The last property is a consequence of the fact that the kinematical conditions allow the reaction

$$K^{*+}K^{*-} \rightarrow K^0\bar{K}^0\pi^+\pi^- \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$$

with both intermediate K mesons on-mass shell. It is also important to note that the choice of the form factors in the vertices $K^* \rightarrow K\pi$ and $K\bar{K} \rightarrow \phi$ does not play a role since the quantities $f_{K^{*+} \rightarrow \pi^0 K^+}$ and $f_{K^+ K^- \rightarrow \phi}$ are constants when all the particles in question are on-mass shell. Therefore the above analog of Model A in the reaction $\bar{p}p \rightarrow K^* \bar{K}^* \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$ is incompatible with the unitarity relation.

12. CONCLUSION

Let us briefly summarize the results described in the present paper.

Following Ref. [19] we have shown in Sec.2 that the OZI rule violation in the reaction (2) can be probably explained in the framework of the vector dominance model.

In Secs.3 and 4 we have discussed two models — Model A and Model B — describing different on-shell contributions to the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ (see Figs.4 and 6). We argue that from the theoretical point of view Model B is substantiated in greater extent than Model A. Nevertheless, as shown in Secs.5 and 6, the values of $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)$ given by Model B are much less than experimental data, while Model A is in qualitative agreement with the data. At the same time, as shown in Sec.7, Model A is not able to explain the fact that the process $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ is not seen when the $\bar{p}p$ system annihilates from the P state of protonium atom.

The recent data of the OBELIX Collaboration on the reaction $\bar{p}p \rightarrow f'_2\pi^0$ show that the OZI rule in this reaction is not satisfied and, as shown in Sec.8, this fact cannot be explained in the framework of the rescattering model.

Following Ref. [54] we argue in Sec.9 that the large OZI rule violation in the reaction $\bar{p}d \rightarrow \phi\pi^-p$ at the final proton momenta in the range 0.4—0.8 GeV/c is a consequence of the OZI rule violation in the reaction $\bar{p}n \rightarrow \phi\pi^-$.

Following Ref. [59] we argue in Sec.10 that some decays of the J/Ψ meson can shed light on the OZI rule violation in the $\bar{p}p$ annihilation at rest but the accuracy of the existing data is clearly insufficient for drawing any definite conclusions.

Finally in Sec.11 it is shown that an analog of Model A in the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$ is incompatible with the unitarity relation.

In spite of the partial success of Model A it is important to note that some assumptions lying in the basis of this model seem questionable. First, it is necessary to check numerically that if the widths of the K^* and ρ mesons are neglected, then the results will not essentially change (especially this concerns the question of neglecting Γ_ρ). Second, as argued in Sec.3, Model A does not fully correspond to our assumption that the ϕ meson is created from the K and $\bar{K}$ mesons. Therefore, as pointed out in Refs. [19,20], we have to take into account the off-shell form factor for the K meson, but the data agree with Model A if this form factor is not very important. The rescattering mechanism seems also questionable from the following simple estimate. Since the K^* meson lives approximately $1/\Gamma_*$ in the frame of reference where it is at rest, it is easy to see then, when the K^* meson decays, the distance between the K^* and K mesons in their c.m. frame is $2mk'/\Gamma_*m_*E_K(k') \approx 6Fm$. It seems doubtful that the K^* and K mesons can effectively interact being separated by such a distance. On the other hand, the analogous distance between the ρ^+ and ρ^- mesons is of about $2Fm$, but the question arises whether it is possible to use the concept of ρ meson in such a process.

To shed light on the problem of the OZI-rule violation in the reaction $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ new experimental data and theoretical results are needed. The most important experimental quantities are $BR(\bar{p}p \rightarrow K^{*+}K^-)$ and $BR(\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0)$ when the $\bar{p}p$ system annihilates from the $I = 1$ P state of protonium atom, and $BR(\bar{p}p \rightarrow f'_2\pi^0)$ for the annihilation from the S and P states.

In view of the recent results of the Crystal Barrel Collaboration on the $\phi\pi^0$ and $\omega\pi^0$ production in the $\bar{p}p$ annihilation in flight [64], it is also interesting to measure the K^*K production and to compare the data with the prediction of the rescattering model [22].

From the theoretical point of view it is important to carry out calculations not only in the on-shell approximation, but taking also into account the off-shell contribution. The first results in this direction have been obtained in Refs. [59,65].

Acknowledgments

The authors are grateful to M.G.Sapozhnikov for numerous helpful discussions. We have also benefited from the discussions with M.P.Locher and Y.Lu.

The problem with the unitarity relation in the reaction $\bar{p}p \rightarrow K^* \bar{K}^* \rightarrow \phi \pi^+ \pi^-$ has been pointed out by V.E.Markushin.

REFERENCES

1. **Okubo S.** — Phys. Lett., 1963, v.5, p.165; **Zweig G.** — Preprints CERN, 1964, No.401, 412; **Iizuka J., Okada K., Shito D.** — Progr. Theor. Phys., 1966, v.35, p.1061; **Aleksander G., Lipkin H.J., Scheck F.** — Phys. Rev. Lett., 1966, v.17, p.412.
2. **Lipkin H.J.** — In: "Deeper Pathways in High Energy Physics", Proc. Orbis Scientiae 14th Annual Meeting (Coral Gables, Florida 1977), Eds. Perimutter A. and Scott L.F., New York, Plenum, 1977, p.567.
3. **Applequist T., Politzer H.D.** — Phys. Rev. Lett., 1975, v.34, p.43; **de Rujula A., Glashow S.L.** — Phys. Rev. Lett., 1975, v.34, p.46; **Barbieri R. et al.** — Nucl. Phys., 1979, v.B154, p.535; **Mackenzie P.B., Lepage G.P.** — Phys. Rev. Lett., 1981, v.47, p.1244.
4. **Lipkin H.J.** — Phys. Lett., 1986, v.B179, p.278.
5. **Lipkin H.J.** — Nucl. Phys., 1987, v.B291, p.720.
6. **Geiger P., Isgur N.** — Phys. Rev., 1990, v.D41, p.1595.
7. **Geiger P., Isgur N.** — Phys. Rev., 1991, v.D44, p.799; 1993, v.D47, p.5050; Report CEBAF-TH 96-08 (1996); **Geiger P.** — Phys. Rev., 1994, v.D49, p.6003.
8. **Genz H., Hohler G.** — Phys. Lett., 1976, v.B61, p.389.
9. **Ellis J., Gabathuler E., Karliner M.** — Phys. Lett., 1988, v.B217, p.173.
10. **Lipkin H.J.** — Phys. Lett., 1989, v.B225, p.287.
11. **Dover C.B., Fishbane P.M.** — Phys. Rev. Lett., 1990, v.64, p.3115.
12. **Ellis J., Karliner M.** — Report CERN-TH-6898/93, 1993.
13. **Reifenrother I. et al.** — Phys. Lett., 1991, v.B267, p.299.
14. **Faessler M.A.** — Data by the Chrystal Barrel Collaboration presented to the NAN-93 Conference, Yad. Fiz., 1994, v.57, p.1764.
15. **Sapozhnikov M.G.** — Data by the OBELIX group presented to the NAN-93 Conference, Yad. Fiz., 1994, v.57, p.1787; **Ableev V.G. et al.(OBELIX Collaboration)** — Phys. Lett., 1994, v.B334, p.237.
16. **Ableev V.G. et al. (OBELIX Collaboration)** — Nucl. Phys., 1995, v.A585, p.577.
17. **Review of Particle Properties,** — Phys. Rev., 1994, v.D50, 3-I, p.1320.
18. **Dover C.B., Gutsche T., Maruyama M., Faessler Amand** — Progr. Part. Nucl. Phys., 1992, v.29, p.87.
19. **Lu Y., Zou B.S., Locher M.P.** — Z. Phys., 1994, v.A347, p.281.
20. **Locher M.P., Lu Y.** — Z. Phys., 1995, v.A351, p.83; **Locher M.P.** — Proc. III Conf. on Low Energy Antiproton Physics, Bled, 1994, Eds. Kernel G., Krizan P., Mikuz M. World Scientific, 1995, p.38.
21. **Buzatu D., Lev F.M.** — Phys. Lett., 1994, v.B329, p.143.
22. **Buzatu D., Lev F.M.** — Yad. Fiz., 1996, v.59, p.300.
23. **Markushin V.E.** — Report PSI-PR-96-35, 1996.

24. **Geshkenbein B.V., Ioffe B.L.** — Nucl. Phys., 1980, v.B166, p.340; **Shuryak E.V.** — Nucl. Phys., 1983, v.B214, p.237; **Dyakonov D.I., Petrov V.Yu.** — Nucl. Phys., 1984, v.B245, p.259; Zh. Exp. Teor. Fiz., 1985, v.89, p.751; **Kochelev N.I.** — Report IFVP-TH-59-95, Pisa, Italy.
25. **Ellis J., Karliner M., Kharzeev D.E., Sapozhnikov M.G.** — Phys. Lett., 1995, v.B353, p.319.
26. **Sapozhnikov M.G.** — Proc. III Conf. on Low Energy Antiproton Physics, Bled, 1994, Eds. Kernel G., Krizan P., Mikuz M. World Scientific, 1995, p.355; Production of ϕ Mesons in $\bar{N}N$ Annihilation and Polarized Strangeness in the Nucleon. Lecture at the XXIX St.Petersburg Winter School on Nuclear Physics and Elementary Particles, Zelenogorsk, 1995; JINR Report E15-95-544, Dubna, 1995.
27. **Silagadze Z.K.** — hep-ph, 9607468, 1996.
28. **Karliner M.** — Polarized Structure Functions, Strangeness in the Nucleon and Constituent Quark-sas Solitons. Invited lectures at the 7th Summer School & Symposium "Low Energy Effective Theories and QCD". June 27 — July 1, 1994, Seoul, Korea.
29. **Bizzarri R.** — Nuovo Cimento, 1974, v.A22, p.225.
30. **Sakurai J.J.** — Currents and Mesons, Chicago, University of Chicago Press, 1969.
31. **Lipkin H.J.** — Nucl. Phys., 1969, v.B9, p.317.
32. **Schmid C., Webber D.M., Sorensen C.** — Nucl. Phys., 1976, v.B11, p.317.
33. **Berger E.L., Sorensen C.** — Phys. Lett., 1976, v.B62, p.303.
34. **Mandelstam S.** — Phys. Rev., 1958, v.112, p.1344.
35. **Cutkosky R.E.** — Phys. Rev., 1958, v.112, p.1027.
36. **Conforto B. et al.** — Nucl.Phys., 1967, v.B33, p.469.
37. **Peierls R.E.** — Proc. Roy. Soc., 1959, v.A253, p.16.
38. **Cieply A., Locher M.P., Zou B.S.** — Z. Phys., 1993, v.A345, p.41.
39. **Sapozhnikov M.G.** — Yad. Fiz., 1996, v.59, p.1493.
40. **Zou Bing-song.** — Yad. Fiz., 1996, v.59, p.1485.
41. **Locher M.P.** — Private Communication of October 30, 1994.
42. **Buzatu D., Lev F.M.** — Phys. Rev., 1995, v.C51, p.R2893.
43. **Zou B.S.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.1452.
44. **Carbonell J., Ihle G., Richard J.M.** — Z. Phys., 1989, v.334, p.329.
45. **Batty C.J.** — Nucl. Phys., 1996, v.A601, p.425.
46. **Amsler C., Myhrer F.** — Annu. Rev. Nucl. Part. Sci., 1991, v.41, p.219.
47. **Zoccoli A.** — Yad. Fiz., 1996, v.59, p.1448.
48. **Buzatu D., Lev F.M.** — Phys. Rev., 1996, v.C53, p.1453.
49. **Bertin A. et al. (OBELIX Collaboration).** — Contribution to Hadron'95 Conference. Manchester, 1995.
50. **Prakhov S. et al. (OBELIX Collaboration).** — In preparation.
51. **Buzatu D., Lev F.M.** — Phys. Lett., 1995, v.B359, p.393.
52. **May B. et.al.** — Z. Phys., 1990, v.C46, p.191; *ibid* v.C46, p.203.
53. **Ландсберг Л.Г.** — УФН, 1992, т.162. с.3.
54. **Buzatu D., Lev F.M.** — Phys. At. Nucl., 1995, v.58, p.480.

55. **Reid R.V.** — Ann. Phys., (N.Y.), 1968. v.50. p.411.
56. **Кондратьев Л.А., Лев Ф.М.** — ЯФ, 1976, т.23. с.1056.
57. **Lacomb M. et al.** — Phys. Rev., 1980, v.C21, p.861.
58. **Locher M.P., Zou B.S.** — Z. Phys., 1991, v.A340. p.187.
59. **Anisovich A.V., Klempt E.** — Z. Phys., 1996, v.A354, p.197.
60. **Coffman D. et al.** — Phys. Rev., 1988, v.D38, p.2695.
61. **Jousset J. et al.** — Phys. Rev., 1990, v.D41, p.1389.
62. **Wiedenauer P.** — Ph. D. Thesis. Mainz, 1990.
63. **Novozhylov Yu.V.** — Introduction to the Theory of Elementary Particles. Moscow: Nauka, 1972.
64. **Wiedner U.** — In: Proceedings of LEAP'96 Conference. Dinkelsbühl (Germany), 1996.
65. **Gortchakov O., Locher M.P., Markushin V.E., von Rotz S.** — Z. Phys., 1996, v.A353, p.447.

РЕФЕРАТЫ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ВЫПУСКЕ

УДК 539.1.01

Релятивистская теория гравитации и принцип Маха. *Логунов А.А.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1998, том 29, вып.1, с.5.

В обзоре рассматриваются основные принципы построения релятивистской теории гравитации (РТГ). Настоящее изложение основ РТГ отражает происшедшее за последние десять лет дальнейшее развитие этой теории. Так, например, учитывается необходимость введения массы гравитона и уточняются формулировки основных положений теории, включая и философскую сторону обоснования выбора для описания физических явлений определенной геометрии пространства-времени как продиктованного универсальными свойствами движения материи и фундаментальными законами сохранения. Показано, что данная теория приводит к единственному образом определенным лагранжевой плотности и уравнениям гравитационного поля. Обсуждаются некоторые физические следствия данной теории.

Библиогр.: 18.

УДК 539.126

Бозонизованные лагранжианы в высших порядках кирального разложения.

Бельков А.А., Ланев А.В. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1998, том 29, вып.1, с.82.

В обзоре детально освещено современное состояние проблемы бозонизации кварков и получения эффективных мезонных лагранжианов в высших порядках кирального разложения. Рассмотрена бозонизация четырехкварковой модели Намбу — Иона-Лазинио (НИЛ), которая возникает как локальное приближение в низкоэнергетическом пределе КХД. Подробно обсуждается метод получения мезонных лагранжианов, основанный на киральном разложении ядра теплопроводности кваркового детерминанта бозонизованной модели НИЛ. Приведены и систематизированы результаты вычислений коэффициентов теплопроводности до седьмого порядка включительно и эффективных киральных лагранжианов в p^4 - и p^6 -порядках. Обсуждается модификация структурных коэффициентов эффективных киральных лагранжианов при редукции резонансов. Показана важность учета резонансных обменов для улучшения описания низкоэнергетических мезонных процессов. Обсуждаются феноменологические аспекты эффективных киральных лагранжианов в высших порядках кирального разложения. Проведено сравнение с аналогичными вычислениями других групп. Рассмотрен также полуфеноменологический метод для оценки нелокальных поправок к структурным коэффициентам бозонизованных киральных лагранжианов. Малость нелокальных поправок является дополнительным аргументом в пользу модели НИЛ как реалистического приближения для взаимодействия кварков при низких энергиях. Актуальность проблем, обсуждаемых в обзоре, определяется резко возросшей за последние два года активностью в области вычисления p^6 -поправок киральной теории возмущений для различных мезонных процессов.

Табл.1. Ил.3. Библиогр.: 89.

УДК 539.12.01

Перекрывающиеся резонансы в многоканальных реакциях. *Белозерова Т.С., Хеннер В.К.* Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1998, том 29, вып.1, с.148.

Дан обзор существующих методов построения явно резонансной унитарной S-матрицы, с помощью которых возможно описывать группы резонансов r_i с одинако-

выми квантовыми числами при их перекрывании, когда $|E_{r_i} - E_{r_j}| \sim \Gamma_{r_i} + \Gamma_{r_j}$. Детально исследована связь между этими методами. Показано, что параметры резонансов, получаемые при описании физической ситуации с помощью разных подходов, могут существенно отличаться друг от друга, а величины, называемые одинаково в этих методах, являются на самом деле разными в случае нескольких состояний. Описание возбужденных состояний с помощью формул Брейта — Вигнера наиболее часто используется во многих проблемах физики резонансов и ядерной физики, и центральное место в обзоре занимает обсуждение задачи построения унитарной T -инвариантной многоканальной многорезонансной S -матрицы брейт-вигнеровского типа. Метод может быть полезен для многих задач физики частиц и ядерной физики. В качестве актуального приложения описываемых подходов изучен спектр возбуждений векторных ρ - и ω -мезонов. Обсуждается возможность их интерпретации как кварк-антикварковых возбужденных состояний. Проведен анализ при сохранении унитарности S -матрицы процессов e^+e^- -аннигиляции в изовекторные состояния 2π , $2\pi^+2\pi^-$, $\pi^+\pi^-2\pi^0$, $\omega\pi^0$, $\eta\pi^+\pi^-$ и в изоскалярные состояния $\rho\pi$ и $\omega\pi\pi$.

Табл.5. Ил.7. Библиогр.: 39.

УДК 539.171.12

Проблема нарушения правила Окубо — Цвейга — Иизуки в нуклон-антинуклонной аннигиляции в покое. Бузату Д., Лев Ф.М. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1998, том 29, вып.1, с.212.

Проводится детальное обсуждение проблемы, может ли нарушение правила ОЦИ в нуклон-антинуклонной аннигиляции в покое быть объяснено в рамках обычных механизмов. В то время как модель векторной доминантности и модель перерасеяния качественно объясняют нарушение правила ОЦИ в реакциях $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$ и $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ для аннигиляции из S -состояния атома протония, модель перерасеяния не может объяснить то, что аннигиляция в $\phi\pi^0$ из P -состояния не наблюдалась и правило ОЦИ в реакции $\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0$ не выполняется. Обсуждается также, какая информация о нарушении правила ОЦИ может быть извлечена из реакции $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$ и распадов J/Ψ -мезона.

Ил.10. Библиогр.: 65.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Логунов А.А.</i> Релятивистская теория гравитации и принцип Маха	5
<i>Бельков А.А., Ланев А.В.</i> Бозонизованные лагранжианы в высших порядках кирального разложения	82
<i>Белозерова Т.С., Хеннер В.К.</i> Перекрывающиеся резонансы в многоканальных реакциях	148
<i>Бузату Д., Лев Ф.М.</i> Проблема нарушения правила Окубо — Цвейга — Иизуки в нуклон-антинуклонной аннигиляции в покое	212

CONTENTS

<i>Logunov A.A.</i> Relativistic Theory of Gravity and the Mach Principle	5
<i>Bel'kov A.A., Lanyov A.V.</i> Higher-Order Bosonized Chiral Lagrangians	82
<i>Belozerova T.S., Henner V.K.</i> Overlapping Resonances in the Multichannel Reactions	148
<i>Buzatu D., Lev F.M.</i> Problem with the Okubo-Zweig-Iizuka Rule Violation in Nucleon-Antinucleon Annihilation at Rest	212

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» (ЭЧАЯ) печатаются обзоры по актуальным проблемам теоретической и экспериментальной физики элементарных частиц и атомного ядра, проблемам создания новых ускорительных и экспериментальных установок, автоматизации обработки экспериментальных данных. Статьи печатаются на русском и английском языках. Редакция просит авторов при направлении статьи в печать руководствоваться изложенными ниже правилами.

1. Текст статьи должен быть напечатан на машинке через два интервала на одной стороне листа (обязательно представляется первый машинописный экземпляр). Поля с левой стороны должны быть не уже 3—4 см, рукописные вставки не допускаются. Экземпляр статьи должен включать аннотации и название на русском и английском языках, реферат на русском языке, УДК, сведения об авторах: фамилия и инициалы (на русском и английском языках), название института, адрес и телефон. Все страницы текста должны быть пронумерованы. Статья должна быть подписана всеми авторами. Текст статьи может быть напечатан на принтере с соблюдением тех же правил.

2. Формулы и обозначения должны быть вписаны крупно, четко, от руки темными чернилами (либо напечатаны на принтере и обязательно размечены). Желательно нумеровать только те формулы, на которые имеются ссылки в тексте. Номер формулы указывается справа в круглых скобках. Особое внимание следует обратить на аккуратное изображение индексов и показателей степеней: нижние индексы отмечаются знаком понижения $\subscript$, верхние — знаком повышения $\superscript$; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а единицу — от запятой. Следует, по возможности, избегать громоздких обозначений и упрощать набор формул (например, применяя $\exp$, дробь через косую черту).

Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между прописными и строчными буквами, одинаковыми по начертанию (V и v, U и u, W и w, O и o, K и k, S и s, C и c, P и p, Z и z), прописные подчеркивают двумя чертами снизу, строчные — двумя чертами сверху (S и s, C и c). Необходимо делать четкое различие между буквами e, l, O (большой) и o (малой) и 0 (нулем), для чего буквы O и o отмечают двумя черточками, а ноль оставляют без подчеркивания. Греческие буквы подчеркивают красным карандашом, векторы — синим, либо знаком $\vec{}$ снизу чернилами. Не рекомендуется использовать для обозначения величин буквы готического, рукописного и других малоупотребимых в журнальных статьях шрифтов, однако если такую букву нельзя заменить буквой латинского или греческого алфавита, то ее размечают простым карандашом (обводят кружком). В случае, если написание может вызвать сомнение, необходимо на полях дать пояснение, например: ζ — «дзета», ξ — «кси», k — лат., k — русск.

3. Рисунки представляют на отдельных листах белой бумаги или кальки с указанием на обороте номера рисунка и названия статьи. Тоновые фотографии должны быть представлены в двух экземплярах, на обороте карандашом указать: «верх», «низ». Графики должны быть тщательно выполнены тушью или черными чернилами; не рекомендуется загромождать рисунок ненужными деталями: большинство надписей выносится в подпись, а на рисунке заменяется цифрами или буквами. Желательно, чтобы рисунки были готовы к прямому репродуцированию. Подписи к рисункам представляются на отдельных листах.

4. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных листах, каждая таблица должна иметь заголовок. Следует указывать единицы измерения величин в таблицах.

5. Список литературы помещается в конце статьи. Ссылки в тексте даются с указанием номера ссылки на строке в квадратных скобках. В литературной ссылке должны быть указаны: для книг — фамилии авторов, инициалы, название книги, город, издательство (или организация),

год издания, том (часть, глава), цитируемая страница, если нужно; для статей — фамилии авторов, инициалы, название журнала, серия, год издания, том (номер, выпуск, если это необходимо), первая страница статьи. Если авторов более пяти, то указать только первые три фамилии.

Например:

1. **Лезнов А.Н., Савельев М.В.** — Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985, с.208.
2. **Годен М.** — Волновая функция Бете: Пер. с франц. М.: Мир, 1987.
3. **Turbine A.V.** — Comm.Math.Phys., 1988, vol.118, p.467.
4. **Ушверидзе А.Г.** — ЭЧАЯ, 1989, т.20, вып.5, с.1185.
5. **Endo I., Kasai S., Harada M. et al.** — Hiroshima Univ. Preprint, HUPD-8607, 1986.

6. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте и рисунках не допускаются. Корректурa с подписью автора и датой ее подписания должна быть выслана в редакцию в минимальный срок.

Редакторы **Е.К.Аксенова, Э.В.Ивашкевич.**

Художественный редактор **А.Л.Вульфсон.**

Корректор **Т.Е.Попеко.**

Сдано в набор 21.10.97. Подписано в печать 26.12.97. Формат 60×90/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.печ.л. 16,0. Уч.-изд.л. 19,38.

Тираж 400. Заказ 50382. Цена 8 р.

141980 Дубна Московской области
ОИЯИ, Издательский отдел, тел. (09621) 65-165.

ISSN 0367—2026. Физика элементарных частиц и атомного ядра
1998. Том 29. Вып.1. 1—256.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ПРИНЦИП МАХА

А.А.Логунов

Институт физики высоких энергий, Протвино

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ	12
ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА МАТЕРИИ КАК ИСТОЧНИК ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ	17
КАЛИБРОВОЧНАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ	24
ПЛОТНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ	28
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ВЕЩЕСТВА	32
ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ В РТГ	38
ПРИНЦИП МАХА	43
ПОСТНЬЮТОНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ	50
НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ РТГ	65
Приложение А	71
Приложение Б	73
Приложение В	76
Приложение Г	79
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	81

БОЗОНИЗОВАННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ В ВЫСШИХ ПОРЯДКАХ КИРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

А.А.Бельков, А.В.Ланев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	82
КХД-МОТИВАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ	85
БОЗОНИЗАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ	90
ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАРКОВОГО ДЕТЕРМИНАНТА МЕТОДОМ ЯДРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	94
ПОЛУЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	98
НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕЗОННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ	104
РЕДУКЦИЯ ВЕКТОРНЫХ, АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНЫХ И СКАЛЯРНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ	117
ФЕНОМЕНОЛОГИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕЗОННЫХ ПРОЦЕССОВ В p^4 - И p^6 -ПОРЯДКАХ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ	123
МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ НИЛ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ЭФФЕКТАМИ	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	138
ПРИЛОЖЕНИЕ. p^6 -ВКЛАДЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	141
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	144

ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ

Т.С.Белозерова

Пермский государственный университет, Пермь

В.К.Хеннер

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Пермский государственный университет, Пермь

ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ	148
ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОПИСЫВАТЬ ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ	153
Перекрывающиеся резонансы в БВ-подходе в случае одного канала	153
К-матричный метод в случае перекрывающихся резонансов	154
Представление амплитуд резонансных реакций с помощью неэрмитова гамильтониана H	160
Представление амплитуд резонансных реакций через скалярные произведения векторов состояний	167
Прямой метод нахождения БВ-многоканальных амплитуд в случае двух перекрывающихся состояний	171
ПОСТРОЕНИЕ УНИТАРНОЙ S -МАТРИЦЫ БРЕЙТ-ВИГНЕРОВСКОГО ВИДА ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ	178
Метод и общие уравнения	178
Учет фона	188
Брэнчинги распадов в случае перекрывающихся резонансов	189
Построение векторов парциальных ширин	190
ПРОБЛЕМЫ СПЕКТРА ВОЗБУЖДЕНИЙ ЛЕГКИХ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ И УНИТАРНОСТЬ S -МАТРИЦЫ ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ НЕУПРУГИХ РЕЗОНАНСОВ	196

Современная ситуация с ρ - и ω -мезонным и возбужденными состояниями	196
Анализ на основе формул БВ-типа	200
K -матричный анализ	203
Анализ с помощью неэрмитова гамильтониана	204
Обсуждение и интерпретация результатов анализов ρ' - и ω' -состояний	206
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	208
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	210

PROBLEM WITH THE OKUBO–ZWEIG–IIZUKA RULE
VIOLATION IN NUCLEON-ANTINUCLEON
ANNIHILATION AT REST

D. Buzatu

University "Politehnica", Bucharest, Romania

F.M. Lev

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna

INTRODUCTION	212
REACTION $\bar{p}p \rightarrow \phi\gamma$ IN THE VECTOR DOMINANCE MODEL	215
THE PROBLEM OF CALCULATING THE PROCESS $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ WITH K^*K INTERMEDIATE STATES	216
THE PROBLEM OF CALCULATING THE PROCESS $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ WITH $\rho^+\rho^-$ INTERMEDIATE STATES	221
THE CONTRIBUTION OF K^*K AND $\rho^+\rho^-$ INTERMEDIATE STATES IN MODEL A	223
THE CONTRIBUTION OF $K\bar{K}\pi^0$ AND $\rho\pi\pi^0$ INTERMEDIATE STATES IN MODEL B	227
THE RELATION BETWEEN THE BRANCHING RATIOS OF THE REACTIONS $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^0$ AND $\bar{p}p \rightarrow K^*\bar{K}$ IN THE ANNIHILA- TION FROM THE P STATE OF THE HYDROGEN LIKE $\bar{p}p$ ATOM	229
THE PROBLEM OF THE OZI RULE VIOLATION IN THE REACTION $\bar{p}p \rightarrow f_2'\pi^0$	234
OZI RULE VIOLATION IN THE $\bar{p}d$ ANNIHILATION	237
J/Ψ DECAYS AS A TEST OF THE OZI RULE VIOLATION IN NUCLEON-ANTINUCLEON ANNIHILATION	242
PROBLEM WITH THE RESCATTERING CONTRIBUTION TO THE REACTION $\bar{p}p \rightarrow \phi\pi^+\pi^-$	244
CONCLUSION	247
REFERENCES	249